

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. E. Volovik, Exotic Lifshitz transitions in topological materials, *UFN*, 2018, Volume 188, Number 1, 95–105

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038218>

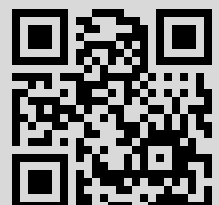
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 188.184.3.52

April 17, 2018, 23:11:15



## Экзотические переходы Лифшица в топологической материи

Г.Е. Воловик

*В топологических переходах Лифшица участвуют многие типы топологических структур в импульсном и частотно-импульсном пространствах: поверхности Ферми, линии Дирака, точки Дирака и Вейля и т.д. У каждой из таких структур имеется собственный топологический инвариант ( $N_1, N_2, N_3, \tilde{N}_3$  и т.д.), который поддерживает устойчивость этой топологической структуры. Топология формы ферми-поверхностей и линий Дирака, а также взаимосвязи объектов разных размерностей приводят к появлению разных классов переходов Лифшица. Следствия переходов Лифшица являются важными в различных областях физики. Сингулярности, возникающие при переходе, могут повышать температуру перехода в состоянии сверхпроводимости; переходы Лифшица могут быть причиной малости масс элементарных частиц в нашей Вселенной; горизонт чёрной дыры играет роль поверхности перехода Лифшица между вакуумами с точками Вейля типа I, типа II и т.д.*

**Ключевые слова:** топологические переходы Лифшица, поверхность Ферми, точка Дирака, точка Вейля, горизонт чёрной дыры

PACS numbers: 04.70. – s, 71.30. + h, 73.22. – f

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038218>

## Содержание

1. Введение. Поверхность Ферми, линия Дирака, точка Вейля (95).
  2. Поверхность Ферми и переходы Лифшица (96).
    - 2.1. Поверхность Ферми как топологический объект. 2.2. Поверхность Ферми и переходы Лифшица. 2.3. От полюса функции Грина к нулю. 2.4. От поверхности Ферми к плоской зоне.
  3. Переходы Лифшица, управляемые топологией точки Вейля (99).
    - 3.1. Топология фермионов Вейля. 3.2. Переходы Лифшица с расщеплением точек Вейля. 3.3. Переход Лифшица к конусу Вейля типа II. 3.4. Переход Лифшица на горизонте чёрной дыры.
  4. Переходы Лифшица с несколькими топологическими зарядами (101).
  5. Переход Лифшица, управляемый сохранением топологического заряда (102).
  6. Переходы Лифшица между щелевыми состояниями через бесщелевое состояние (102).
  7. Заключение (103).
- Список литературы (104).

## 1. Введение. Поверхность Ферми, линия Дирака, точка Вейля

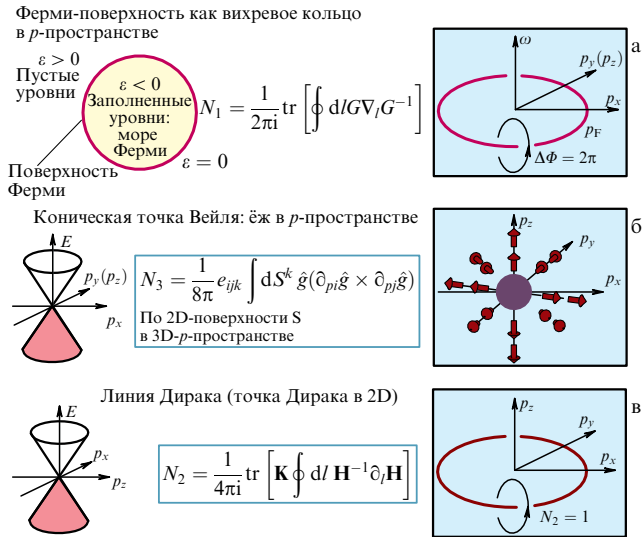
Основным понятием при рассмотрении переходов Лифшица является топология. После опубликования пионер-

ской статьи Лифшица [1] переходы Лифшица рассматривались как изменение топологии ферми-поверхности без нарушения симметрии. В дальнейшем стало ясно, что топология формы не является единственной топологической характеристикой ферми-поверхности. Поверхность Ферми сама по себе представляет сингулярность в функции Грина  $G$ , которая является топологически защищённой, — это вихревая линия в четырёхмерном частотно-импульсном пространстве, показанная на рис. 1а. Устойчивость поверхности Ферми по отношению ко взаимодействию между фермионами является основой разработанной Ландау теории ферми-жидкости. Более того, поверхность Ферми оказалась лишь одной из набора топологически устойчивых сингулярностей [2, 3], в число которых входят, в частности, точка Вейля — ёж в импульсном пространстве (рис. 1б) и линия Дирака — вихревая линия в трёхмерном импульсном пространстве (рис. 1в). Устойчивость таких объектов обеспечивается соответствующими топологическими инвариантами в импульсном пространстве или в расширенном частотно-импульсном пространстве.

Комбинирование топологии формы поверхностей Ферми, линий Ферми и точек Ферми с топологией, которая обеспечивает устойчивость таких объектов, а также с топологией взаимосвязей объектов разных размерностей, приводит к появлению большого числа различных типов переходов Лифшица. Примеры переходов Лифшица, возникающих при взаимодействии различных топологических объектов в импульсном пространстве, обсуждаются в работах [4–6] и в разделах 3.3 и 4. В связи со сказанным выше переходы Лифшица широко применяются в физике высоких энергий, космологии, физике чёрных дыр, а также при поиске сверхпроводимости при комнатных температурах.

Г.Е. Воловик. Low Temperature Laboratory, Aalto University, P.O. Box 15100, FI-00076 Aalto, Finland;  
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация;  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: volovik@ltd.tkk.fi, volovik@itp.ac.ru

Статья поступила 29 августа 2017 г.



**Рис. 1.** Топологически устойчивые нули в энергетическом спектре электронов в металлах или фермионов в общем случае. (а) Поверхность Ферми представляет сингулярность в функции Грина, являясь вихрем в  $(3+1)$ -пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$  (см. раздел 2.1 и рис. 2) в  $(2+1)$ -пространстве  $(p_x, p_y, \omega)$  — это вихревая линия. Устойчивость вихря поддерживается набегом фазы — целочисленным инвариантом  $N_1$ , который выражается через функцию Грина. Переходы Лифшица с участием поверхностей Ферми обсуждаются в разделах 2 и 4. (б) Коническая точка в фермионном спектре вейлевских материалов (полуметаллы Вейля, киральная сверхтекучая жидкость  ${}^3\text{He-A}$  и вакуум Стандартной модели в её бесщелевой фазе (см. раздел 3 и рис. 9). Направления спина (или самопроизвольно возникающего спина, изоспина, псевдоспина и т.п.) образуют топологический объект в импульсном пространстве (ёж или монополь в фазе Берри [7]), который описывается целочисленным топологическим инвариантом  $N_3$ . Переходы Лифшица с участием точек Вейля обсуждаются в разделах 3, 4 и 6. (в) Линии Дирака — линии нулей в энергетическом спектре, описываемые топологическим инвариантом  $N_2$ . Окружность представляет собой линию Дирака в спектре квазичастиц в полярной фазе сверхтекучей жидкости  ${}^3\text{He}$ , которая недавно была открыта в азрогеле [8]. Этот же инвариант  $N_2$  стабилизирует точечные нули в спектре двумерных (2D) материалов, таких как графен (см. раздел 5).

В частности, переход Лифшица может дать решение проблемы иерархии в физике частиц: почему массы элементарных частиц в нашей Вселенной крайне малы по сравнению с характерным энергетическим масштабом Планка? В самом деле, при сравнении массы  $\sim 10^2$  ГэВ самой тяжёлой частицы — верхнего кварка — с планковской энергией  $\sim 10^{19}$  ГэВ можно увидеть, что вакуум во Вселенной является практически бесщелевым. Имеется несколько топологических сценариев, которые могут привести к бесщелевому (или к почти бесщелевому) вакууму.

В одном из сценариев квантовый вакуум принадлежит классу бесщелевой (безмассовой) материи Вейля (рис. 1б), в которой нули в спектре элементарных частиц — точки Вейля — являются топологически защищёнными [2, 3, 9] (см. раздел 3.1 и рис. 9). Согласно этому сценарию физические законы не являются фундаментальными, а возникают в низкоэнергетическом пределе квантового вакуума, т.е. в окрестности точек Вейля, где спектр становится линейным и все симметрии Стандартной модели, в том числе лоренц-инвариантность и общая ковариантность, возникают из ничего. В этом сценарии переход Лифшица между ва-

куумами Вейля типа I и типа II происходит на горизонте чёрной дыры (см. раздел 3.4).

При ещё более низкой энергии возникает спонтанное нарушение некоторых из этих симметрий, аналогичное таковому при сверхпроводящем переходе. В последнем случае проблема иерархии объяснима: в большинстве сверхпроводников температура перехода  $T_c$  экспоненциально мала по сравнению с характерным масштабом энергии Ферми (который аналогичен масштабу Планка), что заставляет нас искать особые материалы с повышенным значением  $T_c$ . Роль перехода Лифшица в повышении температуры сверхпроводящего перехода рассматривается в разделах 2.4 и 3.3.

В другом сценарии безмассовые (бесщелевые) вакуумы возникают на переходе Лифшица между массивными вакуумами с различными топологическими зарядами (см. раздел 6 и рис. 18). Практически полная безмассовость элементарных частиц в нашей Вселенной наводит на мысль, что Вселенная весьма близка к линии топологического перехода Лифшица между такими вакуумами, на которой фермионы неизбежно становятся бесщелевыми [10] (см. раздел 6). Это является топологическим аналогом так называемого принципа множественных минимумов (Multiple Point Principle), согласно которому Вселенная существует в точке (линии, поверхности и т.д.) фазового перехода первого рода, где различные вакуумы имеют одинаковую энергию [11–15].

## 2. Поверхность Ферми и переходы Лифшица

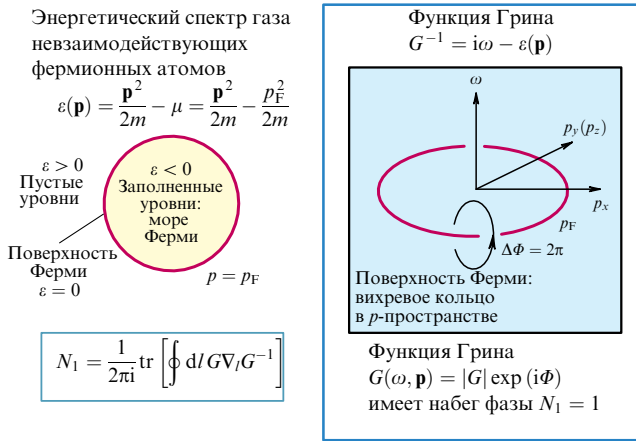
### 2.1. Поверхность Ферми как топологический объект

В основе переходов Лифшица, связанных с поверхностью Ферми, лежит топология, ответственная за устойчивость самой этой поверхности. Если поверхность Ферми неустойчива при электрон-электронном взаимодействии, то рассмотрение топологии её формы и соответствующих переходов Лифшица не имеет особого смысла. Рассмотрение топологической устойчивости поверхности Ферми относительно взаимодействий начнём с функции Грина идеального ферми-газа (рис. 2а). Ферми-поверхность,  $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$ , невзаимодействующего ферми-газа является границей в импульсном пространстве, отделяющей заполненные состояния с  $\varepsilon(\mathbf{p}) < 0$  от пустых состояний с  $\varepsilon(\mathbf{p}) > 0$ . Функция Грина  $G(\omega, \mathbf{p})$  с  $\omega$  на мнимой оси

$$G^{-1}(\omega, \mathbf{p}) = i\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) \quad (1)$$

имеет сингулярность при  $\omega = 0$  и  $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$ . На рисунке 2б координата  $p_z$  для наглядности опущена, так что сингулярность функции Грина образует замкнутую линию в импульсно-частотном  $(2+1)$ -пространстве  $(p_x, p_y, \omega)$ . Эта линия является вихревой линией, на которой фаза  $\Phi(p_x, p_y, \omega)$  функции Грина имеет набег  $2\pi$ . Как и в случае вихря в координатном пространстве в сверхтекучей жидкости, целочисленный набег фазы обеспечивает устойчивость поверхности Ферми относительно возмущений, в том числе и по отношению ко взаимодействию (при учёте  $p_z$  сингулярность формирует вихревой лист в  $(3+1)$ -импульсно-частотном пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$ ).

В общем случае, когда у функции Грина имеются спиновый, зонный и другие индексы, набег фазы можно выразить через функцию Грина как следующий тополо-



**Рис. 2.** Поверхность Ферми устойчива по отношению к взаимодействиям, потому что она представляет собой топологически устойчивую сингулярность в функции Грина — вихрь в  $(3 + 1)$ -пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$ . Устойчивость вихря обеспечивается набегом фазы  $\Phi$  функции Грина  $G = |G| \exp(i\Phi)$  — в общем случае набегом фазы детерминанта функции Грина, который задаётся целочисленным инвариантом  $N_1$ .

гический инвариант:

$$N_1 = \text{tr} \oint_C \frac{dI}{2\pi i} G(\omega, \mathbf{p}) \partial_I G^{-1}(\omega, \mathbf{p}). \quad (2)$$

Здесь интеграл берётся по произвольному контуру  $C$  вокруг вихревого листа в импульсно-частотном пространстве, а  $\text{tr}$  подразумевает суммирование по всем индексам.

Ферми-поверхность ввиду её топологической устойчивости невозможно порвать. Как и в случае вихревых линий, которые не могут оканчиваться в объёме, у поверхности Ферми отсутствуют края.

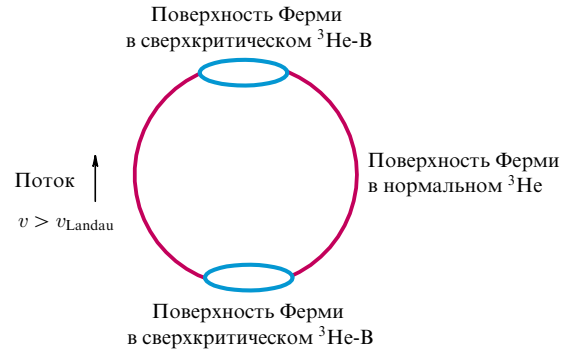
### 2.2. Поверхность Ферми и переходы Лифшица

Благодаря своей топологической устойчивости поверхность Ферми может формироваться даже в состоянии сверхпроводимости. Условиями для этого являются многозонная структура и нарушения симметрии по отношению к обращению времени  $T$  и чётности  $P$  [16–20]. Такие, так называемые боголюбовские, поверхности Ферми возникают также в бесщелевых сверхтекучих жидкостях, когда точки Вейля в  $^3\text{He-A}$  и узловая линия Дирака в полярной фазе  $^3\text{He}$  раздуваются в ферми-карманы из-за наличия сверхтекучего потока, который приводит к нарушению обеих,  $T$  и  $P$ , симметрий [21, 22].

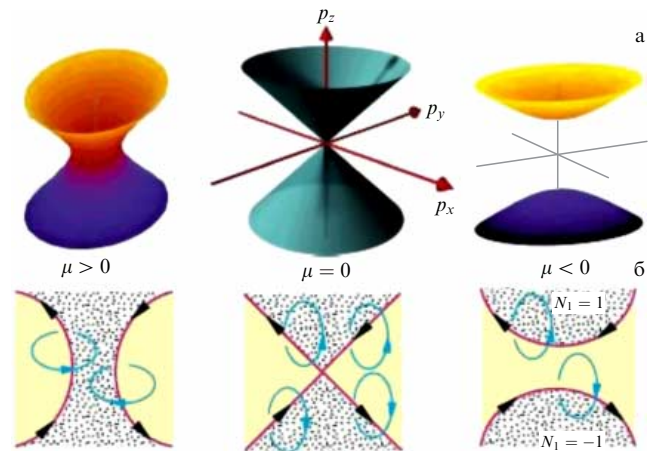
Поверхность Ферми может также формироваться в полнощелевых сверхтекучих жидкостях, когда скорость сверхтекучего потока превышает критическую скорость Ландау [3, 23]. Превышение скорости Ландау с образованием замкнутых боголюбовских поверхностей Ферми служит примером одного из двух переходов, предложенных Лифшицем (рис. 3).

Другой переход Лифшица имеет место, когда поверхность Ферми пересекает точку стационарности электронного спектра. Вблизи перехода зависимость типичного спектра имеет вид [1]:

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = ap_x^2 + bp_y^2 + cp_z^2 - \mu. \quad (3)$$



**Рис. 3.** Переход Лифшица, при котором замкнутые поверхности Ферми (карманы) возникают в полнощелевой сверхтекучей жидкости  $^3\text{He-V}$ , когда скорость потока жидкости относительно стенок контейнера больше критической скорости Ландау [3, 23].



**Рис. 4.** Так как поверхность Ферми представляет вихрь в  $(3 + 1)$ -пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$ , переход Лифшица с разрывом шейки поверхности Ферми [1] (а) эквивалентен перезацеплению вихрей в квантовой турбулентности [24] (б).

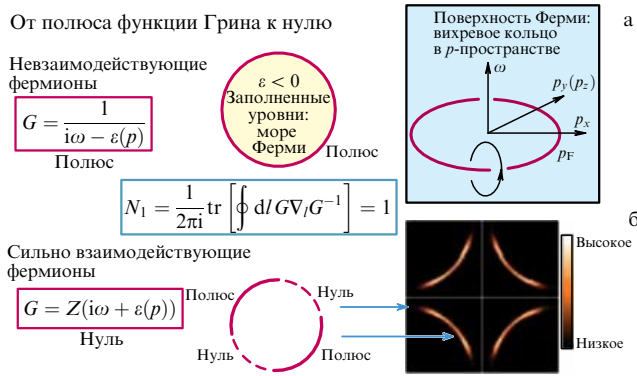
Для  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c < 0$  переход с разрывом шейки поверхности Ферми при  $\mu = 0$  представлен на рис. 4а. В терминах вихревых сингулярностей функции Грина в  $(3 + 1)$ -пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$  этот переход Лифшица представляет собой перезацепление вихревых линий (рис. 4б). Перезацепление вихрей в координатном пространстве является важным процессом в вихревой турбулентности в сверхтекучих жидкостях [24].

### 2.3. От полюса функции Грина к нулю

В то время как в обычной ферми-жидкости Ландау функция Грина имеет полюс, в латтинджерской жидкости вычет полюса в функции Грина даёт сингулярность — параметр  $\gamma$  в уравнении (5) является ненулевым [25]:

$$G = \frac{Z}{i\omega - \epsilon(\mathbf{p})}, \quad Z \propto (\omega^2 + \epsilon^2(\mathbf{p}))^\gamma. \quad (4)$$

Однако топологический инвариант остаётся тем же самым для всех  $\gamma$ , т.е. функция Грина в этом случае имеет такое же топологическое свойство, как и функция Грина обычного металла с поверхностью Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = 0$ . По этой причине по-прежнему остаётся справед-



**Рис. 5.** Переход Лифшица, при котором вся поверхность полюсов (или её часть) в функции Грина преобразуется в поверхность нулей в функции Грина. Топологический заряд поверхности при таком квантовом фазовом переходе не изменяется. В результате остаётся справедливой теорема Латтинджера [26, 27], т.е. плотность взаимодействующих фермионов соответствует области в импульсном пространстве, окружённой сингулярной поверхностью с топологическим зарядом  $N_1 = 1$ .

ливой теорема Латтинджера [26, 27]. Плотность частиц взаимодействующих фермионов соответствует области в импульсном пространстве, окружённой сингулярной поверхностью с топологическим зарядом  $N_1 = 1$ , вне зависимости от реализации сингулярности.

Подавление вычета  $Z$  может быть настолько сильным, что полюс в функции Грина преобразуется в нуль функции Грина, что соответствует особому случаю  $\gamma = 1$  (рис. 5):

$$G \propto i\omega + \varepsilon(\mathbf{p}). \quad (5)$$

В частности, такая ситуация имеет место для изоляторов Мотта [26]. Последнее означает, что топология ферми-поверхности сохраняется даже в фазе изолятора, где теорема Латтинджера по-прежнему справедлива [26, 27]. Следовательно, мы можем утверждать, что переход между металлами и изоляторами может рассматриваться как переход типа перехода Лифшица при нулевой температуре, в котором свойство энергетического спектра радикально изменяется без нарушения симметрии. Однако этот квантовый фазовый переход не является топологическим, так как топологический инвариант при переходе не изменяется.

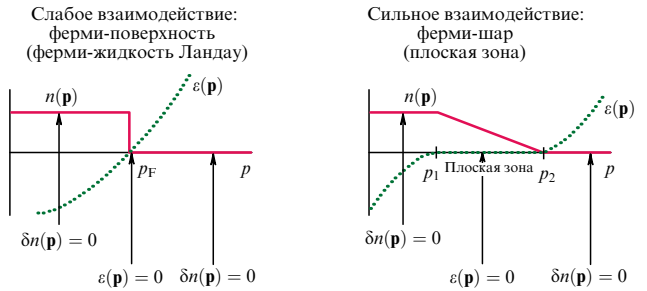
Не исключено, что в так называемой псевдощелевой фазе сверхпроводящих купратов и некоторых других материалов (см., например, [28]) часть поверхности Ферми преобразуется в поверхность нулей функции Грина, в результате чего формируются так называемые ферми-арки, изображённые в правой части рис. 5б.

**2.4. От поверхности Ферми к плоской зоне**

Причиной появления плоской зоны, или так называемого фермионного конденсата Ходеля – Шагиняна, в котором все состояния имеют нулевую энергию, является электрон-электронное взаимодействие [29–31]. Возникновение плоской зоны представляет собой проявление общего феномена слияния энергетических уровней в результате взаимодействия. Такой эффект наблюдался для уровней Ландау в 2D-квантовых ямах [32, 33]. Поскольку в плоской зоне имеется высокая плотность электронных состояний, температура перехода в сверх-

**Переход Лифшица от поверхности Ферми к плоской зоне**

$$\delta E\{n(\mathbf{p})\} = \int \varepsilon(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p}) d^d\mathbf{p} = 0, \text{ два решения: } \delta n(\mathbf{p}) = 0 \text{ и } \varepsilon(\mathbf{p}) = 0$$



**Рис. 6.** Формирование плоской зоны в системе сильно взаимодействующих фермионов согласно теории Ландау. Имеется два типа экстремумов функционала энергии  $E\{n(\mathbf{p})\}$ : 1)  $\delta n(\mathbf{p}) = 0$ , который соответствует заполненным,  $n(\mathbf{p}) = 1$ , и свободным,  $n(\mathbf{p}) = 0$ , уровням; 2)  $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$ , когда  $0 < n(\mathbf{p}) < 1$ . В случае слабого взаимодействия решение 1 имеет место внутри и вне поверхности Ферми, тогда как решение 2 соответствует самой поверхности Ферми. В случае сильного взаимодействия решение  $\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$  распространяется на 3D-зону — так называемую плоскую зону. Формирование плоской зоны из поверхности Ферми осуществляется через переход Лифшица нового типа.

Плоская зона — путь к сверхпроводимости при комнатных температурах

Уравнение для щели  $A = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2h^3} \frac{A}{E(\mathbf{p})}$   $g$  — параметр взаимодействия в куперовском канале

$$E^2(\mathbf{p}) = A^2 + \varepsilon^2(\mathbf{p})$$

Обычный металл с ферми-поверхностью Система с плоской зоной

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = v_F(p - p_F)$$

$$E^2(\mathbf{p}) = A^2 + v_F^2(p - p_F)^2$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 0$$

$$E(\mathbf{p}) = A$$

$$1 = gN(0) \int \frac{d\varepsilon}{E(\varepsilon)} = gN(0) \ln \frac{E_c}{A}$$

$$A = g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2h^3} = gV_{FB}$$

↑ Объём плоской зоны

Обычные сверхпроводники: экспоненциально подавленная температура перехода

Сверхпроводимость в плоской зоне: линейная зависимость  $T_c$  от параметра взаимодействия  $g$

$$T_c \sim A = E_c \exp[-1/gN(0)]$$

↑ Плотность состояний

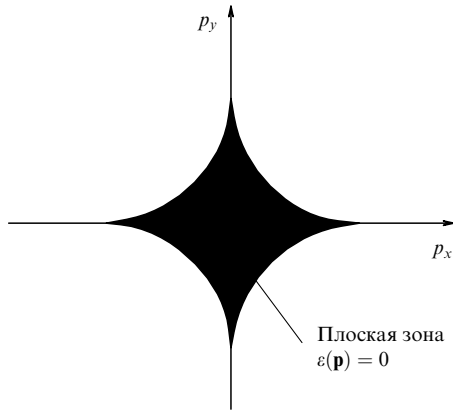
$$T_c \sim A = gV_{FB}$$

↑ Объём плоской зоны

**Рис. 7.** Плоская зона электронных состояний с нулевой энергией приводит к линейной зависимости температуры перехода  $T_c$  от параметра связи [29], тогда как в обычных металлах  $T_c$  экспоненциально подавляется.

проводящее состояние может значительно повыситься (рис. 7).

Экспериментально уплощение одночастичного спектра вблизи импульса Ферми наблюдалось в 2D-квантовой яме [36]. Из теории следует, что плоская зона легче формируется в окрестности обычного перехода Лифшица [34, 35] (рис. 8). Возможно, этот эффект является причиной появления сверхпроводимости с высоким значением  $T_c$ , обнаруженной в гидриде серы под давлением [37, 38], поскольку результаты теоретических расчётов указывают на то, что высокотемпературная сверхпроводимость возникает при таком давлении, при котором система близка к переходу Лифшица [39–41]. О расширении области сверхпроводимости при переходе Лифшица сообщалось для монослоя FeSe [42].

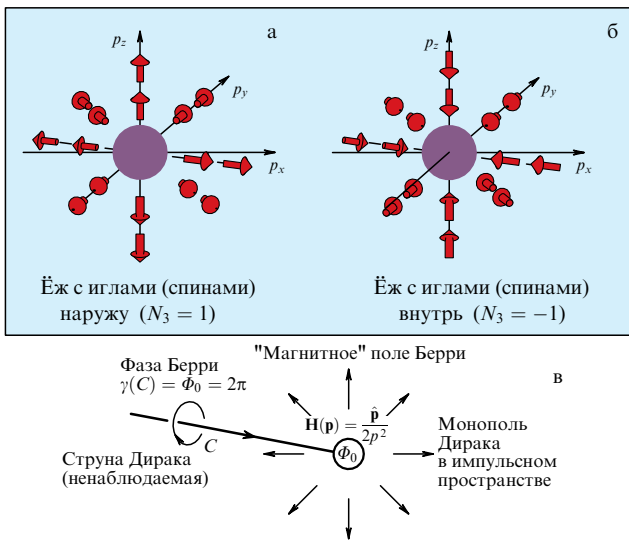


**Рис. 8.** Плоская зона, возникающая в окрестности перехода Лифшица (см. рис. 4) в результате электрон-электронного взаимодействия [34, 35]. Исходный спектр без взаимодействия  $\epsilon^0(\mathbf{p}) = p_x p_y / m - \mu$ ; переход Лифшица происходит при  $\mu = 0$ . В результате взаимодействия все состояния в чёрной области имеют нулевую энергию (плоская зона показана в точке перехода Лифшица).

### 3. Переходы Лифшица, управляемые топологией точки Вейля

#### 3.1. Топология фермионов Вейля

Частицы Вейля являются элементарными частицами Вселенной. Спинор Вейля содержит две комплексные компоненты, и такие безмассовые частицы описываются комплексным гамильтонианом  $2 \times 2$ :  $H = c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}$  для правосторонних кварков и лептонов и  $H = -c\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}$  для левосторонних, где  $c$  — скорость света. Спины частиц в импульсном пространстве образуют соответственно ёж (рис. 9а) и антиёж (рис. 9б). Ёж является топологически устойчивым, таким образом, точка Вейля в центре ежа оказывается топологически защищённой. Соответствующий



**Рис. 9.** Спины правосторонних частиц Вейля (кварки и лептоны), направленные вдоль импульса  $\mathbf{p}$ , образуют топологический дефект — ёж (а). Антиёж — ёж с иглами (спинами) внутрь (б) — соответствует левосторонним кваркам и лептонам. (в) Топологический инвариант  $N_3$ , описывающий топологически различные конфигурации ежей, выражается через функцию Грина соотношением (6) или через поле единичного вектора на рис. 16.

щий топологический инвариант для ежей  $N_3$  может быть выражен через функцию Грина как поверхностный интеграл в  $(3 + 1)$ -импульсно-частотном пространстве  $(\mathbf{p}, \omega)$  [3]:

$$N_3 = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{24\pi^2} \text{tr} \oint_{\Sigma_a} dS^\sigma G \frac{\partial}{\partial p_\mu} G^{-1} G \frac{\partial}{\partial p_\nu} G^{-1} G \frac{\partial}{\partial p_\rho} G^{-1}. \quad (6)$$

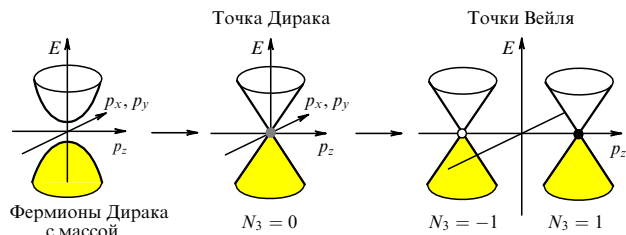
Здесь  $\Sigma_a$  — трёхмерная поверхность вокруг изолированной точки Вейля в  $(\mathbf{p}, \omega)$ -пространстве.

С точки зрения общих свойств фермионного спектра точка Вейля представляет собой особую точку пересечения уровней, анализ которой провели фон Нейман и Вигнер [43]. Этот анализ показал, что две ветви спектра, имеющие одинаковую симметрию, могут касаться друг друга в конической (или диаболоической) точке в трёхмерном пространстве параметров, каковыми в нашем случае являются  $p_x, p_y$  и  $p_z$ . Касание двух ветвей в общем случае описывается  $2 \times 2$ -гамильтонианом  $H = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{g}(\mathbf{p})$ . Топологический инвариант  $N_3$  выражается через единичный вектор  $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{p}) = \mathbf{g}(\mathbf{p})/|\mathbf{g}(\mathbf{p})|$  (рис. 16), который определяет конфигурацию ежа, изображённого в правой части рис. 16. Точка касания также представляет монополь в фазе Берри (рис. 9в) [7]. Не исключено, что фермионы Вейля в Стандартной модели (кварки и лептоны) не являются элементарными частицами, а возникают в результате пересечения уровней в более фундаментальной теории [2, 3, 9]. В частности, первичный квантовый вакуум можно описать квантовой теорией поля, основывающейся на действительных числах (фермионы Майораны), тогда как мнимая единица, входящая в уравнение Шрёдингера, появляется в низкоэнергетическом пределе вместе с релятивистским линейным спектром фермионов Вейля [44].

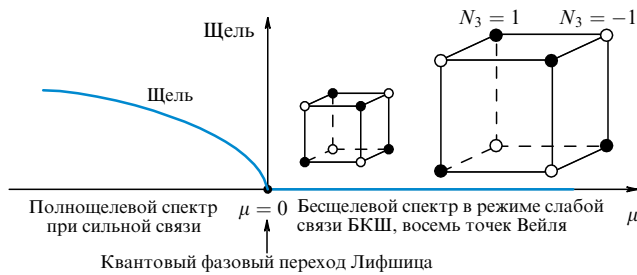
Линейный ("релятивистский") спектр появляется только для элементарных топологических зарядов,  $N_3 = 1$  или  $N_3 = -1$ . Если точка Вейля обладает более высоким топологическим зарядом,  $|N_3| > 1$ , и нет специальной симметрии, которая приводит к вырождению уровней, то спектр имеет различные дисперсионные соотношения вдоль разных осей [3, 45]. Например, при  $|N_3| = 2$  спектр является "релятивистским" в одном направлении и квадратичным в двух других.

#### 3.2. Переходы Лифшица с расщеплением точек Вейля

Типичный переход Лифшица, который включает в себя узлы Вейля в фермионном спектре, описывает формирование точек Вейля с противоположными зарядами  $N_3 = \pm 1$  из полнощелевого состояния. Рисунок 10 демон-



**Рис. 10.** Формирование пары точек Вейля из состояния вакуума с массивными фермионами Дирака. Топологический заряд  $N_3 = 1$  соответствует правосторонним частицам, а  $N_3 = -1$  — левосторонним. В точке перехода Лифшица вакуум является бесщелевым с точкой Дирака в фермионном спектре с топологическим зарядом  $N_3 = 0$ .



**Рис. 11.** Переход Лифшица от БЭК к БКШ с формированием четырёх правосторонних и четырёх левосторонних точек Вейля в вершинах куба. Такое упорядочение узлов Вейля обсуждалось для энергетического спектра в сверхпроводниках, принадлежащих классу симметрии  $O(D_2)$  [47, 48]. В релятивистских теориях подобное упорядочение даёт восемь левых и восемь правых фермионов Вейля в вершинах куба в  $(3+1)$ -пространстве  $(p_x, p_y, p_z, \omega)$  [49, 50].

стрирует такое формирование пары точек Вейля из состояния вакуума с массивными фермионами Дирака. В промежуточном состоянии появляется безмассовая точка Дирака в фермионном спектре с топологическим зарядом  $N_3 = 0$ . Такая бесщелевая точка Дирака является маргинальной, но может быть защищённой симметрией, как это имеет место в Стандартной модели выше электрослабого перехода. Если симметрия нарушается вследствие внешнего воздействия или спонтанно, то спектр Дирака либо получает массу, либо разбивается на пару точек Вейля [46].

Рисунок 11 демонстрирует формирование четырёх правосторонних и четырёх левосторонних точек Вейля при переходе Лифшица от режима сильной связи бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) к режиму слабой связи Бардина – Купера – Шриффера (БКШ). Такое упорядочение узлов Вейля имеет место в энергетическом спектре в классе симметрии  $O(D_2)$  систем с парной корреляцией [47, 48]. В обоих случаях полный топологический заряд  $N_3^{\text{total}} = 0$ , таким образом, имеется чётное число фермионов Вейля, которое подтверждает принцип дублирования фермионов [51]. В релятивистских теориях аналогичное упорядочение — восемь левых и восемь правых фермионов Вейля — в вершинах куба в  $(3+1)$ -пространстве  $(p_x, p_y, p_z, \omega)$  обсуждалось в [49, 50]. Интересно, что каждое семейство фермионов в Стандартной модели содержит именно восемь левых и восемь правых частиц Вейля.

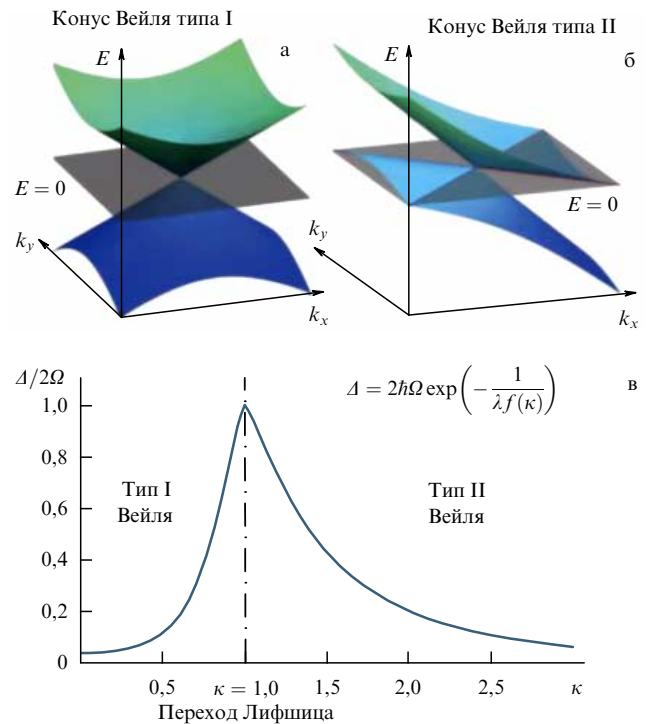
### 3.3. Переход Лифшица к конусу Вейля типа II

Некоторые переходы Лифшица комбинируют поверхность Ферми (инвариант  $N_1$ ) и точку Вейля (инвариант  $N_3$ ). Это, в частности, переход от изолированных точек Ферми (спектр Вейля типа I) к точке Вейля, соединяющей две поверхности Ферми (так называемая точка Вейля типа II [52]). В релятивистских теориях такие переходы обсуждались в [44, 53].

Простейшую реализацию точки Вейля типа II получаем из гамильтониана с двумя параметрами,  $c$  и  $v$ :

$$H = c\sigma\mathbf{r} - vp_z. \quad (7)$$

При  $v = 0$  это точка Вейля с конусом Вейля (рис. 12а). При  $0 < v < c$  конус наклонён. При  $v > c$  конус опрокидывается и пересекает уровень нулевой энергии с формированием двух ферми-карманов, соединённых точкой



**Рис. 12.** (а) Конус Вейля в спектре фермионов Вейля типа I. (б) Опрокинутый конус Вейля в спектре фермионов Вейля типа II. (в) Повышение температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  при переходе Лифшица между точками Вейля типа I и типа II, который происходит при  $\kappa = 1$ , где  $\kappa$  — параметр теории [54].

Вейля типа II (рис. 12б). Переход Лифшица между точками Вейля двух типов происходит при  $v = c$ . Показано, что такой переход Лифшица может также приводить к повышению температуры сверхпроводящего перехода [54, 55] (рис. 12в).

### 3.4. Переход Лифшица на горизонте чёрной дыры

Переход Лифшица, обсуждавшийся в разделе 3.3, происходит на горизонте чёрной дыры. В общей теории относительности стационарная метрика, справедливая как вне чёрной дыры, так и внутри её горизонта, представляется, в частности, метрикой пространства-времени Пенлеве – Гулстранда [57]. Линейный элемент метрики Пенлеве – Гулстранда эквивалентен так называемой акустической метрике [58 – 60]

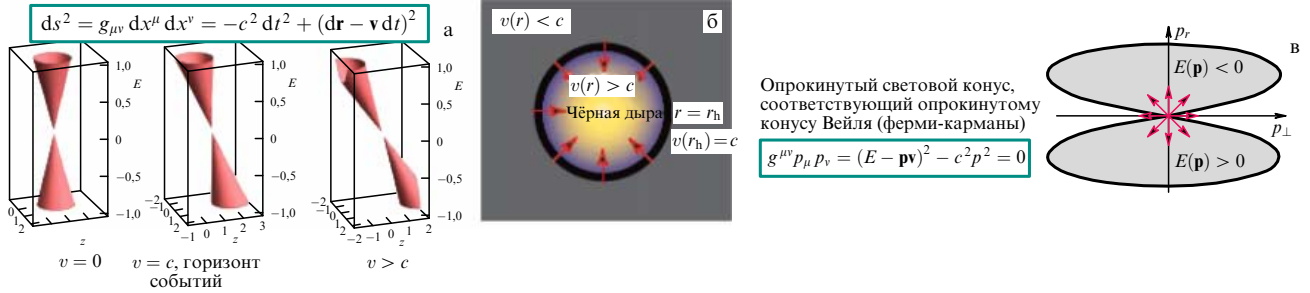
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (d\mathbf{r} - \mathbf{v} dt)^2. \quad (8)$$

Эта метрика выражается через скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  тела, свободно падающего в чёрную дыру:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\hat{r}c\sqrt{\frac{r_h}{r}}, \quad r_h = \frac{2MG}{c^2}. \quad (9)$$

Здесь  $M$  — масса чёрной дыры,  $r_h$  — радиус горизонта,  $G$  — гравитационная постоянная Ньютона. Позади горизонта скорость увлечения инерциальных систем отсчёта превышает скорость света,  $|\mathbf{v}| > c$ , и частицы захватываются дырой (рис. 13б). Поведение светового конуса (конуса в пространстве-времени) при переходе через горизонт событий показано на рис. 13а. Позади горизонта световой конус опрокинут.

Поведение конуса Вейля (конуса в импульсном пространстве) при переходе через горизонт описывается



**Рис. 13.** Чёрная дыра в метрике Пенлеве–Гулстранда. Метрика  $g_{\mu\nu}$  описывает световой конус. Световой конус (а) опрокидывается позади горизонта, где скорость увлечения инерциальных систем отсчёта  $v > c$  (б). Метрика  $g^{\mu\nu}$  описывает конус Вейля. Конус Вейля опрокидывается позади горизонта с формированием двух ферми-карманов, соединённых точкой Вейля типа II (в). Горизонт при  $r = r_h$  играет роль поверхности перехода Лифшица между точкой Вейля типа I при  $r > r_h$  и точкой Вейля типа II при  $r < r_h$ . Такое поведение двух конусов позволяет нам моделировать горизонт чёрной дыры и излучение Хокинга в вейлевских полуметаллах [56].

гамильтонианом частиц Вейля в гравитационном поле чёрной дыры, который в метрике Пенлеве–Гулстранда имеет следующий вид [53]:

$$H = \pm c \sigma \mathbf{p} - p_r v(r), \quad v(r) = c \sqrt{\frac{r_h}{r}}. \quad (10)$$

Здесь знаки плюс и минус относятся к правосторонним и левосторонним фермионам Вейля соответственно,  $p_r$  — радиальная компонента импульса частицы. Позади горизонта, где  $v > c$  и световой конус перевернут, конус Вейля тоже перевернут, но так, как показано на рис. 12. Формируются два ферми-кармана, которые касаются друг друга в точке Вейля типа II (рис. 13в). Горизонт событий при  $r = r_h$ , таким образом, играет роль поверхности перехода Лифшица.

Соответствие между полуметаллами Вейля и чёрными дырами позволяет нам моделировать горизонт чёрной дыры с помощью неоднородного полуметалла Вейля, в котором переход между точками Вейля типа I и типа II имеет место на некоторой поверхности [60]. Такая поверхность играла бы роль горизонта событий. Образовавшаяся чёрная дыра будет полностью стационарной при равновесии. Однако сразу после формирования такого аналога чёрной дыры система находится в неравновесном состоянии и процесс релаксации на начальной стадии установления равновесия соответствует процессу излучения Хокинга.

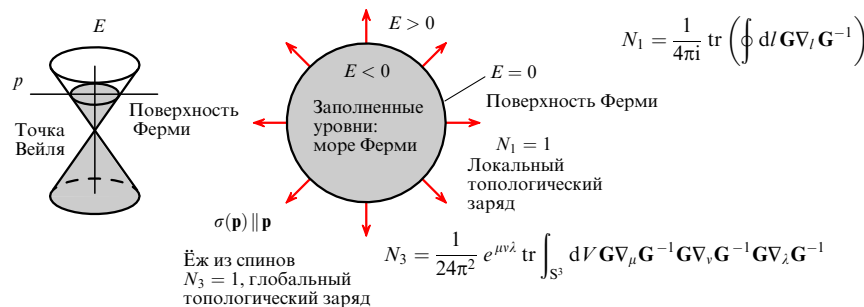
В обсуждаемом переходе Лифшица между точками Вейля типа I и типа II меняется знак элемента  $g_{00}$  эффективной метрики. Когда меняется знак элемента  $g^{00}$ , осуществляется переход Лифшица другого типа. В полуметаллах Вейля это соответствует переходу к фермионам

Вейля типа III [61], тогда как в общей теории относительности — переходу к пространственно-временным континуумам с замкнутыми времениподобными кривыми.

#### 4. Переходы Лифшица с несколькими топологическими зарядами

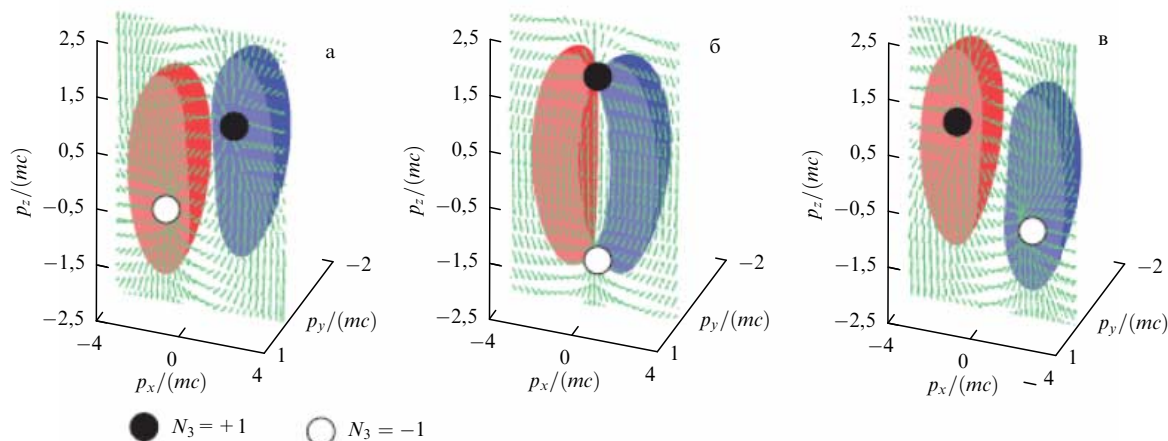
В разделах 3.3 и 3.4 мы рассмотрели переход Лифшица, включающий в себя взаимодействие двух топологических зарядов: заряда  $N_1$ , который характеризует поверхность Ферми, и заряда  $N_3$  монополя в фазе Берри. Имеются другие переходы Лифшица со взаимодействием этих двух топологических инвариантов. В частности, это имеет место, когда замкнутая поверхность Ферми описывается двумя инвариантами: локальным зарядом  $N_1$ , который обеспечивает её локальную устойчивость, и глобальным зарядом  $N_3$ , который описывает точку Вейля внутри поверхности Ферми (рис. 14). Последний случай имеет место, например, когда точка Вейля смещается от позиции с нулевой энергией и формирует малую сферу Ферми вокруг точки Вейля (см. рис. 14). Такая сфера Ферми содержит заряд  $N_3$ , который можно получить из уравнения (6) интегрированием по поверхности, охватывающей сферу Ферми.

При переходе Лифшица поверхности Ферми могут обмениваться глобальными зарядами  $N_3$  или терять глобальный заряд [6, 46]. Пример обмена зарядами приведён на рис. 15, а пример потери глобального заряда — на рис. 16. В обоих случаях промежуточное состояние в точке перехода Лифшица содержит точки Вейля типа II.

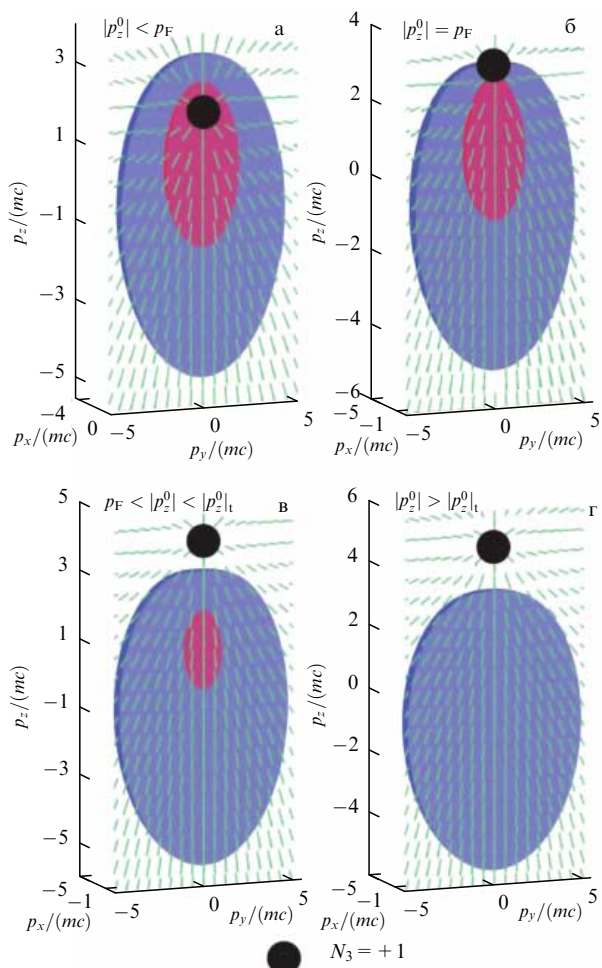


**Рис. 14.** Поверхность Ферми с локальным топологическим зарядом  $N_1$  и глобальным топологическим зарядом  $N_3$  [3]. Такая поверхность Ферми содержит монополю в фазе Берри.





**Рис. 15.** (В цвете онлайн.) Переход Лифшица с обменом монополями в фазе Берри между двумя поверхностями Ферми [6]. Красная и синяя поверхности Ферми являются глобально нетривиальными с  $N_3 = -1$  и  $N_3 = 1$  соответственно. В процессе перехода Лифшица два монополя в фазе Берри выталкиваются из поверхностей Ферми. При переходе Лифшица поверхности Ферми касаются друг друга в точках Вейля таким образом, что последние становятся точками Вейля типа II. Выше перехода точки Вейля снова находятся внутри поверхностей Ферми, но теперь красная и синяя поверхности Ферми имеют глобальные заряды  $N_3 = 1$  и  $N_3 = -1$  соответственно. Поверхности Ферми могут обмениваться топологическими зарядами через точки Вейля типа II.



**Рис. 16.** (В цвете онлайн.) Переход Лифшица, при котором поверхности Ферми теряют заряд Вейля  $N_3$  [6]. (а) Ниже точки перехода Лифшица обе поверхности содержат один и тот же монополь в фазе Берри с  $N_3 = 1$ . (б) При переходе точка Вейля соединяет внутреннюю и внешнюю поверхности Ферми. (в) Выше перехода монополь выходит из поверхностей Ферми и они обе становятся глобально тривиальными с  $N_3 = 0$ . Без глобальной устойчивости поверхности Ферми могут сжиматься и исчезать при обычном переходе Лифшица, как, например, красная поверхность Ферми на рис. г.

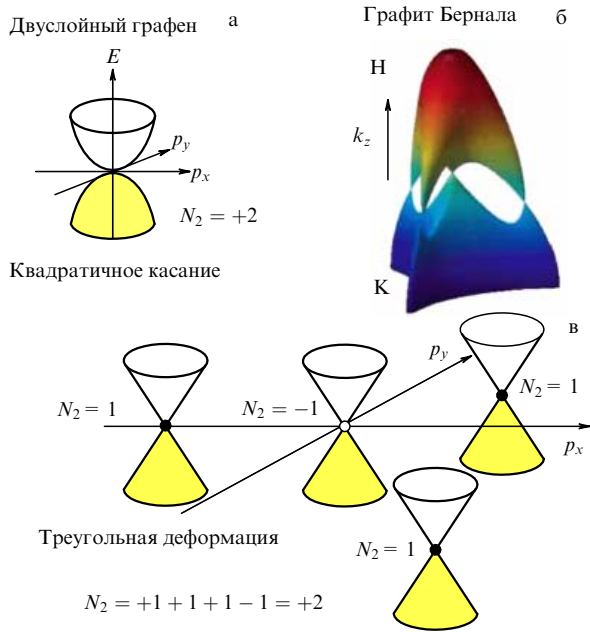
## 5. Переход Лифшица, управляемый сохранением топологического заряда

Коническая точка Дирака в 2D-графене и узловые линии в 3D-полуметаллах, бесщелевых сверхтекучих жидкостях и сверхпроводниках стабилизируются топологическим зарядом  $N_2$  (рис. 1в) [4, 62]. Такие узловые линии Дирака известны в полярной фазе сверхтекучего  $^3\text{He}$  [8, 63], в сверхпроводящих купратах и графите (линии касания зон) [64–66]. В настоящее время они широко исследуются в полуметаллах [67].

Тип переходов Лифшица, управляемых сохранением топологического заряда  $N_2$ , показан на рис. 17 на примере двуслойного графена в случае, когда один слой сдвигается относительно другого. Слияние двух конических точек с  $N_2 = 1$  приводит к формированию узла Дирака с квадратичной дисперсией (рис. 17а), имеющего топологический заряд  $N_2 = 2$ . Эта точка в свою очередь может разбиваться на четыре конические точки Дирака с  $N_2 = \pm 1$  (рис. 17в). Такой процесс называют треугольной деформацией. Общий топологический заряд сохраняется:  $N_2 = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$ . Треугольная деформация имеет место в графите (рис. 17б), где переход Лифшица происходит как функция  $p_z$  [64–66], когда  $p_z$  пересекает так называемую точку нексуса [62, 68].

## 6. Переходы Лифшица между щелевыми состояниями через бесщелевое состояние

В число переходов Лифшица между щелевыми состояниями входят переходы между топологическими и нетопологическими изоляторами; переходы между полнощелевыми сверхтекучими жидкостями и сверхпроводниками; переходы между 2D-системами, в которых имеет место внутренний квантовый эффект Холла, и т.д. Здесь мы рассматриваем такой переход на примере 2D-систем, в которых холловская проводимость в отсутствие магнитного поля выражается через целочисленный топологический инвариант  $\tilde{N}_3$  (рис. 18а) [69–72]. Этот топологический инвариант имеет такую же структуру, как и инвариант  $N_3$  на рис. 16, но интегрирование теперь



**Рис. 17.** Переход Лифшица, управляемый сохранением топологического заряда  $N_2$  в двуслойном графене, где две конические точки с одинаковым зарядом  $N_2 = 1$  на двух слоях графена либо сливаются с формированием точки Дирака с топологическим зарядом  $N_2 = 2$  и квадратичным спектром (а), либо разбиваются на четыре конические точки Дирака (в). Последнее называют треугольной деформацией. Общий топологический заряд  $N_2 = 2$  в обоих случаях, поэтому при переходе Лифшица такие конфигурации могут преобразовываться одна в другую.

проводится по всей 2D-зоне Бриллюэна. Это является примером размерной редукции, в данном случае от 3D-систем с узлами Вейля до топологических 2D-изоляторов [3].

Рисунок 18а демонстрирует переход Лифшица между топологическим изолятором с  $\tilde{N}_3 = 1$  и обычным изолятором с  $\tilde{N}_3 = 0$ . Здесь топологический заряд не сохраняется в процессе перехода Лифшица, а резко изменяется, напоминая фазовый переход первого рода. Тем не менее

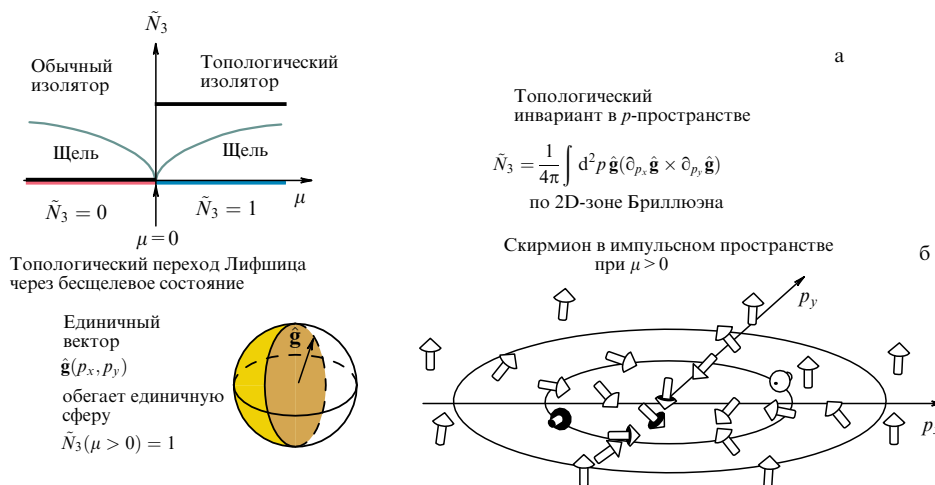
переход Лифшица происходит плавно, но в точке перехода исчезает щель в энергетическом спектре и топологический инвариант становится плохо определённым. Обнуление щели при переходе отражает тот факт, что в 3D-пространстве  $(p_x, p_y, \mu)$ , где  $\mu$  — химический потенциал (или любой другой параметр, с изменением которого выполняется переход), нуль щели представляет собой точку Вейля с топологическим зарядом  $N_3 = \tilde{N}_3$  (справа) –  $\tilde{N}_3$  (слева) [3, 74].

Примером служат 2D-сверхтекучая жидкость или сверхпроводник с  $p_x + ip_y$ -спариванием [73], в которых переход Лифшица между состояниями сверхтекучести с  $N_3 = 1$  и  $\tilde{N}_3 = 0$  происходит в той же точке  $\mu = 0$ , что и переход Лифшица в обычной ферми-жидкости. Подробное рассмотрение показывает, что переход Лифшица представляет собой квантовый переход третьего рода [75]: третья производная  $d^3E/dg^3$  энергии основного состояния  $E$  по параметру взаимодействия  $g$  является разрывной. Сравним это с традиционным переходом 2<sup>1/2</sup>-порядка [1] и с недавно обсуждаемым переходом 3<sup>1/2</sup>-порядка [66].

Обнуление щели в фермионном спектре при переходе между щелевыми вакуумами позволяет предложить сценарий решения проблемы иерархии в физике частиц: релятивистский квантовый вакуум является почти безмассовым потому, что наша Вселенная весьма близка к линии перехода Лифшица. Причина, по которой для природы могла бы оказаться предпочтительной критическая линия, возможно, заключается в том, что бесщелевые вакуумы на линии перехода могут сконцентрировать больше энтропии, чем щелевые состояния [10].

### 7. Заключение

Топологические переходы Лифшица являются широко распространёнными, так как в них участвуют топологические структуры фермионного спектра многих типов: поверхности Ферми, линии Дирака, точки Дирака и Вейля, краевые состояния, нулевые майорановские моды и т.д. У каждой из таких структур имеется собственный топологический инвариант  $(N_1, N_2, N_3, \tilde{N}_3$



**Рис. 18.** Переходы Лифшица между полнощелевыми топологически различными вакуумами в 2D-системах, в которых имеет место квантовый эффект Холла в отсутствие магнитного поля [70–74]. (а) Холловская проводимость выражается через целочисленный топологический инвариант  $\tilde{N}_3$ . Переход Лифшица между топологическим изолятором с  $\tilde{N}_3 = 1$  и обычным изолятором с  $\tilde{N}_3 = 0$  проходит через состояние, в котором щель исчезает, как показано в левой части рисунка. (б) Топологически нетривиальное состояние с  $\tilde{N}_3 = 1$  представляет собой топологически нетривиальный несингулярный объект — скирмион — в 2D-импульсном пространстве.

и т.д.), который обеспечивает устойчивость топологической структуры этого класса. Топология формы поверхностей Ферми и линий Дирака, а также взаимосвязи объектов разных размерностей в импульсном и частотно-импульсном пространствах приводят к появлению разных классов переходов Лифшица.

Следствия переходов Лифшица являются важными в различных областях физики. В частности, сингулярная плотность электронных состояний, возникающая при переходе, важна для создания сверхпроводников с повышенной температурой перехода; переходы Лифшица могут быть причиной появления малых масс элементарных частиц в нашей Вселенной; горизонт чёрной дыры играет роль поверхности перехода Лифшица между вакуумами с точками Вейля типа I и типа II и т.д.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Европейского совета по научным исследованиям (ERC) по исследовательской программе ЕС Horizon 2020 и программе инноваций (соглашение о гранте № 694248). Разделы, связанные с высокотемпературной сверхпроводимостью, написаны при поддержке Российского научного фонда (грант 16-42-01100).

## Список литературы

1. Лифшиц И М *ЖЭТФ* **38** 1569 (1960); Lifshits I M *Sov. Phys. JETP* **11** 1130 (1960)
2. Hořava P *Phys. Rev. Lett.* **95** 016405 (2005)
3. Volovik G E *The Universe in a Helium Droplet* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
4. Volovik G E *Lecture Notes Phys.* **718** 31 (2007); cond-mat/0601372
5. Воловик Г Е *ФНТ* **43** 57 (2017); Volovik G E *Low Temp. Phys.* **43** 47 (2017); arXiv:1606.08318
6. Zhang K, Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **105** 504 (2017); *JETP Lett.* **105** 519 (2017)
7. Воловик Г Е *Письма в ЖЭТФ* **46** 81 (1987); Volovik G E *JETP Lett.* **46** 98 (1987)
8. Dmitriev V V et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 165304 (2015)
9. Froggatt C D, Nielsen H B *Origin of Symmetry* (Singapore: World Scientific, 1991)
10. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **91** 61 (2010); *JETP Lett.* **91** 55 (2010); arXiv:0912.0502
11. Sidharth B G et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **31** 1630051 (2016); arXiv:1605.01169
12. Sidharth B G et al. *New Adv. Phys.* **10** 1 (2016)
13. Laperashvili L V, Nielsen H B, Das C R *Int. J. Mod. Phys. A* **31** 1650029 (2016)
14. Bennett D L, Nielsen H B, Froggatt C D, hep-ph/9710407
15. Воловик Г Е *Письма в ЖЭТФ* **79** 131 (2004); Volovik G E *JETP Lett.* **79** 101 (2004); hep-ph/0309144
16. Volovik G E *Phys. Lett. A* **142** 282 (1989)
17. Liu W V, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **90** 047002 (2003)
18. Barzykin V, Gor'kov L P *Phys. Rev. B* **76** 014509 (2007)
19. Agterberg D F, Brydon P M R, Timm C *Phys. Rev. Lett.* **118** 127001 (2017)
20. Timm C et al. *Phys. Rev.* **96** 094526 (2017); arXiv:1707.02739
21. Воловик Г Е *УФН* **143** 73 (1984); Volovik G E *Sov. Phys. Usp.* **27** 363 (1984)
22. Mäkinen J T et al., in *28th Intern. Conf. on Low Temperature Physics, LT28, 9–16 August 2017, Gothenburg, Sweden, Abstracts* (2017) Abst. 008; <http://www.trippus.se/eventus/userfiles/84948.pdf>
23. Vollhardt D, Maki K, Schopohl N J. *Low Temp. Phys.* **39** 79 (1980)
24. Zhu T et al. *Phys. Rev. Fluids* **1** 044502 (2016)
25. Voit J *Rep. Prog. Phys.* **58** 977 (1995)
26. Dzyaloshinskii I *Phys. Rev. B* **68** 085113 (2003)
27. Farid B, Tselvik A M "Comment on "Breakdown of the Luttinger sum rule within the Mott–Hubbardinsulator", by J. Kokalj and P. Prelovšek, *Phys. Rev. B* **78**, 153103 (2008); arXiv:0909.2886; Kokalj J, Prelovšek P *Phys. Rev. B* **78** 153103 (2008); arXiv:0803.4468
28. Pracht U S et al. *Phys. Rev. B* **93** 100503(R) (2016)
29. Ходель В А, Шагинян В Р *Письма в ЖЭТФ* **51** 488 (1990); Khodel' V A, Shaginyan V R *JETP Lett.* **51** 553 (1990)
30. Воловик Г Е *Письма в ЖЭТФ* **53** 208 (1991); Volovik G E *JETP Lett.* **53** 222 (1991)
31. Nozières P J. *Physique I* **2** 443 (1992)
32. Shashkin A A et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 186402 (2014)
33. Shashkin A A et al. *Письма в ЖЭТФ* **102** 40 (2015); *JETP Lett.* **102** 36 (2015)
34. Yudin D et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 070403 (2014)
35. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **59** 798 (1994); *JETP Lett.* **59** 830 (1994)
36. Melnikov M Yu et al. *Sci. Rep.* **7** 14539 (2017); arXiv:1604.08527
37. Drozdov A P et al. *Nature* **525** 73 (2015)
38. Еремец М И, Дроздов А П *УФН* **186** 1257 (2016); Eremets M I, Drozdov A P *Phys. Usp.* **59** 1154 (2016)
39. Quan Y, Pickett W E *Phys. Rev. B* **93** 104526 (2016)
40. Bianconi A, Jarlborg T *Novel Supercond. Mater.* **1** 37 (2015); arXiv:1507.01093
41. Souza T X R, Marsiglio F *Int. J. Mod. Phys. B* **31** 1745003 (2017); arXiv:1708.07264
42. Shi X et al. *Nature Commun.* **8** 14988 (2017)
43. von Neumann J, Wigner E *Phys. Z.* **30** 467 (1929)
44. Volovik G E, Zubkov M A *Nucl. Phys. B* **881** 514 (2014)
45. Воловик Г Е, Коньшев В А *Письма в ЖЭТФ* **47** 207 (1988); Volovik G E, Konyshev V A *JETP Lett.* **47** 250 (1988)
46. Klinkhamer F R, Volovik G E *Int. J. Mod. Phys. A* **20** 2795 (2005); hep-th/0403037
47. Воловик Г Е, Горьков Л П *ЖЭТФ* **88** 1412 (1985); Volovik G E, Gor'kov L P *Sov. Phys. JETP* **61** 843 (1985)
48. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **105** 245 (2017); *JETP Lett.* **105** 273 (2017); arXiv:1701.01075
49. Creutz M *JHEP* **2008** (04) 017 (2008)
50. Creutz M *Ann. Physics* **342** 21 (2014)
51. Nielsen H B, Ninomiya M *Nucl. Phys. B* **185** 20 (1981); *Nucl. Phys. B* **193** 173 (1981)
52. Soluyanov A A et al. *Nature* **527** 495 (2015)
53. Huhtala P, Volovik G E *ЖЭТФ* **121** 995 (2002); *JETP* **94** 853 (2002); gr-qc/0111055
54. Li D et al. *Phys. Rev. B* **95** 094513 (2017)
55. Alidoust M, Halterman K, Zyuzin A A *Phys. Rev. B* **95** 155124 (2017)
56. Воловик Г Е *Письма в ЖЭТФ* **104** 660 (2016); Volovik G E *JETP Lett.* **104** 645 (2016); arXiv:1610.00521
57. Painlevé P C.R. *Acad. Sci.* **173** 677 (1921); Gullstrand A *Arkiv. Mat. Astron. Fys.* **16** (8) 1 (1922)
58. Unruh W G *Phys. Rev. Lett.* **46** 1351 (1981)
59. Unruh W G *Phys. Rev. D* **51** 2827 (1995)
60. Kraus P, Wilczek F *Mod. Phys. Lett. A* **9** 3713 (1994)
61. Nissinen J, Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **105** 442 (2017); *JETP Lett.* **105** 447 (2017); arXiv:1702.04624
62. Heikkilä T T, Volovik G E *New J. Phys.* **17** 093019 (2015); arXiv:1505.03277
63. Autti S et al. *Phys. Rev. Lett.* **117** 255301 (2016)
64. Mikitik G P, Sharlai Yu V *Phys. Rev. B* **73** 235112 (2006)
65. Mikitik G P, Sharlai Yu V *ФНТ* **34** 1012 (2008); *Low Temp. Phys.* **34** 794 (2008)
66. Mikitik G P, Sharlai Yu V *Phys. Rev. B* **90** 155122 (2014)
67. Takane D et al., arXiv:1708.06874

68. Hyart T, Heikkilä T T *Phys. Rev. B* **93** 235147 (2016)  
69. So H *Prog. Theor. Phys.* **74** 585 (1985)  
70. Ishikawa K, Matsuyama T *Z. Phys. C* **33** 41 (1986)  
71. Ishikawa K, Matsuyama T *Nucl. Phys. B* **280** 523 (1987)  
72. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015 (1988)  
73. Воловик Г Е *ЖЭТФ* **94** (9) 123 (1988); Volovik G E *Sov. Phys. JETP* **67** 1804 (1988)  
74. Kourtis S et al. *Phys. Rev. B* **96** 205117 (2017); arXiv:1708.04244  
75. Rombouts S M A, Dukelsky J, Ortiz G *Phys. Rev. B* **82** 224510 (2010)

### Exotic Lifshitz transitions in topological materials

#### G.E. Volovik

*Low Temperature Laboratory, Aalto University, P.O. Box 15100, FI-00076 Aalto, Finland;  
Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation;  
Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
E-mail: volovik@ltd.tkk.fi, volovik@itp.ac.ru*

Topological Lifshitz transitions involve many types of topological structures in momentum and frequency-momentum spaces, such as Fermi surfaces, Dirac lines, Dirac and Weyl points, etc., each of which has its own stability-supporting topological invariant ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $\tilde{N}_3$ , etc.). The Fermi surface and Dirac line topologies and the interconnection of objects of different dimensionality produce a variety of Lifshitz transition classes. Lifshitz transitions have important implications for many areas of physics. To give examples, transition-related singularities can increase the superconducting transition temperature; Lifshitz transitions are the possible origin of the small masses of elementary particles in our Universe; a black hole horizon serves as the surface of Lifshitz transition between the vacua with type-I and type-II Weyl points, etc.

**Keywords:** topological Lifshitz transitions, Fermi surface, Dirac point, Weyl point, black hole event horizon

PACS numbers: **04.70. -s**, **71.30. +h**, **73.22. -f**

Bibliography — 75 references

*Received 29 August 2017*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **188** (1) 95–105 (2018)

*Physics–Uspekhi* **61** (1) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.01.038218>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.01.038218>