New Physics: Sae Mulli,
Vol. 69, No. 11, November 2019, pp. 1200∼1205
http://dx.doi.org/10.3938/NPSM.69.1200

Propagation of Light by Strong Electric Field in Born-Infeld Electrodynamics

Jin Young Kim*
Department of Physics, Gunsan National University, Gunsan 54150, Korea

(Received 17 September 2019 : accepted 04 October 2019)

We study the propagation of an electromagnetic wave in a strong external electric field in Born-Infeld electrodynamics considering the quantum effect. The interaction between the external electromagnetic field and the quantum fluctuation of vacuum causes an anisotropy of the vacuum polarization. This can be represented as non-symmetric terms in the electric permittivity and magnetic permeability tensors. We derive the effective indices of refraction for the parallel and the transverse modes from the condition for the wave equation, as derived from the Maxwell equations reflecting the asymmetry, to have a non-trivial solution. The generalized Born-Infeld electrodynamics with two parameter β_P and β_S reduces to the classical Born-Infeld electrodynamics when $\beta_P = \beta_S$ and the duality of the non-linear electrodynamics holds. However, the duality is broken in quantum Born-Infeld electrodynamics where $\beta_P \neq \beta_S$. If we apply the result to light passing around a charged black hole or an atomic nucleus, the path of light will be bent by the gradient of the effective index of refraction, and the bending angle can be computed.

PACS numbers: 42.25.Dd, 12.20.−m, 12.90.+b
Keywords: Born-Infeld electrodynamics, Propagation of light, Index of refraction

보른-인펠트형 강한 전기장에서의 빛의 전파

김진영*
군산대학교 물리학과, 군산 54150, 대한민국

(2019년 9월 17일 받음, 2019년 10월 04일 게재 확정)

양자효과를 고려한 보른-인펠트의 전기이론에서 강한 전기장을 지나는 전자기파의 전파를 연구하였다. 외부 전자기장이 진공의 양자요동과 상호작용한 결과 진공편극의 비등방성이 나타난다. 이는 유전율 텐서와 투자율 텐서의 비대칭 항으로 표현될 수 있다. 이 비대칭성을 반영한 맥스웰 방정식들로부터 유도된 파동방정식이 뻔하지 않은 해를 가질 조건으로부터 외부전기장에 수직인 모드와 평행한 모드에 대한 유효굴절률을 구하였다. 두 개의 매개변수 β_P와 β_S로 나타낼 수 있는 일반화된 보른-인펠트 전기이론에서 $\beta_P = \beta_S$인 경우는 고전적 보른-인펠트 이론으로 환원되고 비선형 전기역학의 양면대칭성이 성립한다. $\beta_P \neq \beta_S$인 보른-인펠트 양자전기이론에서 이 대칭성이 깨어지게 된다. 유효굴절률에 관한 결과를 전하를 띤 블랙홀이나 원자핵과 같이 정지한 점전하 주위를 지나가는 빛에 적용한다면 빛의 경로는 유효굴절률의 기울기에 의해 휘게 되고 그 휘는 각도를 계산할 수 있을 것이다.

PACS numbers: 42.25.Dd, 12.20.−m, 12.90.+b
Keywords: 본-인펠트 전기역학, 파동의 전파, 굴절률

*E-mail: jykim@kunsan.ac.kr

I. 서 론

맥스웰 방정식으로 요약되는 고전 전자기 이론은 선형이다. 진공에서 이 식들로부터 유도된 전자기파 방정식에서 빛의 속도는 일정하다. 따라서 전자기장 내에서 진행하는 빛은 전자기장의 영향을 받지 않는다. 그러나 양자전기역학적으로 1차 고리(one-loop) 보정에 의해 비선형 항이 나타나 빛의 전파가 일정하지 않고 외부전자기장의 영향을 받는다. 이러한 비선형 광학적 효과는 오일러-하이젠버그 유효작용(Euler-Heisenberg effective lagrangian)으로 잘 기술되는데 이는 외부 전자기장과 진공의 양자요동과의 상호작용 결과이다 [1,2]. 최근 레이저 및 관련 기술의 발전으로 빛의 비선형성에 기초한 현상들을 관찰하는 다양한 실험들이 시도되고 있다 [3–6]. 양자전기역학적 효과에 의한 전자기파의 비선형성을 고려해야할 임계자기장과 임계전기장의 세기는 각각 $B_c = m_e^2c^2/e\hbar = 4.4 \times 10^9$ T, $E_c = m_e^2c^3/e\hbar = 1.32 \times 10^{18}$ V/m이다.

복굴절(birefringence)과 이색성(dichroism)에 관한 PVLAS 실험 결과 [6]는 자기장 내에서의 광회전(optical rotation)을 양자전기역학(quantum electrodynamics)에 기초한 계산만으로는 설명될 수 없음을 의미한다 [7,8]. 보른-인펠트형(Born-Infeld-type, BI)의 유효작용에 기초하여 이 결과를 설명하려는 시도가 있었다 [9,10]. 전기장이 원점에서 발산하는 문제를 해결하고자 도입된 보른-인펠트 전기역학은 맥스웰 전기역학과 달리 점전하의 전기에너지가 유한하다. 보른-인펠트의 유효작용에 도입된 상수 는 가능한 전자기장의 상한을 나타내고 이 값이 무한대가 되는 극한에서 보른-인펠트 전기역학은 맥스웰의 전기역학과 동등하다 [11,12]. 보른-인펠트의 이론에 의해 전자기파의 비선형성을 고려해야할 매개변수 β의 하한 값은 대략 10^{21} V/m이다 [13].

전자기파의 비선형성을 검정하려는 오늘날의 모든 실험들은 자기장을 사용한다. 그러나 이론상 전자기파의 비선형성은 전기장에 의해서도 가능할 것이다. 본 논문에서는 입사하는 전자기파에 수직 또는 평행인 강한 전기장이 전자기파의 진행에 미치는 효과를 연구하고자 한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서는 고전적 보른-인펠트 전자기이론에서 빛의 전파를 유전율 텐서와 투자율 텐서로 기술하는 일반적인 과정을 소개한다. 이를 강하고 균일한 전자기장에 수직으로 입사하는 전자기파에 적용하면 수직인 모드와 평행인 모드의 굴절률이 같음을 보인다. III절에서는 빛의 진공편극(vacuum polarization)에 의한 양자효과를 고려하고 이를 강하고 균일한 전자기장에 수직으로 입사하는 전자기파에 적용한다. 유전율과 투자율 텐서가 뻔하지 않은 해를 가질 조건으로부터 두 모드의 굴절률을 구하면 빛의 유효 굴절률이 편광에 의존함을 보인다. 마지막으로 IV절에서 요약하고 논의한다.

II. 보른-인펠트 전기역학

다음과 같은 라그랑지안으로 기술되는 보른-인펠트의 작용을 고려하자.

$$L_{\rm BI} = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 + 2\frac{S}{\beta^2} - \frac{P^2}{\beta^4}}\right) \tag{1}$$

여기서 β는 장의 차원을 가지는 매개변수이고 S와 P는 장세기텐서(field strength tensor) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$로 다음과 같이 주어지는 로렌츠-불변량(Lorentz-invariants)이다.

$$S = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad P = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{2}$$

장의 세기가 β에 비해 아주 작은 극한에서 위의 작용은 맥스웰의 작용에 수렴한다.

식 (1)에 대한 오일러-라그랑지 방정식은 다음과 같다.

$$\partial_\mu \left[\frac{1}{R}\left(F^{\mu\nu} - \frac{P}{\beta}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)\right] = 0 \tag{3}$$

여기서 $R = \sqrt{1 + 2\frac{S}{\beta^2} - \frac{P^2}{\beta^4}}$이다. 다른 하나의 운동방정식은 장세기 텐서에 대한 비앙키 항등식으로 다음과 같다.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

식 (1)로부터 전기변위 $\mathbf{D} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}}$와 자계강도 $\mathbf{H} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}}$를 구하면 다음과 같은 비선형 방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{R}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\beta^2}\mathbf{B}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\right) \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}\left(\mathbf{B} - \frac{1}{\beta^2}\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\right) \tag{6}$$

식 (3)으로부터 $\mathbf{D}$와 $\mathbf{H}$에 대한 다음의 두 식을 얻고

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - \nabla\times\mathbf{H} = 0 \tag{8}$$

식 (4)로부터 $\mathbf{B}$와 $\mathbf{E}$에 대한 다음의 식을 얻는다

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{10}$$

유전율 텐서(electric permittivity tensor)와 투자율 텐서(magnetic permeability tensor)에 대한 정의 $D_i = \varepsilon_{ij}E_j, B_i = \mu_{ij}H_j$ 로부터 진공에 대하여 다음의 식을 얻는다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{R}\left(\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2}B_iB_j\right), \mu_{ij}^{-1} = \frac{1}{R}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{\beta^2}E_iE_j\right), \tag{11}$$

위의 관계식은 보른-인펠트의 전기역학에서 진공이 비등방적(anisotropic)임을 나타낸다. 행렬 ε_{ij} 와 μ_{ij}^{-1} 를 대각화하는 고유값과 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_1(\varepsilon) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{B}^2}{\beta^2}\right), \lambda_2(\varepsilon) = \frac{1}{R}\ (\text{중근}) \tag{12}$$

$$\lambda_1(\mu^{-1}) = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\mathbf{E}^2}{\beta^2}\right), \lambda_2(\mu^{-1}) = \frac{1}{R}\ (\text{중근}) \tag{13}$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ij} = R\left(\delta_{ij} - \frac{B_iB_j}{\beta^2 + \mathbf{B}^2}\right) \tag{14}$$

$$\mu_{ij} = R\left(\delta_{ij} + \frac{E_iE_j}{\beta^2 + \mathbf{E}^2}\right) \tag{15}$$

전하량 q 인 정지한 점전하(electrostatic point charge)가 존재하는 경우($\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$), 식 (7)은 아래와 같이 되고

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_0 = q\delta(\mathbf{r}) \tag{16}$$

이 식의 해는 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_0 = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{17}$$

위의 식을 식 (11)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\sqrt{1 + \frac{D_0^2}{\beta^2}}} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\sqrt{r^4 + r_0^4}} \tag{18}$$

여기서 $r_0 = \sqrt{q/4\pi\beta}$ 이다. 위 식은 점전하의 전기장이 맥스웰의 전기역학과는 달리 원점에서 특이하지 않고(non-singular) 유한한 값 β를 가짐을 보여준다.

앞에서 기술한 보른-인펠트의 전기이론을 적용하여 강하고 균일한 전기장($\overline{\mathbf{E}}$)에 수직으로 전파되는 전자기파($\mathbf{e}, \mathbf{b}$)의 운동을 고려하자.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{19}$$

전파하는 전자기파의 세기는 균일한 전기장보다 아주 약하다고($e, b \ll \overline{E}$) 가정한다. 전기장의 방향을 x-축으로 잡고, $\overline{\mathbf{E}} = (\overline{E}, 0, 0)$, 전자기파($\mathbf{e}, \mathbf{b}$)의 진행방향을 z-축으로 택하자. 전기장 $\mathbf{E} = \mathbf{e} + \overline{\mathbf{E}}$와 자기장 $\mathbf{B} = \mathbf{b}$를 식 (1)에 대입하고 $\mathbf{e}, \mathbf{b}$에 대한 고차항을 무시하면 아래의 라그랑지안을 얻는다.

$$L(\mathbf{e}+\overline{\mathbf{E}}, \mathbf{b}) = \beta^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{\mathbf{b}^2 - (\mathbf{e} + \overline{\mathbf{E}})^2}{\beta^2} - \frac{(\mathbf{b}\cdot\overline{\mathbf{E}})^2}{\beta^4}}\right) \tag{20}$$

위의 식으로부터 전기변위($\mathbf{d}$)와 자계강도($\mathbf{h}$)를 구하면 다음과 같다.

$$d_i = \frac{\partial L}{\partial e_i} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij} + \frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta^2K^2}\right)e_j \tag{21}$$

$$h_i = -\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta^2}\right)b_j \tag{22}$$

여기서 $K = \sqrt{1 - \overline{E}^2/\beta^2}$ 이고 $\mathbf{e}, \mathbf{b}$에 대해 선형인 항들만 남는다. 배경 전기장의 세기는 β보다 작으므로 차원이 없는 변수 $\overline{E}^2/\beta^2$는 1보다 작은 임의의 값을 가질 수 있다. 식 (21), (22)와 $d_i = \varepsilon_{ij}e_j, h_i = (\mu^{-1})_{ij}b_j$ 에서 유전율과 투자율 텐서는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij} + \frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta^2K^2}\right), \quad (\mu^{-1})_{ij} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta^2}\right) \tag{23}$$

맥스웰방정식 (7)-(10)은 파수벡터 $\mathbf{k}$와 각진동수 ω로 다음과 같이 나타낼 수 있고

$$k_id_i = k_ib_i = 0, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{e} = \omega\mathbf{b}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{h} = -\omega\mathbf{d} \tag{24}$$

이 식들로부터 전기장 $\mathbf{e}$에 대한 파동방정식을 구하면 다음과 같다 [14].

$$\begin{aligned}&[\mathbf{k}^2(\mu^{-1})_{ji} + \{k_a(\mu^{-1})_{al}k_l - \mathbf{k}^2(\mu^{-1})_{aa}\}\delta_{ij} \\ &- k_l(\mu^{-1})_{jl}k_i + \omega^2\varepsilon_{ij}]e_j = 0\end{aligned} \tag{25}$$

식 (23)을 (25)에 대입하고 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{E}} = 0$을 이용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{\omega^2}{K}\left[\left(1 - n^2 + n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta^2}\right)\delta_{ij} + \left(\frac{1}{\beta^2K^2} - \frac{n^2}{\beta^2}\right)\overline{E}_i\overline{E}_j\right]e_j = 0 \tag{26}$$

여기서 n은 유효 굴절률(effective index of refraction)로 $n \equiv k/\omega$이다. 식 (26)이 뻔하지 않은(non-trivial) 해를 가질 조건은 아래의 행렬Λ_{ij} 의 행렬식(determinant)이 영이 될 때이다.

$$\Lambda_{ij} = \left(1 - n^2 + n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta^2}\right)\delta_{ij} + \left(\frac{1}{\beta^2K^2} - \frac{n^2}{\beta^2}\right)\overline{E}_i\overline{E}_j \tag{27}$$

행렬의 고유값을 구하면 다음과 같고

$$\lambda_1 = 1 - n^2 + n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta^2}, \quad \lambda_2 = 1 - n^2 + \frac{\overline{E}^2}{\beta^2 K^2} \tag{28}$$

$K = \sqrt{1 - \overline{E}^2/\beta^2}$ 를 대입하면 $\lambda_1 = 0$과 $\lambda_2 = 0$에 대응되는 두 모드의 굴절률을 다음과 같다.

$$n_\perp = \left(1 - \frac{\overline{E}^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n_\parallel = \left(1 - \frac{\overline{E}^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{29}$$

III. 보른-인펠트 양자전기역학

II장에서는 양자효과를 고려하지 않은 고전적 보른-인펠트 이론에서의 전자기파의 진행을 고려하였다. 이 장에서는 빛의 진공편극(vacuum polarization)에 의한 양자효과를 함께 고려하자. 양자전기역학적 1차고리(one-loop) 보정에 의한 비선형 효과는 다음과 같은 오일러-하이젠버그의 유효작용으로 기술할 수 있다 [1,2].

$$\begin{aligned} L_{\rm EH} &= -S + \frac{8}{45}\frac{\alpha^2}{m_e^4}S^2 + \frac{14}{45}\frac{\alpha^2}{m_e^4}P^2 \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{2}{45}\frac{\alpha^2}{m_e^4}[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2] \end{aligned} \tag{30}$$

여기서 $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$은 미세구조상수이고 m_e는 전자의 질량이다.

I장에서 기술한 바와 같이 의 하한 값은 QED의 임계 장세기(E_c, B_c)보다 아주 크므로 양자보정이 일어나는 E_c, B_c 근처에서 보른-인펠트의 라그랑지안은 맥스웰의 라그랑지안과 같다. 따라서 보른-인펠트의 이론에서 양자전기역학적 효과에 의한 보정은 맥스웰 이론에서의 보정과 같다. S/β^2와 P/β^2가 작은 경우 보른-인펠트의 라그랑지안은 근사적으로 다음과 같다.

$$L_{\rm BI} = -S + \frac{S^2}{2\beta^2} + \frac{P^2}{2\beta^2} \tag{31}$$

따라서 양자효과를 고려한 보른-인펠트의 유효작용은 식 (30), (31)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L_{eff} = -S + \frac{S^2}{2\beta_S^2} + \frac{P^2}{2\beta_P^2} \tag{32}$$

여기서 β_S, β_P는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\beta_S^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{16}{45}\frac{\alpha^2}{m_e^4}, \quad \frac{1}{\beta_P^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{28}{45}\frac{\alpha^2}{m_e^4} \tag{33}$$

$\beta_S \neq \beta_P$ 이므로 (32)의 유효작용을 사용하여 구한 유효굴절률은 편광방향에 따라 다른 복굴절현상이 나타날 수 있음을 짐작할 수 있다. 양자보정을 하지 않은 고전적 보른-인펠트 이론에서는 $\beta_S = \beta_P$ 이므로 복굴절현상이 나타나지 않는다. S/β_S^2와 P/β_P^2가 작은 경우 식 (32)로 환원되는 보른-인펠트 양자전기역학의 일반화된 유효작용은 근사적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L_{q\rm BI} = \beta_S^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2S^2}{\beta_S^2} - \frac{P^2}{\beta_S^2\beta_P^2}}\right) \tag{34}$$

비록 위의 작용을 얻는 과정이 아주 엄밀하지는 않으나 전자기장이 아주 센 경우의 비선형 유효작용으로 보고 장방정식과 유효굴절률을 계산해 보자. 식 (34)에 대한 오일러-라그랑지 방정식은 다음과 같다.

$$\partial_\mu\left[\frac{1}{R_q}\left(F^{\mu\nu} - \frac{P}{\beta_P^2}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)\right] = 0 \tag{35}$$

여기서 $R_q = \sqrt{1 + \frac{2S^2}{\beta_S^2} - \frac{P^2}{\beta_S^2\beta_P^2}}$ 이고 장세기 텐서에 대한 비앙키 항등식은 (4)와 동일하다. 식 (34)로부터 전기변위$\mathbf{D}$와 자계강도 $\mathbf{H}$를 구하면 다음 같다.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{R_q}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\beta_P^2}\mathbf{B}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\right) \tag{36}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R_q}\left(\mathbf{B} - \frac{1}{\beta_P^2}\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\right) \tag{37}$$

식 (35)로부터 $\mathbf{D}$와 $\mathbf{H}$에 대한 다음의 두 식을 얻고

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - \nabla\times\mathbf{H} = 0 \tag{39}$$

비앙키 항등식으부터 얻은 $\mathbf{B}$와 $\mathbf{E}$에 대한 두 식은 (9), (10)과 동일하다.

유전율 텐서와 투자율 텐서에 대한 식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{R_q}\left(\delta_{ij} + \frac{1}{\beta_P^2}B_iB_j\right), \mu_{ij}^{-1} = \frac{1}{R_q}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{\beta_P^2}E_iE_j\right) \tag{40}$$

위의 관계식은 보른-인펠트의 전기역학에서 진공이 비등방적(anisotropic)임을 나타낸다. 행렬 ε_{ij}와 μ_{ij}^{-1}를 대각화

하는 고유값과 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_1(\varepsilon) = \frac{1}{R_q}\left(1+\frac{\mathbf{B}^2}{\beta_P^2}\right), \quad \lambda_2(\varepsilon) = \frac{1}{R_q} \text{ (중근)} \tag{41}$$

$$\lambda_1(\mu^{-1}) = \frac{1}{R_q}\left(1-\frac{\mathbf{B}^2}{\beta_P^2}\right), \quad \lambda_2(\mu^{-1}) = \frac{1}{R_q} \text{ (중근)} \tag{42}$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ij} = R_q\left(\delta_{ij} - \frac{B_iB_j}{\beta_P^2+\mathbf{B}^2}\right) \tag{43}$$

$$\mu_{ij} = R_q\left(\delta_{ij} + \frac{E_iE_j}{\beta_P^2-\mathbf{E}^2}\right) \tag{44}$$

앞 장에서와 같이 정지한 점전하에 의한 전기장을 구해보자. $\mathbf{D}_0 = (q/4\pi r^2)\hat{r}$와 $\mathbf{B} = 0$을 식 (36)에 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\sqrt{1+\frac{D_0^2}{\beta_S^2}}} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\sqrt{r^4+r_0^4}} \tag{45}$$

여기서 $r_0 = \sqrt{q/4\pi\beta_S}$이다. 양자보정을 하지 않은 경우의 식 (18)과 비교하면 단순히 β가 β_S로 대체된 것과 같다.

식 (36)과 (37)의 내적을 취하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\cdot\mathbf{H} &= \frac{1}{R_q^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\left(1+\frac{2S}{\beta_P^2}-\frac{P^2}{\beta_P^4}\right)\\ &= \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\frac{1+2\beta_P^{-2}S-\beta_P^{-4}P^2}{1+2\beta_S^{-2}S-\beta_S^{-2}\beta_P^{-2}P^2}\end{aligned} \tag{46}$$

$\beta_S = \beta_P = \beta$인 보른-인펠트 고전전자기이론에서는 $\mathbf{D}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$인 비선형 전기역학의 양면대칭성(duality symmetry)이 성립하나 $\beta_S \neq \beta_P$인 보른-인펠트 양자전자기이론에서는 이 대칭성은 깨진다.

이제 강하고 균일한 전기장($\overline{\mathbf{E}}$)에 수직으로 전파되는 전자기파의 운동을 고려하여 유효굴절률을 구해보자. II장에서와 같이 전기장의 방향을 x-축으로 잡고, , 전자기파($\mathbf{e}, \mathbf{b}$)의 진행방향을 z-축으로 택하고 전기장$\mathbf{E} = \mathbf{e}+\overline{\mathbf{E}}$와 자기장 $\mathbf{B} = \mathbf{b}$를 식 (34)에 대입하고 $\mathbf{e}, \mathbf{b}$에 대한 고차항을 무시하면 아래의 라그랑지안을 얻는다.

$$L(\mathbf{e}+\overline{\mathbf{E}}, \mathbf{b}) = \beta_S\left(1-\sqrt{1+\frac{\mathbf{b}^2-(\mathbf{e}+\overline{\mathbf{E}})^2}{\beta_S^2}-\frac{(\mathbf{b}\cdot\overline{\mathbf{E}})^2}{\beta_S^2\beta_P^2}}\right) \tag{47}$$

위의 식으로부터 전기변위($\mathbf{d}$)와 자계강도($\mathbf{h}$)를 구하면 다음과 같다.

$$d_i = \frac{\partial L}{\partial e_i} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij}+\frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta_S^2K^2}\right)e_j \tag{48}$$

$$h_i = -\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij}-\frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta_S^2}\right)b_j \tag{49}$$

여기서 $K^2 = \sqrt{1-\overline{E}^2/\beta_S^2}$이고 유전율과 투자율 텐서는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij}+\frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta_S^2K^2}\right), (\mu^{-1})_{ij} = \frac{1}{K}\left(\delta_{ij}-\frac{\overline{E}_i\overline{E}_j}{\beta_P^2}\right) \tag{50}$$

식 (50)을 (25)에 대입하고 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{E}} = 0$을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{\omega^2}{K}\left[\left(1-n^2+n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta_P^2}\right)\delta_{ij}+\left(\frac{1}{\beta_S^2K^2}-\frac{n^2}{\beta_P^2}\right)\overline{E}_i\overline{E}_j\right]e_j = 0 \tag{51}$$

식 (51)이 뻔하지 않은(non-trivial) 해를 가질 조건은 아래 행렬의 행렬식이 영이 되는 경우이다.

$$\Lambda_{ij} = \left(1-n^2+n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta_P^2}\right)\delta_{ij}+\left(\frac{1}{\beta_S^2K^2}-\frac{n^2}{\beta_P^2}\right)\overline{E}_i\overline{E}_j \tag{52}$$

이 행렬의 고유값을 구하면 다음과 같고

$$\lambda_1 = 1-n^2+n^2\frac{\overline{E}^2}{\beta_P^2}, \quad \lambda_2 = 1-n^2+\frac{\overline{E}^2}{\beta_S^2K^2} \tag{53}$$

$K = \sqrt{1-\overline{E}^2/\beta_S^2}$를 대입하면 $\lambda_1 = 0$과 $\lambda_2 = 0$에 대응되는 두 모드의 굴절률을 다음과 같이 구해진다.

$$n_\perp = \left(1-\frac{\overline{E}^2}{\beta_P^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n_\parallel = \left(1-\frac{\overline{E}^2}{\beta_S^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{54}$$

본-인펠트 양자전자기 이론에서 $\beta_S \neq \beta_P$이므로 위의 식은 전자기파가 강한 전기장을 지나가는 경우 양자 전기역학적 효과에 의해 빛의 속력이 편광방향에 따라 다름을 보여준다.

IV. 요약 및 논의

양자효과를 고려한 보른-인펠트의 전기이론에서 전자기파가 강한 전기장을 지나가는 경우 빛의 전파를 연구하였다. 강한 전기장은 양자효과에 의해 진공편극의 비등방성을 유발하고 이는 유전율 텐서와 투자율 텐서에 비대칭 항으로 나타난다. 이 비대칭성을 반영한 맥스웰 방정식들로부터 유도된 파동방정식이 뻔하지 않은 해를 가질 조건으로부터 두 모드의 유효굴절률을 구하였다. 두 개의 매개변수 β_P와 β_S로 나타낼 수 있는 일반화된 보른-인펠트 이론에서 $\beta_P = \beta_S$인 경우는 고전적 보른-인펠트 이론으로 환원되고 비선형 전기역학의 양면대칭성이 성립한다. $\beta_P \neq \beta_S$인 일반적인 보른-인펠트 양자전기이론에서 이 대칭성이 깨어지게 된다.

강한 전기장 배경에서 전파하는 전자기파의 유효굴절률은 편광방향에 의존한다는 이 결과를 검증하는 간단한 방법은 복굴절 현상을 직접 관측하는 것이다. 예를 들어 $z = 0$에서 x-y 평면에 편광된 전자기파 $\mathbf{e} = e_0(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$를 고려하자. 여기서 θ는 외부전기장$\bar{\mathbf{E}}$와 편광벡터 사이의 각도이다. 그러면 $z = L$만큼 진행한 후 전자기파는 타원편광되고 그 타원률(ellipticity)을 계산하면 [15] 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{1}{2}(n_\perp - n_\parallel)\omega L \sin 2\theta \tag{55}$$

양자효과를 무시한 고전적 보른-인펠트 전기이론에서는 $n_\perp = n_\parallel$이므로 복굴절 현상은 나타나지 않는 것은 자명하다.

유효굴절률이 편광에 의존하는 이 연구의 결과를 강한 전하를 띤 물체 주위를 지나가는 전자기파에 적용할 수 있을 것이다. 이 경우 굴절률은 전기장에 의존하므로 물체로부터의 거리에 따라 연속적으로 변하게 된다. 즉 굴절률에 기울기(gradient)가 존재한다. 무한대에서 입사하는 전자기파는 굴절률의 변화에 의해 경로가 휘게 될 것이고 일반적으로 수직인 모드와 평행인 모드의 굴절률이 다르므로 휘는 각도 또한 모드에 따라 다를 것이다. 휘는 각도를 기하광학에 기초한 경로적분 [16,17]으로 계산할 수 있는데 이를 전하를 띤 천체나 핵 주위를 지나가는 전자기파에 대해 적용할 경우 흥미로운 결과를 얻을 수 있을 것이다.

감사의 글

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 이공분야기초연구사업의 기본연구(NRF-2019R1F1A1060409) 지원을 받아 수행된 연구입니다.

REFERENCES

[1] W. Heisenberg and H. Euler, PZ. Phys. **98**, 714 (1936).
[2] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
[3] T. Heinzl *et al.*, Opt. Commun. **267**, 318 (2006).
[4] B. King, A. Di Piazza and C. H. Keitel, Nat. Photonics **4**, 92 (2010).
[5] A. Cadene *et al.*, Eur. Phys. J. D **68**, 16 (2014).
[6] E. Zavattini *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 110406 (2006).
[7] S. A. Adler, J. Phys. A **40**, F143 (2007).
[8] S. Biswas and Melnikov, Phys. Rev. D **75**, 053003 (2007).
[9] S. I. Kruglov, Phys. Rev. D **75**, 117301 (2007).
[10] S. I. Kruglov, Int. J. Mod. Phys. A **34**, 1950019 (2019).
[11] M. Born, Proc. R. Soc. London A **143**, 410 (1934).
[12] M. Born and L. Infeld, Proc. R. Soc. London A **144**, 425 (1934).
[13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley and Sons, 1998).
[14] S. I. Kruglov, J. Phys. A **43**, 375402 (2010).
[15] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optic*, (Cambridge University Press, 1999).
[16] J. Y. Kim and T. Lee,. Mod. Phys. Lett. A **26**, 1481 (2011).
[17] J. Y. Kim and T. Lee, New Phys.: Sae Mulli **62**, 1176 (2012).