

# **THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité:

SOLIDES, STRUCTURES ET SYSTEMES MECANIQUES

Présentée par:

**Pascale KANOUTÉ**

Pour obtenir le titre de:

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VI**

Titre de la thèse:

**ETUDE DU COMPORTEMENT HYGROMECANIQUE DE  
MATERIAUX COMPOSITES A MATRICE POLYMERIQUE**

**APPLICATION A L'ANALYSE DE LA STABILITE DIMENSIONNELLE DE  
STRUCTURES DE DETECTEURS DE PARTICULES**

*Document provisoire*

Membres du jury:

Monsieur	A.R. BUNSELL	Rapporteur
Monsieur	D. MARQUIS	Rapporteur
Madame	H. DUMONTET	Examinateur
Monsieur	C. HAUILLER	Examinateur
Monsieur	J. LEMAITRE	Examinateur
Madame	F. LÉNÉ	Examinateur
Monsieur	B. NIQUEVERT	Examinateur

Laboratoire de Modélisation et Mécanique des Structures  
U.R.A. 1776 du CNRS  
U.P.M.C./E.N.S.A.M./E.N.S. CACHAN  
U.P.M.C.-Tour 66- 5ème Etage  
4, Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05



# Table des Matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre I Stabilité dimensionnelle de détecteurs de particules</b>	<b>13</b>
<b>I.1 Le projet du Large Hadron Collider (LHC)</b>	<b>15</b>
1 Présentation . . . . .	15
2 L'accélérateur LHC . . . . .	16
3 Les deux grandes expériences polyvalentes du LHC: ATLAS et CMS . . . . .	17
3.1 Prinipe de la détection des particules . . . . .	17
3.2 Le détecteur ATLAS . . . . .	18
3.2.1 Descriptif général . . . . .	18
3.2.2 Le trajectographe interne : “ <i>Inner detector</i> ” . . . . .	18
3.3 Le détecteur CMS . . . . .	19
3.3.1 Le détecteur . . . . .	19
3.3.2 Le trajectographe interne: “ <i>Inner Tracker</i> ” . . . . .	20
<b>I.2 Stabilité dimensionnelle dans les expériences du LHC</b>	<b>23</b>
1 Structures des trajectographes internes . . . . .	23
1.1 Un exemple: la roue du barrel MSGC . . . . .	23
1.2 Critères de conception des structures supports . . . . .	23
2 Le concept de stabilité dimensionnelle . . . . .	25
2.1 Définition . . . . .	25
2.2 Facteurs influençant la stabilité dimensionnelle dans les expériences du LHC . . . . .	26
3 Quel choix de matériau? . . . . .	26
3.1 Les métaux . . . . .	26
3.2 Composites à fibres de carbone et matrice polymérique . . . . .	27
3.3 Composites à matrice métallique . . . . .	27
3.4 Composites à matrice céramique ou à matrice inorganique . . . . .	28
3.5 Composites carbone/carbone . . . . .	28
<b>I.3 Effets de l'humidité ambiante sur les matériaux composites</b>	<b>29</b>
1 Effets de l'humidité sur les renforts fibreux . . . . .	29
1.1 Analyse chimique . . . . .	29
1.2 Absorption d'eau par les fibres . . . . .	30
2 Effets de l'humidité sur les matrices polymères . . . . .	31
2.1 Analyse chimique . . . . .	31
2.2 Absorption d'eau . . . . .	32
2.3 Veillissement physique et chimique des résines polymères . . . . .	33
2.3.1 Phénomènes réversibles . . . . .	33
Plastification . . . . .	33
Gonflement différentiel . . . . .	33
2.3.2 Veillissement irréversible . . . . .	34
Hydrolyse . . . . .	34

Lessivage . . . . .	34
Fissuration . . . . .	35
3     Effets de l'humidité sur les matériaux composites . . . . .	35
3.1   Absorption d'eau et vieillissement . . . . .	35
3.2   L'interface et son comportement en présence d'eau . . . . .	35
3.2.1   Nature de l'interface . . . . .	35
3.2.2   Traitement des fibres . . . . .	36
3.2.3   Le comportement de l'interface en présence d'eau . . . . .	37
4     Présentation de l'Etude . . . . .	37
<b>Chapitre II   Comportement Hygroscopique de Matériaux Composites</b>	<b>39</b>
<b>II.1   Modélisation des phénomènes d'absorption d'humidité dans les matériaux</b>	<b>41</b>
1     Modèle de Fick . . . . .	41
1.1   Description du modèle . . . . .	41
1.2   Prise en compte de l'humidité ambiante . . . . .	42
1.3   Solution analytique dans une plaque plane homogène de dimension infinie . . . . .	43
1.3.1   Hypothèses et conditions aux limites et initiales . . . . .	43
1.3.2   Profils de la concentration d'humidité . . . . .	44
1.3.3   Masse de liquide absorbé . . . . .	44
1.4   Caractérisation du coefficient de diffusion . . . . .	46
1.4.1   Cas d'une plaque de dimension infinie . . . . .	46
1.4.2   Correction des effets de bord . . . . .	46
1.5   Modèles de prédiction du comportement diffusif des composites . . . . .	48
1.5.1   Le Modèle de Springer . . . . .	48
1.5.2   D'autres modèles d'homogénéisation . . . . .	49
2     Modèle de Langmuir . . . . .	49
2.1   Description du modèle dans un milieu homogène . . . . .	49
2.2   Solution analytique dans une plaque plane . . . . .	50
2.2.1   Profil de la concentration d'humidité . . . . .	50
2.2.2   Masse de liquide absorbé . . . . .	50
2.3   Détermination des paramètres du modèle . . . . .	52
3     Influence de la température . . . . .	52
3.1   Loi d'Arrhenius . . . . .	52
3.2   Couplage humidité-température: Effet de Dufour et Soret . . . . .	53
3.2.1   Description du modèle . . . . .	53
3.2.2   Définition et détermination des paramètres introduits . . . . .	54
<b>II.2   Caractérisation expérimentale de l'absorption d'humidité</b>	<b>55</b>
1     Techniques et méthodes expérimentales . . . . .	55
1.1   Description du dispositif experimental . . . . .	55
1.1.1   L'environnement . . . . .	55
1.1.2   Mesures gravimétriques . . . . .	55
1.2   Choix et description des échantillons testés . . . . .	57
1.2.1   Géométrie des échantillons . . . . .	57
1.2.2   Matériaux . . . . .	58
Les fibres de carbone . . . . .	58
Résine Epoxyde . . . . .	58
Résine Cyanate Ester . . . . .	59
Carbone/Carbone . . . . .	59
1.3   Conditions d'essai . . . . .	60
2     Cinétique d'absorption des résines . . . . .	60
2.1   Analyse du gain en poids en eau . . . . .	60
2.1.1   Résine Epoxy . . . . .	60

	2.1.2	Résine cyanate ester . . . . .	62
2.2	Analyse des dégradations . . . . .	65	
	2.2.1	Caractérisation chimique . . . . .	65
	2.2.2	Réticulation: analyse thermique différentielle . . . . .	66
2.3	Identification du modèle de diffusion . . . . .	70	
	2.3.1	Résine Epoxy . . . . .	70
	2.3.2	Résine cyanate ester . . . . .	72
2.4	Influence de l'humidité ambiante . . . . .	73	
3	Cinétique d'absorption des composites . . . . .	74	
3.1	Analyse du gain poids en eau des composites . . . . .	74	
	3.1.1	Composites unidirectionnels . . . . .	74
		Composite Carbone T300/Epoxy 1808N . . . . .	74
		Composite Carbone T300/Cyanate Ester "Rosalie" . . . . .	76
		Composites Carbone/Carbone . . . . .	76
	3.1.2	Composites stratifiés . . . . .	80
3.2	Influence de l'humidié ambiante . . . . .	81	
3.3	Modèles des cinétiques d'absorption . . . . .	82	
4	Récapitulatif . . . . .	83	
4.1	Absorption d'eau-Choix de matériaux . . . . .	83	
4.2	Validité des modèles de la littérature . . . . .	83	
	4.2.1	Résines pures . . . . .	84
	4.2.2	Composites . . . . .	84
4.3	Rôle présumé des interfaces . . . . .	84	
<b>II.3</b>	<b>Modélisation du rôle des interfaces sur le comportement hygroscopique</b>	<b>85</b>	
1	Modèles d'Interface . . . . .	85	
1.1	Les modèles d'interfaces/interphases/intercouches . . . . .	85	
	1.1.1	Le modèle d'interface parfaite . . . . .	85
	1.1.2	Modèles d'interphase ou d'intercouche . . . . .	85
	1.1.3	Modèles d'interface imparfaite . . . . .	86
1.2	Modèle d'interface diffusive . . . . .	86	
	1.2.1	La technique des développements asymptotiques . . . . .	86
	1.2.2	Le principe . . . . .	87
	1.2.3	Interfaces piégeantes et fortement diffusives . . . . .	88
	1.2.4	Interfaces fortement piégeantes . . . . .	91
	1.2.5	Cas particulier: modèle de diffusion de Fick . . . . .	91
1.3	Interfaces interlaminaires . . . . .	92	
2	Comportement homogène équivalent d'un composite à renforts unidirectionnels . . . . .	92	
2.1	Les techniques d'homogénéisation . . . . .	92	
2.2	L'approche de l'homogénéisation périodique . . . . .	93	
	2.2.1	Le principe . . . . .	93
	2.2.2	Comportement diffusif équivalent en présence d'interfaces diffusives et piégeantes	95
	2.2.3	Comportement diffusif équivalent en présence d'interfaces avec des propriétés de piégeage . . . . .	100
	2.2.4	Cas particulier du modèle de diffusion de Fick . . . . .	100
	2.2.5	Interprétation des coefficients de diffusion homogénéisés . . . . .	101
2.3	L'approche auto-cohérente . . . . .	102	
	2.3.1	Notations.Position du problème . . . . .	102
	2.3.2	Approche Primale . . . . .	102
		Premier cas de charge . . . . .	103
		Second cas de charge . . . . .	104
2.4	Résultats et Commentaires . . . . .	105	
3	Comportement homogène équivalent d'un composite stratifié . . . . .	108	
3.1	Hypothèses . . . . .	108	

3.2	Le comportement homogénéisé des stratifiés épais . . . . .	109
3.3	Stratifiés minces . . . . .	109
<b>II.4</b>	<b>Comparaison Modélisation-Expérience</b>	<b>111</b>
1	Cas du composite à base de résine époxyde . . . . .	111
1.1	Coefficients de diffusion . . . . .	111
1.2	Probabilités de piégeage et de dépiégeage . . . . .	111
2	Composite à base de résine cyanate ester "Rosalie" . . . . .	114
2.1	Coefficients de diffusion . . . . .	114
2.2	Probabilités de piégeage et de dépiégeage . . . . .	114
<b>Chapitre III Comportement Hygroélastique de Matériaux Composites</b>		<b>117</b>
<b>III.1</b>	<b>Modélisation du comportement hygroélastique de matériaux composites : Bibliographie</b>	<b>119</b>
1	Loi de comportement hygrothermoélastique . . . . .	119
2	Le tenseur d'expansion hygrométrique . . . . .	120
3	Modèles de prédiction du comportement hygroélastique de matériaux composites à fibres unidirectionnelles . . . . .	121
<b>III.2</b>	<b>Caractérisation expérimentale</b>	<b>123</b>
1	Techniques et méthodes expérimentales . . . . .	123
1.1	Principe des mesures de déplacements différentiels: métrologie . . . . .	123
1.1.1	Description du dispositif expérimental . . . . .	123
1.1.2	Conditions d'essais . . . . .	125
1.2	Degradiations mécaniques réversibles ou irréversibles . . . . .	125
1.2.1	Description du dispositif expérimental de flexion trois points . . . . .	125
1.2.2	Microscope électronique à balayage . . . . .	125
2	Caractérisation des coefficients d'expansion hygrométrique . . . . .	126
2.1	Les résines pures . . . . .	126
2.1.1	Résine Epoxy . . . . .	126
2.1.2	Résine Cyanate Ester . . . . .	128
2.2	Composites . . . . .	130
2.2.1	Cas des unidirectionnels . . . . .	130
	Composite à base de résine époxy 1808N . . . . .	130
	Composite à base de résine cyanate ester Rosalie . . . . .	131
2.2.2	Cas des stratifiés . . . . .	132
2.3	Recapitulatif: Influence de l'humidité sur les propriétés de gonflement . . . . .	133
2.3.1	Les résines pures . . . . .	133
2.3.2	Les composites . . . . .	134
2.4	Comparaison modélisation/experience des coefficients d'expansion hygrométrique . . . . .	134
3	Influence de l'humidité sur le comportement élastique . . . . .	136
3.1	Evolution du module d'Young . . . . .	136
3.2	Observations de décohésions aux interfaces . . . . .	137
4	Récapitulatif . . . . .	139
4.1	Choix de matériaux . . . . .	139
4.2	Influence de l'humidité sur les propriétés du matériau . . . . .	140
4.3	Validité des modèles de prédiction de la littérature . . . . .	140
<b>III.3</b>	<b>Modélisation du comportement hygroélastique de composites avec dégradations à l'interface</b>	<b>141</b>
1	Loi de glissement et de décollement à l'interface . . . . .	141
1.1	Loi d'interface imparfaite . . . . .	142
1.2	Loi d'évolution du paramètre d'endommagement . . . . .	143
2	Homogénéisation d'un composite hygroélastique unidirectionnel avec dégradations à l'interface . . . . .	144
2.1	Homogénéisation périodique des milieux à structure fine . . . . .	144

2.1.1	Positions du problème cellulaire. Notations . . . . .	145
2.1.2	Approche Primale . . . . .	146
	Formulation variationnelle . . . . .	147
	Coefficients de raideur homogénéisés . . . . .	148
2.1.3	Approche duale . . . . .	148
2.2	Une méthode approchée en homogénéisation périodique . . . . .	149
2.2.1	Théorème de l'énergie . . . . .	149
2.2.2	Construction d'un champ cinématiquement admissible pour le problème d'élasticité	150
	Construction du champ . . . . .	150
	Les coefficients de raideur simplifiés . . . . .	151
	Calcul des coefficients de raideur simplifiés . . . . .	152
2.2.3	Construction d'un champ cinématiquement admissible pour le problème de couplage élasticité/hygrrométrie . . . . .	153
	Les coefficients d'expansion simplifiés . . . . .	154
	Expression des coefficients d'expansion simplifiés . . . . .	154
2.2.4	Construction d'un champ admissible pour le problème dual d'élasticité . . . . .	155
	Construction du champ . . . . .	155
	Les coefficients de souplesse simplifiés . . . . .	156
	Calcul des coefficients de souplesse simplifiés . . . . .	156
2.2.5	Construction d'un champ admissible pour le problème dual de couplage élasticité et hygrrométrie . . . . .	158
	Construction de ce champ . . . . .	158
	Les coefficients d'expansion simplifiés . . . . .	158
	Expression des coefficients d'expansion simplifiés . . . . .	159
2.3	Analyse des bornes . . . . .	160
3	Homogénéisation du comportement hygroélastique de composites stratifiés avec dégradation interfaciale . . . . .	162
3.1	Le problème cellulaire . . . . .	163
3.2	Obtention des coefficients homogénéisés . . . . .	164
3.2.1	Les coefficients homogénéisés . . . . .	164
3.2.2	Calcul des problèmes cellulaires . . . . .	165
	Calcul du champ $\chi^{ij}(y_3)$ . . . . .	165
	Calcul du champ w . . . . .	166
<b>III.4</b>	<b>Comparaison Modélisation-Expérience</b>	<b>167</b>
1	Cas du composite unidirectionnel à base de résine époxyde . . . . .	167
2	Cas du composite à base de résine cyanate ester Rosalie . . . . .	169
<b>Chapitre IV Analyse de la stabilité dimensionnelle de structures des deux grands détecteurs de particules polyvalents du LHC</b>		<b>171</b>
<b>IV.1</b>	<b>Mise en oeuvre numérique d'une analyse transitoire hygromécanique</b>	<b>173</b>
1	Procédure de Résolution . . . . .	173
	1.1 Résolution du problème de diffusion . . . . .	174
	1.2 Résolution du problème de mécanique . . . . .	174
<b>IV.2</b>	<b>Etude du comportement hygromécanique d'une plaque composite</b>	<b>175</b>
1	Description de la plaque testée . . . . .	175
2	Influence du chargement hygrométrique . . . . .	176
2.1	Taux d'humidité constant . . . . .	176
2.2	Taux d'humidité variable . . . . .	178
2.2.1	Cas de structures sous flux d'air sec . . . . .	178
2.2.2	Cas de structures en milieu ambiant . . . . .	182
3	Influence de la température . . . . .	183

4	Influence de la diffusivité interfaciale . . . . .	185
5	Influence de la décohésion interfaciale . . . . .	186
<b>IV.3</b>	<b>Analyse hygromécanique de structures des détecteurs de particules du LHC</b>	<b>189</b>
1	Le problème de stabilité dimensionnelle sur la roue du TRT Endcap d'ATLAS . . . . .	189
1.1	Description de la roue . . . . .	189
1.2	Implémentation numérique . . . . .	189
1.3	Etude des déplacements . . . . .	191
2	Analyse du système de calibration du trajectographe interne de CMS . . . . .	193
2.1	La structure triangulaire . . . . .	194
2.1.1	Description . . . . .	194
2.1.2	Implémentation numérique . . . . .	194
2.2	La structure en composite sandwich . . . . .	196
2.2.1	Description . . . . .	196
2.2.2	Implémentation numérique . . . . .	196
2.2.3	Etude des déplacements . . . . .	197
<b>Conclusions et Perspectives</b>		<b>203</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>205</b>
<b>A</b>	<b>Méthodes Simplifiées</b>	<b>215</b>
1	Positions du problème. Notations . . . . .	215
2	Approche primale . . . . .	215
2.1	Détermination des raideurs homogénéisées approchées . . . . .	215
2.1.1	Premier cas de charge . . . . .	216
2.1.2	Second cas de charge . . . . .	217
2.1.3	Troisième cas de charge . . . . .	219
2.1.4	Quatrième cas de charge . . . . .	220
2.1.5	Cinquième cas de charge . . . . .	221
2.1.6	Sixième cas de charge . . . . .	222
2.2	Détermination des coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés approchés . . . . .	223
3	Approche duale . . . . .	224
3.1	Détermination des souplesses homogénéisées approchées . . . . .	224
3.1.1	Premier cas de charge . . . . .	225
3.1.2	Second cas de charge . . . . .	227
3.1.3	Troisième cas de charge . . . . .	228
3.1.4	Quatrième cas de charge . . . . .	230
3.1.5	Cinquième cas de charge . . . . .	231
3.1.6	Sixième cas de charge . . . . .	233
3.2	Détermination des coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés approchés . . . . .	233
4	Conclusions et Perspectives . . . . .	234
4.1	Conclusions et Perspectives . . . . .	234

# **Introduction Générale**



C'est aux Etats Unis au cours des années 1940-50 que les premiers matériaux composites à haute performance furent mis au point grâce au souci croissant de l'industrie aéronautique d'obtenir des structures à haute résistance, haut module et faible densité. Depuis, l'utilisation de matériaux composites pour la réalisation de structures à haute performance n'a cessé de croître et ceci dans des domaines aussi divers que les constructions aéronautiques et spatiales, navales, automobiles mais aussi dans le domaine spéciale de la physique des particules. En effet, la volonté permanente du CERN, Laboratoire Européen pour la Physique des Particules, de répondre aux questions les plus fondamentales de la nature comme qu'est ce que la matière ?, d'où vient elle ?, comment s'aggomèrent-elle en formes complexes comme les étoiles, les planètes et les êtres humaines ? l'on conduit à développer des accélérateurs de particules et détecteurs de plus en plus complexes. Le pochain accélérateur de particules, Le Large Hadron Collider, et les immenses détecteurs utilisés pour étudier ce qui se passe lors des collisions entre les faisceaux, présentent ainsi un important défi technologique en informatique, en électronique mais aussi dans la construction même de machines complexes de haute résistance. Les niveaux de précisions requis de ces différents dispositifs, induit la nécessité d'utiliser des matériaux très performants, comme les matériaux composites à fibre de carbone à haut module pour la réalisation des structures mécaniques. Cependant, les différentes utilisations spécifiques de ce type de composites doivent s'accompagner d'une bonne connaissance du matériau, dans l'environnement complexe d'un détecteur de particules en particulier à des niveaux de stabilité requis pour ces structures de l'ordre du quelques microns sur plusieurs mètres cubes.

Ce n'est qu'à partir des années 1970, que les premiers essais de General Dynamic et Fiberite Corporation, mirent en évidence que des échantillons en composite soumis à des environnements humides pendant plusieurs jours perdaient une quantité importante de leurs propriétés à haute température. Depuis, cette période, un grand nombre de chercheurs se sont intéressés au problème du vieillissement humide et thermique des résines et des composites. Notre étude s'inscrit dans ce type de préoccupation en cherchant à caractériser et analyser le comportement de composites à renforts en carbone soumis à des chargements hygromécaniques monotones et cycliques. Trois aspects ont été pour cela développés. Une étude expérimentale a permis de caractériser les effets de variations du taux d'humidité ambiante sur des matériaux composites en fibres de carbone en terme d'absorption d'eau et d'expansion hygrométrique. En conjonction avec ces résultats expérimentaux une modélisation du comportement hygromécanique des composites qui tient compte de l'existence éventuelle de décohésions et de phénomènes de diffusion aux interfaces a été ensuite proposée. Enfin, le dernier aspect du travail a consisté en l'utilisation des modèles développés pour l'aide à la conception et au calcul réelles de détecteurs de particules.

Le *premier chapitre* de ce mémoire sera une présentation du contexte scientifique qui a motivé cette étude. Après une introduction du projet du Large Hadron Collider, nous présenterons les exigences de stabilité dimensionnelle des structures supports des détecteurs de particules de haute énergie, en particulier nous verrons de quelle manière les exigences de précision de ces machines conduisent à utiliser des matériaux composites de haute performance à matrice organique retenus pour leur bonne tenue dans des conditions climatiques variables. Plus précisément les variations du taux d'humidité dans l'environnement d'un détecteur pouvant être importantes, l'accent sera mis sur les effets connus et déjà observés de l'humidité sur les matériaux composites organiques.

Le *second chapitre* concernera l'analyse des phénomènes d'absorption d'eau dans les matériaux composites. Une première partie consistera en un rappel des modèles classiques d'absorption d'eau et de prédiction du comportement des matériaux homogènes et composites. Nous présenterons ensuite le protocole de notre étude expérimentale et les principaux résultats obtenus sur les différents matériaux composites testés. Une analyse et une interprétation détaillées des différents phénomènes observés pour chaque résine et matériaux composites étudiés à différents taux d'humidité sera développée. Une confrontation de ces résultats expérimentaux avec les modèles classiques du comportement diffusif de matériaux composites, qui supposent un contact parfait entre la fibre et la matrice, révélera une certaine insuffisance de ces modèles dans la description des phénomènes d'absorption d'eau dans les matériaux composites. En corrélation avec les observations expérimentales, des modèles enrichis du comportement hygroscopique de composites seront donc proposés à l'aide de techniques asymptotiques et d'homogénéisation. Ces modèles basés sur les lois d'absorption de Fick et de Langmuir tiennent compte de l'existence et du rôle des interfaces sur le processus d'absorption au niveau de leurs propriétés diffusives et de piégeage de l'humidité. La dernière partie de ce chapitre concernera la confrontation de la modélisation proposée et des résultats expérimentaux.

Le *troisième chapitre* construit suivant le même schéma concernera l'étude des phénomènes d'expansion hygrométrique dans les matériaux composites. Tout d'abord, nous rappelerons les modèles classiques de description

du comportement hygroélastique de matériaux composites et tout particulièrement des phénomènes de gonflement. Une étude expérimentale permettra de caractériser les coefficients d'expansion hygrométrique des différents matériaux testés et mettra en évidence des phénomènes de décohésions aux interfaces. Dans la troisième partie de ce chapitre une modélisation du comportement hygroélastique de matériaux composites par un processus d'homogénéisation et tenant compte de la présence de phénomènes de décohésions aux interfaces sera proposée. Nous terminerons ce chapitre en confrontant la modélisation aux résultats expérimentaux.

Le *dernier chapitre* de ce mémoire concerne la mise en oeuvre des outils d'analyse développés précédemment, dans l'objectif de l'aide à la conception et au calcul de structures de détecteurs de particules. La première partie concernera une étude numérique de l'influence des différents paramètres physiques tels que les interfaces, le taux d'humidité, le chargement monotone ou cyclique sur le comportement hygromécanique transitoire de structures composites. La seconde partie de ce chapitre est relative au calcul de stabilité dimensionnelle sous des variations climatiques du milieu environnant de structures réelles des détecteurs de particules ATLAS et CMS.

## **Chapitre I**

# **Stabilité dimensionnelle de détecteurs de particules**



# I.1 Le projet du Large Hadron Collider (LHC)

L'étude menée dans ce travail s'inscrit dans le cadre du projet du Large Hadron Collider développé actuellement au CERN. Nous nous intéresserons en effet à des structures supports de détecteurs de particules. La stabilité dimensionnelle de ces structures requise pour le bon déroulement des expériences nous conduit à nous intéresser à l'influence de l'environnement sur leur comportement. Dans ce paragraphe, nous présentons les grandes lignes du projet de façon à positionner les structures étudiées dans leur environnement applicatif.

## 1 Présentation

Le Grand Collisionneur de Hadrons, le LHC, en cours de développement au CERN (Laboratoire Européen pour la Physique des Particules), sera le premier accélérateur à produire des collisions de quarks et de gluons, constituants du proton, à des énergies de l'ordre du TeV ainsi que des collisions de noyaux de plomb avec une énergie supérieure à 1250 TeV. Cet accélérateur devrait ainsi permettre aux scientifiques de pénétrer un peu plus dans la structure de la matière et de recréer les conditions présentes dans l'Univers juste  $10^{-12}$  seconde après le Big-Bang quand la température était de  $10^{16}$ K. La frontière des hautes énergies sera explorée par deux détecteurs protons-protons, ATLAS et CMS.

La compréhension actuelle des quatre forces apparemment indépendantes de la Nature qui agissent sur la matière est décrite dans le Modèle Standard. Certaines de ces forces se manifestent jusqu'à notre échelle; c'est le cas des forces électromagnétiques (aimants) et gravitationnelles (chute de corps). Les forces dite "forte" et "faible" n'ont qu'un rayon d'action très faible, c'est-à-dire inférieur à environ  $10^{-13}cm$ ; ce n'est qu'indirectement que nous en prenons conscience. Dans ce Modèle Standard sont introduits trois types de particules fondamentales, qui permettent de rendre compte de toute la matière ordinaire: les leptons, les quarks, et les bosons. Le Modèle Standard laisse néanmoins sans solutions de nombreuses énigmes comme: pourquoi notre univers contient-il davantage de matière que d'antimatière? ou qu'est-ce que la masse? ou encore quelle est son origine? Le LHC est conçu pour tenter d'apporter une réponse à ces questions en permettant pour la première fois à des particules massives appelées Boson de Higgs de se manifester. Avant de décrire plus précisément cette expérience, il peut être intéressant de répondre à certaines questions générales concernant la physique des hautes énergies; ainsi :

- Pourquoi faut-il mettre en jeu des hautes énergies?
- Pourquoi des collisionneurs le permettent-ils ?
- Pourquoi faut-il des luminosités élevées?
- Pourquoi les accélérateurs sont-ils si grands?

Pour explorer la structure intime de la matière, il nous faut opérer avec un bon microscope. La longueur d'onde de la sonde va déterminer la dimension de l'objet que l'on pourra observer. Plus cet objet sera petit, plus courte devra être la longueur d'onde. Or, plus l'énergie d'une particule augmente, plus son onde vibre, c'est-à-dire que sa longueur d'onde devient plus courte et que donc la résolution spatiale augmente. Pour le LHC, la longeur d'onde est de l'ordre de  $10^{-17}cm$  alors qu'un microscope optique normal a une longueur d'onde d'environ  $10^{-5}cm$  ce qui permet de l'utiliser pour descendre à l'échelle des bactéries. C'est donc la première raison qui explique la nécessité d'utiliser de hautes énergies. En outre, nous savons également que l'énergie et la masse sont interchangeables. On peut convertir l'énergie cinétique (du mouvement) en masse en arrêtant une particule qui se déplace rapidement au moyen d'une autre particule servant "d'obstacle". Lors de l'impact, l'énergie et la masse sont redistribuées et

des particules "nouvelles" peuvent apparaître dans les débris de la collision. Plus l'énergie de l'impact sera élevée, plus ces nouvelles particules pourront être massives. Le boson de Higgs est un exemple de ces particules massives, qui n'a pas encore été mis en évidence expérimentalement. Il est attendu que le LHC couvrira une grande partie de la région où se situerait la masse du boson de Higgs.

On peut arrêter des particules énergétiques soit en extrayant un faisceau de particules d'un accélérateur et en le projetant sur une cible fixe, soit en faisant se croiser à des emplacements fixes où sont installés des expériences deux faisceaux tournant en sens opposés dans un accélérateur. Le principal avantage de la physique avec cibles fixes est la souplesse. On peut aisément changer le type de cible et les faisceaux extraits peuvent être répartis entre différentes expériences. Mais il y a avec ce type d'accélérateur un important problème d'énergie perdue lors de la collision. Lorsqu'une particule en mouvement heurte une particule stationnaire, la majeure partie de son énergie cinétique est absorbée par le recul de la cible et n'est donc pas exploitable. Quand des particules d'impulsions égales mais opposées entrent en collision frontale, le centre de masse est immobile et l'énergie de l'interaction est la somme des énergies incidentes. Ainsi un collisionneur permet d'obtenir une plus grande énergie d'interaction avec la même énergie de faisceau.

Dans un collisionneur, l'intensité, c'est-à-dire le nombre de particules dans les deux faisceaux, et les dimensions de la zone où ils se croisent déterminent ensemble la brillance de la source d'interaction, la luminosité de la machine. Or les probabilités des processus élémentaires diminuent lorsque l'énergie augmente. Le taux d'événements intéressants est ainsi très faible. Et donc pour que les taux d'interaction soient maintenus jusqu'à des niveaux observables par l'expérimentation, la luminosité doit être accrue sensiblement jusqu'à la limite que la machine et les détecteurs peuvent supporter. Le LHC mettra en collision des protons avec des protons afin d'obtenir le niveau de luminosité requis. Une double chambre accélératrice de faisceaux de particules est nécessaire étant donné que les deux faisceaux doivent circuler en sens opposés.

Enfin, la principale raison qui conditionne les grandes dimensions des accélérateurs est que les aimants qui ont pour rôle de maintenir les particules en orbite ont une force magnétique "limitée". Les accélérateurs installés dans des circuits circulaires, nécessitent de grandes circonférences car plus le cercle est petit, plus il faut de force pour courber la trajectoire des particules. C'est pourquoi le LEP, le Grand collisionneur électron-positron, en cours d'exploitation au CERN fut construit sur une circonférence de 27km.

## 2 L'accélérateur LHC

Le LHC sera installé dans le tunnel de 27km de circonférence du LEP [129, 130]. Les deux faisceaux de protons, chacun avec une énergie de 7 TeV, circuleront dans des directions opposées, et entreront en collision à des points d'interaction bien précis où se situeront les expériences.

Les deux faisceaux de haute énergie exigent des champs magnétiques de courbure élevés parce qu'il était impossible d'accroître le rayon de la machine pour obtenir des courbes moins prononcées. Par conséquent, pour incurver la trajectoire de protons de 7TeV autour de l'anneau, il faut que les dipôles du LHC soient capables de produire des champs de 8,4 teslas, soit près de cent mille fois le champ magnétique terrestre. Des aimants supraconducteurs seront alors utilisés. La supraconductivité est la propriété qu'ont certains matériaux de conduire l'électricité sans résistance, ni perte d'énergie, généralement à de très basses températures. Les aimants supraconducteurs du LHC seront ainsi disposés dans un bain d'hélium superfluide à 1.9K à la pression atmosphérique.

Comme il a été mentionné, pour produire des interactions intéressantes avec des fréquences détectables, il faut que le LHC ait une luminosité élevée, ce qui signifie des densités de courant élevées et des collisions de faisceau précises. La luminosité nominale du LHC est de  $10^{34} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cependant, une des plus importantes limitations vient de ce qu'on appelle l'effet de décalage faisceau-faisceau, dû à des forces électromagnétiques fortement non linéaires, qui brouillent les contours des faisceaux lorsqu'ils se croisent, d'où la nécessité d'une optique de haute précision assurant une focalisation forte du faisceau. Les faisceaux seront accélérés en leur appliquant des impulsions répétées qui leur confèrent une structure en paquets. Chaque faisceau contiendra 2835 paquets espacés de 7,5m, soit un intervalle de croisement des paquets de 25 nanosecondes. Afin d'éviter qu'ils entrent en collision en dehors des zones d'interaction, les protons seront comprimés dans chaque paquet et mis en collision sur un très petit angle de focalisation. Outre le niveau de luminosité, une autre mesure importante des performances de

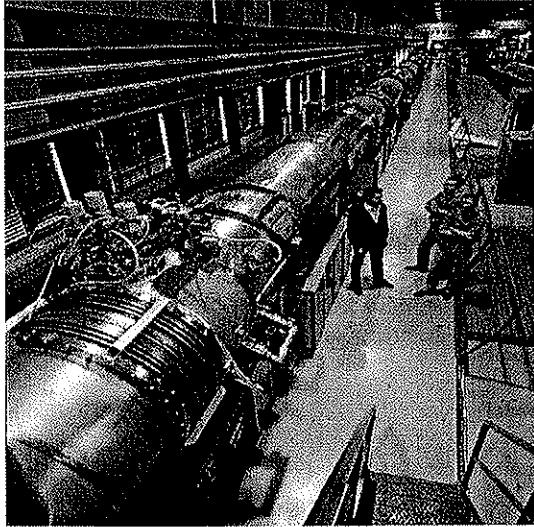


Figure I.1.1: Première section prototype du LHC testé au CERN

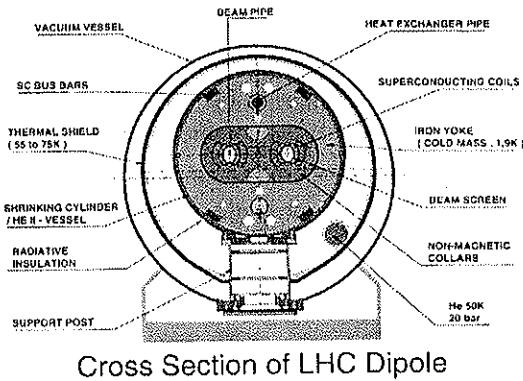


Figure I.1.2: Section du grand Collisionneur de hadrons

l'accélérateur est la durée de vie de la luminosité. La qualité du faisceau diminue en effet du fait des collisions avec l'air présent dans les tubes. Pour réduire cet effet, les tubes seront pompés jusqu'à une pression de  $10^{-10}$  torrs.

### 3 Les deux grandes expériences polyvalentes du LHC: ATLAS et CMS

Deux détecteurs protons-protons ATLAS et CMS sont en cours d'élaboration pour étudier les événements produits lors des collisions de protons entre les faisceaux du LHC. Un autre détecteur, ALICE, est spécialement conçu pour étudier les collisions entre des noyaux de plomb, qui engendreront des densités d'énergie et des températures élevées nous ramenant au Big-Bang. Le quatrième détecteur, le LHC-b, sera voué à l'étude de la beauté (incarnée par le quark  $b$ ) et de la physique qui lui est rattaché. Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire brièvement les deux détecteurs polyvalents, ATLAS et CMS dont la conception mécanique nous intéresse ici.

#### 3.1 Prinipe de la détection des particules

Malgré de grosses différences de principe, les détecteurs ATLAS et CMS ont certains éléments semblables. Ces détecteurs permettent d'observer une série d'interactions, de décider lesquelles sont intéressantes, d'identifier des particules dans les événements sélectionnés et de mesurer leur énergie et leur impulsion (masse, vitesse, et direction du mouvement). Ils sont réalisés sous la forme d'assemblages de détecteurs secondaires qui augmentent du centre vers la périphérie, et étant chacun conçus pour une tâche particulière (voir Figure I.1.3). Plus précisément :

- La partie centrale d'un détecteur contient des trajectographes, qui permettent de reconstituer l'origine ponctuelle commune des particules émergentes et de mesurer leur impulsion et également d'intercepter les particules de basse énergie ou à vie brève. Il faut qu'ils soient suffisamment précis pour distinguer une trajectoire d'une autre dans une région intérieure de forte densité. Ils doivent également tolérer des débits de dose et de données élevés.
- Les calorimètres électromagnétiques (placés autour de la partie centrale) absorbent et mesurent l'énergie des électrons et des photons qui créent des électrons avec un matériau de matérialisation spécialement choisi.
- Le calorimètre hardronique qui vient ensuite doit être suffisamment épais pour absorber et mesurer l'énergie de toutes les particules et jets de particules à interaction forte (protons, neutrons,...).

- Le spectromètre à muons entoure ce calorimètre et mesure les trajectoires des muons pour déterminer leurs impulsions avec une grande précision. Les muons, particules ressemblant aux électrons mais 200 fois plus lourdes, sont les seules particules détectables et capables de traverser tout l'absorbeur du calorimètre sans être arrêtées.
- Enfin un aimant supraconducteur a la charge de séparer les particules chargées et incurve leurs trajectoires de manière à pouvoir mesurer leur impulsion.

Au cours de leur cheminement dans les détecteurs secondaires, les particules produisent des signaux, par exemple sous la forme de petits éclairs ou d'impulsions électriques. Ces signaux sont détectés par des systèmes électroniques et transportés hors du détecteur. A l'extérieur, ces signaux sont amplifiés, lus, traités et enregistrés dans ce que l'on appelle le système d'acquisition des données pour être ensuite analysés.

### 3.2 Le détecteur ATLAS

#### 3.2.1 Descriptif général

Le détecteur ATLAS, Appareillage toroïdal pour le LHC (*A Toroidal Lhc ApparatuS*) présente un grand aimant toroïdal supraconducteur rempli par l'air ambiant et non du fer comme c'est le cas du détecteur CMS. Avec une longueur de 26m et un rayon interne de 5m et extérieur de 10m, il produira un champ magnétique de 0,8 tesla entre ces rayons. Il est complété par un solénoïde supraconducteur interne de 1,2m de rayon et de 6,8 m de long qui produit un champ de 2 teslas dans le volume central de trajectographie. Ainsi, les particules décrivent des courbes dont on mesure les paramètres pour en déduire leur impulsion, leur direction et le signe de leur charge électrique.

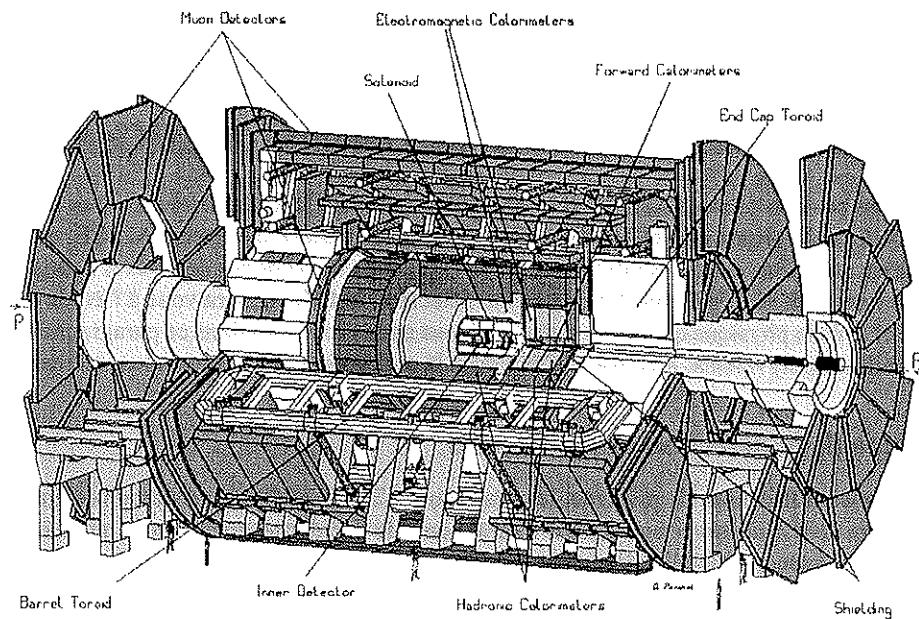


Figure I.1.3: Appareillage toroïdal pour le LHC; ATLAS

Le détecteur ATLAS, comme nous pouvons le voir sur la Figure I.1.3 comporte trois couches de chambres à muons, en amont, à l'intérieur et en aval des bobines du toroïde. Ces chambres à muons mesureront jusqu'à 6m de longueur. La grande difficulté consistera à obtenir une bonne résolution sur la position de l'ordre de 100 micromètres et un positionnement relatif précis de l'ordre de 50 micromètres sur des distances de l'ordre de 50m.

#### 3.2.2 Le trajectographe interne : “*Inner detector*”

La partie centrale du détecteur, que l'on appelle l’“*Inner Detector*” a un diamètre de 2.3m et fait 6.8m de long. C'est la première partie traversée par les particules créées lors des collisions. Comme nous l'avons déjà men-

tionné, le trajectographe est dédié à la reconstruction et à la mesure de l'impulsion des traces isolées des particules chargées créées lors des collisions. Il est formé d'une région centrale, "le barrel", où la plupart des détecteurs sont disposés tangentiellement à des cylindres concentriques et de deux régions avant, "le forward", avec des éléments de détection radiaux (Figure I.1.4).

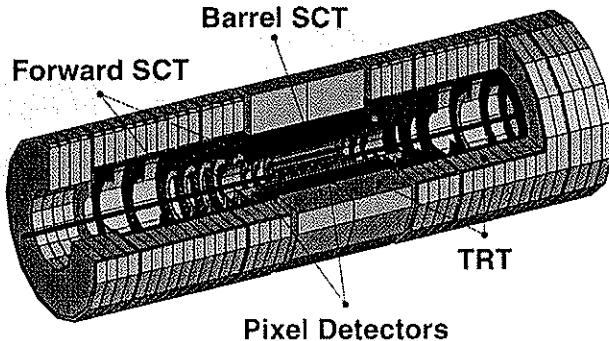


Figure I.1.4: Trajectographe interne de ATLAS: le "Inner detector"

Chaque élément de détection est basé sur le même principe. Les particules, lorsqu'elles traversent un détecteur, entrent en collision avec des atomes dont elles libèrent des électrons. Ces électrons sont attirés par le "fil" positif le plus proche. L'arrivée d'un électron sur ce fil crée alors une impulsion électrique qui est amplifiée et ensuite traitée. Trois types d'éléments de détection sont ainsi répartis dans le détecteur :

- les détecteurs à pixels qui sont utilisés près de l'axe du détecteur. Les détecteurs à pixels sont comme de petites cellules de silicium où les éléments du détecteur sont microsoudés sur les circuits de lecture. Ces détecteurs sont conçus pour fournir une très grande précision sur des mesures réalisées aussi près que possible du point d'interaction des particules. Le système permet de déterminer la résolution des paramètres d'impact et la capacité de "l'inner detector" à détecter les particules de courte durée de vie. La résolution est de  $12\mu m$  dans le plan azimutal et  $66\mu m$  selon l'axe.
- les bandes de silicium (*Silicon Strip*) qui sont conçues de manière à fournir quatre mesures précises par trace dans la région radiale intermédiaire. Elles sont définies également de manière à contribuer à la mesure du moment, des paramètres d'impact, de la position du vertex, et à permettre une bonne reconnaissance de la trace en utilisant une grande granularité. La résolution spatiale de ces éléments est de  $16\mu m$  dans le plan azimutal et  $580\mu m$  axialement.
- les chambres à pailles (*Straw chamber*) qui sont des éléments de détection pour lesquels le silicium est remplacé par un gaz et qui vont former le trajectographe de rayonnement de Transition (*Transition Radiation Tracker*). Le TRT se divise en trois parties: deux "end-cap" et un "barrel". Les chambres à pailles sont formées de tubes, très minces, appelés les pailles, remplis de gaz et munis d'un fil axial. Ils sont faits à partir de film polyimide d'un côté et d'une couche de polyuréthane insaturé de l'autre côté. Ils sont renforcés par des fibres de carbone collées le long des pailles. Quand une particule chargée traverse une paille, elle ionise le gaz, provoquant ainsi, grâce à la haute tension entre la paroi de la paille et le fil axial, une impulsion électrique qui est enregistrée. La résolution attendue des chambres à pailles est de  $170\mu m$  par paille (ATLAS Inner Detector Technical Design Report [14]).

### 3.3 Le détecteur CMS

#### 3.3.1 Le détecteur

Le détecteur CMS (Solenoïde Compact pour Muons) est basé sur un unique solenoïde supraconducteur de 13m de longueur et d'un rayon de 6m, qui fournira un champ magnétique élevé de 4 teslas. Ce champ élevé permet d'avoir un détecteur compact sans contraintes excessives en ce qui concerne la résolution et l'alignement des détecteurs secondaires.



Figure I.1.5: *Chambres à pailles en cours de montage*

Le détecteur CMS comporte quatre couches de détecteurs de muons noyées dans la culasse en fer de son solenoïde, épaisse de 1,8 m. En raison de la compacité du détecteur, les chambres à muons ont des dimensions relativement modestes qui varient entre 2 et 3 m. La structure globale de CMS mesurera 14 m de haut et 20 m de long pour un poids d'environ 12000 tonnes.

### 3.3.2 Le trajectographe interne: “*Inner Tracker*”

La partie centrale du détecteur, le trajectographe interne ou “inner tracker”, dont le but est de reconstituer les trajectoires des particules, a un diamètre de 2.6 m sur une longueur de 7 m.

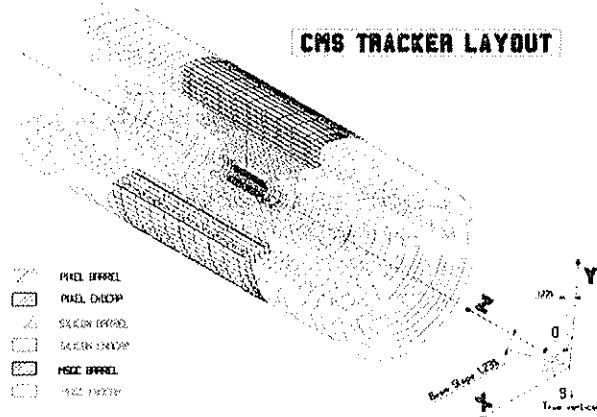


Figure I.1.6: *Le trajectographe interne: le “Inner Tracker”*

Sa structure globale est formée de plusieurs cylindres concentriques partagés en deux régions: la région cylindrique centrale appelée “barrel” et les deux zones latérales sous forme de roues, les “end-cap”. Sur ces cylindres sont disposés différents éléments de détection, qui sont en fait des semi-conducteurs. Un ensemble de trois détecteurs y seront ainsi installés répartis en plusieurs zones, comme nous pouvons le voir sur la Figure I.1.6 :

- la première zone est constituée de détecteurs à pixels. Ils sont disposés sur deux couches situées à un rayon moyen de l’axe des faisceaux de 7.7 cm et 11.7 cm dans la partie centrale et sur deux fois deux roues

couvrant une région radiale de 15 à 30 cm dans les parties latérales.

- la seconde zone d'éléments de détection est constituée de détecteurs à rubans de silicium qui permettent 3 mesures sur une trace avec une résolution de  $15\mu m$  dans le plan azimutal et inférieure à 1 mm dans la direction axiale.
- la zone la plus externe est constituée de détecteurs à chambres gazeuses à microrubans (MSGC). Ces détecteurs sont utilisés dans les zones où une certaine réduction des performances est acceptable. Avec ceux-ci, les électrons produits par les particules traversant un gaz créent des avalanches électroniques lorsqu'ils atteignent une série de minces conducteurs déposés par lithographie sur un support isolant. Cette zone de MSGC permet 7 mesures dans le plan azimutal avec une résolution sur chaque point de  $50\mu m$  et 3 mesures sur la trace dans le plan  $r - z$  avec une résolution de 3mm CMS Tracker Technical Design Report [47].

En conclusion, les trajectographes de CMS et ATLAS auront donc la tâche d'identifier et de mesurer avec une précision de quelques micromètres la trajectoire des particules générées lors des collisions de protons. Les structures mécaniques qui supportent les éléments de détection doivent ainsi être conçues de manière à interagir le moins possible avec la détection des particules. Elles vont donc devoir respecter certains critères de stabilité dimensionnelle que nous nous proposons de décrire maintenant.



## I.2 Stabilité dimensionnelle dans les expériences du LHC

### 1 Structures des trajectographes internes

Les différents éléments de détection des trajectographes internes de CMS et ATLAS décrits précédemment seront le plus couramment vissés, afin de pouvoir être changés facilement sur des structures supports conçues à cet effet. Ces structures diffèrent de par leur géométrie dans les deux expériences mais aussi d'une région à une autre dans le trajectographe interne. On présente ici à titre d'exemple une structure utilisée dans l'expérience CMS. D'autres structures feront l'objet d'une analyse structurelle au chapitre 4.

#### 1.1 Un exemple: la roue du barrel MSGC

La roue du barrel MSGC utilisée dans l'expérience CMS (Figure I.2.1) est formée de quatre disques identiques verticaux reliés entre eux par des cylindres au niveau du rayon intérieur et des panneaux cylindriques sur le rayon extérieur. Les deux disques extérieurs servent à maintenir les baguettes de détection en position. La roue est supportée au niveau de son rayon intérieur par le tube support du trajectographe. Pour des questions de sécurité en cas de fuites de gaz, la roue est enfermée dans une feuille de kapton aluminisé. Les quatre disques supports ont un rayon intérieur de 700 mm et un rayon extérieur de 1200 mm. Ils abritent six couches de détecteurs de  $r = 747 \text{ mm}$  à  $r = 1147 \text{ mm}$ . Ces quatre disques sont connectés les uns aux autres par trois structures cylindriques. Les structures cylindriques et les panneaux ont une épaisseur d'environ 20 mm. Un secteur de disque en composite à fibres de carbone est représenté sur la Figure I.2.2. Le choix de cette géométrie des disques a été guidé par la forme des détecteurs MSGC. Une telle géométrie permet de ne pas avoir d'espace mort pour la détection des particules. Cela permet d'obtenir six points de mesure par trace sur une circonférence de 360°.

#### 1.2 Critères de conception des structures supports

Comme nous l'avons vu, c'est dans les trajectographes internes de CMS et ATLAS que les performances requises sont les plus élevées. C'est pourquoi, la reconstruction des traces des particules à un taux élevé d'interactions à haute luminosité nécessite que les supports mécaniques des différents éléments de détection viennent le moins possible perturber les mesures. La roue du barrel MSGC, ainsi que toutes autres structures supports seront donc conçues selon certains critères, C. Hauviller [98] :

- Ces structures devront d'une part être légères afin d'éviter les effets de dispersion multiples et l'apparition de particules secondaires qui sont dûs à des interactions électromagnétiques se produisant avec des électrons ou des nucléons lorsqu'ils traversent la structure. Bien que la perte d'énergie soit faible, ces larges dispersions créent des erreurs importantes dans la mesure du moment des particules. Ainsi, l'angle de dispersion  $\theta_p$  peut être défini par :

$$\theta_p = \frac{0.014}{\beta p} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \quad (\text{I.2.1})$$

où  $\beta = v/c$ ,  $p$  est le moment mesuré en  $\text{GeV}/c$ ,  $L$  la longueur du matériau traversé par la particule, et  $X_0$  la longueur de radiation du matériau, qui est une valeur intrinsèque. Une expression approximative de la

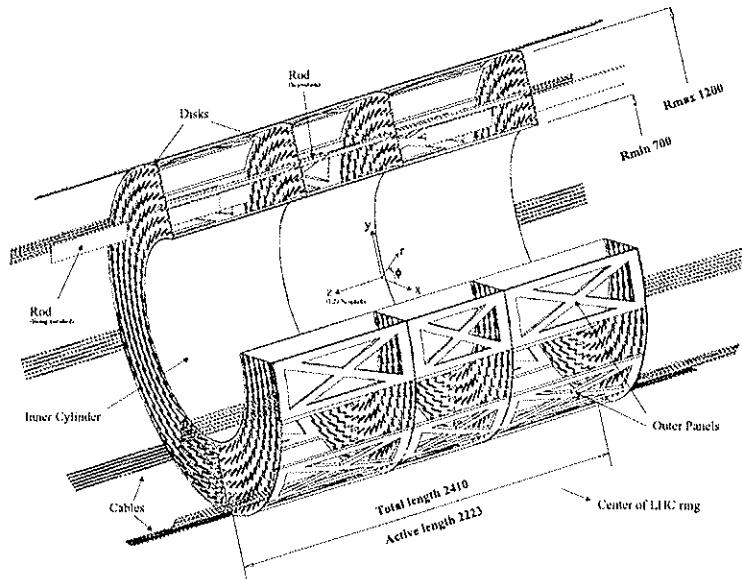


Figure I.2.1: Roue du barrel MSGC de l'expérience CMS.

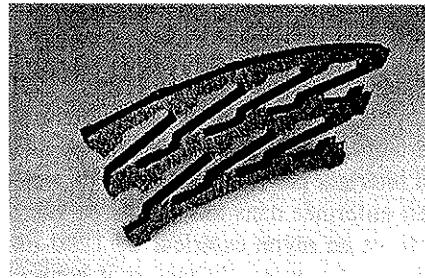


Figure I.2.2: Vue d'une section de la structure en composite renforcé en fibres de carbone du barrel MSGC

longueur de radiation  $X_o$ , exprimée en mètres est donnée par l'équation suivante :

$$X_o = 7.16 \frac{A}{\rho Z(Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z}))} \quad (\text{I.2.2})$$

où  $\rho$  est la densité,  $A$  la masse atomique et  $Z$  le numéro atomique. En première approximation la longueur d'onde est donc indirectement proportionnelle à  $\rho Z$ . On pourra ainsi minimiser les phénomènes de dispersion multiple en utilisant un matériau de faible densité.

- La structure mécanique devra également être très rigide (module d'Young  $E$  élevé). La position des différents éléments de détection devra en effet être très précise pour éviter un désalignement des détecteurs. La précision ainsi demandée par exemple dans la zone des détecteurs à pixels de l'expérience ATLAS, la région la plus proche du faisceau, est de  $5\mu\text{m}$  dans le plan azimutal,  $10\mu\text{m}$  axialement et  $10\mu\text{m}$  radialement. La rigidité des structures supports devra donc être suffisamment élevée pour pouvoir respecter ces précisions. Afin d'éviter des déformations permanentes, le comportement de la structure devra en effet rester dans le domaine élastique. L'exigence d'un module de rigidité élevé combiné avec une minimisation des effets de dispersion multiple conduit ainsi à une maximisation du produit  $EX_0$ .
- La structure devra également dimensionnellement stable au cours du temps. La période de prise de données devant s'effectuer sur une période approximative de 6 mois, il est important que durant cette période une instabilité de la structure support ne vienne pas perturber les mesures de détection.

Nous nous proposons de décrire plus spécifiquement ce dernier critère lié à la stabilité dimensionnelle des structures supports en introduisant ce concept et en présentant les différents facteurs susceptibles de l'influencer.

## 2 Le concept de stabilité dimensionnelle

### 2.1 Définition

La stabilité dimensionnelle d'un matériau peut être définie comme sa capacité à maintenir dans le temps une géométrie donnée. C'est la qualité qui assure que la forme d'une pièce correspond à la géométrie définie lors de la conception, aussi bien à la fin de la mise en oeuvre que durant toute la mise en service. L'instabilité dimensionnelle définie comme des variations involontaires de la forme d'un objet, résulte le plus souvent de processus physiques.

La stabilité dimensionnelle est un critère important pour la sélection et la modification de matériaux notamment pour les polymères (D.H. Morton Jones et J.W. Ellis [147], F.N. Cogswell [50]) et les matériaux composites (G.C. Krumweide et R.A. Brand [120], J.P. Gormican, S. Kulick et E.P. Kasl [83]) dans la réalisation de nombreuses structures. C'est une exigence dans l'interchangeabilité des composants sur une machine qui définit la qualité du processus de fabrication. Un objet devrait pouvoir respecter des dimensions spécifiques même si différentes étapes de la mise en oeuvre soumettent le matériau à des conditions élevées en température ou des contraintes externes, différentes des conditions d'utilisation. Les télescopes réflecteurs pour les satellites, par exemple, doivent permettre d'obtenir une déviation précise et une bonne qualité de surface pour des températures allant de zéro jusqu'à des valeurs extrêmes de part leur exposition au soleil. La forme de structures mécaniques utilisées dans le domaine de l'aérospatiale doit également pouvoir rester inchangée lorsqu'elles sont transférées du milieu ambiant dans des conditions de vide très poussées.

La prise en compte de ce critère de stabilité dans l'analyse, la conception et la fabrication de structures mécaniques nécessite une très bonne connaissance des mécanismes fondamentaux d'instabilité et des facteurs influents. L'analyse de la stabilité dimensionnelle de matériaux a fait l'objet de nombreuses recherches. Les plus récentes portent sur les matériaux composites, dont notamment celles de P. Kim [118], G.C. Krumweide et R.A. Brand [120], E.B. Rabinovitch [157].

Les facteurs provoquant des instabilités dimensionnelles de structures mécaniques diffèrent évidemment selon le type du matériau. On peut néanmoins retrouver certains facteurs communs :

- 1 le chargement imposé (mécanique, thermique, hygrométrique...)
- 2 l'hétérogénéité du matériau
- 3 les effets d'anisotropie du matériau
- 4 le vieillissement physique du matériau par exemple des phénomènes de relaxation structurel ou volumique
- 5 la modification de la morphologie du matériau, par exemple la naissance de phénomènes de recristallisation
- 6 des changements dans la microstructure du matériau, apparition de microfissures par exemple
- 7 des phénomènes de relaxation viscoélastique des contraintes internes
- 8 la tolérance et le non respect des spécifications en cours de production.

Les exigences concernant la stabilité dimensionnelle de structures durant la période d'utilisation sont les plus difficiles à satisfaire, car ces conditions ne sont pas toujours bien connues, d'autant que des interactions entre les différents phénomènes ou des évolutions transitoires cycliques du chargement imposé peuvent avoir lieu. Nous nous proposons donc de décrire les différents facteurs d'instabilités dans les expériences du LHC.

## 2.2 Facteurs influençant la stabilité dimensionnelle dans les expériences du LHC

Dans le cas des structures mécaniques des trajectographes internes des expériences ATLAS et CMS, les facteurs extérieurs pouvant influer sur la stabilité de ces structures sont assez bien connus. Il s'agit de :

- la température.

La température inférieure à  $-10^{\circ}C$  dans la zone des détecteurs à pixels et silicium, devrait être d'environ  $18^{\circ}C$  dans la zone des détecteurs MSGC de CMS et d'environ  $20^{\circ}C$  dans le TRT d'ATLAS. Du fait du volume des différentes zones en question, par exemple d'environ  $17m^3$  dans la partie MSGC et de  $7.5m^3$  dans la zone des pixels et silicium dans l'expérience CMS, la stabilisation en température n'est possible qu'à un degré près. Or des variations de température de cette ordre peuvent entraîner des déplacement de l'ordre du 10 microns sur des structures métalliques par exemple du fait de coefficients de dilatation généralement élevés. La stabilité des structures mécaniques des détecteurs ATLAS et CMS peut donc être affectée par la température.

- le champ magnétique.

Les aimants supraconducteurs produiront des champs magnétiques de l'ordre du tesla et par conséquent tout composant métallique qui posséderait des propriétés magnétiques devra être évité pour la construction des structures mécaniques, les conséquences au niveau des déflections pouvant être dramatiques.

- les radiations.

La très haute luminosité au LHC va générer un environnement à un haut niveau de radiation au sein des détecteurs. La dose cumulée de radiation devrait être de l'ordre de  $10^3$  à  $10^7$  Gy. Ces doses peuvent ainsi entraîner un vieillissement physique ou des changements dans la microstructure importants sur certains matériaux organiques.

- les vibrations

De nombreuses sources de vibrations provenant entre autres des pompes, des moteurs et du système de refroidissement pourraient générer des déplacements de l'ordre de plusieurs microns ce qui à la résonance de la structure entraînerait des déplacements supérieurs à  $100 \mu m$ . La fréquence de vibrations des sources supérieures à 100Hz étant négligeables (M. Collet [51]), un critère préliminaire serait d'avoir donc une fréquence de vibrations supérieure à 100Hz afin d'éviter ces déplacements (S. Lucas [134]). De plus, le niveau des fréquences vibratoires des différentes sources possibles dans les expériences ATLAS et CMS est difficile à prévoir et leur caractérisation ne sera possible qu'une fois les détecteurs complets en fonctionnement.

- l'humidité.

Les zones à pixels et siliciums SCT de ATLAS seront sous flux d'azote ou sous atmosphère d'air sec. Les variations entre les périodes de prise de données et la période de maintenance des machines à l'air ambiant pourraient générer des variations d'humidité d'environ de 20% à 80% en fonction des conditions atmosphériques. Les variations inhérentes d'humidité, relevées sur les expériences du LEP, dans les zones d'installation des expériences, pourraient également induire des déplacements importants dans le TRT et dans l'inner tracker de CMS. La prise en compte de ces critères pour éviter une perturbation de la structure support dans la détection des particules conduit inévitablement à chercher à optimiser la qualité du matériau utilisé pour réaliser ces structures. Différents choix de matériau ont été ainsi envisagés, comme nous le présentons au paragraphe suivant.

## 3 Quel choix de matériau?

### 3.1 Les métaux

On peut en premier lieu penser à réaliser des structures supports en matériaux métalliques. Mais, comme nous pouvons le constater sur la Figure I.2.3, les métaux sont lourdement pénalisés par la très faible valeur du produit du module d'Young et de la longueur de radiation  $EX_0$ . Malgré tout, du fait d'une conductivité thermique élevée, et de bonnes propriétés de fabrication, des alliages pourront être utilisés dans certaines régions où les tolérances sur la longueur de radiation  $X_0$  seraient plus souples. Egalement, certains composants soumis à des chargements élevés ou couvrant certaines surfaces pourront être réalisés en acier inoxydable. Parmi les métaux, le Beryllium est le seul à présenter à la fois une densité faible, un module d'Young élevé, une ténacité élevée, et une bonne résistance à la corrosion. Cependant, son coût élevé, sa faible ductilité et son important degré d'anisotropie et de toxicité, apportent des limitations majeures à son utilisation.

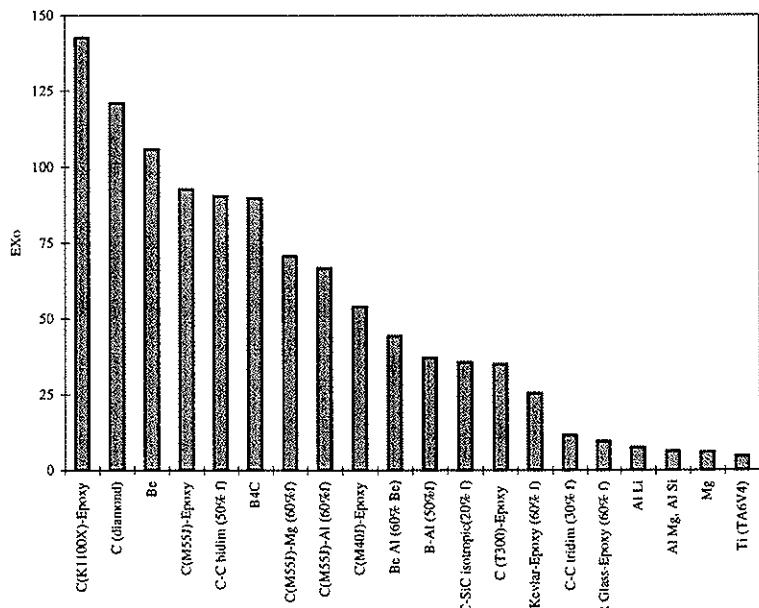


Figure I.2.3: *Produit EX₀ de quelques matériaux, d'après C. Hauviller [98].*

### 3.2 Composites à fibres de carbone et matrice polymérique

Les matériaux composites à fibres de carbone et résine polymérique (CFRP) ont une rigidité élevée, une haute ténacité, et un faible coefficient de dilatation thermique. Ils ont le plus souvent un coefficient de dilatation thermique dans la direction des fibres égal à zéro ou légèrement négatif. Ces composites ont une longueur de radiation élevée, comparable à celle du beryllium. Ils semblent présenter également des propriétés de résistance aux radiations intéressantes. Deux types de résines sont couramment utilisées dans la fabrication de ces composites, les résines époxy, et depuis plus récemment les résines cyanate ester. Il existe plusieurs variétés de fibres de carbone sur le marché. Le type d'application pourrait orienter le choix de la fibre, de la résine et de la disposition des plis du matériau composite. La combinaison de différentes résines et fibres conduit à une très large possibilité d'applications dans les différentes parties des détecteurs. Ces différentes propriétés rendent ces composites attractifs pour la réalisation des structures supports.

### 3.3 Composites à matrice métallique

Les composites à matrice métallique (MMC) présentent une bonne ténacité, une bonne conductivité thermique et électrique, et pratiquement aucune sensibilité à l'humidité. Comparés au métal seul, les composites en fibres de carbone, renforcés par une matrice métallique permettent de réduire le poids, d'avoir une meilleure rigidité, ténacité et stabilité dimensionnelle. Un autre avantage des composites en fibre de carbone et à matrice métallique est qu'ils ne présentent pas de phénomène de dégazage (J.F. Peltier, J. Pernon et M. Rabinovitch [154]).

Cependant, une densité plus élevée que les composites à matrice polymérique, une température de mise en oeuvre très élevée (dûe à une température de mélange importante), une tendance à la corrosion et une réactivité de certaines matrices avec les fibres de carbone limitent leur utilisation. De plus, ces matériaux relativement nouveaux n'ont pas encore trouvé de larges applications, ce qui explique une certaine méconnaissance de leur comportement à long terme.

### 3.4 Composites à matrice céramique ou à matrice inorganique

Les principaux avantages des composites à matrice céramique ou matrice inorganique (CMC) sont qu'ils offrent une bonne stabilité aux conditions environnementales; ils n'absorbent pas d'humidité et ne présentent pas de dégazage. Ils ont, en outre, un coefficient de dilatation faible, et une rigidité élevée. Malheureusement, leur mise en oeuvre est complexe et doit se faire à très haute température, au dessus de  $1000^{\circ}\text{C}$ . Comme les composites à matrice métallique, ils sont peu utilisés et leur technologie présentent de nombreux inconvénients parmi lesquels (D. Bashford, D. Eaton et A. Pradier [17]):

- 1 les expertises dans les manufactures sont limitées.
- 2 leur micro-structure est complexe et source de mécanismes de fissurations.
- 3 peu de données sont disponibles sur ces composites.

### 3.5 Composites carbone/carbone

Les matériaux composites carbone/carbone (C/C) présentent une haute rigidité, une haute tenacité, une bonne conductivité thermique, de faibles coefficients de dilatation thermique proches de zéro, une faible densité. Ils ont également une bonne résistance aux radiations. Ils sont en effet capables de supporter les doses de radiations attendues dans les expériences du LHC, S. Blazewicz *et al.* [24]. Leur principal désavantage est leur coût élevé du fait des procédures complexes de mise en oeuvre. Ces matériaux relativement nouveaux n'ont également pas encore fait l'objet de très larges applications du fait d'un certain manque de données.

Paramètres	Souhaitable	CFRP	MMC	CMC	C/C	Beryllium
$E \cdot X_0$	Elevé	142-70	50	40 (20% fibres)	~90	110
Densité	Faible	$\leq 2000\text{kg/m}^3$	$\geq 2000\text{kg/m}^3$	$>2000\text{kg/m}^3$	$\sim 1700\text{kg/m}^3$	$1855\text{kg/m}^3$
CTE ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	Faible	0-30	2-24	3-10	-1-20	$11.4 (<80^{\circ}\text{C})$
Résistance aux radiations (MGy)	Elevé	10	>10	-		>10
Fabrication		Facile	Difficile	Difficile	Difficile	Difficile et Dangereux
Utilisation et expérience (années)	Elevé	>15	Faible	Faible	5-10	>60

Figure I.2.4: Propriétés des matériaux possibles

Au vu des différentes propriétés de ces matériaux données à titre indicatif dans le tableau I.2.4, les composites à fibres de carbone et résine polymérique ont été majoritairement retenus pour la conception des structures mécaniques des trajectographes interne de CMS et ATLAS. Le comportement de ces matériaux dans un environnement humide restant relativement méconnu, nous avons été amenés à étudier plus spécifiquement les effets de l'humidité ambiante et de ses variations sur ces composites, ainsi que leurs influences sur la stabilité dimensionnelle des structures supports.

# I.3 Effets de l'humidité ambiante sur les matériaux composites

Les premiers essais réalisés dans les années 1970, sur la tenue des matériaux composites utilisés dans le transport et le stockage de différents fluides corrosifs, ont montré que, malgré une très bonne tenue à la corrosion, les composites à matrice organique n'étaient pas tout à fait insensibles aux agents atmosphériques et principalement à l'humidité. Ainsi, des chercheurs de General Dynamic et Fiberite Corporation découvrirent que des échantillons de composite soumis à des environnements humides pendant plusieurs jours perdaient une quantité importante de leurs propriétés à haute température. Depuis cette période, de nombreux chercheurs se sont intéressés au problème de vieillissement humide et thermique des résines. Dans ce paragraphe, nous allons chercher à résumer les effets recensés dans la littérature de l'humidité ambiante sur les matériaux composites à matrice polymérique sur leurs constituants et également les mécanismes qui conduisent à des dégradations dans le matériau. Pour tenter d'expliquer ces phénomènes, nous présenterons une analyse chimique des constituants. Pour plus de détails sur ces aspects chimiques, nous renvoyons notamment le lecteur aux ouvrages de G. Lubin [133] et J.M. Berthelot [22].

## 1 Effets de l'humidité sur les renforts fibreux

Les renforts sous forme de fibres sont les plus fréquemment utilisés. Les fibres donnent en effet aux matériaux renforcés une résistance mécanique beaucoup plus élevée que des renforts sous forme massive pourraient le faire. D'autre part, les fibres procurent une grande souplesse d'utilisation dans les matériaux composites. Actuellement les fibres les plus rencontrées dans le renforcement des plastiques sont les fibres de verre et les fibres de carbone. Bien que les matériaux retenus pour la réalisation des structures supports soient plutôt à renforts de carbone, nous décrirons également l'effet de l'humidité sur les fibres de verre pour lesquelles abondent un peu plus de résultats qui peuvent être considérés comme indicatifs dans la compréhension du phénomène.

### 1.1 Analyse chimique

Les fibres de verre sont obtenues par étirage à grande vitesse de filaments de verre fondu. Cet étirage peut être mécanique, les filaments ainsi obtenus sont continus et appelés "silicone", ou par soufflage d'air, ce qui procure des fibres discontinues appelées verranne. La composition du verre déterminera son type :A, D, E, R (S aux Etats Unis), etc...

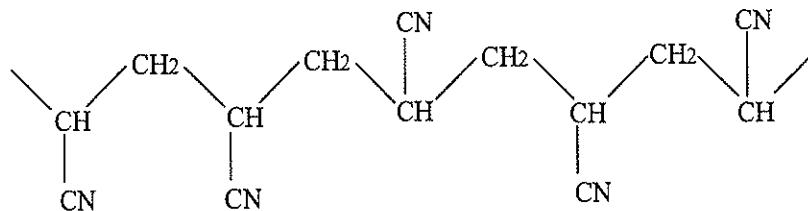
Les verres E et S sont les plus couramment utilisés dans les matériaux composites de bonne performance. La composition moyenne typique des verres D, E, (R ou S) sont donnés dans le tableau I.3.1.

Type de verre	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Na <sub>2</sub> O+K <sub>2</sub> O
Verre E	54. 5	14.5	17	4.5	8.5	0.5
Verre (R ou S)	64	26	-	10	-	-
Verre D	73-74	-	-	0.5-0.6	22-23	2.8

Tableau I.3.1: Composition en pourcentage massique des fibres de verre, d'après J.M. Berthelot [22]

Les fibres de carbone sont fabriquées à partir d'un polymère de base appelé précurseur, se présentant lui-même sous forme de fibres orientées et réticulées. Les précurseurs les plus couramment utilisés sont le polyacrylonitrile (PAN) dont la composition moléculaire est donnée ci-joint, ou le brai (Isotropic) qui est un résidu de raffinerie issu

du pétrole ou de la houille, J.M. Berthelot [22].



Les fibres acryliques étant fusibles, la phase d'oxydation a pour but de supprimer artificiellement le point de fusion. Cette opération est effectuée en chauffant les fibres à environ  $300^{\circ}\text{C}$  en atmosphère d'oxygène. Il se produit alors une oxydation conduisant à une réticulation de chaînes moléculaires. La deuxième phase, qui est la phase de carbonisation, consiste à chauffer progressivement les fibres réticulées de  $300^{\circ}\text{C}$  à  $1100^{\circ}\text{C}$  environ, en atmosphère inerte. Il y a alors élimination de l'eau et de l'acide cyanhydrique, seuls les carbones étant conservés dans la chaîne moléculaire. La dernière phase de graphitation est utilisée lorsque l'on souhaite obtenir des fibres de très haut module. Cette phase consiste à effectuer à la suite de la carbonisation une pyrolyse jusqu'à  $2600^{\circ}\text{C}$  ou à des températures supérieures.

## 1.2 Absorption d'eau par les fibres

Comme nous pouvons le noter dans le tableau I.3.1, les verres sont composés d'oxydes métalliques ou alcalins. Or, il a été constaté, notamment par C. Schutte [164] et B. Dewimille [64], que les oxydes alcalins sont hygroscopiques et hydrolysables. L'absorption très rapide de l'eau sur le verre est donc caractérisée par l'hydratation de ces oxydes.

Le verre E qui est le plus utilisé pour les fibres est tout de même un des plus résistants à la corrosion par l'eau de par sa faible teneur en composés alcalins (< 2%), de même que le verre R,S à haute résistance mécanique. La corrosion par l'eau du verre va créer des microhétérogénéités par hydratation des alcalins qui constitueront donc des zones de faiblesse. D'autre part, la dissolution par l'eau de certains éléments de la fibre pourra créer un milieu corrosif qui accentuera la dégradation du verre. L'eau peut également jouer un rôle de tensio-actif, par exemple en réduisant l'énergie de surface en fond de fissure, ou en diffusant vers les microfissures se trouvant en avant de la fissure.

Ces effets sont observés sur le verre sous forme de bloc et des analogies de comportement d'un bloc de verre et d'une fibre de verre ne sont pas évidentes à faire. Les fibres ayant un diamètre très faible de l'ordre de  $10\mu\text{m}$ , l'effet des défauts et de la corrosion n'en est que plus important. R.E. Lowrie [137] montre donc que l'humidité est responsable d'une baisse de résistance des fibres. S.M. Wiederhorn et L.H. Bolz [185] mettent en évidence que l'humidité augmente la sensibilité du verre à la fatigue statique et à la corrosion sous tension. Il a été remarqué par ailleurs que, malgré l'absorption très rapide de l'eau, les phénomènes de corrosion demandent un certain temps d'incubation, W.D. Bascom [16].

Cependant, les fibres de verre dans un matériau composite sont protégées par un agent de couplage et par la matrice, par conséquent une attaque chimique de la fibre est rarement mise en évidence. Certains auteurs comme R.J. Charles [40, 41], A.G. Metcalfe et G.K. Schmitz [143], K.H.G. Ashbee et R.C. Wyatt [12]) constatent tout de même une attaque des fibres de verre par l'eau. O. Ishai et U. Arnon [104], mettent en cause les fibres dans la baisse des propriétés mécaniques due à des immersions dans de l'eau à  $90^{\circ}\text{C}$ . Les processus alors invoqués sont l'hydrolyse des fibres et l'attaque chimique de l'agent de couplage. Dans une étude par chromatographie en phase gazeuse inverse, B. Chabert [37] *et al.* ont montré une très nette évolution de la réactivité à l'eau des fibres de verre entre  $50^{\circ}\text{C}$  et  $80^{\circ}\text{C}$ . Cependant, l'observation des fibres ensimées ne fait pas apparaître de réaction aussi importante. Par contre un traitement à  $200^{\circ}\text{C}$  suffit à rendre la fibre à nouveau sensible à l'eau.

Les fibres de carbone étant constituées de chaînes de carbone uniquement, elles sont sensibles aux oxydes qui sont des composés résultant de la combinaison d'un corps simple avec l'oxygène. Cependant, différentes études, notamment celles de N.C.W. Judd [111], ont montré que les fibres de carbone n'étaient sensibles ni à l'humidité, ni à l'atmosphère, ni aux solvants, ni aux solutions basiques ou très acides, à température ambiante. Malgré tout, les phénomènes d'oxydation de la fibre peuvent néanmoins devenir inquiétants à température élevée. Le seuil d'oxydation pour les fibres de bas module à base de PAN, et les fibres de haut module, à base de PAN ou de brai sont en effet respectivement de  $350^{\circ}\text{C}$  et  $450^{\circ}\text{C}$  (D.W. McKee et V.J. Mimeault [142]). Cette oxydation est catalytique à ces températures, mais une meilleure résistance aux oxydations pourra être attendue avec des fibres dont la pureté sera meilleure à l'avenir.

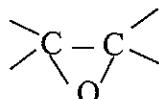
D'autres études notamment celles de C.J. Jones *et al.* [107] sur la résistance en fatigue des composites polymériques pour trois types de fibres (kevlar, carbon, verre E), permettent de confirmer le bon comportement en humidité des fibres de carbone à température ambiante.

## 2 Effets de l'humidité sur les matrices polymères

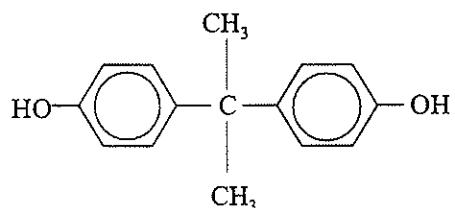
La diffusion de l'eau au sein de résine polymère peut entraîner des interactions avec le polymère. Il peut apparaître ainsi des dégradations réversibles ou irréversibles. La dégradation réversible est caractérisée par une modification physique du matériau (volume libre, contraintes internes...) ou bien chimique par la formation de liaisons hydrogènes. La dégradation irréversible est entraînée par une modification chimique du polymère induisant des ruptures macromoléculaires ou des phénomènes d'hydrolyse et pouvant modifier la composition du matériau par un phénomène de lessivage ou bien une modification par fissuration.

### 2.1 Analyse chimique

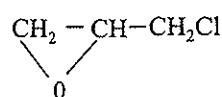
Les résines époxydes, les plus couramment utilisées, sont à l'état initial des composés macromoléculaires linéaires comportant dans leur motif de structure le groupement époxyde :



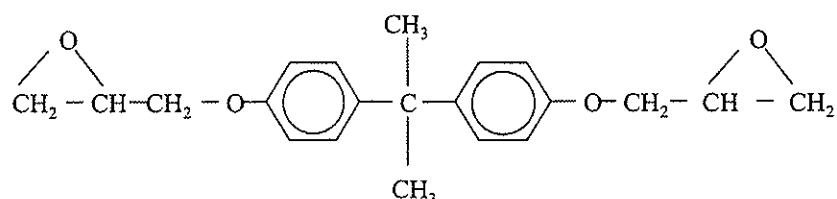
Elles sont généralement obtenues par la polycondensation de l'épichlorhydrine du glycol



avec des diphenols et en particulier le diphenylopropane appelé aussi bisphénol A :

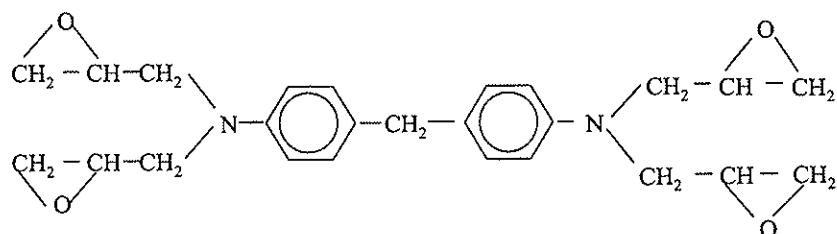


On a ainsi un produit du type :

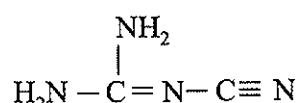


appelé diglycidyl éther de bisphénol A, noté DGEBA.

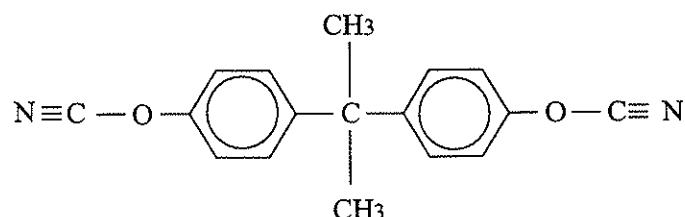
Une autre résine également très employée est le tetraglycidyl 4,4 diamino diphenyl methane, noté TGDDM.



A partir de ces formulations, nous pouvons obtenir des composés macromoléculaires tridimensionnels par réticulation de la résine DGEBA à l'aide d'un durcisseur. Parmi les plus employés, on trouve le dicyandiamide :



Les résine cyanate ester sont également des composés macromoléculaires porteurs de groupes fonctionnels cyanate réactifs. Elles sont obtenues par polycondensation de monomères cyanate, notamment le monomère B10 commercialisé par CIBA :



La chimie de ces systèmes en cyanate ester, développés à la fin des années 1970, est encore parfois controversée, G. Gallicher *et al.* [80]. Cependant, leur utilisation est de plus en plus croissante. Pour plus de renseignements sur la chimie de ces systèmes, on pourra néanmoins consulter I. Hamerton (recueil bibliographique) [90].

## 2.2 Absorption d'eau

L'étude de la diffusion de l'eau et de l'hydrophilie des matrices polymères est le plus souvent envisagée selon deux approches différentes :

- l'approche volumique, qui consiste à dire que la concentration d'eau à l'équilibre est essentiellement gouvernée par le volume libre disponible dans le polymère (M.J. Adamson [4], A. Apicella et L. Nicolais [9]), ou que l'eau remplit les défauts morphologiques (G.A. Pogany [156], V.B. Gupta *et al* [84]).
- l'approche 'liaisons hydrogènes'; les molécules d'eau ne sont pas distribuées au hasard dans le polymère, mais fixées par des liaisons hydrogènes à des sites hydrophiles. La liaison hydrogène est le résultat de l'interaction entre un dipôle  $A - H$  où  $H$  représente le pôle positif et le dipôle  $B - C$  où  $B$  représente le pôle négatif. On obtient alors un rapprochement important des atomes  $A$  et  $B$  étant donné la petite taille de l'atome hydrogène; c'est pourquoi on parle de liaison hydrogène.

Au vu de la littérature (M.L. Kaplan [117], P. Moy et E. Karasz [148], C. Carfagna *et al.* [35], C.E. Browning [28], R. DeLisi et J.B. Whiteside [60], M.J. Adamson [4], A. Apicella et L. Nicolais [9], L. Banks et B. Ellis [15], R.J. Morgan *et al.* [146]), l'approche liaisons hydrogènes est plus couramment admise. Nous allons par conséquent expliciter les sites hydrophiles des résines époxy et cyanate ester.

Dans les résines époxy, nous pouvons avoir différents sites qui sont susceptibles d'attirer un dipôle  $O - H$  de la molécule d'eau qui sont des groupements tels que le groupement hydroxyl  $O - H$ , le groupement phenol  $O - C$ , le groupement amine  $N - C$ , le groupement sulfone  $O - S$  (C.E. Browning [28]).

On peut également retrouver certains de ces groupements hydroxyl dans les résines cyanate ester (G. gallicher *et al.* [80], I. Hamerton [90]).

Cependant, ce type de description ne permet pas de conduire à une analyse quantitative de l'absorption d'eau (P. Bonniau [27]). En effet, les réactions chimiques de réticulation se présentent de manière infiniment plus complexe en fonction de la nature des composants et des conditions de polymérisation (C.A. May *et al.* [139]). Ainsi, le nombre exact de sites susceptibles de fixer une molécule d'eau ne peut être actuellement déterminé. R.J. Morgan *et al.* [146] montrent au cours d'une étude sur une résine époxyde TGDDM que, dans l'hypothèse d'une fixation de molécule d'eau sur chaque site hydroxyle, on obtiendrait une absorption en poids de 10% pour la résine alors qu'en fait, même dans leurs conditions les plus sévères, la résine testée absorbe seulement 5% en poids.

La capacité d'absorption d'eau peut varier d'une résine à l'autre. Elle dépend de la composition de la résine et de la nature du durcisseur utilisé. Ainsi, pour les résines époxy, il a été constaté que la capacité d'absorption d'eau se situe entre 4% et 8% alors que pour les résines cyanate ester connues pour leur très faible reprise en eau, la capacité d'absorption est de l'ordre de 1% à 2%.

Dans la plupart des cas, la réversibilité du mécanisme d'absorption par les résines est observée et l'on peut penser qu'il s'agit là d'une simple diffusion en volume par liaison hydrogène n'ayant aucune raison de dégrader le matériau. En fait, ce n'est pas le cas, et l'on peut avoir des effets très importants sur le comportement du polymère dans des environnements sévères en humidité et en température ou encore dans des conditions cycliques. L'interaction de l'eau avec le polymère peut entraîner deux types de dégradations, des dégradations réversibles ou irréversibles.

## 2.3 Veillissement physique et chimique des résines polymères

### 2.3.1 Phénomènes réversibles

**Plastification** La conséquence principale de la pénétration de l'eau dans les résines polymères est la plastification du réseau polymère, c'est-à-dire une diminution de la température de transition vitreuse et du seuil de plasticité, J. Verdu [180]. Cela signifie qu'il y a une augmentation de la mobilité des chaînes moléculaires de la résine. Ces phénomènes de plastification de la matrice ont été étudiés par de nombreux auteurs (B.C. Ennis *et al.* [71], C. Carfagna *et al.* [35], W.J. Mikols et J.C. Seferis [145], E.L. McKague *et al.* [141], P. Moy et E. Karasz [148], W.W. Wright [188], L. Banks et B. Ellis [15], C.E. Browning [28]). Il est ainsi noté que la chute de la température de transition vitreuse peut atteindre  $20^{\circ}C$  par % d'eau absorbée. Certains auteurs notent également une modification des transitions secondaires.

Sur le plan mécanique, cette plastification entraîne une diminution du module d'Young à température ambiante dans le domaine vitreux et de la contrainte à la limite d'élasticité. La présence d'eau dans la résine modifie également le comportement lors de la rupture, ainsi le matériau apparaît "moins fragile", c'est-à-dire que l'énergie nécessaire pour atteindre la charge maximale diminue, alors que l'énergie nécessaire à la rupture proprement dite augmente. On peut également observer une modification des propriétés dynamiques avec une augmentation de l'amortissement interne du matériau, et un déplacement vers les temps courts des courbes de relaxation, B. Dewimille [64].

**Gonflement différentiel** Le gonflement dû à la pénétration des molécules d'eau dans les résines époxy a été noté par différents auteurs (R. DeIasi et J.B. Whiteside [60], E.L. McKague [141], M.J. Adamson [4], C.E. Browning [28], H.T. Hahan [87], C.C. Chamis [38]). Ce phénomène de gonflement repose sur l'existence d'un gradient de concentration dans l'épaisseur du matériau lors d'un régime transitoire d'absorption. Lorsque l'eau pénètre dans un polymère, il y a un front entre la partie externe gonflée et la partie interne sèche. Cette dernière exerce alors une force de compression sur la partie externe provoquant un gonflement dans la direction de diffusion. En même temps, les régions gonflées exercent sur la région inattaquée des forces qui tendent à augmenter le volume du

matériau. Il est d'ailleurs montré que le gonflement peut avoir un effet bénéfique en réduisant de façon significative les déformations thermiques résiduelles présentes dans les matériaux composites, générées pendant la cuisson.

Différents auteurs ont mesuré l'augmentation de volume pendant l'absorption d'eau. Suivant une dimension, E.L. McKague *et al* [141] montrent qu'il y a une augmentation d'environ 2%. Suivant les trois dimensions, M.J. Adamson [4] obtient 5%, R. DeIasi et J.B. Whiteside [60] 8%.

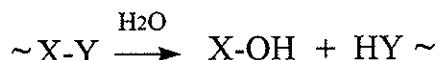
Certains auteurs comme E.L. McKague *et al* [141], ou M.J. Adamson [4] ont pensé que l'augmentation de volume était égale au volume d'eau absorbée. Or expérimentalement, il est observé que l'accroissement de volume est moindre. M.J. Adamson [4] attribue cette différence à l'existence de volume libre dans le matériau qui serait en premier occupé par l'eau.

C.E. Browning [28], de même que R. DeIasi et J.B. Whiteside [60] ont trouvé que le volume augmente linéairement avec le pourcentage d'eau absorbée dans le matériau. Ceci permet de définir un coefficient d'hydroélasticité qui est le rapport entre l'augmentation relative de longueur et l'augmentation relative de poids. La plupart des analyses hygromécaniques du comportement des polymères sous sollicitations en humidité sont basées sur ce formalisme (J.R. Vinson [182]).

L'importance et le degré de réversibilité des modifications résultant de sollicitations hygrométriques dépendent de la totalité de l'histoire passée et présente du polymère, ainsi que de la structure et de la morphologie moléculaires du polymère. Ainsi, dans certains cas, la dégradation du polymère sera irréversible.

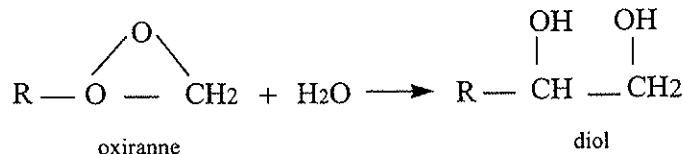
### 2.3.2 Vieillissement irréversible

**Hydrolyse** L'hydrolyse est une réaction chimique irréversible induite par l'eau. Elle peut être schématisée comme suit (J. Verdu [181], D.H. Kaelbe et P.J. Dynes [112]) :



Différentes études ont été menées sur l'hydrolyse des polymères. La plupart concerne les résines époxy (C.E. Browning [28], B.C. Ennis *et al.* [71], P.J. Pearce *et al.* [153], R.L. Levy [128], M.K. Antoon et J.L. Koenig [8], D.R. Lefevre *et al.* [125], B. De Nève et M.E.R. Shanahan [61], G.Z. Xiao et M.E.R. Shanahan [183]). Cependant, ces dernières années, quelques études ont été menées sur les résines cyanate ester notamment par G. Gallicher *et al.* [80]. Divers mécanismes d'hydrolyse sont généralement évoqués. Quelques auteurs ont supposé une hydrolyse après avoir observé une augmentation de la masse du polymère vieilli après séchage, ou bien une augmentation continue de la masse d'eau absorbée. Cependant, la plupart des auteurs s'accordent à dire que l'hydrolyse donne lieu à une coupure de chaînes macromoléculaires.

Ainsi, D.R. Lefevre *et al* [125] observent sur une résine époxy une brusque augmentation du pourcentage d'eau absorbée lorsque le taux d'humidité atteint 70%, ce qui semble dû à un changement chimique du réseau par formation de diols selon :



G. Gallicher *et al* [80] observent également par spectroscopie IR une modification chimique des réseaux moléculaires au cours du vieillissement hygrométrique d'une résine cyanate ester.

**Lessivage** Certains auteurs observent en combinaison avec des phénomènes d'hydrolyse, des pertes de masse après séchage pour des temps longs d'exposition dans des conditions d'humidité élevées (B.H. Eckstein [70], A. Apicella *et al* [10], B. De Nève et M.E.R. Shanahan [61]). Ils expliquent cela par une perte des segments moléculaires devenus libres du fait de la scission des chaînes moléculaires (hydrolyse). On parle alors de phénomènes de lessivage du réseau polymère.

**Fissuration** L'eau en pénétrant dans la résine pourra également former des poches de liquide en s'infiltrant dans les microvides et les régions faiblement réticulées, B. Dewimille [64]. Ces poches de liquide peuvent provoquer des pressions capables d'initier des fissures dans la résine. Ainsi, F.X. De Charentenay [59] rappelle que l'eau est un facteur important dans la fissuration statique ou en fatigue des polymères. E.J. Ripling *et al* [159] ont constaté au cours d'une étude sur les effets de corrosion sous tension de joints de collage en résine époxyde, une influence de l'humidité sur le seuil de fissuration. Cependant, l'abaissement de ce seuil est également fonction du durcisseur employé, de sa quantité et des traitements post-cuisson. L'initiation et la propagation de fissures pouvant dépendre de plusieurs facteurs, il est parfois difficile de définir les causes des phénomènes de fissuration. Certaines études ont été réalisées dans des conditions environnementales complexes afin d'évaluer le comportement de matériaux composites dans des conditions proches de la réalité (variations climatiques, simulation de vol) (O. Ishai [104], C.E. Browning [28], G.S. Springer [172]). Ces études montrent que même en l'absence de sollicitation mécanique, l'endommagement du matériau est accéléré ou accentué par des conditions cycliques en humidité.

Tous ces phénomènes sur la résine vont nécessairement influer sur le comportement du composite, comme nous nous proposons de le montrer au paragraphe suivant.

### 3 Effets de l'humidité sur les matériaux composites

#### 3.1 Absorption d'eau et vieillissement

Differentes études sur les phénomènes d'absorption d'eau dans les composites à fibres de verre ou à fibres de carbone, notamment celles de R. DeIasi et J.B. Whiteside [60], J.M. Whitney et C.E. Browning [186], G.S. Springer [173], B. Dewimille [64], P. Bonniau [26], ont permis de montrer que la réponse du composite est essentiellement contrôlée par la résine.

Ces auteurs constatent également que certains phénomènes sont amplifiés par rapport à ceux observés sur la résine seule. Ainsi, B. Dewimille [64] constate que, contrairement à la résine où les courbes d'absorption ont la même allure quelle que soit la température, les cinétiques d'absorption du matériau composite montrent que des phénomènes de dégradation apparaissent lorsque la température augmente. Les essais des effets de l'humidité sur la résistance mécanique de R.J. Morgan *et al.* [146] effectués sur résine seule et de C.H. Shen et G.S. Springer [166, 167] effectués sur un composite unidirectionnel testé perpendiculairement et dans le sens des fibres, montrent que les baisses de la résistance à rupture sont d'autant plus importantes dans le cas du composite. On est alors amené à penser que tout ce qui différencie la résine seule et la résine dans le composite doit être pris en compte, en particulier le rôle des interfaces entre la fibre et la matrice.

#### 3.2 L'interface et son comportement en présence d'eau

La nature de l'interface dans les matériaux composites, ainsi que les mécanismes d'adhésion, sont encore mal connus. Et, en particulier, l'utilisation de traitement de surface sur les fibres ajoute à la complexité de cette zone.

##### 3.2.1 Nature de l'interface

La difficulté d'analyser cette zone intermédiaire entre la fibre et la matrice vient du fait qu'elle se forme au court du procédé même d'élaboration du composite. Les propriétés d'écoulement de la résine, les phénomènes de diffusion, les réactions chimiques, les gradients thermiques, ainsi que la polymérisation de la matrice peuvent être considérées comme à l'origine de la formation de ces interfaces. Il y a aussi les défauts tels que la contamination des surfaces fibreuses et la porosité de la matrice, susceptibles d'apparaître durant la mise en œuvre et se concentrant alors dans la zone de transition entre la fibre et la matrice. Celle-ci peut ainsi devenir le lieu où se concentrent les défauts de toutes sortes : porosité et humidité, gradients de contrainte, modification de texture cristalline (J.J. Bikerman [23]).

Il est maintenant largement admis que les caractéristiques mécaniques du composite sont étroitement dépendantes de l'interface entre la fibre et la matrice, tant pour les propriétés contrôlées par la fibre (traction dans la direction des fibres) que pour celles plutôt contrôlées par la matrice. Plusieurs fonctions essentielles pour le bon fonction-

nement du matériau composite sont ainsi attendues des interfaces, J.P. Favre [74].

Une première fonction est d'assurer la continuité d'un constituant à l'autre à travers tout le matériau en empêchant par exemple la formation de porosités ou l'accumulation d'humidité pendant la phase de mise en oeuvre.

Une autre de ses fonctions est de transmettre les efforts. On considère très souvent pour les composites fibreux que les fibres du composite travaillent ensemble et que la matrice est là pour répartir et transmettre les efforts entre fibres, ces efforts devant passer par l'interface.

Enfin, une autre fonction est de protéger les fibres ou la matrice, notamment par exemple en stoppant ou déviant les fissures en cas de rupture des fibres.

Cependant, la dépendance des propriétés du composite par rapport à la nature de l'interface est très complexe. De plus, la qualité de cette interface va dépendre tout particulièrement des traitements de surface et de l'ensimage utilisé pour améliorer le mouillage des fibres par les résines.

### 3.2.2 Traitement des fibres

Dans la réalisation de la plupart des composites, les fibres reçoivent un traitement de surface, et éventuellement un ensimage avant toute imprégnation par la résine. Ainsi, les fibres de verre, après leur élaboration, subissent une opération dite d'ensimage, qui consiste à déposer à la surface des filaments de verre, un produit d'ensimage de composition complexe. Cet ensimage a pour fonction, entre autres, d'établir une bonne cohésion entre les filaments, de donner une plus ou moins grande raideur aux fils de verre, de protéger les fibres contre l'abrasion, d'éviter l'apparition de charges électrostatiques, de faciliter l'imprégnation des filaments de verre par la résine ou encore de favoriser la liaison verre-résine dont dépendent les performances mécaniques du composite.

Dans la plupart des cas, des agents de couplage sont employés dans l'ensimage des fibres de verre. Ces agents sont des éléments bifonctionnels tels que des organosilanes ou des organo-métalliques, G. Lubin [133](recueil bibliographique). Les agents de couplage, employés pour améliorer la mouillabilité des fibres, ont la capacité en théorie de réagir chimiquement d'une part avec la fibre de verre (plus précisément avec le groupe hydroxyl des fibres) et d'autre part avec la résine. Ces agents servent ainsi d'intermédiaires en formant des liaisons avec les deux constituants. Le rôle de ces agents de couplage dans l'amélioration de la durabilité et la transmission des efforts entre la fibre et la matrice n'est pas encore complètement connu. Cependant, différentes études suggèrent la façon avec laquelle les propriétés chimiques de ces agents peuvent influencer les propriétés mécaniques et de durabilité de l'interface (Suzuki *et al* [176], Chaudhury *et al* [39]). Ainsi, une éventuelle solubilité à l'eau de ces agents de couplage entraînerait une perte importante de la capacité de l'interface à transférer les contraintes de la matrice vers la fibre, C. Schutte [164].

Les fibres de carbone subissent également un post traitement, qui se composera d'un traitement de surface et/ou l'application d'un revêtement organique.

Dans le cas de résines métalliques ou céramique, les fibres sont recouvertes d'un revêtement empêchant de possibles réactions chimiques entre les fibres et la matrice, et permettant également d'améliorer l'adhésion entre ces deux phases.

Pour les composites carbone-carbone, la nature du lien entre la surface de la fibre et de la matrice est très complexe et très difficile à analyser, à savoir que le couplage peut être chimique, physique ou mécanique, de nature à inclure des liaisons C-C ou C=C, des liaisons chimiques faibles de type Van der Waals, ou des couplages mécaniques. En particulier, la nature de l'interface de ce type de composites va dépendre essentiellement du type de précurseur (matériaux organiques-résine, brai) et des conditions de mise en oeuvre.

Dans le cas des composites à résine polymérique, différents traitements de surface, et revêtement organiques sont utilisés pour prévenir les abrasions de fibres, améliorer leur maniement, leur mouillabilité avec la résine, et permettre ainsi d'obtenir de bonnes propriétés mécaniques pour le composite. Les agents organiques d'ensimage, d'une proportion d'environ 0.5 – 7% en masse, les plus couramment utilisés, sont des alcools polyvinyl, de l'époxy, du polyimide et de l'eau. De nouveau, de nombreuses études ont été menées pour tenter d'expliquer l'influence des ces revêtements sur le comportement du composite. On pourra notamment consulter G. Lubin [133].

### 3.2.3 Le comportement de l'interface en présence d'eau

Différents auteurs ont avancé l'hypothèse d'une diffusion de l'eau le long de l'interface compte tenu de la nature des ensimages utilisés sur les fibres. Cependant peu d'expériences expérimentales ont pu clairement mettre ce phénomène en évidence du fait de la difficulté à analyser et à définir la nature même de cette interface. Néanmoins, différents tests d'arrachement de fibres de la résine ("pull out") ont pu mettre en évidence que la force nécessaire pour arracher une fibre de la résine diminue avec le temps d'exposition en milieu humide, avec une diminution allant jusqu'à 57% pour des échantillons immergés dans l'eau (U. Gaur et B. Miller [81]). On peut alors raisonnablement penser que l'eau diffuse également le long des interfaces. D'ailleurs, différents observations sur la diffusivité de l'eau dans les composites carbone/époxyde semble confirmer que l'interface peut se comporter comme un site préférentiel pour la circulation de l'eau (B. Dewimille [64], R. Jacquemet [105], J.P. Favre [73]).

En outre l'absorption d'eau au sein du composite conduit à un gonflement de la résine, comme nous l'avons vu précédemment, contrairement aux fibres de carbone. L'interface sera donc fortement sollicitée. En effet après la cuisson, pendant la phase de refroidissement, l'interface sera plutôt sollicitée en compression, ainsi qu'en cisaillement axial. Lors d'un gonflement, elles seront sous tension, et en cisaillement axial inverse. Les liaisons fibre - matrice seront donc soumises à de la fatigue mécanique lors de cyclages climatiques. Il est alors souvent envisagé dans la littérature des ruptures de liaisons fibre-matrice et donc des possibilités de décohésions et de décollements. Ainsi, B. Dewimille [64] met en évidence une perte d'adhésion aux interfaces par des observations micrographiques, et par l'évolution des modes de rupture en flexion et de la résistance au cisaillement.

## 4 Présentation de l'Etude

Le type de la résine, du durcisseur employé, la nature des renforts, les conditions de l'ensimage appliquée sur les fibres, le taux de fibres, leur orientation influencent le comportement du matériau composite. De même, le milieu environnant au travers de l'humidité en phase liquide ou vapeur, de la température, et de leurs variations monotones ou cycliques vont modifier la tenue du matériau composite. En particulier, les matériaux composites à matrice organique sont susceptibles d'être dégradés à plus ou moins long terme par un environnement humide, les effets de l'eau pouvant être réversibles ou irréversibles et prépondérants au niveau de la matrice et des interfaces fibre et matrice.

Il est bien sûr impossible d'étudier l'influence de tous ces paramètres sur chaque matériau composite (dont le taux de fibres, le type de constituants, la disposition des plis peuvent varier) que l'on va souhaiter utiliser. Il est donc important de pouvoir prédire de façon fiable le comportement d'un matériau composite à partir de la nature de ses constituants.

Nous allons donc chercher à étudier le comportement des matériaux composites dans un environnement humide. Nous nous intéresserons ici plus spécifiquement à des matériaux composites à haute performance en fibres de carbone et matrice polymérique retenus pour la réalisation des structures mécaniques des détecteurs de particules. Cette étude revêtera trois aspects. Le premier aspect expérimental consistera à caractériser les propriétés hygromécaniques des matériaux composites et de leurs résines. Le second aspect concernera le développement de modèles prédictifs du comportement hygromécanique de matériaux composites. Le rôle des interfaces sur le comportement et les performances du matériau, mis en évidence expérimentalement, y sera introduit. Enfin, ces modèles seront ensuite utilisés comme outils d'aide à la conception et à l'analyse de structures mécaniques complexes. En particulier, la stabilité dimensionnelle de structures mécaniques de détecteurs de particules sous des sollicitations hygrométriques transitoires cycliques ou monotones sont analysés.



## **Chapitre II**

# **Comportement Hygroscopique de Matériaux Composites**



## II.1 Modélisation des phénomènes d'absorption d'humidité dans les matériaux

Le problème de la modélisation des cinétiques d'absorption d'eau dans les matériaux composites a été abordé par de nombreux chercheurs. Différentes observations sur le suivi de l'évolution gravimétrique du matériau en milieu humide menées entre autres par G.S. Springer [173], R. Delasi et J.B. Whiteside [60], B. Dewimille et textital. [65], P. Bonniau et A.R. Ransell [27], ont mis en évidence principalement deux schémas de cinétique: la cinétique de Fick et la cinétique de Langmuir. Le modèle de Fick est un modèle de diffusion libre à une phase, construit par analogie avec le modèle de Fourier de diffusion de la chaleur. Il est caractérisé par la présence d'un seuil de saturation bien défini représentant le palier d'équilibre. Le modèle de Langmuir est au contraire un modèle de diffusion à deux phases pour lequel le palier d'équilibre n'est jamais atteint. Il fait intervenir un phénomène de piégeage et de dépiégeage des molécules d'eau au sein du matériau. Nous présentons successivement ces deux modèles dans les milieux homogènes et composites.

### 1 Modèle de Fick

En exploitant l'analogie avec les phénomènes de transport de la chaleur, A. Fick [75] a proposé en 1855 un modèle de diffusion de l'humidité dans un milieu solide. Largement utilisées, les lois régissant le modèle de Fick traduisent ainsi le fait que le flux d'humidité traversant le matériau est proportionnel au gradient de concentration s'exerçant sur celui ci. Pour plus de détails, on pourra consulter également W. Jost [108], J. Crank [53].

#### 1.1 Description du modèle

Désignons par  $c(x, t)$  la concentration d'eau dans le matériau, c'est-à-dire la masse par unité de volume contenue en un point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  du solide à l'instant  $t$  et par  $\mathbf{q}(x, t)$  le vecteur flux d'humidité par unité d'aire en un point  $x$  et à l'instant  $t$ . L'équation locale de conservation de l'énergie dans le solide s'écrit alors :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1.1})$$

A cette équation s'ajoute la loi complémentaire dite loi de Fick :

$$\mathbf{q}(x, t) = -D(x) \operatorname{grad} c(x, t) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1.2})$$

Cette loi complémentaire de Fick, analogue à la loi de Fourier traduit le fait que l'humidité se propage toujours dans un matériau d'un point de forte humidité vers un point à faible humidité.

Le tenseur  $D(x)$  est un tenseur symétrique défini positif, dépendant de la position du point  $x$  dans un milieu hétérogène, et éventuellement de la concentration d'humidité  $c$  et de la température  $T$ .

Toutefois, il est observé que la température atteint généralement l'équilibre environ  $10^6$  fois plus rapidement que la concentration d'eau. En effet, une plaque composite en fibres de carbone T300 et résine époxyde Fiberite 1034 de 12,5mm, exposée à une atmosphère humide de 90% à une température de 350 kelvin, devient pratiquement uniforme en température en 15 secondes alors que la concentration d'humidité atteint son équilibre au bout de 13 ans (C.H. Shen et G.S. Springer [165]). Ainsi, dans la plupart des cas, la température est assimilée à la température ambiante. De plus, il a été également remarqué que la diffusivité ne varie que très peu avec le taux d'humidité [173]. De sorte, qu'il est courant de considérer que le tenseur de diffusivité hygrométrique ne dépend

que de la position.

Le tenseur  $D$  est appelé tenseur de diffusion hygrométrique et est mesuré en  $mm^2.s^{-1}$ . Il caractérise la vitesse avec laquelle l'humidité se propage dans le matériau. Enfin, pour un milieu homogène isotrope, le tenseur de diffusivité est de la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.3})$$

où  $D$  est une constante dans le milieu.

Ce problème de diffusion, doit être complété par des conditions initiales et aux limites. Dans ce travail, nous nous intéresserons au phénomène d'absorption d'eau en phase vapeur. L'objet du paragraphe suivant est de préciser les conditions aux limites spécifiques à ce type d'absorption.

## 1.2 Prise en compte de l'humidité ambiante

Les expositions en milieu humide vapeur ou liquide induisent principalement des différences sur le seuil de saturation, correspondant à un état d'équilibre entre l'échantillon et le milieu extérieur (B. Dewimille [64]). Différentes observations expérimentales menées par R. DeLasi et J.B. Whiteside [60], C.D. Shirrel [170], J.M. Whitney et C.E. Browning [186], G.S. Springer [173], ont permis de mettre en évidence que le seuil de saturation en milieu vapeur ne dépend que très peu de la température.

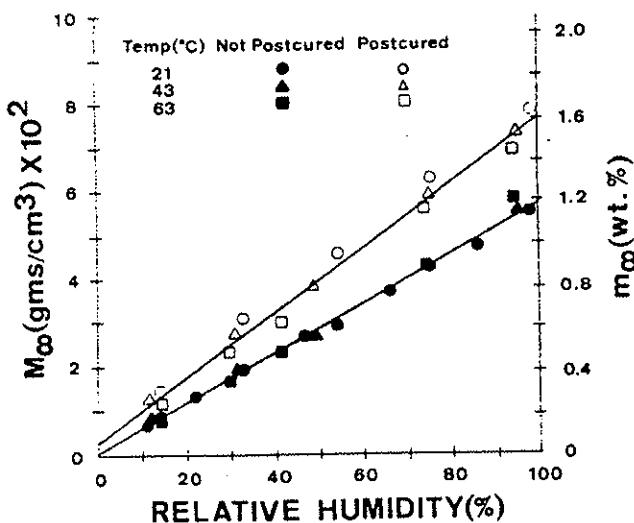


Figure II.1.1: Niveau de saturation en eau pour deux types de stratifiés en fibres de carbone T300 et résine époxyde 5208 en fonction du degré d'humidité et de la température, d'après C.D. Shirrel[170].

Les résultats expérimentaux du gain en eau à saturation obtenus par C.D. Shirrel [II.1.1], pour deux types de composites stratifiés T300/5208, et à différentes températures sont représentés sur la Figure II.1.1. Ces résultats mettent clairement en évidence le fait que le gain en eau à saturation est indépendant de la température et n'est fonction que du taux d'humidité.

Si l'on note  $M_s$  le seuil de saturation,  $M_s$  varie avec le taux d'humidité ambiante selon une loi en puissance, soit :

$$M_s = a\Phi^b \quad (\text{II.1.4})$$

où  $\Phi$  représente le taux d'humidité ambiante, et où  $a$  et  $b$  sont des constantes dépendant du matériau.

La Figure II.1.2 illustre les variations du seuil de saturation en fonction du taux d'humidité  $\Phi$  pour trois matériaux composites en fibres de carbone T300 ou AS, et résine époxyde Hercules 3501-5, Fiberite 1034, Narmco 5208, et les trois résines pures, Fiberite 934, Narmco 5208, et Hercules 3501-5. Ces résultats sont des courbes

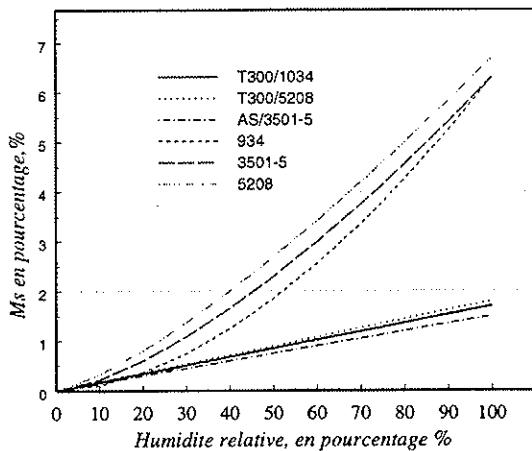


Figure II.1.2: Niveau de saturation en eau de divers matériaux composites et résines en fonction du degré d'humidité, d'après C.H. Shen et G.S. Springer[165].

obtenues par C.H. Shen et G.S. Springer [165] à partir de données expérimentales d'origines différentes.

La constante  $a$  est ainsi donnée par chaque matériau par la pente de la courbe à l'origine et  $b$  par la courbure. Ainsi, nous pouvons constater à partir de la Figure II.1.2, que  $b \approx 1$  pour les composites testés, et qu'il est compris entre 1.3 et 1.8 pour les résines pures. Les valeurs obtenues pour les constantes  $a$  et  $b$  sont regroupées dans le tableau (1.2).

Matériaux	a	b
T300/1034	0.017	1
T300/5208	0.015	1
AS/3501-5	0.018	1
934	6.3	1.77
3501-5	6.3	1.46
5208	6.7	1.32

Tableau II.1.1: Valeurs des constantes  $a$  et  $b$  ( $M_s = a\Phi^b$  si  $b = 1$ ;  $M_s = a(\Phi - 100)^b \times 100$  si  $b \neq 1$ )

Compte tenu de la relation (II.1.4), la concentration d'humidité à la surface du matériau nous est donnée par l'expression :

$$c_m = \rho_{sec} a \Phi^b \quad (\text{II.1.5})$$

où  $\rho_{sec}$  représente la densité du matériau sec.

Une fois les conditions aux limites déterminées, il est intéressant de noter que dans le cas où la diffusion est monodimensionnelle, par exemple dans une plaque de faible épaisseur, la solution du problème de diffusion est analytique.

### 1.3 Solution analytique dans une plaque plane homogène de dimension infinie

#### 1.3.1 Hypothèses et conditions aux limites et initiales

Considérons le problème de diffusion de l'humidité dans le cas d'une plaque homogène de grandes dimensions par rapport à son épaisseur. Il est alors intéressant de connaître la cinétique d'absorption de cette plaque soumise à un environnement humide sur ses deux faces, c'est-à-dire le régime transitoire entre deux états d'équilibre.

L'état initial est une concentration uniforme  $c_0$  à l'intérieur de la plaque ( $c_0$  pouvant être nul). A l'instant  $t = 0$ , les deux faces sont soumises instantanément à une concentration  $c_1 = a\Phi^b$  qui restera constante. L'état d'équilibre final sera atteint par la saturation de la plaque c'est-à-dire quand la concentration sera alors uniforme et égale à  $c_1$ .

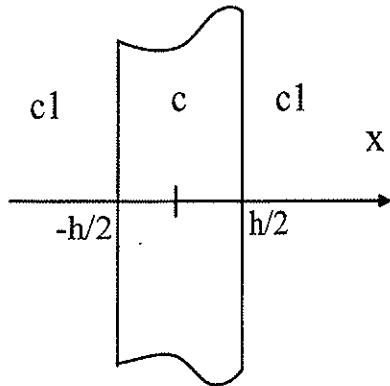


Figure II.1.3: Géométrie de la plaque de grandes dimensions par rapport à son épaisseur  $h$

Les conditions précédentes sont celles utilisées par la majorité des auteurs pour décrire de façon simple l'absorption d'eau par un matériau homogène. Compte tenu de la géométrie de la plaque, la diffusion est unidimensionnelle et peut être modélisée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial c(x_1, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}(x_1, t) = 0 & \text{pour } x_1 \in ]0, h[ \\ \mathbf{q}(x_1, t) = -D \operatorname{grad} c(x_1, t) & \text{pour } x \in ]0, h[ \\ c = c_1 & \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = h \\ c = 0 & \text{pour } t = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.6})$$

où le scalaire  $D$  représente la diffusion dans la direction  $x_1$ .

### 1.3.2 Profils de la concentration d'humidité

La solution de ce problème est explicite, et peut se mettre sous la forme (W. Jost [108], J. Crank [53]) :

$$\frac{c - c_0}{c_1 - c_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi x}{h}\right) \exp\left(-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 D t}{h^2}\right) \quad (\text{II.1.7})$$

Sur la Figure II.1.4, est reproduite l'évolution de la concentration d'humidité à travers l'épaisseur de la plaque et en fonction du temps. On utilise habituellement les paramètres adimensionnés:  $\frac{c - c_0}{c_1 - c_0}$ ,  $\frac{x}{h}$ ,  $\frac{Dt}{h^2}$ , pour représenter le profil de la concentration d'humidité. On peut observer que le profil évolue de manière continue en fonction du temps jusqu'à atteindre un état d'équilibre.

### 1.3.3 Masse de liquide absorbé

Introduisons  $M(t)$ , la masse totale d'eau dans le matériau à l'instant  $t$ , soit

$$M(t) = A \int_0^h c(x, t) dx \quad (\text{II.1.8})$$

où  $A$  représente l'aire soumise à la diffusion de l'eau.

L'intégration de l'expression (II.1.7) nous conduit à :

$$M(t) = M_s \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \exp\left[-\frac{(2j+1)^2 \pi^2 D t}{h^2}\right] \right) \quad (\text{II.1.9})$$

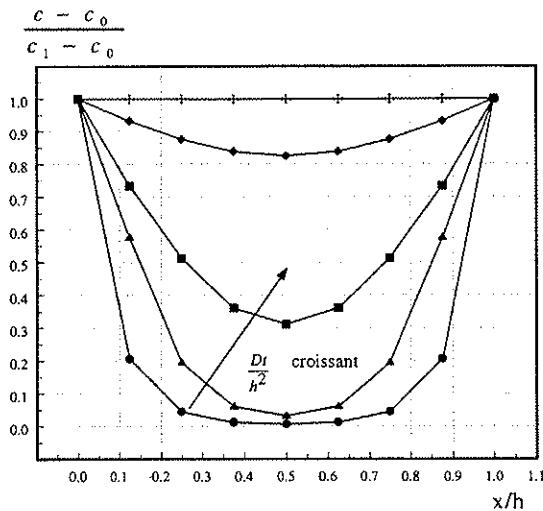


Figure II.1.4: *Evoluion de la concentration d'humidité*

où  $M_s$  est la masse d'eau à saturation ( $t = \infty$ ).

Nous pouvons observer sur la Figure II.1.5, où est représentée l'évolution de  $G(t) = M(t)/M_s$  en fonction du paramètre sans dimension  $\frac{Dt}{h^2}$ , la bonne concordance entre la solution analytique, donnée par l'expression (II.1.9), et les mesures expérimentales obtenues pour une résine époxy Hercules 3501-5 à différents taux d'humidité et températures. Ces résultats expérimentaux mettent en évidence un palier de saturation, atteint après une phase linéaire caractéristique de la diffusion Fickienne. L'absorption d'eau conduit à un gain en eau en poids plutôt élevé de 5.6% pour un taux d'humidité de 95% pour cette résine.

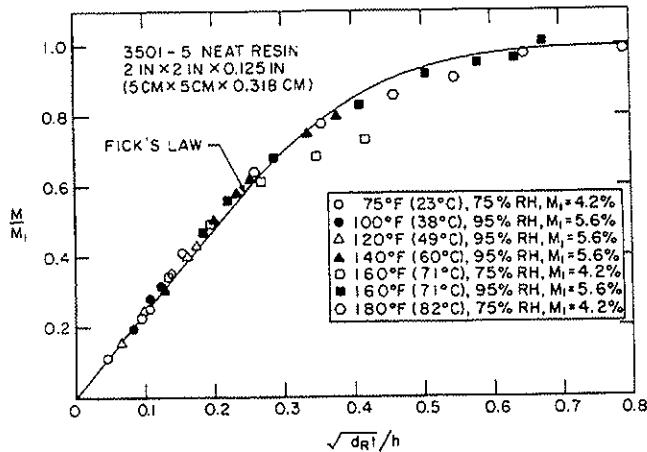


Figure II.1.5: *Comparaison solution analytique, modèle de Fick - mesures expérimentales, d'après J.M. Whitney et C.E. Browning[186]*

Différentes approximations de la formule (II.1.9) sont utilisées par de nombreux auteurs pour décrire les cinétiques d'absorption d'eau. Une des caractéristiques de la loi de diffusion de Fick est que la masse d'eau absorbée varie linéairement en fonction de la racine carrée du temps pour des valeurs de  $M(t)/M_s < 0.6$  environ, c'est-à-dire tant que la concentration d'humidité reste nulle au centre de la plaque, comme nous pouvons l'observer sur la Figure II.1.5. Ce critère étant valable quel que soit le matériau qui suit une cinétique Fickienne, cela nous amène à l'utilisation de l'expression suivante :

$$\frac{M(t)}{M_s} = \frac{4}{h} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \quad (\text{II.1.10})$$

Pour la deuxième partie de la courbe ( $M(t)/M_s > 0.6$  environ), différentes approximations sont couramment utilisées. Le modèle de G.S. Springer [173] utilise l'approximation suivante :

$$\frac{M(t)}{M_s} = 1 - \exp \left[ -7.3 \left( \frac{Dt}{h^2} \right)^{0.75} \right] \quad (\text{II.1.11})$$

La Figure II.1.6 où sont représentées les évolutions de  $G(t) = M(t)/M_s$  permet de comparer cette dernière relation avec une autre expression empirique utilisée par certains auteurs, E.L. McKague et al. [140] :

$$\frac{M(t)}{M_s} = \tanh \left[ \frac{4}{h} \left( \frac{Dt}{\pi} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{II.1.12})$$

Il peut être noté que la courbe de  $M(t)/M_s$  obtenue par une résolution numérique du problème de Fick est parfaitement décrite à partir des approximations (II.1.10) et (II.1.11) et cela peut permettre ainsi de caractériser de façon simple le coefficient de diffusion,  $D$ .

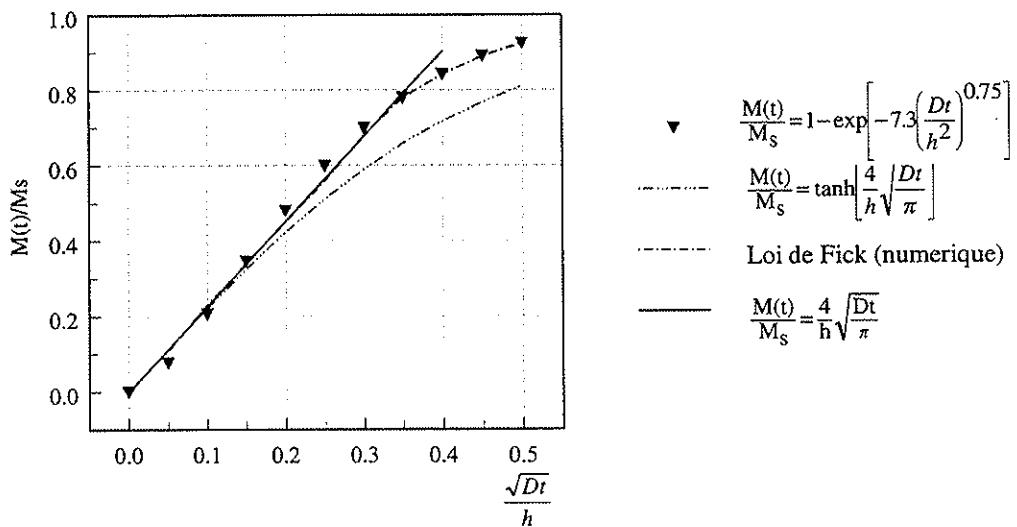


Figure II.1.6: Courbes de diffusion dans une plaque d'épaisseur  $h$ , d'après B. Dewimille [64]

## 1.4 Caractérisation du coefficient de diffusion

### 1.4.1 Cas d'une plaque de dimension infinie

Les mesures expérimentales du gain en eau en poids relatif d'un matériau permettent d'obtenir en utilisant l'expression (II.1.10) une identification directe du coefficient de diffusion dans la direction  $x_1$ . Plus précisément, ce coefficient de diffusion est caractérisé par la pente à l'origine de la courbe d'absorption d'humidité, soit:

$$D = \pi \left( \frac{h}{4M_s} \right)^2 \left( \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2 \quad (\text{II.1.13})$$

### 1.4.2 Correction des effets de bord

Cependant, dans la plupart des analyses expérimentales, comme par exemple celles menées par B. Dewimille [64] ou R. Jacquemet [105], les échantillons ont une largeur et une longueur qui ne sont pas forcément infiniment grandes devant l'épaisseur. La valeur du coefficient de diffusion obtenue par l'expression (II.1.10) et la courbe

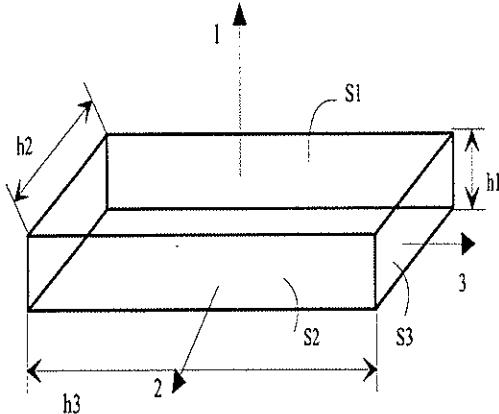


Figure II.1.7: Géométrie de la plaque de dimensions finies

expérimentale du gain en eau en poids doivent donc être corrigées en fonction de l'épaisseur de l'échantillon.

Le principe de cette correction est de prendre en compte l'eau pénétrant par les faces latérales, avec éventuellement des coefficients de diffusion différents. Cette correction suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les masses d'eau pénétrant par les différentes faces, ceci étant à peu près vrai puisqu'elle s'applique à des valeurs expérimentales pour des temps faibles, c'est-à-dire encore situées sur la partie linéaire de la courbe  $M(t) = f(\sqrt{t})$ .

En d'autres termes, l'eau pénétrant à travers une surface  $S_i$  avec un coefficient de diffusion  $D_i$  peut être considérée comme pénétrant dans un milieu semi-infini. Cette masse d'eau  $M_i$  est donc égale à :

$$M_i = 2S_i c_1 \sqrt{\frac{D_i t}{\pi}} \quad (\text{II.1.14})$$

où  $c_1$  est la concentration imposée en surface, (la concentration initiale étant ici supposée nulle).

Dans le cas d'un solide, la masse totale pénétrant par toutes les faces est donnée par :

$$M = \sum_i M_i \quad (\text{II.1.15})$$

Dans le cas d'un parallélépipède représenté sur la Figure II.1.7, nous avons :

$$M = 2M_1 + 2M_2 + 2M_3 \quad (\text{II.1.16})$$

soit :

$$M = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} (4S_1 \sqrt{D_1 t} + 4S_2 \sqrt{D_2 t} + 4S_3 \sqrt{D_3 t}) \quad (\text{II.1.17})$$

Le problème est de connaître le coefficient  $D_1$ , c'est-à-dire la diffusion dans la direction 1 :

$$M = 4S_1 c_1 \sqrt{\frac{D_1 t}{\pi}} \left[ 1 + \frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \frac{S_3}{S_1} \sqrt{\frac{D_3}{D_1}} \right] \quad (\text{II.1.18})$$

D'autre part,  $V$  étant le volume du parallélépipède, nous avons :

$$c_1 = \frac{M_s}{V} = \frac{M_s}{S_1 h_1} \quad (\text{II.1.19})$$

Nous retrouvons une relation analogue :

$$M = M_s \frac{4}{h} \sqrt{\frac{D_1 t}{\pi}} \gamma \quad (\text{II.1.20})$$

où  $M$  est la masse d'eau qui a pénétré par toutes les faces, c'est-à-dire la masse mesurée par la pesée et  $\gamma$  le coefficient de correction :

$$\gamma = 1 + \frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \frac{S_3}{S_1} \sqrt{\frac{D_3}{D_1}} \quad (\text{II.1.21})$$

La détermination des coefficients de diffusion  $D_2$  et  $D_3$  nécessitera des analyses expérimentales supplémentaires sur d'autres types d'échantillons où la direction prépondérante de diffusion se fera suivant la direction 2 ou 3. Pour plus de détails sur la méthode pratique de détermination du coefficient de correction  $\gamma$ , on pourra consulter B. Dewimille [64].

Les relations (II.1.13) et (II.1.20) qui permettent une caractérisation expérimentale du coefficient de diffusion ne sont valables que pour un matériau homogène, c'est-à-dire pour un tenseur hygrométrique  $D$  constant. Ainsi, dans le cas de matériaux hétérogènes, comme les composites, on est amené à remplacer le matériau composite par un milieu homogène équivalent. Ses caractéristiques diffusives peuvent être obtenues expérimentalement à partir des expressions (II.1.13) et (II.1.20) mais également à partir des propriétés des constituants du composite. Cela fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.5 Modèles de prédiction du comportement diffusif des composites

L'analyse du comportement des structures composites pose des difficultés. En effet, compte tenu de la complexité des pièces et de l'ordre de grandeur des hétérogénéités, il est souvent très coûteux, voire impossible, d'effectuer directement un calcul de structures, la discréttisation devant être plus fine que la taille des hétérogénéités. La démarche de l'homogénéisation permet de contourner cette difficulté en substituant au composite un matériau homogène équivalent au comportement voisin, qui dépend des propriétés mécaniques et géométriques des différents constituants. Plus précisément, cette démarche consiste à imposer à un volume considéré comme représentatif du milieu hétérogène, une déformation moyenne ou une contrainte moyenne. La loi de comportement du milieu homogène équivalent relie alors la contrainte ou la déformation moyenne qui en résulte à la déformation ou contrainte imposée. Différents modèles d'homogénéisation ont été proposés pour décrire les caractéristiques diffusives d'un composite unidirectionnel à partir des propriétés de la fibre, de la matrice et du taux de fibres. Le plus couramment utilisé est le modèle analytique développé par G.S. Springer et S.W. Tsai [174], initialement dans le cadre de la conduction thermique.

### 1.5.1 Le Modèle de Springer

Le modèle de G.S. Springer et S.W. Tsai [174] est un modèle complètement analytique de prédiction, des coefficients de conductivité thermique de composites unidirectionnels dans les directions longitudinale et transversale aux fibres. Le coefficient de conductivité thermique longitudinal est obtenu en supposant que les fibres sont de section circulaire et forment avec la matrice un arrangement en parallèle, analogue à un circuit électrique. Le coefficient de conductivité transverse est déterminé à l'aide d'une double analogie. Tout d'abord, en considérant une continuité parfaite de la température et du flux de chaleur entre la fibre et la résine, une analogie est établie entre la réponse d'un composite unidirectionnel à un chargement de cisaillement et à un transfert de chaleur dans la direction perpendiculaire aux fibres. Puis en supposant que le composite est un arrangement de fibres en série, on obtient une approximation du coefficient de conductivité transverse.

Soit  $K_f$  le coefficient de conductivité thermique de la fibre et  $K_m$  celui de la résine, les approximations des coefficients de conductivité dans la direction parallèle aux fibres  $K_l$  et perpendiculairement aux fibres  $K_t$  nous sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} K_l = (1 - \tau_f)K_m + \tau_f K_f \\ K_t = (1 - 2\sqrt{\frac{\tau_f}{\pi}})K_m + \frac{K_f}{B_D} \left[ \pi - \frac{4}{\sqrt{1 - (B_D^2 \tau_f / \pi)}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - (B_D^2 \tau_f / \pi)}}{1 + B_D \sqrt{\tau_f / \pi}} \right] \end{cases} \quad (\text{II.1.22})$$

avec  $B_D = 2 \left( \frac{K_m}{K_f} - 1 \right)$  et  $\tau_f$  le taux de fibres.

De manière analogue, si l'on suppose la diffusivité de la fibre comme étant plus faible que celle de la matrice, ce qui est le cas par exemple des fibres de verre ou de carbone pour lesquelles elle est nulle (J.P. Favre [73]), nous pouvons obtenir des expressions analytiques pour les coefficients de diffusivité hygrométrique (C.H. Shen et G.S. Springer [165]). Ces coefficients s'inscrivent:

$$\begin{cases} D_l = (1 - \tau_f) D_m \\ D_t = \left(1 - 2\sqrt{\frac{\tau_f}{\pi}}\right) D_m \end{cases} \quad (\text{II.1.23})$$

### 1.5.2 D'autres modèles d'homogénéisation

Différents modèles d'homogénéisation des coefficients de conductivité thermique ont également été développés dans les années 70. Parmi les plus connus, citons le modèle de Z. Hashin et S. Shtrikman [97] qui fournit des bornes des modules équivalents initialement dans le cadre de la perméabilité magnétique, par application du théorème de l'énergie au cas d'un arrangement régulier de fibres cylindriques. Un autre modèle a été développé par Z. Hashin et B.W. Rosen [95], un peu plus tard, pour des arrangements de fibres aléatoires, c'est-à-dire pour lequel le rayon des fibres peut varier, le composite étant décrit par un ensemble de cylindres circulaires. C.D. Shirrel et J. Halpin [171] ont obtenu un coefficient de diffusion équivalent transverse en faisant l'analogie avec le coefficient de cisaillement longitudinal de composites unidirectionnels, développés par Halpin et Tsai [89]. Dans les années 80, Nomura et Chou [151] ont amélioré les bornes de Z. Hashin et S. Shtrikman [97] dans le cadre de la conductivité thermique pour des composites à fibres courtes. Un peu plus tard, Christensen [54] a utilisé la méthode auto-cohérente, développée par R. Hill [101] dans le cas de matériaux composites, pour traiter des problèmes de conduction thermique et a obtenu les mêmes résultats que Z. Hashin et S. Shtrikman [97]. Le coefficient de diffusion équivalent peut être également obtenu en faisant l'analogie avec le modèle de Chou et al. [46] et le coefficient de cisaillement longitudinal, développé avec la méthode auto-cohérente dans le cadre des composites à fibres courtes. Kondo et Taki [119], en utilisant l'analogie avec la thermique, ont introduit un nouveau paramètre, appelé degré de distribution aléatoire des fibres, et le concept de concentration d'humidité relative  $c/c_\infty$  dans les expressions des coefficients de diffusion.

La validité de ces modèles sera discutée ultérieurement, mais on peut remarquer qu'ils reposent tous sur une loi de diffusion fickienne dans le matériau. Cependant, en suivant la prise d'humidité de certains matériaux pendant des durées prolongées, on constate qu'ils n'atteignent pas de palier d'équilibre. Or, le modèle de Fick ne permet pas de décrire de telles cinétiques d'absorption. Pour rendre compte de ces phénomènes, plusieurs artifices ont été proposés. Certains auteurs (M.C Lee et N. Pepas [124], S. Neumann et G. Marom [149]), proposent des modifications du modèle de Fick, en supposant par exemple que le coefficient de diffusion dépend de la concentration d'humidité ou est encore fonction de l'état de contraintes. Plus radicalement, d'autres auteurs (H.G. Carter and K.G. Kibler [36], B. Dewimille [64], P. Bonniau et A.R. Bunsell [27]) estiment la loi de Fick inadéquate et préfèrent la remplacer par un autre modèle s'inspirant de la description par Langmuir de la diffusion des gaz.

## 2 Modèle de Langmuir

### 2.1 Description du modèle dans un milieu homogène

Le modèle de Langmuir est un modèle à deux phases qui fait intervenir un phénomène de piégeage et de dépiégeage des molécules d'eau. L'une des phases est ainsi constituée de molécules d'eau libres de diffuser (comme dans le modèle à une phase de Fick), l'autre phase est constituée de molécules piégées dans le matériau. Les équations mathématiques qui en découlent reposent sur les mêmes équations de base que celles du modèle de Fick; il suffit d'introduire dans ces dernières un facteur correspondant au taux de matière qui migre entre les phases libre et liée. Ce facteur s'exprime en fonction des probabilités respectives qu'une molécule a de se libérer et qu'une molécule

libre a de se fixer. Ce modèle est décrit par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} = 0 \\ c(x, t) = n(x, t) + N(x, t) \\ \mathbf{q} = -D \text{grad} n(x, t) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \alpha n(x, t) - \beta N(x, t) \end{array} \right. \quad (\text{II.1.24})$$

où  $n(x, t)$  est la concentration en molécules libres de diffuser et  $N(x, t)$  est la concentration en molécules piégées et où  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) est la probabilité pour une molécule d'eau de passer d'une phase libre à une phase liée (respectivement d'une phase liée à une phase libre).

Nous pouvons également noter que la loi de Fick se retrouve à partir de la loi de Langmuir en faisant  $\alpha = 0$  et  $N = 0$ , c'est-à-dire quand il n'y a pas de liaisons possibles entre l'eau et le matériau.

## 2.2 Solution analytique dans une plaque plane

Comme pour le modèle de Fick, la résolution du système est analytique dans le cas où la structure étudiée présente une faible épaisseur devant ses dimensions transversales.

### 2.2.1 Profil de la concentration d'humidité

Les solutions de la concentration en molécules libres et en molécules piégées sont ainsi données par les relations suivantes (M.E. Gurtin et C. Yatomi [85], J. Crank [53], B. Dewimille [64]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x, t) = \frac{\alpha}{\beta} n_\infty \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{p(\text{impair})=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p(r^+ - r^-)} (r^+ e^{-r^- t} - r^- e^{-r^+ t}) \cos \frac{\pi p x}{h} \right] \\ n(x, t) = n_\infty \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{p(\text{impair})=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p(r^+ - r^-)} (r^+ e^{-r^- t} - r^- e^{r^+ t}) \cos \frac{\pi p x}{h} + \right. \\ \left. \frac{4}{\pi \beta} \sum_{p(\text{impair})=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p(r^+ - r^-)} (r^+ r^-) (e^{-r^- t} + e^{r^+ t}) \cos \frac{\pi p x}{h} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.1.25})$$

$$\text{où } r^\pm = \frac{1}{2} \left[ (kp^2 - \alpha - \beta) \pm \sqrt{(kp^2 - \alpha - \beta)^2 - 4k\alpha p^2} \right], k = \frac{\pi^2 D}{h^2}.$$

$n_\infty$  étant la concentration d'eau de la phase libre à l'équilibre. Ainsi  $n_\infty$  est telle que, à la saturation :

$$n_\infty \alpha = N_\infty \beta \quad (\text{II.1.26})$$

### 2.2.2 Masse de liquide absorbé

Si l'on suppose que  $\alpha \ll D\pi^2/h^2$  et  $\beta \ll D\pi^2/h^2$ , l'intégration de  $n(x, t)$  et  $N(x, t)$  permet d'obtenir la quantité d'eau en fonction du temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(t) = M_s \left[ \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \exp \left[ -\frac{(2p+1)^2 \pi^2 D t}{h^2} \right] \right) + \right. \\ \left. \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left( \exp(-\beta t) - \exp(-\alpha t) \right) + \left( 1 - \exp(-\beta t) \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.1.27})$$

où  $M_s$  est la prise d'eau à saturation, qui est ici calculée et qui n'est pas la valeur au palier d'équilibre non atteinte avec ce modèle.

En outre, les coefficients de probabilité  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent à priori de la nature du matériau et de la température (P. Bonniau et A.R. Bunsell [27]). Le domaine de validité des hypothèses considérées concernant les coefficients de probabilité  $\alpha$  et  $\beta$  se situent ainsi entre 20°C et 65°C pour le composite à fibres de verre et résine epoxy testé.

Pour illustrer le modèle à deux phases, la Figure II.1.8 représente l'évolution de  $M(t)/M_s$  en coordonnées réduites pour une résine époxyde et des échantillons immergés dans l'eau.

On peut tout d'abord observer qu'il y a une très bonne concordance entre les résultats expérimentaux et le modèle

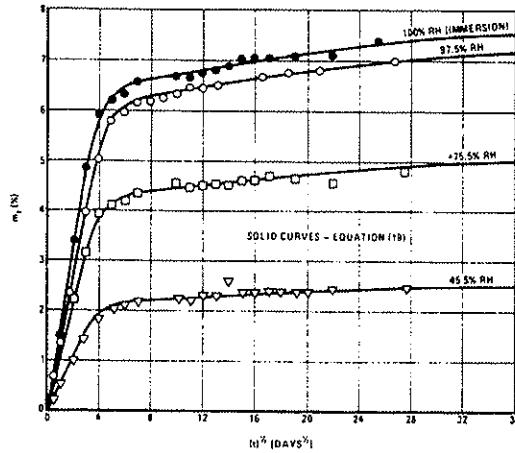


Figure II.1.8: Modèle de Langmuir-mesures expérimentales, d'après H.G. Carter et K.G. Kibler [36]

de Langmuir. Ces résultats expérimentaux montrent qu'après une phase linéaire, il apparaît un double plateau. Après une phase de pseudo-saturation, caractérisée par un ralentissement de la cinétique d'absorption, le gain en eau du matériau se remet à augmenter de façon significative sans aucune perspective de palier d'équilibre. On peut alors montrer que l'évolution du gain en eau peut être ainsi caractérisée par trois parties (F.G. Carter et K.G. Kibler [36]):

- une partie initiale linéaire, pour laquelle  $Dt/h^2 < 0.05$  et le rapport  $M(t)/M_s$  peut être approché par la formule :

$$\frac{M(t)}{M_s} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{4}{h} \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \quad (\text{II.1.28})$$

- une pseudo-saturation, pour un temps  $t$  de l'ordre de  $5h^2/\pi^2 D$ , à un niveau  $M'$  tel que :

$$\frac{M'}{M_s} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (\text{II.1.29})$$

Cette pseudo-saturation n'est pas toujours visible, il faut que l'épaisseur de l'échantillon soit suffisamment petite ou que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  soient très petits devant  $D$ . Plus le comportement est éloigné de la loi de diffusion simple, plus la forme en double plateau de la courbe est accentuée.

- une approche lente de la saturation, pour des valeurs  $Dt/h^2 > 0.05$  et où le gain en eau peut être approché par la formule :

$$\frac{M(t)}{M_s} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \exp\left(-\frac{Dt\pi^2}{h^2}\right) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \exp(-\alpha t) \quad (\text{II.1.30})$$

### 2.3 Détermination des paramètres du modèle

De manière identique au cas d'une cinétique Fickienne, le coefficient de diffusion du matériau, dans la direction x est donné par la pente initiale de la courbe expérimentale de gain en eau, soit :

$$D = \pi \left( \frac{h}{4M_s} \right)^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2 \quad (\text{II.1.31})$$

Ce coefficient pourra être corrigé dans le cas d'une plaque de dimension finie par le paramètre de correction des effets de bord  $\gamma$  donné précédemment.

Il a été également montré par F.G. Carter et K.G. Kibler [36] que des équations dérivées de l'expression [II.1.30] fournissent des équations utiles à la détermination des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Ainsi pour  $\alpha, \beta \ll \frac{\pi^2 D}{h^2}$  et  $t \gg \frac{h^2}{\pi^2 D}$ , on peut obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{cases} -\left( \frac{dM(t)}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d^2 M(t)}{dt^2} = \beta \\ e^{-\beta t} \left[ \alpha \left( \frac{dM(t)}{dt} \right)^2 M(t) + 1 \right] = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad (\text{II.1.32})$$

Cependant, afin d'avoir une caractérisation correcte du coefficient de diffusion, il faut pouvoir définir l'influence de la température sur les caractéristiques diffusives du matériau. Cela fait l'objet du paragraphe suivant.

## 3 Influence de la température

Différentes études expérimentales, menées entre autres par R. DeIasi et J.B. Whiteside [60] J.M. Augl et A.E. Berger [13] et C.H. Shen et G.S. Springer [165], ont permis d'observer que la température influe principalement sur le coefficient de diffusion du matériau.

### 3.1 Loi d'Arrhénius

Contrairement au seuil de saturation, le coefficient de diffusion est peu sensible au degré d'humidité; en revanche il est fortement activé par la température (J.M. Augl and A.E. Berger [13]). Cette activation peut être traduite par une loi de type Arrhénius :

$$D = D_o \exp(-E_a/RT) \quad (\text{II.1.33})$$

où  $D_o$  est une constante,  $E_a$  l'énergie d'activation,  $R$  la constante des gaz parfaits, et  $T$  la température absolue. De façon plus simple, nous pouvons écrire :

$$D = D_o \exp(-C/T) \quad (\text{II.1.34})$$

où  $C$  est exprimé en kelvin.

Afin d'illustrer la dépendance du coefficient de diffusion avec la température, nous avons repris la synthèse des résultats de différentes études expérimentales, effectuées par A.C. Loos et G.S. Springer [136], concernant différents matériaux placés dans un milieu humide, à différentes températures.

Les droites représentées sur la figure [II.1.9] en base logarithmique sont des courbes moyennes et la dispersion peut être parfois importante entre les différents résultats expérimentaux. Cependant, on retrouve tout de même que les pentes et donc les énergies d'activation sont très voisines et se situent entre 5100 et 5800 Kelvin, soit entre 10 et 12  $kJ/mole$ .

Cependant, la loi d'Arrhénius peut être insuffisante pour décrire les effets thermiques sur l'absorption d'humidité et certains auteurs (C.D. Shirrel [170], Hartranft et Sih [91], T.C. Chen et al. [42]) préfèrent dans quelques cas introduire un couplage direct entre ces deux phénomènes.

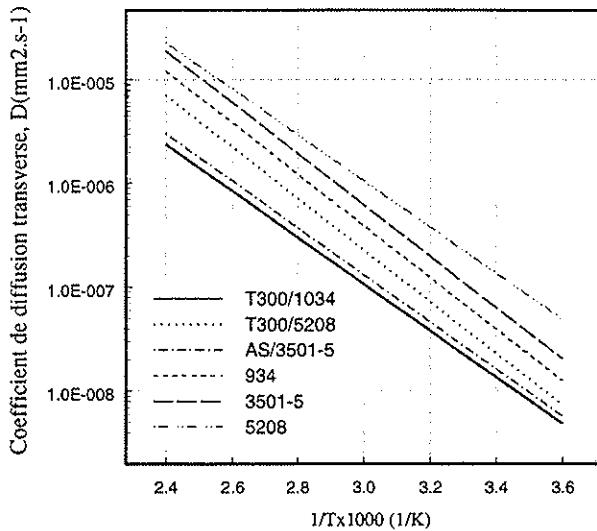


Figure II.1.9: Diffusivités en fonction de la température, d'après A.C. Loos et G.S. Springer [136]

### 3.2 Couplage humidité-température: Effet de Dufour et Soret

Le comportement rhéologique d'un matériau dépend physiquement des interactions entre les phénomènes hygrométriques et thermiques. L'influence de ces effets couplés est généralement négligeable pour des métaux pour lesquels le coefficient de conductivité thermique est bien plus élevé que le coefficient de diffusivité. Cependant, elle peut devenir significative pour des matériaux poreux ou des matériaux composites dont les coefficients de conductivité thermique et de diffusivité sont de même ordre de grandeur, T.C. Chen et al. [42].

#### 3.2.1 Description du modèle

Les lois d'état complémentaires traduisant le couplage des phénomènes hygrométriques et thermiques, sont de la forme suivante [79]:

$$\begin{cases} \nu = L_{11} \frac{1}{T(x,t)} \text{grad } T(x,t) - L_{12} T(x,t) \text{grad} \left( \frac{\mu(x,t)}{T(x,t)} \right) & \text{Effet de Soret} \\ q = L_{21} \frac{1}{T(x,t)} \text{grad } T(x,t) - L_{22} T(x,t) \text{grad} \left( \frac{\mu(x,t)}{T(x,t)} \right) & \text{Effet de Dufour} \end{cases} \quad (\text{II.1.35})$$

où  $\nu$  est le flux d'humidité,  $q$  le flux de chaleur et  $\mu$  est le potentiel chimique du matériau qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\mu = RT \log c(x,t) + \text{constante} \quad R \text{ constante gaz parfaits} \quad (\text{II.1.36})$$

et où  $[L]$  est la matrice des coefficients phénoménologiques  $L_{ij}$ . Les termes diagonaux  $L_{ii}$ , ou coefficients propres, sont reliés à la conductivité thermique et la diffusion, alors que les termes non diagonaux  $L_{ik}$ , ou coefficients mutuels, traduisent le couplage entre les phénomènes de conduction thermique et de diffusion. De plus, selon le principe d'Onsager (Y.C. Fung [79], P. Germain [82]) qui traduit un phénomène de réciprocité des phénomènes de couplage, nous avons  $L_{12} = L_{21}$ . Pour plus de détails sur ces équations et ce formalisme, on pourra consulter S.R. De Groot [66], W. Jost [108].

L'effet de Dufour est ainsi représenté par l'existence d'un flux de chaleur dû à un gradient d'humidité. De manière analogue, l'effet de Soret traduit l'existence d'un flux d'humidité causé par une variation de température.

### 3.2.2 Définition et détermination des paramètres introduits

Les équations (II.1.35) peuvent être réécrites sous la forme suivante (R.J. Hartranft et G.C. Sih [91]) :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = -D \left[ \text{grad}c(x, t) + \frac{c(x, t)}{RT^2} Q^* \text{grad}T(x, t) \right] \\ \nu = -K \text{grad}T(x, t) - DQ^* \text{grad}c(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.1.37})$$

où  $Q^*$  le coefficient de transport de chaleur. Pour un solide isotherme,  $Q^*$  est le rapport du flux de température et du flux d'humidité.

Introduisons le coefficient  $\eta$  défini par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{D}{K} \frac{c}{RT^2} (Q^*)^2 \quad (\text{II.1.38})$$

On peut alors montrer que  $\eta$  traduit le degré d'importance du couplage entre les effets thermiques et hygrométriques. Si  $\eta \ll 1$ , on peut se ramener à un découplage des phénomènes. Si au contraire, les effets de couplage ne sont pas négligeables, les coefficients de diffusion de couplage  $D_{ch} = \frac{Dc}{RT^2} Q^*$ , et  $D_{ct} = DQ^*$ , peuvent être obtenus en utilisant les courbes de détermination expérimentale de Hartranft et Sih [91].

Tous ces différents modèles d'absorption d'eau sont couramment utilisés dans la littérature. Cependant, différentes études expérimentales (B. Dewimille [64], R. Jacquemet [105]) dans le cas de phénomènes d'absorption en milieu liquide ont mis en évidence d'importantes limitations de ces modèles. En particulier, il ressort que des modifications physico-chimiques de la matrice peuvent apparaître (De Néve et M.E.R. Shanahan [61]) ainsi qu'un rôle des interfaces entre la fibre et la matrice dans le processus d'absorption (C. Shutte [164], B. Dewimille [64]). Les modèles classiques qui ne prennent pas en compte ces phénomènes, ne sont alors plus utilisables. Afin d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes d'absorption se produisant en milieu vapeur, et de confronter expérimentalement les modèles d'absorption classiques, nous avons développé une étude expérimentale sur différents composites et résines. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

## II.2 Caractérisation expérimentale de l'absorption d'humidité

L'étude expérimentale a été réalisée sur des échantillons en résine pure et en matériaux composites à fibre de carbone de fabrication industrielle. Elle a porté sur l'analyse des cinétiques d'absorption d'humidité dans le matériau en phase vapeur et sur les dégradations qui s'ensuivent. Nous avons en outre essayé de confronter cette étude expérimentale aux modèles théoriques de diffusion. Nous avons travaillé à une température fixée de  $40^{\circ}C$  et les paramètres principaux que nous avons fait varier sont le taux d'humidité ambiant et les caractéristiques mécaniques des échantillons en faisant varier les orientations des fibres et en étudiant différentes résines.

Cette étude expérimentale a été menée au sein du groupe d'assistance technique pour les détecteurs de la division de Physique Expérimentale. La mise au point du dispositif expérimental, protocole, achat du matériel, installation des dispositifs, fabrication des échantillons, s'est échelonné sur une période de 6 à 8 mois (C. Darve et al), la durée même des expériences environ sur une année.

### 1 Techniques et méthodes expérimentales

#### 1.1 Description du dispositif expérimental

##### 1.1.1 L'environnement

Pour réaliser cette étude expérimentale, nous disposions d'une enceinte climatique Binder KBF 720 achetée à cet effet (Figure II.2.1) de 720 l de volume utile permettant d'obtenir des environnements en humidité relative de 10% à 90% dans une gamme de température de  $0^{\circ}C$  à  $100^{\circ}C$ . La chambre KBF est une chambre climatique de haute précision répondant à toutes les exigences en matière de tests de stabilité et de conditionnement d'échantillons pour les contrôles de différents types de matériaux. L'humidification de l'air est effectuée par un système d'humectage de la vapeur par électrodes. Aucune qualité particulière n'est exigée de l'eau. Seule sa conductibilité est importante. Elle doit ainsi se situer entre  $200\mu S$  et  $500\mu S$ . Ceci nous permet d'utiliser de l'eau de robinet et offre ainsi une plus grande facilité d'utilisation. La régulation de la température est effectuée à l'aide d'un régulateur à micro-processeur multi-fonctionnel précis à  $0.1^{\circ}C$  près. Le système d'humidification et de déshumidification est contrôlé par un microprocesseur, muni d'un capteur d'humidité capacitif, avec une précision de réglage de  $\pm 3\%$  par rapport à la valeur de consigne. Il comporte deux systèmes de portes, une porte extérieure et une porte vitrée intérieure. Ceci nous a ainsi permis en aménageant ces portes vitrées intérieures en y installant un système de passage des mains, de pouvoir manipuler les échantillons à l'intérieur sans une complète ouverture de l'enceinte.

##### 1.1.2 Mesures gravimétriques

La méthode la plus simple et la plus précise pour suivre les cinétiques d'absorption est la méthode gravimétrique. Pour ce faire, nous utilisons une balance Mettler AE200 de précision  $0.1mg$  et d'étendue de mesure de  $205g$ . Les échantillons ont un poids situé autour de  $100g$ , donc nous pouvons lire des variations de poids de  $0.0001\%$ ; sachant que la saturation en eau se situe entre  $0.1\%$  et  $0.6\%$ , nous avons donc une précision de  $0.1\%$  sur le rapport entre la masse d'eau absorbée et la masse d'eau à saturation. Les échantillons étant placés dans un environnement contrôlé en humidité, il était important de ne pas avoir à sortir les échantillons pendant les mesures gravimétriques pour une meilleure précision du dispositif expérimental. Deux aménagements de trous d'environ  $3cm$  de diamètre avaient ainsi été demandés au fabriquant de l'enceinte climatique: l'une pour un passage d'une seconde sonde hygrométrique de contrôle, et l'autre pour le dispositif de mesures gravimétriques. La balance est en effet posée

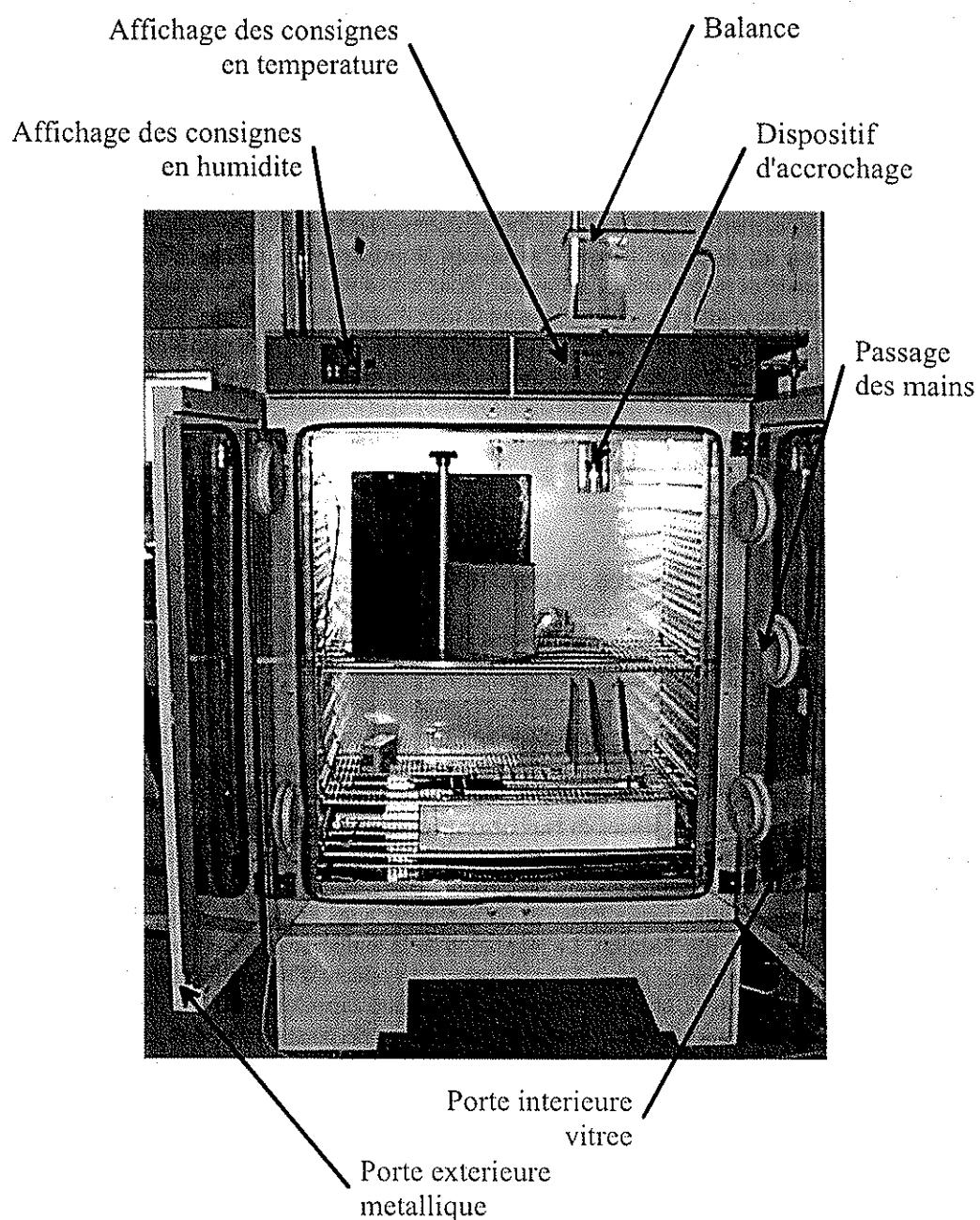


Figure II.2.1: Enceinte climatique avec son système de mesures gravimétriques

au-dessus de l'enceinte. Celle-ci disposant d'un deuxième système de pesée placé sous le plateau de la balance (crochet), un petit dispositif que l'on fait passer à travers l'enceinte (voir Figure II.2.1) nous permet ainsi de peser les échantillons sans les sortir de l'enceinte.

## 1.2 Choix et description des échantillons testés

### 1.2.1 Géométrie des échantillons

Les dimensions des échantillons ont été choisies initialement afin de vérifier l'hypothèse d'une diffusion unidirectionnelle. Différents types d'échantillons ont été testés :

- Echantillons a: ils sont réalisés en composite unidirectionnel (Figure II.2.2) et sont dimensionnés de telle sorte que la pénétration de l'eau soit perpendiculaire aux fibres. Leurs dimensions sont  $0.5\text{mm} \times 250\text{mm} \times 500\text{mm}$  pour les composites à matrice polymérique ou  $0.5\text{mm} \times 20\text{mm} \times 80\text{mm}$  pour les échantillons en carbone/carbone.

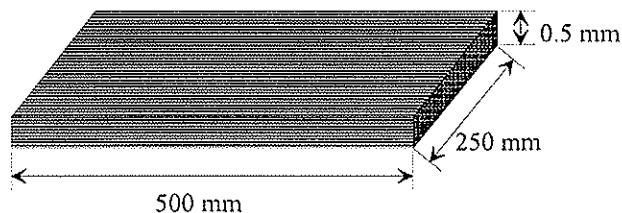


Figure II.2.2: Schéma des échantillons parallélépipédiques avec pénétration d'eau perpendiculaire aux fibres

- Echantillons b: Les échantillons b sont réalisés en composite unidirectionnel et sont dimensionnés de façon à ce que la pénétration de l'eau soit cette fois parallèle aux fibres (Figure II.2.3). Les dimensions des échantillons de forme parallélépipédique dans le cas des composites à base de résine cyanate ester sont  $0.5\text{mm} \times 10\text{mm} \times 250\text{mm}$ . Les échantillons en composite à base de résine époxyde sont sous forme de rondelles de 95mm de diamètre sur 0.5mm d'épaisseur.

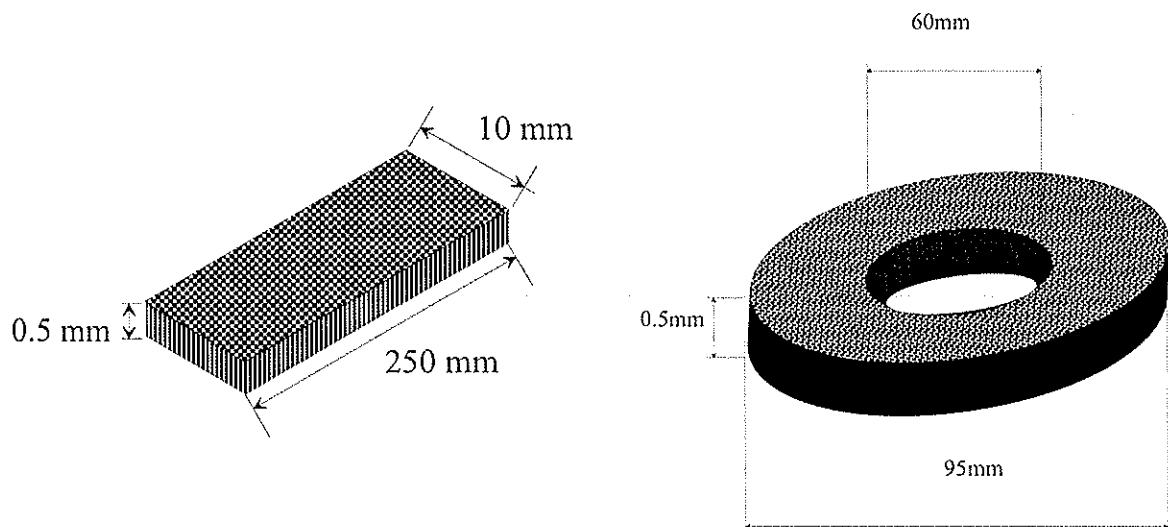


Figure II.2.3: Schéma des échantillons avec pénétration d'eau parallèle aux fibres

- Echantillons c: Les échantillons c sont des stratifiés symétriques, de dimensions  $0.91\text{mm} \times 250\text{mm} \times 500\text{mm}$ , et présentent trois séquences de plis différentes:  $[0/+5/-5]_s$ ,  $[0/+10/-10]_s$  et  $[0/+15/-15]_s$ .

Caractéristiques	Echantillons a	Echantillons b	Echantillons c	Echantillons d
Orientation des plis	Unidirectionnel, pénétration perpendiculaire aux fibres	Unidirectionnel, pénétration parallèle aux fibres	Stratifiés [0,+5,-5]s [0,+10,-10]s [0,+15,-15]s	Pure résine
Dimensions en mm	250x500x0.5	20x80x0.5	250x10x0.5	Rondelles 60x95x0.5
Matériaux	3 en carbone T300/Epoxy 1808N 3 en carbone T300/Cyanate ester 'Rosalie'	3 en carbone/carbone avec graphitation 3 en carbone/carbone sans graphitation	3 en carbone T300/Cyanate ester 'Rosalie'	3 en carbone IM-7G/Epoxy 8551-7A
Produit initial	prépreg	échantillons	prépreg	prépreg
Fabricants	CTMI (Cotton Textiles pour Matériaux Innovants)	Institut of Nuclear Physics of Cracovie	C.T.M.I	C.T.M.I
				échantillon HEXCEL
				résine C.T.M.I
				échantillon YLA, Incorporated

Figure II.2.4: Caractéristiques des échantillons testés

- Echantillons d: Les échantillons d sont en résine pure de dimensions suivantes:  $1mm \times 250mm \times 250mm$  ou  $1.51mm \times 280mm \times 280mm$ .

### 1.2.2 Matériaux

Les matériaux testés sont de fabrication industrielle. Différents types de fibres de carbone et de résine ont été utilisés dans cette étude. Nous avons reporté sur le tableau [II.2.4] les spécificités des différents échantillons testés.

Plus précisément les caractéristiques chimiques de ces différents matériaux sont les suivantes :

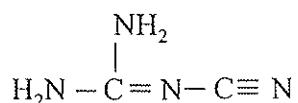
**Les fibres de carbone** Les fibres de carbone T300 (Torayca 300) et IM-7G qui ont été utilisées pour les échantillons composites sont obtenues à partir de fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile, après une phase d'oxydation, de carbonisation et de graphitation. On pourra se référer au paragraphe 1.1 pour plus de renseignements sur les procédures de fabrication des fibres de carbone.

Les fibres de carbone T300 sont plutôt des fibres dénommées à haute résistance avec un module d'Young de l'ordre de  $220GPa$ .

Les fibres IM-7G font également partie de la catégorie des fibres de haute résistance avec un module d'Young intermédiaire de  $300GPa$ .

Les fibres P100 (Thornel) utilisées pour les échantillons en carbone/carbone sont obtenues à partir du brai. Dans ce procédé, le brai est chauffé à  $350^0C$ - $450^0C$  pour obtenir une mésophase qui est un intermédiaire entre la phase liquide et cristalline, puis filé, oxydé, carbonisé, puis enfin pyrolysé à des températures supérieures à  $2000^0C$  pour obtenir des fibres de haut module. Les fibres P100 ont ainsi un module d'Young théorique de l'ordre  $785GPa$ .

**Résine Epoxyde** La résine époxyde 1808N utilisée pour la fabrication des échantillons en résine pure, ainsi que les échantillons composites unidirectionnels, est à base de résine diglycidil éther de bisphénol A, appelé DGEBA. Le durcisseur employé, est le dicyandiamide de chaîne moléculaire :



Les échantillons à base de résine époxyde 1808N ont été réalisés au CERN à partir du préimpregné ou de la résine pure. Quatre plis de préimpregnés ont été nécessaires pour la réalisation des échantillons en composite où les fibres

sont perpendiculaires à la pénétration d'eau. Au contraire, il en a fallut plus d'une centaine pour l'autre type de spécimens, c'est-à-dire où les fibres sont parallèles à la pénétration d'eau. La procédure de polymérisation, les spécimens ayant été enfermés dans un sac à vide, est représentée sur la Figure II.2.5.

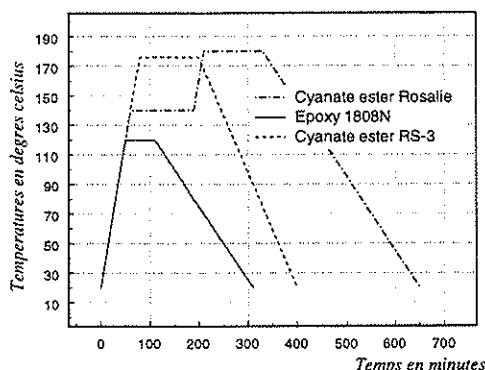
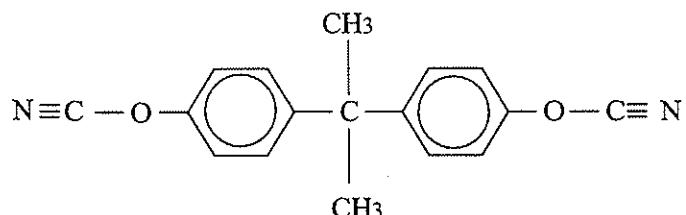


Figure II.2.5: Cycles de polymérisation des échantillons à base de résine époxyde 1808N et de résine cyanate ester Rosalie et RS-3 — Sac à vide pendant tout le cycle.

Les échantillons stratifiés sont à base de résine 8551-7A époxy. Les spécimens ont été réalisés par KaZaK Composites Incorporated (Boston) à partir du prepreg IM-7G/8551-7A fabriqué par HEXCEL. La procédure de polymérisation réalisée dans une presse chauffante était de 4 heures à une température d'environ 176°C.

**Résine Cyanate Ester** Deux types de résine cyanate ester ont également été utilisés. La cyanate Ester 'Rosalie', livrée sous forme de monocomposant, a été mise au point par CTMI. Elle est basée pour 80% de sa formulation sur la chaîne polymérique suivante :



Des agents additifs, tel que des phénols sont également introduits en tant que catalyseurs.

Les échantillons à base de résine 'Rosalie' ont également été réalisés au CERN. La procédure de polymérisation qui est très différente de celle de la résine époxy 1808N est représentée sur la Figure II.2.5.

La résine RS-3, est une polycyanate développée par YLA Incorporated en Californie. La procédure de polymérisation qui a été réalisée dans une autoclave est également donnée sur la Figure II.2.5.

**Carbone/Carbone** Pour obtenir le composite carbone/carbone, les fibres sont tout d'abord imprégnées de résine phénolique. Ensuite, différentes procédures sont utilisées pour obtenir des échantillons en composite carbone/carbone. Tout d'abord il y a une phase de polymérisation à 150°C, ensuite une phase de carbonisation dans un moule à 700°C et finalement à 1100°C une fois l'échantillon sorti du moule. La dernière phase est un processus de pyrolyse à 850°C pendant 3 heures. Une dernière phase supplémentaire de graphitation à 2500°C a été réalisée sur trois des échantillons testés, désignés sous le nom de carbone/carbone 2. Les autres échantillons seront désignés par carbone/carbone 1. L'ensemble des procédures de fabrication du prépreg aux échantillons carbone/carbone a été réalisé à l'institut de Physique des Hautes Energies de Cracovie (Pologne).

### 1.3 Conditions d'essai

Les échantillons sont tous tout d'abord asséchés dans un four à vide à  $50^{\circ}C$  et à un taux d'humidité de 0% pendant une durée d'environ un mois et demi à deux mois. Le taux d'humidité est contrôlé à l'aide d'une sonde CAN-Lufft placée en permanence dans le four à vide. La durée d'assèchement de ces échantillons a été définie à partir d'une simulation des temps d'absorption et de désorption à l'aide de quelques données trouvées dans la littérature sur les composites à base de résine époxyde. Ensuite, les échantillons ont été placés dans l'enceinte climatique à  $40^{\circ}C$  et à des taux d'humidité successifs de 15%, 35%, 55%, 85%. Les échantillons en stratifiés, en carbone/carbone et cyanate ester RS-3, obtenus plus tardivement n'ont été placés dans l'enceinte qu'à partir du palier de 55% d'humidité relative. Les différents échantillons n'étant pas asséchés à chaque changement du taux d'humidité, nous utiliserons le terme de palier d'humidité. Les mesures gravimétriques ont été réalisées régulièrement pendant la phase d'absorption des échantillons jusqu'à une éventuelle phase de saturation. Compte tenu de la lenteur des phénomènes d'absorption d'eau dans les matériaux composites, la phase expérimentale s'est déroulée sur une période d'un an.

## 2 Cinétique d'absorption des résines

Nous allons nous intéresser dans cette partie à l'analyse des résultats expérimentaux concernant les cinétiques d'absorption des différents échantillons testés en résine pure. Certains aspects physiques des dégradations que nous avons pu observer sur les échantillons testés seront abordés.

### 2.1 Analyse du gain en poids en eau

#### 2.1.1 Résine Epoxy

Les courbes de gain en eau obtenues pour la résine époxy 1808N pour les trois plaques échantillons testées sont données aux Figures II.2.6 et II.2.7. Elles sont exprimées en prise de poids relative à chaque palier d'humidité en fonction de la racine carrée du temps en seconde normalisée par l'épaisseur  $h$  (en millimètre) de l'échantillon.

Les courbes montrent une bonne répétabilité des phénomènes entre les trois plaques testées. Celles-ci ayant été réalisées séparément, suivant les mêmes conditions de polymérisation, et donc ne provenant pas d'une même pièce, nous pouvons en conclure une bonne fiabilité de la procédure de fabrication et du système de mesures.

On peut également noter que l'absorption au sein de la résine change avec le taux d'humidité, comme nous pouvons l'observer sur la Figure II.2.8 où est représentée la prise en poids relatif accumulée au cours des différents paliers d'humidité. Aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative, après une phase linéaire en  $\sqrt{t}$  en début d'absorption, on retrouve un infléchissement suivi d'un état de saturation. On constate donc un état d'équilibre du matériau avec le milieu extérieur. Aucune dégradation n'est visible et l'on n'a qu'un phénomène simple d'absorption d'eau au sein de la résine. Cependant, aux paliers de 55% et de 85% d'humidité relative, on note après une phase linéaire en  $\sqrt{t}$  l'existence d'un pseudo état de saturation. Mais contrairement aux paliers précédents, on constate que ce pseudo-plateau est suivi par une forte augmentation du gain en poids en eau. Il semblerait donc que l'on ait une diffusion libre d'eau au sein de la résine qui s'accompagnerait d'autres phénomènes. Une explication pourrait être que des phénomènes d'hydrolyse apparaissent après un certain temps d'exposition entraînant une scission de chaînes moléculaires et donc un réarrangement du réseau au sein de la résine. Le gain en poids en eau est alors attribué à l'eau qui est attaché chimiquement à la résine. Cela peut être dû également à un phénomène de rétention d'eau dans des zones de moindre densité dues à une réticulation non uniforme.

On peut noter également que les écarts entre les trois plaques d'épaisseur différentes sont d'autant plus marqués que le taux d'humidité augmente. L'épaisseur des échantillons étant faible par rapport aux deux autres dimensions de la plaque 250mm et 500mm, les effets de bord peuvent être écartés. Ce phénomène déjà observé par B. Dewimille [64], qui ne peut être décrit par un modèle à une phase, serait relié au volume des échantillons, plus le volume est grand, plus il y a de sites pour recevoir les molécules d'eau. Ces sites peuvent être liés à la structure de la résine. Ceci tendrait à expliquer que ces écarts sont d'autant plus notables que le phénomène d'augmentation continue de la prise en poids est accentué. Le fait que ce comportement n'a pas été observé aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative, alors que les temps d'exposition pour chaque palier sont quasiment les mêmes,

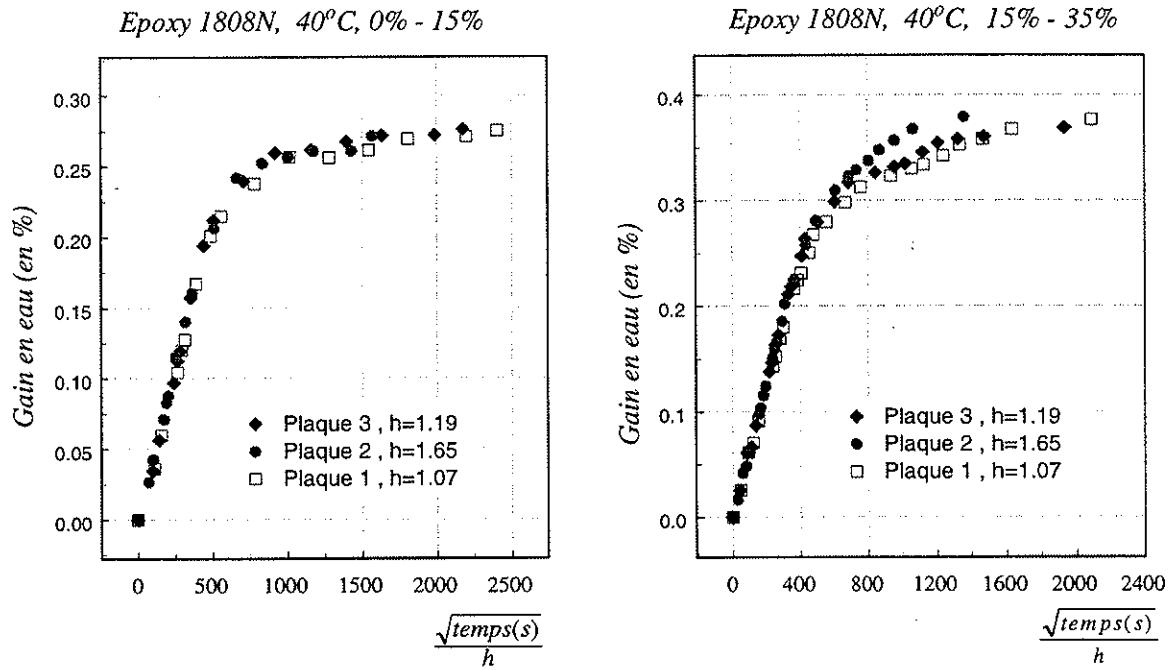


Figure II.2.6: Absorption d'eau par la résine Epoxy 1808N à 40°C et aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en poids en eau relatif à chaque palier considéré.

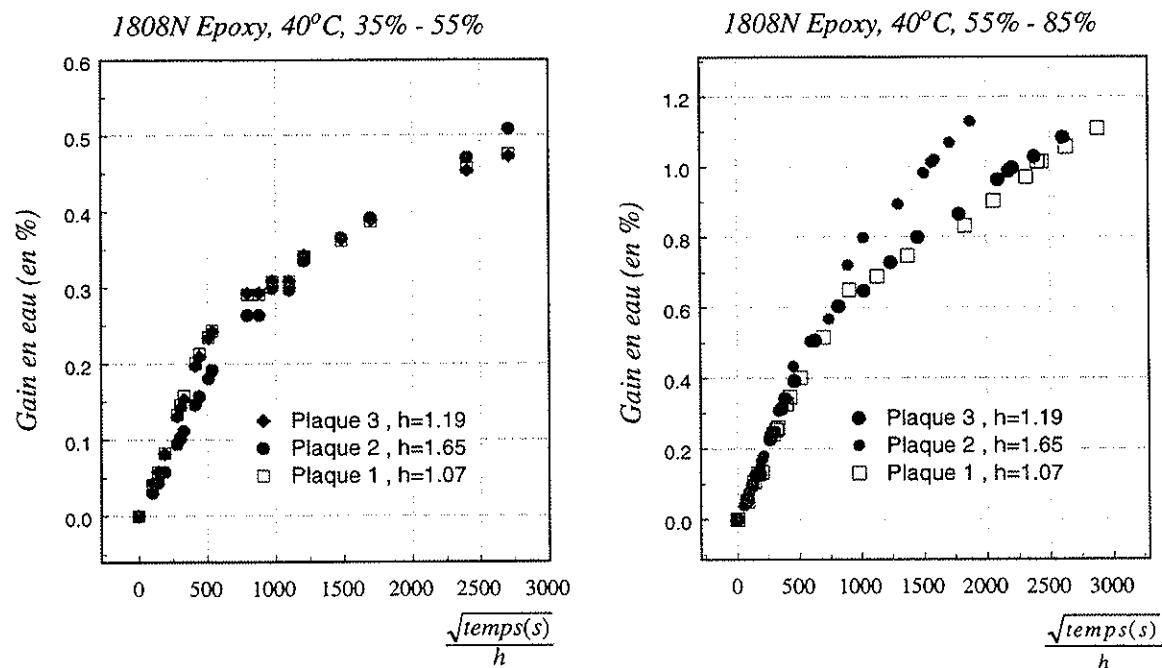


Figure II.2.7: Absorption d'eau par la résine Epoxy 1808N à 40°C et aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative pour les trois plaques testés — Gain en poids en eau relatif à chaque palier considéré.

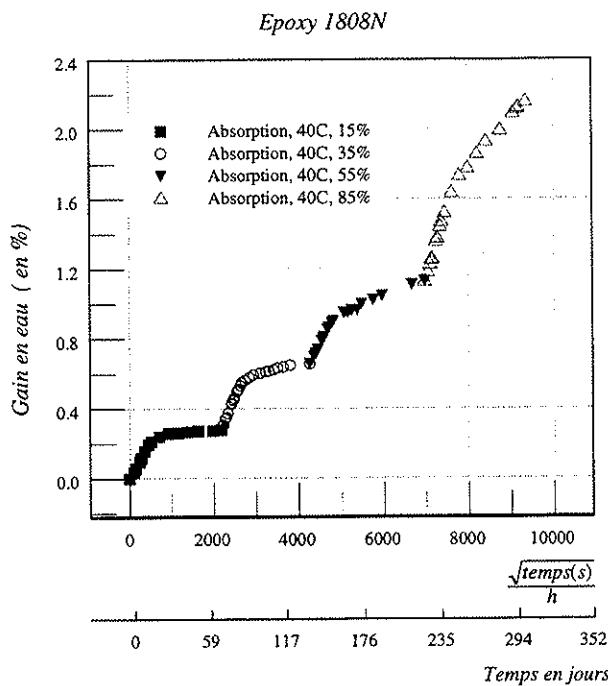


Figure II.2.8: Absorption d'eau par la résine Epoxy 1808N au cours des différents paliers d'humidité — Gain en eau cumulé au cours des différents paliers.

conforte l'hypothèse d'une fixation des molécules d'eau à la résine après un certain temps d'exposition nécessaire à un amorçage du processus. Nous reviendrons plus longuement sur l'analyse de ces phénomènes au paragraphe 2.2.1.

### 2.1.2 Résine cyanate ester

Dans le cas de la résine cyanate ester 'Rosalie', dont les évolutions du gain en eau à chaque palier sont représentées sur les Figures II.2.9, II.2.10 et II.2.11, on observe l'existence d'un double plateau suivi par une augmentation continue de la prise en poids, dès le palier à 15% d'humidité relative. De nouveau, la possibilité de phénomènes d'hydrolyse pourrait expliquer ce comportement. Nous pouvons également noter que ces phénomènes semblent plus accentués dès le palier à 15% laissant penser que la réponse de la résine cyanate ester est plus rapide que la résine epoxy. Les variations du gain en eau suivant les épaisseurs des échantillons sont également plus marquées au palier de 15% d'humidité qu'à ceux de 55% et 85% d'humidité relative. Ceci semble conforter l'hypothèse de l'existence de phénomènes d'hydrolyse, accompagnant la simple diffusion de l'eau au sein de la résine.

On retrouve cette même tendance sur les évolutions du gain en poids en eau de la résine cyanate ester RS-3, représenté sur la Figure II.2.12. Cependant, l'état de pseudo-saturation ainsi que cette augmentation continue du gain en eau sont bien moins remarquables que pour la résine cyanate ester "Rosalie". On pourrait donc en conclure que cette résine est moins sensible aux phénomènes de rétention d'eau et d'hydrolyse. Un gain en eau d'environ 0.55% la place comme la résine la plus résistante aux phénomènes hygrométriques parmi les trois résines testées. Cependant, il faudra rester prudent car le temps d'exposition globale dans un environnement humide a été deux fois plus court (suite à une livraison plus tardive des échantillons).

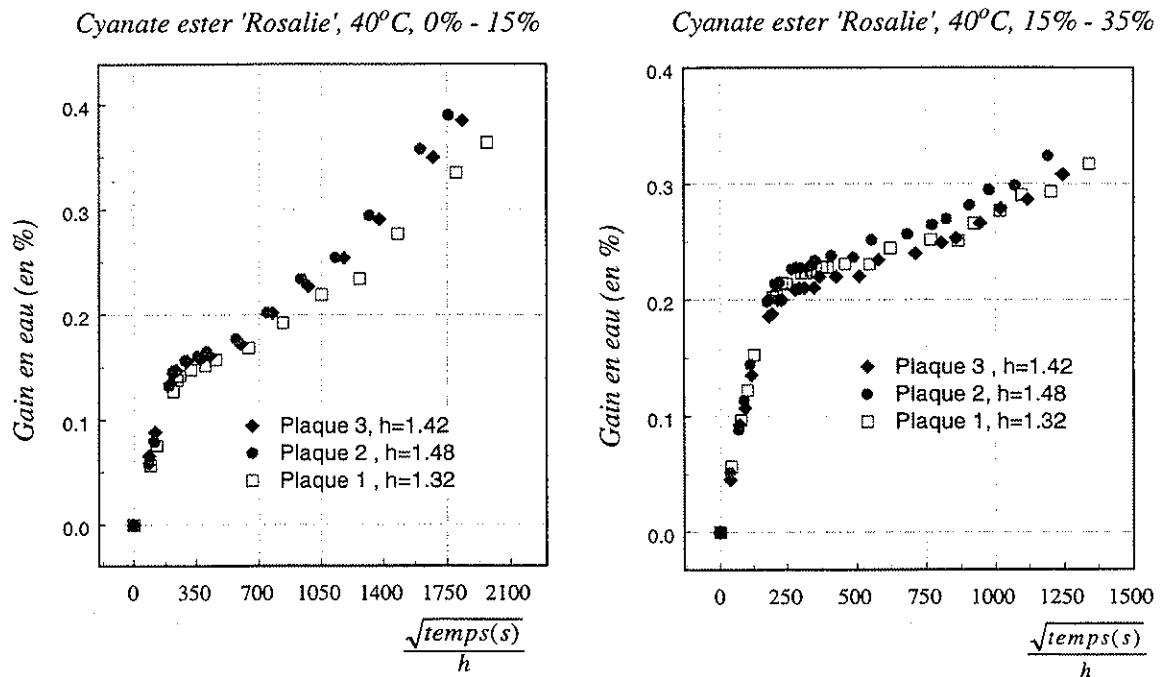


Figure II.2.9: Absorption d'eau par la résine cyanate ester 'Rosalie' à 40°C et aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en poids en eau à chaque palier considéré.

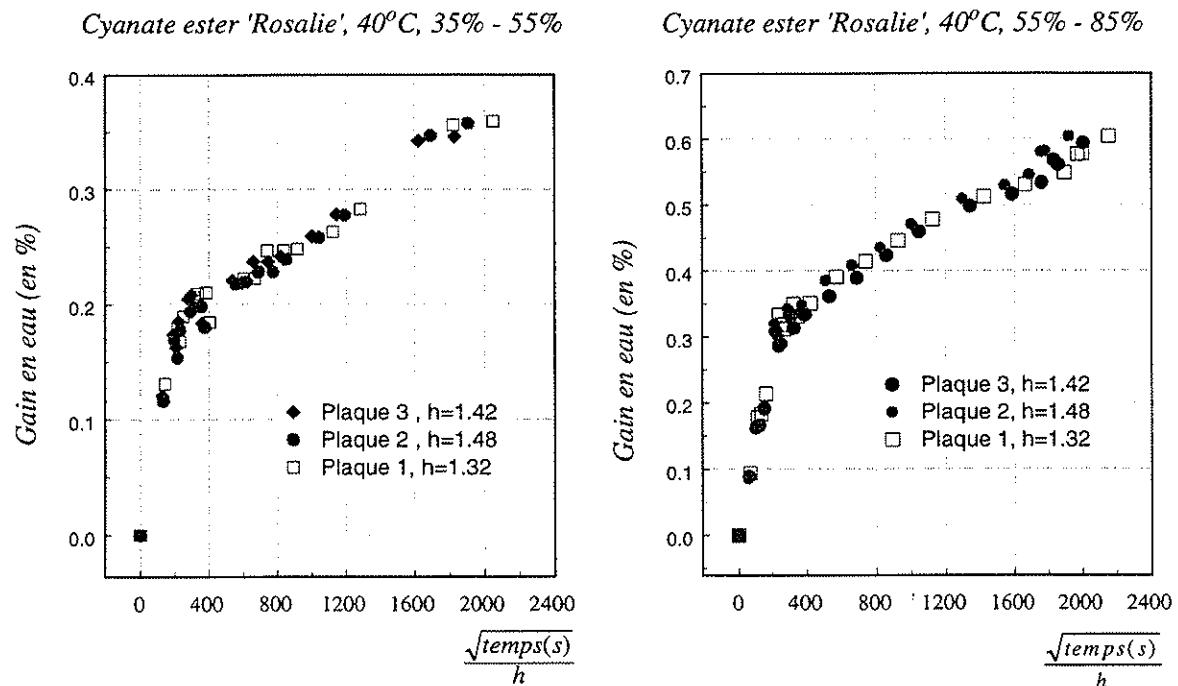


Figure II.2.10: Absorption d'eau par la résine cyanate ester 'Rosalie' à 40°C et aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en poids en eau à chaque palier considéré.

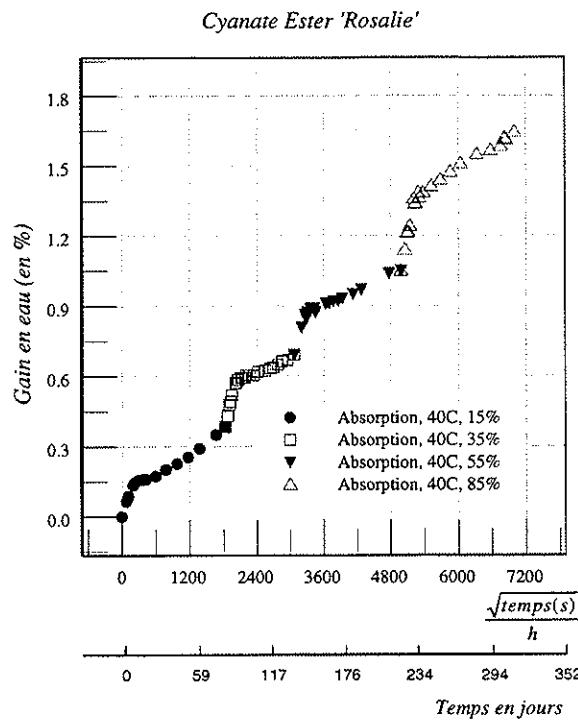


Figure II.2.11: Absorption d'eau par la résine cyanate ester 'Rosalie' au cours des différents paliers d'humidité — Gain en eau cumulé au cours des différents paliers.

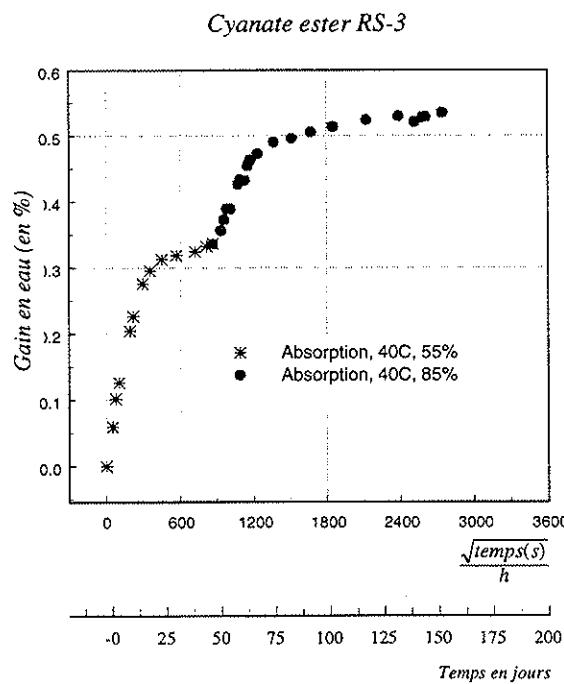


Figure II.2.12: Absorption d'eau par la résine cyanate ester RS3 - Gain en eau cumulé au cours des différents paliers.

## 2.2 Analyse des dégradations

### 2.2.1 Caractérisation chimique

Les observations que nous avons pu faire sur les courbes d'absorption des résines, plus précisément cette augmentation continue de la prise en eau, peut laisser envisager un phénomène de rétention d'eau s'accompagnant d'une hydrolyse de la résine. Divers mécanismes d'hydrolyse ont été évoqués dans la littérature (cf paragraphe 2.3.2) selon la structure chimique des résines. Afin de vérifier la capacité et la tendance des résines époxy 1808N et cyanate ester 'Rosalie' à réagir chimiquement avec l'eau, nous avons réalisé des tests supplémentaires de vieillissement dans l'eau à une température ambiante d'environ  $22^{\circ}C$ . Ces tests ont consisté en des mesures du pH et de la conductivité de l'eau en contact avec des échantillons de résine. Pour cela, les échantillons en résine sont dégraissés puis placés dans un bêcher fermé, pour éviter toute réaction avec l'air, avec une petite quantité d'eau distillée. Les échantillons en résine sont réalisés à l'aide des chutes de matières obtenues lors de la réalisation des plaques en résine et ont donc les mêmes caractéristiques que ces dernières. La quantité d'échantillons placés dans les bêchers correspond à un poids approximatif de 22g pour la résine Epoxy 1808N et 24g pour la résine cyanate ester 'Rosalie'. L'évolution au cours du temps des caractéristiques (pHmétrie et conductivité) de l'eau distillée en présence de plaquettes de polymère est alors comparée à celle de l'eau distillée seule. Un pHmètre à micro-processeur 320 SET WTW est utilisé, ainsi qu'un conductimètre Tacussel CD 75. La précision pour ces deux appareils est de  $\pm 0.1$ .

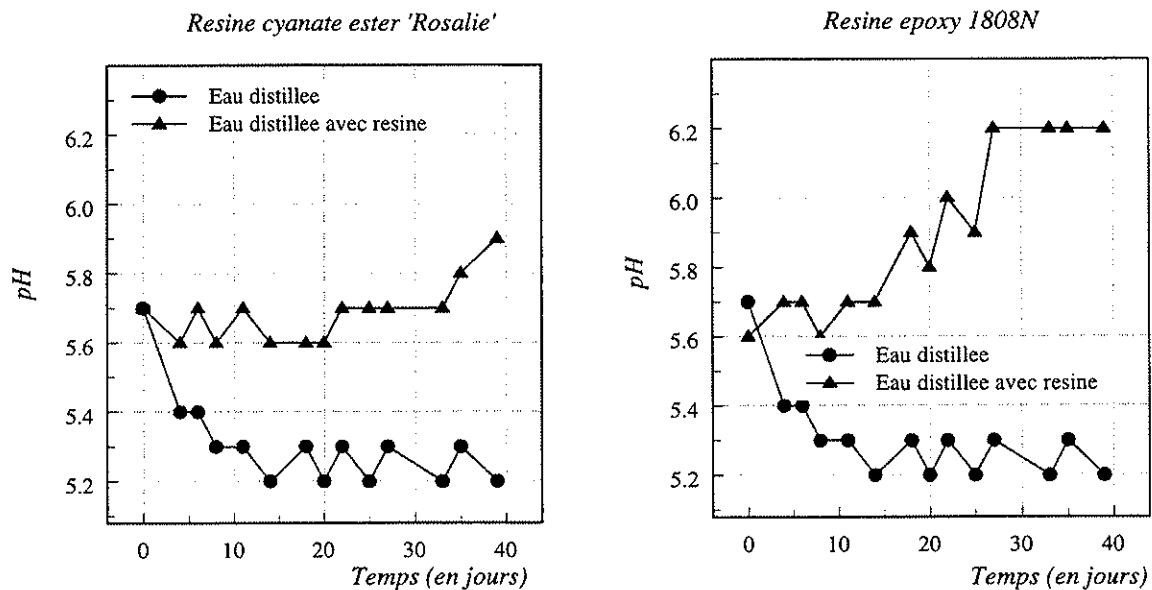


Figure II.2.13: pH-métrie de l'eau distillée.

Nous pouvons constater sur les Figures II.2.13 et II.2.14 qui présentent les évolutions au cours du temps du pH et de la conductivité de l'eau distillée (seule ou avec résine), des écarts importants pour les deux résines considérées avec la solution étalon d'eau distillée sans échantillon de polymère. Cela suppose donc l'existence de réactions chimiques d'hydrolyse entre les molécules d'eau et certains groupes moléculaires de ces deux résines. Il apparaît donc que l'eau diffusée donne lieu à la scission des chaînes macromoléculaires au sein de la résine conduisant à une modification chimique des réseaux et un lessivage des segments moléculaires devenus libres, et par conséquent conduisant à une modification du pH et de la conductivité de l'eau.

Nous pouvons noter également que ces effets sont plus marqués dans le cas de la résine époxy 1808N ce que l'on retrouve sur les courbes d'absorption d'humidité aux paliers de 55% et 85% d'humidité.

De plus, nous pouvons constater sur les courbes de conductivité électrique que l'amorce de ces phénomènes se ferait plus tôt dans la résine cyanate ester 'Rosalie', que dans la résine époxy, ce qui est en corrélation avec les

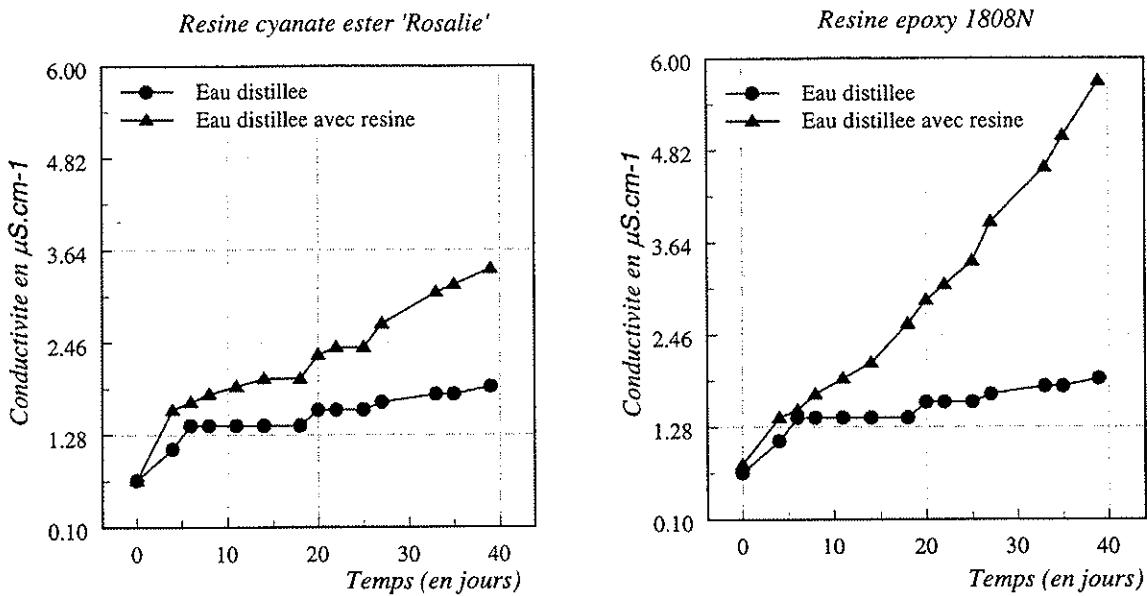


Figure II.2.14: Conductivité électrique de l'eau distillée.

mesures gravimétriques.

Un vieillissement dans l'eau est certes toujours plus sévère que dans l'atmosphère, cependant ces analyses ont permis de mettre en évidence la capacité et la tendance de ces résines à réagir chimiquement avec l'eau. On peut donc penser que ces phénomènes sont également susceptibles de se produire dans un milieu environnant humide, du fait de la diffusion de l'humidité au sein de la résine.

### 2.2.2 Réticulation: analyse thermique différentielle

Ces phénomènes d'hydrolyse ont été déjà mis en évidence par différents auteurs (cf. paragraphe 2.3.2) par les résines époxydées et dépendraient de la nature de l'époxy et du durcisseur.

Dans le cas des résines cyanate ester dont la tenue en humidité est attendue comme étant meilleure que celles des résines époxydu fait d'une très faible reprise d'eau de certains monomères, ces phénomènes peuvent avoir une autre explication. Selon G. Gallicher et al [80], les phénomènes survenant dans les résines cyanate ester pourraient être principalement dus à une réaction incomplète des fonctions cyanate. Une analyse thermique différentielle des résines époxy 1808N, cyanate ester 'Rosalie' et RS-3 a donc été réalisée. Cette analyse a été effectuée sur les chutes des plaques tests préalablement asséchées et n'ayant pas subi de vieillissement hygrométrique particulier. Les résultats que nous avons obtenus sont représentés sur les Figures II.2.15 à II.2.21. Les trois températures  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , données sur ces figures correspondent respectivement à la température du début de déviation du flux de température, au point d'intersection entre la tangente à la courbe en  $T_1$  et la tangente à la déviation, et à la valeur médiane de la déviation. La température  $T_3$  correspond à la température de la transition vitreuse du matériau. Cependant, il faut noter que la température de transition vitreuse n'a pas une valeur fixe et que la température  $T_3$  est une indication de la plage de température où se produit la transition de phase du matériau entre l'état rigide et caoutchoutique.

Nous pouvons constater dans le cas de la résine époxy, une légère augmentation de la température de transition vitreuse,  $T_g$ , entre la première et la deuxième chauffe. On est passé de  $123^{\circ}\text{C}$  à  $126^{\circ}\text{C}$ . La valeur théorique donnée par le fabricant étant entre  $122/125^{\circ}\text{C}$ , nous pouvons dire que l'échantillon était complètement polymérisé et que l'écart entre les deux chauffes est dû à un vieillissement inévitable du polymère, entraînant une réorganisation moléculaire, et qui peut être dû à plusieurs facteurs dont notamment à l'absorption d'humidité par le matériau.

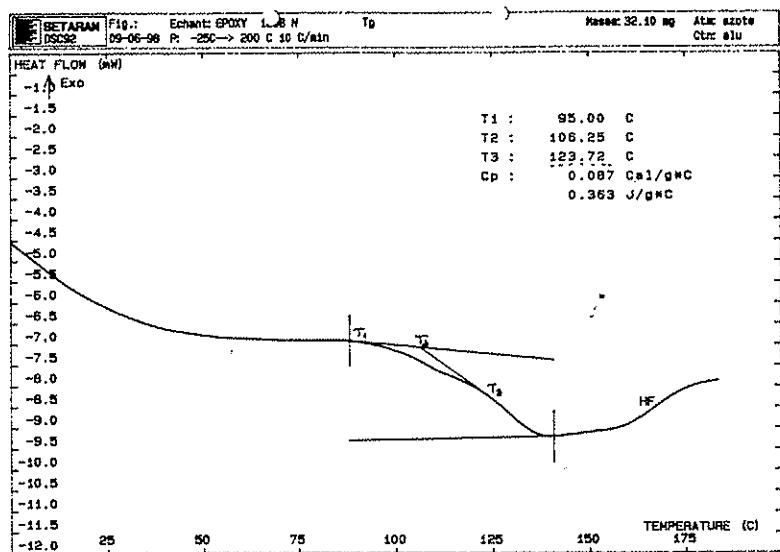


Figure II.2.15: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine époxy 1808N — première chauffe.

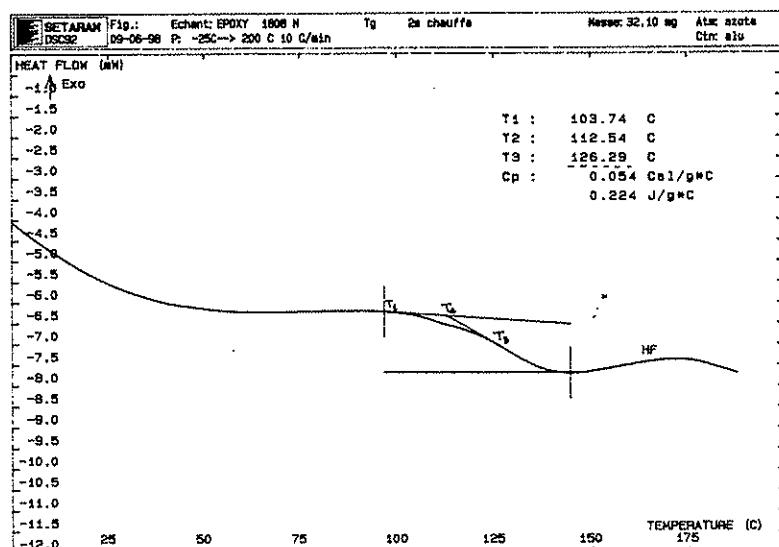


Figure II.2.16: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine époxy 1808N — seconde chauffe.

En particulier, différents auteurs comme nous l'avons vu au chapitre I, ont montré qu'une des conséquences de l'absorption d'eau est un phénomène de plastification de la matrice, c'est-à-dire une diminution de la transition vitreuse. Le fait de rechauffer le polymère au dessus de sa température vitreuse,  $T_g$ , permet de le rendre plus stable et "d'effacer son passé", ce qui explique cette augmentation après la première chauffe. Ces résultats laissent penser que l'on a également une bonne uniformité de réticulation au sein de la résine. Les phénomènes d'augmentation continue du taux d'humidité seraient donc dûs essentiellement à des liaisons et réactions chimiques de groupements moléculaires dans la résine avec l'eau, et non à un stockage des molécules d'eau dans des zones de faible réticulation.

Dans le cas de la résine cyanate ester 'Rosalie', la valeur théorique de la température de transition vitreuse est un peu en déca de  $289^{\circ}C$ , valeur qui correspond en fait à la valeur du monomère ciba B10. Cependant, l'ajout

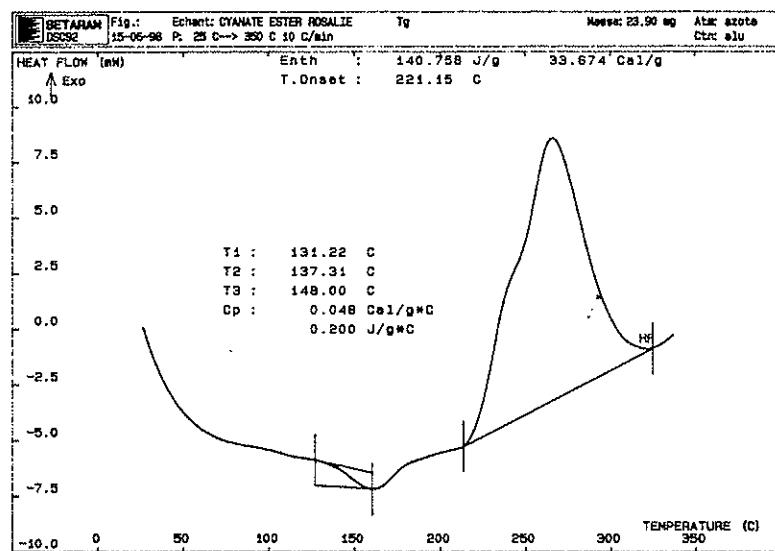


Figure II.2.17: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine cyanate ester Rosalie — première chauffe.

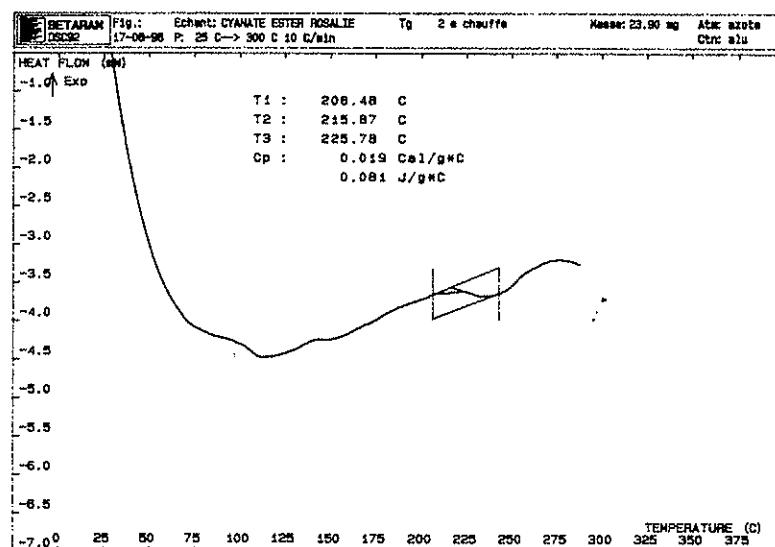


Figure II.2.18: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine cyanate ester Rosalie — seconde chauffe.

d'éléments pénalisants dans la formulation de la résine cyanate ester "Rosalie" conduit à une valeur corrigée d'environ  $190^{\circ}\text{C}$ . Au cours de la première chauffe, on constate une légère déviation du flux de chaleur résultant en une mesure de la température de transition vitreuse à  $148^{\circ}\text{C}$ . Cependant, elle est suivie par un pic exothermique que l'on peut observer lors de la phase de polymérisation des résines. Cela nous amène à penser que le matériau n'était pas complètement polymérisé et explique que la valeur de  $\text{Tg}$  obtenue soit inférieure à la valeur fournie par le fabricant. Les deuxième et troisième chauffes semblent confirmer cette tendance car on peut remarquer une très nette augmentation de la température de transition vitreuse. Il semblerait donc que la première chauffe ait permis de compléter la phase de polymérisation de la résine et que les deux chauffes suivantes de la post-cuire permettant ainsi à la résine d'atteindre une valeur de température de transition vitreuse de  $294^{\circ}\text{C}$ . On en conclut

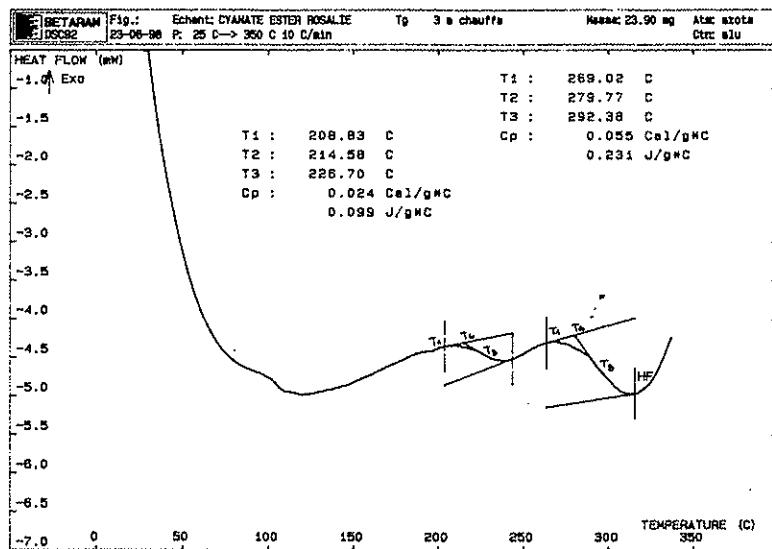


Figure II.2.19: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine cyanate ester Rosalie — troisième chauffe.

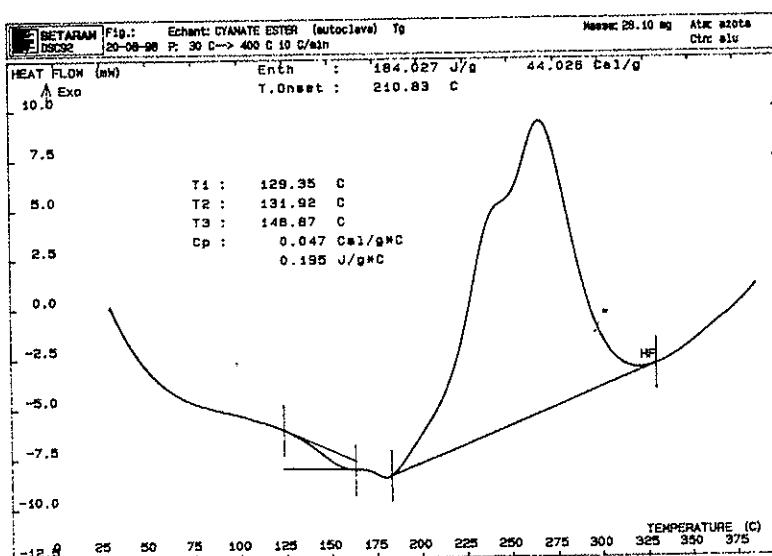


Figure II.2.20: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine cyanate ester RS-3 — première chauffe.

par conséquent que les échantillons en résine cyanate ester 'Rosalie' n'étaient pas complètement réticulés, ce qui confirme l'hypothèse d'une sensibilité plus importante aux phénomènes d'hydrolyse que celle attendue pour les résines cyanate ester et d'un stockage des molécules d'eau dans des zones de faible réticulation.

On retrouve également une réaction incomplète de polymérisation de la résine cyanate ester RS-3, pour laquelle la valeur théorique de la température de transition vitreuse est d'environ 254°C. Les échantillons en résine cyanate ester RS-3 et Rosalie, n'ayant pas été polymérisés dans les mêmes conditions et au même endroit, on peut écarter l'hypothèse que cela puisse être dû à une mauvaise technique de polymérisation que l'on aurait utilisé au CERN. Il apparaît ainsi que le couplage entre une réaction incomplète des fonctions cyanate et la présence d'eau peut avoir des effets importants sur les propriétés d'absorption des résines cyanate ester. On peut donc penser que la sensibilité de ces systèmes à l'humidité pourrait être améliorée si l'on pousse les réactions de polymérisation à leur

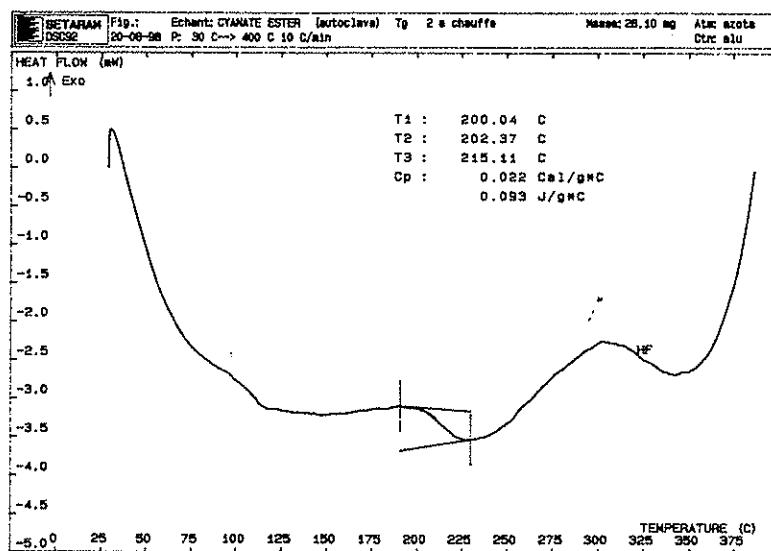


Figure II.2.21: Analyse thermique différentielle d'un échantillon de résine cyanate ester RS-3 — seconde chauffe.

maximum mais au risque d'obtenir, dans le cas des résines cyanate ester plus particulièrement, un matériau plus cassant.

### 2.3 Identification du modèle de diffusion

Nous avons vu que les phénomènes d'absorption s'accompagnent le plus souvent de phénomènes dont les mécanismes sont très complexes, par conséquent la modélisation des cinétiques d'absorption par des modèles courants est très délicate. Ceci fait l'objet de ce paragraphe.

#### 2.3.1 Résine Epoxy

Nous avons vu précédemment que la détermination du coefficient de diffusion peut se faire à partir de la pente à l'origine des courbes de prise en poids et est donnée par les expressions suivantes :

- pour le modèle de diffusion de Fick :

$$D = \pi \left( \frac{h}{4M_s} \right)^2 \left( \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2 \quad (\text{II.2.1})$$

- pour le modèle de diffusion de Langmuir :

$$D = \pi \left( \frac{h}{4M_s} \right)^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2 \quad (\text{II.2.2})$$

Le comportement de la résine époxy 1808N aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative, étant caractéristique d'un comportement Fickien, le coefficient de diffusion  $D$  de la résine a été calculé à partir de l'expression (II.2.1). La valeur obtenue qui est identique pour les paliers de 15% et 35% est donnée dans le tableau récapitulatif II.2.1. Nous pouvons observer sur la Figure II.2.22 qui présente les évolutions du gain en poids en eau mesuré, la très bonne corrélation obtenue entre les points expérimentaux et le modèle de diffusion à une phase de Fick dans ce cas.

Cependant, aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative, l'absence de palier de saturation permet de constater que le modèle de Fick apparaît insuffisant pour décrire le comportement de la résine, présenté dans la littérature

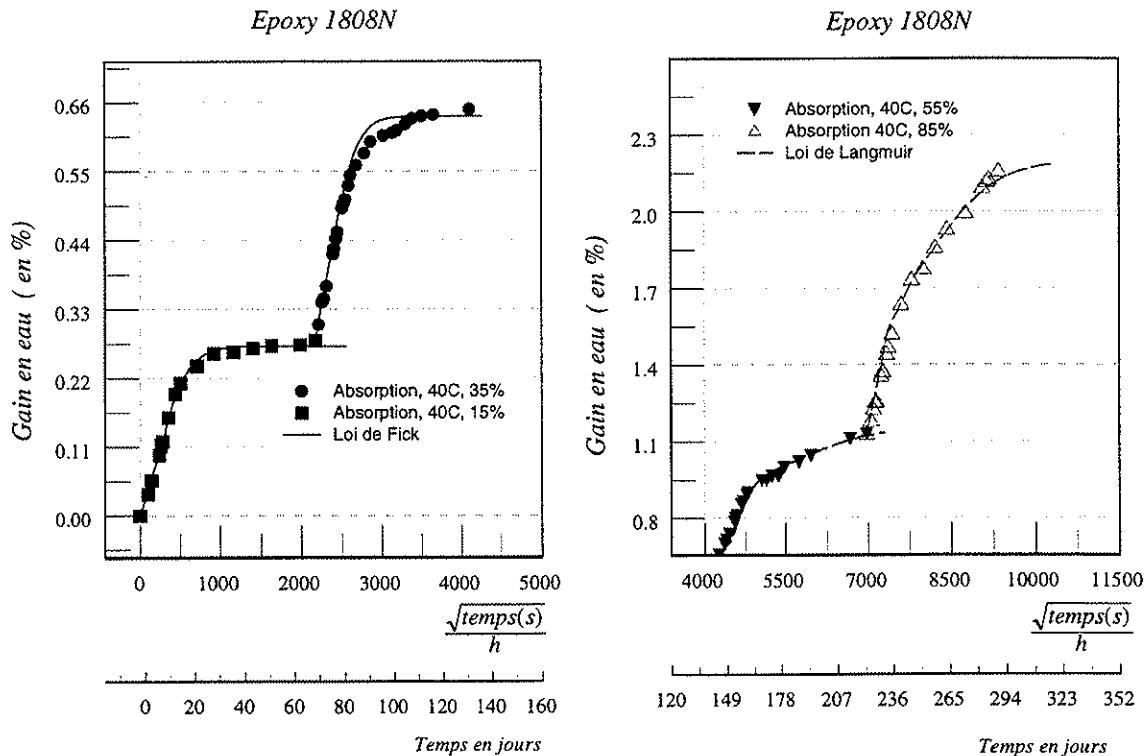


Figure II.2.22: Modélisation de la diffusion d'humidité au sein de la résine époxy 1808N

comme "étant anormal". C'est pourquoi on lui a préféré le modèle de Langmuir qui s'accorde beaucoup mieux avec les observations expérimentales. Malgré l'intérêt de ce modèle, son application est très délicate, car il est en fait difficile de déterminer avec précision les paramètres du modèle. On peut en effet trouver plusieurs combinaisons différentes des quatre coefficients qui décriraient correctement une même courbe d'absorption. Par conséquent, le calcul des paramètres se fait couramment à partir des relations (II.1.28), (II.1.29) et (II.1.30) dérivées de la solution analytique du modèle de Langmuir dans une plaque plane.

Le coefficient de diffusion étant à priori fonction uniquement de la température (G.S. Springer [173], B. Dewimille [64], P. Bonniau [27]), la valeur calculée précédemment à partir du modèle de Fick devrait rester inchangée à 55% d'humidité malgré un comportement non fickien. Afin de vérifier la fiabilité du coefficient calculé, nous recalculons le coefficient de diffusion à partir du modèle de Langmuir en utilisant l'expression (II.2.2) pour le palier à 55% d'humidité. Le rapport  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  correspondant au rapport de la concentration dans la phase libre sur la concentration totale à saturation, est donnée par le rapport  $\frac{M'}{M_s}$  où  $M'$  est le gain en eau au point de pseudo-saturation, B. Dewimille [64], P. Bonniau [27], R. Jacquemet [105]. Nous pouvons donc écrire D sous la forme :

$$D = \pi \left( \frac{h}{4M'} \right)^2 \left( \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}} \right)^2 \quad (\text{II.2.3})$$

Ce point de pseudo-saturation n'est pas toujours visible, il faut pour cela que l'épaisseur soit suffisamment petite ou que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  soient très petits devant  $D$ . Dans notre cas, nous pouvons observer sur la Figure II.2.7 un pseudo état de saturation correspondant à un gain en poids en eau de 0.3% au palier de 55% d'humidité relative. La valeur du coefficient de diffusion alors obtenue est de  $6.675E - 07 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , à comparer à  $6.68E - 07 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  obtenue avec le modèle de Fick au palier de 15% où le comportement pouvait être supposé comme suivant le modèle de Fick. L'écart étant inférieur à 0.08%, nous pouvons supposer que la valeur du coefficient de diffusion

obtenue est réaliste. D'ailleurs, nous pouvons noter que la valeur obtenue est de l'ordre de grandeur de ceux donnés dans la littérature (C.H. Shen et G.S. Springer [165], B. Dewimille [64], J.M. Augl et A.E. Berger [13]).

Quant aux paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ , leur détermination se fait par recalage à partir des relations dérivées (II.1.29) et (II.1.30) de la solution analytique du modèle de Langmuir dans une plaque plane. Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau [II.2.1]. On pourra remarquer que les conditions d'application des relations dérivées (II.1.28) (II.1.29) et (II.1.30) qui sont  $\alpha \ll \frac{D\pi^2}{h^2}$  et  $\beta \ll \frac{D\pi^2}{h^2}$ , et équivalentes aux conditions  $\alpha \leq \frac{D}{h^2}$  et  $\beta \leq \frac{D}{h^2}$  sont vérifiées.

La détermination de ces paramètres n'est pas très précise à l'aide cette méthode car une faible variation de l'allure de la courbe globale de prise de poids induit une forte variation au niveau des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ . Cependant, les ordres de grandeur des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont identiques à ceux trouvés notamment par H.G. Carter et G.B. Kibler [36], B. Dewimille [64], P. Bonniau [27]. Le temps d'exposition des échantillons dans des conditions spécifiques d'humidité ne permet pas non plus de définir de manière très précise le gain en poids en eau à saturation. Il aurait fallu un temps d'exposition beaucoup plus long pour être capable d'atteindre l'état d'équilibre. Il faudra donc rester prudent sur ces valeurs.

### 2.3.2 Résine cyanate ester

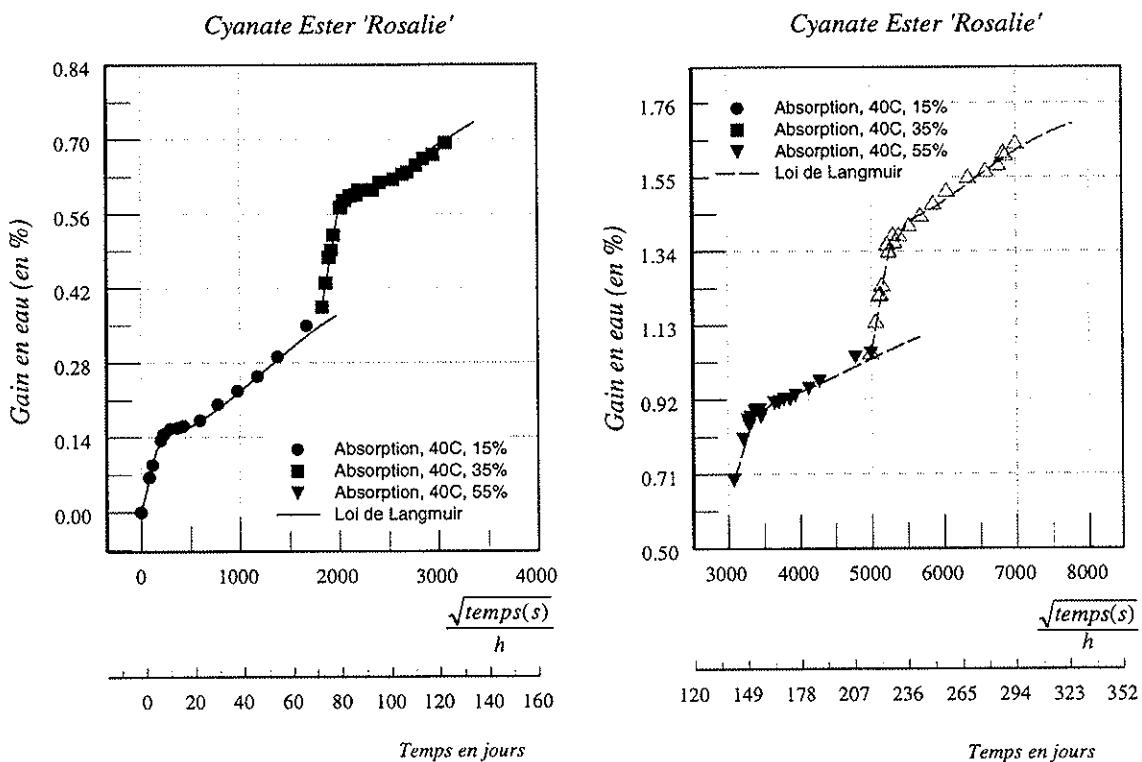


Figure II.2.23: Modélisation de la diffusion d'humidité au sein de la résine cyanate ester

Dans le cas de la résine cyanate ester 'Rosalie', le modèle de Langmuir est préféré au modèle de Fick dès les premiers paliers d'humidité. Les différents paramètres du modèle ont été déterminés sur la courbe d'absorption à 15% d'humidité et n'ont pas dû être modifiés par la suite pour les autres paliers. Le coefficient  $D$  est a été calculé en considérant un peu-plateau à 0.156% comme dans le cas de la résine époxy. Compte tenu de l'imprécision et sur la détermination du gain en poids à saturation, ce calcul semble plus adapté. Les probabilités de piégeage et

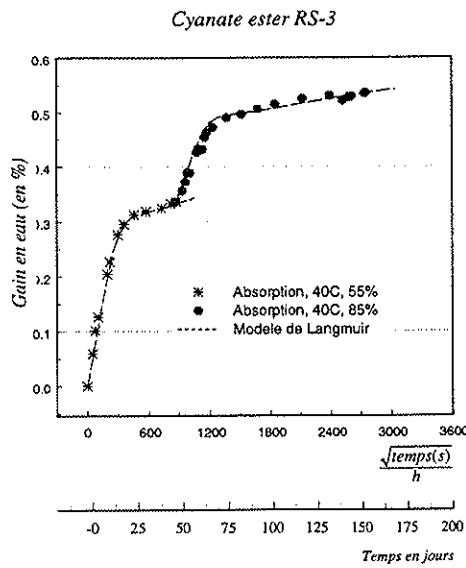


Figure II.2.24: Modélisation de la diffusion d'humidité au sein de la résine cyanate ester

de dépiégeage des molécules d'eau obtenues par recalage sont données dans le tableau ???. On peut alors constater sur les Figures II.2.23 et II.2.24 la bonne modélisation des courbes d'absorption à partir du modèle de Langmuir pour les résines cyanate ester Rosalie et RS-3

	H (%)	$M_\infty$ (%)	$\alpha (s^{-1})$	$\beta (s^{-1})$	$\frac{\beta + \alpha}{\beta}$	D ( $mm^2.s^{-1}$ )
Epoxy 1808N	15	0.28	0	1	1	6.68E-07
	35	0.38	0	1	1	6.68E-07
	55	0.4852	1.81E-07	2.27E-07	1.79	6.675E-07
	85	1.1	2.29E-07	2.27E-07	2	6.675E-07
Cyanate ester 'Rosalie'	15	0.48	2.52E-07	1.68E-07	2.5	4.619E-06
	35	0.40	2.52E-07	1.68E-07	2.5	4.619E-06
	55	0.43	2.52E-07	1.68E-07	2.5	4.619E-06
	85	0.85	2.52E-07	1.68E-07	2.5	4.619E-06
Cyanate ester RS-3	55	0.44	2.52E-07	3.09E-07	1.44	5.054E-06
	85	0.22	2.52E-07	3.09E-07	1.44	5.054E-06

Tableau II.2.1: Paramètres de diffusion (modèle de Fick et Langmuir) pour les résines époxy 1808N, cyanate ester 'Rosalie' et cyanate ester RS-3

## 2.4 Influence de l'humidité ambiante

Nous avons représenté sur la Figure II.2.25 le gain en poids au palier de saturation en fonction de la variation du taux d'humidité. Les échantillons n'ayant pas été asséchés après chaque palier, c'est la variation qui est prise comme référence et non la valeur absolue du taux d'humidité relative. Nous obtenons ainsi pour les trois résines une relation sous forme de puissance entre le gain en eau et la variation relative du taux d'humidité, que l'on écrira sous la forme  $M_s = a\Delta\Phi^b$ .

Les valeurs des coefficients a et b obtenus sont données sur la courbe. Il faudra tout de même rester très prudent concernant ces valeurs du fait de la difficulté à caractériser le gain en poids en eau à saturation dans le cas d'une cinétique d'absorption de type Langmuir. Néanmoins, l'écart relatif maximum entre les points expérimentaux et les valeurs obtenues avec le modèle de Langmuir permet de déterminer une erreur relative sur la détermination du gain en eau à saturation pour chaque résine et à chaque palier qui est donnée sur la Figure II.2.25 par une barre d'erreur. On peut ainsi constater que cette erreur relative reste limitée nous laissant ainsi supposer une estimation assez correcte du gain en eau à saturation.

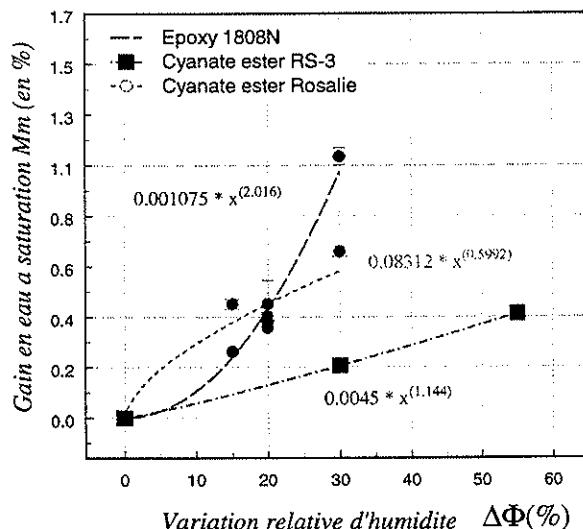


Figure II.2.25: Evolution du gain en eau en fonction de la variation du taux d'humidité relative

### 3 Cinétique d'absorption des composites

#### 3.1 Analyse du gain poids en eau des composites

##### 3.1.1 Composites unidirectionnels

Afin d'alléger la présentation, nous ne présenterons ici dans le cas des composites à base de résine époxyde 1808N et cyanate ester 'Rosalie' que les résultats concernant les échantillons où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres. Les évolutions étant similaires, nous reviendrons sur les échantillons en composite unidirectionnels T300/Epoxy 1808N, T300/Cyanate ester "Rosalie" où la pénétration de l'eau se fait parallèlement aux fibres, dans la partie 4 du chapitre 2, pour valider le modèle de diffusion interfaciale développé. Une analyse analogue à celle faite précédemment pour les résines est donc menée pour identifier la cinétique d'absorption des composites.

**Composite Carbone T300/Epoxy 1808N** Nous retrouvons à nouveau une bonne répétabilité des évolutions pour les trois plaques testées. Ces plaques ayant été réalisées séparément, nous pouvons en conclure une bonne fiabilité de la procédure de fabrication et du système de mesures pour les échantillons en composite également.

L'analyse du comportement des composites à base de résine époxyde 1808N, sur les Figures II.2.26, II.2.27 et II.2.28 montre qu'il est essentiellement contrôlé par la résine. Nous retrouvons effectivement la même évolution que dans le cas de la résine seule. La dispersion que l'on peut constater entre les plaques testées est plus marquée car le taux de fibres qui est différent pour chaque plaque, joue un rôle. Cependant, on peut noter plus significativement dans le cas du composite à base de résine époxyde que l'écart entre les plaques diminue avec le taux d'humidité, plus précisément avec l'apparition des "anomalies" dans le processus d'absorption d'humidité au sein

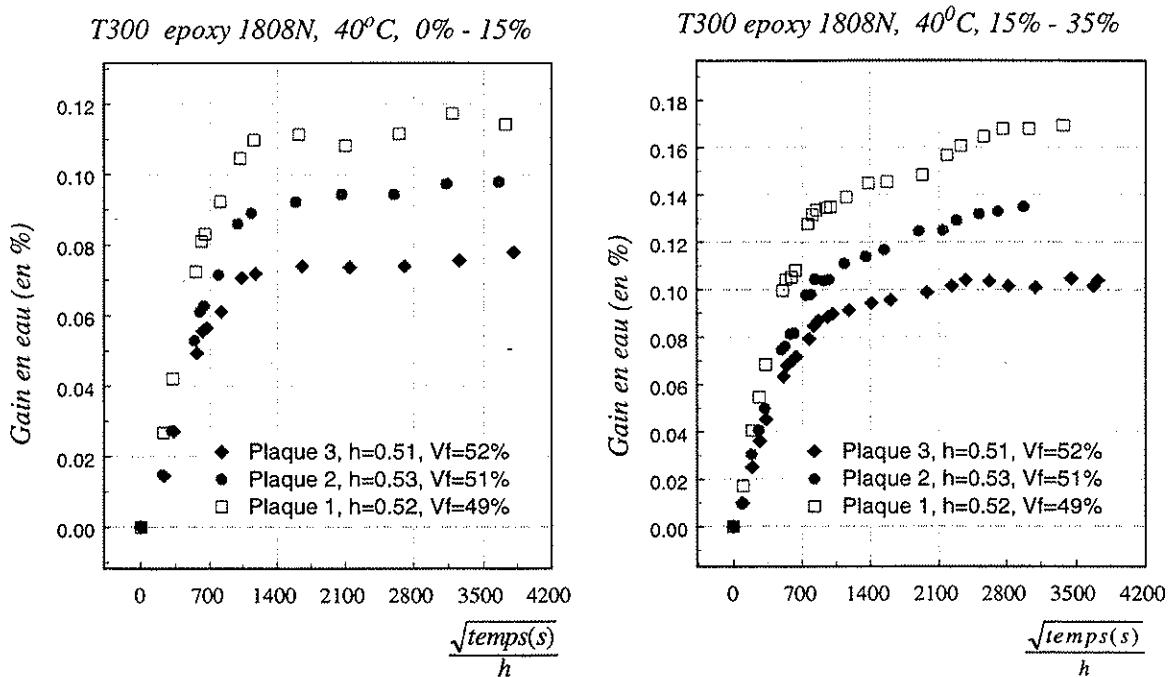


Figure II.2.26: Absorption d'eau par le composite T300/Epoxy 1808N à 40°C et aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en eau à chaque palier considéré.

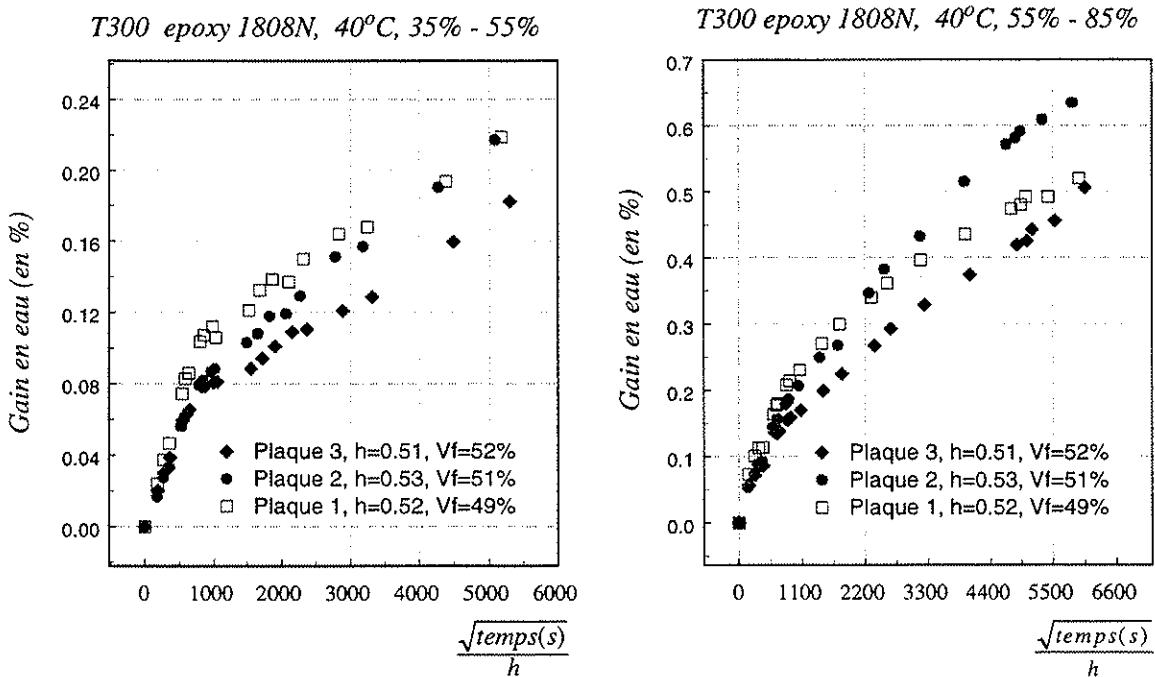


Figure II.2.27: Absorption d'eau par le composite T300/Epoxy 1808N à 40°C et aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en eau à chaque palier considéré.

du composite. Effectivement, de nouveau, est mis en évidence un pseudo-palier de saturation après une phase linéaire, suivi par une augmentation continue du gain en eau sans perspective de palier immédiat. Cela nous

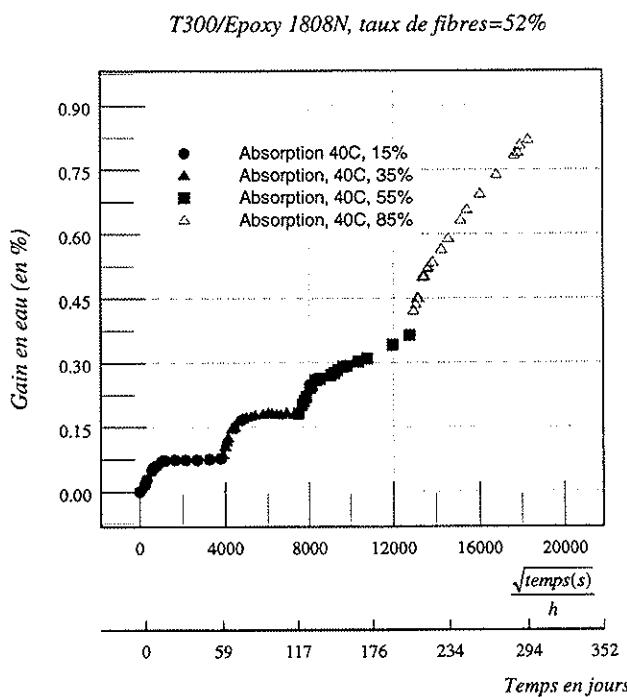


Figure II.2.28: Absorption d'eau par le composite T300/Epoxy 1808N à 40°C au cours des différents paliers d'humidité — Gain en eau cumulé

amène à supposer qu'en plus des phénomènes d'hydrolyse qui peuvent se produire dans la résine, des décohésions semblent avoir lieu aux interfaces. Le taux de fibres étant un peu plus élevé pour les plaques 2 et 3, les sites pour recevoir les molécules d'eau en cas de décohésions interfaciales seraient alors plus nombreux et pourraient justifier cette augmentation du gain en eau par rapport à la plaque 1. Des observations au microscope électronique dont nous présenterons les résultats d'analyse au chapitre III, viendront effectivement confirmer l'existence de décohésions aux interfaces.

**Composite Carbone T300/Cyanate Ester "Rosalie"** Pour les échantillons en composite à base de résine cyanate ester (voir Figures II.2.29, II.2.30 et II.2.31), nous retrouvons les mêmes tendances que pour les échantillons en résine seule. Une bonne répétabilité des phénomènes entre les plaques est également observable. Cependant, nous pouvons constater une plus grande dispersion dans les points que dans le cas de la résine seule. Les interfaces entre les fibres et la matrice qui différencient la résine seule du composite semblent être responsables de ce phénomène.

Nous retrouvons pour les deux composites un gain en eau important après les différents paliers en humidité qui est de 0.85% pour le composite T300/Epoxy 1808N et 0.36% pour le composite T300/cyanate ester 'Rosalie'. Le taux de fibres plus faible pour les échantillons en T300/cyanate ester "Rosalie" explique leurs relatives meilleures tenues en humidité.

**Composites Carbone/Carbone** Les échantillons en composite carbone/carbone ont un comportement très différent selon qu'ils ont suivi ou non un processus de graphitation supplémentaire à 2500°C, comme nous pouvons l'observer sur les figures II.2.32, II.2.33] et II.2.34.

Nous pouvons effectivement constater que les échantillons en carbone/carbone ayant subi ce procédé de graphitation, désignés par carbone/carbone 2 n'absorbent quasiment pas d'humidité au cours des deux paliers par rapport aux autres échantillons carbone/carbone 1 pour lesquels on peut observer un gain en poids en eau élevé. Une

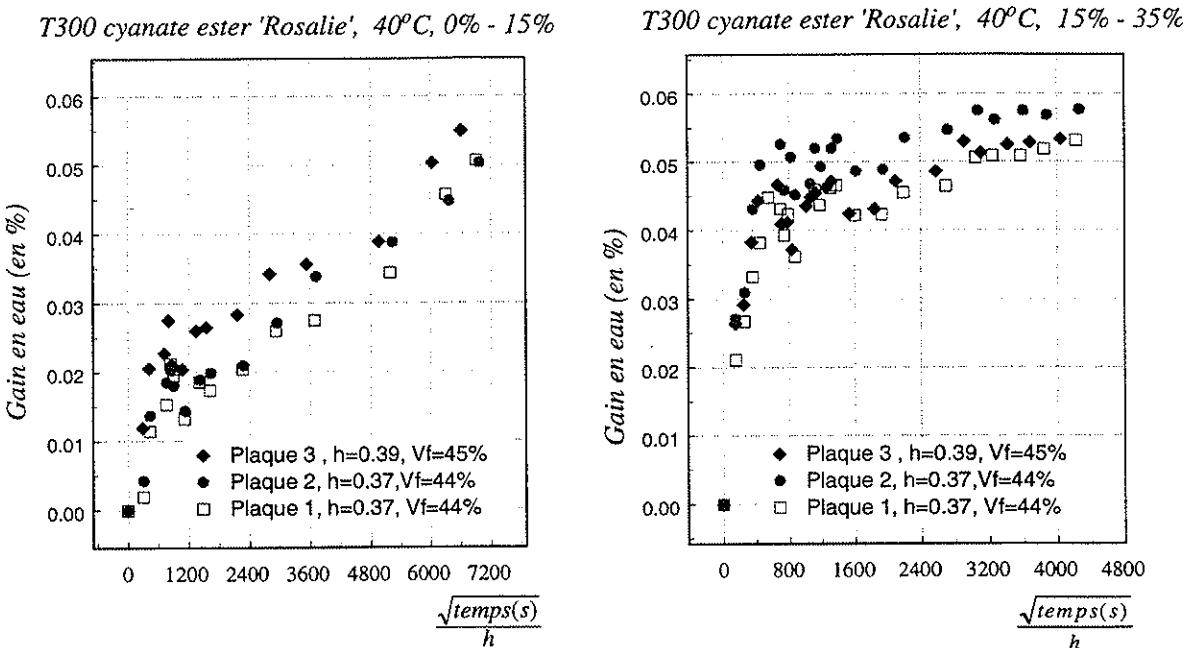


Figure II.2.29: Absorption d'eau par le composite T300/cyanate ester 'Rosalie' à 40°C et aux paliers de 15% et 35% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en eau à chaque palier considéré.

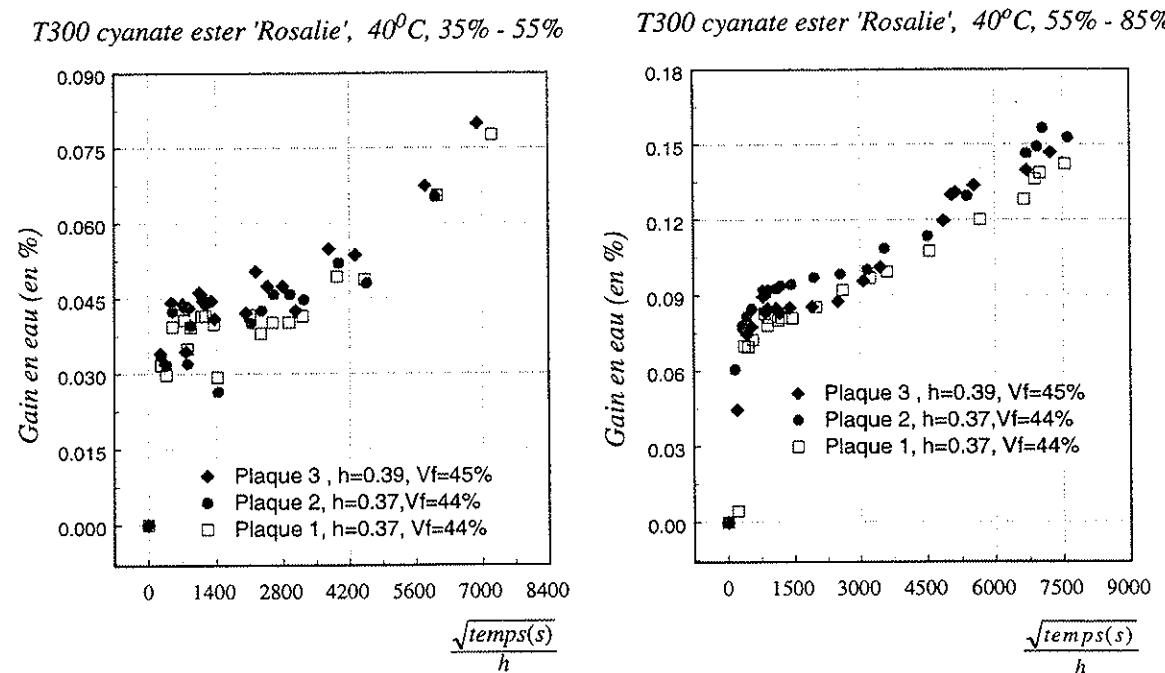


Figure II.2.30: Absorption d'eau par le composite T300/Cyanate ester 'Rosalie' à 40°C et aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative pour les trois plaques testées — Gain en eau à chaque palier considéré.

comparaison du palier correspondant à 85% d'humidité avec les autres échantillons composites carbone/époxy et carbone/cyanate ester montrent que le composite carbone/carbone 2 est le matériau le plus résistant en terme d'absorption d'eau. En effet, le gain en eau reste inférieur à 0.1% alors qu'il est au delà de 0.15% pour les

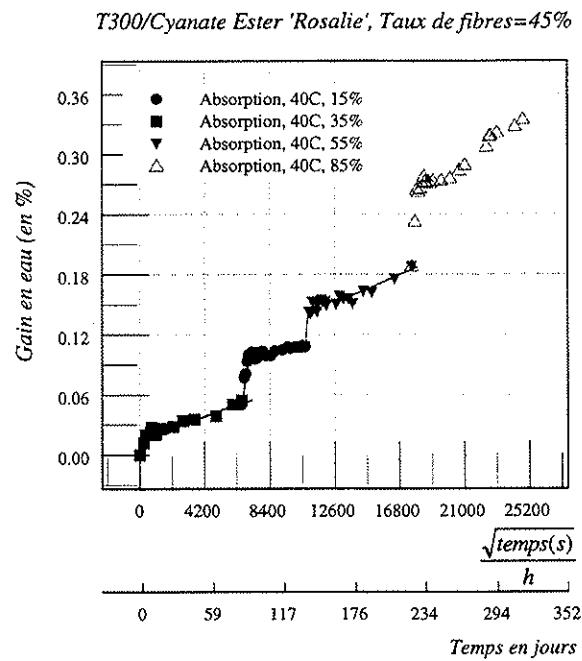


Figure II.2.31: Absorption d'eau par le composite T300/Cyanate ester 'Rosalie' à  $40^{\circ}\text{C}$  au cours des différents paliers d'humidité — Gain en eau cumulé.

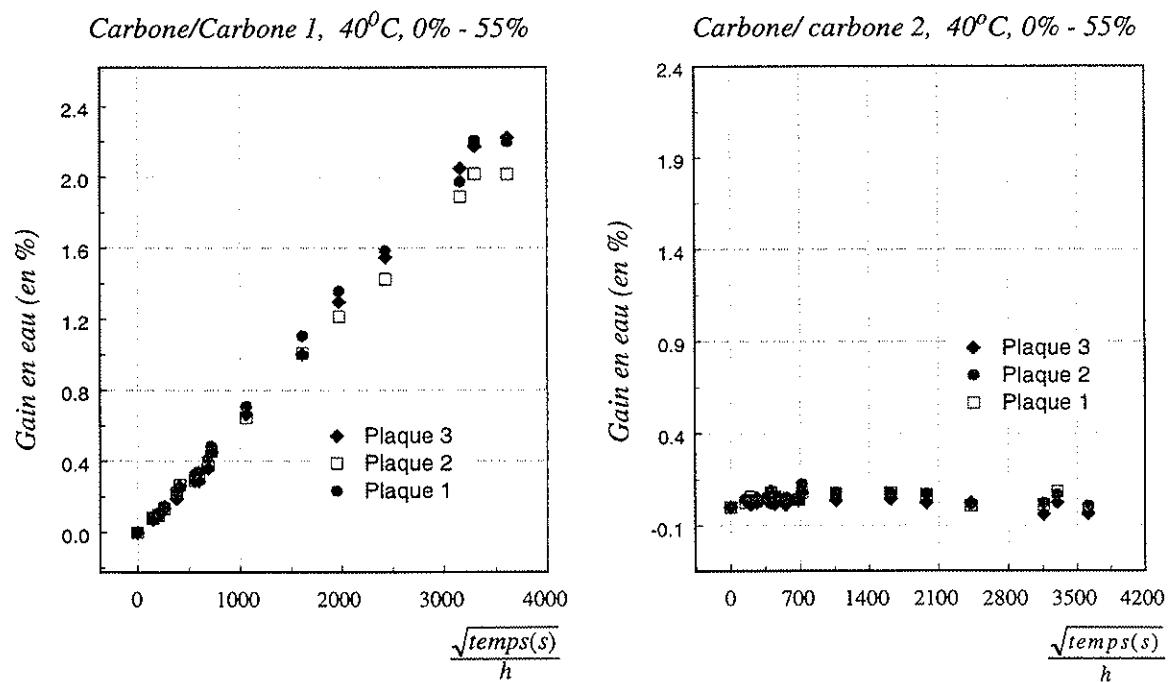


Figure II.2.32: Absorption d'eau par les échantillons en carbone/carbone à  $40^{\circ}\text{C}$  et au palier de 55% d'humidité relative.

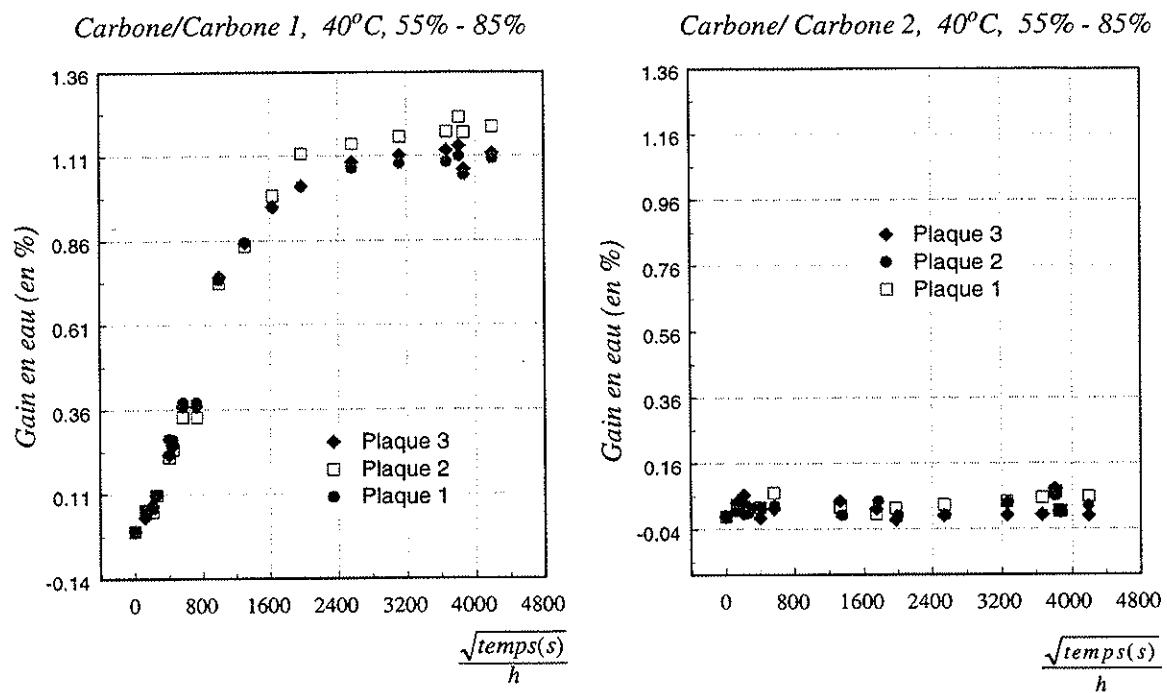


Figure II.2.33: Absorption d'eau par les échantillons composite carbone/carbone à 40°C et au palier de 85% d'humidité relative.

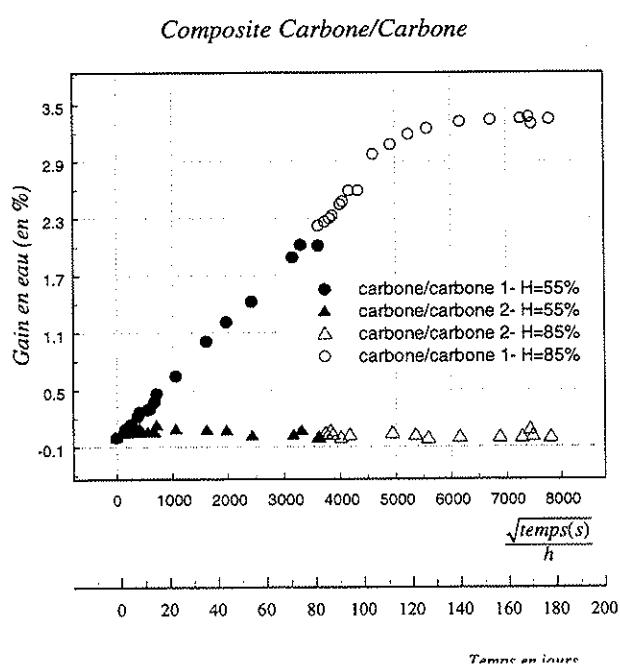


Figure II.2.34: Absorption d'eau par les échantillons composite carbone/carbone au cours des différents paliers d'humidité.

échantillons en T300/cyanate ester “Rosalie” et de 0.6% pour les échantillons en T300/Epoxy 1808N.

La reprise en eau des échantillons carbone/carbone 1 à 85% après une amorce de saturation à 55% permet d'affirmer qu'il y a bien diffusion de l'humidité au sein du matériau et non une simple pénétration de l'eau dans les zones de porosités du matériau. D'ailleurs le niveau élevé du gain en eau semble réfuter l'hypothèse que l'eau n'occupe que les espaces vides provenant de défauts. Le temps d'exposition quoique, similaire aux autres échantillons composites, ne permet de caractériser de façon précise l'état de saturation à 55%. Par conséquent, les épaisseurs des échantillons étant peu différentes, nous en concluons que les phénomène de diffusion sont bien plus lents dans les échantillons en carbone/carbone 1 que pour les autres échantillons composites.

Le taux élevé du gain en eau obtenu pour les échantillons en carbone/carbone 1, supérieur à 3%, c'est-à-dire plus de trois fois plus élevé que dans le cas des échantillons en T300/Epoxy 1808N, les place parmi les échantillons les moins résistants à l'humidité.

Expliquer le processus de diffusion au sein de ce type de matériaux composites n'est pas aisés du fait des procédures chimiques complexes de mise en œuvre. Néanmoins, nous pouvons en conclure aux regards des résultats que nous avons ici, que la sensibilité aux phénomènes d'absorption d'humidité semble essentiellement contrôlées par les techniques de mise en œuvre et tout particulièrement par la phase de graphitation.

### 3.1.2 Composites stratifiés

Les évolutions de prise en eau dans le cas des trois composites stratifiés testés, présentés aux Figures II.2.35 et II.2.36, montrent qu'il y a très peu d'écart entre les trois échantillons testés qui ont une même épaisseur mais une répartition de fibres différentes. L'orientation des fibres ne semble pas modifier la pénétration d'eau perpendiculairement aux fibres.

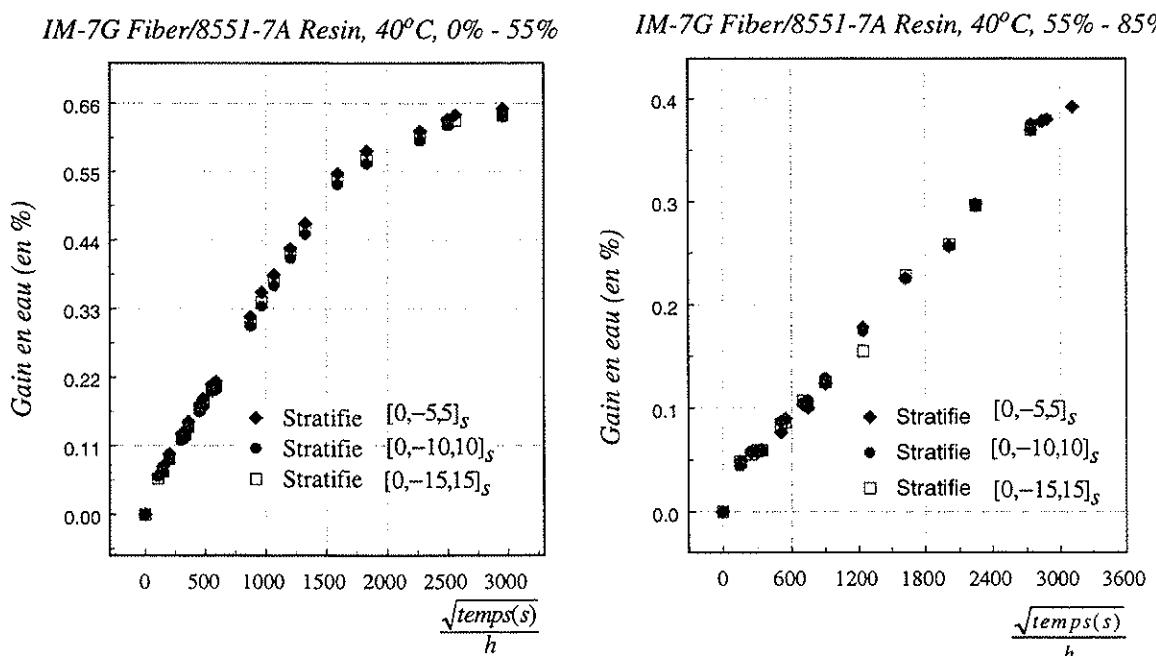


Figure II.2.35: Absorption d'eau au sein des échantillons en composite stratifié aux paliers de 55% et 85% d'humidité relative — Gain en eau à chaque palier considéré

Nous pouvons noter également que des “anomalies” apparaissent dans le comportement de ces stratifiés à 85% d'humidité. Le comportement qui était plutôt fickien devient de type Langmuir avec un pseudo-plateau très tôt et

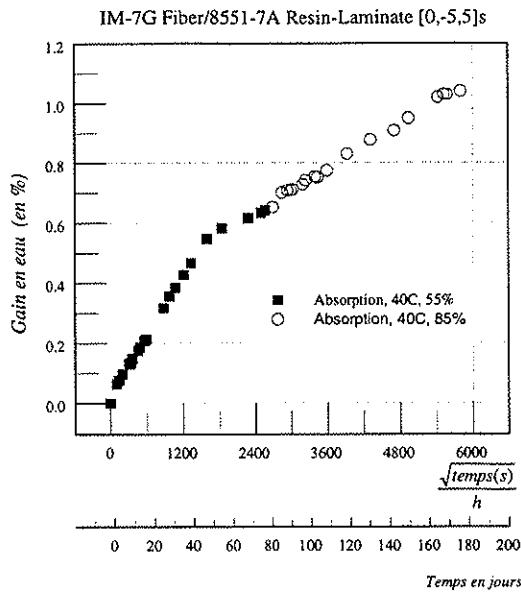


Figure II.2.36: Absorption d'eau au sein des échantillons en composite stratifié au cours des différents paliers — Gain cumulé.

peu remarquable. On pourrait effectivement penser que le comportement suit le modèle de Fick. Cependant, le fait que nous n'avons pas de palier de saturation pour un temps plus élevé que pour le palier à 55% d'humidité relative, semble réfuter cette possibilité. Des phénomènes d'hydrolyse de la matrice ou des décohésions interfaciales semblent ainsi apparaître. Le gain en eau de ces échantillons montre une résistance à l'eau comparable aux échantillons carbone T300/époxy.

### 3.2 Influence de l'humidité ambiante

Nous avons représenté sur la Figure II.2.37, le gain en poids en fonction de la variation d'humidité pour les différents échantillons composites testés. Les échantillons n'ayant pas été asséchés après chaque palier, c'est la variation qui est prise comme référence et non la valeur absolue du taux d'humidité relative.

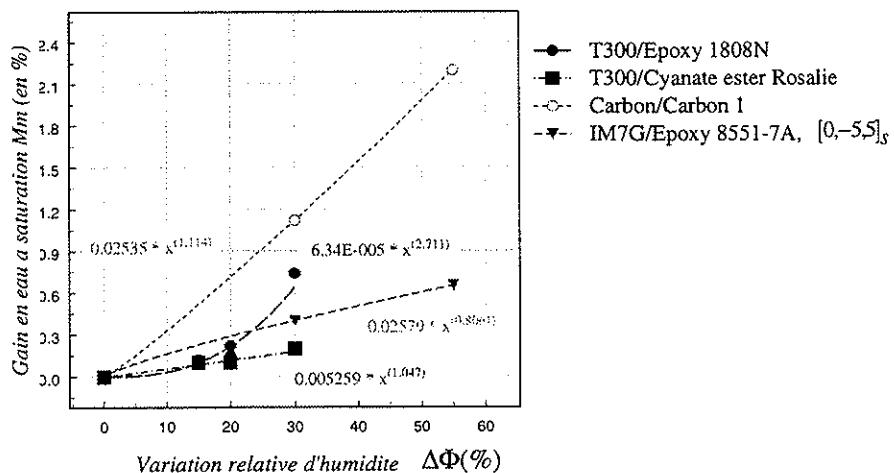


Figure II.2.37: Evolution du gain en eau en fonction de la variation du taux d'humidité relative

Nous obtenons ainsi pour les composites testés une relation sous forme d'une loi en puissance entre le gain en eau et la variation relative du taux d'humidité, que l'on écrira classiquement sous la forme  $M_s = a\Phi^b$ .

D'après G.S. Springer [173], si l'on suppose que seule la matière absorbe, le gain en poids en eau à saturation du composite,  $M_s$ , peut être estimé à partir du gain en poids en eau à saturation de la résine seule,  $(M_s)_r$ , et de la fraction massique de résine,  $W_r$ , à partir de l'expression suivante :

$$M_s = (M_s)_r W_r \quad (\text{II.2.4})$$

On pourra ainsi remarquer dans le cas des composites à base de résine époxyde, que les valeurs expérimentales deviennent supérieures aux valeurs théoriques aux paliers de 55% et 85% d'humidité où apparaissent des anomalies. En effet, au palier de 15% d'humidité, dans le cas par exemple du composite T300/Epoxy 1808N avec un taux de fibres volumique de 49%, correspondant à un taux massique de 41.64%, le gain en eau à saturation théorique est de 0.116% alors que la valeur expérimentale est d'environ 0.117%. On a par conséquent une très bonne corrélation entre les deux valeurs. Or, au palier de 85%, la valeur théorique est de 0.46% alors qu'expérimentalement, on observe avant la saturation des valeurs de gain en eau supérieures à cette valeur. Ceci conforte l'hypothèse qu'en plus des phénomènes d'hydrolyse de la matrice, des décohésions interfaciales peuvent apparaître, augmentant le nombre de sites susceptibles de stocker de l'eau.

### 3.3 Modèles des cinétiques d'absorption

Nous avons cherché à confronter les cinétiques d'absorption des composites testés ici au modèle de Springer qui est la référence pour prédire les cinétiques d'absorption des composites unidirectionnels. Ce modèle, complètement analytique et simple d'utilisation est basé sur le modèle d'absorption de Fick. Nous ne rappelerons pas les expressions de ce modèle qui sont données en (II.1.23).

A partir de ces expressions, nous avons calculé les coefficients du tenseur de diffusion pour le composite T300/Epoxy et également pour le composite T300/cyanate ester Rosalie bien que le comportement ne suive absolument pas le modèle de Fick. Pour cela, nous utilisons les valeurs des coefficients de diffusion des résines seules obtenues expérimentalement (cf paragraphe 2.3.2). Nous avons représenté dans le tableau [II.2.2] les valeurs des coefficients de diffusion transverse obtenues avec le modèle de Springer, expérimentalement. Les valeurs expérimentales étant identiques au cours des différents paliers, nous n'avons pas jugé utile de les rappeler ici pour chaque palier. Nous y avons reporté également la valeur du coefficient de diffusion transverse obtenue avec les modèles d'homogénéisation simplifiés de Z. Hashin [92], J. Halpin et S.W. Tsai [89], et R.M. Christensen [54]. Nous y avons ajouté à titre indicatif, les valeurs des coefficients de diffusion obtenues pour les composites carbone/carbone 1 et stratifiés. Dans le cas des échantillons stratifiés, cette valeur correspond au coefficient de diffusion le long de l'empilement des plis. Pour chaque composite unidirectionnel considéré, nous ne donnons les coefficients que pour une des plaques correspondant à un taux de fibres particulier, les conclusions que nous allons avancer ici étant identiques pour les autres plaques d'un même matériau.

Composite	Springer	Hashin	Expérimental
UD T300/Epoxy 1808N (Vf=49%)	2.28E-07	2.72E-07	3.79E-07
UD T300/Cyanate ester 'Rosalie' (Vf=45%)	1.75E-06	2.07E-06	3.31E-06
Carbone/carbone 1	-	-	6.92E-08
Stratifié [0, -5, 5] <sub>s</sub>	-	-	6.43E-08

Tableau II.2.2: Coefficients de diffusion transverse des composites testés exprimés en  $\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Nous pouvons ainsi constater dans le tableau [II.2.2] des écarts importants de l'ordre de 30 – 40% entre les valeurs expérimentales, et les valeurs théoriques pour les composites unidirectionnels T300/Epoxy 1808N et T300/Rosalie. Les valeurs expérimentales sont au-dessus des évaluations théoriques. Cela signifie que la diffusivité est très élevée dans le matériau composite par rapport à ce qu'elle devrait être connaissant les propriétés de

de la fibre (ici non absorbante) et de la résine. A ce niveau, nous pouvons faire raisonnablement deux suppositions soit la matrice présente des caractéristiques différentes dans le matériau composite de celles de la résine seule, soit la présence des fibres et donc des zones de liaisons entre les fibres et la matrice influent sur la diffusivité de l'eau dans le composite. Cette dernière hypothèse a déjà été avancée précédemment par différents auteurs, dont notamment B. Dewimille [64], C. Schutte [164], J.P. Favre [73], voir paragraphe I.3.3.2 du chapitre 1. Elle est d'ailleurs renforcée par le fait que les écarts dans la cinétique de diffusion des échantillons composites unidirectionnels à base de résine époxy et cyanate ester de taux de fibres différents semblent diminuer avec l'apparition "d'anomalies" dans le processus d'absorption (voir Figures II.2.26, II.2.27, II.2.29 et II.2.30). En outre, la diffusivité est plus importante que prévue dès le début du palier à 15% d'humidité relative où il est très peu probable qu'une modification chimique importante de la résine ait lieu, ou qu'un nombre important de décohésions soit présent sur tous les échantillons unidirectionnels testés.

En ce qui concerne les composites carbone/carbone, la détermination des propriétés diffusives du composite à partir des éléments constitutifs n'est pas aisée. L'obtention du composite carbone/carbone est complexe et les différents traitements utilisés au cours du procédé de mise en oeuvre ont pour objectif de changer la structure de la résine phénolique et donc rendent difficiles la connaissance des propriétés diffusives du matériau à partir de celles de la résine. L'aspect de la modélisation de ce type de composites ne sera pas par conséquent abordé ici.

## 4 Récapitulatif

Nous allons rappeler ici les éléments essentiels concernant les observations faites en ce qui concerne l'absorption d'humidité au sein de polymères et de composites polymères.

### 4.1 Absorption d'eau-Choix de matériaux

Il apparaît que le modèle de Fick ne permet pas dans la plupart des cas testés de décrire l'absorption d'eau au sein du matériau. La pénétration de l'eau au sein du composite semble être contrôlée par différents phénomènes. A la diffusion de l'humidité dans la matrice s'ajoute une diffusion des interfaces, et une infiltration de l'eau dans des défauts déjà existants ou créés par la pénétration d'eau. Ces phénomènes s'accompagnent de réactions chimiques d'hydrolyse entre l'eau et la matrice, confirmant le caractère à deux phases du processus de diffusion. On peut constater qu'alors que ces phénomènes dépendent de la nature chimique de la résine pour les résines époxy, ils semblent être essentiellement contrôlés par le degré de réticulation dans le cas des résines cyanate ester. Pour les deux résines cyanate ester testées, nous pouvons constater une réticulation incomplète de la résine ce qui est en parfaite corrélation avec la présence d'anomalies dans le processus d'absorption. Il apparaît ainsi que le couplage entre les effets de la réaction incomplète des fonctions cyanate et la présence d'eau peut avoir des effets importants, parfois même catastrophiques sur les propriétés finales.

Au vu des observations de gain en eau aux différents paliers, la résine cyanate ester RS-3 présente une faible reprise en eau par rapport à la résine époxy. Elle apparaît donc comme un bon choix pour minimiser l'importance des phénomènes d'absorption d'eau dans les matériaux composites à fibres de carbone.

Cependant, le comportement des échantillons en composite carbone/carbone ayant subi une phase de graphitation à 2500°C présente une très faible reprise en eau, inférieure à 0.01% pour une variation d'humidité de 30%; ce qui nous amène à le considérer comme le matériau composite, parmi ceux testés ici, le plus résistant en terme d'absorption d'humidité. Il faut tout de même rester assez prudent quant à l'utilisation du carbone/carbone pour les structures supports des détecteurs, car la phase de graphitation est une phase complexe qui s'effectue en atmosphère inerte et qui est donc difficilement réalisable sur de grandes pièces.

### 4.2 Validité des modèles de la littérature

L'importance des phénomènes d'absorption d'eau au sein de matériaux composites à matrice polymérique et les conséquences sur leurs tenues induit la nécessité d'utiliser des modèles de prédiction pour qualifier les structures en composites. Nous avons ici donc confronter les résultats expérimentaux aux modèles couramment employés dans la littérature.

#### 4.2.1 Résines pures

Dans le cas de résines pures, il apparaît que le modèle de Fick peut s'employer pour décrire les processus d'absorption d'humidité de la résine époxy 1808N en absence de phénomènes significatifs d'hydrolyse entre l'eau et la matrice. L'application de ce modèle permet d'avoir une répartition correcte de l'absorption d'eau au sein du matériau. Lorsque des réactions chimiques ou des dégradations semblent apparaître, ce modèle ne permet plus de décrire de façon satisfaisante les cinétiques d'absorption des résines. Le modèle de Langmuir lui est alors préféré. Nous avons pu montrer dans ce cas que le modèle de Langmuir était parfaitement utilisable pour décrire la pénétration de l'eau au sein des résines testées ici. Ainsi les écarts observés entre les cinétiques d'absorption d'échantillons d'épaisseurs différentes et l'approche très lente des niveaux de saturation en eau après un pseudo-plateau de saturation, sont correctement pris en compte par ce modèle. Cependant, il faudra rester prudent quant à une interprétation précise des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  du modèle de Langmuir qui traduisent la possibilité pour l'eau d'être piégée au sein de la résine, puis de nouveau libre de diffuser. En effet, les réactions chimiques d'hydrolyse, qui semblent se produire au sein de la résine et qui pourraient expliquer cette augmentation continue de la prise en eau, sont à priori irréversibles. Cela signifierait donc que la probabilité de dépiégeage serait alors très faible devant la probabilité de piégeage des molécules d'eau. Or les deux paramètres caractérisés expérimentalement sont du même ordre de grandeur.

#### 4.2.2 Composites

Le comportement des composites est contrôlé par la résine et donc on retrouve dans le composite une insuffisance du modèle de Fick à traduire les phénomènes d'absorption d'eau pour la plupart des échantillons testés. Il apparaît que le modèle classique de Springer, qui fait référence pour les problèmes hygrométriques, ne permet pas d'obtenir une bonne prédiction du comportement diffusif du matériau composite à partir des caractéristiques seules de la fibre et de la matrice. Les valeurs des coefficients de diffusion sont sous-estimées. Le modèle de Hashin bien que meilleur ne permet pas non plus d'obtenir une bonne estimation du coefficient de diffusion transversal.

### 4.3 Rôle présumé des interfaces

Au vu des différentes observations sur la cinétique et le processus d'absorption des matériaux composites, le rôle présumé des zones de liaisons entre les fibres et la matrice ou entre deux couches d'un stratifié, sur la pénétration d'eau au sein du matériau est avancé. La présence des zones de liaison fibres-matrice qui représentent une région intermédiaire, semble constituer des voies privilégiées de pénétration de l'eau renforçant ainsi l'hétérogénéité et l'anisotropie du matériau. Par conséquent, il nous est apparu important de prendre en compte le rôle de ces régions de transition dans la modélisation du processus d'absorption. Ainsi, nous allons proposer une modélisation, grâce à des techniques de développements asymptotiques, de cette zone interfaciale, pour incorporer dans une analyse prédictive de la diffusivité de matériaux composites, la contribution de ces zones de liaison. Nous allons donc proposer dans la seconde partie de ce chapitre, des lois d'interfaces définies sur des surfaces matérielles pour traduire de façon équivalente le comportement de l'interphase. Ces lois seront ensuite introduites dans la détermination du comportement diffusif équivalent de matériaux composites en utilisant des techniques d'homogénéisation.

## **II.3 Modélisation du rôle des interfaces sur le comportement hygroscopique**

### **1 Modèles d'Interface**

Compte tenu des insuffisances des modèles classiques à décrire les processus de propagation de l'humidité dans les matériaux composites que nous avons soulevées au paragraphe précédent, et plus particulièrement le rôle des zones de liaison, il nous est apparu important d'introduire une modélisation du comportement diffusif de ces zones de transition dans le processus d'absorption d'eau. Les composites obtenus généralement par superposition de plusieurs plis élémentaires présentent deux niveaux de zones de liaisons :

- l'interphase qui est la zone de liaison entre les fibres et la matrice à l'échelle du pli élémentaire
- l'intercouche existant entre les différentes couches d'un composite stratifié.

Nous avons ainsi cherché à modéliser le rôle préférentiel que jouent les interphases et les intercouches sur le comportement diffusif des matériaux composites en introduisant des lois dites d'interfaces dans la modélisation du comportement hygroscopique des matériaux composites.

#### **1.1 Les modèles d'interfaces/interphases/intercouches**

Dans la littérature, deux approches peuvent être distinguées dans la modélisation des interphases ou intercouches. L'une consiste à représenter l'interphase ou l'intercouche comme une surface matérielle. Le contact entre les constituants fibres/matrice ou entre les plis d'un composite stratifié peut alors être parfait ou au contraire posséder des propriétés spécifiques. On parle de modèles d'interfaces. L'autre approche suppose que l'interphase ou l'intercouche est un milieu continu d'épaisseur non nulle possédant des propriétés physiques propres.

##### **1.1.1 Le modèle d'interface parfaite**

Le modèle d'interface parfaite est le modèle qui a été le plus couramment utilisé dans les analyses du comportement des matériaux composites à renforts. Il repose sur l'hypothèse que les constituants sont homogènes et qu'ils sont parfaitement liés le long d'une interface sans propriété particulière et sans épaisseur. Au niveau de l'analyse du comportement diffusif des composites, l'hypothèse de continuité sur les concentrations et les flux a ainsi été largement utilisée et permis d'approcher le comportement équivalent du composite analytiquement. C'est en particulier l'hypothèse retenue par G.S. Springer [173] dans ses travaux sur l'humidité. Pour sa simplicité de mise en oeuvre, ce modèle est également adopté dans un grand nombre d'approches numériques.

Cependant, comme nous l'avons mentionné, il existe plusieurs facteurs pouvant influencer cette zone interfaciale, et induire entre autres des phénomènes de diffusion. La prise en compte des propriétés de l'interphase ou de l'intercouche peut se faire suivant deux approches.

##### **1.1.2 Modèles d'interphase ou d'intercouche**

La zone interfaciale est dans cette approche considérée comme un milieu d'épaisseur finie au comportement homogène ou non. La plupart de ces modèles ont été développés dans le cadre de l'élasticité. Ils consistent pour la plupart à introduire une fine couche entourant la fibre dont les propriétés sont uniformes, mais différentes de

celles de la fibre et de la matrice. C'est l'approche retenue en particulier par R.M. Christensen et K.H. Lo [55]. D'autres auteurs, notamment E. Hervé et A. Zaoui [99], ont généralisé ce modèle en remplaçant l'interphase par  $n$  phases homogènes, permettant ainsi de modéliser le cas d'interphases non homogènes. D'autres modèles supposent la zone interfaciale comme une zone de transition au comportement évolutif (K. Jayaraman et K.L. Reifsneider [106], M.P. Lutz et R.W. Zimmerman [135]). M. Haboussi [86], propose un peu plus tard, une modélisation de l'intercouche qui tient compte de l'enrichissement en résine de cette région, et de la répartition spécifique des fibres.

La difficulté que pose l'utilisation de ces modèles d'interphase ou d'intercouche est la caractérisation expérimentale des propriétés attribuées à cette fine couche mais également de son épaisseur. En outre, la mise en oeuvre de ces modèles pour des études de prédition de comportement peut être quelquefois délicate. On peut leur préférer alors des modèles surfaciques dits d'interface.

### 1.1.3 Modèles d'interface imparfaite

Une autre modélisation de la zone interfaciale consiste à la représenter sous forme d'une surface sans épaisseur sur laquelle sont imposées des conditions de discontinuités entre la fibre et la matrice. De nouveau, les modèles que l'on peut trouver dans la littérature concernent essentiellement les problèmes d'élasticité. Nous y reviendrons plus longuement à la bibliographie du chapitre 3.

Ces lois d'interface sont soit postulées en fonction d'observations expérimentales, soit obtenues en déterminant le comportement asymptotiquement équivalent à une fine couche dont l'épaisseur tend vers zéro. Le comportement de cette couche peut également être fonction du paramètre qu'est l'épaisseur de la couche. La technique des développements asymptotiques est naturellement adoptée dans ce type d'analyse.

Nous nous proposons ici d'appliquer cette dernière démarche afin de construire des lois d'interface traduisant les propriétés d'absorption de la région interfaciale entre les constituants ou les plis d'un composite.

## 1.2 Modèle d'interface diffusive

Pour plus de généralités, nous supposons que les constituants fibre/matrice et l'interphase sont régis par un modèle d'absorption de Langmuir, le modèle de Fick pouvant se déduire de ce dernier (voir paragraphe II.2.2.1 au chapitre II). On rappelle que le modèle de Langmuir introduit les propriétés de piégeage ou de dépiégeage des molécules d'eau au sein d'un matériau. Les propriétés des interfaces, si on suppose qu'elles ont un comportement de type Langmuir, peuvent alors être diverses. Nous avons ainsi retenu ici deux situations possibles aux interfaces: l'une traduisant un stockage important des molécules d'eau à l'interface, l'autre une diffusion interfaciale importante avec tout de même un piégeage important des molécules d'eau. Le cas d'interfaces fortement dépiégées avec des propriétés diffusives particulières (ou non) s'obtiendra comme cas limite. On cherche alors à déterminer les lois d'interface asymptotiquement équivalentes aux propriétés de transmission de l'humidité dans ces régions interfaciales. Le comportement limite de ces zones lorsque leur épaisseur tend vers zéro est obtenu par la technique des développements asymptotiques.

### 1.2.1 La technique des développements asymptotiques

La technique des développements asymptotiques, développée par J.D. Cole [48], J.D. Cole and Kervokian [49], et M. Van Dyke [179], repose sur la notion d'existence de petit paramètre influençant la solution du problème considéré. Les solutions du problème considéré sont alors recherchées sous la forme d'un développement en puissance de ce petit paramètre. Ces techniques ont été initialement développées en mécanique des fluides, faiblement visqueux, notamment pour l'étude des couches limites. Puis, elles ont été largement utilisées avec plusieurs échelles, dans le domaine de la mécanique pour modéliser le comportement des matériaux composites, notamment dans la théorie de l'homogénéisation périodique (A. Bensoussan et al. [20], G. Duvaut [68], E. Sanchez-Palencia [162]).

### 1.2.2 Le principe

Considérons donc un composite à renforts unidirectionnels, les fibres étant orientées suivant l'axe  $e_z$  et ayant une section circulaire de rayon  $R$ . L'interface est schématisée par une fine couche d'épaisseur  $e$  entourant la fibre. On note  $\Gamma_1$  la frontière entre la fibre et la couche,  $\Gamma_2$  la frontière entre la matrice et la couche. Les coordonnées d'un point quelconque dans le repère cylindrique ( $e_r, e_\theta, e_z$ ) seront désignées par  $(r, \theta, z, t)$ . Enfin on note  $\Omega_e$  le domaine occupée par l'interface.

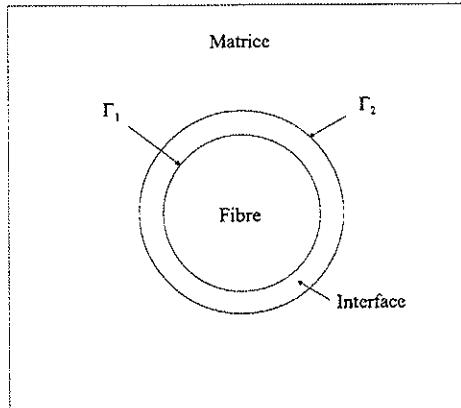


Figure II.3.1: Modélisation de l'interface fibre-matrice

Nous allons présenter la méthodologie dans le cas de fibres absorbantes, le cas non absorbant se déduisant de ce dernier. La concentration d'eau à l'interface  $\Omega^e$  est notée  $c^e$ , la concentration en molécules d'eau libre  $n^e$ , la concentration en molécules d'eau piégée  $N^e$ , la probabilité pour une molécule d'eau de passer d'une phase libre à une phase liée  $\alpha_e$  (respectivement  $\beta_e$  d'une phase liée à une phase libre). Les quantités se rapportant à la matrice, seront indiquées par  $m$  et celles à la fibre par  $f$ . De sorte que le problème de transmission de l'humidité dans la petite couche va s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c^e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^e = 0 \\ c^e(r, \theta, z, t) = n^e(r, \theta, z, t) + N^e(r, \theta, z, t) \\ \mathbf{q}^e = -D^e \operatorname{grad} n^e(r, \theta, z, t) \\ \frac{\partial N^e}{\partial t} = \alpha^e n^e(r, \theta, z, t) - \beta^e N^e(r, \theta, z, t) \\ n^e(R + e, \theta, z, t) = n_m(R + e, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \\ \mathbf{q}^e \cdot \nu = -D^m \operatorname{grad} n_m \cdot \nu & \text{sur } \Gamma_2 \\ n^e(R, \theta, z, t) = n_f(R, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathbf{q}^e \cdot \nu = -D^f \operatorname{grad} n_f \cdot \nu & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{II.3.1})$$

où  $\nu$  représente la normale unitaire extérieure à la frontière  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  dirigée de la fibre vers la matrice.

Le principe est de chercher une loi d'interface asymptotiquement équivalente aux conditions de transmission de l'humidité au sein de cette petite couche lorsque l'épaisseur de la couche  $e$  tend vers zéro. Pour cela, nous avons considéré deux cas.

Dans un premier temps, nous supposons que l'interface est fortement diffusive avec des propriétés importantes de piégeage des molécules d'eau. La diffusivité de cette couche  $\Omega^e$  est ainsi supposée importante (et homogène

isotrope) de sorte que son tenseur de diffusivité s'écrit sous la forme :

$$D^e = \frac{R}{e} \tilde{D} I \quad (\text{II.3.2})$$

où  $\tilde{D}$  est une quantité finie et  $I$  la matrice identité.

Dans cette couche, on écrit la probabilité  $\alpha^e$  pour une molécule d'eau de passer d'une phase libre à une phase liée (respectivement  $\beta^e$  d'une phase liée à une phase libre) sous la forme :

$$\alpha^e = \frac{R}{e} \tilde{\alpha} \quad (\text{II.3.3})$$

$$\beta^e = \frac{e}{R} \tilde{\beta} \quad (\text{II.3.4})$$

où  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont des quantités finies.

Dans un second temps, nous nous sommes placés dans le cas où les interfaces sont des sites privilégiés de stockage des molécules d'eau sans propriétés diffusives particulières. Nous faisons donc les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} D^e = \tilde{D} \\ \alpha^e = \frac{R}{e} \tilde{\alpha} \\ \beta^e = \frac{e}{R} \tilde{\beta} \end{cases} \quad (\text{II.3.5})$$

où  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  sont des quantités finies.

### 1.2.3 Interfaces piégeantes et fortement diffusives

**Proposition II.3.1** *La loi d'interface asymptotiquement équivalente aux conditions de transmission à travers une interface de très faible épaisseur très fortement perméable et piégeante, se traduit, par les conditions sur l'interface  $\Gamma$  de rayon  $R$  suivantes :*

$$\begin{cases} [[n]] = 0 \\ [[\mathbf{q} \cdot \nu]] = -\tilde{\alpha} R n + \tilde{D} R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II.3.6})$$

où les crochets  $[[g]]$  désignent le saut de  $g$  défini par  $[[g]] = g_m - g_f$  et où  $\nu$  désigne la normale extérieure.

**Remarque II.3.1** Le coefficient  $\tilde{D}$  a la dimension d'un débit surfacique. Lorsque  $\tilde{D} = 0$  et  $\tilde{\alpha} = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'interface n'a pas de propriétés diffusives, ni de piégeage particulières, on retrouve les conditions classiques de transmission de la concentration d'eau et du flux d'humidité entre deux constituants parfaitement collés entre eux.

Dans le cas de fibres non absorbantes, qui nous intéressent ici pour les fibres de carbone, la condition d'interface s'écrit :

$$\mathbf{q} \cdot \nu = -\tilde{\alpha} R n + \tilde{D} R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.3.7})$$

**Remarque II.3.2** La loi d'interface (II.3.6) se généralise dans le cas d'inclusion de géométrie quelconque sous la forme

$$[[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = \tilde{D}R\Delta_T n - \tilde{\alpha}Rn \quad (\text{II.3.8})$$

où  $\Delta_T$  représente la restriction surfacique de l'opérateur laplacien.

**Remarque II.3.3** Dans le système de coordonnées cartésiennes, la loi d'interface s'écrit également :

$$[[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = \tilde{D}R \left( \tau_\alpha \tau_\beta \frac{\partial^2 n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{1}{R} \nu_\alpha \frac{\partial n}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) - R\tilde{\alpha}n \quad (\text{II.3.9})$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  représente le vecteur normal extérieur unitaire et  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur tangent unitaire à la fibre.

**Remarque II.3.4** Dans le cas où l'on souhaiterait modéliser l'interface par une couche de comportement diffusif anisotrope, la condition d'interface s'écrirait alors :

$$[[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = \text{div}_T(\hat{D}\text{grad}_T \mathbf{n}) + \tilde{\alpha}Rn \quad \text{avec } \hat{D}_{\alpha\beta} = \widetilde{D_{\alpha\beta}} - \frac{\widetilde{D_{\alpha 3}}\widetilde{D_{\beta 3}}}{\widetilde{D_{33}}}, \quad (\alpha, \beta) = (1, 2) \quad (\text{II.3.10})$$

La démonstration de la proposition [II.3.1] repose sur la technique des développements asymptotiques où l'épaisseur de la couche  $e$  intervient comme un paramètre que l'on va faire tendre vers zéro.

**Démonstration 1 :**

Nous recherchons les concentrations en molécules d'eau libres, en molécules d'eau piégées dans la couche  $\Omega^e$ , dans la fibre  $\Omega^f$  et la matrice  $\Omega^m$  sous la forme des développements en puissances de  $e$  suivants en posant  $\eta = \frac{r-R}{e}$  :

$$\begin{cases} n^e(r, \theta, z, t) = n^0(\eta, \theta, z, t) + e n^1(\eta, \theta, z, t) + e^2 n^2(\eta, \theta, z, t) + \dots & \eta \in [0, 1] \\ N^e(r, \theta, z, t) = N^0(\eta, \theta, z, t) + e N^1(\eta, \theta, z, t) + e^2 N^2(\eta, \theta, z, t) + \dots & \eta \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{II.3.11})$$

les concentrations en molécules d'eau libres et en molécules d'eau piégées dans la fibre et dans la matrice seront également développées en puissance de  $e$  sous la forme :

$$\begin{cases} n_i(r, \theta, z, t) = n_i^0(r, \theta, z, t) + e n_i^1(r, \theta, z, t) + e^2 n_i^2(r, \theta, z, t) + \dots & \eta \in [0, 1] \\ N_i(r, \theta, z, t) = N_i^0(r, \theta, z, t) + e N_i^1(r, \theta, z, t) + e^2 N_i^2(r, \theta, z, t) + \dots & \eta \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{II.3.12})$$

où l'indice (i) désigne les concentrations selon que l'on est dans la fibre, indicées par  $f$  ou dans la matrice, indicées par  $m$ .

En injectant ces expressions dans les équations de diffusion de la couche  $\Omega^e$  et en identifiant les puissances de  $e$ , nous obtenons les problèmes satisfais aux différents ordres du développement.

Ainsi le problème de diffusion dans la petite couche se réduit à l'ordre  $e^{-3}$  :

Ordre  $e^{-3}$

$$\tilde{D} \frac{\partial^2 n^0}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{II.3.13})$$

avec les conditions suivantes aux interfaces :

$$\begin{cases} \tilde{D} \frac{\partial n^0}{\partial \eta}(\eta = 0, \theta, z, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tilde{D} \frac{\partial n^0}{\partial \eta}(\eta = 1, \theta, z, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ n^0(\eta = 0, \theta, z, t) = n_f^0(R, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ n^0(\eta = 1, \theta, z, t) = n_m^0(R + e, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (\text{II.3.14})$$

L'intégration en  $\eta$  de l'équation (II.3.13) conduit à :

$$\tilde{D} \frac{\partial n^0}{\partial \eta} = f(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.15})$$

Or d'après les conditions aux interfaces, nous obtenons :

$$\tilde{D} \frac{\partial n^0}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.3.16})$$

De sorte que :

$$n^0(\eta, \theta, z, t) = n^0(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.17})$$

ainsi, d'après les conditions aux interfaces, nous en déduisons :

$$n_m^0(R + e, \theta, z, t) = n_f^0(R, \theta, z, t) = n^0(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.18})$$

et donc, lorsque  $e$  tend vers zéro, on en déduit la continuité de la concentration de molécules d'eau libres à l'interface au premier ordre du développement :

$$[[n^0]] = 0 \quad (\text{II.3.19})$$

Compte tenu de ces résultats le problème à l'ordre  $e^{-2}$ , se réduit à :

*Ordre  $e^{-2}$*

$$\tilde{D} \frac{\partial^2 n^1}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{II.3.20})$$

avec les conditions aux interfaces suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{D} \frac{\partial n^1}{\partial \eta}(\eta = 0, \theta, z, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tilde{D} \frac{\partial n^1}{\partial \eta}(\eta = 1, \theta, z, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ n^1(\eta = 0, \theta, z, t) = n_f^1(R, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ n^1(\eta = 1, \theta, z, t) = n_m^1(R + e, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (\text{II.3.21})$$

De même, nous obtenons :

$$\tilde{D} \frac{\partial n^1}{\partial \eta} = f(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.22})$$

soit compte tenu des conditions aux interfaces :

$$\tilde{D} \frac{\partial n^1}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.3.23})$$

La solution de l'équation différentielle est donc analogue à l'ordre précédent et s'écrit :

$$n^1(\eta, \theta, z, t) = n^1(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.24})$$

En supposant connue la fonction  $n_1(\theta, z, t)$ , nous pouvons écrire l'équation :

*Ordre  $e^{-1}$*

$$\tilde{D} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 n^0}{\partial \theta^2} + \tilde{D} \frac{\partial^2 n^0}{\partial z^2} + \tilde{D} \frac{\partial^2 n^2}{\partial \eta^2} - \tilde{\alpha} n^0 = 0 \quad (\text{II.3.25})$$

avec comme conditions aux interfaces :

$$\begin{cases} R \tilde{D} \frac{\partial n^2}{\partial \eta}(\eta = 0, \theta, z, t) = D_f \frac{\partial n_f^0}{\partial r}(R, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ R \tilde{D} \frac{\partial n^2}{\partial \eta}(\eta = 1, \theta, z, t) = D_m \frac{\partial n_m^0}{\partial r}(R + e, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \\ n^2(\eta = 0, \theta, z, t) = n_m^2(R, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ n^2(\eta = 1, \theta, z, t) = n_m^2(R + e, \theta, z, t) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (\text{II.3.26})$$

En intégrant l'équation (II.3.25) en  $\eta$  entre 0 et 1 compte tenu des conditions aux limites, nous obtenons

$$-D_m \frac{\partial n_m^0}{\partial r}(R + e, \theta, z, t) + D_f \frac{\partial n_f^0}{\partial r}(R, \theta, z, t) = \tilde{D} R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 n^0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 n^0}{\partial z^2} \right)(\theta, z, t) - \tilde{\alpha} R n^0(\theta, z, t) \quad (\text{II.3.27})$$

Lorsque l'on fait tendre  $e$  vers 0 et en tenant compte de (II.3.18), on obtient le résultat annoncé.

#### 1.2.4 Interfaces fortement piégeantes

**Proposition II.3.2** *Dans le cas d'interfaces fortement piégeantes et lorsque la diffusivité de l'interface est du même ordre de grandeur que celles des constituants voisins fibre et matrice, la loi d'interface asymptotiquement équivalente s'écrit :*

$$\begin{cases} [[n]] = 0 \\ [[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = -\tilde{\alpha} R n \end{cases} \quad (\text{II.3.28})$$

Nous ne démontrerons pas ici ce résultat qui est obtenu de manière analogue à la loi d'interface (II.3.6).

**Remarque II.3.5** La condition de transmission (II.3.28) traduit le fait que la perte du taux d'humidité surfacique reçu par la matrice est le taux d'humidité surfacique stocké à l'interface. Cette loi d'interface permet donc de rendre compte des phénomènes d'accumulation d'eau à l'interface.

#### 1.2.5 Cas particulier: modèle de diffusion de Fick

Nous avons vu au paragraphe que le modèle de Fick se déduit du modèle de Langmuir en considérant la probabilité  $\alpha$ , de passer d'une phase libre à une phase liée, et la concentration en molécules piégées,  $N$ , comme nulles.

Par conséquent, nous pouvons en déduire à partir des équations (II.3.6) et (II.3.28) les propositions suivantes :

**Proposition II.3.3** La loi d'interface traduisant les phénomènes de transmission de type Fickien de l'humidité à travers une fine couche très fortement diffusive dont l'épaisseur tend vers zéro, s'écrit :

$$\begin{cases} [[c]] = 0 \\ [[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = \tilde{D}R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II.3.29})$$

Nous retrouvons ici le modèle de diffusion interfaciale proposé par W. Benhamida *et al.* [19] qui traduit que l'excès du taux d'humidité surfacique reçu par la matrice est le taux d'humidité surfacique transporté par l'interface diffusive.

**Proposition II.3.4** La loi d'interface asymptotiquement équivalente aux conditions de diffusivité à travers une fine couche de très faible épaisseur lorsque la diffusivité de la petite couche est du même ordre de grandeur que celle des constituants voisins se traduit par les conditions sur l'interface  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} [[c]] = 0 \\ [[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.30})$$

On retrouve ainsi la loi classiquement utilisée traduisant une transmission parfaite à l'interface.

### 1.3 Interfaces interlaminaires

Dans le cas d'interfaces interlaminaires, nous considérons le pli élémentaire homogène, de sorte que les intercouches que nous cherchons à modéliser se situent entre les différentes couches des stratifiés et sont supposées planes. On considère en outre que  $\mathbf{e}_3$  est la direction d'empilement des plis.

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas du modèle d'absorption de Langmuir. Nous pouvons alors montrer en utilisant la même technique que précédemment la proposition suivante :

**Proposition II.3.5** La loi d'interface, asymptotiquement équivalente aux conditions de transmission de l'humidité avec des phénomènes de piégeage des molécules d'eau s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} [[n]] = 0 \\ [[\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}]] = \tilde{D} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} \right) - \tilde{\alpha} n \end{cases} \quad (\text{II.3.31})$$

**Remarque II.3.6** Si les interfaces sont modélisées comme des sites préférentiels de stockage des molécules d'eau, la loi d'interface (II.3.28) reste inchangée.

Ces lois d'interface étant établies, nous allons maintenant cherché à obtenir un modèle de prédiction du comportement diffusif de structures en matériaux composites dont les interfaces présentent des propriétés spécifiques de diffusion de l'humidité.

## 2 Comportement homogène équivalent d'un composite à renforts unidirectionnels

### 2.1 Les techniques d'homogénéisation

Différentes méthodes d'homogénéisation ont été proposées depuis les années soixante pour définir le comportement diffusif homogène équivalent de composites à partir du comportement de leurs constituants. Sans vouloir être exhaustif, on peut citer la théorie des "modules effectifs", Hill [100], ainsi que les méthodes variationnelles de Z. Hashin et S. Shtrickman [97] qui fournissent pour des composites à fibres unidirectionnelles, à partir de calculs explicites, des encadrements des coefficients effectifs. Ces auteurs ont supposé tout d'abord le composite

constitué de fibres unidirectionnelles de section carrée ou circulaire, disposées sous forme de réseau rectangulaire ou hexagonal. Puis, Hashin et Rosen [96] montrent que pour un arrangement de fibres aléatoires c'est-à-dire lorsque le composite est décrit par un assemblage de cylindres circulaires, les coefficients équivalents peuvent être obtenus également explicitement. Un peu plus tard, S. Andrieux [6], H. Bui *et al* [30] montrent que pour des hétérogénéités faibles, il est possible d'obtenir des expressions analytiques des souplesses équivalentes. La méthode "auto-cohérente" (self-consistent) ou à phases multiples, R. Hill [101], R.M. Christensen [54] rend compte en moyenne de l'interaction des hétérogénéités dans le volume représentatif pour des matériaux fortement hétérogènes. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que chaque phase est noyée dans un milieu homogène dont les caractéristiques sont les raideurs effectives du matériau composite. Enfin, la théorie de l'homogénéisation périodique développée par A. Bensoussan *et al.* [20], G. Duvaut [68], E. Sanchez-Palencia [162], qui repose sur une répartition fine et périodique des hétérogénéités, donne un sens précis au processus d'homogénéisation sous la forme d'un problème de convergence avec un petit paramètre caractérisant la taille de hétérogénéités.

## 2.2 L'approche de l'homogénéisation périodique

Parmi ces différentes méthodes d'homogénéisation, nous avons retenu d'une part la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, puis l'approche auto-cohérente.

### 2.2.1 Le principe

Nous allons tout d'abord présenter la méthodologie de l'approche périodique en y introduisant la modélisation des interfaces diffusives et piégeantes présentées au paragraphe précédent. Le composite est supposé ici à renforts unidirectionnels, les fibres étant circulaires absorbantes pour rester dans le cas le plus général.

Soit  $\varepsilon$  un petit paramètre caractérisant la taille des hétérogénéités. Deux échelles de grandeur peuvent alors être distinguées :

- la première échelle de grandeur, liée aux dimensions de la structure et pour laquelle la taille des hétérogénéités est petite, est qualifiée d'échelle macroscopique. Le repère qui lui est naturellement associé est  $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Un point est repéré à cette échelle par ses coordonnées macroscopiques  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .
- la seconde échelle de grandeur, liée aux dimensions des hétérogénéités est qualifiée d'échelle microscopique. Le repère naturellement associé à cette échelle est  $(0, \varepsilon\mathbf{e}_1, \varepsilon\mathbf{e}_2, \varepsilon\mathbf{e}_3)$ . Dans ce repère, la taille des hétérogénéités est d'ordre unité. Un point est repéré dans cette échelle par ses coordonnées locales ou microscopiques  $y = (y_1, y_2, y_3)$  où  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ .

On passe donc de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique en effectuant une homothétie de rapport  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Pour plus de détails sur ces deux échelles, et la méthodologie, on pourra consulter entre autres G. Duvaut [68], F. Léné [127], J.L. Lions [132], E. Sanchez-Palencia [162] et P. Suquet [175].

On désigne par cellule de base  $Y = \prod_{i=1}^3 [0, Y_i]$  une des périodes du matériau à l'échelle microscopique (Figure [II.3.3]) de sorte que la période de la structure à l'échelle macroscopique est  $\varepsilon Y$ . Cette cellule de base comprend un domaine  $Y^m$  représentant la partie pleine occupée par la matrice et  $Y^f$  la partie représentant la fibre diffuse. La période de la structure étant quelconque dans la direction  $\mathbf{e}_3$ , d'alignement des fibres, la cellule de base considérée est bidimensionnelle.

Le comportement diffusif de la cellule de base  $Y$  est déterminé par la donnée des coefficients de diffusion des différents constituants et donc par les fonctions  $D(y)$  définis sur  $Y$  et  $Y$ -périodiques en  $y_1$  et  $y_2$ .

Après prolongement par  $Y$ -périodicité à l'espace entier des fonctions  $D(y)$ , on obtient les coefficients locaux de diffusion du milieu hétérogène  $D^\varepsilon(x)$  à l'échelle macroscopique en substituant  $x/\varepsilon$  à  $y$  dans  $D(y)$ .

$$D^\varepsilon(x) = \{D_{ij}^\varepsilon(x)\} = D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\text{II.3.32})$$

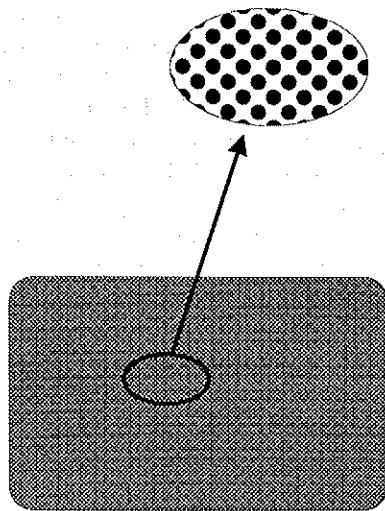


Figure II.3.2: La structure hétérogène

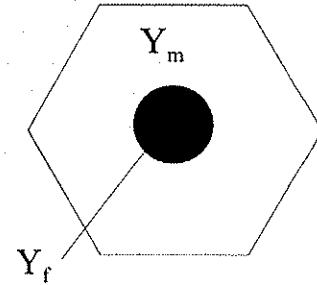


Figure II.3.3: La cellule de base

On supposera que les constituants du composite et que l'interface ont un comportement homogène et isotrope. Les équations du problème diffusif hétérogène s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^\varepsilon = 0 \\ c^\varepsilon(x, t) = n^\varepsilon(x, t) + N^\varepsilon(x, t) \\ \frac{\partial N^\varepsilon}{\partial t} = \alpha^\varepsilon n^\varepsilon(x, t) - \beta^\varepsilon N^\varepsilon(x, t) \\ \mathbf{q}^\varepsilon = -D^\varepsilon \operatorname{grad} n^\varepsilon \end{cases} \quad (\text{II.3.33})$$

avec sur  $\Gamma_\varepsilon$  les conditions d'interfaces :

$$[[n^\varepsilon]] = 0 \quad \text{et} \quad [[\mathbf{q}^\varepsilon \cdot \nu]] = \varepsilon \tilde{D} R \Delta_T n - \varepsilon R \alpha^\varepsilon n^\varepsilon$$

où  $\Gamma_\varepsilon$  représente toutes les interfaces entre les constituants dans les cellules matrice à l'échelle macroscopique et  $\nu$  la normale extérieure sortante à la fibre.

A ce problème devront s'ajouter des conditions aux limites et des conditions initiales pour que le problème soit bien posé.

**Remarque II.3.7** La condition d'interface du problème II.3.33 est la loi d'interface obtenue précédemment, dans laquelle on a dû introduire le coefficient multiplicatif  $\varepsilon$ . La couche modélisant l'interface doit effectivement ici être prise d'épaisseur  $\varepsilon\varepsilon$  (et non  $\varepsilon$  comme au paragraphe I.2.3). En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit :

$$[[\mathbf{q}^\varepsilon \cdot \nu]] = \varepsilon \tilde{D} R \left( \tau_\eta \tau_\gamma \frac{\partial^2 n}{\partial n_\eta \partial n_\gamma} - \frac{\nu_\eta}{R\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x_\eta} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_3^2} \right) - \varepsilon R \alpha^\varepsilon n^\varepsilon \quad \text{avec } (\eta, \gamma) = (1, 2) \quad (\text{II.3.34})$$

La méthode couramment employée pour résoudre ce problème d'équilibre est d'effectuer numériquement un calcul de structure par une méthode d'éléments finis. Ceci nécessite de discréteriser très finement la pièce, le maillage devant être plus fin que la taille des hétérogénéités. Compte tenu de l'ordre de grandeur des hétérogénéités, il est préférable d'exploiter la formulation du problème hétérogène en tant que problème d'homogénéisation avec un petit paramètre  $\varepsilon$ . L'objectif est alors d'obtenir le comportement homogène équivalent du matériau composite hétérogène. Pour cela, nous allons chercher à établir une relation liant les limites de  $n^\varepsilon$  et  $q^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

### 2.2.2 Comportement diffusif équivalent en présence d'interfaces diffusives et piégeantes

**Proposition II.3.6** Les équations du problème diffusif homogène équivalent sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial n^0}{\partial t} + \alpha^{hom} n^0 - \beta^{hom} N^0 + \operatorname{div} \mathbf{q}^0 = 0 & \text{dans } Y \\ \mathbf{q}^0 = -D^{hom} \operatorname{grad} n^0 \end{cases} \quad (\text{II.3.35})$$

où les propriétés homogénéisées sont :

$$\begin{cases} D_{\gamma\eta}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \left( \int_Y D(y) dy \right) \delta_{\gamma\eta} - \int_Y D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} dy \right] + \frac{1}{|Y|} \left[ \int_\Gamma \tilde{D} R \tau_\gamma \tau_\eta ds - \int_\Gamma R \tilde{D} \tau_\gamma \tau_\zeta \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\zeta} ds \right] \\ D_{33}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y D_{33}(y) dy + \tilde{D} R |\Gamma| \right] \\ D_{\gamma 3}^{hom} = 0 \\ \alpha^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y \alpha(y) dy + R \tilde{\alpha} |\Gamma| \right] \\ \beta^{hom} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \beta(y) dy \end{cases} \quad (\text{II.3.36})$$

et où les fonctions périodiques  $\chi^\eta$  sont solutions des problèmes cellulaires suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \left( D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right) = \frac{\partial D(y)}{\partial y_\eta} \\ \text{avec les conditions sur l'interface } \Gamma \\ [[\chi^\eta]] = 0 \\ [[-D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \nu_\gamma + D(y) \nu_\eta]] = -\tilde{D} R \left[ -\tau_\gamma \tau_\zeta \frac{\partial^2 \chi^\eta}{\partial y_\gamma \partial y_\zeta} - \frac{1}{R} \nu_\eta + \frac{1}{R} \nu_\gamma \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right] \end{cases} \quad (\text{II.3.37})$$

**Démonstration 2 :**

La démonstration de ce résultat repose sur la technique des développements asymptotiques à deux échelles. Nous recherchons les concentrations  $n^\varepsilon$  et  $N^\varepsilon$  sous la forme :

$$\begin{cases} n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, t) = n^0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \varepsilon n^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \varepsilon^2 n^2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \dots \\ N^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = N^0(x_1, x_2, y_1, y_2, t) + \varepsilon N^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \varepsilon^2 N^2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \dots \end{cases} \quad (\text{II.3.38})$$

où  $y_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$  et  $y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$  et où les applications  $(y_1, y_2) \rightarrow n^i$  et  $(y_1, y_2) \rightarrow N^i$  sont  $Y$ -périodiques,  $\forall x \in \Omega^\varepsilon$  et pour tout  $i \geq 0$

On remarquera que pour une fonction  $\Phi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\gamma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{cases} \quad (\text{II.3.39})$$

En reportant ces développements dans les lois de comportement du problème hétérogène, les champs de gradient d'humidité et de flux d'humidité s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{grad}n^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}\text{grad}^0n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \text{grad}^1n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \\ \quad \varepsilon\text{grad}^2n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + \dots + \varepsilon^{k-1}\text{grad}^kn^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \dots \\ q^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}q^0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + q^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \\ \quad \varepsilon q^2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \dots + \varepsilon^{k-1}q^k(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) + \dots \end{cases} \quad (\text{II.3.40})$$

avec

$$\begin{cases} \text{grad}^0n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = \text{grad}_y(n^0) \\ \text{grad}^1n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = \text{grad}_x(n^0) + \text{grad}_y(n^1) \\ \text{grad}^2n^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = \text{grad}_x(n^1) + \text{grad}_y(n^2) \\ \text{grad}^kn^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = \text{grad}_x(n^{k-1}) + \text{grad}_y(n^k) \end{cases} \quad (\text{II.3.41})$$

et

$$\begin{cases} q^{-1}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -D(y)\text{grad}_y(n^0) \\ q^0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -D(y)[\text{grad}_x(n^0) + \text{grad}_y(n^1)] \\ q^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -D(y)[\text{grad}_x(n^1) + \text{grad}_y(n^2)] \\ q^k(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -D(y)[\text{grad}_x(n^k) + \text{grad}_y(n^{k+1})] \end{cases} \quad (\text{II.3.42})$$

où  $\text{grad}_y$  (respectivement  $\text{grad}_x$ ) désigne le gradient par rapport à la variable  $y$  (respectivement à la variable  $x$ ). En substituant ces développements asymptotiques dans les équations du problème hétérogène et après identification des termes du même ordre en  $\varepsilon$ , nous obtenons :

ordre  $\varepsilon^{-2}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial q_\gamma^{-1}}{\partial y_\gamma}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = 0 & \text{dans } Y \\ q_\gamma^{-1} = -D(y)\frac{\partial n^0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)}{\partial y_\gamma} & \\ [[n^0]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ [[D(y)\frac{\partial n^0}{\partial y_\gamma}\nu_\gamma]] = -\tilde{D}R\left[\tau_\gamma\tau_\eta\frac{\partial^2 n^0}{\partial y_\gamma\partial y_\eta} + \frac{\nu_\eta}{R}\frac{\partial n^0}{\partial y_\eta}\right] & \\ n^0(x, y_3, t) \text{ et } q_\gamma^{-1}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) \text{ sont Y-périodiques} & \end{cases} \quad (\text{II.3.43})$$

où  $\Gamma$  désigne l'interface entre les fibres et la matrice à l'échelle microscopique de la cellule de base.

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} n^0 \in W^*/\mathbb{R} \\ a(n^0, v) = 0 \quad \forall v \in W^*/\mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{II.3.44})$$

où  $W^*$  est l'espace défini par :

$$W^* = \{v \in H^1(Y), v|_\Gamma \in H^1(\Gamma), vY \text{ périodiques}\} \quad (\text{II.3.45})$$

et  $W^*/\mathbb{R}$ , l'espace  $W^*$  quotienté par les fonctions constantes et où la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est donnée par :

$$a(u, v) = \int_Y D(y) \frac{\partial u}{\partial y_\gamma} \frac{\partial v}{\partial y_\gamma} dy + R \int_{\Gamma} \tilde{D} \frac{\partial u}{\partial y_\gamma} \frac{\partial v}{\partial y_\eta} \tau_\gamma \tau_\eta ds \quad (\text{II.3.46})$$

La forme  $a(u, v)$  étant coercive, ce problème est bien posé, de sorte que la solution  $n^0$  existe et est unique dans  $W^*/\mathbb{R}$ . La fonction  $n^0(x_1, x_2, x_3, t)$  indépendante de  $y_\gamma$  étant solution, on en déduit que la solution du problème à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  est :

$$n^0 = n^0(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{II.3.47})$$

On en déduit par conséquent que  $q^{-1} = 0$ . Compte tenu de ces résultats, le problème à l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  se réduit alors à :

*Ordre  $\varepsilon^{-1}$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial q_\gamma^0}{\partial y_\gamma}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = 0 & \text{dans } Y^* \\ q_\gamma^0 = -D(y) \frac{\partial n^0(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_\gamma} - D(y) \frac{\partial n^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)}{\partial y_\gamma} & \\ [[n^1]] = 0 & \\ [[D(y) \frac{\partial n^1}{\partial y_\gamma} \nu_\gamma + D(y) \frac{\partial n^0}{\partial x_\gamma} \nu_\gamma]] = -\tilde{D}R \left[ \tau_\gamma \tau_\eta \frac{\partial^2 n^1}{\partial y_\gamma \partial y_\eta} - \frac{1}{R} \nu_\gamma \frac{\partial n^0}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{R} \nu_\gamma \frac{\partial n^1}{\partial y_\gamma} \right] & \text{sur } \Gamma \\ n^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) \text{ et } q_\gamma^0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) \text{ sont Y-périodiques} & \end{array} \right. \quad (\text{II.3.48})$$

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^1 \in W^*/\mathbb{R} \\ a(n^1, v) = L(v) \quad \forall v \in W^*/\mathbb{R} \end{array} \right. \quad (\text{II.3.49})$$

où la forme linéaire  $L(v)$  est donnée par l'expression suivante :

$$L(v) = - \int_{Y^*} D(y) \frac{\partial n^0}{\partial x_\gamma} \frac{\partial v}{\partial y_\gamma} dy - \int_{\Gamma} \tilde{D} \frac{\nu_\gamma}{R} \frac{\partial n^0}{\partial x_\gamma} v ds \quad (\text{II.3.50})$$

on peut alors vérifier que la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution à ce problème est bien satisfaite, c'est-à-dire  $L(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}$ . En utilisant la linéarité du problème, on peut alors écrire  $n^1$  sous la forme :

$$n^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -\chi^\eta(y_1, y_2) \frac{\partial n^0}{\partial x_\eta} + \tilde{n}^1(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{II.3.51})$$

où les fonctions  $\chi^\eta(y_1, y_2)$  sont solutions des systèmes différentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \left( D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right) = \frac{\partial D(y)}{\partial y_\eta} & \text{dans} \\ \text{avec les conditions aux interfaces suivantes :} & \\ [[\chi^\eta]] = 0 & \\ [[D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \nu_\gamma + D(y) \nu_\eta]] = -\tilde{D}R \left[ -\tau_\gamma \tau_\zeta \frac{\partial^2 \chi^\eta}{\partial x_\gamma \partial x_\zeta} - \frac{1}{R} \nu_\eta + \frac{1}{R} \nu_\gamma \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right] & \text{sur } \Gamma \\ \chi^\eta(y) \text{ et } D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\eta} \text{ sont Y-périodiques} & \end{array} \right. \quad (\text{II.3.52})$$

Comme précédemment, nous pouvons montrer que ces problèmes admettent des solutions uniques dans  $W^*/\mathbb{R}$ , sous les conditions nécessaires et suffisantes  $L_\eta(v) = - \int_Y D(y) \frac{\partial v}{\partial y_\eta} dy - \int_\Gamma R \tilde{D} \nu_\eta v ds = 0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , qui sont bien satisfaites ici. De sorte que les fonctions  $\chi^\eta$  existent et sont uniques à des constantes additives près.

En supposant connues les fonctions  $\chi^\eta$ , le problème à l'ordre  $\varepsilon^0$  s'écrit donc :

*Ordre  $\varepsilon^0$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_\gamma^1}{\partial y_\gamma}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = -\frac{\partial q_\gamma^0}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial q_3^0}{\partial x_3} - \frac{\partial n^0}{\partial t} - \alpha(y)n^0 + \beta(y)N^0 \quad \text{dans } Y \\ q_\gamma^1 = -D(y)\frac{\partial n^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)}{\partial x_\gamma} - D(y)\frac{\partial n^2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)}{\partial y_\gamma} \\ [[n^2]] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ [[D(y)\frac{\partial n^2}{\partial y_\gamma}\nu_\gamma + D(y)\frac{\partial n^1}{\partial x_\gamma}\nu_\gamma]] = -R\left(\tau_\gamma\tau_\eta\frac{\partial^2 n^2}{\partial y_\gamma\partial y_\eta} + \tau_\gamma\tau_\eta\frac{\partial^2 n^0}{\partial x_\gamma\partial x_\eta} + \frac{\partial^2 n^0}{\partial x_3\partial x_3} + 2\tau_\gamma\tau_\eta\frac{\partial^2 n_1}{\partial x_\gamma\partial y_\eta} - \frac{\nu_\eta}{R}\frac{\partial n^1}{\partial x_\eta} - \frac{\nu_\eta}{R}\frac{\partial n^2}{\partial y_\eta} + \tilde{\alpha}n^0\right) \quad \text{sur } \Gamma \\ n^2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) \text{ et } q_\gamma^1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{array} \right. \quad (\text{II.3.53})$$

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^2 \in W^*/\mathbb{R} \\ a(n^2, v) = l(v) \quad \forall v \in W^*/\mathbb{R} \end{array} \right. \quad (\text{II.3.54})$$

où la forme linéaire est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} l(v) &= \left( \int_Y D(y) \delta_{\gamma\eta} v dy - \int_Y D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} v dy + \int_Y D(y) \chi^\eta \frac{\partial v}{\partial y_\gamma} dy \right) \frac{\partial^2 n^0}{\partial x_\gamma \partial x_\eta} \\ &\quad + \left( \int_Y D(y) v dy + \int_\Gamma \tilde{D} R v ds \right) \frac{\partial^2 n^0}{\partial x_3 \partial x_3} \\ &\quad + \left( \int_\Gamma \tilde{D} R \tau_\gamma \tau_\eta v ds - 2 \int_\Gamma \tilde{D} R \tau_\phi \tau_\gamma \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\phi} v ds + \int_\Gamma \tilde{D} \nu_\gamma \chi^\eta v ds \right) \frac{\partial^2 n^0}{\partial x_\gamma \partial x_\eta} \\ &\quad - \left( \int_Y \alpha(y) v dy + \int_\gamma R \tilde{\alpha} v ds \right) n^0 + \left( \int_Y \beta(y) N^0 v dy \right) - |Y| \frac{\partial n^0}{\partial t} \\ &\quad - \left( \int_Y D(y) \frac{\partial v}{\partial y_\gamma} dy - \int_\Gamma \tilde{D} \nu_\gamma v ds \right) \frac{\widetilde{\partial n^1}}{\partial x_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{II.3.55})$$

Ce problème admet une solution sous la condition nécessaire et suffisante  $l(v) = 0 \forall v \in \mathbb{R}$  qui fournit le problème homogénéisé annoncé à la proposition (II.3.6).

Lorsque la fibre est considérée comme non diffusive, la cellule de base représentative est une cellule constituée d'un domaine  $Y^*$  représentant la partie pleine occupée par la matrice et une cavité de rayon  $r = r_f$  représentant la

fibre non diffusive. Les coefficients de diffusion équivalents sont alors donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} D_{\gamma\eta}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ D_m |Y^*| \delta_{\gamma\eta} - D_m \int_{Y^*} \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} dy \right] + \frac{1}{|Y|} \left[ \int_{\Gamma} \tilde{D}R \left( \tau_\gamma \tau_\eta - \tau_\gamma \tau_\zeta \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\zeta} \right) ds \right] \\ D_{33}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ D_m |Y^*| + \tilde{D}R |\Gamma| \right] \\ D_{\gamma 3}^{hom} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.56})$$

En outre, nous pouvons constater que les coefficients  $D_{\gamma\eta}^{hom}$  sont des constantes calculées à partir des  $\chi^\eta$  solutions des problèmes élémentaires (II.3.52) posés sur la cellule de base par la relation suivante :

$$D_{\gamma\eta}^{hom} = \frac{1}{|Y|} a(\chi^\gamma - y^\gamma, \chi^\eta - y^\eta) \quad (\text{II.3.57})$$

avec

$$a(u, v) = \int_Y D(y) \frac{\partial u}{\partial y_\gamma} \frac{\partial v}{\partial y_\gamma} + \int_{\Gamma} \tilde{D}R \tau_\gamma \tau_\eta \frac{\partial u}{\partial y_\gamma} \frac{\partial v}{\partial y_\eta} ds \quad (\text{II.3.58})$$

Ce type de relation classique en homogénéisation périodique, F. Léné [127], permet de vérifier la symétrie des coefficients  $D_{\gamma\eta}^{hom}$  car  $a(u, v) = a(v, u)$ .

Le comportement homogénéisé s'obtient en pratique après résolution des problèmes cellulaires bidimensionnels en  $\chi^\eta$  qui nécessite une mise en oeuvre numérique. Cette résolution numérique passe par l'introduction d'un élément d'interface d'épaisseur nulle et qui possède un degré de liberté à chaque extrémité. On pourra consulter F. Léné [127] ou N. Le Bris [123] concernant la mise en oeuvre numérique du calcul des coefficients homogénéisés. Cependant, nous pouvons tout de même noter que le coefficient de diffusion longitudinal et les probabilités de piégeage et de dépiégeage des molécules d'eau sont explicites et ne nécessitent aucune résolution numérique au préalable.

Il est à noter également que les symétries matérielles de la cellule de base influeront sur les propriétés qui s'en déduisent au niveau du comportement équivalent. On peut ainsi établir les propositions suivantes :

**Proposition II.3.7** Si le composite est tel que sa cellule de base  $Y = ]0, Y_1[ \times ]0, Y_2[$  admet le plan de symétrie  $y_1 = 0$ , (ou  $y_2 = 0$ ) comme plan de symétrie matérielle, le milieu homogène équivalent est alors orthotrope. Par conséquent, le tenseur de diffusion homogénéisé est de la forme :

$$\begin{pmatrix} D_{11}^{hom} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{hom} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{hom} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.59})$$

**Proposition II.3.8** Si le composite est tel que sa cellule de base  $Y = ]0, Y_1[ \times ]0, Y_2[$  est invariante par rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  ou d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , le milieu homogène équivalent est alors isotrope transverse, c'est-à-dire que le tenseur de diffusion homogénéisé est de la forme :

$$\begin{pmatrix} D_{11}^{hom} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{hom} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{hom} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.60})$$

Nous ne démontrerons pas ici ce résultat qui pourra être obtenu en s'inspirant des travaux de F. Léné [127], et de Y. Chevalier [44].

### 2.2.3 Comportement diffusif équivalent en présence d'interfaces avec des propriétés de piégeage

Si l'on suppose que les interfaces sont plutôt des sites préférentiels de stockage des molécules d'eau, sans propriétés diffusives particulières, nous pouvons montrer, en suivant la même méthodologie que précédemment, que le comportement homogénéisé nous est donné par la proposition suivante :

**Proposition II.3.9** *Les équations du problème diffusif homogène équivalent sont données par :*

$$\begin{cases} \frac{\partial n^0}{\partial t} + \alpha^{hom} n^0 - \beta^{hom} N^0 + \operatorname{div} \mathbf{q}^0 = 0 \\ \mathbf{q}^0 = -D^{hom} \operatorname{grad} n^0 \end{cases} \quad (\text{II.3.61})$$

où les propriétés homogénéisées sont :

$$\begin{cases} \alpha^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y \alpha(y) dy + \int_{\Gamma} R \tilde{\alpha} ds \right] \\ \beta^{hom} = \frac{|1|}{|Y|} \int_Y \beta(y) dy \\ D_{\gamma\eta}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y D(y) \delta_{\gamma\eta} dy - \int_Y D(y) \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial y_{\gamma}} dy \right] \\ D_{33}^{hom} = \frac{|1|}{|Y|} \int_y D(y) dy \\ D_{\gamma 3}^{hom} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.62})$$

où les fonctions périodiques  $\chi^{\eta}$  sont solutions des problèmes cellulaires suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}} \left( D(y) \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial y_{\gamma}} \right) = \frac{\partial D(y)}{\partial y_{\eta}} \\ \text{avec les conditions sur l'interface } \Gamma \\ [[\chi^{\eta}]] = 0 \\ [[-D(y) \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial y_{\gamma}} \nu_{\gamma} + D(y) \nu_{\eta}]] = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.63})$$

### 2.2.4 Cas particulier du modèle de diffusion de Fick

Lorsque les constituants fibre, matrice et interface présentent un comportement de Fick, le comportement diffusif équivalent se déduit immédiatement des résultats précédents en faisant  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ . On a ainsi la proposition suivante :

**Proposition II.3.10** *Les équations du problème diffusif homogène équivalent sont données par :*

$$\begin{cases} \frac{\partial c^0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^0 = 0 \\ \mathbf{q}^0 = -D^{hom} \operatorname{grad} c^0 \end{cases} \quad (\text{II.3.64})$$

où les propriétés homogénéisées sont :

$$\begin{cases} D_{\gamma\eta}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y D(y) \delta_{\gamma\eta} dy - \int_Y D(y) \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial y_{\gamma}} dy \right] + \frac{1}{|Y|} \left[ \int_{\Gamma} \tilde{D} R \tau_{\gamma} \tau_{\eta} ds - \int_{\Gamma} \tilde{D} \tau_{\gamma} \tau_{\zeta} \frac{\partial \chi^{\eta}}{\partial y_{\zeta}} ds \right] \\ D_{33}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_Y D(y) dy + \tilde{D} R |\Gamma| \right] \\ D_{\gamma 3}^{hom} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.65})$$

où les fonctions périodiques  $\chi^\eta$  sont solutions des problèmes cellulaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \left( D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right) = \frac{\partial D(y)}{\partial y_\eta} \\ \text{avec les conditions sur l'interface } \Gamma \\ [[\chi^\eta]] = 0 \\ [[-D(y) \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \nu_\gamma + D(y) \nu_\eta]] = -\tilde{D}R \left[ -\tau_\gamma \tau_\eta \frac{\partial^2 \chi^\eta}{\partial y_\gamma \partial y_\eta} - \frac{1}{R} \nu_\eta + \frac{1}{R} \nu_\gamma \frac{\partial \chi^\eta}{\partial y_\gamma} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.3.66})$$

On retrouve le résultat obtenu par W. Benhamida *et al.* [19]. On peut noter en outre, que les expressions des coefficients de diffusion homogénéisés ainsi que les problèmes cellulaires en  $\chi^\eta$  sont identiques au cas du modèle de diffusion de Langmuir.

### 2.2.5 Interprétation des coefficients de diffusion homogénéisés

Nous cherchons ici à interpréter les coefficients de diffusion équivalents en tant que relations entre des grandeurs moyennes comme l'a proposé P. Suquet [175].

On introduit pour cela la notation suivante :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $Y$ , on désignera par  $\langle f \rangle_Y$  la moyenne de  $f$  dans  $Y$  :

$$\langle f \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy \quad (\text{II.3.67})$$

L'idée de la méthode des moyennes est d'imposer au volume microscopique  $Y$ , dans le cas d'un problème de diffusion, un gradient d'humidité moyen, appelé gradient d'humidité macroscopique  $\mathbf{G}$  (respectivement un flux moyen, dit macroscopique). Connaissant le comportement de ce volume élémentaire, que l'on suppose auto-équilibré, il résulte de ce gradient macroscopique imposé un flux (respectivement un gradient) microscopique dont on peut calculer la moyenne. On peut alors montrer de la même manière que pour les problèmes d'homogénéisation dans les milieux élastiques, que les coefficients de diffusion équivalents sont donnés par la relation qui relie le gradient macroscopique au flux macroscopique.

On peut alors énoncer le résultat suivant dans le cas d'un modèle de Fick :

**Proposition II.3.11** Si  $c(y)$  et  $\mathbf{q}(y)$  désignent les champs de concentration et flux microscopiques, solutions sur la cellule de base du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 & \text{dans } Y \\ \mathbf{q} = -D(y) \operatorname{grad} c(y) & \text{dans } Y \\ \langle \operatorname{grad} c(y) \rangle_Y = \mathbf{G} & \mathbf{G} \text{ vecteur donné} \\ [[c]] = 0 \text{ et } [[\mathbf{q} \cdot \nu]] = \tilde{D}R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) & \text{sur } \Gamma \\ \operatorname{grad} c(y) \text{ et } \mathbf{q} \text{ Y - périodique} & \end{array} \right. \quad (\text{II.3.68})$$

où  $\mathbf{G}$  est un vecteur constant donné.

et soit  $\langle \mathbf{q} \rangle_Y$  le flux macroscopique, les coefficients équivalents sont les coefficients qui relient le gradient d'humidité macroscopique au flux d'humidité macroscopique :

$$\langle \mathbf{q} \rangle_Y = -D^{hom} \langle \operatorname{grad} c(y) \rangle_Y = -D^{hom} \mathbf{G} \quad (\text{II.3.69})$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, cette approche demande de résoudre numériquement le problème (II.3.68) pour obtenir les coefficients de diffusion homogénéisés. Nous avons préféré adopter ici un principe simplifié d'homogénéisation, la méthode auto-cohérente qui diffère de l'homogénéisation périodique par la façon d'imposer le gradient de concentration macroscopique ou le flux d'humidité macroscopique au volume représentatif. Nous nous placerons dorénavant dans le cas de fibres non absorbantes qui nous intéressent ici.

## 2.3 L'approche auto-cohérente

### 2.3.1 Notations. Position du problème

La méthode auto-cohérente, consiste à décrire le composite par un volume représentatif à trois phases constitué de la fibre, la matrice et le matériau homogène équivalent. Ce troisième milieu possède les propriétés effectives homogénéisées du matériau composite. La concentration d'humidité macroscopique est alors imposée sur le bord du volume représentatif, c'est-à-dire à l'infini. On parle d'approche primale. L'approche duale consistera à imposer plutôt le flux d'humidité macroscopique. Dans ce paragraphe, nous étendons les résultats de R.M. Christensen [54] en conductivité thermique à un milieu diffusif à cavités avec des interfaces présentant des propriétés spécifiques.

Dans le cas considéré ici d'un composite unidirectionnel dans la direction  $e_3$ , le volume élémentaire représentatif peut se ramener à un volume élémentaire bidimensionnel. On notera ainsi  $Y_f$  la surface de rayon  $R$  occupée par la fibre que l'on considère comme étant non absorbante,  $Y_m$  la surface occupée par la résine,  $Y_{eq}$  par le milieu équivalent,  $Y$  la cellule composée de la fibre et de la matrice, et  $\Gamma$  l'interface entre la fibre et la matrice.

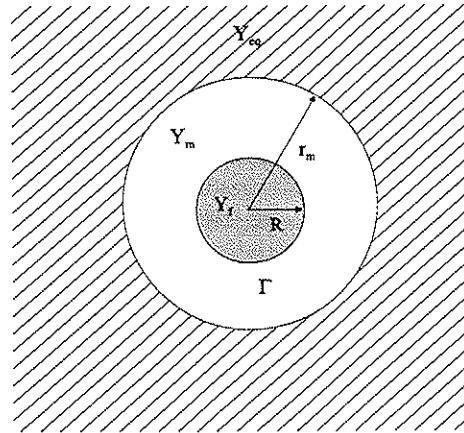


Figure II.3.4: Modèle cylindrique auto-cohérent à trois phases

On supposera que les constituants du composite sont homogènes et isotropes. Le coefficient de diffusion est donc constant dans la matrice.

### 2.3.2 Approche Primale

Le problème de diffusion posé sur le volume élémentaire associé au modèle auto-cohérent à trois phases s'écrit ici :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 & \text{dans } Y_m \cup Y_{eq} \\ \mathbf{q} = -D(y) \operatorname{grad} c(y) & \text{dans } Y_m \cup Y_{eq} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} c(y) = \eta_i y_i & \\ [[c]] = 0 \quad \text{et} \quad [[\mathbf{q} \cdot \nu]] = \tilde{D}R \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{II.3.70})$$

A ce problème devront s'ajouter des conditions aux limites pour que le problème soit bien posé.

Les coefficients de diffusion équivalents sont alors définis par :

$$\langle \mathbf{q} \rangle_Y = -D^{equi} \langle \text{grad}c(y) \rangle_Y \quad \text{avec } Y = Y_f \cup Y_m \quad (\text{II.3.71})$$

où nous écrirons dans le cas particulier ici de milieux avec cavités, F. Léné [127] :

$$\begin{cases} \langle \text{grad}c(y) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} c(y) \nu \, ds \\ \langle \mathbf{q} \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \mathbf{q} \cdot \nu \cdot \mathbf{y} \, ds \end{cases} \quad (\text{II.3.72})$$

En outre, nous avons d'après le principe du modèle à trois phases auto-cohérent (R.M. Christensen [54]), la relation suivante :

$$\langle \text{grad}c(y) \rangle_Y = \text{grad}c^{eq}(y) \quad (\text{II.3.73})$$

Par conséquent nous en déduisons la relation :

$$\langle \mathbf{q} \rangle = -D^{equi} \eta \quad (\text{II.3.74})$$

En utilisant la linéarité du problème cellulaire, nous allons pouvoir obtenir tous les coefficients en imposant successivement les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} c(y) = \eta y_3 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} c(y) = \eta y_1 \end{cases} \quad (\text{II.3.75})$$

ce qui revient à imposer un gradient de concentration macroscopique  $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}$  et  $\eta = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  où  $\eta$  est un scalaire.

**Premier cas de charge** On impose la condition suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c(y) = \eta y_3 \quad (\text{II.3.76})$$

Nous pouvons alors aisément montrer que la solution du problème cellulaire s'écrit :

$$c = \eta x_3 \quad \text{dans la matrice et le milieu équivalent} \quad (\text{II.3.77})$$

$$\mathbf{q} = \eta \mathbf{e}_3 \quad \text{dans la matrice et le milieu équivalent} \quad (\text{II.3.78})$$

$$(\text{II.3.79})$$

Compte tenu de la définition des coefficients effectifs, nous avons :

$$\langle q_3 \rangle_Y = -D_{33}^{hom} \eta \quad (\text{II.3.80})$$

soit donc en explicitant la moyenne sur  $Y$  de  $\mathbf{q}_3$ , nous obtenons :

$$D_{33}^{equi} = \frac{\tilde{D}R|\Gamma|}{|Y|} + (1 - \tau_f)D^m \quad \text{avec } \tau_f \text{ taux de fibres} \quad (\text{II.3.81})$$

**Remarque II.3.8** Cette expression (II.3.81) est identique à l'expression du coefficient de diffusion axial équivalent obtenu par la technique de l'homogénéisation périodique (W. Benhamida *et al* [19]).

**Second cas de charge** On impose maintenant la concentration d'humidité à l'infini suivante:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c(y) = \eta x_1 \quad (\text{II.3.82})$$

En utilisant le système de coordonnées cylindriques nous pouvons alors montrer que le champ solution est de la forme :

$$\begin{cases} c = \left( A_m r + \frac{B_m}{r} \right) \cos \theta & R \leq r \leq r_m \\ c = \left( A r + \frac{B}{r} \right) \cos \theta & r_m \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (\text{II.3.83})$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \left( A_m + \frac{B_m}{r^2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r - \left( A_m + \frac{B_m}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta & R \leq r \leq r_m \\ \mathbf{q} = \left( A + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r - \left( A + \frac{B}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta & r_m \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (\text{II.3.84})$$

où  $(A, B)$  et  $(A_m, B_m)$  sont des constantes.

La condition aux limites (II.3.82) conduit à :

$$A = \eta \quad (\text{II.3.85})$$

En outre, compte tenu du modèle auto-cohérent, nous avons la relation suivante :

$$\langle \mathbf{grad}c(y) \rangle_Y = \mathbf{grad}c^{eq}(y) \quad (\text{II.3.86})$$

ce qui nous donne en explicitant cette équation:  $B = 0$ .

Pour être solutions, les champs de concentration  $c$  et  $\mathbf{q}$  doivent satisfaire les conditions de continuité aux interfaces fibre-matrice et matrice-milieu équivalent, soit si l'on considère  $A_m$ ,  $B_m$ , et  $\eta$  comme les inconnues de ce système, nous avons :

$$\begin{cases} A_m r_m + \frac{B_m}{r_m} = \eta r_m \\ D_m \left( A_m - \frac{B_m}{R^2} \right) = \tilde{D} \left( A_m + \frac{B_m}{R^2} \right) \\ -D_{11}^{equi} \eta + D_m \left( A_m - \frac{B_m}{r_m^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.87})$$

Ce système admet une solution non nulle si son déterminant est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} D_m - \tilde{D} & -\frac{D_m}{R^2} - \frac{\tilde{D}}{R^2} & 0 \\ r_m & \frac{1}{r_m} - r_m & 0 \\ -D_m & \frac{D_m}{r_m^2} & D_{11}^{equi} \end{vmatrix} = 0$$

On obtient ainsi directement le coefficient de diffusion transversal équivalent :

$$D_{11}^{sup} = D_m \left( -1 - 2 \frac{\tilde{D} + D_m}{\tilde{D}(\tau_f - 1) - D_m(\tau_f + 1)} \right) \quad (\text{II.3.88})$$

où  $\tau_f$  est le taux volumique de fibres.

Nous pouvons donc écrire la proposition suivante :

**Proposition II.3.12** *Les coefficients de diffusion effectifs sont donnés par les expressions suivantes :*

$$\begin{cases} D_{33}^{hom} = \frac{\tilde{D}R|\Gamma|}{|Y|} + (1 - \tau_f)D_m \\ D_{11}^{hom} = D_m \left( -1 - 2 \frac{\tilde{D} + D_m}{\tilde{D}(\tau_f - 1) - D_m(\tau_f + 1)} \right) \end{cases} \quad (\text{II.3.89})$$

Une approche duale est également possible, et cette fois, c'est le flux macroscopique  $\mathbf{Q}$  qui est imposé sur le bord du volume représentatif. Les coefficients équivalents sont alors donnés par :

$$\langle \text{grad } c \rangle = -d^{equi} \mathbf{Q} \quad (\text{II.3.90})$$

Habituellement les approches primaire et duale des processus classiques d'homogénéisation conduisent à la relation  $D^{equi}.d^{equi} \neq 1$ , excepté en homogénéisation périodique. Dans le cas ici particulier de la diffusion, avec l'approche à trois phases auto-cohérente, la solution construite est la solution exacte du problème cellulaire de diffusion, et par conséquent on a  $D^{equi}.d^{equi} = 1$ .

**Remarque II.3.9** Si nous faisons  $\tilde{D} = 0$ , nous retrouvons alors les résultats de Z. Hashin [92] ou R.M. Christensen [54] développés dans le cas de la conductivité thermique en supposant un contact parfait entre la fibre et la matrice.

## 2.4 Résultats et Commentaires

Nous avons reporté sur la Figure [II.3.5] les évolutions du coefficient de diffusion transverse en fonction du taux de fibres provenant du calcul par homogénéisation périodique et du modèle explicite auto-cohérent. Des bornes inférieures et supérieures sont également données dont on trouvera les expressions dans P. Kanouté [113]. Ces bornes sont construites en suivant la même démarche que C. Pidéri [155] qui sera reprise au chapitre 3 pour le comportement hygroélastique. Cette dernière approche est une approche énergétique qui s'inspire des travaux de Z. Hashin et W. Rosen [95].

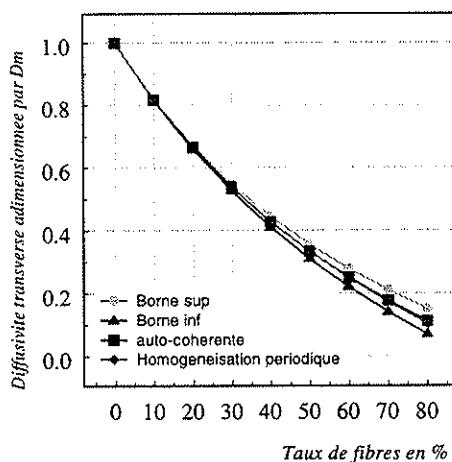


Figure II.3.5: Coefficient de diffusion transversal dans le cas d'une répartition des fibres hexagonale et pour  $\tilde{D} = 0$

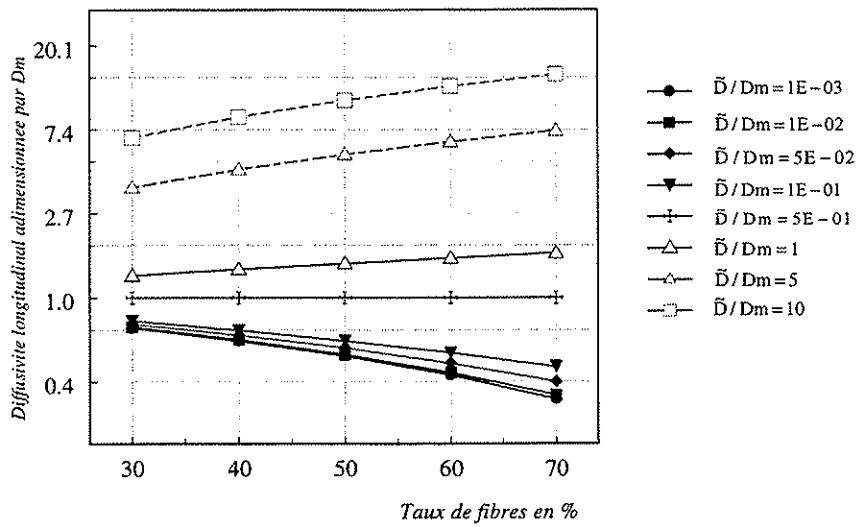


Figure II.3.6: Evolution du coefficient de diffusion longitudinal équivalent en fonction du taux de fibres pour différentes valeurs du coefficient de diffusion interfaciale  $\tilde{D}$

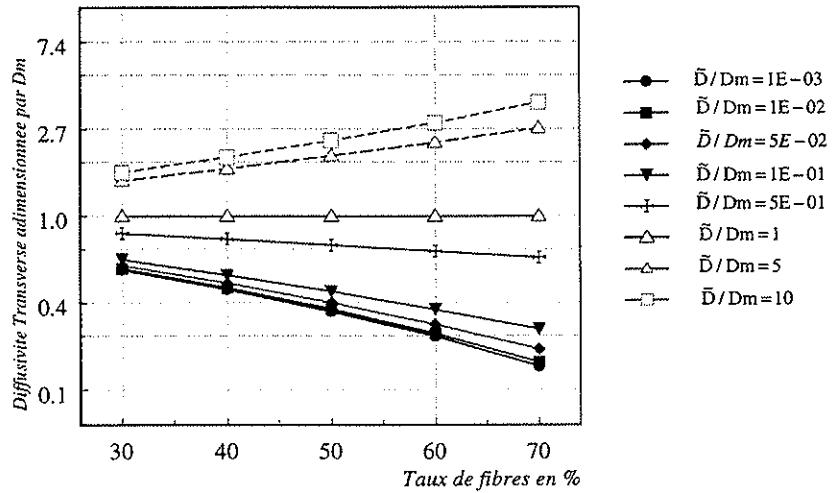


Figure II.3.7: Evolution du coefficient de diffusion transversal en fonction du taux de fibres pour différentes valeurs du coefficient de diffusion interfaciale  $\tilde{D}$

Nous pouvons remarquer principalement que les valeurs du coefficient de diffusion homogène obtenues par l'approche auto-cohérente et l'homogénéisation périodique sont bien comprises entre ces deux bornes. L'encadrement est d'autant meilleur que la fraction volumique en fibres est faible. Ainsi les bornes fournissent à moins de 3% le coefficient équivalent pour un taux de fibres de l'ordre de 20%. Enfin, nous pouvons constater la très bonne concordance obtenue entre l'approche auto-cohérente et celle de l'homogénéisation périodique. L'écart résultant entre les deux méthodes est de moins de 0.06% pour un taux de fibres de 50%. L'approche auto-cohérente fournit ainsi une très bonne approximation explicite du tenseur de diffusivité équivalent. La méthode auto-cohérente sera appliquée pour recaler la modélisation à l'expérimentation.

Nous pouvons apprécier le rôle de l'interface sur les Figures II.3.6 à II.3.8. En effet, nous pouvons noter que la prise en compte d'une interface diffusive permet d'accélérer sensiblement les phénomènes de propagation de l'humidité. Nous pouvons également noter que les fibres étant supposées non absorbantes, la perméabilité du

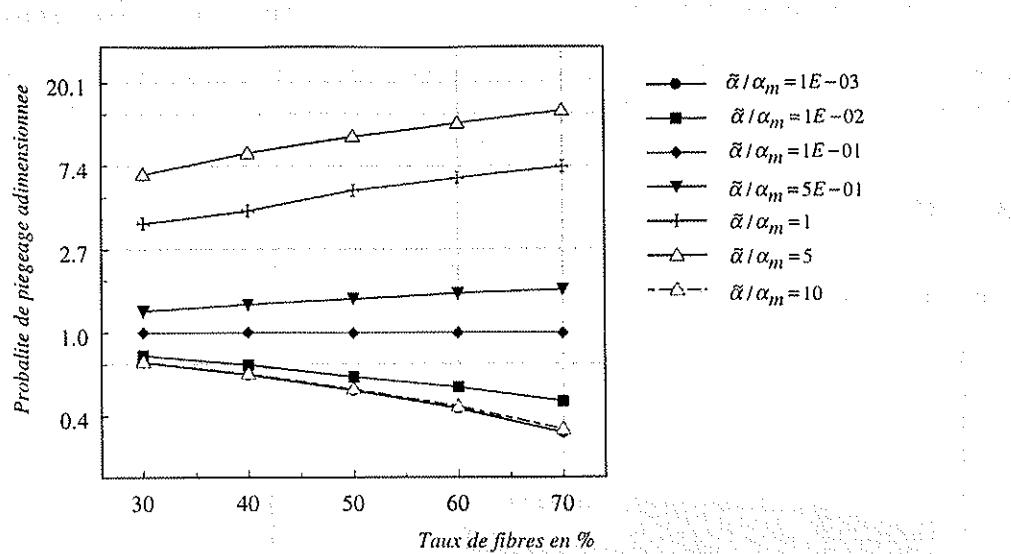


Figure II.3.8: Evolution de la probabilité de piégeage des molécules d'eau en fonction du taux de fibres pour différentes valeurs du coefficient de piégeage interfaciale

composite diminue avec le taux de fibres tant que les propriétés diffusives ou de piégeage des interfaces ont une influence plus faible que celle de la matrice. Cependant, ce rôle écran des fibres va diminuer progressivement avec l'importance de la diffusivité ou du stockage des molécules d'eau aux interfaces jusqu'à un état d'équilibre où le comportement équivalent est indépendant du taux de fibres. Au-delà de cet état d'équilibre, l'évolution, en fonction du taux de fibres des coefficients équivalents est inversée car c'est alors l'importance de la présence de régions d'interface entre les fibres et la matrice qui va modifier le comportement équivalent, ce qui explique cette augmentation des coefficients effectifs avec le taux de fibres.

### 3 Comportement homogène équivalent d'un composite stratifié

Nous cherchons maintenant à caractériser le comportement diffusif de stratifiés épais constitué d'un grand nombre de couches. Si ces stratifiés présentent une structure périodique dans leur empilement, on peut utiliser la technique de l'homogénéisation périodique comme cela a été fait au paragraphe 2.2.2.

#### 3.1 Hypothèses

Considérons donc un matériau stratifié constitué d'un grand nombre de couches s'empilant périodiquement suivant la direction  $e_3$  (voir Figure [II.3.9]).

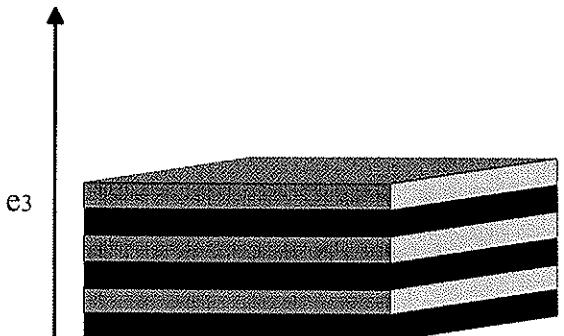


Figure II.3.9: La structure stratifiée hétérogène

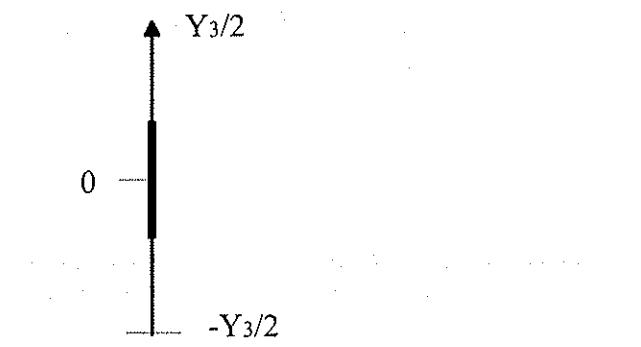


Figure II.3.10: La cellule de base

Le comportement diffusif des couches est supposé homogène et orthotrope. Les couches sont supposées en outre présenter un comportement de Langmuir avec des interfaces ayant des propriétés particulières traduites par la loi d'interface développée au paragraphe 2. On désigne par cellule de base  $Y = \prod_{i=1}^3 ]0, Y_i[$  une des périodes du matériau à l'échelle microscopique, de sorte que la période de la structure à l'échelle macroscopique est  $\varepsilon Y$ . Le comportement diffusif de la cellule de base  $Y$  est déterminé par la donnée des coefficients de diffusion des différents constituants et donc de :

$$D(y) = \{D_{ij}(y)\} \quad (i, j) \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{II.3.91})$$

définis sur la cellule de base  $Y$ .

Dans le cas particulier, d'une structure stratifiée à deux constituants au comportement diffusif homogène et orthotrope, les coefficients  $D(y)$  s'écrivent :

$$D(y) = \begin{pmatrix} D_{11}(y) & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}(y) & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}(y) \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.92})$$

avec

$$D_{ij}(y) = \begin{cases} D_{ij}^1 & \text{dans } Y_1 \text{ (pli inférieur)} \\ D_{ij}^2 & \text{dans } Y_2 \text{ (pli supérieur)} \end{cases} \quad (\text{II.3.93})$$

Dans le cas considéré ici d'un composite stratifié suivant la direction  $e_3$ , la périodicité du matériau est quelque chose dans les directions  $e_1$  et  $e_2$ . De sorte que l'on peut prendre par exemple comme cellule de base :  $Y = ]0, 1[\times]0, 1[\times]0, Y_3[$ . Les coefficients de diffusion à l'échelle microscopique sont alors seulement fonction de  $y_3$  et les coefficients locaux de diffusion du milieu hétérogène à l'échelle macroscopique  $D^\varepsilon(x)$  sont fonction de  $\frac{x_3}{\varepsilon}$ . Ces simplifications conduisent à raisonner en définitive sur la cellule de base unidimensionnelle  $Y = ]0, Y_3[$ .

### 3.2 Le comportement homogénéisé des stratifiés épais

Par des techniques de développements asymptotiques, on obtient comme précédemment le comportement homogénéisé lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous n'exposerons pas ici la démonstration des résultats d'homogénéisation, l'approche étant identique à celle utilisée précédemment.

**Proposition II.3.13** *Les équations du problème diffusif homogène équivalent dans le cas d'interfaces diffusives avec des capacités de stockage des molécules d'eau, sont données par :*

$$\begin{cases} \frac{\partial n^0}{\partial t} + \alpha^{hom} n^0 - \beta^{hom} N^0 + \operatorname{div} \mathbf{q}^0 = 0 \\ \mathbf{q}^0 = -D^{hom} \operatorname{grad} n^0 \end{cases} \quad (\text{II.3.94})$$

où les propriétés homogénéisées sont :

$$\begin{cases} D_{11}^{hom} = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} D_{11}(y_3) dy_3 + \tilde{D} |\Gamma|] \\ D_{22}^{hom} = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} D_{22}(y_3) dy_3 + \tilde{D} |\Gamma|] \\ D_{33}^{hom} = \frac{1}{\frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} \frac{1}{D_{33}(t)} dy_3} \\ \alpha^{hom} = \frac{1}{Y_3} dy_3 [\int_{Y_3} \alpha(y_3) + \tilde{\alpha} |\Gamma|] \\ \beta^{hom} = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} \beta(y_3) dy_3] \end{cases} \quad (\text{II.3.95})$$

**Remarque II.3.10** Le comportement diffusif équivalent d'un composite stratifié dans le cas uniquement d'un piégeage important des molécules d'eau entre les plis, est donné par le système d'équations (II.3.95) en faisant  $\tilde{D}=0$ .

**Remarque II.3.11** Les coefficients de diffusion homogénéisés dans le cas du modèle de diffusion de Fick d'un composite stratifié dont les interfaces conduisent l'humidité sont identiques au cas du modèle de diffusion de Langmuir et sont par conséquent donnés par l'équation [III.2.9].

### 3.3 Stratifiés minces

Dans le cas de stratifiés minces, on pourra, en considérant la théorie des plaques minces, déterminer les coefficients de diffusion équivalents dans le plan. L'application de la théorie des plaques va néanmoins être basée sur l'hypothèse qu'il n'y a pas de gradient d'humidité suivant l'épaisseur de la plaque. En effet, si l'humidité pénètre et se propage le long de l'épaisseur de la plaque, une représentation en deux dimensions des phénomènes de propagation de l'humidité au sein du matériau n'est alors plus valable.

Par conséquent, si l'on considère que l'humidité ne pénètre que suivant les bords latéraux du stratifié, on peut montrer par des techniques asymptotiques, le petit paramètre étant cette fois l'épaisseur de la plaque, que le

comportement homogène équivalent nous sera donné par :

$$\begin{cases} D_{11}^h = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} D_{11}(y_3) dy_3 + \tilde{D}|\Gamma|] \\ D_{22}^h = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} D_{22}(y_3) dy_3 + \tilde{D}|\Gamma|] \\ \alpha^{hom} = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} \alpha(y_3) dy_3 + \tilde{\alpha}|\Gamma|] \\ \beta^{hom} = \frac{1}{Y_3} [\int_{Y_3} \beta(y_3) dy_3] \end{cases} \quad (\text{II.3.96})$$

Dans le cas particulier du modèle d'absorption de Fick qui se déduit en faisant  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , on retrouvera les résultats de I. Bruant et H. Dumontet [29].

## II.4 Comparaison Modélisation-Expérience

Nous avons développé un modèle de prédiction permettant de déterminer le comportement diffusif de matériaux composites, suivant le modèle d'absorption à une phase de Fick, ou le modèle à deux phases de Langmuir. Ce modèle tient compte d'un éventuel rôle des interfaces sur le plan diffusif et sur leur capacité à piéger les molécules d'eau. L'objet de cette partie est donc d'analyser si cette modélisation permet une meilleure prédiction du comportement diffusif de composites que les modèles classiques. Pour cela les comparaisons porteront sur les échantillons où la pénétration de l'eau se fait perpendiculairement aux fibres et parallèlement aux fibres afin de confronter nos analyses sur les coefficient de diffusion transversal et longitudinal. Quant aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  indépendants de la directions des fibres, les valeurs théoriques obtenues par corrélation avec les valeurs expérimentales devront être identiques sur les deux types d'échantillons. Nous ne traiterons que le cas des composites unidirectionnels.

### 1 Cas du composite à base de résine époxyde

#### 1.1 Coefficients de diffusion

Nous avons représenté sur les Figures II.4.1 et II.4.2 la confrontation entre les évolutions des valeurs expérimentales de gain en poids en eau, et les évolutions obtenues en déterminant le coefficient de diffusion du composite à l'aide de modèles d'homogénéisation basés sur l'hypothèse d'un contact parfait ou plutôt diffusif aux interfaces. Ces résultats concernent les échantillons pour lesquels la pénétration de l'eau est parallèle et perpendiculaire aux fibres. Le coefficient de diffusion étant identique au cours des différents paliers, nous nous placerons au palier de 35% d'humidité relative.

Les valeurs des coefficients de diffusion expérimentaux des composites malgré un comportement non Fickien dans certains cas sont comparées d'une part aux valeurs obtenues avec les modèles de Springer et Hashin à partir de la donnée du coefficient de diffusion de la matrice obtenue expérimentalement dans la partie II du chapitre II. D'autre part, ces valeurs expérimentales sont également comparées aux valeurs fournies par les modèles développés précédemment intégrant les propriétés des interfaces

Nous pouvons ainsi constater comme nous l'avions déjà mentionné que les modèles de prédiction du coefficient de diffusion de Springer et Hashin, qui supposent un contact parfait entre la fibre et la matrice, sous estiment de façon non négligeable les coefficients de diffusion obtenues expérimentalement que ce soit dans la direction des fibres ou perpendiculairement aux fibres. Ces modèles sont donc insuffisants pour déterminer le comportement du composite à partir des caractéristiques de la résine.

En revanche, nous pouvons observer que la modélisation proposée intégrant le rôle diffusif des interfaces à travers un coefficient de diffusion interfacial  $\tilde{D}$  permet d'obtenir une très bonne corrélation avec les valeurs expérimentales de gain en eau du composite unidirectionnel T300/Epoxy 1808N. La valeur de  $\tilde{D}$  qui assure cette corrélation est  $\tilde{D} = 0.28$ . Il faut noter que cette valeur conduit à une très bonne confrontation expérimentale aussi bien lorsque la pénétration de l'eau se fait transversalement aux fibres que parallèlement aux fibres. Nous pouvons donc dire que l'introduction du rôle diffusif des interfaces dans le processus d'absorption conduit à une prédiction tout à fait satisfaisante du comportement diffusif du composite.

#### 1.2 Probabilités de piégeage et de dépiégeage

Les mesures expérimentales de gain en eau ont montré que le modèle de Langmuir s'appliquait le plus souvent pour les échantillons testés ici. Il est donc important également de pouvoir déterminer les coefficients de piégeage

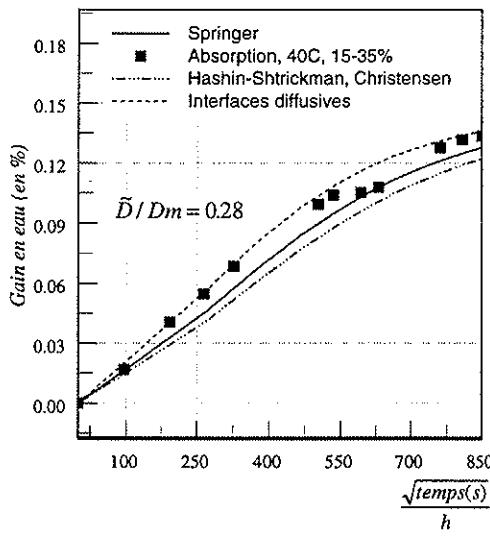


Figure II.4.1: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres. Taux de fibres de 49%.

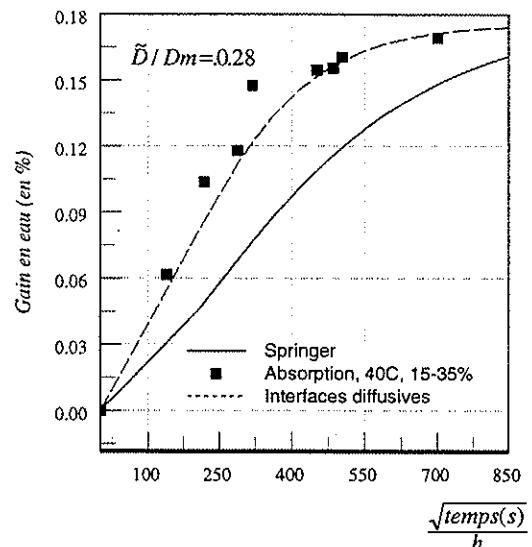


Figure II.4.2: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est parallèle aux fibres. Taux de fibres de 49%.

et de dépiégeage  $\alpha$  et  $\beta$  d'un matériau composite à partir de la donnée des caractéristiques de la matrice.

La modélisation retenue ici consistait à prendre en compte les éventuelles propriétés de piégeage des molécules d'eau aux interfaces dans le processus d'homogénéisation des probabilités de piégeage et de dépiégeage des molécules d'eau du matériau composite. On pourra se référer aux propositions (II.3.6) et (II.3.9) pour obtenir les expressions des probabilités de piégeage et de dépiégeage homogénéisés.

Nous allons donc ici cherché à voir si ces expressions homogénéisées permettent d'obtenir une bonne prédition du comportement du composite et si, en particulier, la prise en compte des propriétés de piégeage des interfaces est nécessaire. Pour cela, à partir des probabilités de piégeage et de dépiégeage obtenues expérimentalement pour la résine seule, nous déterminons tout d'abord les valeurs du composite unidirectionnel. Ainsi, dans le cas du composite unidirectionnel T300/Epoxy 1808N avec un taux de fibres de 49% et en ne considérant aucun stockage des molécules d'eau aux interfaces, les valeurs ainsi obtenues sont  $\beta = 1.11E - 07$  et  $\alpha = 9.23E - 08$ . Connaissant la solution du problème de Langmuir dans une plaque plane, on calcule les évolutions du gain en eau pour le composite ainsi considéré en tenant compte également des propriétés diffusives de l'interface caractérisées auparavant. Ces évolutions sont alors comparées aux résultats expérimentaux. Par recalage avec les résultats expérimentaux, nous pouvons déterminer les propriétés de piégeage des interfaces à introduire dans notre modélisation.

Nous avons représenté sur les Figures II.4.3 et II.4.4 les évolutions du gain en poids en eau obtenues expérimentalement et par modélisation pour le palier de 55% d'humidité relative (variation relative entre 35% d'humidité et 55% d'humidité) dans le cas où la pénétration d'humidité se fait parallèlement ou perpendiculairement aux fibres. Nous pouvons ainsi constater, que si l'on ne considère pas de propriétés particulières de piégeage des molécules d'eau, le gain en eau dans le matériau est sous-estimé très significativement, aussi bien lorsque la pénétration de l'eau se fait transversalement que perpendiculairement aux fibres. Par contre, en considérant une probabilité de piégeage des interfaces  $\tilde{\alpha}$  tel que  $\tilde{\alpha}/\alpha_m = 1.3$ , nous pouvons obtenir une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et provenant de la modélisation pour les deux types d'échantillons testés.

Nous avions pu constaté au palier de 85% que les phénomènes d'augmentation continue du gain en eau

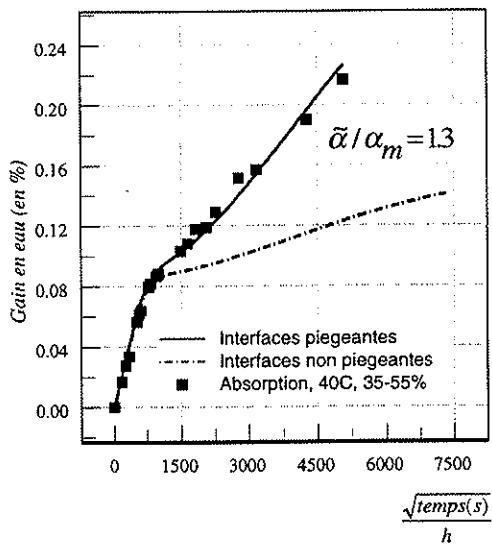


Figure II.4.3: Comparaison du modèle d'interface diffusive avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres. Variation relative de gain en eau de 35% à 55% d'humidité.

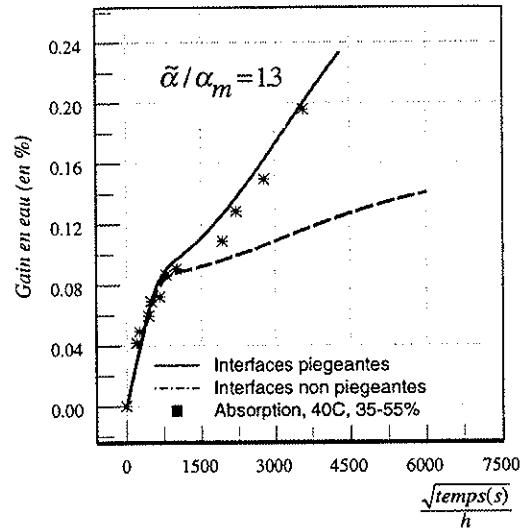


Figure II.4.4: Comparaison du modèle d'interface diffusive avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est parallèle aux fibres. Variation relative de gain en eau de 35% à 55% d'humidité.

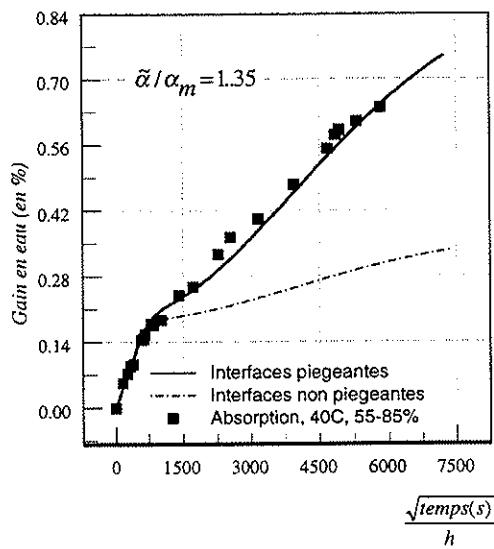


Figure II.4.5: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres. Variation relative de gain en eau de 55% à 85% d'humidité

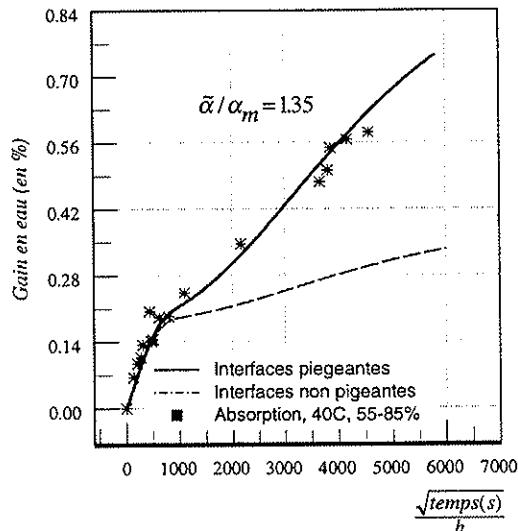


Figure II.4.6: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est parallèle aux fibres. Variation relative de gain en eau de 55% à 85% d'humidité.

étaient plus marqués qu'au palier précédent se traduisant par une augmentation de la probabilité de piégeage des molécules d'eau. A partir de la valeur ainsi obtenue à 85% la même analyse est réalisée, et permet de conclure à nouveau que la prise en compte des spécificités de l'interface permet d'obtenir une très bonne estimation du gain en eau dans le matériau composite. Il apparaît tout de même une augmentation de la probabilité de piégeage des molécules d'eau qui peut s'expliquer par la présence de phénomènes de décohésions interfaciales aggravant les phénomènes de stockage aux interfaces.

## 2 Composite à base de résine cyanate ester “Rosalie”

### 2.1 Coefficients de diffusion

Une analyse similaire a été réalisée également sur le composite à base de résine cyanate ester “Rosalie”. Il apparaît sur les Figures II.4.7 et II.4.8 également que la non prise en compte des propriétés diffusives à l'interface ne permet pas de prédire de manière correcte le comportement diffusif du composite. En introduisant de nouveau un coefficient de diffusion interfacial entre les fibres et la matrice, nous pouvons constater une très bonne corrélation entre les valeurs expérimentales et théoriques en considérant la même valeur de diffusivité interfaciale, pour une diffusivité de l'eau le long des fibres et transversalement aux fibres.

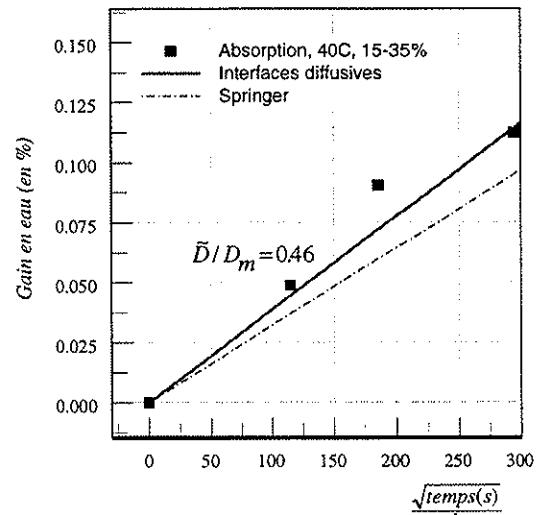
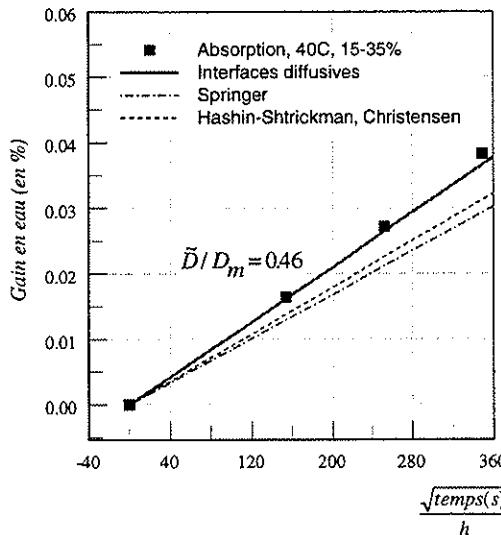


Figure II.4.7: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres. Variation relative de gain en eau de 15% à 35% d'humidité. Taux de fibres de 44%.

Figure II.4.8: Comparaison du modèle d'interface diffusive avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est parallèle aux fibres. Variation relative de gain en eau de 15% à 35% d'humidité. Taux de fibres de 44%.

### 2.2 Probabilités de piégeage et de dépiégeage

A partir des expressions homogénéisées des probabilités de piégeage et de dépiégeage des molécules d'eau, nous calculons les caractéristiques du composite. Les valeurs ainsi obtenues, en ne tenant pas compte d'un éventuel stockage important des molécules d'eau aux interfaces, sont  $\alpha = 1.39E-07$  et  $\beta = 9.24E-08$ . Les évolutions du gain en eau provenant de la modélisation et des résultats expérimentaux sont ainsi représentées sur les Figures II.4.9 et II.4.10. Contrairement au composite T300/Epoxy 1808N, nous pouvons constater une très bonne estimation de

l'évolution du gain en eau dans le composite T300/Cyanate ester Rosalie, en ne considérant aucune propriété importante de stockage des molécules d'eau à l'interface. Ceci peut s'observer à la fois pour une pénétration de l'eau perpendiculairement et parallèlement aux fibres. Dans le cas du composite T300/Rosalie, les interfaces ne semblent pas donc jouer de rôle significatif dans les processus de piégeage des molécules d'eau au sein du matériau composite.

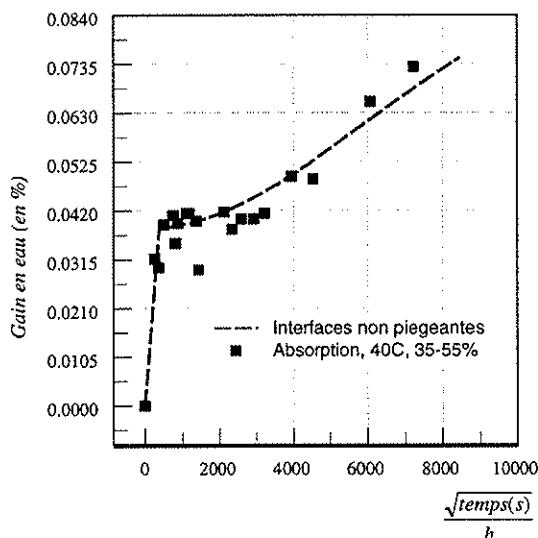


Figure II.4.9: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est perpendiculaire aux fibres.

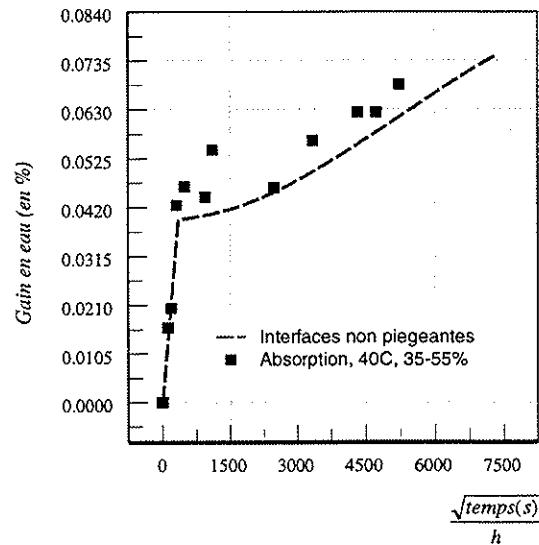


Figure II.4.10: Comparaison du modèle d'interface avec les résultats expérimentaux de gain en eau dans le cas où la pénétration d'humidité est parallèle aux fibres.

En conclusion, la modélisation proposée, nous a permis tout d'abord de développer un modèle de prédiction de la propagation d'humidité au sein de matériaux composites dans le cas du modèle d'absorption de Langmuir. La prise en compte du caractère fortement diffusif des interfaces nous a conduit à une très bonne corrélation entre les valeurs expérimentales et théoriques, contrairement aux modèles de prédiction des coefficients de diffusion de Springer et Hashin qui se sont avérés insuffisants. La valeur coefficient de diffusivité interfaciale caractérisé par confrontation expérimentale à partir des résultats de gain obtenus dans le cas où la pénétration de l'eau se fait perpendiculairement aux fibres, a été validée pour les deux composites testés T300/Epoxy 1808N et T300/Rosalie, à partir du second type d'échantillons où la diffusivité de l'eau se fait parallèlement aux fibres. Pour les deux composites testés, la diffusivité interfaciale s'est révélée avoir un rôle significatif sur le comportement hygroscopique.

La modélisation a permis également de mettre en évidence l'importance des propriétés de piégeage à l'interface sur le comportement hygroscopique du matériau composite T300/Epoxy 1808N testé ici. Dans le cas du composite T300/Rosalie, aucun phénomène préférentiel de piégeage des molécules d'eau aux interfaces n'a été caractérisé.



# **Chapitre III**

## **Comportement Hygroélastique de Matériaux Composites**



## III.1 Modélisation du comportement hygroélastique de matériaux composites : Bibliographie

La modélisation du comportement hygroélastique des matériaux composites a été abordée par différents auteurs cités dans la synthèse bibliographique de J.R. Vinson [182]. Comme nous l'avons présenté au paragraphe 2.3.1, deux formalismes ont été avancés pour expliquer les phénomènes de gonflement dans le matériau composite dus aux variations en humidité. Le premier repose sur l'idée que l'accroissement de volume est égal au volume d'eau absorbée. Le second est basé sur une linéarité entre le changement de volume et le pourcentage d'eau absorbée. Au vu de différentes études expérimentales (C.E. Browning [28], R. DeIasi et J.B. Whiteside [60]), ce second formalisme a été plutôt adopté dans la littérature. Ceci a ainsi permis de faire une analogie avec la thermoélasticité dans la caractérisation de la loi de comportement hygroélastique des matériaux.

### 1 Loi de comportement hygrothermoélastique

La détermination de la loi de comportement hygrothermoélastique d'un matériau peut se faire par l'approche de la thermodynamique des milieux continus qui consiste à rechercher les lois de comportement conduisant à des processus thermodynamiquement admissibles, par le biais du postulat de l'énergie libre massique, fonction des variables thermodynamique. Nous n'allons pas rappeler ici les détails de cette approche thermodynamique. Pour plus de renseignements, on pourra consulter notamment P. Germain [82], Y.C. Fung [79], J. Lemaître et J.L. Chaboche [126].

On se placera tout au long de cette présentation dans le cadre standard de l'hygrothermoélasticité linéaire. Pour cela, on admet l'existence d'un état de référence dénué de contrainte à température uniforme  $T_0$ , gain en eau uniforme  $m_0$  et à entropie spécifique uniforme ( $s=0$ ). Sous l'action d'un chargement hygrothermoélastique, le milieu atteint un nouvel état d'équilibre, défini par un déplacement  $\mathbf{u}$ , une température  $T$ , et un gain en humidité  $m$ . On suppose alors que l'écart de température  $\Delta T = T - T_0$  et de gain en eau  $\Delta m = m - m_0$  sont petits et que l'état de déformation et de déplacement du milieu par rapport à la configuration initiale est tel que l'on pourra se placer dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations. Ainsi, à un instant considéré, le milieu est défini par la connaissance de la température  $T$ , du gain en eau dans le matériau  $m$ , et du tenseur de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , partie symétrisée de la déformation limitée au premier ordre qui va s'écrire :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.1.1})$$

Toutefois, la connaissance des variables d'état  $(\boldsymbol{\varepsilon}, T, m)$ , ainsi que des lois de conservation ne suffisent pas à définir totalement le processus de transformations d'hygrothermoélasticité ; ceci se fait par l'intermédiaire d'une loi de comportement, conduisant à un processus thermodynamiquement admissible, c'est-à-dire dont les quantités introduites vont vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem, soit avec  $\sigma$  le tenseur de contraintes de Cauchy,  $\mathbf{q}$  le vecteur courant de chaleur :

$$\sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})}{dt} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \frac{\mathbf{q}}{T} \text{grad}T \geq 0 \quad (\text{III.1.2})$$

où  $\Psi$  est l'énergie libre spécifique définie par  $\Psi = e - Ts$  avec  $e$  l'énergie interne massique et  $s$  l'entropie spécifique et  $\rho$  la masse volumique. La somme des deux premiers termes :

$$\Phi_1 = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})}{dt} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) \quad (\text{III.1.3})$$

est appelée dissipation intrinsèque (ou dissipation mécanique). Le dernier terme de l'expression :

$$\Phi_2 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}T}{T} \quad (\text{III.1.4})$$

est la dissipation thermique par conduction. L'hypothèse classique de découplage des dissipations intrinsèque et thermique conduisent à :

$$\Phi_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2 \geq 0 \quad (\text{III.1.5})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem devant être vérifiée quel que soit  $\frac{d\varepsilon}{dt}$ , on est amené à postuler l'existence d'un potentiel thermodynamique, ce qui conduit en choisissant l'énergie libre spécifique comme potentiel d'état ( $\Psi(\varepsilon, T, m)$ ), à la relation :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial m} \frac{dm}{dt} \quad (\text{III.1.6})$$

On en déduit alors :

$$\sigma = \rho \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon} \quad \text{et} \quad s = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} \quad (\text{III.1.7})$$

Différentes caractérisations expérimentales seront alors nécessaires pour définir les relations quantitatives que devront vérifier les lois d'état pour être représentatives des phénomènes étudiés. Ainsi, il est couramment admis que l'énergie libre pour un matériau hygrothermoélastique linéaire peut être postulée sous la forme d'une expression quadratique des variables thermodynamiques  $T$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , et  $m$  suivante :

$$\Psi = a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} - a_{ijkh}\alpha_{kh}\varepsilon_{ij}\Delta T - \frac{1}{2} \frac{\rho c_e(T_0, m_0)}{T_0} (\Delta T)^2 - a_{ijkh}\beta_{kh}\varepsilon_{ij}\Delta m - h\Delta m\Delta T + \frac{1}{2}r(\Delta m)^2 \quad (\text{III.1.8})$$

où  $h$  et  $r$  sont des coefficients,  $c_e$  la chaleur spécifique à déformation constante,  $\alpha = \alpha_{ij}$  le tenseur de dilatation thermique,  $\beta = \beta_{ij}$  le tenseur d'expansion hygrométrique. On obtient alors respectivement :

- la loi de comportement du matériau

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}(m_0, T_0)(\varepsilon_{kh} - \alpha_{ij}(m_0, T_0)\Delta T - \beta_{ij}(m_0, T_0)\Delta m) \quad (\text{III.1.9})$$

- l'entropie massique

$$s = a_{ijkh}\alpha_{kh}(T_0, m_0)\varepsilon_{ij} - \gamma(T_0, m_0)\Delta T + h(T_0, m_0)\Delta m \quad (\text{III.1.10})$$

- la dissipation intrinsèque volumique

$$a_{ijkh}\beta_{kh}(m_0, T_0)\varepsilon_{ij} + h(m_0, T_0) - r(T_0, m_0)\Delta m \frac{\partial m}{\partial t} \quad (\text{III.1.11})$$

Le tenseur d'expansion hygrométrique, sans dimension, aura les mêmes propriétés de symétrie et de changement de base que le tenseur de dilatation thermique. Cette loi de comportement traduit une superposition des phénomènes de dilatation thermique et de gonflement hygrométrique. Elle va s'accompagner des équations de diffusion de la chaleur et de l'humidité.

## 2 Le tenseur d'expansion hygrométrique

Le tenseur d'expansion hygrométrique  $\beta$  est le tenseur de déformations correspondant à une variation unitaire du gain en eau en poids à une température donnée. On note :

$$\varepsilon_{ij}^{hygro} = a_{ijkh}\beta_{kh}\Delta m \quad (\text{III.1.12})$$

Sans dimension, ce tenseur est généralement exprimé par pourcentage de gain en poids en eau. Il traduit donc les propriétés de gonflement du matériau composite. Peu d'études expérimentales ont été réalisées sur la caractérisation des différents coefficients de gonflement dans les matériaux composites, du fait de la difficulté de ce type de mesures. Elles supposent effectivement que le gain en eau est uniforme dans le matériau, ce qui sous-entend un taux d'humidité uniforme dans le milieu, et que l'état de contraintes et la température sont constants, conditions difficiles à établir, spécialement simultanément. En outre, l'obtention d'une concentration d'humidité uniforme dans un matériau composite nécessite des temps d'exposition très longs.

Travailler à une température élevée permet d'accélérer le processus de diffusion de l'humidité au sein du matériau composite, mais peut par contre faire apparaître des dégradations irréversibles, comme un changement de la structure du polymère, de la transition vitreuse, apparition de micro-fissures,...etc. Ainsi, pour une résine époxy la température maximale se situe à environ  $80^{\circ}C$  pour une résine époxy. L'influence des paramètres comme la température et l'humidité relative dans le milieu ambiant sur les propriétés de gonflement dans les matériaux composites sont peu connus. Cependant, il est couramment admis dans la littérature, que le tenseur d'expansion hygrométrique est indépendant de la température et de l'humidité relative dans le milieu ambiant tant que des dégradations provoquées par les sollicitations climatiques ne sont pas intervenues. Une fois, le coefficient de gonflement de la résine caractérisé, on peut estimer les coefficients de gonflement des composites à l'aide des modèles de prédiction classiquement utilisés en thermoélasticité.

### 3 Modèles de prédiction du comportement hygroélastique de matériaux composites à fibres unidirectionnelles

Les modèles de prédiction du comportement hygroélastique reposent sur l'analogie entre les phénomènes hygroélastiques et thermoélastiques au niveau du formalisme des équations. De sorte que les techniques classiques d'homogénéisation utilisées avec profit en thermoélasticité conduisent à des modèles prédictifs du comportement hygroélastique de matériaux composites.

Ainsi en 1968, R.A. Schapery [163], en se basant sur les méthodes énergétiques, obtient des expressions analytiques des coefficients de dilatation thermique. Un peu plus tard, B.W. Rosen et Z. Hashin [161] proposent dans le cadre des méthodes énergétiques des valeurs limites des coefficients de dilatation thermique, dans le cas de fibres isotropes et anisotropes, pour des composites à plusieurs phases. Ils expliciteront par la suite ces expressions pour un composite avec un arrangement de fibres aléatoire. W.J. Craft et R.M. Christensen [45] proposent des modules effectifs des coefficients de dilatation thermique pour des composites à renforts unidirectionnels avec des constituants quasi-isotropes, ou à renforts sphériques avec des composants isotropes. Ces modèles reposent ainsi sur une orientation aléatoire des fibres dans le plan, ou dans les trois dimensions. Un peu plus tard, C.C. Chamis [38], en écrivant un simple équilibre de forces, obtient des coefficients de thermoélasticité transversal et longitudinal pour des composites à fibres isotropes transverses.

La technique de l'homogénéisation périodique a également été utilisée pour déterminer le comportement homogène équivalent de composites thermoélastiques à fibres unidirectionnelles (G.A. Francfort [76], 77]). Dans cette dernière modélisation, la détermination du comportement homogénéisé passe par la résolution numérique de problèmes cellulaires posés sur la cellule de base. G. L'Hostis [131], un peu plus tard, obtient un encadrement des modules équivalents thermoélastiques en utilisant une méthode approchée d'homogénéisation périodique introduite initialement par C. Pidéri [155] dans le cadre de l'élasticité.



## III.2 Caractérisation expérimentale

Cette étude expérimentale a eu pour but de mettre en évidence les effets de l'humidité sur la stabilité dimensionnelle de structures en matériaux composites, ainsi que des dégradations éventuelles des propriétés mécaniques dues à une exposition en milieu humide. Nous avons donc cherché à mesurer le coefficient d'expansion hygrométrique, ainsi qu'à étudier l'influence de l'humidité ambiante sur l'évolution du module de Young. Les résultats obtenus sur les échantillons en carbone/carbone n'ont pas été présentés ici, la précision de l'appareillage n'ayant pas été suffisante compte tenu de la taille des échantillons pour en dégager des conclusions.

### 1 Techniques et méthodes expérimentales

#### 1.1 Principe des mesures de déplacements différentiels: métrologie

Soit un échantillon de dimension initiale  $L_0$  suivant la direction x, et de nouvelle dimension  $L$  après une variation hygrométrique. Le coefficient de gonflement dans la direction x est donné par définition même :

$$\beta = \frac{L - L_0}{L_0} (\Delta M_s)^{-1} \quad (\text{III.2.1})$$

où  $\Delta M_s$  est la variation du gain en poids en eau exprimé en pourcentage après une variation du taux ambiant d'humidité relative. Dans cette expression, il est supposé d'une part que le gain en eau est uniforme dans la structure, donc que l'on est à saturation, et d'autre part, que la température est constante.

Par conséquent la mesure du coefficient de gonflement ont consisté en des contrôles de déformations générées par des variations d'humidité ambiante. Plus précisément, nous avons effectué des mesures de déplacements à l'aide d'un dispositif de métrologie.

##### 1.1.1 Description du dispositif expérimental

Les échantillons testés pour ces mesures dimensionnelles sont les mêmes que ceux utilisés pour les mesures de gain en eau, afin de pouvoir définir précisément l'état de saturation des structures. Quinze mires en laiton de forme cylindrique de 0.2mm de diamètre ont été placées comme éléments de références sur les plaques échantillons. Ces mires ont été posées avant la procédure de polymérisation des échantillons afin d'éviter d'avoir à utiliser une colle dont on ne connaît pas forcément le comportement sous des variations climatiques.

Le dispositif de métrologie disponible au CERN, présenté sur les Figures III.2.1, III.2.2, consiste en un dispositif optique 3 axes composé de :

- un marbre sur coussin d'air
- un microscope dont l'oeil de visée focal est de 35mm et la précision linéaire de 3 microns.

La mesure optique, consiste, à partir d'un référentiel défini à l'aide de trois mires, à déterminer les emplacements des autres mires, en venant positionner l'oeil de visée focal au centre de la mire pour en lire la position. Le contrôle des positions des mires pour une plaque dure en moyenne 45 minutes. Pour limiter les erreurs dans les mesures, il est important que les échantillons pendant ce temps soient dans les mêmes conditions climatiques que celles fixées pendant les mesures de gain en eau. Or dans l'atelier où se trouve le dispositif de métrologie, la température est effectivement contrôlée à 20°C toute l'année, mais il n'y a pas de système de contrôle de l'humidification. Une petite enceinte climatique a donc été réalisée au CERN, afin d'avoir un environnement contrôlé en température et en humidité pendant le transport des échantillons en métrologie et leurs mesures. Cette

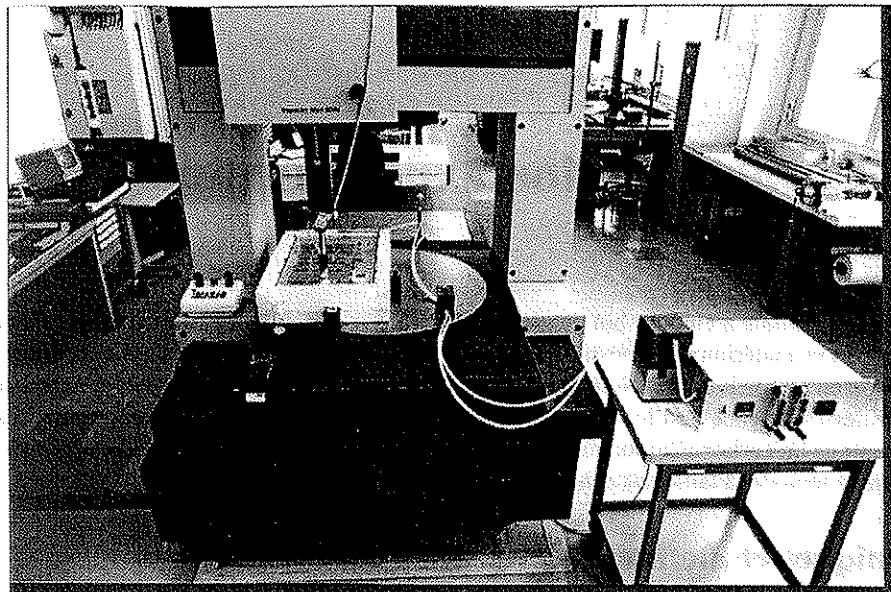


Figure III.2.1: Vue globale du dispositif optique utilisé pour les mesures de déformations hygrométriques

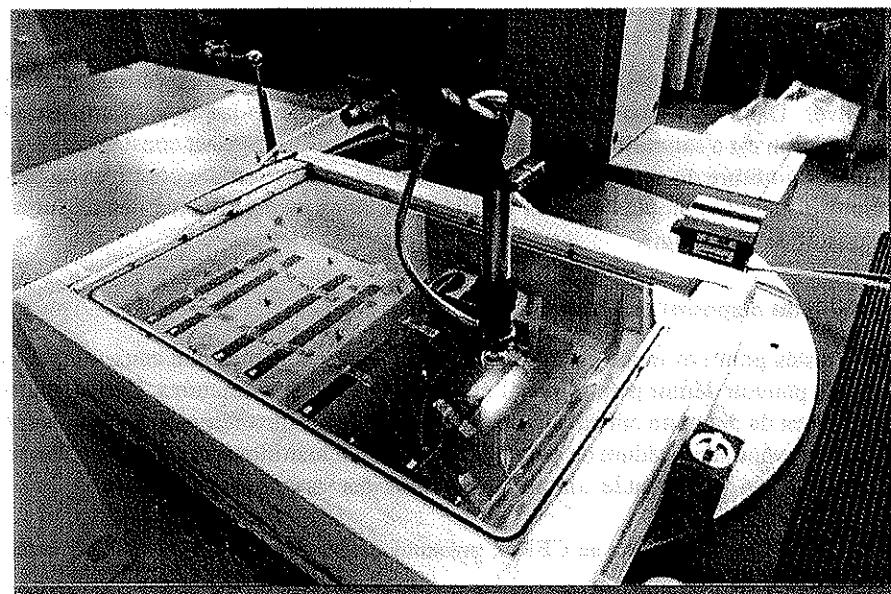


Figure III.2.2: Dispositif optique utilisé pour les mesures de déformations hygrométriques

petite enceinte climatique, que l'on peut voir posée sur la table de métrologie sur la Figure III.2.1, a un volume utile d'environ 6 litres. Elle est composée d'une boîte en anticorodal 100 (alliage composé d'aluminium, de silicium, et de magnésium) fermée par une plaque en plexiglas, et comporte un système de régulation thermique et en humidité. La boîte est isolée thermiquement pour éviter les pertes de chaleur importantes avec de l'anticorodal.

L'humidification se fait suivant le schéma représenté sur la Figure.

Le principe est de mélanger à une température donnée de l'air sous forme de vapeur sèche et d'air saturé dans

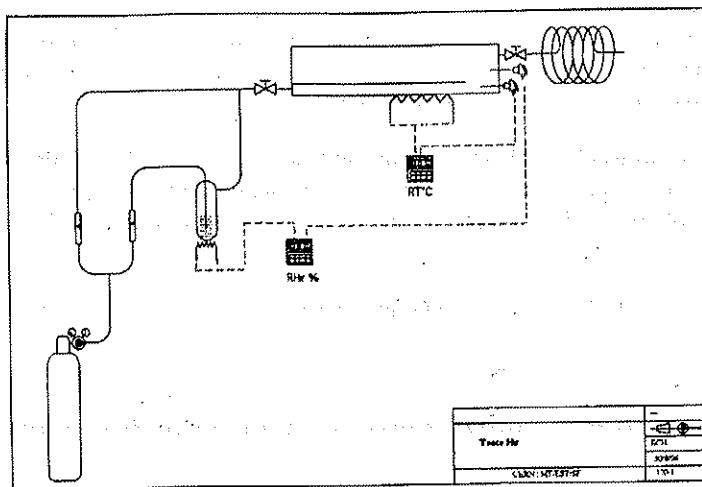


Figure III.2.3: Schéma du dispositif d'humidification de la petite enceinte climatique

des proportions qui permettront de définir le point de rosée et l'humidité relative souhaitée. Ce principe est basé sur le diagramme psychrométrique (ou de Mollier), qui en fonction de la différence entre la température dans l'air et la température de rosée, donne l'humidité absolue, la quantité en masse d'eau dans l'air et l'humidité relative dans l'air.

### 1.1.2 Conditions d'essais

Les mesures de déplacements se font lorsque le matériau a atteint un état de saturation en humidité afin d'avoir une uniformité de la concentration d'humidité dans l'échantillon. Les mesures de référence, qui consistent à définir les positions initiales des mires ont été réalisées à 15% d'humidité. Nous avons décidé de choisir ce palier comme niveau de référence car il est plus facile de maintenir un taux d'humidité de 15% dans la petite enceinte climatique qu'un taux de 0%. En outre, l'absorption d'humidité a pu être suivie jusqu'à saturation de l'échantillon, et ceci nous a ainsi permis de définir précisément le moment des mesures. Par la suite, les mêmes paliers que pour les mesures de gain en eau ont été considérés, soit successivement 35%, 55%, et 85%.

## 1.2 Dégradations mécaniques réversibles ou irréversibles

Nous nous sommes intéressés également à l'analyse de possibles dégradations pouvant influer sur le comportement mécanique des matériaux composites. Pour cela, nous avons cherché d'une part à contrôler les évolutions du module d'Young des résines afin d'analyser s'il apparaît des pertes importantes des propriétés physiques des résines après des variations climatiques sévères. Par ailleurs, des observations à l'aide d'un microscope électronique à balayage, ont également été réalisées afin d'étudier l'existence d'éventuels phénomènes de décohésions interfaciales.

### 1.2.1 Description du dispositif expérimental de flexion trois points

L'appareillage utilisé pour les mesures du module d'Young est une machine de flexion trois points. Les mesures ont été effectuées sur les résines pures, Epoxy 1808N et Cyanate Ester "Rosalie". Cinq échantillons ont été considérés pour chaque matériau testé.

### 1.2.2 Microscope électronique à balayage

A l'aide d'un microscope électronique à balayage, nous avons cherché à observer d'éventuelles dégradations au sein du matériau dus à des conditions variables en humidité. Le microscope électronique à balayage qui est utilisé au CERN est composé de trois détecteurs intervenant dans la fabrication de l'image :

- un détecteur d'électrons secondaires. Ce détecteur enregistre l'émission d'électrons secondaires "arrachés" à la surface de l'objet par le faisceau incident. La quantité d'électrons secondaires émis varie en fonction du relief rencontré et permet de reconstituer une image. La précision de ce détecteur est de  $5\text{nm}$ . Ce type d'analyse nécessite de travailler dans un vide poussé.
- un détecteur d'électrons rétrodiffusés. Lorsque le faisceau incident d'électrons percute la surface de l'objet, une partie de ceux-ci repartent en sens inverse et sont appelés rétrodiffusés. Ce type de détecteur permet de définir la morphologie ou de mettre en évidence les différentes phases de l'élément. La précision est alors de  $100\text{nm}$ .
- un analyseur de rayons X. Il donne l'énergie dissipée des rayons X et permet ainsi la qualification et la quantification des éléments.

## 2 Caractérisation des coefficients d'expansion hygrométrique

Nous allons nous intéresser dans cette partie à l'analyse des résultats expérimentaux concernant les variations dimensionnelles des différents échantillons testés. Tout particulièrement à partir de ces résultats, nous allons chercher à caractériser les coefficients d'expansion hygrométrique des différents matériaux testés.

### 2.1 Les résines pures

#### 2.1.1 Résine Epoxy

Nous avons représenté dans le tableau III.2.1 les déplacements maxima et minima mesurés sur les plaques en résine époxy testées. Ces déplacements correspondent à la variation de longueur entre deux mires. En effet, il ne serait pas cohérent de prendre comme référence pour le calcul des déplacements les variations de positionnement des mires étant donné que la plaque, ainsi que l'enceinte de contrôle, pourraient ne pas être placées de la même manière entre deux mesures optiques. Compte tenu de la précision de la l'appareillage de métrologie de  $3\mu\text{m}$ , la précision sur la mesure des déplacements est de  $6\mu\text{m}$ . L'orientation des axes par rapport aux plaques est donnée sur la Figure III.2.4:

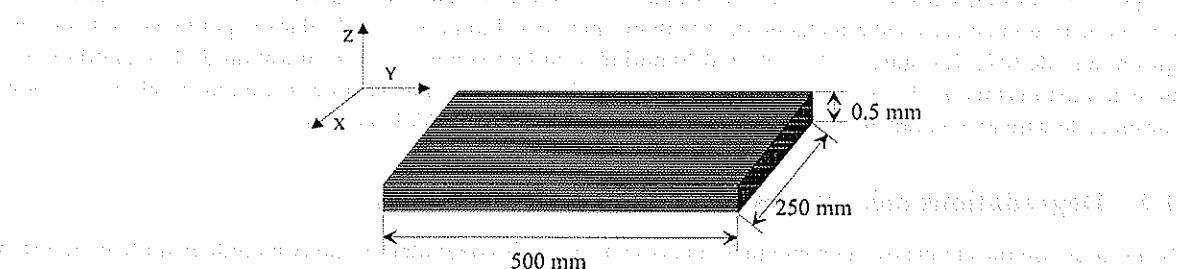


Figure III.2.4: Repère choisi

Nous avons noté avec une étoile les échantillons pour lesquels le nombre de mires analysées était plus faible car certaines mires qui s'étaient retournées pendant la phase de polymérisation, se sont avérées impossible à positionner correctement au microscopique électronique.

Les résultats des déplacements maxima et minima montrent une bonne répétabilité des évolutions et des ordres de grandeur des déplacements obtenus au cours des différents paliers entre les trois plaques testées. Nous pouvons par conséquent supposer que le système de mesures est fiable. En effet, nous pouvons constater sur ces trois plaques que les déplacements maxima sont du même ordre de grandeur au palier de 35% et 55% suivis d'une augmentation très nette au palier de 85% d'humidité. Au regard des observations faites sur les évolutions du gain en eau pour les plaques en résine époxy au palier de 85%, nous pouvons penser que cela serait dû à une augmentation très nette de la quantité d'eau absorbée au palier de 85% dans le matériau. De plus, on retrouve une assez bonne régularité dans les ordres de grandeur entre les déplacements selon les directions x et y. Les résultats ainsi obtenus sont par

Echantillons	$H = 35\%$			
	$ux_{max}(\mu m)$	$ux_{min}(\mu m)$	$uy_{max}(\mu m)$	$uy_{min}(\mu m)$
plaqué1	278	16	235	13
plaqué2*	91	16	108	9
plaqué3*	119	12	269	6
Echantillons	$H = 55\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaqué1	256	11	235	13
plaqué2*	147	10	135	10
plaqué3*	105	4	273	18
Echantillons	$H = 85\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaqué1	851	13	832	8
plaqué2*	433	8	434	7
plaqué3*	418	21	779	8

Tableau III.2.1: Déplacements minimums et maximums en microns dans les plaques en résine époxy de dimensions 250mm. Erreur maximum  $\pm 6\mu m$ .

conséquent cohérents avec le caractère homogène du matériau.

En ce qui concerne l'importance des phénomènes hygrométriques, les mesures ont mis en évidence des déplacements de 0.2mm à 0.8mm sur des plaques de dimension 250mm  $\times$  250mm  $\times$  1mm. Ces déplacements sont plutôt significatifs compte tenu des précisions attendues dans les expériences du LHC sur des structures de plusieurs mètres cubes. L'humidité a donc un effet non négligeable dont il faudra absolument tenir compte dans les études de conception des structures des détecteurs de particules.

Echantillons	$H = 35\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué1	1.02E-03	2.63E-03
plaqué2	9.47E-04	2.45E-03
plaqué3	1.01E-03	2.67E-03
Echantillons	$H = 55\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué1	1.05E-03	2.39E-03
plaqué2	1.22E-03	2.7E-03
plaqué3	1.03E-03	2.38E-03
Echantillons	$H = 85\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué1	3.39E-03	3.24E-03
plaqué2	3.66E-03	3.5E-03
plaqué3	3.19E-03	3.16E-03

Tableau III.2.2: Valeur moyenne de la déformation et du coefficient d'expansion hygrométrique exprimé par pourcentage de gain en eau — Erreur maximum de  $2E - 04$  sur le coefficient d'expansion.

A partir des déplacements relevés sur la plaque, nous pouvons calculer la moyenne du rapport  $\frac{\Delta L}{L_0}$  obtenus entre deux mires selon les deux directions du plan de la plaque, c'est-à-dire suivant x et suivant y. A partir de cette valeur moyenne, nous obtenons le coefficient d'expansion hygrométrique d'après la définition ??). Comme nous l'avions vu dans la description des techniques expérimentales, afin d'avoir une uniformité de la concentration d'humidité

dans le matériau, la valeur du gain en eau considérée généralement dans la littérature est la valeur à saturation, c'est-à-dire à l'état d'équilibre. Nous appliquerons cette méthodologie ici dans la mesure du possible. En effet, dans le cas d'un processus de diffusion de type Langmuir, nous avons pu constater que la détermination du gain en eau à saturation n'est pas toujours aisée et nécessite des temps d'exposition très longs. Afin de s'affranchir d'un facteur d'erreur, difficilement quantifiable, en estimant cette valeur par corrélation de l'évolution de la prise en eau avec le modèle de Langmuir, nous préférerons dans ce cas prendre comme valeur de gain en eau à saturation, la valeur du gain en eau mesurée dans le matériau au moment de la mesure optique, qui est réalisée lorsque l'on peut observer une amorce à la saturation dans le matériau. L'analyse et le contrôle de l'ordre de grandeur des écarts entre les différentes valeurs du rapport  $\frac{\Delta L}{L_0}$  relevées sur la plaque, nous permet alors de vérifier la fiabilité du coefficient d'expansion ainsi caractérisé.

Les erreurs relatives sur les coefficients hygrométriques observés proviennent de deux sources : d'une part de la précision de l'appareillage, qui est de  $3\mu m$  en linéaire sur le positionnement des mires; ce qui représente une erreur de  $6\mu m$  sur l'estimation de  $L$  ou  $L_0$  et d'autre part d'une perte de chaleur par la vitre en plexiglas, hélas inévitable conduisant à une baisse de température maximum de  $2^\circ C$  entre deux mesures. On peut donc calculer à chaque palier d'humidité considéré l'erreur relative sur la détermination du coefficient d'expansion hygrométrique d'après la définition III.2.1 où  $M_s$  est la valeur mesurée au moment de la mesure optique. L'erreur relative sur la détermination du gain en poids en eau étant quasiment négligeable (voir chapitre II), cela nous amène à un calcul d'erreur maximum sur la caractérisation du coefficient d'expansion de  $2E - 04$ , ce qui représente une erreur d'environ 7%.

Les valeurs des coefficients d'expansion hygrométrique obtenues pour les trois plaques testées sont reportées dans le tableau [III.2.2]. Les coefficients d'expansion sont donnés par pourcentage de gain en eau absorbé dans la plaque. Nous pouvons tout d'abord noter que les valeurs obtenues sont de l'ordre de grandeur de celles que l'on peut trouver dans la littérature pour une résine époxy (G.S. Springer [173], D.F. Adams [5], G.L. Farley et C.T. Herakovich [72]). Nous pouvons constater une bonne corrélation des valeurs obtenues pour les plaques 1 et 3. Les écarts avec la plaque 2 peuvent être dus au fait que cette plaque est plus épaisse que les deux autres,  $1.65mm$  contre environ  $1mm$  pour les deux autres. L'atteinte de l'état de saturation serait donc à priori plus longue, créant un décalage avec les autres échantillons étant donné qu'ils ont été mesurés à la même période (après une légère amorce de saturation dans le cas d'une diffusion de type Langmuir). En outre, le nombre de mires analysées étant plus faible que pour les plaques 1 et 3, on peut penser que la précision du calcul du coefficient d'expansion hygrométrique est moins bonne.

Alors que les valeurs du coefficient d'expansion hygrométrique sont comparables au palier de 35% et 55%, nous pouvons noter une augmentation très nette au palier de 85%. Plusieurs hypothèses peuvent alors être faites. Nous y reviendrons plus longuement au paragraphe 2.3.1

### 2.1.2 Résine Cyanate Ester

Nous allons retrouver les mêmes tendances pour les échantillons en résine cyanate ester en ce qui concerne les évolutions des déplacements maxima et des déformations au cours des différents paliers. On peut en effet constater une bonne similitude des maxima de déplacements entre les paliers de 35% et 55%, alors qu'à 85% les valeurs obtenues sont trois fois plus élevées. L'observation de la courbe de gain en eau à 85% présentée au paragraphe II.2.2.1.2 du chapitre 2 montre également que le gain en eau est plus important, ce qui explique en partie cette différence. Cette même tendance à l'augmentation au palier de 85% constatée sur les valeurs des coefficients d'expansion hygrométrique laisse néanmoins envisager d'autres explications. On pourrait en effet avancer les mêmes justifications que dans le cas de la résine époxy 1808N: mauvaise détermination du gain en eau à saturation, phénomènes d'hydrolyse qui seraient accrus par le fait qu'à 85% d'humidité, on est proche de l'état de saturation hygrométrique.

Nous pourrons noter également que le coefficient d'expansion hygrométrique, de l'ordre de grandeur de ceux annoncés par des fabricants comme Fiberite, Hexcel etc... est plus faible que dans le cas de la résine époxy 1808N. En effet, il est plus de 50% plus faible que celui de la résine époxy 1808N bien que les niveaux de gain en eau soient comparables. A une certaine hydrophobie de la résine cyanate ester "Rosalie" par rapport à la résine Epoxy 1808N, s'ajoute une bonne tenue dimensionnelle. Le gonflement des résines est décrit notamment par certains auteurs comme D.A. Shimp et B. Chin [169] comme étant la conséquence d'un entassement des molécules d'eau

Echantillons	$H = 35\%$			
	$ux_{max}(\mu m)$	$ux_{min}(\mu m)$	$uy_{max}(\mu m)$	$uy_{min}(\mu m)$
plaqué 1	91	10	128	6
plaqué 2*	123	14	143	16
plaqué 3*	115	13	141	7
Echantillons	$H = 55\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaqué 1	98	7	147	7
plaqué 2*	91	14	-	-
plaqué 3*	-	-	133	14
Echantillons	$H = 85\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaqué 1	388	5	360	8
plaqué 2*	286	8	-	-
plaqué 3*	-	-	435	18

Tableau III.2.3: Déplacements minimums et maximums dans les plaques en résine époxy en microns.

autour des sites de forte polarité, c'est-à-dire de dipôles forts. On peut donc dire que la bonne tenue dimensionnelle des résines cyanate ester s'explique en grande partie du fait d'une faible polarité des résines cyanate ester et d'une absence de liaisons hygrogènes (D.A. Shimp [168]). La résine cyanate ester Rosalie semble être par conséquent un meilleur choix en terme de stabilité dimensionnelle que la résine époxy 1808N. Cependant, il faudra rester prudent car pour ces échantillons en pure résine cyanate ester Rosalie, près du bord des plaques, des déformations dites "permanentes" sont apparues aux paliers de 55% et surtout de 85% d'humidité relative. Ces déformations n'ont pas été incluses ici dans notre analyse car elles semblent plutôt dues à des déformations des plaques sous leur propre poids, celles-ci étant positionnées verticalement et de faible épaisseur. On pourrait émettre plus particulièrement l'hypothèse d'un phénomène de fluage des échantillons sous leur propre poids. Le fait de travailler à 40°C et à des taux d'humidité élevés pendant des temps longs pourrait favoriser ce phénomène, qui ne serait pas détectable à température ambiante. Cela nous amène tout de même à faire quelques mises en garde sur la bonne tenue de cette résine en terme de choix pour les détecteurs du LHC.

Echantillons	$H = 35\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué 1	3.24E-04	9.12E-04
plaqué 2*	4.078E-04	1.11E-03
plaqué 3*	4.20E-04	1.15E-03
Echantillons	$H = 55\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué 1	4.31E-04	1E-03
plaqué 2*	3.28E-04	1.02E-03
plaqué 3*	3.64E-04	1.08E-03
Echantillons	$H = 85\%$	
	$\varepsilon$	$\beta$
plaqué 1	1.36E-03	2.30E-03
plaqué 2*	1.819E-03	2.90E-03
plaqué 3*	1.50E-03	2.48E-03

Tableau III.2.4: Déformation et coefficient d'expansion hygrométrique exprimé par pourcentage de gain en eau pour les plaques en cyanate ester testées. Erreur maximum sur le coefficient d'expansion de 2E-04.

## 2.2 Composites

L'analyse des effets de l'humidité au niveau dimensionnel, a porté sur des échantillons en composites stratifiés, et unidirectionnels. Les mêmes types d'analyses ont été réalisés. Cependant, le matériau n'étant pas homogène, nous obtiendrons un coefficient d'expansion dans la direction transversale aux fibres et parallèle aux fibres.

### 2.2.1 Cas des unidirectionnels

**Composite à base de résine époxy 1808N** Nous avons représenté dans les tableaux [III.2.5] et [III.2.6] les variations dimensionnelles obtenues sur les plaques unidirectionnelles en T300/Epoxy 1808N testées.

Echantillons	$H = 35\%$			
	$ux_{max}(\mu m)$	$ux_{min}(\mu m)$	$uy_{max}(\mu m)$	$uy_{min}(\mu m)$
plaque 1	132	6	26	1
plaque 2	163	9	35	1
plaque 3	118	2	25	6
Echantillons	$H = 55\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaque 1	182	5	17	3
plaque 2	164	3	34	3
plaque 3	175	8	21	
Echantillons	$H = 85\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaque 1	714	14	34	5
plaque 2	699	12	41	2
plaque 3	662	13	32	3

Tableau III.2.5: Déplacements minimums et maximums dans les plaques en composite T300/époxy 1808N en microns. Précision  $\pm 6 \mu m$ .

Echantillons	$H = 35\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	4.58E-04	2.54E-03	7.04E-06	4E-05
plaque2	4.38E-04	2.92E-03	5.45E-06	3.71E-05
plaque3	3.18E-04	2.68E-03	3.11E-05	2.62E-04
Echantillons	$H = 55\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	5.676E-04	2.83E-03	1.43E-05	7.43E-05
plaque2	5.97E-04	3.13E-03	1.25E-05	6.56E-05
plaque3	6.07E-04	3.79E-03	3.10E-05	1.94E-04
Echantillons	$H = 85\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	2.20E-03	4.58E-03	1.41E-05	5.93E-05
plaque2	2.07E-03	3.565E-03	2.68E-05	4.61E-05
plaque3	2.57E-03	5.53E-03	2.345E-06	5.037E-06

Tableau III.2.6: Valeurs moyennes des coefficients du tenseur de déformation et des coefficients d'expansion hygrométrique des échantillons en composite unidirectionnel T300/époxy 1808N.

L'erreur relative sur la caractérisation du coefficient d'expansion hygrométrique est de 1.5E-04 transversalement aux fibres et de 6E-05 parallèlement aux fibres. Il apparaît ainsi du fait de la précision de l'appareillage, que

l'erreur est importante dans le sens des fibres où les déplacements moyens sont de l'ordre de quelques microns. D'ailleurs, au vu de la littérature, le coefficient longitudinal est quasiment impossible à mesurer avec une grande précision avec ce type d'appareillage car augmenter la dimension de l'échantillon unidirectionnel dans le sens des fibres pose souvent le problème de la fragilité de manipulation de ce dernier.

Peu de données existent dans la littérature sur les coefficients d'expansion de composites unidirectionnels. On pourra consulter notamment E.G. Wolf [187] ou G. Romeo et al. [160] pour valider les ordres de grandeur obtenus ici pour le coefficient d'expansion transverse.

Nous pouvons noter une bonne répétabilité des évolutions des maxima des déplacements et des coefficients d'expansion mesurés entre les trois plaques au cours des différents paliers. Nous rappelons que les échantillons considérés ici varient en épaisseur et en taux de fibres, ce qui explique les écarts des valeurs prises par les coefficients d'expansion hygrométrique et nous permet de supposer sur la bonne fiabilité du système de mesures.

L'analyse de la réponse du matériau composite à des sollicitations hygrométriques en terme de stabilité dimensionnelle, au regard des tableaux [III.2.5] et [III.2.6], montre qu'elle est en grande partie contrôlé par la résine. Nous pouvons en effet constater sensiblement les mêmes évolutions pour le composite que celle de la résine. Cependant, contrairement aux échantillons en pure résine, l'augmentation du coefficient d'expansion hygrométrique est déjà observable sur certains échantillons au palier de 55% (voir paragraphe III.2.6).

**Composite à base de résine cyanate ester Rosalie** Nous pouvons noter d'après les tableaux III.2.7 et III.2.8 que les échantillons composite à base de résine cyanate ester Rosalie ont une meilleure tenue aux phénomènes d'expansion hygrométrique que les échantillons composite en résine époxyde comme cela a été observé sur les échantillons en résine seule.

Echantillons	$H = 35\%$			
	$ux_{max}(\mu m)$	$ux_{min}(\mu m)$	$uy_{max}(\mu m)$	$uy_{min}(\mu m)$
plaque1	39	1	25	1
plaque2*	77	10	15	3
plaque3*	44	2	19	9
Echantillons	$H = 55\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaque1	49	5	20	2
plaque2*	95	12	39	5
plaque3*	82	9	30	1
Echantillons	$H = 85\%$			
	$ux_{max}$	$ux_{min}$	$uy_{max}$	$uy_{min}$
plaque1	79	4	37	3
plaque2*	131	5	63	2
plaque3*	93	4	60	3

Tableau III.2.7: Déplacements minimums et maximums en microns dans les plaques en composite T300/cyanate ester 'Rosalie'.

Les données expérimentales concernant les composites à base de résine cyanate ester sont rares et proviennent presque tout le temps des fabricants. Cela provient de leur récente utilisation et également de leurs coûts. Néanmoins, nous notons que les ordres de grandeur relevés ici sont comparables à différents résultats expérimentaux présentés par Fiberite Europe.

Nous pourrons noter tout de même des valeurs du coefficient d'expansion hygrométrique bien plus élevées dans la direction parallèle aux fibres. Ceci est dû au fait que la valeur moyenne des déformations parallèlement aux fibres est égale aux ordres de précision des mesures, entraînant une caractérisation faussée du coefficient d'expansion longitudinal. En effet, transversalement aux fibres l'erreur maximum est de  $4E - 04$  et parallèlement aux fibres de

Echantillons	$H = 35\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	9E-05	1.61E-03	1.44E-05	2.58E-04
plaque2	9.3E-05	1.5E-03	1.27E-05	2.042E-04
plaque3	1.04E-04	1.83E-03	1.26E-05	1.87E-04
Echantillons	$H = 55\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	8.73E-05	1.34E-03	3.37E-05	5.14E-04
plaque2	9.53E-05	1.46E-03	3E-05	4.60E-04
plaque3	9.27E-05	1.37E-03	1.95E-05	2.89E-04
Echantillons	$H = 85\%$			
	$\varepsilon_T$	$\beta_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_L$
plaque1	2.67E-04	1.92E-03	2.11E-05	1.519E-04
plaque2	2.48E-04	1.68E-03	9.58E-06	6.52E-05
plaque3	2.12E-04	1.50E-03	3.43E-05	2.43E-04

Tableau III.2.8: Valeurs moyennes des coefficients du tenseur de déformation et des coefficients d'expansion hygrométrique exprimés par pourcentage de gain en eau pour les plaques en composite T300/cyanate ester 'Rosalie'

2E - 04.

Nous pouvons noter que, contrairement aux échantillons composites à base de résine époxyde, il n'y a pas d'augmentation significative du coefficient d'expansion hygrométrique au cours des différents paliers. Les maxima des déplacements sont certes 40% plus élevés au palier de 85% qu'aux autres paliers, mais cette augmentation semble être complètement compensée par celle de la quantité d'eau absorbée. Deux explications sont alors possibles. D'une part, nous pourrions penser que, contrairement aux échantillons composites à base de résine époxyde, il n'y a pas de phénomènes de décohésions interfaciales suffisamment significatifs pouvant interagir sur le gonflement hygrométrique du composite. Une seconde hypothèse pourrait être qu'il y a bien des décohésions aux interfaces mais dont le nombre et l'importance n'ont pas progressé au cours des différents paliers.

## 2.2.2 Cas des stratifiés

Nous avons représenté dans les tableaux [III.2.9] et [III.2.10] les variations dimensionnelles obtenues sur les plaques stratifiées testées. L'état de référence s'est fait au palier de 55% d'humidité ce qui explique que l'on n'ait qu'une seule valeur. L'erreur maximum sur le coefficient d'expansion transverse est de 2.7E-04 transversalement aux fibres, et de 3.3E-05 longitudinalement.

Echantillons	$ux_{max}(\mu m)$	$ux_{min}(\mu m)$	$wy_{max}(\mu m)$	$wy_{min}(\mu m)$
[0, -15, +15] <sub>s</sub>	368	10	-45	1
[0, -10, +10] <sub>s</sub>	383	9	-33	1
[0, -5, +5] <sub>s</sub>	389	17	15	2

Tableau III.2.9: Déplacements minimums et maximums dans les plaques stratifiées en microns.

Nous pouvons noter que l'on retrouve une bonne similitude des résultats suivant la direction x. L'influence de l'orientation des fibres est plutôt significative selon l'axe y. La seconde constatation qui peut être faite au regard des valeurs des coefficients d'expansion mesurés est que les stratifiés [0, -15, +15]<sub>s</sub> et [0, -10, +10]<sub>s</sub> tendent plutôt à se comprimer selon l'axe y, alors que le stratifié [0, -5, +5]<sub>s</sub> travaille plutôt en tension. Il apparaît donc qu'un choix judicieux de la disposition des plis permettra de minimiser dans certaines applications les déplacements par compensation des effets hygrométriques et mécaniques.

Peu de données existent dans la littérature sur ce type de stratifiés, cependant les valeurs des coefficients d'expansion hygrométrique obtenues ici, sont du même ordre de grandeur que ceux donnés dans la littérature (E.G. Wolf [187]).

Echantillons	$\varepsilon_T$	$\varepsilon_L$	$\beta_T$	$\beta_L$
[0, -15, +15] <sub>s</sub>	1.54E-03	-7.68E-05	3.91E-03	-1.938E-04
[0, -10, +10] <sub>s</sub>	1.68E-03	-1.35E-05	4.29E-03	-2.94E-05
[0, -5, +5] <sub>s</sub>	1.64E-03	1.12E-05	4.13E-03	2.55E-05

Tableau III.2.10: Valeurs moyennes des coefficients d'expansion hygrométrique exprimés par pourcentage de gain en eau et des coefficients du tenseur de déformation

## 2.3 Recapitulatif: Influence de l'humidité sur les propriétés de gonflement

### 2.3.1 Les résines pures

Nous avons représenté sur la Figure III.2.5 les valeurs des coefficients d'expansion hygrométriques obtenues pour chaque matériau. Les barres d'erreur désignent l'erreur relative venant de la précision du dispositif optique  $3\mu\text{m}$  en linéaire et d'une baisse maximum de la température de  $2^{\circ}\text{C}$  pendant la mesure, obtenue à chaque palier considéré.

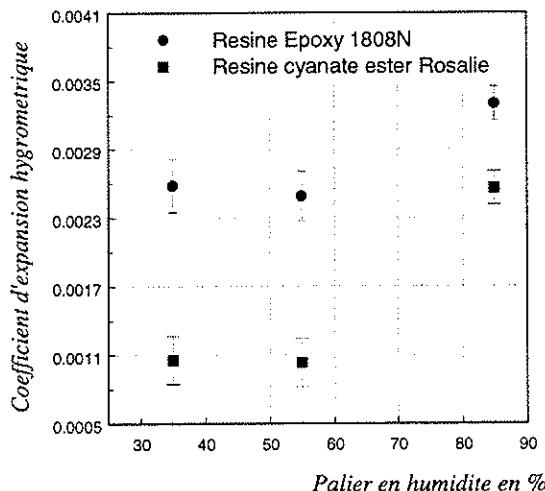


Figure III.2.5: Evolution du coefficient d'expansion hygrométrique au cours des différents paliers pour les résines epoxy 1808N et cyanate ester Rosalie.

Nous pouvons noter que les valeurs obtenues à 35% et 55% d'humidité sont sensiblement les mêmes. Par contre à 85% d'humidité, comme nous l'avions déjà noté, nous pouvons constater une augmentation très nette du coefficient d'expansion hygrométrique. Une explication serait, au regard des observations sur la prise en eau, qu'au moment de la mesure, le temps d'exposition était insuffisant et que par conséquent la valeur du gain à saturation considérée pourrait être bien en deçà de la valeur réelle. Il a été observé par différents auteurs dont D.S. Cairns et D.F. Adams [33], que pour les résines, le volume augmente linéairement avec la quantité d'eau absorbée au cours du palier d'absorption. On peut donc penser, que même si à 85%, au moment de la mesure optique, on n'était peut-être loin de l'état de saturation, la valeur du coefficient d'expansion ne devrait pas être très différente. On peut donc écarter l'hypothèse que cette augmentation du coefficient d'expansion hygrométrique puisse être due à une mauvaise prise en compte de l'état de saturation.

Une autre justification pourrait provenir de la présence de phénomènes d'hydrolyse plus marqués au palier de 85% d'humidité relative au sein du matériau. En effet, l'hydrolyse des polymères donne lieu à des coupures de chaînes moléculaires, qui se traduisent par un changement moléculaire du réseau. L'apparition de nouveaux sites de dipôles forts pourrait donc entraîner un nouvel entassement de molécules d'eau autour de ces zones induisant une augmentation plus grande du volume et donc du coefficient d'expansion hygrométrique. Le fait qu'à 85% d'humidité, on soit proche de la saturation hygrométrique c'est-à-dire de l'état de condensation, pourraient justifier un accroissement des phénomènes d'hydrolyse au palier de 85% d'humidité par rapport aux paliers précédents. En effet, le vieillissement dans l'eau de polymères est généralement accru et s'accompagne d'un risque plus grand de modification physique du matériau (B. De Nève [61], B. Dewimille [64]).

### 2.3.2 Les composites

Nous allons retrouver sensiblement les mêmes tendances pour les échantillons en composite que pour celles observées pour résine pures (voir Figure III.2.5).

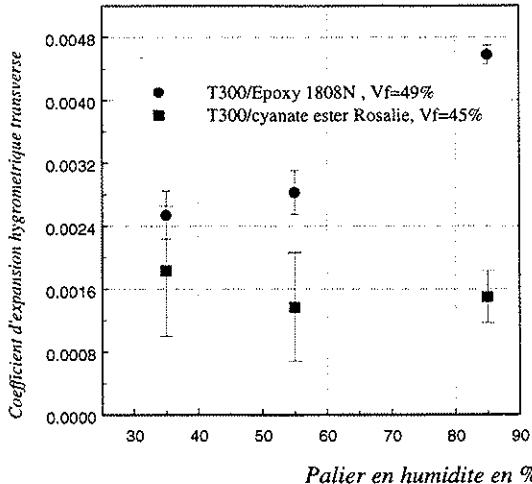


Figure III.2.6: *Evolution des coefficients d'expansion transverse pour les échantillons composites unidirectionnels à base de résine epoxy 1808N et cyanate ester Rosalie au cours des différents paliers.*

Dès le palier à 55%, on peut constater une augmentation du coefficient d'expansion hygrométrique des composites T300/Epoxy 1808N et T300/Rosalie contrairement au cas des résines pures. On est amené à penser que tout ce qui différencie le composite de la résine peut donc avoir une influence sur le gonflement hygrométrique du matériau. Les fibres de carbone étant considérées globalement dans la littérature comme non absorbantes et insensibles aux phénomènes de gonflement hygrométriques, on est amené à supposer que les interfaces entre les fibres et la matrice peuvent avoir un rôle dans ce processus. Notamment, on peut aisément envisager que des phénomènes de décohésions interfaciales entre la fibre et la matrice, du fait d'une perte d'adhésion, agravaient les phénomènes de gonflement hygrométrique du composite.

## 2.4 Comparaison modélisation/experience des coefficients d'expansion hygrométrique

La plupart des modèles de prédiction des coefficients d'expansion hygrométrique de composites unidirectionnels ou stratifiés considèrent un contact parfait entre la fibre et la matrice. Nous allons confronter ces modèles classiques aux résultats expérimentaux en comparant les valeurs obtenues théoriquement à partir de la donnée des coefficients d'expansion hygrométrique des résines pures aux valeurs expérimentales des composites. Dans le cas des échantillons stratifiés, la valeur utilisée sera celle fournie par le fabricant qui est de  $3.20E - 03/\%M$ . Les résultats expérimentaux étant clairement plus précis dans la direction transversale aux fibres, compte tenu de l'ordre des déplacements mesurés, la comparaison portera essentiellement sur le coefficient d'expansion hygrométrique transverse pour une analyse plus fiable. A titre indicatif, nous donnerons les valeurs obtenues pour le coefficient d'expansion longitudinal. Les valeurs des module d'Young et coefficient de poisson de la fibre et de la résine considérées dans le calcul théorique sont celles fournies par le fabricant. Les valeurs expérimentales sont comparées aux modèles de Hashin et Rosen [161] et de Schapery [163] pour les échantillons en composite unidirectionnel et à la théorie des laminés pour les échantillons stratifiés. On pourra consulter les ouvrages de J.M. Berthelot [22] et de P.K. Mallick [138] pour des précisions sur la théorie des laminés.

Enfin, nous nous plaçons au premier palier de mesures, c'est-à-dire à 35% d'humidité, les conclusions étant identiques aux autres paliers.

Nous pouvons constater, que pour tous les échantillons composite testés, les valeurs obtenues sont bien au dessus des valeurs théoriques et même au dessus des valeurs de la résine seule. La précision sur la détermination du coefficient d'expansion hygrométrique transverse allant de  $1.5E - 04/\%M$  à  $4E - 04/\%M$ , les erreurs provenant des mesures ne peuvent expliquer que très partiellement ces écarts. En effet, on peut retrouver ces mêmes tendances dans la littérature. Ainsi, H.T. Hahn et R.Y. Kim [87] caractérisent expérimentalement un coefficient d'expansion

Composite	Schapery	Hashin	Expérimental
UD T300/Epoxy 1808N (Vf=49%)	1.76E-03	1.72E-03	2.54E-03
UD T300/Cyanate ester 'Rosalie' (Vf=45%)	7.78E-04	7.72E-04	1.61E-03

Tableau III.2.11: Coefficient d'expansion hygrométrique transverse, exprimé par pourcentage de gain en eau, des composites unidirectionnels testés

Composite	Schapery	Hashin	Expérimental
UD T300/Epoxy 1808N (Vf=49%)	3.9E-05	3.84E-05	4E-05
UD T300/Cyanate ester 'Rosalie' (Vf=45%)	1.8E-05	1.73E-05	2.58E-04

Tableau III.2.12: Coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal, exprimé par pourcentage de gain en eau, des composites testés

Stratifiés	Théorie laminés	Expérimental
[0, -15, 15] <sub>s</sub>	1.63E-03	3.91E-03
[0, -10, 10] <sub>s</sub>	1.68E-03	4.295E-03
[0, -10, 10] <sub>s</sub>	1.70E-03	4.13E-03

Tableau III.2.13: Coefficient d'expansion hygrométrique transverse exprimé, par pourcentage de gain en eau, des composites stratifiés testés.

Stratifiés	Théorie laminés	Expérimental
[0, -15, 15] <sub>s</sub>	-3.23E-06	-1.938E-04
[0, -10, 10] <sub>s</sub>	-3.24E-06	-2.94E-05
[0, -10, 10] <sub>s</sub>	1.73E-05	2.55E-05

Tableau III.2.14: Coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal exprimé, par pourcentage de gain en eau, des composites stratifiés testés.

hygrométrique transverse de  $5.9E - 03 / \%M$  pour un composite unidirectionnel en fibres de carbone et résine époxy AS/3501-5, alors que le coefficient d'expansion de la résine pure est d'environ  $3.2E - 03 / \%M$ . De même J.C. Halpin relève un coefficient d'expansion hygrométrique dans la direction de l'épaisseur du stratifié de l'ordre de  $7E - 03 / \%M$  pour un composite laminé  $[0, 0, \pm 45]$  en fibres de carbone T300 et résine époxyde 5208, alors que les valeurs des coefficients d'expansion hygrométrique de résine époxyde se situe entre  $2E - 03 / \%M$  et  $4E - 03 / \%M$ .

Or, il est couramment admis dans la littérature, que les fibres de carbone ne sont pas sensibles aux phénomènes d'expansion hygrométrique. Ainsi, une première hypothèse qui peut être avancée est que les interfaces qui diffèrent la matrice du composite, pourraient jouer un rôle non négligeable dans les phénomènes de gonflement hygrométrique dans les composites. En particulier, la présence de décohésions aux interfaces entre les fibres et la matrice se traduisant par une perte d'adhésion en serait la cause. Ceci expliquerait donc que les modèles classiques qui supposent un contact parfait entre la fibre et la matrice soient insuffisants à décrire correctement les phénomènes de gonflement dans le matériau composite. L'importance des caractéristiques des zones de liaison, en particulier l'existence de phénomènes de décohésions interfaciales, dans la qualité du matériau composite, et donc

sur ses propriétés mécaniques des composites a déjà été avancée par de nombreux auteurs. On pourra consulter notamment sur le plan expérimental par D.S. Cairns et D.F. Adams [33], J.P. Favre [73], B. Dewimille [64], U. Gaur et B. Miller [81], R. Jacquemet [105], P. Bonniau [27].

Une autre explication pourrait être également envisagée. Il a été vu au chapitre 2 que les résines semblaient sensibles aux phénomènes d'hydrolyse. On pourrait donc envisager que la résine a subi des modifications chimiques importantes qui pourraient se traduire par une modification des propriétés élastiques de la résine, notamment par une chute du module d'Young. Les valeurs à introduire pour la matrice dans le calcul théorique du coefficient d'expansion hygrométrique pourraient alors être très différentes. L'objet du paragraphe suivant est donc d'analyser si une chute significative du module d'Young de la résine a pu se produire, et ce dès le palier de 35% d'humidité.

### 3 Influence de l'humidité sur le comportement élastique

Cette partie va s'axer sur l'analyse de l'influence de l'humidité sur le comportement des matériaux testés ici, en particulier des résines. Pour ce faire nous avons contrôlé l'évolution du module de Young de la résine à chaque palier en humidité.

#### 3.1 Evolution du module d'Young

Les mesures de module de Young ont été réalisées à l'aide d'une machine de flexion trois points. Cinq échantillons en résine pure de dimension  $20mm \times 80mm \times 1mm$ , placées dans les mêmes conditions hygrométriques que les plaques testées, ont été analysés. Tous les échantillons ont été réalisés à partir des chutes de matière des plaques en résine et ont donc les mêmes caractéristiques que ces dernières.

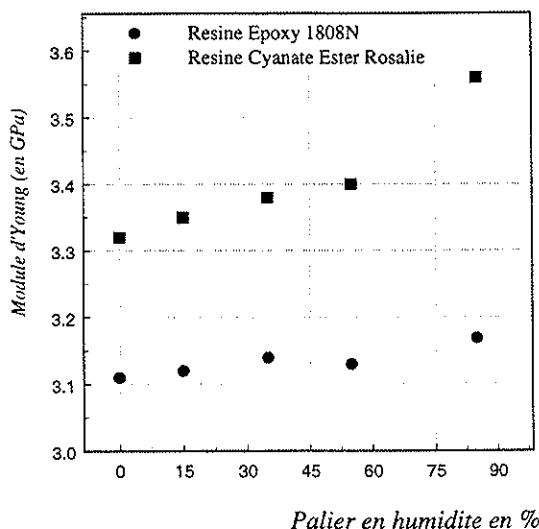


Figure III.2.7: Evolution des modules d'Young des résines epoxy 1808N et cyanate ester Rosalie au cours des différents paliers.

Nous avons représenté sur la Figure III.2.7 les évolutions à chaque fin de palier, du module d'Young des résines cyanate ester Rosalie et Epoxy 1808N. Ces caractéristiques sont obtenues en moyennant les valeurs mesurées sur les 5 échantillons. Les valeurs obtenues sont sensiblement les mêmes que celles fournies par le fabricant qui sont de  $3.2GPa$  pour la résine époxy 1808N et  $3GPa$  pour la résine cyanate ester Rosalie. Nous pouvons constater en outre que les valeurs restent sensiblement identiques. On peut noter néanmoins une très légère augmentation du module d'Young pour la résine époxy 1808N au palier de 85% d'humidité relative qui pourrait s'expliquer par un phénomène d'anti-plastification de la matrice résultant de réarrangements moléculaires provoqués par l'hydrolyse de la matrice. Ceci a d'ailleurs déjà été observé dans le cas de résines isophthalic polyester par E. Boinard et al. [25].

Les fluctuations ne sont néanmoins pas suffisamment significatives pour conclure à un véritable changement des propriétés élastiques du matériau. Ces écarts inférieurs à 7% ne peuvent pas expliquer les différences impor-

tantes observées entre valeurs théoriques et expérimentales des coefficients d'expansion hygrométrique. On peut donc écarter l'hypothèse que ces écarts soient dus à une modification des propriétés élastiques non prise en compte dans le calcul théorique.

### 3.2 Observations de décohésions aux interfaces

Afin de vérifier la présence de décohésions aux interfaces nous avons fait une observation au microscope électronique pour étudier la structure du composite. Ces observations ont été réalisées sur les chutes des pièces en composite unidirectionnel T300/Epoxy 1808N et T300/Rosalie testées. Ces échantillons ont été au préalable asséchés puis placés en humidité contrôlée dans l'enceinte climatique et analysés à la fin du palier de 55% d'humidité relative. Cette première observation constitue une des différentes analyses d'endommagement qui devraient se poursuivre pendant la continuation des tests au cours de l'année 1999.

Pour chaque composite unidirectionnel en question, nous faisons une observation le long des fibres et perpendiculairement aux fibres.

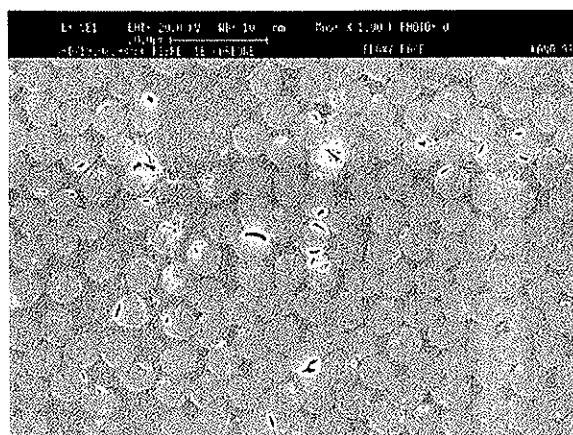


Figure III.2.8: Aspect général de l'échantillon en composite unidirectionnel à base de résine epoxyde.

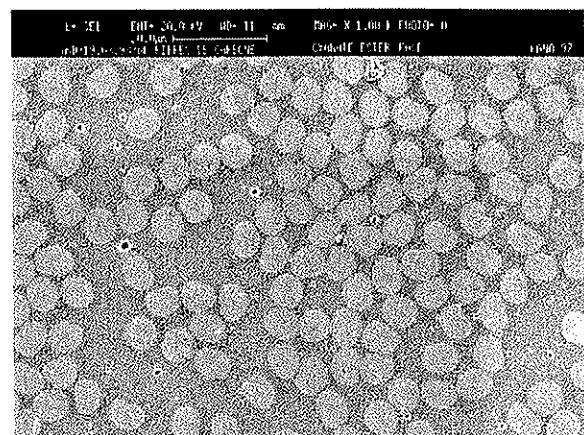


Figure III.2.9: Aspect général de l'échantillon en composite unidirectionnel à base de résine cyanate ester.

L'observation globale de la structure des échantillons comme nous pouvons le voir sur les Figures III.2.9, III.2.8, III.2.10 et III.2.11 n'a pas montré de fissures ou de macro défauts apparents. On peut apercevoir néanmoins des porosités qui sont malheureusement invéitables pour des fabriques dans des fours classiques avec la technique du sac à vide. La pression utilisée dans une autoclave (utilisée le plus souvent lors de l'élaboration de pièces industrielles en composites) se situe généralement entre 3 et 6 bars.

Localement, nous avons pu observer en plusieurs endroits l'existence de décohésions aux interfaces entre la fibre et la matrice (voir Figures III.2.12, à III.2.15). Une explication déjà avancé par différents auteurs comme B. Dewimille, [64] ou P. Bonniau [27] est que ces décohésions sont la conséquence de phénomènes de gonflement différentiel entre la fibre et la matrice au cours des différentes sollicitations hygrométriques. Nous avons pu effectivement constater que l'eau provoque un gonflement de la résine qui est contrarié par les fibres. En effet, les fibres de carbone étant résistantes aux phénomènes de gonflement, il se crée alors des contraintes importantes au niveau des fibres et de la matrice, se traduisant à la longue par une perte d'adhésion aux interfaces et l'apparition de décohésions. L'apparition et le développement des décohésions fibre-matrice ont plusieurs conséquences. Elles constituent surtout des zones d'amorce de fissures plus importantes et une voie de pénétration pour l'eau vers l'intérieur du matériau. On peut également raisonnablement penser que ces ruptures de liaisons fibre-matrice entraîneront une modification des propriétés hygromécanique du matériau composite.

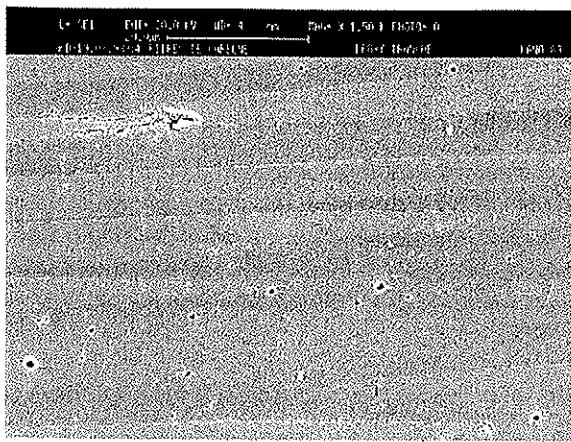


Figure III.2.10: *Aspect général de l'échantillon en composite unidirectionnel à base de résine époxyde.*

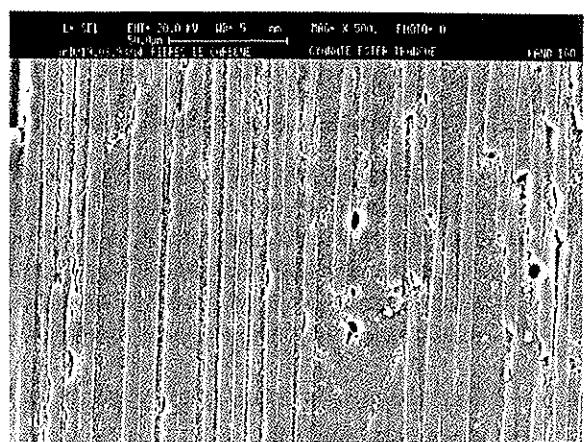


Figure III.2.11: *Aspect général de l'échantillon en composite unidirectionnel à base de résine cyanate ester*

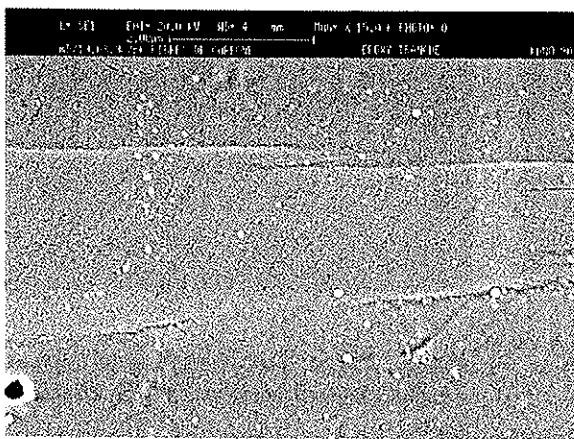
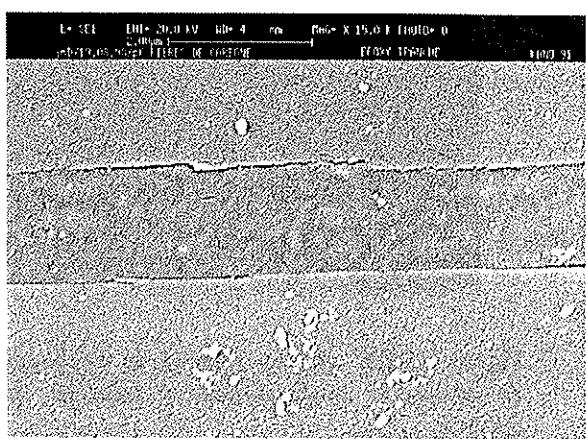


Figure III.2.12: *Observation des décohésions aux interfaces dans la direction parallèle aux fibres pour les échantillons en composite unidirectionnel à base de résine époxyde*



L'interface fibre-matrice apparaît donc comme le lieu essentiel des dégradations aucune dégradation n'ayant pu être constatée dans la résine. Les prochaines analyses permettront certainement de suivre les évolutions de la microstructure des composites et d'obtenir des précisions sur l'influence des variations hygrométriques (monotone ou cyclique) sur l'évolution de l'endommagement dans le composite. Des essais de fatigue, réalisés par P. Thevenin et al. [178] ont en effet montré pour un composite verre/époxyde une augmentation de la vitesse d'endommagement en fonction du temps d'absorption et une diminution du nombre de cycles à rupture.

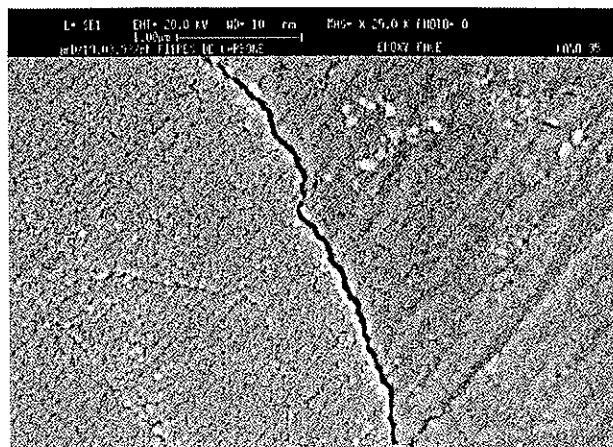
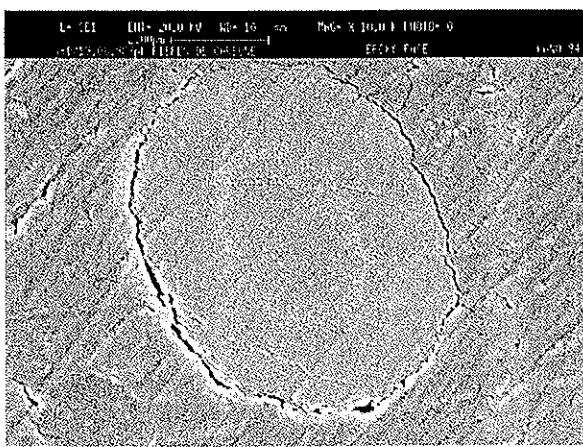


Figure III.2.13: *Observation des décohésions interfaciales dans la direction perpendiculaire aux fibres pour les échantillons composite à base de résine epoxy 1808N*

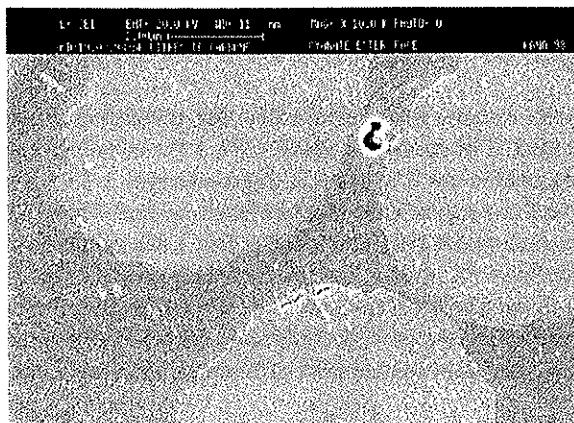


Figure III.2.14: *Observation des décohésions interfaciales dans la direction perpendiculaire aux fibres pour les échantillons composite à base de résine cyanate ester Rosalie.*

## 4 Récapitulatif

### 4.1 Choix de matériaux

Au vu des analyses des variations dimensionnelles des échantillons en résine pure et en composite, il est apparu que les échantillons à base de résine cyanate ester Rosalie présentaient une meilleure résistance aux phénomènes d'expansion hygrométrique que ceux à base de résine époxyde. Les variations dimensionnelles sont de 40% à 50% plus faibles. Il est à noter par ailleurs que dans le cas des échantillons en composite à base de résine cyanate ester, l'erreur sur les valeurs mesurées est plus élevée que pour les composites à base de résine époxyde, il faut donc rester prudent sur ces chiffres. A une certaine hydrophobie de la résine cyanate ester "Rosalie" par rapport à la résine Epoxy 1808N constatée au chapitre 2, s'ajoute une bonne tenue dimensionnelle. Une des explications à ce relativement bon comportement des résines cyanate ester semble provenir en grande partie du fait de la faible polarité et présence de liaisons hyrogènes de ces résines.

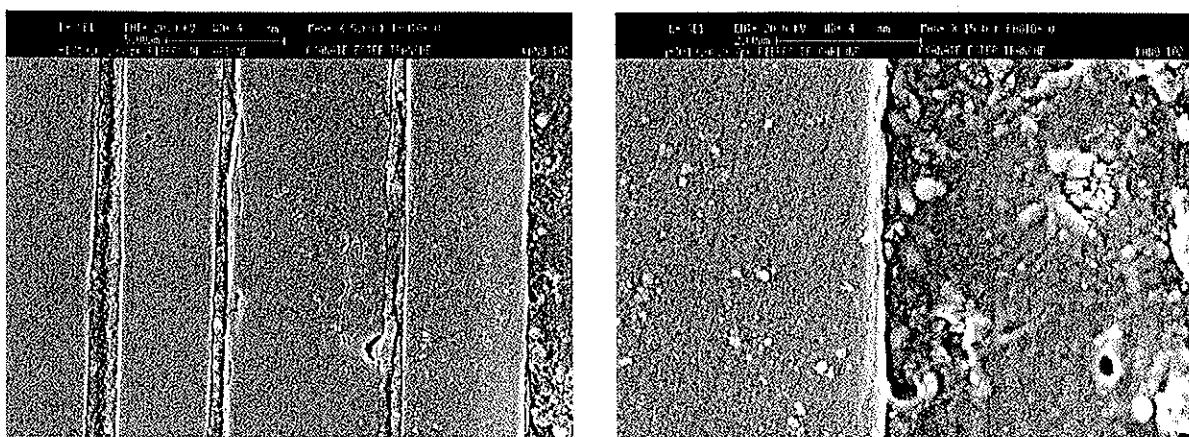


Figure III.2.15: *Observation des décohésions interfaciales dans la direction parallèle aux fibres pour les échantillons composite à base de résine cyanate ester Rosalie.*

## 4.2 Influence de l'humidité sur les propriétés du matériau

Nous n'avons pas pu mettre en évidence une influence significative de l'humidité sur le module d'Young des résines cyanate ester Rosalie et epoxy 1808N. Les écarts maximums constatés sont d'environ 6%, ce qui peut être supposé comme peu significatif.

Par contre, au niveau du coefficient hygrométrique, comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'influence de l'humidité semble être très significative lorsque le taux d'humidité est élevé. On a pu constater sur tous les échantillons testés une augmentation significative du coefficient d'expansion hygrométrique à 85% d'humidité. Une explication serait qu'à 85% d'humidité, du fait que l'on est proche de la saturation hygrométrique, l'importance des effets d'hydrolyse pourrait y être accrue. Or, l'hydrolyse des polymères donne lieu à des coupures de chaînes moléculaires, qui se traduit par un changement moléculaire du réseau. L'apparition de nouveaux sites de dipôles forts pourrait donc entraîner un nouvel entassement de molécules d'eau autour de ces zones entraînant une augmentation plus grande du volume et donc du coefficient d'expansion hygrométrique. On pourrait donc légitimement penser que les propriétés d'expansion hygrométrique d'un matériau seraient différentes selon qu'il est immergé dans l'eau ou dans un environnement humide.

## 4.3 Validité des modèles de prédiction de la littérature

Quels que soient les échantillons composites considérés, nous avons pu constater que les valeurs expérimentales étaient toujours supérieures à celles obtenues avec les modèles classiques de Hashin et Rosen, et Schapery ou par la théorie classique en 3D des laminés dans le cas des stratifiés. L'ensemble de ces modèles de prédiction qui supposent un contact parfait entre la fibre et la matrice ou entre les plis semble donc insuffisant pour décrire les phénomènes de gonflement dans les composites.

La présence de décohésions aux interfaces non prise en compte dans ces modèles classiques peut expliquer ces écarts. En effet, les observations au microscope électronique ont clairement montré l'existence de phénomènes de décohésions dans les zones d'interface entre les fibres et la matrice. Ces décohésions peuvent avoir diverses origines. Néanmoins de précédentes études expérimentales ont montré que les phénomènes de gonflement différentiel entre la fibre et matrice pouvaient en être la cause.

Par conséquent, il nous est apparu important de prendre en compte ces décohésions dans un modèle prédictif des propriétés hygroélastiques équivalentes que ce soit pour les composites unidirectionnels ou stratifiés. Nous allons donc dans la seconde partie de ce chapitre déterminer le comportement hygroélastique homogène de matériaux composites en tenant compte de la possibilité de glissements ou de décollements aux interfaces.

### **III.3 Modélisation du comportement hygroélastique de composites avec dégradations à l'interface**

Nous avons pu observer expérimentalement que l'absorption d'eau conduit à un gonflement de la résine. L'interface est donc fortement sollicitée par le phénomène de gonflement différentiel qui se produit entre la matrice et les fibres de carbone (qui n'absorbent pas d'eau).

Ces constantes sollicitations peuvent créer des pertes d'adhésion à l'interface se traduisant par des décollements et des glissements. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la modélisation du comportement hygroélastique de matériaux composites, en intégrant une éventuelle dégradation interfaciale.

#### **1 Loi de glissement et de décollement à l'interface**

Il est maintenant largement admis dans la littérature que la cohésion à l'interface entre les fibres et la matrice est probablement la composante la plus importante dans un matériau composite. Malheureusement, de nombreuses questions subsistent sur le comportement exact de l'interface ainsi que sur les processus chimiques se produisant dans cette région qui peuvent influencer le comportement global du composite. Sur le plan expérimental, de nombreuses études portent sur la qualité de l'adhésion en terme de propriétés ultimes telles que la ténacité et la résistance à la rupture afin d'en étudier les conséquences sur le composite, mais malheureusement il est difficile d'accéder de manière absolue aux propriétés mécaniques même des interphases et intercouche.

Sur le plan de la modélisation, la grande majorité des études consacrées au comportement des composites considèrent ces zones de transition comme parfaites, assurant la transmission des efforts. Or, comme nous l'avons vu expérimentalement, ces modèles sont le plus souvent insuffisants pour décrire les propriétés mécaniques qui régissent le composite. Par conséquent, d'autres modèles ont été utilisés ces dernières années pour incorporer les propriétés de l'intercouche ou de l'interphase dans la modélisation du comportement du composite. Comme nous l'avions présenté au chapitre 2, deux approches peuvent être distinguées dans la modélisation de ces zones de transition.

Les modèles d'interphases ou d'intercouches approchent la zone interfaciale comme un milieu d'épaisseur finie au comportement homogène ou non. L'utilisation de cette approche nécessite non seulement la caractérisation expérimentale des propriétés attribuées à cette fine couche, mais également l'épaisseur de cette couche. On peut plutôt utiliser l'approche de l'interface imparfaite où la région interfaciale est modélisée par une surface matérielle.

Différents travaux ont ainsi adopté ce dernier formalisme pour intégrer le rôle des interfaces dans la modélisation du comportement des composites. Citons notamment Y. Benveniste [21] qui étudie l'influence de la prise en compte d'un décollement à l'interface sur le comportement de matériaux composites. Un peu plus tard, F. Léne [127] modélise le comportement élastique de matériaux composites en tenant compte de possibles glissements entre la fibre et la matrice. J. Aboudi [2] introduit une loi de glissement de type Coulomb dans la modélisation du comportement de matériaux composites à réseau carré. Z. Hashin [93] prend en compte le rôle des interfaces imparfaites sous la forme de relations linéaires entre la contrainte à l'interface et le saut du déplacement pour la détermination du comportement thermoélastique de matériaux composites unidirectionnels. J.W. Hutchinson et H.K. Jensen [102] s'intéressent au décollement ou à l'arrachement d'une fibre au sein d'une matrice fragile. F. Devries [63] détermine le comportement élastique en tenant compte d'un glissement à l'interface à l'aide d'une technique d'homogénéisation périodique simplifiée. Nous pouvons citer également les travaux de J.D. Achen-

bach et H. Zhu [3], de N.J. Pagano et G.P. Tandon [152], G. Laird et T.C. Kennedy [122], Z. Chen et al. [43] qui introduisent également une loi d'interface reliant le vecteur des contraintes proportionnellement aux sauts de déplacements.

En mécanique de l'endommagement, O. Allix et al. [7], P. Ladevèze et E. Le Dantec [121], A. Corigliano [52] ont adopté le même type de modèle d'interface reliant le vecteur contrainte normal au saut du déplacement pour modéliser le déclaminage dans des composites multicouches. Ce modèle d'interface permet de modéliser une diminution dans la résistance de l'interface interlaminaire et la progression du déclaminage.

Un autre type de conditions d'interface imparfaite a été proposé par A.H. Cardon [34], qui relie proportionnellement les sauts de contraintes aux sauts de déplacements. Ainsi contrairement aux modèles précédents qui considèrent une continuité du vecteur contrainte aux interfaces, le vecteur est pris ici discontinu à l'interface. Dans cette approche, les coefficients de proportionnalité sont les pentes le long de la surface moyenne de la variation des propriétés à travers la région interfaciale. Les coefficients constituent des inconnues du problème et sont identifiés par une approche numérique et expérimentale.

Nous allons ici étendre les travaux de F. Devries [63] au cas de la modélisation du comportement hygroélastique de matériaux composites en intégrant une loi supplémentaire de décollement aux interfaces. Pour cela, nous utilisons la méthode d'homogénéisation périodique simplifiée développée par C. Pidéri [155] dans le cadre de la détermination des caractéristiques élastiques de composites unidirectionnels.

## 1.1 Loi d'interface imparfaite

Le but de ce paragraphe est de présenter un modèle de comportement d'interface autorisant une décohésion de cette région intermédiaire permettant de passer de façon continue d'une interface parfaitement résistante à une interface souple.

La modélisation consiste à introduire une élasticité d'interface également considérée par d'autres auteurs (F. Léné [127], Y. Benveniste [21], Z. Hashin [94], J.C. Michel et al. [144]). Les interfaces sont ainsi modélisées comme étant une très fine couche molle élastique entre la fibre et la matrice. Par des techniques asymptotiques, nous cherchons la loi équivalente à des conditions de transmission au travers d'une petite couche souple lorsque son épaisseur et sa raideur tendent vers zéro. Plus précisément si l'on désigne par  $e$  l'épaisseur de la couche interface, et  $a^i$  la matrice de rigidité, alors nous supposons que :

$$\mathbf{a}^i = e\tilde{\mathbf{a}} \quad (\text{III.3.1})$$

En outre, afin de traduire les décohésions à l'interface comme un état d'endommagement du composite, une variable  $D$  est introduite, rendant compte globalement de l'endommagement moyen des interfaces qui pourra être lié à la présence d'humidité. L'idée n'est effectivement pas de décrire très finement des endommagements locaux en certains points des interfaces, mais plutôt de rendre compte globalement de l'endommagement moyen des interfaces. Cette théorie de l'endommagement isotrope, introduite par J. Lemaître et J.L. Chaboche [126], a été reprise dans différents travaux. Nous écrivons ainsi la raideur de cette petite couche sous la forme :

$$\mathbf{a}^i = (1 - D)e\tilde{\mathbf{a}} \quad (\text{III.3.2})$$

On peut alors montrer par développements asymptotiques, en utilisant la même méthodologie qu'au chapitre 2 pour les interfaces diffusives, que la loi asymptotiquement équivalente à une interface très fine et molle se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_T = (1 - D)k_T[[\mathbf{u}_T]] \\ \sigma_N = (1 - D)k_N[[\mathbf{u}_N]] \end{cases} \quad (\text{III.3.3})$$

avec  $\sigma(\mathbf{n}) = \sigma_N \cdot \mathbf{n} + \sigma_T$  et où le tenseur du second ordre  $\mathbf{k}$  s'exprime dans le cas général sous la forme :

$$\mathbf{k}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{III.3.4})$$

soit,

$$k_{ik}(\mathbf{n}) = \tilde{a}_{ijkh} n_j n_h \quad (\text{III.3.5})$$

que l'on écrira dans le cas où l'interface est un matériau isotrope :

$$k_{ik}(\mathbf{n}) = (\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik} \quad (\text{III.3.6})$$

A l'aide de cette approche, on obtient une justification de la loi d'interface imparfaite qui relie le vecteur contrainte aux sauts des déplacements, couramment employée dans la littérature.

Afin de compléter ce modèle, il nous faut définir la loi d'évolution du paramètre d'endommagement  $D$ . Cela fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.2 Loi d'évolution du paramètre d'endommagement

Pour étudier l'évolution du paramètre d'endommagement  $D$ , il est classique de se placer dans le cadre thermodynamique des matériaux standard généralisés (B. Halphen et Nguyen Quoc Son [88]).

Soit  $Y$  un élément de volume représentatif du composite considéré et soit  $w$  l'énergie libre microscopique définie en tout point de la cellule de base par :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{ijkh} \boldsymbol{\varepsilon}_{kh}(u^D) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u^D) & \text{sur } Y - \Gamma \\ \frac{1}{2} (1 - D) a_{ijkh} \boldsymbol{\varepsilon}_{kh}(u^D) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u^D) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.7})$$

où  $\mathbf{a}$  désigne la matrice de rigidité,  $\Gamma$  l'interface, et  $u^D$  le champ de déplacement dans le domaine  $Y$ . L'énergie libre macroscopique du milieu composite est la moyenne sur la cellule de base de l'énergie élastique microscopique définie ci-dessus, soit :

$$W(D, \mathbf{E}) = \int_{\text{Matrice}} w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D)) d\mathbf{x} + \int_{\text{Fibre}} w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D)) d\mathbf{x} + (1 - D) \int_{\Gamma} w(D, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D)) d\mathbf{x} \quad (\text{III.3.8})$$

où les variables  $\mathbf{u}_D$  et  $\mathbf{E}$  sont liées par la relation classique de moyenne (F. Léné [127]) :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (\text{III.3.9})$$

La force thermodynamique associée au paramètre  $D$  est alors le taux de restitution de l'énergie. On peut alors montrer (F. Léné [127]) qu'elle est donnée par :

$$F = -\frac{\partial W}{\partial D} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2|Y|} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{k}(\mathbf{n}) \cdot [[\mathbf{u}]] d\Gamma \quad (\text{III.3.10})$$

La puissance dissipée lors de la décohésion est donc :

$$P_d = F \dot{D} \quad (\text{III.3.11})$$

Conformément à l'approche de la thermodynamique des milieux continus, la loi d'évolution du paramètre d'endommagement dérive d'un potentiel de forces  $\Phi(F)$ , fonction convexe, positive et nulle en 0, dont l'existence est postulée. La loi de normalité qui en découle s'exprime par :

$$\dot{D} = \frac{\partial \Phi}{\partial F} \quad (\text{III.3.12})$$

La loi de propagation de l'endommagement est ainsi donnée par la loi complémentaire (III.3.12).

F. Léné [127] considère un potentiel de type Norton pour décrire la progression de glissement élastique ou viscoplastique aux interfaces sous l'effet de sollicitations mécaniques. Le potentiel de forces  $\Phi(F)$  s'écrit alors :

$$\Phi(F) = \frac{\lambda}{n+1} |F|^{n+1} \quad \lambda > 0, n > 0 \quad (\text{III.3.13})$$

ce qui conduit à la loi complémentaire :

$$\dot{D} = \eta |F|^n \quad (\text{III.3.14})$$

Pour  $n = 1$ , la loi (III.3.14) est une loi d'endommagement ductile. Le cas limite lorsque  $n$  tend vers l'infini correspond à un endommagement fragile.

Une autre possibilité est de choisir le potentiel de forces  $\Phi(F)$  de manière à obtenir une loi d'endommagement par seuil qui pourrait notamment être liée à la déformation hygrométrique cumulée dans la résine. Pour cela, le potentiel de forces est choisi sous la forme :

$$\Phi(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } H(F, D) \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.3.15})$$

La fonction  $H$  est une fonction convexe de  $F$ , qui peut d'ailleurs dépendre de  $D$ , J.C. Michel [144]. La loi d'endommagement correspondante s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{D} = 0 & \text{si } H(F, D) < 0 \\ \dot{D} = \lambda \frac{\partial H}{\partial F} & \lambda \leq 0 \quad \text{si } H(F, D) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.16})$$

où  $H(F, D)$  est le critère qui gouverne l'évolution de la décohésion de l'interface. Dans tous les cas, la propagation de l'endommagement suppose une variation du paramètre d'endommagement  $D$  au cours du temps. Une homogénéisation du comportement hygroélastique du composite en prenant en compte ce type de loi nécessite que le comportement équivalent soit calculé à l'aide d'un schéma incrémental.

## 2 Homogénéisation d'un composite hygroélastique unidirectionnel avec dégradations à l'interface

L'objectif de ce paragraphe est de substituer au problème hygroélastique posé sur un matériau composite hétérogène, un problème homogénéisé posé sur un milieu homogène de comportement équivalent. Dans un premier temps, nous étendrons les résultats de G. Francfort [76] et G. L'Hostis [131] dans le cadre de l'homogénéisation périodique à structure fine de composites thermoélastiques au cas de matériaux composites hygroélastiques avec des phénomènes de décohésions aux interfaces. Ensuite, nous verrons de quelle manière nous pourrons obtenir un encadrement du comportement hygroélastique homogénéisé exact obtenu après résolution des problèmes cellulaires d'homogénéisation périodique posés sur un volume représentatif de la micro-structure du composite. La technique qui sera utilisée, développée initialement par C. Pidéri [155] dans le cadre de l'élasticité fait appel au même principe que celui utilisé par les méthodes énergétiques (Z. Hashin et S. Shtrikman [97]).

### 2.1 Homogénéisation périodique des milieux à structure fine

Différentes méthodes d'homogénéisation ont été largement utilisées dans la littérature pour la modélisation et le calcul des matériaux composites, parmi lesquelles la méthode auto-cohérente initialement introduite par R. Hill [101], les méthodes énergétiques développées par Z. Hashin [92], Z. Hashin et S. Shtrikman [97], et la méthode des milieux périodiques à structure fine (G. Duvaut, A. Bensoussan et al. [20], E. Sanchez-Palencia [162]). Nous avons retenu ici la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, qui donne un sens précis au processus d'homogénéisation sous la forme d'un problème de convergence avec un petit paramètre caractérisant la taille des hétérogénéités.

### 2.1.1 Positions du problème cellulaire. Notations

Nous considérons un matériau composite unidirectionnel à deux constituants (fibres et matrice). Les conditions de glissement et de décollement sont définies sur l'interface séparant les deux constituants. Le matériau composite considéré est supposé présenter une structure périodique. On désigne par  $V$  la cellule représentative élémentaire.

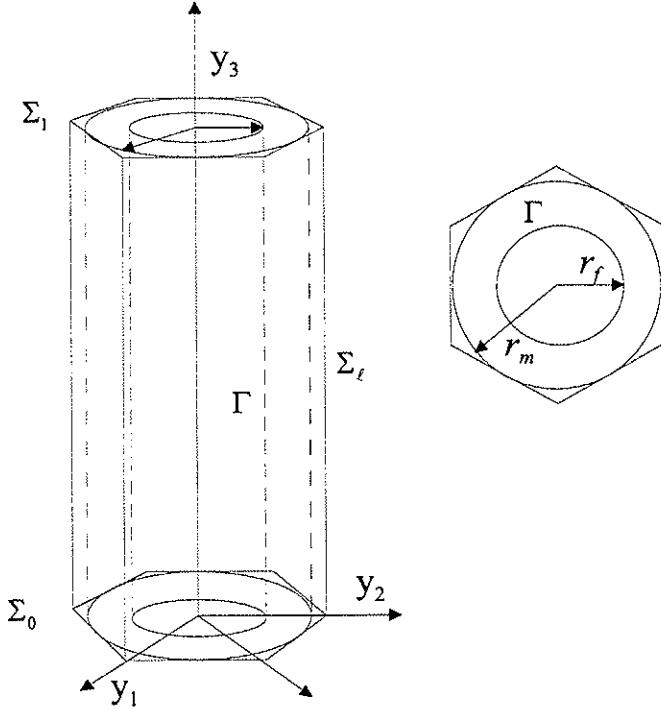


Figure III.3.1: Géométrie de la cellule de base

On notera  $Y_1$  le volume du cylindre circulaire inscrit dans  $Y$  (par la suite  $Y_1$  sera appelé cylindre composite) et on désignera par  $Y_2$  le volume de  $Y$  restant ;  $Y_2 = Y - Y_1$ . Le rayon du cylindre composite sera noté  $r_m$  et  $r_f$  représentera celui de la fibre. D'autre part, on désignera par :

- $\Sigma_o$  la base inférieure de  $Y_1$
- $\Sigma_1$  la base supérieure de  $Y_1$
- $\Sigma_l$  la base latérale de  $Y_1$
- $\Gamma$  l'interface entre les deux constituants du composite à l'intérieur du volume représentatif.

Il est à noter que les constituants du composite sont homogènes et isotropes. Les modules d'élasticité et d'expansion hygrométrique sont donc constants dans chacun des deux milieux. Dans toute la suite, on indicera par un  $f$  (respectivement par  $m$ ) ce qui concerne la fibre (respectivement la matrice). On a alors :

$$a_{ijkl} = \begin{cases} \lambda_f \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_f (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih}) & \text{dans la fibre} \\ \lambda_m \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_m (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih}) & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (\text{III.3.17})$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_f \delta_{ij} & \text{dans la fibre} \\ \beta_m \delta_{ij} & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (\text{III.3.18})$$

où  $\lambda$  est le premier coefficient de Lamé,  $\mu$  le module de cisaillement,  $\beta$  le coefficient d'expansion hygrométrique. On notera  $K = \lambda + \mu$  le module de rigidité à la compression. Et on posera :

$$\tau = \frac{r_f}{r_m} \quad \Phi = \frac{K_f}{K_m} \quad \eta = \frac{\mu_f}{\mu_m} \quad (\text{III.3.19})$$

### 2.1.2 Approche Primale

Nous nous plaçons dans le cadre de la méthode des moyennes en homogénéisation, utilisée dans le cas de milieux périodiques par P. Suquet [175]. Elle consiste à se donner une moyenne de déformation et une température constante sur la cellule de base, ici plutôt le gain en poids en eau, puis à calculer la moyenne sur la cellule de base  $Y$  de la contrainte  $\sigma$ , la loi de comportement recherchée est la relation entre ces différentes quantités. On parlera alors d'approche primale.

Les quantités microscopiques  $\varepsilon(\mathbf{u})$  et  $\sigma$  sont définies comme étant solutions du problème cellulaire à déformations macroscopiques (PY) suivant :

Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}$  et un champ de contraintes  $\sigma$  définis sur la cellule de base  $Y$  et satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma = a(\varepsilon(\mathbf{u}) - \beta \Delta m) & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \varepsilon(\mathbf{u}) \gg_Y = \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i n_j + u_j n_i) dy \right\} = \mathbf{E} & \\ [\sigma(\mathbf{n})] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N(D)[[u_N]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T = K_T(D)[[u_T]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.20})$$

où l'on pose  $K_N = (1 - D)k_N$  et  $K_T = (1 - D)k_T$ ,  $\mathbf{E}$  est la déformation macroscopique imposée,  $\Delta m$  est une quantité macroscopique, c'est-à-dire constante sur toute la cellule de base  $Y$ .

Le chargement macroscopique pour le champ de déplacement est imposé sous forme de moyenne de déformation et d'incrément du gain en eau macroscopique. Il y a par conséquent découplage au niveau microscopique entre déplacement et gain en eau. On retrouve en cela une hypothèse qui a été classiquement considérée en thermoélasticité par Z. Hashin et B.W. Rosen [95], G.A. Francfort [78] et G. L'hostis [131]. La prise en compte d'un couplage au niveau microscopique entre déplacement et température a déjà été abordée par G. L'Hostis [131] en introduisant des correcteurs périodiques. Cependant, même dans le cas stationnaire, l'étude complète des correcteurs périodiques conduit à résoudre sur la cellule de base des problèmes fortement hétérogènes, donc de résolution difficile.

Par la suite, afin de simplifier les calculs, nous allons appliquer le théorème de superposition (G. Duvaut [69]) et chercher le déplacement  $\mathbf{u}$  solution du problème (PY) sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$  vérifiant respectivement les problèmes suivants :

Problème  $P_{Y1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^{(1)} = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma^{(1)} = a \varepsilon(\mathbf{u}^{(1)}) & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(1)}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^{(1)} + {}^t \nabla \mathbf{u}^{(1)}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^{(1)}(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \varepsilon(\mathbf{u}^{(1)}) \gg_Y = \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dy \right\} = \mathbf{E} & \\ [\sigma^{(1)}(\mathbf{n})] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^{(1)} = K_N(D)[[u_N^{(1)}]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^{(1)} = K_T(D)[[u_T^{(1)}]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (III.3.21)$$

Problème  $P_{Y2}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^{(2)} = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma^{(2)} = a(\varepsilon(\mathbf{u}^{(2)}) - \beta \Delta m) & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(2)}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^{(2)} + {}^t \nabla \mathbf{u}^{(2)}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^{(2)}(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \varepsilon(\mathbf{u}^{(2)}) \gg_Y = \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dy \right\} = 0 & \\ [\sigma^{(2)}(\mathbf{n})] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^{(2)} = K_N(D)[[u_N^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^{(2)} = K_T(D)[[u_T^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (III.3.22)$$

**Formulation variationnelle** Soit  $U_{ad}$  l'ensemble des champs admissibles défini par :

$$U_{ad} = \{\mathbf{v} \in [H^1(Y_f)]^3, \mathbf{v} \in [H^1(Y_m)]^3, \mathbf{v} Y - \text{périodique}\} \quad (III.3.23)$$

On peut alors montrer, en s'inspirant de la démarche de G. Duvaut [69], que la formulation variationnelle du problème  $(PY)$  d'homogénéisation périodique à déformation macroscopique imposée est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} - \mathbf{E}y \in U_{ad} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + K_T b_T(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + K_N b_N(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0 \quad \forall v \in U_{ad} \\ \text{avec } a(u, v) = \int_{Y_1} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dy \\ b_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} [[u_T]] [[v_T]] \\ b_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} [[u_N]] [[v_N]] \end{array} \right. \quad (III.3.24)$$

**Proposition III.3.1** *Sous les hypothèses que les rigidités  $a_{ijkh}$  sont symétriques, bornées et coercives, et que les coefficients  $K_T$  et  $K_N$  sont strictement positifs, le problème III.3.24 admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \sigma)$ . Le champ de contraintes  $\sigma$ , appelé champ de contraintes microscopiques, est unique et  $\mathbf{u}$  est défini à un vecteur constant près.*

**Coefficients de raideur homogénéisés** En s'inspirant des travaux de F. Léné [127] en élasticité, on peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition III.3.2** *Les modules de raideur et coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés sont les expressions qui relient les moyennes des contraintes  $\sigma$  sur la période de base  $Y$  aux moyennes des déformations solutions du problème  $(PY)$  posé sur la micro-structure et de l'incrément de gain en eau, soit :*

$$\ll \sigma_{ij} \gg_Y = a_{ijkh}^{hom} E_{kh} - a_{ijkh}^{hom} \beta_{kh}^{hom} \Delta m \quad (\text{III.3.25})$$

### 2.1.3 Approche duale

Dans la même optique, une deuxième approche consiste à se donner une moyenne de contrainte et un gain en eau constant sur la cellule de base  $Y$  et de calculer la moyenne sur la cellule de base  $Y$  de la déformation  $\varepsilon(\mathbf{u})$ . Le problème  $(PDY)$  posé sur la cellule de base à résoudre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = A\sigma + \beta \Delta m & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma(n) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \sigma \gg_Y = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \sigma dy \right\} = \Sigma & \\ [\sigma(n)] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N(D)[[u_N]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T = K_T(D)[[u_T]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.26})$$

avec  $A$  matrice des souplesses et  $\Sigma$  la contrainte macroscopique imposée.

Par la suite également, de la même manière que pour le problème à déformation macroscopique imposé, en utilisant le théorème de superposition, nous chercherons  $\sigma$  solution de  $(PDY)$  sous la forme  $\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$  vérifiant respectivement :

Problème  $P_{DY1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^{(1)} = 0 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(1)}) = A\sigma^1 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(1)}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^{(1)} + {}^t \nabla \mathbf{u}^{(1)}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^{(1)}(n) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \sigma^{(1)} \gg_Y = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \sigma^{(1)} dy \right\} = \Sigma & \\ [\sigma^{(1)}(n)] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^{(1)} = K_N(D)[[u_N^{(1)}]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^{(1)} = K_T(D)[[u_T^{(1)}]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.27})$$

Problème  $P_{DY2}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^{(2)} = 0 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(2)}) = A\sigma^{(2)} + \beta\Delta m & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^{(2)} + {}^t \nabla \mathbf{u}^{(2)}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^{(2)}(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \sigma^{(2)} \gg_Y = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \sigma^{(2)} dy \right\} = 0 & \\ [\sigma^{(2)}(\mathbf{n})] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^{(2)} = K_N(D)[[u_N^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^{(2)} = K_T(D)[[\mathbf{u}_T^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.28})$$

En procédant de la même manière que pour l'approche en déformation, on montre que le problème ( $PDY$ ) admet une solution unique et que la dépendance linéaire de la solution ( $\mathbf{u}, \sigma$ ) par rapport à la contrainte macroscopique  $\Sigma$  nous amène à définir les coefficients de souplesse homogénéisés de la manière suivante :

**Proposition III.3.3** *Les coefficients de souplesse et expansion hygrométrique homogénéisés sont les expressions qui relient les moyennes des contraintes  $\sigma$  sur la période de base  $Y$  aux moyennes des déformations solutions du problème ( $PDY$ ) posé sur la micro-structure et de l'incrément de gain en eau soit :*

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_Y = A_{ijkh}^{hom} \Sigma_{kh} + \beta_{ij}^{hom} \Delta m \quad (\text{III.3.29})$$

De plus, on pourra montrer en s'inspirant des travaux de P. Suquet [175] et de G. L'Hostis [131] que les deux approches que l'on a nommées primale et duale conduisent au même comportement homogénéisé qualifié alors d'exact.

L'obtention du comportement homogénéisé recherché nécessite cependant de résoudre numériquement les problèmes cellulaires ( $PY$ ) et ( $PDY$ ). L'utilisation de moyens numériques adaptés comme la méthode des éléments devient donc indispensable. La technique de résolution a été de nombreuses fois développée dans le cadre de l'élasticité pour différents types de composites (F. Léné [127], A. Benhamida [18] F. Devries [63]) et en thermoélasticité (G. L'Hostis [131]).

Nous avons préféré ici, pour éviter la résolution par éléments finis des problèmes cellulaires, utiliser une méthode approchée qui conduit à un encadrement du comportement homogène équivalent exact. Elle consiste à rechercher des champs cinématiquement admissibles (respectivement statiquement admissibles) pour le problème cellulaire ( $PY$ ) (respectivement ( $PDY$ )).

## 2.2 Une méthode approchée en homogénéisation périodique

### 2.2.1 Théorème de l'énergie

Nous allons voir maintenant de quelle manière il est possible d'obtenir un encadrement des coefficients raideurs équivalents équivalents.

Soit  $w(y)$  l'énergie potentielle microscopique définie en tout point de la cellule de base par :

$$w(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_{ijkh}e_{kh}e_{ij} & \text{si } y \in Y - \Gamma \\ \frac{1}{2}K_T[[\mathbf{u}_T]]^2 + \frac{1}{2}K_N[[u_N]]^2 & \text{si } y \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.30})$$

L'application du théorème de l'énergie potentielle en déplacements au cas du problème primal d'élasticité ( $P_{Y_1}$ ) conduit à la relation suivante :

$$U_{ad} = \{\mathbf{v} \in [H^1(Y_f)]^3, \mathbf{v} \in [H^1(Y_m)]^3, \mathbf{v} \text{ } Y \text{ - périodique}\} \quad (\text{III.3.31})$$

$$(\text{III.3.32})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_Y a_{ijkh}^{hom} E_{kh} E_{ij} \leq I(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \\ \text{avec } I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}K_T b_T(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}K_N b_N(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (\text{III.3.33})$$

Ce théorème traduit donc, que parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ solution est celui qui minimise l'énergie potentielle. La méthode simplifiée va consister à majorer ces coefficients de raideur homogénéisés en construisant un champ cinématiquement admissible au problème primal d'élasticité  $P_{Y_1}$ .

De la même manière l'application du théorème de l'énergie potentielle en contraintes au cas du problème dual d'élasticité ( $P_{DY_1}$ ) nous conduit à la relation suivante :

Soit  $\Sigma_{ad}$  l'ensemble des champs statiquement admissibles défini par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ad} = \left\{ \varphi \in [L^2(Y_f)]^9, [L^2(Y_m)]^9, \varphi_{ij,j} \in [L^2(Y_f)]^3, [L^2(Y_f)]^3, \operatorname{div} \varphi = 0, \right. \\ \left. \langle \varphi \rangle = \Sigma, \varphi(\mathbf{n}) \text{ } Y \text{ - antipériodique} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.3.34})$$

La formulation variationnelle en contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A_{ijkh}^{hom} \Sigma_{kh} \Sigma_{ij} \leq J(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Sigma_{ad} \\ \text{avec } J(\varphi) = - \int_Y \frac{1}{2}A_{ijkh} \varphi_{kh} \varphi_{ij} dy \end{cases} \quad (\text{III.3.35})$$

L'application des théorèmes de l'énergie potentielle en contraintes, et en déplacements vont nous fournir en construisant un champ de contraintes statiquement admissible et un champ de déplacements cinématiquement admissible, un encadrement des modules équivalents.

### 2.2.2 Construction d'un champ cinématiquement admissible pour le problème d'élasticité

**Construction du champ** Nous allons construire un champ de déplacement cinématiquement admissible pour le problème ( $P_{Y_1}$ ) en nous inspirant de nouveau de la démarche suivie par C. Pidéri [155]. Afin d'utiliser des solutions analytiques de problèmes posés sur le cylindre  $Y_1$ , on impose tout d'abord la déformation macroscopique  $E$  à  $Y_1$  en résolvant dans  $Y_1$  le problème suivant :

Trouver  $(\mathbf{u}^s, \sigma^s)$  solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma_{ij}^s = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ u_i^s = E_{ij} y_j & \text{sur } \Sigma_l \\ u_i^s - E_{i3} y_3 & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ [[\sigma(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N [[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1} = K_{T1} [[u_{T1}^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2} = K_{T2} [u_{T2}^s] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.36})$$

Sous les hypothèses de symétrie, bornitude et coercivité des coefficients  $a_{ijkh}$ , le problème possède une solution unique  $(u^s, \sigma^s)$ . Le champ est unique à une translation parallèle à  $Y_3$  près.

On définit ensuite dans  $Y$  un champ de déplacements microscopiques  $\hat{\mathbf{u}}^s$  en prolongeant par continuité  $u^s$  sur  $Y$  tout entier par :

$$\hat{\mathbf{u}}^s = \begin{cases} \mathbf{u}^s & \text{dans } Y_1 \\ E_y & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.37})$$

A ce champ de déplacements, on peut associer un champ de déformations microscopiques dit "simplifié".

$$\varepsilon^s = \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}^s) = \begin{cases} \varepsilon(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ E & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.38})$$

et un champ de contraintes microscopiques simplifié :

$$\sigma^s = a\varepsilon^s = \begin{cases} a\varepsilon(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ aE & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.39})$$

De cette manière, le champ de déplacements microscopiques  $\hat{\mathbf{u}}^s$  construit est cinématiquement admissible pour le problème  $(P_{Y1})$ .

**Les coefficients de raideur simplifiés** Compte tenu des constructions des champs microscopiques  $\varepsilon^s$  et  $\sigma^s$  faites au paragraphe précédent, on est à même de définir des coefficients homogénéisés dits "simplifiés" de la façon suivante :

**Définition III.3.1** On appelle coefficients de raideur simplifiés et on note  $a_{ijkh}^s$  les coefficients qui satisfont :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = a_{ijkh}^s E_{kh} \quad (\text{III.3.40})$$

où  $E_{kh}$  sont les composantes du tenseur symétrique donné  $E$ .

En outre, dans  $Y_2$ , le composant est homogène et isotrope. Dans ce cas, on en déduit :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_1} \sigma_{ij}^s dy + a_{ijkh}^m E_{kh} \frac{|Y_2|}{|Y|} \quad (\text{III.3.41})$$

soit :

$$a_{ijkh}^s E_{kh} = \ll \sigma_{ij}^s \gg_{Y_1} \frac{|Y_1|}{|Y|} + a_{ijkh}^m E_{kh} \frac{|Y_2|}{|Y|} \quad (\text{III.3.42})$$

On peut alors montrer que les coefficients de raideurs simplifiés constituent une borne supérieure des rigidités homogénéisées exactes (F. Devries [63], G. L'Hostis [131]).

Par linéarité du problème, nous pourrons obtenir tous les coefficients de raideur en résolvant les six problèmes élémentaires correspondant à une base de tenseurs symétriques. On choisira :

$$\begin{cases} E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{III.3.43})$$

**Calcul des coefficients de raideur simplifiés** La famille de tenseurs élémentaires choisis conduit à une résolution analytique des problèmes III.3.36 pour chaque cas de charge. Nous renvoyons à l'annexe A pour la construction des solutions analytiques des différents problèmes élémentaires posés sur  $Y_1$ . La résolution des différents cas de charge, nous permet d'établir les propriétés suivantes :

**Proposition III.3.4** *La matrice  $(a^s)$  des coefficients de raideur simplifiés est symétrique. Et elle peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$(a^s) = \begin{pmatrix} a_{1111}^s & a_{1122}^s & a_{1133}^s & 0 & 0 & 0 \\ a_{1122}^s & a_{1111}^s & a_{1133}^s & 0 & 0 & 0 \\ a_{1133}^s & a_{1133}^s & a_{3333}^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_T^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_3^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_3^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.44})$$

avec les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1111}^s = K_m \left\{ 1 + \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (-2(1-\nu_m) \frac{B_{m1}}{r_m^2}) + \mu_m [1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} a_4^m \tau^2] \right] \right\} \\ a_{1122}^s = K_m \left\{ 1 + \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (-2(1-\nu_m) \frac{B_{m1}}{r_m^2}) - \mu_m [1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} a_4^m \tau^2] \right] \right\} \\ a_{1133}^s = \lambda_m - 2K_m(1-\nu_m)\tau^2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(\nu_m - \Phi\nu_f)(K_n r_f + 2K_f) + \Phi\lambda_f}{(1-2\nu_m + \tau^2)(K_n r_f + 2K_f) + \Phi(1-\tau^2)K_n r_f} \\ a_{3333}^s = \lambda_m + 2\mu_m \left\{ 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} [(\eta-1)\tau^2 + \frac{\eta\lambda_f\tau^2}{K_n r_f + 2K_f} \right. \\ \left. \frac{B_{m4}}{r_m^2} (\frac{1+\tau^2-2\nu_m\tau^2}{1-2\nu_m} + \frac{\eta K_n r_f (1-\tau^2)}{K_n r_f + 2K_f})] \right\} \\ 2\mu_T^s = 2\mu_m \left[ 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} A_4^m \tau^2 \right] \\ 2\mu_3^s = \mu_m \left[ 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{2r_f^2(\eta-1-\frac{\mu_f}{K_{T2}r_f})}{(-1-\tau^2)(1+\frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}) + \eta(\tau^2-1)} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.3.45})$$

où les constantes  $B_{m1}$ ,  $B_{m4}$ , et  $A_{4m}$  sont déterminées à partir des conditions aux limites du problème ( $P_{Y1}$ ) et sont explicitées en Annexe A et où les caractéristiques de la fibre ( $K_f$ ,  $\mu_f$ ,  $\lambda_f$ ,  $\nu_f$ ) (respectivement de la matrice indiquées par  $m$ ) et les notations  $\tau$ ,  $r_f$ ,  $r_m$ ,  $K_N$ ,  $K_{T2}$  ont été définies précédemment. .

**Remarque III.3.1** ( $a^s$ ) est une matrice définie positive et on peut par ailleurs vérifier que

$a_{1111}^s - a_{1122}^s = 2a_{1212}^s = 2\mu_T^s$  Ce qui signifie en d'autres termes que le milieu homogénéisé associé à l'opérateur  $a^s$  est isotrope transverse.

**Remarque III.3.2** Si l'on suppose que l'on a que des hypothèses de glissement aux interfaces, ce qui revient à faire tendre  $K_N$  vers l'infini dans les expressions précédentes, on retrouve les résultats de F. Devries [63]. Dans l'hypothèse d'un contact parfait entre la fibre et la matrice, c'est-à-dire en faisant tendre les trois paramètres  $K_N$ ,  $K_{T1}$  et  $K_{T2}$  vers l'infini, on obtient les résultats de C. Pidéri [155]

### 2.2.3 Construction d'un champ cinématiquement admissible pour le problème de couplage élasticité/hygronométrie

Nous construisons un champ cinématiquement admissible pour ce problème en suivant la même démarche que précédemment.

Afin de simplifier nos calculs, nous posons :

$$\begin{cases} \sigma^{(2)} = \hat{\sigma}^{(2)} \Delta m \\ u^{(2)} = \hat{u}^{(2)} \Delta m \\ a_{ijkh} \beta_{kh} = \zeta_{ij} \end{cases} \quad (\text{III.3.46})$$

Le problème  $P_{Y2}$  s'écrit donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \hat{\sigma}^{(2)} = 0 & \text{dans } Y \\ \hat{\sigma}^{(2)} = a \varepsilon(\hat{u}^{(2)}) - \zeta_{ij} & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\hat{u}^{(2)}) = \frac{1}{2} (\nabla \hat{u}^{(2)} + {}^t \nabla \hat{u}^{(2)}) & Y - \text{périodique} \\ \hat{\sigma}^{(2)}(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \varepsilon(\hat{u}^{(2)}) \gg_Y = \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (\hat{u}^{(2)}_i n_j + \hat{u}^{(2)}_j n_i) dy \right\} = 0 & \\ [[\hat{\sigma}^{(2)}(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \hat{\sigma}_N^{(2)} = K_N(D)[\hat{u}_N^{(2)}] & \text{sur } \Gamma \\ \hat{\sigma}_T^{(2)} = K_T(D)[[\hat{u}_T^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.47})$$

On peut alors définir des champs admissibles de la manière suivante :

**Proposition III.3.5** Soit  $\hat{u}^s$  le champ de déplacements défini par :

$$\hat{u}^s = \begin{cases} u^s & \text{dans } Y_1 \\ 0 & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.48})$$

où  $\mathbf{u}^s$  est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma_{ij}^s = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) - \zeta_{ij} & \text{dans } Y_1 \\ u_i^s = 0 & \text{sur } \Sigma_l \\ u_i^s & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ [[\sigma(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N[u_N^s] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1} = K_{T1}[u_{T1}^s] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2} = K_{T2}[u_{T2}^s] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.49})$$

**Les coefficients d'expansion simplifiés** Compte tenu de la construction du champ microscopique  $\hat{\mathbf{u}}^s$ , on peut définir des coefficients d'expansion homogénéisés simplifiés de la manière suivante :

**Définition III.3.2** On appelle coefficients d'expansion simplifiés, et on note  $\zeta_{ij}^s$ , les coefficients qui satisfont :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_{Y_1} = -\zeta_{ij}^s \quad (\text{III.3.50})$$

Or dans  $Y_2$  le champ de déplacement est nul, nous avons donc :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_{Y_1} = -\zeta_{ij}^s \quad (\text{III.3.51})$$

**Remarque III.3.3** Les coefficients d'expansion hygrométrique simplifiés ( $\beta_{ij}^s$ ) sont obtenus par la relation suivante :

$$\beta_{ij}^s = (a_{ijkh}^s)^{-1} \zeta_{ij}^s \quad (\text{III.3.52})$$

**Expression des coefficients d'expansion simplifiés** Contrairement au cas du problème d'élasticité  $P_{Y_1}$ , l'obtention de tous les coefficients simplifiés ( $\zeta_{ij}^s$ ) est directe en résolvant le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(\mathbf{u}^s) I + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}^s) - 3k\beta & \text{dans } Y_1 \\ u_i^s = 0 & \text{sur } \Sigma_l \\ u_i^s & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \sigma_N^s = K_N[u_N^s] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1}^s = K_{T1}[u_{T1}^s] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2}^s = K_{T2}[u_{T2}^s] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.53})$$

Le champ de déplacements solution de ce problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta^s = 0 \\ u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.3.54})$$

Et le tenseur de contraintes associé nous est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = 2KA - 2\mu \frac{B}{r^2} - 3k\beta \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2KA + 2\mu \frac{B}{r^2} - 3k\beta \\ \sigma_{zz}^s = 2\lambda A - 3k\beta \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.55})$$

Nous pouvons alors montrer le résultat suivant :

**Proposition III.3.6** *Les coefficients simplifiés ( $\zeta_{ij}^s$ ) vérifient :*

$$\begin{cases} \zeta_{11}^s = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}[(2K_m + 2\mu_m) \frac{3(k_m\beta_m - k_f\beta_f)\tau^2 + \frac{6K_fk_f\beta_f\tau^2}{K_Nr_f + 2K_f}}{-2\mu_m - 2K_m\tau^2 - \frac{2K_f(1-\tau^2)K_Nr_f}{K_Nr_f + 2K_f}} - 3k_m\beta_m] \\ \zeta_{22}^s = \zeta_{11}^s \\ \zeta_{33}^s = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}[-3k_m\beta_m - \frac{6\mu_f\tau^2k_f\beta_f}{K_Nr_f + 2K_f} - \frac{B_m}{r_m^2}(2K_m + 2\mu\tau^2 + 2\nu_f \frac{(1-\tau^2)K_Nr_f}{K_Nr_f + 2K_f})] \\ \zeta_{12}^s = \zeta_{13}^s = \zeta_{23}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.56})$$

où la constante  $B_m$  est obtenue à partir des conditions aux limites du problème III.3.70 et est explicitée en Annexe A et où les caractéristiques de la fibre ( $K_f$ ,  $\mu_f$ ,  $\lambda_f$ ,  $\nu_f$ ) (respectivement de la matrice indicées par  $m$ ) et les notations  $\tau$ ,  $r_f$ ,  $r_m$ ,  $K_N$ ,  $K_{T2}$  ont été définies précédemment.

#### 2.2.4 Construction d'un champ admissible pour le problème dual d'élasticité

**Construction du champ** On construit ce champ de la manière suivante :

**Proposition III.3.7** *Soit  $\hat{\sigma}^s$  le champ de contraintes défini de la manière suivante :*

$$\hat{\sigma}^s = \begin{cases} \sigma^s & \text{dans } Y_1 \\ \Sigma & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.57})$$

avec  $\sigma^s$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^s) = A_{ijkh} \sigma_{kh}^s(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s \cdot \mathbf{n} = \Sigma \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) & \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = \Sigma_{i3} & \\ \varepsilon(\mathbf{u}^s) [0, l] \text{ périodique en } Y_3 & \\ [[\sigma(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N [[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1} = K_{T1} [[u_{T1}^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2} = K_{T2} [[u_{T2}^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.58})$$

On peut montrer aisément que ce champ ainsi construit est statiquement admissible.

**Les coefficients de souplesse simplifiés** La construction analytique du champ microscopique  $\hat{\sigma}^s$  faite au paragraphe précédent nous conduit à définir des coefficients de souplesse homogénéisés dits "simplifiés" de la manière suivante :

**Définition III.3.3** On appelle coefficients de souplesse simplifiés et on note  $A_{ijkh}^s$  les coefficients qui vérifient :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = A_{ijkh}^s \Sigma_{kh} \quad (\text{III.3.59})$$

En outre, dans  $Y_2$  le composant est homogène et isotrope. Dans ce cas nous en déduisons :

$$A_{ijkh}^s \Sigma_{kh} = A_{ijkh}^m \Sigma_{kh} \frac{|Y_2|}{|Y|} + \ll \varepsilon_{ij}^s \gg_{Y1} \frac{|Y_1|}{|Y|} \quad (\text{III.3.60})$$

De même, on pourra montrer que les souplesses simplifiées fournissent un majorant des souplesses homogénéisées exactes.

**Calcul des coefficients de souplesse simplifiés** De manière analogue, nous obtiendrons tous les coefficients en résolvant les six problèmes élémentaires correspondant à la base de tenseurs définie précédemment par l'équation (III.3.43). Nous renvoyons à l'annexe A pour les expressions des solutions analytiques des différents problèmes élémentaires posés sur  $Y_1$ .

De la même manière que pour le problème primal d'élasticité, la résolution du problème III.3.58 pour les différents cas de charge nous permet de montrer les propriétés suivantes :

**Proposition III.3.8** la matrice  $A^s$  des coefficients de souplesse simplifiés est symétrique, et elle s'écrit sous la forme

forme suivante :

$$(A^s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T^s} & -\frac{\nu_T^s}{E_T^s} & -\frac{\nu_3^s}{E_3^s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_T^s}{E_T^s} & \frac{1}{E_T^s} & -\frac{\nu_3^s}{E_3^s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_3^s}{E_3^s} & -\frac{\nu_3^s}{E_3^s} & \frac{1}{E_3^s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1212}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1313}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1313}^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.61})$$

avec les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{E_T^s} &= \frac{1}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ -\frac{\nu_m \tau^2 (\nu_m \psi - \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{2K_N r_f} + \right. \\ &\quad \left. \frac{B_{m1}}{r_m^2} \left[ \frac{(\tau^2 - 1)(1 - \nu_m \nu_f) + \tau^2 \psi (1 - \nu_m^2)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{2K_N r_f} \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\mu_m} b_4^m \tau^2 - \frac{\mu_f}{r_f} b_1^f \left( \frac{1}{K_N} + \frac{1}{K_{t1}} \right) - b_2^f \frac{3\mu_f}{3 - 2\nu_f} \frac{1}{K_{T1} r_f} \right\} \\ \frac{\nu_T^s}{E_T^s} &= \frac{\nu_m}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ -\frac{\nu_m \tau^2 (\nu_m \psi - \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{2K_N r_f} + \right. \\ &\quad \left. \frac{B_{m1}}{r_m^2} \left[ \frac{(\tau^2 - 1)(1 - \nu_m \nu_f) + 2\tau^2 \psi (1 - \nu_m^2)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{K_N r_f} \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\mu_m} b_4^m \tau^2 - \frac{\mu_f}{r_f} b_1^f \left( \frac{1}{K_N} + \frac{1}{K_{t1}} \right) - b_2^f \frac{3\mu_f}{3 - 2\nu_f} \frac{1}{K_{T1} r_f} \right\} \\ \frac{1}{E_3^s} &= \frac{1}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ \frac{\tau^2 (1 - \psi) (\nu_f - \nu_m)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} \frac{A_m}{r_m^2} \right. \\ \frac{\nu_3^s}{E_3^s} &= -\frac{\nu_m}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ \frac{\nu_m \tau^2 (\psi - 1)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} - \frac{A_m}{r_m^2} \frac{2(1 - \tau^2)(1 - \nu_f \nu_m) + 2\psi \tau^2 (1 - \nu_m^2)}{1 - \tau^2 + \psi \tau^2} + \frac{1 - \tau^2}{K_N r_f} \right\} \\ A_{1212}^s &= \frac{1}{4\mu_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\mu_m} b_4^m \tau^2 - \frac{\mu_f}{r_f} b_1^f \left( \frac{1}{K_N} + \frac{1}{K_{t1}} \right) - b_2^f \frac{3\mu_f}{3 - 2\nu_f} \frac{1}{K_{T1} r_f} \right\} \\ A_{1313}^s &= \frac{1}{4\mu_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ B_{m5} [2 - \frac{\mu_f (1 + \tau^2)}{K_{T2} r_f + \mu_f}] - \frac{\mu_f r_f}{K_{T2}} [1 + \frac{(1 - \mu_m) K_{T2} r_f - \mu_m \mu_f}{\mu_m K_{T2} r_f + \mu_m \mu_f}] \right\} \end{aligned} \right. \quad (\text{III.3.62})$$

où les constantes  $B_{m1}$ ,  $A_m$ ,  $B_{m5}$ ,  $b_4^m$ ,  $b_1^f$  et  $b_2^f$  sont déterminées à partir des conditions aux limites du problème  $P_{DY1}$  et sont explicitées en Annexe A et où les caractéristiques de la fibre ( $K_f$ ,  $\mu_f$ ,  $\lambda_f$ ,  $\nu_f$ ) (respectivement de la matrice indiquées par  $m$ ) et les notations  $\tau$ ,  $r_f$ ,  $r_m$ ,  $K_N$ ,  $K_{T2}$ ,  $K_{T1}$  ont été définies précédemment.

**Remarque III.3.4**  $(A^s)$  est une matrice définie positive  $A_{1111}^s - A_{1122}^s = 2A_{1212}^s = 2\mu_T^s$ . En d'autres termes, le milieu homogénéisé associé à l'opérateur  $A^s$  est isotrope transverse.

**Remarque III.3.5** Il est à noter également, que malheureusement, les solutions analytiques construites ne sont pas les solutions des problèmes (III.3.21) et (III.3.27), et que donc nous avons :

$$\mathbf{a}^s \cdot \mathbf{A}^s \neq 1 \quad (\text{III.3.63})$$

### 2.2.5 Construction d'un champ admissible pour le problème dual de couplage élasticité et hygrométrie

**Construction de ce champ** Afin de simplifier nos calculs, nous posons à nouveau :

$$\begin{cases} \sigma^2 = \hat{\sigma}^2 \Delta m \\ \hat{u}^2 = \hat{u}^2 \Delta m \end{cases} \quad (\text{III.3.64})$$

Le problème  $P_{Y_2}$  s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \hat{\sigma}^{(2)} = 0 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\hat{u}^{(2)}) = A\hat{\sigma}^{(2)} + \beta \Delta m & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\hat{u}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\nabla \hat{u}^{(2)} + {}^t \nabla \hat{u}^{(2)}) & Y - \text{périodique} \\ \hat{\sigma}^{(2)}(\mathbf{n}) \\ \ll \hat{\sigma}^{(2)} \gg_Y = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \hat{\sigma}^{(2)} dy \right\} = \Sigma \\ [[\hat{\sigma}^{(2)}(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \hat{\sigma}_N^{(2)} = K_N(D)[[u_N^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \\ \hat{\sigma}_T^{(2)} = K_T(D)[[u_T^{(2)}]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.65})$$

On peut alors définir des champs statiquement admissibles de la manière suivante :

**Proposition III.3.9** Soit  $\hat{u}^s$  le champ de déplacement défini par :

$$\hat{u}^s = \begin{cases} \sigma^s & \text{dans } Y_1 \\ 0 & \text{dans } Y_2 \end{cases} \quad (\text{III.3.66})$$

où  $\sigma^s$  est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = A\sigma^s + \beta \Delta m & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1}{2}(\nabla u^s + {}^t \nabla u^s) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^s(\mathbf{n}) \\ \ll \sigma^s \gg_{Y_1} = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \sigma dy \right\} = \Sigma \\ [[\sigma^s(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^s = K_N(D)[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^s = K_T(D)[[u_T^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.67})$$

On peut alors aisément vérifier que ce champ est un champ statiquement admissible pour le problème  $P_{DY_2}$ .

**Les coefficients d'expansion simplifiés** Compte tenu de la construction du champ microscopique  $\hat{u}^s$ , nous pouvons définir des coefficients d'expansion homogénéisés simplifiés de la manière suivante :

**Définition III.3.4** On appelle coefficients d'expansion simplifiés, et on note  $\beta_{ij}^s$  les coefficients qui satisfont

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = \beta_{ij}^s \quad (\text{III.3.68})$$

Or dans  $Y_2$ , le champ de contraintes est nul; nous avons par conséquent :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_{Y_1} = \beta_{ij}^s \quad (\text{III.3.69})$$

**Expression des coefficients d'expansion simplifiés** Contrairement au cas du problème  $P_{Y_1}$ , nous pouvons obtenir tous les coefficients d'expansion simplifiés en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}^s) = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) I + \beta & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(\mathbf{u}^s) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^s + {}^t \nabla \mathbf{u}^s) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^s(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \sigma^s \gg_{Y_1} = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \sigma dy \right\} = \Sigma & \\ \sigma_N^s = K_N(D)[u_N^s] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^s = K_T(D)[u_T^s] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.70})$$

On peut alors aisément montrer que le champ de contraintes solution s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = C \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.71})$$

Le champ de déformations microscopiques est de la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1+\mu}{E} (A - \frac{B}{r^2}) - \frac{\nu}{E} (2A + C) + \beta \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\mu}{E} (A + \frac{B}{r^2}) - \frac{\nu}{E} (2A + C) + \beta \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} C - \frac{\nu}{E} (2A + C) + \beta \end{cases} \quad (\text{III.3.72})$$

Compte tenu de la définition des coefficients d'expansion simplifiés, nous avons :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_{Y_1} = \beta_{ij}^s \quad (\text{III.3.73})$$

On peut alors aisément montrer les relations suivantes :

**Proposition III.3.10** *Les coefficients d'expansion hygrométriques approchés sont tels que :*

$$\begin{cases} \beta_{11}^s = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{-\nu_m \psi (\beta_f - \beta_m)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} + \beta_m + \frac{B_m}{E_m r_m^2} \left[ \frac{\tau^2 - 1}{K_N r_f} + 2 - \nu_m \tau^{-2} \frac{2\nu_m \psi \tau^2 - 2\nu - f(\tau^2 - 1)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} \right] \right\} \\ \beta_{22}^s = \beta_{11}^s \\ \beta_{33}^s = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \beta_m + \frac{\psi (\beta_f - \beta_m)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} + \frac{B_m}{r_m^2 E_m} \left[ -2\nu_m + \beta^{-2} \frac{2\nu_m \psi \beta^2 - 2\nu - f(\beta^2 - 1)}{\psi \tau^2 + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} \right] \right\} \\ \beta_{ij}^s = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.3.74})$$

où la constante  $B_m$  se détermine à partir des conditions aux limites du problème III.3.70 et est explicitée en Annexe A et où les caractéristiques de la fibre ( $K_f, \mu_f, \lambda_f, \nu_f$ ) (respectivement de la matrice indicées par  $m$ ) et les notations  $\tau, r_f, r_m, K_N, K_{T2}, K_{T1}$  ont été définies précédemment.

**Remarque III.3.6** Le comportement du matériau homogénéisé est parfaitement déterminé à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques de la cellule de base.

### 2.3 Analyse des bornes

Nous allons nous intéresser ici à la validation du comportement homogénéisé approché obtenu en comparant les résultats aux bornes obtenus par Z. Hashin et W. Rosen [95] par des méthodes énergétiques dans le cas d'un matériau sain. Ces bornes sont en outre comparées aux modules équivalents, dits exacts, obtenus par la mise en œuvre éléments finis de la résolution des problèmes cellulaires (F. Léné [127], A. Benhamida [18], F. Devries [62], pour les caractéristiques d'élasticité. Dans le cas des coefficients de couplage, pour lesquels nous ne disposons pas de résultats des modules équivalents dits exacts, la confrontation se fera avec les résultats obtenus par Z. Hashin et B.W. Rosen [96] avec la méthode auto-cohérente en utilisant le schéma cylindrique du composite assemblé.

Nous avons représentés sur les Figures [III.3.2] à [III.3.5] les évolutions en fonction du taux de fibres des modules équivalents élastiques et de couplage. On pourra également consulter C. Pidéri [155] et F. Devries [63] pour la validation des bornes des modules équivalents élastiques.

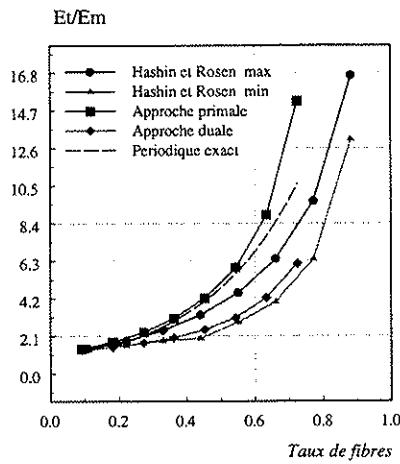


Figure III.3.2: Bornes du module d'Young transverse en fonction du taux de fibres

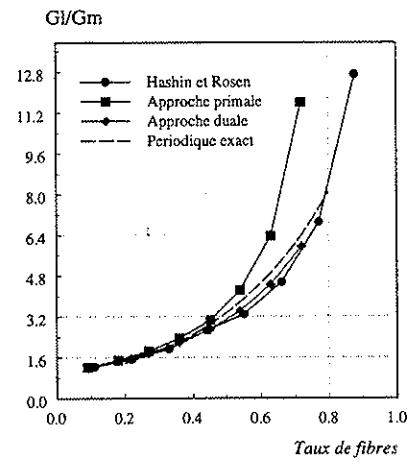


Figure III.3.3: Bornes du module de cisaillement transverse équivalent en fonction du taux de fibres

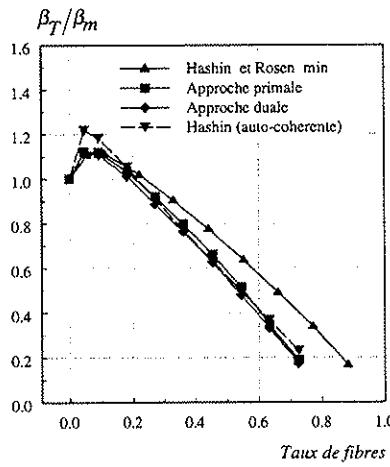


Figure III.3.4: Bornes du coefficient d'expansion hygrométrique transverse équivalent en fonction du taux de fibres

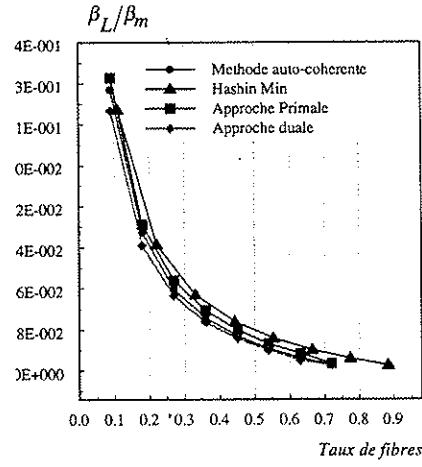


Figure III.3.5: Bornes du coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal équivalent en fonction du taux de fibres

Nous pouvons constater tout d'abord que les bornes obtenues fournissent un encadrement de la solution

éléments finis et auto-cohérente. Il apparaît également que les approches primale et duale fournissent des bornes meilleures que les bornes de Z. Hashin et W. Rosen pour le module d'Young et d'expansion hygrométrique transverse. On pourra noter également que les écarts entre les approches primale et duale sont très faibles pour les coefficients d'expansion hygrométrique.

Une deuxième partie de la validation du comportement homogénéisé approché a porté sur l'analyse des évolutions des bornes obtenues en fonction des paramètres de glissement et de décollement introduit. Pour cela, nous allons confronter nos résultats à ceux de Z. Hashin [94] obtenus par une approche auto-cohérente avec des interfaces imparfaites.

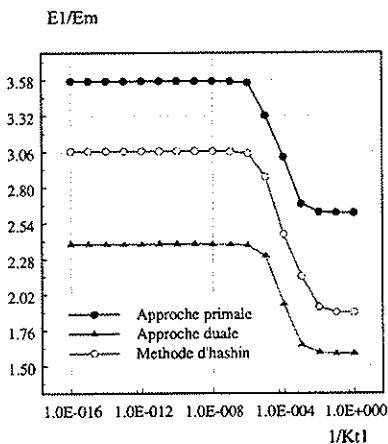


Figure III.3.6: Bornes du module d'Young transverse équivalent en fonction du paramètre de glissement interfacial  $K_{t1}$

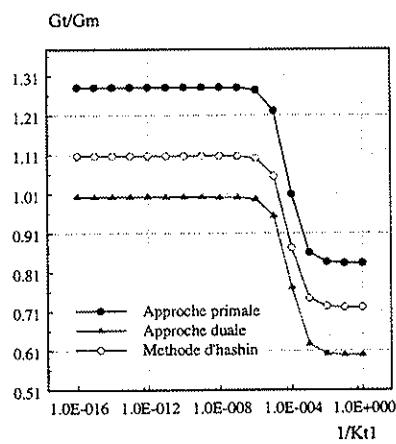


Figure III.3.7: Bornes du module de cisaillement transverse équivalent en fonction du paramètre de glissement interfacial  $K_{t1}$

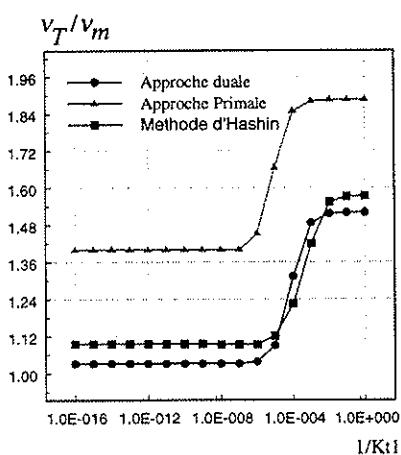


Figure III.3.8: Bornes du coefficient de Poisson transverse en fonction du coefficient de cisaillement interfacial  $K_{t1}$ .

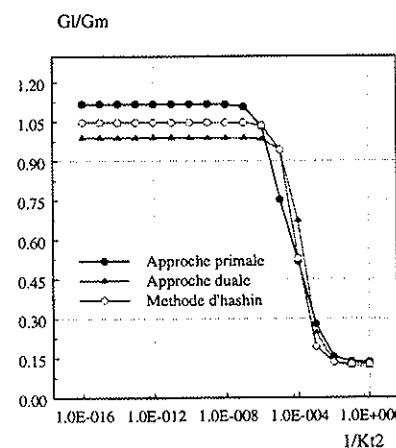


Figure III.3.9: Bornes du module de cisaillement axial équivalent en fonction du coefficient de cisaillement interfacial  $K_{t2}$

Les graphiques présentés ici correspondent à un taux volumique de fibres de 50%. Il apparaît en observant ces graphiques que les résultats obtenus avec le modèle de Hashin se trouvent à l'intérieur des bornes obtenues. On

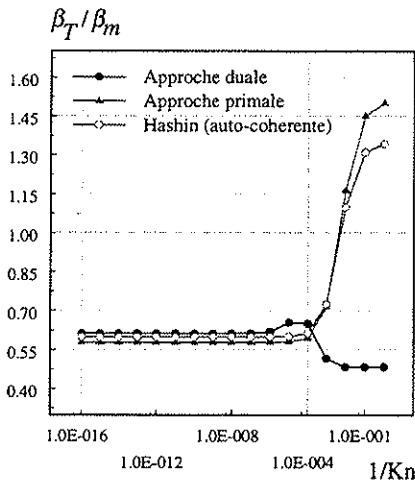


Figure III.3.10: *Bornes du coefficient d'expansion hygrométrique transverse en fonction du coefficient de décollement interfacial  $K_N$ .*

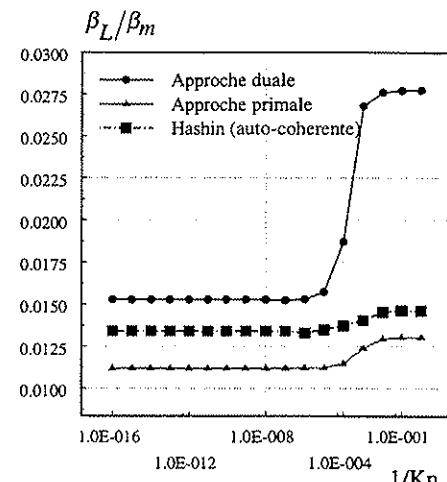


Figure III.3.11: *Bornes du coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal équivalent en fonction du coefficient de décollement interfacial  $K_N$*

trouve d'ailleurs une assez bonne corrélation entre l'approche duale et la méthode de Hashin en ce qui concerne le coefficient d'expansion transverse. Nous pouvons par contre noter un écart important lorsque le coefficient de décollement augmente entre les valeurs des coefficients d'expansion hygrométrique obtenus par l'approche duale et l'approche primale. Une explication pourrait être que le comportement élastique homogénéisé du composite n'intervient pas dans le calcul des coefficients d'expansion par l'approche duale contrairement au cas de l'approche primale. Le calcul par l'approche duale ne tient donc pas compte d'une perte des propriétés élastiques du matériau due à la présence de décohésions aux interfaces.

Les deux méthodes mettent en évidence qu'il existe deux valeurs particulières que l'on va désigner par  $K_{nc}$  et  $K_{nd}$  qui vont caractériser le comportement homogène équivalent du matériau composite. Tant que  $K_N$ ,  $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$  restent supérieur à  $K_{nc}$ , le matériau n'est pas endommagé dans le sens que ces modules équivalents ne dépendent pas des décohésions aux interfaces. Pour une valeur comprise entre  $K_{nc}$  et  $K_{nd}$ , les interfaces apparaissent endommagées, et le comportement du matériau dépend fortement des paramètres de décollement et de cisaillement aux interfaces. Ensuite pour des valeurs inférieures à  $K_{nd}$ , les modules équivalents ne dépendent plus des paramètres de dédommagement aux interfaces. Les interfaces apparaissent comme complètement endommagées.

### 3 Homogénéisation du comportement hygroélastique de composites stratifiés avec dégradation interfaciale

Nous avons vu précédemment que la méthode des moyennes en homogénéisation utilisée dans le cadre des milieux à structure périodique fine conduit à la caractérisation du comportement homogénéisé de matériaux composites hygroélastiques que l'on qualifiera d'exact. Dans le cas des composites unidirectionnels, où la géométrie de la cellule de base ne permet pas de déterminer de manière analytique le comportement homogénéisé, son obtention pourra se faire par le biais d'outils numériques comme la méthode des éléments finis. Nous allons voir maintenant de quelle manière, dans le cas de composites stratifiés, la technique d'homogénéisation périodique permet d'obtenir de manière analytique le comportement hygroélastique équivalent. Le cas du stratifié a déjà fait l'objet d'études dans la littérature, notamment en élasticité par H. Dumontet [67], et en thermoélasticité par G. L'Hostis [131]. Nous allons étendre ici les résultats de G. L'Hostis au cas de composites hygroélastiques où des phénomènes de décohésions peuvent être présents aux interfaces.

### 3.1 Le problème cellulaire

Considérons, comme au chapitre 2, un matériau stratifié constitué d'un grand nombre de couches s'empilant périodiquement suivant la direction  $(0, \mathbf{e}_3)$ . Les couches sont supposées homogènes de comportement hygroélastique orthotrope. La loi de comportement de chacune des couches est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 0 & 0 & 0 & \theta_{11} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{1133} & 0 & 0 & 0 & \theta_{22} \\ a_{1133} & a_{1133} & a_{3333} & 0 & 0 & 0 & \theta_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{2323} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{1212} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.75})$$

où nous avons  $\theta_{ij} = -a_{ijkh}\beta_{kh}$

Des phénomènes de glissement et de décollement sont supposés pouvoir apparaître entre ces couches. Dans le cas considéré ici d'un composite stratifié, la périodicité du matériau est quelconque dans les directions  $\mathbf{e}_1$ , et  $\mathbf{e}_2$ . De sorte que l'on peut prendre comme cellule de base,

$$Y = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times Y_3 \quad (\text{III.3.76})$$

Le comportement hygroélastique à l'échelle microscopique n'est pas nécessairement fonction que de la variable  $y_3$ , ce qui se traduit par :

$$a(y) = a(y_3) \quad \beta(y) = \beta(y_3) \quad (\text{III.3.77})$$

Si l'on reprend le problème d'homogénéisation périodique à déformation macroscopique imposée III.3.20 noté (PY), la dépendance du champ de contrainte microscopique  $\sigma(y)$  en  $y_3$  uniquement nous amène à écrire ce problème cellulaire de la manière suivante :

Trouver un champ de déplacements  $u$  et un champ de contraintes  $\sigma$  définis sur la cellule de base  $Y$  et satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dy_3} \sigma(y_3) = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma(y_3) = a(y_3)(\varepsilon(\mathbf{u}) - \beta(y_3)\Delta m) & \text{dans } Y \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & Y - \text{périodique} \\ \sigma(y_3)(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \varepsilon(\mathbf{u}) \gg_Y = \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i n_j + u_j n_i) dy \right\} = \mathbf{E} & \\ \sigma_N(y_3) = K_N(D)[[u_N]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T(y_3) = K_T(D)[[u_T]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.3.78})$$

où  $\mathbf{E}$  est la déformation macroscopique imposée. La solution  $(\mathbf{u}, \sigma)$  étant linéaire par rapport aux quantités macroscopiques  $\mathbf{E}$  et  $\Delta m$ , la loi de comportement homogénéisé nous est donnée par l'expression suivante :

$$\ll \sigma \gg_{Y_3} = a^{hom} \ll \varepsilon(\mathbf{u}) \gg_{Y_3} - a^{hom} \beta^{hom} \Delta m \quad (\text{III.3.79})$$

Pour obtenir explicitement le comportement homogénéisé, nous sommes donc amenés à résoudre le problème cellulaire III.3.78. Il est à noter tout de même qu'il sera possible d'obtenir les coefficients homogénéisés sans avoir à résoudre explicitement ces systèmes différentiels dans le cas où l'on considère une interface parfaite entre les différentes couches des stratifiés, H. Dumontet [67].

### 3.2 Obtention des coefficients homogénéisés

#### 3.2.1 Les coefficients homogénéisés

Du fait de la linéarité du problème III.3.78, sa solution peut se décomposer de la manière suivante :

$$\mathbf{u}(x, y_3) = E_{kh}(x)\mathbf{v}^{kh}(y_3) + \Delta m(x)\mathbf{w}(y_3) \quad (\text{III.3.80})$$

De plus, afin de se placer dans un espace de fonctions Y-périodiques, on effectue le changement de variable classique (G. Duvaut [68], F. Léné [127]) :

$$v_i^{kh} = y_h \delta_{ki} - \chi_i^{kh} \quad (\text{III.3.81})$$

alors nous avons :

$$\varepsilon_{ij}(v^{kh}) = -\varepsilon_{ij}(\chi^{kh}) + \frac{1}{2}(\delta_{hj}\delta_{ki} + \delta_{hi}\delta_{kj}) \quad (\text{III.3.82})$$

Par la suite, nous noterons  $\Pi_{kh}^{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{hj} + \delta_{kj}\delta_{hi})$ .

En injectant le changement de variables, on obtient les expressions des coefficients homogénéisés :

$$\begin{cases} a_{ijkh}^{hom} = \frac{1}{|Y_3|} \left[ \int_{Y_3} a_{ijkh}(y_3) y_3 - \int_{Y_3} a_{khmn}(y_3) \frac{\partial \chi_m^{ij}(y_3)}{\partial y_n} dy_3 \right] \\ a_{ijkh}^{hom} \beta_{kh}^{hom} = \frac{1}{|Y_3|} \left[ \int_{Y_3} a_{ijkh}(y_3) \beta_{kh}(y_3) y_3 - \int_{Y_3} a_{khmn}(y_3) \frac{\partial w_m(y_3)}{\partial y_n} dy_3 \right] \end{cases} \quad (\text{III.3.83})$$

où  $\chi^{ij}(y_3) = [\chi_1^{ij}(y_3), \chi_2^{ij}(y_3), \chi_3^{ij}(y_3)]$  et  $\mathbf{w} = [w_1(y_3), w_2(y_3), w_3(y_3)]$  sont les champs  $Y_3$ -périodiques vérifiant aux sens des distributions les systèmes suivants obtenus en injectant les expressions III.3.80 et III.3.81 dans le problème cellulaire III.3.78, soit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \sigma_{i3}^{kh}(y_3) = \frac{d}{dy_3}(a\Pi_{i3}^{kh}) & \text{dans } Y \\ \sigma^{kh}(y_3)_{i3} = a_{i3kh}(y_3)(\varepsilon(\chi_{i3}^{kh})) & \text{dans } Y \\ \chi^{kh} & Y - \text{périodique} \\ \sigma^{kh}(y_3)(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \sigma_{33}^{kh}(y_3) = K_N(D)[\chi_{33}^{kh}] + a_{33kh}\Pi_{33}^{kh} & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{\alpha 3}^{kh}(y_3) = K_T(D)[\chi_{\alpha 3}^{kh}] + a_{\alpha 3kh}\Pi_{\alpha 3}^{kh} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.84})$$

$\alpha = (1, 2)$ .

et le problème :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} s(y_3) = \frac{d}{dy_3}(a\beta) & \text{dans } Y \\ s(y_3) = a(y_3)(\varepsilon(\mathbf{w})) & \text{dans } Y \\ \mathbf{w} & Y - \text{périodique} \\ s(y_3)(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ s_N(y_3) = K_N(D)[w_N] + a\beta\nu_N & \text{sur } \Gamma \\ s_T(y_3) = K_T(D)[w_T] + a\beta\nu_T & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.3.85})$$

où  $\nu$  est la normale extérieure.

### 3.2.2 Calcul des problèmes cellulaires

Nous allons maintenant chercher à résoudre explicitement les problèmes cellulaires III.3.84 et III.3.85 dont la détermination sera plus aisée sous cette forme. Nous reprenons ici la même démarche que G. Duvaut [68].

**Calcul du champ  $\chi^{ij}(y_3)$**  Plaçons nous dans un premier temps dans le cas où  $i = j = 1$ , ce qui nous permet de déterminer les composantes de  $\chi^{11}$ .

Des deux premières équations d'équilibre, les coefficients  $a_{ijkh}(y_3)$  étant constants dans chaque couche, nous en déduisons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \left[ a_{1313} \frac{d}{dy_3} (\chi_1^{11}(y_3)) \right] = 0 \\ \frac{d}{dy_3} \left[ a_{2313} \frac{d}{dy_3} (\chi_1^{11}(y_3)) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.86})$$

Nous avons donc  $\frac{d}{dy_3} \chi_1^{11}$  et  $\frac{d}{dy_3} \chi_2^{11}$  constants dans chaque couche. Nous pouvons par conséquent en déduire les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \chi_1^{11} = c_i y_3 + d_i & \text{dans chaque couche (i)} \\ \chi_2^{11} = C_i y_3 + D_i & \text{dans chaque couche (i)} \end{cases} \quad (\text{III.3.87})$$

Les constantes introduites sont alors déterminées à partir des conditions de périodicité et des conditions aux limites aux interfaces de continuité du vecteur contrainte et du saut des déplacements. Nous obtenons alors  $c_i = 0$  et  $C_i = 0$  dans chaque couche du stratifié. Nous en déduisons donc que  $\chi_1^{11}$  et  $\chi_2^{11}$  sont constants.

La troisième équation d'équilibre conduit à :

$$\frac{d}{dy_3} \left[ a_{3333}(y_3) \frac{d}{dy_3} \chi_3^{11} \right] = - \frac{d}{dy_3} a_{3311} \quad (\text{III.3.88})$$

On peut alors montrer à partir des conditions aux limites sur l'interface et de périodicité le résultat suivant :

$$\frac{d}{dy_3} \chi_3^{11} = \frac{a_{3311}}{a_{3333}} + \frac{1}{a_{3333}} \frac{\int_{Y_3} \frac{a_{3311}}{a_{3333}} dy_3 + \left[ \frac{a_{3311}}{a_{3333}} \right] |\Gamma|}{\frac{1}{K_N} - \int_{Y_3} \frac{1}{a_{3333}}} \quad (\text{III.3.89})$$

De la même manière, nous montrons que pour  $(i, j) \neq (\alpha, 3)$ ,  $\chi^{ij}$  est de la forme  $[0, 0, \chi_3^{ij}(y_3)]$  avec :

$$\frac{d}{dy_3} \chi_3^{ij} = \frac{a_{33ij}}{a_{3333}} + \frac{1}{a_{3333}} \frac{\int_{Y_3} \frac{a_{33ij}}{a_{3333}} dy_3}{\frac{1}{K_N} - \int_{Y_3} \frac{1}{a_{3333}}} \quad (\text{III.3.90})$$

La même méthodologie pour  $(i, j) = (\alpha, 3)$ , c'est-à-dire pour les  $\chi^{\alpha 3}$  nous permet de montrer le résultat suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \chi_1^{\alpha 3}(y_3) = \delta_{1\alpha} + \frac{1}{a_{1313}} \frac{\delta_{1\alpha} Y_3}{\frac{1}{K_{T1}} - \int_{Y_3} \frac{1}{a_{1313}} dy_3} & \text{dans chaque couche} \\ \frac{d}{dy_3} \chi_2^{\alpha 3}(y_3) = \delta_{2\alpha} + \frac{1}{a_{2323}} \frac{\delta_{2\alpha} Y_3}{\frac{1}{K_{T2}} - \int_{Y_3} \frac{1}{a_{2323}} dy_3} & \text{dans chaque couche} \end{cases} \quad (\text{III.3.91})$$

**Calcul du champ w** En procédant de la même manière, nous pouvons montrer que  $w_1$  et  $w_2$  sont constants sur  $Y_3$  et que  $w_3$  nous est donné par le résultat suivant :

$$\frac{d}{dy_3} w_3(y_3) = \frac{a_{33ii}\beta_{ii}}{a_{3333}} + \frac{1}{a_{3333}} \frac{- \int_{Y_3} \frac{a_{33ii}\beta_{ii}}{a_{3333}} dy_3}{\int_{Y_3} \frac{1}{a_{3333}} dy_3 - \frac{1}{K_N}} \quad (\text{III.3.92})$$

## III.4 Comparaison Modélisation-Expérience

Nous avons développé un modèle de prédiction permettant de déterminer le comportement hygroélastique de matériaux composites, tenant compte de la présence de décohésions aux interfaces. Plus précisément, la modélisation proposée permet d'obtenir des bornes analytiques des coefficients d'expansion hygrométrique transverse et longitudinal équivalents. L'objet de cette partie est donc d'analyser si cette modélisation permet une meilleure estimation des propriétés de gonflement de matériaux composites que les modèles classiques, qui supposent une continuité parfaite des efforts entre la fibre et la matrice. Pour cela, nous allons chercher à confronter les résultats expérimentaux aux valeurs des bornes supérieure et inférieure, obtenues en introduisant des propriétés de décohésions aux interfaces. Comme pour les phénomènes hygroscopiques (voir chapitre II), nous ne traiterons ici que le cas des composites unidirectionnels.

### 1 Cas du composite unidirectionnel à base de résine époxyde

Afin de rester le plus général possible, nous avions considéré dans notre modélisation le cas où les coefficients de cisaillement interfacial  $K_{T1}$  et  $K_{T2}$ , et le coefficient de décollement interfacial  $K_N$  étaient tous les trois indépendants. Le but étant ici de montrer que l'introduction de phénomènes de décohésions aux interfaces permet d'avoir une meilleure description des propriétés hygroélastiques de matériaux composites, nous nous placerons dans le cas particulier où ces trois coefficients sont identiques. Le coefficient, qui caractérisera l'influence globale des pertes d'adhésion aux interfaces, sera désigné par  $K$ . En effet, une analyse exacte de l'influence de chacun des paramètres d'endommagement, introduits aux interfaces, nécessite de mesurer expérimentalement l'ensemble des 5 modules élastiques indépendants du composite.

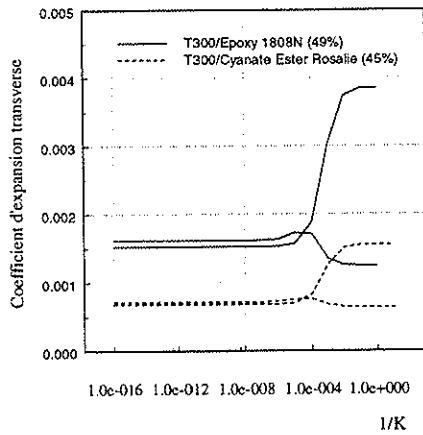


Figure III.4.1: Evolution des bornes des coefficients d'expansion hygrométrique équivalents pour les composites en fibres de carbone résine époxy 1808N et cyanate ester Rosalie.

La caractérisation du coefficient de décohésion interfaciale apparaît plus délicate ici, car la modélisation proposée fournit un encadrement des coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés. De plus, l'analyse et la validation de ces bornes au paragraphe 2.3 ont mis en évidence pour des interfaces imparfaites, des écarts importants entre les valeurs des coefficients d'expansion obtenues par l'approche auto-cohérente (Z. Hashin [94]) et l'approche primale. En revanche, nous avions pu constater sur le coefficient d'expansion transverse une bonne

corrélation entre l'approche duale et la méthode auto-cohérente, aussi bien lorsque l'on suppose avoir des interfaces parfaites et imparfaites. Prendre tout simplement la moyenne des deux bornes pour caractériser la décohésion à l'interface pourrait ainsi particulièrement fausser le résultat. Il nous est donc apparu plus légitime de recaler les résultats expérimentaux du coefficient d'expansion transverse sur les valeurs obtenues avec l'approche duale.

Plus précisément, à partir de la valeur mesurée du coefficient d'expansion de la matrice et du taux de fibres, nous calculons les évolutions en fonction de  $K$  des bornes des coefficients d'expansion transverse et longitudinal, en utilisant les expressions analytiques développées précédemment. Nous avons ainsi représenté sur la Figure III.4.1 les évolutions obtenues pour les deux composites testés. A partir de la Figure III.4.1, il est alors possible de déterminer la valeur du coefficient de décohésion aux interfaces assurant une bonne corrélation du coefficient d'expansion transverse. On peut ensuite déterminer la borne inférieure du coefficient d'expansion transverse et les deux bornes du coefficient d'expansion longitudinal.

Nous avons représenté sur les Figures III.4.2 et III.4.3 la comparaison des valeurs expérimentales et théoriques des coefficients d'expansion hygrométrique transverse et longitudinal, obtenues au cours des différents paliers de mesures. Les valeurs du coefficient de décohésion interfaciale assurant la corrélation sur la borne supérieure du coefficient d'expansion transverse sont données dans les tableaux III.4.1 et III.4.2.

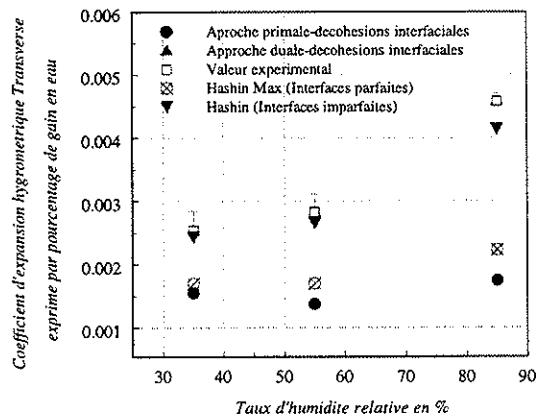


Figure III.4.2: Evolution du coefficient d'expansion hygrométrique transverse au cours des différents paliers pour le composite T300/Epoxy 1808N (49% de fibres).

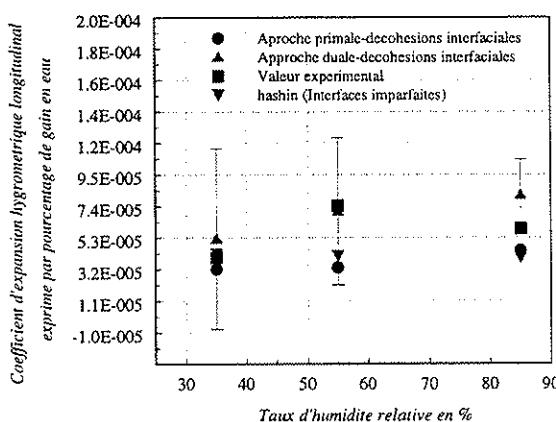


Figure III.4.3: Evolution du coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal au cours des différents paliers pour le composite T300/Epoxy 1808N (49% de fibres).

Nous pouvons ainsi noter que l'introduction d'un paramètre de décohésion interfaciale permet une bien meilleure estimation des propriétés de gonflement du matériau composite, aussi bien pour le coefficient d'expansion hygrométrique transverse et longitudinal. Le modèle de Hashin, qui suppose un contact parfait entre la fibre et la matrice, sous-estime de façon non négligeable les coefficients de gonflements du composite. Nous retrouvons ici que l'approche primale fournit une mauvaise estimation du coefficient d'expansion transverse, les résultats

Taux d'humidité	$1/K$	$\beta_T^{sup}$	$\beta_T^{inf}$	$\beta_T^{exp}$
35%	3.8E-04	2.54E-03	1.71E-03	2.54E-03
55%	1E-03	2.83E-03	1.348E-03	2.83E-03
85%	5E-03	4.58E-03	1.73E-03	4.58E-03

Tableau III.4.1: Valeurs expérimentales et théoriques obtenues pour le coefficient d'expansion transverse du composite T300/Epoxy 1808N (49% de fibres).

Taux d'humidité	$1/K$	$\beta_l^{sup}$	$\beta_l^{inf}$	$\beta_l^{exp}$
35%	3.8E-04	5.3E-05	3.1E-05	4E-05
55%	1E-03	7.2E-05	3.4E-05	7.43E-05
85%	5E-03	8.3E-05	4.45E-05	5.93E-05

Tableau III.4.2: Valeurs expérimentales et théoriques obtenues pour le coefficient d'expansion longitudinal pour le composite T300/Epoxy 1808N (49% de fibres).

étant comparables à ceux du modèle de Hashin avec interfaces parfaites. Alors que l'approche duale conduit à une très bonne confrontation expérimentale sur le coefficient d'expansion transverse et longitudinal au palier de 35% et 55% d'humidité relative en considérant la même valeur du paramètre de décohésions aux interfaces. On pourrait donc supposer que les phénomènes de glissement et de décollement aux interfaces sont comparables. Cette confrontation, bien que moins bonne au palier de 85%, permet d'estimer le coefficient d'expansion longitudinal à moins de 25%. Il faudra rester néanmoins très prudent sur ces remarques compte tenu de la précision sur la détermination du coefficient d'expansion longitudinal. Il apparaît en outre que le modèle de Hashin, qui tient compte de phénomènes de décohésions aux interfaces, semble être insuffisant pour décrire les phénomènes d'expansion dans le sens des fibres contrairement à l'approche duale. Le coefficient d'expansion longitudinal est ainsi sous estimé à chaque palier considéré. On peut noter également une progression du coefficient de décohésion interfaciale (voir tableaux III.4.1 et III.4.2) laissant supposer une influence directe de l'humidité sur la propagation et l'évolution des décohésions aux interfaces. L'introduction d'une loi d'évolution des décohésions dépendant du temps d'exposition humide et de l'importance des phénomènes de gonflement dans la résine apparaît réaliste.

## 2 Cas du composite à base de résine cyanate ester Rosalie

Une analyse similaire a été réalisée sur un composite à base de résine cyanate ester 'Rosalie' correspondant à un taux volumique de fibres de 44%.

Il apparaît également que la prise en compte de la présence de décohésions aux interfaces permet une meilleure estimation de la réponse aux phénomènes de gonflement du matériau composite. En introduisant la même valeur du coefficient de décohésion interfaciale entre les fibres et la matrice, nous pouvons améliorer sensiblement la prédiction des coefficients d'expansion hygrométrique transverse et longitudinal. Nous pouvons également noter que contrairement au cas du composite considéré à base de résine époxy, le paramètre de décohésion reste constant au cours des différents paliers. Au regard de la Figure [III.4.1], cette valeur pourrait correspondre au cas d'un matériau où les interfaces apparaissent complètement endommagées. Or, les analyses par micro-graphies réalisées après le palier de 55% d'humidité relative n'ont montré la présence de décohésions que localement. Les erreurs relatives particulièrement élevées, pour les composites T300/cyanate ester 'Rosalie' testés, peuvent expliquer que la caractérisation du coefficient de décohésion interfaciale peuvent expliquer cette valeur.

En conclusion, la modélisation proposée nous a permis de développer un modèle de prédiction des propriétés hygroélastiques de matériaux composites tenant compte de la présence de décohésions aux interfaces. La prise en compte de phénomènes de décollement et de glissement aux interfaces nous a conduit à une meilleure estimation des coefficients d'expansion hygrométrique, dans tous les cas sous-estimés par les modèles classiques, qui supposent les interfaces parfaites. Pour les deux composites testés, les phénomènes de décohésion se sont

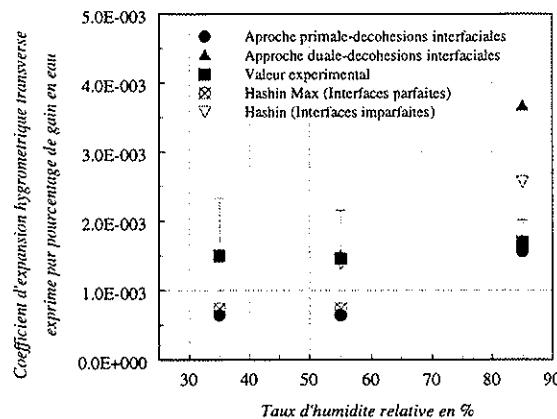


Figure III.4.4: Evolution du coefficient d'expansion hygrométrique transverse pour le composite T300/ cyanate ester Rosalie (44% de fibres) au cours des différents paliers.

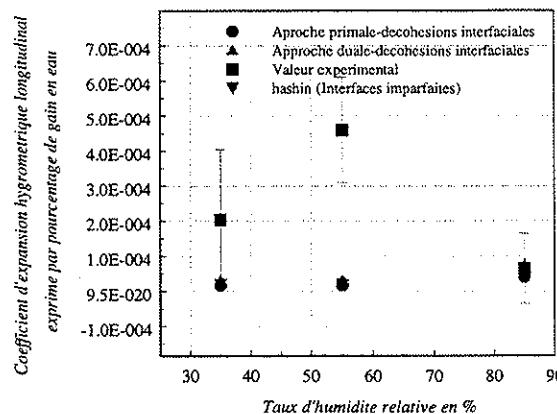


Figure III.4.5: Evolution du coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal pour le composite T300/ cyanate ester Rosalie (44% de fibres) au cours des différents paliers

Taux d'humidité	$1/K$	$\beta_T^{sup}$	$\beta_T^{inf}$	$\beta_T^{exp}$
35%	1E-02	1.51E-03	6.44E-04	1.5E-03
55%	1E-02	1.51E-03	6.44E-04	1.46E-03
85%	1E-02	3.66E-03	1.56E-03	1.68E-03

Tableau III.4.3: Valeurs expérimentales et théoriques obtenues pour le coefficient d'expansion transverse pour le composite T300/cyanate ester Rosalie (44% de fibres)

Taux d'humidité	$1/K$	$\beta_l^{sup}$	$\beta_l^{inf}$	$\beta_l^{exp}$
35%	1E-02	3.10E-05	1.68E-05	2.042E-04
55%	1E-02	3.10E-05	1.68E-05	4.60E-04
85%	1E-02	7.50E-05	4.051E-05	6.52E-05

Tableau III.4.4: Valeurs expérimentales et théoriques obtenues pour le coefficient d'expansion transverse pour le composite T300/cyanate ester Rosalie (44% de fibres)

avérés avoir un effet important sur la tenue dimensionnelle du matériau composite. Dans le cas du matériau composite T300/Epoxy 1808N, la même valeur du coefficient de décohésions aux interfaces a conduit à une très bonne corrélation entre les valeurs expérimentales et théoriques provenant de l'approche dual, des coefficients d'expansion hygrométrique pour les paliers de 35% et 55% d'humidité.

## **Chapitre IV**

# **Analyse de la stabilité dimensionnelle de structures des deux grands détecteurs de particules polyvalents du LHC**



# IV.1 Mise en oeuvre numérique d'une analyse transitoire hygromécanique

Nous présentons dans ce chapitre des calculs d'hygromécanique en transitoire sur des structures supports en composite des détecteurs de particules du LHC. Dans cette analyse, les calculs numériques ont été réalisés en considérant le comportement hygromécanique homogénéisé du matériau composite, calculé à partir des expressions établies aux chapitres 2 et 3.

Avant de présenter les études numériques, nous nous proposons de décrire brièvement la méthodologie générale utilisée pour l'analyse transitoire des effets de l'humidité sur la stabilité dimensionnelle de matériaux composites. L'ensemble des applications numériques présentées dans ce chapitre a été réalisé selon leurs spécificités avec les codes d'éléments finis Castem 2000 et Ansys.

## 1 Procédure de Résolution

Il n'existe pas d'analyse hygromécanique proprement dite dans les logiciels Castem2000 et Ansys. Nous avons en revanche pu utiliser les modules thermique et thermo-mécanique en exploitant l'analogie entre les phénomènes thermique et hygrométrique. Cette analogie s'observe entre les modèles de Fick et de Fourier. C'est pourquoi les applications numériques ont été menées avec le modèle diffusif de Fick.

On rappelle que les équations de comportement hygromécanique et de diffusion de l'humidité en considérant un modèle de diffusion de Fick, sont données par les équations suivantes :

- équation du mouvement

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (\text{IV.1.1})$$

- relation de comportement mécanique

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}(\varepsilon(u) - \beta_{ij}\delta m) \quad \text{avec } m = \frac{c}{\rho} \quad (\text{IV.1.2})$$

- équation de diffusion de l'humidité

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div q} = 0 \quad (\text{IV.1.3})$$

- loi complémentaire de Fick

$$q_i = -D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (\text{IV.1.4})$$

où  $a$  désigne le tenseur de rigidité,  $D$  le tenseur de diffusivité. A ces équations, il convient d'ajouter des conditions aux limites et initiales.

L'analyse hygro-mécanique transitoire se fait donc en deux étapes. Une première étape consiste à résoudre le problème de diffusion posé sur la structure. La seconde étape consiste à injecter le champ de concentration d'humidité obtenu à chaque pas de temps comme état de référence dans le calcul structurel d'élasticité. Revenons brièvement sur la mise en oeuvre de ces deux étapes.

## 1.1 Résolution du problème de diffusion

La résolution du problème de diffusion est faite sur la structure homogène équivalente. Au préalable, le comportement équivalent du matériau composite étudié aura donc été calculé en utilisant les méthodes présentées au chapitre 2. Les données concernant le comportement de chacun des constituants proviennent soit de résultats issus de la littérature, soit de résultats expérimentaux présentés au chapitre 2.

La résolution du problème de diffusion se fait pour la discrétisation temporelle à l'aide du schéma aux différences finies implicite à un pas connu sous le nom de "théta-méthode" couplée à une discrétisation spatiale par éléments finis. Nous avons utilisé en pratique un schéma de Crank-nicholson correspondant à une valeur de  $\theta = \frac{1}{2}$ . Ce schéma est inconditionnellement stable. Cependant, ce schéma peut générer des oscillations si  $D\Delta t > 2$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps, O.C. Zienkiewicz et R.L.Taylor [189]. On pourra utiliser dans certaines applications le schéma de Galerkin correspondant à la valeur de  $\theta = 2/3$  qui permet de réduire ces phénomènes mais qui a le désavantage d'être moins précis.

Les conditions aux limites du problème de diffusion générées par l'environnement humide relient la concentration d'humidité à imposer sur le contour de la structure au taux d'humidité du milieu environnant. Or, il a été rappelé au chapitre 2 que, dans un milieu humide à saturation, la masse d'eau  $M_s$  à saturation est reliée au taux d'humidité ambiant  $\Phi$  par la relation empirique :

$$M_s = a\Phi^b \quad (\text{IV.1.5})$$

où  $a$  et  $b$  étant des constantes dépendant de la nature du matériau.

Compte tenu de cette relation, la concentration d'humidité surfacique à imposer sur le contour de la structure nous est donnée par l'expression :

$$c_m = \rho_{sec} a \Phi^b \quad (\text{IV.1.6})$$

où  $\rho_{sec}$  représente la densité du matériau sec.

## 1.2 Résolution du problème de mécanique

La résolution du problème d'hygroélasticité se fait pour chaque pas de temps par la méthode des éléments finis.

La méthode de résolution utilisée dans les applications réalisées avec le code Castem2000 est la méthode directe par factorisation triangulaire de Cholesky ou LDU. En ce qui concerne les applications réalisées avec le code Ansys, la méthode utilisée est une méthode directe, appelée "frontal solver". Cette méthode, basée sur une factorisation triangulaire de la matrice  $A$ , a la spécificité d'assembler et de calculer la solution en même temps pour chaque élément. Cela permet d'éviter un assemblage complet de la matrice.

Le problème d'hygroélasticité est résolu également sur la structure homogène équivalente, là encore les techniques d'homogénéisation développées aux chapitres 3 pour le comportement mécanique et le coefficient de couplage sont mises en oeuvre au préalable.

## IV.2 Etude du comportement hygromécanique d'une plaque composite

Les résultats présentés dans ce paragraphe concernent une plaque composite soumise à un environnement ambiant humide. Sur cet exemple, nous avons cherché d'une part à tester la mise en oeuvre des différentes techniques présentées aux chapitres précédents et d'autre part à dégager les paramètres influents sur la stabilité de la plaque. Pour cela, on étudiera plus spécifiquement le gain en poids en eau, les déformations et contraintes hygrométriques ainsi que l'influence de différents paramètres tels que le taux d'humidité ambiante fixe ou variable, la diffusivité interfaciale, la température ou encore les décohésions des interfaces.

### 1 Description de la plaque testée

La plaque étudiée a pour dimensions  $250 \times 500 \times 0.5\text{mm}$ . Elle est réalisée en matériau composite unidirectionnel composé de fibres de carbone T300 et résine époxy 3501-6 pour un taux volumique de fibres de 60%, voir Figure [IV.2.1].

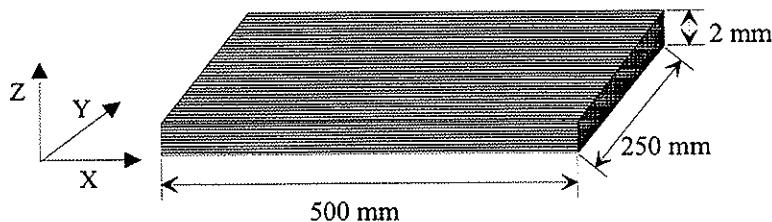


Figure IV.2.1: Dimensions de la plaque testée

Les caractéristiques mécaniques et diffusives des constituants fibres et matrice proviennent de la littérature, G.S. Springer [173], P.K. Mallick [138] (l'ensemble des propriétés mécaniques des résines testées n'ayant pas fait l'objet d'une caractérisation expérimentale au cours de notre étude). Elles sont résumées dans le tableau suivant :

Constituants	E en GPa	$\nu$	D en $\text{mm}^2.\text{s}^{-1}$	$\beta/\%M$
Fibres	220	0.2	—	—
Matrice	3.2	0.34	5.99E-08	3.2E-03

Tableau IV.2.1: Propriétés mécaniques des constituants

Les caractéristiques de l'unidirectionnel sont obtenues par le processus d'homogénéisation décrit au chapitre 2 pour le comportement diffusif et au chapitre 3 pour le comportement mécanique. Plus précisément, en ce qui concerne les propriétés mécaniques, nous avons utilisé les valeurs moyennées des bornes supérieure et inférieure, excepté pour le coefficient d'expansion hygrométrique où nous considérons les valeurs obtenues à partir de l'approche duale compte tenu des observations faites au chapitre 3 sur la marge entre les deux bornes. Enfin, nous n'avons pas tenu compte dans un premier temps d'un possible endommagement aux interfaces, ni de diffusion interfaciale.

Les propriétés homogénéisées ainsi obtenues ont les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{xx} = 2.39E - 08 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad D_{yy} = D_{zz} = 1.5E - 08 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ E_x = 133000 \text{ MPa}, \quad E_y = E_z = 15230 \text{ MPa}, \\ \nu_{xy} = \nu_{xz} = 0.28, \quad \nu_{yz} = 0.57, \\ G_{xy} = G_{xz} = 5400 \text{ MPa}, \quad G_{yz} = 4869 \\ \beta_x = 3.82E - 05 / \% M \quad \beta_y = \beta_z = 1.78E - 03 / \% M \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.1})$$

La plaque en appui simple est encastrée en un point extrémité et n'est pas sollicitée mécaniquement. Elle est à une température fixée de  $20^\circ\text{C}$  et placée brutalement dans un milieu ambiant présentant un taux d'humidité de 50% ou dans un milieu présentant un taux d'humidité variable cyclique par palier.

## 2 Influence du chargement hygrométrique

### 2.1 Taux d'humidité constant

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cas où la plaque initialement à un taux d'humidité de 0% est brutalement placée dans un environnement à un taux d'humidité de 50%. La plaque étant non chargée mécaniquement, on peut montrer aisément que les contraintes et déformations dites "élastiques" et "hygrométriques" indiquées respectivement par  $\epsilon$  et  $\epsilon_{hy}$  sont définies de la manière suivante :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{hy} \quad (\text{IV.2.2})$$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{hy} = \frac{\beta}{\rho} \Delta c \quad \sigma_{hy} = a \frac{\beta}{\rho} \Delta c \\ \sigma_e = a \epsilon(u) - \sigma_{hy} \quad \epsilon_e = A^{-1} \sigma_e \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.3})$$

où  $A$  est la matrice de rigidité et  $u$  est le champ de déplacements obtenu en résolvant le problème d'hygroélasticité transitoire.

Les évolutions résultantes de la concentration d'humidité des déplacements, des déformations et contraintes sont ainsi représentées sur les figures [IV.2.2] à [IV.2.7].

Nous pouvons noter sur la Figure [IV.2.2], qu'après phase linéaire en début d'absorption, on a infléchissement de la courbe du gain en eau suivi d'une amorce de saturation au bout de 6 mois pour une plaque de  $2\text{mm}$  d'épaisseur. Cette amorce de saturation sera d'autant plus tardive que l'on va se situer au milieu de la plaque. Une complète saturation de cette plaque ne sera atteinte qu'au bout de 4 ans. Nous retrouvons donc le fait que les phénomènes d'absorption d'eau dans les matériaux composites sont des processus très lents. On peut par conséquent aisément penser que les conséquences pourront être critiques pour les structures supports des détecteurs de particules qui pourraient avoir une épaisseur plus élevée et pour lesquelles il sera malgré tout crucial que la structure soit stable pendant toute la durée des prises de mesures qui devraient s'échelonner sur 6 mois.

On peut principalement noter sur les Figures [IV.2.3] et [IV.2.4] qu'une variation du taux d'humidité d'environ 50% engendre des déplacements et des déformations significatifs. Les déplacements prépondérants, suivant la largeur de la plaque, sont de l'ordre de  $0.3\text{mm}$ . Compte tenu de la dimension de la plaque, on peut dire que cette valeur est déjà élevée au regard des précisions attendues dans les expériences du LHC pour des structures de plusieurs mètres cubes. Il est vrai qu'une optimisation de l'orientation des plis pourra permettre de réduire les déplacements suivant  $U_x$  mais ceci se fera au détriment des déplacements  $U_z$ . En effet, le fait que l'on ait un composite en fibres de carbone orientées suivant la longueur de la plaque permet de minimiser le coefficient d'expansion dans cette direction et par conséquent l'allongement.

Les évolutions des contraintes hygrométriques, qui sont équivalentes au cas d'un problème d'hygroélasticité à déplacements imposés mettent clairement en évidence l'importance des phénomènes hygrométriques. Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , et  $\sigma_{zz}$  obtenues au seuil de saturation sont de l'ordre de  $47\text{MPa}$ . Ces valeurs sont plutôt

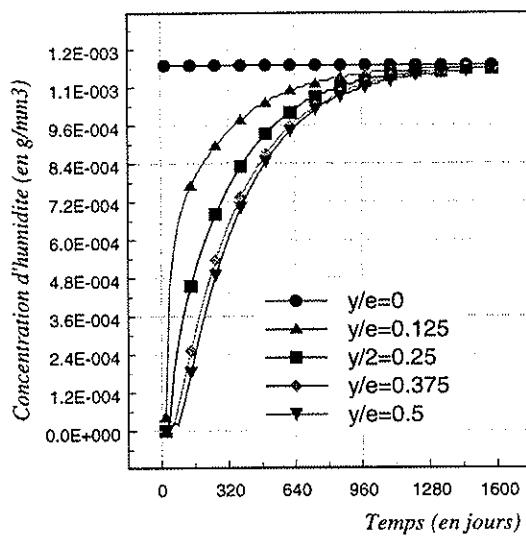


Figure IV.2.2: Concentration d'humidité en fonction de la position dans l'épaisseur

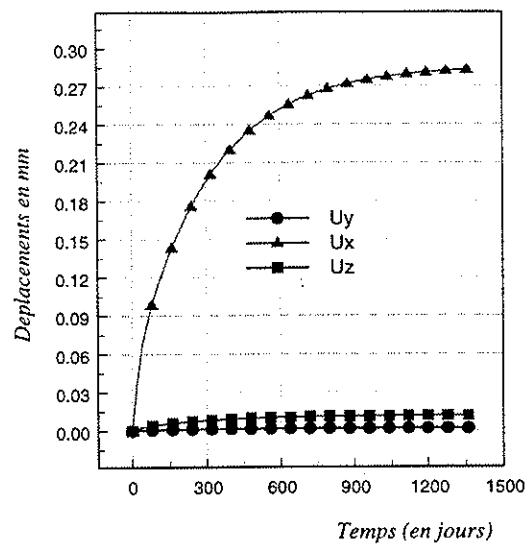


Figure IV.2.3: Evolution des déplacements en mm au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

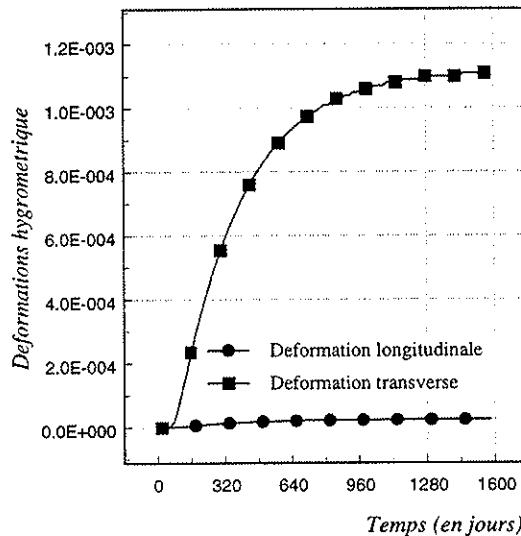


Figure IV.2.4: Evolution des déformations hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

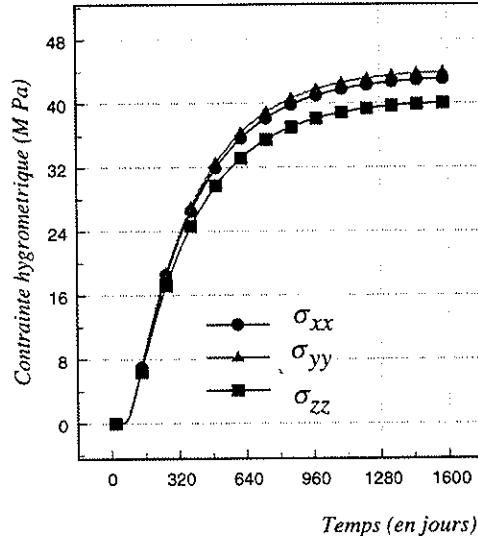


Figure IV.2.5: Evolution des contraintes hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

significatives en comparaison du seuil d'élasticité en compression qui est de l'ordre pour des composites unidirectionnels fibres de carbone/résine époxy de  $1000 \text{ MPa}$  dans la direction des fibres, et de  $200 \text{ MPa}$  transversalement. Les valeurs obtenues ici dans les directions transversales sont en effet de l'ordre de 25% du seuil d'élasticité.

La lenteur du phénomène de diffusion de l'humidité va entraîner du fait des différences de concentration d'humidité entre la surface de la plaque et l'intérieur, l'apparition de contraintes internes, que l'on a nommées "contraintes élastiques". Les évolutions des contraintes élastiques qui sont présentées à la Figure [IV.2.7] sont caractérisées par une brutale augmentation jusqu'à des valeurs de  $6 \text{ MPa}$  aux premiers instants d'exposition. Une fois

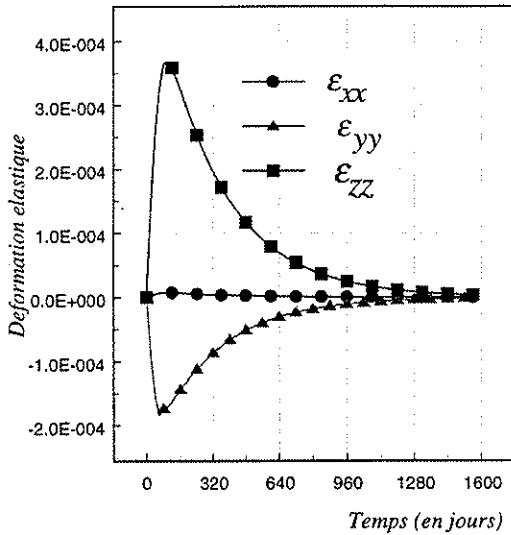


Figure IV.2.6: *Evolution des déformations dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$*

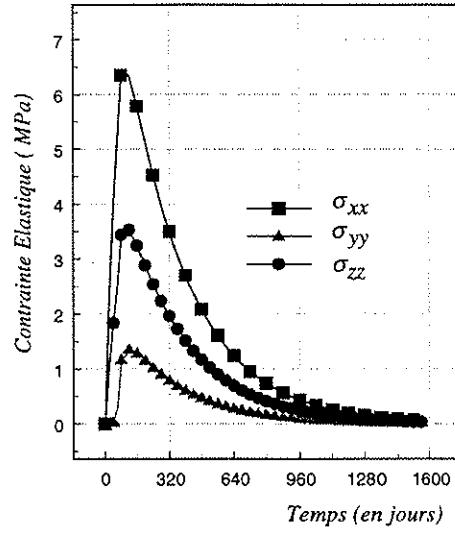


Figure IV.2.7: *Evolution des contraintes dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$*

que l'humidité a pénétré jusqu'au milieu de la plaque, on a une chute très significative des contraintes qui finissent par devenir nulles une fois que la concentration d'humidité devient homogène dans la plaque. On pourra noter que ces contraintes sont de l'ordre de 14% des valeurs prises par les contraintes dites "hygrométriques" aux premiers instants d'exposition à cet endroit de la plaque. Ces effets ne sont donc pas complètement négligeables. On va retrouver les mêmes évolutions pour les déformations dites "élastiques", aux valeurs des coefficients de souplesse correspondants près. De nouveau, les valeurs prises seront inférieures aux déformations hygrométriques mais tout de même significatives.

## 2.2 Taux d'humidité variable

La plaque est maintenant dans un environnement humide variable dans lequel le taux d'humidité change au cours du temps sous forme d'échelon.

Les variations du taux d'humidité dans les puits des expériences ATLAS et CMS, au regard des observations faites sur les expériences LEP au cours des dernières années (B. Nicquevert [150] et S. Da Mota Silva et R. Ribeiro [56]), comme nous pouvons le voir sur la Figure [IV.2.8], seront certainement très élevées. De plus, comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, il est prévu que certaines parties des détecteurs, la zone des éléments de détection à pixels, soient placés sous un flux de gaz sec ( $CO_2$  ou  $N_2$ ) pendant la période de prise de données allant approximativement du mois d'avril au mois de novembre, puis à humidité ambiante pendant la maintenance. Au vu de la figure [IV.2.8], le niveau moyen d'humidité pourrait être approximativement alors de 50%. Nous nous sommes donc placés dans deux cas particuliers. Tout d'abord, nous considérons le cas où la structure étudiée se trouve dans la zone des éléments de détection à pixels. Nous avons donc imposé à la plaque en composite un cycle sous forme d'échelon où le taux d'humidité varie de 0% à 50% d'humidité relative par période de 6 mois. La réponse du matériau est analysée sur une durée d'environ 5 ans et demi. Puis, nous prenons le cas où la plaque en composite est à humidité ambiante dont les variations au cours de l'année peuvent être décrites par approximation par la courbe de simulation représentée sur la Figure [IV.2.8].

### 2.2.1 Cas de structures sous flux d'air sec

Les évolutions des déplacements, contraintes, déformations obtenues dans le cas du premier cycle sont représentées sur les Figures [IV.2.9] à [IV.2.15].

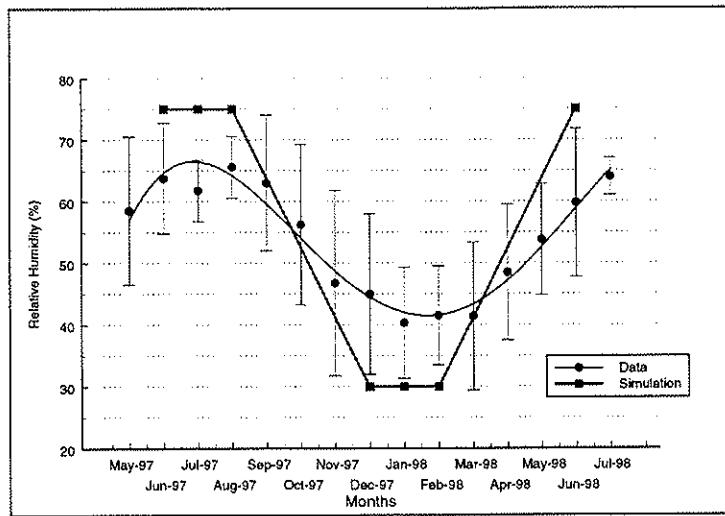


Figure IV.2.8: Evolution du taux d'humidité dans le puits d'expérience DELPHI au cours de mai 97 à juin 98, d'après S. Da Mota Silva et R. Ribeiro [56]

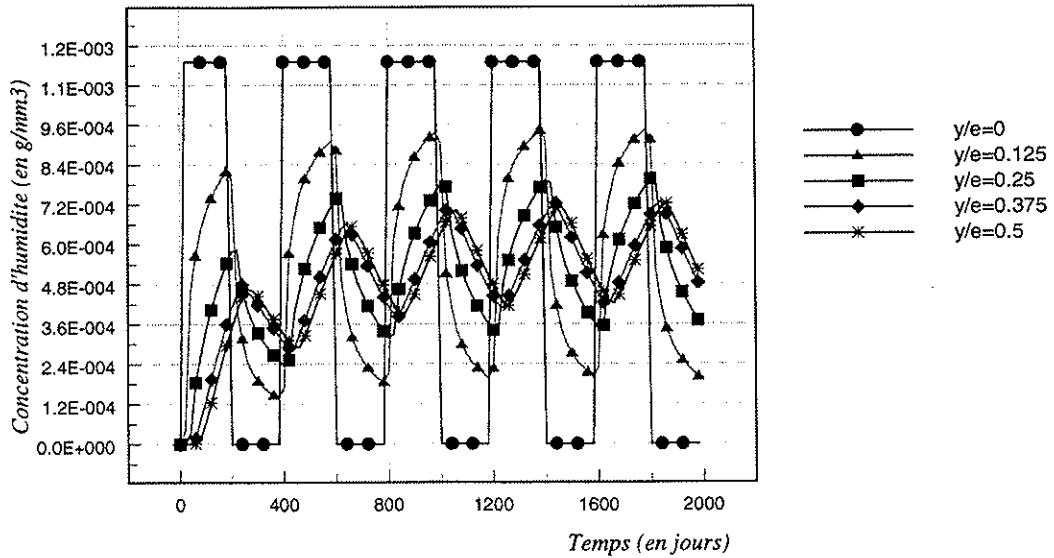


Figure IV.2.9: Evolution de la concentration d'humidité en fonction de la position dans l'épaisseur.

Nous pouvons noter sur la Figure [IV.2.9] où sont représentées les évolutions de la concentration d'humidité en fonction de la position dans l'épaisseur de la plaque, l'apparition d'un effet nuisible d'hystéresis qui va aggraver l'influence de l'humidité ambiante sur le matériau. Cet effet, déjà constaté par des auteurs comme notamment Y. Weitsman [184] est d'autant plus marqué que l'on s'éloigne de la surface de la plaque. En effet, la différence entre les deux premiers extrema de concentration d'humidité, nulle lorsque que l'on se situe sur la surface de la plaque, est de  $0.6E - 04$  en  $y/e = 0.125$  et de  $1.8E - 04$  en  $y/e = 0.5$ . Ce phénomène se justifie par la

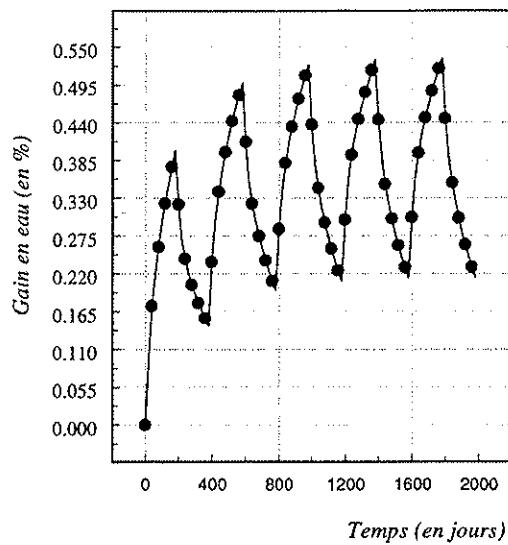


Figure IV.2.10: Evolution du gain en eau dans la plaque composite

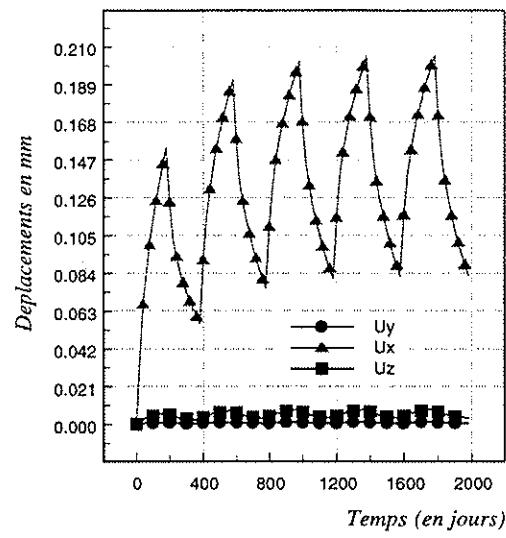


Figure IV.2.11: Evolution des déplacements en mm au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

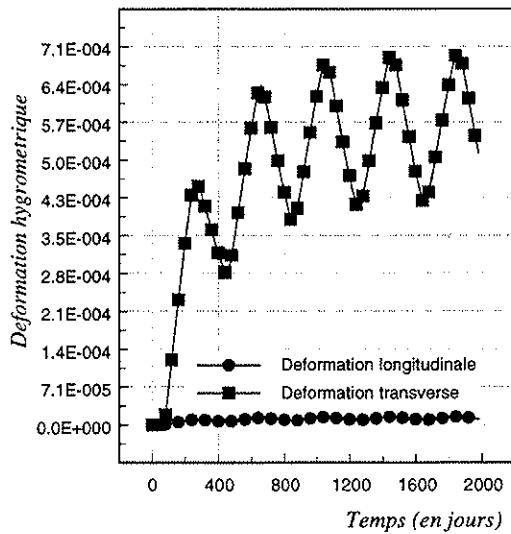


Figure IV.2.12: Evolution des déformations hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

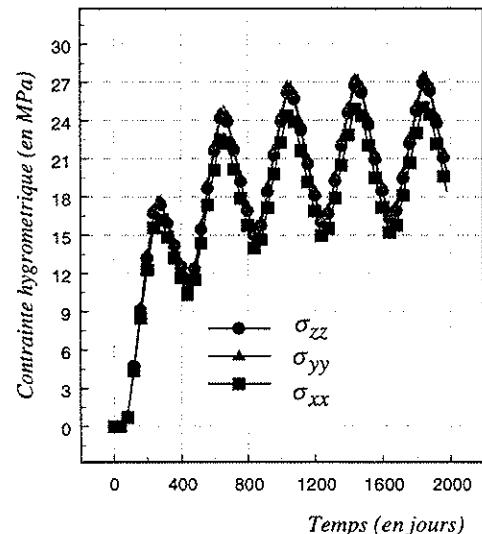


Figure IV.2.13: Evolution des contraintes hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

lenteur des phénomènes de diffusion d'humidité dans les matériaux composites entraînant un décalage des extrêmes de la concentration d'humidité lorsque l'on progresse vers l'intérieur de la plaque. En effet, alors que le taux d'humidité change brutalement dans le milieu environnant pour devenir nul par exemple lors de la phase de désorption, l'humidité déjà absorbée va continuer à diffuser vers le milieu de la plaque jusqu'à un certain état d'équilibre où la tendance va alors s'inverser. Ce décalage temporel conduit à ce qu'une certaine quantité d'humidité résiduelle reste dans le matériau composite n'ayant pas pu être complètement restituée lors de la phase de désorption (Figure [IV.2.10]).

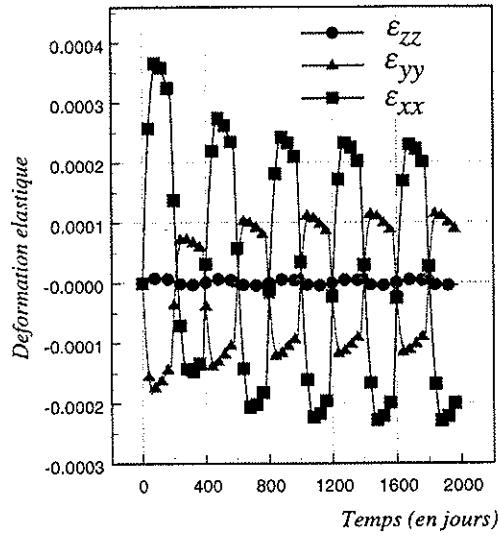


Figure IV.2.14: Evolution des déformations dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/\text{larg}=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/\text{long}=1$

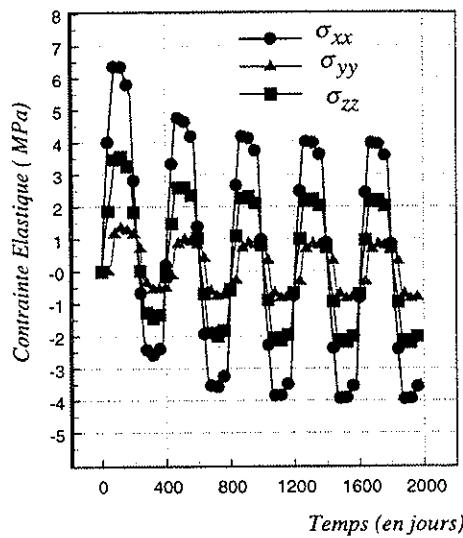


Figure IV.2.15: Evolution des contraintes dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/\text{larg}=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/\text{long}=1$

Les déplacements résiduels, comme nous pouvons le constater sur la Figure [IV.2.11] sont de l'ordre de 60 microns aux premiers instants d'exposition et tendent comme le gain en eau, les déformations et contraintes hygrométriques néanmoins à diminuer lorsque le temps d'exposition augmente. Cette stabilisation des phénomène d'hystéresis, connue sous le nom de "phénomène de resserrement au pied des cycles" a déjà été observé notamment par Y. Weitsman [184] dans le cas de chargement cyclique en humidité ou F. Léné [127] sur les déformations résiduelles à contrainte nulle lors de chargement mécanique cyclique. Ce phénomène s'explique ici par le fait qu'après un certain nombre de cycles, le gain en eau se stabilise pour atteindre, comme l'a observé G.S. Springer [172], une valeur plateau stationnaire. Ainsi, G.S. Springer montre que pour une plaque composite en fibres renforcées de 0.5mm d'épaisseur, cet état est atteint à température ambiante au bout de 10 ans et que le temps nécessaire ne dépend pas du taux d'humidité donc du cycle mais de la température. Dans le cas ici de notre plaque de 2mm d'épaisseur, on peut penser qu'aucun état d'équilibre ne pourra être atteint en deçà de 10 ans.

L'importance des contraintes, créées par les différences de concentration d'humidité entre la surface de la plaque et l'intérieur, que l'on a appelé contraintes "élastiques", est plus accentuée dans le cas d'un chargement cyclique (Figure [IV.2.15]). Les valeurs atteintes sont de l'ordre de 25% des contraintes dites "hygrométriques". On pourra noter également que les phénomènes d'hystéresis tendent à se stabiliser comme dans le cas des déplacements, et s'accompagnent d'une diminution de l'amplitude entre la valeur minimum et maximum de chaque cycle. On peut donc dire qu'il y a une tendance vers l'annulation des contraintes internes qui s'amorce, ce qui est en parfaite corrélation avec l'amorce de stabilité constatée également sur les déplacements.

On peut donc conclure au regard de ces observations qu'en terme de stabilité, l'humidité a un effet très nuisible. De plus, son influence est loin d'être négligeable compte tenu des valeurs prises par les déplacements de l'ordre de la centaine de microns sur une plaque composite unidirectionnelle de dimension  $250 \times 500 \times 2\text{mm}$  entre les périodes de maintenance et de fonctionnement (Figure [IV.2.11]). L'existence de déplacements résiduels significatifs nécessite également qu'ils soient pris en compte dans la caractérisation des trajectoires des particules générées au cours des collisions. Les niveaux des contraintes hygrométriques restent également assez importants qui sont de l'ordre de 15% du seuil d'élasticité transverse au milieu de la plaque.

### 2.2.2 Cas de structures en milieu ambiant

Nous considérons maintenant le cas où la structure reste que ce soit pendant la phase de maintenance ou de fonctionnement à humidité ambiante. Comme nous l'avons déjà mentionné, les fluctuations du taux d'humidité proviennent des variations climatiques qui ont lieu au cours de l'année. Nous avons donc analysé sur une période d'environ 4 ans la réponse de la structure étudiée au cycle simulant les évolutions du temps d'humidité pendant l'année, représenté sur la Figure [IV.2.8]. Les évolutions des déplacements, contraintes, déformations obtenues sont représentées sur les Figures [IV.2.16] à [IV.2.22].

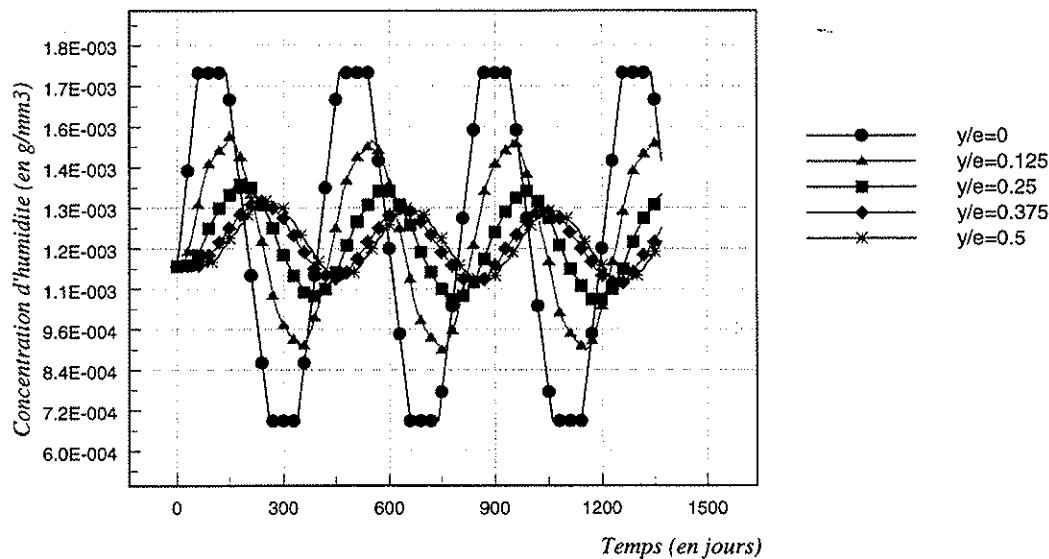


Figure IV.2.16: Evolution de la concentration d'humidité en fonction de la position dans l'épaisseur.

Nous pouvons noter comme dans le cas précédent qu'aucun état de stabilité dimensionnelle n'a pu être observé sur la plaque étudiée durant toute la période d'analyse qui est de 4 ans. De nouveau, nous pouvons constater sur l'ensemble des résultats un effet d'hystéresis qui tend à s'atténuer au bout du troisième cycle. Un état d'équilibre semble pouvoir s'amorcer.

Il apparaît en outre que, contrairement au cas précédent, l'état résiduel est en compression (Figure [IV.2.18]). La différence des temps d'absorption et de désorption aux premiers instants d'exposition, ajoutée à la lenteur de la diffusion de l'humidité dans la plaque composite semblent justifier le fait que les déplacements résiduels sont maintenant négatifs. De plus, on peut noter que cet effet d'hystéresis est bien moins élevé que dans le cas précédent. Les déplacements résiduels sont en effet de l'ordre de  $-10\mu\text{m}$ .

Cependant, l'amplitude des déplacements entre les phases d'absorption et de désorption, de l'ordre de  $80\mu\text{m}$ , reste significative (Figure [IV.2.18]). Il est à noter également que l'importance des contraintes internes dites élastiques est plus accentuée (Figure [IV.2.22]). Elles sont de l'ordre de 40% des contraintes hygrométriques. Une explication serait que les variations du taux d'humidité se faisant sur des temps plus courts, les différences de concentration d'humidité entre la surface et l'intérieur de la plaque, à l'origine de l'apparition de ces contraintes internes, sont plus accentuées.

En conclusion, à nouveau en terme de stabilité dimensionnelle, les variations climatiques de l'humidité ambiante dans les puits d'expérience ont un rôle significatif qu'il faudra prendre en compte dans les études d'analyse et de conception des structures supports des détecteurs des particules. L'influence de paramètres extérieurs comme la température ou de paramètres intrinsèques au matériau composite comme la diffusivité ou des décohésions à

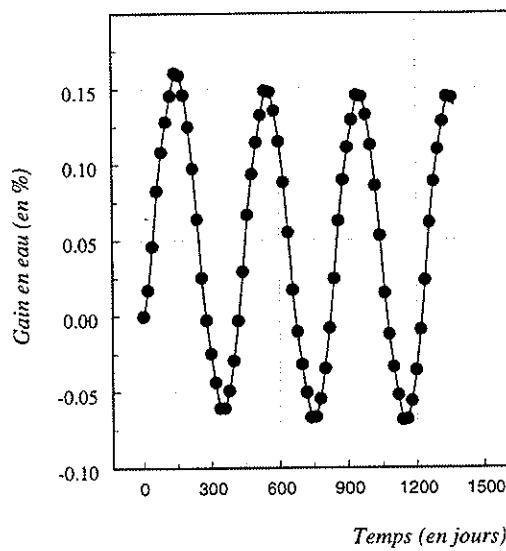


Figure IV.2.17: Evolution du gain en eau au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

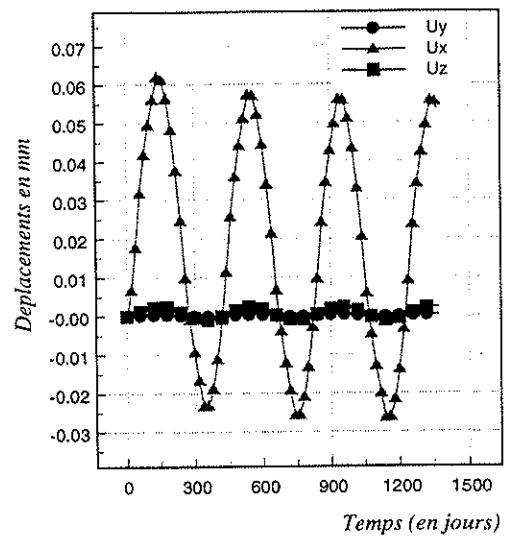


Figure IV.2.18: Evolution des déplacements en mm au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

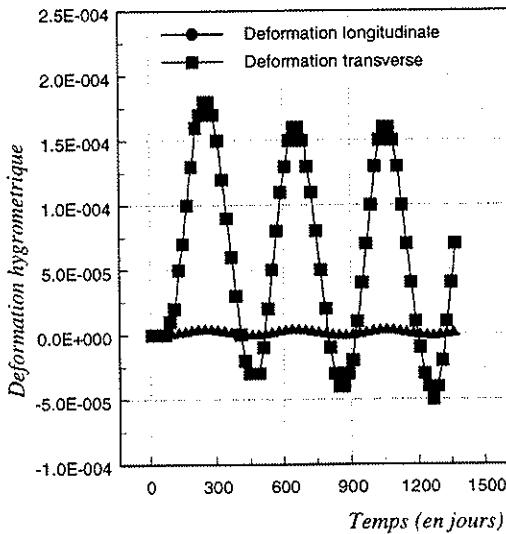


Figure IV.2.19: Evolution des déformations hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

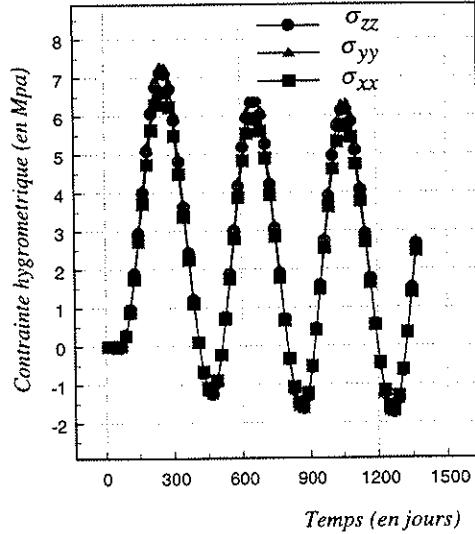


Figure IV.2.20: Evolution des contraintes hygrométriques au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

l'interface viendront également aggraver l'importance des variations dimensionnelles de ces structures. Ceci fait l'objet des deux paragraphes suivants.

### 3 Influence de la température

Nous nous sommes intéressés au cas où le changement du taux d'humidité pouvait s'accompagner d'une variation de la température. Nous avons considéré le cas où la température diminue de  $10^0C$  afin de nous rapprocher des conditions climatiques de la zone des pixels des trajectographes internes de CMS et ATLAS. Les coefficients

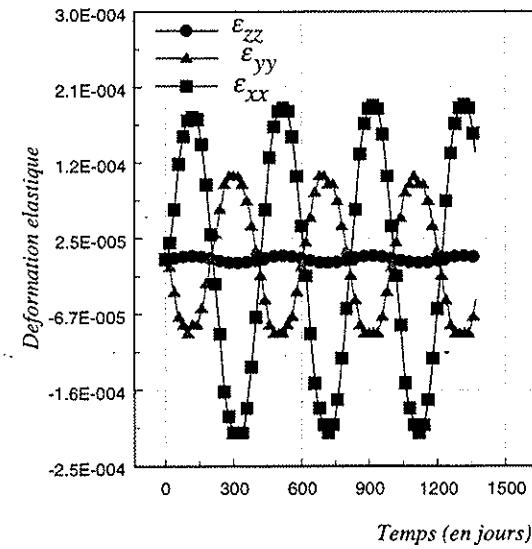


Figure IV.2.21: Evolution des déformations dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

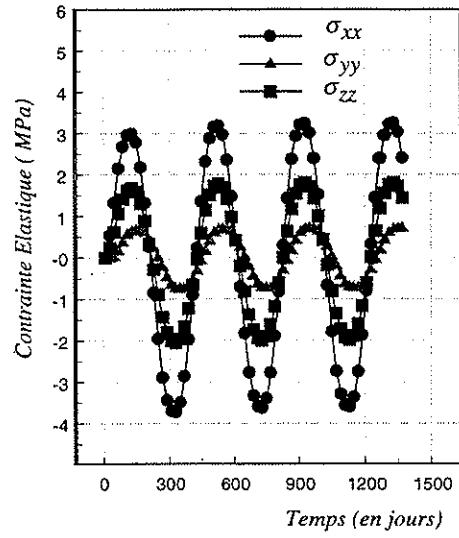


Figure IV.2.22: Evolution des contraintes dites "élastiques" au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$

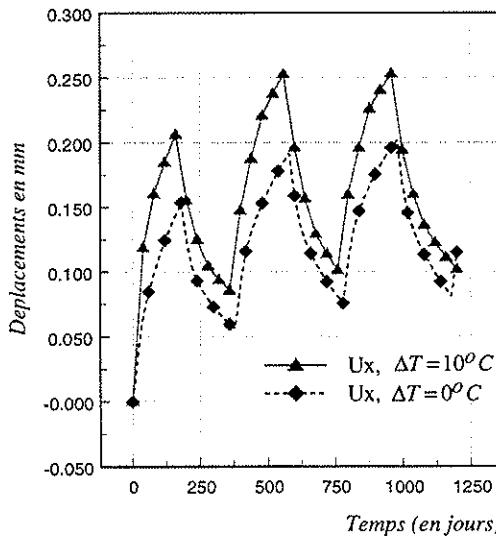


Figure IV.2.23: Evolution des déplacements suivant  $x$  au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$  avec  $\Delta T = 10^{\circ}C$  et  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

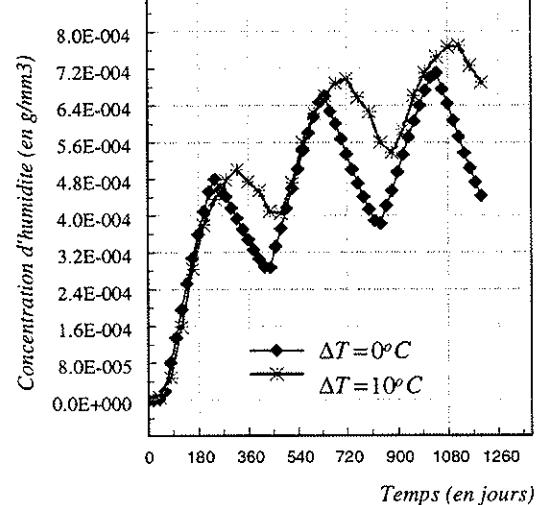


Figure IV.2.24: Evolution de la concentration d'humidité au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$  avec  $\Delta T = 10^{\circ}C$  ou  $0^{\circ}C$  et  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

de dilatation thermique sont obtenus par une méthode simplifiée d'encadrements des coefficients de dilatations homogénéisés à partir des expressions développées au chapitre 3 dans le cadre des problèmes hygrométriques, du fait de l'analogie entre température et humidité. Les déplacements et la concentration d'humidité résultants du changement du taux d'humidité ambiant et de la température sont présentés sur les Figures [IV.2.23] et [IV.2.24]. Nous nous plaçons dans le cas du premier chargement où la structure est sous flux d'azote pour une période d'environ 6 mois sur l'année et où la température est supposée avoir diminuée de plus de  $10^{\circ}C$  pendant cette phase de désorption. On peut ainsi noter que l'effet cumulé de la température et de l'humidité entraîne une augmentation

des déplacements d'environ 31%. Les effets d'hystéresis apparaissent faiblement moins marqués sur les évolutions des déplacements hygrométriques et thermiques cumulés, donnés sur la Figure [IV.2.23], du fait d'une plus grande rapidité des phénomènes de propagation de la chaleur par rapport aux phénomènes hygrométriques. En effet, si l'on observe l'évolution de la concentration d'humidité donnée en Figure [IV.2.24], on peut clairement noter qu'une diminution de la température lors de la phase de désorption entraîne une augmentation du phénomène d'hystéresis. De plus, ce dernier s'accompagne d'un décalage très net des "pics" de concentration d'humidité vers des temps plus longs, du fait d'une diffusivité plus lente en phase de désorption causée par la baisse de température. Le décalage des pics entre les deux configurations est d'environ 90 jours, ce qui est loin d'être négligeable.

## 4 Influence de la diffusivité interfaciale

Afin d'apprécier le rôle des interfaces diffusives sur la stabilité dimensionnelle de la structure, nous avons introduit la loi d'interface diffusive dans le calcul du comportement diffusif équivalent. Différentes valeurs du paramètre  $\tilde{D}$  ont été testées. Les évolutions au cours du temps du déplacement  $u_x$  et de la contrainte élastique  $\sigma_{xx}$  en fonction de la diffusivité interfaciale adimensionnée par la diffusivité de la matrice dans le cas d'un chargement hygrométrique monotone sont représentées sur les Figures [IV.2.25] à [IV.2.26].

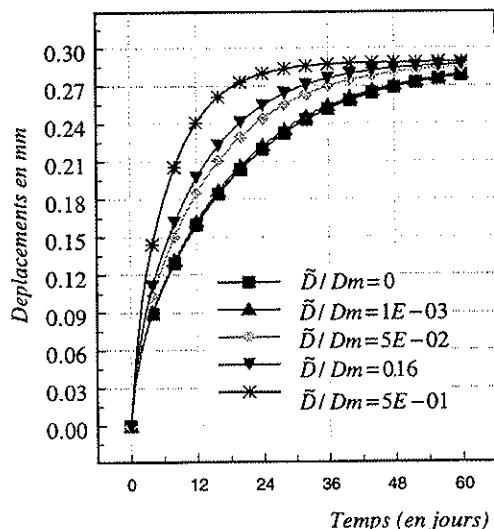


Figure IV.2.25: Evolution du déplacement  $u_x$  en fonction de la diffusivité interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Chargement monotone  $\Delta H = 50\%$ .

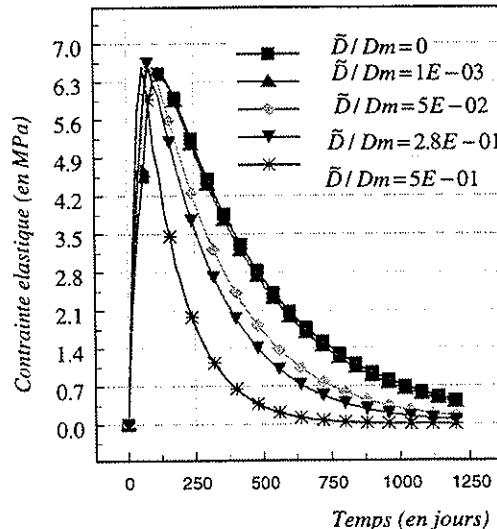


Figure IV.2.26: Evolution de la contrainte dite "élastique",  $\sigma_{xx}$  en fonction de la diffusivité interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Chargement monotone  $\Delta H = 50\%$ .

Comme attendu, la diffusivité interfaciale entraîne une accélération très nette de la diffusion de l'humidité au sein du matériau. Ces effets sont déjà significatifs pour  $\tilde{D}/D_m = 0.28$ , correspondant à la valeur obtenue expérimentalement pour le composite T300/Epoxy 1808N testé. La diffusion étant plus rapide, le domaine d'existence des contraintes internes dites "élastiques" en est significativement réduit. On tend plus rapidement vers des conditions homogènes dans la plaque. En terme de stabilité, on peut donc dire que, dans le cas de chargement monotone, la diffusivité interfaciale a un effet a priori bénéfique. La stabilité de la structure sera atteinte plus rapidement.

Nous nous sommes également intéressés au cas de chargement hygrométrique transitoire. Il apparaît au regard des Figures [IV.2.27] et [IV.2.28] que la diffusivité interfaciale entraîne une augmentation très nette de l'amplitude du gain en eau et des variations dimensionnelles entre les phases de désorption et d'absorption. L'amplitude du déplacement  $u_x$  entre les deux phases hygrométriques, de l'ordre de 100 microns dans le cas où l'on suppose que les interfaces sont non diffusives, sont de l'ordre de plus de 150 microns pour  $\tilde{D}/D_m = 0.28$ . Il apparaît donc que la présence d'interfaces diffusives va entraîner une aggravation des conséquences de l'instabilité dimensionnelle

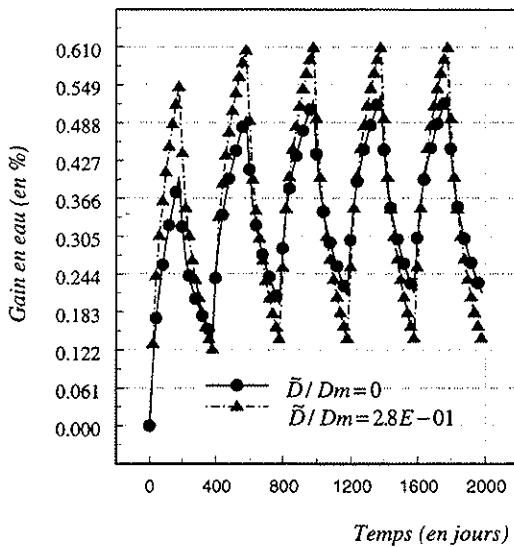


Figure IV.2.27: Evolution du gain en eau en fonction de la diffusivité interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Charge-  
ment cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

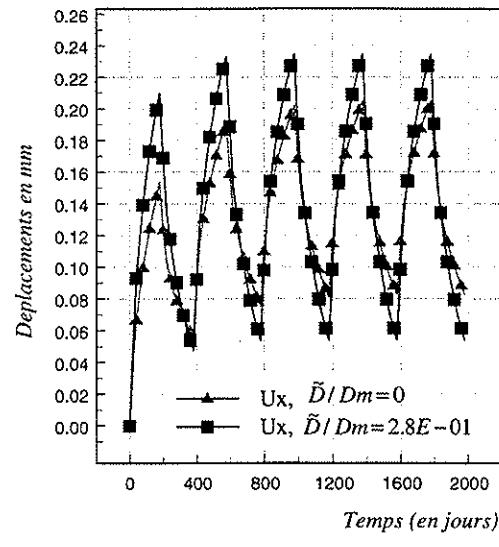


Figure IV.2.28: Evolution du déplacement  $U_x$  en mm en fonction de la diffusivité interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Charge-  
ment cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

des structures en composite dans le cas de chargement hygrométrique transitoire cyclique contrairement au cas d'un chargement monotone. Les effets couplés de la diffusivité interfaciale et d'un chargement hygrométrique transitoire cyclique apparaissent ainsi comme particulièrement néfaste sur la tenue de ces structures.

## 5 Influence de la décohésion interfaciale

L'influence de la présence de décollements au niveau des interfaces est également étudiée en introduisant la loi de cohésion dans le calcul des coefficients du comportement hygroélastique équivalent, suivant la démarche présentée au chapitre 3. Les évolutions des déformations et des déplacements obtenus pour différentes valeurs du paramètre de décohésions interfaciales,  $K = K_N = K_T$ . Nous pouvons noter une progression très nette de l'influence des décohésions aux interfaces pour  $K = 1E - 04$ . Les déformations et les déplacements dans le cas d'un important endommagement des interfaces c'est-à-dire pour  $K = 1E - 02$ , sont trois fois plus élevés que dans le cas où l'on suppose un contact parfait aux interfaces.

On va retrouver cette très nette progression si l'on se place dans l'hypothèse d'un chargement hygrométrique transitoire, comme nous pouvons le constater sur les Figures [IV.2.31] à [IV.2.34]. En effet, nous pouvons noter une augmentation de plus de 50% sur les évolutions du déplacement  $u_x$ , des déformations et contraintes hygrométriques  $\varepsilon_{xx}$  et  $\sigma_{xx}$ . L'influence de paramètre intrinsèque au matériau comme les décohésions aux interfaces est donc particulièrement significatif. L'augmentation très nette de l'amplitude des déplacements entre les phases d'absorption et de désorption conduit à une dégradation de la tenue hygromécanique de la structure. Les niveaux de contrainte hygrométriques ont augmenté également très nettement. Ils sont de l'ordre de 20% du seuil d'élasticité.

Il est à noter également que les évolutions des contraintes élastiques restent par contre inchangées. Cela peut s'expliquer par le fait que les contraintes élastiques sont générées par les différences de concentration d'humidité entre la surface de la plaque et l'intérieur. Elles sont donc la conséquence de la lenteur temporelle des phénomènes hygrométriques et ne sont pas liées aux caractéristiques intrinsèques du matériau. Par contre, nous retrouverons une influence significative du décollement sur les évolutions des déformations hygrométriques étant donné qu'elles sont obtenues par le code éléments finis à partir des contraintes élastiques et de la matrice de souplesse, qui dépendra

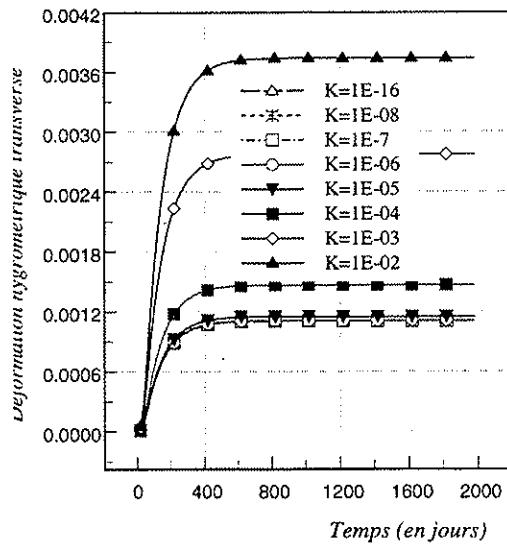


Figure IV.2.29: *Evolution de la déformation hygrométrique transverse en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Chargement monotone  $\Delta H = 50\%$ .*

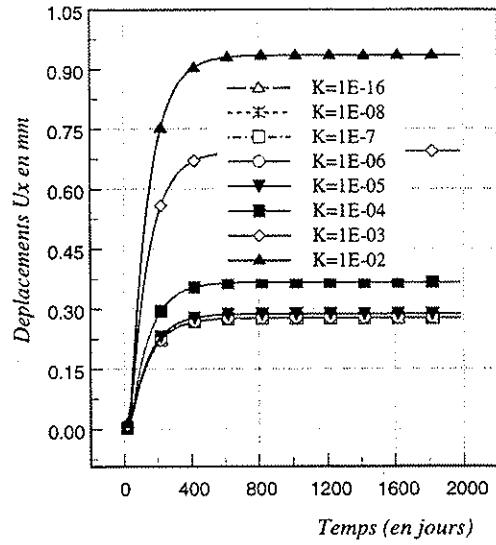


Figure IV.2.30: *Evolution du déplacement  $u_x$  en mm en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ —Chargement monotone  $\Delta H = 50\%$ .*

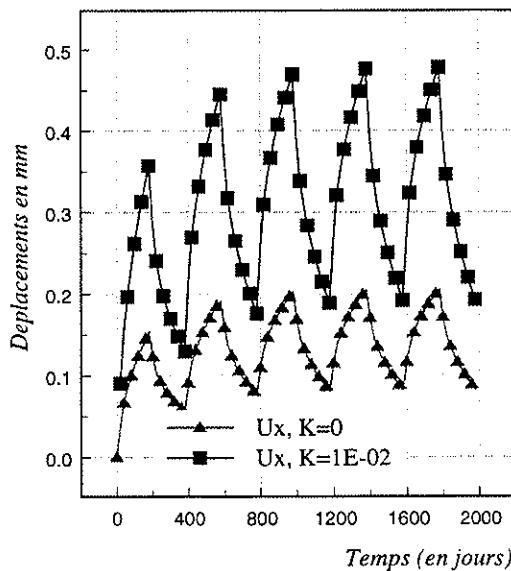


Figure IV.2.31: *Evolution du déplacement  $u_x$  en fonction du coefficient de décollement au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ . Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.*

évidemment de la qualité des interfaces fibres et matrice.

L'ensemble de ces calculs préliminaires ont permis d'une part d'analyser la faisabilité des calculs de stabilité dimensionnelle sous l'influence de l'humidité ambiante à l'aide du code par éléments finis Castem 2000 utilisé au CERN. La méthodologie développée (modèles d'homogénéisation du comportement, et simulation numérique) s'est révélée efficace pour analyser les effets d'absorption d'eau sur le comportement d'une structure simple en composites à matrices polymères. L'influence de paramètres intrinsèques au matériau comme la diffusivité ou les décohésions interfaciales, ou extérieures comme la température a pu être introduite et analysée. La prochaine étape consistait à appliquer cette méthodologie pour analyser la stabilité dimensionnelle de structures supports des

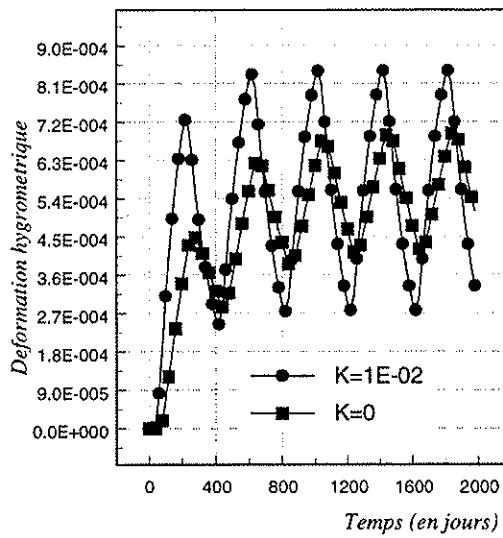


Figure IV.2.32: Evolution de la déformation hygrométrique transverse en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ —Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

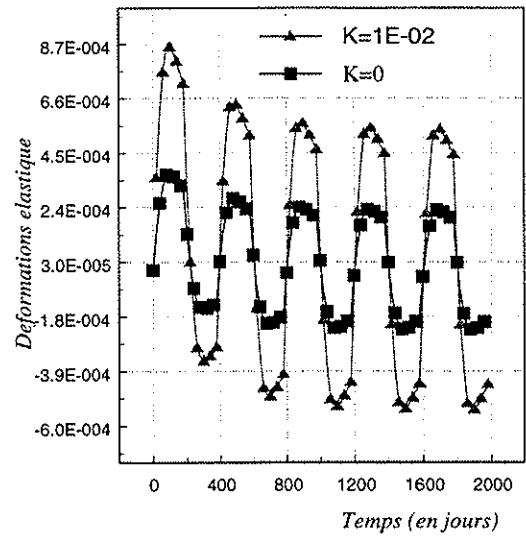


Figure IV.2.33: Evolution de la déformation élastique  $\epsilon_{xx}$  en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ —Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

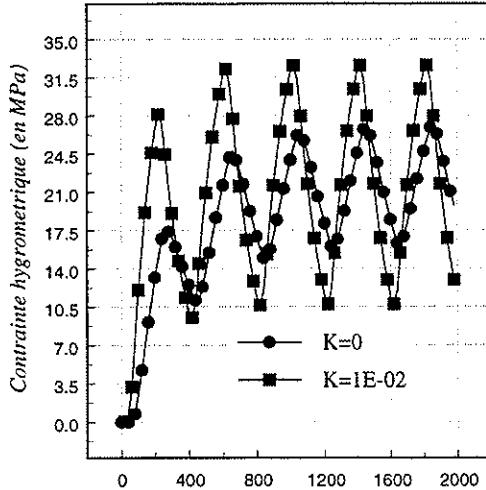


Figure IV.2.34: Evolution des contraintes hygrométriques en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ —Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

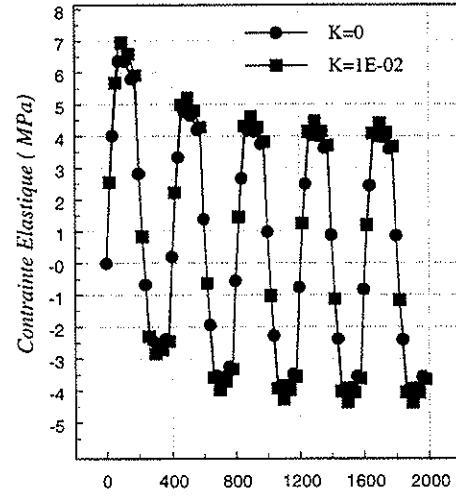


Figure IV.2.35: Evolution des contraintes élastiques en fonction du paramètre de décohésion interfaciale au point de coordonnées  $x/larg=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/long=1$ —Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois.

détecteurs du LHC.

## IV.3 Analyse hygromécanique de structures des détecteurs de particules du LHC

Nous allons maintenant nous intéresser à deux applications pratiques d'analyse de stabilité dimensionnelle. La première structure étudiée est un module du TRT (Transition Radiation Tracker) Endcap du trajectographe interne de ATLAS. La seconde application a concerné le système d'alignement du trajectographe interne de CMS. Une troisième étude, non présentée ici, a concerné le système d'alignement des chambres à muons: le spectromètre à muons, dont on pourra consulter les résultats dans P. Kanouté et B. Nicquevert [115].

### 1 Le problème de stabilité dimensionnelle sur la roue du TRT Endcap d'ATLAS

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, le trajectographe de rayonnement intermédiaire (Transition Radiation Tracker) est porteur des éléments de détection appelés les chambres à pailles. Situé après la zone des éléments de détection à pixels et des bandes silicium à l'intérieur du trajectographe interne, il est constitué de deux séries de roues latérales les "end-cap" et d'une région cylindrique central, "le barrel". L'objectif du TRT est de positionner 30 points de mesure sur la trace d'une particule.

#### 1.1 Description de la roue

Chaque partie des deux zones latérales du TRT est formée de trois ensembles de roues identiques et indépendantes. Chacune des trois roues est divisée en sous éléments qui seront assemblés indépendamment. Il y a trois types de roues dépendant du nombre et de la répartition des pailles. Le cas qui nous intéresse ici est la roue de type A qui était considérée comme la plus difficile à assembler en grande partie à cause du grand nombre de pailles, environ 12000 ( ATLAS Inner Detector Technical Design Report [14]). On pourra se référer à la Figure [I.1.5] du chapitre 1.

La roue est formée de 4 modules de 4 plans de pailles sur une profondeur d'environ 30mm. Chaque plan contient 768 pailles. Entre les plans sont disposées de fines feuilles de polypropylène, que l'on appelle les radiateurs. Les radiateurs vont produire un rayonnement intermédiaire de rayons X utilisés pour l'identification des électrons. La structure de la roue est constituée d'un anneau interne composite de 640mm de 1mm d'épaisseur relié à travers les pailles à deux anneaux externes de rayon 1026mm et 1052, avec une épaisseur de 4mm chacun (voir Figure [IV.3.1]).

Les trois anneaux sont en composite stratifié à base de fibres de carbone  $M - 40$  et résine époxyde. L'anneau interne et le premier anneau externe sont percés de milliers de trous pour le support des pailles. Les anneaux sont en stratifiés. Les caractéristiques mécaniques de chaque anneau sont données dans le tableau ci-dessous. Ces caractéristiques sont obtenues par le processus d'homogénéisation pour les composites unidirectionnels et stratifiés décrit au chapitre 3. On pourra également se référer à L. Journet [109].

#### 1.2 Implémentation numérique

Le comportement de cette roue a été analysée au cours des différentes étapes d'assemblage, pour optimiser la conception de la roue (tension des pailles, tension des radiateurs, collage des pailles) et tout particulièrement les anneaux supports (nature des fibres et de la matrice, disposition des couches des stratifiés, épaisseur des anneaux,

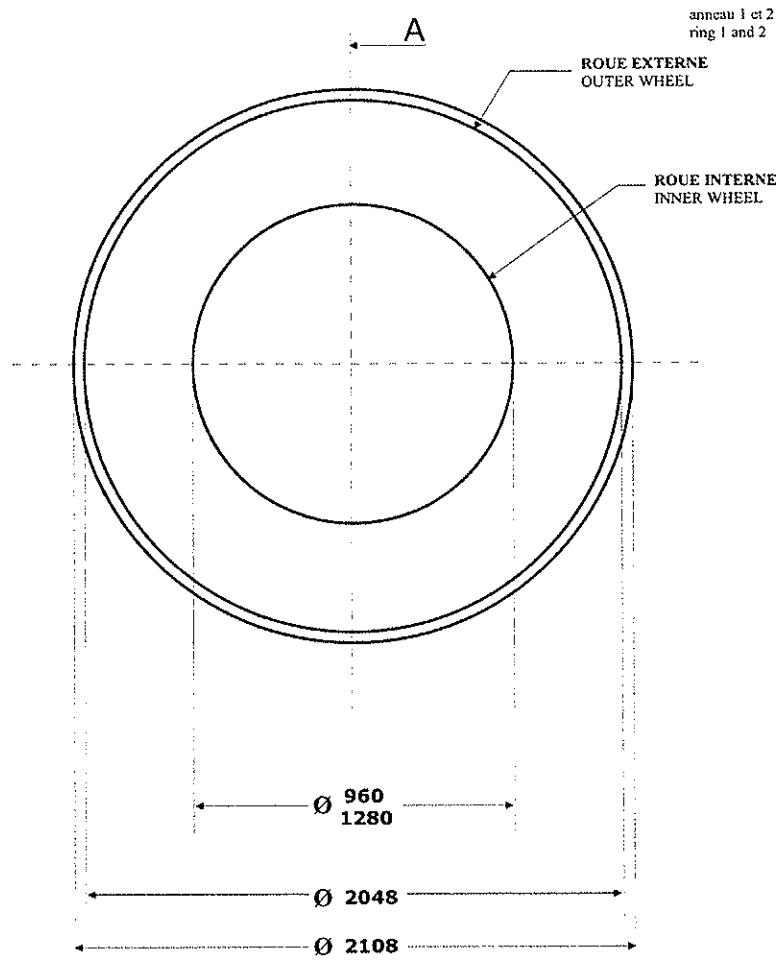


Figure IV.3.1: Schéma d'un module du TRT Endcap

	Anneau interne	Anneaux externes
$E_x$	83.99 GPa	177.07 GPa
$E_y$	83.99 GPa	24.32 GPa
$G_{xy}$	31.71 GPa	18.42 GPa
$\nu_{xy}$	0.324	0.662
$\alpha_x$	1.94E-06	-0.0539E-06
$\alpha_y$	1.94E-06	11.5E-06
$\beta_x$	1.04E-04	2.6E-06
$\beta_y$	1.04E-04	6.11E-04

Tableau IV.3.1: Propriétés mécaniques des constituants des anneaux interne et externes (1 et 2) de la roue Endcap du TRT

etc). Un modèle numérique a donc été établi à l'aide du code par éléments finis Ansys simulant les différentes étapes du montage de cette roue, qui conduit à une nouvelle conception de cette roue (L. Journet [110]).

Afin de suivre les évolutions de cette roue lors de la mise en service, une analyse de l'influence de l'humidité sur la stabilité des anneaux et plus spécifiquement des pailles a été menée. Nous nous sommes placés dans le cas où le taux d'humidité varie de 50% simulant la mise en fonctionnement du détecteur s'accompagnant dans le cas de

l'anneau extérieur d'un échauffement en température de  $10^0C$  dû au dispositif électronique tout près. Du fait de la complexité du modèle de la roue, l'analyse a été faite en statique, dans les conditions de saturation en humidité. La moitié d'un plan de la roue est discrétisée. Le module de résolution thermoélastique en statique de Ansys est utilisé en modélisant les anneaux avec des éléments coques, les pailles en éléments poutres, les radiateurs en éléments coques, et les flancs en kapton, qui viennent recouvrir les circuits, en éléments coques. Le maillage présenté sur la figure [IV.3.2] comporte 10000 noeuds.

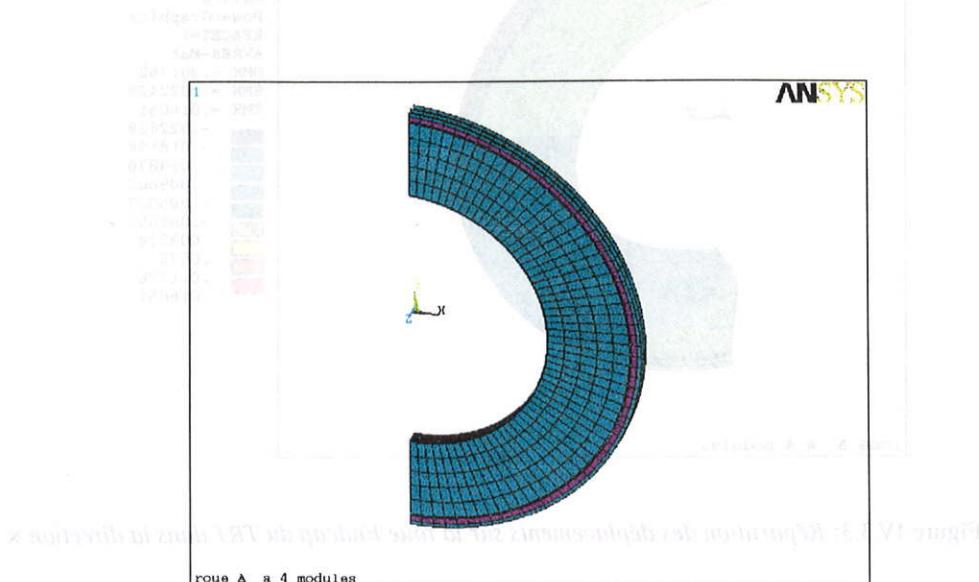


Figure IV.3.2: Modèle complet d'un module du TRT Endcap

### 1.3 Etude des déplacements

La répartition des déplacements totaux obtenus, ainsi que la déformée de la roue, sont représentées respectivement sur les Figures [IV.3.3], [IV.3.4] et [IV.3.5].

Nous pouvons noter que les déplacements prépondérants situés sur les anneaux, qui sont les seuls éléments considérés comme sensibles aux phénomènes hygrométriques dans le modèle, sont de l'ordre de la dizaine de microns dans les directions  $x$  et  $z$  alors que qu'ils sont de l'ordre de  $300\mu m$  suivant la direction  $z$ . On pourra en outre noter que les variations dimensionnelles des anneaux vont se répercuter sur les pailles, engendrant également des déplacements du fait d'une extension de l'anneau interne et d'une compression des anneaux externes. Ceci explique cette allure symétrique des isovaleurs des déplacements suivant  $z$  notée sur la Figure [IV.3.5]. La faible épaisseur des anneaux présente un atout important, en cela qu'elle permet de limiter les déplacements suivant  $x$  et  $y$  et donc les phénomènes de compression sur les pailles.

En effet, les pailles qui vont servir à détecter les particules sont des éléments fragiles qui flambent facilement. C'est donc surtout au niveau des pailles que les conséquences de variations dimensionnelles des anneaux supports dus à un changement des conditions climatiques du milieu environnant sont primordiales. Les maxima des déplacements et tensions résultants dans les pailles sont présentés dans le tableau dans le cas où aucune prétension initiale n'est appliquée aux pailles.

On peut donc constater que les déplacements des anneaux peuvent entraîner des déplacements non négligeables sur les pailles. Les valeurs maximums relevées sont de l'ordre de  $60\mu m$ . Une possibilité pour réduire ces déplacements serait d'appliquer une prétension initiale aux pailles avant de les coller aux anneaux. Cependant, cela entraîne une complication de la procédure d'assemblage de la roue, car s'ajoute une étape supplémentaire à réaliser sur près de 12000 pailles. Dans le cas où il n'y a pas de prétension initiale dans les pailles, les déplacements sont inévitablement quelque peu élevés, mais le désalignement des pailles, facteur important dans la détermination de la trajectoire des particules, donné par les déplacements radial et angulaire, reste plus limité. Un autre aspect

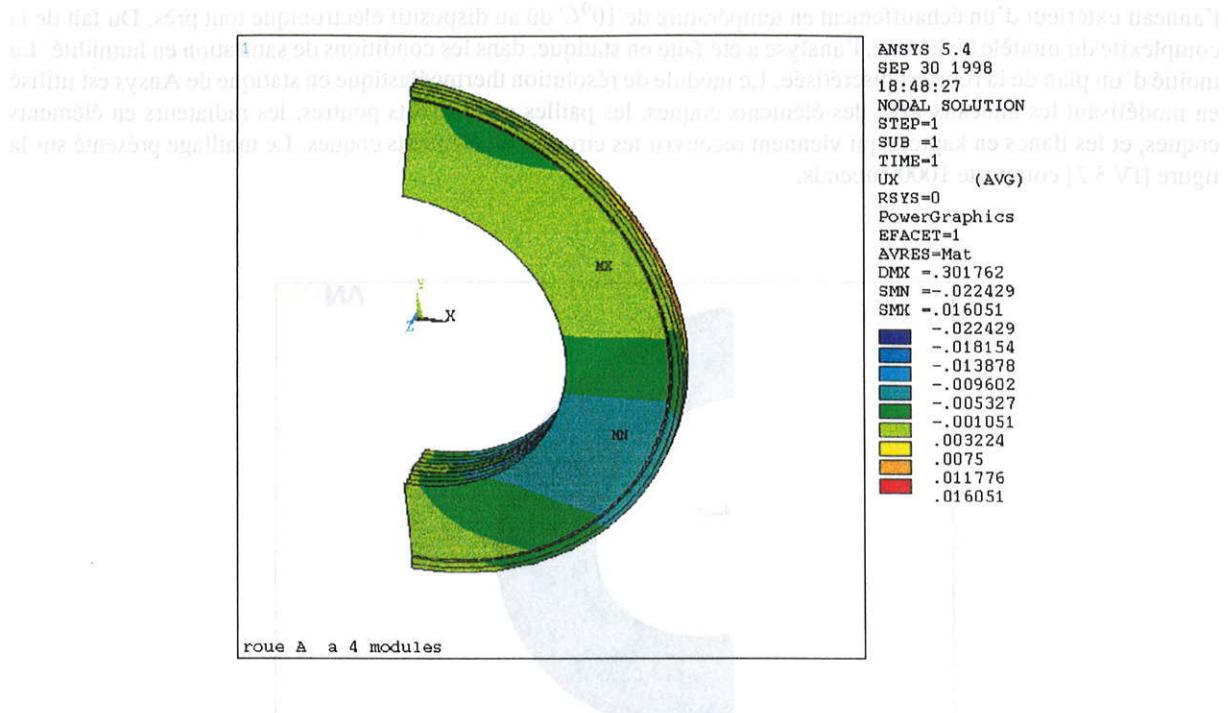


Figure IV.3.3: Répartition des déplacements sur la roue Endcap du TRT dans la direction x

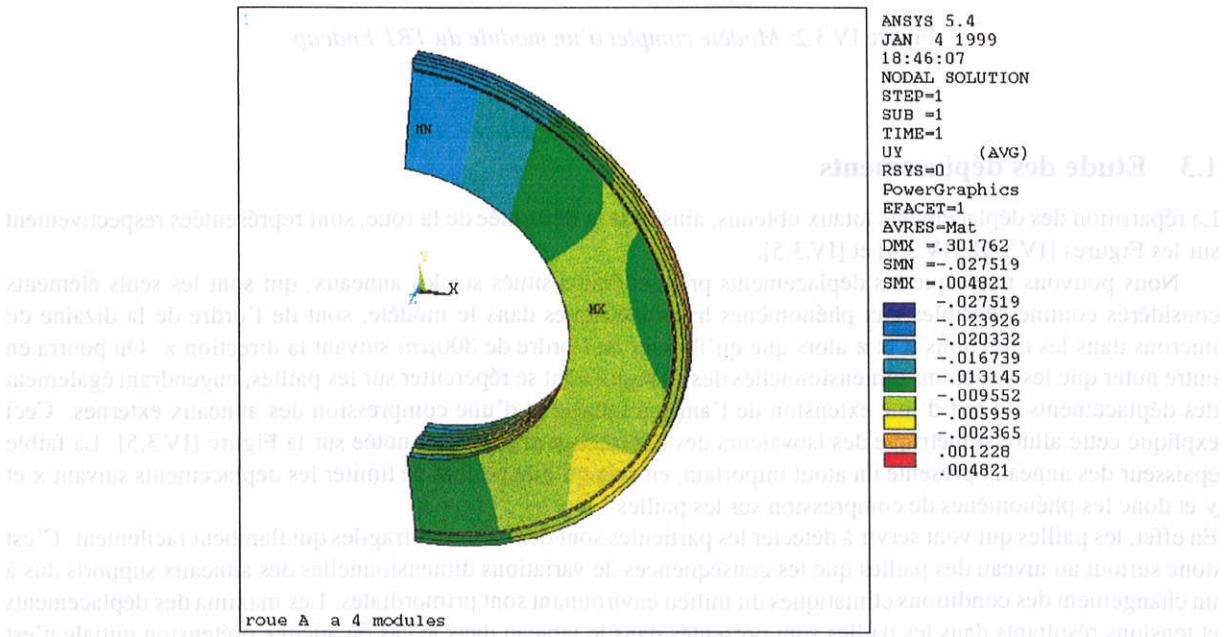


Figure IV.3.4: Répartition des déplacements sur la roue Endcap du TRT dans la direction y

On peut observer que les déplacements sont plus importants dans la direction y que dans la direction x. Cela est dû à la géométrie de la roue qui est plus étirée dans la direction y. Les modules MX et NH montrent des déplacements plus importants que les autres. La diminution de l'humidité de 50% entraîne une compression des pailles, ce qui peut être critique. Cependant, la force de compression dans les pailles est de 0.29N, soit 10% de la valeur de limite.

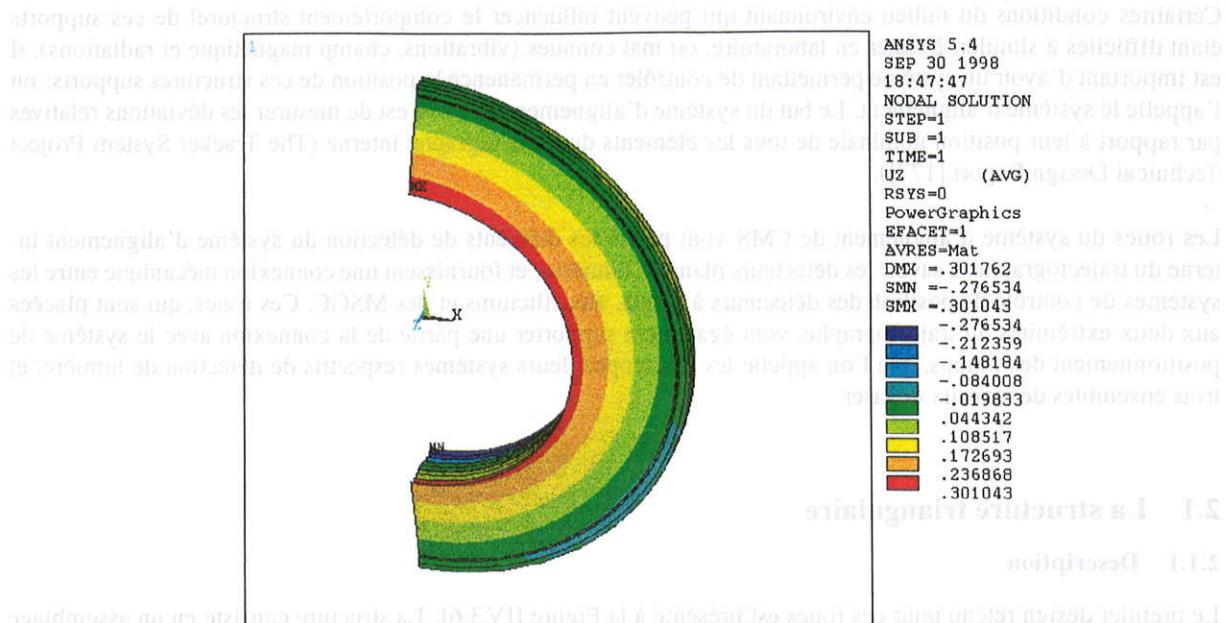


Figure IV.3.5: Répartition des déplacements sur la roue Endcap du TRT dans la direction z

Déplacements ( $\mu m$ )	
max $u_r$	26
max $u_\theta$	24
max $u_z$	63
max $u_{total}$	64
Tension dans les pailles (en N)	
max	-0.06
min	-0.3

Tableau IV.3.2: Déplacements maximums et tensions dans les pailles

de flambage de  $3,3N$ . Ces valeurs restent donc tout à fait acceptables. Ce qui conduit, dans le cas où aucune prétension des pailles n'a été appliquée, à une simplification considérable de la procédure d'assemblage des roues et à un gain de coût non négligeable. Cependant, il faudra rester prudent car nous nous sommes intéressés dans ce cas uniquement au cas où est appliquée à la roue uniquement un chargement hygrométrique.

## 2 Analyse du système de calibration du trajectographe interne de CMS

Une seconde application majeure a concerné la roue du système d'alignement du trajectographe interne de CMS. Les effets de l'humidité ambiante sur la stabilité dimensionnelle de cette roue ont été étudiés sur deux concepts de structures très différents. Le premier est une structure triangulaire formée de tubes reliés entre eux, en composite renforcé de fibres de carbone. La seconde structure est une roue pleine en composite sandwich.

Comme nous l'avons vu au chapitre I, le choix des matériaux et l'ingénierie des structures supports des détecteurs de particules seront optimisés de manière à garantir la stabilité et la rigidité avec un minimum de matière, du stade de la conception au prototype, pour obtenir une bonne performance des trajectographes internes.

Certaines conditions du milieu environnant qui peuvent influencer le comportement structurel de ces supports étant difficiles à simuler, à tester en laboratoire, ou mal connues (vibrations, champ magnétique et radiations), il est important d'avoir un système permettant de contrôler en permanence la position de ces structures supports: on l'appelle le système d'alignement. Le but du système d'alignement de CMS est de mesurer les déviations relatives par rapport à leur position nominale de tous les éléments du trajectographe interne (The Tracker System Project Technical Design Report [177]).

Les roues du système d'alignement de CMS vont porter les éléments de détection du système d'alignement interne du trajectographe, à savoir les détecteurs plans de lumières, et fournissent une connexion mécanique entre les systèmes de contrôle de position des détecteurs à pixels, aux siliciums et des MSGC. Ces roues, qui sont placées aux deux extrémités du trajectographe, vont également supporter une partie de la connexion avec le système de positionnement des muons, que l'on appelle les périscopes, leurs systèmes respectifs de détection de lumière, et trois ensembles de niveaux de laser.

## 2.1 La structure triangulaire

### 2.1.1 Description

Le premier design retenu pour ces roues est présenté à la Figure [IV.3.6]. La structure consiste en un assemblage complexe de tubes, dont la forme est principalement dictée par le nombre des interfaces avec le trajectographe, et le système de positionnement des muons. Les tubes, de 0.5m de long, ont une section carrée de 1mm d'épaisseur et 30mm de large.

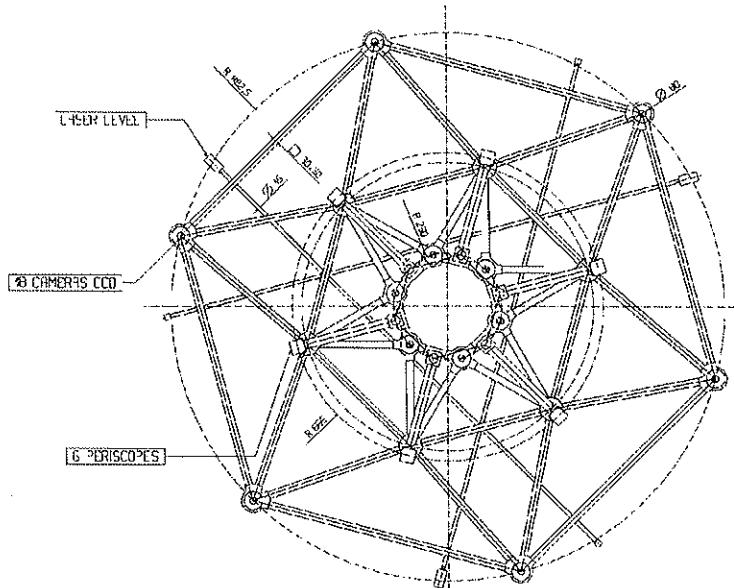


Figure IV.3.6: Système d'alignement du Trajectographe interne de CMS

Les barres sont supposées être en composite unidirectionnel en fibres de carbone T300 et résine époxy 3501-6 dont les propriétés homogènes équivalentes ont été fournies au paragraphe 1.1

### 2.1.2 Implémentation numérique

Une première analyse des effets de l'humidité ambiante sur cette structure avait été menée en statique. Les caractéristiques mécaniques du composite unidirectionnel alors injectées dans le calcul provenaient de valeurs expérimentales (B.D. Argarwal et L.J. Broutman [11]). Les déplacements maxima avaient alors été analysés en

fonction de la valeur du coefficient d'expansion transversal et longitudinal, afin de déterminer la valeur limite acceptable pour respecter les tolérances de stabilité des roues lorsque le taux d'humidité varie de 80%. Ces premiers calculs ont ainsi montré que le coefficient d'expansion transverse n'influe pas sur les résultats compte tenu de la géométrie. En outre, afin d'avoir des déplacements dans le plan et hors plan inférieurs à  $10\mu\text{m}$  et la rotation en z de moins de  $10\mu\text{rad}$ , il est montré que le coefficient d'expansion longitudinal doit rester plus faible que  $10^{-7}/w\%$  (The Tracker System Project Technical Design Report [177]).

Nous avons voulu étendre ces premiers résultats au cas d'une analyse transitoire des effets de l'humidité sur la roue d'alignement afin de tenir compte de la lenteur des phénomènes de diffusion, et des phénomènes d'hystéresis résultants. Pour cela, nous avons considéré tout d'abord une structure élémentaire en composite de la roue du système d'alignement définie du fait de la géométrie de cette roue comme étant le tube composite représentatif décrit au paragraphe précédent. Les résultats obtenus sont présentés dans le cas d'un chargement monotone et en cyclique sur une période de 6 mois avec  $\Delta H = 50\%$ , sur les Figures [IV.3.7] et [IV.3.8].

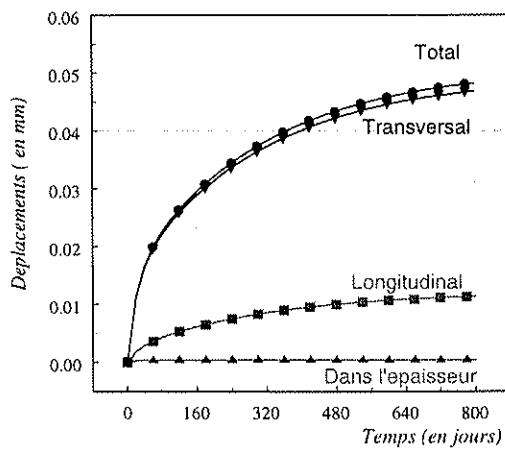


Figure IV.3.7: Evolution des déplacements en mm au point de coordonnées  $x/\text{larg}=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/\text{long}=1$ . Chargement monotone  $\Delta H = 50\%$ .

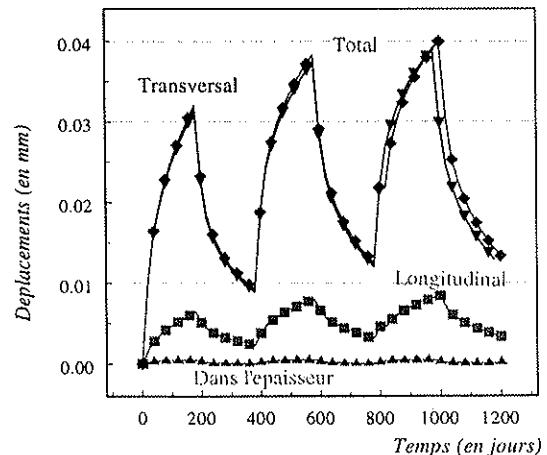


Figure IV.3.8: Evolution des déplacements en mm au point de coordonnées  $x/\text{larg}=1$ ,  $y/e=0.5$ , et  $z/\text{long}=1$ . Chargement cyclique  $\Delta H = 50\%$  sur un palier de 6 mois. de 6 mois

Nous retrouvons de nouveau que les effets de l'humidité sur la stabilité dimensionnelle de ces tubes sont significatifs compte tenu des précisions souhaitées, et s'accompagnent d'un effet d'hystéresis marqué. Les déplacements obtenus sont bien au dessus de la valeur limite de  $10\mu\text{m}$ . Ce qui signifie que les conséquences au niveau du système d'alignement peuvent être très critiques. Nous nous sommes placés dans le cas d'un composite unidirectionnel suivant la longueur du tube, ce qui permet de minimiser les déplacements dans cette direction. Cependant, la fragilité de ce type de composites les rend inutilisables pour de telles applications. Il apparaît donc que sans un effort important d'optimisation de la disposition des couches et du choix de la résine, ces valeurs pourraient être bien plus élevées.

Afin de répondre à de nouvelles exigences concernant la position des différentes caméras sur la roue, et d'éviter les problèmes d'assymétrie résultants, un nouveau design fut proposé au cours des ces analyses. Les calculs de stabilité dimensionnelle ont alors été poursuivis sur cette nouvelle structure. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

## 2.2 La structure en composite sandwich

### 2.2.1 Description

Le nouveau concept de la roue est présenté sur la Figure [IV.3.9]. La structure est une roue pleine de 2.5m de diamètre et de 20mm d'épaisseur. Quatre trous sont creusés dans la structure pour permettre le passage du système des bras de fixation allant du tube support central du trajectographe au tube du faisceau de particules, le "beam pipe".

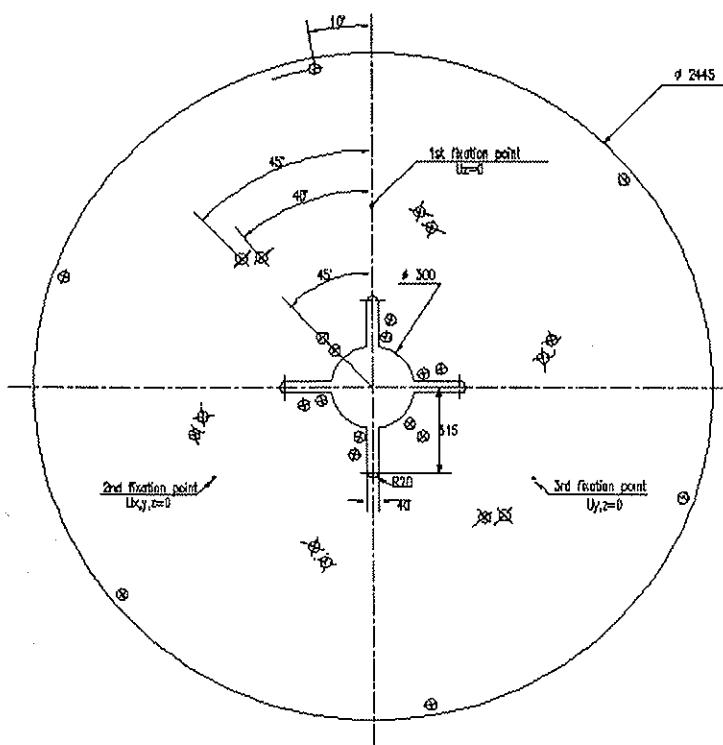


Figure IV.3.9: Roue du système d'alignement du tracker de CMS

Le composite sandwich choisi est composé de deux peaux en composite stratifié quasi-isotrope à base de fibres de carbone T300 et résine époxy Narmco 5208, de 2mm d'épaisseur et d'une âme en nid d'abeille aluminium de 16mm d'épaisseur. Les propriétés homogènes équivalentes des peaux sont calculées à partir des expressions obtenues au chapitre 3. Les propriétés mécaniques du nid d'abeille sont obtenues à partir de données expérimentales fournies par le fabricant pour des réseaux hexagonaux, et sont reportées dans le tableau ci-dessous.

### 2.2.2 Implémentation numérique

La roue est étudiée en statique. Le calcul est réalisée en utilisant l'élément coque, "shell 91" avec l'option sandwich disponible dans Ansys. Cela permet de limiter le nombre de degré de liberté à 5428 noeuds. On pourra consulter également S. Da Mota Silva et al.[57] pour de plus amples informations sur cette étude.

Nous appliquons une variation du temps d'humidité de 50% sur l'ensemble de la structure, qui sera fixée aux points désignés sur la Figure [IV.3.9]. Des poids sont également ajoutés de manière totalement assymétrique simulant la présence des caméras qui sont matérialisés par des points.

	Peau	Nid d'abeille
$E_1$	53.10 GPa	0.001 GPa
$E_2$	53.10 GPa	0.001 GPa
$E_3$	-	1.276 GPa
$G_{12}$	20.19 GPa	0.00037 GPa
$G_{13}$	-	0.4826 GPa
$G_{23}$	-	0.193 GPa
$\nu_{12}$	0.315	0.35
$\nu_{13}$	-	0
$\nu_{23}$	-	0
$\beta_1$	3.58E-04	0
$\beta_2$	3.58E-04	0
$\beta_3$	-	0

Tableau IV.3.3: Propriétés mécaniques des constituants du sandwich

### 2.2.3 Etude des déplacements

Les valeurs des déplacements obtenus sont présentées sur la Figure [IV.3.10] suivant la direction x, sur la Figure [IV.3.11] suivant la direction z, et totaux sur la Figure [IV.3.12].

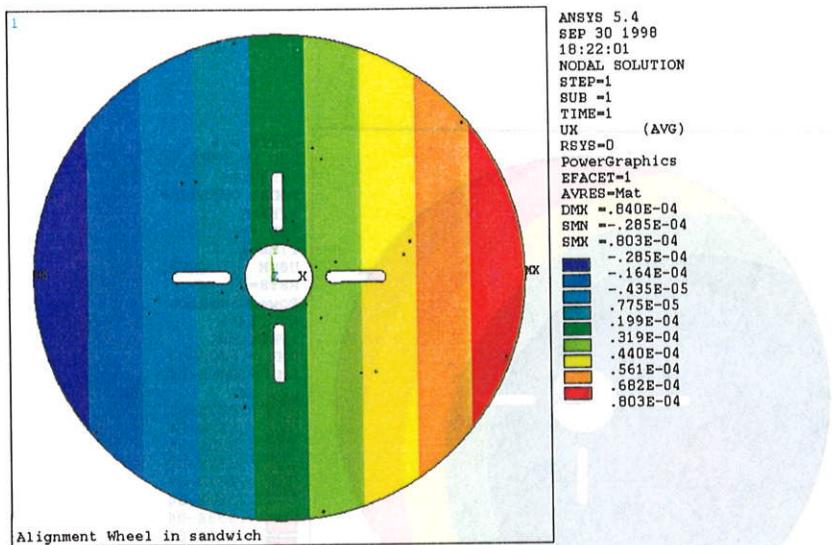


Figure IV.3.10: Répartition des déplacements en mm sur la roue du système d'alignement de CMS suivant la direction x

On peut constater que les déplacements prépondérants sont de l'ordre de  $84\mu m$ . On est encore bien au dessus de la valeur limite de  $10\mu m$ . Il est vrai qu'aucune optimisation de la disposition des plis en terme d'expansion hygrométrique n'a été réalisée. On peut donc penser qu'un meilleur choix de résine et de disposition des plis pourrait permettre de réduire sensiblement ces instabilités. Nous pouvons en outre noter que les allures des isovaleurs des déplacements sont très différentes dans les directions x et z. Suivant l'axe z, nous pouvons constater une allure non symétrique liée à la propagation d'"effets de bord" du fait des conditions aux limites en  $u_z$ . Ce phénomène, que l'on peut assimiler à un phénomène d'effets de bord libres structurels, serait essentiellement dû au caractère

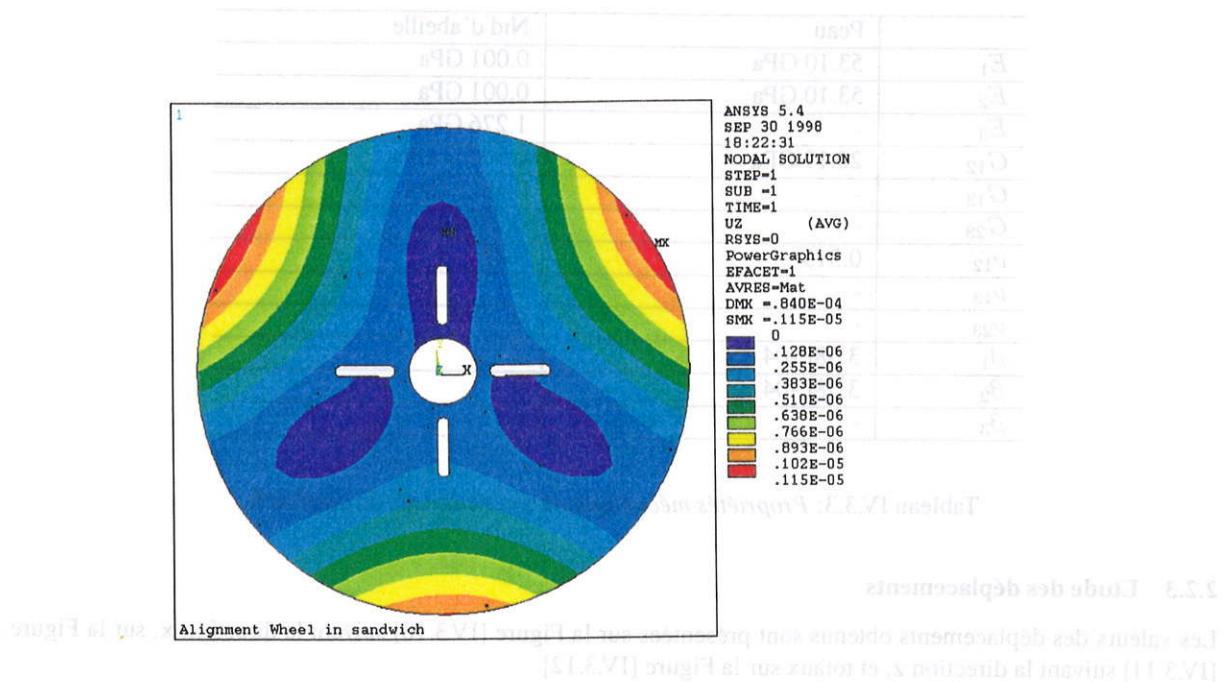


Figure IV.3.11: Répartition des déplacements en mm sur la roue du système d'alignement de CMS suivant la direction z

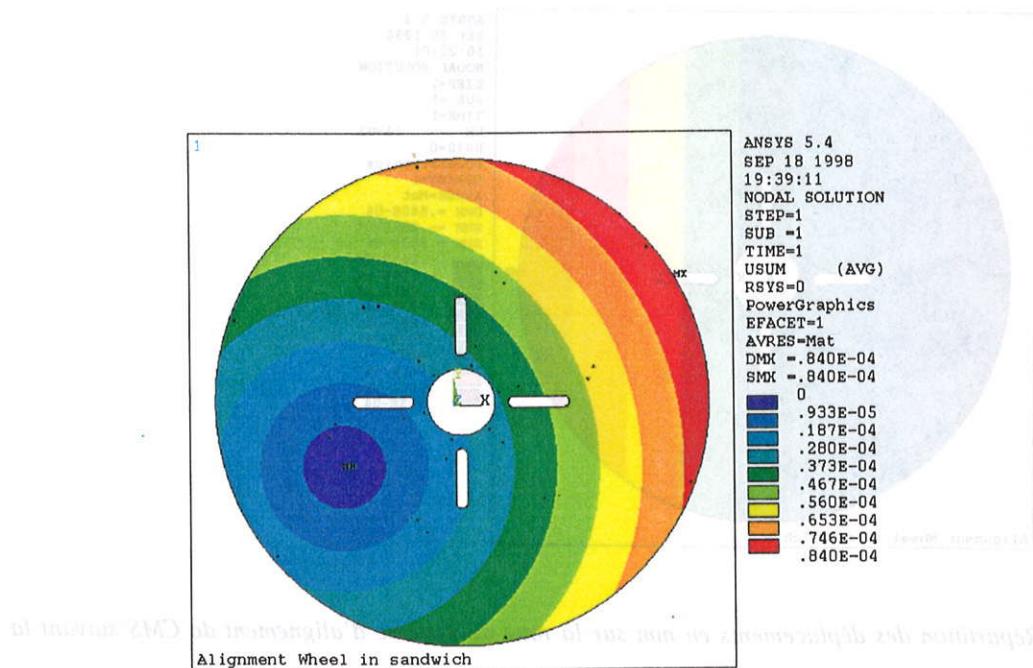


Figure IV.3.12: Répartition des déplacements totaux en mm sur la roue du système d'alignement de CMS. Ce résultat montre que les déplacements totaux sont plus importants que les déplacements uniques. On peut voir que le bord de la roue est soumis à une déformation plus importante que le centre. Cela est dû à l'anisotropie du matériau et aux conditions de fixation au bord.

## **Conclusions et Perspectives**



Cette étude avait pour objectif final de fournir au CERN, et en particulier aux équipes chargées de la conception des structures supports de détecteurs des futures expériences de Physique des Particules des outils d'analyse et de prédiction du comportement de structures en matériaux composites et de leur stabilité vis à vis de chargements hygromécaniques.

Trois aspects ont été successivement abordés. Peu de données expérimentales existant en effet dans la littérature sur les phénomènes d'absorption d'eau et d'expansion hygrométrique de matériaux composites à haute performance, tels que des composites carbone/Epoxy, carbone/cyanate ester ou carbone/carbone, le premier objectif a donc été tout d'abord de caractériser les effets de variations climatiques telles que l'humidité ambiante sur ce type de matériaux composites. D'autre part, en conjonction avec les résultats expérimentaux, nous avons cherché à modéliser le comportement hygromécanique de matériaux composites en tenant compte de l'existence et du rôle des zones de liaison entre les fibres et la matrice mis en évidence expérimentalement. Enfin, le dernier aspect de ce travail a consisté en l'utilisation des modèles développés dans la simulation de structures réelles de détecteurs de particules.

Concernant le premier aspect, les mesures expérimentales ont permis de mettre en évidence les points suivants sur les phénomènes d'absorption dans les matériaux composites dits de haute performance. A la diffusion de l'humidité dans la matrice, s'ajoute une diffusion au niveau des interfaces, et une infiltration de l'eau dans des défauts déjà existants ou créés par la pénétration de l'eau. Ces phénomènes s'accompagnent de réactions chimiques d'hydrolyse entre l'eau et la matrice, confirmant le caractère à deux phases du processus de diffusion. Les résultats sur les phénomènes de gonflement ont montré une meilleure résistance des échantillons à base de résine cyanate ester que les échantillons en résine epoxy. Les échantillons en carbone/carbone ayant subi une phase de graphitation supplémentaire à 2500°C présentent la plus faible reprise en eau mais malheureusement l'analyse des phénomènes de gonflement n'a pas été concluante du fait de la dimension des échantillons. En terme de choix pour les structures des détecteurs de particules, les composites carbone/carbone ou à base de résine cyanate ester apparaissent néanmoins assez prometteurs. Il a pu être également constaté une augmentation très significative du coefficient d'expansion hygrométrique au palier de 85% d'humidité relative, qui nous amène à supposer qu'étant proche de l'état de condensation de nouveaux sites de dipôles forts étaient apparus du fait d'une hydrolyse plus marquée du polymère. En revanche, nous n'avons pas pu mettre en évidence une influence significative de l'influence des variations de l'humidité relative du milieu environnant sur le module d'Young des résines testées ici. Nous avons pu également observer des phénomènes décohésions aux interfaces entre la fibre et la matrice qui seraient la conséquence du gonflement différentiel entre la fibre et la matrice.

Le modèle classique de Springer, qui fait référence pour les problèmes hygrométriques, est apparu insuffisant pour prédire précisément le comportement diffusif du composite à partir des seules caractéristiques de la fibre et de la matrice. De même, les modèles classiques qui supposent un contact parfait entre la fibre et la matrice se sont avérés insuffisants pour décrire les phénomènes mécaniques de gonflement dans les composites. Par conséquent, il nous a semblé important de prendre en compte le rôle des interfaces, à la fois dans les processus d'absorption d'humidité et d'expansion hygrométrique de matériaux composites. La seconde partie de notre travail a donc consisté dans un premier temps à proposer une modélisation, grâce à des techniques de développements asymptotiques, du caractère diffusif et piégeant de ces zones interfaciales. Des lois d'interfaces définies sur des surfaces matérielles ont été ainsi développées pour des cinétiques fickienne et de type Langmuir, puis introduites dans la détermination du comportement diffusif équivalent de matériaux composites en utilisant différentes techniques d'homogénéisation. D'autre part, une méthode d'homogénéisation périodique simplifiée permet d'accéder explicitement à des bornes du comportement hygroélastique équivalent de matériaux composites en tenant compte de la présence de phénomènes de décohésions aux interfaces mis en évidence expérimentalement.

Ces modèles enrichis ont conduit à une très bonne corrélation entre les valeurs expérimentales et théoriques sur les propriétés diffusives du composite. Le coefficient de diffusivité et la probabilité de piégeage interfaciale identifiés expérimentalement à partir des résultats de gain en eau obtenus dans le cas où la pénétration de l'eau se fait perpendiculairement aux fibres, a été validé sur le second type déchantillons où la diffusivité de l'eau se fait parallèlement aux fibres. Dans la même optique, la confrontation des résultats expérimentaux des coefficients d'expansion hygrométrique transverse et longitudinal avec la modélisation nous a également permis de valider l'introduction d'un coefficient de décohésion interfaciale et d'obtenir une bien meilleure estimation de ces coefficients.

Enfin concernant le dernier objectif, l'utilisation de ces modèles a permis une étude transitoire de la stabilité dimensionnelle de plusieurs structures supports des détecteurs du LHC au cours de différents étapes, de l'assemblage à la mise en service et montré l'importance de la prise en compte de l'influence de variations climatiques dans la conception de telles structures. Les ordres de grandeur des variations dimensionnelles observées sont bien au dessus des exigences requises par le CERN.

Certains aspects non étudiés ici pourraient permettre d'affiner et de compléter cette étude. Ainsi sur le plan expérimental, les tests qui se poursuivent actuellement, et ce jusqu'à la fin de l'année 1999, devraient permettre d'analyser l'influence de variations cycliques du taux d'humidité sur la réponse du matériau. Plus précisément, ces tests vont consister à suivre les évolutions du gain en poids en eau et des variations dimensionnelles résultantes sur trois cycles de vieillissement correspondants à une variation du taux d'humidité relative allant de 15% à 75%, à une température fixée de  $40^{\circ}\text{C}$ . L'analyse du gain en poids en eau devrait ainsi permettre de préciser l'existence de phénomènes d'hydrolyse dans la résine et leurs évolutions dans des conditions cycliques.

La précision de l'appareillage de métrologie utilisé ne nous a pas permis d'avoir une mesure suffisamment fiable du coefficient d'expansion hygrométrique longitudinal pour les échantillons en composite. De plus, l'analyse du gonflement dans les échantillons en carbone/carbone n'ayant pas été concluante, compte tenu de l'ordre de grandeurs des variations dimensionnelles, l'utilisation d'un autre type de dispositif ou d'échantillons bien plus grands (en particulier pour les échantillons en carbone/carbone) pourrait être judicieuse pour de futurs tests.

Le suivi de l'évolution du module d'Young et des décohésions aux interfaces au cours des prochains tests dans l'année 1999, devraient offrir des informations intéressantes sur le couplage des phénomènes d'endommagement et hygrométrique (absorption et gonflement). Ces expériences pourraient être complétées par une analyse de l'influence de l'humidité sur la réponse en traction et en flexion d'une pièce en composite.

Cette campagne d'essais pourrait également être complétée par des études sur le couplage des différents paramètres du milieu environnant d'un détecteur de particules, dont notamment les phénomènes de radiations compte tenu des niveaux attendus de l'ordre de  $10^3$  à  $10^7$  Gy dans les expériences du LHC. Une étude, réalisée au CERN par M. Höfert et A. Fassò [103] en 1995, laisse en effet penser que les effets combinés de l'humidité et des radiations peuvent avoir des conséquences particulièrement néfastes sur la résistance du matériau.

Au niveau de la modélisation, il serait intéressant en corrélation avec les prochaines observations expérimentales de prendre en compte une loi d'évolution de l'endommagement aux interfaces intégrant une influence directe de l'humidité sur la propagation et l'aggravation des phénomènes de décohésions.

Au voisinage des bords d'une structure, la théorie de l'homogénéisation périodique peut perdre son sens du fait d'une concentration de contraintes ou de phénomènes localisés à forts gradients, comme c'est le cas ici pour la diffusion de l'humidité. Une analyse plus spécifique au voisinage des bords des structures pourrait donc être faite en introduisant des correcteurs de couche limite dans les techniques asymptotiques utilisées.

Compte tenu de la complexité des structures mécaniques des détecteurs de particules, il pourrait être intéressant de procéder à une homogénéisation au niveau des structures et en exploitant les géométries à éléments répétitifs des structures mécaniques des détecteurs de particules et en se basant sur les travaux de D. Caillerie et al [31, 32].

En ce qui concerne l'aspect applicatif, d'autres analyses en régime transitoire sur des structures mécaniques des détecteurs de particules dans les expériences ATLAS et CMS, dont notamment la roue du système d'alignement du trajectographe interne de CMS, sont en cours. La complexité numérique d'un calcul en régime transitoire sur un modèle complet de ces structures pourrait être évitée en limitant le calcul sur une structure élémentaire et en passant ensuite à un calcul global par la technique numérique des super-éléments. Cette approche consiste à introduire un nouvel élément fini qui contiendrait les informations obtenues sur la structure élémentaire préalablement étudiée. Enfin, l'intégration au niveau numérique du couplage des phénomènes hygrométriques avec d'autres paramètres du milieu environnant d'un détecteur est également en perspective.

# Bibliographie

- [1] J.C. Aboudi, 'Constitutive Equations for Elastoplastic Composites with Imperfect Bonding', *International Journal of Plasticity*, 4, 103-125, 1988.
- [2] J.C. Aboudi, 'Micromechanical analysis of fibrous composites with Coulomb frictional slippage between the phases', *Journal of Mechanics of Materials*, vol 8, 103-115
- [3] J.D. Achenbach et H. Zhu, 'Effect of interfacial zone on mechanical behaviour and failure of fiber reinforced composites', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 37, 381-393, 1989
- [4] M.J. Adamson, 'Thermal Expansion and Swelling of Cured Epoxy Resin used in Graphite/Epoxy Composite Materials', *Journal of materials science*, vol 15, 1736-1745, 1980.
- [5] D.F. Adams, *Proceedings of the 24th National SAMPE Symposium*, 1458-1469, 1979.
- [6] S. Andrieux, *Un modèle de Matériau Microfissuré. Application aux Roches et au Béton*, Thèse de Docteur d'Ingénieur, 1983.
- [7] O. Allix, C. Cluzel, P. Ladevèze, P. Péres, 'Meso-modélisation de l'endommagement de composites évolutifs tridirectionnels', *Compte rendus des Huitièmes Journées Nationale sur les Composites*, Palaiseau, publiés par O. Allix, J.P.Favre et P. Ladevèze, 401-412, 1992.
- [8] M.K. Antoon, J.L. Koenig, 'Irreversible Effects of Moisture on the Epoxy Matrix in Glass Reinforced Composites', *Journal of Polymer Science: Polymer Physics*, Edition 19, 197-212, 1981.
- [9] A. Apicella, L. Nicolais, 'Effect of Water on the Properties of Epoxy Matrix and Composite' *Advances in Polymer Science*, 69-77, 1985.
- [10] A. Apicella, L.Nicolais, G. Astarita, E. Drioli, 'Effect of Thermal History on Water Sorption, Elastic Properties and the Glass Transition of Epoxy Resins', *Polymer*, vol 20, 11433-1148, 1979.
- [11] B.D. Argarwal and L.J. Broutman, *Analyses and Performance of Fibre Composites*, John Wiley and Sons Inc, second edition, 1990.
- [12] K.H.G. Ashbee and R.C. Wyatt, 'Water damage in glass fibre/resin composites', *Proceedings of the Royal Society A* 312, 553-564, 1969.
- [13] J.M. Augl and A.E. Berger, 'The Effect of Moisture Carbon Fiber Reinforced Epoxy Composites. I. Diffusion', NSWC/WOL/TR 76-7, Naval Surface Weapons Center, White Oak, Silver Spring, Maryland, 1976.
- [14] ATLAS Inner Detector Technical Design Report, volume 2, CERN/LHCC 97-17, 30th April 1997.
- [15] L. Banks and B. Ellis, 'The Glass Transition Temperature of an Epoxy Resin and the Effect of Absorbed Water', *Polymer Bulletin*, vol 1, 377-382, 1979.
- [16] W.D. Bascom, 'Water at the interface', *Journal of Adhesion*, vol 2, p161, July 1970.
- [17] D. Bashford, D. Eaton et A. Pradier, 'The Use of High Stiffness Material and Dimensionnally Stable Materials in Spacecraft Applications', *International Workshop on Advanced Materials for High Precision Detectors*, B. Nicquevert and C. Hauviller editors, 9-19, Geneva 1994, CERN 94-07.

- [18] A. Benhamida, *Etude micromécanique des mousses syntactiques*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1989.
- [19] A. Benhamida, H. Dumontet, N. Le Bris, A. Lekder, 'Rôle des interfaces dans le transport de l'humidité dans les matériaux composites', *Colloque National en calcul des structures*, Ed. Hermès, 1995
- [20] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [21] Y. Benveniste, 'On the effect of debonding on the overall behavior of composite materials', *Mechanics of Materials*, vol 3, 349-358, 1984.
- [22] J.M. Berthelot, *Matériaux Composites, Comportement Mécanique et Analyse des structures*, Masson, 1992.
- [23] J.J. Bikerman, *The Science of Adhesive Joints*, 2nd edition, Academic Press, Inc., New York and London, 1968.
- [24] S. Blazewicz, J. Blocki, J. Chlopek, J. Godlewski, J. Michalowski, K. Pakonski, J. Piekarczyk and M. Stodulski, 'Thin C/C Composite Shells for High Energy Physics: Manufacture and Properties', *Carbon*, vol 34, No 11, 1393-1399, 1996.
- [25] E. Boinard, R.A. Pethrick et J. Dalzel-Job, 'Studies of water permeation into fibre reinforced composite structures', *Proceedings of the Seventh International Conference on Fibre Reinforced Composites*, 15-17 april, 1998.
- [26] P. Bonniau, *Effets de l'absorption d'eau sur les propriétés électriques et mécaniques des matériaux composites à matrice organique- Etude appliquée à trois matériaux constitués de tissu de verre et de résine époxyde*, Thèse du troisième cycle, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1983.
- [27] P. Bonniau and A.R. Bunsell, 'A Comparative study of water absorption theories applied to Glass/Epoxy Composites', *Journal of Composite Materials*, vol 15, p272, 1981.
- [28] C.E. Browning, 'The mechanisms of elevated temperature property losses in high performance structural epoxy resin matrix materials after exposures to high humidity environments'. Technical Report AFML-TR-75-153, 1976.
- [29] I. Bruant et H. Dumontet, 'Contraintes élastiques et hygroélastiques dans les plaques stratifiées', *Rapport IFREMER*, 1996.
- [30] H. Bui, K. Dang Van and C. Stolz, 'Relations entre les Grandeurs Macroscopiques et Microscopiques', *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Vol 292, série II, p863-866, 1981.
- [31] D. Caillerie, P. Trompette, et P. Verna, 'Homogenization of periodic trusses', *Congrès IASS*, Madrid 1989.
- [32] D. Caillerie et G. Moreau, 'Homogénéisation discrète : application aux treillis en forme de coques et à l'élasticité', *Conférence J. Cartier*, Lyon, décembre 1995.
- [33] D.S. Cairns et D.F. Adams, 'Moisture and Thermal Expansion Properties of Unidirectional Composite Materials and the Epoxy Matrix', *Environmental Effects on Composite Materials, volume 2*, George Springer Editor, Tecnomic Publishing Company, 1984.
- [34] A.H. Cardon, 'From micro-to macroproperties of polymer based composite systems by integration of the characteristic of the interphase regions', *Composites Structures*, 24, 213-217, 1993.
- [35] C. Carfagna, A. Apicella, L. Nicolais, 'The Effect of the Prepolymer Composition of Amino-hardened Epoxy Resins on the Water Sorption Behavior and Plasticization', *Journal of Applied Polymer Science*, vol 27, 105-112, 1982.
- [36] H.G. Carter and K.G. Kibler, 'Langmuir-Type Model for Anomalous Moisture Diffusion in Composite Resins', *Journal of Composite Materials*, vol 12, 118, 1978.

- [37] B. Chabert, J. Chauchard, G. Lachenal, T. Philibert, 'Mise en évidence d'une modification de l'état de surface de fibres de verre entre 50 et 80°C par chromatographie en phase gazeuse inverse', *Conférence de recherche de l'Académie des Sciences de Paris*, t.295, Série II, p 967-970, 6 Décembre 1982.
- [38] C.C. Chamis, R.F. Lark, J.H. Sinclair, 'Integrated Theory for Predicting the Hygrothermomechanical Response of Advanced Composite Structural Components', *Advanced Composite Materials. Environmental Effects*, ASTM-STP 658, 160-192, 1978.
- [39] M.K. Chaudhury, T.M. Gentle, E.P. Plueddemann, *Journal of Adhesion Science*, vol 1, 29-38, 1987.
- [40] R.J. Charles, 'Static Fatigue of Glass. I', *Journal of Applied Physics*, vol 29, 1549-1553, 1958.
- [41] R.J. Charles, 'Static Fatigue of Glass. II', *Journal of Applied Physics*, vol 29, 1554-1560, 1958.
- [42] T.C. Chen, C.I. Weng, and W.J. Chang, 'Transient Hygrothermal Stresses Induced in General Plane Problems by Theory of Coupled Heat and Moisture', *Journal of Applied Mechanics*, vol.59, S10-S16, June 1992.
- [43] Z. Cheng, A.K. Jemah, F.W. Williams, 'Theory for multilayered anisotropic plates with weakned interfaces', *Journal of Applied Mechanics*, vol 63, 1019-1026, 1996,
- [44] Y. Chevalier, *Matériaux composites: Comportement élastique et viscoélastique des composites*, Techniques de l'Ingénieur, 1988.
- [45] William J. Craft and R.M. Christensen, 'Coefficient of Thermal Expansion for Composites with Randomly Oriented Fibers', *Journal of Composite Materials*, vol 15, 2-20, January 1981.
- [46] T.W. Chou, S. Nomura, M. Taya, 'A self-consistent Approach to the Elastic Stiffness of Short-Fiber Composites', *Journal of composites materials*, 178-188, 1980.
- [47] CMS Tracker Technical Design Report, CERN/LHCC 98-06, 15th April 1998.
- [48] J.D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell Ed., Toronto, 1968.
- [49] J.D. Cole and J. Kevorkian, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer Ed., New York, 1980.
- [50] F.N. Cogswell, *Thermoplastic Aromatic Polymer Composites*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1992.
- [51] M. Collet, 'Etude de l'état dynamique des détecteurs', CERN Note technique PPE/TA 1 96-01, Janvier 1996.
- [52] A. Corigliano, 'Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composites delamination', *International Journal of Solids Structures*, vol 30, 20, 2779-2811, 1993.
- [53] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford, 1967.
- [54] R.M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials*, Wiley and Sons, New-York, 1979.
- [55] R.M. Christensen, K.H. Lo, 'Solutions for effective shear properties in three sphere and cylinder models', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 27, 4, 315-330, 1979.
- [56] S. Da Mota Silva and R. Ribeiro, 'Compilation of Data Concerning the Humidity Evolution in the LEP Tunnel and in the L3 and DELPHI Experiments', CMS Internal Note, à paraître.
- [57] S. Da Mota Silva, H. Dumontet, C. Hauviller, P. Kanouté, R. Ruibero, 'Hygro-Thermal Transient Analysis for Highly Stable Structures', *International Conference on Composite Materials*, Paris, 1999, à paraître.
- [58] C. Darve, P. Kanouté et D. Piédigrossi, 'Influence de l'humidité sur les matériaux composites: Protocole expérimental', *Communication privée*, 1996.
- [59] F.X. De Charentenay, 'Fissuration en fatigue de polymères amorphes et cristallins', *Matériaux et Techniques*, Avril-Mai, 1979.

- [60] R. DeIasi and J.B. Whiteside, 'Effect of Moisture on Epoxy Resins and Composites', *Advanced Composite Materials-Environmental Effects, ASTM STP 658*, J.R. Vinson, Ed., American Society for testing and Materials, 2-20, 1978.
- [61] B. De Néve and M.E.R. Shanahan, 'Physical and Chemical effects in an Epoxy Resin Exposed to Water Vapour', *Journal of Adhesion*, 1995, vol 49, 165-176
- [62] F. Devriès, *Modélisation et calcul de structures composites*, Thèse d'habilitation à diriger les recherches, Université Paris VI, 1992.
- [63] J.Devries, 'Bounds on elastic moduli of unidirectional composites with imperfect bonding', *Composites Engineering*, vol 3, No 4, 349-382, 1993.
- [64] B. Dewimille, *Vieillissement hygrothermique d'un matériau composite fibres de verre-résine époxyde*, Thèse Docteur-Ingénieur, Ecole des Mines de Paris, juillet 1981
- [65] B. Dewimille, 'Hydrothermal aging of an unidirectional Glass-Fibre Epoxy Composite during water Immersion', *Advances in composite Materials*, ICCM 3, Paris, vol 1 , pp 597, Août 1980.
- [66] S.R. De Groot, *Irreversible Thermodynamics*, North Holland, Amsterdam, 1951.
- [67] H. Dumontet, *Homogénéisation et Effets de Bords dans les Matériaux Composites*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1990.
- [68] G. Duvaut, 'Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus', *Theoretical and Applied Mechanics*, W. Koiter Ed., North Holland, 119-132, 1976.
- [69] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Ed., masson, 1990
- [70] B.H. Eckstein, 'Moisture Absorption by Epoxy Laminating Resins', *American Chemical Society, Organic Coatings, Plastics Chemistry*, vol 38, 503-509, 1978.
- [71] B.C. Ennis, P.J. Pearce, C.E.M. Morris, 'Aging and Performance of structural Film Adhesives. III. Effect of Humidity on a Modern Aerospace Adhesive', *Journal of Applied Polymer Science*, vol 37, 15-32, 1989.
- [72] G.L. Farley and C.T. Herakovich, *ASTM-STP-658*, 143, 1978.
- [73] J.P. Favre, 'Caractéristiques Physiques et Hygrothermiques des Composites. Etude de l'interface.', Ecole d'Hiver, Piau-Engaly, 1989.
- [74] J.P. Favre, *Matériaux Composites, Interface dans les composites fibreux*, Techniques de l'Inggénieur, 1992.
- [75] A. Fick, *Ann.Phys.Lpz.* 170, 1855, 59.
- [76] G.A. Francfort, *Two variational problems in thermoelasticity: 1.homogenization, 2. material momenta*, Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy of Stanford University, 1982.
- [77] G.A. Francfort, *Homogenization and thermoelasticity*, SIAM, Journal of Mathematics Analysis, vol 14, 696-708, 1983.
- [78] G.A. Francfort, Q.A. Nguyen et P. Suquet, 'Mécanique des milieux continus, thermodynamique et lois de comportement thermomécanique homogénéisées', *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, Paris, t.296, p 1007-1010, 1983.
- [79] Y.C. Fung, *Foundations of solids mechanics*, 507p, Ed. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1965.
- [80] G. Gallicher, J.Galy, M-F. Grenier, F. Méchin, B. Bloch, P. Dublineau, J.-P. Pascault, J.-F. Stohr, 'Les résines cyanate pour des structures composites aéronautiques et spatiales. Formation et caractérisation des réseaux polymères', *Matériaux et Techniques*, N° 7-8, 1996.
- [81] U. Gaur and B. Miller, *Polymer Composites*, vol 11(4), 217-222, 1990.

- [82] P. Germain, *Cours de mécanique des milieux continus*, Tome 1, *Théorie Générale*, 417p., Ed. Masson et Cie, Paris, 1973.
- [83] J.P. Gormican, S. Klulick, E.P. Kasl, *Dimensionally stable, graphite-fiber reinforced composite mirror technology*, Space Astronomical Telescopes and Instruments II, Orlando, Floride, SPIE, 410-420, 1993.
- [84] V.B. Gupta, L.T. Drzal, M.J. Rich, 'The Physical basis of moisture transport in a cured epoxy resin system', *Journal of Applied Polymer Science*, vol 30, p4467, 1985.
- [85] M.E. Gurtin and C. Yatomi, 'On a Model for Two Phase Diffusion in Composite Materials', *Journal of Composite Materials*, vol 13, p 126, April 1979.
- [86] M. Haboussi, *Contribution à la modélisation de l'intercouche des stratifiés composites: application aux effets de bords libres*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, mars 1998.
- [87] H.T. Hahan and R.Y. Kim, 'Swelling of Composite Laminates', *Advanced Composite Materials'. Environmental Effects*. ASTM-STP 658, 98-120, 1978
- [88] B. Halphen et Nguyen Quoc Son, 'Sur les matériaux standards généralisés', *Journal de Mécanique*, 14, 39-63, 1975.
- [89] J. Halpin and S.W. Tsai, 'Effects of Environmental Factors of Composite Materials', AFML-TR 67-423, 1969.
- [90] I. Hamerton, *Chemistry and Technology of Cyanate Ester Resins*, Ian Hamerton editor, Blackie Academic and Professional, Chapman and Hall, 1994.
- [91] R.J. Hartranft and G.C. Sih, 'The influence of the Soret and Dufour Effects on the Diffusion of Heat and Moisture in solids', *International Journal of Engineering Science*, vol.18, 1375-1383, 1980.
- [92] Z. Hashin, 'Theory of Fiber Reinforced Materials', NASA CR-1974, 1972.
- [93] Z. Hashin, 'Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface', *Mechanics of Materials*, vol 8, 333-348, 1990.
- [94] Z. Hashin, 'Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 39(6), 745-762.
- [95] Z. Hashin and B.W. Rosen, 'The effective moduli of Fiber-Reinforced Materials', *Journal of Applied Mechanics*, vol 31, 223-232, 1964.
- [96] Z. Hashin and B.W. Rosen, 'Thermomechanical properties of fibrous composites', *Proceedings of the Royal Society of London*, vol A.319, 79-94, 1970.
- [97] Z. Hashin and S. Shtrikman, 'A variational Approach to the Theory of Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials', *Journal of Applied Physics*, vol 33, number 10, 3125-3131, 1962.
- [98] C. Hauviller, 'High Performance Composite Structures for High Precision Particle Detectors', *11th International Conference on Composite Materials*, Gold-Coast (Australia), July 1997.
- [99] E. Hervé and A. Zaoui, 'Elastic behaviour of multiplicity coated fibre-reinforced composites', *International Journal of Engineering Science*, vol 33, 10, p 1419-1433, 1995.
- [100] R. Hill, 'Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Material :I Elastic Behavior', *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol 12, p 199, 1964.
- [101] R. Hill, 'A self-consistent Mechanics of Composites Materials', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, 213-222, 1965.
- [102] J.W. Hutchinson and H.K. Jensen, 'Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction', *Mechanics of Materials*, vol 9, 139-163, 1990.

- [103] M. Höfert and A. Fassò, 'Combined Influence of humidity and radiation in the LEP Tunnel', *Fifth Workshop on LEP Performance*, Chamonix 13-18 January 1995, CERN/TIS-RP/95-02/CF.
- [104] O. Ishai, 'Environmental Effects on deformation, Strength and degradation unidirectional glass fiber reinforced Plastics-II Experimental Study', vol 15, N° 7, 491-499, July 1976.
- [105] R. Jacquemet, *Etude du comportement au vieillissement sous charge de stratifiés polyester/verre E en milieu marin*, Thèse de troisième cycle, Université de Nancy I, Juin 1989.
- [106] K. Jayaraman, K.L. Reifsnider, 'Residual stresses in a composite with continuously varying Young's modulus in the fiber/matrix interphase', *Journal of Composite Materials*, vol 26, 770-791, 1992.
- [107] C.J. Jones, R.F. Dickson, T. Adam, H. Reiter, and B. Harris, 'The environmental fatigue behaviour of reinforced plastics', *Proceedings of the Royal Society of London*, vol A 396, 315-338, 1984.
- [108] W. Jost, *Diffusion in Solids, Liquide, Gasses*, Academic Press New-York, 1952.
- [109] L. Journet, 'Caractéristiques des stratifiés utilisés pour le design du TRT Endcap', *Note technique TA1/97-06*, 1997.
- [110] L. Journet, 'Calcul de déformation d'un module Type A du TRT endcap', *Note technique*, TA1/97-08, 1997.
- [111] N.C.W. Judd, 'The Chemical Resistance of Carbon Fibres and a carbon Fibre/Polyester Composite', *Proceedings of the First International Conference on Carbon Fibres*, Plastics Institute, 1971, p258.
- [112] D.H. Kaelbe and P.J. Dynes, 'Hygrothermal Ageing of Composite Materials. Part2: Matrix Aspects', *Journal of Adhesion*, vol 8, 195-212, 1977.
- [113] P. Kanouté, 'Homogénéisation des composites à fibres unidirectionnelles — Application à des problèmes hygrométriques', *Note technique TA1/96-08*, 1996.
- [114] P. Kanouté, H. Dumontet, C. Hauviller, B. Nicquevert, 'Stabilité dimensionnelle de composites à matrice organique soumises à des variations d'humidité ambiante', *Colloque national en calcul des Structures*, Giens, Ed. Académiques de l'Ouest, 1997.
- [115] P. Kanouté and B. Nicquevert, 'Alignement system of the ATLAS muon spectrometer: influence of humidity variations on the dimensional stability of the bar system', ATLAS-Muon-97-157, 1997.
- [116] P. Kanouté, H. Dumontet, C. Hauviller, B. Nicquevert, 'Hygrothermal behaviour of reinforced composite materials', *Proceedings of the Seventh International Conference on Fibre Reinforced Composites*, Newcastle, 15-17 April 1998.
- [117] M.L. Kaplan, 'Solvent Penetration in Cured Epoxy Networks', *Polymer Engineering Science*, vol 31 (10), 689-698, 1991.
- [118] P.R. Kim, "The dimensional stability of fiber-reinforced thermoplastic composites", Thèse de doctorat. Ecole Polytechnique de Lausanne, 1995.
- [119] K. Kondo and T. Taki, 'Transverse Moisture Diffusivity of Unidirectionally Fiber-Reinforced Composite', *Proceedings Japan-U.S. Conference on Composites Materials: Mechanics, Mechanical Properties and Fabrication*, Tokyo, 308-317, 1981.
- [120] G.C. Krumweide and R.A. Brand, *Attacking dimensional instability problems in graphite/epoxy structures*, Optomécanics and Dimensional Stability, San Diego, CA, USA, SPIE, 252-261, 1991.
- [121] P. Ladevèze, E. Le Dantec, "Damage modelling of the elementary ply for laminated composites", *Composite Science and Technology*, 43, 257-267, 1992.
- [122] G. Laird and T.C. Kennedy, 'Micromechanics of imperfect interfaces in heterogenous materials', *Composites*, vol 25, 7, 593-603, 1994.

- [123] N. Le Bris, 'Propagation de l'Humidité dans les Composites à Fibres Unidirectionnelles', *Rapport d'Avancement, Juillet 1993-Septembre 1994*, Unité de recherche Marine No 12, 1994
- [124] M.C. Lee and N. Pepas, 'Models of Moisture Transport and Moisture induced Stresses in Epoxy Composites', *Journal of Composite Materials*, vol 27, 1146-1171, 1993.
- [125] D.R. Lefevre, K.M. Takahashi, A.J. Muller, V.R. Raju, 'Degradation of Epoxy Coatings in Humid Environments: The Critical Relative Humidity for Adhesion Loss', *Journal of Adhesion Science Technology*, vol 5(3), 201-227, 1991.
- [126] J. Lemaitre et J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, édition Dunod, 1988.
- [127] F. Léné, *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1984.
- [128] R.L. Levy, 'Mechanisms of Epoxy Moisture Effects', Technical Report AFML-TR-77-41, 1-45, April 1977.
- [129] LHC Study Group, The Large Hadron Collider accelerator project, LHC CERN AC/93-03, March 1993.
- [130] LHC Study Group, The Large Hadron Collider-Conceptual design, CERN/AC 95-05, May 1995.
- [131] G. L'Hostis, *Contribution à la Conception et à l'Etude de Structures Composites Thermoélastiques*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre Marie Curie, Parix VI, 1996.
- [132] J.L. Lions, 'Some Methods in the Mechanical Analysis of Systems and Their Control', Science Press Ed., Gordon and Breach, New York, 1981.
- [133] G. Lubin, *Handbook of Composites*, G. Lubin editor, published by Van Nostrand Reinhold Company, 1982.
- [134] S. Lucas, 'Etude dynamique des détecteurs', Note technique, EP EC/TO Technical Office, June 1998.
- [135] M.P. Lutz and R.W. Zimmerman, 'Effect of the interphase zone on the bulk modulus of a particulate composite', *Journal of Applied Mechanics*, vol 63, 855-861, 1996.
- [136] A.C. Loos and G.S. Springer, 'Moisture Absorption of Graphite-Epoxy Composites Immersed in Liquids and in Humid Air', *Journal of Composite Materials*, vol 13, 131-147, 1979.
- [137] R.E. Lowrie, 'Glass Fibers for High strength composites', *Modern Composite Materials*, Addison-Wesley, 270-323, 1967.
- [138] P.K. Mallick, *Fiber Reinforced Composites-Materials, Manufacturing and Design*, Marcel Dekker, Inc., 1993.
- [139] C.A. May, J.S. Fritzen, G.R. Brown, 'Analysis of resin matrix changes during composite cure', *Proceedings ICCM1*, Geneva, p264, 1975.
- [140] E.L. McKague, J.D. Reynolds, J.E. Halkias, 'Moisture Diffusion in Fiber Reinforced Plastics', *Journal of Engineering Materials and Technology Transactions of the ASME*, p92, 1976.
- [141] E.L. McKague, J.D. Reynolds, J.E. Halkias, 'Swelling and Glass Transition Relations for Epoxy Matrix Material in Humid environments', *Journal of Applied Polymer Science*, vol 22, 1643-1654, 1978.
- [142] D.W. McKee and V.J. Mimeaule, 'Surface Properties of Carbon Fibers', *Chemistry and Physics of Carbon*, vol 8, Marcel Dekker, p235, 1973.
- [143] A.G. Metcalfe and G.K. Schmitz, 'Mechanism of stress corrosion in E glass filaments', *Glass Technology*, volume 13, p5-16, 1972.
- [144] J.C. Michel, P. Suquet, F. Thébaud, 'Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique', *Revue Européenne des éléments finis*, vol 3, No 4, 573-595, 1994

- [145] W.J. Mikols and J.C. Seferis, 'Evaluation of Structural Changes in Epoxy Systems by Moisture Sorption-Desorption and Dynamic Mechanical Studies', *Polymer Composites*, vol 3(3), 118-124, 1982
- [146] R.J. Morgan, J.E. O'Neal, and D.L. Fanter, 'The Effect of Moisture on the Physical and Mechanical Integrity of Epoxies', *Journal of Materials Science*, vol 15, 751-764, 1980.
- [147] D.H. Morton-Jones and J.W. Ellis, *Polymer Products*, Chapman and Hall, London, 1986.
- [148] P. Moy and E. Karasz, 'Epoxy Water Interactions', *Polymer Engineering Science*, vol 20(4), 315-319, 1980.
- [149] S. Neumann and G. Marom, 'Prediction of Moisture Diffusion Parameters in Composite Materials under Stress', *Journal of Composite Materials*, vol 31, p68-80, 1987.
- [150] B. Nicquevert, 'Evolution de l'humidité dans le puits d'expérience L3 au cours de l'année 1993', *Technical Note TAI/94-04*, RD28, avril 1994.
- [151] S. Nomura and T.W. Chou, 'Bounds on Effective Thermal Conductivity of Short-Fiber Composites', *Journal of Composites Materials*, 14, 120-129, 1980.
- [152] N.J. Pagano and G.P. Tandon, 'Modeling of imperfect bonding in fiber reinforced brittle matrix composites', *Mechanics of Materials*, 9, 49-64, 1990.
- [153] P.J. Pearce, R.G. Davidson, C.E.M. Morris, 'Hydrolytic Stability of Some Uncured Epoxy Resins', *Journal of Applied Polymer Science*, vol 26, 2363-2372, 1981.
- [154] J.F. Peltier, J. Pernon and M. Rabinovitch, 'High Dimensional Stability Structure-Continuous Metal Matrix Composites', *International Workshop on Advanced Materials for High Precision Detectors*, B. Nicquevert and C. Hauviller editors, 97-104, Geneva 1994, CERN 94-07.
- [155] C. Pideri, *Matériaux Composites Elastiques : Comparaison de quelques Méthodes d'Homogénéisation*. Thèse de troisième cycle, Université Paris 6, 1987.
- [156] G.A. Pogany, 'Anomalous Diffusion of Water in Glassy Polymers', *Polymer*, vol 17, 690-694, 1976.
- [157] E.B. Rabinovitch, 'Factors affecting the dimensional stability of exterior vinyl products', *Macromolekulare Chemie, Macromolecular Symposia*, vol 29, 241-251, 1989.
- [158] J. Reberol, *Modèles d'adhésion pour le contrôle non destructif ultrasonore de certains assemblages collés*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1997.
- [159] E.J. Ripling, C. Bersch, S. Mostovoy, 'Stress Corrosion cracking of adhesion joints', emphAero. Adhesives and Elastomers, SAMPE, Technical Conference Series, 287-298, 1970.
- [160] G. Romeo, E. Miraldi, G. Ruscica, F. Bertoglio, G. Ruvinetti, 'A new test facility for measuring the coefficient of moisture expansion of Advanced Composite Materials', *Proceeding of the International Conference on Spacraft Structures and Mechanical Testing*, Noordwijk, The Netherlands, 24-26 April 1991.
- [161] B.W. Rosen and Z. Hashin 'Effective Thermal Expansion Coefficients and Specific Heats of Composite Materials', *International Journal of Engineering Science*, vol 8, 157-173, 1970.
- [162] E. Sanchez-Palencia, 'Non Homogeneous Media and Vibration Theory', *Lectures Notes in Physics*, n<sup>o</sup>. 127, Springer-Verlag Ed., Berlin, 1980.
- [163] R.A. Schapery, 'Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles', *Journal of Composite Materials*, vol 2, 380-404, 1968.
- [164] C Schutte "Environmatal Durability of Glass-Fiber Composites". 11th *Materials Science and Engineering*, 13, 265-324, 1994.
- [165] C.H. Shen and G.S. Springer, 'Moisture Absorption and Desorption of Composite Materials', *Journal of Composite Materials*, vol 10, p2, 1976.

- [166] C.H. Shen et G.S. Springer, 'Effects of Moisture and Temperature on the tensile strength of Composite Materials', *Journal of Composite Materials*, vol 2, p 2, Jan 1977.
- [167] C.H. Shen et G.S. Springer, 'Environmental Effects on the elastic Moduli of Composite Materials', *Journal of Composite Materials*, vol 11, p 250, July 1977.
- [168] D.A. Shimp, "Technologically driven applications for cyanate ester resins", *Chemistry and Technology of Cyanate Ester Resins*, Ian Hamerton editor, Chapman et Hall, 1994.
- [169] D.A. Shimp, "Electrical Properties of cyanate ester resins and their significance for applications", *Chemistry and Technology of Cyanate Ester Resins*, Ian Hamerton editor, Chapman et Hall, 1994.
- [170] C.D. Shirrell "Diffusion of Water Vapor in Graphite/Epoxy Composites: Advanced Composite Materials-Environement Effects", J.R. Vinson, ed.,ASTM, STP658, 21-42, 1978.
- [171] C.D. Shirrell and J. Halpin, 'Moisture Absorption and Desorption in Epoxy Composites Laminates', Composites Materials: Testing and Design (Fourth Conference), ASTM STP617, American Society for Testing Materials, 514-528, 1977.
- [172] G.S. Springer, 'Moisture content of composites under transient conditions', *Journal of Composite Materials*, vol 11, January 1977.
- [173] G S Springer, *Environmental Effects on Composite Materials*, G.S Springer Editor, 1981.
- [174] G.S. Springer and S.W. Tsai, 'Thermal Conductivities of Unidirectional Composites', *Journal of Composite Materials*, vol1, p166, 1967
- [175] P. Suquet, 'Plasticité et Homogénéisation'. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [176] Y. Suzuki, Z. Maekawa, H. Hamada, A. Yokoyama, T. Sugihara and M.Hojo, *Journal of Materials Science*, vol 28, 1725-1732, 1993.
- [177] The Tracker System Project Technical Design Report, CERN/LHCC 98-6, CMS TDR 5, 15 April 1998.
- [178] P. Thevenin, L. Ferry, E. Joseph, C. Suri, F. Thiebaud, D. Perreux, et D. Varchon, 'Contribution à l'étude du comportement à long terme d'un stratifié verre-époxy par un modèle mesoscopique', *Journées Scientifiques et Techniques AMAC: Durabilité des matériaux composites*, Moret sur Loing, 1996.
- [179] M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press Ed., New-York, 1964.
- [180] J. Verdu, *Veillissement chimique*, Techniques de l'Ingénieur, Traité Plastiques, A3151-1-A3151-13.
- [181] J. Verdu, *Action de l'eau*, Techniques de l'Ingénieur. Traité Plastiques, A3165-1-A3165-6.
- [182] J.R. Vinson, *Advanced Composite Materials. Environmental Effects*, American Society for Testing and Materials, ASTM-STP 658, 1978.
- [183] G.Z. Xiao and M.E.R. Shanahan, 'Water Absorption and Desorption in an Epoxy Resin with Degradation', *Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics*, vol 35, 2659-2670, 1997.
- [184] Y. Weitsman, 'Coupled Damage and Moisture-Transport in Fiber Reinforced Polymeric Composites', *Journal of Solids Structures*, vol 23, No 7, 1003-1025, 1987.
- [185] S.M. Wiederhorn, L.H. Bolz, 'Stress Corrosion and Static Fatigue of Glass', *Journal of the American Ceramic Society*, vol 53, No 10, p573, Octobre 1970.
- [186] J.M. Whitney and C.E. Browning, 'Some Anomalies Associated with Moisture Diffusion in Epoxy Matrix Composite Materials', *Advanced Composite Materials-Environmental Effects*, ASTM STP 658, J.R. Vinson, Ed., American Society for Testing and Materials, 43-60, 1978.
- [187] E.G. Wolf, 'Polymer Matrix Composites : Moisture Effects and Dimensional Stability', International Encyclopedia of Composites, vol4.

- [188] W.W. Wright, 'The Effect of Diffusion of water into Epoxy Resins ans their Carbon Fibre Reinforced Composites', *Composites*, 201-215, July 1981.
- [189] O.C. Zienkiewicz and R.L.Taylor [189], *The Finite Element Method, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity*, McGraw-Hill, 1991.

# Annexe A Méthodes Simplifiées

## 1 Positions du problème. Notations

Le matériau composite considéré est un composite unidirectionnel à structure périodique décrit ci-dessus et le volume représentatif élémentaire choisi  $V$  est la période schématisé sur le figure.

On notera  $Y_1$ , le volume du cylindre circulaire inscrit dans  $V$  (par la suite  $Y_1$  sera appelé cylindre composite) et on désignera par  $Y_2$  le volume de  $V$  restant ;  $Y_2 = V - Y_1$ . Le rayon du cylindre composite sera noté  $r_m$  et  $r_f$  représentera celui de la fibre. D'autre part, on désignera par :

- $\Sigma_o$  la base inférieure de  $Y_1$
- $\Sigma_1$  la base supérieure de  $Y_1$
- $\Sigma_l$  la base latérale de  $Y_1$
- $\Gamma$  l'interface entre les deux constituants du composite à l'intérieur du volume représentatif.

Il est à noter que les constituants du composite sont homogènes et isotropes. Les coefficients d'élasticité, de dilatation thermique, d'expansion hygrométrique sont donc constants dans chacun d'entre eux. Dans toute la suite on indicera par un  $f$  (respectivement par  $m$ ) ce qui concerne la fibre (respectivement ce qui concerne la matrice). On a alors :

$$a_{ijkl} = \begin{cases} \lambda_f \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_f (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih}) & \text{dans la fibre} \\ \lambda_m \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu_m (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{jk} \delta_{ih}) & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_f \delta_{ij} & \text{dans la fibre} \\ \beta_m \delta_{ij} & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $\lambda$  est le premier coefficient de Lamé,  $\mu$  le coefficient de cisaillement,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique,  $\beta$  le coefficient d'expansion hygrométrique. On notera le module de rigidité à la compression  $K = \lambda + \mu$ . Et on posera :

$$\tau = \frac{r_f}{r_m} \quad \Phi = \frac{K_f}{K_m} \quad \eta = \frac{\mu_f}{\mu_m} \quad (\text{A.3})$$

## 2 Approche primale

### 2.1 Détermination des raideurs homogénéisées approchées

La détermination des raideurs homogénéisées nécessite la résolution du problème suivant :

Trouver  $(\mathbf{u}^s, \sigma^s)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma_{ij}^s = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ u_i^s = E_{ij} y_j & \text{sur } \Sigma_l \\ u_i^s - E_{i3} y_3 & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ [[\sigma(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N [[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1} = K_{T1} [[u_{T1}^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2} = K_{T2} [[u_{T2}^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Par linéarité du problème, nous pourrons obtenir tous les coefficients de raideur en résolvant les six problèmes élémentaires correspondant à une base de tenseurs symétriques. On choisira :

$$\left\{ \begin{array}{lll} E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

### 2.1.1 Premier cas de charge

Le problème associé au tenseur élémentaire de déformations macroscopique  $E^{(1)}$ , sécrit :

Trouver  $(u^s, \sigma^s)$  satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) & \text{dans } Y_1 \\ u^s(R, \theta, z) = R \vec{e}_r & \text{sur } \Sigma_l \\ u^s(r, \theta, L) = u^s(r, \theta, 0) & \\ \sigma_{rr}(\rho, \theta, z) = K_N [[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}(\rho, \theta, z) = K_{T1} [[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}(\rho, \theta, z) = K_{T2} [[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

La solution du problème associé, sécrit dans le système de coordonnées cylindriques  $(e_r, e_\theta, e_z)$ , sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta^s = u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

La solution de ce problème dans  $Y_1$  s'écrit :

$$\begin{cases} u_r^s = \cos 2\theta [-a_1 r - \frac{2\nu}{3-2\nu} a_2 \frac{r^3}{r_f^2} + a_3 \frac{r_f^4}{r^3} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a_4 \frac{r_f^2}{r}] \\ u_\theta^s = \sin 2\theta [a_1 r + a_2 \frac{r^3}{r_f^2} + a_3 \frac{r_f^4}{r^3} + a_4 \frac{r_f^2}{r}] \\ u_z^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

et le tenseur de contraintes correspondant est tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = 2\mu \cos 2\theta [-a_1 - 3a_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{2}{1-2\nu} a_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2\mu \cos 2\theta [a_1 + \frac{6}{3-2\nu} a_2 \frac{r^2}{r_f^2} + 3a_3 \frac{r_f^4}{r^4}] \\ \sigma_{zz}^s = 2\mu \cos 2\theta [\frac{6\nu}{3-2\nu} a_2 \frac{r^2}{r_f^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{r\theta}^s = 2\mu \sin \theta [a_1 + \frac{3}{3-2\nu} a_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3a_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} a_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Les 8 constantes  $a_i^f$  et  $a_i^m$  sont obtenues en résolvant un système constitué des conditions aux limites et d'interface imparfaite :

$$\begin{cases} a_1^m + \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} a_2^m \tau^{-2} - a_3^m \tau^4 + \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} a_4^m \tau^2 = -1 \\ a_1^m + a_2^m \tau^{-2} + a_3^m \tau^4 + a_4^m \tau^2 = -1 \\ a_3^f = 0 \\ a_4^f = 0 \\ a_1^m + 3a_3^m - \frac{2}{1-2\nu_m} a_4^m - a_1^f \eta - 3a_3^f \eta + \frac{2}{1-2\nu_f} a_4^f \eta = 0 \\ a_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m} a_2^m - 3a_3^m + \frac{1}{1-2\nu_m} a_4^m - a_1^f \eta - \frac{3}{3-2\nu_f} a_2^f \eta + 3a_3^f \eta - \frac{1}{1-2\nu_f} a_4^f \eta = 0 \\ a_1^m + a_2^m + a_3^m + a_4^m - a_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{K_{T1} r_f}) - a_2^f (1 + \frac{6\nu_f}{K_{T1} r_f (3-2\nu_f)}) = 0 \\ -a_1^m - \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} a_2^m + a_3^m - \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} a_4^m + a_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{k_{N1} r_f}) + a_2^f \frac{2\nu_f}{3-2\nu_f} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

La relation nous permet alors décrire que :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = a_{ij11}^s - a_{ij22}^s \quad (\text{A.15})$$

On peut alors montrer les résultats suivants :

**Proposition A.2** La solution analytique du problème associé à la déformation macroscopique  $E^{(2)}$  nous permet d'écrire, entre les coefficients simplifiés les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{1111}^s - a_{1122}^s = 2\mu_m (1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} a_4^m \tau^2) \\ a_{2211}^s - a_{2222}^s = -(a_{1111}^s - a_{1122}^s) \\ a_{3311}^s - a_{3322}^s = 0 \\ a_{1211}^s - a_{1222}^s = a_{1311}^s - a_{1322}^s = a_{2311}^s - a_{2322}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

et le tenseur de contraintes correspondant est tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = 2KA - 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2KA + 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = 2\lambda A \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Pour déterminer complètement la solution du problème, il ne reste plus qu'à calculer les 4 constantes  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $A_f$ ,  $B_f$  qui sont obtenues en résolvant un système construit avec les équations de continuité et des conditions aux limites. Soit :

$$\begin{cases} Bf = 0 \\ Am = 1 - \frac{B_{m1}}{r_m^2} \\ Af = \frac{1}{\Phi} \left( 1 - \frac{B_{m1}}{r_f^2} (\tau^2 + 1 - 2\nu_m) \right) \\ B_{m1} = \frac{(1 - \Phi)K_N r_f + 2K_m \Phi}{(\Phi(1 - \tau^2) + \tau^2 + 1 - 2\nu_m)K_N r_f + \Phi(2\mu_m + 2K_m)} r_f^2 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

**Proposition A.1** La solution analytique du problème associé au tenseur élémentaire  $E^{(1)}$  nous permet d'établir entre les coefficients de raideur simplifiés, les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{1111}^s + a_{1122}^s = 2K_m \left\{ 1 + \left( \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (-2(1 - \nu_m) \frac{B_{m1}}{r_m^2}) \right) \right\} \\ a_{3311}^s = \lambda_m - 2K_m(1 - \nu_m)\tau^2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(\nu_m - \Phi\nu_f)(K_N r_f + 2K_f) + \Phi\lambda_f}{(1 - 2\nu_m + \tau^2)(K_N r_f + 2K_f) + \Phi(1 - \tau^2)K_N r_f} \\ a_{2211}^s + a_{2222}^s = a_{1111}^s + a_{1122}^s \\ a_{1211}^s + a_{1222}^s = a_{1311}^s + a_{1322}^s = a_{2311}^s + a_{2322}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

### 2.1.2 Second cas de charge

On considère le problème associé à la déformation élémentaire  $E^{(2)}$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) & \text{dans } Y_1 \\ u^s(R, \theta, z) = R(\cos 2\theta \vec{e}_r - \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta) & \text{sur } \Sigma_l \\ u^s(r, \theta, L) = u^s(r, \theta, 0) & \\ \sigma_{rr}(\rho, \theta, z) = K_N[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}(\rho, \theta, z) = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}(\rho, \theta, z) = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

### 2.1.3 Troisième cas de charge

On considère le problème associé à la déformation élémentaire  $E^{(3)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) & \text{dans } Y_1 \\ u^s(R, \theta, z) = R(\sin \theta \overrightarrow{e_r} + \cos \theta \overrightarrow{e_\theta}) & \text{sur } \Sigma_l \\ u^s(r, \theta, L) = u^s(r, \theta, 0) & \\ \sigma_{rr}(\rho, \theta, z) = K_N[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}(\rho, \theta, z) = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}(\rho, \theta, z) = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

La solution de ce problème dans  $Y_1$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = \sin 2\theta [A_1 r + \frac{2\nu}{3-2\nu} A_2 \frac{r^3}{r_f^2} - A_3 \frac{r_f^4}{r^3} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} A_4 \frac{r_f^2}{r}] \\ u_\theta^s = \cos 2\theta [A_1 r + A_2 \frac{r^3}{r_f^2} + A_3 \frac{r_f^4}{r^3} + A_4 \frac{r_f^2}{r}] \\ u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

et le tenseur de contraintes correspondant est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^s = 2\mu \sin 2\theta [A_1 + 3A_3 \frac{r_f^4}{r^4} - \frac{2}{1-2\nu} A_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2\mu \sin 2\theta [-A_1 - \frac{6}{3-2\nu} A_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3A_3 \frac{r_f^4}{r^4}] \\ \sigma_{zz}^s = 2\mu \cos 2\theta [-\frac{6\nu}{3-2\nu} A_2 \frac{r^2}{r_f^2} - \frac{2\nu}{1-2\nu} A_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{r\theta}^s = 2\mu \sin \theta [A_1 + \frac{3}{3-2\nu} A_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3A_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} A_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Les 8 constantes  $A_i^f$  et  $A_i^m$  sont obtenues en résolvant un système constitué des conditions aux limites et d'interface imparfaite :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^m + \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} A_2^m \tau^{-2} - A_3^m \tau^4 + \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} A_4^m \tau^2 = -1 \\ A_1^m + A_2^m \tau^{-2} + A_3^m \tau^4 + A_4^m \tau^2 = -1 \\ A_3^f = 0 \\ A_4^f = 0 \\ a_1^m + 3a_3^m - \frac{2}{1-2\nu_m} A_4^m - a_1^f \eta - 3A_3^f \eta + \frac{2}{1-2\nu_f} A_4^f \eta = 0 \\ A_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m} A_2^m - 3A_3^m + \frac{1}{1-2\nu_m} A_4^m - a_1^f \eta - \frac{3}{3-2\nu_f} A_2^f \eta + 3A_3^f \eta - \frac{1}{1-2\nu_f} A_4^f \eta = 0 \\ A_1^m + A_2^m + A_3^m + A_4^m - A_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{K_{T1} r_f}) - A_2^f (1 + \frac{6\nu_f}{K_{T1} r_f (3-2\nu_f)}) = 0 \\ -A_1^m - \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} A_2^m + a_3^m - \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} A_4^m + A_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{k_{Nf} r_f}) + A_2^f \frac{2\nu_f}{3-2\nu_f} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.20})$$

Nous pouvons remarquer que ce système admet la même matrice que le système précédent. La seule différence est que le second membre devient l'opposé du premier, de ce fait nous avons :

$$A_i^m = -a_i^m, \quad A_i^f = -a_i^f \quad (\text{A.21})$$

En appliquant la définition des rigidités simplifiés, nous obtenons :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = 2a_{ij12}^s \quad (\text{A.22})$$

**Proposition A.3** *La solution analytique du problème associé à la déformation macroscopique  $E^{(3)}$  nous permet d'écrire, entre les coefficients simplifiés les relations suivantes :*

$$\begin{cases} a_{ij12}^s = 0 & \text{pour tout } (i, j) \neq (1, 2) \\ a_{1212}^s = \mu_m \left( 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(1 - \nu_m)}{1 - 2\nu_m} A_4^m r^2 \right) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

#### 2.1.4 Quatrième cas de charge

Lorsque  $E = E^{(4)}$  le problème à déformation macroscopique imposée se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) & \text{dans } Y_1 \\ u^s(R, \theta, z) = z \mathbf{e}_z & \text{sur } \Sigma_l \\ u^s(r, \theta, L) - L \delta_{i3} = u^s(r, \theta, 0) & \\ \sigma_{rr}(\rho, \theta, z) = K_N[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}(\rho, \theta, z) = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}(\rho, \theta, z) = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

La solution en déplacements du problème ainsi posé s'écrit :

$$\begin{cases} u_r^s = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta^s = 0 \\ u_z^s = z \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

La solution en contraintes de ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = (2\lambda + 2\mu)A + \lambda - 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = (2\lambda + 2\mu)A + \lambda + 2\mu \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = 2\lambda A + 2\mu + \lambda \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Les constantes  $A_f$ ,  $B_f$ ,  $A_m$ ,  $B_m$  sont obtenues à partir des conditions aux limites de notre problème, soit :

$$\begin{cases} B_f = 0 \\ A_m = -\frac{B_{m4}}{r_m^2} \\ A_f = \frac{\frac{K_N}{r_f} B_{m4}(1 - \tau^2) - \lambda_f}{2K_f + K_N r_f} \\ B_{m4} = \frac{\nu_m - \Phi \nu_f + \frac{\Phi \lambda_f}{K_N r_f + 2K_f}}{1 - 2\nu_m + \tau^2 + \frac{\Phi(1 - \tau^2)K_N r_f}{K_N r_f + 2K_f}} r_f^2 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Donc si on utilise la définition des coefficients de raideur simplifiés, on obtient :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = a_{ij33}^s \quad (\text{A.28})$$

et on montre les relations suivantes :

#### Proposition A.4

$$\begin{cases} a_{1133}^s = \lambda_m - 2K_m(1 - \nu_m)\tau^2 \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(\nu_m - \Phi \nu_f)(K_N r_f + 2K_f) + \Phi \lambda_f}{(1 - 2\nu_m + \tau^2)(K_N r_f + 2K_f) + \Phi(1 - \tau^2)K_N r_f} \\ a_{2233}^s = a_{1133}^s \\ a_{3333}^s = \lambda_m + 2\mu_m(1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}((\eta - 1)\tau^2 + \frac{\eta \lambda_f \tau^2}{K_N r_f + 2K_f}) - \frac{B_{m4}}{r_m^2}(\frac{1 + \tau^2 - 2\nu_m \tau^2}{1 - 2\nu_m} + \frac{\eta K_N r_f(1 - \tau^2)}{K_N r_f + 2K_f})) \\ a_{1233}^s = a_{1333}^s = a_{2333}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

#### 2.1.5 Cinquième cas de charge

Le problème à déformation macroscopique imposée associé au cisaillement élémentaire  $E^{(5)}$  sécrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) & \text{dans } Y_1 \\ u^s(R, \theta, z) = z(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + r \cos \theta \mathbf{e}_z & \text{sur } \Sigma_l \\ u^s(r, \theta, L) - L \delta_{i1} = u^s(r, \theta, 0) & \\ \sigma_{rr}^s(\rho, \theta, z) = K_N[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}^s(\rho, \theta, z) = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}^s(\rho, \theta, z) = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Dans  $Y_1$ , le déplacement miscoscopique associé est alors de la forme :

$$\begin{cases} u_r^s = z \cos \theta \\ u_\theta^s = -z \sin \theta \\ u_z^s = (Ar + \frac{B}{r}) \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Le tenseur de contraintes associé est alors tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = \sigma_{\theta\theta}^s = \sigma_{zz}^s = \sigma_{r\theta}^s = 0 \\ \sigma_{rz}^s = \mu \cos \theta (A + 1 - \frac{B}{r^2}) \\ \sigma_{\theta z}^s = -\mu \sin \theta (A + 1 + \frac{B}{r^2}) \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

On résoud ensuite le système obtenu en écrivant les conditions aux limites et à l'interface pour obtenir les 4 constantes introduites, soit :

$$\begin{cases} B_f = 0 \\ A_m = 1 - \frac{B_m}{r_m^2} \\ A_f = \frac{1 + \frac{B_m}{r_f^2}(1 - \tau^2) - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}}{1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}} \\ B_{m5} = \frac{2r_f^2(\eta - 1 - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f})}{(-1 - \tau^2)(1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}) + \eta(\tau^2 - 1)} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

De la relation, on en déduit que :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = 2a_{ij13}^s \quad (\text{A.34})$$

On peut alors aisément établir les résultats suivants :

#### Proposition A.5

$$\begin{cases} a_{1113}^s = a_{2213}^s = a_{3313}^s = 0 \\ a_{1213}^s = a_{2313}^s = 0 \\ a_{1313}^s = \mu_m \left( 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{2r_f^2(\eta - 1 - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f})}{(-1 - \tau^2)(1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}) + \eta(\tau^2 - 1)} \right) \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

#### 2.1.6 Sixième cas de charge

Lorsque que l'on considère le problème associé au tenseur  $E^{(6)}$ , le problème à résoudre est alors le même que celui résolu précédemment à condition d'avoir effectué une permutation de  $y_1$  et de  $y_2$ ; c'est à dire lorsque l'on a changé  $\cos \theta$  en  $\sin \theta$  et  $\sin \theta$  en  $-\cos \theta$ .

La solution dans  $Y_1$  s'écrit :

$$\begin{cases} u_r^s = z \sin \theta \\ u_\theta^s = z \cos \theta \\ u_z^s = (Ar + \frac{B}{r}) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Le tenseur de contraintes associé est alors tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = \sigma_{\theta\theta}^s = \sigma_{zz}^s = \sigma_{r\theta}^s = 0 \\ \sigma_{rz}^s = \mu \cos \theta (A + 1 - \frac{B}{r^2}) \\ \sigma_{\theta z}^s = -\mu \sin \theta (A + 1 + \frac{B}{r^2}) \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

En résolvant ensuite le système obtenu en écrivant les conditions aux limites et à l'interface nous obtenons les expressions des 4 constantes introduites, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_f = 0 \\ A_m = 1 - \frac{B_m}{r_m^2} \\ A_f = \frac{1 + \frac{B_m}{r_f^2}(1 - \tau^2) - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}}{1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}} \\ B_{m6} = \frac{2r_f^2(\eta - 1 - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f})}{(-1 - \tau^2)(1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}) + \eta(\tau^2 - 1)} \end{array} \right. \quad (\text{A.38})$$

De la relation, on en déduit que :

$$\ll \sigma_{ij}^s \gg_Y = 2a_{ij23}^s \quad (\text{A.39})$$

On peut alors aisément établir les résultats suivants :

#### Proposition A.6

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij23}^s = 0 \quad \text{pour tout } (i, j) \neq (2, 3) \\ a_{2323}^s = a_{1313}^s \end{array} \right. \quad (\text{A.40})$$

## 2.2 Détermination des coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés approchés

Afin de déterminer les coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisé, il convient de résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s = \lambda \varepsilon_{11}(u^s) I + 2\mu \varepsilon(u^s) - 3k\beta & \text{dans } Y_1 \\ u_i^s = 0 & \text{sur } \Sigma_l \\ u_i^s & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \sigma_N^s = K_N[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1}^s = K_{T1}[[u_{T1}^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2}^s = K_{T2}[[u_{T2}^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.41})$$

Ce problème devant être résolu par un incrément de gain en eau unitaire, le champ solution est recherché sous la forme d'un champ radial donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta^s = 0 \\ u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.42})$$

Le tenseur de contraintes associé est :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = 2KA - 2\mu \frac{B}{r^2} - 3k\beta \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2KA + 2\mu \frac{B}{r^2} - 3k\beta \\ \sigma_{zz}^s = 2\lambda A - 3k\beta \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

En résolvant le système construit à partir des conditions aux limites sur  $\Sigma_1$  et les conditions de glissement et de décollement à l'interface sur  $\Gamma$ , nous obtenons les valeurs des constantes introduites :

$$\begin{cases} A_m = -\frac{B_m}{r_m^2} \\ B_f = 0 \\ A_f = \frac{3k_f\beta_f + B_m(1-\tau^2)K_N r_f^{-1}}{K_N r_f + 2K_f} \\ B_m = \frac{3(k_m\beta_m - k_f\beta_f) + \frac{6K_f k_f \beta_f}{K_N r_f + 2K_f}}{-2\mu_m - 2K_m \tau^2 - \frac{2K_f(1-\tau^2)K_N r_f}{K_N r_f + 2K_f}} \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Nous pouvons alors montrer le résultat suivant :

**Proposition A.7** *Les coefficients simplifiés ( $\zeta_{ij}^s$ ) vérifient :*

$$\begin{cases} \zeta_{11}^s = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}[(2K_m + 2\mu_m) - \frac{3(k_m\beta_m - k_f\beta_f)\tau^2 + \frac{6K_f k_f \beta_f}{K_N r_f + 2K_f}}{-2\mu_m - 2K_m \tau^2 - \frac{2K_f(1-\tau^2)K_N r_f}{K_N r_f + 2K_f}} - 3k_m\beta_m] \\ \zeta_{22}^s = \zeta_{11}^s \\ \zeta_{33}^s = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}[-3k_m\beta_m - \frac{6\mu_f \tau^2 k_f \beta_f}{K_N r_f + 2K_f} - \frac{B_m}{r_m^2}(2K_m + 2\mu\tau^2 + 2\nu_f \frac{(1-\tau^2)K_N r_f}{K_N r_f + 2K_f})] \\ \zeta_{12}^s = \zeta_{13}^s = \zeta_{23}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

### 3 Approche duale

#### 3.1 Détermination des souplesses homogénéisées approchées

Le problème à résoudre pour les six élémentaires à ceux retenus pour l'approche primale, est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^s) = A_{ijkh} \sigma_{kh}^s(\mathbf{u}^s) & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s \cdot \mathbf{n} = \Sigma \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) & \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = \Sigma_{i3} & \\ \varepsilon(\mathbf{u}^s) [0, l] \text{ périodique en } Y_3 & \\ [[\sigma(\mathbf{n})]] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = K_N [[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T1} = K_{T1} [[u_{T1}^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{T2} = K_{T2} [[u_{T2}^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.46})$$

### 3.1.1 Premier cas de charge

Le problème associé à la contrainte élémentaire  $\Sigma^{(1)}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} I & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r & \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) & \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = 0 & \\ \varepsilon(u^s) [0, l] \text{ périodique en } Y_3 & \\ \sigma_{rr}^s = K_N [[u_r^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}^s = K_{T1} [[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}^s = K_{T2} [[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.47})$$

La solution dans  $Y_1$ , du problème cellulaire ( $P_Y$ ) associé s'écrit dans le système de coordonnées cylindriques  $(e_r, e_\theta, e_z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^s = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = C \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.48})$$

Le champ de déformations microscopiques "simplifié" associé est alors de la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^s = -\frac{1+\nu}{E} \frac{B}{r^2} + \frac{1-\nu}{E} A - \frac{\nu C}{E} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^s = \frac{1+\nu}{E} \frac{B}{r^2} + \frac{1-\nu}{E} A - \frac{\nu C}{E} \\ \varepsilon_{zz}^s = \frac{C}{E} - \frac{2\nu}{E} A \\ \varepsilon_{r\theta}^s = \varepsilon_{rz}^s = \varepsilon_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

Le champ de déplacements associé est de la forme nalign

$$\begin{cases} u_r^s = \frac{1+\nu}{E} \frac{B}{r} + \frac{1-\nu}{E} Ar - \frac{\nu C}{E} r \\ u_\theta^s = 0 \\ u_z^s = -\frac{2\nu A}{E} z + \frac{C}{E} z \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

Les constantes introduites sont déterminés en résolvant le système construit à partir des conditions aux limites et de décollement et de glissement aux interfaces, soit :

$$\begin{cases} A_m = 1 + \frac{B_m}{r_m^2} \\ C_f = \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} C_m \\ B_f = 0 \\ A_f = 1 + \frac{B_m}{r_f^2} (\tau^2 - 1) \\ C_m = \frac{2\tau^2(\nu_m\psi - \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + 2\frac{\tau^2(\psi\nu_m - n u_f) + \nu_f B_m}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} \frac{B_m}{r_m^2} \\ \nu_m\psi - \nu_f - \psi + 1 + 2\frac{(\nu_m\psi - \nu_f)(\tau^2(\psi\nu_m - \nu_m) + \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + \frac{E_f}{K_N r_f} \\ B_{m1} = r_f^2 \frac{\nu_m\psi - \nu_f - \psi + 1 + 2\frac{(\nu_m\psi - \nu_f)(\tau^2(\psi\nu_m - \nu_m) + \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + \frac{E_f}{K_N r_f}}{(\tau^2 - 1)(\nu_f - \nu_m\psi) + \tau^2(\psi - 1) + 1 + \psi - \frac{E_f(\tau^2 - 1)}{K_N r_f} - \frac{2(\tau^2(\psi\nu_m - \nu_f) + \nu_f)^2}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2}} \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

La définition des coefficients de souplesse homogénéisés conduit à :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = A_{ij11}^s + A_{ij22}^s \quad (\text{A.52})$$

**Proposition A.8** *Les coefficients de souplesse simplifiés vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{cases} A_{1111}^s + A_{1122}^s = \frac{1 - \nu_m}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ -\frac{2\nu_m\tau^2(\nu_m\psi - \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{K_N r_f} + \frac{B_{m1}}{r_m^2} \left[ \frac{2(\tau^2 - 1)(1 - \nu_m\nu_f) + 2\tau^2\psi(1 - \nu_m^2)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + \frac{\tau^2 - 1}{K_N r_f} \right] \right\} \\ A_{2211}^s + A_{2222}^s = A_{1111}^s + A_{1122}^s \\ A_{1133}^s = -\frac{\nu_m}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{\tau^2(\nu_m\psi - \nu_f)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} + \frac{B_{m1}}{r_m^2} \frac{(1 - \tau^2)(\nu_f - \nu_m)}{1 - \tau^2 + \psi\tau^2} \right\} \\ A_{1211}^s + A_{1222}^s = A_{1311}^s + A_{1322}^s = A_{2311}^s + A_{2322}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

### 3.1.2 Second cas de charge

Le problème à contraintes macroscopiques imposées lorsque l'on impose  $\Sigma_{(2)}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} I & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s(\mathbf{e}_r) = R(\cos 2\theta \mathbf{e}_r - \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta) & \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) & \\ \frac{1}{|\Sigma_l|} \int_{\Sigma_l} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = 0 & \text{(A.54)} \\ \varepsilon(u^s) & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \sigma_{rr}^s = K_N[[u_r^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta}^s = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz}^s = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

on peut montrer que la solution de ce problème est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^s = 2\mu \cos 2\theta [-b_1 - 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{2}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2\mu \cos 2\theta [b_1 + \frac{6}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2}] + 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} \\ \sigma_{zz}^s = 2\mu \cos 2\theta [\frac{6\nu}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{r\theta}^s = 2\mu \sin \theta [b_1 + \frac{3}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.55})$$

Le champ de déformations associé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^s = \cos 2\theta [-b_1 - \frac{6\nu}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{\theta\theta}^s = \cos 2\theta [b_1 + \frac{6(1-\nu)}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2} + 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} - \frac{2\nu}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{r\theta}^s = \sin 2\theta [b_1 + \frac{3}{3-2\nu} b_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3b_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} b_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{rz}^s = \varepsilon_{\theta z}^s = \varepsilon_{zz}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.56})$$

Le déplacement correspondant est un déplacement plan qui s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = \cos 2\theta [-b_1 r - \frac{2\nu}{3-2\nu} b_2 \frac{r^3}{r_f^2} + b_3 \frac{r_f^4}{r^3} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} b_4 \frac{r^2}{r}] \\ u_\theta^s = \sin 2\theta [b_1 r + b_2 \frac{r^3}{r_f^2} + b_3 \frac{r_f^4}{r^3} + b_4 \frac{r^2}{r}] \\ u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.57})$$

Les huit constantes  $b_i^f$   $i = (1, 4)$  et  $b_i^m$   $i = (1, 4)$  sont déterminés à l'aide des conditions de continuité sur  $\Gamma$  et sur la face latérale de  $Y$ . Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^m + 3b_3^m\tau^4 - \frac{2}{1-2\nu_m}b_4^m\tau^2 = -\frac{1}{2\mu_m} \\ b_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m}b_2^m\tau^{-2} - 3b_3^m\tau^4 + \frac{1}{1-2\nu_m}b_4^m\tau^2 = -\frac{1}{2\mu_m} \\ b_3^f = 0 \\ b_4^f = 0 \\ b_1^m + 3b_3^m - \frac{2}{1-2\nu_m}b_4^m - b_1^f\eta - 3b_3^f\eta + \frac{2}{1-2\nu_f}b_4^f\eta = 0 \\ b_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m}b_2^m - 3b_3^m + \frac{1}{1-2\nu_m}b_4^m - b_1^f\eta - \frac{3}{3-2\nu_f}b_2^f\eta + 3b_3^f\eta - \frac{1}{1-2\nu_f}b_4^f\eta = 0 \\ b_1^m + b_2^m + b_3^m + b_4^m - b_1^f(1 + \frac{2\nu_f}{K_{T1}r_f}) - b_2^f(1 + \frac{6\nu_f}{K_{T1}r_f(3-2\nu_f)}) = 0 \\ -b_1^m - \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m}b_2^m + b_3^m - \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m}b_4^m + b_1^f(1 + \frac{2\nu_f}{k_{Nr_f}}) + b_2^f\frac{2\nu_f}{3-2\nu_f} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.58})$$

La définition des coefficients de souplesse simplifiés nous permet alors de dire que :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = A_{ij11}^s - A_{ij22}^s \quad (\text{A.59})$$

En utilisant la déformation microscopique dont la forme est donnée ci-dessus, on montre le résultat suivant :

**Proposition A.9** *Les coefficients de souplesse simplifiés  $A_{ij11}^s$  et  $A_{ij22}^s$  satisfont :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1111}^s - A_{1122}^s = \frac{1}{2\mu_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{4(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} b_4^m\tau^2 - \frac{2\mu_f}{r_f} b_1^f \left( \frac{1}{K_N} + \frac{1}{K_{t1}} \right) - b_2^f \frac{6\mu_f}{3-2\nu_f} \frac{1}{K_{T1}r_f} \right\} \\ A_{2211}^s - A_{2222}^s = -(A_{1111}^s - A_{1122}^s) \\ A_{3311}^s - A_{3322}^s = 0 \\ A_{1211}^s - A_{1222}^s = A_{1311}^s - A_{1322}^s = A_{2311}^s - A_{2322}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.60})$$

### 3.1.3 Troisième cas de charge

Le problème associé à la contrainte élémentaire  $\Sigma^{(3)}$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\sigma^s = 0 \quad \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\sigma_{pp}I \quad \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s(\mathbf{e}_r) = R(\sin 2\theta \mathbf{e}_r + \cos 2\theta \mathbf{e}_\theta) \quad \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = 0 \\ \varepsilon(u^s) \quad [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \sigma_{rr} = K_N[[u_r^s]] \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta} = K_{T1}[[u_\theta^s]] \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz} = K_{T2}[[u_z^s]] \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.61})$$

On peut alors aisément montrer que la solution en contraintes de notre problème est de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^s = 2\mu \sin 2\theta [B_1 + 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4} - \frac{2}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{\theta\theta}^s = 2\mu \sin 2\theta [B_1 - \frac{6}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4}] \\ \sigma_{zz}^s = 2\mu \sin 2\theta [-\frac{6\nu}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} - \frac{2\nu}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{r\theta}^s = 2\mu \cos \theta [B_1 + \frac{3}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.62})$$

Alors nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr}^s = \sin 2\theta [B_1 + \frac{6\nu}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} + 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{\theta\theta}^s = \sin 2\theta [-B_1 - \frac{6(1-\nu)}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{2\nu}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{r\theta}^s = \cos 2\theta [B_1 + \frac{3}{3-2\nu} B_2 \frac{r^2}{r_f^2} - 3B_3 \frac{r_f^4}{r^4} + \frac{1}{1-2\nu} B_4 \frac{r_f^2}{r^2}] \\ \varepsilon_{rz}^s = \varepsilon_{\theta z}^s = \varepsilon_{zz}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.63})$$

Le déplacement correspondant est un déplacement plan qui s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r^s = \sin 2\theta [B_1 r + \frac{2\nu}{3-2\nu} B_2 \frac{r^3}{r_f^2} + B_3 \frac{r^4}{r^3} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} B_4 \frac{r^2}{r}] \\ u_\theta^s = \cos 2\theta [B_1 r + B_2 \frac{r^3}{r_f^2} + B_3 \frac{r_f^4}{r^3} + B_4 \frac{r_f^2}{r}] \\ u_z^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.64})$$

Les huit constantes  $B_i^f$   $i = (1, 4)$  et  $B_i^m$   $i = (1, 4)$  sont déterminés à l'aide des conditions de continuité sur  $\Gamma$  et sur la face latérale de  $Y$ . Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1^m + 3B_3^m \tau^4 - \frac{2}{1-2\nu_m} B_4^m \tau^2 = \frac{1}{2\mu_m} \\ B_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m} B_2^m \tau^{-2} - 3B_3^m \tau^4 + \frac{1}{1-2\nu_m} B_4^m \tau^2 = \frac{1}{2\mu_m} \\ B_3^f = 0 \\ B_4^f = 0 \\ B_1^m + 3B_3^m - \frac{2}{1-2\nu_m} B_4^m - B_1^f \eta - 3B_3^f \eta + \frac{2}{1-2\nu_f} B_4^f \eta = 0 \\ B_1^m + \frac{3}{3-2\nu_m} B_2^m - 3B_3^m + \frac{1}{1-2\nu_m} B_4^m - B_1^f \eta - \frac{3}{3-2\nu_f} B_2^f \eta + 3B_3^f \eta - \frac{1}{1-2\nu_f} B_4^f \eta = 0 \\ B_1^m + B_2^m + B_3^m + B_4^m - B_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{K_{T1} r_f}) - B_2^f (1 + \frac{6\nu_f}{K_{T1} r_f (3-2\nu_f)}) = 0 \\ -B_1^m - \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} B_2^m + B_3^m - \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} B_4^m + B_1^f (1 + \frac{2\nu_f}{k_N r_f}) + B_2^f \frac{2\nu_f}{3-2\nu_f} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.65})$$

La définition des coefficients de souplesse simplifiés nous permet alors de dire que :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = 2A_{ij12}^s \quad (\text{A.66})$$

En utilisant la déformation microscopique dont la forme est donnée ci-dessus, on montre le résultat suivant :

**Proposition A.10** *Les coefficients de souplesse simplifiés  $A_{ij12}^s$  satisfont :*

$$\begin{cases} 2A_{1212}^s = \frac{1}{2\mu_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{4(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} B_4^m r^2 - \frac{2\mu_f}{r_f} b_1^f \left( \frac{1}{K_N} + \frac{1}{K_{t1}} \right) - b_2^f \frac{6\mu_f}{3-2\nu_f} \frac{1}{K_{T1}r_f} \right\} \\ A_{ij12}^s = 0 \quad \text{pour tout } (i,j) \neq (1,2) \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

### 3.1.4 Quatrième cas de charge

Le problème associé à la contrainte élémentaire  $\Sigma^{(4)}$  se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma^s = 0 \quad \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\sigma_{pp}I \quad \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s(\mathbf{e}_r) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = \delta_{i3} \\ \varepsilon(u^s) \quad [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \sigma_{rr} = K_N[[u_r^s]] \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta} = K_{T1}[[u_\theta^s]] \quad \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz} = K_{T2}[[u_z^s]] \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

On peut alors montrer que le champ de contraintes microscopiques solution s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = C + \frac{A}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = C - \frac{A}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = B \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.69})$$

Le champ de déformations microscopiques "simplifié" associé est alors de la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^s = \frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r^2} + \frac{1-\nu}{E} C - \frac{\nu B}{E} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^s = -\frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r^2} + \frac{1-\nu}{E} C - \frac{\nu B}{E} \\ \varepsilon_{zz}^s = \frac{B}{E} - \frac{2\nu}{E} C \\ \varepsilon_{r\theta}^s = \varepsilon_{rz}^s = \varepsilon_{\theta z}^s = 0 \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

Le champ de déplacements associé s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_r^s = -\frac{1+\nu}{E} \frac{A}{r} + \frac{1-\nu}{E} Cr - \frac{\nu B}{E} r \\ u_\theta^s = 0 \\ u_z^s = -\frac{2\nu C}{E} z + \frac{B}{E} z \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

Les constantes introduites sont déterminées en résolvant le système construit à partir des conditions aux limites et de décollement et de glissement aux interfaces, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m = -\frac{A_m}{r_m^2} \\ C_f = A_m \frac{1-\tau^2}{r_f^2} \\ A_f = 0 \\ B_f = \tau^{-2} - \frac{1-\tau^2}{\tau^2} B_m \\ B_m = \frac{1}{1-\tau^2+\psi\tau^2} - 2 \frac{A_m}{r_m^2} \frac{\nu_f + \tau^2(\psi\nu_m - \nu_f)}{1-\tau^2+\psi\tau^2} \\ A_m = \frac{\psi\tau^2(\nu_m - \nu_f)r_m^2}{(1-\tau^2+\psi\tau^2)[\tau^2(1-\psi) - \psi - 1 + (-\psi\nu_m + \nu_f - \frac{E_f}{K_N r_f})(1-\tau^2)] + 2[\nu_f + \tau^2(\psi\nu_m - \nu_f)]^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.72})$$

La définition des coefficients de souplesse simplifiés nous permet d'écrire que :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = A_{ij33}^s \quad (\text{A.73})$$

En utilisant la déformation microscopique dont la forme est donnée ci-dessus, on montre le résultat suivant :

**Proposition A.11** *Les coefficients de souplesse simplifiés  $A_{ij33}^s$  satisfont :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1133}^s = -\frac{\nu_m}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ \frac{\nu_m\tau^2(\psi-1)}{1-\tau^2+\psi\tau^2} - \frac{A_m}{r_m^2} \frac{2(1-\tau^2)(1-\nu_f\nu_m) + 2\psi\tau^2(1-\nu_m^2)}{1-\tau^2+\psi\tau^2} + \frac{1-\tau^2}{K_N r_f} \right\} \\ A_{2233}^s = A_{1133}^s \\ A_{3333}^s = \frac{1}{E_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}E_m} \left\{ \frac{\tau^2(1-\psi)(\nu_f - \nu_m)}{1-\tau^2+\psi\tau^2} \frac{A_m}{r_m^2} \right\} \\ A_{1233}^s = A_{1333}^s = A_{2333}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.74})$$

### 3.1.5 Cinquième cas de charge

Le problème associé à la contrainte élémentaire  $E^{(5)}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} I & \text{dans } Y_1 \\ \sigma^s(\mathbf{e}_r) = \cos \theta \mathbf{e}_r & \text{sur } \Sigma_l \\ \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) = \sigma_{i3}^s(r, \theta, 0) & \\ \frac{1}{|\Sigma_1|} \int_{\Sigma_1} \sigma_{i3}^s(r, \theta, L) r dr d\theta = 0 & [0, l] \text{ périodique en } Y_3 \\ \varepsilon(u^s) & \\ \sigma_{rr} = K_N[[u_r^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{r\theta} = K_{T1}[[u_\theta^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{rz} = K_{T2}[[u_z^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.75})$$

Le tenseur de contraintes solution est alors tel que :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^s = \sigma_{\theta\theta}^s = \sigma_{zz}^s = \sigma_{r\theta}^s = 0 \\ \sigma_{rz}^s = \mu \cos \theta [A + 1 - \frac{B}{r^2}] \\ \sigma_{\theta z}^s = -\mu \sin \theta [A + 1 + \frac{B}{r^2}] \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

Le tenseur des déformations microscopiques s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^s = \varepsilon_{\theta\theta}^s = \varepsilon_{zz}^s = \varepsilon_{r\theta}^s \\ \varepsilon_{rz}^s = \frac{1}{2} \cos \theta [A + 1 - \frac{B}{r^2}] \\ \varepsilon_{\theta z}^s = -\frac{1}{2} \sin \theta [A + 1 + \frac{B}{r^2}] \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

le déplacement microscopique associé est tel que :

$$\begin{cases} u_r = z \cos \theta \\ u_\theta = -z \sin \theta \\ u_z = [Ar + \frac{B}{r}] \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

On résoud ensuite le système obtenu en écrivant les conditions aux limites et à l'interface pour obtenir les 4 constantes introduites, soit :

$$\begin{cases} B_f = 0 \\ A_m = \frac{1 - \mu_m}{\mu_m} + \frac{B_m}{r_m^2} \\ A_f = \frac{\frac{1 - \mu_m}{\mu_m} + \frac{B_m}{r_f^2}(1 + r^2) - \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}}{1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}} \\ B_{m5} = \frac{1 - \eta + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f}}{\mu_m \eta(1 + r^2) + (1 - r^2)(1 + \frac{\mu_f}{K_{T2}r_f})r_f^2} \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

donc si on utilise la définition des coefficients de souplesses simplifiés, nous obtenons :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_Y = 2A_{ij13}^s \quad (\text{A.80})$$

On peut alors aisément établir les résultats suivants :

### Proposition A.12

$$\begin{cases} a_{1113}^s = a_{2213}^s = a_{3313}^s = 0 \\ a_{1213}^s = a_{2313}^s = 0 \\ 2a_{1313}^s = \frac{1}{2\mu_m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \{ B_{m5} [2 - \frac{\mu_f(1 + r^2)}{K_{T2}r_f + \mu_f}] - \frac{\mu_f r_f}{K_{T2}} [1 + \frac{(1 - \mu_m)K_{T2}r_f - \mu_m \mu_f}{\mu_m K_{T2}r_f + \mu_m \mu_f}] \} \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

### 3.1.6 Sixième cas de charge

Lorsque l'on considère le problème associé au dernier tenseur élémentaire  $E^{(6)}$ , on obtient le résultat suivant par permutation des indices 1 et 2.

**Proposition A.13** *Les coefficients de souplesse simplifiés  $A_{ij23}^s$  sont tels que :*

$$\begin{cases} A_{ij23}^s = 0 & \text{pour tout } (i, j) \neq (2, 3) \\ A_{2323}^s = A_{1313}^s \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

## 3.2 Détermination des coefficients d'expansion hygrométrique homogénéisés approchés

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma^s = 0 & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = A\sigma^s + \beta\Delta m & \text{dans } Y_1 \\ \varepsilon(u^s) = \frac{1}{2}(\nabla u^s + {}^t \nabla u^s) & Y - \text{périodique} \\ \sigma^s(\mathbf{n}) & Y - \text{antipériodique} \\ \ll \sigma^s \gg_{Y_1} = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_1} \sigma \, dy \right\} = \Sigma \\ \sigma_N^s = K_N(m, T)[[u_N^s]] & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_T^s = K_T(m, T)[[u_T^s]] & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{A.83})$$

On peut alors aisément montrer que le champ de contraintes solution s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^s = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^s = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz}^s = C \\ \sigma_{r\theta}^s = \sigma_{rz}^s = \sigma_{\theta z}^s = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.84})$$

Le champ de déformations microscopiques est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{1+\mu}{E}(A - \frac{B}{r^2}) - \frac{\nu}{E}(2A + C) + \beta \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\mu}{E}(A + \frac{B}{r^2}) - \frac{\nu}{E}(2A + C) + \beta \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}C - \frac{\nu}{E}(2A + C) + \beta \end{array} \right. \quad (\text{A.85})$$

Le champ de déplacements solution va donc s'écrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{1-\nu}{E}Ar + \frac{1+\nu}{E}\frac{B}{r} - \frac{\nu C}{E}r + \beta r \\ u_\theta = 0 \\ u_z = -\frac{2\nu}{E}Az + \frac{C}{E}z + \beta \end{array} \right. \quad (\text{A.86})$$

En résolvant le système constitué des conditions limites et de décollement et glissement à l'interface, nous obtenons les expressions des constantes introduites :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_f = 0 \\ A_m = \frac{B_m}{r_m^2} \\ A_f = \frac{B_m}{r_f^2}(\tau^2 - 1) \\ C_f = -\frac{C_m}{\tau^2}(1 - \tau^2) \\ C_m = \frac{E_f(\beta_f - \beta_m)\tau^2 + \frac{B_m}{r_m^2}[2\nu - m\tau^2\psi - 2\nu_f(\tau^2 - 1)]}{\psi\tau^2 + 1 - \tau^2} \\ B_m = \frac{(\beta_f - \beta_m) - C_m(\frac{\nu_f}{E_f}\frac{1 - \tau^2}{\tau^2} + \frac{\nu_m}{E_m})}{(\tau^2 - 1)(\frac{1}{K_N r_f} - \frac{1 - \nu_f}{E_f}) + \frac{1 + \nu_m}{E_m} + \frac{1 - \nu_m}{E_m}\tau^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.87})$$

Compte tenu de la définition des coefficients d'expansion simplifiés, nous avons :

$$\ll \varepsilon_{ij}^s \gg_{Y_1} = \beta_{ij}^s \quad (\text{A.88})$$

On peut alors aisément montrer les relations suivantes :

**Proposition A.14** *Les coefficients d'expansion hygrométriques sont tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}^s = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{-\nu_m\psi(\beta_f - \beta_m)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} + \beta_m + \frac{B_m}{E_m r_m^2} \left[ \frac{\tau^2 - 1}{K_N r_f} + 2 - \nu_m \tau^{-2} \frac{2\nu_m\psi\tau^2 - 2\nu - f(\tau^2 - 1)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} \right] \right\} \\ \beta_{22}^s = \beta_{11}^s \\ \beta_{33}^s = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left\{ \beta_m + \frac{\psi(\beta_f - \beta_m)}{\psi + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} + \frac{B_m}{r_m^2 E_m} \left[ -2\nu_m + \beta^{-2} \frac{2\nu_m\psi\beta^2 - 2\nu - f(\beta^2 - 1)}{\psi\tau^2 + (1 - \tau^2)\tau^{-2}} \right] \right\} \\ \beta_{ij}^s = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{A.89})$$