



UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

SERVICE DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

présentée par

Cyrille MARQUET

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse :

**Chromodynamique quantique à haute énergie, théorie et
phénoménologie appliquée aux collisions de hadrons**

Soutenue le 18 septembre 2006 devant le jury composé de :

Andrzej BIALAS,	Rapporteur,
Yuri DOKSHITZER,	Examineur,
Larry MCLERRAN,	Examineur,
Al MUELLER,	Rapporteur,
Robi PESCHANSKI,	Directeur de thèse,
Christophe ROYON,	Invité,
Jean-Bernard ZUBER,	Président du Jury.



UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

et

SERVICE DE PHYSIQUE THÉORIQUE - CEA/SACLAY

Thèse de doctorat

Spécialité

Physique Théorique

présentée par

Cyrille MARQUET

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse :

**Chromodynamique quantique à haute énergie, théorie et
phénoménologie appliquée aux collisions de hadrons**

Soutenue le 18 septembre 2006 devant le jury composé de :

Andrzej BIALAS,	Rapporteur,
Yuri DOKSHITZER,	Examineur,
Larry MCLERRAN,	Examineur,
Al MUELLER,	Rapporteur,
Robi PESCHANSKI,	Directeur de thèse,
Christophe ROYON,	Invité,
Jean-Bernard ZUBER,	Président du Jury.

Chromodynamique quantique à haute énergie, théorie et phénoménologie appliquée aux collisions de hadrons

Résumé :

En observant des petites distances à l'intérieur d'un hadron, il est possible d'étudier ses constituants : des quarks et des gluons, ou partons, qui obéissent aux lois du régime perturbatif de la Chromodynamique Quantique (QCD). Cette sous-structure est mise à jour lors de collisions entre hadrons caractérisées par un grand transfert d'impulsion : dans de telles collisions, un hadron agit comme une collection de partons dont les interactions peuvent être décrites en QCD.

Dans une collision d'énergie modérée, un hadron apparaît dilué et les partons interagissent de manière incohérente. Quand l'énergie de la collision augmente, la densité de partons dans le hadron augmente. Lorsqu'une énergie beaucoup plus grande que le transfert d'impulsion est atteinte, on entre dans le régime de saturation de QCD : la densité de gluon est devenue tellement large que des effets collectifs sont importants.

Nous introduisons un formalisme adéquat pour étudier les collisions hadroniques dans la limite de haute énergie en QCD, et la transition vers le régime de saturation. Dans ce formalisme, nous redérivons les résultats connus nécessaires pour présenter nos recherches personnelles, et nous calculons différentes sections efficaces dans le contexte de la diffraction dure et de la production de particules.

Nous étudions la transition vers le régime de saturation dans le cadre de l'équation BK. En particulier, nous dérivons certaines propriétés de ses solutions. Nous appliquons nos résultats à la diffusion profondément inélastique et nous montrons que, dans le domaine d'énergie du collisionneur HERA, les prédictions de la QCD à haute énergie sont compatibles avec les données. Nous considérons aussi la production de jets dans les collisions hadroniques et discutons des possibilités de tester la saturation au LHC.

Mots clés : physique des particules, chromodynamique quantique, régime perturbatif, densité de gluons, saturation, effets collectifs.

Quantum chromodynamics at high energy, theory and phenomenology at hadron colliders

Abstract :

When probing small distances inside a hadron, one can resolve its partonic constituents : quarks and gluons that obey the laws of perturbative Quantum Chromodynamics (QCD). This substructure reveals itself in hadronic collisions characterized by a large momentum transfer : in such collisions, a hadron acts like a collection of partons whose interactions can be described in QCD.

In a collision at moderate energy, a hadron looks dilute and the partons interact incoherently. As the collision energy increases, the parton density inside the hadron grows. Eventually, at some energy much bigger than the momentum transfer, one enters the saturation regime of QCD : the gluon density has become so large that collective effects are important.

We introduce a formalism suitable to study hadronic collisions in the high-energy limit in QCD, and the transition to the saturation regime. In this framework, we rederive known results that are needed to present our personal contributions and we compute different cross-sections in the context of hard diffraction and particle production.

We study the transition to the saturation regime as given by the BK equation. In particular we derive properties of its solutions. We apply our results to deep inelastic scattering and show that, in the energy range of the HERA collider, the predictions of high-energy QCD are in good agreement with the data. We also consider jet production in hadronic collisions and discuss the possibility to test saturation at the LHC.

Key words : particle physics, quantum chromodynamics, perturbative regime, gluon density, saturation, collective effects.

Articles de références

Ce rapport de thèse reprend des résultats publiés dans les articles suivants :

- Saturation at hadron colliders.
C. Marquet and R. Peschanski.
Phys. Lett. **B587** (2004) 201, hep-ph/0312261.
- Saturation and forward jets at HERA.
C. Marquet, R. Peschanski and C. Royon.
Phys. Lett. **B599** (2004) 236, hep-ph/0407011.
- A QCD dipole formalism for forward-gluon production.
C. Marquet.
Nucl. Phys. **B705** (2005) 319, hep-ph/0409023.
- Traveling waves and geometric scaling at non-zero momentum transfer.
C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez.
Nucl. Phys. **A756** (2005) 399, hep-ph/0502020.
- The Balitsky-Kovchegov equation in full momentum space.
C. Marquet and G. Soyez.
Nucl. Phys. **A760** (2005) 208, hep-ph/0504080.
- Testing saturation with diffractive jet production in deep inelastic scattering.
K. Golec-Biernat and C. Marquet.
Phys. Rev. **D71** (2005) 114005, hep-ph/0504214.
- On the projectile-target duality of the color glass condensate in the dipole picture.
C. Marquet, A.H. Mueller, A.I. Shoshi and S.M.H. Wong.
Nucl. Phys. **A722** (2005) 252, hep-ph/0505229.
- QCD traveling waves at non-asymptotic energies.
C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez.
Phys. Lett. **B628** (2005) 239, hep-ph/0509074.
- Traveling waves in discretized Balitsky-Kovchegov evolution.
C. Marquet, R. Peschanski, G. Soyez and A. Bialas.
Phys. Lett. **B633** (2006) 331, hep-ph/0509216.
- Small- x effects in forward-jet and Mueller-Navelet jet production.
C. Marquet and C. Royon.
Nucl. Phys. **B739** (2006) 131, hep-ph/0510266.
- Consequences of strong fluctuations on high-energy QCD evolution.
C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez.
Phys. Rev. **D73** (2006) 114005, hep-ph/0512186.

- Diffusive scaling and the high-energy limit of deep inelastic scattering in QCD.
Y. Hatta, E. Iancu, C. Marquet, G. Soyez and D. Triantafyllopoulos.
Nucl. Phys. **A773** (2006) 95, hep-ph/0601150.
- Forward gluon production in hadron-hadron scattering with Pomeron loops.
E. Iancu, C. Marquet and G. Soyez.
hep-ph/0605174, accepté dans *Nucl. Phys.* **A**.
- Geometric scaling in diffractive deep inelastic scattering.
C. Marquet and L. Schoeffel.
Phys. Lett. **B639** (2006) 471, hep-ph/0606079.
- On the probability distribution of the stochastic saturation scale in QCD.
C. Marquet, G. Soyez and B.-W. Xiao.
Phys. Lett. **B639** (2006) 635, hep-ph/0606233.

Remerciements

En premier lieu je tiens à exprimer ma gratitude envers Robi Peschanski pour avoir dirigé ma thèse avec une rare disponibilité et partagé ses nombreuses idées avec moi. Il m'a présenté les différentes facettes du métier de chercheur avec enthousiasme et grâce à lui, j'ai pu m'intégrer au groupe de chromodynamique quantique de Saclay. J'y ai bénéficié de multiples interactions instructives, en particulier avec Edmond Iancu, François Gélis et Jean-Yves Ollitrault. Je les remercie vivement pour ce qu'ils m'ont apporté.

Cette thèse a été effectuée au Service de Physique Théorique du Commissariat à l'Énergie Atomique. Je remercie ses directeurs successifs Jean-Paul Blaizot et Henri Orland ainsi que tous les membres du laboratoire pour l'environnement scientifique exceptionnel dont j'ai bénéficié. Je suis également reconnaissant aux membres du secrétariat, du groupe informatique, et du groupe de la documentation qui ont toujours répondu à mes diverses questions de manière efficace.

Les études phénoménologiques réalisées durant ma thèse sont le fruit de collaborations avec Christophe Royon puis Laurent Schoeffel, expérimentateurs au Service de Physique des Particules de Saclay. Mes discussions avec eux se sont révélées très fructueuses. Je remercie en particulier Christophe pour m'avoir expliqué les difficultés liées aux mesures dans les accélérateurs de particules ; ses enseignements me permettent d'interagir efficacement avec les expérimentateurs.

En plus des conférences auxquelles j'ai participé durant ma thèse, j'ai eu la chance de pouvoir effectuer de nombreux séjours dans des laboratoires à l'étranger. Larry McLerran, Dmitri Kharzeev et Raju Venugopalan m'ont permis d'intégrer leur groupe au Laboratoire de Brookhaven. Krzysztof Golec-Biernat m'a accueilli à deux reprises à l'institut de physique nucléaire de Cracovie. Enfin Al Mueller a accepté de me recevoir dans son équipe à l'Université Columbia. Tous ont fait preuve d'une grande disponibilité, je les en remercie vivement.

Je remercie Benoît Blossier, Rikard Enberg, Darren Forde, Yoshi Hatta, Kazu Itakura, Stéphane Munier, Yacine Mehtar-Tani, Arif Shoshi, Grégory Soyez, Dyonisis Triantafyllopoulos, Stephen Wong, Bowen Xiao et tous les jeunes physiciens avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir, scientifiquement ou non, au cours de ces trois ans. En particulier, je suis redevable à Grégory pour nos discussions enrichissantes, mais aussi pour son aide généreuse lorsque j'étais impuissant face à mon écran d'ordinateur. Je remercie aussi Tristan Brunier, Jérémie Bouttier, Nicolas Chatillon, Stéphane Coulomb, Jérôme Rech et tous les jeunes physiciens du Service pour la bonne ambiance qui s'est installée durant ces trois années.

Je suis aussi très honoré que Yuri Dokshitzer, Larry McLerran et Jean-Bernard Zuber aient bien voulu faire partie de la commission d'examen et je suis extrêmement reconnaissant envers Andrzej Bialas et Al Mueller qui ont accepté de rédiger les rapports.

Pour finir, je dois beaucoup au soutien de mon entourage familial et amical, et je remercie tout particulièrement Aline, pour avoir attentivement relu ce mémoire.

Table des matières

Introduction	11
1 Collisions à haute énergie en QCD	15
1.1 Collision entre deux particules hadroniques	15
1.2 Description du projectile	19
1.3 Description de la cible	24
1.4 Les éléments de la matrice de diffusion	25
1.A Lignes de Wilsons et identités de Fierz	28
2 Collision d'un Onium sur une cible hadronique	29
2.1 L'onium : un projectile idéal	30
2.2 Section efficace totale	33
2.3 Section efficace diffractive	38
2.4 Section efficace de production de gluons	41
2.A Factorisation de la section efficace de production inclusive de gluons	48
3 Les équations BFKL et BK	51
3.1 L'équation de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov	52
3.2 Solutions homogènes de l'équation de Balitsky-Kovchegov	54
3.3 Solutions générales de l'équation de Balitsky-Kovchegov	60
3.4 Une paramétrisation générique pour les ondes progressives de QCD	64
3.A Calcul des valeurs propres du noyau BFKL	69
4 Phénoménologie appliquée à la diffusion profondément inélastique	71
4.1 La diffusion profondément inélastique	72
4.2 Le photon virtuel : un exemple d'onium	75
4.3 Des lois d'échelle prédites par la QCD à haute énergie	79
4.4 La production diffractive de gluon	84
4.A Dérivation de l'amplitude $\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ dans le cadre du modèle GBW	89
5 Phénoménologie appliquée à la production de jets	91
5.1 Production inclusive de jets à partir d'un hadron	92
5.2 Production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique	94
5.3 La production de jets de Mueller-Navelet	101
6 Au delà des équations B-JIMWLK	109
6.1 La dualité entre le régime dense et le régime dilué	110
6.2 Une équation de Langevin pour l'évolution vers les hautes énergies	114
6.3 L'équation FKPP stochastique	119
6.4 Une nouvelle loi d'échelle en QCD à haute énergie	128
6.A Dérivation de la première équation de la hiérarchie du régime dilué	133

Conclusions	135
Publications personnelles	137
Bibliographie générale	139

Introduction

Les premières expériences de diffusion profondément inélastique réalisées dans les années 60 ont initié d'importants progrès dans la compréhension des interactions fortes entre hadrons. Marquées par la découverte de la loi d'échelle de Bjorken, ces expériences ont permis de mettre en évidence la nature composite des hadrons : elles indiquent qu'ils sont composés de particules de spin $1/2$, appelées partons, à la fois confinés et libres à l'intérieur des hadrons. La possibilité que ces partons soient caractérisés par un nombre quantique supplémentaire était aussi discutée, cela permettait de résoudre un problème lié à la statistique des fermions de spin $1/2$. La chromodynamique quantique (QCD) a alors été proposée comme théorie des interactions fortes ; cette théorie des champs pouvait potentiellement rendre compte à la fois du confinement, de la description en termes de partons libres, et possédait un degré de liberté supplémentaire : la charge de couleur.

La QCD est une théorie de jauge non abélienne, qui décrit les interactions fortes en termes de particules de spin $1/2$ appelées quarks et de particules de spin 1 appelées gluons. Le groupe de jauge de QCD est le groupe $SU(N_c)$ avec $N_c = 3$; les quarks et gluons portent une charge de couleur qui peut prendre N_c valeurs différentes pour les quarks et $N_c^2 - 1$ pour les gluons. Des observations de violations de la loi d'échelle de Bjorken ont plus tard confirmé la présence des gluons et la QCD s'est imposée comme la théorie des interactions fortes. C'est une théorie quantique qui possède la propriété de liberté asymptotique : plus les phénomènes considérés mettent en jeu des petites distances (ou des grands transferts d'impulsion), plus la constante de couplage α_s est petite. Aux grandes distances, les observations nous montrent que les états liés de la théorie sont les hadrons. Aux petites distances par contre, les interactions sont décrites en utilisant les états propres de la théorie libre : les partons. Ce terme désigne maintenant indifféremment les quarks et les gluons.

Les bases de la QCD sont posées dans les années 70. Dans le régime de couplage fort, caractérisé par l'échelle d'énergie $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV, notre capacité à faire des calculs est limitée ; la physique est dite non perturbative. Au contraire lorsque la théorie est faiblement couplée ($\alpha_s \ll 1$), il est possible d'effectuer des calculs perturbatifs. La plupart des collisions entre hadrons sont caractérisées par des transferts d'impulsion faibles et correspondent à un régime de couplage fort. Cependant, il arrive que certaines collisions mettent en jeu un transfert d'impulsion très grand par rapport à Λ_{QCD} . Ces collisions particulières peuvent être décrites par des collisions microscopiques entre partons, les sections efficaces partoniques étant calculables à partir du Lagrangien de QCD, exprimé en termes de quarks et de gluons, en utilisant la théorie des perturbations par rapport à α_s .

Dans une telle description, les différents partons interagissent de manière incohérente et les différentes contributions sont ajoutées de manière probabiliste : une section efficace hadronique est exprimée comme une convolution entre une section efficace partonique et des distributions de partons, qui mesurent simplement la quantité de partons à l'intérieur des hadrons. Grâce à des outils comme le développement en produit d'opérateurs et le groupe de renormalisation, la description de ces distributions de partons est devenue très fine. L'évolution des distributions de partons avec l'impulsion transférée est décrite par des équations [1] dues à Dokshitzer,

Gribov, Lipatov, Altarelli et Parisi (DGLAP). Si en plus l'énergie de la collision est très grande devant l'impulsion transférée, l'évolution des distributions de partons avec l'énergie de la collision est décrite par une équation [2] due à Balitsky, Fadin, Kuraev et Lipatov. Ces équations décrivent comment le nombre de partons à l'intérieur d'un hadron augmente lorsque l'impulsion transférée augmente (dans le cas des équations DGLAP), ou lorsque l'énergie de la collision augmente (dans le cas de l'équation BFKL).

A partir des années 80, les expériences se focalisent sur l'étude des distributions de partons à des énergies de collision relativement faibles. L'approche par les équations DGLAP fait le succès de la QCD, alors que l'équation BFKL reste ignorée. Les prédictions de violations de la loi d'échelle de Bjorken par les équations DGLAP sont confirmées et l'ensemble des résultats expérimentaux est bien décrit. Les données du problème changent dans les années 90 avec le démarrage du collisionneur HERA, qui réalise des expériences de diffusion profondément inélastique à des énergies jamais atteintes auparavant. L'intérêt pour l'équation BFKL est ravivé et avec lui, la nécessité d'établir les prédictions de la QCD dans un nouveau régime du domaine perturbatif : le régime de saturation qui apparaît dans la limite de haute énergie. En effet, il est réalisé [3, 4, 5, 6, 7] que lorsque l'énergie de la collision est supposée beaucoup plus grande que l'impulsion transférée, cet ordonnancement est responsable de grandes densités de gluons dans les hadrons, impliquant d'importants effets collectifs.

Les équations DGLAP indiquent que lorsque l'impulsion transférée dans la collision augmente, la densité de partons dans le hadron diminue et ce dernier est de plus en plus dilué. En effet même si le nombre de partons augmente, l'espace des phases disponibles pour ces partons augmente plus vite. L'évolution BFKL au contraire n'ouvre pas d'espace de phase supplémentaire lorsque l'énergie de la collision augmente et le hadron devient de plus en plus dense dans la limite de haute énergie. A partir d'une certaine énergie, la densité de gluon devient assez grande pour invalider la description en termes de partons interagissants de manière incohérente. Lorsque c'est le cas, on dit que l'on a atteint le régime de saturation de QCD. Ce régime est caractérisé par des effets collectifs dus à une grande densité de gluons dans les hadrons. L'universalité de la collection de gluons formée par l'évolution vers les hautes énergies est discutée. Il a été proposé d'appeler un tel ensemble de gluons un condensat de verre de couleur (CGC).

Le but de cette thèse est d'étudier la limite de haute énergie de QCD et le régime de saturation, à la fois du point de vue théorique et du point de vue phénoménologique. Une partie des communautés de physique des particules et de physique nucléaire s'y intéresse depuis environ 10 ans (voir [8] pour des revues concises et complètes) ; à l'heure actuelle, c'est d'autant plus important en vue du démarrage du collisionneur LHC, prévu en 2007. Le LHC réalisera des collisions proton-proton à des énergies jamais atteintes auparavant et la compréhension du régime de saturation de QCD pourrait s'avérer essentielle pour guider les futures expériences. Des manifestations du régime de saturation ont d'ailleurs peut-être déjà été observées aux accélérateurs HERA [9] et RHIC [10] (qui réalise des collisions d'ions lourds).

Organisation du mémoire

Dans la suite, les résultats déjà connus et les calculs originaux sont présentés de manière unifiée. Pour mettre en valeur les travaux personnels, les publications correspondantes sont évoquées avec une numérotation en chiffres romains, tandis que les autres sources bibliographiques sont indiquées par des chiffres arabes. Les publications personnelles sont référencées page 137 et la bibliographie générale est présentée page 139.

Dans le Chapitre 1 nous considérons une collision entre deux hadrons dans la limite de haute énergie. Nous expliquons de manière qualitative puis quantitative comment décrire une telle collision avec le régime perturbatif de la QCD. Le formalisme et les objets mathématiques nécessaires à nos recherches personnelles y sont présentés. Les notations introduites dans ce chapitre seront reprises dans la suite.

Dans le Chapitre 2, nous introduisons un projectile hadronique particulier, un Onium. Son utilisation permet de simplifier les calculs sans altérer leur pertinence. Ce chapitre a plusieurs objectifs : il permet à la fois d'illustrer le formalisme présenté au Chapitre 1, de dériver la hiérarchie d'équations de Balitsky, et aussi de présenter des calculs de sections efficaces adaptées pour l'étude la limite de haute énergie de QCD. De telles observables sont des sections efficaces totale, diffractive, et de production inclusive et diffractive de gluons. Dans ce chapitre, nous avons choisi de dériver les résultats déjà connus et les calculs originaux de l'article [IV] de manière pédagogique, plutôt que chronologique.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de l'équation de Balitsky-Kovchegov (BK), une équation qui résulte d'une approximation de la hiérarchie de Balitsky mais qui a essentiellement le même contenu physique. Nous montrons comment l'équation BK décrit la transition entre le régime d'énergie gouverné par l'équation BFKL et le régime de saturation atteint à haute énergie. Nous insistons sur l'étude des solutions asymptotiques de l'équation BK en reproduisant les résultats des articles [VII, VIII, XIV].

Le Chapitre 4 discute de phénoménologie dans le cadre des expériences de diffusion profondément inélastique. Nous utilisons les résultats des Chapitres 2 et 3 pour établir des prédictions pour les sections efficaces totale et diffractive que nous comparons avec les données expérimentales. Nous montrons que, dans le domaine d'énergie du collisionneur HERA, les prédictions de la QCD à haute énergie sont en bon accord avec les données. Nous reprenons les résultats de la publication [XXI] qui discute de lois d'échelle observées dans les données, et potentiellement reliées à la physique de la saturation. Nous exposons aussi la proposition de l'article [X] qui consiste à mesurer une observable possédant un grand potentiel pour tester le régime de saturation.

Le Chapitre 5 traite de phénoménologie dans le cadre de la production inclusive de gluons ; les résultats des articles [I, III, XVII] y sont exposés. Plus précisément, les productions de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique et de jets de Mueller-Navelet dans les collisions hadron-hadron sont considérées. Ce sont des processus idéaux pour tester l'évolution BFKL, puis pour de plus hautes énergies, le régime de saturation. Nous discutons des possibilités de tester ces régimes de QCD au LHC.

Enfin, le Chapitre 6 présente de nouveaux développements théoriques obtenus au cours des deux dernières années. Ceux-ci mettent en évidence une limitation de la hiérarchie d'équations de Balitsky, et proposent certaines modifications. Nous présentons les études des articles [XI, XVIII, XXII] qui discutent de ces nouveaux concepts et d'un nouveau lien avec la physique statistique. Nous présentons les potentielles implications phénoménologiques pour la diffusion profondément inélastique à très haute énergie [XIX], et pour la production de jets vers l'avant dans les collisions hadron-hadron au LHC [XX].

CHAPITRE 1

Collisions à haute énergie en QCD

Sommaire

1.1 Collision entre deux particules hadroniques	15
1.1.1 Cinématique de la collision	15
1.1.2 Description de la collision en QCD perturbative à haute énergie	17
1.1.3 Choix du repère	18
1.2 Description du projectile	19
1.2.1 Quantification des champs libres et espace de Fock	20
1.2.2 Exemple de calcul : le vertex $q \rightarrow qg$	22
1.2.3 Fonctions d'ondes en espace mixte	23
1.3 Description de la cible	24
1.4 Les éléments de la matrice de diffusion	25
1.A Lignes de Wilsons et identités de Fierz	28

Ce premier Chapitre présente le cadre d'étude de cette thèse : une collision entre deux hadrons dans la limite de haute énergie. La première partie introduit la cinématique du problème et explique de manière qualitative comment décrire une telle collision en QCD perturbative. Les sections suivantes reprennent les différentes étapes de manière plus détaillée : les objets mathématiques nécessaires à l'étude sont présentés et un formalisme adapté à la limite de haute énergie est développé. Le but de ce chapitre est d'introduire les outils qui permettront d'exhiber les prédictions de la QCD perturbative, pour pouvoir étudier jusqu'à quel point elle peut décrire les collisions entre deux hadrons dans la limite de haute énergie.

1.1 Collision entre deux particules hadroniques

1.1.1 Cinématique de la collision

Plaçons nous dans le référentiel du laboratoire et choisissons le repère de telle sorte que l'axe de la collision soit l'axe $x^3 \equiv z$ et que la collision ait lieu à $z = 0$. Nous appellerons *projectile* la particule qui se déplace dans le sens des z positifs et noterons $P^3 = P_z$ son impulsion longitudinale et $M_{\mathcal{P}}$ sa masse. De même, nous appellerons *cible* la particule qui se déplace dans le sens des z négatifs et noterons $Q^3 = -Q_z$ son impulsion longitudinale et $M_{\mathcal{C}}$ sa masse. Nous allons utiliser des coordonnées appelées coordonnées du cône de lumière et définies par :

$$k^\mu = (k^+, \mathbf{k}, k^-), \quad k^\pm = \frac{k^0 \pm k^3}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{k} = (k^1, k^2). \quad (1.1)$$

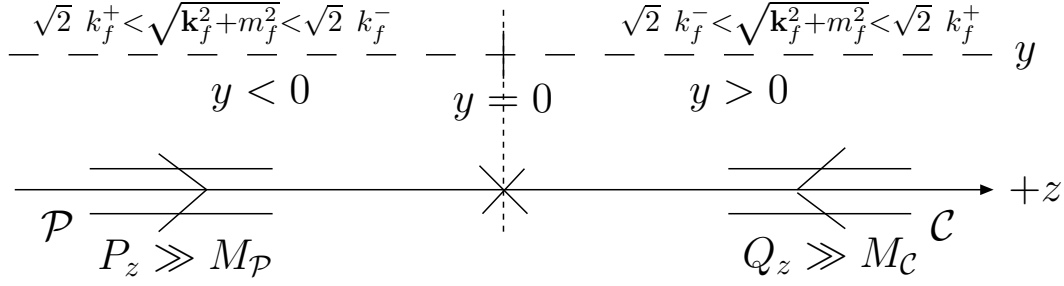


FIG. 1.1 – Cinématique de la collision \mathcal{P} – \mathcal{C} . L'axe de la collision est l'axe $x^3 \equiv z$, par rapport auquel sont définies les coordonnées du cône de lumière (1.1) et la rapidité (1.5) des particules émises par la collision.

Dans ces coordonnées, le produit de deux quadri-vecteurs s'écrit

$$k^\mu k'_\mu = k^+ k'^- + k^- k'^+ - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' . \quad (1.2)$$

Les quadri-impulsions du projectile P^μ et de la cible Q^μ sont données par

$$P^\mu = \left(P^+, \mathbf{0}, \frac{M_{\mathcal{P}}^2}{2P^+} \right) , \quad Q^\mu = \left(\frac{M_{\mathcal{C}}^2}{2Q^-}, \mathbf{0}, Q^- \right) . \quad (1.3)$$

Pour des particules se déplaçant à des vitesses proches de celles de la lumière telles que $P_z \gg M_{\mathcal{P}}$ et $Q_z \gg M_{\mathcal{C}}$, on a $P^+ \simeq \sqrt{2} P_z$, $P^- \simeq 0$, $Q^- = \sqrt{2} q_z$, $Q^+ \simeq 0$, et l'énergie de la collision est $s \equiv (P^\mu + Q^\mu)(P_\mu + Q_\mu) \simeq 2P^+ Q^-$.

Une telle collision entre deux hadrons de très haute énergie libère de nombreuses particules dans l'état final. Pour une particule de masse m_f , la quadri-impulsion s'écrit

$$k_f^\mu = (k_f^+, \mathbf{k}_f, k_f^-) \text{ avec } 2k_f^+ k_f^- = \mathbf{k}_f^2 + m_f^2 . \quad (1.4)$$

Introduisons une variable très commode pour caractériser ces particules libérées par la collision : la rapidité y définie par

$$e^y = \left(\frac{k_f^+}{k_f^-} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} k_f^+}{\sqrt{\mathbf{k}_f^2 + m_f^2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}_f^2 + m_f^2}}{\sqrt{2} k_f^-} . \quad (1.5)$$

Une particule émise perpendiculairement à l'axe de la collision ($k_f^3 = 0$ et $k_f^+ = k_f^-$) a une rapidité nulle, une particule émise dans l'hémisphère des z positifs ($k_f^3 > 0$ et $k_f^+ > k_f^-$) a une rapidité positive, et une particule émise dans l'hémisphère des z négatifs ($k_f^3 < 0$ et $k_f^+ < k_f^-$) a une rapidité négative. Notons que pour une particule de masse nulle, la rapidité est égale à la pseudo rapidité η définie par

$$e^{-\eta} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (1.6)$$

où θ est l'angle d'émission de la particule par rapport à la direction des z positifs. La pseudo rapidité d'une particule est facilement mesurable expérimentalement. La figure 1.1 résume la cinématique de la collision que nous venons d'introduire.

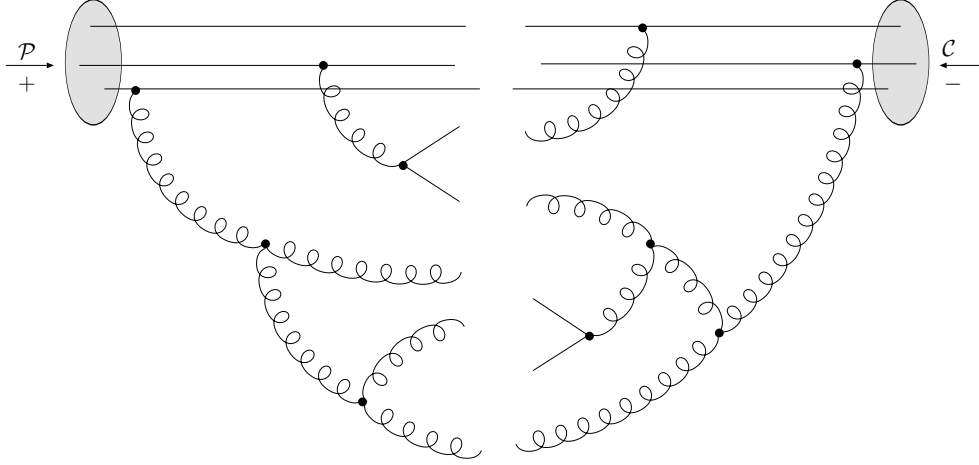


FIG. 1.2 – Collision entre le projectile \mathcal{P} et la cible \mathcal{C} , tous deux habillés. Les partons de valence sont accompagnés d'ensembles cohérents de partons virtuels.

1.1.2 Description de la collision en QCD perturbative à haute énergie

Nous allons maintenant expliquer de manière qualitative comment la collision est décrite en QCD perturbative, dans la limite de haute énergie. Signalons d'abord que nous considérons seulement des collisions au cours desquelles il se produit un transfert d'impulsion assez important : le traitement perturbatif n'est justifié que dans ce cas. En notant k_0 l'impulsion transverse typique des particules de l'état final (plus précisément $\mathbf{k}_f^2 + m_f^2 \simeq k_0^2$), nous travaillons dans le régime

$$k_0 \gg \Lambda_{QCD} \Rightarrow \alpha_s(k_0) \ll 1. \quad (1.7)$$

Λ_{QCD} est une échelle caractéristique du régime non perturbatif de QCD et vaut environ 200 MeV. α_s est la constante de couplage de la QCD.

Asymptotiquement avant la collision, les particules sont *nues*, c'est-à-dire qu'elles sont composées uniquement de partons de valence. Ces particules nues évoluent jusqu'à l'instant de la collision ce qui les transforme en particules *habillées*, c'est-à-dire que leurs partons de valence sont accompagnés d'un ensemble cohérent de partons virtuels. Formellement, cela correspond à décomposer les états initiaux en superpositions d'états de Fock de quarks et gluons ; par exemple pour un proton, on écrit :

$$|\text{proton}\rangle \simeq |q_v q_v q_v\rangle + |q_v q_v q_v g\rangle + \cdots + |q_v q_v q_v g \cdots g g q \bar{q} g\rangle + \cdots. \quad (1.8)$$

La collision a lieu entre les particules habillées, comme représenté Figure 1.2, et a pour effet de détruire la cohérence des partons qui habillent le projectile et de ceux qui habillent la cible. Ces partons sont donc libérés par la collision, ils vont former les particules de l'état final.

Les coefficients des différents états de Fock dans (1.8) sont calculés en théorie des perturbations. En faisant cela, il apparaît a priori des divergences infrarouges : la probabilité que le projectile (ou la cible) soit habillé d'un gluon est proportionnelle à α_s/k^+ où k^+ représente l'impulsion longitudinale du gluon. En intégrant cette probabilité sur k^+ , les petites impulsions sont responsables d'une divergence logarithmique. En fait, cette divergence n'est qu'apparente car les gluons virtuels qui en sont responsables ne jouent aucun rôle dans la collision : ils ont une impulsion longitudinale trop petite pour pouvoir être transformés en particules réelles. On peut donc ne pas les prendre en compte et considérer que l'impulsion longitudinale des gluons qui habillent le projectile (ou la cible) est bornée inférieurement. Nous verrons plus loin que cette borne est déterminée par la cinématique de la collision, et que dans

la limite de haute énergie, elle devient très petite. Concentrons nous sur la décomposition en états de Fock du projectile et appelons $z_P P^+$ cette borne inférieure ($z_P < 1$). La probabilité que le projectile soit habillé d'un gluon est proportionnelle à

$$\alpha_s \int_{z_P P^+}^{P^+} \frac{dk^+}{k^+} = \alpha_s \ln \left(\frac{1}{z_P} \right). \quad (1.9)$$

De manière similaire, la probabilité que le projectile soit habillé de n gluons est proportionnelle à

$$\alpha_s^n \int_{z_P}^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_{z_P}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \dots \int_{z_P}^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{z_n} = \frac{1}{n!} \alpha_s^n \ln^n \left(\frac{1}{z_P} \right). \quad (1.10)$$

Nous remarquons que quand z_P est assez petit pour compenser le facteur α_s et est tel que $\alpha_s \ln(1/z_P) \sim 1$, alors tous les ordres n contribuent de la même manière. Ces gluons à petites impulsions longitudinales ($\sim z_P P^+$) qui sont responsables de contributions à tous les ordres sont appelés des gluons *mous*, et l'approximation qui consiste à ne garder que les contributions dominantes en $\alpha_s \ln(1/z_P)$ s'appelle l'approximation des logarithmes dominants.

Nous devons faire une approximation pour tronquer une décomposition telle que (1.8) car il n'est pas possible de calculer toutes les composantes. La discussion ci-dessus montre que la manière d'effectuer cette troncation dépend de la valeur de z_P . Si $z_P \lesssim 1$, alors on peut effectuer normalement un développement par rapport à la constante de couplage α_s , puis tronquer à l'ordre désiré. Par contre si $z_P \ll 1$, cette procédure devient inconsistante et l'approximation appropriée est l'approximation des logarithmes dominants. Cette discussion est aussi valable pour la décomposition en états de Fock de la cible, pour laquelle nous noterons $z_C Q^-$ la borne inférieure sur les impulsions longitudinales des gluons virtuels qui l'habillent. Lors de la collision projectile-cible, les particules libérées viennent des collisions élémentaires entre les partons virtuels. En fait les seules collisions possibles sont celles qui impliquent des particules avec suffisamment d'impulsion longitudinale pour pouvoir donner lieu à une masse invariante positive. Cela se traduit par la condition

$$z_P z_C s = k_0^2 \quad (1.11)$$

où nous rappelons que k_0 est l'impulsion transverse typique des particules de l'état final. Cela a pour conséquence que, dans la limite de haute énergie, soit z_P , soit z_C , soit les deux sont très petits.

1.1.3 Choix du repère

Les particules virtuelles qui habillent le projectile et la cible sont libérées lors de la collision avec les propriétés suivantes.

- Leur rapidité maximale est $y_{max} = \ln(\sqrt{2}P^+/k_0) > 0$ et correspond à une particule qui habillait le projectile avec une impulsion longitudinale maximale P^+ . La plus petite rapidité possible pour une particule qui provient du projectile est $\ln(\sqrt{2}z_P P^+/k_0)$, l'intervalle de rapidité sur lequel les particules du projectile sont émises est donc $Y_P = \ln(1/z_P)$. Par abus de langage, on appelle Y_P la rapidité du projectile habillé.
- Leur rapidité minimale est $y_{min} = -\ln(\sqrt{2}Q^-/k_0) < 0$ et correspond à une particule qui habillait la cible avec une impulsion longitudinale maximale Q^- . La plus grande rapidité possible pour une particule qui provient de la cible est $-\ln(\sqrt{2}z_C Q^-/k_0)$, l'intervalle de rapidité sur lequel les particules de la cible sont émises est donc $Y_C = \ln(1/z_C)$. Par abus de langage, on appelle Y_C la rapidité de la cible habillée.

Les particules émises occupent donc un intervalle de rapidité total

$$y_{max} - y_{min} = \ln(s/k_0^2) \equiv Y. \quad (1.12)$$

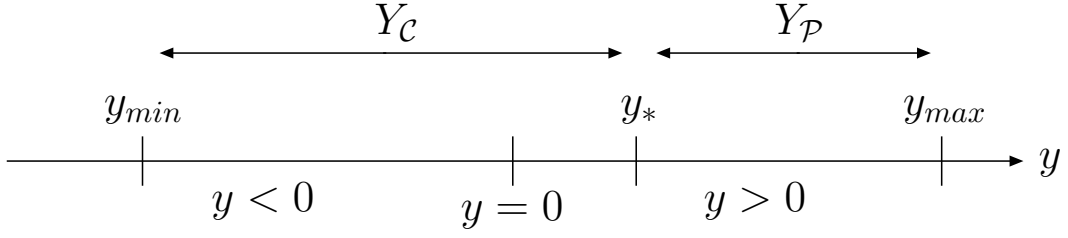


FIG. 1.3 – En fonction du choix de repère, qui est caractérisé par les intervalles de rapidité Y_P et Y_C , l'origine des particules émises lors de la collision est différente. Les particules de rapidité $y > y_*$ sont décrites comme provenant de partons qui habillaient le projectile et les particules de rapidité $y < y_*$ sont décrites comme provenant de partons qui habillaient la cible.

La condition (1.11) implique alors $Y = Y_P + Y_C$ et la rapidité définie par $y_* = y_{max} - Y_P = y_{min} + Y_C$ joue un rôle particulier : les particules finales avec $y > y_*$ proviennent du projectile et celles avec $y < y_*$ proviennent de la cible. Ceci est résumé Figure 1.3, nos notations sont telles que les rapidités mesurées sur l'axe y (qui peuvent être positives ou négatives) sont notées avec des minuscules, alors que les intervalles de rapidité sont notés avec des majuscules (et sont toujours positifs). Signalons que les rapidités y_{min} , y_* et y_{max} sont définies à des incertitudes près dues aux impulsions transverses dont les valeurs peuvent a priori différer de k_0 . Cependant dans la limite de haute énergie, ces incertitudes sont des nombres de l'ordre de l'unité comparés à $\ln(P^+/k_0)$ ou $\ln(Q^-/k_0)$ et sont négligeables.

La valeur de z_P peut être choisie arbitrairement entre k_0^2/s et 1 ce qui impose la valeur de z_C , ou inversement. En terme de rapidité, ceci consiste à choisir une façon de diviser Y en deux, en choisissant Y_P (et par conséquent Y_C). Cette liberté peut être considérée comme un choix de repère pour décrire la collision. En fonction de ce choix qui détermine aussi y_* , les particules finales sont décrites comme provenant soit du projectile, soit de la cible. Dans la suite nous choisirons des repères tels que $Y_P \simeq 0$ ($z_P \lesssim 1$) et donc $Y_C \simeq Y$ ($z_C \simeq k_0^2/s \ll 1$). Nous calculerons donc la décomposition en états de Fock du projectile en théorie des perturbations par rapport à α_s , et à l'ordre dominant le projectile sera seulement composé de partons de valence. Au contraire nous allons décrire la cible comme un ensemble cohérent de gluons, où toutes les contributions en $\alpha_s^n \ln^n(1/z_C)$ à la décomposition en états de Fock sont prises en compte. En ce qui concerne les particules finales, un tel choix implique $y_* \lesssim y_{max}$ donc la plupart d'entre elles seront décrites comme provenant de la cible. Seules les particules de très grandes rapidités ($y_* < y < y_{max}$) seront décrites comme provenant du projectile.

Ce choix d'une configuration asymétrique à un avantage particulier : les incertitudes liées au projectile seront minimales, le développement perturbatif par rapport à α_s étant bien maîtrisé. Cela nous permettra une étude précise de la description de la cible et de sa composition dans la limite de haute énergie. Une telle étude est indispensable pour pouvoir ensuite décrire correctement des situations plus symétriques, pour lesquelles les effets de la limite de haute énergie sont importants à la fois pour le projectile et pour la cible.

1.2 Description du projectile

Nous choisirons de paramétrer les quadri-impulsions k^μ des particules qui habillent le projectile par leurs composantes longitudinales k^+ et transverses \mathbf{k} , la condition de couche de masse fixant la valeur de k^- . C'est la quantification des champs libres de QCD, les quarks et gluons, qui fournit l'espace de Fock nécessaire pour décrire le projectile. Cet espace est

composé d'états avec un nombre donné de quarks et de gluons, d'impulsions fixées. Ces états fournissent une base sur laquelle on peut décomposer le projectile nu, en incluant seulement les partons de valence, ou le projectile habillé, en incluant dans la décomposition des états avec plus de partons, jusqu'à l'ordre souhaité en théorie des perturbations par rapport à α_s . Notons que ces partons sont toujours sur couche de masse. Leur virtualité vient du fait que la quadri-impulsion n'est pas conservée à chaque vertex, seule la tri-impulsion, que nous noterons $k = (k^+, \mathbf{k})$, est conservée.

Formalisons maintenant cette procédure et commençons par traiter le cas des gluons. Nous effectuerons la quantification du champ de gluons A^μ dans la jauge $A^+ = 0$, souvent appelée jauge du cône de lumière. Ce choix de jauge apporte de grandes simplifications, par exemple nous n'aurons pas besoin de fantômes de Faddeev-Popov pour la quantification et nous aurons seulement besoin des deux quadri-vecteurs $\varepsilon_{(1)}^\mu$ et $\varepsilon_{(2)}^\mu$ pour décrire les deux polarisations physiques des gluons.

1.2.1 Quantification des champs libres et espace de Fock

On quantifie les champs libres de manière habituelle, en les décomposant en modes de Fourier. Pour le champ de gluon A_c^μ , où c est l'indice de couleur, on obtient

$$A_c^\mu(x^\nu) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \left[\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(k) a_{c,\lambda}(k) e^{-ik_\nu x^\nu} + \text{h.c.} \right] \quad (1.13)$$

où $+ \text{h.c.}$ signifie qu'il faut ajouter le conjugué hermitien du terme précédent.

Comme manifeste dans cette formule, les gluons ont seulement deux polarisations possibles, elles sont transverses et imposent $k^\mu \varepsilon_{(\lambda)\mu}(k) = 0$. De plus la jauge $A^+ = 0$ impose $\varepsilon_{(1)}^+ = \varepsilon_{(2)}^+ = 0$. Les quadri-vecteurs de polarisation sont donc paramétrables par deux vecteurs à deux composantes, que l'on choisira transverses et notera ε_1 et ε_2 . On a

$$\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(k) = \left(0, \varepsilon_\lambda, \frac{\mathbf{k} \cdot \varepsilon_\lambda}{k^+} \right) \quad \lambda = 1, 2. \quad (1.14)$$

Une base pratique pour les vecteurs ε_1 et ε_2 est

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i). \quad (1.15)$$

Les opérateurs $a_{c,\lambda}^\dagger(k)$ et $a_{c,\lambda}(k)$ de la décomposition (1.18) s'interprètent comme des opérateurs de création et d'annihilation de gluons d'impulsion k , de couleur c et de polarisation λ . Ils agissent sur le vide de la manière suivante

$$a_{c,\lambda}^\dagger(k)|0\rangle = |k, c, \lambda\rangle \quad a_{c,\lambda}(k)|0\rangle = 0 \quad (1.16)$$

et obéissent aux relations de commutations

$$[a_{c,\lambda}(k), a_{d,\lambda'}^\dagger(k')] = \delta_{cd} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(k - k'). \quad (1.17)$$

Notons que ces relations impliquent des relations de commutations à x^+ égaux entre champs et leurs conjugués. Pour cette raison, cette procédure est souvent appelée quantification sur le cône de lumière. Par application successive d'opérateurs de création, on forme les états à N gluons $|(k_1, c_1, \lambda_1), \dots, (k_N, c_N, \lambda_N)\rangle$.

Munis de notre base d'états de Fock, nous pouvons écrire la décomposition du projectile $|\mathcal{P}\rangle$:

$$|\mathcal{P}\rangle = \sum_{N \geq 1} \int \left(\prod_{i=1}^N d^3 k_i \right) \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^N k_i - P \right) \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N \\ c_1, \dots, c_N}} \psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N} (k_1, \dots, k_N; P^+) \\ |(k_1, c_1, \lambda_1), \dots, (k_N, c_N, \lambda_N)\rangle \quad (1.18)$$

où, en accord avec nos notations, $P = (P^+, \mathbf{0})$ est la tri-impulsion du projectile. La fonction $\delta^{(3)}$ dans la décomposition (1.18) assure la conservation de la tri-impulsion. Les fonctions d'ondes $\psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ se calculent en théorie des perturbations ; un exemple simple d'un tel calcul est donné par la suite, dans le but d'illustrer ce formalisme. En tronquant la décomposition (1.18) à l'ordre souhaité en théorie des perturbations par rapport à α_s , on décrit un projectile habillé avec plus ou moins de gluons. Précisons que la coupure inférieure $z_P P^+$ sur les impulsions longitudinales k_i^+ des gluons virtuels n'est pas écrite explicitement mais est sous-entendue. Cette coupure précise le repère dans lequel la décomposition $|\mathcal{P}\rangle$ est calculée.

Signalons finalement le problème de la normalisation de l'état $|\mathcal{P}\rangle$:

$$\langle \mathcal{P} | \mathcal{P} \rangle = \delta^{(3)}(0) \sum_{N \geq 1} \int \left(\prod_{i=1}^N d^3 k_i \right) \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^N k_i - P \right) \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N \\ c_1, \dots, c_N}} \left| \psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N} (k_1, \dots, k_N; P^+) \right|^2 . \quad (1.19)$$

Le facteur $\delta^{(3)}(0)$ est relié au problème bien connu de la normalisation des ondes planes en volume infini. Un calcul en volume fini [11, 12], ou un traitement qui utiliserait des paquets d'ondes normalisables au lieu des ondes planes [13], permettrait d'éviter ce facteur problématique. Une manière moins satisfaisante de s'en débarrasser, mais que nous utiliserons néanmoins par la suite, est d'appliquer la prescription suivante : lors du calcul de normes, nous diviserons systématiquement le résultat par $\delta^{(3)}(0)$. La normalisation de l'état $|\mathcal{P}\rangle$ à 1 impose alors la condition suivante sur les fonctions d'ondes qui interviennent dans la décomposition :

$$\sum_{N \geq 1} \int \left(\prod_{i=1}^N d^3 k_i \right) \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^N k_i - P \right) \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N \\ c_1, \dots, c_N}} \left| \psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N} (k_1, \dots, k_N; P^+) \right|^2 = 1 . \quad (1.20)$$

Physiquement, cela signifie qu'en introduisant un gluon de plus dans le projectile habillé, on renormalise les contributions des gluons déjà présents, ce qui correspond à prendre en compte à la fois les termes réels et virtuels. Ce phénomène sera aussi illustré par la suite.

Dans notre description du projectile, nous inclurons évidemment aussi des états contenant des quarks et antiquarks. Cela se fait de la même manière que pour les gluons et nous dénoterons un état à un quark $|k, \alpha, s\rangle$ où k est l'impulsion, α l'indice de couleur et s l'indice de spin :

$$b_{\alpha, s}^\dagger(k)|0\rangle = |k, \alpha, s\rangle \quad b_{\alpha, s}(k)|0\rangle = 0 . \quad (1.21)$$

Pour les antiquarks, nous utiliserons la notation $|k, \bar{\alpha}, \bar{s}\rangle$:

$$d_{\bar{\alpha}, s}^\dagger(k)|0\rangle = |k, \bar{\alpha}, s\rangle \quad d_{\bar{\alpha}, s}(k)|0\rangle = 0 . \quad (1.22)$$

Dans les équations ci-dessus, les opérateurs b^\dagger et b (d^\dagger et d) sont les opérateurs de création et d'annihilation de quark (antiquark) qui apparaissent dans la décomposition en modes de Fourier du champ fermionique. Ils obéissent aux relations d'anticommutations

$$\{b_{\alpha, s}(k), b_{\beta, s'}^\dagger(k')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ss'} \delta^{(3)}(k - k') , \quad (1.23)$$

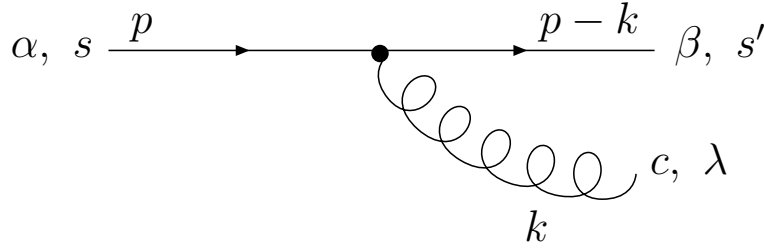


FIG. 1.4 – La transition $q \rightarrow qg$: le quark nu d'impulsion p , de couleur α , et de spin s , s'habille d'un gluon d'impulsion k , de couleur c et de polarisation λ . Le quark habillé a pour impulsion $p - k$, son indice de couleur est β et son indice de spin s' . La fonction d'onde associée est donnée par l'équation (1.26).

$$\left\{ d_{\bar{\alpha},s}(k), d_{\bar{\beta},s'}^\dagger(k') \right\} = \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \delta_{ss'} \delta^{(3)}(k - k') . \quad (1.24)$$

Par application successive des opérateurs de création sur le vide, on forme les états à plusieurs quarks ou antiquarks.

1.2.2 Exemple de calcul : le vertex $q \rightarrow qg$:

Nous allons à présent illustrer ce formalisme en présentant un calcul de fonction d'onde. Un tel calcul est réalisé en utilisant des règles de Feynman, particulières à la quantification sur le cône de lumière, néanmoins similaires aux règles de la quantification covariante. Les règles de Feynman que nous utiliserons sont dérivées par exemple dans [14]. Nous considérons un exemple simple : le cas où le projectile est un quark habillé d'un gluon. Ceci est représenté figure 1.4.

- Nous notons l'impulsion du quark entrant p , son indice de couleur α , et son indice de spin s ; il lui est donc associé le spineur $u_s(p)/\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}$.
- Nous notons l'impulsion du gluon émis k , son indice de couleur c , et son indice de polarisation λ ; il lui est ainsi associé le vecteur de polarisation $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(k)/\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}$.
- La tri-impulsion étant conservée, l'impulsion du quark sortant est $p - k$. Nous notons son indice de couleur β et son indice de spin s' , et nous lui associons donc le spineur $\bar{u}_{s'}(p - k)/\sqrt{(2\pi)^3 2(p - k)^+}$.
- Au vertex est associé un facteur $(2\pi)^3 g_s T_{\alpha\beta}^c \gamma^\mu$, le $(2\pi)^3$ venant avec le $\delta^{(3)}$ de (1.18). T^c est le générateur de $SU(N_c)$ dans la représentation fondamentale.
- Le dernier facteur à rajouter est $((p - k)^- + k^- - p^-)^{-1}$. C'est un dénominateur d'énergie du type $(E_{\text{final}} - E_{\text{initial}})^{-1}$ qui reflète la non-conservation de l'impulsion dans la direction x^- en théorie des perturbations sur le cône de lumière. Ces facteurs remplacent les propagateurs de la quantification covariante.

La fonction d'onde correspondante est donc

$$\psi_{\beta c, \alpha}^{s' \lambda, s}(k; p) = \frac{\bar{u}_{s'}(p - k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2(p - k)^+}} \frac{\gamma^\mu \varepsilon_{(\lambda)\mu}(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{u_s(p)}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}} \frac{(2\pi)^3 g_s T_{\alpha\beta}^c}{(p - k)^- + k^- - p^-} \quad (1.25)$$

avec les indices relatifs à la particule entrante aussi indiqués sur la fonction d'onde. Pour mener le calcul plus loin, il faut choisir une représentation pour les matrices de Dirac (la représentation chirale est bien adaptée ici) et résoudre l'équation de Dirac dans cette représentation

pour obtenir les spineurs. Tous calculs faits, on obtient

$$\psi_{\beta c, \alpha}^{s' \lambda, s}(k; p) = \frac{g_s T_{\alpha \beta}^c}{\sqrt{2(2\pi)^3 k^+}} ((p^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{p})^2 + k^{+2} m^2)^{-1} \times$$

$$\begin{cases} 2(p^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 (p^+ \delta_s - \delta_{s'} - (p^+ - k^+) \delta_{s+} \delta_{s'+}) + \sqrt{2} m k^{+2} \delta_{s+} \delta_{s'-} & \text{si } \lambda = 1 \\ 2(p^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 (p^+ \delta_s + \delta_{s'+} + (p^+ - k^+) \delta_{s-} \delta_{s'-}) - \sqrt{2} m k^{+2} \delta_{s-} \delta_{s'+} & \text{si } \lambda = 2 \end{cases} \quad (1.26)$$

Signalons que cette fonction d'onde se simplifie beaucoup dans la limite où le gluon est mou $k^+/p^+ \rightarrow 0$. La simplification principale est que le spin du quark est conservé :

$$\psi_{\beta c, \alpha}^{s' \lambda, s}(k; p) = \delta_{ss'} \frac{g_s T_{\alpha \beta}^c}{\sqrt{4\pi^3 k^+}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \quad (1.27)$$

Nous retrouvons bien le résultat utilisé précédemment : la probabilité que le quark soit habillé d'un gluon mou est proportionnelle à α_s/k^+ .

1.2.3 Fonctions d'ondes en espace mixte

Pour des raisons qui apparaîtront claires par la suite, il est commode de travailler dans un espace mixte, dans lequel les impulsions transverses sont transformées de Fourier. Nous définissons donc les opérateurs de création et d'annihilation de particules en espace mixte (nous donnons l'exemple des gluons, les opérateurs et états de Fock en espace mixte relatifs aux quarks et antiquarks se définissent de manière similaire) :

$$a_{c, \lambda}^\dagger(k^+, \mathbf{x}) = \int d^2 \mathbf{k} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{c, \lambda}^\dagger(k) \quad a_{c, \lambda}(k^+, \mathbf{x}) = \int d^2 \mathbf{k} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{c, \lambda}(k) \quad (1.28)$$

Ils obéissent aux relations de commutation suivantes

$$\left[a_{c, \lambda}(k^+, \mathbf{x}), a_{d, \lambda'}^\dagger(k'^+, \mathbf{x}') \right] = (2\pi)^2 \delta_{cd} \delta_{\lambda \lambda'} \delta(k^+ - k'^+) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.29)$$

et nous noterons les états de Fock correspondants :

$$a_{c, \lambda}^\dagger(k^+, \mathbf{x}) |0\rangle = |k^+, \mathbf{x}, c, \lambda\rangle \quad (1.30)$$

La décomposition du projectile $|\mathcal{P}\rangle$ sur ces états s'écrit (pour l'instant, nous incluons seulement les gluons)

$$|\mathcal{P}\rangle = \sum_{N \geq 1} \int \left(\prod_{i=1}^N dk_i^+ \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{(2\pi)^2} \right) \delta \left(\sum_{i=1}^N k_i^+ - P^+ \right) \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N \\ c_1, \dots, c_N}} \tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(\{k_i^+, \mathbf{x}_i\}; P^+) \\ |(k_1^+, \mathbf{x}_1, c_1, \lambda_1), \dots, (k_N^+, \mathbf{x}_N, c_N, \lambda_N)\rangle \quad (1.31)$$

où les fonctions d'onde en espace mixte $\tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ sont obtenues à partir des fonctions $\psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ en espace des impulsions par transformée de Fourier :

$$\tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(\{k_i^+, \mathbf{x}_i\}; P^+) = \int \left(\prod_{i=1}^N d^2 \mathbf{k}_i e^{i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_i} \right) \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \right) \psi_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(k_1, \dots, k_N; P^+) \quad (1.32)$$

A cause de la fonction delta, les fonctions $\tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ sont des fonctions de $N - 1$ positions transverses. Pour cette raison, lorsqu'on calcule la normalisation $\langle \mathcal{P} | \mathcal{P} \rangle$ à partir de (1.31), le

facteur $\delta^{(3)}(0)$ apparaît sous la forme $\delta(0) \int \frac{d^2 \mathbf{x}}{(2\pi)^2}$ où \mathbf{x} représente la coordonnée dont $\tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$ ne dépend pas. On supprime ce facteur en suivant notre prescription et la normalisation de l'état $|\mathcal{P}\rangle$ impose la condition suivante :

$$\sum_{N \geq 1} \int \left(\prod_{i=1}^N dk_i^+ \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{(2\pi)^2} \right) \delta \left(\sum_{i=1}^N k_i^+ - P^+ \right) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{x}_N) \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_N \\ c_1, \dots, c_N}} \left| \tilde{\psi}_{c_1, \dots, c_N}^{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(\{k_i^+, \mathbf{x}_i\}; P^+) \right|^2 = 1 \quad (1.33)$$

avec le facteur $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{x}_N)$ introduit pour garder la mesure d'intégration sur les N positions transverses.

1.3 Description de la cible

Comme expliqué dans la section introductive, nous choisissons de décrire la collision dans un repère défini par $Y_C \simeq Y$, dans lequel les gluons qui habillent la cible sont très nombreux. Nous avons déjà insisté sur le fait qu'il est important de prendre en compte dans la décomposition en états de Fock de la cible, toutes les composantes contenant un nombre arbitrairement grand de gluons avec des petites impulsions longitudinales de l'ordre de $e^{-Y_C} Q^- \ll Q^-$. En fait, dans la limite de haute énergie, la cible est habillée par un ensemble de gluons tellement dense, que des effets collectifs deviennent importants. La description de la cible à l'aide des états à n gluons, qui peut être qualifiée de description microscopique, n'est pas adaptée pour rendre compte de tels phénomènes. Il est plus adéquat de travailler avec des degrés de liberté collectifs.

Les gluons mous étant très nombreux, ils créent des champs de couleur \mathcal{A} très importants, de l'ordre de $1/g_s$, qui sont à l'origine des effets collectifs. La cible habillée de gluons mous peut donc être décrite de manière effective par des champs classiques [15, 16]. Nous remplaçons ainsi la décomposition en états de Fock de la cible par un champ classique :

$$|\mathcal{C}\rangle = |qqq\rangle + |qqqg\rangle + \dots + |qqqg \dots ggg\rangle \quad (1.34)$$

\Downarrow

$$|\mathcal{C}\rangle = \int D\mathcal{A} \Phi_{Y_C}[\mathcal{A}] |\mathcal{A}\rangle \quad (1.35)$$

La fonctionnelle $\Phi_{Y_C}[\mathcal{A}]$ qui pondère les différentes valeurs possibles du champ \mathcal{A} est inconnue, mais est normalisée par

$$\int D\mathcal{A} |\Phi_{Y_C}[\mathcal{A}]|^2 = 1. \quad (1.36)$$

Nous verrons plus tard que l'évolution de $|\Phi_{Y_C}[\mathcal{A}]|^2$ par rapport Y_C est calculable, et qu'elle permet de prédire le comportement d'observables (par exemple la section efficace totale de la collision) dans la limite de haute énergie. Pour l'instant, la décomposition (1.35) apparaît simplement formelle, et la validité d'une telle description n'est pas a priori évidente. Elle le deviendra a posteriori, en constatant sa capacité à reproduire les résultats expérimentaux et son pouvoir prédictif. Signalons aussi qu'avec une telle description de la cible, nous perdons la capacité de décrire individuellement les particules émises dans l'état final avec $y < y_*$, qui nous le rappelons sont vues comme des particules qui habillaient la cible avant la collision. Par exemple pour calculer le spectre d'une particule émise avec un certain y , nous sommes contraints de la décrire comme provenant du projectile et donc de choisir notre repère tel que $y_* < y$. Avec nos choix de repères asymétriques ($Y_P \ll Y_C$), nous sommes limités au calcul de spectres de particules émises avec une rapidité proche de y_{max} . On dit que ces particules sont produites vers l'avant. Ceci sera repris dans le chapitre suivant.

Donnons à présent plus de détails sur le champ \mathcal{A} qui décrit la cible. Celle ci se déplace dans la direction des z négatifs, à une vitesse proche de celle de la lumière, elle se déplace donc sur le cône de lumière suivant la direction des x^- . Son courant de couleur J^μ a ainsi une seule composante non nulle : J^- . Rappelons que notre choix de jauge, qui s'applique aussi bien pour le champ quantique A^μ des gluons qui habillent le projectile que pour le champ classique \mathcal{A}^μ qui décrit la cible, est $\mathcal{A}^+ = 0$. Dans ces conditions, la conservation du courant s'écrit $[D_\mu, J^\mu] = \partial^+ J^- = 0$, et J^- ne dépend pas de x^- . On a donc

$$J^\mu(x^\nu) = \delta^{\mu-} J^-(x^+, \mathbf{x}) . \quad (1.37)$$

En résolvant les équations de Yang-Mills $[D_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu$, nous obtenons (voir par exemple [17])

$$A^\mu(x^\nu) = \delta^{\mu-} A^-(x^+, \mathbf{x}) - \nabla^2 \mathcal{A}^-(x^+, \mathbf{x}) = J^-(x^+, \mathbf{x}) . \quad (1.38)$$

Nous sommes maintenant en mesure de préciser que l'intégration fonctionnelle dans (1.35) concerne la composante du champ A^- . Nous aurons aussi besoin de la transformée de Fourier du champ A^- qui s'écrit

$$\tilde{\mathcal{A}}^-(k^\mu) = \int d^4x e^{ik^\mu x_\mu} \mathcal{A}^-(x^\mu) = 2\pi\delta(k^+) \int dx^+ d^2x e^{ik^-x^+ - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{A}^-(x^+, \mathbf{x}) . \quad (1.39)$$

1.4 Les éléments de la matrice de diffusion

Nous savons à présent décrire l'état du système avant la collision $|\mathcal{P}\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle$: l'état $|\mathcal{P}\rangle$ du projectile est une superposition cohérente d'états de quarks $|k^+, \mathbf{x}, \alpha, s\rangle$, d'antiquarks $|k^+, \mathbf{x}, \bar{\alpha}, s\rangle$ et de gluons $|k^+, \mathbf{y}, c, \lambda\rangle$ et l'état $|\mathcal{C}\rangle$ de la cible est décrit en termes d'état d'un champ classique $|\mathcal{A}\rangle$.

Nous souhaitons maintenant obtenir l'état du système après la collision, c'est-à-dire nous souhaitons calculer $\hat{S}|\mathcal{P}\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle$ où \hat{S} est la matrice de diffusion. Cela revient à calculer l'action de \hat{S} sur des états du type $|(k^+, \mathbf{x}, \alpha, s), (k'^+, \mathbf{y}, c, \lambda), \dots\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle$. En d'autres termes, il nous faut calculer comment les partons qui habillent le projectile diffusent sur le champ classique créé par la cible. Comme nous travaillons dans la limite de haute énergie, il est justifié d'utiliser ce qu'on appelle l'approximation eikonale : les partons qui habillent le projectile interagissent avec la cible de manière indépendante et le champ de couleur de la cible n'est pas affecté par l'interaction. Ceci est justifié car le projectile et la cible se déplacent à presque la vitesse de la lumière, et le temps d'interaction est beaucoup plus court que les échelles de temps sur lesquelles le projectile et la cible évoluent. Pendant l'interaction, les partons du projectile peuvent être considérés comme libres, et la cible peut-être considérée comme une source de couleur statique.

Nous allons donc nous concentrer sur le cas d'un quark en calculant de manière détaillée l'élément de matrice $\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k'^+, \mathbf{y}, \beta, s' | \hat{S} | k^+, \mathbf{x}, \alpha, s \rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle$. La généralisation pour des états à plusieurs partons sera ensuite évidente. Pour effectuer ce calcul, retournons en espace des impulsions :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k'^+, \mathbf{y}, \beta, s' | \hat{S} | k^+, \mathbf{x}, \alpha, s \rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle &= \int d^2k d^2k' e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad \langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S} | k, \alpha, s \rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

Nous allons calculer l'élément de matrice $\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S} | k, \alpha, s \rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle$ ordre par ordre en perturbations par rapport à $g_s \mathcal{A}^-$, comme représenté Figure 1.5. Pour obtenir le résultat final, il faudra resommer les contributions de tous les ordres car, \mathcal{A}^- étant un grand champ classique, $g_s \mathcal{A}^-$ est d'ordre 1.

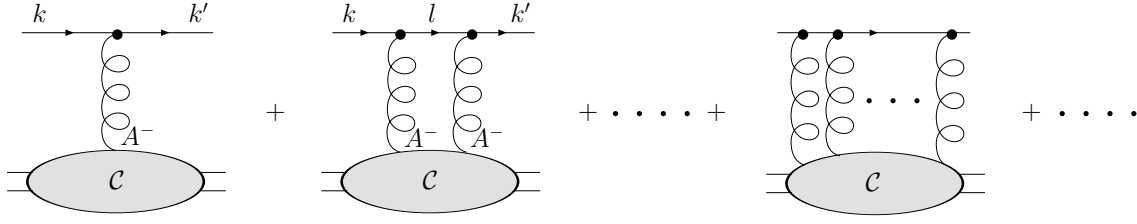


FIG. 1.5 – Représentation de la collision d'un des partons qui habille le projectile avec la cible. Le champ classique \mathcal{A}^- créé par la cible habillée de nombreux gluons mous étant d'ordre $1/g_s$, il faut prendre en compte des collisions avec un nombre arbitraire d'interactions.

L'ordre zéro est trivial : il n'y a pas d'interaction et $\hat{S}^{(0)} = 1$. La contribution du premier ordre est :

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S}^{(1)} | k, \alpha, s \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \tilde{\mathcal{A}}_c^-(k'^\mu - k^\mu) \frac{\bar{u}_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} i g_s T_{\alpha\beta}^c \gamma^+ \frac{u_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} . \quad (1.41)$$

Le champ $\tilde{\mathcal{A}}_c^-$ contient un $\delta(k^+ - k'^+)$, l'impulsion longitudinale du quark est donc conservée. Dans la limite de haute énergie, nous avons $k^+ \gg |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|$ et $\bar{u}_{s'}(k') \gamma^+ u_s(k) = 2k^+ \delta_{ss'}$, le spin du quark est donc conservé aussi. Nous verrons que ces résultats sont vrais à tout ordre en g_s . On a finalement

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S}^{(1)} | k, \alpha, s \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = \frac{i g_s T_{\alpha\beta}^c}{(2\pi)^2} \delta_{ss'} \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \int d^2 z e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dz^+ \mathcal{A}_c^-(z^+, \mathbf{z}) . \quad (1.42)$$

La contribution du deuxième ordre est :

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S}^{(2)} | k, \alpha, s \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{A}}_c^-(l^\mu - k^\mu) \tilde{\mathcal{A}}_d^-(k'^\mu - l^\mu) \frac{\bar{u}_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} i g_s T_{\alpha\gamma}^c \gamma^+ \frac{i}{\gamma^\mu l_\mu} i g_s T_{\gamma\beta}^d \gamma^+ \frac{u_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} . \quad (1.43)$$

En utilisant $\gamma^+ (1/\gamma^\mu l_\mu) \gamma^+ = \gamma^+ / (l^- - \mathbf{l}^2 / (2l^+))$, on obtient

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S}^{(2)} | k, \alpha, s \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = \frac{i(g_s)^2}{(2\pi)^3} (T^c T^d)_{\alpha\beta} \delta_{ss'} \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\mathcal{A}}_c^-(l^\mu - k^\mu) \tilde{\mathcal{A}}_d^-(k'^\mu - l^\mu)}{l^- - \frac{\mathbf{l}^2}{2l^+} + i\epsilon} . \quad (1.44)$$

Le spin du quark est bien conservé, et son impulsion longitudinale aussi, car le produit $\tilde{\mathcal{A}}_c^- \tilde{\mathcal{A}}_d^-$ contient bien un $\delta(k^+ - k'^+)$. L'intégration sur l^μ se fait facilement, celle sur l^- donne une fonction Θ qui ordonne les valeurs de x^+ des champs \mathcal{A}_c^- :

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle k', \beta, s' | \hat{S}^{(2)} | k, \alpha, s \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = \frac{i(g_s)^2}{(2\pi)^2} (T^c T^d)_{\alpha\beta} \delta_{ss'} \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \int d^2 z e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2^+ \int_{-\infty}^{z_2^+} dz_1^+ \mathcal{A}_c^-(z_1^+, \mathbf{z}) \mathcal{A}_d^-(z_2^+, \mathbf{z}) . \quad (1.45)$$

Il est facile d'obtenir le résultat pour un ordre n quelconque, il aura la même forme avec un facteur $(ig_s)^n T^{c_1} \dots T^{c_n} \mathcal{A}_{c_1}^- \dots \mathcal{A}_{c_n}^-$ où les champs \mathcal{A}_c^- sont ordonnés en x^+ . Il est simple de retourner en espace mixte en utilisant (1.40). Pour simplifier nous n'indiquons plus le spin s et l'impulsion longitudinale k^+ du quark qui en fait ne jouent aucun rôle : ils restent inchangés lors de l'interaction et l'élément de matrice \hat{S} n'en dépend pas. Nous obtenons

$$\langle \mathcal{A}' | \otimes \langle \mathbf{y}, \beta | \hat{S} | \mathbf{x}, \alpha \rangle \otimes | \mathcal{A} \rangle = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathcal{A} - \mathcal{A}') \left[1 + ig_s T^c \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathcal{P} \left(ig_s \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ T^c \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}) \right)^2 + \dots \right]_{\alpha\beta} \quad (1.46)$$

où \mathcal{P} indique qu'il faut ordonner les champs \mathcal{A}_c^- selon leurs valeurs de x^+ , la plus petite étant placée à gauche. La commodité de l'espace mixte dans la limite de haute énergie apparaît maintenant évidente : il diagonalise la matrice \hat{S} . Les termes d'ordre supérieur non indiqués sont tels que leur resommation est une exponentiation.

On peut donc écrire l'action de la matrice \hat{S} sur l'état $|\mathbf{x}\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle$, sa seule action non triviale étant d'agir comme une matrice de couleur :

$$\hat{S} |\mathbf{x}, \alpha\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle = \sum_{\beta} [W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x})]_{\alpha\beta} |\mathbf{x}, \beta\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle. \quad (1.47)$$

La matrice $W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x})$ est appelée ligne de Wilson dans la représentation fondamentale et a pour expression

$$W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) = \mathcal{P} \exp \left\{ ig_s \int dx^+ T^c \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}) \right\}. \quad (1.48)$$

Dans le cas de l'interaction d'un antiquark $|\mathbf{x}, \bar{\alpha}\rangle$, l'action de la matrice \hat{S} est

$$\hat{S} |\mathbf{x}, \bar{\alpha}\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle = \sum_{\bar{\beta}} \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} |\mathbf{x}, \bar{\beta}\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \quad (1.49)$$

car le générateur de $SU(N_c)$ dans la représentation fondamentale complexe conjuguée est $-{}^t(T^c)$. Dans le cas de l'interaction d'un gluon $|\mathbf{x}, c\rangle$ avec la cible, la matrice \hat{S} est aussi diagonale sauf dans l'espace de couleur :

$$\hat{S} |\mathbf{x}, c\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle = \sum_d W_A^{cd}[\mathcal{A}](\mathbf{x}) |\mathbf{x}, d\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle. \quad (1.50)$$

La matrice $W_A[\mathcal{A}](\mathbf{x})$ est une ligne de Wilson dans la représentation adjointe et a pour expression

$$W_A[\mathcal{A}](\mathbf{x}) = \mathcal{P} \exp \left\{ ig_s \int dx^+ \tilde{T}^c \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}) \right\} \quad (1.51)$$

où $(\tilde{T}^c)_{de} = -if^{cde}$ est le générateur de $SU(N_c)$ dans la représentation adjointe. Notons que le résultat (1.50) est valable à cause du choix de jauge $A^+ = 0$. En jauge covariante par exemple, la polarisation du gluon est modifiée lors de l'interaction.

Les lignes de Wilson $W_F[\mathcal{A}]$ et $W_A[\mathcal{A}]$ jouent des rôles très importants : elles font le lien entre les amplitudes de diffusion (et donc les observables physiques) et le champ \mathcal{A} qui rend compte des phénomènes collectifs (qui se manifestent dans la limite de haute énergie) dûs aux grandes densités de partons dans la cible. Ce sont des objets centraux pour l'étude de la QCD dans la limite de haute énergie [18, 19] (pour une revue, voir [20]), nous le montrerons dans le chapitre suivant par des calculs explicites de sections efficaces.

1.A Lignes de Wilsons et identités de Fierz

Dans cet appendice, nous donnons quelques formules qui permettent de simplifier des traces de produits ou produits de traces de lignes de Wilson. Ces formules découlent des identités de Fierz, des identités très utiles qui relient les lignes de Wilson fondamentale $W_F[\mathcal{A}]$ et adjointe $W_A[\mathcal{A}]$. Dans la suite de cet appendice nous garderons la dépendance des lignes de Wilson par rapport à \mathcal{A} implicite. Les identités de Fierz s'écrivent

$$[W_F(\mathbf{x})]_{ij} [W_F^\dagger(\mathbf{x})]_{kl} = \frac{1}{N_c} \delta_{il} \delta_{jk} + 2W_A^{cd}(\mathbf{x}) T_{il}^c T_{kj}^d, \quad (1.52)$$

$$T_{ij}^c T_{kl}^c = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N_c} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (1.53)$$

Dans le chapitre suivant nous manipulerons des expressions qui contiennent à la fois W_F et W_A . Il sera commode de les transformer de façon à ce qu'elles contiennent seulement soit W_F , soit W_A . Pour cela nous utiliserons les formules suivantes, qui s'obtiennent à partir des identités de Fierz. En combinant (1.52) et (1.53) nous obtenons

$$W_A^{cd}(\mathbf{x}) = 2\text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{x}) T^c W_F(\mathbf{x}) T^d\right), \quad (1.54)$$

puis en combinant (1.53) et (1.54) nous obtenons ensuite

$$2\text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{y}) T^c W_F(\mathbf{x}) T^d\right) W_A^{cd}(\mathbf{z}) = \text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{z})\right) \text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{z}) W_F(\mathbf{x})\right) - \frac{1}{N_c} \text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x})\right). \quad (1.55)$$

En utilisant (1.55) avec $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, nous écrivons

$$2\text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{x}) T^c W_F(\mathbf{x}) T^d\right) W_A^{cd}(\mathbf{z}) = \left|\text{Tr}\left(W_F^\dagger(\mathbf{x}) W_F(\mathbf{z})\right)\right|^2 - 1 = \text{Tr}\left(W_A^\dagger(\mathbf{x}) W_A(\mathbf{z})\right) \quad (1.56)$$

avec la deuxième égalité obtenue à partir de (1.54). Pour finir, la formule

$$2\text{Tr}\left(W_F(\mathbf{y}) T^c W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x}) T^c W_F^\dagger(\mathbf{x})\right) = \text{Tr}\left(W_A^\dagger(\mathbf{y}) W_A(\mathbf{x})\right) \quad (1.57)$$

découle en utilisant deux fois (1.52) avec (1.53).

CHAPITRE 2

Collision d'un Onium sur une cible hadronique

Sommaire

2.1 L'onium : un projectile idéal	30
2.1.1 Le repère où l'onium est nu	30
2.1.2 Le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou	31
2.2 Section efficace totale	33
2.2.1 Dans le repère où l'onium est nu	33
2.2.2 Dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou	35
2.2.3 La hiérarchie d'équations de Balitsky	37
2.3 Section efficace diffractive	38
2.4 Section efficace de production de gluons	41
2.4.1 Production inclusive de gluons	43
2.4.2 Production diffractive de gluons	46
2.A Factorisation de la section efficace de production inclusive de gluons	48

Dans ce Chapitre, nous considérons un projectile hadronique particulier dont la décomposition en états de Fock est simple : un onium. Cela nous permet d'approfondir l'étude de la cible dont la fonction d'onde est sensible à la physique de QCD à haute énergie. Nous utilisons le formalisme que nous venons d'introduire pour calculer plusieurs sections efficaces. Les observables que nous considérons sont choisies parce qu'elles correspondent à des situations réalisables en pratique, dans le but de pouvoir confronter nos prédictions à l'expérience.

La première partie introduit ce qu'est un onium, le projectile que nous utiliserons dans tout ce chapitre. La deuxième partie présente notre premier calcul de section efficace, celui de la section efficace totale. Ce calcul est relativement simple car il n'impose aucune restriction sur l'état final. La troisième partie est consacrée au calcul de la section efficace diffractive, pour laquelle la cible interagit de manière élastique. La quatrième et dernière partie reprend les résultats publiés dans l'article [IV] et l'article de conférence [V] : nous y calculons les sections efficaces inclusives et diffractives de production de gluons à grande rapidité. Les observables considérées correspondent toutes à des processus mesurables dans les collisionneurs.

Au delà de son intérêt d'illustration du formalisme, ce chapitre a pour but de montrer pourquoi les observables mentionnées ci-dessus sont des laboratoires idéaux pour l'étude de la limite de haute énergie de QCD.

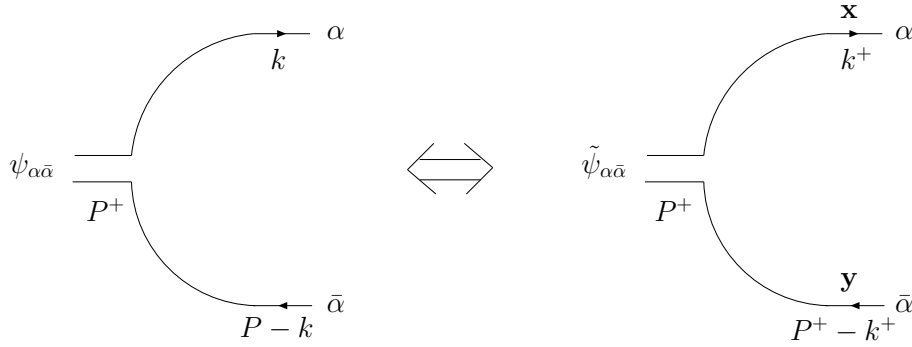


FIG. 2.1 – La composante quark-antiquark d'un onium, sa seule composante quand il est nu. Deux représentations sont données, en espace d'impulsion et en espace mixte. L'impulsion du quark est k et son indice de couleur est α , l'impulsion de l'antiquark est $P - k$ et son indice de couleur est $\bar{\alpha}$. En représentation mixte, le quark a pour position transverse \mathbf{x} et l'antiquark \mathbf{y} .

2.1 L'onium : un projectile idéal

Dans tout ce chapitre nous travaillerons avec un projectile particulier, un onium que nous noterons $|\mathcal{P}\rangle = |\mathcal{O}\rangle$. Un onium peut être considéré comme un projectile hadronique *idéal* : dans le repère où il est nu, sa décomposition en états de Fock $|\mathcal{O}\rangle$ a une seule composante, une paire quark-antiquark dans un état singlet de couleur. Plus précisément le quark et l'antiquark sont les partons de valence de l'onium : dans le repère où ce dernier est nu ($Y_{\mathcal{O}} \simeq 0$), ils donnent la contribution dominante en théorie des perturbations par rapport à α_s . Nous utiliserons aussi un repère dans lequel l'onium est habillé d'un gluon mou, caractérisé par un $Y_{\mathcal{O}}$ non nul. Rappelons que la contribution due au gluon n'est pas supprimée si le gluon est mou : un facteur $Y_{\mathcal{O}} = \ln(1/z_{\mathcal{O}})$ compense le facteur α_s .

2.1.1 Le repère où l'onium est nu

Nous considérons d'abord le repère $Y_{\mathcal{O}} \simeq 0$ (et donc $Y_{\mathcal{C}} \simeq Y$). En utilisant les notations du chapitre précédent, la décomposition de l'onium en une paire quark-antiquark s'écrit en espace mixte :

$$|\mathcal{O}\rangle = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \quad (2.1)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les positions transverses du quark et de l'antiquark respectivement. Pour alléger les notations, nous n'indiquons pas les indices de spins des états fermioniques. Les indices de spins et la dépendance en P^+ (l'impulsion longitudinale de l'onium) de la fonction d'onde $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}$ sont aussi gardés implicites. Cette fonction d'onde est la transformée de Fourier de la fonction $\psi_{\alpha\bar{\alpha}}$:

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}(k^+, \mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_{\alpha\bar{\alpha}}(k) \quad (2.2)$$

et cette correspondance est représentée Figure 2.1.

Comme la paire quark-antiquark qui compose l'onium est singlet de couleur, on peut extraire un facteur $\delta_{\alpha\bar{\alpha}}$ de la fonction d'onde :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}(k^+, \mathbf{r}) = \frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} \phi(k^+, \mathbf{r}) . \quad (2.3)$$

La fonction ϕ est normalisée ainsi :

$$\int dk^+ \frac{d^2 \mathbf{r}}{(2\pi)^2} |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 = 1. \quad (2.4)$$

L'onium possède une caractéristique importante : la fonction ϕ est telle que seuls les dipôles de taille transverse $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1/\Lambda_{QCD}$ contribuent dans la décomposition (2.1). Ceci définit l'onium comme un objet perturbatif. Bien que l'onium soit un objet théorique utilisé pour faire des calculs, nous verrons plus tard que c'est une bonne approximation de certaines particules hadroniques utilisées expérimentalement. Un exemple sera donné au Chapitre 4 : le photon virtuel de la diffusion profondément inélastique peut être identifié à un onium (et les fonctions $\psi_{\alpha\bar{\alpha}}$ et $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}$ seront calculées explicitement dans ce cas).

2.1.2 Le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou

Nous considérons maintenant le repère dans lequel l'onium est habillé d'un gluon mou. Ce repère est caractérisé par un $Y_{\mathcal{O}}$ non nul et un $Y_{\mathcal{C}} < Y$. En utilisant les notations du chapitre précédent, écrivons la décomposition de l'onium en espace mixte, en incluant cette fois les composantes quark-antiquark et quark-antiquark-gluon :

$$|\mathcal{O}\rangle^{Y_{\mathcal{O}}} = \int dk^+ \frac{d^2 \mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \left[\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{Y_{\mathcal{O}}}(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle + \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2 \mathbf{z}}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda c} \tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k^+, k'^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{z}-\mathbf{y}) |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+ - k'^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha}), (k'^+, \mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \right] \quad (2.5)$$

En plus des positions transverses du quark et de l'antiquark toujours désignées par \mathbf{x} et \mathbf{y} , la position transverse du gluon est notée \mathbf{z} . Notons que, dans ce nouveau repère, la fonction d'onde $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{Y_{\mathcal{O}}}$ de la composante quark-antiquark est différente de la fonction d'onde $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}$ du repère $Y_{\mathcal{O}} = 0$. Comme expliqué précédemment, ceci vient du fait qu'en ajoutant un gluon dans la description de l'onium, nous renormalisons la contribution de la composante quark-antiquark ce qui correspond à prendre en compte à la fois les termes réels et virtuels. La condition de normalisation (1.20) permet d'obtenir facilement la fonction $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{Y_{\mathcal{O}}}$ à partir de la fonction ϕ introduite précédemment par (2.3) et de la fonction $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}$ que nous allons calculer par la suite :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{Y_{\mathcal{O}}}(k^+, \mathbf{r}) = \frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} \left(|\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 - \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda c} \left| \tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k^+, k'^+, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Pour calculer $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}$, retournons en espace d'impulsion :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k^+, k'^+, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^2 \mathbf{k} d^2 \mathbf{k}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \psi_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k, k') \quad (2.7)$$

avec k l'impulsion du quark, k' l'impulsion du gluon, et $P - k - k'$ l'impulsion de l'antiquark, sous-entendue. Le calcul de la fonction $\psi_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}$ est représenté Figure 2.2. Dans la limite où le gluon est mou ($P^+ \gg k^+$), les spins du quark et de l'antiquark (rappelons que les indices correspondants ne sont pas explicitement indiqués sur les fonctions d'ondes) sont inchangés par l'émission du gluon, comme montré par le résultat (1.27) du chapitre précédent. La fonction d'onde est alors donnée par

$$\psi_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k, k') = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi^3 k'^+}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot \mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} (T_{\gamma\alpha}^c \psi_{\gamma\bar{\alpha}}(k + k') - T_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^c \psi_{\alpha\bar{\gamma}}(k)) \quad (2.8)$$

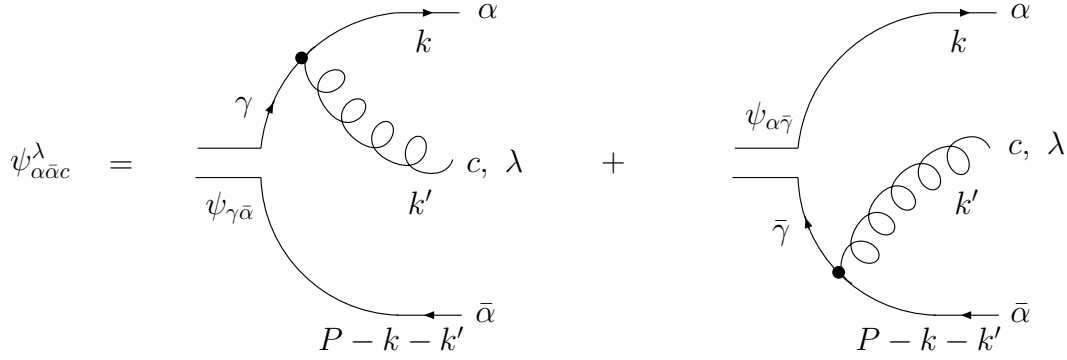


FIG. 2.2 – L'onium habillé d'un gluon d'impulsion k' , de couleur c et de polarisation λ . Les deux contributions à la fonction d'onde sont représentées, le gluon étant émis par le quark ou par l'antiquark. Dans la limite où le gluon est mou ($P^+ \gg k^+$), le spin du quark (ou de l'antiquark) est inchangé par l'émission du gluon et la fonction d'onde est donnée par l'équation (2.8).

en terme de la fonction d'onde de l'onium nu $\psi_{\alpha\bar{\alpha}}$. En effectuant la transformée de Fourier (2.7), nous obtenons pour la fonction d'onde en espace mixte :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k^+, k'^+, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{g_s T_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{\sqrt{4\pi^3 N_c k'^+}} \phi(k^+, \mathbf{r}) \int d^2 \mathbf{k}' \left(e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \right) \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot \mathbf{k}'}{k'^2} . \quad (2.9)$$

L'intégrale restante est facilement réalisée en utilisant la formule suivante :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{k^2} = \frac{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}}{r^2} . \quad (2.10)$$

On obtient alors la fonction d'onde $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}$ de la composante quark-antiquark-gluon :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^{\lambda}(k^+, k'^+, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-ig_s T_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{\sqrt{\pi N_c k'^+}} \phi(k^+, \mathbf{r}) \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot \mathbf{r}'}{r'^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2} \right) . \quad (2.11)$$

Grâce à la relation (2.6), nous déduisons de ce résultat la fonction d'onde $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{y_{\mathcal{O}}}$ de la composante quark-antiquark :

$$\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^{Y_{\mathcal{O}}}(k^+, \mathbf{r}) = \frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} \phi(k^+, \mathbf{r}) \left(1 - \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} Y_{\mathcal{O}} \int d^2 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

où le facteur $Y_{\mathcal{O}}$ vient de l'intégrale sur l'impulsion longitudinale du gluon :

$$\int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} \frac{dk'^+}{k'^+} = Y_{\mathcal{O}} . \quad (2.13)$$

Nous avons aussi utilisé la propriété suivante, valable pour tous vecteurs transverses \mathbf{x} et \mathbf{x}' :

$$\sum_{\lambda=1,2} \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}^* \cdot \mathbf{x} \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' . \quad (2.14)$$

Cette égalité est la projection dans l'espace transverse de la relation

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{(\lambda)}^{\mu*}(k) \varepsilon_{(\lambda)}^{\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu}}{k^+} \delta^{\nu-} + \frac{k^{\nu}}{k^+} \delta^{\mu-} \quad (2.15)$$

pour le tenseur de polarisation dans notre jauge.

Considérons un instant les intégrales suivantes :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{2\pi} \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{2\pi} \frac{2\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\mathbf{r}'^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\rho^2} \right) \quad (2.16)$$

où ρ est une coupure ultraviolette ($|\mathbf{r}'|, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \rho$). Cela nous dit que l'intégrale sur \mathbf{r}' dans (2.12) est logarithmiquement divergente dans l'ultraviolet. Ceci n'est pas un problème, nous verrons que la divergence de cette contribution virtuelle s'annule avec une divergence similaire dans la contribution réelle lors du calcul de sections efficaces. Pour rendre cette annulation explicite, nous gardons le logarithme (2.16) sous sa forme intégrale.

Nous pouvons maintenant écrire la décomposition $|\mathcal{O}\rangle$ de l'onium, dans le repère où il est habillé d'un gluon mou (dorénavant nous n'indiquons plus les impulsions longitudinales explicitement) :

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}\rangle^{Y_{\mathcal{O}}} = & \int dk^+ \frac{d^2 \mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \sum_{\alpha \bar{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{N_c}} \times \\ & \left\{ \left(1 - \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} Y_{\mathcal{O}} \int d^2 \mathbf{z} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{\alpha \bar{\alpha}} |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle + \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2 \mathbf{z}}{(2\pi)^2} \right. \\ & \left. \sum_{\lambda c} \frac{ig_s}{\sqrt{\pi k'^+}} \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \right] T_{\bar{\alpha} \alpha}^c |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \right\} \quad (2.17) \end{aligned}$$

2.2 Section efficace totale

Calculons la section efficace totale dans la collision de l'onium $|\mathcal{O}\rangle$ sur une cible hadronique $|\mathcal{C}\rangle$ quelconque. Pour des raisons qui apparaîtront claires après, nous allons calculer cette quantité en utilisant les deux repères introduits dans la section précédente : celui où l'onium est nu et celui où il est habillé d'un gluon mou. En tant qu'observable physique, la section efficace totale est indépendante du repère ; ceci nous permettra d'obtenir un résultat important. Signalons que c'est la taille de l'onium qui joue le rôle de l'échelle perturbative ($1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg \Lambda_{QCD}$) dans les calculs qui suivent. En effet, la section efficace totale étant une mesure purement inclusive, il n'y a pas d'échelle d'impulsion dans l'état final.

2.2.1 Dans le repère où l'onium est nu

Dans le repère ($Y_{\mathcal{O}} \simeq 0, Y_{\mathcal{C}} \lesssim Y$), l'état du système avant la collision $|\Psi_{in}\rangle = |\mathcal{O}\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle$ s'écrit :

$$|\Psi_{in}\rangle = \int dk^+ \frac{d^2 \mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \int D\mathcal{A} \Phi_Y[\mathcal{A}] \sum_{\alpha \bar{\alpha}} \frac{\delta_{\alpha \bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle. \quad (2.18)$$

L'action de la matrice \hat{S} sur $|\Psi_{in}\rangle$ s'obtient en appliquant les résultats du chapitre précédent. L'état du système après la collision $|\Psi_{out}\rangle = \hat{S}|\Psi_{in}\rangle$ est ainsi :

$$|\Psi_{out}\rangle = \int dk^+ \frac{d^2 \mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \int D\mathcal{A} \Phi_Y[\mathcal{A}] \sum_{\alpha \bar{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{N_c}} \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha} \alpha} |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \quad (2.19)$$

Pour obtenir la section efficace totale, nous allons maintenant calculer l'amplitude de collision élastique $A_{el}(Y) = i\langle \Psi_{in} | 1 - \hat{S} | \Psi_{in} \rangle = i\langle \Psi_{in} | (|\Psi_{in}\rangle - |\Psi_{out}\rangle) \rangle$. En effectuant ce produit

scalaire, un facteur $\delta(0)$ apparaît. Il a la même origine que le facteur $\delta^{(3)}(0)$ qui apparaît lors du calcul d'une norme (ceci a été discuté au chapitre précédent). Le calcul d'une observable physique aurait dû faire disparaître ce problème, et c'est d'ailleurs ce qui se passe avec les deux dimensions transverses : le facteur $\delta^{(3)}(0)$ qui apparaît lors du calcul de $\langle \mathcal{O} | \mathcal{O} \rangle$ est réduit au simple facteur $\delta(0)$ dans $A_{el}(Y)$. Le facteur $\delta(0)$ restant provient de l'intégration sur l'impulsion longitudinale et il n'a pas disparu car, dans la limite de haute énergie considérée ici, les impulsions longitudinales sont conservées par l'interaction, contrairement aux impulsions transverses. Mais insistons une nouvelle fois sur le fait que nous ne rencontrerions pas ce problème si nous utilisions des paquets d'ondes normalisables au lieu des ondes planes. La prescription à utiliser pour se débarrasser du $\delta(0)$ problématique est de le remplacer par un facteur $(2\pi)^2$. On obtient alors

$$-iA_{el}(Y) = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 \int D\mathcal{A} |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 T_{\mathbf{xy}}[\mathcal{A}] \quad (2.20)$$

où nous avons introduit

$$T_{\mathbf{xy}}[\mathcal{A}] = 1 - \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right) \quad (2.21)$$

qui représente l'interaction de la paire quark-antiquark avec le champ \mathcal{A} .

Introduisons aussi une nouvelle notation utile pour la moyenne sur la fonction d'onde de la cible : l'intégration sur les différentes configurations du champ \mathcal{A} pondérée par la fonction $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ sera notée

$$\int D\mathcal{A} |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 f[\mathcal{A}] = \langle f \rangle_Y . \quad (2.22)$$

Lors du calcul de quantités physiques, c'est toujours sous cette forme que se manifestera la fonction d'onde de la cible. En utilisant le théorème optique $\sigma_{tot}(Y) = 2\text{Im}A_{el}(Y)$, nous pouvons écrire la section efficace totale sous une forme relativement simple :

$$\sigma_{tot} = 2 \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y . \quad (2.23)$$

La quantité $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ est appelée amplitude de diffusion du dipôle, le dipôle (sous entendu de couleur) faisant référence à la paire quark-antiquark singlet de couleur. Cette quantité, qui est la moyenne d'une trace d'un produit de lignes de Wilson, contient la dépendance en rapidité Y et donc en énergie (rappelons que $Y \simeq \ln(s)$). Nous comprenons maintenant pourquoi l'évolution de $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ par rapport à Y permet de prédire le comportement d'observables physiques. En effet, d'une équation d'évolution fonctionnelle pour $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ du type

$$\frac{d}{dY} |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 = H |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 , \quad (2.24)$$

il est possible de déduire une équation pour $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$, et pour n'importe quelle moyenne $\langle f \rangle_Y$ d'ailleurs. Il est possible de dériver une telle équation fonctionnelle, cela sera discuté plus loin.

La factorisation de la section efficace totale exprimée par la formule (2.23) est représentée Figure 2.3. Introduisons la fonction $T_{q\bar{q}}$ définie par

$$T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) = \langle T_{(\mathbf{b}+\mathbf{r}/2)(\mathbf{b}-\mathbf{r}/2)} \rangle_Y . \quad (2.25)$$

C'est simplement une réécriture de l'amplitude de dipôle avec des variables adaptées. En effet, en changeant dans (2.23) les positions transverses \mathbf{x} et \mathbf{y} en variables de taille $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ et de paramètre d'impact $\mathbf{b} = (\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$, la section efficace totale se réécrit :

$$\sigma_{tot} = 2 \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 \int d^2\mathbf{b} T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) . \quad (2.26)$$

La factorisation exprimée par cette formule est appelée factorisation des dipôles.

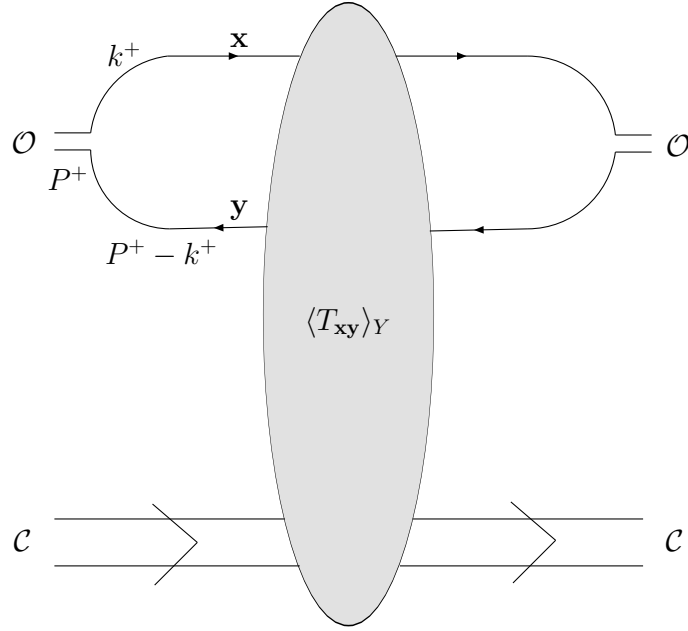


FIG. 2.3 – L’amplitude de diffusion élastique dans la collision de l’onium \mathcal{O} sur la cible \mathcal{C} . Ce schéma décrit la factorisation exprimée par la formule (2.23), obtenue dans le repère où l’onium est nu. On obtient la section efficace en prenant la partie imaginaire de l’amplitude élastique. Ceci peut être représenté par une coupure verticale au milieu du diagramme montrant l’état final. Dans le cas de la section efficace totale, l’état final est complètement inclusif.

2.2.2 Dans le repère où l’onium est habillé d’un gluon mou

Lorsque l’onium est habillé d’un gluon mou ($Y_{\mathcal{O}} > 0, Y_{\mathcal{C}} < Y$), l’état du système avant la collision $|\Psi_{in}\rangle = |\mathcal{O}\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle$ s’obtient en utilisant (2.17). Comme précédemment, l’action de la matrice \hat{S} sur $|\Psi_{in}\rangle$ s’obtient en appliquant les résultats du chapitre précédent. L’état du système après la collision $|\Psi_{out}\rangle = \hat{S}|\Psi_{in}\rangle$ s’écrit alors

$$|\Psi_{out}\rangle = |\Psi_{out}\rangle^1 + |\Psi_{out}\rangle^2 \quad (2.27)$$

où nous séparons $|\Psi_{out}\rangle$ en deux morceaux : la composante quark-antiquark $|\Psi_{out}\rangle^1$ et la composante quark-antiquark-gluon $|\Psi_{out}\rangle^2$. Elles sont données par

$$|\Psi_{out}\rangle^1 = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \int D\mathcal{A} \Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\mathcal{A}] \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} \frac{1}{\sqrt{N_c}} \left(1 - \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} Y_{\mathcal{O}} \int d^2\mathbf{z} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2 (\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \right)^{\frac{1}{2}} |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle, \quad (2.28)$$

$$|\Psi_{out}\rangle^2 = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \int D\mathcal{A} \Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\mathcal{A}] \sum_{\alpha\bar{\alpha}\lambda c} \frac{ig_s}{\sqrt{\pi N_c k'^+}} \left[\frac{\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} - \frac{\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2} \right] \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) T^d W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} W_A^{dc}[\mathcal{A}](\mathbf{z}) |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \quad (2.29)$$

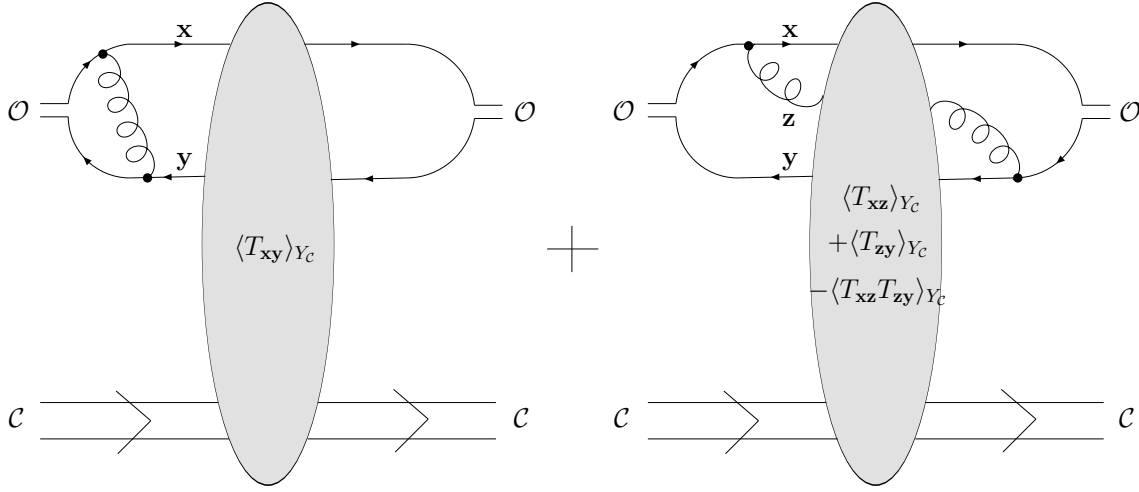


FIG. 2.4 – L'amplitude de diffusion élastique dans la collision de l'onium \mathcal{O} sur la cible \mathcal{C} . Ce schéma décrit la formule (2.31) obtenue dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou. L'amplitude de gauche montre l'interaction de la composante $q\bar{q}$ renormalisée par une contribution virtuelle. L'amplitude de droite montre l'interaction de la composante $q\bar{q}g$. On calcule la section efficace totale en coupant ces diagrammes. Le résultat doit être indépendant du repère choisi : que le gluon dessiné sur la figure soit décrit comme provenant de l'onium ou de la cible (comme sur la figure 2.3), le résultat doit être le même.

L'amplitude de collision élastique $A_{el}(Y) = i\langle\Psi_{in}|1 - \hat{S}|\Psi_{in}\rangle$ s'obtient facilement

$$-iA_{el} = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 \left[\langle T_{xy} \rangle_{Y_C} + \frac{\alpha_s}{\pi^2} Y_{\mathcal{O}} \int d^2\mathbf{z} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \right. \\ \left. \frac{1}{N_c} \left(C_F \langle \text{Tr}(W_F^\dagger(\mathbf{y})W_F(\mathbf{x})) \rangle_{Y_C} - \langle \text{Tr}(W_F^\dagger(\mathbf{y})T^c W_F(\mathbf{x})T^d) W_A^{cd}(\mathbf{z}) \rangle_{Y_C} \right) \right]. \quad (2.30)$$

Comparons ce résultat avec celui obtenu dans le repère $Y_{\mathcal{O}} \simeq 0$: le terme qui n'a pas de facteur α_s est similaire au résultat précédent, à la différence près que la moyenne sur la fonction d'onde de la cible s'effectue avec une rapidité $Y_C < Y$. Le terme proportionnel à α_s vient de l'émission du gluon, comme ce dernier est mou, il y a aussi un facteur $Y_{\mathcal{O}} = \ln(1/z_{\mathcal{O}})$. Dans ce terme, on reconnaît une partie réelle où le gluon interagit, qui contient $W_A(\mathbf{z})$, et une partie virtuelle qui provient de la renormalisation de la partie quark-antiquark. La divergence ultraviolette remarquée précédemment s'annule entre ces deux termes. Pour le voir explicitement nous pouvons utiliser l'identité (1.55), donnée dans l'appendice du Chapitre 1, pour réécrire l'amplitude A_{el} en termes de dipôles seulement. Donnons le résultat final pour la section efficace totale :

$$\sigma_{tot} = 2 \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 \left[\langle T_{xy} \rangle_{Y_C} + \bar{\alpha} Y_{\mathcal{O}} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \right. \\ \left. \left(\langle T_{xz} \rangle_{Y_C} + \langle T_{zy} \rangle_{Y_C} - \langle T_{xy} \rangle_{Y_C} - \langle T_{xz}T_{zy} \rangle_{Y_C} \right) \right] \quad (2.31)$$

avec $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi}$. Les différentes parties de cette formule sont représentées Figure 2.4.

Le calcul des deux expressions (2.23) et (2.31) va maintenant nous permettre de dériver une équation pour décrire l'évolution de $\langle T_{xy} \rangle_Y$ avec Y . Nous l'obtiendrons en utilisant le fait que la section efficace totale σ_{tot} est indépendante du repère choisi pour la calculer. Cette dérivation a l'avantage de ne pas nécessiter l'utilisation d'une équation du type (2.24).

2.2.3 La hiérarchie d'équations de Balitsky

Nous avons calculé la section efficace totale de la collision d'un onium sur une cible quelconque dans deux repères différents. Les formules finales sont données par (2.23) et (2.31). Ces deux expressions n'ont par l'air identiques, et pourtant elles doivent l'être car une observable physique ne peut pas dépendre du repère utilisé pour la calculer. En écrivant que le résultat (2.23) est identique au résultat (2.31) dans la limite $Y_{\mathcal{O}} \rightarrow 0$ (et donc $Y_{\mathcal{C}} \rightarrow Y$), on obtient l'équation suivante pour l'amplitude de diffusion du dipôle $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$:

$$\frac{d\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y}{dY} = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} (\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y) . \quad (2.32)$$

Ce résultat a été obtenu en utilisant seulement la partie de $\tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}c}^\lambda$ contenant le logarithme dominant $Y_{\mathcal{O}} = \ln(1/z_{\mathcal{O}})$, l'équation (2.32) est donc valable dans l'approximation des logarithmes dominants. Comme expliqué ci-dessus, une telle équation peut aussi être dérivée en utilisant une équation du type (2.24) pour la fonction d'onde de la cible. Dans l'approximation des logarithmes dominants, l'équation (2.24) est connue et est appelée l'équation JIMWLK [21, 22] (ces lettres représentent les initiales des noms des auteurs : Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov et Kovner). Elle permet en effet de dériver le résultat (2.32) (pour une revue, voir [23, 24, 25]).

L'équation (2.32) n'est pas une équation fermée, car le terme $\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$ dans le membre de droite agit comme un terme source. En fait, c'est la première équation d'une hiérarchie infinie d'équations dérivée par Balitsky [26]. En plus de (2.32), la hiérarchie donne l'évolution de $\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$ et de tous les corrélateurs d'un nombre arbitraire d'amplitudes de dipôles, un corrélateur à n amplitudes agissant comme source dans l'équation pour le corrélateur à $n - 1$ amplitudes. Pour exemple, l'équation pour $\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$ est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2(\mathbf{z}' - \mathbf{z})^2} \left(\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \right. \right. \\ \left. \left. - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}'\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \right) + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2(\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} \left(\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{z}'} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \right. \right. \\ \left. \left. - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{x}} T_{\mathbf{z}\mathbf{z}'} T_{\mathbf{z}'\mathbf{y}} \rangle_Y \right) + \frac{1}{N_c^2} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2(\mathbf{z}' - \mathbf{z})^2} + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2(\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2(\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} \right) \left(2 \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle M_{\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{z}'\mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{z}'} \rangle_Y - \langle M_{\mathbf{x}\mathbf{z}'\mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{z}'\mathbf{z}} \rangle_Y \right) \right] \quad (2.33) \end{aligned}$$

où nous avons introduit le multipôle

$$M_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{z}}[\mathcal{A}] = 1 - \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{u}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{v}) W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{w}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{z}) \right) . \quad (2.34)$$

On remarque qu'en plus des amplitudes de dipôles apparaît un nouvel objet qui est une trace de six lignes de Wilson ; ce genre d'objet est appelé un multipôle. Ces multipôles apparaissent toujours sous-dominants dans un comptage de puissance en $1/N_c$. La limite de large N_c permet donc de restreindre la hiérarchie à des corrélateurs de dipôles. Encore une fois, cette équation (comme toutes les équations de la hiérarchie de Balitsky) peut être dérivée en utilisant l'équation JIMWLK, et est valable dans l'approximation des logarithmes dominants. Nous appellerons dorénavant ces équations les équations B-JIMWLK.

La stratégie pour calculer la section efficace totale dans la limite de haute énergie, est d'obtenir $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$ à partir des équations B-JIMWLK, et ensuite d'utiliser la factorisation (2.23). Bien sûr, il est aussi possible d'utiliser la formule (2.31), qui est équivalente, mais cela introduirait d'inutiles complications. Comme nous allons le voir dans les sections suivantes, le

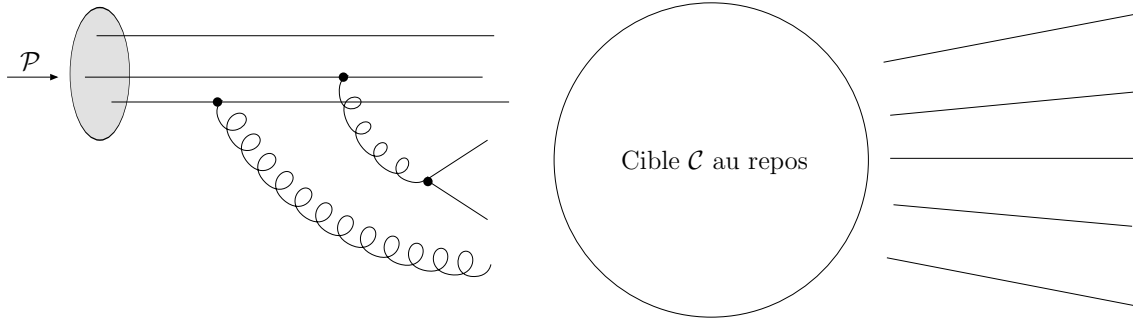


FIG. 2.5 – Représentation de la diffraction dans le référentiel où la cible est au repos. Analogie avec l'optique : la cohérence entre les partons qui forment le projectile est détruite par la traversée de la cible.

formalisme introduit ne nous restreint pas au calcul de la section efficace totale. De nombreuses observables peuvent être calculées et exprimées en fonction de l'amplitude de dipôle $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$ ou de corrélateurs tels que $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$. Les solutions des équations B-JIMWLK permettent donc d'établir les prédictions de la QCD à haute énergie pour un grand nombre de sections efficaces. Dans la suite, toujours dans le contexte de la collision d'un onium sur une cible hadronique, nous allons calculer la section efficace diffractive et la section efficace de production de gluons. Nous choisissons ces exemples car ce sont des observables pour lesquelles il existe des données expérimentales, ce qui nous permettra ensuite de tester les prédictions de la QCD à haute énergie.

2.3 Section efficace diffractive

La section efficace diffractive est une partie de la section efficace totale qui mesure seulement des collisions particulières : celles pour lesquelles la cible interagit de manière élastique. Lors d'une collision à haute énergie, l'onium et la cible se dissocient généralement en libérant des particules hadroniques dans l'état final. En fait dans certaines collisions appelées diffractives, la cible ne se dissocie pas et est présente dans l'état final, en compagnie des particules qui proviennent de la dissociation de l'onium. Si le projectile (l'onium) ne se dissocie pas non plus, alors la collision est simplement élastique. Comme dans le cas de la section efficace totale, il n'y a pas d'échelle d'impulsion pour caractériser l'état final. C'est donc toujours la taille de l'onium qui joue le rôle de l'échelle perturbative ($1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg \Lambda_{QCD}$) dans les calculs qui suivent.

L'emploi du terme diffractif est dû à une analogie avec la diffraction en optique. L'analogie devient claire en se plaçant dans le référentiel où la cible est au repos : le projectile est initialement un ensemble cohérent de partons, cette cohérence est détruite par la collision qui interagit différemment avec les différents partons, l'état final est alors formé d'un ensemble incohérent de partons. Ceci est schématisé Figure 2.5. Du point de vue de la cible par contre, l'interaction étant élastique, elle conserve la cohérence des particules qui l'habillent.

Précisons une propriété de l'état final diffractif. Les particules qui proviennent de la dissociation de l'onium ont des rapidités supérieures à y_* . La rapidité de la cible est y_{min} (à l'incertitude sur k_0 près) et il n'y a pas d'autre particule libérée avec une rapidité inférieure à y_* . En effet, la cohérence de la cible habillée étant conservée lors de la collision diffractive, aucune des particules qui l'habillaient ne peut avoir été libérée. L'état final diffractif est donc caractérisé par ce qu'on appelle un gap de rapidité : un intervalle de rapidité vide de particule, que l'on notera $\Delta\eta$. La taille de ce gap est $y_* - y_{min} = Y_C$. Cela signifie qu'avec un choix

de repère particulier, on ne peut calculer la section efficace diffractive que pour une valeur particulière du gap : $\Delta\eta = Y_C$. Avec nos choix de repères asymétriques ($Y_O \ll Y_C$), nous sommes donc limités à des cas où le gap est très large et où il y a très peu de particules dans l'état final : la cible de rapidité y_{min} et les quelques particules provenant de la dissociation de l'onium, de rapidités proches de y_{max} .

Dans le repère $Y_O \simeq 0$, les particules provenant de la dissociation de l'onium sont un quark et un antiquark ; dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou (Y_O non nul), l'état final pourrait aussi contenir en plus ce gluon. En fait, en augmentant Y_O , c'est-à-dire en utilisant des repères dans lequel l'onium est habillé de plus en plus de gluons mous, nous pouvons calculer une section efficace diffractive avec un nombre de particules dans l'état final de plus en plus important. Nous verrons plus tard que la masse invariante de ce système de particule augmente comme $e^{Y_O/2}$. Il se trouve que les masses accessibles expérimentalement correspondent à des valeurs de Y_O relativement petites et à des états finals comprenant (en plus de la cible) un quark et un antiquark et éventuellement un gluon.

Pour calculer la section efficace diffractive, il nous faut tout d'abord isoler les états finals qui y contribuent, c'est-à-dire ceux qui contiennent la cible. Notons $|\Psi_{diff}\rangle$ l'état correspondant. Pour obtenir $|\Psi_{diff}\rangle$, nous projetons l'état de système après la collision $|\Psi_{out}\rangle$ sur le sous espace des états contenant la cible \mathcal{C} :

$$|\Psi_{diff}\rangle = |\mathcal{C}\rangle\langle\mathcal{C}|(|\Psi_{out}\rangle - |\Psi_{in}\rangle) . \quad (2.35)$$

Nous avons aussi soustrait $|\Psi_{in}\rangle$ de $|\Psi_{out}\rangle$, pour ne pas compter le cas où l'état final est identique à l'état initial, ce qui ne contribue pas à la section efficace car il n'y a pas eu d'interaction.

Plaçons nous dans le repère où l'onium est nu. L'état $|\Psi_{out}\rangle$ est alors donné par la formule (2.19) et pour l'état final contribuant à la section efficace diffractive nous obtenons :

$$|\Psi_{diff}\rangle = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \langle -T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} |(k^+, \mathbf{x}, \alpha), (P^+ - k^+, \mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle . \quad (2.36)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé

$$\left\langle \left[W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} - \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \right\rangle_Y = \left\langle \text{Tr} \left(W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x}) \right) - N_c \right\rangle_Y \frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{N_c} = \langle -T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y \delta_{\alpha\bar{\alpha}} . \quad (2.37)$$

Ceci découle d'une propriété de la fonction d'onde de la cible $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$, qui nous le rappelons intervient par l'intermédiaire de la moyenne $\langle . \rangle_Y$: effectuer la moyenne d'une quantité non invariante de jauge donne un résultat nul. Cette propriété est à l'origine de la première égalité dans l'équation (2.37) car seules les traces (sur les indices de couleur) de lignes de Wilson sont invariantes de jauge. Nous ne démontrons pas ici que $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ possède cette propriété mais considérons plutôt qu'elle est imposée par des considérations physiques. Notamment, cela assure que les quantités physiques que nous calculons sont invariantes de jauge. Nous signalons que l'état (2.36) peut aussi s'obtenir d'une autre manière, sans utiliser l'égalité (2.37). Cela se fait en projetant explicitement la paire quark-antiquark de l'état final $|\Psi_{out}\rangle$ sur un sous-espace singlet de couleur. Ceci doit être le cas car l'état final doit être globalement singlet de couleur, et la cible l'est évidemment.

Comme manifeste dans la formule (2.36), l'état final diffractif que nous avons calculé ne contient que trois particules : le quark et l'antiquark provenant de la dissociation de l'onium, et la cible. Si nous avons travaillé dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou, avec l'état (2.27) au lieu de (2.19), l'état final aurait aussi pu contenir en plus ce gluon. Mais concentrons nous pour l'instant sur le cas où l'état final contient seulement un quark et un

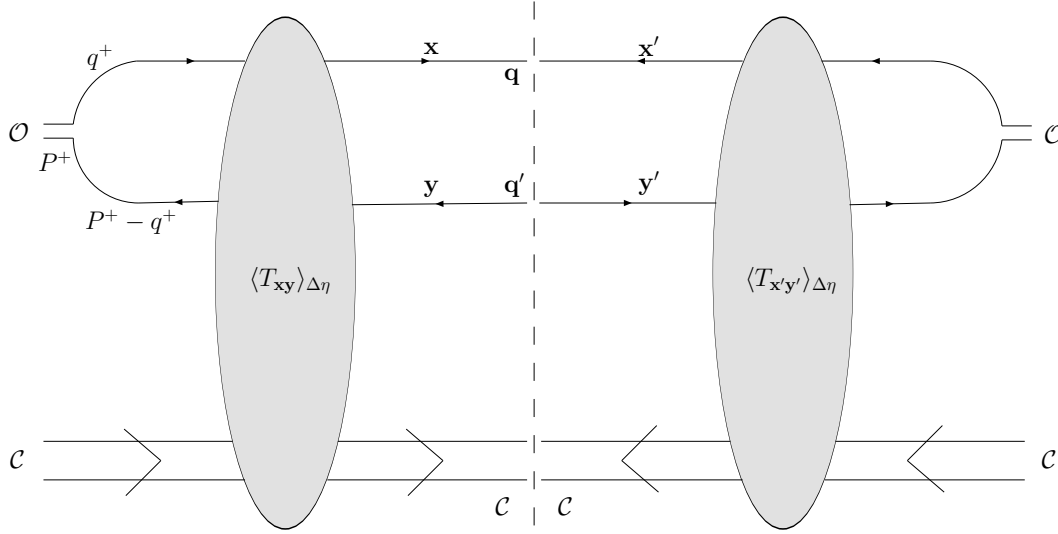


FIG. 2.6 – La section efficace diffractive dans la collision de l'onium \mathcal{O} sur la cible \mathcal{C} . Ce schéma montre la factorisation exprimée par la formule (2.43).

antiquark en plus de la cible. La section efficace est obtenue à partir de $|\Psi_{diff}\rangle$ de la manière suivante :

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d^3q d^3q'} = \langle \Psi_{diff} | N_q(q) N_{\bar{q}}(q') | \Psi_{diff} \rangle . \quad (2.38)$$

La section efficace est différentielle par rapport aux tri-impulsions des particules finales, q dénotant l'impulsion du quark et q' celle de l'antiquark. L'impulsion finale de la cible est fixée par la conservation de l'impulsion totale et n'apparaît donc pas dans (2.38). Les opérateurs N_q et $N_{\bar{q}}$ comptent le nombre de quarks et d'antiquarks dans l'état $|\Psi_{diff}\rangle$. Ils s'écrivent en termes des opérateurs de création et d'annihilation :

$$N_q(q) = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger}(q) b_{\alpha}(q) , \quad (2.39)$$

$$N_{\bar{q}}(q) = \sum_{\bar{\alpha}} d_{\bar{\alpha}}^{\dagger}(q) d_{\bar{\alpha}}(q) . \quad (2.40)$$

Une définition complète contiendrait aussi les degrés de liberté de spin, mais comme ils ne sont pas indiqués explicitement dans $|\Psi_{diff}\rangle$, nous les omettons aussi sur les opérateurs b_{α} et $d_{\bar{\alpha}}$.

Utilisons maintenant l'espace mixte, dans lequel est exprimé $|\Psi_{diff}\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{diff}}{d^3q d^3q'} &= \int \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{x}'}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y})} \\ &\quad \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \langle \Psi_{diff} | b_{\alpha}^{\dagger}(q^+, \mathbf{x}') d_{\bar{\alpha}}^{\dagger}(q'^+, \mathbf{y}') b_{\alpha}(q^+, \mathbf{x}) d_{\bar{\alpha}}(q'^+, \mathbf{y}) | \Psi_{diff} \rangle . \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'action de b_{α} et $d_{\bar{\alpha}}$ sur $|\Psi_{diff}\rangle$ s'écrit

$$b_{\alpha}(q^+, \mathbf{x}) d_{\bar{\alpha}}(q'^+, \mathbf{y}) |\Psi_{diff}\rangle = -\frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \phi(q^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y \delta(P^+ - q^+ - q'^+) |\mathcal{C}\rangle \quad (2.42)$$

et il est ensuite facile d'obtenir la section efficace, le facteur $\delta(0)$ discuté précédemment étant toujours à remplacer par un facteur $(2\pi)^2$. La fonction $\delta(P^+ - q^+ - q'^+)$ permet d'effectuer

l'intégration sur q'^+ et le résultat final est

$$\frac{d\sigma_{diff}}{d^2\mathbf{q}d^2\mathbf{q}'dq^+} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{x}'}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y})} \phi^*(q^+, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') \phi(q^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \langle T_{\mathbf{x}'\mathbf{y}'} \rangle_{\Delta\eta} \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_{\Delta\eta} . \quad (2.43)$$

Signalons que nous avons remplacé Y (qui dans $|\Psi_{diff}\rangle$ représentait en fait Y_C et donc le choix de repère) par $\Delta\eta$ le gap de rapidité dans l'état final. Pour la section efficace diffractive que nous avons calculée, on a $\Delta\eta \lesssim Y$, la différence étant négligeable dans la limite de haute énergie. Cette différence représente en fait l'intervalle de rapidité sur lequel le quark et l'antiquark sont émis. La formule (2.43) est représentée Figure 2.6. Elle montre une factorisation où des dipôles de tailles différentes interagissent dans l'amplitude et l'amplitude complexe conjuguée. Néanmoins, on voit que c'est la même amplitude de dipôle $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_{\Delta\eta}$ qui intervient dans les sections efficaces totales et diffractives, comme remarqué dans [27, 28, 29, 30].

2.4 Section efficace de production de gluons

Concentrons nous maintenant sur la section efficace de production de gluons. Comme expliqué au Chapitre 1, notre description de la cible en terme d'un champ classique ne nous permet pas de contrôler la cinématique individuelle des particules finales qui l'habillaient avant d'être libérées. On ne peut donc calculer la section efficace de production de gluons que si le gluon est émis avec une rapidité supérieure y_* et décrit comme provenant d'un parton qui habille le projectile. Dans le repère $Y_O \simeq 0$, l'onium est nu à l'ordre dominant en α_s et ne peut contenir un gluon qu'à l'ordre sous-dominant. Il est plus intéressant de nous placer dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou, pour lequel le facteur α_s apparaît accompagné d'un facteur Y_O . Ce gluon dans l'état final aura une rapidité supérieure à y_* mais inférieure à celle du quark ou de l'antiquark. Signalons aussi que son impulsion transverse fournit l'échelle perturbative du problème ($\sim k_0$).

La section efficace est obtenue à partir de $|\Psi_{out}\rangle$ de la manière suivante (nous n'avons pas besoin de retirer $|\Psi_{in}\rangle$ car la production de gluon est forcément inélastique) :

$$\frac{d\sigma}{d^3q} = \langle \Psi_{out} | N_g(q) | \Psi_{out} \rangle \quad (2.44)$$

où l'opérateur N_g compte le nombre de gluons dans l'état $|\Psi_{out}\rangle$. Il s'écrit en termes des opérateurs de création et d'annihilation :

$$N_g(q) = \sum_{c\lambda} a_{c,\lambda}^\dagger(q) a_{c,\lambda}(q) . \quad (2.45)$$

En utilisant la décomposition (2.27) de $|\Psi_{out}\rangle$, il semble que seule la partie $|\Psi_{out}\rangle^2$ contribue au résultat car c'est la seule qui contient a priori un gluon dans l'état final. En fait ce n'est pas tout à fait correct : en procédant ainsi, nous compterions trop de gluons [IV]. En effet une partie des gluons de l'état final ne sont pas mesurables, car ce sont des gluons qui habillent le quark (ou l'antiquark), lui aussi libéré lors de la collision.

Pour isoler les gluons mesurables, décomposons $|\Psi_{out}\rangle$ d'une manière différente de (2.27) :

$$|\Psi_{out}\rangle = |\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}} + |\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g} . \quad (2.46)$$

Cette nouvelle décomposition s'obtient de la manière suivante : $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ contient $|\Psi_{out}\rangle^2$ moins les gluons non mesurables et $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}}$ contient $|\Psi_{out}\rangle^1$ plus les gluons non mesurables.

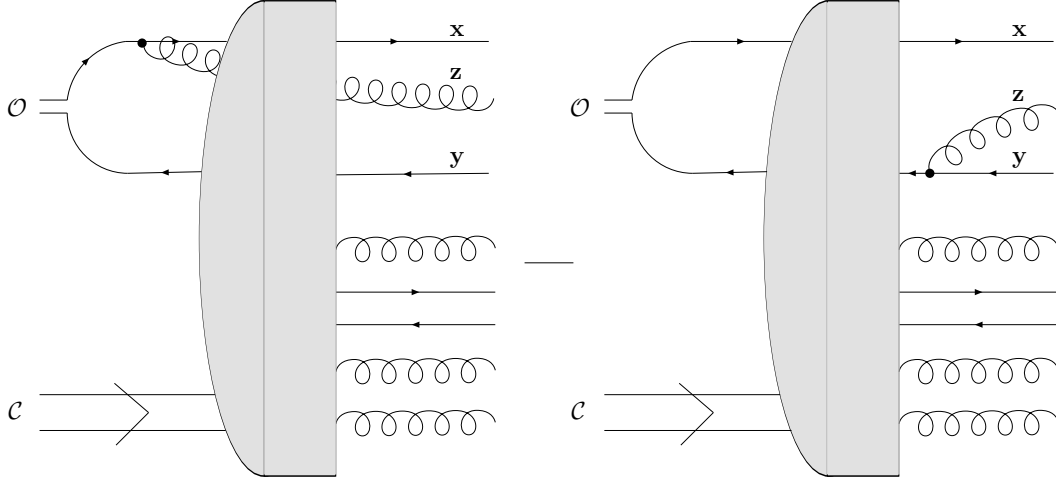


FIG. 2.7 – Représentation de l'état $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$. Deux des 4 contributions sont représentées : le gluon émis par le quark avant l'interaction et le gluon émis par l'antiquark après l'interaction. Cette dernière vient avec un signe moins. Les particules de l'état final non indiquées par une position transverse proviennent du nuage de particules de la cible.

Ces deux contributions sont données par

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}} = & \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \int D\mathcal{A} \Phi_{Y_C}[\mathcal{A}] \sum_{\alpha\bar{\alpha}} \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} \\
 & \left\{ \frac{1}{\sqrt{N_c}} \left(1 - \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} Y_{\mathcal{O}} \int d^2\mathbf{z} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2 (\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \right)^{\frac{1}{2}} |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \right. \\
 & + \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda c} \frac{ig_s}{\sqrt{\pi N_c k'^+}} \left[\sum_{\beta} \frac{\varepsilon_{\lambda} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} T_{\alpha\beta}^c |(\mathbf{x}, \beta), (\mathbf{y}, \bar{\alpha}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle - \right. \\
 & \left. \left. \sum_{\bar{\beta}} \frac{\varepsilon_{\lambda} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2} T_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}^c |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\beta}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \right] \otimes |\mathcal{A}\rangle \right\} \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g} = & \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \int_{z_{\mathcal{O}} P^+}^{P^+} dk'^+ \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \int D\mathcal{A} \Phi_{Y_C}[\mathcal{A}] \sum_{\alpha\bar{\alpha}\lambda c} \frac{ig_s}{\sqrt{\pi N_c k'^+}} \\
 & \left[\frac{\varepsilon_{\lambda} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} \left(\left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) T^d W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} W_A^{dc}[\mathcal{A}](\mathbf{z}) - \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) T^c \right]_{\bar{\alpha}\alpha} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\varepsilon_{\lambda} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2} \left(\left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) T^d W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} W_A^{dc}[\mathcal{A}](\mathbf{z}) - \left[T^c W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} \right) \right] \\
 & |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \otimes |\mathcal{A}\rangle \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Les deux premières lignes de $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}}$ forment $|\Psi_{out}\rangle^1$ et les deux autres lignes représentent les gluons non mesurables, qui habillent le quark ou l'antiquark. En effet, les contributions à $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}}$ qui sont entre accolades peuvent se réécrire simplement $|(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha})\rangle^{Y_{\mathcal{O}}} \otimes |\mathcal{A}\rangle$ qui représente un quark et un antiquark dans le repère caractérisé par $Y_{\mathcal{O}}$ dans lequel ils sont habillés d'un gluon mou.

L'état $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ est l'état à considérer pour le calcul de la section efficace de production de gluons. On y distingue quatre contributions différentes qui ont une signification claire : le terme $\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})$ représente l'émission du gluon par le quark et le terme $\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})$ représente l'émission du gluon par l'antiquark. Pour chacun d'entre eux, la contribution avec trois lignes de Wilson correspond à l'émission du gluon avant l'interaction. Les contributions avec seulement deux lignes de Wilson, qui viennent avec un signe moins, sont les contributions soustraites et réabsorbées dans $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}}$. Elles s'interprètent naturellement comme des contributions où le gluon a été émis après l'interaction. Ceci est représenté Figure 2.7.

2.4.1 Production inclusive de gluons

Commençons par calculer la section efficace de production inclusive de gluons donnée par (2.44) où seule la partie $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ de $|\Psi_{out}\rangle$ contribue. En utilisant l'espace mixte, la section efficace s'obtient par

$$\frac{d\sigma}{d^3q} = \int \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{z}'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{z}'-\mathbf{z})} \sum_{c\lambda}^{q\bar{q}g} \langle \Psi_{out} | a_{c,\lambda}^\dagger(q^+, \mathbf{z}') a_{c,\lambda}(q^+, \mathbf{z}) | \Psi_{out} \rangle^{q\bar{q}g} . \quad (2.49)$$

Dans ce calcul, Y_C est à remplacer par l'intervalle de rapidité sur lequel les particules provenant de la cible sont émises :

$$y_q \equiv \ln(\sqrt{2}q^+/k_0) - y_{min} = Y - \ln(P^+/q^+) . \quad (2.50)$$

La section efficace peut s'écrire sous la forme suivante (après la substitution habituelle de $\delta(0)$ par $(2\pi)^2$)

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q}dq^+} = \frac{4\alpha_s}{\pi^2 N_c} \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y})|^2 \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{z}'-\mathbf{z})} \langle F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{z}') \rangle_{y_q} \quad (2.51)$$

avec la fonction $F[\mathcal{A}]$ donnée par

$$\begin{aligned} F[\mathcal{A}](\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{z}') = & \text{Tr} \left[\left\{ \frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}'|^2} \left(\left[W_F^\dagger(\mathbf{x}) T^e W_F(\mathbf{y}) \right] W_A^{*ec}(\mathbf{z}') - \left[T^c W_F^\dagger(\mathbf{x}) W_F(\mathbf{y}) \right] \right) \right. \right. \\ & - \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}'|^2} \left(\left[W_F^\dagger(\mathbf{x}) T^e W_F(\mathbf{y}) \right] W_A^{*ec}(\mathbf{z}') - \left[W_F^\dagger(\mathbf{x}) W_F(\mathbf{y}) T^c \right] \right) \Bigg\} \\ & \cdot \left\{ \frac{\mathbf{x}-\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} \left(\left[W_F^\dagger(\mathbf{y}) T^d W_F(\mathbf{x}) \right] W_A^{dc}(\mathbf{z}) - \left[W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x}) T^c \right] \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mathbf{y}-\mathbf{z}}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2} \left(\left[W_F^\dagger(\mathbf{y}) T^d W_F(\mathbf{x}) \right] W_A^{dc}(\mathbf{z}) - \left[T^c W_F^\dagger(\mathbf{y}) W_F(\mathbf{x}) \right] \right) \right\} \right] . \quad (2.52) \end{aligned}$$

Dans cette expression, les quatre contributions de l'amplitude (fonctions de \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z}) associées aux quatre contributions de l'amplitude complexe conjuguée (fonctions de \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z}') forment seize termes. Ils contiennent quatre, cinq ou six lignes de Wilsons (pour lesquelles la dépendance en \mathcal{A} est implicite dans (2.52)) et peuvent tous être simplifiés. Les termes contenant a priori six lignes de Wilson sont en fait des traces de deux lignes de Wilson adjointes car les lignes de Wilson fondamentales disparaissent grâce à l'identité : $W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{x}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) = 1$. Pour la même raison, les termes formés de cinq lignes de Wilson n'en contiennent réellement que trois et peuvent être simplifiés en utilisant la formule (1.56) donnée dans l'appendice 1.A. Enfin, les termes contenant quatre lignes de Wilson sont soit égaux à $C_F N_c$, soit réductibles en utilisant la formule (1.57). Finalement, les seize termes de (2.52) ne contiennent tous que deux lignes de Wilson adjointes $W_A[\mathcal{A}]$ et $\langle F \rangle_{y_q}$ peut être exprimée en fonction d'une seule

amplitude : l'amplitude de diffusion d'un dipôle de gluon (gg). Cette amplitude sera notée $\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_{y_q}$ avec

$$\tilde{T}_{\mathbf{xy}}[\mathcal{A}] = 1 - \frac{1}{N_c^2 - 1} \text{Tr} \left(W_A^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_A[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right). \quad (2.53)$$

En utilisant la formule (1.56), on peut facilement relier l'amplitude du dipôle quark-antiquark $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ à l'amplitude du dipôle de gluons $\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$:

$$\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_Y = \frac{N_c^2}{N_c^2 - 1} \left(2 \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xy}}^2 \rangle_Y \right). \quad (2.54)$$

La fonction $\langle F \rangle_{y_q}$ s'écrit en terme de $\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_{y_q}$ de la manière suivante [IV] :

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{z}, \mathbf{z}') \rangle_{y_q} &= C_F N_c \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{z}|^2 |\mathbf{x}_j - \mathbf{z}'|^2} \\ &\times \left(\langle \tilde{T}_{\mathbf{zx}_j} \rangle_{y_q} + \langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i \mathbf{z}'} \rangle_{y_q} - \langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j} \rangle_{y_q} - \langle \tilde{T}_{\mathbf{zz}'} \rangle_{y_q} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

où nous avons utilisé la notation ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_1$) pour pouvoir écrire les seize termes de manière plus compacte. Signalons que cette formule a aussi été obtenue d'une manière différente [31, 32] dans le cas de la collision onium-noyau. Avant de simplifier encore le résultat, on remarque une fois encore que tous ces termes ont une signification simple. Les termes proportionnels à $(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')$ ($i, j = 0, 1$) correspondent à un gluon émis par le quark ou antiquark de position transverse \mathbf{x}_i dans l'amplitude et \mathbf{x}_j dans l'amplitude complexe conjuguée. Pour chacune de ces quatre situations :

- le terme $\langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j} \rangle_{y_q}$ représente une émission après l'interaction à la fois dans l'amplitude et dans l'amplitude complexe conjuguée,
- le terme $\langle \tilde{T}_{\mathbf{zx}_j} \rangle_{y_q}$ représente une émission avant l'interaction dans l'amplitude et après l'interaction dans l'amplitude complexe conjuguée
- le terme $\langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i \mathbf{z}'} \rangle_{y_q}$ représente une émission après l'interaction dans l'amplitude et après l'interaction dans l'amplitude complexe conjuguée,
- le terme $\langle \tilde{T}_{\mathbf{zz}'} \rangle_{y_q}$ représente une émission avant l'interaction à la fois dans l'amplitude et dans l'amplitude complexe conjuguée.

Un de ces termes est représenté Figure 2.8.

On peut encore simplifier l'expression de la section efficace, en l'écrivant

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} = \frac{4\alpha_s}{\pi^2 N_c} \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 \mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \quad (2.56)$$

où nous avons introduit la fonction

$$\mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \int d^2\mathbf{b} \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z})} \langle F \left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{z}, \mathbf{z}' \right) \rangle_{y_q}. \quad (2.57)$$

En effet on remarque que pour chacun des termes de (2.55), une des trois intégrations dans (2.57) peut toujours être faite indépendamment de l'amplitude de dipôle. Ce calcul est expliqué dans l'appendice 2.A, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= C_F N_c \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \left[\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} \delta^{(2)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \ln \left(\frac{\mathbf{r}'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \cdot \left(\frac{2\mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2} - \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2} - \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{(\mathbf{r}' + \mathbf{r})^2} \right) \right] \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q) \end{aligned} \quad (2.58)$$

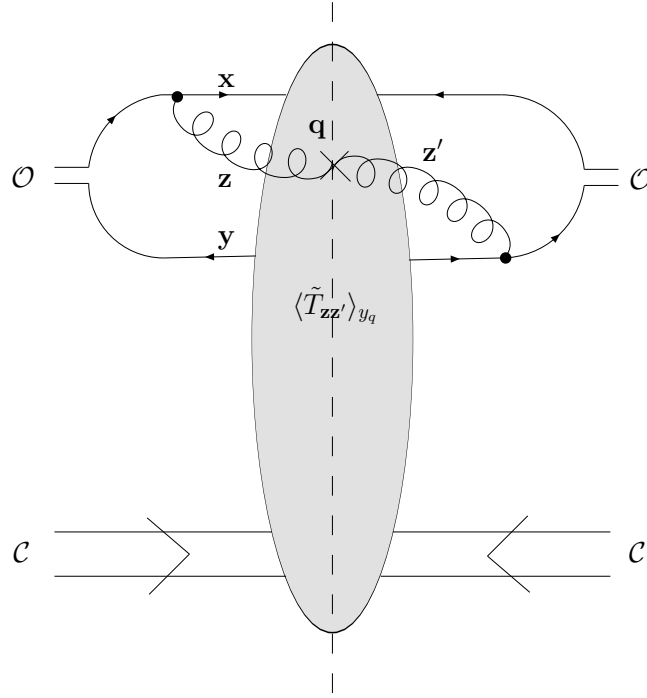


FIG. 2.8 – Section efficace de production inclusive de gluons. Un des seize termes obtenus en mettant l’amplitude dessinée Figure 2.7 au carré est représenté. Le gluon est émis par le quark avant l’interaction dans l’amplitude et par l’antiquark avant l’interaction dans l’amplitude complexe conjuguée. Dans tous les cas l’interaction se réduit à l’interaction effective d’un dipôle de gluons, comme exprimé par les formules (2.51) et (2.55). Seul le gluon dessiné est mesuré mais des particules sont émises sur toute la coupure. Le quark et l’antiquark provenant de l’onium sont émis à des rapidités plus grandes que celle du gluon, les autres particules proviennent de la cible et sont émises à des rapidités plus petites.

où de manière similaire à la formule (2.25), nous avons introduit

$$T_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) = \left\langle \tilde{T}_{(\mathbf{b}+\mathbf{r}/2)(\mathbf{b}-\mathbf{r}/2)} \right\rangle_Y . \quad (2.59)$$

Les formules (2.56) et (2.58) montrent que la dépendance en \mathbf{q} de \mathcal{F}_{y_q} (et donc de la section efficace) s’obtient comme la transformée de Fourier de $T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q)$ multipliée par une fonction connue de \mathbf{r} et de \mathbf{r}' . Ce lien entre la production inclusive de gluon et le dipôle (gg) est apparu dans différents contextes [33, 34, 35, 19]. Après quelques lignes de calcul, on peut factoriser la section efficace de production inclusive de gluons (2.58) de la manière suivante [IV] :

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} = \frac{4\alpha_s C_F}{\pi^2 \mathbf{q}^2} \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \Theta(|\mathbf{r}| - |\mathbf{r}'|) \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q) . \quad (2.60)$$

Le calcul menant à ce résultat est expliqué dans l’appendice 2.A. Il montre qu’en fait la dépendance en \mathbf{q} de la section efficace s’obtient comme la transformée de Fourier de $\nabla_{\mathbf{r}'}^2 T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q)$. Le logarithme $\ln(\mathbf{r}^2/\mathbf{r}'^2)$ de la formule (2.60) joue aussi un rôle important, cela sera repris au Chapitre 5. Rappelons que cette expression n’est valable que pour des gluons émis à grande rapidité ($Y - \ln(P^+/k^+)$ grand) mais aussi tels que $q^+ \ll P^+$.

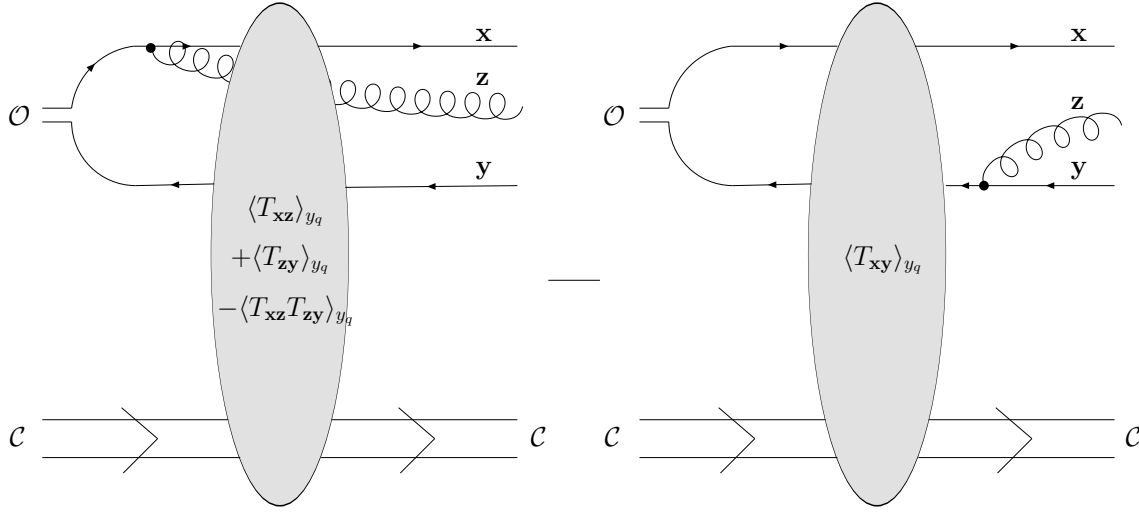


FIG. 2.9 – Représentation de l'état $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$, projection de l'état $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ schématisé Figure 2.7. Deux des quatre contributions de $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$ sont représentées : le gluon émis par le quark avant l'interaction et le gluon émis par l'antiquark après l'interaction. Cette dernière vient avec un signe moins.

2.4.2 Production diffractive de gluons

Calculons pour finir la section efficace de production diffractive de gluons, c'est-à-dire la production de gluons dans les collisions où la cible interagit de manière élastique. Pour cela il nous faut isoler les états finals qui y contribuent. Notons $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$ l'état correspondant, il est obtenu à partir de $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ par la projection

$$|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g} = |\mathcal{C}\rangle\langle\mathcal{C}||\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}. \quad (2.61)$$

Pour obtenir le résultat, nous allons utiliser la propriété suivante :

$$\langle (WW \dots W)_{\alpha\bar{\alpha}}^c \rangle_Y = \left\langle (WW \dots W)_{\beta\bar{\beta}}^d \right\rangle_Y T_{\beta\bar{\beta}}^d \frac{T_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{C_F N_c}. \quad (2.62)$$

C'est une conséquence du fait qu'effectuer la moyenne $\langle \cdot \rangle_Y$ d'une quantité non invariante de jauge donne un résultat nul. Ceci a été discuté plus en détails dans la section 2.3.

En effectuant la projection (2.61), seuls les singlets de couleur $q\bar{q}g$ contribuent à $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$, comme indiqué par (2.62). Par exemple la contribution de la deuxième ligne de la formule (2.48) pour $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ est

$$\begin{aligned} \left\langle \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) T^d W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) \right]_{\bar{\alpha}\alpha} W_A^{dc}[\mathcal{A}](\mathbf{z}) - \left[W_F^\dagger[\mathcal{A}](\mathbf{y}) W_F[\mathcal{A}](\mathbf{x}) T^c \right]_{\bar{\alpha}\alpha} \right\rangle_Y = \\ \frac{N_c}{2C_F} \left(\langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y \right) T_{\bar{\alpha}\alpha}^c. \end{aligned} \quad (2.63)$$

En fait, l'autre partie de $|\Psi_{out}\rangle^{q\bar{q}g}$ (la troisième ligne de la formule (2.48)) donne la même contribution et on obtient

$$\begin{aligned} |\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g} = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} \phi(k^+, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \int dk'^+ \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\bar{\alpha}\lambda c} \frac{ig_s}{\sqrt{\pi N_c k'^+}} \frac{N_c}{2C_F} \\ \left[\frac{\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} - \frac{\varepsilon_\lambda \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2} \right] \left(\langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_{Y_c} - \langle T_{\mathbf{xz}} \rangle_{Y_c} - \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_{Y_c} + \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_{Y_c} \right) \\ T_{\bar{\alpha}\alpha}^c |(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \bar{\alpha}), (\mathbf{z}, c, \lambda)\rangle \otimes |\mathcal{C}\rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

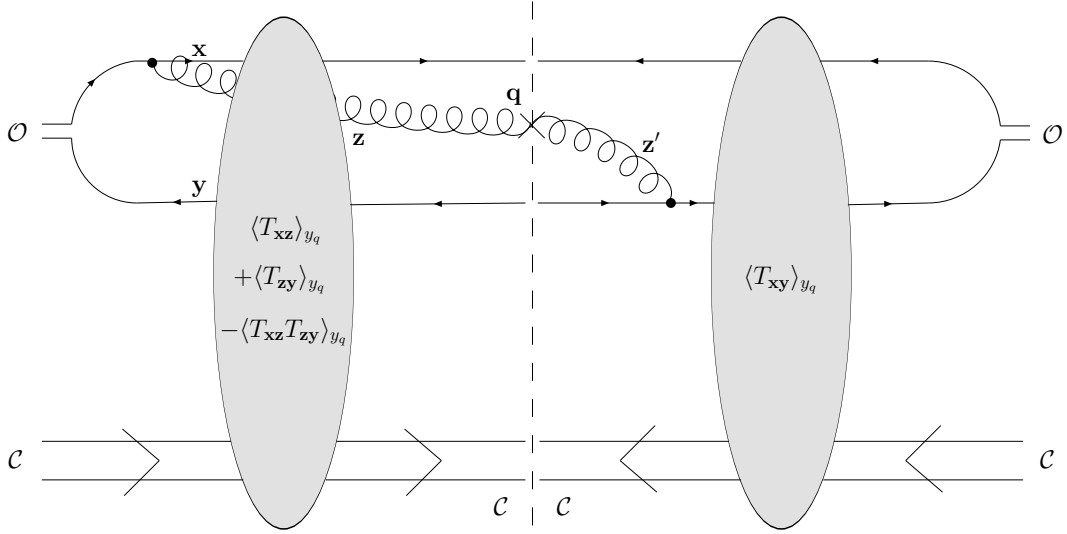


FIG. 2.10 – Section efficace de production diffractive de gluons. Un des seize termes de la formule (2.67) obtenus en mettant l’amplitude dessinée Figure 2.9 au carré est représenté. Le gluon est émis par le quark avant l’interaction dans l’amplitude et par l’antiquark après l’interaction dans l’amplitude complexe conjuguée.

On peut distinguer quatre contributions dans $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$ avec des significations claires. Le terme $\epsilon_\lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})$ représente l’émission du gluon par le quark et le terme $\epsilon_\lambda \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})$ représente l’émission du gluon par l’antiquark. En facteur commun à ces deux situations : la contribution $\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \rangle_{Y_C} + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{Y_C} - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{Y_C}$ correspond à une émission avant l’interaction et la contribution $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_{Y_C}$ correspond à une émission après l’interaction. Ceci est représenté Figure 2.9. Notons que contrairement au cas inclusif, les amplitudes de dipôles sont déjà présentes au niveau de l’amplitude. C’est bien sur dû à la projection (2.61).

La section efficace est obtenue à partir de $|\Psi_{diff}\rangle^{q\bar{q}g}$ de la manière suivante :

$$\frac{d\sigma}{d^3q} = {}^{q\bar{q}g} \langle \Psi_{diff} | N_g(q) | \Psi_{diff} \rangle^{q\bar{q}g} \quad (2.65)$$

ce qui s’écrit dans l’espace mixte

$$\frac{d\sigma}{d^3q} = \int \frac{d^2\mathbf{z}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{z}'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z})} \sum_{c\lambda} {}^{q\bar{q}g} \langle \Psi_{diff} | a_{c,\lambda}^\dagger(q^+, \mathbf{z}') a_{c,\lambda}(q^+, \mathbf{z}) | \Psi_{diff} \rangle^{q\bar{q}g} . \quad (2.66)$$

Dans ce calcul, Y_C est à remplacer par le gap de rapidité $\Delta\eta = \ln(\sqrt{2}q^+/k_0) - y_{min} = Y - \ln(P^+/q^+)$. Le résultat peut s’écrire sous la forme suivante [IV] (avec la substitution habituelle $\delta(0) \rightarrow (2\pi)^2$)

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} = \frac{\alpha_s N_c^2}{4\pi^2 C_F} \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} |\phi(k^+, \mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{\Delta\eta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \quad (2.67)$$

avec l’amplitude $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$ (qui est un vecteur transverse) donnée par

$$\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}} \left[\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \right] \left(\langle T_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \rangle_{\Delta\eta} + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} - \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} \right) . \quad (2.68)$$

Rappelons que ce résultat n'est valable que pour des grands gaps de rapidité ($Y - \ln(P^+/k^+)$ grand) mais aussi pour des gluons tels que $q^+ \ll P^+$. On a déjà signalé que l'amplitude (2.68) pouvait être décomposée en quatre termes. Un des seize termes de la section efficace (2.67) est représenté Figure 2.10. Encore une fois la même amplitude de dipôle $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta}$ intervient dans cette section efficace, mais cette fois le corrélateur $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta}$ intervient aussi.

2.A Factorisation de la section efficace de production inclusive de gluons

Dans cet appendice, nous expliquons comment simplifier la section efficace de production de gluon donnée par (2.56), (2.57) et (2.55). Tout d'abord nous dérivons la formule (2.58) qui donne $\mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ en fonction de $T_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; y_q)$ puis nous obtenons la formule de factorisation finale (2.60) qui relie la dépendance en \mathbf{q} de la section efficace à la transformée de Fourier de $\nabla_{\mathbf{r}'}^2 T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q)$.

Commençons par calculer $\mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ définie par la formule (2.57). Une des trois intégrations (sur \mathbf{b} , \mathbf{z} ou \mathbf{z}') de la fonction $\langle F \rangle_{Y_C}$ peut être faite. En effet cette fonction est donnée en fonction d'amplitudes de dipôles de gluons par la formule (2.55) et on remarque que pour chacun des termes de (2.55), une des trois intégrations est faisable. Pour le terme contenant $\langle \tilde{T}_{\mathbf{z}\mathbf{z}'} \rangle_{y_q}$, l'intégration sur \mathbf{b} donne ($i = (0, 1)$, $j = (0, 1)$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{r}/2$ et $\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{r}/2$)

$$\int \frac{d^2\mathbf{b}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z})^2 (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')^2} = \ln \left(\frac{\rho}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j + \mathbf{z}' - \mathbf{z}|} \right) \quad (2.69)$$

puis on peut effectuer le changement de variable $\mathbf{r}' = \mathbf{z} - \mathbf{z}'$ et $\mathbf{b} = (\mathbf{z} + \mathbf{z}')/2$. ρ est une coupure ultraviolette nécessaire car l'intégrale (2.69) est logarithmiquement divergente. Naturellement ceci est dû à notre manière de séparer les différents termes de (2.55) et ρ disparaîtra quand nous les regrouperons. Pour le terme contenant $\langle \tilde{T}_{\mathbf{z}\mathbf{x}_j} \rangle_{y_q}$, l'intégration sur \mathbf{z}' donne

$$\int \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z})} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z})^2 (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')^2} = \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{z})}{i\mathbf{q}^2 (\mathbf{x}_i - \mathbf{z})^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z})} \quad (2.70)$$

puis on peut effectuer le changement de variable $\mathbf{r}' = \mathbf{z} - \mathbf{x}_j$. Pour le terme contenant $\langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i\mathbf{z}'} \rangle_{y_q}$, l'intégration sur \mathbf{z} donne

$$\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z})} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z})^2 (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')^2} = \frac{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{\mathbf{q}^2 (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{x}_i)} \quad (2.71)$$

puis on peut effectuer le changement de variable $\mathbf{r}' = \mathbf{x}_i - \mathbf{z}'$. Enfin pour le terme contenant $\langle \tilde{T}_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j} \rangle_{y_q}$, les intégrations sur \mathbf{z} et \mathbf{z}' donnent

$$\int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z})} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{z})^2 (\mathbf{x}_j - \mathbf{z}')^2} = \frac{1}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \quad (2.72)$$

puis on peut utiliser une fonction $\delta^{(2)}(\mathbf{r}' - \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$ pour rétablir l'intégrale sur \mathbf{r}' . En regroupant les différents morceaux et en effectuant ensuite explicitement les sommes sur i et j (la coupure ρ présente dans les logarithmes disparaît à cette occasion), on obtient le résultat (2.58) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = & C_F N_c \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \left[\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2} \delta^{(2)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \ln \left(\frac{\mathbf{r}'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2i\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \cdot \left(\frac{2\mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2} - \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2} - \frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}}{(\mathbf{r}' + \mathbf{r})^2} \right) \right] \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q) . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Pour aller plus loin et obtenir la formule (2.60), nous utilisons le fait que la fonction $|\phi(k^+, \mathbf{r})|^2$ ne dépend pas de l'angle polaire du vecteur transverse \mathbf{r} . Nous verrons que c'est

le cas dans le Chapitre 4 où un calcul explicite d'une telle fonction d'onde est réalisé. En prenant le vecteur \mathbf{q} comme référence pour les angles polaires, il est possible d'intégrer la fonction \mathcal{F}_{y_q} par rapport à $\theta_{\mathbf{r}\mathbf{q}}$, l'angle entre les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{q} . Pour cela nous utilisons les intégrales angulaires suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}\mathbf{q}}}{2\pi} \ln \left(\frac{\mathbf{r}'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'||\mathbf{r}+\mathbf{r}'|} \right) = \Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \ln \left(\frac{\mathbf{r}'^2}{\mathbf{r}^2} \right), \quad (2.74)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{r}\mathbf{q}}}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \left(\frac{2\mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2} - \frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^2} - \frac{\mathbf{r}'+\mathbf{r}}{(\mathbf{r}'+\mathbf{r})^2} \right) = 2\Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2}. \quad (2.75)$$

Elles permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta_{\mathbf{r}\mathbf{q}} \mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 2C_F N_c \int d^2\mathbf{r}' d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \left\{ \Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \left[\frac{2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{\mathbf{q}^2} \delta(\mathbf{r}'^2 - \mathbf{r}^2) \right\} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q). \quad (2.76) \end{aligned}$$

En utilisant l'espace de Mellin, on remarque que :

$$\begin{aligned} \Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \left[\frac{2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right) \right] + \frac{2}{\mathbf{q}^2} \delta(\mathbf{r}'^2 - \mathbf{r}^2) = \\ \int \frac{d\lambda}{2i\pi} \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right)^\lambda \left[\frac{2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\lambda \mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{2}{\mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} \right] \quad (2.77) \end{aligned}$$

où le contour d'intégration pour la variable complexe λ longe l'axe imaginaire en passant à droite de l'origine. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \int \frac{d\lambda}{2i\pi} \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right)^\lambda \left[\frac{2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\lambda \mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{2}{\mathbf{q}^2 \mathbf{r}'^2} \right] = \int \frac{d\lambda}{2i\pi} \frac{1}{2\mathbf{q}^2 \lambda^2} \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \left[e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right)^\lambda \right] \\ = \frac{1}{2\mathbf{q}^2} \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \left[e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right) \right] \quad (2.78) \end{aligned}$$

et obtenir le résultat

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{\mathbf{r}\mathbf{q}} \mathcal{F}_{y_q}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \frac{C_F N_c}{\mathbf{q}^2} \int d^2\mathbf{r}' d^2\mathbf{b} \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \left[e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \Theta(|\mathbf{r}|-|\mathbf{r}'|) \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right) \right] T_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; y_q) \quad (2.79)$$

qui mène à la formule finale (2.60).

CHAPITRE 3

Les équations BFKL et BK

Sommaire

3.1	L'équation de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov	52
3.1.1	Le contenu physique de l'équation BFKL	52
3.1.2	Les solutions de l'équation BFKL	53
3.2	Solutions homogènes de l'équation de Balitsky-Kovchegov	54
3.2.1	Le contenu physique des solutions	54
3.2.2	Des solutions asymptotiques de l'équation BK	55
3.3	Solutions générales de l'équation de Balitsky-Kovchegov	60
3.3.1	Résultats analytiques	61
3.3.2	Analyse numérique	63
3.4	Une paramétrisation générique pour les ondes progressives de QCD	64
3.4.1	Une équation effective pour l'amplitude de dipôle	64
3.4.2	Ondes progressives génériques	65
3.4.3	Cas d'une constante de couplage mobile	68
3.A	Calcul des valeurs propres du noyau BFKL	69

Dans le chapitre précédent, nous avons dérivé la hiérarchie des équations d'évolution de la QCD vers la limite de haute énergie. L'équation de Balitsky-Kovchegov (BK) résulte d'une approximation de la hiérarchie mais a essentiellement le même contenu physique. C'est une équation fermée qui décrit l'évolution de $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$ avec la rapidité Y . Rappelons que $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$ est l'amplitude de collision d'un dipôle sur la cible hadronique où les vecteurs bidimensionnels \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les positions transverses du quark et de l'antiquark composant le dipôle. Bien qu'apparaissant comme un intermédiaire de calcul, l'amplitude $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$ décrit une situation physique bien définie : la collision d'un objet de nature perturbative sur la cible hadronique. Une telle collision permet de sonder des petites distances de l'ordre de $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1/\Lambda_{QCD}$ à l'intérieur du hadron cible : dans ces conditions le dipôle sonde les quarks et gluons qui composent le hadron. L'équation BK décrit plus particulièrement la transition vers la limite de haute énergie dans laquelle le dipôle est sensible aux effets collectifs dus à la grande densité de gluons dans le hadron.

L'équation BK est formellement obtenue en supposant $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y = \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$ dans le membre de droite de la première équation de Balitsky (2.32), cette simplification a été considérée par Kovchegov [36]. Nous allons écrire l'équation BK pour une amplitude que nous dénoterons $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pour souligner que ces solutions ne sont que des approximations de

$\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$. L'équation BK s'écrit

$$\frac{d}{dY} N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \left[N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right]. \quad (3.1)$$

La première partie discute de l'évolution donnée par la partie linéaire de l'équation BK. La deuxième partie est consacrée à l'étude de solutions homogènes de l'équation BK, nous insisterons sur le fait qu'asymptotiquement de telles solutions sont des ondes progressives. Dans la troisième partie, qui reprend les résultats des articles [VII, VIII] et de l'article de conférence [IX], cette caractéristique est étendue au cas de solutions asymptotiques générales. Enfin, la dernière partie présente les calculs de l'article [XIV] : nous obtenons une paramétrisation générique des solutions de type ondes progressives.

3.1 L'équation de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov

Commençons par étudier l'équation qui est obtenue en ne considérant que la partie linéaire de l'équation BK. Nous écrivons cette équation pour l'amplitude dénotée $\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\frac{d}{dY} \mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} (\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathcal{N}_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - \mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (3.2)$$

Cette équation est équivalente à l'équation dérivée par Balitsky, Fadin, Kuraev et Lipatov [2] (pour une revue, voir [37]), leurs solutions sont identiques (elles sont données plus loin). Pour cette raison, nous appellerons l'équation (3.2) l'équation BFKL.

3.1.1 Le contenu physique de l'équation BFKL

L'équation BFKL est une bonne approximation de l'équation BK quand $N_Y^2 \ll N_Y$, c'est-à-dire quand $N_Y \ll 1$. Cela correspond à une situation pour laquelle les effets de densité dans la cible ne sont pas importants. Autrement dit, l'équation BFKL décrit l'évolution de l'amplitude de diffusion d'un dipôle sur une cible hadronique décrite par un classique tel que $g_s \mathcal{A} \ll 1$. Développons $T_{\mathbf{xy}}[\mathcal{A}]$ à l'ordre le plus bas par rapport à g_s (voir la formule (2.21)) :

$$T_{\mathbf{xy}}[\mathcal{A}] = \frac{\pi \alpha_s}{N_c} \int dx^+ dy^+ (A_c^-(x^+, \mathbf{x}) - A_c^-(x^+, \mathbf{y})) (A_c^-(y^+, \mathbf{x}) - A_c^-(y^+, \mathbf{y})) + \mathcal{O}(g_s^2 \mathcal{A}^2). \quad (3.3)$$

Dans une situation où $g_s \mathcal{A} \ll 1$, la resommation des ordres supérieurs est inutile et nous obtenons ainsi que l'amplitude \mathcal{N}_Y qui obéit à l'équation BFKL est donnée par

$$\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{N_c} (f_Y(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_Y(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2f_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad (3.4)$$

avec

$$f_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha_s \left\langle \int dx^+ dy^+ \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}) \mathcal{A}_c^-(y^+, \mathbf{y}) \right\rangle_Y. \quad (3.5)$$

L'amplitude de diffusion \mathcal{N}_Y est donc donnée en termes d'une fonction f_Y qui reflète la densité de gluons dans la cible. Ceci a une interprétation claire : comme $g_s \mathcal{A} \ll 1$, la densité de gluon dans la cible est faible ($f_Y \ll 1$) et les effets collectifs sont négligeables. Les différents gluons interagissent de manière incohérente avec le dipôle.

Dans ce régime $N_Y = \mathcal{N}_Y \ll 1$ qu'on appelle le régime dilué, il est inutile de décrire la cible en terme d'un champ classique. Si nous avons décrit la cible de la même manière que

nous avons décrit le projectile, en utilisant une description en termes d'états de Fock du type (1.18), nous aurions pu obtenir l'équation BFKL. Elle a d'ailleurs aussi été dérivée dans ce contexte [38, 39]. Pour obtenir l'équivalent de la densité de gluon f_Y avec une description pour $|\mathcal{C}\rangle$ du type (1.18) au lieu de (1.35), il faut considérer la quantité

$$\int dk^+ \sum_{c,\lambda} {}^{yc} \langle \mathcal{C} | a_{c,\lambda}^\dagger(k^+, \mathbf{x}) a_{c,\lambda}(k^+, \mathbf{y}) | \mathcal{C} \rangle {}^{yc}. \quad (3.6)$$

En la calculant dans deux repères différents, il est possible de dériver une équation d'évolution : l'équation BFKL.

Le fait que la description (1.35) permette de retrouver cette équation représente un des succès de notre approche : elle est adaptée pour décrire à la fois le régime dilué $g_s \mathcal{A} \ll 1$, et le régime dense $g_s \mathcal{A} \sim 1$. En particulier, l'équation BK est particulièrement bien adaptée pour décrire la transition entre les deux régimes.

3.1.2 Les solutions de l'équation BFKL

L'équation (3.2) est linéaire et facilement soluble, car les fonctions propres du noyau de l'équation sont connues [40, 41]. Elles sont indexées par un entier relatif n , qu'on appelle le spin conforme, et par une variable réelle ν . En utilisant une représentation complexe des vecteurs transverses :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \rightarrow \mathbf{x} = (x, \bar{x}) \text{ avec } x = x_1 + ix_2, \quad \bar{x} = x_1 - ix_2, \quad (3.7)$$

les fonctions propres sont données par

$$E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{x-y}{x \ y} \right)^h \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x} \ \bar{y}} \right)^{\tilde{h}} \quad (3.8)$$

où n et ν ont été regroupés dans h et \tilde{h} :

$$h = \frac{1}{2} + i\nu + \frac{n}{2}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{2} + i\nu - \frac{n}{2}. \quad (3.9)$$

Les valeurs propres correspondantes sont notées $\chi(n, \nu)$:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + E_{n,\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \chi(n, \nu) E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.10)$$

et sont données par (une dérivation est donnée en appendice) :

$$\chi(n, \nu) = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1+|n|}{2} + i\nu\right) - \psi\left(\frac{1+|n|}{2} - i\nu\right). \quad (3.11)$$

La fonction $\psi(x)$ est appelée fonction digamma, c'est la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$: $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Ainsi, la solution de l'équation BFKL s'écrit de manière générale

$$\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{\bar{\alpha}\chi(n,\nu)Y} E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi_0(n, \nu) \quad (3.12)$$

où les fonctions $\phi_0(n, \nu)$ spécifient la condition initiale.

Dans la limite de haute énergie, l'intégrale sur ν peut être évaluée par la méthode du col. Pour chaque valeur de n , le comportement de l'intégrale est alors $e^{\bar{\alpha}\chi(n,0)Y}$. Quand Y augmente, cette exponentielle est croissante seulement pour le spin conforme nul, qui domine

donc tous les autres dans la limite de haute énergie. Pour cette raison nous ne conserverons dans les solutions de l'équation de BFKL que le spin conforme nul $n = 0$. La solution de l'équation (3.2) s'écrit donc

$$\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \right)^{2\gamma} \phi_0(\gamma) \quad (3.13)$$

où nous utilisons à présent $\gamma = \frac{1}{2} + i\nu$ comme variable d'intégration. La valeur propre $\chi(0, \nu)$ pour spin conforme nul est notée

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma). \quad (3.14)$$

La fonction $\phi_0(\gamma)$ spécifie la condition initiale et contient une échelle a priori non perturbative $Q_0 \sim \Lambda_{QCD}$ qui caractérise la cible hadronique à basse énergie :

$$\phi_0(\gamma) \sim Q_0^{-2\gamma}. \quad (3.15)$$

3.2 Solutions homogènes de l'équation de Balitsky-Kovchegov

Concentrons-nous maintenant sur les solutions de l'équation BK. Nous allons commencer par considérer des solutions que nous appellerons homogènes : des solutions qui ne dépendent que de la taille du dipôle $r \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ et pas du paramètre d'impact $\mathbf{b} = (\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$. Dans une telle situation, le dipôle voit la cible homogène dans le plan transverse.

3.2.1 Le contenu physique des solutions

Nous allons dans un premier temps analyser qualitativement le comportement des solutions $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N_Y(r)$, nous ferons des calculs plus formels par la suite. Commençons par introduire une condition initiale à $Y = Y_0$: $N_{Y_0}(r)$. Dans la limite des dipôles de petites tailles $r \ll 1/\Lambda_{QCD}$, l'amplitude s'annule comme $N_{Y_0} \sim r^2$, c'est la transparence de couleur : quand le dipôle devient ponctuel, il ne voit plus les partons colorés dans le hadron. Par contre, plus la taille du dipôle est grande, plus il interagit : l'amplitude N_Y est fonction croissante de r . La limite d'unitarité impose $N_Y \leq 1$. Pour la condition initiale, l'unitarité est réalisée de manière non perturbative et la limite $N_{Y_0} = 1$ est atteinte pour une taille $r \sim 1/Q_0$. Une paramétrisation possible de la condition initiale est

$$N_{Y_0}(r) = \begin{cases} r^2 Q_0^2 & \text{si } rQ_0 < 1 \\ 1 & \text{si } rQ_0 > 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Etudions maintenant comment cette amplitude évolue avec l'équation BK (3.1). L'équation (3.1) possède deux points fixes : $N_Y = 0$ qui est instable, et $N_Y = 1$ qui est stable. En effet si l'amplitude est très petite mais non nulle, $N_Y \ll 1$ et on peut négliger dans l'équation (3.1) le terme non linéaire (c'est justifié au début de l'évolution tant que $N_Y \gg N_Y^2$). L'équation restante est alors une équation linéaire du type $dN_Y/dY \propto N_Y$ et l'amplitude augmente exponentiellement avec la rapidité : $N_Y \sim e^Y$. Quand N_Y devient de l'ordre de 1, le terme non linéaire devient important et joue son rôle, il stoppe la croissance de N_Y : quand $N_Y \rightarrow 1$, $dN_Y/dY \rightarrow 0$ et la croissance de l'amplitude s'arrête à $N_Y = 1$, point fixe stable de l'équation.

La solution $N_Y(r)$ est donc une courbe croissante en fonction de la taille r comprise entre 0 (petites tailles) et 1 (grandes tailles), et une fonction croissante de la rapidité. Ceci est schématisé figure 3.1. Pour chaque valeur fixée de la rapidité Y , appelons $r_s(Y)$ la taille à partir de laquelle le terme non-linéaire devient important ; cette taille définit l'échelle d'unitarisation

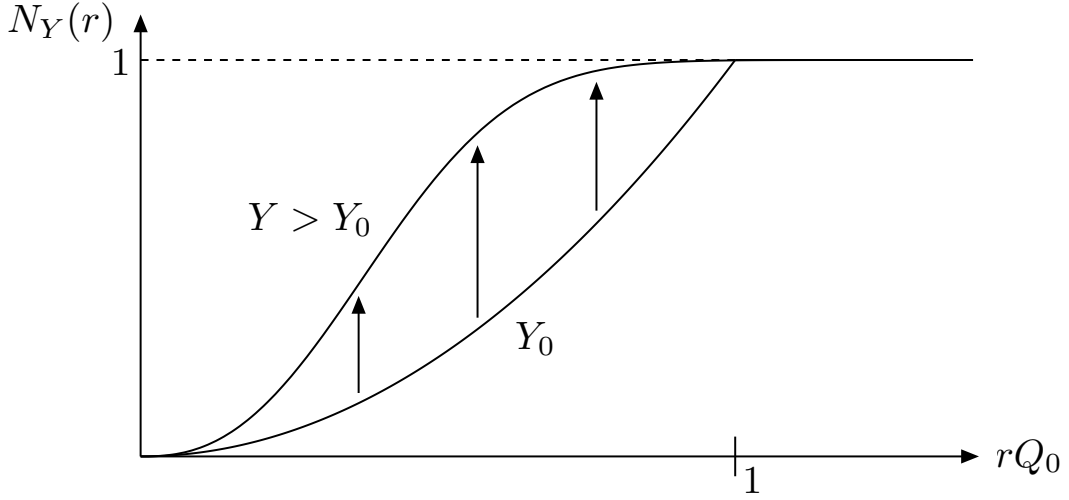


FIG. 3.1 – L'amplitude $N_Y(r)$ en fonction de r . L'évolution BK à partir de la condition initiale $N_{Y_0}(r)$ (voir équation (3.16)) est schématisée par des flèches verticales pour différentes valeurs de r . Le front formé par la solution $N_Y(r)$ se déplace avec la rapidité. L'échelle d'unitarisation, qui pour la condition initiale est non perturbative, augmente avec l'évolution vers de plus grandes rapidités Y .

pour N_Y . L'échelle d'impulsion correspondante $Q_s(Y) = 1/r_s(Y)$ joue un rôle fondamental dans la QCD à haute énergie, elle est appelée l'échelle de saturation. Elle caractérise la transition entre le régime *dilué*, dans lequel l'évolution est décrite par l'équation BFKL, et le régime *dense* (souvent appelé régime de saturation), dans lequel les effets collectifs dus au grand nombre de gluons sont importants. La valeur de Q_s est fonction croissante de la rapidité, ce qui nous amène à notre première conclusion très importante : dans la limite de haute énergie, l'échelle d'unitarisation Q_s rentre dans le domaine perturbatif.

3.2.2 Des solutions asymptotiques de l'équation BK

Nous allons maintenant dériver des résultats plus quantitatifs, notamment les comportements de $N_Y(r)$ de $Q_s(Y)$ pour des rapidités asymptotiques. Pour cela introduisons

$$N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N_Y(r) \equiv r^2 U(r, Y) . \quad (3.17)$$

L'équation BK pour $U(|\mathbf{r}|, Y)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} U(|\mathbf{r}|, Y) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \left[2U(|\mathbf{r}'|, Y) - \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} U(|\mathbf{r}|, Y) \right] \\ - \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{r}' U(|\mathbf{r}'|, Y) U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, Y) . \end{aligned} \quad (3.18)$$

La partie linéaire de l'équation pour U

Dans un premier temps, il est utile de considérer la partie linéaire de l'équation (3.18). Elle peut se réécrire sous une forme qui souligne mieux l'annulation des divergences entre le terme réel et virtuel :

$$\frac{d}{dY} U(|\mathbf{r}|, Y) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \left[U(|\mathbf{r}'|, Y) - \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} U(|\mathbf{r}|, Y) \right] . \quad (3.19)$$

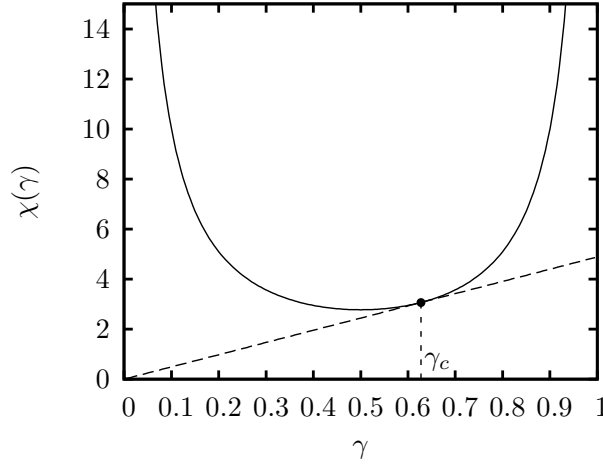


FIG. 3.2 – Représentation de la fonction $\chi(\gamma)$ (voir équation (3.14)), et détermination de γ_c , solution de l'équation (3.27).

En utilisant les intégrales suivantes :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \pi \int \frac{dr'^2}{|r^2 - r'^2|} \quad \text{et} \quad \int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{\mathbf{r}'^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \pi \int \frac{dr'^2}{\sqrt{r^4 + 4r'^4}}, \quad (3.20)$$

il est facile d'effectuer l'intégration angulaire et d'obtenir

$$\frac{d}{dY} U(r, Y) = \bar{\alpha} \int \frac{dr'^2}{r'^2} \left[\frac{r'^2 U(r', Y) - r^2 U(r, Y)}{|r^2 - r'^2|} + \frac{r^2 U(r, Y)}{\sqrt{4r'^4 + r^4}} \right]. \quad (3.21)$$

Cette équation est simplement l'équation BFKL pour des solutions homogènes. Dans ce cas, les fonctions propres du membre de droite de (3.21) sont obtenues en espace de Mellin : $r^{-2\gamma}$ est fonction propre avec la valeur propre $\bar{\alpha}\chi(\gamma)$. Cela a inspiré le fait d'écrire l'équation (3.21) sous la forme compacte

$$\frac{d}{dY} U(r, Y) = \bar{\alpha}\chi(\partial_L) U(r, Y) \quad (3.22)$$

où nous avons introduit $L = -\ln(r^2 Q_0^2)$ qui apparaît comme une variable naturelle du problème. Les solutions de cette équation s'obtiennent de manière immédiate :

$$U^{\text{lin}}(r, Y) = Q_0^2 \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} (r^2 Q_0^2)^{-\gamma} U_0(\gamma). \quad (3.23)$$

Ces solutions peuvent se réécrire pour l'amplitude $N_Y(r)$ de la façon suivante :

$$N_Y^{\text{lin}}(r) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{-\gamma(L-\bar{\alpha}v(\gamma)Y)} U_0(\gamma) \quad (3.24)$$

avec

$$v(\gamma) = \frac{\chi(\gamma)}{\gamma}. \quad (3.25)$$

Ceci permet de faire apparaître que la solution du problème linéaire est une superposition d'ondes progressives. Une onde progressive est une fonction du type $f(L - vY)$ où v représente la vitesse de propagation, cela sera discuté par la suite. Dans la superposition d'ondes (3.24),

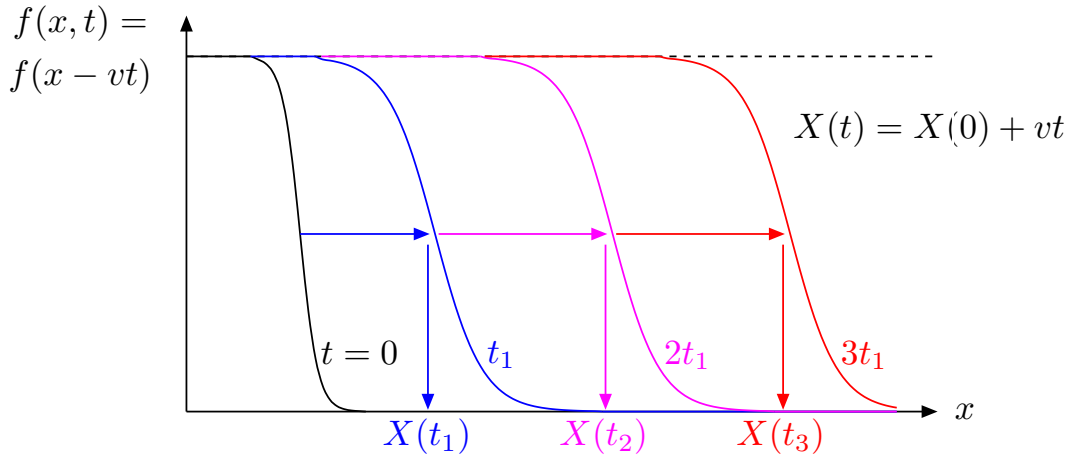


FIG. 3.3 – La fonction $f(x, t)$ en fonction de x pour différentes valeurs de t . Après un certain temps t_1 , l'évolution efface les traces de la condition initiale $f(x, 0)$ et la fonction f devient une onde progressive $f(x - vt)$. Sa propagation est telle que pour différentes valeurs de t , le front de l'onde a toujours la même forme, il est simplement translaté proportionnellement à la différence des temps considérés. Le coefficient de proportionnalité est la vitesse de l'onde.

la vitesse des différentes ondes $\bar{a}v(\gamma)$ dépend de γ . Signalons dès maintenant qu'une des ces vitesses va jouer un rôle important par la suite : la vitesse minimale. Nous la noterons v_c , et elle est obtenue pour une valeur de γ que nous noterons γ_c :

$$v_c = \min(v(\gamma)) = v(\gamma_c) . \quad (3.26)$$

g_c est donc solution de l'équation

$$\frac{\chi(\gamma)}{\gamma} = \chi'(\gamma) \quad (3.27)$$

représentée Figure 3.2 et vaut $g_c \simeq 0.6275$. La vitesse minimale correspondante est $v_c \simeq 4.883$.

Des solutions de type ondes progressives

Revenons maintenant au cas de l'équation complète. Nous allons énoncer des résultats sans les démontrer, puis nous discuterons leur dérivation. La solution asymptotique ($Y \rightarrow \infty$) de l'équation (3.18) est une onde progressive de vitesse particulière. Cette vitesse dépend peu de la condition initiale : elle dépend seulement de son comportement à grand L , ou de manière équivalente à petit r (toute autre information sur la condition initiale disparaît complètement au cours de l'évolution avec Y). Avec la condition initiale

$$N_{Y_0}(r) \sim e^{-\gamma_i L} \text{ quand } L \rightarrow \infty , \quad (3.28)$$

deux situations sont possibles ($\gamma_i > 0$).

- Si $\gamma_i < \gamma_c$, alors la vitesse de l'onde progressive, solution asymptotique de (3.18), est $\bar{a}v_i$ avec $v_i \equiv \chi(\gamma_i)/\gamma_i$. On dit que l'onde est poussée par la condition initiale et nous appellerons ce type de solution le type *front poussé*.
- Si $\gamma_i \geq \gamma_c$, alors la vitesse de l'onde propagatrice, solution asymptotique de (3.18), est $\bar{a}v_c$ avec $v_c = \chi(\gamma_c)/\gamma_c$. On dit que l'onde est tirée par la condition initiale et nous appellerons ce type de solution le type *front tiré*.

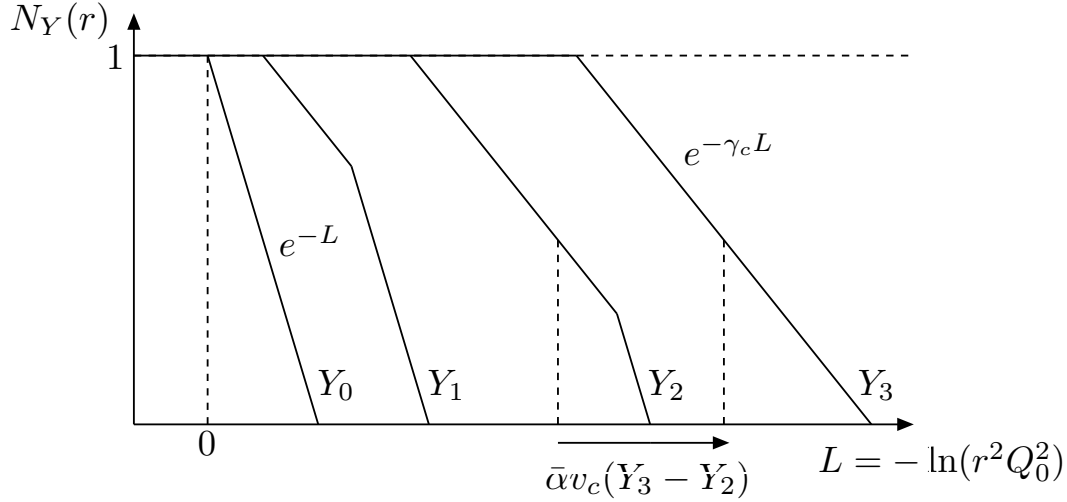


FIG. 3.4 – L’amplitude $N_Y(r)$ solution de l’équation BK (3.18) en fonction de L pour différentes valeurs de Y ($Y_3 > Y_2 > Y_1 > Y_0$). La solution est de type *front tiré* : la condition initiale $N_{Y_0}(r)$ (voir l’équation (3.28)) est petit à petit effacée avec l’évolution pour laisser place à un front en $e^{-\gamma_c L}$. Une fois le régime d’onde progressive atteint, augmenter Y revient à translater le front, la vitesse de l’onde étant $\bar{\alpha} v_c$.

En QCD, nous nous trouvons dans ce deuxième cas (voir la condition initiale (3.16) pour laquelle $\gamma_i = 1$.) et la solution asymptotique de l’équation (3.18) est une onde progressive de vitesse $\bar{\alpha} v_c$: $N_Y(r) = N(L - \bar{\alpha} v_c Y)$. Une onde progressive fait référence à une fonction d’une variable d’espace x et d’une variable de temps t qui est en fait une fonction d’une seule variable : $f(x, t) = f(x - vt)$. En raison de sa dimension, le coefficient v est appelé la vitesse de l’onde. Dans notre problème, la vitesse qui intervient est en fait un nombre sans dimension (c’est un rapport de deux logarithmes), cependant nous l’appelons tout de même une vitesse, en raison de l’analogie présentée ci-dessus. La figure 3.3 décrit les caractéristiques de la propagation d’une onde progressive $f(x - vt)$ comprise entre zéro et un, fonction décroissante de x et fonction croissante de t . Dans notre problème, l’analogie de x est L et l’analogie de t est Y .

En fait $N_Y(r)$ n’est pas partout une onde progressive : dans la limite $L - \bar{\alpha} v_c Y \rightarrow \infty$, on tend vers le régime dilué ($N_Y(r) \rightarrow 0$) où $N_Y(r)$ est donnée par (3.24) qui est une superposition d’ondes progressives. Dans la limite $L - \bar{\alpha} v_c Y \rightarrow -\infty$, on tend vers la limite d’unitarité ($N_Y(r) \rightarrow 1$) et $N_Y(r)$ est une onde progressive de manière évidente. Le résultat non trivial est que partout en dehors de la limite $L - \bar{\alpha} v_c Y \rightarrow \infty$, $N_Y(r)$ est une onde progressive. La transition entre les régimes dilués et denses se fait pour $L \sim \bar{\alpha} v_c Y$, c’est-à-dire autour du milieu du front de l’onde. L’échelle de saturation est ainsi donnée par

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\bar{\alpha} v_c Y}. \quad (3.29)$$

Dans la partie avant du front de l’onde $L \gg \bar{\alpha} v_c Y$, la solution s’écrit

$$N_Y(r) = N(r Q_s(Y)) \sim e^{-\gamma_c (L - v_c Y)} = (r^2 Q_s^2(Y))^{\gamma_c}. \quad (3.30)$$

Ceci est résumé Figure 3.4.

Les résultats que nous venons de donner sont valables asymptotiquement en Y , l’échelle de saturation (3.29) et le front d’onde (3.30) ne contiennent que les termes dominants dans la limite $Y \rightarrow \infty$. De manière remarquable, il existe aussi des résultats sous-asymptotiques

universels, c'est-à-dire qui ne dépendent ni de la forme précise de la condition initiale (mais seulement de son comportement à grand L), ni de la forme du terme non linéaire. Pour l'échelle de saturation, deux corrections sous-asymptotiques sont connues [42] (pour la première, voir aussi [43]) :

$$\ln \left(\frac{Q_s^2(Y)}{Q_0^2} \right) = \bar{\alpha} v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \ln(Y) - \frac{3}{\gamma_c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} \frac{1}{\sqrt{Y}} + \mathcal{O}(1/Y) \equiv \Omega(Y) . \quad (3.31)$$

Dans le cas du front d'onde, la forme de $N_Y(r)$ dans la région $r^2 Q_s^2(Y) \ll 1$ est

$$N_Y(r) \simeq \ln(r^2 Q_s^2(Y)) (r^2 Q_s^2(Y))^{-\gamma_c} \exp \left[-\frac{\ln^2(r^2 Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right] . \quad (3.32)$$

Une de ces corrections sous-asymptotiques nous rappelle que, très en avant du front d'onde (dans la limite $r^2 Q_s^2(Y) \rightarrow 0$), $N_Y(r)$ n'est pas une onde progressive. En effet, le terme en $\ln^2(r^2 Q_s^2(Y))/Y$ provient du régime dans lequel $N_Y(r)$ est donné par (3.24). On dit que ce terme est dû à la *diffusion* BFKL. Il nous permet d'ailleurs de quantifier jusqu'à quel point en avant du front $N_Y(r)$ peut être considéré comme une onde progressive : tant que $r^2 Q_s^2(Y) \gg \exp(-2\gamma_c \bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y)$.

Il est possible de tester ces prédictions avec des simulations numériques de l'équation (3.18) ; les résultats sont montrés Figure 3.5. La figure de gauche représente l'amplitude de dipôle $N_Y(r)$ en fonction de rQ_0 pour plusieurs valeurs de Y , montrant de manière claire que des ondes progressives sont formées au cours de l'évolution en Y . La figure de droite montre la dépendance de l'échelle de saturation en fonction de Y . Cette dépendance est extraite de l'amplitude $N_Y(r)$ en résolvant l'équation $N_Y(1/Q_s(Y)) = C$, différentes courbes correspondant à différentes valeurs de la constante C : 0.001, 0.01, 0.05 et 0.1. On constate que ce choix n'influence pas la vitesse asymptotique, ce qui est dû au fait que $N_Y(r)$ est une onde progressive. La vitesse asymptotique obtenue correspond bien à v_c . Plusieurs groupes ont réalisé des simulations numériques de l'équation BK [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50] et les résultats sont compatibles.

Lien avec l'équation FKPP

Considérons la fonction $\tilde{U}(k, Y)$ définie par

$$\tilde{U}(k, Y) = \int r dr J_0(kr) U(r, Y) = \int \frac{dr}{r} J_0(kr) N_Y(r) \quad (3.33)$$

pour laquelle l'équation BK s'écrit

$$\frac{d}{dY} \tilde{U}(|\mathbf{k}|, Y) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left[2\tilde{U}(|\mathbf{k}'|, Y) - \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2} \tilde{U}(|\mathbf{k}|, Y) \right] - \bar{\alpha} \tilde{U}^2(|\mathbf{k}|, Y) . \quad (3.34)$$

L'avantage d'utiliser la fonction $\tilde{U}(k, Y)$ est que le terme non linéaire de l'équation BK est grandement simplifié. Le terme linéaire a exactement la même forme que celui de l'équation pour $U(r, Y)$, ceci est dû aux propriétés d'invariance conforme du noyau de l'équation BFKL. Les résultats importants donnés ci-dessus ont été dérivés par Munier et Peschanski [42]. Ils ont remarqué que l'équation (3.34) appartenait à la même classe d'équivalence qu'une équation bien connue depuis les années 1930, l'équation de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (FKPP) [51]. Cette équation a été étudiée de manière très approfondie en physique statistique et les résultats présentés ci-dessus ont été obtenus grâce à son équivalence avec les équations de QCD. En fait de manière plus générale, les résultats sont valables pour toute équation d'évolution qui, comme l'équation FKPP, l'équation (3.18) ou l'équation (3.34), satisfait les conditions suivantes.

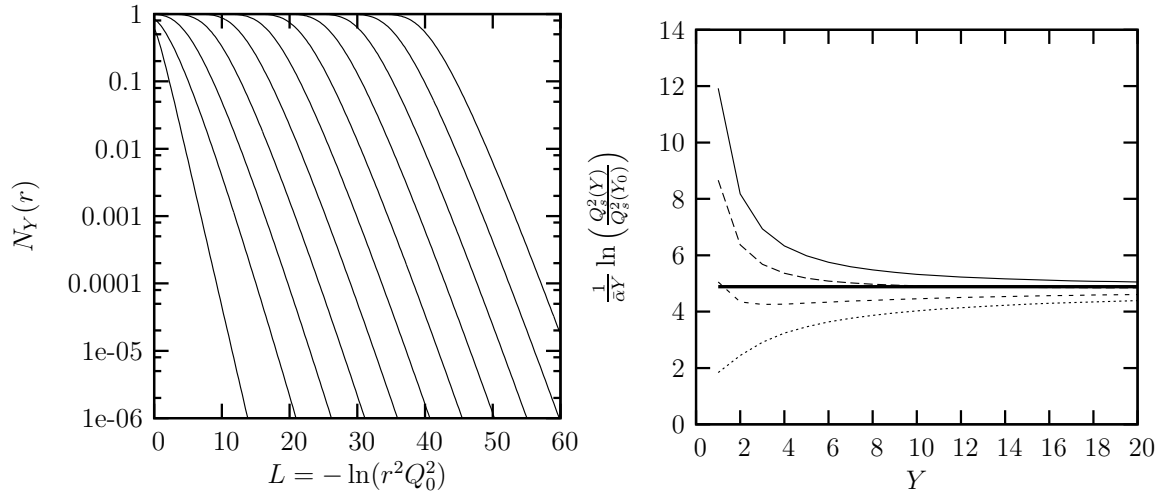


FIG. 3.5 – La figure de gauche est une simulation numérique de l'évolution BK de l'amplitude de dipôle $N_Y(r)$ avec la rapidité Y . $N_Y(r)$ est représentée en fonction de L pour différentes valeurs de Y entre 0 et 10 par intervalles d'une unité. Des ondes progressives sont formées au cours de l'évolution en Y . La figure de droite représente l'échelle de saturation Q_s en fonction de Y et montre qu'asymptotiquement les quatre courbes (obtenues en résolvant l'équation $N_Y(1/Q_s(Y)) = C$ pour $C = 0.001, 0.01, 0.05$ et 0.1) convergent vers une valeur compatible avec $v_c = 4.88$, indiquée par un trait épais.

- $U = 0$ est un point fixe instable dû au fait que la partie linéaire de l'équation provoque la croissance de la solution.
- La solution de la partie linéaire de l'équation est une superposition d'ondes progressives du type (3.24).
- L'équation possède un terme non linéaire (la forme du terme non linéaire peut être quelconque) qui arrête la croissance de la solution.

Dans le cas de l'équation (3.34), la solution de la partie linéaire de l'équation est

$$\tilde{U}^{\text{lin}}(k, Y) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} \left(\frac{k^2}{Q_0^2} \right)^{-\gamma} \tilde{U}_0(\gamma) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{-\gamma(\tilde{L} - \bar{\alpha}v(\gamma)Y)} \tilde{U}_0(\gamma) \quad (3.35)$$

avec $\tilde{L} = \ln(k^2/Q_0^2)$ et la solution asymptotique de l'équation est donc une onde progressive $\tilde{U}(k, Y) = \tilde{U}(\tilde{L} - \bar{\alpha}v_c Y)$. Toutes les caractéristiques données dans le cas de la fonction $U(r, Y)$ (ou $N_Y(r)$) sont aussi valables pour \tilde{U} et pour toute solution d'une équation d'évolution qui satisfait les conditions énoncées ci-dessus, c'est-à-dire qui appartient à la même classe d'équivalence que l'équation FKPP.

3.3 Solutions générales de l'équation de Balitsky-Kovchegov

Nous souhaitons maintenant étudier des solutions plus générales. L'équation BK est une équation pour $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et ne contient pas seulement de l'information sur la dépendance de N_Y avec $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. L'équation complète (3.1) contient aussi de l'information sur la dépendance en $b = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. Il est possible d'extraire une partie de cette information, en utilisant les résultats énoncés ci-dessus : $N_Y = 0$ est un point fixe instable de l'équation BK et $N_Y = 1$ est un point fixe stable. Le seul critère non déterminé est le suivant : les solutions de la partie linéaire de l'équation (3.1) sont-elles des superpositions d'ondes du type (3.24) ? Or nous connaissons ces solutions explicitement, ce sont les solutions de l'équation BFKL dérivée

dans la première section de ce chapitre. En les analysant, nous pouvons déterminer si oui ou non ce dernier critère est rempli.

En fait il est facile de voir que la solution (3.13) n'est pas une superposition d'ondes progressives, sauf dans le cas particulier où $|\mathbf{b}| \gg |\mathbf{r}|$. Mais dans ce cas de larges effets non perturbatifs dûs au confinement sont attendus, et nous n'attendons pas qu'une équation perturbative décrive correctement la collision. D'ailleurs les prédictions en ondes progressives que l'on obtient dans cette limite $|\mathbf{b}| \gg |\mathbf{r}|$ sont explicitement en contradiction avec le confinement, car elles prédisent des solutions asymptotiques qui décroissent comme une loi de puissance avec \mathbf{b} . Ceci a été discuté dans [52, 53, 48, 49] et cela a amoindri les espoirs d'extraire de l'information utile sur la dépendance en paramètre d'impact à partir de l'équation BK. Dans la publication [VII], nous avons trouvé un moyen d'extraire des solutions asymptotiques en ondes progressives, malgré le fait que la solution (3.13) n'est pas une superposition du type (3.24). L'astuce est de passer en espace des impulsions par double transformée de Fourier sur les variables de $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

3.3.1 Résultats analytiques

Définissons la double transformée de Fourier suivante :

$$\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{y}}{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (3.36)$$

En utilisant les formules (3.1) et (3.36), il est possible d'obtenir l'équation BK vérifiée par la fonction \tilde{N}_Y . Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \left\{ \tilde{N}_Y(\mathbf{k}', \mathbf{q}) - \frac{1}{4} \left[\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2}{(\mathbf{q}-\mathbf{k}')^2} + \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2} \right] \tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right\} \\ - \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{2\pi} \tilde{N}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tilde{N}_Y(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{q}-\mathbf{k}') . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Cette nouvelle forme de l'équation BK a été dérivée dans l'article [VIII]. Signalons que les solutions homogènes discutées dans la section précédente $N_Y(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ impliquent en espace d'impulsion $\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{q}) \tilde{U}(|\mathbf{k}|, Y)$ où $\tilde{U}(k, Y)$ est la fonction introduite précédemment qui obéit à l'équation (3.34). Nous retrouvons bien cette équation en prenant $\mathbf{q} = 0$ dans (3.37). Enfin, avec la définition (3.36), \mathbf{q} est la variable conjuguée à \mathbf{b} et $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k} - \mathbf{q}/2$ est la variable conjuguée à \mathbf{r} .

La partie linéaire de cette équation est l'équation BFKL en espace d'impulsion et peut se réécrire sous une forme qui souligne mieux l'annulation des divergences entre le terme réel et virtuel :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \left\{ \tilde{N}_Y(\mathbf{k}', \mathbf{q}) - \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{k})^2}{(\mathbf{q}-\mathbf{k}')^2 + (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2} \right] \tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right\} . \end{aligned} \quad (3.38)$$

En transformant de Fourier la solution de l'équation BFKL en espace des coordonnées (3.13), nous obtenons la solution de l'équation (3.38) en espace des impulsions :

$$\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} f^\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \phi_0(\gamma, \mathbf{q}) \quad (3.39)$$

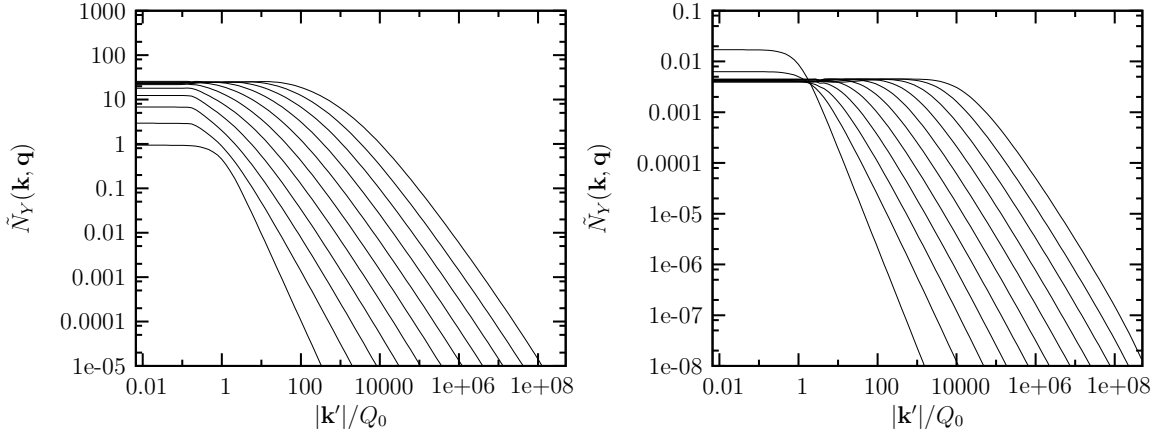


FIG. 3.6 – Simulation numérique de l'évolution BK de l'amplitude de dipôle $\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ avec la rapidité Y . $\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ est représentée en fonction de $|\mathbf{k}'|/Q_0$ pour différentes valeurs de Y entre 0 et 25 par intervalles de 2.5. Pour la figure de gauche $\ln(|\mathbf{q}|/Q_0) = -1$ et pour la figure de droite $\ln(|\mathbf{q}|/Q_0) = 2$. Des ondes progressives sont formées au cours de l'évolution en Y , dans le régime $|\mathbf{k}'|/|\mathbf{q}| \gg 1$.

où la fonction f^γ est donnée par (en utilisant la représentation complexe introduite par les formules (3.7))

$$f^\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + \gamma)} \frac{2}{|k|} \left| \frac{q}{4k} \right|^{2\gamma-1} {}_2F_1\left(\gamma, \gamma; 2\gamma; \frac{q}{k}\right) {}_2F_1\left(\gamma, \gamma; 2\gamma; \frac{\bar{q}}{k}\right) - (\gamma \rightarrow 1 - \gamma). \quad (3.40)$$

Un facteur antisymétrique sous le changement $\gamma \rightarrow 1 - \gamma$ a été absorbé dans $\phi_0(\gamma, \mathbf{q})$. On peut vérifier explicitement que (3.40) est fonction propre du noyau de l'équation (3.38) et a pour valeur propre (3.14), ce résultat est dérivé dans l'appendice du papier [VIII].

Nous pouvons maintenant analyser si la solution (3.39) est une superposition d'ondes progressives. Ceci a été fait en détail dans la publication [VII] et nous avons démontré que c'était le cas dans la limite $|\mathbf{k}| \gg |\mathbf{q}|$. En effet, dans cette limite la fonction hypergéométrique de (3.40) tend vers 1 et $f^\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ devient une simple puissance de $|\mathbf{q}|/|\mathbf{k}|$. La solution de l'équation linéaire devient alors dans cette limite :

$$\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} e^{-\gamma(L_q - \bar{\alpha}v(\gamma)Y)} \phi_0(\gamma, \mathbf{q}) \quad (3.41)$$

avec $L_q = \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{q}^2)$ et où les facteurs non importants ont été une fois de plus absorbés dans $\phi_0(\gamma, \mathbf{q})$. Cette expression montre que les conditions pour obtenir des solutions asymptotiques en ondes progressives sont remplies. Plus précisément, nous prédisons pour $\mathbf{k}^2/(\mathbf{q}^2 e^{\Omega(Y)}) \gg 1$:

$$\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \simeq \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{q}^2 e^{\Omega(Y)}} \right)^{-\gamma_c} \quad (3.42)$$

où l'échelle de saturation est la même que précédemment (voir la formule (3.31)), en dehors de l'échelle d'impulsion qui était fixée par Q_0 et qui maintenant est fixée par $|\mathbf{q}|$. En fait, tout se passe comme dans le cas précédent avec la substitution $Q_0 \rightarrow |\mathbf{q}|$ et on peut montrer que lorsque $|\mathbf{q}|$ devient plus petit que l'échelle caractéristique de la cible Q_0 , c'est Q_0 qui redevient l'impulsion qui entre dans l'échelle de saturation. Q_s est proportionnelle à q seulement quand $q \gg Q_0$. Bien sûr, les comportements sous-asymptotiques (3.31) et (3.32) sont aussi valables.

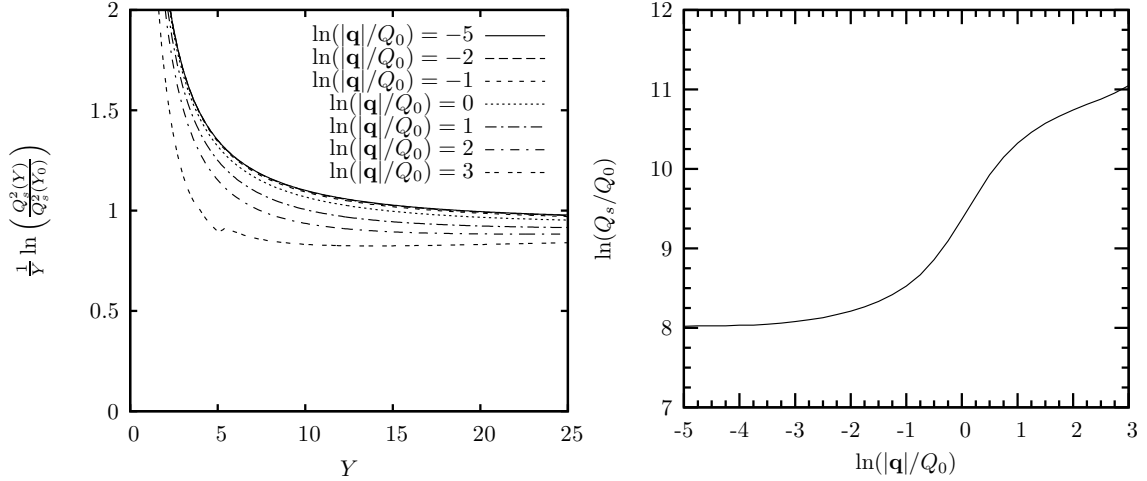


FIG. 3.7 – Ces figures représentent les dépendances de l'échelle de saturation Q_s en fonction de la rapidité Y (figure de gauche) et en fonction de la variable $|\mathbf{q}|$ (figure de droite). La figure de gauche montre qu'asymptotiquement en Y , les différentes courbes convergent vers une valeur compatible avec $\bar{\alpha}v_c = 0.2 \times 4.88 = 0.98$. La figure de droite montre que l'échelle de saturation est proportionnelle à Q_0 si $|\mathbf{q}| < Q_0$, et à $|\mathbf{q}|$ si $|\mathbf{q}| > Q_0$. Le changement de pente pour les grandes valeurs de $|\mathbf{q}|$ n'est pas pertinent, comme signalé dans le texte.

3.3.2 Analyse numérique

Il est possible de tester ces prédictions grâce à des simulations numériques de l'équation (3.37). Les résultats sont montrés Figure 3.6 où l'amplitude $\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ est représentée en fonction de $|\mathbf{k}'|/Q_0$ pour deux valeurs de $|\mathbf{q}|/Q_0$ et plusieurs valeurs de Y . Il est clair que des ondes progressives sont formées au cours de l'évolution en Y , dans le régime $|\mathbf{k}'|/|\mathbf{q}| \gg 1$ (équivalent à $|\mathbf{k}|/|\mathbf{q}| \gg 1$). La manière dont ces résultats numériques ont été obtenus est détaillée dans la publication [VIII]. Signalons par exemple que nous avons fixé $\bar{\alpha} = 0.2$ dans nos simulations.

A partir des résultats numériques présentés Figure 3.6, il est possible d'extraire l'échelle de saturation. Les résultats sont présentés Figure 3.7 où les dépendances de l'échelle de saturation avec Y et \mathbf{q}^2 sont représentées et sont en accord avec les prédictions. Pour obtenir la figure de gauche, l'échelle de saturation a été extraite des résultats de la figure 3.6 et de résultats pour d'autres valeurs de $|\mathbf{q}|/Q_0$, comme indiqué sur le graphe. Asymptotiquement, les courbes convergent vers une unique valeur, compatible avec $\bar{\alpha}v_c = 0.2 \times 4.88 = 0.98$. La figure de droite montre que si $|\mathbf{q}|/Q_0 \ll 1$, alors $Q_s \propto Q_0$ et que pour $|\mathbf{q}|/Q_0 \gg 1$, alors $Q_s \propto |\mathbf{q}|$. La structure en fin de courbe est due au fait que pour les grandes valeurs de $|\mathbf{q}|$, les courbes qui servent à extraire l'échelle de saturation n'ont pas encore atteint le régime asymptotique.

Insistons une fois de plus sur le fait que nos conclusions ne peuvent pas être dérivées en espace de coordonnées et que nos résultats, qui sont valables à \mathbf{q} donné, ne sont pas vrais à paramètre d'impact \mathbf{b} donné. Cela peut être compris assez facilement en regardant les deux versions de l'équation BFKL (3.2) et (3.38). On voit clairement que l'équation (3.38) en espace des impulsions est *locale* en \mathbf{q} alors que l'équation (3.2) en espace de coordonnées couple différentes valeurs du paramètre d'impact. Signalons finalement qu'il n'est pas nécessaire de retourner en espace de coordonnées pour pouvoir utiliser nos résultats, car il existe des observables qui s'expriment directement en fonction de $\tilde{N}_Y(\mathbf{k}, \mathbf{q})$. Dans le cadre de la collision d'un onium sur une cible hadronique discutée dans le chapitre précédent, c'est par exemple le cas de la production diffractive de mésons vecteurs. La variable \mathbf{q}^2 décrit alors le transfert d'impulsion de la cible pendant sa collision élastique.

3.4 Une paramétrisation générique pour les ondes progressives de QCD

Les résultats que nous avons dérivés jusqu'ici ont quelques limitations, qui peuvent remettre en cause leur pertinence pour des applications phénoménologiques. D'une part, nos résultats sont valables asymptotiquement en Y . D'autre part, la forme de la solution (3.32) est seulement correcte en avant du front pour $r^2 Q_s^2 \ll 1$, et ne décrit pas correctement l'approche vers $N_Y(r) = 1$; la transition vers la saturation est en effet plus douce que celle qui est représentée Figure 3.4, comme le montre les simulations numériques de la Figure 3.5 (voir aussi [54]). D'une manière plus générale, l'équation BK est dérivée dans l'approximation des logarithmes dominants, on peut par conséquent douter que nos prédictions quantitatives soient utilisables aux énergies accessibles expérimentalement.

Dans cette section, nous introduisons une version modifiée de l'équation BK [55, XIV], qui permet de traiter les limitations mentionnées ci-dessus. Cette nouvelle équation permet de prendre en compte des effets créés par des logarithmes sous dominants, et elle permet d'exploiter le terme non linéaire de manière plus approfondie que dans l'approche discutée précédemment. Celle-ci obtenait les solutions approchées d'une équation exacte; la méthode que nous allons exposer maintenant consiste à trouver des solutions exactes d'une équation approchée. Nous montrons que l'équation proposée admet des solutions en ondes progressives pour des rapidités non asymptotiques, et nous obtenons une paramétrisation analytique qui décrit la transition vers le régime de saturation.

3.4.1 Une équation effective pour l'amplitude de dipôle

Notre point de départ est de réécrire l'équation (3.34) de la manière suivante :

$$\frac{d}{dY} \tilde{U}(k, Y) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_{\tilde{L}}) \tilde{U}(k, Y) - \bar{\alpha} \tilde{U}^2(k, Y) . \quad (3.43)$$

L'équation BK modifiée que nous allons considérer est la suivante, nous l'écrivons pour une amplitude que nous noterons $T(\tilde{L}, Y)$:

$$\frac{d}{dY} T(\tilde{L}, Y) = \bar{\alpha} \tilde{\chi}(-\partial_{\tilde{L}}) T(\tilde{L}, Y) - \bar{\alpha} T^2(\tilde{L}, Y) . \quad (3.44)$$

Dans cette équation, la fonction $\tilde{\chi}$ est maintenant un polynôme :

$$\tilde{\chi}(-\partial_{\tilde{L}}) = \sum_{p=0}^P A_p (-\partial_{\tilde{L}})^p . \quad (3.45)$$

L'ordre du polynôme P et les coefficients A_p doivent être considérés comme des paramètres pouvant donner lieu à différentes fonctions $\tilde{\chi}$. Nous considérons cette équation pour les raisons suivantes.

- Il est possible de prendre en compte des effets de logarithmes sous dominants de manière effective en modifiant le noyau χ . Différents schémas ont été proposés dans la littérature et le fait d'utiliser un polynôme paramétrable peut permettre de les implémenter.
- Le front d'onde (3.32) est obtenu uniquement à partir d'informations sur la partie linéaire de l'équation (3.18) (le terme non-linéaire doit être présent, mais sa forme peut être quelconque) et c'est la raison pour laquelle il ne peut pas décrire la transition vers le régime de saturation. Pour pouvoir le faire, il faut utiliser de l'information sur le terme non linéaire. En utilisant l'équation (3.44) (et pas l'équation (3.18)), nous avons à manipuler un terme non linéaire dont la forme est plus simple. Signalons d'ailleurs que le point fixe stable de l'équation (3.44) est $T = A_0$, au lieu $N_Y = 1$ dans le cas de l'équation (3.18).

- Il est manifeste sur la formule (3.43) que l'équation BK est une équation différentielle d'ordre infini. En utilisant un polynôme pour la fonction $\tilde{\chi}$, l'ordre de l'équation différentielle (3.44) est fini. Cela simplifie le problème car il est alors possible de résoudre analytiquement l'équation [56, 57, 55]. Pour une certaine classe de polynôme $\tilde{\chi}$ précisée ci-dessous, nous allons dériver des solutions de type ondes progressives pour des rapidités non asymptotiques.

Nous souhaitons considérer des polynômes $\tilde{\chi}$ proches de la fonction originale χ . Pour être plus spécifiques, nous nous limitons à des fonctions $\tilde{\chi}$ définies positives et telles que $A_0 > 0$, $A_1 < 0$ et $A_2 > 0$. Imposons aussi que, tout comme pour χ , l'équation $\tilde{\chi}(\gamma)/\gamma = \tilde{\chi}'(\gamma) > 0$ admette une unique solution $\tilde{\gamma}_c$. Cela assure que l'équation (3.44) admet aussi des solutions asymptotiques qui sont des ondes progressives. Nous noterons la vitesse correspondante \tilde{v}_c .

Signalons des choix possibles pour la fonction $\tilde{\chi}$. Comme c'est un polynôme d'ordre P ($P \geq 2$), elle peut être choisie comme étant la fonction originale χ , développée en série de Taylor autour d'une valeur γ_0 ($0 < \gamma_0 < 1$) et tronquée à l'ordre P . On aurait alors

$$\tilde{\chi}(-\partial_{\tilde{L}}) = \sum_{p=0}^P \frac{\chi^{(p)}(\gamma_0)}{p!} (-\partial_{\tilde{L}} - \gamma_0)^p \quad (3.46)$$

ou bien écrit en termes des coefficients :

$$A_p = \sum_{i=0}^{P-p} (-1)^i \frac{\chi^{(i+p)}(\gamma_0)}{i! p!} \gamma_0^i. \quad (3.47)$$

Un choix naturel pour γ_0 est de prendre $\gamma_0 = \gamma_c$ (ou $\gamma_0 = \gamma_i$ dans le cas de solutions de type fronts poussés). En effet dans ce cas $\tilde{\gamma}_c = \gamma_c$ et $\tilde{v}_c = v_c$, ce qui assure que les solutions de (3.44) ont la même vitesse critique que celles de (3.43).

3.4.2 Ondes progressives génériques

L'équation (3.44) se réécrit :

$$A_0 T(\tilde{L}, Y) - T^2(\tilde{L}, Y) - \left(\frac{1}{\tilde{\alpha}} \partial_Y + A_1 \partial_{\tilde{L}} \right) T(\tilde{L}, Y) + \sum_{p=2}^P (-1)^p A_p \partial_{\tilde{L}}^p T(\tilde{L}, Y) = 0. \quad (3.48)$$

Cherchons des solutions en ondes progressives du type

$$T(\tilde{L}, Y) = A_0 u(s), \quad (3.49)$$

avec la variable d'échelle s donnée par

$$s \equiv \frac{\lambda}{c} \tilde{L} - \left(A_0 + \frac{\lambda}{c} A_1 \right) \tilde{\alpha} Y = \frac{\lambda}{c} (\tilde{L} - \tilde{\alpha} v(c) Y). \quad (3.50)$$

$\lambda = \sqrt{A_0/A_2}$ et c est un paramètre relié à la vitesse de l'onde $v(c)$:

$$v(c) = A_1 + c \sqrt{A_0 A_2}. \quad (3.51)$$

L'équation pour l'onde propagatrice u (comprise entre 0 et 1) devient alors une équation différentielle ordinaire :

$$u(1-u) + u' + \frac{1}{c^2} u'' + \sum_{p=3}^P \frac{(-1)^p}{c^p} \frac{\lambda^p A_p}{A_0} u^{(p)} = 0. \quad (3.52)$$

Les valeurs de $c > -A_1/\sqrt{A_0 A_2}$ pour lesquelles l'équation (3.52) a une solution définissent les vitesses possibles $v(c)$ de la solution (3.49). Il est important d'insister sur le fait que dans notre approche, c est un paramètre libre et donc ajustable. Cela signifie qu'en général, l'équation (3.44) possède un ensemble continu de solutions avec des vitesses différentes. Si nous souhaitons par exemple décrire des solutions asymptotiques, nous savons qu'il faut choisir la valeur de c telle que

$$\begin{cases} v(c) = \tilde{v}_c \equiv \tilde{\chi}'(\tilde{\gamma}_c) & \text{si } \gamma_i \geq \gamma_c \\ v(c) = \tilde{\chi}(\gamma_i)/\gamma_i & \text{si } \gamma_i < \gamma_c \end{cases} . \quad (3.53)$$

En effet une fois la condition initiale fixée, la vitesse asymptotique est \tilde{v}_c ou $\tilde{\chi}(\gamma_i)/\gamma_i$ en fonction du type de solutions (front tiré ou front poussé), comme confirmé par des simulations numériques. Cela dit nous pouvons aussi utiliser la liberté de changer la valeur de c pour étudier des propriétés de solutions non asymptotiques.

L'équation (3.52) est un développement par rapport à $1/c$ (sans terme d'ordre 1). Le point crucial de la méthode de résolution de cette équation est que $1/c$ est petit [56, 57], car les vitesses que nous voulons décrire sont grandes. Ceci nous permet de chercher une solution itérative :

$$h(s) = h_0(s) + \frac{1}{c^2} h_2(s) + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{c^p} h_p(s) \equiv \frac{1}{2} - u(s) . \quad (3.54)$$

En insérant ceci dans (3.52), on obtient la hiérarchie d'équations suivante :

$$\begin{aligned} h'_0 + h_0^2 - 1/4 &= 0 \\ h'_2 + 2h_0 h_2 + h''_0 &= 0 \\ h'_3 + 2h_0 h_3 - \lambda^3 A_3 h'''_0 / A_0 &= 0 \\ h'_4 + 2h_0 h_4 + h''_2 + h''_2 + \lambda^4 A_4 h''''_0 / A_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

où nous avons écrit les équations jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(1/c^5)$. Il est facile de résoudre cette hiérarchie car seule l'équation d'ordre zéro est non linéaire et sa solution est connue. A partir de celle-ci, on peut obtenir les solutions des équations linéaires suivantes par itération. En fixant les conditions initiales de manière appropriée, $h_0(\pm\infty) = \pm \frac{1}{2}$ et $h_{i \neq 0}(\pm\infty) = h_i(0) = 0$, nous obtenons tout d'abord $h_0 = \frac{1}{2} \tanh(\frac{s}{2})$. En utilisant ensuite

$$\frac{d}{ds} h_n(s) + 2h_0 h_n(s) = \frac{1}{\cosh^2(s/2)} \frac{d}{ds} [\cosh^2(s/2) h_n(s)] , \quad (3.56)$$

toutes les autres équations linéaires se réduisent à de simples intégrations. Pour donner un exemple, la solution jusqu'au deuxième ordre est

$$u(s) = \frac{1}{1+e^s} - \frac{1}{c^2} \frac{e^s}{(1+e^s)^2} \ln \left[\frac{(1+e^s)^2}{4e^s} \right] - \frac{\lambda^3}{c^3} \frac{A_3}{A_0} \frac{e^s}{(1+e^s)^2} \left[3 \frac{(1-e^s)}{(1+e^s)} + s \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right) . \quad (3.57)$$

Signalons que si $h(s)$ est solution alors $h(s+s_0)$ est aussi solution ; ceci est une manifestation de l'arbitraire de l'échelle Q_0 (qui intervient dans \tilde{L}).

Les deux premiers termes du développement (les ordres $1/c^0$ et $1/c^2$) (3.57) sont *universels* : ils ne dépendent pas des coefficients A_p . Pour toute fonction $\tilde{\chi}$, l'équation (3.44) admet des solutions en ondes progressives dont les deux premiers termes (dans le développement par rapport à $1/c$) sont ceux de (3.57). Les solutions diffèrent seulement à travers la variable d'échelle s qui dépend des coefficients A_0, A_1 et A_2 (3.50). En ce sens, nous avons obtenu une solution paramétrique générique.

Il existe un moyen de tester l'efficacité de notre solution paramétrique, c'est-à-dire de tester si la troncation du développement (3.57) à l'ordre $1/c^2$ est une bonne approximation.

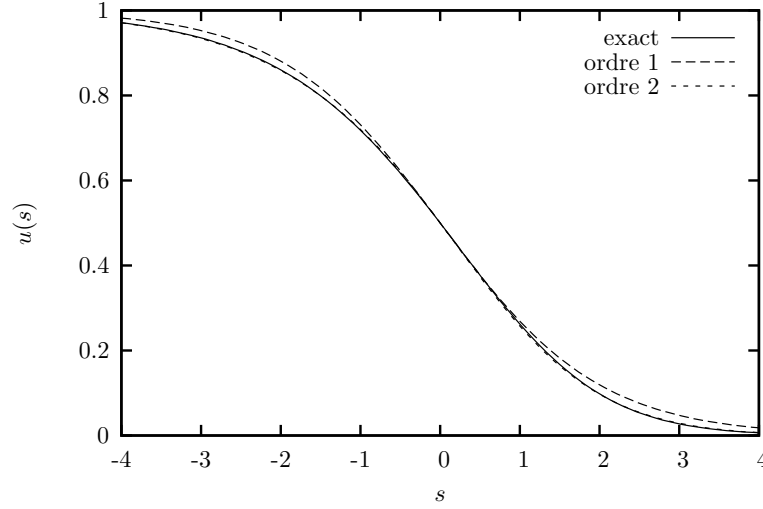


FIG. 3.8 – La fonction $u(s)$ solution de l'équation $u(1-u)+u'+u''/c^2=0$ pour $c=5/\sqrt{6}$ avec $u(-\infty)=1$ et $u(0)=1/2$. La ligne en trait plein est la solution exacte (3.58). La ligne tiretée est la solution (3.57) contenant seulement le premier ordre. La ligne pointillée (difficilement distinguable de la ligne pleine) est la solution (3.57) contenant seulement les deux premiers ordres.

Pour cela, considérons le cas $P = 2$: l'équation $u(1-u) + u' + \frac{1}{c^2}u'' = 0$ admet une solution exacte pour la valeur $c=5/\sqrt{6} \simeq 2.04$. Cette solution est

$$u(s) = \left[1 + (\sqrt{2} - 1) \exp\left(\frac{cs}{\sqrt{6}}\right) \right]^{-2} \quad (3.58)$$

et elle nous permet de montrer que d'utiliser seulement les termes universels est une bonne approximation. En effet sur la Figure 3.8 nous avons représenté la solution exacte (3.58) et nous la comparons avec le développement (3.57) tronqué à l'ordre $1/c$ ou $1/c^2$. Il est très difficile de distinguer la solution exacte de la solution paramétrique générique formée des deux premiers termes de (3.57).

Réécrivons notre solution générique en termes des variables physiques :

$$T(k, Y) = \frac{A_0}{1 + \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right]^{\lambda/c}} - \frac{A_0}{c^2} \frac{\left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right]^{\lambda/c}}{\left(1 + \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right]^{\lambda/c}\right)^2} \log \frac{\left(1 + \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right]^{\lambda/c}\right)^2}{4 \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right]^{\lambda/c}}, \quad (3.59)$$

où $Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp[\bar{\alpha} v(c) Y]$ joue le rôle de l'échelle de saturation. Les paramètres sont les coefficients A_p (rappelons que $\lambda = \sqrt{A_0/A_2}$) et la vitesse de l'onde $v(c) = A_1 + c\sqrt{A_0 A_2}$ fixée par c . La vitesse étant un paramètre, notre solution peut décrire une solution asymptotique de type front tiré (avec $v(c) = \tilde{v}_c$) ou de type front poussé (avec $v(c) = \tilde{\chi}(\gamma_i)/\gamma_i$) ou bien des solutions non asymptotiques, avec des vitesses plus faibles. La solution (3.59) est une onde progressive par construction et nous n'attendons pas qu'elle décrive correctement la limite $k^2/Q_s^2(Y) \gg 1$ dans laquelle des violations de la loi $T(k, Y) = T(k/Q_s)$ sont attendues (voir la formule (3.32)). Par contre, nous attendons qu'elle décrive correctement le domaine de validité de l'onde progressive, en particulier le régime de transition vers la saturation, pour lequel $k \sim Q_s(Y)$.

3.4.3 Cas d'une constante de couplage mobile

Un des effets importants dûs aux logarithmes sous dominants que nous n'avons pas encore pris en compte est le fait que la constante de couplage α_s devient variable à une boucle, c'est à dire qu'elle varie avec l'impulsion transférée de la manière suivante :

$$\frac{N_c}{\pi} \alpha_s(k^2) = \left[b \ln \left(\frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \right]^{-1} \quad \text{avec } b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c} . \quad (3.60)$$

Prendre en compte un tel effet n'est pas simple, même de manière effective. Par exemple, une première approche peut consister à utiliser la même équation BK (3.1) (dérivée dans l'approximation des logarithmes dominants) en remplaçant $\bar{\alpha}$ par la formule (3.60). Mais même cette manière de faire n'est pas sans ambiguïtés car il y a plusieurs choix possibles pour l'échelle d'impulsion à utiliser : on peut choisir $k = 1/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ à l'extérieur de l'intégrale sur \mathbf{z} ou bien $k = 1/|\mathbf{x}-\mathbf{z}|$ et $k = 1/|\mathbf{z}-\mathbf{y}|$ à l'intérieur de l'intégrale.

Dans notre approche qui utilise l'équation effective (3.44), la manière naturelle d'introduire une constante de couplage variable est de choisir $Q_0 = \Lambda_{QCD}$ et de remplacer $\bar{\alpha}$ par $1/(b\tilde{L})$. α_s varie donc avec l'échelle d'impulsion k , qui est une variable de $T(\tilde{L}, Y)$ (rappelons que $\tilde{L} = \ln(k^2/\Lambda_{QCD}^2)$). Notre équation effective avec constante de couplage variable s'écrit donc [XIV]

$$b\tilde{L} \partial_Y T(\tilde{L}, Y) = \tilde{\chi}(-\partial_{\tilde{L}}) T(\tilde{L}, Y) - T^2(\tilde{L}, Y) . \quad (3.61)$$

Tout comme dans le cas précédent, cette équation admet des solutions asymptotiques en ondes progressives [42], mais cette fois de forme $f(\tilde{L} - \sqrt{(2v/b)Y})$ où la vitesse v est toujours v_c pour le type front tiré et $\chi(\gamma_i)/\gamma_i$ pour le type front poussé. En considérant la même fonction $\tilde{\chi}$ que dans la section précédente, l'équation (3.61) devient

$$A_0 T(\tilde{L}, Y) - T(\tilde{L}, Y)^2 - \left(b\tilde{L} \partial_Y + A_1 \partial_{\tilde{L}} \right) T(\tilde{L}, Y) + \sum_{p=2}^P (-1)^p A_p \partial_{\tilde{L}}^p T(\tilde{L}, Y) = 0 . \quad (3.62)$$

Il est possible de trouver des solutions du type

$$T(\tilde{L}, Y) = A_0 u(\tilde{s}) \quad (3.63)$$

en réduisant le problème à celui que nous venons de résoudre. Pour cela il faut choisir la variable \tilde{s} de manière appropriée : en imposant que les termes universels de l'équation pour u soient les mêmes que précédemment, c'est-à-dire $u(1-u)+u'$. Postuler $\tilde{s} = \tilde{L} a(Y/\tilde{L}^2)$ détermine une solution pour la fonction a et donne la variable d'échelle [XIV]

$$\tilde{s} \equiv \tilde{L} \left(-\frac{A_0}{A_1} - \frac{1}{\tilde{c}} \sqrt{b - 2A_1 \frac{Y}{\tilde{L}^2}} \right) \quad (3.64)$$

où \tilde{c} est un paramètre libre. En insérant cela dans (3.62), nous obtenons l'équation suivante pour u :

$$u(1-u) + u' + \sum_{p=2}^P \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^p \frac{A_p}{A_0} u^{(p)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tilde{c}}\right) = 0 \quad (3.65)$$

où les termes dominants dans un développement par rapport à $1/\tilde{c}$ sont bien les mêmes que précédemment. Signalons que les termes d'ordre $\mathcal{O}(1/\tilde{c})$ que nous allons négliger contiennent des violations de la loi d'échelle (3.63) qui décroissent comme $1/\tilde{L}$. En utilisant la méthode introduite dans la section précédente, nous obtenons la solution suivante :

$$u(\tilde{s}) = \frac{1}{1+e^{\tilde{s}}} - \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^2 \frac{A_2}{A_0} \frac{e^{\tilde{s}}}{(1+e^{\tilde{s}})^2} \ln \left[\frac{(1+e^{\tilde{s}})^2}{4e^{\tilde{s}}} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{A_0^3}{A_1^3}\right) \quad (3.66)$$

avec comme paramètre de développement A_0/A_1 .

Pour obtenir la vitesse de l'onde, on écrit qu'à grand Y

$$\tilde{s} \simeq -\frac{A_0}{A_1} \left(\tilde{L} + \frac{A_1}{A_0 \tilde{c}} \sqrt{-2A_1 Y} \right). \quad (3.67)$$

En comparant avec notre définition de la vitesse de l'onde dans le cas des ondes progressives de type $f(\tilde{L} - \sqrt{(2v/b)Y})$, nous obtenons

$$v(\tilde{c}) = -\frac{bA_1^3}{A_0^2 \tilde{c}^2}. \quad (3.68)$$

En ajustant \tilde{c} pour obtenir une vitesse donnée, on peut vérifier que $1/\tilde{c}$ est bien petit. En définissant $\tilde{Q}_s^2(Y) = \Lambda_{QCD}^2 \exp(\sqrt{(2v(\tilde{c})/b)Y})$ qui joue le rôle de l'échelle de saturation, la variable d'échelle peut s'écrire en termes des variables physiques :

$$\tilde{s} = -\frac{A_0}{A_1} \log \left(\frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) - \frac{1}{\tilde{c}} \sqrt{b \log^2 \left(\frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) + \frac{A_0^2 \tilde{c}^2}{A_1^2} \log^2 \left(\frac{\tilde{Q}_s^2(Y)}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}. \quad (3.69)$$

Finalement, en ne gardant que les deux premiers termes de (3.66), nous obtenons

$$T(k, Y) = \frac{A_0}{1+e^{\tilde{s}}} - \frac{A_0^2 A_2}{A_1^2} \frac{e^{\tilde{s}}}{(1+e^{\tilde{s}})^2} \ln \left[\frac{(1+e^{\tilde{s}})^2}{4e^{\tilde{s}}} \right] \quad (3.70)$$

qui, avec (3.69) donne une solution paramétrique de type onde progressive de l'équation (3.62). Signalons que la loi $T(k, Y) = T(k/\tilde{Q}_s(Y))$ n'est obtenue que pour des grandes rapidités.

Les formules (3.69) et (3.70) fournissent une paramétrisation pour l'amplitude de dipôle en espace d'impulsion. Elle est basée sur les prédictions de la QCD à haute énergie dans l'approximation des logarithmes dominants mais prend aussi en compte des effets dus à des logarithmes sous dominants. Cette paramétrisation, qui décrit la transition vers le régime de saturation pour des rapidités pas nécessairement asymptotiques, est bien adaptée pour être utilisée dans des études phénoménologiques. Il serait intéressant d'étudier si la méthode utilisée ici peut être étendue pour obtenir une paramétrisation en espace de coordonnées. Le terme linéaire de l'équation (3.18) est le même mais le terme non linéaire risque d'introduire des complications. De même, il serait aussi très intéressant de traiter le cas de l'équation (3.37) pour obtenir des solutions plus générales, applicables à des processus diffractifs avec transfert d'impulsion non nul.

3.A Calcul des valeurs propres du noyau BFKL

Dans cette appendice, nous donnons une dérivation des valeurs propres (3.11) du noyau de l'équation BFKL (3.2). Nous souhaitons ainsi calculer

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + E_{n,\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]. \quad (3.71)$$

Rappelons que les fonctions propres $E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (données par la formule (3.8)) sont indexées par un entier relatif n et par une variable réelle ν , regroupés dans $h = 1/2 + i\nu + n/2$ et $\bar{h} = 1/2 + i\nu - n/2$. Pour pouvoir séparer l'intégrale (3.71) en morceaux, nous régularisons les divergences ultraviolettes à l'aide de la coupure $\rho : |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, |\mathbf{z} - \mathbf{y}| > \rho$.

Commençons par évaluer l'expression suivante (nous utilisons la représentation complexe des vecteurs transverses (3.7)) :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int \frac{dz d\bar{z}}{4\pi} \frac{|x - y|^2}{|x - z|^2 |z - y|^2} \left(\frac{x - z}{x} \right)^h \left(\frac{\bar{x} - \bar{z}}{\bar{x}} \right)^{\bar{h}} \quad (3.72)$$

où la restriction $|z - y| > \rho$ est sous entendue. Effectuons successivement les changements de variables suivants : $z \rightarrow u = z/x$ et $\bar{z} \rightarrow \bar{u} = \bar{z}/\bar{x}$ (impliquant $|u - y/x| > \rho/|x|$) puis $u \rightarrow v = u/(u - 1)$ et $\bar{u} \rightarrow \bar{v} = \bar{u}/(\bar{u} - 1)$ (impliquant $|(1 - x/y)v - 1| > \tilde{\rho} \equiv \rho|x|/(|x - y||y|)$), puis finalement $v \rightarrow w = (1 - x/y)v$ et $\bar{v} \rightarrow \bar{w} = (1 - \bar{x}/\bar{y})\bar{v}$ (impliquant $|w - 1| > \tilde{\rho}$). Les intégrales sur z et \bar{z} se simplifient alors de la même manière ; traitons le cas de l'intégrale sur z :

$$\begin{aligned} \int dz (x - z)^{h-1} x^{-h} z^{-h} \frac{x - y}{z - y} &= x^{-h} (1 - x/y) \int \frac{du}{1 - u} \left(\frac{1 - u}{u} \right)^h \left(1 - \frac{x}{y} u \right)^{-1} \\ &= x^{-h} (1 - x/y) \int dv (-v)^{-h} \left(v \left(1 - \frac{x}{y} \right) - 1 \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{x - y}{x y} \right)^h \int \frac{dw}{w - 1} w^{-h} . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Nous avons ainsi

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int \frac{dz d\bar{z}}{4\pi} \frac{z^{-h} \bar{z}^{-\bar{h}}}{|1 - z|^2} \quad (3.74)$$

où la restriction $|z - 1| > \tilde{\rho}$ est sous entendue. Introduisons maintenant $z = r e^{i\theta}$ et $\bar{z} = r e^{-i\theta}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int \frac{dz d\bar{z}}{4\pi} \frac{z^{-h} \bar{z}^{-\bar{h}}}{|1 - z|^2} &= \int \frac{r dr d\theta}{2\pi} \frac{r^{-1-2i\nu} e^{-in\theta}}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\ &= \int_0^{1-\tilde{\rho}} r dr \frac{r^{-1-2i\nu+|n|}}{1 - r^2} + \int_{1+\tilde{\rho}}^\infty r dr \frac{r^{-1-2i\nu-|n|}}{r^2 - 1} \\ &= \int_0^{1-\tilde{\rho}} \frac{r dr}{1 - r^2} \left(r^{-1-2i\nu+|n|} + r^{-1+2i\nu+|n|} \right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(1 - \tilde{\rho})^{2k-2i\nu+|n|+1}}{2k - 2i\nu + |n| + 1} + \frac{(1 - \tilde{\rho})^{2k+2i\nu+|n|+1}}{2k + 2i\nu + |n| + 1} . \end{aligned} \quad (3.75)$$

La contribution du terme contenant $E_{n,\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ est identique (sauf pour la coupure $\tilde{\rho}$ dans laquelle il faut échanger x et y) et la contribution du terme contenant $E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} = \ln \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{\rho^2} \right) = 2 \sum_{k=0}^\infty \frac{(1 - \rho/|x - y|)^{k+1}}{k + 1} . \quad (3.76)$$

En regroupant les trois termes, la coupure ρ peut être prise nulle et nous obtenons

$$\int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + E_{n,\nu}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \chi(n, \nu) E_{n,\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.77)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi(n, \nu) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k + 1/2 - i\nu + |n|/2} + \frac{1}{k + 1/2 + i\nu + |n|/2} - \frac{2}{k + 1} \\ &= 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1 + |n|}{2} + i\nu\right) - \psi\left(\frac{1 + |n|}{2} - i\nu\right) . \end{aligned} \quad (3.78)$$

CHAPITRE 4

Phénoménologie appliquée à la diffusion profondément inélastique

Sommaire

4.1	La diffusion profondément inélastique	72
4.1.1	La section efficace inclusive	73
4.1.2	La section efficace diffractive	73
4.2	Le photon virtuel : un exemple d'onium	75
4.2.1	La fonction d'onde du photon : la transition $\gamma \rightarrow q\bar{q}$	75
4.2.2	Collision du photon virtuel sur le proton cible	77
4.3	Des lois d'échelle prédites par la QCD à haute énergie	79
4.3.1	Pour la section efficace totale	80
4.3.2	Pour la section efficace diffractive	82
4.4	La production diffractive de gluon	84
4.4.1	Quelques estimations analytiques générales	84
4.4.2	Prédictions du modèle GBW	85
4.A	Dérivation de l'amplitude $A_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ dans le cadre du modèle GBW	89

Les expériences de diffusion profondément inélastique réalisent pour une grande part des collisions entre un photon virtuel et un proton, très similaires aux collisions étudiées dans le Chapitre 2. On y mesure des observables qui sont appropriées à l'étude phénoménologique de la limite de haute énergie de QCD. Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats du Chapitre 3 pour établir des prédictions pour ces observables, et nous comparons ces prédictions avec les données expérimentales disponibles.

La première partie présente la diffusion profondément inélastique en introduisant les variables cinématiques du problème et les sections efficaces inclusive et diffractive qui sont mesurées dans les expériences. Dans la deuxième partie, le lien entre le photon virtuel et un onium est explicité et les expressions des sections efficaces inclusive et diffractive sont données. La troisième partie reprend les résultats de la publication [XXI] qui discutent de lois d'échelle observées dans les données et de leur lien avec la QCD à haute énergie. Enfin la dernière partie reprend les résultats de l'article [X] et de l'article de conférence [XIII] dans lesquels il est proposé de mesurer une observable particulière, potentiellement très intéressante pour tester la physique de la saturation. Une revue des résultats de ce chapitre peut aussi être trouvée dans l'article de conférence [XVI].

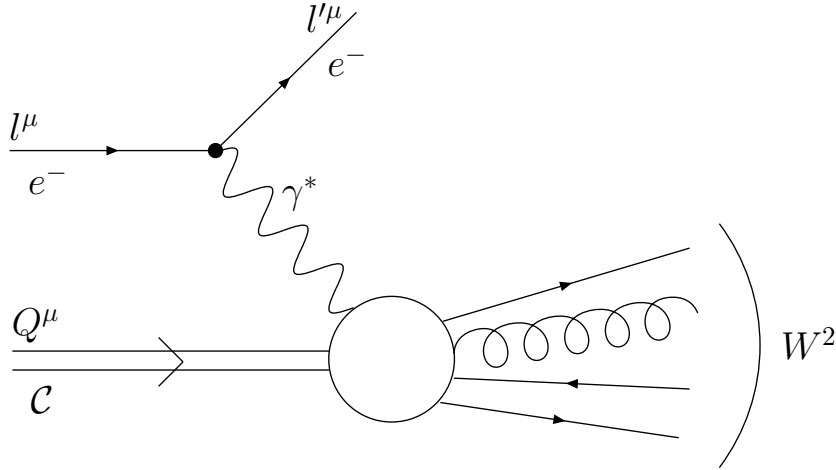


FIG. 4.1 – La diffusion profondément inélastique : un électron d'impulsion l^μ diffuse sur le proton cible d'impulsion Q^μ . L'impulsion de l'électron sortant est l'^μ et l'interaction se fait par l'intermédiaire d'un photon virtuel d'impulsion $l^\mu - l'^\mu$. Pour tester les prédictions de la QCD à haute énergie, nous sommes intéressés par la collision photon-proton dans la limite où l'énergie de la collision W est très grande devant Q , l'échelle perturbative du problème.

4.1 La diffusion profondément inélastique

La diffusion profondément inélastique est représentée figure 4.1 : lors de la collision d'un électron sur un proton, l'interaction hadronique se fait par l'intermédiaire d'un photon virtuel. La quadri-impulsion de l'électron entrant sera notée l^μ et celle de l'électron sortant sera notée l'^μ . On dit que le photon est virtuel car le carré de sa quadri-impulsion est non nul et on introduit la quantité

$$Q^2 = -(l^\mu - l'^\mu)(l_\mu - l'_\mu) > 0 . \quad (4.1)$$

La variable Q^2 est appelée virtualité du photon, et représente l'impulsion transférée par l'électron lors de la collision. Nous considérons des collisions caractérisées par $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, qui peuvent être décrites par le régime perturbatif de QCD. Quand Q^2 est suffisamment grand (typiquement $Q^2 > 10000 \text{ GeV}^2$), la particule intermédiaire peut aussi être un boson Z^0 ou W^\pm . Nous ne considérons pas ces situations qui permettent plutôt d'étudier les interactions faibles.

Nous considérons donc des collisions entre un photon et un proton. Le photon virtuel va jouer le rôle du projectile $|\mathcal{P}\rangle = |\gamma^*\rangle$ et le proton celui de la cible $|\mathcal{C}\rangle$. Nous notons donc la quadri-impulsion du proton Q^μ , en accord avec les notations du Chapitre 1. Les énergies des collisions électron-proton et photon-proton sont respectivement

$$s = (l^\mu + Q^\mu)(l_\mu + Q_\mu) \quad \text{et} \quad W^2 = (l^\mu - l'^\mu + Q^\mu)(l_\mu - l'_\mu + Q_\mu) . \quad (4.2)$$

Au lieu de travailler avec les variables s et W^2 , il est d'usage d'introduire les invariants cinématiques suivants :

$$x = \frac{Q^2}{2(l^\mu - l'^\mu)Q_\mu} = \frac{Q^2}{W^2 + Q^2 - M_C^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{Q^2}{xs} \leq 1 . \quad (4.3)$$

Nous sommes intéressés par la limite de haute énergie dans la collision photon-proton, donc à la limite $W^2/Q^2 \gg 1$. W^2 représente la masse invariante des particules émises par la collision photon-proton (voir la Figure 4.1). La situation où $W = M_C$ (ou $x = 1$) correspond à une

collision électron-proton élastique dans laquelle le photon virtuel est simplement absorbé par le proton qui ne se dissocie pas. Plus W^2 est grand (ou plus x est petit), plus la collision photon-proton est inélastique. La limite qui nous intéresse ici est $x \rightarrow 0$. Signalons que l'intervalle de rapidité sur lequel les particules finales sont émises est $Y = \ln(1/x)$.

4.1.1 La section efficace inclusive

Il est possible de mesurer une section efficace complètement inclusive par rapport aux produits de la collision photon-proton, en ne mesurant que l'électron sortant. En intégrant sur l'angle azimuthal de l'impulsion de l'électron, on obtient une section efficace doublement différentielle qu'il est d'usage d'exprimer en fonction des variables x et Q^2 . En calculant la transition $e^- \rightarrow e^- \gamma^*$ au premier ordre (le seul pertinent) en théorie des perturbations par rapport à α_{em} , cette section efficace peut s'exprimer en fonction de la section efficace totale de la collision photon-proton. Plus précisément, on a

$$\frac{d^{(2)}\sigma^{ep \rightarrow eX}}{dx dQ^2} = \frac{\alpha_{em}}{\pi x Q^2} \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \sigma_{tot}^T(x, Q^2) + (1 - y) \sigma_{tot}^L(x, Q^2) \right] \quad (4.4)$$

où σ_{tot}^λ est la section efficace totale de la collision photon-proton pour un photon virtuel de polarisation transverse ($\lambda = T$) ou longitudinale ($\lambda = L$). La polarisation transverse est une moyenne des deux polarisations physiques, ce sont les seules possibles pour un photon réel ($Q^2 = 0$). Comme le photon est virtuel ($Q^2 \neq 0$), il existe une troisième polarisation : la polarisation longitudinale ; ceci sera rediscuté plus loin. Les expériences qui mesurent la section efficace (4.4) présentent en général les résultats pour la section efficace

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = \sum_{\lambda=T,L} \sigma_{tot}^\lambda(x, Q^2) . \quad (4.5)$$

4.1.2 La section efficace diffractive

Comme expliqué dans le Chapitre 2, un processus diffractif est caractérisé par des événements au cours desquels le proton interagit de manière élastique, laissant un intervalle de rapidité vide de particule dans l'état final comme représenté figure 4.2. Il est possible de mesurer la section efficace diffractive [58], en ne mesurant que l'électron et le proton sortants, et en restant inclusif par rapport aux autres particules émises par la collision photon-proton. En intégrant sur les angles azimuthaux des impulsions de l'électron et du proton, on obtient une section efficace quadruplement différentielle ; deux variables supplémentaires sont donc nécessaires pour l'exprimer.

En appelant Q'^μ la quadri-impulsion du proton sortant, nous pouvons obtenir la masse invariante M_X des particules non mesurées et la quadri-impulsion t transférée par le proton lors de la collision :

$$M_X^2 = (l^\mu - l'^\mu + Q^\mu - Q'^\mu)(l_\mu - l'_\mu + Q_\mu - Q'_\mu) , \quad t = (Q^\mu - Q'^\mu)(Q_\mu - Q'_\mu) < 0 . \quad (4.6)$$

x , Q^2 , M_X et t forment les quatre variables indépendantes nécessaires pour décrire la section efficace diffractive. Mais au lieu de travailler avec les variables x et M_X , il est d'usage d'introduire les invariants cinématiques suivants :

$$\beta = \frac{Q^2}{2(l^\mu - l'^\mu)(Q_\mu - Q'_\mu)} = \frac{Q^2}{Q^2 + M_X^2 - t} \quad x_{\mathbb{P}} = \frac{x}{\beta} . \quad (4.7)$$

Les particules de l'état final qui forment le système de masse invariante M_X sont émises sur un intervalle de rapidité $\ln(1/\beta)$ et l'intervalle de rapidité vide de particule est $\Delta\eta = \ln(1/x_{\mathbb{P}})$.

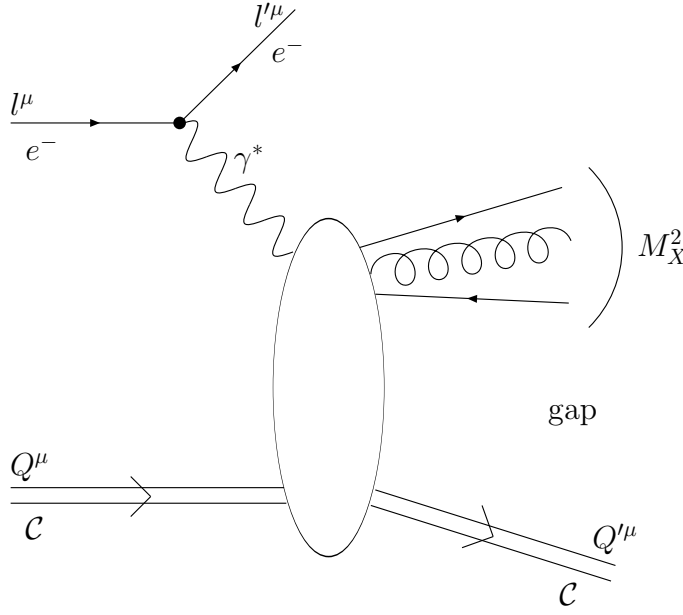


FIG. 4.2 – Les événements diffractifs en diffusion profondément inélastique : le proton cible interagit élastiquement et son impulsion finale est dénotée Q'^μ . Dans l'état final, un intervalle de rapidité vide de particules sépare le proton du système de particule de masse invariante M_X .

La section efficace diffractive s'écrit

$$\frac{d^{(4)}\sigma^{ep \rightarrow eXp}}{d\beta dx_{\mathbb{P}} dQ^2 dt} = \frac{\alpha_{em}}{\pi x_{\mathbb{P}} Q^2} \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2} \right) \frac{d\sigma_{diff}^T}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t) + (1 - y) \frac{d\sigma_{diff}^L}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t) \right] \quad (4.8)$$

en fonction des sections efficaces diffractives $d\sigma_{diff}^\lambda/d\beta dt$ des collisions photon-proton pour un photon de polarisation transverse ou longitudinale. Les expériences qui mesurent la section efficace (4.8) présentent en général les résultats pour la section efficace

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t) = \sum_{\lambda=T,L} \frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t) . \quad (4.9)$$

Les résultats expérimentaux montrent que cette section efficace décroît exponentiellement avec $|t|$ (pour une revue des descriptions théoriques, voir [59, 60]). On a

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta dt} = \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta dt} \Big|_{t=0} e^{Bt} \quad (4.10)$$

avec un coefficient $B \simeq 6 \text{ GeV}^{-2}$ indépendant (aux incertitudes de mesure près) de β , $x_{\mathbb{P}}$, et Q^2 dans le domaine cinématique couvert expérimentalement. L'observable pour laquelle les données sont les plus nombreuses est la section efficace $d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}/d\beta$ intégrée sur t , qui est donc proportionnelle à $d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}/d\beta dt$ pour $t = 0$. Dans la suite nous nous intéresserons donc à la section efficace

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2) = \frac{1}{B} \sum_{\lambda=T,L} \frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t = 0) . \quad (4.11)$$

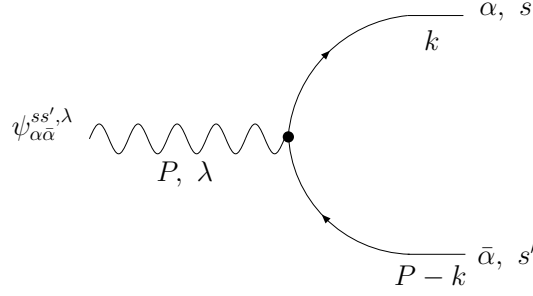


FIG. 4.3 – La transition $\gamma \rightarrow q\bar{q}$: le photon nu d'impulsion P et de polarisation λ fluctue en une paire quark-antiquark. L'impulsion du quark est notée k , sa couleur α et son spin s . L'impulsion de l'antiquark est $P - k$, sa couleur $\bar{\alpha}$ et son spin s' . La fonction d'onde associée est donnée par l'équation (4.18).

4.2 Le photon virtuel : un exemple d'onium

Dans tout ce chapitre, le projectile considéré sera donc un photon virtuel que nous noterons $|\mathcal{P}\rangle = |\gamma^*\rangle_\lambda$ ou λ représente la polarisation du photon. A priori, la décomposition en états de Fock du photon peut contenir des états liés hadroniques, mais comme nous travaillons à $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, ces composantes non perturbatives sont supprimées. La seule composante du photon virtuel qui peut participer à une interaction hadronique est donc sa composante quark-antiquark (avec en plus des gluons mous en fonction du choix de repère). En ce sens, un photon virtuel est identifiable à un onium. Nous allons calculer la fonction d'onde correspondante au premier ordre en théorie des perturbations par rapport à α_{em} .

4.2.1 La fonction d'onde du photon : la transition $\gamma \rightarrow q\bar{q}$

Nous choisissons de garder la composante transverse du quadri-vecteur du photon non nulle et donc

$$P^\mu = \left(P^+, \mathbf{P}, \frac{\mathbf{P}^2 - Q^2}{2P^+} \right). \quad (4.12)$$

La décomposition en états de Fock du photon virtuel s'écrit (rappelons que P désigne le tri-vecteur (P^+, \mathbf{P})) :

$$|\gamma^*\rangle_\lambda = \int d^3k \sum_{f\alpha\bar{\alpha}ss'} \psi_{\alpha\bar{\alpha}}^{ss',\lambda}(k; P) |(k, \alpha, s); (P-k, \bar{\alpha}, s')\rangle \quad (4.13)$$

où, en accord avec les notations du Chapitre 1, l'impulsion du quark (antiquark) est notée k , $(P - k)$ sa couleur α ($\bar{\alpha}$) et son spin s (s'). f désigne le degré de liberté de saveur et n'est pas explicitement noté en indice de la fonction d'onde ; l'indice λ relatif au photon virtuel entrant est par contre indiqué sur la fonction d'onde. Calculons cette fonction $\psi_{\alpha\bar{\alpha}}^{ss',\lambda}$ qui décrit la fluctuation d'un photon sur une paire quark-antiquark comme représenté sur la Figure 4.3. En quantifiant le champ de photon de la même façon (et dans la même jauge) que le champ de gluon du Chapitre 1, nous utilisons les mêmes règles de Feynman.

- Nous notons l'impulsion du photon entrant P , et son indice de polarisation λ ; il lui est donc associé le vecteur de polarisation $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(P)/\sqrt{(2\pi)^3 2P^+}$.
- Nous notons l'impulsion du quark sortant k , son indice de couleur α , et son indice de spin s ; il lui est ainsi associé le spineur $\bar{u}_s(k)/\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}$.

- La tri-impulsion étant conservée, l'impulsion de l'antiquark sortant est $P - k$. Nous notons son indice de couleur $\bar{\alpha}$ et son indice de spin s' , et nous lui associons donc le spineur $v_{s'}(P - k)/\sqrt{(2\pi)^3 2(P - k)^+}$.
- Au vertex est associé un facteur $(2\pi)^3 g_{em} e_f \delta_{\alpha\beta} \gamma^\mu$, avec e_f la charge du quark de saveur dénotée par l'indice f .
- Pour finir, le dénominateur d'énergie est $((P - k)^- + k^- - P^-)^{-1}$.

La fonction d'onde correspondante est donc

$$\psi_{\alpha\bar{\alpha}}^{ss',\lambda}(k; P) = \frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{\gamma^\mu \varepsilon_{(\lambda)\mu}(P)}{\sqrt{(2\pi)^3 2P^+}} \frac{v_{s'}(P - k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2(P - k)^+}} \frac{(2\pi)^3 g_{em} \delta_{\alpha\beta}}{(P - k)^- + k^- - P^-} . \quad (4.14)$$

Les quadri-vecteurs $\varepsilon_{(1)}^\mu$ et $\varepsilon_{(2)}^\mu$ des polarisations transverses du photon sont paramétrés comme l'étaient ceux des gluons (voir formule (1.14)) :

$$\varepsilon_{(\lambda)}^\mu(P) = \left(0, \varepsilon_\lambda, \frac{\mathbf{P} \cdot \varepsilon_\lambda}{P^+} \right) \quad \lambda = 1, 2 . \quad (4.15)$$

Comme le photon n'est pas sur couche de masse ($P^\mu P_\mu = -Q^2$), la relation (2.15) pour le tenseur de polarisation n'est pas vérifiée, ce qui montre la nécessité d'un troisième état de polarisation. En l'introduisant, le tenseur de polarisation est de nouveau correct :

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_{(\lambda)}^{\mu*}(P) \varepsilon_{(\lambda)}^\nu(P) - \varepsilon_{(L)}^{\mu*}(P) \varepsilon_{(L)}^\nu(P) = -g^{\mu\nu} + \frac{P^\mu}{P^+} \delta^{\nu-} + \frac{P^\nu}{P^+} \delta^{\mu-} \quad (4.16)$$

avec $\varepsilon_{(L)}^\mu$ le quadri-vecteur correspondant à la polarisation supplémentaire. On obtient alors

$$\varepsilon_{(L)}^\mu(P) = \left(0, \mathbf{0}, \frac{Q}{P^+} \right) \quad (4.17)$$

qui est bien un vecteur longitudinal.

Pour poursuivre le calcul de la fonction d'onde (4.14), il faut maintenant choisir une représentation pour les matrices de Dirac (la représentation chirale est bien adaptée ici) et résoudre l'équation de Dirac dans cette représentation pour obtenir les spineurs. Tous calculs faits, on obtient

$$\psi_{\alpha\bar{\alpha}}^{ss',\lambda}(k; P) = \frac{g_{em} e_f \delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{2(2\pi)^3 P^+}} \left((P^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{P})^2 + P^{+2} m_f^2 + k^+ (P^+ - k^+) Q^2 \right)^{-1} \times \begin{cases} 2(P^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{P}) \cdot \varepsilon_1(k^+ \delta_{s-} \delta_{s'+} - (P^+ - k^+) \delta_{s+} \delta_{s'-}) + \sqrt{2} m_f P^{+2} \delta_{s+} \delta_{s'+} & \text{si } \lambda = 1 \\ 2k^+ (P^+ - k^+) Q (\delta_{s-} \delta_{s'+} + \delta_{s+} \delta_{s'-}) & \text{si } \lambda = L \\ 2(P^+ \mathbf{k} - k^+ \mathbf{P}) \cdot \varepsilon_2(k^+ \delta_{s+} \delta_{s'-} - (P^+ - k^+) \delta_{s-} \delta_{s'+}) + \sqrt{2} m_f P^{+2} \delta_{s-} \delta_{s'+} & \text{si } \lambda = 2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour obtenir la fonction d'onde en espace mixte (voir au Chapitre 1), nous effectuons la transformée de Fourier des impulsions transverses. De manière similaire à (2.3), nous extrayons un facteur $\delta_{\alpha\bar{\alpha}}/\sqrt{N_c}$ de la fonction d'onde :

$$\frac{\delta_{\alpha\bar{\alpha}}}{\sqrt{N_c}} \phi^{ss',\lambda}(k^+, \mathbf{r}; P) = \int d^2 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_{\alpha\bar{\alpha}}^{ss',\lambda}(k; P) . \quad (4.19)$$

On obtient alors

$$\phi^{ss',\lambda}(k^+, \mathbf{r}; P) = g_{em} e_f \sqrt{\frac{N_c}{4\pi P^+}} e^{iz\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}} \times \begin{cases} 2i\epsilon_f K_1(\epsilon_f |\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1}{|\mathbf{r}|} (z\delta_{s-}\delta_{s'+} - (1-z)\delta_{s+}\delta_{s'-}) + \sqrt{2}m_f K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}|) \delta_{s+}\delta_{s'+} & \text{si } \lambda = 1 \\ 2z(1-z)Q K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}|) (\delta_{s-}\delta_{s'+} + \delta_{s+}\delta_{s'-}) & \text{si } \lambda = L \\ 2i\epsilon_f K_1(\epsilon_f |\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2}{|\mathbf{r}|} (z\delta_{s+}\delta_{s'-} - (1-z)\delta_{s-}\delta_{s'+}) + \sqrt{2}m_f K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}|) \delta_{s-}\delta_{s'-} & \text{si } \lambda = 2 \end{cases} \quad (4.20)$$

où nous avons introduit les variables z et ϵ_f données par

$$z = \frac{k^+}{P^+}, \quad \epsilon_f = \sqrt{m_f^2 + z(1-z)Q^2}. \quad (4.21)$$

4.2.2 Collision du photon virtuel sur le proton cible

Dans les calculs de sections efficaces du Chapitre 2, nous avons gardé les indices de spins implicites, ce qui explique qu'ils n'apparaissent pas sur les fonctions ϕ dans nos formules finales. Pour rétablir ces indices, il suffit d'effectuer la substitution suivante :

$$\phi^*(k^+, \mathbf{r}') \phi(k^+, \mathbf{r}) \rightarrow \sum_{fss'} \phi^{ss',\lambda}(k^+, \mathbf{r}'; P) \phi^{ss',\lambda}(k^+, \mathbf{r}; P). \quad (4.22)$$

Nous définissons donc la fonction

$$\frac{P^+}{(2\pi)^2} \sum_{ss'} \phi(k^+, \mathbf{r}'; P)^{ss',\lambda*} \phi(k^+, \mathbf{r}; P)^{ss',\lambda} = \Psi_\lambda^f(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (4.23)$$

et pour faire apparaître les polarisations longitudinales et transverses, nous donnons les formules finales pour $\Psi_T^f = (\Psi_1^f + \Psi_2^f)/2$ et Ψ_L^f :

$$\Psi_T^f(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{iz\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} e_f^2 \left((z^2 + (1-z)^2) \epsilon_f^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}| |\mathbf{r}'|} K_1(\epsilon_f |\mathbf{r}|) K_1(\epsilon_f |\mathbf{r}'|) + m_f^2 K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}|) K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}'|) \right) \quad (4.24)$$

$$\Psi_L^f(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{iz\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\alpha_{em} N_c}{2\pi^2} e_f^2 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}|) K_0(\epsilon_f |\mathbf{r}'|). \quad (4.25)$$

Section efficace totale

La fonction qui intervient dans la section efficace totale (voir l'équation (2.23)) est dénotée Ψ_λ et est définie par

$$\Psi_\lambda(z, |\mathbf{r}|) \equiv \sum_f \Psi_\lambda^f(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (4.26)$$

La section efficace totale dans la collision du photon virtuel de polarisation λ avec le proton cible s'écrit alors

$$\sigma_{tot}^\lambda(x, Q^2) = 2 \int dz d^2\mathbf{r} \Psi_\lambda(z, |\mathbf{r}|) \int d^2\mathbf{b} T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y). \quad (4.27)$$

En sommant sur les polarisations du photon, on obtient la section efficace mesurée (4.5). La dépendance en Q^2 vient des fonctions Ψ_T et Ψ_L et la dépendance en x (ou Y) vient de l'amplitude de dipôle $T_{q\bar{q}}$; cette factorisation est souvent appelée factorisation des dipôles [61, 62].

Section efficace diffractive pour $\beta \lesssim 1$

Dans le cas de la section efficace diffractive calculée au Chapitre 2 (voir l'équation (2.43)), c'est la fonction Ψ_λ^f qui intervient :

$$\frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{d^2\mathbf{q}d^2\mathbf{q}'dz} = \int \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{x}'}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}'}{2\pi} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{P})\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y})} \sum_f \Psi_\lambda^f(z, \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}'-\mathbf{y}') \langle T_{\mathbf{x}'\mathbf{y}'} \rangle_{\Delta\eta} \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_{\Delta\eta} \quad (4.28)$$

avec maintenant $z = q^+/P^+$. Signalons que nous avons ajouté le facteur $e^{-i\mathbf{P}\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y})}$ qui n'était pas présent dans (2.43), car nous avons choisi $\mathbf{P} = 0$. Cette section efficace décrit un état final diffractif X qui contient un quark d'impulsion q (avec $q^+ = zP^+$) et un antiquark d'impulsion q' (avec $q'^+ = (1-z)P^+$). En notant $\boldsymbol{\kappa} = (1-z)\mathbf{q} - z\mathbf{q}'$, on obtient la masse invariante du système quark-antiquark : $M_X^2 = (\boldsymbol{\kappa}^2 + m_f^2)/(z(1-z))$ qui est différente pour chaque saveur f . En introduisant aussi $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{P}$, le transfert d'impulsion t est simplement $t = -\boldsymbol{\Delta}^2$.

Il est possible de faire le lien avec la section efficace mesurée (4.11), en effectuant les changements de variable suivants : $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = z\mathbf{x} + (1-z)\mathbf{y}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{x}' - \mathbf{y}'$, et $\mathbf{b}' = z\mathbf{x}' + (1-z)\mathbf{y}'$. Nous obtenons alors une section efficace différentielle par rapport à $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\Delta}$ et z . En remplaçant la variable $\boldsymbol{\Delta}$ par t , et pour chaque saveur f la variable $\boldsymbol{\kappa}$ par M_X^2 puis par β , nous obtenons finalement

$$\frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{d\beta dt}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2, t = 0) = \frac{Q^2}{4\beta^2} \sum_f \int dz z(1-z) \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{i(\boldsymbol{\kappa}_f + z\mathbf{P})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \Psi_\lambda^f(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \int d^2\mathbf{b} d^2\mathbf{b}' T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}', \mathbf{b}'; \Delta\eta) T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; \Delta\eta) \quad (4.29)$$

pour la section efficace diffractive dans la collision du photon virtuel de polarisation λ avec le proton cible. Elle dépend de $\kappa_f = |\boldsymbol{\kappa}_f|$ qui vaut $\kappa_f = \sqrt{Q^2 z(1-z)(1-\beta)/\beta - m_f^2}$. En sommant sur les polarisations du photon, on obtient la section efficace mesurée (4.11). La dépendance en Q^2 vient des fonctions Ψ_T^f et Ψ_L^f , la dépendance en $x_{\mathbb{P}}$ (ou $\Delta\eta$) vient des amplitudes de dipôle $T_{q\bar{q}}$, et la dépendance en β vient des transformées de Fourier sur les tailles des dipôles.

Section efficace diffractive pour $\beta \ll 1$

Comme expliqué au Chapitre 2, pour calculer la section diffractive avec une valeur de β fixée, il faut utiliser le repère dans lequel la rapidité du photon est $\ln(1/\beta)$. La formule précédente a été établie dans le repère où le photon est nu et est donc valable seulement pour $\beta \lesssim 1$. Nous n'avons pas calculé la section efficace diffractive dans le repère où le photon est habillé d'un gluon mou, et pour laquelle l'état diffractif de masse M_X contient un gluon en plus du quark et de l'antiquark. Rappelons que cette contribution n'est pas supprimée si le gluon est mou car le facteur α_s est compensé par un facteur $\ln(1/\beta)$.

Il est possible d'obtenir la composante quark-antiquark-gluon de la section efficace intégrée sur t à partir de la section efficace (2.67) pour la production diffractive de gluon d'impulsion q . En effet, comme le gluon émis est tel que $q^+ \ll P^+$, la masse diffractive M_X est simplement reliée à q^+ : $M_X^2 \simeq P^+ \mathbf{q}^2 / q^+$. On a alors

$$\beta(1-\beta) \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow (X=q\bar{q}g)p}}{d\beta} = \sum_{\lambda=T,L} q^+ \frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{dq^+} \quad (4.30)$$

où $d\sigma_{diff}^\lambda/dq^+$ est la section efficace pour la production diffractive de gluon, intégrée par rapport à t , dans la collision du photon virtuel de polarisation λ avec le proton cible. Cette section efficace peut être obtenue (voir aussi [63, 64]) en intégrant la formule (2.67) sur \mathbf{q}^2 (ce qui revient à intégrer sur t). On obtient

$$q^+ \frac{d\sigma_{diff}^\lambda}{dq^+} = \frac{\alpha_s N_c^2}{C_F} \int dz \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} \Psi_\lambda(z, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \int d^2\mathbf{z} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \left(\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_{\Delta\eta} + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_{\Delta\eta} \right)^2. \quad (4.31)$$

Cette expression a été obtenue de plusieurs manières [65, 66, 67, 68] dans différents contextes.

Pour obtenir la section efficace pour des valeurs de $\beta \ll 1$, la contribution donnée par (4.30) et (4.31) doit être ajoutée à la contribution (4.29) calculée précédemment. Bien sûr, ceci reste incomplet pour des valeurs de β trop petites : en diminuant β , des états finals avec plus de gluons mous finiront par contribuer. Une formulation contenant ces contributions [XIX] existe dans la limite de grand N_c . Les données disponibles montrent cependant que les contributions quark-antiquark et quark-antiquark-gluon sont suffisantes pour décrire les valeurs de β accessibles expérimentalement (voir par exemple [69]).

4.3 Des lois d'échelle prédites par la QCD à haute énergie

Nous avons exprimé les sections efficaces totales (4.27) et diffractives (4.29) en fonction de $T_{q\bar{q}}$, l'amplitude de diffusion d'un dipôle sur le proton. L'évolution de cette amplitude avec la rapidité est donnée, dans l'approximation des logarithmes dominants, par les équations B-JIMWLK présentées au Chapitre 2. Ces équations permettent donc en principe de prédire l'évolution des sections efficaces (4.27) et (4.29) vers les petites valeurs de x . Dans cette section nous allons nous concentrer sur les prédictions de l'équation BK, étudiée au chapitre précédent. Même si l'équation BK est seulement une approximation, son étude nous a appris beaucoup sur l'évolution du régime dilué $T_{q\bar{q}} \ll 1$ vers le régime de saturation $T_{q\bar{q}} = 1$.

Considérons le cas des solutions homogènes, dont la prédiction la plus importante est probablement la loi d'échelle suivante : aux grandes valeurs de Y , au lieu d'être fonction d'a priori deux variables \mathbf{r} et Y , $T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b} \simeq 0; Y)$ est fonction de la seule variable $\mathbf{r}^2 Q_s^2(Y)$, et ceci jusqu'à des tailles de dipôles beaucoup plus petites que l'inverse de l'échelle de saturation $Q_s(x)$. On peut ainsi écrire

$$T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) = S(\mathbf{b}) T(\mathbf{r}^2 Q_s^2(Y)) \quad (4.32)$$

où nous avons introduit un profil en paramètre d'impact $S(\mathbf{b})$. Typiquement, $S(\mathbf{b}) = e^{-\mathbf{b}^2/R_p^2}$ avec R_p le rayon transverse du proton. En effectuant l'intégration sur le paramètre d'impact \mathbf{b} , cela contribue seulement à la normalisation par la constante

$$\int d^2\mathbf{b} S(\mathbf{b}) = \pi R_p^2 \equiv S_p \quad (4.33)$$

qui caractérise l'aire transverse du proton.

Si $\mathbf{r}^2 Q_s^2 > 1$ alors $T = 1$, et la loi (4.32) devient évidente. Cependant, ce n'est pas une prédiction triviale pour $\mathbf{r}^2 Q_s^2 \ll 1$, un régime où l'amplitude T est toujours beaucoup plus petite que 1 [70, 71]. Bien sûr la région de validité est limitée : pour des tailles de dipôles vraiment très petites, la loi d'échelle devient fausse, comme nous l'avons indiqué au Chapitre 3. Dans cette section, nous considérons que l'amplitude de dipôle vérifie la loi (4.32) de manière exacte, et donnons les conséquences pour les sections efficaces totales (4.5) et diffractives (4.11) en diffusion profondément inélastique.

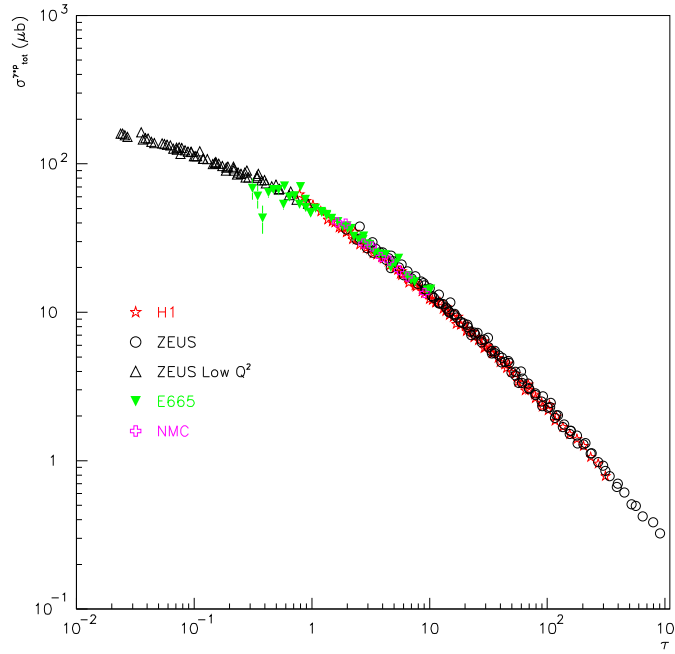


FIG. 4.4 – La section efficace totale $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ en fonction de $\tau = Q^2/Q_s^2(x)$ pour $x < 0.01$. Les données sont les plus récentes fournies par les collaborations H1, ZEUS, E665 et NMC. Seules les erreurs statistiques sont montrées.

4.3.1 Pour la section efficace totale

Étudions d'abord les conséquences pour la section efficace totale. En négligeant les masses des quarks devant Q^2 , on peut réécrire la section efficace totale de la manière suivante :

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = 2S_p \frac{\alpha_{em} N_c}{\pi} \sum_f e_f^2 \int_0^\infty \bar{r} d\bar{r} \int_0^1 dz \left\{ f_T(z) K_1^2(\sqrt{z(1-z)}\bar{r}) + f_L(z) K_0^2(\sqrt{z(1-z)}\bar{r}) \right\} T\left(\frac{Q_s^2(x)}{Q^2} \bar{r}^2\right) \quad (4.34)$$

où nous avons introduit les fonctions $f_T(z) = (z^2 + (1-z)^2)z(1-z)$ et $f_L(z) = 4z^2(1-z)^2$ et redéfini la variable de taille $|\mathbf{r}|$ par la variable sans dimension $\bar{r} = Q|\mathbf{r}|$. Nous obtenons alors la loi d'échelle suivante pour la section efficace totale à petit x :

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = \sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(\tau), \quad \tau = Q^2/Q_s^2(x). \quad (4.35)$$

Paramétrons l'échelle de saturation $Q_s(x)$ par

$$Q_s(x) = Q_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\lambda/2}, \quad Q_0 \equiv 1 \text{ GeV}, \quad (4.36)$$

ce qui correspond au comportement dominant (3.29). L'incertitude sur l'échelle Q_0 est contenue dans le paramètre x_0 dans (4.36), tandis que λ joue le rôle de $\bar{\alpha}v_c$.

La loi d'échelle (4.35) est vérifiée par les données expérimentales [9] avec les paramètres $\lambda = 0.288$ et $x_0 = 3.04 \cdot 10^{-4}$. Ces valeurs avaient été précédemment obtenues par Golec-Biernat et Wüsthoff qui avaient introduit un modèle [72] pour T satisfaisant la loi d'échelle (4.32). Ils ont ajusté leurs paramètres avec succès pour décrire les données de $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$. Pour illustrer

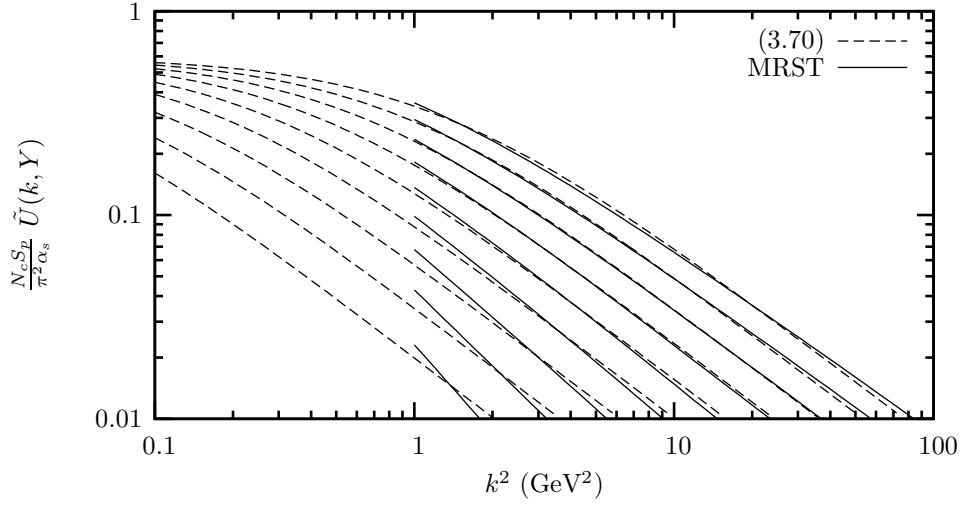


FIG. 4.5 – L'amplitude de dipôle en espace d'impulsion $\tilde{U}(k, Y)$ en fonction de k pour différentes valeurs de la rapidité : $Y = 4, 5, \dots, 12$. Les courbes en trait plein sont obtenues à partir de la paramétrisation MRST pour $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ et les courbes en pointillés sont la paramétrisation générique (3.70) pour les solutions en ondes progressives de QCD. Les paramètres sont ajustés aux valeurs $A_0 = 17.1$, $A_1 = -15.8$, $A_2 = 0$, et $v = 1.76$.

la loi d'échelle, la figure 4.4 est une version actualisée [XXI] de la figure originale de [9] qui montre la section efficace $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ en fonction de τ avec les dernières données [73] des différentes expériences qui mesurent des valeurs de $x < 0.01$: les collaborations H1, ZEUS, E665 and NMC. Excepté pour un point de E665, les données apparaissent sur une ligne. Cela est même vrai pour les petites valeurs de Q^2 , pour lesquelles on aurait pu s'attendre à des violations de la loi (4.35) dues à la masse du quark charmé [74]. On voit sur la figure que ces violations ne sont pas importantes.

La valeur du paramètre λ est trop petite pour être compatible avec la prédiction $v_c = 4.88$ (voir Chapitre 3). Par contre, elle est compatible avec la valeur obtenue en prenant en compte des effets dûs à des logarithmes sous dominants, cela a été montré par Triantafyllopoulos [75]. Le fait que les données expérimentales pour $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ vérifient la loi d'échelle (4.35) représente un succès en faveur de la QCD à haute énergie et du régime de saturation de QCD.

Lien avec les ondes progressives de QCD

Il existe cependant de nombreuses descriptions des données expérimentales pour $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ qui ne sont pas caractérisées explicitement par la loi d'échelle (4.35). En fait, comme ces descriptions reproduisent correctement les données montrées Figure 4.4, elles possèdent cette loi d'échelle de manière effective dans le domaine cinématique du collisionneur HERA, et pour $x < 0.01$. Pour illustrer cela, nous allons considérer une de ces descriptions classiques : la paramétrisation de Martin, Roberts, Stirling et Thorne, appelée paramétrisation MRST. Elle est fondée sur les prédictions des équation DGLAP, qui sont différentes de celles que nous avons considérées.

Il est possible d'extraire, à partir de la paramétrisation MRST, une amplitude de dipôle effective en inversant la formule (4.27), comme expliqué dans l'article [XIV]. En fait il est plus simple d'extraire une amplitude effective en espace des impulsions, pour

$$\int \frac{d^2 \mathbf{r}}{2\pi \mathbf{r}^2} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int d^2 \mathbf{b} T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) = S_p \tilde{U}(|\mathbf{k}|, Y) \quad (4.37)$$

avec la fonction \tilde{U} définie au Chapitre 3 (voir (3.33)). Sur la figure 4.5 nous comparons la fonction $S_p \tilde{U}(k, Y)$ extraite de la paramétrisation MRST (en traits pleins) avec la paramétrisation générique (3.70) pour les solutions en ondes progressives de QCD (en traits tiretés), obtenue au Chapitre 3 à partir de l'équation (3.61).

Les différentes lignes correspondent à différentes valeurs de la rapidité : $Y = 4, 5, \dots, 12$. Le domaine cinématique de la paramétrisation MRST ne permet pas d'extraire l'amplitude \tilde{U} pour des valeurs de $k < 1$ GeV. Rappelons que la paramétrisation (3.70) n'est pas valable aux petites valeurs de Y et aux grandes valeurs de k pour lesquelles des violations de la loi $T(k, Y) = T(k/Q_s)$ sont attendues. Dans le domaine de recouvrement entre les deux paramétrisations, $T(k, Y) = T(k/Q_s)$ implique la loi d'échelle (4.35) pour la section efficace $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}$ contrairement à la paramétrisation MRST, cependant il est clair qu'elle est compatible avec un motif suggestif d'ondes progressives. A des rapidités trop faibles ou à des valeurs de k trop grandes, des déviations sont visibles mais la paramétrisation MRST possède bien la loi d'échelle (4.35) de manière effective, dans le domaine cinématique $x < 0.01$, correspondant à $Y > 4.6$.

4.3.2 Pour la section efficace diffractive

Etudions maintenant les conséquences de la loi d'échelle (4.32) pour la section efficace diffractive (4.29). En négligeant les masses des quarks devant Q^2 et en redéfinissant les variables de taille comme précédemment, la section efficace diffractive se réécrit

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2) = S_P^2 \frac{\alpha_{em} N_c}{8B\pi^2\beta^2} \sum_f e_f^2 \int_0^1 dz z(1-z) \sum_{\lambda=L,T} f_{\lambda}(z) I_{\lambda}^2(z, \beta, Q_s^2(x_{\mathbb{P}})/Q^2). \quad (4.38)$$

Les intégrales I_T et I_L sont données par

$$I_{T,L}(z, \beta, Q_s^2/Q^2) = \int_0^\infty \bar{r} d\bar{r} K_{1,0}(\sqrt{z(1-z)}\bar{r}) J_{1,0}(\sqrt{z(1-z)}(1-\beta)/\beta\bar{r}) T\left(\frac{Q_s^2}{Q^2} \bar{r}^2\right) \quad (4.39)$$

où I_T dépend des fonctions de Bessel K_1 et J_1 et I_L de K_0 et J_0 . Nous en déduisons donc une autre prédiction du régime de saturation de QCD : une loi d'échelle [XXI] pour la section efficace diffractive à β fixé et petit $x_{\mathbb{P}}$:

$$\frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta}(\beta, x_{\mathbb{P}}, Q^2) = \frac{d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}}{d\beta}(\beta, \tau_d), \quad \tau_d = Q^2/Q_s^2(x_{\mathbb{P}}). \quad (4.40)$$

Les expressions (4.30) et (4.31) complètent la formulation de la section efficace diffractive (4.29) pour des valeurs de β petites. Avec l'approximation $\langle T_{\mathbf{zx}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y = \langle T_{\mathbf{zx}} \rangle_Y \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y$ de l'équation BK, la prédiction de la loi d'échelle (4.40) reste valable. Signalons qu'il existe une autre approche pour inclure la contribution du singlet de couleur quark-antiquark-gluon responsable de la contribution (4.31). Dans cette approche, la cinématique de l'état final n'est pas traitée de la même manière [76] et l'interaction de la composante quark-antiquark-gluon est décrite par un dipôle de gluon effectif. La prédiction (4.40) reste cependant valable.

Sur la figure 4.6, nous présentons les données [77] des collaborations H1 et ZEUS pour $\beta d\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow Xp}/d\beta$ en fonction de $\tau_d = Q^2/Q_s^2(x_{\mathbb{P}})$ pour six valeurs de β fixées : 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.65 et 0.90. Pour chacune d'entre elles, nous incluons tout les points de données pour des valeurs de Q^2 dans le domaine $[5, 90]$ GeV² et pour $x_{\mathbb{P}} < 0.01$. Nous avons utilisé l'échelle de saturation (4.36) avec les paramètres inchangés. Il est clair que les données de HERA sont compatibles avec la loi prédite par la formule (4.40), car pour chaque valeur de β , les différents points apparaissent sur une ligne. Cela représente un argument de plus en faveur du régime de saturation.

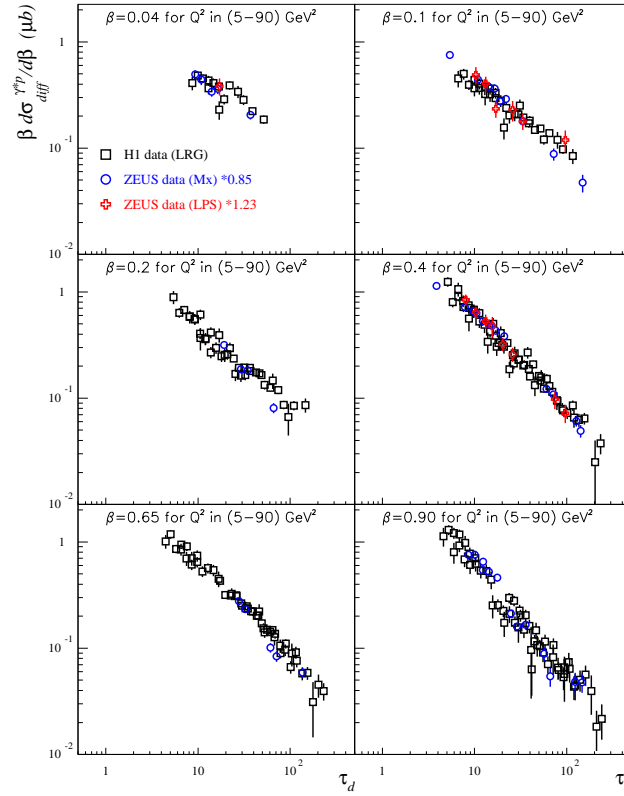


FIG. 4.6 – La section efficace diffractive $\beta d\sigma_{diff}^{\gamma^*p \rightarrow Xp}/d\beta$ fournie par les collaborations H1 et ZEUS, en fonction de $\tau_d = Q^2/Q_s^2(x_p)$ pour des valeurs de Q^2 dans le domaine $[5; 90] \text{ GeV}^2$ et pour $x_p < 0.01$. Six valeurs de β sont considérées. Seules les erreurs statistiques sont montrées.

Insistons sur le fait que les paramètres utilisés pour l'échelle de saturation Q_s sont ceux obtenus dans [72], et que nous n'avons pas essayé de les ajuster pour obtenir de meilleurs résultats. Différents modèles inspirés par la QCD à haute énergie peuvent être ajustés pour décrire les données. Les paramètres obtenus avec un modèle qui possède la loi d'échelle (4.32) de manière exacte diffèrent [72] de ceux obtenus avec des modèles qui incluent des violations de cette loi [78, 79, 80]. Les paramètres sont aussi sensibles aux types de violations incluses. Ceci montre que des valeurs *précises* de ces paramètres n'auraient pas de sens. Dans tous les cas, les valeurs sont toujours compatibles avec celles utilisées ici.

Nous n'avons étudié que des sections efficaces intégrées par rapport au transfert d'impulsion du proton t . En diffusion profondément inélastique, plusieurs observables diffractives peuvent être mesurées de manière différentielle par rapport à t . En termes d'amplitudes de dipôles, la dépendance en t est liée à la dépendance en paramètre d'impact par transformée de Fourier. Nous l'avons montré explicitement pour la section efficace diffractive, c'est aussi le cas pour d'autres observables comme la production diffractive de mésons vecteurs [81, 82]. De telles observables n'ont pas encore été étudiées, cependant elles représentent des opportunités pour rechercher une loi d'échelle à transfert d'impulsion non nul. Cette prédiction a été discutée au Chapitre 3. Pour pouvoir la tester, il faudrait pouvoir faire des mesures sur un large domaine cinématique en x et Q^2 (c'est-à-dire un large domaine pour τ), pour différentes valeurs de t fixées. Cela représente un défi expérimental, mais cela nous permettrait certainement de mieux comprendre la dépendance en paramètre d'impact \mathbf{b} de $T_{q\bar{q}}$ et de comprendre comment elle intervient dans l'évolution vers les hautes énergies.

4.4 La production diffractive de gluon

Cette dernière section reprend les résultats de la publication [X] et de l'article de conférence [XIII]. Nous y étudions une observable particulière : la production diffractive de gluons en diffusion profondément inélastique, dans un régime où le gap de rapidité $\Delta\eta$ est suffisamment grand. La section efficace correspondante s'obtient à partir du résultat (2.67) du Chapitre 2, en remplaçant la fonction d'onde de l'onium par la fonction d'onde du photon (4.26). Nous obtenons

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q}dq^+} = \frac{\alpha_s N_c^2}{C_F} \int dz \frac{d^2\mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{y}}{2\pi} \sum_{\lambda=L,T} \Psi_\lambda(z, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{\Delta\eta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \quad (4.41)$$

où q^+ et \mathbf{q} désignent les impulsions longitudinales et transverses du gluon mesuré. Rappelons que ce résultat décrit des états finals pour lesquels le gluon est mou ($q^+ \ll P^+$) et est la particule bordant le gap de rapidité. Le quark et l'antiquark provenant de la dissociation de l'onium ont des rapidités supérieures à celle du gluon. Le vecteur transverse $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$ qui apparaît dans la formule (4.41) est donné par la formule (2.68) du Chapitre 2.

4.4.1 Quelques estimations analytiques générales

Le vecteur transverse $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$ peut s'écrire

$$\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} \left[\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \right] \left(S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}; \Delta\eta) - S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) \right) \quad (4.42)$$

où nous avons introduit les quantités S et $S^{(2)}$.

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) = 1 - \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_{\Delta\eta} \quad (4.43)$$

est l'élément de matrice de diffusion dans la collision d'un dipôle sur le proton cible évolué jusqu'à la rapidité $\Delta\eta$. Rappelons que \mathbf{x} et \mathbf{y} dénotent les positions transverses du quark et de l'antiquark formant le dipôle.

$$S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}; \Delta\eta) = 1 - \langle T_{\mathbf{xz}} \rangle_{\Delta\eta} - \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_{\Delta\eta} + \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_{\Delta\eta} \quad (4.44)$$

est l'élément de matrice de diffusion dans la collision d'un système de deux dipôles ((\mathbf{xz}) et (\mathbf{zy})) sur le proton cible évolué jusqu'à la rapidité $\Delta\eta$. Il est possible d'obtenir la dépendance en \mathbf{q} de la section efficace (4.41).

La limite $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$

Dans la limite $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$, l'amplitude $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$ est une constante. Les divergences infrarouges qui apparaissent a priori dans la contribution virtuelle s'annulent entre les termes contenant \mathbf{x} et \mathbf{y} . La contribution dominante à l'intégrale sur \mathbf{z} est déterminée par le comportement à grand \mathbf{z} de $S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}; \Delta\eta)$. En particulier, la valeur de \mathbf{z} à partir de laquelle $S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}; \Delta\eta)$ commence à décroître vers zéro coupe l'intégrale et détermine la valeur de $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$. La valeur constante de la section efficace (4.41) à petit \mathbf{q} est donc déterminée par l'échelle d'unitarisation de $S^{(2)}$. Pour des valeurs de $\Delta\eta$ suffisamment grandes, cette échelle d'unitarisation est l'échelle de saturation $Q_s(\Delta\eta)$.

La limite $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$

Dans la limite $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$, l'amplitude $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$ décroît comme $1/\mathbf{q}^2$. En effet, en changeant de variable on peut écrire

$$\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}/|\mathbf{q}|} \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^2} \left(S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}/|\mathbf{q}| + \mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) - S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) \right) - (\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}). \quad (4.45)$$

En prenant ensuite la limite $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$, et en utilisant

$$S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) = S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}; \Delta\eta) = S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) \quad (4.46)$$

on voit que le terme en $1/|\mathbf{q}|$ s'annule. La contribution dominante se comporte alors comme $1/\mathbf{q}^2$:

$$\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2} \left(e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{z}} S^{(2)} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{z}} S^{(2)} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{y}} \right). \quad (4.47)$$

En mettant au carré et en intégrant sur $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$, on obtient

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} \propto \frac{1}{\mathbf{q}^4} \int dz d^2\mathbf{r} \Psi_{\lambda}(z, |\mathbf{r}|) (F(|\mathbf{r}|) + G(|\mathbf{r}|) \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})) \quad (4.48)$$

avec les fonctions F et G dépendant de la forme précise de $S^{(2)}$. En intégrant par rapport à l'angle polaire de \mathbf{r} , la partie en G est supprimée et la section efficace décroît donc comme $1/\mathbf{q}^4$.

Ces caractéristiques sont générales, indépendantes de la forme précise des éléments de matrice S et $S^{(2)}$. Si l'on choisit d'étudier le comportement de l'observable

$$\mathbf{q}^2 q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} \quad (4.49)$$

en fonction de l'impulsion transverse du gluon \mathbf{q} , celle ci va augmenter comme \mathbf{q}^2 pour les petites valeurs de \mathbf{q} et décroître comme $1/\mathbf{q}^2$ pour les grandes valeurs de \mathbf{q} . Il y aura un maximum pour une valeur de \mathbf{q} que nous noterons q_0 . Cette valeur indiquera l'inverse de la taille typique pour laquelle les éléments de matrice de diffusion approchent zéro. En d'autres termes, le maximum q_0 reflètera l'échelle d'unitarisation. Pour des valeurs de $\Delta\eta$ suffisamment grandes, la QCD à haute énergie prédit que cette échelle est dans le domaine perturbatif : $q_0 \simeq Q_s(\Delta\eta)$, l'échelle de saturation.

4.4.2 Prédiction du modèle GBW

La forme exacte des éléments de matrice S et $S^{(2)}$ n'est pas connue, et nous allons considérer un modèle pour pouvoir estimer la section efficace (4.41) pour des valeurs quelconques de \mathbf{q} . Cela nous permettra aussi de tester nos prédictions analytiques sur les comportements aux limites $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ et $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$. Pour cela considérons le modèle suivant inspiré de la paramétrisation [72] de Golec-Biernat et Wüsthoff :

$$\begin{aligned} 1 - S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta) &= S(\mathbf{b}) \left(1 - e^{-Q_s^2(\Delta\eta) \mathbf{r}^2/4} \right) \\ 1 - S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}; \Delta\eta) &= S(\mathbf{b}) \left(1 - e^{-Q_s^2(\Delta\eta) (\mathbf{x}-\mathbf{z})^2/4} e^{-Q_s^2(\Delta\eta) (\mathbf{z}-\mathbf{y})^2/4} \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

où comme précédemment $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$, et R_p est le rayon transverse du proton.

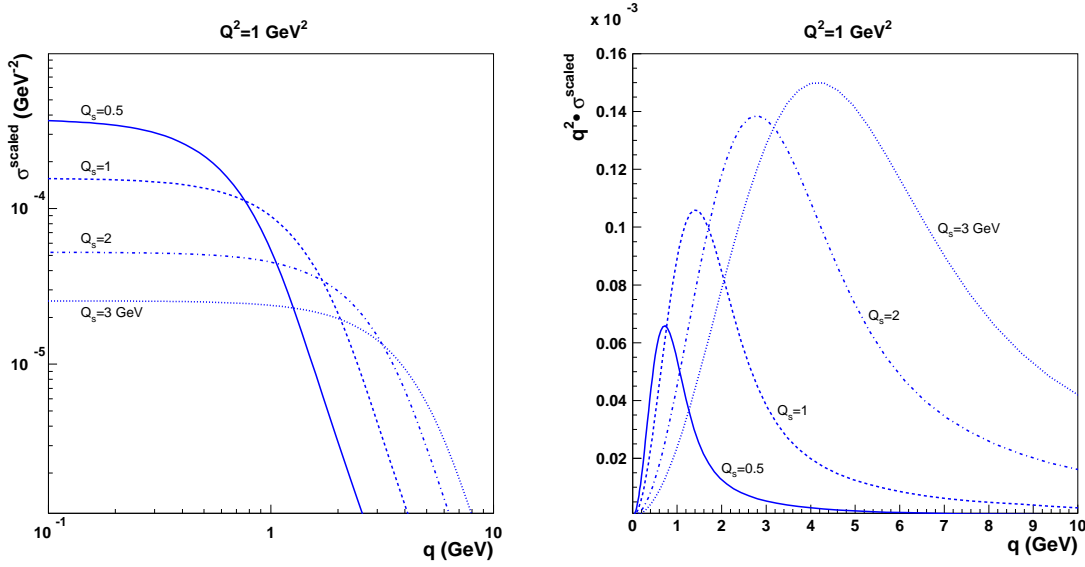


FIG. 4.7 – La figure de gauche montre la section efficace σ^{scaled} (4.53) en fonction de q , l'impulsion transverse du gluon. Les courbes sont obtenues avec le modèle (4.50) mais on observe bien les caractéristiques universelles : la section efficace est constante aux petites valeurs de q (et sa valeur est déterminée par Q_s) et décroît comme $1/q^4$ aux grandes valeurs de q . La figure de droite montre la même section efficace multipliée par q^2 . Le maximum est obtenu pour la valeur q_0 qui est proche de Q_s .

Formule analytique pour la section efficace

Dans notre modèle les paramétrisations pour S et $S^{(2)}$ sont Gaussiennes, et il est possible de calculer analytiquement [X] l'amplitude $\mathbf{A}_{\Delta\eta}$. La dérivation est donnée en appendice, on obtient pour le produit $\mathbf{A}_{\Delta\eta} \cdot \mathbf{A}_{\Delta\eta}^*$:

$$\mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{\Delta\eta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = S^2(\mathbf{b}) \frac{\mathbf{r}^2}{4q^2} e^{-\mathbf{r}^2 Q_s^2/2} \times \frac{\left| 2 \left(\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) - e^{-q^2/(2Q_s^2) + Q_s^2 r^2/8} \right) \mathbf{q} + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) Q_s^2 \mathbf{r} \right|^2}{(q^2/Q_s^2 - Q_s^2 \mathbf{r}^2/4)^2 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2} \quad (4.51)$$

où la dépendance de Q_s par rapport à $\Delta\eta$ est gardée implicite. L'intégration sur \mathbf{b} donne simplement un facteur $S_p/2$ et le résultat est une fonction de Q_s et des vecteurs transverses \mathbf{q} et \mathbf{r} . En notant $r = |\mathbf{r}|$, $q = |\mathbf{q}|$ et θ l'angle entre les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{q} , on obtient finalement :

$$q^2 q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} = \frac{\alpha_s N_c^2 S_p}{8\pi^2 C_F} \int \frac{r dr d\theta dz e^{-r^2 Q_s^2/2}}{(q/(rQ_s^2) - rQ_s^2/(4q))^2 + \cos^2 \theta} \sum_{\lambda=L,T} \Psi_\lambda(z, r) \times \left\{ \left[\cos\left(\frac{qr}{2} \cos \theta\right) - e^{-q^2/(2Q_s^2) + Q_s^2 r^2/8} \right]^2 + \frac{Q_s^4 r^2}{4q^2} \sin^2\left(\frac{qr}{2} \cos \theta\right) + \frac{rQ_s^2}{q} \cos \theta \sin\left(\frac{qr}{2} \cos \theta\right) \left[\cos\left(\frac{qr}{2} \cos \theta\right) - e^{-q^2/(2Q_s^2) + Q_s^2 r^2/8} \right] \right\}. \quad (4.52)$$

Les intégrations restantes sur r , θ et z peuvent se faire facilement numériquement.

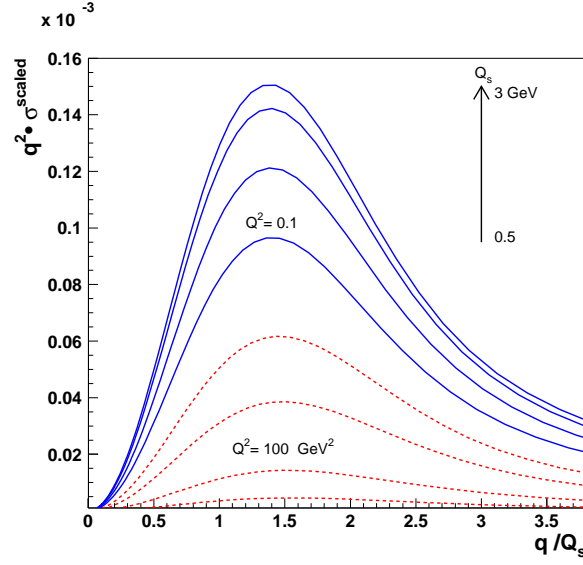


FIG. 4.8 – L’observable $q^2 \sigma^{scaled}$ en fonction de q/Q_s . Le maximum est obtenu pour la valeur q_0/Q_s indépendante de Q^2 et de Q_s sur des larges gammes cinématiques. On observe $q_0 \simeq 1.4 Q_s$.

Phénoménologie

Analysons la dépendance de la section efficace (4.52) en fonction de q . Pour cela définissons la section efficace suivante :

$$\sigma^{scaled}(q, Q^2, Q_s) = \frac{1}{\alpha_s S_p} q^+ \frac{d\sigma}{d^2 \mathbf{q} dq^+} = \frac{1}{2\alpha_s S_p} M_X \frac{d\sigma}{d^2 \mathbf{q} dM_X}, \quad (4.53)$$

qui permet d’écarter les incertitudes dues aux valeurs de α_s et S_p . La prise en compte de ces facteurs constants, qui sera nécessaire pour décrire la section efficace (4.52), ne changerait pas les remarques qui suivent. En plus de l’impulsion transverse du gluon q , σ^{scaled} est une fonction de deux autres variables : la virtualité du photon Q^2 et l’échelle de saturation Q_s .

Sur la Figure 4.7 nous avons représenté σ^{scaled} et $q^2 \sigma^{scaled}$ en fonction de q , pour $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ et pour quatre valeurs de l’échelle de saturation $Q_s = 0.5, 1, 2, 3 \text{ GeV}$. Comme discuté précédemment, indépendamment de la forme de S et $S^{(2)}$, σ^{scaled} est constante pour des petites valeurs de q et décroît comme $1/q^4$ pour des grandes valeurs de q . Nous observons que cela est bien le cas sur la figure de gauche. Avec notre modèle de saturation, la valeur de σ^{scaled} aux petites impulsions est liée à l’échelle de saturation, comme prévu. Ceci est encore mieux illustré sur la figure de droite, qui représente $q^2 \sigma^{scaled}$ en fonction de q . La transition entre le comportement en q^2 aux petites valeurs de q et le comportement en $1/q^2$ aux grandes valeurs de q est très claire. Elle est caractérisée par un maximum piqué pour une valeur q_0 qui est bien de l’ordre de Q_s .

Pour quantifier la dépendance de q_0 en fonction de Q_s , représentons $q^2 \sigma^{scaled}$ en fonction de q/Q_s . Ceci est fait Figure 4.8 pour les quatre valeurs de Q_s données figure 4.7 et pour deux valeurs extrêmes de la virtualité du photon : $Q^2 = 0.1$ et 100 GeV^2 . Il est clair que la valeur de q_0/Q_s est indépendante de Q_s et de Q^2 sur le large domaine cinématique considéré. Sur la figure, nous pouvons lire $q_0/Q_s \simeq 1.4$. Même si cette valeur dépend probablement du modèle utilisé, la production diffractive de gluon en diffusion profondément inélastique semble être une observable idéale pour pouvoir déterminer l’échelle de saturation Q_s et sa dépendance avec l’énergie.

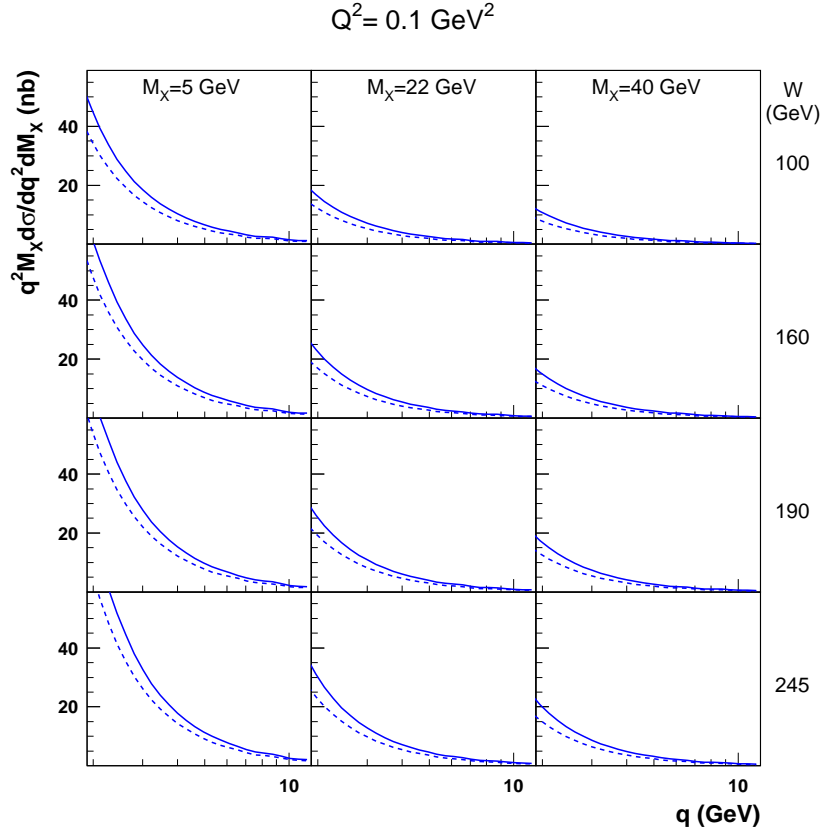


FIG. 4.9 – La section efficace pour la production diffractive de gluons en diffusion profondément inélastique en fonction de q , l'impulsion transverse du gluon. Les courbes sont obtenues avec le modèle (4.50) et les prédictions sont faites dans le domaine cinématique du collisionneur HERA. Les courbes en traits pleins sont des prédictions où le quark charmé est inclus. Les courbes en pointillés sont obtenues sans la contribution du quark charmé.

Prédictions pour le collisionneur HERA

Il serait intéressant de pouvoir exploiter cette observation dans les collisions électron-proton. Expérimentalement, le gluon est détecté comme un jet de particule. En se plaçant dans une situation de grande masse diffractive ($\beta \ll 1$), le jet qui provient du gluon est celui qui borde le gap de rapidité. Les jets de particules qui viennent du quark ou de l'antiquark sont détectés à plus grande rapidité et la configuration de l'état final est $X + jet + gap + p$. Idéalement, il faudrait déterminer la section efficace correspondante en fonction de l'impulsion transverse du jet, et pour différentes valeurs de $\Delta\eta$. Pour chacune d'entre elles, la position du maximum de la section efficace devrait donner $Q_s(\Delta\eta)$, indépendamment de Q^2 . Cette caractéristique offre la possibilité d'utiliser un grand domaine cinématique en Q^2 pour effectuer les mesures, en gardant tout de même $\beta \ll 1$.

Il existe cependant une limitation expérimentale sur les impulsions transverses qu'il est possible de mesurer. Dans le cas du collisionneur HERA, la limite inférieure est environ 1 GeV, ce qui correspond à une échelle de saturation relativement grande pour les valeurs de $\Delta\eta$ accessibles. Il est donc peu probable que le maximum q_0 de la section efficace (4.41) soit visible à HERA. Observer le maximum montré sur la Figure 4.8 semble donc être un défi expérimental majeur.

Cette situation est illustrée figure 4.9, où nous avons représenté les prédictions du modèle (4.50) pour la section efficace (4.41). L'échelle de saturation est prise du modèle GBW original [72] pour lequel nous rappelons que $Q_s^2(x_{\mathbb{P}}) = (x_0/x_{\mathbb{P}})^\lambda \text{ GeV}^2$. Les paramètres sont $\lambda = 0.288$ et $x_0 = 3.04 \times 10^{-4}$ dans le cas où seuls les quarks légers sont inclus dans l'analyse. En incluant aussi le quark charmé, les paramètres obtenus sont $\lambda = 0.277$ et $x_0 = 4 \times 10^{-5}$. Pour obtenir les courbes de la figure 4.9, nous avons aussi utilisé les valeurs $\alpha_s = 0.15$ et $2S_p = 23.03 \text{ mb}$ ($2S_p = 29.12 \text{ mb}$ si le quark charmé est inclus) obtenues dans [72].

Les valeurs de la virtualité du photon Q^2 , de l'énergie W et de la masse diffractive M_X indiquées Figure 4.9 sont extraites d'une publication récente [77] de la collaboration ZEUS. Les prédictions montrent bien que le maximum montré figure 4.8 ne devrait pas être accessible à HERA, indiquant que les données devraient se trouver du côté droit de la bosse. Par contre, les prédictions montrent aussi qu'il n'est pas nécessaire de voir toute la bosse pour ressentir l'influence de l'échelle de saturation. En particulier, il y a une grande différence dans la montée vers les petites valeurs de q entre le graphe correspondant à la plus grande valeur de $x_{\mathbb{P}}$ ($M_X = 40 \text{ GeV}$ et $W = 100 \text{ GeV}$) et le graphe correspondant à la plus petite valeur de $x_{\mathbb{P}}$ ($M_X = 5 \text{ GeV}$ et $W = 245 \text{ GeV}$).

La confirmation d'un tel comportement serait un signe que le régime de saturation joue un rôle aux énergies accessibles et pourrait permettre une autre détermination de l'échelle de saturation. Si ce comportement n'est pas observé, cela peut refléter que notre modèle est incomplet, ou bien que les énergies du collisionneur HERA ne sont pas assez importantes pour que la saturation ait un rôle important. Entre autres, l'unitarisation serait de nature non-perturbative [83]. Dans ce cas, le maximum de l'observable (4.49) (montré par exemple sur le graphe de droite de la figure 4.7) serait indépendant de $\Delta\eta$, et sur la figure 4.9, les 12 graphes seraient identiques.

4.A Dérivation de l'amplitude $A_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ dans le cadre du modèle GBW

Dans cet appendice, nous calculons l'amplitude $A_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q})$ (voir la formule (4.42)), dans le cadre du modèle (4.50) pour les éléments de matrice S et $S^{(2)}$. La contribution de $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \Delta\eta)$ est proportionnelle à

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} \left[\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \right] &= (e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}) \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} \frac{\mathbf{z}}{z^2} \\ &= -\frac{2\mathbf{q}}{q^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

Rappelons que $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ et $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. Nous pouvons alors écrire (en gardant la dépendance de Q_s par rapport à $\Delta\eta$ implicite) :

$$A_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = S(\mathbf{b}) \left(e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} I(\mathbf{q}, \mathbf{r}) - e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} I(\mathbf{q}, -\mathbf{r}) + \frac{2\mathbf{q}}{q^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) e^{-Q_s^2 \mathbf{r}^2/4} \right) \quad (4.55)$$

où nous avons introduit

$$I(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} \frac{\mathbf{z}}{z^2} e^{-Q_s^2 \mathbf{z}^2/4} e^{-Q_s^2 (\mathbf{z} + \mathbf{r})^2/4} . \quad (4.56)$$

En introduisant θ , l'angle entre \mathbf{z} et \mathbf{q} , et ϕ , l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{q} , nous obtenons :

$$I(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = e^{-Q_s^2 \mathbf{r}^2/4} \int \frac{d|\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}|} e^{-Q_s^2 \mathbf{z}^2/2} i \nabla_{\mathbf{q}} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{z}| \cos(\theta) - Q_s^2 |\mathbf{z}||\mathbf{r}| \cos(\theta - \phi)/2} . \quad (4.57)$$

L'intégration angulaire donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{z}|\cos(\theta) - Q_s^2|\mathbf{z}||\mathbf{r}|\cos(\theta-\phi)/2} = I_0\left(|\mathbf{z}|\sqrt{\mathbf{r}^2 Q_s^4/4 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2 - \mathbf{q}^2}\right) \quad (4.58)$$

puis avec la différentiation $i\nabla_{\mathbf{q}}$, nous avons

$$I(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = -\frac{(i\mathbf{q} + \mathbf{r} Q_s^2/2) e^{-Q_s^2 \mathbf{r}^2/4}}{\sqrt{\mathbf{r}^2 Q_s^4/4 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2 - \mathbf{q}^2}} \int_0^\infty dz e^{-Q_s^2 z^2/2} I_1\left(z\sqrt{\mathbf{r}^2 Q_s^4/4 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2 - \mathbf{q}^2}\right). \quad (4.59)$$

La dernière intégration donne

$$I(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{(i\mathbf{q} + \mathbf{r} Q_s^2/2) e^{-Q_s^2 \mathbf{r}^2/4}}{\mathbf{q}^2 - \mathbf{r}^2 Q_s^4/4 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2} \left(e^{-\mathbf{q}^2/(2Q_s^2) + \mathbf{r}^2 Q_s^2/8 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2} - 1 \right). \quad (4.60)$$

En insérant (4.60) dans (4.55), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\Delta\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}) = S(\mathbf{b}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} & \left[\frac{i\mathbf{q} + \mathbf{r} Q_s^2/2}{\mathbf{q}^2 - \mathbf{r}^2 Q_s^4/4 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2} \left(e^{-\mathbf{q}^2/(2Q_s^2) + \mathbf{r}^2 Q_s^2/8} - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2} \right) \right. \\ & - \frac{i\mathbf{q} - \mathbf{r} Q_s^2/2}{\mathbf{q}^2 - \mathbf{r}^2 Q_s^4/4 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} Q_s^2} \left(e^{-\mathbf{q}^2/(2Q_s^2) + \mathbf{r}^2 Q_s^2/8} - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2} \right) \\ & \left. + \frac{2\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/2) \right] e^{-Q_s^2 \mathbf{r}^2/4}. \quad (4.61) \end{aligned}$$

En calculant ensuite le produit $\mathbf{A}_{\Delta\eta} \cdot \mathbf{A}_{\Delta\eta}^*$, on retrouve la formule (4.51).

CHAPITRE 5

Phénoménologie appliquée à la production de jets

Sommaire

5.1 Production inclusive de jets à partir d'un hadron	92
5.1.1 Production d'un gluon mou à partir d'un onium	92
5.1.2 La limite collinéaire	92
5.1.3 Production d'un jet vers l'avant à partir d'un hadron	93
5.2 Production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique .	94
5.2.1 Prédictions de la QCD à haute énergie	95
5.2.2 Comparaisons avec les données du collisionneur HERA	97
5.3 La production de jets de Mueller-Navelet	101
5.3.1 Prédictions de la QCD à haute énergie	102
5.3.2 Phénoménologie	104

Ce Chapitre discute d'applications possibles de nos résultats dans le contexte des collisions hadron-hadron, il reprend les résultats des articles [I, III, XVII] et des articles de conférence [II, XII]. Dans des collisions entre deux hadrons, les sondes perturbatives sont des jets de particules, initiés par l'émission de quarks ou de gluons de grandes impulsions transverses. Ces derniers jouent un rôle similaire au photon virtuel de la diffusion profondément inélastique : ils nous renseignent sur le contenu des hadrons aux petites distances.

Dans ce chapitre, nous considérons donc que le projectile est un hadron, et nous nous concentrerons sur la production inclusive de gluons en utilisant nos résultats du Chapitre 2. Pour cela, nous allons devoir faire le lien entre un hadron, qui est une particule de nature non perturbative, et un onium, qui est l'objet de nature perturbative que nous avons utilisé pour faire nos calculs. Ceci demande de faire des approximations, et nous travaillerons dans la limite collinéaire qui permet d'obtenir le lien entre onium et hadron de manière consistante. Cela sera discuté dans une première partie et nous serons en mesure d'obtenir la section efficace de production de jets dans la collision entre un hadron projectile et une cible hadronique quelconque.

La deuxième partie considère l'émission de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique, un processus où la cible hadronique est un photon virtuel. Le qualificatif *vers l'avant* sera précisé plus loin, il indique que le jet est émis dans la direction de propagation du projectile. Le photon virtuel, qui peut être assimilé à un onium, joue le rôle de la cible (contrairement au chapitre précédent). Dans la limite de haute énergie, ce processus teste les effets de densité de gluons dans la fonction d'onde d'un onium. Dans ces conditions, les effets

de haute énergie sont restreints par rapport à un hadron cible (pour la même énergie) et ce processus semble idéal [84] pour tester l'évolution BFKL. Cependant dans la limite de haute énergie, le régime de saturation sera éventuellement atteint, ce qui sera aussi discuté.

La troisième partie discute de la production de jets de Mueller-Navelet dans les collisions hadron-hadron. Dans ces processus, deux jets vers l'avant sont mesurés, dans les directions de propagation de chacun des hadrons. La dynamique de QCD impliquée est la même que pour l'émission de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique.

5.1 Production inclusive de jets à partir d'un hadron

5.1.1 Production d'un gluon mou à partir d'un onium

Au Chapitre 2, nous avons calculé la section efficace de production inclusive de gluons dans la collision d'un onium sur une cible hadronique quelconque (voir formule (2.60)). En notant $q = (q^+, \mathbf{q})$ la tri-impulsion du gluon mesuré, la section efficace s'écrit :

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q} dq^+} = \frac{4\alpha_s C_F}{\pi^2 \mathbf{q}^2} \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \tilde{g}(\mathbf{r}'^2 Q_0^2) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q) \quad (5.1)$$

avec \tilde{g} une fonction définie à partir de la fonction d'onde de l'onium $\phi(k^+, \mathbf{r})$ de la manière suivante :

$$\tilde{g}(\mathbf{r}'^2 Q_0^2) = \int dk^+ \frac{d^2\mathbf{r}}{(2\pi)^2} |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2 \Theta(|\mathbf{r}| - |\mathbf{r}'|) \ln \left(\frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{r}'^2} \right). \quad (5.2)$$

La fonction \tilde{g} est sans dimension et l'échelle Q_0 est l'échelle caractéristique de $\int dk^+ |\phi(k^+, \mathbf{r})|^2$. Dans le cas d'un onium, cette échelle est perturbative : par exemple au Chapitre 4, dans le cas du photon virtuel, $Q_0^2 = Q^2$.

Rappelons que $y_q = Y - \ln(P^+/q^+)$ où Y est la rapidité totale de la collision. Dans notre dérivation, les particules de l'état final dont la rapidité est comprise entre y_{min} et $y_{min} + y_q$ sont décrites comme des particules qui habillaient la cible. Notre formule est valable dans la limite où y_q est un intervalle de rapidité suffisamment grand, auquel cas les effets dûs à une grande densité de gluons dans la cible sont importants. Rappelons que T_{gg} est l'amplitude de diffusion d'un dipôle de gluons sur la cible ; nous avons en effet montré au Chapitre 2 que le dipôle de gluon gg décrivait de manière effective une émission de gluon dans la limite de haute énergie.

Le gluon mesuré est émis avec la rapidité $y_{min} + y_q$, qui est proche de y_{max} , et on dit alors que le gluon est émis vers l'avant, le qualificatif *vers l'avant* faisant référence au projectile : le jet est émis dans la direction de propagation du projectile. Les particules de rapidité supérieure à celle du gluon, émises encore plus vers l'avant avec une rapidité comprise entre $y_{max} - \ln(P^+/q^+)$ et y_{max} , sont décrites comme des particules qui habillaient le projectile. Dans notre calcul, ce sont le quark et l'antiquark provenant de la dissociation de l'onium. Il est possible de généraliser la formule (5.1) pour inclure plus de particules à des rapidités supérieures à celle du gluon, en travaillant dans un repère où le projectile est habillé par plus d'un seul gluon. Ceci est réalisé dans l'article [IV], la fonction \tilde{g} correspondante y est explicitement calculée. Il en résulte une dépendance de \tilde{g} par rapport à q^+/P^+ .

5.1.2 La limite collinéaire

Considérons maintenant que le projectile est un hadron. Dans ce cas, la fonction d'onde $\phi(k^+, \mathbf{r})$ correspondante est caractérisée par une échelle $Q_0 \sim \Lambda_{QCD}$. On peut alors travailler dans ce que l'on appelle la limite collinéaire : $|\mathbf{q}|/Q_0 \gg 1$. La transformée de Fourier dans la formule (5.1) restreint l'intégration à des tailles $|\mathbf{r}'|$ telles que $|\mathbf{r}'| \lesssim 1/|\mathbf{q}|$. La fonction $\tilde{g}(\mathbf{r}'^2 Q_0^2)$

varie sur des tailles beaucoup plus grandes, de l'ordre $|\mathbf{r}'| \sim 1/Q_0 \gg 1/|\mathbf{q}|$, et peut donc être remplacée par $\tilde{g}(Q_0^2/\mathbf{q}^2)$. On obtient

$$q^+ \frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q}d\mathbf{q}^+} = \frac{4\alpha_s C_F}{\pi^2 \mathbf{q}^2} \tilde{g}(q^+/P^+, Q_0^2/\mathbf{q}^2) \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q) \quad (5.3)$$

où la seule information provenant du projectile vient de la fonction \tilde{g} , factorisée en dehors de l'intégrale sur \mathbf{r}' . Ceci est une manifestation de l'universalité de la limite collinéaire $|\mathbf{q}|/Q_0 \gg 1$. Cette limite est justifiée pour tout projectile de nature non perturbative (tel que $Q_0 \sim \Lambda_{QCD}$) et on voit que la dépendance de la section efficace par rapport à y_q est universelle : elle ne dépend pas de \tilde{g} et du projectile considéré. Comme la fonction \tilde{g} dans (5.3) varie peu pour $Q_0^2/\mathbf{q}^2 \ll 1$, la dépendance par rapport à \mathbf{q} de la section efficace provient aussi principalement de la transformée de Fourier de $\nabla_{\mathbf{r}'}^2 T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q)$.

Il est d'usage d'introduire la notation suivante :

$$\frac{2\alpha_s C_F}{\pi N_c} \tilde{g}(q^+/P^+, Q_0^2/\mathbf{q}^2 \ll 1) = \frac{q^+}{P^+} g\left(\frac{q^+}{P^+}, \mathbf{q}^2\right). \quad (5.4)$$

La fonction g est appelée densité de gluons dans le projectile, et elle est aussi universelle dans le sens qu'elle ne dépend que du projectile considéré. Par exemple quelle que soit la cible, c'est la même fonction g qui interviendra dans la section efficace. Elle est définie seulement dans le régime $|\mathbf{q}|/Q_0 \gg 1$ et il est d'usage de ne pas indiquer explicitement l'échelle Q_0 , même si g est sans dimension. L'interprétation du fait que g soit factorisée est simple. Les différents partons de la fonction d'onde du projectile interagissent de manière incohérente et il suffit d'ajouter les différentes contributions pour obtenir la section efficace : $g(q^+/P^+, \mathbf{q}^2)$ est la probabilité que le projectile contienne un gluon d'impulsion longitudinale q^+ , et d'impulsion transverse \mathbf{q} . Signalons que ceci n'est pas valable si q^+/P^+ est trop petit et tel que des effets de densité sont aussi importants dans le projectile. Il faudrait alors traiter de tels effets collectifs comme nous l'avons fait pour la cible. Cela dit nous nous sommes explicitement restreints à des cas où les effets de densité sont importants seulement pour la cible.

5.1.3 Production d'un jet vers l'avant à partir d'un hadron

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir la section efficace de production de jets vers l'avant dans la collision entre un hadron projectile et la cible (pour l'instant non précisée). Le résultat (5.3) décrit la production de jets initiés par des gluons, il nous reste à lui ajouter la contribution des jets initiés par des quarks et antiquarks. En fait ces contributions sont identiques à celle déjà calculée, sauf pour la densité de gluons qui est à remplacer par la densité de quarks ou d'antiquarks. Introduisons

$$f_{eff}(x_J, \mathbf{q}^2) = g(x_J, \mathbf{q}^2) + \frac{C_F}{N_c} (q(x_J, \mathbf{q}^2) + \bar{q}(x_J, \mathbf{q}^2)), \quad (5.5)$$

avec q et \bar{q} les densités de quark et antiquark dans le projectile. La variable $x_J = q^+/P^+ = e^{y_q - Y}$ dénote la fraction d'impulsion longitudinale du jet par rapport au projectile et f_{eff} est appelée la distribution de partons effective dans le proton. La section efficace de production de jets vers l'avant est alors

$$\frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q}dx_J} = \frac{2N_c}{\pi \mathbf{q}^2} f_{eff}(x_J, \mathbf{q}^2) \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}', \mathbf{b}; y_q). \quad (5.6)$$

Signalons que nous n'incluons pas les corrections dite d'hadronisation, qui décrivent la transition du parton émis vers le jet de particules. Ces corrections peuvent modifier la section efficace mais généralement pas de manière importante.

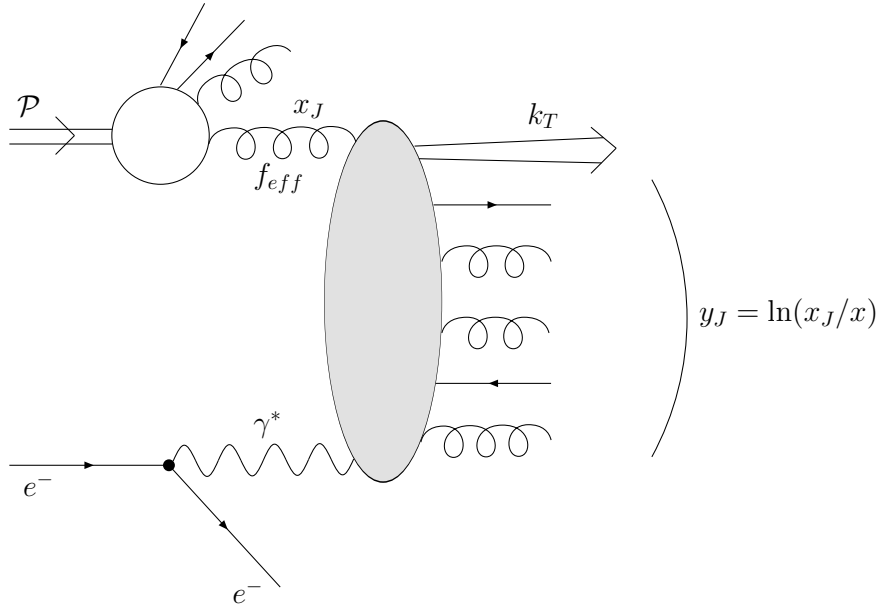


FIG. 5.1 – Production d'un jet vers l'avant dans une collision électron-proton. Le jet mesuré est représenté par une flèche, son impulsion transverse est k_T x_J est sa fraction d'impulsion longitudinale par rapport au proton incident. Δy est l'intervalle de rapidité entre le jet et la particule de plus petite rapidité dans l'état final.

5.2 Production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique

Nous considérons dans cette section la production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique. Contrairement au chapitre précédent, le proton joue le rôle du projectile et le jet est émis vers l'avant par rapport à la direction de propagation du proton. C'est l'électron qui va jouer le rôle de la cible. Plus précisément, à l'ordre dominant par rapport à α_{em} , il interagit par l'intermédiaire d'une paire quark-antiquark, cette dernière va donc jouer le rôle de la cible. Rappelons le lien entre l'électron et la paire quark-antiquark : l'électron interagit par l'intermédiaire d'un photon virtuel, comme représenté Figure 4.1, et la composante dominante (pour un photon de virtualité perturbative) dans la décomposition en état de Fock du photon est une paire quark-antiquark.

La section efficace est obtenue en mesurant l'électron sortant et le jet, en restant inclusif par rapport aux autres particules. En intégrant sur les angles azimuthaux des impulsions de l'électron et du jet, on obtient une section efficace quadruplement différentielle que l'on exprime en fonction des variables cinématiques x , Q^2 , x_J et k_T . Les variables x et Q^2 de la diffusion profondément inélastique ont été définies au chapitre précédent et $k_T = |\mathbf{q}| \gg \Lambda_{QCD}$ est l'impulsion transverse du jet. Rappelons que x_J est la fraction d'impulsion longitudinale du jet par rapport au proton. La section efficace de production de jet vers l'avant dans la collision électron-proton s'écrit :

$$\frac{d^{(4)}\sigma^{pe \rightarrow JXe}}{dx dQ^2 dx_J dk_T^2} = \frac{\alpha_{em}}{\pi x Q^2} \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \frac{d\sigma_T^{p\gamma^* \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2} + (1 - y) \frac{d\sigma_L^{p\gamma^* \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2} \right], \quad (5.7)$$

où $d\sigma_\lambda^{p\gamma^* \rightarrow JX}/dx_J dk_T^2$ est la section efficace de production de jet vers l'avant dans la collision photon-proton pour un photon virtuel de polarisation transverse ($\lambda = T$) ou longitudinale ($\lambda = L$). La production de jet vers l'avant est représentée Figure 5.1, avec les différentes variables cinématiques indiquées.

Pour finir, rappelons le lien entre le photon virtuel et la paire quark-antiquark, établi au chapitre précédent. La formule (4.27) exprime la factorisation de la section efficace totale σ_{tot}^λ dans la collision photon-proton en terme de la section efficace totale $\sigma(|\mathbf{r}|) = 2 \int d^2\mathbf{b} T(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ dans la collision d'un dipôle $q\bar{q}$ sur le proton. Cette factorisation s'applique aussi pour la section efficace $d\sigma_\lambda^{p\gamma^* \rightarrow JX}/dx_J dk_T^2$. Elle peut donc s'exprimer en terme de la section efficace $d\sigma^{p(q\bar{q}) \rightarrow JX}/dx_J dk_T^2$ pour la production de jet vers l'avant dans la collision du proton sur un dipôle $q\bar{q}$:

$$\frac{d\sigma_\lambda^{p\gamma^* \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2} = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz \Psi_\lambda(z, |\mathbf{r}|) \frac{d\sigma^{p(q\bar{q}) \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2}(|\mathbf{r}|) . \quad (5.8)$$

Rappelons que les fonctions d'ondes Ψ_λ décrivent la transition $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$, voir la formule (4.26) du Chapitre 4.

5.2.1 Prédiction de la QCD à haute énergie

La section efficace $d\sigma^{p(q\bar{q}) \rightarrow JX}/dx_J dk_T^2$ a été obtenue dans la section précédente. Plus précisément, la formule (5.6) donne cette section efficace pour une cible quelconque. Nous allons l'utiliser dans le cas où la cible est un onium (dénnoté par $(q\bar{q})$). Nous avons montré que l'émission du jet pouvait être décrite par un dipôle de gluons effectif :

$$\frac{d\sigma^{p(q\bar{q}) \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2}(r) = \frac{N_c}{k_T^2} f_{eff}(x_J, k_T^2) \int_0^\infty d\bar{r} J_0(k_T \bar{r}) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \sigma_{(q\bar{q})(gg)}(r, \bar{r}, y_J) \right) \quad (5.9)$$

avec $y_J = \ln(x_J/x)$. La formule (5.9) est valable dans la limite de haute énergie pour laquelle l'intervalle de rapidité y_J est très grand. $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}(r, \bar{r}, y_J)$ est la section efficace de collision entre un dipôle $q\bar{q}$ de taille r (l'onium cible) et un dipôle gg de taille \bar{r} avec une rapidité totale y_J .

Les formules (5.7)-(5.9) expriment l'observable des jets vers l'avant en termes de la section efficace $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}$ qui contient la dynamique de QCD à haute énergie : le problème est analogue à celui de la diffusion onium-onium (et donc à celui de la collision photon-photon [85, 86, 87, 88, 89]). Dans un régime d'énergie intermédiaire $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}$ est donnée par l'équation BFKL, puis pour de plus hautes énergies on entrera dans un régime de saturation dû aux effets de grande densité de gluons dans la fonction d'onde de la cible, autrement dit de l'onium $q\bar{q}$. Dans la suite, nous donnons les prédictions du domaine d'énergie BFKL et nous proposons une paramétrisation pour étudier le régime de saturation.

Le régime de l'évolution BFKL

Dans le régime d'énergie de l'évolution BFKL, pour lequel nous rappelons que les effets de densité ne sont pas encore importants, $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}$ est connue de manière exacte. En effet, la solution de l'équation BFKL est connue (voir formule (3.13)), et comme le processus de diffusion onium-onium est purement perturbatif, nous connaissons aussi la condition initiale $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}(r, \bar{r}, Y=0)$. Cette dernière s'obtient en calculant le processus à l'ordre dominant par rapport à α_s , nous obtenons (voir par exemple [90]) :

$$\sigma_{(q\bar{q})(gg)}(r, \bar{r}, 0) = 4\pi\alpha_s^2 \min(r^2, \bar{r}^2) \left\{ 1 + \ln \frac{\max(r, \bar{r})}{\min(r, \bar{r})} \right\} = 2\pi\alpha_s^2 r^2 \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{(\bar{r}/r)^{2\gamma}}{\gamma^2(1-\gamma)^2} . \quad (5.10)$$

Il est ensuite immédiat d'obtenir la dépendance par rapport à la rapidité dans le régime de l'évolution BFKL (les bornes de l'intégration sur γ sont les mêmes que dans (5.10) et ne sont plus données explicitement, elles seront dorénavant sous-entendues) :

$$\sigma_{(q\bar{q})(gg)}^{BFKL}(r, \bar{r}, Y) = 2\pi\alpha_s^2 r^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{(\bar{r}/r)^{2\gamma}}{\gamma^2(1-\gamma)^2} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y} . \quad (5.11)$$

Rappelons que la fonction $\chi(\gamma)$ est donnée par l'équation (3.14) où $\psi(\gamma)$ est la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(\gamma)$. La section efficace (5.11) croît exponentiellement avec la rapidité.

En insérant l'équation (5.11) dans (5.9) et (5.8), nous obtenons

$$\frac{d\sigma_{\lambda}^{p\gamma^* \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2} = \frac{4\pi N_c \alpha_s^2}{k_T^2 Q^2} f_{eff}(x_J, k_T^2) \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \left(\frac{Q^2}{k_T^2} \right)^\gamma \frac{4^\gamma \Gamma(\gamma) \tilde{\Psi}_\lambda(\gamma)}{(1-\gamma) \Gamma(2-\gamma)} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)y_J} \quad (5.12)$$

où nous avons défini les transformées de Mellin suivantes :

$$\tilde{\Psi}_\lambda(\gamma) = \int d^2\mathbf{r} (\mathbf{r}^2 Q^2)^{1-\gamma} \int_0^1 dz \Psi_\lambda(z, |\mathbf{r}|) . \quad (5.13)$$

Dans ce qui suit nous négligerons les masses des quarks devant Q^2 , ce qui est justifié car nous travaillerons toujours avec des grandes valeurs de Q^2 par la suite ($Q^2 > 5 \text{ GeV}^2$). Les transformées de Mellin $\tilde{\Psi}_\lambda(\gamma)$ sont alors données par

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_T(\gamma) \\ \tilde{\Psi}_L(\gamma) \end{pmatrix} = \frac{2\alpha_{em} N_c}{\pi} \sum_q e_q^2 \frac{1}{4^\gamma \gamma} \frac{\Gamma^2(1+\gamma) \Gamma^2(1-\gamma) \Gamma^2(2-\gamma)}{\Gamma(2-2\gamma) \Gamma(2+2\gamma) (3-2\gamma)} \begin{pmatrix} (1+\gamma)(2-\gamma) \\ 2\gamma(1-\gamma) \end{pmatrix} . \quad (5.14)$$

En insérant la formule (5.12) dans (5.7), on obtient la section efficace pour la production de jets vers l'avant dans le domaine d'énergie de l'évolution BFKL. On montre facilement que le résultat est identique à celui obtenu en utilisant ce qu'on appelle la k_T -factorisation [91, 92, 93, 94]. Ce n'est pas surprenant car c'est un formalisme dans lequel l'interaction entre le projectile et la cible est restreinte à un échange de deux gluons. Nous avons indiqué au Chapitre 3 que c'était le cas dans le régime dilué décrit par l'équation BFKL. Le seul paramètre indéterminé dans la formule (5.12) est $\bar{\alpha}$ qui apparaît dans l'exponentielle.

Le régime de saturation

Contrairement au cas du régime d'énergie BFKL, la section efficace onium-onium $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}^{sat}$ est encore inconnue pour de plus hautes énergies, telles qu'on entre dans le régime de saturation où les effets dus à une grande densité de gluons deviennent importants (pour des estimations numériques, voir [95, 96]). Pour prendre en compte des effets de saturation, nous allons proposer une paramétrisation phénoménologique. Nous considérons le modèle suivant, introduit dans [III] et inspiré des approches [72, 88] :

$$\sigma_{(q\bar{q})(gg)}^{sat}(r, \bar{r}, Y) = 4\pi\alpha_s^2 \sigma_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{r_{eff}^2(r, \bar{r})}{4R_s^2(Y)} \right) \right) . \quad (5.15)$$

Le rayon effectif de l'interaction onium-onium $r_{eff}(r, \bar{r})$ est défini à l'aide de la section efficace $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}(r, \bar{r}, Y=0)$ (voir formule (5.10)) :

$$r_{eff}^2(r, \bar{r}) \equiv \min(r^2, \bar{r}^2) \left\{ 1 + \ln \frac{\max(r, \bar{r})}{\min(r, \bar{r})} \right\} . \quad (5.16)$$

Pour le rayon de saturation R_s , que l'on peut identifier à l'inverse de l'échelle de saturation, nous utilisons la paramétrisation suivante :

$$R_s(Y) = e^{-\frac{\lambda}{2}(Y-Y_0)}/Q_0 , \quad Q_0 \equiv 1 \text{ GeV} . \quad (5.17)$$

Exprimons la section efficace (5.15) sous la forme d'une double transformée de Mellin :

$$\sigma_{(q\bar{q})(gg)}^{sat}(r, \bar{r}, Y) = 4\pi\alpha_s^2 \sigma_0 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \int \frac{d\tau}{2i\pi} \left(\frac{r^2}{4R_s^2(Y)} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{\bar{r}^2}{4R_s^2(Y)} \right)^\tau g(\gamma, \tau) \quad (5.18)$$

avec la fonction $g(\gamma, \tau)$ définie pour $Re(\tau)$, $Re(\gamma)$, et $Re(\gamma - \tau)$ tous compris entre 0 et 1. En inversant la formule (5.18), on obtient

$$g(\gamma, \tau) = \int_0^\infty du^2 \int_0^\infty d\bar{u}^2 u^{2\gamma-4} \bar{u}^{-2\tau-2} \left(1 - e^{-r_{eff}^2(u, \bar{u})}\right) = \frac{2\Gamma(\gamma - \tau)}{1 + \tau - \gamma} \{\Psi(1, 3 + \tau - \gamma, 2\tau) + \Psi(1, 3 + \tau - \gamma, 2 - 2\gamma)\}$$

où la fonction hypergéométrique confluyente de Tricomi $\Psi(1, a, b)$ peut être exprimée en termes de fonctions Gamma incomplètes [97]. En insérant (5.18) dans (5.9) et (5.8), nous obtenons

$$\frac{d\sigma_\lambda^{p\gamma^* \rightarrow JX}}{dx_J dk_T^2} = \frac{2\pi N_c \alpha_s^2 \sigma_0}{Q^2 k_T^2 R_s^2(y_J)} f_{eff}(x_J, k_T^2) \int \frac{d\gamma}{2i\pi} (4Q^2 R_s^2(y_J))^\gamma \tilde{\Psi}_\lambda(\gamma) \int \frac{d\tau}{2i\pi} (4k_T^2 R_s^2(y_J))^{-\tau} \frac{4^\tau \tau^2 \Gamma(\tau)}{\Gamma(1-\tau)} g(\gamma, \tau) . \quad (5.19)$$

En insérant ensuite la formule (5.19) dans (5.7), nous obtenons notre paramétrisation pour la section efficace de production de jets vers l'avant dans le régime de saturation. Les paramètres sont λ , Y_0 et la normalisation σ_0 .

5.2.2 Comparaisons avec les données du collisionneur HERA

Détermination des paramètres

Les premières données [98] publiées par les collaborations H1 et ZEUS concernaient l'observable $d\sigma/dx$. Les paramètres des descriptions BFKL [94] et saturation [III] ont été ajustés sur ces données avec la restriction $x < 10^{-2}$. Bien que les paramétrisations (5.12) et (5.19) correspondent à des régimes d'énergie différents, dans les deux cas les résultats sont obtenus avec des valeurs de χ^2 voisines de 1. Les valeurs des paramètres obtenues sont indiquées dans la Table I avec les valeurs de χ^2 (par degrés de liberté) correspondantes.

description	paramètres	$1/R_s(Y=0)$	$\chi^2/(d.d.l.)$
BFKL	$4\bar{\alpha} \ln(2) = 0.430$	—	12 (/13)
sat. forte	$\lambda = 0.402$ and $Y_0 = -0.82$	1.18 Gev	6.8 (/11)
sat. faible	$\lambda = 0.370$ and $Y_0 = 8.23$	0.22 Gev	8.3 (/11)

TAB. 5.1 – Résultats de l'ajustement des paramètres pour les descriptions données par les formules (5.12) (BFKL) et (5.19) (saturation) sur les premières données du collisionneur HERA pour la production de jets vers l'avant. Pour la paramétrisation (5.19), deux solutions sont possibles, avec des effets de saturation soit forts, soit faibles.

Dans le cas dénoté BFKL dans la Table I, le seul paramètre est $\bar{\alpha}$ et la valeur obtenue est $4\bar{\alpha} \ln(2) = 0.430$. Dans le cas du régime de saturation, les deux paramètres importants sont λ et Y_0 et l'ajustement a donné deux minima pour χ^2 : pour $(\lambda = 0.402, Y_0 = -0.82)$ et $(\lambda = 0.370, Y_0 = 8.23)$. Nous appellerons le premier cas *saturation forte* et le deuxième cas *saturation faible*. En effet, le premier minimum correspond à des effets de saturation forts car pour les valeurs de y_J typiques, l'échelle de saturation vaut environ 5 Gev, ce qui correspond aux valeurs typiques de k_T . Le deuxième minimum correspond à des effets de saturation faibles et reflète plutôt une description de type BFKL.

Avec les formules (5.12) et (5.19), les valeurs des paramètres données Table I déterminent complètement les prédictions du régime BFKL et deux paramétrisations pour le modèle de saturation. Nous allons à présent les comparer avec les nouvelles données sans aucun réajustement des paramètres, ce qui sera un test pertinent des effets de la QCD à haute énergie.

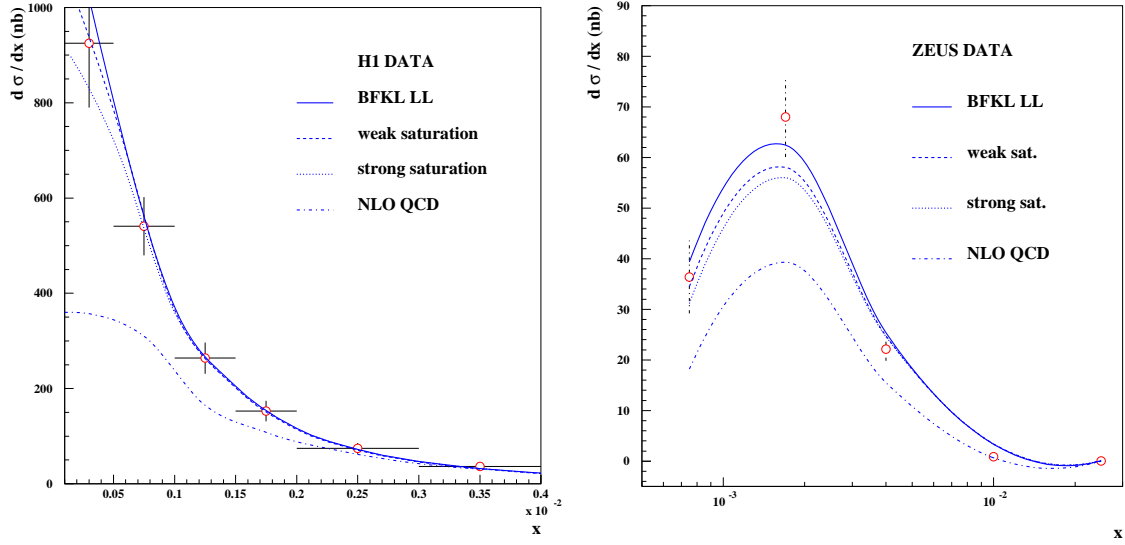


FIG. 5.2 – La section efficace $d\sigma/dx$ dans la production de jet vers l'avant en diffusion profondément inélastique. Les points de mesure viennent des collaborations H1 (figure de gauche) et ZEUS (figure de droite). Les courbes sont des comparaisons avec les prédictions BFKL LL (lignes pleines) et du modèle de saturation (lignes tiretées et en pointillé). Dans tous les cas, elles sont en accord avec les données. Pour comparaison, les prédictions sans resommation de logarithmes dominants (NLOQCD) sont indiquées.

Comparaisons avec les données de 2005

Nous souhaitons comparer la section efficace (5.7) obtenue à partir de la prédiction du régime d'évolution BFKL (5.12), ou à partir de la paramétrisation des effets de saturation (5.19), avec les données récentes mesurées au collisionneur HERA [99]. D'un côté, nos résultats théoriques concernent la section efficace (5.7) qui est différentielle par rapport à toutes les variables cinématiques du problème : x , Q^2 , x_J et k_T . De l'autre côté, les observables mesurées à HERA sont des sections efficaces qui sont moins différentielles : $d\sigma/dx$, $d\sigma/dQ^2$, $d\sigma/dk_T^2$, et $d\sigma/(dx dQ^2 dk_T^2)$. Par conséquent, en plus des transformations de Mellin inverses (qui sont des intégrations dans le plan complexe) à effectuer pour calculer les sections efficaces (5.12) et (5.19), nous devons réaliser un certain nombre d'intégrations sur les variables cinématiques, en prenant en compte au mieux les coupures expérimentales appliquées pour les différentes mesures. Une description détaillée de l'implémentation de ces intégrations est donnée dans les appendices de l'article [XVII] (voir aussi [100]). La méthode permet une comparaison directe des données avec les prédictions théoriques, mais elle ne permet pas de contrôler les normalisations absolues. Par conséquent dans la suite, nous comparons seulement la forme des courbes, sans discuter des normalisations. Insistons encore sur le fait que les paramètres de la Table I ne sont pas ajustés.

Commençons avec l'observable $d\sigma/dx$ qui a été mesurée par les collaborations H1 et ZEUS jusqu'à des valeurs de x plus petites que lors des premières mesures. La comparaison est montrée Figure 5.2 et nos trois paramétrisations décrivent bien les données. On ne peut pas vraiment distinguer les courbes, sauf aux petites valeurs de x pour lesquelles la courbe dénotée BFKL-LL est au dessus des courbes obtenues avec la paramétrisation des effets de saturation. Pour celles-ci, la courbe correspondant aux paramètres du cas *saturation faible* est au dessus de celle qui correspond aux paramètres du cas *saturation forte*. Sur la figure, BFKL-LL signifie que les prédictions correspondantes sont obtenues dans l'approximation des

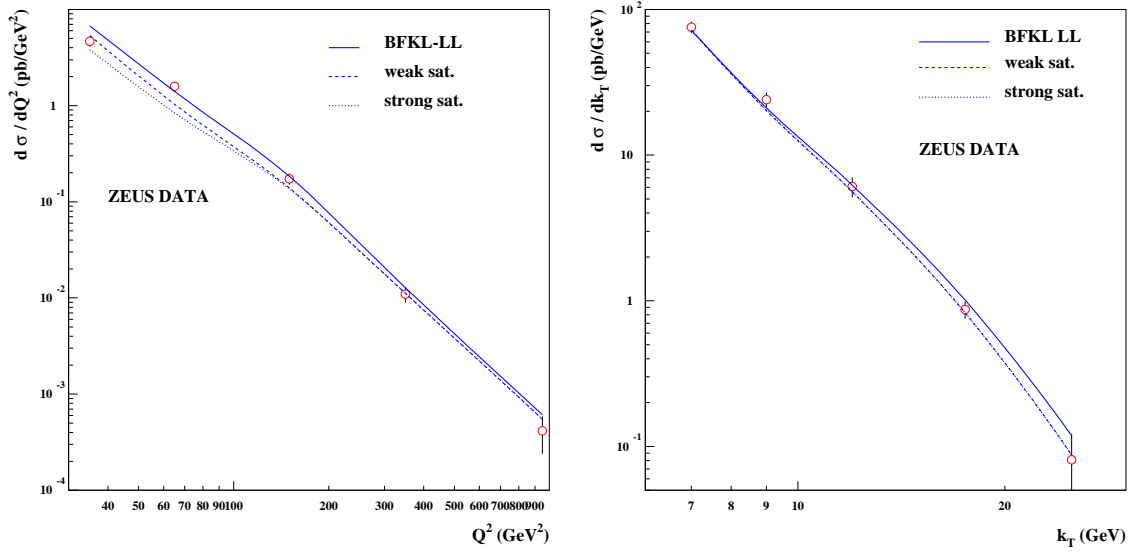


FIG. 5.3 – Les sections efficaces $d\sigma/dQ^2$ (figure de gauche) et $d\sigma/dk_T$ (figure de droite) dans la production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique. Les points de mesure viennent de la collaboration ZEUS. Les courbes sont des comparaisons avec les prédictions BFKL (lignes pleines) et celles du modèle de saturation (lignes tiretées et en pointillé). Pour les deux observables, il y a bon accord avec les données.

logarithmes dominants. La conclusion principale est la suivante [XVII] : les données semblent montrer la croissance BFKL vers les petites valeurs de x .

Pour comparaison, une prédiction sans resommation de logarithmes dominants est montrée sur la figure. Elle a été obtenue [99] avec le programme DISSENT [101] et aux plus petites valeurs de x , la prédiction est un facteur entre 1.5 et 2.5 en dessous des données, dépendant de la barre d'erreur. Même en ajoutant une partie des corrections de l'ordre sous-dominant (appelée contribution du photon résolu [102]), la courbe théorique reste en dehors des barres d'erreurs. C'est une différence intéressante avec la production de pions vers l'avant, une observable pour laquelle la contribution du photon résolu semble être suffisante pour décrire les données [103].

Discutons brièvement de deux autres sections efficaces représentées sur la figure 5.3 : $d\sigma/dQ^2$ et $d\sigma/dk_T$ mesurées par la collaboration ZEUS. Encore une fois les trois paramétrisations des effets de haute énergie décrivent correctement les données. C'est un résultat important que nous soyons capable de décrire ces dépendances en Q^2 et en k_T sans ajuster les paramètres. Rappelons qu'ils ont été ajustés pour décrire la dépendance en x des données antérieures.

Nous allons finalement comparer nos prédictions avec la section efficace triplement différentielle $d\sigma/dxdQ^2dk_T^2$ mesurée par la collaboration H1. L'intérêt de cette observable est qu'elle a été mesurée avec 9 coupures différentes sur la variable $r \equiv k_T^2/Q^2$ de $0.1 < r < 1.8$ à $9.5 < r < 80$. Cela permet de tester les limites de nos paramétrisations qui sont supposées être valides pour $r \sim 1$. En effet, elles ne prennent pas en compte des effets qui peuvent jouer un rôle important quand $r \ll 1$ ou $r \gg 1$. De telles situations créent une hiérarchie des impulsions transverses des gluons libérés à des rapidités inférieures à celles du jet vers l'avant. Cette hiérarchie est à l'origine de contributions que notre approche ne prend pas en compte [XVII].

La comparaison avec les données est montrée sur la Figure 5.4 et la tendance attendue est confirmée. Les cas pour lesquels $r \sim 1$ sont bien décrits par nos paramétrisations des effets de

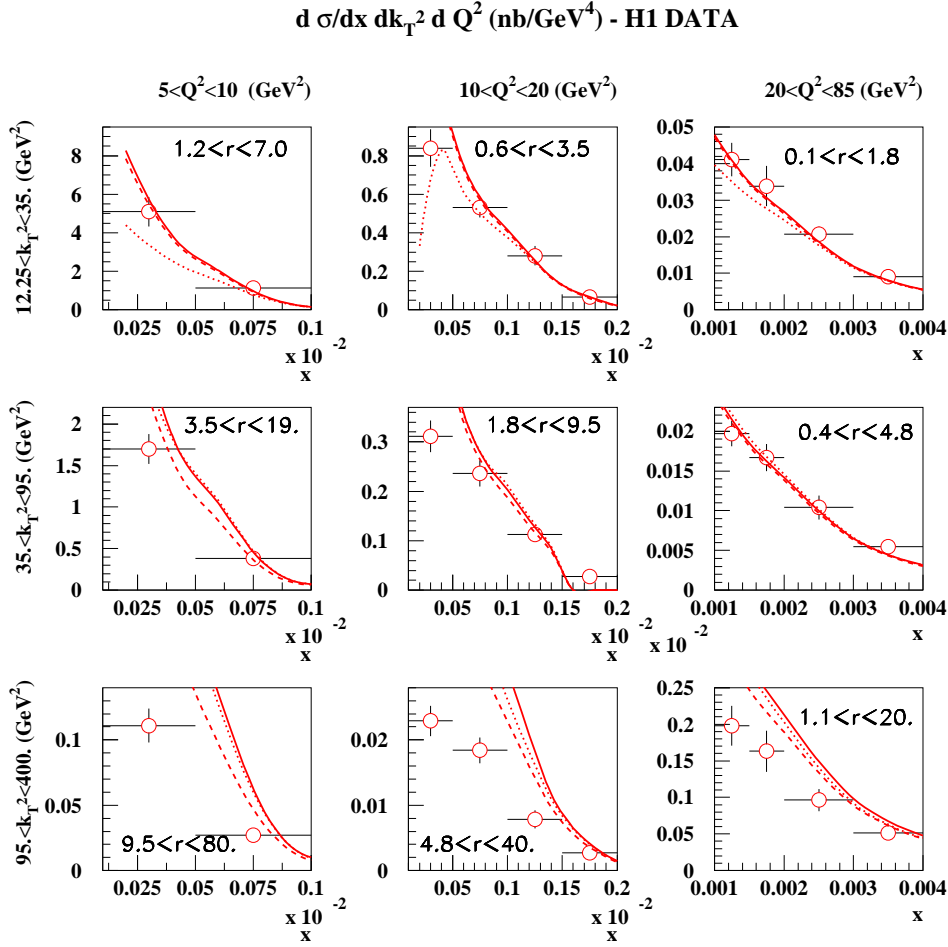


FIG. 5.4 – La section efficace $d\sigma/dx dk_T^2 dQ^2$ dans la production de jet vers l'avant en diffusion profondément inélastique. Les points de mesure viennent de la collaboration H1. Les courbes sont des comparaisons avec les prédictions BFKL (lignes pleines) et celles du modèle de saturation (lignes tiretées et en pointillé pour les paramétrisations *faible* et *forte* respectivement). Dans le régime $r \equiv k_T^2/Q^2 \sim 1$ pour lequel nos paramétrisations sont valides, il y a bon accord avec les données. Dans le régime $r \gg 1$, nos paramétrisations ne reproduisent pas les données, comme prévu à cause de la hiérarchie entre les échelles Q^2 et k_T^2 .

QCD à haute énergie, alors que les autres ne le se sont pas : pour ceux-ci, les prédictions sont au dessus des données, indiquant que la croissance BFKL vers les petites valeurs de x est trop importante. Au contraire, quand $r \sim 1$, les données montrent que la resommation BFKL est nécessaire. Les cas avec $r \gg 1$ montrent aussi une limitation des modèles de saturation car la paramétrisation *saturation forte* est au dessus de la paramétrisation *saturation faible*. Ceci indique que les modèles de saturation ne sont pas satisfaisants lorsque $k_T^2 \gg Q^2$.

Un dernier commentaire s'impose sur les paramétrisations de saturation. Contrairement à la formule BFKL (5.12) qui est une prédiction robuste de la QCD, la formule (5.19) vient d'un modèle phénoménologique. Le fait qu'elle décrive correctement les données n'implique pas les mêmes conclusions. Cela montre juste que, comme c'est le cas pour de nombreuses observables, les données sont compatibles avec des effets de saturation même pour des énergies auxquelles ils ne sont pas nécessaires. Autrement dit, aux énergies accessibles aujourd'hui, les jets vers l'avant ne permettent pas de distinguer le régime d'énergie BFKL du régime de

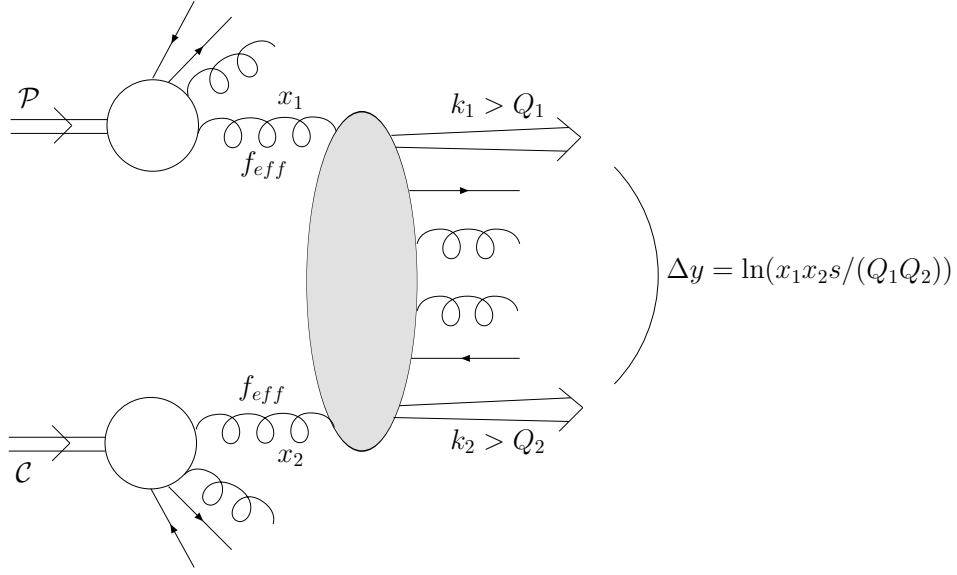


FIG. 5.5 – Production de jets de Mueller-Navelet dans une collision hadron-hadron. Les jets mesurés sont indiqués par des flèches, Q_1 et Q_2 sont des coupures inférieures sur leurs impulsions transverses k_1 et k_2 . x_1 et x_2 sont les fractions d'impulsion longitudinale des jets par rapport aux protons incidents. Δy est l'intervalle de rapidité entre les deux jets.

saturation. Il faudrait des énergies plus importantes pour pouvoir séparer ces deux régimes.

5.3 La production de jets de Mueller-Navelet

Dans cette section nous considérons la production de jets de Mueller-Navelet dans les collisions hadron-hadron [104]. C'est un processus étudié pour la première fois par Mueller et Navelet, caractérisé par la production de deux jets vers l'avant (en fait un vers l'avant et un vers l'arrière), un dans la direction de propagation du projectile, et un dans la direction de propagation de la cible. Des premières mesures ont pu être effectuées au collisionneur Tevatron qui réalise des collisions proton-antiproton. Les jets de Mueller-Navelet sont attendus en grand nombre au futur collisionneur proton-proton, le LHC, qui effectuera des collisions à des énergies jamais atteintes auparavant.

Dans la limite de haute énergie, la production de jets de Mueller-Navelet est un processus similaire à la production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique. Nous venons de voir qu'au collisionneur HERA, les mesures ne permettent pas de distinguer le régime d'énergie BFKL du régime de saturation. Notre but est d'estimer si les énergies atteintes au LHC seront assez grandes pour pouvoir être sensibles au régime de saturation, et de proposer des observables pour pouvoir clairement conclure sur l'origine des effets de haute énergie.

La section efficace de production de jets de Mueller-Navelet est obtenue en mesurant les deux jets vers l'avant et en restant inclusif par rapport aux autres particules. En intégrant sur les angles azimuthaux des impulsions des jets, on obtient une section efficace quadruplement différentielle. En appelant q_1 et q_2 les tri-impulsions des deux jets vers l'avant, la section efficace s'exprime en fonction de $k_1 = |\mathbf{q}_1| \gg \Lambda_{QCD}$ et $k_2 = |\mathbf{q}_2| \gg \Lambda_{QCD}$ les impulsions transverses des jets, et de $x_1 = q_1^+ / P^+$ et $x_2 = q_2^- / Q^-$ leur fraction d'impulsion longitudinale par rapport aux hadrons projectile et cible. Le jet émis dans la direction de propagation du projectile a une rapidité $y_{max} - \ln(1/x_1)$ proche de y_{max} et le jet émis dans la direction de propagation de la cible a une rapidité $y_{min} + \ln(1/x_2)$ proche de y_{min} . Dans la limite de haute

énergie, la différence de rapidité entre les deux jets $\Delta y = Y + \ln(x_1 x_2)$ atteint de grandes valeurs.

La production de jets de Mueller-Navelet est représentée Figure 5.5, où les variables cinématiques sont indiquées. Comme dans le papier original [104], nous allons considérer la section efficace intégrée par rapport aux impulsions transverses des jets k_1 et k_2 , avec des coupures inférieures que nous dénoterons Q_1 et Q_2 . Ces coupures expérimentales $k_1 > Q_1$ et $k_2 > Q_2$ sont nécessaires pour effectuer la mesure. Après intégration, la section efficace devient doublement différentielle par rapport à x_1 et à x_2 :

$$\frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dx_2} = \int_{Q_1^2}^{\infty} dk_1^2 \int_{Q_2^2}^{\infty} dk_2^2 \frac{d^{(4)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dk_1^2 dx_2 dk_2^2} . \quad (5.20)$$

En appelant \sqrt{s} l'énergie totale de la collision, l'intervalle de rapidité entre les jets est $\Delta y = \ln(x_1 x_2 s / (Q_1 Q_2))$. Rappelons que la rapidité totale Y est définie aux incertitudes près dues à la valeur de k_0 , l'impulsion transverse typique des particules de l'état final (voir la discussion du Chapitre 1). Dans la limite de haute énergie, ces incertitudes sont négligeables par rapport à la valeur de Y . Nous avons choisi $k_0^2 = Q_1 Q_2$.

5.3.1 Prédictions de la QCD à haute énergie

Nous considérons des valeurs de Q_1 et Q_2 dans le régime perturbatif, ainsi que des valeurs de x_1 et x_2 assez grandes pour pouvoir négliger les effets dus à de grandes densités de gluons dans le projectile ou la cible. Pour chacun des deux jets vers l'avant, la formule (5.6) est donc utilisable. En la symétrisant de manière à obtenir une émission de jet à la fois pour le projectile et pour la cible, on obtient [IV] la section efficace $d^{(4)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ} / (dx_1 dk_1^2 dx_2 dk_2^2)$. En effectuant ensuite l'intégration (5.20), la section efficace pour la production de jets de Mueller-Navelet s'écrit [I] :

$$\frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dx_2} = 4N_c^2 Q_1 Q_2 f_{eff}(x_1, Q_1^2) f_{eff}(x_2, Q_2^2) \int_0^{\infty} dr J_1(Q_1 r) \int_0^{\infty} d\bar{r} J_1(Q_2 \bar{r}) \sigma_{(gg)(gg)}(r, \bar{r}, \Delta y) . \quad (5.21)$$

Cette formule est valable dans la limite de haute énergie avec l'intervalle de rapidité entre les deux jets Δy suffisamment grand. Comme dans la section précédente, f_{eff} est la distribution de partons effective (5.5). Signalons que pour effectuer les intégrations sur k_1 et k_2 , nous avons remplacé $f_{eff}(x_1, k_1^2) f_{eff}(x_2, k_2^2)$ par $f_{eff}(x_1, Q_1^2) f_{eff}(x_2, Q_2^2)$. Ceci est justifié car la fonction $f_{eff}(x, k^2)$ varie peu avec k^2 . $\sigma_{(gg)(gg)}(r, \bar{r}, \Delta y)$ est la section efficace totale dans la collision de deux dipôles de gluons gg de taille r et \bar{r} avec une rapidité totale Δy . Chaque dipôle de gluon décrit de manière effective l'émission d'un jet, comme expliqué dans le Chapitre 2. La production de jets de Mueller-Navelet est ainsi exprimée en termes de $\sigma_{(gg)(gg)}$ qui contient la dynamique de la QCD à haute énergie. Comme pour la production de jet vers l'avant en diffusion profondément inélastique discutée précédemment, le problème est analogue à celui de la diffusion onium-onium. Dans un régime d'énergie intermédiaire, $\sigma_{(gg)(gg)}$ est donnée par l'équation BFKL puis pour de plus hautes énergies, on entrera dans un régime de saturation dû aux effets de grande densité de gluons. Dans la suite, nous donnons les prédictions du domaine d'énergie BFKL nous proposons une paramétrisation pour étudier le régime de saturation.

Insistons sur le fait que les grandes densités de gluons ne proviennent pas directement de la fonction d'onde de la cible, comme précisé ci-dessus. Elles proviennent de la fonction d'onde du dipôle de gluons de taille \bar{r} qui décrit l'émission du jet d'impulsion q_2 , et sont sondées par le dipôle de gluons de taille r qui décrit l'émission du jet d'impulsion q_1 . Un

dipôle gg est similaire à un dipôle $q\bar{q}$, c'est-à-dire à un onium. En augmentant Δy , la densité de gluons dans sa fonction d'onde augmente. En fait le problème est symétrique et les effets de densité peuvent être aussi décrits comme provenant du dipôle gg qui décrit l'émission du jet d'impulsion q_1 et sondés par le dipôle gg qui décrit l'émission du jet d'impulsion q_2 .

Le régime de l'évolution BFKL

Dans le régime d'énergie de l'évolution BFKL pour lequel les effets de densité ne sont pas encore importants, $\sigma_{(gg)(gg)}$ est connue de manière exacte. Tout d'abord, la section efficace à l'ordre dominant par rapport à α_s est connue, car c'est un processus purement perturbatif (en dehors d'un facteur de couleur, elle est identique à $\sigma_{(q\bar{q})(gg)}$, voir formule (5.10)). Ensuite, à partir de la solution de l'équation BFKL, on peut évoluer cette condition initiale pour obtenir :

$$\sigma_{(gg)(gg)}^{BFKL}(r, \bar{r}, Y) = \frac{2\pi N_c \alpha_s^2}{C_F} r^2 \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{(\bar{r}/r)^{2\gamma}}{\gamma^2(1-\gamma)^2} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}. \quad (5.22)$$

En utilisant la formule (5.21), on peut écrire la section efficace pour la production de jets de Mueller-Navelet dans le domaine d'énergie de l'évolution BFKL :

$$\frac{d\sigma^{BFKL}}{dx_1 dx_2} = \frac{32\pi N_c^3 \alpha_s^2}{C_F Q_1^2} f_{eff}(x_1, Q_1^2) f_{eff}(x_2, Q_2^2) \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \frac{(Q_1/Q_2)^{2\gamma}}{\gamma(1-\gamma)} e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)\Delta y}. \quad (5.23)$$

On montre facilement que le résultat est identique à celui obtenu en utilisant le formalisme de la k_T -factorisation [104], dans lequel nous rappelons que l'interaction entre le projectile et la cible est restreint à un échange de deux gluons. Le seul paramètre indéterminé dans la formule (5.23) est $\bar{\alpha}$ qui apparaît dans l'exponentielle. En s'appuyant sur l'analyse de la section précédente, nous attribuons à ce paramètre la valeur effective $\bar{\alpha}=0.16$, ajustée sur les données pour la production de jets vers l'avant en diffusion profondément inélastique.

Le régime de saturation

La section efficace $\sigma_{(gg)(gg)}^{sat}$ est inconnue dans le régime de saturation, pour lequel les effets dus à une grande densité de gluons sont importants. Pour prendre en compte des effets de saturation, nous proposons la paramétrisation suivante, introduite dans [I] :

$$\sigma_{(gg)(gg)}^{sat}(r, \bar{r}, Y) = \frac{4\pi N_c \alpha_s^2}{C_F} \sigma_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{r_{eff}^2(r, \bar{r})}{4R_s^2(Y)} \right) \right). \quad (5.24)$$

En dehors de la normalisation, cette paramétrisation est identique à celle utilisée dans la section précédente (voir la formule (5.15)) : le rayon effectif r_{eff} est défini par la formule (5.16) et le rayon de saturation par la formule (5.17). En insérant (5.24) dans (5.21), nous obtenons la paramétrisation suivante pour la section efficace de production de jets de Mueller-Navelet dans le régime de saturation [I] :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{sat}}{dx_1 dx_2} &= \frac{16\pi N_c^3 \alpha_s^2 \sigma_0}{C_F} f_{eff}(x_1, Q_1^2) f_{eff}(x_2, Q_2^2) \left\{ 1 - 2R_s^2(\Delta y) Q_1 Q_2 \int_1^\infty \frac{du}{1 + \ln(u)} \right. \\ &\quad \left. I_1 \left(\frac{2Q_1 Q_2 u R_s^2(\Delta y)}{1 + \ln(u)} \right) \left[\exp \left(-\frac{Q_1^2 + u^2 Q_2^2}{1 + \ln(u)} R_s^2(\Delta y) \right) + \exp \left(-\frac{Q_2^2 + u^2 Q_1^2}{1 + \ln(u)} R_s^2(\Delta y) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Les paramètres sont λ , Y_0 et la normalisation σ_0 . Dans ce qui suit, nous leur attribuons les valeurs obtenues au chapitre précédent. Pour le cas *saturation forte*, on a $\lambda = 0.402$ et $Y_0 = -0.82$ et pour le cas *saturation faible*, on a $\lambda = 0.370$ et $Y_0 = 8.23$. La normalisation n'est a priori pas déterminée, mais nous la fixons de telle sorte que pour des grandes impulsions et des petites valeurs de Δy , nous obtenions le résultat prédit pour le régime de l'évolution BFKL.

5.3.2 Phénoménologie

Nous souhaitons étudier la dépendance des sections efficaces (5.23) et (5.25) en fonction de l'intervalle de rapidité Δy . Nous souhaitons considérer des grandes valeurs de Δy , pour pouvoir observer la croissance de la section efficace en fonction de Δy due à l'évolution BFKL, puis ensuite le ralentissement de cette croissance dû à la saturation. Malheureusement ces observations ne sont pas possibles directement avec l'observable $d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}/dx_1dx_2$. Le problème est le suivant : Δy grand implique des grandes valeurs de x_1 et x_2 . Quand ces variables s'approchent de 1, leur valeur maximale, Δy grandit mais la section efficace décroît car son comportement est complètement dominé par les distributions de partons $f_{eff}(x_1, Q_1^2)$ et $f_{eff}(x_2, Q_2^2)$. Ces dernières sont très fortement décroissantes quand x_1 et x_2 s'approche de 1, elles compensent la croissance de la section efficace due à l'évolution BFKL.

Pour illustrer cette situation de manière quantitative, nous choisissons de fixer $\sqrt{s} = 14$ TeV, la valeur maximale de l'énergie au LHC. Signalons que la normalisation absolue de nos prédictions est fixée pour reproduire les données du Tevatron mesurées avec l'énergie $\sqrt{s} = 1.8$ TeV et publiées dans [105]. Ces données sont caractérisées par des barres d'erreur assez importantes ce qui implique une incertitude non négligeable sur la normalisation des prédictions pour le LHC. L'ordre de grandeur des sections efficaces est cependant indicatif. Introduisons les rapidités des deux jets :

$$y_1 = \ln \left(\frac{x_1 \sqrt{s}}{Q_1} \right), \quad y_2 = -\ln \left(\frac{x_2 \sqrt{s}}{Q_2} \right). \quad (5.26)$$

Plaçons nous dans une situation pour laquelle la cinématique d'un des jets est fixée ($Q_2 = 30$ GeV et $y_2 = -4.5$) et regardons la dépendance de la section efficace

$$\frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dy_1 dy_2} = x_1 x_2 \frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dx_2} \quad (5.27)$$

en fonction des variables cinématiques de l'autre jet, y_1 et Q_1 .

Sur la figure 5.6, nous représentons les résultats obtenus avec la prédiction du régime de l'évolution BFKL (formule (5.23)) et avec la paramétrisation du régime de saturation (formule (5.25)). Les différents graphes montrent la dépendance par rapport à y_1 pour différentes valeurs de Q_1 . On observe le comportement attendu : la section efficace décroît très rapidement quand x_1 s'approche de 1 (correspondant à y_1 s'approchant de la limite cinématique, voir les formules (5.26)). Pour chaque valeur de Q_1 sur la figure 5.6, on ne peut pas vraiment voir de différence de comportement entre la courbe en ligne pleine et la courbe tiretée. Par contre plus Q_1 est petit, plus les courbes sont distinctes. Ceci est un signe que, d'après notre paramétrisation, le régime de saturation devrait être accessible au LHC. Dans le cas de la paramétrisation des effets de saturation, nous n'avons montré que le cas *saturation forte*. Les courbes obtenues dans le cas *saturation faible* apparaîtraient au milieu des courbes correspondant aux prédictions du régime de l'évolution BFKL et des courbes correspondant au cas *saturation forte*.

Il est possible d'étudier le comportement de la section efficace $d\sigma/dy_1 dy_2$ dans d'autres situations que celle développée ici. C'est fait dans la publication [XVII] en considérant des jets émis de façon plus symétrique par exemple. La conclusion suivante se dégage : tester les effets dûs à la limite de haute énergie de QCD avec l'observable $d\sigma/dy_1 dy_2$ au LHC sera expérimentalement difficile car il faudra réaliser des mesures de précision. Insistons une nouvelle fois sur le fait que c'est dû aux distributions de partons qui suppriment la section efficace pour les grandes valeurs de x_1 ou de x_2 . Obtenir une grande précision n'est pas irréalisable à cause de la haute luminosité disponible au LHC, mais cela demandera une très bonne compréhension des erreurs systématiques.

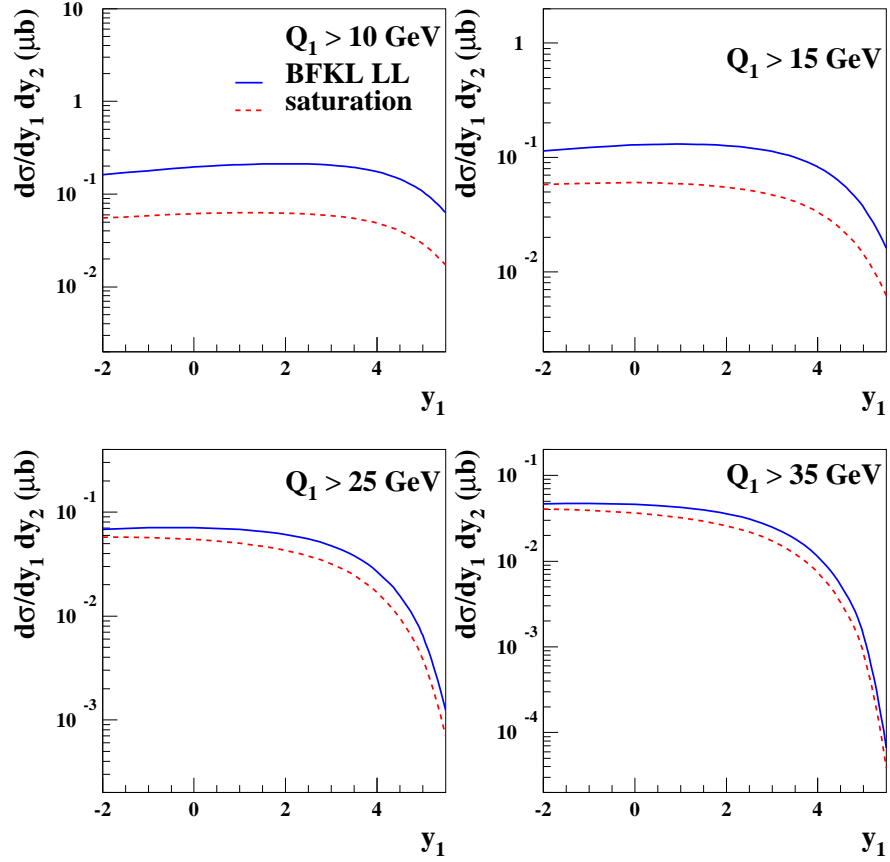


FIG. 5.6 – La section efficace $d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}/dy_1 dy_2$ pour la production de jets de Mueller-Navelet au LHC, en fonction de la rapidité d'un jet y_1 pour différentes valeurs de Q_1 . Les variables cinématiques de l'autre jet sont fixées à $Q_2=30$ GeV et $y_2=-4.5$. Les lignes pleines sont les prédictions du régime de l'évolution BFKL tandis que les lignes tiretées sont obtenues avec la paramétrisation de *saturation forte*.

Une observable adaptée

Il est possible de contourner le problème mentionné ci dessus, en considérant l'observable suivante :

$$R_{\Delta y/\Delta \tilde{y}} \equiv \frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dx_2}(Q_1, Q_2, \Delta y) \bigg/ \frac{d^{(2)}\sigma^{pp \rightarrow JXJ}}{dx_1 dx_2}(Q_1, Q_2, \Delta \tilde{y}) . \quad (5.28)$$

C'est un rapport de deux sections efficaces mesurées avec les variables cinématique x_1 , x_2 , Q_1 et Q_2 identiques mais pour deux énergies de collision s et \tilde{s} différentes, résultant en deux intervalles de rapidité Δy et $\Delta \tilde{y}$ différents. L'avantage de cette observable est évident : elle est indépendante des distributions de partons et permet d'étudier de manière plus directe l'influence des effets dûs à l'évolution BFKL et au régime de saturation [I, III, 94]. Par contre, elle impose de devoir effectuer des collisions à deux énergies différentes, en pratique cela peut poser des difficultés.

La prédiction obtenue avec la formule (5.23) qui décrit le régime BFKL est (après une approximation de point de selle pour la transformation de Mellin inverse) :

$$R_{\Delta y/\Delta \tilde{y}} \simeq \sqrt{\frac{\Delta \tilde{y}}{\Delta y}} \left(\frac{s}{\tilde{s}} \right)^{4\bar{\alpha} \ln(2)} . \quad (5.29)$$

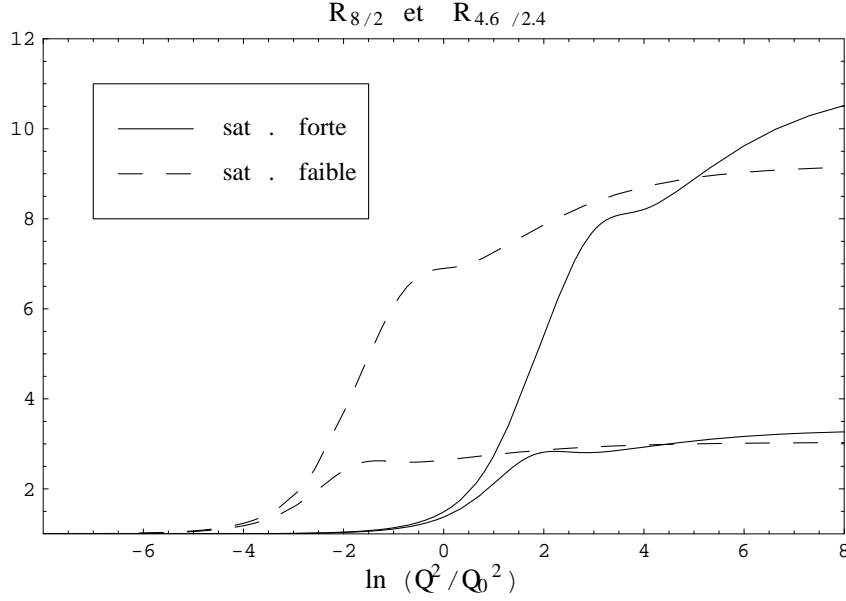


FIG. 5.7 – Les rapports de sections efficaces $R_{8/2}$ et $R_{4.6/2.4}$ obtenus à partir de la paramétrisation des effets de saturation (5.25). $R_{4.6/2.4}$ est défini par les intervalles de rapidité $\Delta y = 4.6$ et $\Delta y = 2.4$ déjà utilisés au Tevatron, les courbes correspondantes sont celles du dessous sur le graphe. $R_{8/2}$ est défini par les intervalles de rapidité $\Delta y = 8$ et $\Delta y = 2$ dans l’optique LHC, les courbes correspondantes sont les plus hautes sur le graphe. Les lignes pleines sont obtenues avec la paramétrisation *saturation forte* et les lignes tiretées avec la paramétrisation *saturation faible*.

Il a été possible d’effectuer des collisions proton-antiproton au collisionneur Tevatron pour deux énergies de collision différentes : $\sqrt{s} = 1.8$ TeV et $\sqrt{s} = 630$ GeV. La vérification de la valeur (5.29) ne fut pas un succès : les données ont indiqué une valeur pour $R_{4.6/2.4}$ supérieure à la prédiction [105]. Cependant, il a été discuté [106] que les mesures étaient biaisées par l’utilisation de coupures supérieures sur l’impulsion des jets, par un choix de coupures inférieures identiques, et par des corrections d’hadronisation.

Il serait intéressant de pouvoir mesurer le rapport (5.28) au LHC, où la production de jets de Mueller-Navelet sera plus importante qu’au Tevatron. Cela permettrait d’améliorer les mesures (au minimum en réduisant les erreurs statistiques) et donc de tester la prédiction (5.29) de manière plus précise. Dans cette optique, nous souhaitons aussi tester l’influence des effets de saturation. Pour cela, calculons le rapport $R_{\Delta y/\Delta \tilde{y}}$ avec la section efficace (5.25) qui paramétrise les effets de saturation. Les résultats pour $R_{8/2}$ et $R_{4.6/2.4}$ sont montrés Figure 5.7. $R_{4.6/2.4}$ est défini par les intervalles de rapidité $\Delta y = 4.6$ et $\Delta y = 2.4$ déjà utilisés au Tevatron et $R_{8/2}$ est défini par les intervalles de rapidité $\Delta y = 8$ et $\Delta y = 2$ accessibles au LHC. Nous avons représenté ces rapports en fonction de $Q \equiv Q_1 = Q_2$, ce qui permet d’être sensible à la transition vers le régime de saturation.

Pour des grandes valeurs de Q , les sections efficaces du numérateur et dénominateur de (5.28) sont toutes deux sensibles au régime dilué et les rapports tendent vers des valeurs compatibles avec (5.29). Quand Q diminue, comme $\Delta y > \Delta \tilde{y}$, la section efficace au numérateur de (5.28) est sensible au régime de saturation avant la section efficace au dénominateur. Pour cette raison, les rapports $R_{8/2}$ et $R_{4.6/2.4}$ sont clairement influencés par les effets de saturation [I, III] : en fonction décroissante de la variable Q , les rapports décroissent jusqu’à la valeur 1. On constate sur la figure 5.7 que cette décroissance est assez rapide.

Signalons que les valeurs des rapports $R_{8/2}$ et $R_{4,6/2,4}$ pour des grandes valeurs de Q ne sont pas exactement égales à la prédiction BFKL (5.29). Ceci est dû au fait que notre modèle de saturation (5.24) n'est pas exactement identique aux prédictions BFKL (5.22) dans le régime dilué. C'est aussi l'origine de la différence entre les valeurs obtenues pour le cas *saturation forte* et pour le cas *saturation faible*. En ce qui concerne les petites valeurs de Q , les prédictions n'ont de sens que pour $Q \gg \Lambda_{QCD}$, c'est-à-dire $\ln(Q/Q_0) > 0$. Dans le cas de la paramétrisation *saturation faible*, la zone de décroissance vers le régime de saturation ne se produit pas à l'intérieur du régime de validité, par contre c'est le cas de la paramétrisation *saturation forte*. Pour celle-ci, on voit aussi que dans le cas de $R_{8/2}$, la décroissance commence pour des valeurs de Q assez larges. Cela permet d'être optimiste par rapport à la possibilité de tester des effets de saturation au LHC.

L'observable (5.28) dans la production de jet de Mueller-Navelet est bien adaptée pour tester la limite de haute énergie de QCD dans les collisions proton-proton au LHC. Et il existe aussi des alternatives : au lieu de mesurer des jets, la production de mesons vecteurs vers l'avant est une observable intéressante [I]. L'intérêt est la possibilité de les détecter pour des impulsions transverses plus faibles que dans le cas des jets, et avec une précision plus grande. Dans l'optique de tester la limite de haute énergie de QCD, ces observations montrent l'importance de pouvoir réaliser des collisions à des énergies différentes au LHC.

CHAPITRE 6

Au delà des équations B-JIMWLK

Sommaire

6.1	La dualité entre le régime dense et le régime dilué	110
6.1.1	L'équation JIMWLK	110
6.1.2	La dualité dense-dilué	111
6.1.3	La hiérarchie duale de la hiérarchie de Balitsky	113
6.2	Une équation de Langevin pour l'évolution vers les hautes énergies . .	114
6.2.1	Les équations du modèle des dipôles	114
6.2.2	La hiérarchie de Balitsky complétée	115
6.2.3	Une équation de Langevin	118
6.3	L'équation FKPP stochastique	119
6.3.1	La limite de bruit faible	119
6.3.2	La distribution de probabilité de l'échelle de saturation	120
6.3.3	La limite de bruit fort	125
6.4	Une nouvelle loi d'échelle en QCD à haute énergie	128
6.4.1	Implications pour la diffusion profondément inélastique	129
6.4.2	Implications pour la production de gluons vers l'avant	131
6.A	Dérivation de la première équation de la hiérarchie du régime dilué . .	133

Dans le cadre de collisions entre deux particules hadroniques (un projectile \mathcal{P} et une cible \mathcal{C}), nous avons étudié dans les chapitres précédents les prédictions de la QCD dans la limite de haute énergie. Nous avons utilisé des repères particuliers en divisant l'intervalle de rapidité totale de la collision $Y \simeq \ln(s)$ de manière asymétrique : $Y = Y_{\mathcal{P}} + Y_{\mathcal{C}}$ tels que $Y_{\mathcal{P}} \simeq 0$ et $Y_{\mathcal{C}} \simeq Y$. Une telle configuration nous a permis de décrire le projectile par une superposition d'états de Fock (1.18) alors que la cible habillée de nombreux gluons mous est décrite par un champ classique (1.35). Nous avons obtenu que l'évolution de la fonction d'onde de la cible $|\Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\mathcal{A}]|^2$ par rapport à sa rapidité $Y_{\mathcal{C}}$ permet de prédire la dépendance en énergie des observables physiques.

Jusqu'ici nous avons travaillé dans un contexte où l'équation d'évolution (2.24) de la fonction d'onde $|\Phi_{Y_{\mathcal{C}}}[\mathcal{A}]|^2$ est l'équation JIMWLK. De manière équivalente, cette évolution est donnée par la hiérarchie d'équations de Balitsky (voir les équations (2.32) et (2.33)), écrite pour des amplitudes de diffusion de dipôles (équivalents de projectiles tests) sur la cible. Il a été réalisé très récemment que les équations B-JIMWLK sont en fait incomplètes. Le but de ce chapitre est de présenter ces nouveaux développements théoriques (dans l'état actuel des choses), ainsi que les implications phénoménologiques potentielles. Les résultats reproduits dans ce chapitre, connus ou originaux, ont été obtenus au cours des deux dernières années.

La première partie présente l'équation JIMWLK (2.24) discutée au Chapitre 2 et introduit la notion de dualité entre le régime dense et le régime dilué. Cette dualité révèle que les équations B-JIMWLK ne décrivent correctement que le régime dense et ne représentent qu'une partie de l'équation complète. Nous reprenons les résultats de l'article [XI] et dérivons la hiérarchie d'équations qui décrit le régime dilué. La deuxième partie discute de possibles modifications des résultats du Chapitre 3 pour l'amplitude de dipôle $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$, et de la relation entre les collisions à haute énergie en QCD et l'équation FKPP stochastique; les calculs des articles [XVIII, XXII] sont présentés. Enfin la troisième partie est dédiée aux premières études phénoménologiques dans le cadre des équations B-JIMWLK modifiées. Une nouvelle loi d'échelle est prédite pour la diffusion profondément inélastique à très haute énergie [XIX, XXIII], et pour la production de jets vers l'avant dans les collisions hadron-hadron [XX].

6.1 La dualité entre le régime dense et le régime dilué

D'une équation d'évolution fonctionnelle pour $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ du type (2.24), il est possible de déduire une équation pour n'importe quelle moyenne $\langle f \rangle_Y$:

$$\frac{d}{dY} |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 = H |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dY} \langle f \rangle_Y = \int D\mathcal{A} H |\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2 f[\mathcal{A}] . \quad (6.1)$$

Par exemple, comme signalé au Chapitre 2 dans le cas de l'amplitude de dipôle $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$, l'équation d'évolution JIMWLK pour la fonction d'onde au carré $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ permet d'obtenir les équations (2.32) et (2.33) de la hiérarchie de Balitsky. Nous allons à présent introduire l'équation JIMWLK. Bien qu'il agisse sur une fonction d'onde au carré, l'opérateur H est souvent appelé *Hamiltonien* dans la littérature. Nous utiliserons aussi cet abus de langage.

6.1.1 L'équation JIMWLK

Dans l'approximation des logarithmes dominants, l'équation fonctionnelle qui donne l'évolution de $|\Phi_Y[\mathcal{A}]|^2$ par rapport à Y est connue. Rappelons que, dans la jauge $\mathcal{A}^+ = 0$, le champ $\mathcal{A}_c^\mu(x^\nu) = \delta^{\mu-} \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x})$ représente le champ classique créé par la cible. Celle ci se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière le long de la direction des z négatifs, c'est-à-dire sur le cône de lumière suivant la direction des x^- . Même si avec notre choix de jauge le champ \mathcal{A}_c^- ne dépend pas de x^- , c'est une fonction sur un espace quadri-dimensionnel. Dans la suite, nous indiquons la dépendance de \mathcal{A}_c^- par rapport à x^- et nous introduisons le champ α_c , qui agit dans un espace tridimensionnel :

$$\alpha_c(x^+, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}, x^- = 0) , \quad \frac{\delta}{\delta \alpha_c(x^+, \mathbf{x})} \alpha_d(y^+, \mathbf{y}) = \delta_{cd} \delta(x^+ - y^+) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (6.2)$$

L'équation JIMWLK s'écrit en termes de α_c et de $\delta/\delta \alpha_c$ de la manière suivante :

$$H^{JIMWLK} |\Phi_Y[\alpha]|^2 = \int \frac{d^2 \mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{y}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \frac{\delta}{\delta \alpha_c(\mathbf{x})} \left[1 + W_A^\dagger(\mathbf{x}) W_A(\mathbf{y}) - W_A^\dagger(\mathbf{x}) W_A(\mathbf{z}) - W_A^\dagger(\mathbf{z}) W_A(\mathbf{y}) \right]^{cd} \frac{\delta}{\delta \alpha_d(\mathbf{y})} |\Phi_Y[\alpha]|^2 \quad (6.3)$$

où la dépendance des lignes de Wilson W_A par rapport à α_c est implicite. Dans (6.3), les dérivées fonctionnelles $\delta/\delta \alpha_c(\mathbf{x})$ doivent être entendues comme agissant à la plus grande valeur de x^+ . De manière équivalente, elles sont données par :

$$\frac{\delta}{\delta \alpha_c(\mathbf{x})} \equiv \lim_{x^+ \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\delta \alpha_c(x^+, \mathbf{x})} . \quad (6.4)$$

Avec l'équation (6.3), il est possible de redériver la hiérarchie d'équations de Balitsky présentée au Chapitre 2, ceci est fait explicitement dans [22].

6.1.2 La dualité dense-dilué

La dualité entre le régime dense et le régime dilué a été introduite par Kovner et Lublinsky [107]. C'est une propriété de l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dY} |\Phi_Y[\alpha]|^2 = H \left[i\alpha, \frac{\delta}{\delta\alpha} \right] |\Phi_Y[\alpha]|^2 \quad (6.5)$$

qui relie le régime dense $g_s\alpha \sim 1$ au régime dilué $\alpha \sim g_s$: à partir de l'Hamiltonien du régime dense, une transformation de dualité permet de déduire l'Hamiltonien du régime dilué, et vice-versa. Un Hamiltonien qui décrit les deux régimes de manière unifiée doit être invariant par la transformation de dualité. Ce n'est pas le cas de H^{JIMWLK} . Ceci a permis de comprendre que l'équation JIMWLK est valable seulement dans le régime dense (voir aussi [108] pour des conclusions similaires dans l'étude de l'équation BK). Nous donnons ici une dérivation de la propriété de dualité, et à partir de l'Hamiltonien JIMWLK, nous obtenons l'équation d'évolution (6.5) valable dans le régime dilué.

De manière générale, l'amplitude de diffusion élastique dans une collision projectile-cible quelconque peut s'écrire

$$S(Y) = \int D\alpha |\Phi_{Y-Y_P}[\alpha]|^2 \Xi_{Y_P}[\alpha] , \quad (6.6)$$

$S(Y)$ ne dépendant pas de la valeur de Y_P choisie pour faire le calcul. La fonctionnelle $\Xi_{Y_P}[\alpha]$ est l'amplitude de diffusion élastique du projectile sur une valeur particulière du champ α . Un exemple explicite a déjà été donné dans le cas où le projectile est un onium : dans le repère où l'onium est nu, la fonction $\Xi_0[\alpha]$ peut être lue sur l'équation (2.20) ; dans le repère où l'onium est habillé d'un gluon mou, la fonction $\Xi_{Y_P}[\alpha]$ peut être lue sur l'équation (2.30) (à la différence près que ces équations donnent $1 - S(Y)$). Comme toute observable physique, $S(Y)$ ne peut pas dépendre du repère utilisé pour la calculer :

$$\frac{d}{dY_P} S(Y) = 0 . \quad (6.7)$$

Les équations (6.5), (6.6) et (6.7) permettent d'obtenir l'équation d'évolution de $\Xi_Y[\alpha]$ (en utilisant l'intégration par partie) :

$$\frac{d}{dY} \Xi_Y[\alpha] = H \left[i\alpha, -\frac{\delta}{\delta\alpha} \right] \Xi_Y[\alpha] . \quad (6.8)$$

La preuve de la dualité est alors basée sur les hypothèses suivantes : le projectile, qui se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière le long de la direction des z positifs (c'est-à-dire sur le cône de lumière suivant la direction des x^+), peut être assimilé à un courant $J^\mu(x^\nu) = \delta^{\mu+} T^c J_c^+(x^\nu)$ d'ordre g_s et la fonction $\Xi_Y[\alpha]$ peut être écrite de la manière suivante [107, 109] :

$$\Xi_Y[\alpha] = \int D\rho^P |\Phi_Y^P[\rho^P]|^2 \mathcal{P} \exp \left\{ i \int d^2\mathbf{x} dx^+ \alpha_c(x^+, \mathbf{x}) \rho_c^P(x^+, \mathbf{x}) \right\} \quad (6.9)$$

où la densité de charge de couleur du projectile ρ_c^P est donnée par

$$\rho_c^P(x^+, \mathbf{x}) = \int dx^- J_c^+(x^+, \mathbf{x}, x^-) . \quad (6.10)$$

Dans la formule (6.9), la fonction $|\Phi_Y^P[\rho^P]|^2$ représente la fonction d'onde du projectile et pondère l'intégration sur la charge de couleur ρ^P , tandis que l'exponentielle ordonnée en x^+

est l'élément de matrice de diffusion pour l'interaction entre la charge $\rho^{\mathcal{P}}$ et la charge de la cible α . A partir des formules (6.8) et (6.9), nous obtenons

$$\frac{d}{dY} |\Phi_Y^{\mathcal{P}}[\rho^{\mathcal{P}}]|^2 = H \left[\frac{\delta}{\delta \rho^{\mathcal{P}}}, -i\rho^{\mathcal{P}} \right] |\Phi_Y^{\mathcal{P}}[\rho^{\mathcal{P}}]|^2 . \quad (6.11)$$

Nous avons obtenu une équation d'évolution pour la fonction d'onde du projectile dans le régime dilué $\rho_c^{\mathcal{P}} \sim g_s$. La distinction entre projectile et cible étant arbitraire, cette équation doit aussi être valable pour la fonction d'onde de la cible. Cela implique que dans le régime $\rho_c \sim g_s$, nous avons

$$\frac{d}{dY} |\Phi_Y[\rho]|^2 = H \left[\frac{\delta}{\delta \rho}, -i\rho \right] |\Phi_Y[\rho]|^2 \quad (6.12)$$

où maintenant la densité de charge de couleur ρ_c fait référence à la cible :

$$\rho_c(x^-, \mathbf{x}) = \int dx^+ J_c^-(x^+, \mathbf{x}, x^-) = - \int dx^+ \nabla^2 \mathcal{A}_c^-(x^+, \mathbf{x}, x^-) , \quad (6.13)$$

$$\frac{\delta}{\delta \rho_c(x^-, \mathbf{x})} \rho_d(y^-, \mathbf{y}) = \delta_{cd} \delta(x^- - y^-) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (6.14)$$

Le courant $J_c^-(x^\mu)$ permet d'obtenir à la fois $\rho_c(x^-, \mathbf{x})$ et $\alpha_c(x^+, \mathbf{x})$. La fonction d'onde de la cible peut être exprimée en fonction de ces deux variables de manière équivalente.

Introduisons la transformation suivante, dite transformation de dualité :

$$i\alpha_c(x^+, \mathbf{x}) \Longleftrightarrow \frac{\delta}{\delta \rho_c(x^-, \mathbf{x})} , \quad \frac{\delta}{\delta \alpha_c(x^+, \mathbf{x})} \Longleftrightarrow -i\rho_c(x^-, \mathbf{x}) . \quad (6.15)$$

Un Hamiltonien qui décrit les deux régimes de manière unifiée doit être invariant sous cette transformation (voir [110, 111]). Comme précisé ci-dessus, ce n'est pas le cas de H^{JIMWLK} , qui n'est valable que dans le régime dense. En appliquant la transformation de dualité (6.15), nous obtenons l'équation qui décrit le régime dilué :

$$\begin{aligned} H^{\text{dilué}} |\Phi_Y[\rho]|^2 = & - \int \frac{d^2 \mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{y}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \rho_c(\mathbf{x}) \left[1 + \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x}) \tilde{W}_A(\mathbf{y}) \right. \\ & \left. - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x}) \tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z}) \tilde{W}_A(\mathbf{y}) \right]^{cd} \rho_d(\mathbf{y}) |\Phi_Y[\rho]|^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

où les charges de couleur $\rho_c(\mathbf{x})$ doivent être entendues comme agissant à la plus grande valeur de x^- . De manière équivalente, elles sont données par :

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \lim_{x^- \rightarrow \infty} \rho_c(x^-, \mathbf{x}) . \quad (6.17)$$

Dans (6.16), les lignes de Wilson adjointes duales \tilde{W}_A dépendent implicitement de $\delta/\delta \rho$ et sont données par

$$\tilde{W}_A[\delta/\delta \rho](\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{P}} \exp \left\{ g_s \int dx^- \tilde{T}^c \frac{\delta}{\delta \rho_c(x^-, \mathbf{x})} \right\} . \quad (6.18)$$

$\tilde{\mathcal{P}}$ indique qu'il faut ordonner les dérivées fonctionnelles $\delta/\delta \rho_c$ selon leurs valeurs de x^- , la plus petite étant placée à gauche. Alors que l'équation JIMWLK (6.3) est naturellement exprimée en termes de $\alpha(x^+, \mathbf{x})$, le champ créé par la cible et sur lequel le projectile interagit, l'équation duale (6.16) est exprimée en terme de $\rho(x^-, \mathbf{x})$, la densité de charge de couleur de la cible.

6.1.3 La hiérarchie duale de la hiérarchie de Balitsky

L'équation JIMWLK (6.3) est équivalente à la hiérarchie de Balitsky (voir les équations (2.32) et (2.33)), écrites pour des amplitudes de diffusion de projectiles particuliers, des dipôles. Nous allons maintenant dériver la hiérarchie d'équations équivalente à l'équation (6.16), duale de l'équation JIMWLK. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le régime où la cible est diluée. Nous devons aussi considérer un modèle particulier dans lequel la cible est composée de dipôles [109, 112, XI, 113]. Dans le cadre de ce modèle, les dipôles jouent le rôle des gluons mous qui habillent la cible et la fonction d'onde $|\Phi_{Y_C}^d[\rho]|^2$ s'écrit

$$|\Phi_{Y_C}^d[\rho]|^2 \equiv \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2 \mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y_C) \prod_{i=1}^N R_{\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_i}[\delta/\delta\rho] \delta[\rho] . \quad (6.19)$$

Dans cette formule, $P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y_C)$ dénote la probabilité que la cible, de rapidité Y_C , soit habillée de N dipôles avec les coordonnées transverses $\{(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i)\}$ ($i = 1..N$). L'opérateur $R_{\mathbf{xy}}$ associé à chaque dipôle est donné par :

$$R_{\mathbf{xy}}[\delta/\delta\rho] = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger[\delta/\delta\rho](\mathbf{y}) \tilde{W}_F[\delta/\delta\rho](\mathbf{x}) \right) \quad (6.20)$$

avec la ligne de Wilson duale \tilde{W}_F obtenue de la manière suivante

$$\tilde{W}_F[\delta/\delta\rho](\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{P}} \exp \left\{ g_s \int dx^- T^c \frac{\delta}{\delta\rho_c(x^-, \mathbf{x})} \right\} . \quad (6.21)$$

Une hiérarchie d'équations peut alors être établie à partir de l'équation (6.16). En agissant sur la configuration à N dipôles, nous obtenons la n -ième équation :

$$H^{\text{dilué}} \prod_{i=1}^N R_{\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_i}[\delta/\delta\rho] \delta[\rho] = - \int \frac{d^2 \mathbf{x}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{y}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \rho_c(\mathbf{x}) \\ \left[1 + \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x}) \tilde{W}_A(\mathbf{y}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x}) \tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z}) \tilde{W}_A(\mathbf{y}) \right]^{cd} \rho_d(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^N R_{\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_i}[\delta/\delta\rho] \delta[\rho] . \quad (6.22)$$

En appendice, nous explicitons la dérivation qui permet d'écrire la première équation de la hiérarchie de la façon suivante (en gardant la dépendance de $R_{\mathbf{xy}}$ par rapport à $[\delta/\delta\rho]$ implicite) :

$$H R_{\mathbf{xy}} \delta[\rho] = \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zy}} - R_{\mathbf{xy}}] \delta[\rho] . \quad (6.23)$$

Ce calcul est fait dans les articles [XI, 113] ainsi que celui qui donne la deuxième équation de la hiérarchie sous la forme

$$H R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zy}} \delta[\rho] = \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}'}{2\pi} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{z})^2} (R_{\mathbf{xz}'} R_{\mathbf{z}'\mathbf{z}} R_{\mathbf{zy}} - R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zy}}) \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} (R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zz}'} R_{\mathbf{z}'\mathbf{y}} - R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zy}}) - \frac{1}{N_c^2} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{z})^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} \right) (2R_{\mathbf{xy}} - Q_{\mathbf{xzz}'\mathbf{yzz}'} - Q_{\mathbf{xz}'\mathbf{zyz}'\mathbf{z}}) \right] \delta[\rho] . \quad (6.24)$$

Dans cette équation, en plus des dipôles $R_{\mathbf{xy}}$, il apparaît une trace de six lignes de Wilson modifiées :

$$Q_{\mathbf{uvwyzx}}[\delta/\delta\rho] = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{u}) \tilde{W}_F(\mathbf{v}) \tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{w}) \tilde{W}_F(\mathbf{x}) \tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y}) \tilde{W}_F(\mathbf{z}) \right) , \quad (6.25)$$

sous-dominantes dans un comptage de puissance en $1/N_c$. La limite de grand N_c permet donc de restreindre la hiérarchie aux dipôles.

Cette nouvelle hiérarchie peut être considérée comme duale de la hiérarchie de Balitsky. En effet, elles sont identiques sous la tranformation (en changeant aussi $(1-Q)\delta[\rho]$ en $\langle M \rangle_Y$)

$$(1 - R_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1}) \dots (1 - R_{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_n}) \delta[\rho] \iff \langle T_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1} \dots T_{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_n} \rangle_Y . \quad (6.26)$$

La hiérarchie de Balitsky décrit l'évolution d'amplitudes de diffusion de projectiles (en l'occurrence des dipôles) sur la cible dans le régime dense lorsque α est d'ordre $1/g_s$. Cette nouvelle hiérarchie décrit l'évolution de la fonction d'onde de la cible dans le régime dilué lorsque ρ est d'ordre g_s (en l'occurrence dans un modèle où elle est composée de dipôles).

6.2 Une équation de Langevin pour l'évolution vers les hautes énergies

Simplifions pour commencer les équations de la hiérarchie du régime dilué en prenant la limite de grand N_c : toutes les équations s'obtiennent alors à partir de la première équation (6.23), en utilisant une formule similaire à celle de la dérivée d'un produit. Par exemple, la deuxième équation (6.24) s'écrit

$$H R_{\mathbf{xz}} R_{\mathbf{zy}} \delta[\rho] = (H R_{\mathbf{xz}}) R_{\mathbf{zy}} \delta[\rho] + R_{\mathbf{xz}} (H R_{\mathbf{zy}}) \delta[\rho] . \quad (6.27)$$

Il est ainsi possible d'écrire l'équation d'évolution de $|\Phi_{Y_C}^d[\rho]|^2$, la fonction d'onde de la cible (6.19) dans le modèle des dipôles, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} |\Phi_Y^d[\rho]|^2 = & \bar{\alpha} \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2 \mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y) \sum_{i=1}^N \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{x}_i)^2} \\ & \left[\prod_{j=1}^{i-1} R_{\mathbf{x}_{j-1} \mathbf{x}_j} \right] \left[R_{\mathbf{x}_{i-1} \mathbf{z}} R_{\mathbf{zx}_i} - R_{\mathbf{x}_{i-1} \mathbf{x}_i} \right] \left[\prod_{j=i+1}^N R_{\mathbf{x}_{j-1} \mathbf{x}_j} \right] \delta[\rho] . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dans la limite de grand N_c , il est possible de traduire l'équation (6.28) du régime dilué pour la fonction d'onde de la cible en équations pour les amplitudes de diffusion de (dipôles) projectiles sur la cible. En combinant les équations obtenues, valables dans le régime dilué, avec les équations déjà connues dans le régime dense (c'est-à-dire les équations de Balitsky dans la limite de grand N_c), nous pouvons alors obtenir une hiérarchie d'équations valable à la fois dans le régime dense et dans le régime dilué. Le but de cette section est de dériver cette hiérarchie, proposée par Iancu et Triantafyllopoulos [114].

6.2.1 Les équations du modèle des dipôles

L'équation (6.28) est équivalente [114, 115, 116] à l'équation maîtresse suivante pour les probabilités $P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y) = P_N(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N; Y)$ du modèle des dipôles (6.19) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} P_N(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N; Y) = & -\bar{\alpha} \left[\sum_{i=1}^N \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{x}_i)^2} \right] P_N(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N; Y) \\ & + \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i+1})^2}{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)^2 (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1})^2} P_{N-1}(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_N; Y) , \end{aligned} \quad (6.29)$$

avec $P_0 \equiv 0$. Introduisons à présent la densité de dipôles dans la cible, définie par

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y_C) = \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2 \mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y_C) \sum_{i=1}^N \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) . \quad (6.30)$$

En utilisant l'équation maîtresse (6.29) pour les probabilités P_N , nous obtenons l'équation suivante pour la densité de dipôle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y) &= \bar{\alpha} \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2 \mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y) \sum_{i=1}^N \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{x}_i)^2} \\ &\quad \left[\delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{z} - \mathbf{y}) + \delta^{(2)}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) - \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) \right] \\ &= \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 n(\mathbf{x}, \mathbf{z}; Y)}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2 n(\mathbf{z}, \mathbf{y}; Y)}{(\mathbf{z} - \mathbf{x})^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Par souci de simplicité, introduisons le noyau $K_{\mathbf{xyz}}$ pour écrire l'équation d'évolution (6.31) de la densité $n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)$ de la manière suivante :

$$\frac{d}{dY} n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y) = \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} K_{\mathbf{xyz}} \otimes n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y). \quad (6.32)$$

On peut montrer [109] que cette équation est équivalente à l'équation BFKL (3.2) étudiée au Chapitre 3, impliquant que sa solution est donnée par (3.13) (en y remplaçant $\mathcal{N}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par $n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)$) et est donc exponentiellement croissante avec la rapidité : $n(Y) \sim e^{\bar{\alpha}\chi(1/2)Y}$ avec $\chi(\gamma)$ donné par la formule (3.14).

De manière similaire à (6.30), nous pouvons définir des densités n_k de k -uplets de dipôles dans la cible. Par exemple, la densité de paire de dipôle est définie par

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}'; Y_C) &= \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2 \mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y_C) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) \\ &\quad \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}') \delta^{(2)}(\mathbf{x}_j - \mathbf{y}'). \end{aligned} \quad (6.33)$$

En utilisant l'équation maîtresse (6.29), il est possible de dériver les équations d'évolution des densités n_k [117]. Pour exemple, nous donnons l'équation pour n_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} n_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}'; Y) &= \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} (K_{\mathbf{xyz}} + K_{\mathbf{x'y'z}}) \otimes n_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}'; Y) \\ &+ \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}')^2 n(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; Y)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 (\mathbf{x}' - \mathbf{y}')^2} \delta^{(2)}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) + \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{y})^2 n(\mathbf{x}', \mathbf{y}; Y)}{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}') \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Les termes contenant n dominent la croissance de n_2 avec la rapidité tant que $n_2(Y) < n(Y)$, puis pour de plus grandes rapidités, la croissance est de type BFKL avec $n_2(Y) \sim e^{2\bar{\alpha}\chi(1/2)Y}$.

6.2.2 La hiérarchie de Balitsky complétée

Il est maintenant possible de traduire les équations pour les densités $n_k(Y)$ en équations pour les amplitudes de diffusion $\langle T^k \rangle_Y$ de k dipôles sur la cible, où T représente l'amplitude $T_{\mathbf{xy}}[\alpha]$ introduite au Chapitre 2 (voir la formule (2.21)). En effet, dans le cadre du modèle des dipôles (6.19), le lien entre les densités $n_k(Y)$ et les amplitudes $\langle T^k \rangle_Y$ est assez simple.

Lien entre densités $n_k(Y)$ et amplitudes $\langle T^k \rangle_Y$

Plaçons nous dans la jauge $\mathcal{A}^+ = 0$ pour laquelle la densité de charge ρ_c ne dépend pas de x^- . Elle est alors reliée au champ α_c de la manière suivante :

$$\rho_c(\mathbf{x}) = -\nabla^2 \int dx^+ \alpha_c^-(x^+, \mathbf{x}). \quad (6.35)$$

En utilisant $\nabla^2 \ln(\mathbf{x}^2) = 4\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x})$, la relation entre ρ_c et α_c peut s'inverser :

$$\int dx^+ \alpha_c^-(x^+, \mathbf{x}) = - \int \frac{d^2\mathbf{y}}{4\pi} \ln((\mathbf{x} - \mathbf{y})^2) \rho_c(\mathbf{y}) . \quad (6.36)$$

Il est possible d'exprimer $T_{\mathbf{xy}}[\alpha]$ en terme de ρ_c , dans le régime dilué (voir la formule (3.3) valable lorsque $\alpha \sim g_s$) :

$$T_{\mathbf{xy}}[\alpha] = \frac{\pi\alpha_s}{N_c} \int \frac{d^2\mathbf{u}}{4\pi} \frac{d^2\mathbf{v}}{4\pi} \ln\left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2}{(\mathbf{y} - \mathbf{u})^2}\right) \ln\left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v})^2}{(\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}\right) \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(g_s^2 \rho^2) . \quad (6.37)$$

En utilisant ensuite $\int d^2\mathbf{u} \rho_c(\mathbf{u}) = 0$ (la cible est non colorée), nous obtenons

$$\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y = -\frac{1}{g_s^2 N_c} \int d^2\mathbf{u} d^2\mathbf{v} A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v}) \langle \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) \rangle_Y \quad (6.38)$$

où nous avons introduit

$$A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\alpha_s^2}{8} \ln^2 \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}{(\mathbf{y} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{x} - \mathbf{v})^2} \right) . \quad (6.39)$$

D'autre part, dans le modèle des dipôles nous avons

$$\langle \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) \rangle_Y = \int D\rho \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) |\Phi_Y^d[\rho]|^2 , \quad (6.40)$$

où nous rappelons que la fonction $|\Phi_Y^d[\rho]|^2$ est donnée par la formule (6.19). En utilisant pour $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ (voir la formule (6.119) dans l'appendice) :

$$-\frac{1}{g_s^2 N_c} \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) R_{\mathbf{xy}} \delta[\rho] = \frac{C_F}{N_c} R_{\mathbf{xy}} \left(\delta^{(2)}(\mathbf{u} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{y}) + \delta^{(2)}(\mathbf{u} - \mathbf{y}) \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{x}) \right) \quad (6.41)$$

et le fait que dans la limite de grand N_c , les termes $\rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) \prod_{i=1}^N R_{\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_i} \dots \delta[\rho]$ se calculent à partir de (6.41) avec une formule similaire à celle de dérivée d'un produit [113], nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g_s^2 N_c} \langle \rho_c(\mathbf{u}) \rho_c(\mathbf{v}) \rangle_Y &= \sum_{N=1}^{\infty} \int \left(\prod_{i=0}^N d^2\mathbf{x}_i \right) P_N(\{\mathbf{x}_i\}, Y_C) \left(\sum_{i=1}^N \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{u}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{v}) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{v}) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{u}) \right) \int D\rho \prod_{i=1}^N R_{\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{x}_i} [\delta/\delta\rho] \delta[\rho] \\ &= \frac{1}{2} (n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; Y) + n(\mathbf{v}, \mathbf{u}; Y)) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Finalement, le lien entre la densité de dipôles dans la cible $n(Y)$ et l'amplitude de diffusion d'un dipôle projectile sur la cible $\langle T \rangle_Y$ s'écrit

$$\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y = \int d^2\mathbf{u} d^2\mathbf{v} A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v}) n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; Y) . \quad (6.43)$$

Il est maintenant manifeste que la fonction $A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v})$ représente l'amplitude de diffusion élastique (à l'ordre dominant par rapport à α_s) dans la collision du dipôle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) avec le dipôle (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Cette quantité peut aussi s'obtenir en calculant directement le processus (voir par exemple [90]). Il sera utile dans la suite d'inverser (pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) la relation (6.43) :

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y) + n(\mathbf{y}, \mathbf{x}; Y) = \frac{1}{4\pi^2 \alpha_s^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \nabla_{\mathbf{y}}^2 \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y . \quad (6.44)$$

Le lien (6.43) entre $\langle T \rangle_Y$ et $n(Y)$ est connu depuis les premières études du régime dilué et de l'équation BFKL, il permet de retrouver que dans le régime dilué, $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ obéit à l'équation (3.2) discutée au Chapitre 3. Nous verrons que dans le cas des amplitudes $\langle T^k \rangle_Y$, l'équation BFKL n'est plus suffisante pour décrire le régime dilué (si $k > 1$). Un calcul similaire à celui effectué pour obtenir (6.43) donne le lien entre la densité $n_2(Y)$ et l'amplitude $\langle T^2 \rangle_Y$:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mathbf{xy}} T_{\mathbf{x'y'}} \rangle_Y &= \int d^2\mathbf{u} d^2\mathbf{v} d^2\mathbf{u}' d^2\mathbf{v}' A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v}) A_0(\mathbf{x}', \mathbf{y}' | \mathbf{u}', \mathbf{v}') n_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{u}', \mathbf{v}'; Y) \\ &\quad + \int d^2\mathbf{u} d^2\mathbf{v} A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{v}) A_0(\mathbf{x}', \mathbf{y}' | \mathbf{u}, \mathbf{v}) n(\mathbf{u}, \mathbf{v}; Y) . \end{aligned} \quad (6.45)$$

L'interprétation physique est claire : le terme qui contient n_2 décrit l'interaction entre les deux dipôles projectiles (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ avec deux des dipôles qui habillent la cible (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ distincts, tandis que le terme qui contient n décrit l'interaction entre les deux dipôles projectiles (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ avec le même dipôle de la cible (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Cette deuxième contribution est sous-dominante dans la limite de haute énergie [XI, 113] et nous la négligerons dans la suite. C'est le cas parce que, comme expliqué précédemment, n croît avec Y comme $e^{\bar{\alpha}\chi(1/2)Y}$ alors que n_2 croît avec Y comme $e^{2\bar{\alpha}\chi(1/2)Y}$. De manière plus générale, le lien entre la densité $n_k(Y)$ et l'amplitude $\langle T^k \rangle_Y$ s'écrit de manière schématique $\langle T^k \rangle_Y = \int A_0^k n_k(Y)$.

Une nouvelle hiérarchie d'équations

A partir de la hiérarchie pour les densités n_k , on obtient finalement la hiérarchie pour les amplitudes $\langle T^k \rangle_Y$ dans le régime dilué. Dans le cas de $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$, on obtient l'équation BFKL (3.2), en accord avec les termes contenant $\langle T \rangle_Y$ dans la première équation de la hiérarchie de Balitsky (2.32). Dans le cas de $\langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y$, nous obtenons les termes contenant $\langle T^2 \rangle_Y$ dans la deuxième équation de la hiérarchie de Balitsky (2.33), plus la correction suivante :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dY} \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \right|_{corr} &= \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_s^2} \int \frac{d^2\mathbf{u}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{v}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{(\mathbf{u} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{v})^2} A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{z}) A_0(\mathbf{x}', \mathbf{y}' | \mathbf{z}, \mathbf{v}) \\ &\quad \nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2 \langle T_{\mathbf{uv}} \rangle_Y . \end{aligned} \quad (6.46)$$

De manière générale, dans l'équation pour $\langle T^k \rangle_Y$: les termes contenant $\langle T^k \rangle_Y$ sont les mêmes que ceux des équations de Balitsky (simplifiées avec la limite de grand N_c), il n'y a pas de termes contenant $\langle T^{k+1} \rangle_Y$, et il y a un terme contenant $\langle T^{k-1} \rangle_Y$. Cette hiérarchie d'équations, dérivée dans le cadre du modèle des dipôles (6.19) pour la cible et dans la limite de grand N_c , est valable dans le régime dilué $\alpha \sim g_s$. Au contraire la hiérarchie de Balitsky est valable dans le régime dense $\alpha g_s \sim 1$.

Pour obtenir une hiérarchie d'équation valable à la fois dans le régime dense et dans le régime dilué, il a été proposé de combiner [114, 118] les deux hiérarchies en ne gardant qu'une seule fois les termes communs de type BFKL. La première équation de cette nouvelle hiérarchie est la même que la première équation de la hiérarchie de Balitsky :

$$\frac{d \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y}{dY} = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} (\langle T_{\mathbf{xz}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y) . \quad (6.47)$$

La deuxième équation de la hiérarchie est par contre différente :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y &= \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}'}{2\pi} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{z})^2} (\langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}'z} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \right. \\ &\quad \left. - \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{z}'z} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \right) + \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2 (\mathbf{z}' - \mathbf{y})^2} (\langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zz}'} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{z}'y} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \\ &\quad \left. - \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zz}'} T_{\mathbf{z}'y} \rangle_Y \right) \Big] + \left. \frac{d}{dY} \langle T_{\mathbf{xz}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y \right|_{corr} , \end{aligned} \quad (6.48)$$

avec le terme supplémentaire donné par la formule (6.46). En général, l'équation pour $\langle T^k \rangle_Y$ contient des termes de type BFKL contenant $\langle T^k \rangle_Y$, des termes contenant $\langle T^{k+1} \rangle_Y$ provenant uniquement du régime dense, et des termes contenant $\langle T^{k-1} \rangle_Y$ provenant uniquement du régime dilué.

6.2.3 Une équation de Langevin

De manière remarquable, la nouvelle hiérarchie que nous venons de dériver est équivalente à une équation de Langevin. Pour montrer cela, étudions d'abord un cas simplifié sans dimensions transverses. Considérons une fonction stochastique T_Y qui obéit à l'équation de Langevin

$$\frac{dT_Y}{dY} = A[T_Y] + \sqrt{2B[T_Y]} \nu(Y) \quad (6.49)$$

avec A et B des polynômes et où le bruit ν est de moyenne nulle et autocorrélé de la façon suivante :

$$\langle \nu(Y) \rangle = 0 \quad \langle \nu(Y) \nu(Y') \rangle = \delta(Y - Y') . \quad (6.50)$$

Pour chaque réalisation du bruit, la solution de (6.49) est une réalisation de T_Y . En moyennant sur l'ensemble des réalisations il est possible de construire, à partir de T_Y , les fonctions $\langle T_Y^n \rangle$. On montre alors [119] que ces fonctions vérifient la hiérarchie d'équations

$$\frac{d\langle T_Y^n \rangle}{dY} = n\langle A[T_Y] T_Y^{n-1} \rangle + n(n-1)\langle B[T_Y] T_Y^{n-2} \rangle . \quad (6.51)$$

Signalons que ce résultat est valable dans le cas où l'équation de Langevin (6.49) est considérée avec la prescription d'Ito.

En généralisant ces résultats, on montre que les solutions de la hiérarchie d'équations de QCD peuvent s'obtenir à partir de l'équation de Langevin suivante (toujours considérée avec la prescription d'Ito) [114, 120]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dY} T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \left[T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + T_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right. \\ & \left. - T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) T_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] + \sqrt{\frac{(2\pi)^3 \bar{\alpha}}{\alpha_s^2}} \int \frac{d^2 \mathbf{u}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{v}}{2\pi} \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{u}, \mathbf{z}) \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{(\mathbf{u} - \mathbf{z})^2} \\ & \sqrt{\nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2} T_Y((\mathbf{u}, \mathbf{v})) \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, Y) \end{aligned} \quad (6.52)$$

où le bruit ν vérifie :

$$\langle \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, Y) \rangle = 0 , \quad (6.53)$$

$$\langle \nu(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, Y) \nu(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{z}', Y') \rangle = \delta^{(2)}(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \delta^{(2)}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta^{(2)}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \delta(Y - Y') . \quad (6.54)$$

En effet, les moyennes d'ensemble $\langle T_Y(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \dots T_Y(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \rangle$ obtenues à partir de l'ensemble stochastique des solutions $T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de l'équation (6.52) vérifient la même hiérarchie d'équations que les amplitudes de dipôles $\langle T_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1} \dots T_{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_n} \rangle_Y$ (voir les équations (6.47) et (6.48)). Nous pouvons ainsi écrire

$$\langle T_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1} \dots T_{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_n} \rangle_Y \equiv \langle T_Y(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \dots T_Y(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \rangle \quad (6.55)$$

où dans le membre de droite, la moyenne $\langle . \rangle$ est une moyenne sur l'ensemble des réalisations du processus stochastique, alors que la moyenne $\langle . \rangle_Y$ du membre de droite correspond à une moyenne sur la fonction d'onde de la cible.

6.3 L'équation FKPP stochastique

Les autocorrélations (6.54) sont particulières : elles sont non diagonales dans les deux premiers arguments du bruit (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Cette propriété n'est pas usuelle et nous ne savons pas s'il est possible d'utiliser un tel bruit dans des études numériques. Pour simplifier le problème, nous allons étudier des solutions homogènes $T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_Y(r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$. Nous avons déjà considéré de telles solutions au Chapitre 3, dans le cadre de l'étude de l'équation BK et de manière similaire, nous allons utiliser l'espace des impulsions. Introduisons ainsi

$$\tilde{T}(\tilde{L}, Y) = \int \frac{dr}{r} J_0(kr) T_Y(r) \quad (6.56)$$

où nous rappelons que $\tilde{L} = \ln(k^2/Q_0^2)$ avec Q_0 une échelle d'impulsion donnée par la condition initiale. Pour obtenir une équation de Langevin fermée pour \tilde{T} , il est nécessaire de faire une approximation dans le terme de bruit [114]. Nous ne détaillerons pas cette approximation ici, elle permet d'écrire l'équation pour \tilde{T} sous la forme

$$\frac{d}{dY} \tilde{T}(\tilde{L}, Y) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_{\tilde{L}}) \tilde{T}(\tilde{L}, Y) - \bar{\alpha} \tilde{T}^2(\tilde{L}, Y) + \bar{\alpha} \sqrt{\kappa \alpha_s^2 \tilde{T}(\tilde{L}, Y)} \nu(\tilde{L}, Y) \quad (6.57)$$

avec

$$\langle \nu(\tilde{L}, Y) \nu(\tilde{L}', Y') \rangle = \frac{2}{\pi \bar{\alpha}} \delta(\tilde{L} - \tilde{L}') \delta(Y - Y') . \quad (6.58)$$

Le facteur κ dans le terme de bruit provient de l'approximation mentionnée ci-dessus et doit être considéré comme un paramètre qui caractérise la force du bruit. Pour $\kappa = 0$, cette équation est l'équation BK pour des solutions homogènes (voir l'équation (3.34) que nous avons étudiée au Chapitre 3) qui appartient à la même classe d'équivalence que l'équation F-KPP. De manière similaire, il semble que l'équation (6.57) appartienne à la même classe d'équivalence que l'équation de F-KPP stochastique (sFKPP) [121, 122], même si cela est moins certain [123]. Dans tous les cas, l'équation (6.57) et l'équation sFKPP sont très similaires, ce qui a permis d'obtenir de nombreux résultats pour l'équation de QCD (6.57).

L'équation sFKPP (qui peut être obtenue en développant la fonction $\chi(\gamma)$ au deuxième ordre, voir par exemple [XVIII]) s'écrit

$$\frac{d}{dt} u(x, t) = \vartheta \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) + \lambda u(x, t) (1 - u(x, t)) + \varepsilon \sqrt{u(x, t) (1 - u(x, t))} \nu(x, t) \quad (6.59)$$

avec

$$\langle \nu(x, t) \nu(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t') . \quad (6.60)$$

La variable de temps t joue un rôle analogue à $\bar{\alpha}Y$ et la variable de position x joue un rôle analogue à \tilde{L} . L'analogie de la force du bruit $\kappa \alpha_s^2$ est $\lambda \varepsilon^2$ et ϑ est un paramètre qui contrôle la force de la diffusion.

6.3.1 La limite de bruit faible

Commençons par décrire qualitativement l'évolution de $T_Y(r)$ (ou de manière équivalente de $\tilde{T}(\tilde{L}, Y)$). Dans la limite de bruit faible $\kappa \alpha_s^2 \ll 1$, pour chaque réalisation de $T_Y(r)$ le bruit a un effet très faible, il est important seulement pour de très petites tailles r , lorsque l'amplitude $T_Y(r)$ est très petite. Pour la plus grande partie du front, chaque réalisation est en fait identique à une solution de l'équation BK : c'est une onde progressive $T_Y(r) = T(L - \bar{\alpha}vY)$ avec $L = -\ln(r^2 Q_0^2)$ où v est la vitesse de l'onde (voir le Chapitre 3). Rappelons que l'évolution de ces solutions est telle que pour différentes valeurs de Y , le front de l'onde en fonction de L a toujours la même forme et est simplement translaté proportionnellement à la différence

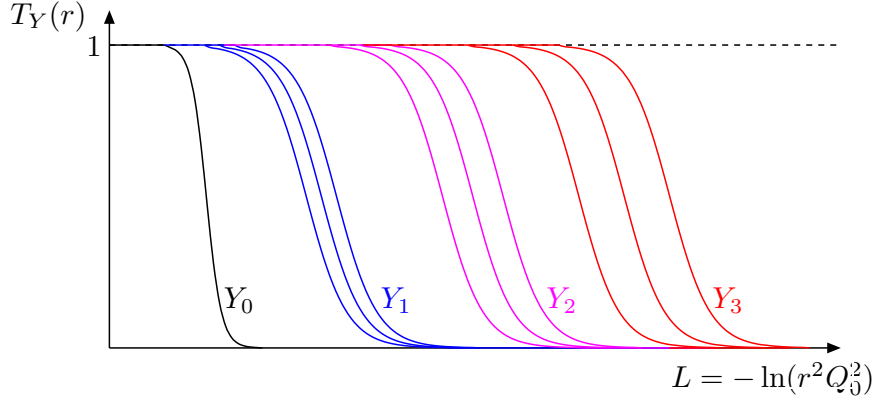


FIG. 6.1 – Représentation schématique de la stochasticité de l'évolution de $T_Y(r)$ à partir de la condition initiale $T_{Y_0}(r)$. Chaque réalisation, représentée en fonction de $L = -\ln(r^2 Q_0^2)$, est une onde progressive et l'effet du bruit est d'introduire une dispersion de la position des fronts d'ondes.

des rapidités considérées (voir les figures 3.3 et 3.4). L'effet principal du bruit est d'introduire une dispersion des événements : pour une rapidité donnée, les différentes réalisations de $T_Y(r)$ sont des fronts d'onde dont la position est stochastique. Ceci est schématisé Figure 6.1.

Il est possible de quantifier la dispersion des événements [124]. Rappelons que, pour chaque valeur fixée de la rapidité Y , la taille $r_s(Y)$ à partir de laquelle le terme non-linéaire devient important définit l'échelle de saturation $Q_s(Y) = 1/r_s(Y)$. La stochasticité de la position du front de l'onde représentée Figure 6.1 est ainsi équivalente à une stochasticité de $Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\bar{\alpha}vY}$. Appelons $P(\rho_s)$ la distribution de probabilité pour la variable $\rho_s = \ln(Q_s^2(Y)/Q_0^2)$. Les cumulants κ_n de cette distribution sont connus [125]. Le premier cumulant que nous dénoterons $\kappa_1 = \langle \rho_s \rangle = \ln(\bar{Q}_s^2(Y)/Q_0^2)$ est la valeur moyenne de ρ_s . Le second cumulant que nous dénoterons $\kappa_2 = \sigma^2$ est la variance de la distribution et les cumulants d'ordre supérieur lui sont tous proportionnels.

En résumé, nous avons

$$\kappa_1 = \langle \rho_s \rangle = \bar{\alpha}vY, \quad \kappa_2 = \sigma^2 = \bar{\alpha}DY, \quad \kappa_n = \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \frac{n!\zeta(n)}{\gamma_c^n} \sigma^2, \quad (6.61)$$

où $\zeta(n)$ est la fonction Zeta de Riemann et le coefficient v est à partir de maintenant relié à l'échelle de saturation moyenne \bar{Q}_s . Signalons que ces résultats sont valables dans la limite de haute énergie $\sigma^2 \gg 1$. Dans la limite de bruit faible dans laquelle ces résultats ont été obtenus, nous avons

$$v = v_c - \frac{\pi^2 \gamma_c^2 v''(\gamma_c)}{\ln^2(1/(\kappa \alpha_s^2))} \left(1 - \frac{3 \ln[\ln(1/(\kappa \alpha_s^2))]}{\ln(1/(\kappa \alpha_s^2))} \right), \quad D = \frac{\pi^4 \gamma_c v''(\gamma_c)}{3 \ln^3(1/(\kappa \alpha_s^2))}, \quad (6.62)$$

où nous rappelons que $v(\gamma) = \chi(\gamma)/\gamma$, que $\gamma_c \simeq 0.6275$ est solution de l'équation (3.27), et que $v_c = v(\gamma_c) \simeq 4.883$.

6.3.2 La distribution de probabilité de l'échelle de saturation

Dans cette partie, nous considérons des valeurs quelconques pour la force du bruit $\kappa \alpha_s^2$. Nous venons de voir que dans la limite de bruit faible, $\langle \rho_s \rangle$ et σ^2 sont proportionnels à Y (voir les formules (6.61)). En fait, cela semble être plus général : c'est confirmé par des simulations numériques [126, 123] pour des valeurs arbitraires de la force du bruit. Il est d'ailleurs observé

que, quand la force du bruit augmente, la vitesse v diminue et le coefficient de dispersion D augmente. En dehors de la limite de bruit faible, il n'existe pas d'expression analytique pour v et D , donc dans la suite nous considérerons v et D comme des paramètres. Nous allons à présent reproduire les résultats de l'article [XXII] et obtenir la probabilité $P(\rho_s)$ à partir des cumulants (6.61). La connaissance de $P(\rho_s)$ nous permettra ensuite de calculer des quantités moyennées sur l'ensemble des réalisations du processus stochastique.

Résultats analytiques

Notre point de départ est la fonction génératrice des moments de $P(\rho_s)$

$$\langle e^{\lambda \rho_s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s e^{\lambda \rho_s} P(\rho_s) . \quad (6.63)$$

La fonction génératrice des cumulants est alors

$$\ln \langle e^{\lambda \rho_s} \rangle = \sum_{n>0} \frac{\kappa_n \lambda^n}{n!} = \langle \rho_s \rangle \lambda + \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \sigma^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n) \lambda^n}{\gamma_c^n} . \quad (6.64)$$

En utilisant la représentation intégrale de la fonction Zeta

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u - 1} , \quad (6.65)$$

nous pouvons écrire la fonction génératrice des cumulants (6.64) de la manière suivante

$$\begin{aligned} \ln \langle e^{\lambda \rho_s} \rangle &= \langle \rho_s \rangle \lambda + \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \sigma^2 \frac{\lambda}{\gamma_c} \int_0^{\infty} du \frac{e^{\lambda u / \gamma_c} - 1}{e^u - 1} \\ &= \langle \rho_s \rangle \lambda - \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2} \lambda \left[\gamma_E + \psi \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] , \end{aligned} \quad (6.66)$$

où $\gamma_E \approx 0.577216$ est la constante d'Euler. Il est alors possible d'inverser la transformée de Laplace (6.63) pour obtenir la distribution de probabilité :

$$P(\rho_s) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\lambda}{2i\pi} \exp \left\{ -\lambda z - b\lambda \left[\gamma_E + \psi \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] \right\} \quad (6.67)$$

avec $c < \gamma_c$ et les notations

$$z = \rho_s - \langle \rho_s \rangle = \ln \left(\frac{Q_s^2}{\bar{Q}_s^2} \right) , \quad b = \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2} . \quad (6.68)$$

La variable z représente la distance entre le logarithme de l'échelle de saturation et sa valeur moyenne, et b est une redéfinition commode de la variance σ^2 .

Pour évaluer la probabilité $P(\rho_s)$ de manière plus approfondie, effectuons l'intégration par rapport à λ dans l'approximation du point de selle. Nous obtenons que le point de selle $\tilde{\lambda} \equiv \gamma_c(1 - \tilde{\epsilon})$ satisfait l'équation

$$z + b \left[\gamma_E + \psi(\tilde{\epsilon}) - (1 - \tilde{\epsilon})\psi^{(1)}(\tilde{\epsilon}) \right] = 0 , \quad (6.69)$$

où $\psi^{(n)}(x)$ est la fonction Polygamma définie par $\psi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \psi(x)$. La distribution de probabilité est ainsi donnée par

$$P(\rho_s) = \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[\psi^{(1)}(\tilde{\epsilon}) - \frac{1 - \tilde{\epsilon}}{2} \psi^{(2)}(\tilde{\epsilon}) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left[-\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 (1 - \tilde{\epsilon})^2 \psi^{(1)}(\tilde{\epsilon}) \right] . \quad (6.70)$$

Bien que l'équation (6.69) n'ait pas de solution analytique, nous pouvons la résoudre dans ces trois limites : $z/b \rightarrow 0$ qui correspond à $\tilde{\epsilon} \rightarrow 1$, $z/b \rightarrow \infty$ qui correspond à $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$; et $z/b \rightarrow -\infty$ qui correspond à $\tilde{\epsilon} \rightarrow \infty$. Détaillons ces trois possibilités.

- **La limite** $z/b \rightarrow 0$ **ou** $|z| \ll \gamma_c \sigma^2$. L'équation (6.69) devient (rappelons que $\psi(1) = -\gamma_E$ et $\psi^{(1)}(1) = \pi^2/6$)

$$\frac{z}{b} + \left[\gamma_E + \psi(1) - 2(1 - \tilde{\epsilon})\psi^{(1)}(1) \right] = 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} = 1 - \frac{3z}{\pi^2 b} . \quad (6.71)$$

En utilisant (6.70), nous obtenons

$$P(\rho_s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[1 - \frac{9\zeta(3)}{\pi^2} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} \right] \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) . \quad (6.72)$$

Nous avons gardé le premier terme sous dominant pour montrer que le maximum de la distribution de probabilité est obtenu pour la valeur constante

$$\frac{-9\zeta(3)}{\pi^2 \gamma_c} \approx -1.75 . \quad (6.73)$$

La valeur la plus probable de ρ_s n'est donc pas la valeur moyenne $\langle \rho_s \rangle$. Néanmoins pour $|z| \ll \gamma_c \sigma^2$, nous obtenons que la probabilité est Gaussienne :

$$P(\rho_s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) . \quad (6.74)$$

- **La limite** $z/b \rightarrow +\infty$ **ou** $z \gg \gamma_c \sigma^2$. L'équation (6.69) devient

$$-\left(\frac{z}{b}\right) + \frac{1}{\tilde{\epsilon}} + \frac{1 - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}^2} + \frac{\pi^2}{6} = 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{\pi^2} \frac{\gamma_c \sigma^2}{z}} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z} \right) . \quad (6.75)$$

Nous obtenons alors pour la probabilité :

$$P(\rho_s) \approx \frac{3^{1/4}}{2\pi\sigma} \left(\frac{\gamma_c \sigma^2}{z} \right)^{3/4} \exp \left[-\gamma_c z \left(1 - 2\sqrt{\frac{3}{\pi^2} \frac{\gamma_c \sigma^2}{z}} \right) \right] . \quad (6.76)$$

Cela correspond à une loi de puissance $P(\rho_s) \sim (Q_s/\bar{Q}_s)^{-2\gamma_c}$ pour la queue de la distribution aux grandes valeurs de Q_s .

- **La limite** $z/b \rightarrow -\infty$ **ou** $z \ll -\gamma_c \sigma^2$. L'équation (6.69) devient

$$\frac{z}{b} + \gamma_E + \ln(\tilde{\epsilon}) + 1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} = 0 \Rightarrow \tilde{\epsilon} = \exp \left(-\frac{\pi^2}{3} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} - 1 - \gamma_E \right) + 1 . \quad (6.77)$$

La probabilité correspondante est

$$P(\rho_s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{6} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} - \frac{1 + \gamma_E}{2} - \frac{3\gamma_c^2 \sigma^2}{\pi^2} \left[\exp \left(-\frac{\pi^2}{3} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} - 1 - \gamma_E \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} . \quad (6.78)$$

C'est une distribution de Gumbel qui décroît très vite lorsque $z \ll -\gamma_c \sigma^2$.

En augmentant z à partir de $z = -\infty$, la transition entre le régime (6.78) et le régime (6.74) se produit pour $z = -\gamma_c \sigma^2$ et la transition entre le régime (6.74) et le régime (6.76) se produit pour $z = \gamma_c \sigma^2$. Pour ces deux valeurs $\rho_s = \langle \rho_s \rangle \pm \gamma_c \sigma^2$, la probabilité est de l'ordre de $e^{-\gamma_c^2 \sigma^2}/\sigma$ et donc très petite dans la limite de haute énergie. Cela implique que $P(\rho_s)$ n'est pas Gaussienne seulement pour des fluctuations très improbables. Pour décrire l'ensemble stochastique des réalisations de $T_Y(r)$ (ou de manière équivalente de $\tilde{T}(\tilde{L}, Y)$), la distribution Gaussienne (6.74) est une bonne approximation.

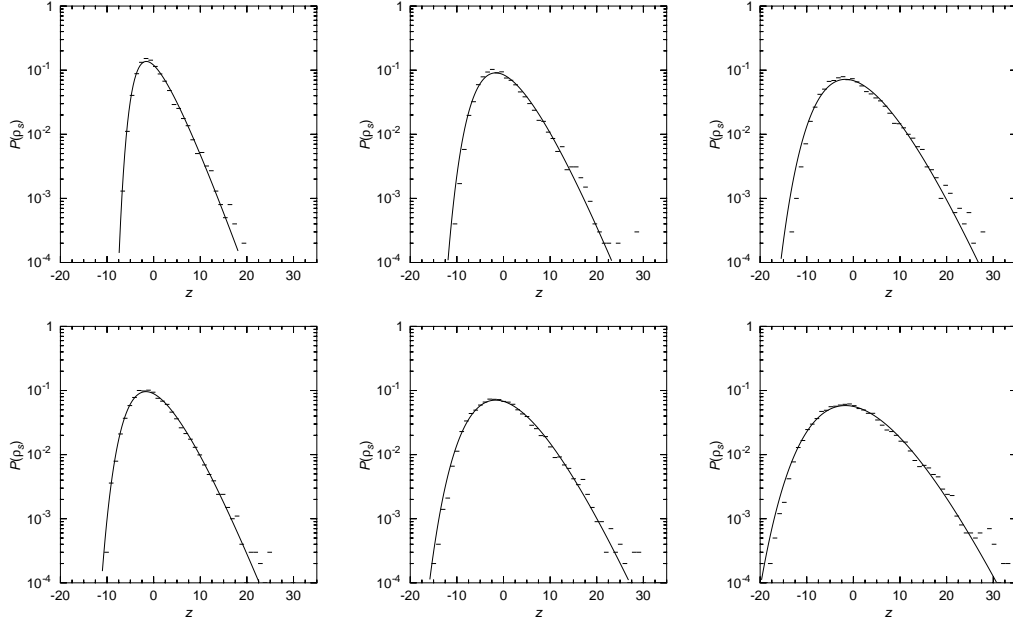


FIG. 6.2 – La distribution de probabilité de l'échelle de saturation $P(\rho_s)$ en fonction de $z = \rho_s - \langle \rho_s \rangle$ pour deux valeurs de la force du bruit $\kappa = N_c^2/(10\pi)$ (graphes du haut) et $\kappa = N_c^2/(2\pi)$ (graphes du bas) et pour trois valeurs de la rapidité $Y = 20, 30$ et 40 (de gauche à droite). Nous comparons la prédiction analytique (6.70) (lignes pleines) et les histogrammes obtenus à partir des résultats numériques de [126].

Résultats numériques

Nous allons à présent comparer la probabilité (6.70) avec des résultats obtenus par simulations numériques. Dans la référence [126], l'équation (6.57) a été résolue numériquement à partir d'une condition initiale fixée et pour $\bar{\alpha} = 0.2$. Plusieurs valeurs possibles pour la force du bruit ont été étudiées, et les caractéristiques représentées Figure 6.1 ont été confirmées : chaque réalisation de $\tilde{T}(\tilde{L}, Y)$ est une onde progressive (sauf pour $\tilde{L} \gg Y$ où les effets du bruit sont visibles) et les différentes réalisations sont dispersées.

Nous allons considérer les deux valeurs $\kappa = N_c^2/(10\pi)$ et $\kappa = N_c^2/(2\pi)$ pour lesquelles 10000 réalisations de $\tilde{T}(\tilde{L}, Y)$ ont été obtenues. Pour une valeur de Y donnée et pour chaque événement, l'échelle de saturation est extraite en résolvant $\tilde{T}(\rho_s, Y) = 0.2$. De ces résultats, il est possible d'obtenir la distribution de probabilité $P(\rho_s)$ en réalisant un histogramme normalisé. Il est aussi facile de calculer $\langle \rho_s \rangle(Y)$ et $\sigma^2(Y)$ et de vérifier que ces cumulants sont bien proportionnels à Y (si Y est suffisamment grand). Pour les trois valeurs $Y = 20, 30$ et 40 , la probabilité $P(\rho_s)$ ainsi obtenue est représentée Figure 6.2 en fonction de $z = \rho_s - \langle \rho_s \rangle$.

En résolvant numériquement l'équation de point de selle (6.69), nous pouvons calculer explicitement la formule (6.70) en fonction de $\langle \rho_s \rangle$ et σ^2 . La probabilité obtenue en utilisant les valeurs de $\langle \rho_s \rangle(Y)$ et $\sigma^2(Y)$ extraites des simulations numériques est comparée aux histogrammes de la Figure 6.2. L'accord est remarquable, ce qui confirme qu'autour de la valeur moyenne la probabilité est Gaussienne (au décalage du maximum près, qui est aussi en accord avec (6.73)). Nous observons aussi que la probabilité décroît très rapidement vers les valeurs de ρ_s négatives mais favorise au contraire les fluctuations vers de grandes échelles de saturation. Cependant les déviations par rapport au comportement Gaussien concernent seulement des fluctuations qui ont une très faible probabilité.

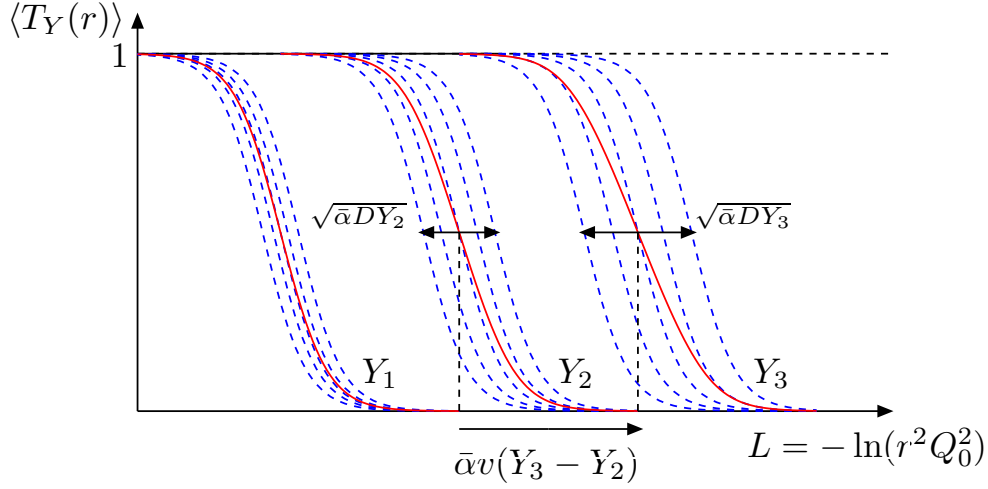


FIG. 6.3 – L'amplitude de diffusion physique $\langle T_Y(r) \rangle$ (lignes pleines) représentée en fonction de $L = -\ln(r^2 Q_0^2)$, et obtenue en moyennant sur les différentes réalisations de $T_Y(r)$ (lignes tiretées). Les réalisations $T_Y(r)$ sont des ondes progressives et lorsque la dispersion des événements est négligeable ($\bar{\alpha}DY \ll 1$), $\langle T_Y(r) \rangle$ est aussi une onde progressive. Lorsque la rapidité augmente, la dispersion devient importante ($\bar{\alpha}DY \gg 1$) et l'amplitude $\langle T_Y(r) \rangle$ n'est plus une onde progressive.

L'amplitude de diffusion moyennée $\langle T_Y(r) \rangle$

L'amplitude de diffusion $\langle T_Y(r) \rangle$, moyennée sur l'ensemble stochastique des réalisations de $T_Y(r)$ se calcule de la manière suivante

$$\langle T_Y(r) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s P(\rho_s) T(L - \rho_s) \quad (6.79)$$

en utilisant la distribution de probabilité $P(\rho_s)$ que nous venons de dériver. En écrivant cette formule, nous avons utilisé le fait que chaque réalisation de T_Y est une onde progressive : $T_Y(r) = T(L - \rho_s)$. Même si pour les petites valeurs de r ce n'est pas le cas, nous verrons que l'intégrale dans (6.79) n'est de toute façon pas sensible aux grandes valeurs négatives de ρ_s . Utiliser la formule (6.79) est donc suffisant. Cette procédure de moyennage est représentée Figure 6.3, à partir de laquelle nous pouvons inférer que, si la dispersion des événements est importante, l'amplitude physique $\langle T_Y(r) \rangle$ n'est plus une onde progressive.

En insérant la distribution de probabilité (6.67) dans (6.79) et en utilisant la représentation de Mellin

$$T(L) = \int \frac{d\lambda}{2i\pi} e^{-\lambda L} \tilde{T}(\lambda), \quad (6.80)$$

nous obtenons que l'amplitude physique est donnée par

$$\langle T_Y(r) \rangle = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\lambda}{2i\pi} \tilde{T}(\lambda) \exp \left\{ -\lambda Z - b\lambda \left[\gamma_E + \psi \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] \right\}. \quad (6.81)$$

Nous avons introduit la variable

$$Z = L - \langle \rho_s \rangle = -\ln(r^2 \bar{Q}_s^2(Y)). \quad (6.82)$$

L'intégration sur λ est de manière générale sensible au même point de selle (6.69) que dans le calcul de la probabilité. La différence principale est que $\tilde{T}(\lambda)$ possède un pôle en $\lambda = 0$,

qui est dû à la contrainte d'unitarité $T(L) \leq 1$. Ainsi, l'expression suivante est suffisante pour étudier l'intégrale (6.81) :

$$T(L - \rho_s) = \begin{cases} 1 & L \leq \rho_s \\ \exp[-\gamma_c(L - \rho_s)] & L > \rho_s \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\gamma_c - \lambda}. \quad (6.83)$$

L'expression ci-dessus pour $\tilde{T}(\lambda)$ peut être introduite dans (6.81) avec la restriction $0 < c < \gamma_c$ et les différentes limites intéressantes $|Z| \ll \gamma_c \sigma^2$, $Z \gg \gamma_c \sigma^2$ et $Z \ll -\gamma_c \sigma^2$ peuvent être étudiées de manière similaire aux cas traités précédemment.

Ceci est fait de manière détaillée dans [XXII] et la principale conclusion est la suivante. Dans le régime $|Z| \ll \gamma_c \sigma^2$, qui représente une grande fenêtre autour de $Z = 0$ (ou bien $r = 1/\bar{Q}_s(Y)$), il est suffisant d'utiliser une probabilité Gaussienne pour calculer $\langle T_Y(r) \rangle$ et nous obtenons

$$\langle T_Y(r) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s \exp\left(-\frac{(\rho_s - \langle \rho_s \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) T(L - \rho_s) \simeq \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (6.84)$$

Pour obtenir la deuxième égalité, nous avons négligé les termes sous-dominants dans la limite $|Z| \ll \gamma_c \sigma^2$ (et dans la limite de haute énergie $\sigma^2 \gg 1$). Ainsi, la fonction d'erreur complémentaire Erfc provient seulement de la partie $T = 1$ de (6.83). De manière plus générale, le résultat (6.84) ne dépend pas de la forme précise de $T(L - \rho_s)$ (voir l'équation (6.83)), car seul le pôle en $\lambda = 0$ joue un rôle important dans (6.79), et il provient de la région $T = 1$. En d'autres termes, l'amplitude $\langle T_Y(r) \rangle$ est dominée par les fluctuations de $T_Y(r)$ qui sont dans le régime de saturation. Cette caractéristique, qui est en fait valable dans le régime $Z \ll \gamma_c \sigma^2$, est remarquable : même si en moyenne l'amplitude de diffusion est petite $\langle T_Y(r) \rangle \ll 1$, la physique pertinente est la physique de la saturation. En conséquence de cette *nouvelle* physique, nous obtenons aussi

$$\begin{aligned} \langle T_Y(r_1) \dots T_Y(r_n) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s \exp\left(-\frac{(\rho_s - \langle \rho_s \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) T(L_1 - \rho_s) \dots T(L_n - \rho_s) \\ &\simeq \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\frac{-\ln(r_{<}^2 \bar{Q}_s^2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \langle T_Y(r_{<}) \rangle \end{aligned} \quad (6.85)$$

avec $L_i = -\ln(r_i^2 \bar{Q}_0^2)$ et $r_{<} = \min(r_1, \dots, r_n)$. Les moyennes $\langle T_Y(r_1) \dots T_Y(r_n) \rangle$ sont ainsi dominées par des configurations où tous les $T_Y(r_i)$ sont dans le régime de saturation. Ce type de corrélations (6.85) est très différent de celles rencontrées dans le cadre des équations B-JIMLWK [127, 128, 129].

Rappelons que ces résultats sont valables dans la limite $\sigma^2 \gg 1$, c'est à dire $Y \gg 1/D$. Dans le régime $Y \ll 1/D$, que l'on peut qualifier de régime intermédiaire, la dispersion des événements est négligeable et l'amplitude moyennée $\langle T_Y(r) \rangle$ est simplement une onde progressive de type (6.83). Formellement, la probabilité $P(\rho_s)$ tend vers la fonction $\delta(\rho_s - \langle \rho_s \rangle)$ et nous retrouvons les prédictions obtenues dans le cadre de l'équation BK. Ceci indique que le paramètre D joue un rôle important. Cependant comme précisé précédemment, notre connaissance de ce paramètre est limitée, nous le connaissons seulement dans la limite de bruit faible (voir les formules (6.62)).

6.3.3 La limite de bruit fort

Dans cette partie qui reprend les résultats de l'article [XVIII], nous considérons la limite de bruit fort $\kappa \alpha_s^2 \gg 1$. La connaissance de la limite de bruit fort, en complément des études de la limite de bruit faible, est importante pour mieux comprendre le régime de bruit intermédiaire, notamment dans l'interprétation de résultats numériques. Dans la limite $\kappa \alpha_s^2 \gg 1$, nous

obtenons une solution analytique de l'équation (6.57), ou plus précisément, de l'équation sFKPP (6.59). Le problème est soluble à l'aide d'une propriété de *dualité* [130] : dans la limite de bruit fort, l'équation sFKPP est équivalente à un processus de coalescence, exactement soluble [131, 132]. Nous obtenons ainsi une expression analytique pour toutes les moyennes $\langle u(x_1, t) \dots u(x_n, t) \rangle$. Insistons que la limite $\kappa\alpha_s^2 \gg 1$ ne doit pas être considérée comme une limite de couplage fort, $\kappa\alpha_s^2$ peut atteindre de grandes valeurs dans le régime perturbatif, si la valeur κ est suffisamment grande.

Un modèle de coalescence

Le point de départ est la relation de dualité entre l'équation sFKPP et certains processus de réaction-diffusion. Considérons le processus de réaction-diffusion suivant, pour des particules sur un réseau unidimensionnel avec des sites espacés d'une distance h : en chaque site, il peut y avoir création ou recombinaison de particules et celles-ci peuvent diffuser sur un site voisin. Dans la limite continue $h \rightarrow 0$, ce système est dual à l'équation (6.59), avec les taux de création, recombinaison et diffusion donnés par

$$A_i \xrightarrow{\lambda} A_i + A_i, \quad A_i + A_i \xrightarrow{\varepsilon^2/h} A_i, \quad A_i \xrightarrow{\vartheta/h^2} A_{i\pm 1} \quad (6.86)$$

où A_i désigne une particule sur le site i . Plus précisément, on montre que le système de particules et la solution de l'équation sFKPP $u(x, t)$ sont reliés de la manière suivante [130] :

$$\left\langle \prod_x [1 - u(x, t)]^{N(x, 0)} \right\rangle = \left\langle \prod_x [1 - u(x, 0)]^{N(x, t)} \right\rangle, \quad (6.87)$$

où $N(x, t)$ est la densité de particules du système de réaction-diffusion dans la limite continue.

En choisissant astucieusement les conditions initiales $u(x, 0)$ et $N(x, 0)$, la relation de dualité (6.87) se simplifie. Par exemple, si $N(x, 0) = \delta(x - x_0)$ (au départ il n'y a qu'une particule au site x_0), alors le membre de gauche de la relation (6.87) est simplement $1 - \langle u(x_0, t) \rangle$. De manière similaire, si au départ il y a n particules aux positions $x_1 < \dots < x_n$, le membre de gauche devient $\langle [1 - u(x_1, t)] \dots [1 - u(x_n, t)] \rangle$. En ce qui concerne la fonction u , nous allons utiliser la condition initiale $u(x, 0) = \theta(-x)$ qui identifie le membre de droite de la relation (6.87) avec la probabilité que tous les sites du système de particules avec $x \leq 0$ soient vides. Cela sera repris dans la suite.

La dualité (6.87) permet de relier la limite de bruit fort de l'équation sFKPP à un modèle de coalescence. Du point de vue du système de particule, la limite de bruit fort est définie par $\varepsilon^2 \gg 1$ et $\lambda \gg 1$ avec le rapport λ/ε^2 fixé et petit. Dans cette limite, deux particules sur le même site se recombinent systématiquement en une particule et le système se réduit à un modèle de coalescence : il peut y avoir au maximum une particule par site. Les particules diffusent sur les sites voisins avec le taux ϑ/h^2 et créent de nouvelles particules avec un taux ω/h où ω est donné par $\omega = 2\vartheta\lambda/\varepsilon^2$ (voir [XVIII] pour plus de détails). Ce modèle est exactement soluble [131, 132] et permet d'obtenir $\langle [1 - u(x_1, t)] \dots [1 - u(x_n, t)] \rangle$ dans la limite de bruit fort.

L'idée est d'introduire la probabilité $E(x, y; t)$ pour qu'au temps t , les sites entre x et $y \geq x$ soient vides. Nous obtenons que, à cause de la diffusion et de la création de particules, E vérifie l'équation différentielle suivante

$$\partial_t E(x, y; t) = \{ \vartheta(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \omega(\partial_y - \partial_x) \} E(x, y; t) \quad (6.88)$$

avec la condition aux limites $\lim_{y \rightarrow x} E(x, y; t) = 1$. Cette équation linéaire peut être résolue exactement. La densité de particules $N(x, t)$ s'obtient ensuite à partir de la dérivée de E :

$$N(x, t) = \partial_y E(x, y; t)|_{y \rightarrow x}. \quad (6.89)$$

De plus, la probabilité que tous les sites du système de particules avec $x \leq 0$ soient vides est simplement $E(-\infty, 0; t)$. Ainsi, avec nos choix de conditions initiales, la relation de dualité (6.87) devient

$$\langle [1 - u(x_1, t)] \dots [1 - u(x_n, t)] \rangle = E(-\infty, 0; t) \text{ avec } N(x, 0) = \delta(x - x_1) \dots \delta(x - x_n) . \quad (6.90)$$

Solution du modèle

Introduisons les variables sans dimension

$$\xi = \frac{\omega}{\vartheta}(x + y) , \quad \zeta = \frac{\omega}{\vartheta}(y - x) , \quad \tau = \frac{8\omega^2}{\vartheta}t . \quad (6.91)$$

Nous obtenons alors

$$E(x, y; t) = e^{-\zeta} + e^{-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_0^{\infty} d\zeta' G(\xi, \xi', \zeta, \zeta'; \tau) [E(\xi', \zeta'; 0) - e^{-\zeta'}] \quad (6.92)$$

où la fonction de Green G est donnée par

$$G(\xi, \xi', \zeta, \zeta'; \tau) = \frac{1}{\pi\tau} e^{-(\xi-\xi')^2/\tau} e^{-(\zeta-\zeta')/2} \left[e^{-(\zeta-\zeta')^2/\tau} - e^{-(\zeta+\zeta')^2/\tau} \right] \quad (6.93)$$

et où $E(\xi', \zeta'; 0)$ est la condition initiale.

La condition initiale $N(x, 0) = \delta(x - x_1) \dots \delta(x - x_n)$ se traduit sur E par (avec formellement $x_0 = -\infty$)

$$E(x, y; 0) = 1 - \sum_{i=1}^n \theta(x - x_{i-1}) \theta(x_i - x) \theta(y - x_i) . \quad (6.94)$$

Traisons explicitement le cas $E(x, y; 0) = 1 - \theta(x - x_0) \theta(y - x_0)$ ($N(x, 0) = \delta(x - x_0)$) qui permet d'obtenir $\langle u(x_0, t) \rangle$. En insérant cette condition initiale dans (6.92) et en utilisant (6.93), nous obtenons

$$\begin{aligned} E(x, y; t) = & \frac{1}{2} \left\{ \text{Erfc} \left(\frac{x-y-2\omega t}{\sqrt{8\vartheta t}} \right) - \text{Erfc} \left(\frac{x_0-y-\omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) \left[1 - \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{x_0-x+\omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) \right] \right. \\ & + \text{Erfc} \left(\frac{y-x+2\omega t}{\sqrt{8\vartheta t}} \right) \left. \right\} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega}{\vartheta}(y-x)} \left\{ 2 - \text{Erfc} \left(\frac{y-x-2\omega t}{\sqrt{8\vartheta t}} \right) - \text{Erfc} \left(\frac{x-y+2\omega t}{\sqrt{8\vartheta t}} \right) \right. \\ & \left. + \text{Erfc} \left(\frac{x_0-x-\omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) \left[1 - \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{x_0-y+\omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) \right] \right\} . \quad (6.95) \end{aligned}$$

La limite $x \rightarrow -\infty$ et $y = 0$ donne ensuite simplement

$$\langle u(x_0, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{x_0 - \omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) . \quad (6.96)$$

Nous obtenons donc, dans la limite de bruit fort, que la moyenne $\langle u(x_0, t) \rangle$ est équivalente à une superposition de fonctions $\Theta(x - x_0)$ avec une probabilité gaussienne de moyenne ωt et de variance $2\vartheta t$. La vitesse moyenne ω décroît comme $1/\varepsilon^2$ quand la force du bruit ε^2 augmente, et le coefficient de dispersion ϑ est constant. Pour étudier des valeurs de ε^2 intermédiaires, l'approche par la limite de bruit fort semble donc converger plus rapidement que l'approche par la limite de bruit faible (6.62), dans laquelle la vitesse se comporte comme $v_c - |\log(\varepsilon)|^{-2}$ et la dispersion comme $|\log(\varepsilon)|^{-3}$.

En insérant la condition initiale (6.94) dans (6.92) et répétant le calcul précédent, nous obtenons

$$\langle [1 - u(x_1, t)] \dots [1 - u(x_n, t)] \rangle = 1 - \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{x_1 - \omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) = 1 - \langle u(x_1, t) \rangle \quad (6.97)$$

en rappelant que x_1 est la plus petite des positions x_i . Cette relation peut ensuite se traduire en

$$\langle u(x_1, t) \dots u(x_n, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{x_n - \omega t}{2\sqrt{\vartheta t}} \right) = \langle u(x_n, t) \rangle \quad (6.98)$$

avec x_n la plus grande des positions x_i . Rappelons que dans l'analogie entre l'équation sFKPP (6.59) et l'équation de QCD (6.57), x est l'équivalent de $\ln(k^2/Q_0^2)$ et t est l'équivalent de $\bar{\alpha}Y$. Notre étude de la limite de bruit fort confirme ainsi que les corrélateurs sont déterminés par la plus grande des impulsions, ou de manière équivalente la plus petite des tailles.

Il est remarquable que de la limite de bruit fort donne des résultats similaires à ceux obtenus précédemment (voir les formules (6.84) et (6.85)). Cela montre l'universalité de la fonction d'erreur dans la limite de haute énergie. En autres, les résultats (6.84), (6.85), (6.96) et (6.98) ne dépendent pas des conditions initiales.

6.4 Une nouvelle loi d'échelle en QCD à haute énergie

Dans cette dernière section, nous étudions les implications phénoménologiques de la solution homogène (6.84) pour l'amplitude de diffusion d'un dipôle sur une cible hadronique dans la limite de haute énergie. Nous considérons la diffusion profondément inélastique et la production de gluons vers l'avant, traitées respectivement dans les articles [XIX] et [XX]. Nous rappelons que pour ces processus, les sections efficaces sont exprimées en termes de l'amplitude $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ pour un dipôle quark-antiquark, ou de l'amplitude $\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ pour un dipôle gluon-gluon.

L'amplitude $\langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ est identique à la moyenne $\langle T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ qui vérifie la même équation (6.47). De la même manière, l'amplitude $\langle \tilde{T}_{\mathbf{xy}} \rangle_Y$ s'obtient à partir de $\langle T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ et $\langle T_Y^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ (voir la formule (2.54) qui relie le dipôle $q\bar{q}$ au dipôle gg). En changeant les positions transverses \mathbf{x} et \mathbf{y} en variables de taille $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ et de paramètre d'impact $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ (voir la formule (2.25) qui introduit l'amplitude $T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y)$), nous pouvons écrire dans le cas d'une solution homogène :

$$T_{q\bar{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) = S(\mathbf{b}) \langle T_Y(|\mathbf{r}|) \rangle \quad (6.99)$$

où $S(\mathbf{b})$ est le profil en paramètre d'impact introduit au Chapitre 4.

Dans le régime $\sigma^2 = \bar{\alpha}DY \ll 1$ la dispersion des événements est négligeable et l'amplitude $\langle T_Y(r) \rangle$ est une onde progressive de type (6.83) (en remplaçant ρ_s par $\langle \rho_s \rangle = \ln(\bar{Q}_s^2/Q_0^2) = \bar{\alpha}vY$). Dans le régime $\bar{\alpha}DY \gg 1$ la dispersion des événements est importante et $\langle T_Y(r) \rangle$ n'est plus une onde progressive. Pour $Z = L - \langle \rho_s \rangle \ll \gamma_c \sigma^2$, l'amplitude est donnée par la formule (6.84). Pour obtenir l'expression de l'amplitude quand $Z \gg \gamma_c \sigma^2$, intégrons exactement la première ligne de la formule (6.84) (avec $T(L - \rho_s)$ donné par (6.83)) :

$$\begin{aligned} \langle T_Y(r) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s \exp \left(-\frac{(\rho_s - \langle \rho_s \rangle)^2}{2\sigma^2} \right) \left[\Theta(\rho_s - L) + \Theta(L - \rho_s) e^{-\gamma_c(L - \rho_s)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma} \right) + e^{\gamma_c^2 \sigma^2 / 2 - \gamma_c Z} \left[1 - \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{Z/\sigma - \gamma_c \sigma}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Nous obtenons ainsi que si $Z \gg \gamma_c \sigma^2 \gg 1$, alors $\langle T_Y(r) \rangle \simeq e^{-\gamma_c Z}$.

La formule (6.100) est commode car elle reproduit le comportement de $\langle T_Y(r) \rangle$ dans les différentes limites : $\sigma^2 \ll 1$, $\sigma^2 gg1$ et $Z \ll \gamma_c \sigma^2$, $Z \gg \gamma_c \sigma^2 \gg 1$ (pour une étude plus détaillée, voir [XIX]). Les variables r et Y interviennent par l'intermédiaire de $Z = -\ln(r^2 \bar{Q}_s^2(Y))$ et $\sigma^2 = \bar{\alpha} D Y$. Même si à partir des données de HERA qui sont en accord avec les prédictions du régime $\sigma^2 \ll 1$ (nous l'avons montré au Chapitre 4), nous savons que $\bar{\alpha} v \simeq 0.3$, nous n'avons aucune information sur la valeur de D . Ainsi dans la suite, nous dériverons les implications phénoménologiques du régime $\sigma^2 \gg 1$, en utilisant les variables Z et σ (et non pas r et Y).

6.4.1 Implications pour la diffusion profondément inélastique

La section efficace totale en diffusion profondément inélastique peut être obtenue de la formule (4.27) où nous rappelons que la fonction Ψ_λ (voir formule (4.26)) décrit la fluctuation du photon virtuel (de polarisation longitudinale $\lambda = L$ ou transverse $\lambda = T$) sur le dipôle $q\bar{q}$ qui subit l'interaction hadronique avec la cible. En utilisant (6.99), nous obtenons

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = 4\pi S_p \int_0^1 dz \int_0^\infty r dr \sum_{\lambda=L,T} \Psi_\lambda(z, r) \langle T_Y(r) \rangle \quad (6.101)$$

où la rapidité totale Y est reliée à la variable cinématique x (voir la formule (4.3)) par $Y = \ln(1/x)$.

Introduisons la variable

$$Z_Q = \ln \left(\frac{Q^2}{\bar{Q}_s^2} \right), \quad (6.102)$$

similaire à Z avec le remplacement $r \rightarrow 1/Q$. Nous allons estimer analytiquement la section efficace $\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2)$ dans le régime $Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2 \gg 1$. Pour cela on peut montrer qu'il est suffisant d'utiliser la formule (6.84) pour l'amplitude de dipôle, ce qui permet d'obtenir les estimations suivantes

$$\sigma_{tot}^L(x, Q^2) = \frac{N_c \alpha_{em} S_p}{6\pi} \sum_f e_f^2 \operatorname{Erfc} \left(\frac{Z_Q}{\sqrt{2} \sigma} \right), \quad (6.103)$$

$$\sigma_{tot}^T(x, Q^2) = \frac{N_c \alpha_{em} S_p}{6\pi} \sum_f e_f^2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{\pi/2}} e^{-\frac{Z_Q^2}{2\sigma^2}} - Z_Q \operatorname{Erfc} \left(\frac{Z_Q}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right]. \quad (6.104)$$

L'estimation de σ_{tot}^L est obtenue en remplaçant $\langle T_Y(r) \rangle$ par $\langle T_Y(1/Q) \rangle$ avant de faire l'intégrale sur r . Obtenir l'estimation de σ_{tot}^T demande un traitement plus précis qui est expliqué dans [XIX]. Dans le régime de haute énergie $Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2 \gg 1$, nous obtenons donc la loi d'échelle suivante

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2)/\sigma = \sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(Z_Q/\sigma). \quad (6.105)$$

Dans le régime $\sigma \ll Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2$, la partie transverse est dominante et donne

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = \frac{N_c \alpha_{em} S_p}{12(\pi/2)^{3/2}} \sum_f e_f^2 \sigma^3 \frac{e^{-Z_Q^2/(2\sigma^2)}}{Z_Q^2}. \quad (6.106)$$

Signalons qu'il est possible de faire des estimations aussi dans le cas de la section efficace diffractive intégrée sur β (à x fixé) entre $\beta_{min} \ll 1$ et 1. Dans le régime $\sigma \ll Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2$, nous obtenons [XIX]

$$\sigma_{diff}^{\gamma^* p \rightarrow X}(x, Q^2) = \frac{N_c \alpha_{em} S_p}{12\pi^2} \sum_f e_f^2 \sigma^4 \frac{e^{-Z_Q^2/\sigma^2}}{Z_Q^3} \quad (6.107)$$

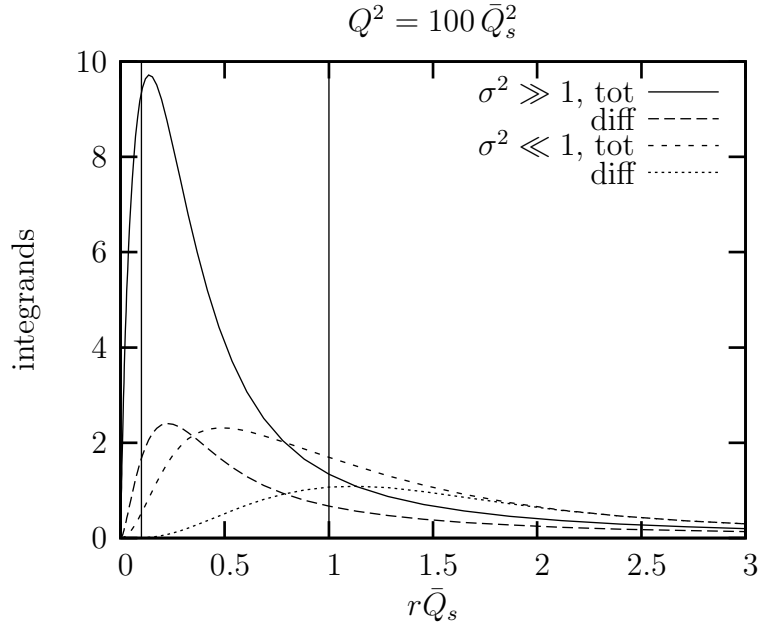


FIG. 6.4 – La fonction à intégrer dans la formule (6.101) (courbes indiquées par *tot*) et celle qui mène à la formule (6.107) (courbes indiquées par *diff*) sont représentées en fonction de $r\bar{Q}_s$, pour $Q/\bar{Q}_s = 10$ fixé. L'amplitude $\langle T_Y(r) \rangle$ est (6.83) (en remplaçant ρ_s par $\langle \rho_s \rangle$) pour le régime $\sigma \ll 1$ et (6.84) pour le régime $Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2 \gg 1$. Les lignes verticales tracées pour $r = 1/Q$ et $r = 1/\bar{Q}_s$ permettent d'estimer les tailles dominantes pour les différents cas.

avec la partie transverse toujours dominante. Le résultat est indépendant de β_{min} , indiquant que la diffraction est dominée par l'interaction de la composante $q\bar{q}$. La loi d'échelle (6.105) est aussi vérifiée.

Ces estimations indiquent que quand $Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2$ (et $\sigma^2 \gg 1$), l'interaction entre le dipôle et la cible est dominée par des tailles r de l'ordre de $1/Q$, aussi bien dans le cas inclusif que diffractif. Cela contraste avec le régime $\sigma^2 \ll 1$, dans lequel la section efficace totale est dominée par des tailles comprises entre $1/Q$ et $1/\bar{Q}_s$ (si $Q > \bar{Q}_s$) et la section efficace diffractive est dominée par des tailles de l'ordre de $1/\bar{Q}_s$ [72]. Pour exhiber cette différence, nous avons représenté Figure 6.4 la fonction à intégrer dans la formule (6.101) en fonction de r obtenue quand $\langle T_Y(r) \rangle$ est donné par : (6.83) (en remplaçant ρ_s par $\langle \rho_s \rangle$) pour le régime $\sigma \ll 1$ ou bien (6.84) pour le régime $Z_Q \ll \gamma_c \sigma^2$ (et $\sigma^2 \gg 1$). La fonction à intégrer qui mène à la section efficace (6.107) est aussi représentée et les comportements que nous venons d'énoncer sont manifestes sur la figure.

Pour résumer, les différents régimes de haute énergie prédits par la QCD dans le contexte de la diffusion profondément inélastique sont représentés Figure 6.5. Cette figure indique notamment les lois d'échelle non triviales qui accompagnent la transition du régime dilué vers le régime de saturation. La loi (4.35) discutée au Chapitre 4, et compatible avec les données de HERA, intervient dans le régime d'énergie *intermédiaire* $\sigma^2 \ll 1$ tandis que la loi (6.105) que nous venons d'obtenir concerne le régime de *très haute* énergie $\sigma^2 \gg 1$. Comme notre connaissance du paramètre de dispersion D est pour l'instant limitée, il ne nous est pas possible d'être plus précis pour définir ce que sont de très hautes énergies. En revanche il nous a été possible de montrer que quand $\sigma^2 \gg 1$, même pour des valeurs de Q^2 beaucoup plus grandes que $\bar{Q}_s^2(Y)$ (telles que l'interaction est faible en moyenne), la physique pertinente est la physique de la saturation car l'interaction est dominée par des fluctuations de l'échelle de saturation qui sont aussi grandes que Q^2 .

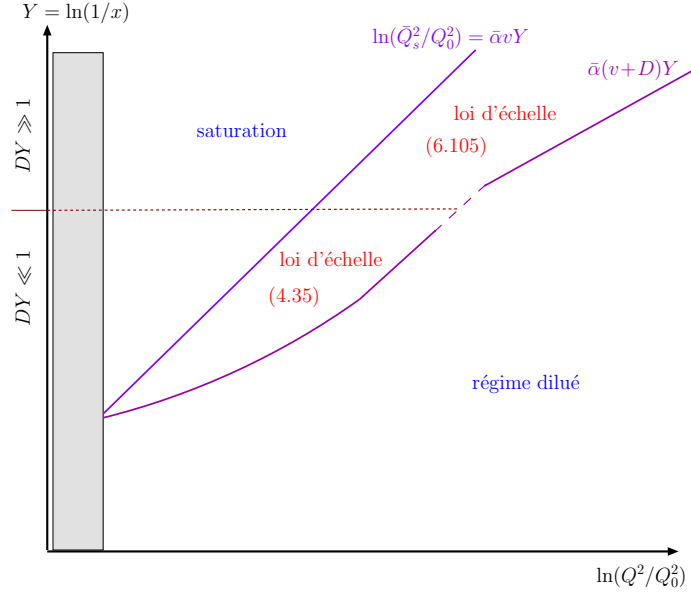


FIG. 6.5 – Représentation des différents régimes de haute énergie en diffusion profondément inélastique, en fonction de Y et $\ln(Q^2/Q_0^2)$. La transition du régime dilué vers le régime de saturation est caractérisée par des lois d'échelle non triviales : si $\bar{\alpha}DY \ll 1$ la loi d'échelle est la loi (4.35) et si $\bar{\alpha}DY \gg 1$, la loi d'échelle est (6.105).

6.4.2 Implications pour la production de gluons vers l'avant

Concentrons nous maintenant sur la production de gluon vers l'avant dans les collisions hadron-hadron. L'étude du régime $\sigma^2 \gg 1$ dans ce contexte est particulièrement importante dans l'optique du LHC [133, 134, XX]. La section efficace pour la production de gluons vers l'avant dans une collision hadron-hadron est donnée par la formule (5.6) du Chapitre 5 (dans le cas où le gluon est émis dans la direction du projectile, la particule qui se déplace dans la direction x^+). En notant $q = (q^+, \mathbf{q})$ la tri-impulsion du gluon, et $y_q = Y - \ln(P^+/q^+)$ la rapidité à laquelle le gluon est émis (le gluon est en fait émis avec la rapidité $y_{min} + y_q$, y_q étant véritablement un intervalle de rapidité), nous pouvons écrire

$$\frac{d\sigma}{d^2\mathbf{q}dx_J} = \frac{N_c}{\pi^2\mathbf{q}^2} f_{eff}(x_J, \mathbf{q}^2) \varphi(\mathbf{q}, y_q) \quad (6.108)$$

avec $x_J = q^+/P^+ = e^{y_q - Y}$ et où f_{eff} est la densité de partons effective dans le projectile (voir Chapitre 5). Nous avons exprimé la section efficace en termes de la distribution de gluon non intégrée de la cible φ définie à partir de T_{gg} de la manière suivante :

$$\varphi(\mathbf{q}, y_q) = \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \int d^2\mathbf{b} T_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{b}; y_q) . \quad (6.109)$$

L'amplitude de diffusion du dipôle gg sur la cible s'obtient facilement à partir de $\langle T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ et $\langle T_Y^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ (voir la formule (2.54) simplifiée dans la limite de grand N_c). En utilisant (6.99) et une formule similaire pour $\langle T_Y^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$, nous pouvons écrire

$$\varphi(\mathbf{q}, Y) = S_p \int_0^\infty dr J_0(qr) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (2 \langle T_Y(r) \rangle - \langle T_Y^2(r) \rangle) \quad (6.110)$$

où nous avons effectué l'intégration angulaire et où $q = |\mathbf{q}|$. Nous pouvons calculer (6.110) à

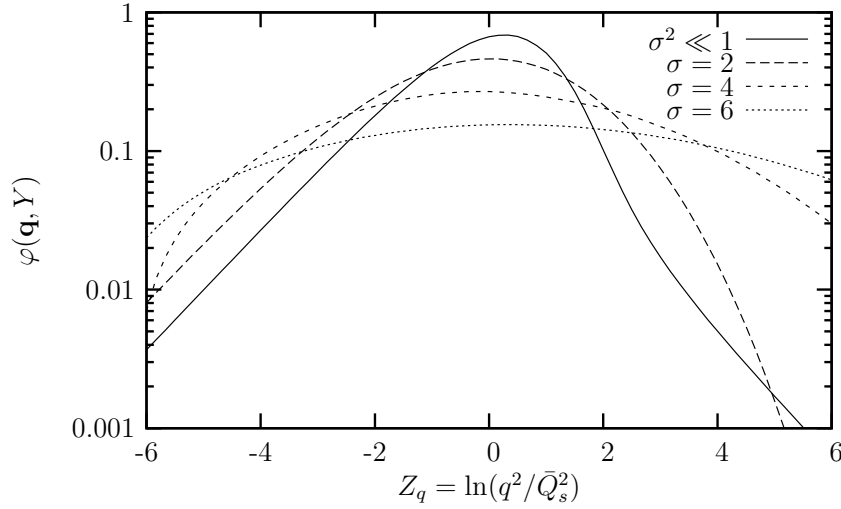


FIG. 6.6 – La distribution de gluons non intégrée $\varphi(\mathbf{q}, Y)$ est représentée en fonction de Z_q pour différentes valeurs de $\sigma = 2, 4$ et 6 et comparée avec une distribution obtenue dans le régime $\sigma^2 \ll 1$. Le caractère Gaussien (voir formule (6.114)) de la distribution dans la limite $\sigma^2 \gg 1$ est manifeste.

partir de (6.100) :

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \langle T_Y(r) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial L^2} \langle T_Y(r = e^{-L/2}/Q_0) \rangle \simeq \frac{Z}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}} \quad (6.111)$$

où la deuxième égalité est valable dans le régime $|Z| \ll \gamma_c \sigma^2$ (et $\sigma^2 \gg 1$). Signalons que pour obtenir ce résultat, il faut d'abord calculer les dérivées avant de prendre la limite $|Z| \ll \gamma_c \sigma^2$ (voir [XX] pour plus de détails). En calculant $\langle T_Y^2(r) \rangle$ de la même manière que $\langle T_Y(r) \rangle$ (voir la première ligne de (6.100)), nous pouvons montrer que le résultat (6.111) est aussi vrai pour $\langle T_Y^2(r) \rangle$. Finalement nous arrivons à la formule suivante pour φ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{q}, Y) &= 2S_p \int_{-\infty}^{\infty} dL J_0\left(\frac{q}{Q_0} e^{-L/2}\right) \frac{\partial^2}{\partial L^2} \langle T_Y(r = e^{-L/2}/Q_0) \rangle \\ &= \frac{2S_p}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta J_0(e^{-\eta/2}) (\eta + Z_q) e^{-\frac{(\eta + Z_q)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (6.112)$$

où nous avons introduit la variable

$$Z_q = \ln\left(\frac{q^2}{Q_s^2}\right) \quad (6.113)$$

similaire à Z avec le remplacement $r \rightarrow 1/q$.

La fonction de Bessel $J_0(x)$ oscille pour des grandes valeurs de x et l'amplitude des oscillations décroît rapidement avec x . Ainsi, pour évaluer l'intégrale sur η dans (6.112), il est suffisant de considérer l'intervalle entre $\eta = \eta_0$ et $\eta = +\infty$ où $e^{-\eta_0/2}$ est le premier zéro de J_0 . Dans cet intervalle, nous pouvons approximer $J_0 \approx \text{cste}$, ce qui introduit une incertitude sur la normalisation. Nous avons ainsi

$$\varphi(\mathbf{q}, Y) \approx \frac{1}{\sigma^3} \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta (\eta + Z_q) e^{-\frac{(\eta + Z_q)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(\eta_0 + Z_q)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.114)$$

qui montre que $\varphi(\mathbf{q}, Y)$ est une Gaussienne en Z_q dont la variance est σ^2 (et la moyenne un nombre que nous ne contrôlons pas).

Ce résultat est confirmé par une intégration numérique de la formule (6.110) avec les amplitudes de dipôles obtenues à partir de (6.100). La distribution de gluon obtenue est représentée Figure 6.6 en fonction de Z_q et pour différentes valeurs de $\sigma = 2, 4$ et 6 (le maximum de la distribution a été recentré en $Z_q = 0$ ou $q = \bar{Q}_s$). Nous la comparons avec une distribution obtenue dans le régime $\sigma^2 \ll 1$ (voir [XX] pour les détails). Comme prédit, la largeur de la Gaussienne augmente avec σ . Ces résultats impliquent un comportement très différent pour la section efficace de production de gluons en fonction du régime d'énergie $\sigma^2 \ll 1$ ou $\sigma^2 \gg 1$. Les prédictions obtenues dans le cas $\sigma^2 \ll 1$ sont en accord avec les données du collisionneur RHIC [135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143] (pour une revue, voir [144]), mais dans l'optique du LHC, il est possible que les effets que nous venons de discuter soient importants. Mais une fois de plus, notre mauvaise connaissance du paramètre de dispersion D nous empêche pour l'instant d'être plus précis.

6.A Dérivation de la première équation de la hiérarchie du régime dilué

Dans cet appendice nous dérivons la première équation (6.23) de la hiérarchie duale de la hiérarchie de Balitsky. Nous souhaitons ainsi simplifier (les dépendances par rapport à $[\delta/\delta\rho]$ sont implicites)

$$HR_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] = - \int \frac{d^2\mathbf{u}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{v}}{2\pi} \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{v}-\mathbf{z})}{(\mathbf{u}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{v})^2} \rho_c(\mathbf{u}) \left[1 + \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u})\tilde{W}_A(\mathbf{v}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u})\tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{v}) \right]^{cd} \rho_d(\mathbf{v}) R_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] . \quad (6.115)$$

Il nous faut tout d'abord faire disparaître les facteurs ρ_c . Commençons par déplacer $\rho_c(\mathbf{u})$ jusqu'à la gauche de $\rho_d(\mathbf{v})$. Pour cela il faut utiliser l'action de $\rho_c(\mathbf{u})$ sur $\tilde{W}_A(\mathbf{u}')$ ou $\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u}')$:

$$\rho_c(\mathbf{u})\tilde{W}_A(\mathbf{u}') = \tilde{W}_A(\mathbf{u}')\rho_c(\mathbf{u}) - g_s\tilde{W}_A(\mathbf{u}')\tilde{T}^c\delta^{(2)}(\mathbf{u}-\mathbf{u}') , \quad (6.116)$$

$$\rho_c(\mathbf{u})\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u}') = \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u}')\rho_c(\mathbf{u}) + g_s\tilde{T}^c\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{u}')\delta^{(2)}(\mathbf{u}-\mathbf{u}') . \quad (6.117)$$

Ensuite, pour éliminer les facteurs ρ_c , nous avons besoin de l'action de $\rho_d(\mathbf{v})$ ou de $\rho_c(\mathbf{u})\rho_d(\mathbf{v})$ sur $R_{\mathbf{xy}}\delta[\rho]$ (donné par la formule (6.20)) :

$$\rho_d(\mathbf{v})R_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] = \frac{g_s}{N_c} \left(\delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{y}) - \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{x}) \right) \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^d \right) \delta[\rho] , \quad (6.118)$$

$$\rho_c(\mathbf{u})\rho_d(\mathbf{v})R_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] = \frac{g_s^2}{N_c} \left(\delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{x}) - \delta^{(2)}(\mathbf{v}-\mathbf{y}) \right) \left[\text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^cT^d \right) \delta^{(2)}(\mathbf{u}-\mathbf{x}) - \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^dT^c \right) \delta^{(2)}(\mathbf{u}-\mathbf{y}) \right] \delta[\rho] \quad (6.119)$$

Nous obtenons alors

$$HR_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] = \frac{\alpha_s}{\pi N_c} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{2(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \left[1 + \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x})\tilde{W}_A(\mathbf{y}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x})\tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{y}) \right]^{cd} - \frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} \left[2 - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{x})\tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{x}) \right]^{cd} - \frac{1}{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \left[2 - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_A(\mathbf{z}) - \tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{y}) \right]^{cd} \right) \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^dT^c \right) - \left(\frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2} \left[\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{x})\tilde{T}^c \right]^{cd} - \frac{1}{(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2} \left[\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{z})\tilde{W}_A(\mathbf{y})\tilde{T}^c \right]^{cd} \right) \text{Tr} \left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^d \right) \right\} \delta[\rho] . \quad (6.120)$$

Il nous reste maintenant à exprimer les lignes de Wilson adjointes modifiées \tilde{W}_A en termes de lignes de Wilson fondamentales modifiées \tilde{W}_F . Cela se fait en utilisant l'identité suivante (dérivée dans l'appendice du Chapitre 1 pour les lignes de Wilson W_A et W_F , voir équation (1.54)) :

$$\tilde{W}_A^{cd}(\mathbf{x}) = 2\text{Tr}\left(\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{x})T^c\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^d\right) . \quad (6.121)$$

En utilisant ensuite l'identité de Fierz (1.53), nous pouvons écrire le produit $\left[\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_A(\mathbf{x})\right]^{cd}$ de la manière suivante :

$$\left[\tilde{W}_A^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_A(\mathbf{x})\right]^{cd} = 2\text{Tr}\left(\tilde{W}_F(\mathbf{y})T^c\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{y})\tilde{W}_F(\mathbf{x})T^d\tilde{W}_F^\dagger(\mathbf{x})\right) . \quad (6.122)$$

Cette égalité peut être insérée de manière répétée dans (6.120), laissant seulement des lignes de Wilson \tilde{W}_F . Finalement, avec l'identité de Fierz (1.53), il est possible de simplifier l'expression pour obtenir la formule finale (6.23) :

$$HR_{\mathbf{xy}}\delta[\rho] = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [R_{\mathbf{xz}}R_{\mathbf{zy}} - R_{\mathbf{xy}}] \delta[\rho] . \quad (6.123)$$

En procédant de manière similaire, nous pouvons aussi dériver la deuxième équation de la hiérarchie (6.24). Ceci est fait dans [XI, 113].

Conclusions

Cette thèse est consacrée à l'étude du régime de saturation de la chromodynamique quantique, un régime perturbatif qui décrit les grandes densités de partons dans les hadrons, formées dans la limite de haute énergie. En sondant de petites distances à l'intérieur d'un hadron à l'aide de collisions de haute énergie, on est en effet sensible à un ensemble dense de partons, source d'effets collectifs importants. La théorie de la saturation a pour but de décrire de tels phénomènes et leurs conséquences, comme le comportement des amplitudes de collisions hadron-hadron dans la limite de haute énergie.

La nécessité d'établir les prédictions de la QCD dans le régime de saturation a été ravivée au milieu des années 90, avec le démarrage des collisionneurs HERA puis RHIC. Ils réalisent respectivement des expériences de diffusion profondément inélastique et des collisions d'ions lourds. Dans ces expériences, certains processus étant potentiellement sensibles aux effets des grandes densités de partons dans les hadrons, des observables pouvaient mettre en évidence des effets de saturation.

Très vite, les équations B-JIMWLK qui décrivent l'évolution vers le régime de saturation dans l'approximation des logarithmes dominants ont été établies. Ces développements théoriques ont alors eu un certain succès : des lois d'échelle prédites par les équations B-JIMWLK ont été observées en diffusion profondément inélastique inclusive et diffractive. Cette découverte a indiqué que le régime de saturation était pertinent dès les énergies du collisionneur HERA. Un succès similaire a été rencontré dans le cadre du collisionneur RHIC : dans la production de particules vers l'avant, des observables appropriées pour l'étude d'effets de saturation sont plus que qualitativement en accord avec les prédictions de la QCD à haute énergie, mais leurs descriptions semblent nécessiter d'inclure des effets de saturation.

Au cours des deux dernières années, de nouveaux développements théoriques ont remis en cause la validité des équations B-JIMWLK : alors qu'on les pensait complètes, elles ne correspondent en fait qu'à une partie de l'équation d'évolution. Des modifications ont été proposées, et l'étude de la limite de grand N_c a révélé un nouveau lien entre la QCD à haute énergie et certains problèmes de physique statistique. Les implications phénoménologiques ont été évaluées dans le cadre de la diffusion profondément inélastique et de la production de gluons vers l'avant dans les collisions hadron-hadron. Même si les nouvelles équations diffèrent de celles utilisées précédemment, les solutions sont compatibles dans un régime d'énergie intermédiaire. Des différences sont attendues pour de très hautes énergies, avec la prédiction d'une nouvelle loi d'échelle.

Même si à l'heure actuelle, il ne nous est pas possible d'être plus quantitatif, le démarrage du LHC en 2007 promet un avenir très intéressant. Il pourrait mettre en évidence le régime de saturation, et la présence de deux régimes d'énergies. Il pourrait aussi indiquer la nécessité d'inclure des logarithmes sous-dominants dans les équations d'évolutions. Dans tous les cas, la QCD à haute énergie restera un domaine de recherche très actif pour encore de nombreuses années.

Pour finir, je souhaite que cette thèse ait apporté des contributions utiles aux développements de la théorie de la saturation et aux études phénoménologiques.

Publications personnelles

- [I] C. Marquet and R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B587** (2004) 201.
- [II] C. Marquet, DIS04 proceedings, hep-ph/0406111 ;
publié dans : Strbske Pleso 2004, Deep Inelastic Scattering 352.
- [III] C. Marquet, R. Peschanski and C. Royon, *Phys. Lett.* **B599** (2004) 236.
- [IV] C. Marquet, *Nucl. Phys.* **B705** (2005) 319.
- [V] C. Marquet, Baryons04 proceedings, hep-ph/0501050 ;
publié dans : *Nucl. Phys.* **A755** (2005) 603c.
- [VI] C. Marquet, JJC04 proceedings (publication en francais) ;
publié dans : Comptes rendus des Journées Jeunes Chercheurs 2004 (JJC04) 137.
- [VII] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, *Nucl. Phys.* **A756** (2005) 399.
- [VIII] C. Marquet and G. Soyez, *Nucl. Phys.* **A760** (2005) 208.
- [IX] G. Soyez, C. Marquet and R. Peschanski, Moriond05 proceedings, hep-ph/0504017.
- [X] K. Golec-Biernat and C. Marquet, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 114005.
- [XI] C. Marquet, A.H. Mueller, A.I. Shoshi and S.M.H. Wong, *Nucl. Phys.* **A722** (2005) 252.
- [XII] C. Marquet, DIS05 proceedings, hep-ph/0507108 ;
publié dans : *AIP Conf. Proc.* **792** (2005) 759, et Madison 2005, Deep inelastic scattering, 759.
- [XIII] C. Marquet and K. Golec-Biernat, EDS05 proceedings, hep-ph/0509034.
- [XIV] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, *Phys. Lett.* **B628** (2005) 239.
- [XV] C. Marquet, R. Peschanski, G. Soyez and A. Bialas, *Phys. Lett.* **B633** (2006) 331.
- [XVI] C. Marquet, ISMD05 proceedings, hep-ph/0510176 ;
publié dans : *AIP Conf. Proc.* **828** (2006) 157, et Kromeriz 2005, Multiparticle dynamics, 157.
- [XVII] C. Marquet and C. Royon, *Nucl. Phys.* **B739** (2006) 131.
- [XVIII] C. Marquet, R. Peschanski and G. Soyez, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 114005.
- [XIX] Y. Hatta, E. Iancu, C. Marquet, G. Soyez and D. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A773** (2006) 95.
- [XX] E. Iancu, C. Marquet and G. Soyez, hep-ph/0605174, accepté dans *Nucl. Phys.* **A**.
- [XXI] C. Marquet and L. Schoeffel, *Phys. Lett.* **B639** (2006) 471.
- [XXII] C. Marquet, G. Soyez and B.-W. Xiao, *Phys. Lett.* **B639** (2006) 635.
- [XXIII] C. Marquet, DIS06 proceedings, hep-ph/0607186.

Bibliographie générale

- [1] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438;
G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126** (1977) 298;
Yu. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641.
- [2] L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 338;
E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* **45** (1977) 199;
Ya.Ya. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.
- [3] L.V. Gribov, E.M. Levin, and M.G. Ryskin, *Phys. Rept.* **100** (1983) 1.
- [4] A.H. Mueller and J. Qiu, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 427.
- [5] J.-P. Blaizot and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B289** (1987) 847.
- [6] E. Levin and J. Bartels, *Nucl. Phys.* **B387** (1992) 617.
- [7] Z. Chen and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 579.
- [8] A.H. Mueller, *Small- x Physics, High Parton Densities and Parton Saturation in QCD* hep-ph/9911289; *Parton saturation-an overview* hep-ph/0111244.
- [9] A.M. Stasto, K. Golec-Biernat and J. Kwiecinski, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 596.
- [10] M. Gyulassy and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A750** (2005) 30.
- [11] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill (1980).
- [12] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, McGraw-Hill (1964).
- [13] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, New-York (1995).
- [14] S.J. Brodsky and G.P. Lepage, *Perturbative QCD*, World Scientific, Singapore (1989) 93.
- [15] L. McLerran and R. Venugopalan, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 2233; *ibid.* **49** (1994) 3352;
ibid. **50** (1994) 2225.
- [16] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 5463; *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5445.
- [17] F. Gelis and Y. Mehtar-Tani, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 034019.
- [18] I. Balitsky, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2024; *Phys. Rev.* **D60** (1999) 014020.
- [19] A. Kovner and U. Wiedemann, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 114002.
- [20] I. Balitsky, *High-energy QCD and Wilson lines* hep-ph/0101042.
- [21] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, L. McLerran and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5414;
J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, *Nucl. Phys.* **B504** (1997) 415; *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014014;
J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014015;
A. Kovner, J.G. Milhano and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 114005.

- [22] E. Iancu and L. McLerran, *Phys. Lett.* **B510** (2001) 145;
E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A692** (2001) 583; *Phys. Lett.* **B510** (2001) 133;
E. Ferreiro, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A703** (2002) 489.
- [23] L. McLerran, *Lect. Notes Phys.* **583** (2002) 291.
- [24] E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *The Colour Glass Condensate : An Introduction* hep-ph/0202270;
E. Iancu and R. Venugopalan, *The Color Glass Condensate and High Energy Scattering in QCD* hep-ph/0303204.
- [25] H. Weigert, *Evolution at small x_{bj} : The Color Glass Condensate* hep-ph/0501087.
- [26] I. Balitsky, *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 99.
- [27] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, *Z. Phys.* **C53** (1992) 331.
- [28] A. Bialas and R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B378** (1996) 302; *Phys. Lett.* **B387** (1996) 405.
- [29] A. Bialas, R. Peschanski and C. Royon, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 6899.
- [30] Yu.V. Kovchegov and L. McLerran, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 054025.
- [31] Yu.V. Kovchegov and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 451.
- [32] Yu.V. Kovchegov and K. Tuchin, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 074026.
- [33] B.Z. Kopeliovich, A. Schaefer and A.V. Tarasov, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 1609.
- [34] R. Peschanski, *Mod. Phys. Lett.* **A15** (2000) 1891.
- [35] S. Munier, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 034015.
- [36] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D60** (1999), 034008; *ibid.* **D61** (1999), 074018.
- [37] L.N. Lipatov, *Phys. Rept.* **286** (1997) 131.
- [38] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373;
A.H. Mueller and B. Patel, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 471.
- [39] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 107.
- [40] L.N. Lipatov, *Sov. Phys. JETP* **63** (1986) 338, *ibid.* **63** (1986) 904.
- [41] H. Navelet and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B507** (1997) 353.
- [42] S. Munier and R. Peschanski, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 232001; *Phys. Rev.* **D69** (2004) 034008; *ibid.* **D70** (2004) 077503.
- [43] A.H. Mueller and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **B640** (2002) 331.
- [44] M. Braun, *Eur. Phys. J.* **C16** (2000) 337; *Phys. Lett.* **B576** (2003) 115.
- [45] N. Armesto and M. Braun, *Eur. Phys. J.* **C20** (2001) 517; *ibid.* **C22** (2001) 351.
- [46] M. Lublinsky, *Eur. Phys. J.* **C21** (2001) 513.
- [47] K. Golec-Biernat, L. Motyka and A.M. Staśto, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 074037.
- [48] K. Golec-Biernat and A.M. Staśto, *Nucl. Phys.* **B668** (2003) 345.
- [49] E. Gotsman, M. Kozlov, E. Levin, U. Maor and E. Naftali, *Nucl. Phys.* **A742** (2004) 55.
- [50] J.L. Albacete, N. Armesto, J.G. Milhano, C.A. Salgado and U.A. Wiedemann, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 014003.
- [51] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7** (1937) 355;
A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piscounov, *Moscou Univ. Bull. Math.* **A1** (1937) 1.

- [52] A. Kovner and U.A. Wiedemann, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 051502, *Phys. Lett.* **B551** (2003) 311.
- [53] E. Ferreiro, E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A710** (2002) 373.
- [54] E. Levin and K. Tuchin, *Nucl. Phys.* **B573** (2000) 833.
- [55] R. Peschanski, *Phys. Lett.* **B622** (2005) 178.
- [56] J.D. Logan, *An introduction to nonlinear partial differential equations*, John Wiley and sons, New York (1994).
- [57] P.L. Sachdev, *Self-similarity and beyond, exact solutions of nonlinear problems*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2000).
- [58] T. Ahmed *et al.* [H1 Collaboration], *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 477 ;
M. Derrick *et al.* [ZEUS Collaboration], *Phys. Lett.* **B315** (1993) 481.
- [59] M. Wüsthoff and A.D. Martin, *J. Phys.* **G25** (1999) R309.
- [60] A. Hebecker, *Phys. Rept.* **331** (2000) 1.
- [61] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 115.
- [62] N.N. Nikolaev and B.G. Zakharov, *Z. Phys.* **C49** (1991) 607.
- [63] Yu.V. Kovchegov and E. Levin, *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 221.
- [64] E. Levin and M. Lublinsky, *Phys. Lett.* **B521** (2001) 233 ; *Eur. Phys. J.* **C22** (2002) 647.
- [65] J. Bartels, H. Jung and M. Wüsthoff, *Eur. Phys. J.* **C11** (1999) 111.
- [66] B.Z. Kopeliovich, A. Schaefer and A.V. Tarasov, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 054022.
- [67] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 114016.
- [68] S. Munier and A. Shoshi, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 074022.
- [69] S. Munier, R. Peschanski and C. Royon, *Nucl. Phys.* **B534** (1998) 297.
- [70] E. Levin and K. Tuchin, *Nucl. Phys.* **A691** (2001) 779 ; *Nucl. Phys.* **A693** (2001) 787.
- [71] E. Iancu, K. Itakura and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A708** (2002) 327.
- [72] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014017 ; *ibid.* **D60** (1999) 114023.
- [73] M.R. Adams *et al.* [E665 Collaboration], *Phys. Rev.* **D54** (1996) 3006 ;
M. Arneodo *et al.* [NMC Collaboration], *Nucl. Phys.* **B483** (1997) 3 ;
C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], *Eur. Phys. J.* **C21** (2001) 33 ;
J. Breitweg *et al.* [ZEUS Collaboration], *Phys. Lett.* **B487** (2000) 53 ;
S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], *Eur. Phys. J.* **C21** (2001) 443.
- [74] V.P. Goncalves and M.T.V. Machado, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 202002.
- [75] D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **B648** (2003) 293.
- [76] M. Wüsthoff, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 4311.
- [77] A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], *Measurement and QCD Analysis of the Diffractive Deep-Inelastic Scattering Cross Section at HERA*, arXiv :hep-ex/0606004 ;
S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], *Eur. Phys. J.* **C38** (2004) 43 ; *Nucl. Phys.* **B713** (2005) 3.
- [78] J. Bartels, K. Golec-Biernat and H. Kowalski, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 014001.
- [79] E. Iancu, K. Itakura and S. Munier, *Phys. Lett.* **B590** (2004) 199.
- [80] J.R. Forshaw, R. Sandapen and G. Shaw, *Phys. Lett.* **B594** (2004) 283.
- [81] A.H. Mueller, S. Munier and A. Stasto, *Nucl. Phys.* **B603** (2001) 427.

- [82] H. Kowalski and D. Teaney, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 114005.
- [83] J.R. Forshaw and G. Shaw, *JHEP* **0412** (2004) 052.
- [84] A.H. Mueller, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B18C** (1990) 125 ; *J. Phys.* **G17** (1991) 1443.
- [85] J. Bartels, A. De Roeck and H. Lotter, *Phys. Lett.* **B389** (1996) 742.
- [86] S.J. Brodsky, F. Hautmann and D.E. Soper, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 6957.
- [87] M. Boonekamp, A. De Roeck, C. Royon and S. Wallon, *Nucl. Phys.* **B555** (1999) 540.
- [88] N. Tîmneanu, J. Kwieciński and L. Motyka, *Eur. Phys. J.* **C23** (2002) 513 ; *Acta Phys. Polon.* **B33** (2002) 1559 ; *ibid.* **B33** (2002) 3045 ; *Eur. Phys. J.* **C28** (2003) 483.
- [89] M. Kozlov and E. Levin, *Eur. Phys. J.* **C28** (2003) 483.
- [90] H. Navelet and S. Wallon, *Nucl. Phys.* **B522** (1998) 237.
- [91] J. Bartels, A. De Roeck and M. Loewe, *Z. Phys.* **C54** (1992) 635.
- [92] J. Kwiecinski, A. Martin and P. Sutton, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 921.
- [93] W-K. Tang, *Phys. Lett.* **B278** (1992) 363.
- [94] J.G. Contreras, R. Peschanski and C. Royon, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 034006 ;
R. Peschanski and C. Royon, *Pomeron intercepts at colliders* hep-ph/0002057.
- [95] G.P. Salam, *Nucl. Phys.* **B449** (1995) 589 ; *Nucl. Phys.* **B461** (1996) 512.
- [96] A.H. Mueller and G.P. Salam, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 293.
- [97] A. Prudnikov, Y. Brychkov and O. Marichev, *Integrals and Series*, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [98] C. Adloff *et al.* [H1 Collaboration], *Nucl. Phys.* **B538** (1999) 3 ;
J. Breitweg *et al.* [ZEUS Collaboration], *Eur. Phys. J.* **C6** (1999) 239.
- [99] A. Aktas *et al.* [H1 Collaboration], *Eur. Phys. J.* **C46** (2006) 27 ;
S. Chekanov *et al.* [ZEUS Collaboration], *Phys. Lett.* **B632** (2006) 13.
- [100] J.G. Contreras, *Phys. Lett.* **B446** (1999) 158.
- [101] S. Catani and M.H. Seymour, *Nucl. Phys.* **B485** (1997) 291 ; erratum-*ibid.* **B510** (1997) 503.
- [102] H. Jung, L. Jönsson and H. Küster, *Eur. Phys. J.* **C9** (1999) 383.
- [103] P. Aurenche, R. Basu, M. Fontannaz and R.M. Godbole, *Eur. Phys. J.* **C34** (2004) 277 ;
Eur. Phys. J. **C42** (2005) 43.
- [104] A.H. Mueller and H. Navelet, *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 727.
- [105] B. Abbott *et al.* [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 5722.
- [106] J.R. Andersen *et al.*, *JHEP* **0102** (2001) 007.
- [107] A. Kovner and M. Lublinsky, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 085004 ; *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 181603.
- [108] A.H. Mueller and A.I. Shoshi, *Nucl. Phys.* **B692** (2004) 175.
- [109] E. Iancu and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **A730** (2004) 460 ; *ibid.* **A730** (2004) 494.
- [110] Y. Hatta, E. Iancu, L. McLerran, A. Stasto, and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A764** (2006) 423.
- [111] I. Balitsky, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 074027.
- [112] A. Kovner and M. Lublinsky, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 074023.
- [113] Y. Hatta, E. Iancu, L. McLerran and A. Stasto, *Nucl. Phys.* **A762** (2005) 272.

- [114] E. Iancu and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A756** (2005) 419; *Phys. Lett.* **B610** (2005) 253.
- [115] E. Levin, *Nucl. Phys.* **A763** (2005) 140; *High energy scattering in QCD : dipole approach with Pomeron loops* hep-ph/0511074.
- [116] E. Levin and M. Lublinsky, *Nucl. Phys.* **A763** (2005) 172.
- [117] E. Iancu, G. Soyez and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A768** (2006) 194.
- [118] J.-P. Blaizot, E. Iancu, K. Itakura and D.N. Triantafyllopoulos, *Phys. Lett.* **B615** (2005) 221.
- [119] N.G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, North-Holland, New York/Amsterdam (1981).
- [120] A.H. Mueller, A.I. Shoshi and S.M.H. Wong, *Nucl. Phys.* **B715** (2005) 440.
- [121] C. Mueller and R.B. Sowers, *J. Funct. Anal.* **128** (1995) 439.
- [122] E. Brunet and B. Derrida, *Phys. Rev.* **E56** (1997) 2597; *Comp. Phys. Comm.* **121-122** (1999) 376; *J. Stat. Phys.* **103** (2001) 269.
- [123] R. Enberg, K. Golec-Biernat and S. Munier, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 074021.
- [124] E. Iancu, A.H. Mueller and S. Munier, *Phys. Lett.* **B606** (2005) 342.
- [125] E. Brunet, B. Derrida, A.H. Mueller and S. Munier, *Phys. Rev.* **E73** (2006) 056126.
- [126] G. Soyez, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 016007.
- [127] E. Levin and M. Lublinsky, *Nucl. Phys.* **A730** (2004) 191.
- [128] R.A. Janik and R. Peschanski, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 094005; R.A. Janik, *Phys. Lett.* **B604** (2004) 192.
- [129] E. Levin and M. Lublinsky, *Phys. Lett.* **B607** (2005) 131.
- [130] C.R. Doering, C. Mueller and P. Smereka, *Phys.* **A325** (2003) 243.
- [131] D. ben-Avraham, M.A. Burschka and C.R. Doering, *J. Stat. Phys.* **60** (1990) 695.
- [132] C.R. Doering, M.A. Burschka and W. Horsthemke, *J. Stat. Phys.* **65** (1991) 953.
- [133] I. Balitsky, *Phys. Lett.* **B518** (2001) 235.
- [134] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 094009.
- [135] D.E. Kharzeev, E. Levin and L. McLerran, *Phys. Lett.* **B561** (2003) 93.
- [136] R. Baier, A. Kovner and U. Wiedemann, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 054009.
- [137] D.E. Kharzeev, Y. Kovchegov and K. Tuchin, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 094013; *Phys. Lett.* **B599** (2004) 23.
- [138] J.-P. Blaizot, F. Gélis and R. Venugopalan, *Nucl. Phys.* **A743** (2004) 13.
- [139] J.L. Albacete, N. Armesto, A. Kovner, C.A. Salgado and U.A. Wiedemann, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 082001.
- [140] E. Iancu, K. Itakura and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A742** (2004) 182.
- [141] D.E. Kharzeev, E. Levin and M. Nardi, *Nucl. Phys.* **A747** (2005) 609.
- [142] D.E. Kharzeev, E. Levin and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A748** (2005) 627.
- [143] A. Dumitru, A. Hayashigaki and J. Jalilian-Marian, arXiv :hep-ph/0506308, hep-ph/0512129.
- [144] J. Jalilian-Marian and Y.V. Kovchegov, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **56** (2006) 104.