

Mateus Reinke Pelicer

## **Distribuições partônicas e correções de potência ao espalhamento profundamente inelástico**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pelicer, Mateus

Distribuições partônicas e correções de potência ao  
espalhamento profundamente inelástico / Mateus  
Pelicer ; orientador, Emmanuel de Oliveira, 2019.  
103 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e  
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física,  
Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Física. 2. cromodinâmica-quântica. 3. glúons. 4.  
distribuição-partônica. I. de Oliveira, Emmanuel. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Física. III. Título.

Nesta página incluir a folha de rosto da defesa.

*“A vida é curta, e é pecado perder tempo.*

*Sou ativo, dizem. Mas ser ativo é, ainda, perder tempo, na medida em que nos perdemos. ”*

Albert Camus

## Agradecimentos

Agradeço imensamente meus pais por todo carinho e apoio que me foram dados durante a vida.

Agradeço também à Laura, meu amor, que possui a capacidade de fazer o sol brilhar no coração mais enevoadado.

Ao meu orientador Emmanuel, por todas discussões enriquecedoras, e por instigar a independência e a busca por caminhos singulares.

A FAPESC, CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

*Obrigado.*



# Resumo

Quarks e glúons, ou pártons, são partículas fundamentais que interagem fortemente e só existem confinadas em estados ligados: hádrons. A estrutura hadrônica pode ser sondada por meio de colisões hadrônicas em altas energias, porém a descrição das interações partônicas necessita de conhecimento do espalhamento em curtas distâncias, além da distribuição de partículas no hádron; só o primeiro pode ser obtido por um cálculo *ab initio*, ao passo que a segunda necessita, atualmente, ser ajustada conforme as medidas experimentais. As distribuições disponíveis atualmente são bem determinadas quando as escalas de massa do processo são suficientemente maiores do que as massas hadrônicas, porém quando as escalas possuem magnitude similar e a fração de momento colinear do párton em relação ao hádron é pequena, correções possivelmente grandes devem ser consideradas. Nesta dissertação é estudado o impacto de correções absorptiva e de confinamento na qualidade do ajuste das distribuições de pártons, mensurada pelo valor de  $\chi^2/\text{d.o.f.}$ , e, em especial, na distribuição de glúons. A correção absorptiva é pertinente devido à alta densidade de glúons na região semimacia e descrita a partir da recombinação de escadas de glúons e do formalismo difrativo na teoria de Regge. Concomitantemente, a correção de confinamento está associada ao congelamento da constante de acoplamento na região infravermelha, resultado decorrente principalmente de métodos perturbativos aprimorados e de cromodinâmica quântica na

rede, e é implementada empregando a proposta oriunda da teoria de perturbação analítica massiva. Para a realização dos ajustes são utilizados dados de espalhamento lepton-próton profundamente inelástico inclusivo e difrativo advindos do HERA. São utilizadas duas parametrizações para a distribuição de glúons, uma possibilitando que esta se torne negativa e outra restringindo-a a valores positivos. É demonstrado que a inclusão da correção absorptiva provoca uma melhora na qualidade do ajuste, fazendo com que o  $\chi^2/\text{d.o.f.}$  decaia de 1,225 para 1,099, enquanto que a correção de confinamento não provoca impacto significativo na qualidade. No que tange a distribuição de glúons, ambas correções fazem com que ela se torne maior, mais plana e menos restritiva, com ambas parametrizações, em baixas escalas. Além disso, também é encontrado que a parametrização negativa melhora marginalmente o ajuste, contudo é instável com relação à inclusão dos dados semimacios.

**Palavras-chaves:** cromodinâmica-quântica. glúons. distribuição-partônica.



# Abstract

Quarks and gluons, or partons, are fundamental particles which interact strongly and exist only in bound states: hadrons. The hadronic structure can be probed in hadronic collisions at high energies, but the description of partonic interactions requires knowledge of the scattering in small distances, besides the one of distribution of particles in the hadron; only the first can be obtained from an *ab initio* calculation, while the second, currently, has to be adjusted according to experimental measurements. The current available distributions are well determined when the mass scales of the process are sufficiently larger than the hadronic masses, however, if the scales are of similar magnitude and the fraction of collinear momentum of the parton in relation to the hadron is small, possibly large corrections must be considered. In this dissertation we study the impact of absorptive and confinement corrections in the quality of the fit of the distributions, measured by the  $\chi^2/\text{d.o.f.}$ , and, specially, in the gluon distribution. The absorptive correction is relevant due to the high density of gluons in the semi-soft region and is described by the recombination of gluon ladders and the diffractive formalism of Regge theory. Concomitantly, the confinement correction is associated to the freezing of the coupling constant in the infrared region, a result mostly due to improved perturbation theory and lattice quantum chromodynamics, which is implemented employing the proposal from massive analytic perturbation theory. The fits are performed

using data from inclusive deep inelastic and diffractive lepton-proton scattering from HERA. Two parametrizations are used for the gluon distribution, one allowing it to become negative and another restricting it to positive values. It is demonstrated that the inclusion of the absorptive correction provokes an improvement in the quality of the fit, causing the  $\chi^2/\text{d.o.f.}$  to decay from 1,225 to 1,099, while the confinement correction does not improve the quality. In reference of the gluon distribution, both corrections make it become larger, more flat and less restrictive, with both parametrizations, at low scales. Besides, it is also found that the negative parametrization marginally improves the fit, yet it is unstable with relation to the inclusion of semisoft data.

**Key-words:** quantum-chromodynamics. gluons. parton-distribution.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Espalhamento Profundamente Inelástico</b>	<b>23</b>
2.1	CROMODINÂMICA QUÂNTICA . . . . .	23
2.2	CINEMÁTICA . . . . .	29
2.3	SEÇÃO DE CHOQUE E FUNÇÕES DE ESTRUTURA . . .	31
2.4	MODELO DE PÁRTONS . . . . .	36
2.5	ORDEM SEGUINTE À DOMINANTE . . . . .	39
2.6	EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DGLAP . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Metodologia do ajuste das PDFs</b>	<b>55</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	55
3.2	PARAMETRIZAÇÃO . . . . .	58
3.3	QUALIDADE DO AJUSTE . . . . .	61
3.4	FENOMENOLOGIA . . . . .	66
3.5	SOFTWARES: QCDNUM E xFitter . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Correções de potência</b>	<b>71</b>
4.1	CORREÇÃO ABSORTIVA . . . . .	71
4.2	CORREÇÃO DE CONFINAMENTO . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>81</b>
5.1	CORREÇÃO ABSORTIVA . . . . .	84
5.2	CORREÇÃO DE CONFINAMENTO . . . . .	88

Conclusão	93
Referências bibliográficas	95
A Prescrição mais	107

# 1. Introdução

O conceito de átomo (do grego a: não; tomo: dividir) é datado ao século VI AEC, com Demócrito, e refere-se a objetos indivisíveis que compõem a matéria. Somente no século XIX, após séculos de especulação filosófica em torno dos constituintes fundamentais da matéria, o modelo atômico começou a popularizar-se na ciência ao se tornar objeto de estudo da física com Dalton (1803), que supôs que os elementos da tabela periódica são constituídos de átomos, com átomos de diferentes elementos possuindo diferentes propriedades. Thomson, um século depois, obteve resultados experimentais indicando uma subestrutura atômica, conduzindo à elaboração de modelos mais sofisticados nos quais o átomo adquire componentes. Atualmente, átomo refere-se a um sistema de corpos: no centro há um núcleo carregado positivamente, composto de prótons e nêutrons, e envolto por uma nuvem de elétrons, carregados negativamente. A órbita eletrônica é mantida coesa pela força eletromagnética, e o núcleo pela interação forte. Após a ressignificação do átomo e o advento da mecânica quântica, objetos quânticos, indivisíveis ou não, são denominados de partículas, e são definidos por números principais e propriedades como massa e cargas elétrica e de cor. Em meados de 1940, um pequeno número de partículas era conhecido: pósitron, neutrino e múon, além das que compõem o átomo. Porém, entre 1940 e 1950, houve uma explosão na efetividade dos colisores e um zoológico de partículas foi descoberto.

O número inesperado de supostas partículas elementares despertou a curiosidade sobre uma possível classificação das mesmas, que foi feita sistematicamente por Murray e Gell-Mann em um esquema denominado *Eightfold-way*, que foi utilizado na formulação do modelo de quarks de Gell-Mann e Zweig, no qual mésons são compostos por um quark e anti-quark, e bárions por três quarks, sendo os quarks partículas fundamentais de spin  $1/2$  e

carga elétrica fracionária. A simplicidade do modelo de quarks e a ótima descrição dos hádrons – bárions e mésons – era entusiasmante, porém havia uma inconsistência na descrição do bárion  $\Delta^{+++}$ , que violaria o princípio de Pauli visto ser composto de três quarks up de spin 1/2. Como solução foi conjecturado que quarks devem possuir um grau de liberdade não observado em partículas livres, denominado cor, responsável por confiná-los aos hádrons. Estes últimos devem estar em estados singletos de cor, i.e. possuem cor branca [1, 2].

Em paralelo à formulação do modelo de quarks, ocorreu o desenvolvimento de uma teoria quântica de campos, unificando as interações eletromagnética e fraca, formulada por Weinberg, Glashow e Salam [3, 4]. O sucesso do modelo fez com que uma formulação do modelo de quarks como teoria quântica de campos não-abeliana fosse proposta, a qual foi denominada cromodinâmica quântica (CDQ), na qual as cargas de cor estão associadas a uma simetria de gauge SU(3) e a força nuclear forte se propaga através de um campo gluônico, associado a partícula glúon. As principais observações iniciais em favor da CDQ foram: a medida do número de cores através da razão entre as seções de choque  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  e  $e^-e^+ \rightarrow \text{hádrons}$ ; eventos com três jatos de hádrons, que devem existir devido à alta probabilidade de desdobramento de quarks em glúons; e descrição de eventos envolvendo jatos e fótons com altos momentos transversais [5, 6].

As interações entre quarks e glúons (ou pártons, para denominar ambos) possuem duas propriedades extremamente relevantes: liberdade assintótica e confinamento, que advém do comportamento da constante de acoplamento, que apesar de ser denominada constante, depende da escala de energia. A primeira ocorre em altas energias (região dura), e permite que quarks possam ser tratados como quase livres, permitindo a utilização de teoria de perturbação em espalhamentos hadrônicos. Em contraste a segunda ocorre em escalas de energia próximas das massas hadrônicas (região macia), onde a interação possui constante de acoplamento demasiadamente grande para teoria de per-

turbação, e corresponde ao mecanismo responsável por confiar pártons em estados ligados. Atualmente, não há descrição analítica da região de confinamento que permita previsões físicas, porém, há diversas investigações a respeito de métodos não-perturbativos para extrair informações sobre esta região [7–9]. Além disso, métodos numéricos de CDQ na rede são capazes de determinar massas hadrônicas e reproduzir a propriedade confinamento [10].

O tratamento perturbativo da CDQ permite expressar seções de choque hadrônicas como uma convolução entre funções perturbativas, relacionadas à colisão do projétil com os pártons, e não-perturbativas, associadas à função de onda hadrônica e denominadas funções de distribuição partônica (PDFs). As PDFs obedecem à equação DGLAP, que dita sua evolução em relação a uma escala de energia típica do processo. Nosso conhecimento atual das PDFs se dá por meio de ajustes a dados experimentais de colisões, dos quais a maior quantidade e melhor precisão advém de espalhamentos inelásticos entre léptons e prótons no HERA [11]. Um ajuste preciso das PDFs é essencial para previsões teóricas e análises de colisões hadrônicas, assim como foram de suma importância na descoberta do bóson de Higgs e o são na busca de física além do modelo padrão [12].

Apesar do sucesso da CDQ na descrição de colisões hadrônicas em altas energias, questões como a origem das correlações angulares em colisões  $pp$  e  $pA$  [13], a origem partônica do spin do próton [14] e o mecanismo que leva ao confinamento [15] continuam em aberto. Além disso a descrição de eventos em escalas semimacias ( $1\text{--}5\text{ GeV}^2$ ) é incompleta na CDQ perturbativa [16–20]. Recentes estudos a respeito das PDFs incluem: propostas para acessar distribuições partônicas que contém informações da estrutura multi-dimensional dos hádrons, como distribuições partônicas generalizadas e de Wigner [21, 22]; a determinação da distribuição fotônica no próton [23]; e o impacto de ressonâncias e correções semimacias nos ajustes [24, 25]. Nesta dissertação é estudado o impacto de duas correções de potência, importantes na região semimacia, ao ajuste das distribuições partônicas: de absorção e

de confinamento, referentes à recombinação de glúons e ao congelamento da constante de acoplamento na região infravermelha, respectivamente.

O Capítulo 2 apresenta uma introdução ao modelo padrão de partículas, com foco na CDQ, para, em seguida, apresentar uma discussão do espalhamento profundamente inelástico entre léptons e hádrons e das PDFs. O cálculo da seção de choque é apresentado na região dominada pela interação Coulombiana, e as funções de estrutura são obtidas, em uma primeira aproximação, através do modelo de pártons. Contribuições da força forte são calculadas em detalhe utilizando o teorema de fatorização, levando à renormalização das PDFs e à equação de evolução DGLAP. No Capítulo 3 são discutidos tópicos relacionados ao ajuste das PDFs, como parametrização e quantificação da qualidade do ajuste através do  $\chi^2$ , também é abordada a fenomenologia do EPI e das PDFs. O Capítulo 4 trata de correções absorptiva e de confinamento, que devem possuir impacto significativo na descrição de eventos na região semimacia. O impacto destas correções na distribuição de glúons e na qualidade do ajuste serão expostos e discutidos no Capítulo 5, onde é demonstrado que a inclusão das mesmas favorecem distribuições gluônicas maiores e impactam positivamente a qualidade do ajuste, em especial a correção absorptiva.



## 2. Espalhamento Profundamente Inelástico

Neste capítulo o espalhamento profundamente inelástico entre léptons e hádrons é discutido, após uma introdução tratando do modelo padrão e das propriedades principais da interação forte. O modelo de pártons é introduzido para expressar a seção de choque em ordem dominante e prover uma descrição intuitiva dos hádrons a partir de seus componentes, porém, devido a suas limitações, é utilizado o teorema de fatorização para uma descrição do evento incluindo correções de ordens superiores referentes à interação forte, que levam às equações de evolução DGLAP para as distribuições partônicas.

### 2.1. CROMODINÂMICA QUÂNTICA

O Modelo Padrão (MP) de partículas é uma teoria quântica de campos que descreve as interações eletrofraca e forte. Cada partícula fundamental está associada a um campo e a um estado excitado e pode ser classificada como férmion (partícula de spin semi-inteiro) ou bóson (spin inteiro), de acordo com a Fig. 2.1. As interações são representadas pela propagação/-contração de campos e são ditas mediadas pela partícula associada ao campo. Além disso, os campos bosônicos de spin 1 estão associados a uma simetria de gauge na lagrangiana: o grupo de simetria da interação fraca é o  $SU(2)$ , o da eletromagnética o  $U(1)$  e o da força forte é o  $SU(3)$ .

Os férmions são representados por espinores de Dirac (spin  $1/2$ ) e podem ser divididos em quarks e léptons. Léptons possuem carga elétrica inteira e nenhuma carga de cor, sendo subdivididos em elétrons ( $e$ ), múons ( $\mu$ ) e taus ( $\tau$ ), de carga  $-1$ , e neutrinos associados, de carga nula. Em contraste, os 6 sabores de quarks: up, down, strange, charm, bottom e top ( $u, d, s, c, b, t$ ) possuem carga de cor, podendo ser vermelho, verde ou azul ( $R, G, B$ ) e carga elétrica fracional:  $+2/3$  para quarks  $u, c$  e  $t$  e  $-1/3$  para  $d, s$  e  $b$ . Todos férmions possuem uma antipartícula associada, a qual, por definição, possui

os números quânticos opostos.

Bósons podem ser escalares (spin 0) ou vetoriais (spin 1). O bóson de Higgs é o único escalar de spin 0 do MP e é responsável por dar massa às outras partículas pelo mecanismo de quebra de simetria. Bósons de spin 1 são os mediadores de forças e incluem: o fóton ( $\gamma$ ), mediador da força eletromagnética; os bósons  $Z$  e  $W^\pm$ , mediadores da força fraca; e os 8 glúons ( $g$ ) mediadores da força forte.

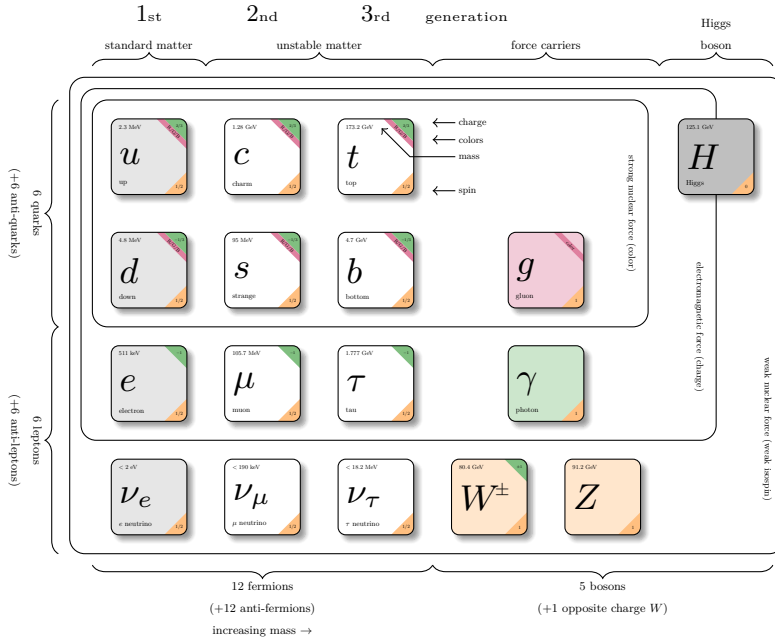


Figura 2.1: O modelo padrão de partículas. As três primeiras colunas representam as gerações de férmions e as duas primeiras e duas últimas linhas de cada coluna formam dubletos de isospin da interação fraca. As propriedades principais de cada partícula (carga, massa, cor e spin) estão destacadas nas respectivas caixas. Fonte: Ref. [26].

Esta dissertação busca tratar sobre sistemas físicos nos quais a cromodinâmica quântica (CDQ) possui maior importância e uma introdução dos conceitos fundamentais se faz necessário. A interação forte é conceitualmente

e formalmente complexa, porém, dentre as interações descritas pelo MP, os pormenores formais da interação fraca fazem com que esta seja, formalmente, mais profunda. Como a força forte possui grupo de simetria  $SU(3)$  ela é dita não-abeliana, fisicamente isto significa que os glúons possuem carga de cor, havendo uma autointeração entre campos gluônicos – o que não ocorre com fóton, eletricamente neutros. Tal autointeração é responsável pelo comportamento da constante da teoria em diferentes escalas de energia, pelas propriedades de liberdade assintótica e confinamento.

A lagrangiana da cromodinâmica quântica pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_{f,i} \left( i \not{D} \delta_{ij} - g_s t_{ij}^a A^a - m_f \delta_{ij} \right) \psi_{f,j} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (2.1)$$

na qual  $\psi_{f,i}$  são os espinores de Dirac dos quarks de sabor  $f$  e cor  $i$ , havendo um total de  $N_f$  sabores e  $N_c$  cores. Os termos traçados estão contraídos com matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ , i.e.  $\not{A} = \gamma_\mu A^\mu$ . As matrizes  $t_{ij}^a$  são os elementos dos 8 geradores do grupo  $SU(3)$  na representação fundamental e  $A_\mu^a$  os 8 campos gluônicos (que se encontram na representação adjunta).  $m_f$  é a massa do quark de sabor  $f$ . O tensor de força  $G_{\mu\nu}^a$  é definido como

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2)$$

sendo  $f_{abc}$  denominada constante de estrutura do  $SU(3)$ . A principal diferença entre a CDQ e a eletrodinâmica quântica é o último termo na Eq. (2.2), responsável por introduzir a já mencionada autointeração entre os glúons.

Utilizando a lagrangiana e o formalismo de integrais de trajetória, que pode ser revisado nas Refs. [28, 29], é possível calcular observáveis como seções de choque e tempos de meia vida a partir de estados de partículas assintoticamente livres. O cálculo destes, formulado a partir de diagramas de Feynman, se torna simplificado e intuitivo. Os diagramas representam termos de uma expansão perturbativa nas constantes de acoplamento –  $\alpha_s =$

$g_s^2/4\pi$  para a força forte – e cada pedaço do diagrama possui representação matemática, como pode ser visto nas Regras de Feynman no Apêndice C da Ref. [30]. Na Fig. 2.2 está representado o termo de ordem dominante –  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  – para o espalhamento quark-antiquark em um estado octeto de cor.

Os diagramas de loop representam correções quânticas, proporcionais a potências de  $\hbar$  (serão utilizadas unidades naturais durante esta apresentação:  $\hbar = c = 1$ ) e contém divergências devidos à integrais em regiões ultravioletas ou infravermelhas de momento, sendo necessário utilizar os processos de regularização e renormalização para incorporá-las à teoria [31]. A regularização consiste em isolar a singularidade de outros termos finitos e a renormalização em redefinir uma variável da teoria livre (e.g. massa, carga, constante de acoplamento), que ‘absorve’ o termo divergente isolado. A variável da teoria livre é dita nua e a renormalizada é a dita física, incorporando correções quânticas e possuindo dependência em uma escala de renormalização com dimensão de massa ( $\mu_R$ ), a qual não deve influenciar observáveis. Sendo imposta a condição de que observáveis independam da escala, pode ser obtida a equação do grupo de renormalização, que determina a dependência dos parâmetros na escala.

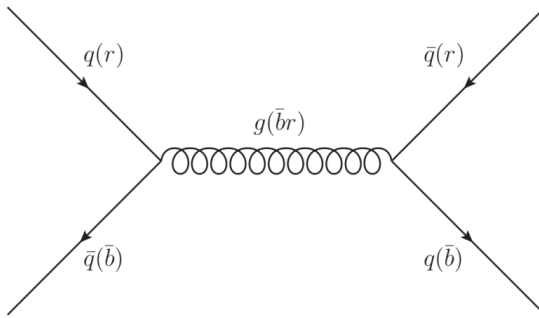


Figura 2.2: Aniquilação de um quark vermelho com um antiquark antiazul em um glúon (de carga vermelha+antiazul). Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

O exemplo direto da CDQ é a constante de acoplamento, que obedece a

$$\frac{\partial \alpha_s(\mu_R^2)}{\partial \ln \mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -\alpha_s^2 \beta_0 - \alpha_s^3 \beta_1 + \dots \quad (2.3)$$

A função beta ( $\beta$ ) é calculada a partir de uma expansão em  $\alpha_s$ . O primeiro termo possui contribuições de 11 diagramas, entre os quais as primeiras correções ao propagador do glúon estão representadas na Fig. (2.3). O primeiro termo coeficiente da expansão perturbativa é dado [5] por  $\beta_0 = (11C_A - 4N_f T_R)/(12\pi)$  e seu cálculo rendeu um prêmio Nobel a Gross, Wilczek e Politzer [32,33]. Nesta,  $C_A = N_C$  é o autovalor de Casimir na representação fundamental do SU(3) e  $T_R$  é o fator de normalização do traço de dois geradores:  $\text{Tr } t^a t^b = T_R \delta^{ab} = \delta^{ab}/2$ . Atualmente a função beta é conhecida analiticamente até cinco loops [34,35].



Figura 2.3: Diagramas de loop que contribuem como correções ao propagador de glúons. As divergências vindas dos loops levam à renormalização da constante de acoplamento. Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

Em primeira ordem a solução da Eq. (2.3) pode ser expressa como

$$\alpha_s(\mu_R^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mu_R^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}. \quad (2.4)$$

Na qual  $\Lambda_{\text{QCD}}$  é o polo de Landau (ou parâmetro de escala da CDQ), que define o ponto em que a constante de acoplamento diverge.

Devido ao sinal da função beta ( $\beta < 0$  se  $N_f < 16,5$ ) a constante de acoplamento decresce com o aumento escala (ver Fig. 2.4), possibilitando utilizar teoria de perturbação quando a escala do processo estudado é suficientemente grande, visto que os componentes hadrônicos podem ser tratadas como quase livres. Esta propriedade chama-se liberdade assintótica, expressa

matematicamente como

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \alpha_s(Q^2) = 0. \quad (2.5)$$

Em contraste, na região infravermelha, em que a interação é verdadeiramente forte, a constante de acoplamento é grande, não permitindo o tratamento perturbativo. É nesta que se encontra o pólo de Landau, de valor numérico aproximado 0,30 GeV, usualmente utilizado para determinar o regime perturbativo da CDQ ( $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ ) [2].

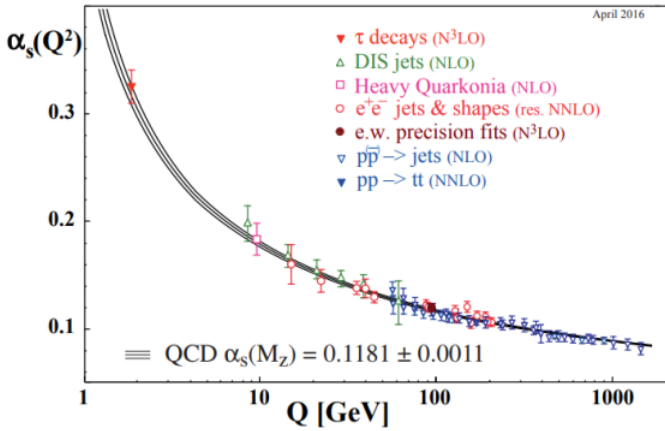


Figura 2.4: Medidas da constante de acoplamento em função do logaritmo da escala  $Q$ . O valor de referência convencionado é a massa do bóson  $Z$ . Fonte: Ref. [5].

Outra propriedade importante da CDQ é o confinamento, que conjectura que partículas com cargas de cor não existem livremente, somente confinadas em estados ligados. O mecanismo do confinamento não é, atualmente, compreendido analiticamente, porém, estudos da CDQ na rede foram capazes de reproduzir esta propriedade. É interessante notar que a CDQ na rede também já é capaz de determinar massas hadrônicas a partir de cálculos *ab initio* [10]. Esta breve introdução da CDQ e do MP permite que seja introduzida a cinemática de um espalhamento que permite sondar a estrutura interna dos hádrons.

## 2.2. CINEMÁTICA

O Espalhamento Profundamente Inelástico (EPI) refere-se à colisão entre um lépton  $L$  e um hádron  $H$ , em que a alta energia envolvida no processo é responsável por “quebrar” o próton, produzindo uma miríade de hádrons, denotada por  $X$ , e um lépton  $L'$ .

$$L(l) + H(P) \longrightarrow L'(l') + X(P_X). \quad (2.6)$$

A interação lépton-hádron pode ser eletromagnética ou fraca. As interações Coulombianas são dominantes na região em que a escala do processo é menor que a massa do bóson  $Z$  ( $Q^2 \lesssim M_Z^2$ ). Durante a apresentação deste capítulo será explicitada somente a contribuição eletromagnética e os aspectos da contribuição fraca serão discutidos somente quando pertinentes.

O EPI pode ser dividido em dois subprocessos, i) de Corrente Neutra (CN), em que o bóson vetorial possui carga elétrica nula ( $\gamma, Z$ ) e os léptons inicial e final são os mesmos ( $L = L' = e, \mu, \tau$ ); e ii) de Corrente Carregada (CC), na qual a interação é mediada por um bóson carregado  $W^\pm$  e os léptons inicial e final são diferentes (p.ex.  $L = \nu_e, \mu$ ;  $L' = e, \nu_\mu$ ). Apesar de processos do tipo CC serem importantes, como será discutido na Seção 3.1, nosso foco se dará em processos de CN.

As escalas de massa utilizadas no EPI são de ordens de grandeza muito maior que a massa dos léptons utilizados (com exceção do  $\tau$ , porém a instabilidade deste o faz inviável como estado inicial), portanto será utilizado o limite em que  $m_L \rightarrow 0$ . Utilizando o referencial de repouso do próton os quadrimomentos envolvidos no processo são:

- Momento do lépton inicial:  $l = (E, 0, 0, E)$
- Momento do lépton final:  $l' = (E', 0, E' \sin \theta, E' \cos \theta)$
- Momento do fóton:  $q = l - l'$
- Momento do hádron:  $P = (M_h, \vec{0})$ .

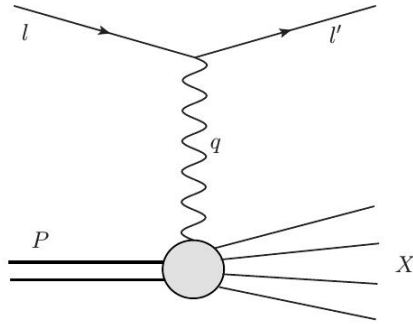


Figura 2.5: Diagrama representado o espalhamento inelástico de um lépton de momento  $l$  por um hádron de momento  $P$ . Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

A partir dos momentos acima é conveniente definir invariantes de Lorentz para descrever a colisão. A virtualidade do bóson é definida como uma variável positiva pela expressão

$$Q^2 = -q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta) = 4EE' \sin^2 \theta/2, \quad (2.7)$$

sendo  $\theta$  o ângulo formado entre os léptons inicial e final. A variável de Bjorken é

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M_h \nu}, \quad (2.8)$$

e a inelasticidade

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot l} = \frac{\nu}{E}, \quad (2.9)$$

sendo esta última a fração de energia perdida do lépton, onde  $\nu = P \cdot q/M_h = E - E'$  é energia transferida do lépton ao hádron. Restrições cinemáticas impõem que  $0 < y < 1$  e  $0 < x < 1$ .

Note que somente duas destas variáveis são independentes e, portanto, necessárias para descrever a cinemática da colisão, além da energia de centro de massa  $s = (P+l)^2$ . Na literatura as variáveis  $Q^2$  e  $x$  são as escolhas canô-



nicas. Além disso, estas podem ser determinadas somente com conhecimento de  $s$  e do quadrimomento do lépton final, sendo desnecessário conhecimento de qualquer informação sobre o conjunto hadrônico  $X$  [36], simplificando (parcialmente) o processo do ponto de vista experimental.

A variável  $Q^2$  está relacionada a energia do fóton virtual  $e$ , pelo princípio da incerteza, também ao seu comprimento de onda. Se a virtualidade do bóson é alta, ele está associado a um pequeno comprimento de onda, permitindo uma maior resolução transversal do hádron [37]. Equivalentemente é dizer que o bóson atua como um microscópio, permitindo sondar a estrutura do hádron. Por este motivo a virtualidade também pode ser denominada resolução do bóson. A variável de Bjorken  $x$  está correlacionada à fração de momento longitudinal do quark interagente em relação ao próton no referencial de momento infinito do próton. Sem a inclusão da força forte na série perturbativa esta correlação é exata, como será demonstrado.

### 2.3. SEÇÃO DE CHOQUE E FUNÇÕES DE ESTRUTURA

O observável para espalhamentos é a seção de choque diferencial, que integrada está relacionada à área efetiva do alvo e ao número de partículas que o compõe, enquanto em forma diferencial esta refere-se à probabilidade de uma partícula final possuir momento na região  $[\vec{l}', \vec{l}' + d^3\vec{l}']$ . A seção de choque contém integrais sob os elementos de espaço de fase das partículas finais, um fator de fluxo relacionados as partículas iniciais e a amplitude de espalhamento, calculada com os diagramas de Feynman. A expressão matemática para a seção de choque do EPI é [38]

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \frac{d^3\vec{l}'}{(2\pi)^3 2E'} \left( \prod_{i \in \{X\}} \frac{d^3\vec{k}'_i}{(2\pi)^3 2k'_{i0}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - \sum_{i \in \{X\}} k'_i) |\mathcal{M}|^2 \quad (2.10)$$

na qual  $k'_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula em  $X$  e  $\Phi$  é o fluxo de Möller

$$\Phi = 4\sqrt{(l \cdot P)^2 - l^2 P^2} = 4M_h E. \quad (2.11)$$

A interação eletromagnética do hádron deve ser descrita por um termo da forma  $e j^\mu(x) A_\mu(x)$  na lagrangiana, onde  $j^\mu$  é uma corrente eletromagnética conservada e  $A_\mu$  o campo eletromagnético. A amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}$  em ordem dominante (OD, i.e.  $\mathcal{O}(1)$  na expansão perturbativa da interação forte) é expressa como:

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}_{s'}(l') \gamma^\mu u_s(l) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \langle X | j^\nu(0) | H, \sigma \rangle, \quad (2.12)$$

sendo  $u_s(l)$  o espinor de Dirac para um elétron de spin  $s$  e momento  $l$ , e  $\sigma$  o spin do hádron  $H$ . A Eq. 2.10 pode ser reescrita de forma compacta definindo os tensores leptônicos e hadrônicos  $L_{\mu,\nu}$  e  $W_{\mu\nu}$ , respectivamente:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

O tensor leptônico diz respeito somente a corrente e ao vértice correspondentes as partículas  $L$  e  $L'$  e pode ser calculado explicitamente utilizando propriedades de traço das matrizes gama

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'}(l') \gamma_\mu u_s(l) \bar{u}_s(l) \gamma_\nu u_{s'}(l') \\ &= \frac{l^\alpha l'^\beta}{2} \text{Tr} [\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu] \\ &= 2 [l_\mu l'_\nu + l_\nu l'_\mu - g_{\mu\nu} l \cdot l']. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Em contrapartida o tensor hadrônico, definido como

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi M_h} \frac{1}{2} \sum_\sigma \prod_{i \in \{X\}} \int \frac{d^3 \vec{k}'_i}{(2\pi)^3 2k'_{i0}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( P + q - \sum k'_i \right) \\ &\quad \times \langle H, \sigma | j^\dagger_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | H, \sigma \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

possui uma dependência nos estados assintóticos do hádron (sua função de onda), que são desconhecidos, impedindo um cálculo direto do diagrama da Fig. 2.5. Uma maneira de prosseguir é utilizando a expansão de produto de operadores [39], porém, o formalismo é intrincado e contra-intuitivo e a formalidade necessária foge do escopo da dissertação. Equivalentemente é possível utilizar o teorema de fatorização, como será feito na Seção 2.5.

Visto que o estudo de escalares é mais simples que de tensores de ordens superiores, é conveniente utilizar a parametrização do tensor hadrônico utilizando simetria de Lorentz. Em princípio há 6 funções de estrutura  $W_i$ , porém estas podem ser reduzidas a três independentes com a imposição de simetria de inversão temporal e conservação de corrente. A parametrização já reduzida é expressa como

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \left( P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{1}{M_h^2} W_2(P, q) + \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(P, q) + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha P^\beta}{2M_h^2} W_3(P, q). \quad (2.16)$$

Como o tensor leptônico é simétrico, o termo antissimétrico do tensor hadrônico ( $\sim W_3$ ) não contribuirá, devendo ser considerando somente se o lépton inicial for polarizado ou se a interação leptônica fraca for adicionada. A seção de choque resultante da contração das Eqs. (2.14) e (2.16) é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ 2W_1(P, q) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(P, q) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (2.17)$$

Como nossa discussão se dá em função das variáveis  $x$  e  $Q^2$  é interessante mudar as variáveis de integração utilizando o jacobiano

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{1-y}{2\pi M_h y} \frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{(1-y)x E}{\pi y} \frac{d\sigma}{dx dQ^2}. \quad (2.18)$$

Além disso, é convencional redefinir as funções de estrutura de modo que

estas não possuam dimensionalidade:

$$F_1(x, Q^2) = M_P W_1(x, Q^2), \quad (2.19)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2). \quad (2.20)$$

Deste modo a seção de choque diferencial pode ser expressa como

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ y^2 F_1(x, Q^2) + \left( 1 - y - \frac{M_h xy}{2E} \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \right]. \quad (2.21)$$

Note que na amplitude da Eq. (2.12), a métrica é originada da soma sob polarizações transversais e longitudinais do fóton. Formalmente a soma é expressa como  $\sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_\nu^{\lambda'} = -g_{\mu\nu} + P_\mu P_\nu / M_h^2$ , onde o segundo termo subtrai as contribuições não-físicas (tipo tempo e longitudinal) que são incluídas na métrica e pode ser negligenciado na eletrodinâmica quântica devido ao cancelamento entre os termos tipo tempo e longitudinal, assegurado pela identidade de Ward [38]. Na CDQ esta afirmação é falsa e este cancelamento só pode ser obtido com uma escolha de gauge adequado. Para a separação das contribuições de cada polarização é conveniente introduzir as projeções transversal e longitudinal, definidas como:

$$W_T = -g_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad W_L = P_\mu P_\nu W^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

A contribuição longitudinal é relevante fenomenologicamente por estar diretamente ligada aos glúons. Esta pode ser expressa como combinação das funções de estrutura definidas nas Eqs. (2.19) e (2.20) como

$$F_L(x, Q^2) = \left( 1 + \frac{4M_h^2 x^2}{Q^2} \right) F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2) \approx F_2 - 2x F_1. \quad (2.23)$$

Note que, como em OD não há introdução da força forte, a componente longitudinal deve ser nula.

O teorema óptico, que pode ser visto na Ref. [38] e está representado

diagramaticamente na Fig. 2.6, permite relacionar as funções de estrutura às componentes da seção de choque  $\gamma^*P$  pelas expressões

$$F_2(x, Q^2) = (\sigma_L^{\gamma^*P} + \sigma_T^{\gamma^*P})/\sigma_0, \quad (2.24)$$

$$F_L(x, Q^2) = \sigma_L^{\gamma^*P}/\sigma_0, \quad (2.25)$$

nas quais definimos  $\sigma_0 = 4\pi^2\alpha/Q^2$ . Portanto, o cálculo das funções de estrutura se limita ao cálculo dos diagramas de Feynman do espalhamento  $\gamma^*P$ .

Em função das seções de choque definidas previamente, a seção de choque expressa na Eq.(2.21) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} \left[ (1 + (1+y)^2) F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2) \right]. \quad (2.26)$$

Nossa atual ignorância sobre a interação fóton-hádron e o estado hadrônico está codificada nas funções de estrutura  $F_i$ . A próxima seção apresenta um modelo simples e intuitivo para calculá-las. Note que a seção de choque da Eq (2.26) é invariante de Lorentz, assim como as funções de estrutura, não sendo necessário restringir-nos ao referencial de repouso do hádron.

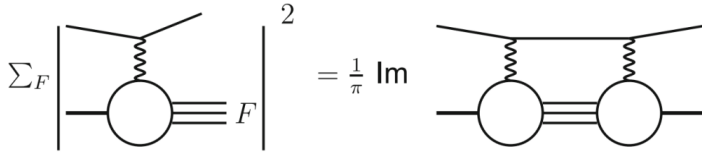


Figura 2.6: Figura representando o teorema óptico, que permite relacionar o tensor hadrônico à componente imaginária do tensor do espalhamento Compton ( $\gamma P \rightarrow \gamma P$ ). Fonte: Imagem adaptada da Ref. [40].

## 2.4. MODELO DE PÁRTONS

Experimentos no SLAC-MIT, na década de 60, colidiram elétrons e átomos de hidrogênio, cujo núcleo é composto de somente um próton, coletando os primeiros dados de colisões hadrônicas inelásticas. As funções de estrutura associadas ao próton apresentavam um comportamento constante conforme  $Q^2$  aumentava, em contraste com o esperado decaimento em espalhamentos elásticos, associado ao raio finito que a partícula possui [41]. Tal comportamento foi denominado escalonamento e é matematicamente expresso como

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x) \quad (2.27)$$

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x). \quad (2.28)$$

Para explicar esta propriedade, Bjorken descreveu o EPI empregando o modelo de quarks e o de pártons [42]. O escalonamento ficou conhecido como escalonamento de Bjorken e foi explicado assumindo o limite  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$  com  $x$  mantido fixo. No modelo de pártons, Feynman supõe que o próton é composto de partículas puntiformes, denominadas pártons, que são espalhadas incoerentemente pelo fóton, possuem spin 1/2 e podem ser tratadas como quase livres durante o tempo característico da interação eletromagnética. A similaridade entre os modelos fez com que pártons fossem identificados como quarks diretamente, apesar da rejeição inicial ao modelo de quarks [43]. Após o desenvolvimento da CDQ, párton passou a referir-se também a glúons, porém estes serão introduzidos somente na próxima seção.

A suposição de espalhamento incoerente é bem justificada no referencial de momento infinito do próton ( $P_\infty$ ): se o próton move-se com momento  $P_z \rightarrow \infty$  na direção positiva do eixo- $z$ , há grande dilatação temporal e contração espacial deste em relação ao repouso, portanto a interação párton-fóton deve ocorrer em um intervalo de tempo muito curto quando comparado ao tempo característico da interação partônica forte [36].

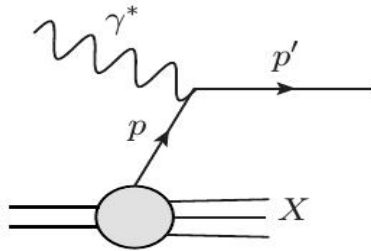


Figura 2.7: Diagrama de Feynman do EPI no modelo de pártons. Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

O modelo de pártons também se baseia na aproximação colinear, na qual o momento transversal dos pártons é pequeno quando comparado à virtualidade ( $Q^2 \gg k_{\perp}^2$ ). Assumindo que o párton interagente carrega fração de momento  $\xi$  do próton ( $p = \xi P$ ), utilizando conservação momento no referencial  $P_{\infty}$  e o fato de que os pártons inicial e final possuem massa nula, a variável de Bjorken pode ser identificada exatamente com a fração de momento  $\xi$ :

$$p'^2 = (p + q)^2 = 0 \longrightarrow \xi = \frac{Q^2}{2M_P \nu} = x. \quad (2.29)$$

Pela suposição de espalhamento incoerente, a seção de choque hadrônica pode ser expressa como a soma sob seções de choque partônicas, representadas por um acento circunflexo ( $d\hat{\sigma}$ ), multiplicadas pela densidade de probabilidade  $q(x)$  de um párton de tipo  $q$  possuir fração de momento  $x$  em relação ao próton:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \sum_{q, \bar{q}} \frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2} q(x) dx. \quad (2.30)$$

As funções  $q(x)$  são denominadas funções de distribuição de párton (PDFs - do inglês *parton distribution functions*). A interpretação das PDFs como densidade de probabilidade é exata somente no referencial  $P_{\infty}$  em OD. Estas funções estão relacionadas a função de onda do próton e, portanto, são de origem não-perturbativa [44].

Em OD o processo a nível partônico é  $eq \rightarrow eq$ , como representado na Fig. 2.7, e a seção de choque pode ser calculada utilizando as regras de Feynman já comentadas. Desta maneira, o cálculo é análogo ao da Seção 2.3, e o resultado é expresso como:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} Q_q^2 [1 + (1-y)^2]. \quad (2.31)$$

Finalmente, utilizando a Eq. (2.30), a seção de choque hadrônica é expressa como

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \sum_{q,\bar{q}} Q_q^2 q(x). \quad (2.32)$$

As funções de estrutura podem ser obtidas por uma comparação diretas entre as Eqs. (2.21) e (2.32), tal que

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{q,\bar{q}} Q_q^2 q(x) \quad \text{e} \quad F_2(x) = x \sum_{q,\bar{q}} Q_q^2 q(x). \quad (2.33)$$

Relembrando da definição da função longitudinal, apresentada na Eq. (2.23), é imediato verificar que, em OD, as funções  $F_1$  e  $F_2$  obedecem a relação

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \rightarrow F_L = 0, \quad (2.34)$$

conhecida como relação de Callan-Gross [45] por motivos históricos. Considerando somente os quarks leves a função de estrutura  $F_2$  é, escrevendo a soma explicitamente,

$$F_2(x) = \frac{4}{9} [xu(x) + x\bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [xd(x) + xs(x) + x\bar{d}(x) + x\bar{s}(x)] + \dots \quad (2.35)$$

onde as distribuições dizem respeito aos quarks up, down e strange, respectivamente, e as barradas correspondem aos antiquarks. No modelo de quarks, o próton é composto de três quarks de valência: dois up e um down. No entanto, atualmente sabe-se que um número indefinido de quarks de mar também está presente nos hádrons, tal que devem ser consideradas as distri-



buições associadas aos antiquarks, ao quark strange e aos quarks pesados. A contribuição destes últimos é representada pelas reticências. As distribuições de quarks up e down na Eq. (2.35) representam a soma das contribuições de valência e de mar:

$$xu(x) = xu_v(x) + xu_s(x), \quad xd(x) = xd_v(x) + xd_s(x). \quad (2.36)$$

Para que haja conservação dos números quânticos do próton, as PDFs devem obedecer as relações

$$\int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2, \quad (2.37)$$

$$\int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1, \quad (2.38)$$

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0. \quad (2.39)$$

Estas são conhecidas como regras de soma para as PDFs. Além disso é necessário impor que soma sob a fração de momento carregada por todos pártons presentes seja igual a unidade

$$\int_0^1 dx \sum_{q=u,d,s,\dots} x [q(x) + \bar{q}(x)] = 1. \quad (2.40)$$

Experimentalmente, foi demonstrado que esta soma, incluindo também quarks pesados, é de aproximadamente 0,5 [42], demonstrando a necessidade e a importância de se incluir termos de ordem superior na expansão perturbativa e da distribuição de glúons. Na seção que segue, será calculado detalhadamente um termo da série perturbativa incluindo a força forte.

## 2.5. ORDEM SEGUINTE À DOMINANTE

O teorema de fatorização permite descrever o hádrons de modo análogo ao modelo de pártons e incluir diagramas de ordens superiores na força

forte, altamente relevantes em interações hadrônicas, de maneira relativamente simples [46]. De acordo com este, uma seção de choque hadrônica pode ser expressa como a convolução entre funções de origem perturbativa e não-perturbativa. A primeira, carregando informação sobre o espalhamento em curtas distâncias, é a seção de choque partônica, calculada a partir de diagramas de Feynman, enquanto as últimas podem ser de dois tipos: PDFs ou funções de fragmentação (FFs). As PDFs foram definidas na seção anterior, porém agora estas possuem dependência na escala de fatorização, como será mostrado. As FFs são introduzidas quando é considerado que os pártons no estado final passam pelo processo de hadronização e representam a densidade de probabilidade do párton hadronizar em um hádron específico. É importante notar que o teorema de fatorização só é válido em *leading-twist*, isto é, suprimindo termos  $1/Q^2$  nos observáveis.

No EPI o tensor hadrônico, que está associado a seção de choque do espalhamento  $\gamma^* P$ , pode ser expresso como

$$W_{\mu\nu}(x, Q^2) = x \sum_{a=q, \bar{q}, g} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} a(\xi, \mu_F^2) w_{\mu\nu}\left(\frac{x}{\xi}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) = x \sum_a a \otimes w_{\mu\nu} + \mathcal{O}(1/Q^2). \quad (2.41)$$

Nesta expressão a soma corre sob todos tipos de párton,  $a = q, \bar{q}, g$  é a PDF associada ao párton e  $w_{\mu\nu}$  é o tensor partônico, análogo àquele definido na Eq. (2.15), porém os estados assintóticos hadrônicos são substituídos pelos partônicos, permitindo que o cálculo seja feito utilizando as regras de Feynman da CDQ.

A analogia entre os tensores pode ser estendida à parametrização na Eq. (2.16), de modo que

$$w_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) F_1^q + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu\right) \frac{F_2^q}{\nu} \quad (2.42)$$

onde  $p_\mu$  é o quadrimomento do párton originado do hádron e  $F_i^q$  são funções de estrutura partônicas, relacionadas às hadrônicas pelo teorema de fatori-

zação identicamente à Eq. (2.41).

As contribuições em ordem seguinte à dominante (OSD, i.e.  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ ) ao EPI incluem: a radiação de glúons reais, representados nos diagramas de Feynman na Fig. 2.8; a produção de um par quark-antiquark, representado na Fig. 2.9, onde o pártion originário do próton é um glúon; e a interferência dos diagramas com radiação de glúons virtuais na Fig. 2.10 com o de OD (Fig. 2.7). Será calculada explicitamente a contribuição com radiação de glúons reais para as funções de estrutura  $F_2$  e  $F_L$  tendo em vista que o cálculo dos diagramas restantes é similar.

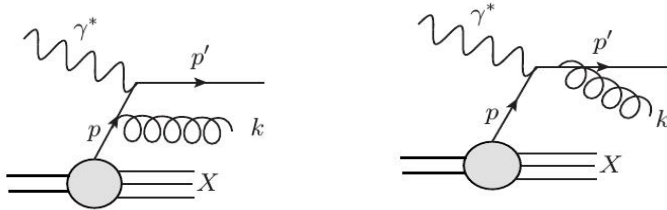


Figura 2.8: Esquerda (direita): Diagrama de Feynman representando a radiação de um glúon real pelo quark inicial (final). Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

Devido ao comportamento essencialmente não-perturbativo da CDQ, os diagramas em OSD apresentam divergências relacionadas ao momento transversal das partículas no infravermelho. Analogamente às divergências ultravioletas, estas podem ser incorporadas à teoria utilizando regularização e renormalização. A regularização será feita utilizando o método de regularização dimensional, no qual a dimensionalidade da teoria é deslocada de 4 para  $d = 4 - 2\epsilon$  dimensões, resultando em pólos da forma  $1/\epsilon$ , termos finitos e outros de ordem  $\epsilon^k$ , que são negligenciados quando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  é tomado. Uma revisão sobre este método pode ser encontrada nas Refs. [47, 48], enquanto outros métodos de regularização, como Pauli-Villars ou de derivadas fracionárias, podem ser vistos em [49, 50].

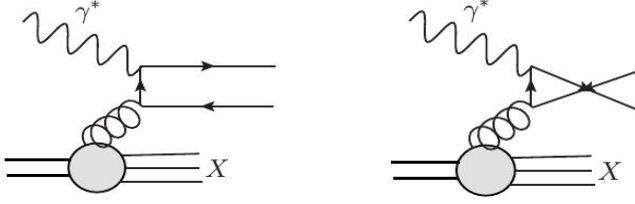


Figura 2.9: Um glúon no estado inicial produz um par  $q\bar{q}$  que interage com o fóton. Devido a impossibilidade de distinguir se o quark ou antiquark interagiu com o fóton, é necessário considerar ambos diagramas. Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

As amplitudes de espalhamento para os diagramas de radiação de glúons reais são dadas por

$$i\mathcal{M}_a^\mu = \bar{u}_{s',j}(p')(-iQ_q\gamma^\mu)\frac{i(\not{p}-\not{k})}{(p-k)^2}(-ig_s\mu^\epsilon\gamma^\nu t_{ji}^a)\epsilon_\nu(k)u_{s,i}(p), \quad (2.43)$$

e

$$i\mathcal{M}_b^\mu = \bar{u}_{s',j}(p')(-ig_s\mu^\epsilon\gamma^\nu t_{ji}^a)\epsilon_\nu(k)\frac{i(\not{p}+\not{q})}{(p+q)^2}(-iQ_q\gamma^\mu)u_{s,i}(p), \quad (2.44)$$

onde  $a$  representa o diagrama da esquerda e  $b$  o da direita na Fig. 2.8.

Como a lagrangiana sempre possui dimensão de massa igual ao número de dimensões de espaço-tempo da teoria ( $[\mathcal{L}] = d$ ), em  $4 - 2\epsilon$  dimensões a análise dimensional da lagrangiana da CDQ na Eq. (2.1) mostra que a constante de acoplamento, adimensional em 4 dimensões espaço-temporais, agora possui dimensão de massa  $\epsilon$ . Para que haja consistência dimensional na ação é definida uma escala de massa  $\mu$ , tal que constante de acoplamento seja substituída de acordo com a expressão  $g \rightarrow g\mu^\epsilon$ .

Por definição, o tensor partônico é a multiplicação do elemento de espaço de fase dos pártons finais com o módulo da amplitude ao quadrado, sob o qual são feitas uma média nos números quânticos iniciais e uma soma dos finais. No gauge de Feynman a soma das possíveis polarizações dos glúons

se reduz à métrica e o tensor partônico é

$$w^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} Q_q^2 (g\mu^\epsilon)^2 C_F \sum_{\epsilon} g_{\alpha\beta} d\text{PS}^{(2)} \text{Tr} \left\{ \not{p}' \left[ \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{\not{p}' + \not{k}}{(p'+k)^2} \gamma^\mu \right] \not{p} \left[ \gamma^\beta \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\not{p}' + \not{k}}{(p'+k)^2} \gamma^\beta \right] \right\}, \quad (2.45)$$

onde  $Q_q$  é a fração de carga elétrica do quark,  $C_F$  é o autovalor de Casimir do SU(3) na representação fundamental, definido pela relação  $(t^a t^a)_{ij} = C_F \delta_{ij} = \delta_{ij} (N_C^2 - 1)/(2N_C)$ , e  $d\text{PS}^{(2)}$  é o elemento de espaço de fase de duas partículas, definido como

$$d\text{PS}^{(2)} = \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} (2\pi)^2 \delta(k^2) \delta(p'^2) (2\pi)^d \delta^{(d)}(p + q - p' - k). \quad (2.46)$$

Neste, as deltas de Dirac unidimensionais asseguram que o quark e o glúon no estado final estão na camada de massa, enquanto a  $d$ -dimensional impõe conservação de momento.

Podemos definir uma variável análoga à de Bjorken:

$$z = Q^2/(2k \cdot q), \quad (2.47)$$

que pode ser identificada com a fração de energia do quark interagente em relação ao párton inicial. As funções de estrutura do quark podem ser expressas com o auxílio da Eq. (2.42) definindo as projeções  $g_{\mu\nu} w^{\mu\nu}$  e  $p_\mu p_\nu w^{\mu\nu}$ , tal que:

$$F_2^q = -\frac{z}{1-\epsilon} g_{\mu\nu} w^{\mu\nu} + \frac{4z^3}{Q^2} \frac{3-2\epsilon}{1-\epsilon} p_\mu p_\nu w^{\mu\nu} \quad (2.48)$$

e

$$F_L^q = \frac{8z^3}{Q^2} p_\mu p_\nu w^{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

As projeções podem ser calculadas utilizando as propriedades das matri-

zes gamma em  $d$ -dimensões [48], de modo que

$$-g_{\mu\nu}w^{\mu\nu} = \frac{(g\mu^\epsilon)^2}{\pi} Q_q^2 C_F d\text{PS}^{(2)}(1-\epsilon) \times \left[ (1-\epsilon) \left( \frac{p' \cdot k}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p' \cdot k} \right) + Q^2 \frac{p \cdot p'}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} + 2\epsilon \right] \quad (2.50)$$

e

$$p_\mu p_\nu w^{\mu\nu} = -\frac{(g\mu^\epsilon)^2}{\pi} Q_q^2 C_F d\text{PS}^{(2)}(1-\epsilon)(p \cdot p'). \quad (2.51)$$

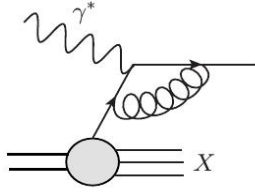


Figura 2.10: Diagrama de Feynman representando a emissão de um glúon virtual.  
Fonte: Imagem feita utilizando o JaxoDraw [27].

Para calcular o elemento de espaço de fase utilizaremos o referencial do centro de massa partônico, no qual os quadrimomentos do quark inicial e dos glúon e quark finais são expressos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} p &= (p, 0, 0, p), \\ k &= (k, 0, k \sin \theta, k \cos \theta), \\ p' &= (k, 0, -k \sin \theta, -k \cos \theta). \end{aligned}$$

O ângulo  $\theta$  é formado entre os quarks inicial e final. O elemento de espaço de fase da Eq. (2.46) pode ser calculado como segue:

$$\begin{aligned} d\text{PS}^{(2)} &= \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-2}} \frac{z}{Q^2} \frac{p}{2k} \delta(k - p(1-z)) \\ &= \frac{1}{16\pi} \left( \frac{16\pi z}{Q^2(1-z)} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} (\sin \theta)^{1-2\epsilon} d\theta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Na primeira linha fica explícita a interpretação de  $z$ , já mencionada, como fração de energia. Para fazer a integração angular, é conveniente definir  $v = (1 + \cos\theta)/2$ , de modo que as projeções nas Eqs. (2.50) e (2.51) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} -g_{\mu\nu}w^{\mu\nu} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon Q_q^2 C_F \frac{1-\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} z^\epsilon (1-z)^{-\epsilon} \int_0^1 dv [v(1-v)]^{-\epsilon} \\ &\times \left[ (1-\epsilon) \left( \frac{1-z}{1-v} + \frac{1-v}{1-z} \right) + \frac{2zv}{(1-v)(1-z)} + 2\epsilon \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

e

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu w^{\mu\nu} &= \frac{Q^2}{4} \frac{\alpha_s}{2\pi} Q_q^2 C_F \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{1-\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \\ &\times z^{\epsilon-1} (1-z)^{-\epsilon} \int_0^1 dv [v(1-v)]^{-\epsilon} \end{aligned} \quad (2.54)$$

O termo entre colchetes na Eq. (2.53) apresenta duas singularidades. Uma se apresenta no limite  $z \rightarrow 1$  e corresponde a emissão de um glúon macio; a outra, denominada divergência colinear, se dá no limite  $v \rightarrow 1$ , quando o quark e glúon finais são emitidos paralelamente. Note que as singularidades se originam dos termos  $p \cdot k$  e  $p' \cdot k$  e, portanto, são de mesma natureza: da massa nula dos pártons. A regularização se dá pelo aparecimento dos fatores fora das chaves:  $z^\epsilon(1-z)^{-\epsilon}$  e  $[v(1-v)]^{-\epsilon}$ . As integrais na variável  $v$  resultam em funções beta. Utilizando a Eq. (2.48), podemos utilizar as projeções para escrever o termo correspondente a emissão de glúons reais como

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_2^q}{z} \Big|_{\text{real}} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon Q_q^2 C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} z^\epsilon (1-z)^{-\epsilon} \\ &\times \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right) + 3 + 2z - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1-z} \right) + \epsilon \left( 10 - \frac{7}{2} \frac{1}{1-z} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Na expressão acima a singularidade colinear foi isolada no pólo em  $\epsilon$ .

Para isolar a singularidade macia, podemos utilizar as expansões [51]

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon = 1 + \epsilon \log \frac{z}{1-z}, \quad (2.56)$$

e

$$\begin{aligned} z^\epsilon (1-z)^{-1-\epsilon} = & -\frac{1}{\epsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} \\ & - \epsilon \left[ \left( \frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ - \frac{\log z}{1-z} \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde esta última é definida segundo a prescrição mais, expressa como

$$F(x)_+ = F(x) - \delta(1-x) \int_0^1 dy F(y). \quad (2.58)$$

Detalhes sobre a prescrição mais e a definição da Eq. (2.57) são apresentados no Apêndice A.

Utilizando as equações acima, pode-se escrever a Eq. (2.55) como

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta F_2^q}{z} \right|_{\text{real}} = & \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon Q_q^2 C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} \delta(1-z) \right. \\ & - \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} - \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] + 3 + 2z + (z^2 + 1) \left( \frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ \\ & \left. - \frac{1+z^2}{1-z} \log z - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1-z} \right)_+ + \frac{7}{2} \delta(1-z) + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Agora há uma singularidade  $1/\epsilon^2$ , associada a radiação de glúons macios e outra  $1/\epsilon$  associada a divergência colinear. Pelo teorema de Kinoshita-Lee-Nauenberg (também denominado teorema de Bloch-Nordsieck, por serem os primeiros a tratarem estas divergências na eletrodinâmica) a divergência infravermelha é cancelada ao se incluir as correções de *loop* da Fig. 2.10. O cálculo destas não será apresentado aqui, porém mais detalhes podem ser



encontrados na Ref. [52]. O resultado é

$$\left. \frac{\Delta F_2^q}{z} \right|_{\text{virtual}} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon Q_q^2 C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \delta(1-z) \times \left\{ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 + \frac{\pi^2}{3} \right\}. \quad (2.60)$$

Adicionando os resultados das Eqs. (2.59) e (2.60) e lembrando que, pelo modelo de pártons, a função de estrutura do quark em OD é  $F_2^q = Q_q^2 \delta(1-z)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{F_2^q}{z} = & Q_q^2 \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon Q_q^2 C_F \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] + 3 + 2z + (z^2 + 1) \left( \frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ - \frac{1+z^2}{1-z} \log z \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1-z} \right)_+ - \left( \frac{\pi^2}{3} + \frac{9}{2} \right) \delta(1-z) + \mathcal{O}(\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

A singularidade colinear restante precisa ser renormalizada, dado que os observáveis da teoria são, evidentemente, finitos. Primeiramente, note que

$$\left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} = 1 + \epsilon \left( -\gamma_E + \log 4\pi - \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.62)$$

Pelo teorema de fatorização, expressado na Eq. (2.41), podemos escrever a função de estrutura do próton  $F_2$  como

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} = & \sum_{q,\bar{q}} Q_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} q_0 \left( \frac{x}{z} \right) \left\{ \delta(1-z) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ -P_{qq}^{(0)}(z) \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi - \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right) + C_{2,q}(z) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde  $P_{qq}^{(0)}$  é a função de desdobramento quark-quark, que representa a densidade de probabilidade do desdobramento ocorrer e  $C_{2,q}$  é um coeficiente finito. A renormalização é feita assumindo que a PDF na Eq. (2.63) não é uma quantidade física, pois representa partículas pontuais não-interagentes,

uma idealização que deve ser corrigida incluindo termos que incluam a possibilidade do quark interagente ser originado do desdobramento de outro parton. Para tal, é introduzida uma escala de fatorização  $\mu_F$ , tal que o termo logarítmico possa ser reescrito como

$$\log \frac{Q^2}{\mu^2} = \log \frac{Q^2}{\mu_F^2} + \log \frac{\mu_F^2}{\mu^2}, \quad (2.64)$$

possibilitando isolar tanto o pólo como a escala  $\mu$  e incluí-los na redefinição da PDF:

$$q(x, \mu_F^2) = q_0(x) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q\left(\frac{x}{\xi}\right) \left[ P_{qq}^{(0)} \left( \frac{1}{\epsilon} - \log \frac{\mu_F^2}{\mu^2} \right) + E_{qq} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right]. \quad (2.65)$$

A função de estrutura agora é finita e sua dependência na escala de fatorização deve se anular pelo equilíbrio entre a dependência da PDF e do coeficiente partônico com a mesma. Apesar do processo de renormalização para divergências infravermelhas ser essencialmente análogo àquela aplicado para divergências ultravioletas ele ainda não foi demonstrado válido para qualquer ordem em teoria de perturbação [53], somente em OD, OSD e OSSD (Ordem Seguinte à Seguinte à Dominante). Em análises fenomenológicas é usual tomar  $\mu_F^2 = Q^2$ , como será feito na próxima seção. Estudos da dependência de observáveis na escala de fatorização podem ser encontrados na Ref. [54].

Note ainda que há certa arbitrariedade na definição da função de estrutura devido ao termo  $E_{qq}$ , que define quanto da contribuição finita é absorvida na Eq. (2.65), e sua definição fixa o esquema de fatorização. O mais utilizado é denominado *Modified Minimal Subtraction Scheme* ( $\overline{\text{MS}}$ ) [55], porém há outras propostas, como o DIS, como pode ser verificado na Ref. [56].

- Esquema  $\overline{\text{MS}}$ :  $E_{qq} = -\gamma_E + \log 4\pi$ . É uma modificação do esquema MS, desenvolvido por Weinberg e t'Hooft independentemente, no qual somente a constante de Euler é absorvida [57, 58]. É denominado esquema de subtração mínima por incorporar na renormalização somente

os termos vindos da expansão das funções gama. Neste, a função de estrutura é expressa como

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} = & \sum_{q, \bar{q}} Q_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} q\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) \\ & \times \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ P_{qq}^{(0)}(z) \log \frac{Q^2}{\mu_F^2} + C_{2,q}^{\overline{\text{MS}}}(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

- Esquema DIS:  $E_{qq} = C_{2,q}$ . Toda a contribuição finita é absorvida na renormalização, sobrando somente a contribuição com a OD e as funções de desdobramento. No caso em que  $Q^2 = \mu_F^2$ , a função de estrutura é a mesma que em OD:

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} Q_q f(x, \mu_F^2). \quad (2.67)$$

No Cap. 5 será utilizado o esquema  $\overline{\text{MS}}$ , no qual o coeficiente é

$$\begin{aligned} C_{2,q}^{\overline{\text{MS}}}(z) = & C_F \left[ 3 + 2z + (z^2 + 1) \left( \frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ - \frac{1+z^2}{1-z} \log z \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1-z} \right)_+ - \left( \frac{\pi^2}{3} + \frac{9}{2} \right) \delta(1-z) \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

e a função de desdobramento quark-quark é, como pode ser visto diretamente na Eq. (2.61),

$$P_{qq}^{(0)} = C_F \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]. \quad (2.69)$$

Lembre-se que não foram incluídas as contribuições dos diagramas das Figs. 2.9 e 2.10. Porém faz-se necessário uma breve discussão destas contribuições. Os diagramas de produção  $q\bar{q}$  introduzem a distribuição de glúons e a função de desdobramento glúon-quark:

$$P_{qg}(z) = T_R \left[ z^2 + (1-z)^2 \right]. \quad (2.70)$$

Todas funções da forma  $P_{ij}(z)$  são denominadas funções de desdobramento

e expressam a probabilidade que um p arton de tipo  $j$  emita um p arton do tipo  $i$  possuindo fração de momento  $z$  do primeiro ( $p_j = zp_i$ ).

A função de estrutura é reescrita, agora de forma completa em OSD

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{x} = \sum_{q,\bar{q}} Q_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} q\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) & \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ P_{qq}^{(0)}(z) \log \frac{Q^2}{\mu_F^2} + C_{2,q}^{\overline{\text{MS}}}(z) \right] \right\} \\ & + \int_x^1 \frac{dz}{z} g\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ P_{qg}^{(0)}(z) \log \frac{Q^2}{\mu_F^2} + C_{2,g}^{\overline{\text{MS}}}(z) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Na qual o coeficiente do gl uon   [56]

$$C_{2,g}^{\overline{\text{MS}}} = T_R \left[ ((1-z)^2 + z^2) \ln \frac{1-z}{z} - 8z^2 + 8z + 1 \right] \quad (2.72)$$

Além disso, a função de estrutura longitudinal (Eq. (2.49))   não-nula e pode ser expressa como

$$\begin{aligned} F_L(x, Q^2) = x \sum_q Q_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} & \left\{ q\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} 2C_F z \right] \right. \\ & \left. + g\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} 4T_R z(1-z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

ao se incluir as correções de todos diagramas em OSD. Note que esta não possui divergências, sendo independente do esquema de fatorização adotado.

Como mencionado, a inclusão de termos em OSD é essencial para uma boa descrição quantitativa e qualitativa dos dados, além de resolver o problema da fração de momento. Além disso, a introdução da escala de fatorização leva a equação de evolução DGLAP, que será introduzida a seguir.

## 2.6. EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DGLAP

As equações de evolução podem ser deduzidas assumindo que observáveis independem da escala de fatorização e utilizando métodos do grupo de renormalização. Aplicando estes princípios   Eq. (2.71)   possível obter equação DGLAP, que controla a dependência das PDFs em  $\mu_F^2$  e foi nomeada em homenagem aos físicos Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi [59–61].

Esta pode ser expressa em forma matricial como

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu_F^2} \begin{pmatrix} xq \\ xg \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} xq \\ xg \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Onde estão incluídas também as possibilidades de um quark se desdobrar em um glúon ( $P_{gq}$ ) e de um glúon se desdobrar em outro glúon ( $P_{gg}$ ). O cálculo do primeiro é direto notando que, por simetria, deve-se ter  $P_{gq}(z) = P_{qq}(1-z)$ , tal que

$$P_{gq}^{(0)}(z) = C_F \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right]; \quad (2.75)$$

enquanto desdobramento glúon-glúon possui densidade de probabilidade

$$P_{gg}^{(0)}(z) = 2C_A \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \delta(1-z) \frac{11C_A - 4n_f T_R}{6}. \quad (2.76)$$

As equações de evolução podem ser derivadas em processos inclusivos como EPI, como demonstrado, e Drell-Yan. Visto que as funções desdobramento são universais, a DGLAP e as PDFs também o são. Ou seja, as PDFs podem ser utilizadas em quaisquer espalhamentos inclusivos mesmo se determinadas utilizando dados de um conjunto pequeno de espalhamentos – caso o mesmo tipo de hádron esteja presente, visto que as regras de soma diferem.

Os diagramas associados a cada função de desdobramento estão representados na Fig. 2.11. Em OSD as funções de desdobramento são independentes do sabor de quark, porém em ordens superiores há diferenciação. Além disso, lembre que estamos considerando os quarks sem massa. Para mais informações sobre o tratamento de quarks massivos, ver a Ref. [62].

Atualmente, as funções de desdobramento são conhecidas com até 3-*loops* [63,64] e sua forma é mantida como na Eq. (2.74), podendo ser escritas perturbativamente como

$$P_{ij} = P_{ij}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}^{(1)} + \left( \frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 P_{ij}^{(2)} + \dots \quad (2.77)$$

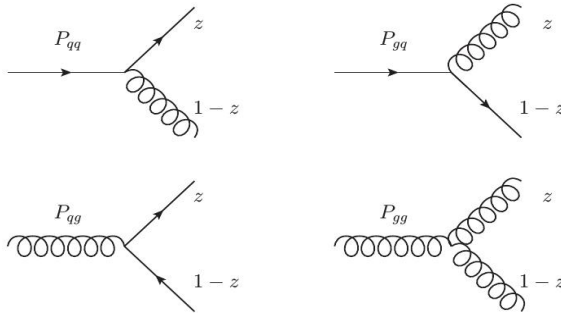


Figura 2.11: Representação gráfica das funções de desdobramento.

A equação DGLAP é utilizada canonicamente na análise de dados experimentais de colisões hadrônicas e os resultados obtidos são excepcionalmente precisos na região de validade do formalismo (alto  $Q^2$  e  $x$  suficientemente grande). Porém em outras regiões do espaço de fase a descrição perturbativa da DGLAP é insuficiente [65].

No limite de pequeno  $x$  correções do tipo  $\log 1/x$  devem ser incluídas, como demonstrado na equação de evolução BFKL (Balitsky, Fadin, Kuraev e Levin), e no limite de pequeno  $Q^2$  correções de potência são importantes. A BFKL corresponde ao limite de pequeno  $x$  dentro da CDQ, descrevendo uma região diferente do espaço de fase em relação à DGLAP: a DGLAP ordena os momentos transversais ao tomar  $Q^2 \rightarrow \infty$ , enquanto a BFKL ordena também as frações de momento longitudinal  $x \ll \dots \ll x_1$  no limite  $s \rightarrow \infty$  e ressona termos do tipo  $\alpha_s \log 1/x$  [66,67]. Foi demonstrado na Ref. [68] que a BFKL é capaz de reproduzir resultados experimentais em regiões limitadas do espaço de fase, porém ainda há problemas teóricos e conceituais em aberto nesta área [69,70].

A distribuição de glúons evoluída tanto pela BFKL quanto pela DGLAP cresce indefinidamente no limite de pequeno  $x$ , violando a unitariedade na matriz de transição [71]. A BFKL é uma equação linear devido à suposição

de que o próton está em um regime diluído, ou seja, com pequeno número de partículas por área. Porém, esta suposição é válida somente quando quarks de valência são dominantes, o que não ocorre com glúons – dominantes no limite de pequeno  $x$ . Livrando-se desta suposição o problema de unitariedade desaparece, porém a evolução se torna não-linear, dada pela equação BK (Balistiky-Kovchegov) [72, 73]. O termo não-linear da BK é interpretado como uma recombinação gluônica, resultando em uma saturação na probabilidade de interação dos glúons e restaurando unitariedade. Este formalismo levou a formulação da CDQ no Condensado de Vidro de Cor (*Color Glass Condensate*), que hoje é uma área de pesquisa de alta relevância para a compreensão da CDQ próxima do limite não-perturbativo [74].





### 3. Metodologia do ajuste das PDFs

Neste capítulo serão introduzidas a metodologia de ajuste fenomenológico das PDFs e a fenomenologia hadrônica, em especial do EPI. Serão discutidas as seções de choque mensuradas e os erros associados a estas, a parametrização inicial das PDFs e o método para quantificar a qualidade do ajuste. Fenomenologicamente serão discutidas as seções de choque e PDFs, sendo a região de pequeno  $Q^2$  e pequeno  $x$  a mais relevante, visto que é crucial a utilização de correções infravermelhas nesta região.

#### 3.1. INTRODUÇÃO

A metodologia utilizada para o ajuste pode ser formulado de maneira simples: um conjunto de parâmetros livres  $\{a\}$  é utilizado na parametrização das PDFs em uma escala inicial semimacia  $Q_0^2$  em função da variável de Bjorken  $x$ . Os parâmetros determinarão a forma da PDF em  $x$ . Para realizar a comparação entre dados experimentais e previsões teóricas as PDFs são evoluídas da escala inicial à escala da colisão, obtida na reconstrução cinemática, resolvendo numericamente a equação DGLAP (Eq. (2.74)). A DGLAP determinará a variação das PDFs em  $\ln \mu^2$ . A determinação quantitativa da concordância entre experimento e teoria (obtida com o conjunto  $\{a\}$ ) faz-se a partir da análise estatística da variável de verosimilhança ( $\chi^2$ ). Esta última é definida de modo que a concordância ótima entre teoria e experimento ocorre quando seu valor mínimo é obtido para um dado conjunto  $\{a\}$ . A cada tópico mencionado acima será dada uma discussão de maior valor.

A primeira escolha a se fazer na análise é determinar os tipos de dados que serão utilizados. A relevância dos diversos tipos de processos será discutida na Seção 3.4, porém os resultados apresentados no Capítulo 5 utilizarão somente dados de CN e CC do EPI. Estes são divulgados em função da seção de choque

reduzida, da virtualidade, da variável de Bjorken e da inelasticidade:  $\sigma_r$ ,  $Q^2$ ,  $x$  e  $y$ . As seções de choque de CN e CC reduzidas entre prótons e elétrons  $(-)$  ou pósitrons  $(+)$  são expressas, respectivamente, como [75]

$$\sigma_{r,CN}^{\pm} = \frac{Q^4 x}{2\pi\alpha^2 Y_+} \cdot \frac{d\sigma_{NC}^{\pm}}{dQ^2 dx} = \tilde{F}_2^{\pm} - \frac{y^2}{Y_+} \tilde{F}_L^{\pm} \mp \frac{Y_-}{Y_+} \tilde{F}_3^{\pm} \quad (3.1)$$

e

$$\sigma_{r,CC}^{\pm} = \frac{2\pi x}{G_F^2} \left[ \frac{M_W^2 + Q^2}{M_W^2} \right]^2 \cdot \frac{d\sigma_{CC}^{\pm}}{dQ^2 dx} = \frac{Y_+}{2} W_2^{\pm} - \frac{y^2}{2} W_L^{\pm} \mp \frac{Y_-}{2} x W_3^{\pm}. \quad (3.2)$$

Nas equações acima,  $\tilde{F}_i^{\pm}$  são as funções de estrutura introduzidas na Seção 2.3, com o símbolo  $\sim$  representando que as contribuições fracas estão inclusas. É utilizada a variável  $Y_{\pm} = 1 \pm (1-y)^2$ . Como visto, em OD temos  $F_L^{\pm} = 0$ , e as funções de estrutura não-triviais podem ser expressas como

$$\tilde{F}_2^{\pm} = F_2^{\gamma} - (g_V^e \pm P_e g_A^e) \kappa_Z F_2^{\gamma Z} + [(g_V^{e2} + g_A^{e2}) \pm 2P_e g_V^e g_A^e] \kappa_Z^2 F_2^Z, \quad (3.3)$$

e

$$\tilde{F}_3^{\pm} = -(g_A^e \pm P_e g_V^e) \kappa_Z F_3^{\gamma Z} + [2g_V^e g_A^e \pm P_e (g_V^{e2} + g_A^{e2})] \kappa_Z^2 F_3^Z, \quad (3.4)$$

sendo  $g_V^i$  e  $g_A^i$  as constantes de acoplamento vetorial e axial entre um férmion  $i$  e o bóson  $Z$ ,  $P_e$  é determinado pelo sinal da polarização do lépton e o coeficiente  $\kappa_Z$  é

$$\kappa_Z = \frac{Q^2}{Q^2 + M_Z^2} \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha}. \quad (3.5)$$

Finalmente,  $G_F$  é a constante de Fermi.

O índice superior nas funções de estrutura representam os diagramas de Feynman puros ( $\gamma$  e  $Z$ ) e de interferência ( $\gamma - Z$ ). As expressões são

$$[F_2^{\gamma}, F_2^{\gamma Z}, F_2^Z] = x \sum_q [Q_q^2, 2Q_q g_V^q, g_V^{q2} + g_A^{q2}] \{q + \bar{q}\}, \quad (3.6)$$

$$[F_3^{\gamma Z}, F_3^Z] = x \sum_q [2Q_q g_A^q, 2g_V^q g_A^q] \{q - \bar{q}\}, \quad (3.7)$$

Concomitantemente para funções de estrutura da seção de choque de CC ( $W_i^\pm$ ), as expressões são

$$W_2^- = x(U + \bar{D}), \quad xW_3^- = x(U - \bar{D}) \quad (3.8)$$

e

$$W_2^+ = x(\bar{U} + D), \quad xW_3^+ = x(D - \bar{U}). \quad (3.9)$$

As PDFs  $xU$  e  $xD$  referem-se a quarks tipo-up e tipo-down, respectivamente, isto é, em alguma escala  $\mu^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$ :

$$xU = xu + xc \quad (3.10)$$

e

$$xD = xd + xs. \quad (3.11)$$

A discussão sobre a parametrização das PDFs se dará na Seção 3.2.

Para determinar a qualidade do ajuste é necessário incluir as incertezas experimentais ao cálculo, as quais usualmente estão na faixa de 2%, se tornando mais relevantes conforme na região de pequeno  $x$  e pequeno  $Q^2$ . As incertezas podem ser estatísticas ou sistemáticas:

- 1) *Incertezas estatísticas*: são flutuações aleatórias, definidas pela diferença entre diversas medições efetuadas no mesmo ponto  $(x, Q^2)$ . São ditas de natureza aleatória por estarem relacionados a eventos fora do controle humano e, devido a sua natureza, podem ser reduzidas obtendo-se uma grande amostra de mensurações. Assume-se que a distribuição destas incertezas em torno de um valor médio é gaussiana [76].
- 2) *Incertezas sistemáticas*: apesar de não haver definição formal, um possível entendimento é que estas são qualquer incerteza de natureza não-

aleatória e são usualmente associadas ao aparato de medição. Alguns exemplos possíveis são os erros associados a calibração de um calorímetro, a resolução de momento das partículas e efeitos de fundo. Consequentemente, cada aparato experimental está associado a uma incerteza sistemática, e algumas são dominantes enquanto outras são negligenciáveis. Nos colisores de partículas as incertezas sistemáticas dominantes estão associadas à luminosidade e ao processo de aceitação de dados, de natureza multiplicativa, crescendo de acordo com o valor central da medição. Além disso, estas podem ser divididas em correlacionadas e não-correlacionadas. As primeiras estão presentes em todas as medições, fazendo com que a quantificação destas seja ambígua, não havendo um formalismo amplamente aceito para o tratamento estatístico destas, mas uma diversidade de modelos [77]. As segundas são mais simples de discriminar e quantificar, visto que não há correlação.

Após a determinação dos dados e erros que serão utilizados é necessário definir qual forma de parametrização será utilizada nas PDFs, os parâmetros que serão mantidos livres durante o ajuste e as restrições aplicadas a estes.

### 3.2. PARAMETRIZAÇÃO

A parametrização das PDFs em função da variável de Bjorken é feita na escala semimacia  $Q_0^2$  próxima do limiar entre CDQ perturbativa e não-perturbativa ( $1-5 \text{ GeV}^2$ ). Os diferentes grupos focados na análise das PDFs aplicam um tratamento diferente ao ajuste, como nos quesitos: parametrização, escala inicial, conjuntos de dados, região cinemática considerada, método de análise do  $\chi^2$ , propagação de erros nas PDFs e método numérico para solucionar a DGLAP. Portanto, algumas parametrizações são mais sofisticadas ou especializadas. A forma geral, justificada fisicamente, costuma ser:

$$xf_i(x, Q^2) = Ax^B(1-x)^C P_i(x), \quad (3.12)$$

garantindo que as PDFs se anulem no limite elástico ( $x \rightarrow 1$ ), no qual o parâmetro  $C$  é dominante. O parâmetro  $B$  determina a forma das PDFs na região de pequeno  $x$ , definindo se esta cresce ( $B < 0$ ) ou vai à zero ( $B > 0$ ). O tipo de parametrização mais simples é a polinomial, que possui poucos parâmetros a serem ajustados. O polinômio  $P_i$  empregado usualmente é da seguinte forma:

$$P_i(x) = 1 + \epsilon\sqrt{x} + Dx + Ex^2, \quad (3.13)$$

e permite uma maior flexibilidade durante o ajuste na região de médio  $x$  ao proporcionar parâmetros extras. Esta parametrização é utilizada em conjuntos como HERAPDF, da colaboração H1+ZEUS [78–80] e em análises antigas do grupo MMHT, como a MSTW08 [81]. Sua simplicidade garante um número de parâmetros livres na faixa entre 10 e 20. Grupos que preferem uma maior sofisticação necessitam de uma quantidade maior de parâmetros livres, como o CTEQ-TEA, que no ajuste das PDFs CT14 [82] utiliza polinômios de Berstein e possui 28 parâmetros livres, e as recentes análises MMHT, que utilizam polinômios de Chebyshev para o termo  $P_i$ :

$$P_i(x) = 1 + \sum_{i=1}^4 a_i T_i^{\text{Ch}}(1 - 2\sqrt{x}), \quad (3.14)$$

e possuem 37 parâmetros livres na determinação das PDFs MMHT14 [83].

Durante este trabalho será utilizada a mesma parametrização da Ref. [80], usada na obtenção do conjunto HERAPDF2.0, na qual é utilizada a Eq. (3.13) tomando  $\epsilon = 0$  para todas PDFs. A escala inicial é escolhida como  $Q_0^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , na qual somente os 3 sabores de quarks leves contribuem:  $u, s, d$  visto que o comprimento de onda do bóson não permite a resolução de flutuações de mar de quarks pesados. Como mencionado, estes são gerados dinamicamente durante a evolução, definindo um conjunto de esquemas GM-VFNS (*General Mass-Variable Flavour Number Scheme*) que utilizam diferentes prescrições para a inclusão destes na DGLAP, dentre os quais pode-se mencionar Aivazis-Collins-Olness-Tung (ACOT) [84], o Roberts-Thorne

(RT) e o Roberts-Thorne-Optimal (RT-OPT) [85–87].

As PDFs escolhidas para serem ajustadas são as que aparecem nas funções de estrutura do EPI: do glúon ( $xg$ ), dos quarks de valência up e down, e as combinações lineares de anti-quarks de tipo-up e tipo-down de mar. As parametrizações para as PDFs centrais são

$$xg(x, Q_0^2) = A_g x^{B_g} (1-x)^{C_g} - A'_g x^{B'_g} (1-x)^{C'_g}, \quad (3.15)$$

$$xu_v(x, Q_0^2) = A_{u_v} x^{B_{u_v}} (1-x)^{C_{u_v}} (1 + E_{u_v} x^2), \quad (3.16)$$

$$xd_v(x, Q_0^2) = A_{d_v} x^{B_{d_v}} (1-x)^{C_{d_v}}, \quad (3.17)$$

$$x\bar{U}(x, Q_0^2) = A_{\bar{U}} x^{B_{\bar{U}}} (1-x)^{C_{\bar{U}}} (1 + D_{\bar{U}} x), \quad (3.18)$$

$$x\bar{D}(x, Q_0^2) = A_{\bar{D}} x^{B_{\bar{D}}} (1-x)^{C_{\bar{D}}}. \quad (3.19)$$

Na distribuição de glúons, o segundo termo é adicionado para que a região de pequeno  $x$  possua maior flexibilidade, não sendo dominada por uma só potência de  $x$  (para tal, é excluída do ajuste a região  $0,95 < B'_g/B_g < 1,05$ ), e permite que ela torne-se negativa. No Capítulo 5 serão utilizadas parametrizações com e sem o último termo para os ajustes.

O parâmetro de normalização dos glúons  $A_g$  é fixado pela regra de soma de momento, definida na Eq. (2.40), enquanto as normalizações dos quarks de valência,  $A_{u_v}$  e  $A_{d_v}$ , são fixadas pelas regras de soma de número definidas nas Eqs. (2.37) e (2.38). Na distribuição do quark de valência tipo up o termo  $E_{u_v}$  é adicionado por melhorar a qualidade do ajuste.

Utilizando somente dados do EPI não é possível diferenciar diferentes distribuições de quarks de mar, portanto é assumido de maneira *ad hoc* que a) distribuições de quarks e antiquarks de mar são idênticas, isto é  $q_{\text{mar}} = \bar{q}_{\text{mar}}$  b) a distribuição tipo-down é composta, na escala inicial, por 60% de quarks down e 40% de quarks strange. A normalização da distribuição tipo-up é fixada por  $A_{\bar{U}} = (1 - f_s)A_{\bar{D}}$  (com  $f_s = 0,4$ ), e é imposto que  $B_{\bar{U}} = B_{\bar{D}}$ , de modo que  $x\bar{u} \rightarrow x\bar{d}$  quando  $x \rightarrow 0$ .

Note que  $xU$  e  $xD$  contém contribuições de valência, enquanto  $x\bar{U}$  e  $x\bar{D}$

possuem somente contribuição de mar, valendo as relações  $xU = x\bar{U} + xu_v$  e  $xD = x\bar{D} + xd_v$  [88]. Os quarks pesados são gerados durante a evolução (quando o limiar  $Q^2 = m_Q^2$  é atingido) e as respectivas PDFs são adicionadas a  $x\bar{U}$  ou  $x\bar{D}$ .

### 3.3. QUALIDADE DO AJUSTE

A determinação dos parâmetros livres das distribuições é feita quantitativamente minimizando a variável  $\chi^2$ . Este método é usualmente denominado método de mínimos quadrados, porém também pode ser referido como teste de qui-quadrado reduzido. A variável  $\chi^2$  define uma medida da qualidade do ajuste dos parâmetros  $\{a\}$  em relação a um conjunto global de dados e sua definição e a estratégia de minimização variam de acordo com o problema a ser tratado. No contexto da física de altas energias, uma análise global pode incluir dados advindos de diferentes colisores, com diversas incertezas correlacionadas e não-correlacionadas. O método de análise utilizado deve ser suficiente para caracterizar completamente o espaço de parâmetros livres na vizinhança do mínimo de  $\chi^2$  e possibilitar a propagação de erros experimentais e incertezas advindas da própria parametrização para as PDFs [89].

Para construir uma compreensão intuitiva, convém partir de uma definição no caso mais simples possível, em que não há incertezas sistemáticas correlacionadas. Supondo haver um conjunto de dados com valores experimentais  $m_i$ , com incertezas associadas  $\sigma_i$ , dadas pela soma em quadratura das incertezas estatísticas e sistemáticas não-correlacionadas ( $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{i,\text{stat}}^2 + \sigma_{i,\text{unc}}^2}$ ), e predições teóricas  $t_i(a)$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , e  $n$  é a quantidade de pontos experimentais,  $\chi^2$  é definido pela relação

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{[t_i - m_i]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.20)$$

Note que a mesma é adimensional, e a completa concordância entre teoria e experimento se dá quando  $\chi^2 = 0$ . A inclusão de incertezas sistemáticas

correlacionadas pode ser feita por dois métodos diferentes. Um é introduzindo parâmetros de distúrbio – *nuisance parameters* –, enquanto o outro se dá pela introdução de uma matriz de covariância que correlaciona diferentes pontos experimentais, no qual  $\chi^2$  é definido por

$$\chi^2 = \sum_{i,j}^n \frac{(t_i - m_i) (\text{cov})_{ij}^{-1} (t_j - m_j)}{\sigma_i^2}, \quad (3.21)$$

e  $\text{cov}_{ij} = \delta_{ij} \sigma_k^2 + \Gamma_{i,k} \Gamma_{j,k}$ , sendo  $\Gamma_{i,k}$  a incerteza sistemática correlacionada associada a uma fonte  $k$  e ao ponto  $i$ . O segundo método é menos favorável computacionalmente devido a necessidade de se inverter uma matriz não-diagonal de alta dimensionalidade [90, 91], portanto serão introduzidos os parâmetros de distúrbio, que permite a utilização dos método Hessiano e Offset para o ajuste. O Hessiano será o adotado e apresentado a seguir, enquanto o Offset será brevemente mencionado ao final da seção.

Se à uma medida  $m_i$  está associada uma incerteza sistemática correlacionada que provêm de uma fonte  $k$  (podendo haver um total de  $K$  fontes de incertezas), então estas geram flutuações  $\sum_k r_k \Gamma_{i,k}$  no valor real da medida. Os parâmetros  $\Gamma_{i,k}$  quantificam a sensibilidade do experimento e  $r_k$  são os parâmetros de distúrbio. Estes últimos são, a princípio, arbitrários e possuem média zero e variância igual a unidade. No método Hessiano é imposto, para determiná-los, que eles estejam na vizinhança do mínimo de  $\chi^2$  (isto é,  $\partial\chi^2/\partial r_k = 0$ ) [89, 92]. O  $\chi^2$  é definido como

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2} \left( t_i(a) - m_i - \sum_{k=1}^K \Gamma_{i,k} r_k \right)^2 + \sum_{k=1}^K r_k^2, \quad (3.22)$$

e o segundo termo é somado para restringir os possíveis valores de  $r_k$  [93]. A solução para  $r_k$  pode ser obtida analiticamente e ser expressa como

$$r_k = (A^{-1})_{kk'} B_{k'}, \quad (3.23)$$



sendo os componentes da matriz  $A$  e do vetor  $B$  definidos, respectivamente, como

$$A_{kk'} = \delta_{kk'} + \sum_i^n \frac{\Gamma_{i,k} \Gamma_{i,k'}}{\sigma_i^2}, \quad B_k(a) = \sum_i^n \Gamma_{i,k} \frac{(m_i - t_i(a))}{\sigma_i^2}. \quad (3.24)$$

Apesar de a matriz  $A$  também necessitar ser invertida, em geral a dimensionalidade desta é muito menor que a da matriz de covariância. Na equação acima as incertezas são assumidas como absolutas, porém os dados experimentais são divulgados com incertezas estatísticas e sistemáticas relativas,  $\delta_{i,stat}$ ,  $\delta_{i,uncor}$  e  $\gamma_{i,k}$ , as quais, assume-se, são de tipo multiplicativo. A implementação é dada de maneira iterativa, levando a um produto  $t_i m_i$  no denominador, de modo que a Eq. (3.22) é reescrita como [80]

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{(t_i - m_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{i,k} t_i r_k)^2}{\delta_{i,stat}^2 m_i t_i + \delta_{i,unc}^2 t_i^2} + \sum_{k=1}^K r_k^2. \quad (3.25)$$

A equação acima é utilizada em diversos ajustes, porém nas Refs. [94,95] é argumentado que a utilização desta causa um viés (*bias*) no resultado. Isto se dá pois os erros relativos no denominador estão multiplicados pela predição teórica  $t_i$ , fazendo com que os ajustes favoreçam PDFs maiores que as reais, por diminuir o valor de  $\chi^2$ . A proposta para se remediar este viés é adição de um termo logarítmico que cresce com  $t_i$ , compensando o decrescimento de  $\chi^2$ , como segue:

$$\begin{aligned} \chi^2 = \sum_i^n \frac{(t_i - m_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{i,k} t_i r_k)^2}{\delta_{i,stat}^2 m_i t_i + \delta_{i,unc}^2 t_i^2} + \sum_{k=1}^K r_k^2 \\ + \sum_i \ln \frac{\delta_{i,unc}^2 t_i^2 + \delta_{i,stat}^2 t_i m_i}{\delta_{i,unc}^2 m_i^2 + \delta_{i,stat}^2 m_i^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Esta é a expressão final, utilizada na obtenção do conjunto HERAPDF2.0 [80] e que será utilizada aqui. Além disso é necessário normalizar o valor de  $\chi^2$  pelo número de graus de liberdade (dof, do inglês *degrees of freedom*) do

ajuste, definido como a diferença entre o total de pontos experimentais e o número de medidas em diferentes pontos  $(x, Q^2)$  – lembrando que o mesmo ponto pode ser medido em diferentes conjuntos de dados.

Após a minimização é obtido um conjunto de parâmetros  $\{a^0\}$  que define as PDFs padrão  $F_0$ , associadas a um mínimo absoluto  $\chi^2_{\min}$ . A propagação de erros experimentais e análise do comportamento de  $\chi^2$  é feito através da matriz Hessiana  $H_{ij}$ , definida como [81]

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2_{\text{global}}}{\partial a_i \partial a_j} \right|_{a_{i,j}=a^0_{i,j}}, \quad (3.27)$$

onde  $\chi^2_{\text{global}}$  está associado aos parâmetros  $\{a\}$ . É assumido que  $\chi^2_{\min}$  varia quadraticamente ao redor do mínimo no espaço de parâmetros, ou seja,

$$\Delta \chi^2 = \sum_{i,j} H_{ij} (a_i - a^0_i)(a_j - a^0_j). \quad (3.28)$$

Para determinar a região analisada é definido um parâmetro de tolerância  $T$ , de modo que  $\Delta \chi^2 < T^2$ . Como a variação é quadrática, as curvas de nível de  $\chi^2$  no espaço de parâmetro são hiperelipsoides. Do ponto de vista prático é conveniente encontrar um conjunto de vetores ortogonais  $\vec{u}_k$  que diagonalizam a inversa da matriz Hessiana (que corresponde à matriz de covariância mencionada previamente), normalizados de modo que o hiperelipsoide se torne uma hiperesfera de raio  $T$ , permitindo analisar a vizinhança do mínimo através das relações:

$$a_i - a^0_i = \sum_k u_{ik} z_k \quad \text{u} \quad \sum_k z_k^2 \leq T^2, \quad (3.29)$$

onde  $z_k$  são as coordenadas dos parâmetros na nova base e são restringidos pela hiperesfera. O subscrito  $i$  denota uma componente do vetor  $\vec{u}_k$ . A cada autovetor está associado um conjunto de parâmetros definidos por  $a_i^\pm(k) = a^0_i \pm T u_{ik}$ , que define as PDFs  $F^\pm(k)$ . O método acima está representado na

Fig. 3.1 em um espaço de dois parâmetros. Os erros assimétricos das PDFs podem ser obtidos pela expressão

$$\Delta F^{\pm} = \sqrt{\sum_k \{\max [\pm (F^+(k) - F_0), \pm (F^-(k) - F_0), 0]\}^2}. \quad (3.30)$$

Diversos valores de  $T$  podem ser utilizados. Na análise do HERAPDF é utilizado o valor  $T = 1$ , que, por ser pequeno, restringe fortemente a vizinhança de parâmetros analisados, podendo desprezar os tamanhos reais das barras de erro das PDFs.

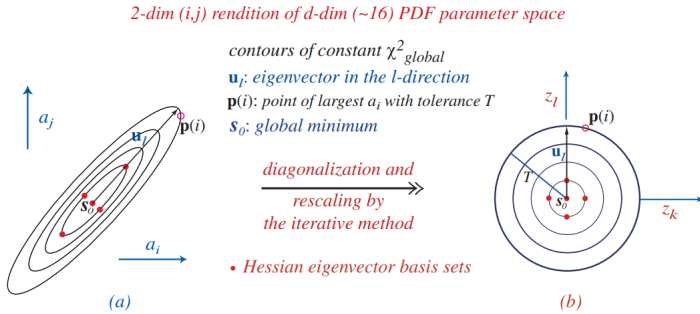


Figura 3.1: Representação da curva de nível de  $\chi^2$  no espaço de parâmetros bidimensional.  $u_l$  é o autovetor na direção  $l$ ,  $p_i$  é o ponto de maior  $a_i$  com tolerância  $T$  e  $s_0$  é o mínimo global. (a) À esquerda a curva quando os autovetores da matriz Hessiana são ortonormais, formando uma elipse. (b) À direita a curva após a redefinição dos autovetores, que se torna uma esfera. Fonte: Adaptada da Ref. [91].

No tocante a métodos alternativos de minimização podemos mencionar o método de multiplicadores de Lagrange [90] e o Offset [96]. Neste último os parâmetros de distúrbio não são mantidos livres, mas um ajuste central é feito mantendo  $r_k = 0$  e, em seguida, estes são variados entre  $\pm 1$ , sendo feito um novo ajuste a cada variação. A variação com estes parâmetros define a incerteza das PDFs. O método Offset não assume a distribuição gaussiana de incertezas sistemáticas e não é efetivo na determinação dos parâmetros

livres, levando a uma super-estimativa dos erros [92].

### 3.4. FENOMENOLOGIA

Os principais dados na determinação das PDFs são oriundos do EPI e os principais colisores lépton-hádron são: NMC (*Neutrino-Muon Collider*), SLAC, BCDMS e HERA. O último possuía três experimentos, denominados H1, HERMES e ZEUS, que foram capazes de obter as primeiras evidências dos efeitos da força forte no próton, além da contribuição dos quarks de mar e o efeito do glúon no spin do próton. Os dados do EPI com diferentes estados iniciais são capazes de cobrir uma grande região cinemática em  $x$  e  $Q^2$ , os dados de CN e CC são capazes de restringir combinações de quarks e antiquarks (de valência e de mar) na região de pequeno e médio  $x$ , porém não permite a separação de sabores de mar de mesmo tipo, p.ex. up de charm ou down de strange. A distribuição de glúons é determinada pelas violações de escalonamento observadas.

Os principais conjuntos de dados do EPI foram coletados no HERA e dizem respeito à combinação dos dados da primeira e segunda rodada – HERA I+II *run* – de colisões performadas nos experimentos H1 e ZEUS. A primeira rodada [97] ocorreu entre 1992 e 2000, cobriu a região cinemática de  $0,045 \lesssim Q^2 \lesssim 3 \cdot 10^4 \text{ GeV}^2$  e  $10^{-6} \lesssim x \lesssim 0,65$  e utilizou feixes de prótons com energias  $E_p = 820$  e  $920 \text{ GeV}$ , resultando no conjunto de distribuições denominado HERAPDF1.0. A segunda rodada ocorreu entre 2002 e 2007 e utilizou feixes de prótons com energias  $E_p = 460$  e  $575 \text{ GeV}$ , esta rodada forneceu medidas mais acuradas devido a tecnicidades experimentais, porém, não cobriu a região  $Q^2 \lesssim 1,5 \text{ GeV}^2$ . Na Fig. (3.2) são apresentados os dados de seção de choque reduzida de CN, correspondente a Eq. (3.1), para uma energia de centro de massa de  $318 \text{ GeV}$ . Note que os dados apresentam violação de escalonamento de forma mais proeminente na região de pequeno  $x$ , indicando que a distribuição de glúons se torna menor conforme  $x$  cresce e domina em pequeno  $x$ . Isto também pode ser identificado pelo formalismo

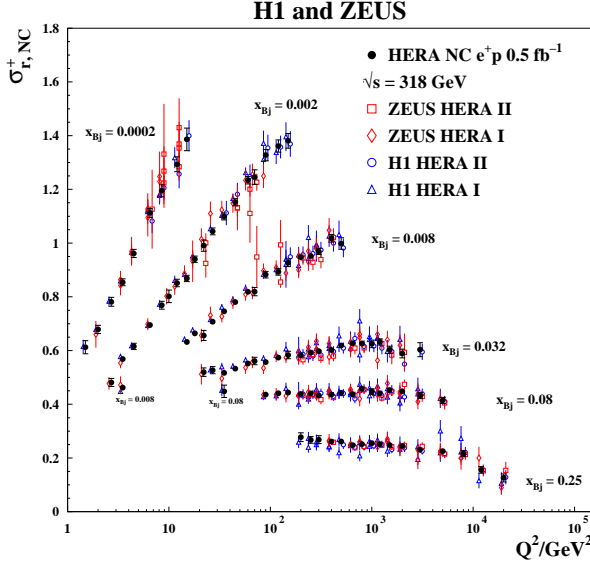


Figura 3.2: Dados de corrente neutra em diferentes  $x$  e  $Q^2$  combinados, comparados com os dados individuais dos grupos H1 e ZEUS. Fonte: Ref. [80].

notando que a função de desdobramento de quarks em glúons – Eq. (2.75) – se torna dominante em relação à quark-quark – Eq. (2.69) – para pequenas frações de momento ( $z \rightarrow 0$ ). Na análise que segue somente dados do EPI de CN e CC serão utilizados, consequentemente, os sabores pesados são determinados por suposições *ad hoc*, como mencionado na seção anterior, a distribuição de glúons pelas violações de escalonamento em pequeno  $x$ , e a separação das distribuições de mar  $xU$  e  $xD$  por dados de CC.

Além de dados CN e CC com elétrons, é possível efetuar medições do EPI com neutrinos e múons. Os primeiros aplicam restrições às distribuições de valência em alto  $x$  e de mar em pequeno  $x$ , além de restringirem e diferenciarem as distribuições de strange e antistrange. Medidas do processo Drell-Yan inclusivo no Tevatron e dados de EPI semi-inclusivos (i.e., com identificação dos estados hadrônicos finais) aplicam restrições à distribuição de glúons e

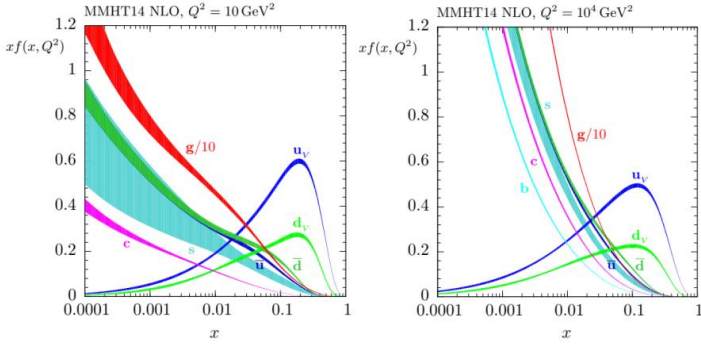


Figura 3.3: Distribuições do conjunto MMHT14 para escalas de 10 e  $10^4 \text{ GeV}^2$  em OSD. Fonte: Ref. [83].

separam sabores de mar em médio  $x$  [98].

As PDFs do conjunto MMHT14, que utilizam metodologia similar à apresentada neste trabalho e utilizam dados do HERA, LHC e Tevatron, estão representadas para escalas  $Q^2 = 10$  e  $10^4 \text{ GeV}^2$  na Fig. 3.3. As PDFs do

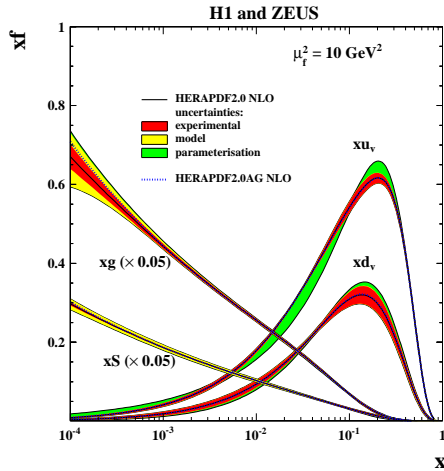


Figura 3.4: Distribuições do conjunto HERAPDF2.0 para escalas de 10 e  $10^4 \text{ GeV}^2$  em OSD. Fonte: Ref. [80].

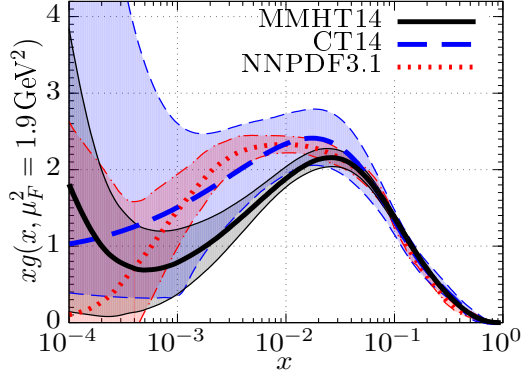


Figura 3.5: Distribuições de glúons dos conjuntos MMHT14, CT14 e NNPDF3.1 na escala  $\mu_F^2 = 19. \text{ GeV}^2$ . Fonte: Imagem feita utilizando o LHAPDF [100, 101].

conjunto HERAPDF2.0 estão na Fig. (3.4) para a escala  $10 \text{ GeV}^2$  e utiliza dados de CC e CN do EPI, somente. Note que a escala de glúons e de mar do MMHT14 está multiplicada por um fator de 10, e a do HERA por um fator de 20. Além disso, os quarks pesados de mar são apresentados separadamente no primeiro, enquanto o segundo mostra somente a combinação destes:  $xS = 2(x\bar{U} + x\bar{D})$ .

Na região  $x \sim 0,2$  as distribuições de valência possuem um pico, visto que são os pártons que carregam a maior parte da fração de momento longitudinal do próton. Na região de pequeno  $x$  estas se tornam nulas e as distribuições de mar e de glúons são dominantes. No modelo partônico é esperado que os quarks de mar sejam gerados pelo desdobramento de glúons, porém esta interpretação esta em discussão devido a aparentes violações encontradas em regras de soma [99].

Como já mencionado, a DGLAP só é válida no limite de alto  $Q^2$  e  $x$  suficientemente grande. As dificuldades da região de pequeno  $Q^2$  e pequeno  $x$  foram primeiramente estudadas por Gribov, Levin e Ryskin [16] e por Mueller e Qiu [17] no formalismo da DGLAP. Estes argumentaram sobre a importância de recombinações de glúons ( $gg \rightarrow g$ ) e adicionaram um termo

não-linear na evolução do glúons devido aos diagramas de recombinação, levando à equação conhecida como GLR-MQ. Atualmente a DGLAP linear é utilizada no ajuste das PDFs, e uma descrição das regiões de pequeno  $x$  e pequeno  $Q^2$  é definitivamente insatisfatória. Na Fig. 3.5 estão apresentadas distribuições de glúons obtidas por diferentes grupos e pode-se observar que a distribuição de glúons na região semimacia é, definitivamente, mal compreendida e determinada. As correções apresentadas no Capítulo 4 são de extrema importância neste regime.

### 3.5. SOFTWARES: QCDNUM E xFitter

Atualmente é possível a pesquisadores fora dos grandes grupos de ajuste trabalhar de forma simples (sem a necessidade de escrever todo o código de minimização do  $\chi^2$  e para evolução das PDFs) com aspectos sutis no ajuste das PDFs, devido ao código aberto ao público – *open source* – denominado xFitter [102], antigo HERAFitter [103]. Este será utilizado para a obtenção dos resultados na Seção 5.

O xFitter possibilita o ajuste de PDFs com o uso de dados de diversos colisores (HERA, Tevatron, LHC, ...). A interface com o LHAPDF6 [100,101] é possível fazer a análise do  $\chi^2$  e da propagação de erros em qualquer PDF presente no banco de dados do LHAPDF ou no resultado de um ajuste particular. A análise da evolução pode ser feita utilizando interfaces com diversos programas – QCDNUM [104], APFEL [105], LHAPDF6, FastNLO [106,107], etc. – e permite trabalhar em OD, OSD e OSSD. Além disso é possível utilizar diversos esquemas VFNS e FFNS (*Fixed Flavour Number Scheme*).

Na análise seguinte as PDFs serão evoluídas com o QCDNUM. Neste é possível ajustar os parâmetros eletrofracos, alterar funções de desdobramento, coeficientes partônicos e a evolução de  $\alpha_s$ . O QCDNUM utiliza a linearidade da DGLAP para que a evolução seja efetuada numericamente de forma otimizada utilizando interpolação de splines cúbicas, porém isso impede que correções não-lineares sejam trivialmente implantadas.



## 4. Correções de potência

A CDQ provê uma ótima descrição e previsões para uma grande parte do espaço de fase, porém a região de pequeno  $x$  e pequeno  $Q^2$  está sujeita a efeitos não-perturbativos da força forte, os quais não possuem compreensão satisfatória em nível conceitual ou formal. Neste capítulo serão introduzidas correções absorptivas e de confinamento. A primeira é calculada e implementada aplicando o formalismo difrativo da teoria de Regge. A correção de confinamento advém de argumentos analíticos e resultados de CDQ na rede e sua implementação é feita a partir da proposta de transladar a escala da constante de acoplamento por uma constante da ordem de 1 GeV.

### 4.1. CORREÇÃO ABSORTIVA

No EPI, no referencial  $P_\infty$ , o fóton sonda a estrutura hadrônica com resolução transversal  $Q^2$ , ou seja, somente pártons com momento transversal  $k_\perp^2 \leq Q^2$  (ou área  $1/Q^2$ ) interagem; pártons com momento transversal maior que a virtualidade constituem uma nuvem de partículas virtuais. Na década de 80, Gribov, Levin e Ryskin [16] propuseram um modelo partônico do próton como um meio contínuo, no qual a resolução de menores áreas implica maior momento transversal e menor fração de momento colinear. Nesta região, o espaço de fase ocupado pelos glúons é proporcional ao logaritmo do momento transversal e da fração de energia do párton, i.e.

$$d\Omega \sim \frac{\alpha_s}{2\pi} \int \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} \int \frac{dx_i}{x_i}, \quad (4.1)$$

portanto os grandes termos logarítmicos só podem ser ressomados assumindo que há um forte ordenamento nos momentos transversais e nas frações de energia colinear. A DGLAP corresponde ao ordenamento em momentos transversais  $Q^2 \gg k_{i,\perp}^2 \gg k_{i-1,\perp}^2 \gg \dots$  e não ordena as frações de momento

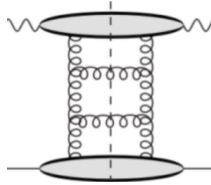


Figura 4.1: Representação da DGLAP como uma escada de glúons, emitidos com momento transversal ordenado. A bolha na parte de cima representa a interação eletromagnética e a bolha abaixo representa o próton. Fonte: Adaptada da Ref. [108].

$x_i$ , não ressomando termos importantes do tipo  $\ln 1/x$ . O ordenamento em  $k_{i,\perp}^2$  pode ser representado diagramaticamente como na Fig. 4.1: o primeiro glúon da escada possui o maior momento transversal e corresponde à emissão calculada na Seção 2.5, os glúons seguintes são incluídos ou nas PDFs ou nas funções de estrutura dos quarks, de acordo com o valor da escala de fatorização.

Gribov, Levin e Ryskin argumentam que devido à alta densidade de glúons em pequeno  $x$ , deve haver uma escala semimacia na qual as recombinações de glúons são tão grandes quanto os desdobramentos e contribuições de diagramas representando esta recombinação devem ser importantes. A inclusão da recombinação de glúons é denominada correção absorativa ou difrativa. Na Fig. 4.2 estão representados os diagramas de Feynman que contribuem para  $F_2$ : o primeiro termo do lado direito corresponde à DGLAP e o segundo

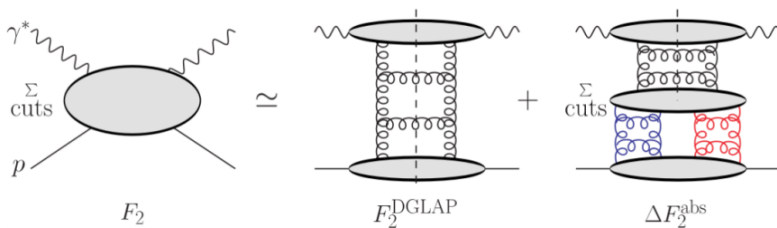


Figura 4.2: Diagramas que contribuem para a função de estrutura  $F_2$  do próton quando diagramas de recombinação de glúons (direita) são adicionados à DGLAP convencional (esquerda). Fonte: Ref. [108].

termo corresponde ao diagrama de recombinação de glúons ( $2 \rightarrow 1$ ), no qual duas escadas de glúons se re combinam para formar uma só escada. “ $\Sigma$  cuts” representa a soma sobre diferentes cortes na parte inferior do diagrama  $2 \rightarrow 1$  que contribuem para a amplitude e são determinados pelas regras de corte AGK [109, 110]. As contribuições dos diferentes cortes diferem somente por um fator multiplicativo e a contribuição semelhante a todos pode ser calculada utilizando resultados advindos da teoria de Regge, que será discutida a seguir, antes de apresentar os cortes.

A teoria de Regge provê uma boa descrição fenomenológica dos espalhamentos hadrônicos difrativos na região semimacia, caracterizados pela sobrevivência do próton no estado final acompanhado do conjunto hadrônico  $X$ , porém separados por uma grande lacuna de rapidez. Como o próton sobrevive, seus números quânticos devem ser preservados durante a interação e a soma dos números quânticos de  $X$  deve ser igual aos do vácuo. Esta teoria descreve os espalhamentos a partir de propriedades da matriz  $S$  relacionadas a uma variável de momento angular que pode assumir valores complexos, que possui pólos em determinadas energias. Ela era amplamente utilizada anteriormente à formulação da CDQ, porém perdeu popularidade com o tempo. Atualmente, esta é empregada em estudos fenomenológicos buscando maior compreensão conceitual dos hádrons, e teóricos buscando fazer a conexão com a CDQ, em especial com a equação BFKL [70, 111].

De acordo com a teoria de Regge, a seção de choque é proporcional à energia de centro de massa do espalhamento elevada a uma função  $\alpha_{\mathbb{P}}(t)$  denominada trajetória de Regge. Foram Chew e Frautschi que conjecturaram que partículas que interagem fortemente obedecem a trajetórias de Regge [112, 113]. Esta trajetória corresponde à parametrização da órbita de uma variável de momento angular no plano complexo, usualmente a parametrização é linear:

$$\alpha_{\mathbb{P}}(t) = \alpha_{\mathbb{P}}(0) + \alpha'_{\mathbb{P}}(0) t \quad (4.2)$$

sendo  $t = (P' - P)^2$  o quadrado do momento transferido do próton,  $\alpha_{\mathbb{P}}(0)$



Na equação acima  $a^D = xg, xS = 2(x\bar{U} + x\bar{D})$  são as PDFs difrativas (DPDFs), de glúon e de mar. Note que o primeiro corresponde à fatorização de termos perturbativos e não-perturbativos, que foi demonstrado para o caso difrativo na Ref. [118]. Os coeficientes  $C_{2,a}$  correspondem aos apresentados na Seção 2.5 e uma discussão referente à  $C_{2,\mathbb{P}}$  pode ser encontrada na Ref. [119].

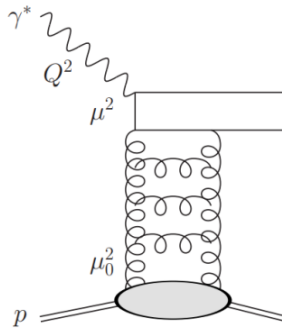


Figura 4.4: O Pomeron representado como uma escada de glúons, como no modelo de Gribov, Levin e Ryskin. Fonte: Ref. [119]

O segundo termo é uma correção inomogênea. É argumentado em [115] que dados de colisões  $pp$  e  $p\bar{p}$  na região macia favorecem um ajuste com intercepto igual a 1,08, enquanto ajustes de dados do EPID favorecem um valor de 1,17. Um maior intercepto implica que há uma sondagem de componentes de menor tamanho, indicando a sondagem de pártons e uma região de intersecção entre teoria de Regge e CDQ, levando à introdução, pelos autores, de funções de desdobramento Pomeron-párton. Este desdobramento deve começar na escala de energia do próton ( $\sim 1$  GeV) e ainda possui relevância para dados com  $Q^2 \sim 50 \text{ GeV}^2$ . As funções de desdobramento difrativas podem ser encontradas na Seção 3.2 da Ref. [115].

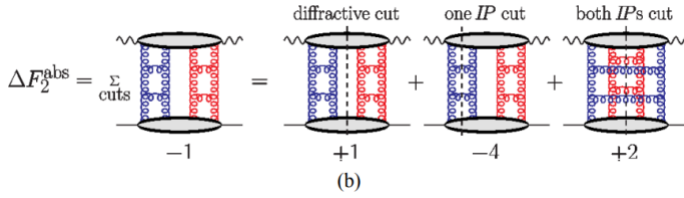


Figura 4.5: Diagramas de Feynman com as regras de corte AGK para a parte inferior do último diagrama da Fig. 4.2. Fonte: Ref. [108]

A equação de evolução para as DPDFs pode ser expressa como

$$\frac{\partial a^D}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{b=q,\bar{q},g} P_{ab} \otimes b^D + P_{a\mathbb{P}} f_{\mathbb{P}}, \quad (4.5)$$

sendo  $f_{\mathbb{P}}(x_{\mathbb{P}}, \mu^2)$  o fluxo de Pomerons, que deve ser parametrizado fenomenologicamente. Quando o Pomeron é representado como uma escada de glúons em ambos termos da amplitude, utiliza-se as parametrização

$$f_{\mathbb{P}=g}(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) = \frac{1}{x_{\mathbb{P}} B_D} \left[ R_g^2 \frac{\alpha_s}{\mu} x_{\mathbb{P}} g(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) \right]^2; \quad (4.6)$$

quando ambos termos da amplitude correspondem a uma escada  $q\bar{q}$  de mar:

$$f_{\mathbb{P}=S}(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) = \frac{1}{x_{\mathbb{P}} B_D} \left[ R_S^2 \frac{\alpha_s}{\mu} x_{\mathbb{P}} S(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) \right]^2; \quad (4.7)$$

e, para o termo de interferência:

$$f_{\mathbb{P}=gS}(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) = \frac{1}{x_{\mathbb{P}} B_D} R_g R_S \frac{\alpha_s^2}{\mu^2} x_{\mathbb{P}}^2 S(x_{\mathbb{P}}, \mu^2) g(x_{\mathbb{P}}, \mu^2). \quad (4.8)$$

Voltando à recombinação de glúons, note que a parte inferior do segundo diagrama do lado direito na Fig. 4.2 corresponde à amplitude obtida ao tomar o módulo quadrado do diagrama da Fig. 4.4. Deste modo, as regras de corte AGK determinam o fator multiplicativo que acompanha as funções de estrutura difrativas ( $F_2^{D(3)}$  e  $F_L^{D(3)}$ ). Note que  $F_3^{D(3)}$  não deve contribuir para a região semimacia. Há três possíveis cortes: o difrativo, em que nenhuma

escada de glúons é cortada; o  $1\mathbb{P}$ , em que uma das escadas é cortada; e o  $2\mathbb{P}$ , onde ambas escadas são cortadas. As contribuições destes são  $+1$ ,  $-4$  e  $+2$ , respectivamente, como representado na Fig. 4.5. Portanto, a contribuição da correção absorptiva é de  $-1$  para a seção de choque reduzida do EPI – Eq. (3.1) –, ou seja,  $\Delta\sigma_r^{\text{abs}} = -\sigma^{D(3)}$ , onde

$$\sigma^{D(3)} = F_2^{D(3)} - \frac{y^2}{Y_+} \tilde{F}_L^{D(3)}. \quad (4.9)$$

A inclusão da contribuição total advinda destes diagramas tornam a DGLAP uma evolução não-linear para os glúons, agora dada equação GLR-MQ, expressa como

$$\frac{\partial xg}{\partial \ln \mu_F^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{a=q,\bar{q},g} P_{ga} \otimes xa - \frac{81}{16} \frac{\alpha_s^2}{R^2 Q^2} \int_x^1 \frac{dz}{z} [zg(z, \mu_F^2)]^2. \quad (4.10)$$

porém a implementação de uma evolução não-linear em uma análise global é problemática, devido as várias técnicas empregadas na otimização da evolução, que são de serventia somente para equações lineares. Portanto, da parte funcional funcional, é mais prático combinar os dados do EPI com os de EPID, de modo que novas seções de choque estejam livres da contribuição absorptiva e as PDFs obedeçam à DGLAP linear. Como a contribuição absorptiva deveria ser subtraída na teoria, elas devem ser somadas aos dados experimentais, de modo que

$$\sigma = \sigma^{\text{EPI}} + \sigma^{\text{EPID}}. \quad (4.11)$$

É importante a constatação de que a probabilidade de ocorrência de eventos difrativos nos quais o próton final está em um estado excitado ( $P + \gamma^* \rightarrow P^* + X$ ) é de aproximadamente 40%. Deste modo, a correção absorptiva com fator multiplicativo  $+1$ , que não leva em conta tais excitações, corresponde a uma correção difrativa elástica, enquanto uma correção levando em conta

os estados excitados possui um fator multiplicativo 1,4:

$$\sigma = \sigma^{\text{EPI}} + 1,4 \Delta \sigma^{\text{EPID}}, \quad (4.12)$$

e pode ser denominada correção difrativa total.

Nas Refs. [120] e [119] as DPDFs foram analisadas utilizando dados difrativos do HERA [121], omitindo e empregando o termo inomogêneo, respectivamente. Além disso, a primeira referência também utilizou a hipótese de fatorização de Regge, na qual as DPDFs podem ser expressas como o produto do fluxo de Pomerons com PDFs do Pomeron, porém, apesar da boa descrição fenomenológica desta assunção, não há demonstração formal de sua validade. O autor desta dissertação optou por utilizar as DPDFs ajustadas na Ref. [119] para a obtenção dos resultados da Seção 5. Como as PDFs correspondentes aos novos dados devem obedecer a DGLAP linear – Eq. (2.74) –, estas também podem ser referidas como distribuições lineares. As PDFs obtidas com dados de EPI originais serão denominadas convencionais.

## 4.2. CORREÇÃO DE CONFINAMENTO

A evolução da constante de acoplamento com a escala de energia é ditada pela função beta – Eq. (2.3) –, porém esta é calculada perturbativamente e não deve produzir resultados físicos confiáveis na região infravermelha, na qual  $\alpha_s$  cresce indefinidamente, divergindo no pólo de Landau ( $\Lambda_{\text{QCD}}$ ). Na Ref. [122] a função beta de teorias de gauge é analisada em terceira ordem em teoria de perturbação e os autores mostram que a existência de um ponto crítico não-trivial, i.e.  $\alpha_s^* \neq 0$ , com  $\beta(\alpha_s^*) = 0$ , o que indica que a constante de acoplamento não deve crescer indefinidamente.

Nas Refs. [123, 124] é argumentado que a constante de acoplamento, calculada utilizando teoria de perturbação ótima (que introduz parâmetros espúrios na hamiltoniana e os analisa aplicando invariância de observáveis com o esquema de renormalização), se torna constante ( $\alpha_s \sim 0,7$ ) quando a es-



cala da evolução se encontra em uma região do infravermelho. É também demonstrado que a constância de  $\alpha_s$  descreve bem resultados experimentais de dados  $e^-e^+ \rightarrow$  hádrons na região semimacia e macia.

O congelamento de  $\alpha_s$  também é sugerido em diversos outros estudos, tanto teóricos quanto fenomenológicos: na análise da função beta da CDQ com número de sabores próximo de  $N_f = 16,5$  (onde o sinal de  $\beta$  é invertido) [125]; na obtenção de soluções do grupo de renormalização no limite de grande  $N_c$  utilizando teoria de perturbação de fundo (*background perturbation theory*) [126]; em resultados advindos de teoria de perturbação analítica [127, 128]; e em ajustes feitos utilizando dados de simulações de CDQ na rede [129, 130]. Além disso, os dados de CDQ na rede que corroboram com este congelamento também são utilizados na análise de soluções das equações de Schwinger-Dyson, permitindo determinar aquelas capazes de reproduzir tais dados [131]. Na Fig. 4.6 são apresentados os valores de  $\alpha_s$  de acordo com duas diferentes soluções, sendo condizentes com os dados somente aquelas que se encontram dentro da caixa vermelha em  $\alpha_s(0)$ .

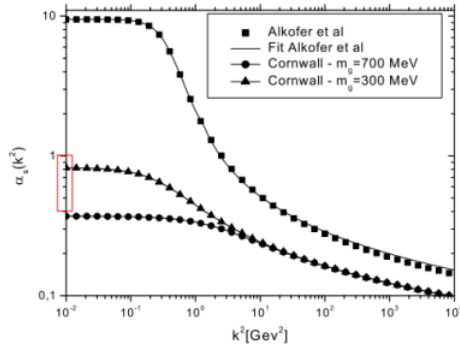


Figura 4.6: Comparação entre diferentes constantes de acoplamento, obtidas a partir de diferentes soluções das equações de Schwinger-Dyson. Fonte: Ref. [131]

O congelamento de  $\alpha_s$  corresponde a uma saturação no número de pártons e é equivalente à adição de uma massa gluônica  $m_g$ , adquirida dinami-

camente, que deve encontrar-se na região macia [132, 133]. Na Ref. [134] é proposta uma “teoria de perturbação analítica massiva”, na qual esta massa gluônica é incorporada pela translação do argumento da constante de acoplamento por uma escala  $\mu_0$ , ou seja,

$$\alpha_s(Q^2) \rightarrow \alpha_s(Q^2 + \mu_0^2), \quad (4.13)$$

o que torna a teoria finita na região infravermelha. Uma aplicação desta proposta foi implementada na Ref. [135], onde o parâmetro  $\mu_0$  foi ajustado e, em OSD, seu valor é  $\mu_0 \sim 1 \text{ GeV}$ . Nesta dissertação será implementada esta correção de confinamento no ajuste das distribuições partônicas utilizando a proposta expressa na Eq. (4.13), com o valor  $\mu_0 = 1 \text{ GeV}$ .

## 5. Resultados

As discussões dos capítulos precedentes que possuem maior relevância para a obtenção dos resultados podem ser sumarizadas como segue: as PDFs centrais foram parametrizadas de acordo com as Eqs. (3.15)–(3.19) na escala inicial semimacia  $Q_0^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ . O  $\chi^2$  utilizado está expresso na Eq. (3.26) e sua minimização e a propagação de erros foram feitas com o método Hessiano. O esquema para inclusão de quarks pesados (gerados quando a escala  $Q$  é maior que massa do quark  $m_Q$ ) é o RT-OPT; e o valor da constante de acoplamento utilizado foi  $\alpha_s(M_Z^2) = 0,118$ . O principal software empregado nos ajustes é o xFitter, responsável por todos tópicos citados acima. As evoluções das PDFs e da constante de acoplamento são feitas em OSD por meio do software QCDNUM, que possui interface com o xFitter.

Na Tab. 5.1 são apresentados os resultados de  $\chi^2/\text{d.o.f.}$  para os diversos ajustes realizados. As distribuições de glúons foram ajustadas utilizando a parametrização da Eq. (3.15) com o segundo termo fixado nulo ( $A'_g = 0$ ) (parametrização +) ou com os parâmetros  $A'_g$  e  $B'_g$  mantidos livres enquanto  $C'_g = 25$  é mantido fixo (parametrização –). O valor de  $C'_g$  é escolhido de

$\mu_0$ (GeV)	0	0	1	1
Corte nos dados ( $\text{GeV}^2$ )	2,0	7,0	2,0	7,0
s/ corr. +	1,225	1,165	1,226	1,160
s/ corr. -	1,227	1,161	1,223	1,157
corr. difr. elast. +	1,128	1,088	1,128	1,085
corr. difr. total +	<b>1,099</b>	1,066	<b>1,099</b>	1,063
corr. difr. total -	1,099	1,065	1,093	1,063

Tabela 5.1: Qualidade dos ajustes de acordo com o  $\chi^2/\text{d.o.f.}$  Os sinais + (–) indicam gluons positivos (‘negativos’). Os melhores ajustes são aqueles incluindo correções absorptivas e de confinamento. O negrito indica o ajuste correspondente aos parâmetros nas Tabs. 5.2 e 5.3.

$\mu_0 = 0 \text{ GeV}$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$xg$	5,63 *	0,103	10,261	—	—
$xu_v$	3,743 *	0,687	4,822	—	14,087
$xd_v$	3,101 *	0,799	4,091	—	—
$xU$	0,121 *	-0,169 *	7,172	8,435	—
$xD$	0,201	-0,169	5,732	—	—

Tabela 5.2: Parâmetros das PDFs na escala  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , ajustadas utilizando dados com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ , com correção difrativa total e sem de confinamento ( $\mu_0 = 0$ ). A parametrização + é utilizada. Os parâmetros marcados com asterisco (\*) não são livres, mas fixados de acordo com a discussão da Seção 3.2.

modo que a contribuição do segundo termo se dá somente na região  $x \lesssim 10^{-2}$ , note ainda que a distribuição pode assumir valores negativos. Foram ajustados dois conjuntos de dados com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  e  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ . As nomenclaturas “s/ corr.” referem-se a ajustes feitos com dados originais do HERA do EPI; “corr. difr. elast.” referem-se ao ajustes com a inserção da correção difrativa elástica – Eq. (4.11) –; e “corr. difr. total”, aos ajustes com correção difrativa total (elásticas mais as que apresentam excitação do próton – Eq. (4.12)). A discussão dos resultados apresentados na tabela se dará em conjunto com as discussões sobre as distribuições de glúons.

Em pequeno  $x$  as PDFs de maior relevância são as de glúons e de mar. Como estas possuem comportamento equivalente (ver Figs. 3.3 e 3.4), iremos

$\mu_0 = 1 \text{ GeV}$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$xg$	4,21 *	0,021	9,427	—	—
$xu_v$	3,502 *	0,665	4,866	—	15,066
$xd_v$	2,939 *	0,781	4,054	—	—
$xU$	0,132 *	-0,157 *	6,936	7,078	—
$xD$	0,220	-0,157	6,665	—	—

Tabela 5.3: Parâmetros das PDFs na escala  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , ajustadas utilizando dados com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ , com correções difrativa total e de confinamento ( $\mu_0 = 1 \text{ GeV}$ ). A parametrização + é utilizada. Os parâmetros marcados com asterisco (\*) não são livres, mas fixados de acordo com a discussão da Seção 3.2.

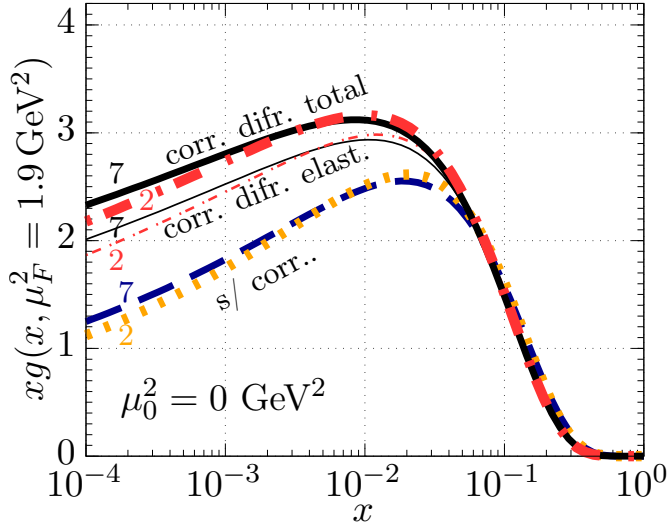


Figura 5.1: Distribuição de glúons para  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ . Três pares de curvas, cada elemento do par difere pelo corte na escala dos dados ( $Q^2 > 2$  ou  $7 \text{ GeV}^2$ ). A inclusão de correções absorptivas elástica e total favorecem um ajuste com uma distribuição de glúons maior em pequeno  $x$ .

nos especializar na distribuição de glúons, que é dominante. A parametrização + será utilizada nas distribuições apresentadas nas Figs. 5.1–5.3 e a parametrização – nas Figs. 5.4–5.8. Curvas sem correções difrativas também serão denominadas convencionais e aquelas com correção difrativa (elástica ou total), lineares. Nas Tabs. 5.2 e 5.3 são apresentados resultados dos ajustes com correções difrativa total e sem confinamento (corr. difr. total + ,  $\mu_0^2=0$ ) e com correções difrativa total e com confinamento (corr. difr. total + ,  $\mu_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ ), respectivamente, ambas considerando dados a partir de  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ . Os parâmetros marcados com o asterisco (\*) não são livres, mas fixados por regras de soma ou por argumentos físicos, como discutido na Seção 3.2. Note que as distribuições de glúons são dominadas por um parâmetro ( $B_g$ ) pequeno e positivo, se  $xg \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ , ou negativo, se  $xg \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow 0$ . Quanto mais próximo  $B_g$  está de zero, mais

próximo de  $x = 0$  a distribuição começa a se tornar nula.

### 5.1. CORREÇÃO ABSORTIVA

A princípio será utilizada a parametrização +, salvo indicação do contrário. Na Fig. 5.1 são apresentadas distribuições de glúons na escala inicial  $\mu_F = 1,9 \text{ GeV}^2$ . Os ajustes mostram que as distribuições lineares são consideravelmente maiores em pequeno  $x$ , o que é esperado visto que a subtração do termo difrativo na seção de choque da teoria deve ser compensado pelo crescimento da distribuição de glúons. Além disso, todas decrescem conforme  $x \rightarrow 0$  (a partir de  $x = 10^{-2}$ ). Note que mesmo com diferentes cortes nos dados ( $Q^2 > 2$  e  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ ), as curvas ajustadas com o mesmo conjunto de dados apresentam uma diferença diminuta, indicando a estabilidade do ajuste na região  $2 \leq Q^2 \leq 7 \text{ GeV}^2$ . Além disso a inclusão de correções ab-

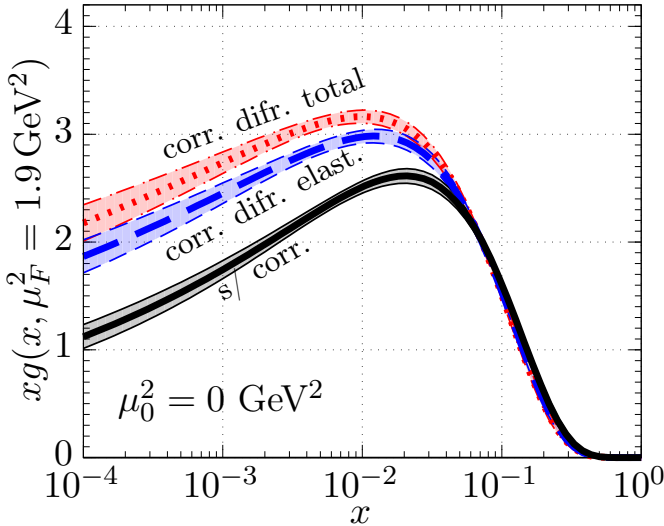


Figura 5.2: Distribuição de glúons para  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$  utilizando dados com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ . A inclusão de correções absorptivas elástica e total favorecem um ajuste com uma distribuição de glúons maior em pequeno  $x$  e permitem um maior espaço de parâmetros aceitáveis.

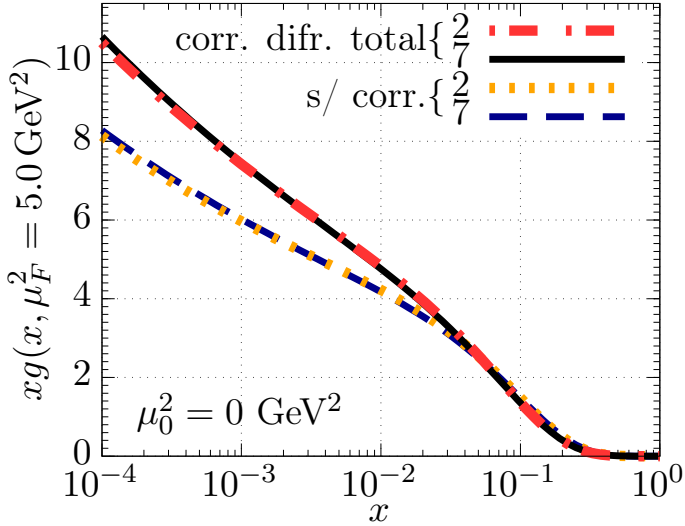


Figura 5.3: Distribuição de glúons na escala  $\mu_F^2 = 5 \text{ GeV}^2$  utilizando dados com  $Q^2 > 2$  e  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ . Somente correção difrativa total e a distribuição convencional são apresentadas.

sortivas faz com que a qualidade do ajuste melhore consideravelmente, tendo uma variação  $\Delta\chi^2/\text{d.o.f.} = 0,126$ , ou seja, mais 148 no total de  $\chi^2$  visto que 1185 pontos foram ajustados com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ .

Na Fig. 5.2 são adicionadas as barras de erros para ajustes com corte  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  nos dados. Nota-se que a adição da contribuição absorptiva faz com que as barras de erro cresçam, o que indica uma maior volatilidade no espaço de parâmetros aceitáveis, o que é favorável considerando que a parametrização + é altamente restritiva, mesmo em regiões em que há poucos dados disponíveis ou grandes incertezas associadas, e que a condição  $T^2 = 1$  (discutida na Seção 3.3) também é restritiva, podendo subestimar o tamanho real das barras de erros.

Na Fig. 5.3 são mostradas algumas das distribuições de glúons na escala  $\mu_F^2 = 5 \text{ GeV}^2$ . Nota-se que a evolução em um pequeno intervalo na região semimacia (de 1,9 à  $5 \text{ GeV}^2$ ) é suficiente para que a densidade de glúons

comece a crescer quando  $x \rightarrow 0$ . Além disso, os resultados obtidos com  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$  e  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  (uma escala dura e uma macia), antes próximos, agora são coincidentes, demonstrando que diferenças nas distribuições de glúons iniciais não possuem grande impacto em dados de alto  $Q^2$ .

Nas Figs. 5.4–5.5 é adotada a parametrização —. Na Fig. 5.4, a flexibilização adquirida devido ao termo extra faz com que o ajuste sem dados próximos da região semimacia ( $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ ) seja dominado pela potência  $B'_g < 0$  (com  $B_g > 0$ ), fazendo com que a distribuição se torne negativa na escala inicial. Porém é possível que qualquer processo com dois hádrons no estado inicial seja iniciado por um glúon de cada hádron, um na região em que a distribuição é positiva em outro na região negativa, levando a uma seção de choque diferencial negativa. Como a obtenção de uma seção de choque negativa é um resultado não-físico e absurdo, também o é a obtenção

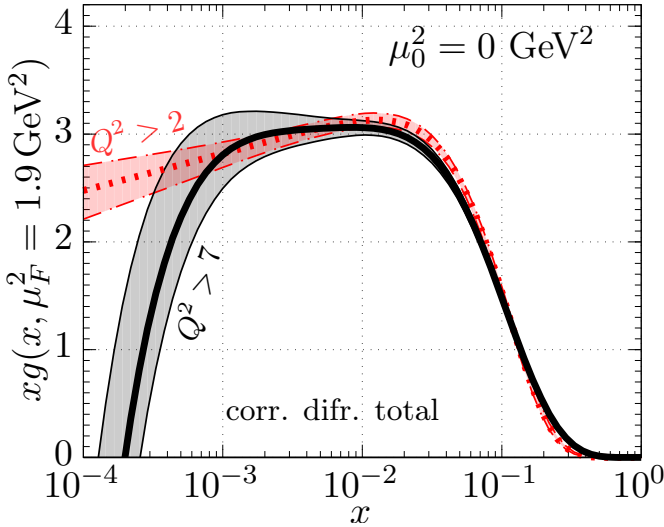


Figura 5.4: Distribuições de glúons em  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , ajustadas com correção difrativa total e sem de confinamento. A parametrização — é utilizada. Na região  $x < 10^{-2}$  há uma ampla discordância nos ajustes feitos com e sem dados da região semimacia.



de distribuições negativas. Note que quando dados de escalas semimacias são incluídos ( $2 \leq Q^2 \leq 7 \text{ GeV}^2$ ) ela se torna positiva e deveras semelhantes àquelas obtidas com a parametrização + (Fig. 5.1). No que concerne a qualidade do ajuste, não há diferença significativa ( $\Delta\chi^2/\text{d.o.f.} \sim 0,002$ ) entre as parametrizações + e -. Conclui-se que os ajustes sem dados da região semimacia são favorecidos se o termo extra não é incluso exatamente pela inflexibilidade imposta na região.

Na Fig. 5.5 vemos que as distribuições de glúons com a parametrização - ajustadas com  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  na escala  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$  são semelhantes àquelas da Fig. 5.1, porém possuem barras de erro maiores. Isto demonstra que se dados da região semimacia estão incluídos no ajuste, a forma da distribuição obtida é pouco sensível à parametrização adotada, e a flexibilidade da parametrização é refletida no aumento do espaço de parâmetros aceitáveis.

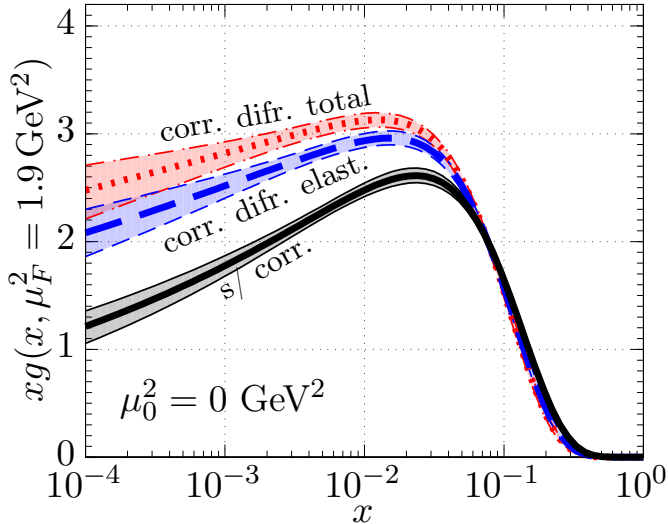


Figura 5.5: Distribuições de glúons em  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , ajustadas com correções difrativas elástica e total e sem de confinamento. O termo extra na distribuição de glúons (Eq. (3.15)) foi utilizado. Como esperado a barra de erros é maior devido à flexibilidade da parametrização, porém as distribuições são semelhantes as da Fig. 5.2.

## 5.2. CORREÇÃO DE CONFINAMENTO

No que tange as correções de confinamento ( $\mu_0 = 1 \text{ GeV}$ ), na Fig. 5.6 é apresentada a distribuição de glúons em  $\mu_F = 1,9 \text{ GeV}^2$ . A adição da correção de confinamento faz com que haja um crescimento na região de pequeno  $x$ , especialmente quando o corte nos dados é aplicado em  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$  e a correção difrativa total é implementada, sendo que a distribuição se torne quase constante nesta última.

Na Fig. 5.7 são apresentadas as distribuições em  $\mu_F = 1,9 \text{ GeV}^2$  com barras de erros e ajustadas com dados em escalas  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ . As barras são ligeiramente maiores com a correção de confinamento (ver Fig. 5.2), flexibilizando a distribuição, como no caso de correções absorptivas. O impacto da correção de confinamento é menor que o de correções absorptivas, e

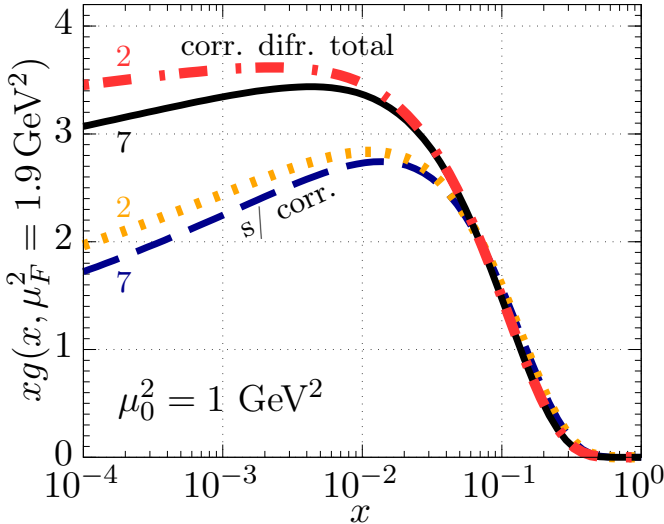


Figura 5.6: Distribuições de glúons com e sem correções absorptiva total e de confinamento, barras de erro não são apresentadas. Dois pares de curvas são mostrados, cada um com curvas utilizando dados com  $Q^2 > 2$  e  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ . A inclusão da correção de confinamento implica um crescimento da distribuição em pequeno- $x$ .

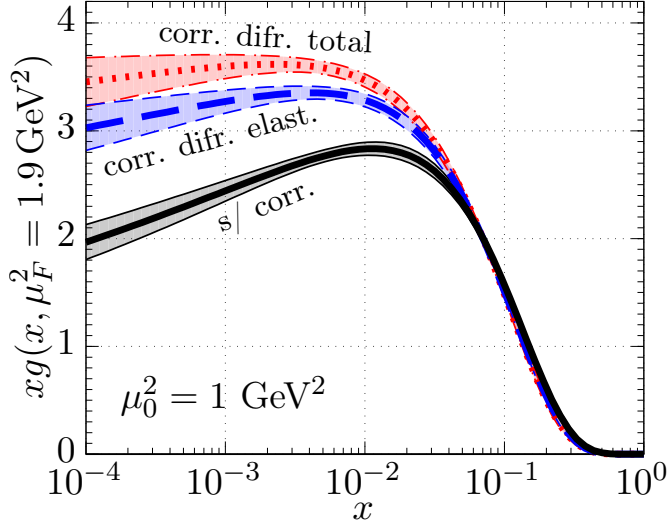


Figura 5.7: Distribuições de glúons com e sem correções absorptiva (elástica e total) e de confinamento, barras de erro são apresentadas. Todas curvas foram ajustadas com dados da região  $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ . A inclusão da correção de confinamento implica um crescimento da distribuição em pequeno  $x$  e também um aumento na barra de erros.

a qualidade do ajuste não é significativamente alterada, ficando no intervalo  $0 \leq \Delta\chi^2/\text{d.o.f.} \lesssim 0,006$ .

Na Fig. 5.8 as distribuições são de ajustes empregando a parametrização — e com dados da escala semimacia incluídos. As distribuições com correções difrativas elástica e total agora crescem para  $x \rightarrow 0$ , enquanto a “s/ corr.” se torna quase constante. Os parâmetros dominantes da região obedecem a relação  $B'_g < B_g < 0$  em todos ajustes. Além disso, a barras de erro são grandes em relação às Figs. 5.2 e 5.7. Note que apesar da pouca diferença entre as distribuições sem correção de confinamento e com correções absorptivas (Figs. 5.2 e 5.5), as distribuições com correção de confinamento e absorptivas da Fig. 5.8 diferem daquelas apresentadas na Fig. 5.7, crescendo conforme  $x \rightarrow 0$ . Além disso, a distribuição ajustada com correções de confinamento e difrativa total corresponde ao menor  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 1,093$  nos ajustes com

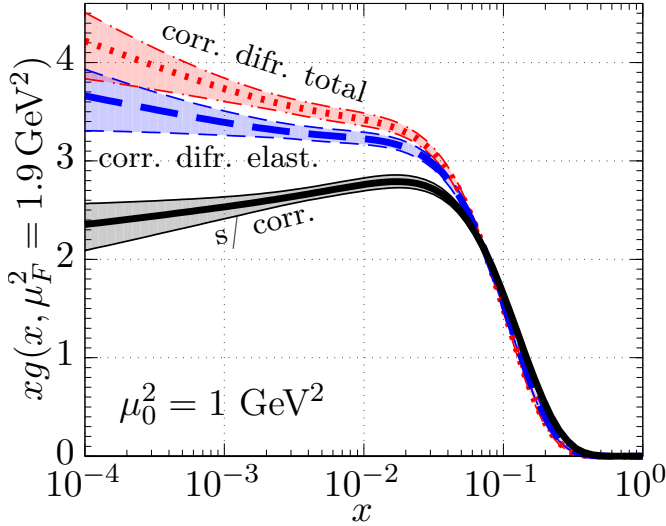


Figura 5.8: Distribuições de glúons em  $\mu_F^2 = 1,9 \text{ GeV}^2$ , ajustadas com correções difrativas elástica e total e de confinamento. O termo extra na distribuição de glúons (Eq. (3.15)) foi utilizado. A barra de erros é maior devido à flexibilidade da parametrização e as distribuições crescem conforme  $x \rightarrow 0$ .

$Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ , como pode ser visto na Tab. 5.1. Para concluir, na Fig. 5.9 é mostrada uma comparação entre predições teóricas e dados com correções difrativa completa e de confinamento nas escalas  $Q^2 = 2$  e  $10 \text{ GeV}^2$ , onde foi escolhido o melhor ajuste para ser apresentado (Fig. 5.8). O crescimento da seção de choque com  $Q^2$  e para pequeno  $x$  discutido durante a dissertação fica evidente, e pode-se observar que teoria e experimento estão em boa concordância, como esperado pelo  $\chi^2/\text{d.o.f.}$ .

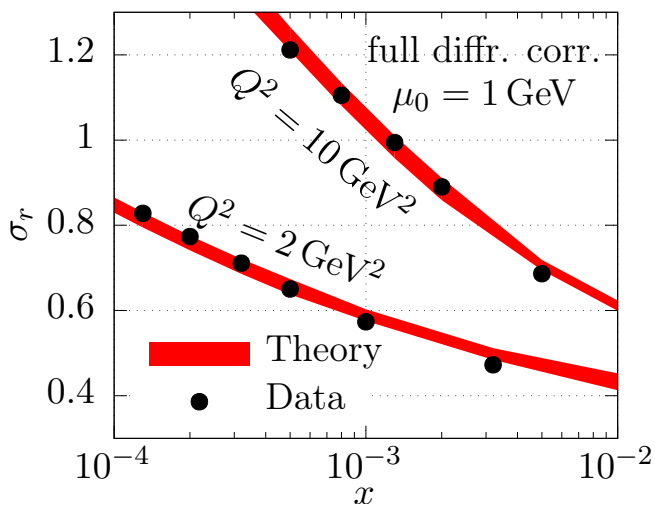


Figura 5.9: Comparação entre os dados com correções difrativa completa e de confinamento e a teoria, ajustada utilizando a parametrização —. A pequenez da barra de erros, apesar de estar em concordância com o experimento, se deve a escolha do parâmetro de tolerância.



## Conclusão

Nesta dissertação foi investigado o impacto de correções de absorção e confinamento na distribuição de glúons na região semimacia e na qualidade do ajuste (utilizando parametrizações  $+$  e  $-$ ), analisada pelo valor da variável  $\chi^2/\text{d.o.f.}$ . Os ajustes foram feitos considerando dados com virtualidades  $Q^2 > 2$  ou  $Q^2 > 7 \text{ GeV}^2$ , sendo os primeiros de maior relevância, posto que as correções são de maior impacto na região semimacia.

Os resultados apresentados mostram que correções absorptivas elástica e total possuem impacto significativo na qualidade do ajuste, em especial a absorptiva total, que implica uma variação  $\Delta\chi^2/\text{d.o.f.} \sim 0,126$  com ambas parametrizações ( $+$  e  $-$ ). Em contraste, a correção de confinamento não possui grande relevância na qualidade do ajuste, apresentando uma variação  $\Delta\chi^2/\text{d.o.f.} \lesssim 0,006$ . Concernente às distribuições de glúons, estas se tornam maiores na região de pequeno  $x$  com a inclusão de correções absorptivas ou de confinamento, começando a decair para valores de  $x$  mais próximos de zero em relação às distribuições convencionais, ou seja, são dominadas por menores potências de  $x$ . A inclusão de ambas correções simultaneamente faz com que as distribuições se tornem quase planas na mesma região.

Relativamente à parametrização, ajustes empregando a parametrização  $-$ , que permite às distribuições se tornarem negativas, não resultam em distribuições realistas na região semimacia quando dados da região  $2 \leq Q^2 \leq 7 \text{ GeV}^2$  são excluídos do ajuste, pois estes restringem fortemente a região. Porém caso os dados desta região sejam incluídos, a adição do termo extra não é prejudicial, inclusive provê um maior espaço de parâmetros aceitáveis (ou uma maior barra de erro) para as PDFs, algo favorável visto que a para-

metrização polinomial e o parâmetro de tolerância  $\Delta\chi^2 < T^2 = 1$  são ambos restritivos.

No que tange o restante da dissertação, no Capítulo 2 foi apresentando o espalhamento profundamente inelástico, que é o meio mais eficiente para sondar a estrutura do próton, primeiramente no modelo de pártons pelo seu apelo intuitivo e, em seguida, utilizando o teorema de fatorização para o cálculo dos termos referentes à força forte ( $\mathcal{O}(\alpha_S)$ ). Ao mesmo tempo foram introduzidas as PDFs, cuja renormalização devido a singularidades colineares leva à equação de evolução DGLAP. No Capítulo 3 foram discutidos tópicos pertinentes ao ajuste das PDFs, como os tipos de erros associados aos experimentos, a parametrização das PDFs, a quantificação da qualidade do ajuste a partir do  $\chi^2$  e a fenomenologia, na qual é explicitada a região de contribuição de cada PDF e evidenciado que em pequeno  $x$  e pequeno  $Q^2$  a distribuição de glúons é mal compreendida no formalismo da DGLAP. O Capítulo 4 introduz as correções absorptivas e de confinamento, que são implementadas na análise das PDFs no Capítulo 5.

A inclusão de correções de potência é importante no estudo da função de onda do próton, que depende fortemente destes efeitos de longa distância, e uma análise global com a inclusão de tais efeitos ainda não havia sido performed na literatura. Além disso, em análises de eventos exclusivos, correções de potência podem não afetar o espalhamento, sendo necessária a utilização das distribuições lineares ao invés das convencionais. Seria relevante, para dar continuidade a este estudo, incorporar correções do tipo  $\log 1/x$ , que também possuem grande impacto, em conjunto com as estudadas aqui, e também incluir dados advindos de outros tipos de espalhamentos, como Drell-Yan, EPI semi-inclusivos e produção de  $W^\pm$  e  $Z$ , que proporcionariam maiores restrições às PDFs. Porém tais propostas ficam em aberto para estudos futuros. Os resultados sumarizados acima estão publicados e podem ser encontrados em [136].



## Referências Bibliográficas

- [1] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2008. (Physics textbook). ISBN 9783527618477. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Wb9DYrjcoKAC>>.
- [2] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. [S.l.: s.n.], 1984.
- [3] SALAM, A.; WARD, J. C. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, v. 11, n. 4, p. 568–577, Feb 1959. ISSN 1827-6121. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02726525>>.
- [4] WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>>.
- [5] TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 98, p. 030001, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>>.
- [6] SMITH, C. H. L. The theoretical status of quantum chromodynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 304, n. 1482, p. 5–22, 1982. ISSN 00804614. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/36903>>.
- [7] SIMONOV, Y. A. Ideas in non-perturbative QCD. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, v. 107, n. 11, p. 2629–2644, Nov 1994. ISSN 1826-9869. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02734040>>.
- [8] BRODSKY, S. J. Light front methods and nonperturbative QCD. In: *Workshop on Hadron Structure from Lattice QCD Upton, New York, March 18-22, 2002*. [s.n.], 2002. Disponível em: <<http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=SLAC-PUB-9187>>.
- [9] FRASCA, M. Differential Dyson-Schwinger equations for quantum chromodynamics. 2019.
- [10] FODOR, Z.; HOELBLING, C. Light Hadron Masses from Lattice QCD. *Rev. Mod. Phys.*, v. 84, p. 449, 2012.
- [11] The H1 Collaboration. Measurement of the inclusive  $ep$  scattering cross section at low  $q^2$  and  $x$  at hera. *The European Physical Journal C*, v. 63, n. 4, p. 625, Sep 2009. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1128-6>>.

- [12] ROJO, J. Parton Distributions in the Higgs Boson Era. In: *Proceedings, 21st International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Subjects (DIS 2013): Marseilles, France, April 22-26, 2013*. [S.l.: s.n.], 2013.
- [13] D'ENTERRIA, D. et al. Estimates of hadron azimuthal anisotropy from multiparton interactions in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 14$  TeV. *Eur. Phys. J.*, C66, p. 173–185, 2010.
- [14] AIDALA, C. A. et al. The spin structure of the nucleon. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 85, p. 655–691, Apr 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.85.655>>.
- [15] SHIFMAN, M. Understanding Confinement in QCD: Elements of a Big Picture. *Int. J. Mod. Phys.*, A25, p. 4015–4031, 2010. [57(2010)].
- [16] GRIBOV, L.; LEVIN, E.; RYSKIN, M. Semihard processes in QCD. *Physics Reports*, v. 100, n. 1, p. 1 – 150, 1983. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157383900224>>.
- [17] MUELLER, A.; QIU, J. Gluon recombination and shadowing at small values of  $x$ . *Nuclear Physics B*, v. 268, n. 2, p. 427 – 452, 1986. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386901641>>.
- [18] QIU, J.-w. Nuclear Shadowing at Small Values of  $x$ . *Nucl. Phys.*, B291, p. 746–764, 1987.
- [19] DUCATI, M. G.; GONÇALVES, V. The description of F2 at very high parton densities. *Physics Letters B*, v. 502, n. 1, p. 92 – 98, 2001. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301001873>>.
- [20] DUCATI, M. G.; GONÇALVES, V. P. Analysis of low- $x$  gluon density from the F2 scaling violations. *Physics Letters B*, v. 390, n. 1, p. 401 – 404, 1997. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269396013718>>.
- [21] HATTA, Y.; XIAO, B.-W.; YUAN, F. Probing the small- $x$  gluon tomography in correlated hard diffractive dijet production in deep inelastic scattering. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 202301, May 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.202301>>.
- [22] ALTINOLUK, T. et al. Diffractive dijet production in deep inelastic scattering and photon-hadron collisions in the color glass condensate. *Physics Letters B*, v. 758, p. 373 – 383, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316301794>>.
- [23] GIULI, F. The photon PDF determination within the xFitter framework. *PoS, EPS-HEP2017*, p. 375, 2017.
- [24] ABDOLMALEKI, H. et al. Impact of low- $x$  resummation on QCD analysis of HERA data. *Eur. Phys. J.*, C78, n. 8, p. 621, 2018.

- [25] GIULI, F. The importance of  $\ln(1/x)$  resummation: a new QCD analysis of HERA data. In: *53rd Rencontres de Moriond on QCD and High Energy Interactions (Moriond QCD 2018) La Thuile, Italy, March 17-24, 2018*. [S.l.: s.n.], 2018.
- [26] TEXAMPLE: Standard model of physics. 2012. <<http://www.texample.net/tikz/examples/model-physics/>>. Acessado em: 20/01/2019.
- [27] BINOSI, D.; THEUßL, L. JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams. *Computer Physics Communications*, v. 161, n. 1, p. 76 – 86, 2004. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465504002115>>.
- [28] RAMOND, P. *Field Theory*. Avalon Publishing, 1997. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813346564. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Ctr9K61fY4kC>>.
- [29] DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. World Scientific, 2006. (World Scientific Lecture Notes). ISBN 9789812568489. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4tWWQgAACA AJ>>.
- [30] FIELD, R. D. Applications of Perturbative QCD. *Front. Phys.*, v. 77, p. 1–366, 1989.
- [31] COLLINS, J.; COLLINS, J. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*. Cambridge University Press, 1985. (AN INTRODUCTION TO RENORMALIZATION, THE RENORMALIZATION GROUP AND THE OPERATOR-PRODUCT EXPANSION). ISBN 9780521311779. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=60wX3xfdGRAC>>.
- [32] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>.
- [33] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>.
- [34] HERZOG, F. et al. The five-loop beta function of Yang-Mills theory with fermions. *JHEP*, v. 02, p. 090, 2017.
- [35] LUTHE, T. et al. The five-loop Beta function for a general gauge group and anomalous dimensions beyond Feynman gauge. *JHEP*, v. 10, p. 166, 2017.
- [36] FEYNMAN, R. P. Book. *Photon-hadron interactions*. [S.l.]: W. A. Benjamin Reading, Mass, 1972. xvi, 282 p. p. ISBN 0805325107 0805325115.
- [37] KOVCHEGOV, Y. V.; LEVIN, E. *Quantum chromodynamics at high energy*. Cambridge University Press, 2012. v. 33. ISBN

9780521112574, 9780521112574, 9781139557689. Disponível em:

<<http://www.cambridge.org/de/knowledge/isbn/item6803159>>.

[38] PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Westview press, 1995.

[39] MUTA, T. *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. [S.l.]: World Scientific, 1998.

[40] KLEIN, S. Deeply Inelastic Scattering. In: \_\_\_\_\_. *Charm Production in Deep Inelastic Scattering: Mellin Moments of Heavy Flavor Contributions to  $F_2(x, Q^2)$  at NNLO*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 17–46. ISBN 978-3-642-23286-2. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-23286-2\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23286-2_2)>.

[41] TUNG, W. Bjorken scaling. *Scholarpedia*, v. 4, n. 3, p. 7412, 2009. Revision #137304.

[42] BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic electron-proton and  $\gamma$ -proton scattering and the structure of the nucleon. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 185, p. 1975–1982, Sep 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.185.1975>>.

[43] RIORDAN, E. M. The Discovery of quarks. *Science*, v. 256, p. 1287–1293, 1992.

[44] PARISI, G.; PETRONZIO, R. On the breaking of Bjorken scaling. *Physics Letters B*, v. 62, n. 3, p. 331 – 334, 1976. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269376900885>>.

[45] CALLAN, C. G.; GROSS, D. J. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 22, p. 156–159, Jan 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.156>>.

[46] COLLINS, J. C.; SOPER, D. E.; STERMAN, G. "factorization of hard processes in qcd". In: \_\_\_\_\_. *Perturbative QCD*. WORLD SCIENTIFIC, 2014. p. 1–91. Disponível em: <[https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814503266\\_0001](https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814503266_0001)>.

[47] LEIBBRANDT, G. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 47, p. 849–876, Oct 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.47.849>>.

[48] NARISON, S. Techniques of dimensional regularization and the two-point functions of QCD and QED. *Physics Reports*, v. 84, n. 4, p. 263 – 399, 1982. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157382900230>>.

[49] PAULI, W.; VILLARS, F. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical

- Society, v. 21, p. 434–444, Jul 1949. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.434>>.
- [50] TARASOV, V. E. Fractional Derivative Regularization in QFT. *Adv. High Energy Phys.*, v. 2018, p. 7612490, 2018.
- [51] POTTER, B. Calculational Techniques in Perturbative QCD: The Drell-Yan Process. 1997.
- [52] ALTARELLI, G.; ELLIS, R.; MARTINELLI, G. Large perturbative corrections to the Drell-Yan process in QCD. *Nuclear Physics B*, v. 157, n. 3, p. 461 – 497, 1979. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379901160>>.
- [53] CHYLA, J. Renormalization and factorization scale analysis of  $b\bar{b}$  production in  $p\bar{p}$  collisions. *JHEP*, v. 03, p. 042, 2003.
- [54] OLIVEIRA, E. G. de; MARTIN, A. D.; RYSKIN, M. G. Scale dependence of open  $c\bar{c}$  and  $b\bar{b}$  production in the low x region. *European physical journal C*, Springer, v. 77, n. 3, p. 182, March 2017. Disponível em: <<http://dro.dur.ac.uk/21917/>>.
- [55] HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys.*, B44, p. 189–213, 1972.
- [56] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J.; WEBBER, B. R. QCD and collider physics. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.*, v. 8, p. 1–435, 1996.
- [57] HOOFT, G. 't. Dimensional regularization and the renormalization group. *Nuclear Physics B*, v. 61, p. 455 – 468, 1973. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321373903763>>.
- [58] WEINBERG, S. New approach to the renormalization group. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 8, p. 3497–3509, Nov 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.3497>>.
- [59] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic e p scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 15, p. 438–450, 1972. [*Yad. Fiz.*15,781(1972)].
- [60] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. *Nuclear Physics B*, v. 126, n. 2, p. 298 – 318, 1977. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377903844>>.
- [61] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and  $e^+e^-$  Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, v. 46, p. 641–653, 1977. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*73,1216(1977)].
- [62] OLIVEIRA, E. G. de et al. Treatment of heavy quarks in QCD. *The European Physical Journal C*, v. 73, n. 10, p. 2616, Oct 2013. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2616-2>>.

- [63] MOCH, S.; VERMASEREN, J.; VOGT, A. The QCD Splitting Functions at Three Loops: Methods and Results. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 135, p. 137 – 146, 2004. ISSN 0920-5632. Loops and Legs in Quantum Field Theory. Proceedings of the 7th DESY Workshop on Elementary Particle Theory. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563204003603>>.
- [64] MOCH, S.; VERMASEREN, J.; VOGT, A. The three-loop splitting functions in QCD: The helicity-dependent case. *Nuclear Physics B*, v. 889, p. 351 – 400, 2014. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321314003228>>.
- [65] GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum chromodynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- [66] WILSON, K. G. Non-lagrangian models of current algebra. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 179, p. 1499–1512, Mar 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.179.1499>>.
- [67] JALILIAN-MARIAN, J.; WANG, X.-N. Small  $x$  gluons in nuclei and hadrons. *Phys. Rev.*, D60, p. 054016, 1999.
- [68] LEVIN, E.; POTASHNIKOVA, I. BFKL equation with running QCD coupling and HERA data. *JHEP*, v. 02, p. 089, 2014.
- [69] SALAM, G. P. An Introduction to leading and next-to-leading BFKL. *Acta Phys. Polon.*, B30, p. 3679–3705, 1999.
- [70] LEVIN, E.; LIPATOV, L.; SIDDIKOV, M. BFKL pomeron with massive gluons and running coupling. *Phys. Rev.*, D94, n. 9, p. 096004, 2016.
- [71] FROISSART, M. Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 123, p. 1053–1057, Aug 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.123.1053>>.
- [72] KOVCHEGOV, Y. V. Small- $x$   $F_2$  structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 60, p. 034008, Jun 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.034008>>.
- [73] KOVCHEGOV, Y. V. Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 61, p. 074018, Mar 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.074018>>.
- [74] GELIS, F. Color Glass Condensate and Glasma. *Int. J. Mod. Phys.*, A28, p. 1330001, 2013.
- [75] ANDREEV, V. et al. Determination of electroweak parameters in polarised deep-inelastic scattering at HERA. *Eur. Phys. J.*, C78, n. 9, p. 777, 2018.

- [76] SINERVO, P. Definition and Treatment of Systematic Uncertainties in High Energy Physics and Astrophysics. *eConf*, C030908, p. TUAT004, 2003. [,122(2003)].
- [77] BARLOW, R. Systematic errors: Facts and fictions. In: *Advanced Statistical Techniques in Particle Physics. Proceedings, Conference, Durham, UK, March 18-22, 2002*. [s.n.], 2002. p. 134–144. Disponível em: <<http://www.ippp.dur.ac.uk/Workshops/02/statistics/proceedings//barlow.pdf>>.
- [78] AARON, F. D. et al. Combined Measurement and QCD Analysis of the Inclusive  $e^+p$  Scattering Cross Sections at HERA. *JHEP*, v. 01, p. 109, 2010.
- [79] COOPER-SARKAR, A. Proton Structure from HERA to LHC. In: *Proceedings, 40th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2010): Antwerp, Belgium, September 21-25, 2010*. [S.l.: s.n.], 2010.
- [80] ABRAMOWICZ, H. et al. Combination of measurements of inclusive deep inelastic  $e^\pm p$  scattering cross sections and QCD analysis of HERA data. *The European Physical Journal C*, v. 75, n. 12, p. 580, Dec 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3710-4>>.
- [81] MARTIN, A. D. et al. Parton distributions for the LHC. *The European Physical Journal C*, v. 63, n. 2, p. 189–285, Sep 2009. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>>.
- [82] DULAT, S. et al. New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics. *Phys. Rev.*, D93, n. 3, p. 033006, 2016.
- [83] HARLAND-LANG, L. A. et al. Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs. *Eur. Phys. J.*, C75, n. 5, p. 204, 2015.
- [84] AIVAZIS, M. A. G.; OLNESS, F. I.; TUNG, W.-K. Leptoproduction of heavy quarks. 1. General formalism and kinematics of charged current and neutral current production processes. *Phys. Rev.*, D50, p. 3085–3101, 1994.
- [85] THORNE, R. S.; ROBERTS, R. G. Ordered analysis of heavy flavor production in deep-inelastic scattering. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 57, p. 6871–6898, Jun 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.6871>>.
- [86] THORNE, R. S. A Variable-flavor number scheme for NNLO. *Phys. Rev.*, D73, p. 054019, 2006.
- [87] THORNE, R. S. Effect of changes of variable flavor number scheme on parton distribution functions and predicted cross sections. *Phys. Rev.*, D86, p. 074017, 2012.
- [88] RAICEVIC, N. Structure Functions and Extraction of PDFs at HERA. In: *Proceedings, 41st Rencontres de Moriond, 2006 QCD and High Energy Hadronic Interactions: La Thuile, Val d'Aoste, Italy, Mar 18-25, 2006*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 181–184.

- [89] PUMPLIN, J. et al. New generation of parton distributions with uncertainties from global qcd analysis. *Journal of High Energy Physics*, v. 2002, n. 07, p. 012, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1126-6708/2002/i=07/a=012>>.
- [90] STUMP, D. et al. Uncertainties of predictions from parton distribution functions. i. the lagrange multiplier method. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 014012, Dec 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.014012>>.
- [91] PUMPLIN, J. et al. Uncertainties of predictions from parton distribution functions. ii. the hessian method. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 014013, Dec 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.014013>>.
- [92] BOTJE, M. Error estimates on parton density distributions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 28, n. 5, p. 779, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0954-3899/28/i=5/a=305>>.
- [93] D'AGOSTINI, G. On the use of the covariance matrix to fit correlated data. *Nucl. Instrum. Meth.*, A346, p. 306–311, 1994.
- [94] TAKEUCHI, T. The Status of the determination of  $\alpha(m_Z)$  and  $\alpha_s(m_Z)$ . *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, v. 123, p. 247–264, 1996.
- [95] AARON, F. D. et al. Inclusive Deep Inelastic Scattering at High  $Q^2$  with Longitudinally Polarised Lepton Beams at HERA. *JHEP*, v. 09, p. 061, 2012.
- [96] CHEKANOV, S. et al. Zeus next-to-leading-order qcd analysis of data on deep inelastic scattering. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 67, p. 012007, Jan 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.012007>>.
- [97] H1 and ZEUS collaborations; AARON, F. D. et al. Combined measurement and QCD analysis of the inclusive  $e\pm p$  scattering cross sections at HERA. *Journal of High Energy Physics*, v. 2010, n. 1, p. 109, Jan 2010. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2010\)109](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2010)109)>.
- [98] FORTE, S.; WATT, G. Progress in the Determination of the Partonic Structure of the Proton. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, v. 63, p. 291–328, 2013.
- [99] VOGT, R. Physics of the nucleon sea quark distributions. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 45, p. S105–S169, 2000.
- [100] WHALLEY, M. *LHAPDF*. [S.l.], 2009. Disponível em: <<http://projects.hepforge.org/lhapdf/>>.
- [101] BUCKLEY, A. et al. LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era. *Eur. Phys. J.*, C75, p. 132, 2015.
- [102] BERTONE, V. et al. xFitter 2.0.0: An Open Source QCD Fit Framework. *PoS, DIS2017*, p. 203, 2018.



- [103] ALEKHIN, S. et al. HERAFitter. *Eur. Phys. J.*, C75, n. 7, p. 304, 2015.
- [104] BOTJE, M. QCDNUM: Fast QCD Evolution and Convolution. *Comput. Phys. Commun.*, v. 182, p. 490–532, 2011.
- [105] BERTONE, V.; CARRAZZA, S.; ROJO, J. APFEL: A PDF Evolution Library with QED corrections. *Comput. Phys. Commun.*, v. 185, p. 1647–1668, 2014.
- [106] BRITZGER, D. et al. New features in version 2 of the fastNLO project. In: *Proceedings, 20th International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Subjects (DIS 2012): Bonn, Germany, March 26-30, 2012*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 217–221.
- [107] BRITZGER, D. et al. Recent Developments of the fastNLO Toolkit. *PoS, DIS2015*, p. 055, 2015.
- [108] WATT, G.; MARTIN, A. D.; RYSKIN, M. G. Effect of absorptive corrections on inclusive parton distributions. *Phys. Lett.*, B627, p. 97–104, 2005.
- [109] ABRAMOVSKY, V. A.; GRIBOV, V. N.; KANCHELI, O. V. Character of Inclusive Spectra and Fluctuations Produced in Inelastic Processes by Multi - Pomeron Exchange. *Yad. Fiz.*, v. 18, p. 595–616, 1973. [Sov. J. Nucl. Phys.18,308(1974)].
- [110] BARTELS, J.; RYSKIN, M. G. The Space-time picture of the Wee partons and the AGK cutting rules in perturbative QCD. *Z. Phys.*, C76, p. 241–255, 1997.
- [111] MARTIN, A. D. et al. Diffractive Physics. *PoS, QNP2012*, p. 017, 2012.
- [112] CHEW, G. F.; FRAUTSCHI, S. C. Regge trajectories and the principle of maximum strength for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 8, p. 41–44, Jan 1962. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.8.41>>.
- [113] FRAUTSCHI, S.; RESEARCH, T. I. of F. *Regge poles and S-matrix theory*. W.A. Benjamin, 1963. (Frontiers in physics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2eBEEAAAIAAJ>>.
- [114] DONNACHIE, A.; LANDSHOFF, P. V. Total cross-sections. *Phys. Lett.*, B296, p. 227–232, 1992.
- [115] MARTIN, A. D.; RYSKIN, M. G.; WATT, G. Diffractive parton distributions from perturbative QCD. *Eur. Phys. J.*, C44, p. 69–85, 2005.
- [116] LOW, F. E. Model of the bare pomeron. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 12, p. 163–173, Jul 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.163>>.
- [117] NUSSINOV, S. Colored-quark version of some hadronic puzzles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 34, p. 1286–1289, May 1975. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1286>>.

[118] COLLINS, J. C. Proof of factorization for diffractive hard scattering. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 57, p. 3051–3056, Mar 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.3051>>.

[119] MARTIN, A. D.; RYSKIN, M. G.; WATT, G. Diffractive parton distributions from H1 data. *Phys. Lett.*, B644, p. 131–135, 2007.

[120] AKTAS, A. et al. Measurement and QCD analysis of the diffractive deep-inelastic scattering cross-section at HERA. *Eur. Phys. J.*, C48, p. 715–748, 2006.

[121] AKTAS, A. et al. Diffractive deep-inelastic scattering with a leading proton at HERA. *Eur. Phys. J.*, C48, p. 749–766, 2006.

[122] ON the phase structure of vector-like gauge theories with massless fermions. *Nuclear Physics B*, v. 196, n. 2, p. 189 – 204, 1982. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382900359>>.

[123] MATTINGLY, A. C.; STEVENSON, P. M. Qcd perturbation theory at low energies. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 69, p. 1320–1323, Aug 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1320>>.

[124] MATTINGLY, A. C.; STEVENSON, P. M. Optimization of  $r_e^+ e^-$  and “freezing” of the qcd couplant at low energies. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 49, p. 437–450, Jan 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.49.437>>.

[125] STEVENSON, P. The  $16\frac{1}{2} - N_f$  expansion and the infrared fixed point in perturbative QCD. *Physics Letters B*, v. 331, n. 1, p. 187 – 192, 1994. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394909628>>.

[126] SIMONOV, Yu. A. Novel solutions of RG equations for  $\alpha_s$  and  $\beta(\alpha_s)$  in the large  $N_c$  limit. *Phys. Atom. Nucl.*, v. 66, p. 764–768, 2003. [Yad. Fiz.66,796(2003)].

[127] SHIRKOV, D. V.; SOLOVTSOV, I. L. Analytic model for the qcd running coupling with universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  value. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 1209–1212, Aug 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1209>>.

[128] STEFANIS, N. G. Taming Landau singularities in QCD perturbation theory: The Analytic approach. *Phys. Part. Nucl.*, v. 44, p. 494–509, 2013. [Phys. Part. Nucl.44,494(2013)].

[129] BALI, G. S. et al. Static potentials and glueball masses from QCD simulations with Wilson sea quarks. *Phys. Rev.*, D62, p. 054503, 2000.

[130] BADALIAN, A. M.; KUZMENKO, D. S. Freezing of QCD coupling  $\alpha(s)$  affects the short distance static potential. *Phys. Rev.*, D65, p. 016004, 2001.

- [131] AGUILAR, A. C.; MIHARA, A.; NATALE, A. A. Freezing of the QCD coupling constant and solutions of Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.*, D65, p. 054011, 2002.
- [132] PARISI, G.; PETRONZIO, R. On low energy tests of QCD. *Physics Letters B*, v. 94, n. 1, p. 51 – 53, 1980. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380908229>>.
- [133] CORNWALL, J. M. Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 26, p. 1453–1478, Sep 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.26.1453>>.
- [134] SHIRKOV, D. V. Massive' Perturbative QCD, regular in the IR limit. *Phys. Part. Nucl. Lett.*, v. 10, p. 186–192, 2013.
- [135] KHANDRAMAI, V. L.; TERYAEV, O. V.; GABDRAKHMANOV, I. R. Infrared modified QCD couplings and Bjorken sum rule. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 678, n. 1, p. 012018, 2016.
- [136] PELICER, M. R. et al. Absorptive effects and power corrections in low x DGLAP evolution. *The European Physical Journal C*, v. 79, n. 1, p. 9, Jan 2019. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6515-4>>.



## A. Prescrição mais

A prescrição mais é um método para regularizar divergências macias presentes em teorias quânticas de campos não-abelianas e pode ser formulada com auxílio da regularização dimensional para divergências colineares, como será feito a seguir.

Na CDQ os observáveis são expressos a partir de convoluções, portanto as PDFs e as funções de estrutura partônicas, estudadas na Seção 2.5, são distribuições, só possuindo significância física quando integradas em conjunto. A expansão performada na Eq. (2.57) corresponde a um termo pertencente à função de estrutura partônica e, portanto, deve estar acompanhado de uma integral da forma

$$\int_0^1 z^\epsilon (1-z)^{-1-\epsilon} f(z), \quad (\text{A.1})$$

onde  $f(z)$  é uma função teste bem comportada. Note que, se a função teste corresponde à identidade, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  a integral pode ser expressa como

$$\int_0^1 z^\epsilon (1-z)^{-1-\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} - \epsilon \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{A.2})$$

permitindo reescrever a integral para uma função teste qualquer como

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} f(z) &= \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} [f(z) - f(1)] + \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} f(1) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} f(1) - \epsilon \frac{\pi^2}{6} f(1) + \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} [f(z) - f(1)], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de modo que o pólo em  $z \rightarrow 1$  é isolado e refletido no termo  $1/\epsilon$ . Além disso é possível utilizar a expansão da Eq. (2.56), que pode ser demonstrada

facilmente notando que

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\epsilon = e^{\epsilon \ln \frac{z}{1-z}} \approx 1 + \epsilon \ln \frac{z}{1-z} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{A.4})$$

para expandir o segundo termo da Eq. (A.3), tal que

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} f(z) &= -\frac{1}{\epsilon} f(1) - \epsilon \frac{\pi^2}{6} f(1) + \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)} [f(z) - f(1)], \\ &+ \epsilon \int_0^1 dz \frac{1}{1-z} [\ln z - \ln(1-z)] [f(z) - f(1)]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Pela definição da prescrição mais na Eq. (2.58), é trivial notar que vale a relação

$$\int_0^1 dz f_+(z) g(z) = \int_0^1 dz f(z) [g(z) - g(1)], \quad (\text{A.6})$$

possibilitando reescrever a Eq. (A.5) de forma compacta como

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} f(z) &= \int_0^1 dz f(z) \left\{ -\left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \frac{\pi^2}{6}\right) \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon \left[ \left(\frac{\ln(1-z)}{1-z}\right)_+ - \left(\frac{\ln z}{1-z}\right)_+ \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Porém, notando que

$$\int_0^1 \ln z / (1-z) f(1) = \frac{\pi^2}{6} f(1), \quad (\text{A.8})$$

este termo cancela-se com aquele de ordem  $\epsilon$  multiplicado pela delta de Dirac,

de modo que o termo proporcional à  $\ln z/(1-z)$  não possui a prescrição mais:

$$\int_0^1 dz \frac{z^\epsilon}{(1-z)^{1+\epsilon}} f(z) = \int_0^1 dz f(z) \left\{ -\frac{1}{\epsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} - \epsilon \left[ \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - \frac{\ln z}{1-z} \right] \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A Eq. (A.9) justifica a identidade utilizada na Eq. (2.57), e, claramente, regulariza a divergência macia ao isolar o pólo  $1/\epsilon$ . É interessante ainda notar que, na CDQ, a maior parte das convoluções são dadas por integrais no intervalo  $(x,1)$ , de modo que o emprego da prescrição mais se dá pela expressão

$$\int_x^1 dz f_+(z) g(z) = \int_x^1 dz f(z) [g(z) - g(1)] + \int_0^x g(1) f(z), \quad (\text{A.10})$$

onde a integral no intervalo  $(0,x)$  costuma possuir solução analítica exata. Conclui-se que a prescrição mais utilizada durante a dissertação é justificada e serve como reguladora de divergências macias, sendo uma poderosa técnica na CDQ.