

Ondas gravitacionais em um universo homogêneo e isotrópico

Gravitational waves in a homogeneous and isotropic universe

L.S.O. Viana^{*1}, S.V.B. Gonçalves¹

¹Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Vitória, ES, Brasil.

Recebido em 03 de abril de 2025. Revisado em 10 de junho de 2025. Aceito em 16 de junho de 2025.

Neste trabalho, apresentamos o comportamento e a evolução das ondas gravitacionais em um cenário cuja estrutura cosmológica é representada pelo modelo homogêneo e isotrópico, através da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Este modelo satisfaz o princípio cosmológico, também conhecido como princípio de Copérnico, segundo o qual nós não ocupamos uma posição privilegiada no Universo. Tal cenário é bem justificado pelos dados atuais oriundos das observações astrofísicas e cosmológicas em grandes escalas, principalmente aquelas relacionadas com a radiação cósmica de fundo. Fizemos uma breve introdução a essa conhecida métrica e às equações de Friedmann, e aplicamos as técnicas de obtenção de ondas gravitacionais neste Universo utilizando o método perturbativo da relatividade geral. O foco deste trabalho está na demonstração didática da acessibilidade dos calibres síncrono, transverso e sem traço – adequados para a descrição dessas perturbações tensoriais.

Palavras-chave: Ondas gravitacionais, equações de Einstein, modelos homogêneos e isotrópicos, problema de calibre.

In this work, we present the behavior and evolution of gravitational waves in a cosmological scenario described by the homogeneous and isotropic Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric. This model satisfies the cosmological principle, also known as the Copernican principle, which states that we do not occupy a privileged position in the universe. This framework is well supported by current astrophysical and cosmological observations, particularly those related to the cosmic microwave background. We provide a brief introduction to this well-known metric and the Friedmann equations, and we apply perturbative techniques from general relativity to obtain gravitational waves in this universe. The focus of this work is to didactically demonstrate the accessibility of the synchronous, transverse, and traceless gauges, which are suitable for describing these tensor perturbations.

Keywords: Gravitational waves, Einstein's equations, homogeneous and isotropic models, gauge problem.

1. Introdução

Ondas gravitacionais são distorções ou perturbações do espaço-tempo que se propagam como ondas e são causadas por matéria ou energia em alta aceleração. Elas foram previstas originalmente por Albert Einstein em 1916 como uma consequência da linearização das equações de campo da sua Teoria da Relatividade Geral, publicada em 1915 [1, 2]. De acordo com essa teoria, objetos massivos causam uma distorção no espaço-tempo, que percebemos como gravidade. Quando esses objetos aceleram, como quando dois buracos negros orbitam um ao outro e eventualmente se fundem, eles podem criar ondas que se propagam para fora do sistema na velocidade da luz.

Essas ondas são incrivelmente fracas e difíceis de se detectar, possuindo uma amplitude típica da ordem de 10^{-21} [3], podendo ser ainda menor dependendo

da fonte e da distância ao observador. Elas esticam e comprimem o espaço à medida que se propagam, mas apenas em quantidades ínfimas. Além disso, os detectores terrestres utilizados para realizar as medidas das ondas gravitacionais são extremamente sensíveis, e podem ser afetados por uma variedade de ruídos como vibrações sísmicas, flutuações térmicas e até atividades humanas. Foi somente em 2015 que a primeira observação direta de ondas gravitacionais foi realizada pela colaboração LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) [3]. Essa detecção confirmou a fusão de dois buracos negros, fornecendo uma nova maneira de observar e entender o Universo.

Quando as ondas gravitacionais possuem um comprimento de onda comparável à escala cosmológica, dizemos que são ondas gravitacionais de origem cosmológica ou primordiais, as quais estudaremos neste trabalho. Assim como o Fundo Cósmico de Micro-ondas (CMB), ondas gravitacionais desse tipo apresentam um espectro observável por todo o cosmo, não sendo provenientes de corpos celestes específicos, e devem ter assinaturas especiais na

*Endereço de correspondência: luarsamir@gmail.com

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

polarização das anisotropias da CMB. Ademais, como essa radiação gravitacional já se desacoplou da matéria no Universo primitivo profundo, dada a sua baixa interação com a matéria, elas podem ser uma evidência direta da fase primordial do cosmo (a Ref. [4], por exemplo, contém uma revisão abrangente sobre as ondas gravitacionais primordiais, incluindo a sua relação com a CMB), especialmente da era da inflação: um período de expansão exponencial do Universo que ocorreu logo após o *Big Bang* e durou apenas cerca de 10^{-36} s [5, p. 35].

A faixa de frequência do espectro das ondas gravitacionais de interesse observacional se estende de 10^{-18} Hz a 10^{10} Hz [6]. Muito trabalho tem sido feito com o objetivo de identificar assinaturas específicas de modelos cosmológicos nos espectros de ondas gravitacionais, com relação às teorias modernas da gravitação. Vários projetos globais são dedicados à detecção de ondas gravitacionais e ao estudo de suas fontes. Aqui estão alguns dos principais, já em operação ou planejados.

1. LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) – localizado nos Estados Unidos, com detectores em Hanford, Washington, e Livingston, Louisiana. O LIGO fez a primeira detecção direta de ondas gravitacionais em 2015. Ele usa interferometria a laser para medir pequenas mudanças na distância causadas pela passagem de ondas gravitacionais [7].
2. Virgo (referente ao aglomerado de galáxias Virgo) – localizado na Itália, perto de Pisa. É um detector de ondas gravitacionais europeu que trabalha em colaboração com o LIGO. Ele também usa interferometria a laser e contribuiu para várias detecções de ondas gravitacionais [8].
3. KAGRA (*Kamioka Gravitational Wave Detector*) – localizado no Japão, na mina Kamioka. É o primeiro detector de ondas gravitacionais construído no subsolo – cuja razão é reduzir o ruído sísmico. Ele usa espelhos resfriados criogenicamente para reduzir o ruído térmico [9].
4. LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) – missão espacial, uma colaboração entre a NASA e a ESA (Agência Espacial Europeia). Programada para ser lançada na década de 2030, a LISA consistirá em três satélites formando um interferômetro triangular no espaço. Ela detectará ondas gravitacionais de buracos negros massivos e outras fontes astrofísicas [10].
5. *Pulsar Timing Arrays* – formadas pelo NANOGrav (*North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves*), EPTA (*European Pulsar Timing Array*), PPTA (*Parkes Pulsar Timing Array*). Esses projetos usam medições precisas de sinais de pulsar para detectar ondas gravitacionais de baixa frequência, monitorando pequenas variações nos tempos de chegada dos pulsos devido às distorções do espaço-tempo causadas pelas ondas gravitacionais [11].
6. *Einstein Telescope* – observatório subterrâneo europeu planejado. É um detector de ondas gravitacionais de terceira geração proposto com sensibilidade aprimorada para reduzir ruídos sísmicos e térmicos. Ele visa observar uma gama mais ampla de fontes de ondas gravitacionais e fornecer informações mais detalhadas [12].
7. *Cosmic Explorer* – proposto para os Estados Unidos. Este é um observatório de ondas gravitacionais terrestres de próxima geração sugerido que será dez vezes mais sensível que o LIGO, capaz de detectar ondas gravitacionais mais distantes e mais fracas [13].
8. Rede – Junto com o LIGO, o KAGRA, o Virgo e todos os outros projetos citados, esse projeto forma uma rede global de observatórios de ondas gravitacionais. Esta rede aumenta a capacidade de detectar e analisar ondas gravitacionais de várias partes do Universo [14].

Esses projetos representam um esforço global para avançar nossa compreensão das ondas gravitacionais e suas fontes, contribuindo para o nosso conhecimento do Universo.

A radiação gravitacional de origem primordial – foco deste artigo – é ainda mais difícil de detectar do que aquela de origem astrofísica. Isto porque essas ondas foram “esticadas” e “diluídas” à medida que o Universo se expandiu ao longo de bilhões de anos, tornando a sua frequência extremamente baixa. Ainda assim, a sua descoberta forneceria *insights* significativos sobre as condições do Universo primitivo e a natureza da inflação. Como mencionado, os cientistas estão tentando detectar essas ondas gravitacionais primordiais por meio de observações do Fundo Cósmico de Microondas (CMB), que é o brilho residual do *Big Bang*. Pequenas variações na polarização do CMB, conhecidas como “modos B”, podem fornecer evidências indiretas dessas ondas primordiais. Experimentos como o projeto BICEP (*Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*) são projetados especificamente para procurar por essa assinatura [15].

O objetivo deste artigo, portanto, é apresentar uma introdução à descrição matemática das ondas gravitacionais no contexto de um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico, principalmente para alunos de graduação e pós-graduação com interesse no tema e conhecimento básico de cálculo tensorial, relatividade restrita e geral. Para tanto, utilizaremos o formalismo da teoria das perturbações lineares na teoria da relatividade geral, cuja base matemática está presente, por exemplo, nas Refs. [16, 17]. Daremos especial ênfase à questão da liberdade de calibre associada a essa teoria, detalhando os passos necessários para demonstrar a acessibilidade dos calibres pertinentes – algo não muito comum na literatura básica. Além disso, encontraremos soluções analíticas para as ondas gravitacionais em vários modelos

cosmológicos, os quais representarão diferentes eras do cosmo.

A organização das seções deste trabalho será a seguinte. Na seção 2 apresentaremos o modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e as equações de Friedmann. Na seção 3 introduziremos a noção geral da teoria das perturbações cosmológicas, a definição de ondas gravitacionais nesse contexto, sua respectiva equação dinâmica, o problema da fixação dos calibres e a equação de onda resultante. Na seção 4 resolveremos as equações de onda para vários casos particulares do modelo FLRW, que são: o modelo com fluido de radiação; modelo com fluido de matéria não relativística; modelo de De Sitter e, por fim, o modelo com fluido de matéria não relativística e constante cosmológica, que é uma boa aproximação para o Universo atual. Na seção 5 apresentamos nossas considerações finais sobre o estudo realizado, assim como algumas perspectivas de trabalhos futuros.

2. O Modelo Cosmológico de um Universo Homogêneo e Isotrópico

A hipótese do princípio cosmológico, também conhecido como princípio de Copérnico, pode ser decomposta em duas afirmações distintas referentes, respectivamente, à isotropia e à homogeneidade do Universo em largas escalas, a saber:

1. a dinâmica do cosmo é independente da direção, isto é, o Universo se expande de modo uniforme em todas as direções;
2. todas as posições do Universo são equivalentes, ou seja, a geometria do espaço-tempo não muda de ponto a ponto.

A distância infinitesimal entre dois pontos, que se relaciona com a métrica do modelo estudado, $g_{\mu\nu}$, resultante destas considerações, foi obtida de maneira independente pelos cientistas Alexander Friedmann e Georges Lemaître, e posteriormente por Howard P. Robertson e Arthur G. Walker, entre 1920 e 1930 [18]. O acrônimo FLRW surge das iniciais dos sobrenomes desses cientistas pioneiros no estudo realizado. Esta métrica é tal que o intervalo espaço-temporal invariante, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , escreve-se como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1)$$

onde $\kappa = (-1, 0, 1)$ é a curvatura do Universo e está associada a um Universo hiperbólico, plano e esférico, respectivamente, que são as três únicas configurações geométricas do espaço-tempo com curvatura constante e que só essas três configurações são compatíveis com o princípio cosmológico; $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é a variação infinitesimal referente à parte angular da métrica; t é o tempo cósmico, medido no referencial que acompanha a

expansão do Universo (referencial comóvel); e $a(t)$ é o fator de escala – função de t que quantifica a expansão do Universo e $c = 1$ no sistema de unidades naturais utilizado aqui.

Como as observações atuais [19] indicam que o Universo em larga escala é aproximadamente plano, consideraremos doravante que $\kappa = 0$. A Eq. (1), portanto, reduz-se a uma simples generalização da métrica de Minkowski, onde a seção espacial é “distendida” pelo fator $a(t)$, e pode ser reescrita, agora em coordenadas cartesianas, como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2)$$

As componentes não nulas da métrica, $g_{\mu\nu}$, por sua vez, de acordo com a Eq. (2), ficam

$$g_{00} = -1, \quad (3)$$

$$g_{ij} = a^2(t) \delta_{ij}, \quad (4)$$

com δ_{ij} sendo uma delta de Kronecker referente a um sistema de coordenadas cartesianas.

Depois de, em linhas gerais, descrever a geometria de um Universo homogêneo e isotrópico, vamos investigar o conteúdo material que o compõe. Vamos supor que esse conteúdo possa ser modelado por um fluido e que possamos utilizar o nosso conhecimento de hidrodinâmica dos fluidos para descrevê-lo. Isto nos levará ao cálculo do tensor energia-momento associado a esse fluido, que, por sua vez, nos servirá, em seguida, para calcular as equações de movimento a partir da relatividade geral (RG).

Para tanto, precisamos de um modelo de fluido cósmico de matéria-energia que seja consistente com o princípio cosmológico. A homogeneidade do fluido é verificada se a sua densidade de energia, ρ , só depender de t , enquanto que a sua isotropia é assegurada ao considerar que as suas tensões, isto é, as forças internas do fluido, são completamente descritas em termos da pressão, p . Este fluido é conhecido como fluido perfeito, e o seu tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, associado, escreve-se da seguinte maneira

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (5)$$

onde U^μ é a quadrivelocidade do fluido. Se escolhermos um fluido que está em repouso em relação ao referencial já determinado pela forma da métrica na Eq. (2), ou seja, um fluido tal que, neste referencial, $(U^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ (lembrando da identidade $U_\mu U^\mu = -1$ na presente escolha da assinatura da métrica $(-, +, +, +)$), podemos expressar as componentes não nulas da Eq. (5), de acordo com as Eqs. (3) e (4), como

$$T_{00} = \rho, \quad (6)$$

$$T_{ij} = pa^2 \delta_{ij}. \quad (7)$$

Para relacionar a geometria do Universo com o seu conteúdo material, e assim obter as equações de

movimento, as quais expressarão a dinâmica cósmica, precisamos das equações de Einstein da RG, escritas da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \tag{8}$$

Na expressão anterior, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci – o traço do tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{9}$$

e Λ é a constante cosmológica – atualmente interpretada como sendo a explicação mais simples para observação da expansão acelerada do Universo, e pode ser associada a um fluido de densidade constante, como veremos mais adiante.

O tensor de Ricci é expresso em termos de uma contração de um tensor mais geral: o tensor de Riemann, $R^{\rho}_{\mu\sigma\nu}$, o qual é obtido como uma função de grandezas denominadas de símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, da seguinte maneira

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}. \tag{10}$$

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, portanto, é definido como a seguinte contração simétrica

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}, \tag{11}$$

com os $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ expressos, por sua vez, em termos da métrica utilizada

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \tag{12}$$

Uma transformação simples das equações de Einstein, que também se mostrará útil quando introduzirmos a teoria das perturbações, consiste em tomar o traço da Eq. (8) (sabendo que $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \implies g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$), encontrar que $R = -8\pi GT + 4\Lambda$, com $T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ e por fim substituir estas relações na própria Eq. (8), de modo que esta, agora, reescreve-se como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GS_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{13}$$

onde

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \tag{14}$$

é a parte que expressa o conteúdo material do Universo. Essencialmente estamos trocando o cálculo do escalar de Ricci R pelo cálculo do traço do tensor energia-momento T , que é mais simples para o caso do fluido perfeito, onde o mesmo, de acordo as Eqs. (6) e (7), pode ser calculado como

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 3p - \rho. \tag{15}$$

Consideremos agora a Eq. (13). Para calcular o tensor de Ricci precisamos primeiro dos símbolos de Christoffel;

substituindo as Eqs. (3) e (4) na expressão (12), verificamos que as únicas componentes não nulas dos símbolos de Christoffel valem

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij}, \tag{16}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}. \tag{17}$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci, portanto, substituindo estas equações na expressão (11), ficam

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{18}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij}. \tag{19}$$

O tensor $S_{\mu\nu}$, definido na Eq. (14), por sua vez, de posse das Eqs. (6), (7) e (15), possui apenas as seguintes componentes não nulas

$$S_{00} = \frac{1}{2}(\rho + 3p), \tag{20}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - p)a^2\delta_{ij}. \tag{21}$$

Finalmente, munido dos resultados (18)-(21), a Eq. (13) decompõe-se em duas equações

$$\begin{aligned} R_{00} &= 8\pi GS_{00} + \Lambda g_{00} \\ \iff \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= 8\pi GS_{ij} + \Lambda g_{ij} \\ \iff \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= 4\pi G(\rho - p) + \Lambda, \end{aligned} \tag{23}$$

que são as equações de Friedmann procuradas. Isolando a quantidade \ddot{a}/a da Eq. (22) (a qual é conhecida como “equação da aceleração cósmica”) e substituindo-a na Eq. (23), encontramos a equação de Friedmann na sua forma mais usual

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \tag{24}$$

De maneira complementar às equações de Einstein (que geraram as equações de Friedmann), devemos também considerar a equação que exprime a conservação da energia e do momento

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0, \tag{25}$$

onde, lembrando, a derivada covariante, ∇_{μ} , para um tensor T^{α}_{β} qualquer, expressa-se

$$\nabla_{\mu}T^{\alpha}_{\beta} = \partial_{\mu}T^{\alpha}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}T^{\rho}_{\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}T^{\alpha}_{\rho}. \tag{26}$$

Neste caso, onde $T^{\alpha\beta}$ é tensor energia-momento: $\nabla_{\nu}T^{\alpha\beta} = \partial_{\nu}T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}T^{\rho\beta} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}T^{\alpha\rho}$. Na expressão (25) temos que, quando $\mu = 0$, obtemos a conservação

da energia; enquanto que, quando $\mu = i$ obtemos a conservação do momento. Com $T^{\mu\nu}$ obtido a partir da Eq. (5) e $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, a partir das Eqs. (16) e (17), verificamos que apenas a componente $\nabla_\mu T^{0\nu}$ da Eq. (25) não é trivialmente satisfeita, e esta se expressa como

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{0\nu} &= \partial_\nu T^{0\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^0 T^{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\nu T^{0\rho} = 0 \\ \implies \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Uma vez que a lei de conservação (25) pode ser obtida diretamente da Eq. (8), dada a identidade de Bianchi, $\nabla_\nu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}) = 0$, e a compatibilidade da métrica, $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$, a Eq. (27) também é obtida diretamente através das equações de Friedmann (22) e (23). Assim, o conjunto de equações (24) e (27), por exemplo, contém toda a informação da dinâmica do cosmo no modelo de FLRW.

3. Teoria das Perturbações

Nas teorias físicas, em geral, é comum propor novas soluções para as equações derivadas destas a partir de soluções simples já conhecidas. Nesse cenário, a nova solução diferirá da solução conhecida por uma série de termos que representam pequenas perturbações da solução original. Interessa-nos, portanto, estudar a dinâmica dessas flutuações. Isto é, essencialmente, o princípio da teoria das perturbações.

No contexto da cosmologia, a teoria das perturbações é importante, por exemplo, para descrever a formação das estruturas em larga escala (galáxias, aglomerados de galáxias etc.), onde se propõe que a evolução das flutuações de uma dada densidade de energia primordial – a princípio homogênea e isotrópica – tenha formado essas estruturas. De modo geral, a teoria das perturbações cosmológicas explica as pequenas inomogeneidades observadas, associadas a quantidades físicas de qualquer natureza (escalar, vetorial ou tensorial), em um cenário homogêneo e isotrópico.

3.1. Perturbações da Métrica

Considerando esta breve introdução à teoria das perturbações, definimos ondas gravitacionais como pequenas flutuações de uma dada métrica $g_{\mu\nu}$ conhecida na ausência de perturbações de natureza não tensorial, ou seja, desconsiderando as flutuações da densidade de energia ρ e da quadrivelocidade do fluido U^μ . Assim, expressamos a nova métrica, isto é, a nova solução das equações de Einstein que inclui as pequenas inomogeneidades, aqui denotada por $\tilde{g}_{\mu\nu}$, como uma combinação da solução homogênea e isotrópica¹, $g_{\mu\nu}$, e da sua respectiva perturbação, $h_{\mu\nu}$

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = g_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t), \quad |h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|. \tag{28}$$

¹ As condições de homogeneidade e isotropia da métrica não são estritamente necessárias; porém, como este trabalho se restringe ao caso FLRW, essa separação é útil.

Note que a dependência espacial presente nesta equação revela o caráter inomogêneo da nova solução $\tilde{g}_{\mu\nu}$, e a condição $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ assegura o fato de que as perturbações são “pequenas” em relação à métrica $g_{\mu\nu}$, a qual doravante será referida como “métrica de fundo”. Isto induzirá, como veremos a seguir, uma teoria das perturbações lineares, em que ocorrerá a linearização das equações de Einstein.

Como $h_{\mu\nu}$ representa pequenos desvios da métrica de fundo $g_{\mu\nu}$, podemos utilizar a notação variacional, onde introduziremos o operador δ – uma espécie de “derivada” – análoga à ideia de deslocamentos virtuais da mecânica analítica (veja a Ref. [20] para um entendimento mais rigoroso acerca do operador δ), de modo que

$$h_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu}. \tag{29}$$

Será útil também, para os desenvolvimentos que seguiremos, calcular o inverso da Eq. (28), $\tilde{g}^{\mu\nu}$. Para tanto, primeiro, vamos avaliar a variação do inverso da métrica de fundo, $\delta g^{\mu\nu}$, a partir da regra de Leibniz e das relações fundamentais das métricas $\tilde{g}^{\mu\rho}\tilde{g}_{\rho\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, $g^{\mu\rho}g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, descritas abaixo

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma} &= \delta_\sigma^\mu \\ \implies \delta(g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}) &= 0 \\ \implies \delta g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Multiplicando a Eq. (30) por $g^{\nu\sigma}$ encontramos que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}$, ou seja

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} = -h^{\mu\nu}. \tag{31}$$

Note que na última passagem da Eq. (31) utilizamos a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ para realizar a operação de subir/abaixar índices. Isto será feito sempre, pois o uso da métrica total $\tilde{g}_{\mu\nu}$ para tal operação resultaria em termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, os quais estamos desprezando. De posse da Eq. (31) e considerando a expansão linear de Taylor, $\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, o inverso da Eq. (28), portanto, fica

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \tag{32}$$

onde verificamos que, em primeira ordem, a relação mencionada $\tilde{g}^{\mu\rho}\tilde{g}_{\rho\sigma} = \delta_\sigma^\mu$ é satisfeita.

3.2. Dinâmica das ondas gravitacionais

Após termos introduzido o formalismo das perturbações lineares da métrica na seção anterior, estamos agora em condições de obter a sua respectiva dinâmica de acordo com as equações de Einstein.

Uma vez que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ também é solução das equações de Einstein (13), e pensando que as quantidades $R_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ sofrerão uma alteração devido à presença da perturbação $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ do tipo $R_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$,

$S_{\mu\nu} \rightarrow S_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, a seguinte equação deve ser satisfeita

$$\delta R_{\mu\nu} = 8\pi G \delta S_{\mu\nu} + \Lambda h_{\mu\nu}, \quad (33)$$

que é simplesmente a equação de Einstein perturbada, em que tomamos a variação da Eq. (13).

Vamos nos ocupar, em um primeiro momento, da parte esquerda da Eq. (33). Como mencionado, o operador δ se comporta como uma derivada; assim, para calcular $\delta R_{\mu\nu}$ temos que “diferenciar” a expressão para $R_{\mu\nu}$, na Eq. (11), em relação à métrica de fundo $g_{\mu\nu}$. Para tanto, primeiro precisamos calcular a variação dos símbolos de Christoffel, $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Fazendo, portanto, a variação da Eq. (12), aplicando a regra de Leibniz, levando em conta as relações (29), (31), e assumindo a compatibilidade da métrica de fundo, isto é, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}h_{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) - g^{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta h_{\sigma\beta}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\mu\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta h_{\mu\beta} + \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\beta h_{\nu\beta} \\ &\quad - \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta h_{\nu\beta} + \Gamma_{\sigma\nu}^\beta h_{\mu\beta} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta h_{\sigma\beta}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_\nu h_{\mu\sigma} + \nabla_\mu h_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (34)$$

A variação do tensor de Ricci, $\delta R_{\mu\nu}$, por sua vez, aplicando novamente a regra de Leibniz, agora na Eq. (11), fornece o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\rho \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho + (\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\rho)\Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \\ &\quad - (\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho)\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho(\delta\Gamma_{\mu\rho}^\sigma) \\ &= \nabla_\rho \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho, \end{aligned} \quad (35)$$

a qual é conhecida na literatura como identidade de Palatini [16]. Substituindo a Eq. (34) na Eq. (35) e simplificando, encontramos $\delta R_{\mu\nu}$ em função de $h_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\nabla_\rho \nabla_\nu h_{\mu\sigma} + \nabla_\rho \nabla_\mu h_{\nu\sigma} \\ &\quad - \nabla_\rho \nabla_\sigma h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\rho\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \nabla_\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)}^\rho - \frac{1}{2}\nabla_\mu \nabla_\nu h, \end{aligned} \quad (36)$$

onde $h \equiv g^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$, $\square \equiv \nabla^\rho \nabla_\rho$ e, para um tensor arbitrário $A_{\mu\nu}$, $A_{(\mu\nu)} \equiv (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})/2$.

Examinemos agora a parte direita da Eq. (33). Considerando um fluido perfeito no qual as perturbações de

natureza não tensorial são desconsideradas, temos que $\delta\rho = \delta p = \delta U^\mu = 0$. Assim, tomando o tensor $S_{\mu\nu}$ obtido pelas Eqs. (5) e (14) e calculando a sua respectiva variação, encontramos

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= (\rho + p)U_\mu U_\nu + \frac{1}{2}(\rho - p)g_{\mu\nu} \\ \implies \delta S_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\rho - p)h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (37)$$

Finalmente, a Eq. (33), em termos de $h_{\mu\nu}$, pelas Eqs. (36) e (37), reescreve-se como

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \nabla_\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)}^\rho - \frac{1}{2}\nabla_\mu \nabla_\nu h \\ &= [4\pi G(\rho - p) + \Lambda] h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (38)$$

A Eq. (38), portanto, é a equação dinâmica procurada das ondas gravitacionais, a qual representa as equações de Einstein linearizadas em torno de uma dada métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ e na presença de um fluido perfeito.

Também é comum reescrever a Eq.(38) invertendo a ordem das derivadas covariantes do segundo termo do seu lado esquerdo. Para tanto, utilizamos a expressão do comutador das derivadas covariantes atuando sobre um tensor arbitrário A^μ_ν [17]

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu_\nu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A^\mu_\nu = R^\mu_{\rho\alpha\beta} A^\rho_\nu - R^\rho_{\nu\alpha\beta} A^\mu_\rho, \quad (39)$$

aplicada ao termo $\nabla_\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)}^\rho$

$$\nabla_\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)}^\rho = R_{\rho(\mu} h_{\nu)}^\rho + R^\sigma_{\mu\nu\rho} h^\rho_\sigma + \nabla_{(\mu} \nabla_{|\rho|} h_{\nu)}^\rho, \quad (40)$$

em que as barras verticais (|) significa a exclusão do índice entre estas do simetrizador (). Nesta última equação foi utilizada a definição do tensor de Ricci, dada na Eq. (11), e as simetrias do tensor de Riemann: $R_{\rho\mu\sigma\nu} = R_{\sigma\nu\rho\mu}$, $R_{\rho\mu\sigma\nu} = -R_{\mu\rho\sigma\nu}$, $R_{\rho\mu\sigma\nu} = -R_{\rho\mu\nu\sigma}$. Assim, a Eq. (38) fica

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + R_{\rho(\mu} h_{\nu)}^\rho + R^\sigma_{\mu\nu\rho} h^\rho_\sigma \\ &+ \nabla_{(\mu} \left(\nabla_{|\rho|} h_{\nu)}^\rho - \frac{1}{2}\nabla_{\nu)} h \right) = [4\pi G(\rho - p) + \Lambda] h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (41)$$

(Note que o termo $\nabla_\mu \nabla_\nu h$ já é simétrico, bastando expandi-lo em termos dos símbolos de Christoffel para verificar isto.)

A vantagem da Eq. (41) é que o termo entre parênteses do lado esquerdo poderá ser eliminado pela fixação de calibre, que será estudada na próxima seção.

3.3. Liberdade de calibre

Nas teorias físicas em geral, é possível expressar as suas leis fundamentais de diferentes formas matemáticas sem que o significado físico seja alterado. Isto acontece porque certos observáveis físicos são definidos a menos de alguma quantidade que não tem significado físico

² Note que aqui ainda não estamos especificando $g_{\mu\nu}$ como sendo a métrica homogênea e isotrópica de Friedmann – o procedimento realizado nesta seção é válido para qualquer métrica de fundo na presença de um fluido perfeito.

direto – criando assim uma simetria física em relação a este ente matemático – como é o caso do campo eletromagnético, que é definido em termos de derivadas de um potencial. Assim, podemos “calibrar” certas grandezas, isto é, escolher um valor adequado para estas mesmas grandezas de modo que as equações de campo fiquem mais simples, por exemplo. Veremos nesta seção como esse princípio se aplica à teoria das perturbações em RG.

Com o objetivo de simplificar a Eq. (41) e assim poder resolvê-la, além de extrair o real significado físico da perturbação da métrica $h_{\mu\nu}$, introduzimos nesta seção a ideia de liberdade de calibre, que, essencialmente, refere-se ao fato de que podemos escolher um certo $h'_{\mu\nu}$, no lugar de $h_{\mu\nu}$, em que ambos tenham a mesma implicação física.

Tal liberdade vem da lei da covariância geral das equações de Einstein, isto é, o fato de que essas equações são invariantes perante uma transformação geral de coordenadas. Algo análogo ocorre no eletromagnetismo, em que podemos escolher dois campos potenciais: A_μ e $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda$, com λ sendo um campo escalar arbitrário, de forma que o campo eletromagnético físico $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ mantenha-se o mesmo. A diferença principal, nesse aspecto dos calibres, entre as duas teorias, é que, enquanto que no eletromagnetismo essa liberdade está associada à escolha do campo potencial A_μ , na RG a liberdade vem da própria escolha do sistema de coordenadas.

Para adaptar essa lei à teoria da perturbação, precisamos de um tipo particular de transformação que mantenha a linearidade da teoria, ou seja: a condição $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$ deve ser preservada. Esse tipo de transformação é conhecido como difeomorfismo infinitesimal, o qual consiste em variar as coordenadas x^μ por uma pequena quantidade $\varepsilon^\mu(x)$, tal que

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \quad |\varepsilon^\mu| \ll |x^\mu|, \quad (42)$$

em que $\varepsilon^\mu(x)$ é construído para ter a mesma ordem de grandeza que $h_{\mu\nu}$. A métrica total $\tilde{g}_{\mu\nu}$ transformada, por sua vez, pela regra de transformação de tensores, é escrita como

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(x). \quad (43)$$

Também é útil relacionar a métrica transformada $\tilde{g}'_{\mu\nu}$ de acordo com a expansão linear de Taylor, já que $|\varepsilon^\mu| \ll |x^\mu|$, onde, a menos de termos de segunda ordem em ε^μ , obtemos a seguinte expressão

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(x') = \tilde{g}'_{\mu\nu}(x) + \varepsilon^\rho(x) \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu}(x). \quad (44)$$

Assim, substituindo a Eq. (42) na Eq. (43), considerando a Eq. (44) e a relação $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, obtemos que o efeito que a introdução da quantidade ε^μ nas coordenadas originais produz na métrica total, desprezando termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ e ε^μ , é uma variação

do tipo $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + h'_{\mu\nu}(x)$, onde $h'_{\mu\nu}$ escreve-se

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \nabla_\nu \varepsilon_\mu - \nabla_\mu \varepsilon_\nu. \quad (45)$$

Como ε^μ e $h_{\mu\nu}$ possuem a mesma ordem de grandeza, $h'_{\mu\nu}$ ainda configura uma perturbação linear de $g_{\mu\nu}$. Nesse contexto, a liberdade de calibre significa que podemos escolher um ε^μ tal que o $h'_{\mu\nu}$ correspondente e $h_{\mu\nu}$, relacionados pela Eq. (45), sejam fisicamente equivalentes. Para o caso eletromagnético, de maneira comparativa à Eq. (45), a liberdade de calibre se exprime: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda$, onde λ é um campo escalar arbitrário.

3.4. O calibre síncrono

Um calibre bastante útil no contexto cosmológico é o calibre síncrono [16], o qual requer que o sistema de coordenadas escolhido, associado às ondas gravitacionais, seja tal que a sua componente temporal fique sempre sincronizada com o tempo cósmico t . Em outras palavras, este calibre consiste em escolher um ε^μ de forma que a medida de tempo não seja alterada pela presença da radiação gravitacional. Dito isso, o calibre expressa-se por

$$h_{0\mu} = 0. \quad (46)$$

Mostraremos agora que, para o Universo do tipo FLRW, de fato, podemos escolher um ε^μ onde, neste calibre, a Eq. (46) verifica-se. De acordo com a regra de transformação (45), para algum $h_{0\mu}$ inicialmente não nulo (ou seja, em um sistema de coordenadas arbitrário), podemos tomar $h'_{0\mu} = 0$ ao impor que

$$\nabla_0 \varepsilon_\mu + \nabla_\mu \varepsilon_0 = h_{0\mu}. \quad (47)$$

Desenvolvendo a derivada covariante a partir dos símbolos de Christoffel (16) e (17), as partes temporal e espacial da Eq. (47) escrevem-se, respectivamente, como

$$\dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2} h_{00}, \quad (48)$$

$$\dot{\varepsilon}_i - 2 \frac{\dot{a}}{a} \varepsilon_i = h_{0i} - \partial_i \varepsilon_0, \quad (49)$$

cujas soluções, em termos de $\varepsilon^0 = -\varepsilon_0$ e $\varepsilon^i = a^{-2} \varepsilon_i$, são descritas da seguinte maneira

$$\varepsilon^0 = -\frac{1}{2} \int h_{00} dt, \quad (50)$$

$$\varepsilon^i = \int a^{-2} (h_{0i} + \partial_i \varepsilon^0) dt. \quad (51)$$

3.5. O calibre transverso e sem traço

Uma vez que as soluções (50) e (51), relativas ao calibre síncrono, não são únicas, já que as integrais indefinidas temporais incluem uma função arbitrária que não depende do tempo, podemos fazer uso dessa

arbitrariade para impor outros calibres. Assim, se definirmos uma *segunda* transformação de coordenadas, quantificada agora por uma variação ξ^μ das coordenadas anteriores³, é suficiente que, para o calibre síncrono ser mantido nesse novo sistema de coordenadas, de acordo com as Eqs. (50) e (51), ξ^μ satisfaça as seguintes condições

$$\xi^0 = 0, \quad (52)$$

$$\xi^i = \xi^i(\mathbf{r}). \quad (53)$$

Ou seja, temos uma liberdade de calibre residual dada a possibilidade de escolher uma função ξ^i que só dependa das coordenadas espaciais.

Com efeito, o próximo calibre que imporemos será o calibre harmônico, o qual pode ser interpretado como uma espécie de extensão do calibre de Lorentz do eletromagnetismo: $\partial_\mu A^\mu = 0$, aplicado à teoria da perturbação linear em RG. Neste calibre vamos requerer que

$$\nabla_\nu h^{\mu\nu} = 0. \quad (54)$$

Desenvolvendo a derivada covariante da Eq. (54) para o Universo de FLRW, com o auxílio das expressões (16) e (17), já considerando o calibre síncrono, isto é, assumindo que estamos no sistema de coordenadas relativo à quantidade ξ^μ , obtemos a sua parte temporal e espacial, respectivamente

$$h = 0, \quad (55)$$

$$\partial_j h^{ij} = 0. \quad (56)$$

Notemos que o calibre $\nabla_\nu h^{\mu\nu} = 0$ em conjunto com o calibre síncrono $h_{0\mu} = 0$ já implica no calibre sem traço (Eq. (55)) no caso do Universo de FLRW. Nesse sentido, é comum na literatura referir-se ao calibre $\nabla_\nu h^{\mu\nu} = 0$ como “TT”: transverso e sem traço, onde a transversalidade é expressa pela condição $\partial_j h^{ij} = 0$.

A escolha do calibre “TT” tem uma interpretação física referente ao fato de que ondas gravitacionais se propagando no Universo de FLRW, e cujas leis da gravitação são dadas pela RG, não têm modos físicos escalares e vetoriais associados – por isto as quantidades h e $\partial_j h^{ij}$, que são as grandezas escalar e vetorial que surgem naturalmente nas equações de Einstein perturbadas (41), serão eliminadas por uma escolha de calibre adequada.

O que se seguirá agora é uma demonstração detalhada da acessibilidade das condições (55) e (56) que garantem a viabilidade do calibre (54). Para mostrar que, de fato, os calibres (55) e (56) são acessíveis – significando que podemos escolher um $\xi^i(\mathbf{r})$ tal que as Eqs. (55) e (56) se verifiquem, precisamos de alguns resultados preliminares, *os quais serão válidos utilizando o calibre síncrono* $h_{0\mu} = 0$. Os resultados são: i) a perturbação da equação

da conservação da energia (25); ii) a componente $0i$ da Eq. (38); iii) o traço da Eq. (38). O resultado i) obtemos tomando a variação da Eq. (27), que, considerando o calibre síncrono e a fórmula (34), se reduz a

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\nu T^{0\nu}) &= 0 \\ \implies \delta\Gamma_{0\nu}^\nu &= 0 \\ \implies \dot{h} &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Tomando a componente $0i$ da Eq. (38) e aplicando o resultado $\dot{h} = 0$ nesta, obtemos o resultado ii)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\square h_{0i} + \nabla_\rho \nabla_{(0} h_{i)}^\rho - \frac{1}{2}\nabla_0 \nabla_i h &= 0 \\ \implies \frac{1}{2}(\partial_j \dot{h}^j_i - \partial_i \dot{h}) &= 0 \\ \implies \partial_j \dot{h}^j_i &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Por fim, tomando o traço da Eq. (38), considerando $\dot{h} = 0$ novamente e a Eq. (23) para relacionar o fator de escala com o termo $[4\pi G(\rho - p) + \Lambda]$, obtemos o resultado iii)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h &= [4\pi G(\rho - p) + \Lambda] h \\ \implies \partial_i \partial_j h^{ij} - \partial_i \partial^i h + \ddot{h} + 4\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] h & \\ &= [4\pi G(\rho - p) + \Lambda] h \\ \implies \partial_i \partial_j h^{ij} - \partial_i \partial^i h &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Agora estamos em condições de mostrar que o calibre sem traço $h = 0$, *isoladamente*, pode ser aplicado. Para tanto, basta aplicar a regra de transformação (45), para algum h inicialmente não nulo, e escolher um $\xi^i(\mathbf{r})$ que satisfaça à seguinte equação

$$\partial_i \xi^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}h(\mathbf{r}) \quad . \quad (60)$$

Uma vez que, pela Eq. (57), h só depende de \mathbf{r} , a Eq. (60) tem solução para todo \mathbf{r} e t , já que ξ^i também só depende das coordenadas espaciais \mathbf{r} .

Contudo, a solução da Eq. (60) não é única. Isto dará origem a um nova liberdade de calibre residual, no sentido de que, fazendo a troca $\xi^i \rightarrow \xi^i + \chi^i$ com $\partial_i \chi^i = 0$, a Eq. (60) ainda é satisfeita⁴. Desta maneira, nesse novo sistema de coordenadas associado a χ^μ , as seguintes equações (a partir da Eq. (45)) devem ser satisfeitas para que o calibre transverso seja aplicado e para que os calibres síncrono e transverso sejam mantidos

$$\chi^0 = 0, \quad (61)$$

$$\chi^i = \chi^i(\mathbf{r}), \quad (62)$$

$$\partial_i \chi^i(\mathbf{r}) = 0, \quad (63)$$

$$\partial_j \partial_j \chi^i(\mathbf{r}) = \partial_j h^j_i(\mathbf{r}), \quad (64)$$

³ Estamos propondo uma segunda transformação de modo semelhante à Eq. (42): $x'^{\mu} \rightarrow x''^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$.

⁴ Isto equivale a realizar uma nova transformação de coordenadas, semelhante à nota de rodapé anterior: $x''^{\mu} \rightarrow x'''^{\mu} = x''^{\mu} + \chi^{\mu}$

para algum $\partial_j h^j_i$ inicialmente não nulo. (Note que ajustamos os índices da Eq. (64) utilizando a relação $\chi_i = a^2 \chi^i$ para que esta grandeza exiba um índice levantado, dependendo, assim, apenas de \mathbf{r} . Ainda assim há soma em j no lado esquerdo da mesma equação.)

O resultado (58) garante que, isoladamente, a Eq. (64) tenha solução para todo \mathbf{r} e t , enquanto que o resultado (59), já considerando $h = 0$ pelo calibre anterior, reduz-se à seguinte expressão

$$\partial_i \partial_j h^{ij} = 0. \tag{65}$$

Finalmente, podemos agora mostrar que o calibre transversal pode ser aplicado, preservando o calibre síncrono e o calibre sem traço. Para observar isto, notemos que o conjunto de Eqs. (61)-(64) agora tem solução, pois, já que χ^i e $\partial_j h^j_i$ são soluções da mesma equação, a saber $\partial_i u^i = 0$ (com u^i representando um vetor arbitrário), basta, por exemplo, encontrar uma solução χ^i genérica da Eq. (63), avaliar $\partial_j \partial_j \chi^i$, que também é solução da mesma equação, e obrigá-la a ser a igual a $\partial_j h^j_i$, que é uma solução particular de $\partial_i u^i = 0$ pela Eq. (65). Assim, demonstramos a acessibilidade simultânea dos calibres síncrono e “TT”.

Como um último comentário, vale ressaltar que, apesar do nome “calibre”, utilizado neste trabalho e também extensamente na literatura para designar o raciocínio exposto nesta seção, o mesmo não é rigorosamente adequado para o caso da RG e, conseqüentemente, sua teoria perturbativa. Isto porque o “calibre” na RG advém da ideia da própria covariância perante uma transformação geral de coordenadas, algo que deve ser comum a qualquer teoria física consistente. Por exemplo, no caso do eletromagnetismo temos um calibre real, pois o potencial eletromagnético A_μ é construído de forma a gerar o mesmo campo físico $F_{\mu\nu}$ se somado com a derivada de campo escalar λ qualquer. Ou seja, nesse caso, o calibre está associado ao próprio potencial, que é algo interno da teoria eletromagnética, e não à covariância geral – que é algo externo (que também ocorre no eletromagnetismo). No entanto, mantivemos essa terminologia como um “abuso de linguagem” dado o seu largo uso e à analogia útil com o eletromagnetismo.

3.6. Equação de ondas gravitacionais

Agora que podemos aplicar os calibres $h_{0\mu} = h = \partial_j h^j_i$, podemos simplificar a Eq. (41) e torná-la, de fato, uma equação de onda.

Nos calibres citados, é imediato verificar que $\nabla_\rho h_\nu^\rho - \frac{1}{2} \nabla_\nu h = \nabla_0 h_{00} = \nabla_0 h_{0i} = \nabla_i h_{00} = 0$. Além disso, pela Eq. (23) relacionamos o termo $4\pi G(\rho - p) + \Lambda$ com o fator de escala a . Com essas considerações, as únicas componentes da Eq. (41) que não são trivialmente satisfeitas são as componentes ij , e, desenvolvendo estas, tomando $R_{\mu\nu}$ dado pelas Eqs. (18) e (19) e R_{kijl} , única componente do tensor de Riemann necessária na equação Eq. (41), dada por $a^2 \dot{a}^2 (\delta_{kj} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{ij})$ via Eqs. (10), (16)

e (17), ficamos com

$$\ddot{h}_{ij} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} - 2 \frac{\ddot{a}}{a} h_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0, \tag{66}$$

com $\nabla^2 \equiv \partial_i \partial^i$.

É mais simples reescrever esta equação em termos das componentes mistas $h^i_j = g^{ik} h_{kj} = h_{ij}/a^2$, as quais representam as ondas gravitacionais comóveis⁵

$$\ddot{h}^i_j + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}^i_j - \nabla^2 h^i_j = 0. \tag{67}$$

Para uma onda h^i_j monocromática com vetor de onda \mathbf{k} , a solução da Eq. (67) pode ser expressa em termos de uma onda harmônica com amplitude $e^i_j(t)$ dependente do tempo da seguinte maneira

$$h^i_j(\mathbf{r}, t) = e^i_j(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{68}$$

Já para o caso geral policromático, onde temos uma superposição de vetores de onda \mathbf{k} , expressamos h^i_j como uma integral de Fourier em função do espectro de frequências, aqui denotado por $e^i_j(\mathbf{k}, t)$ (que é a transformada de Fourier de h^i_j)

$$h^i_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^i_j(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \tag{69}$$

Em ambos os casos, a equação que e^i_j deve satisfazer, substituindo as Eqs. (68) e (69) na Eq. (67), é dada por

$$\ddot{e}^i_j(t) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{e}^i_j(t) + \frac{k^2}{a^2} e^i_j(t) = 0. \tag{70}$$

Notamos, portanto, que o efeito que um Universo em expansão tem sobre a onda gravitacional, quantificado pelo coeficiente $3\dot{a}/a$, é semelhante ao efeito que conhecemos como força de arrasto. No sentido newtoniano do conceito, a força de arrasto consiste na força de resistência ao movimento de um objeto em um meio fluido qualquer. Essa força atua no sentido oposto ao movimento do objeto no meio. Assim, a Eq. (70) é análoga a uma equação do oscilador harmônico amortecido.

Antes de estudarmos as soluções desta equação, vamos analisar brevemente os modos de polarização da onda gravitacional, isto é, as relações entre as componentes do tensor e^i_j , também conhecido como tensor de polarização, decorrente dos calibres discutidos.

3.7. Modos de polarização

Sem nenhuma perda de generalidade, podemos tratar do caso particular de uma onda monocromática se

⁵ É comum encontrar na literatura que ondas gravitacionais sejam definidas a partir do tensor misto h^i_j . Isto para que o elemento de distância espaço-temporal evidencie apenas o efeito “puro” da radiação gravitacional – sem a influência da expansão do cosmo: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij}/a^2) dx^i dx^j$, onde identificamos $h_{ij}/a^2 = h^i_j$.

propagando na direção z , ou seja, $k_i \equiv (\mathbf{k}) = (0, 0, k)$, pois, dada a isotropia do espaço-tempo de fundo de FLRW, todas as direções são equivalentes.

Dito isto, a aplicação dos calibres $\partial_j h^j_i = 0$ e $h = 0$ na solução (68) implica que $\partial_j (e^j_i e^{ikz}) = 0 \implies e^j_i \delta_{j3} ik e^{ikz} = 0$ e $e^1_1 + e^2_2 + e^3_3 = 0$ respectivamente; ou seja

$$h^i_3 = 0, \tag{71}$$

$$h^2_2 = -h^1_1. \tag{72}$$

Expressando h^i_j de forma matricial de acordo com a Eq. (68), com as definições $e^1_1 \equiv e_+$ e $e^1_2 \equiv e_\times$, obtemos a seguinte expressão

$$h^i_j = \begin{pmatrix} e_+ & e_\times & 0 \\ e_\times & -e_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ikz}. \tag{73}$$

Os símbolos $+$ e \times representam os dois estados de polarização possíveis. O modo $+$ indica que as direções perturbadas do espaço-tempo são as direções paralelas aos eixos x e y , enquanto que o modo \times indica perturbações nas direções que formam um ângulo agudo com os eixos x e y . Naturalmente que o caso mais geral possível será uma combinação dos dois modos de oscilação.

A aparente forma simples das ondas gravitacionais no Universo homogêneo e isotrópico surge do fato de que esse Universo, expresso pela métrica de FLRW, possui uma simetria máxima.

4. Solução da Equação de Ondas Gravitacionais

Agora que expusemos os aspectos essenciais da teoria das perturbações adequados para a descrição de ondas gravitacionais no Universo de FLRW, vamos estudar o comportamento destas na presença de diferentes fluidos cósmicos. A resolução da Eq. (70), para diferentes modelos de Universo, portanto, será o objetivo desta seção.

4.1. Modelos de fluido perfeito com parâmetro $w \neq -1$

Para os fluidos perfeitos, em geral, é possível relacionar as quantidades p e ρ por meio de uma equação de estado termodinâmica do tipo $p(\rho) = w\rho$, onde w é um parâmetro constante. Assim, a equação da conservação da energia (27) admite a seguinte solução

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \tag{74}$$

com ρ_0 sendo a densidade de energia medida no instante atual, t_0 , de forma que, por esta convenção, $a(t_0) = 1$ (note que $a_0 \neq a(t_0)$). Neste contexto, podemos associar a constante cosmológica a um fluido de densidade de energia constante $\rho = \Lambda/(8\pi G)$ e $w = -1$, cuja

interpretação atualmente mais aceita é a energia escura – componente do Universo responsável pela sua expansão acelerada. Vamos analisar este caso particular na subseção seguinte.

Substituindo a Eq. (74) na equação de Friedmann (24), sem constante cosmológica Λ (examinaremos a sua contribuição mais adiante), e resolvendo-a, obtemos a seguinte solução para o fator de escala $a(t)$

$$a(t) = a_0 t^n, \tag{75}$$

onde

$$a_0 = t_0^{-n}, \tag{76}$$

e

$$n = \frac{2}{3(1+w)}. \tag{77}$$

Agora, com a expressão (75) para o fator de escala, a Eq. (70), multiplicada por t^2 , fica

$$t^2 \ddot{\psi}(t) + 3nt\dot{\psi}(t) + \frac{k^2}{a_0^2} t^{2(1-n)} \psi(t) = 0, \tag{78}$$

onde estamos utilizando a letra ψ para representar as soluções e^i_j . A solução geral desta equação, em termos de $a(t)$, pode ser expressa em termos das funções de Bessel (A Ref. [21] contém a teoria geral dessas funções especiais incluindo as expressões assintóticas que utilizaremos a seguir) de ordem ν não inteiro (que, como veremos, serão referentes aos fluidos de maior interesse), a saber, respectivamente, J_ν e $J_{-\nu}$

$$\psi(a) = a^{\frac{1-3n}{2n}} \left[A J_\nu \left(\frac{n}{1-n} \frac{k}{aH} \right) + B J_{-\nu} \left(\frac{n}{1-n} \frac{k}{aH} \right) \right], \tag{79}$$

onde

$$\nu = \frac{3n-1}{2(1-n)}, \tag{80}$$

A e B são constantes de integração e H é o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \tag{81}$$

(Vale a pena ressaltar que, a princípio, o argumento das funções de Bessel da solução (79) era $\frac{kt^{1-n}}{a_0(1-n)}$; no entanto, manipulamo-no, de acordo com a expressão para o fator de escala (75) e a definição do parâmetro de Hubble (81), para fazer aparecer a quantidade $\frac{k}{aH}$.)

Escrever a solução da Eq. (78) da forma expressa na Eq. (79) é útil, pois, além de evidenciar os parâmetros observáveis, k/a (número de onda medido quando se leva em consideração a expansão do cosmo) e H , permite-nos avaliar os regimes $k \ll aH$ e $k \gg aH$. Estes regimes são referentes aos estágios conhecidos, respectivamente, como “estágio fora do horizonte” ou “super-horizonte”

e “estágio dentro do horizonte” ou sub-horizonte. Aqui, “horizonte” faz alusão à quantidade H^{-1} , o raio do horizonte de Hubble – escala de distância onde a velocidade de afastamento entre dois pontos do espaço, segundo a lei de Hubble⁶, é $c = 1$. A interpretação física desses dois estágios é a seguinte: no super-horizonte significa que o comprimento de onda está em uma escala onde os efeitos cosmológicos são bastante apreciáveis, enquanto que, no estágio sub-horizonte, como o comprimento de onda é suficientemente pequeno, esses efeitos não são observados.

No estágio $k \ll aH$, o super-horizonte, que é o estágio de maior interesse cosmológico, pois as escalas envolvidas (leia-se comprimento de onda, dado por $\lambda = 2\pi a/k$), estão além do raio de Hubble H^{-1} – fazendo com que precisemos considerar a expansão do Universo – além de que a teoria de ondas gravitacionais de origem cosmológica prevê um comprimento de onda nesse estágio [6], podemos utilizar as seguintes expansões assintóticas das funções de Bessel

$$J_{\pm\nu}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\pm\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu}, \quad x \rightarrow 0, \quad (82)$$

com Γ sendo a função gama, para encontrar uma expressão aproximada da Eq. (79) nesse regime

$$\psi(a) \sim C + Da^{-3+\frac{1}{n}}, \quad (83)$$

onde C e D são outras constantes de integração.

Para o regime $k \gg aH$, precisamos da seguinte expansão assintótica das funções de Bessel

$$J_{\pm\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x \mp \nu\pi/2 - \pi/4), \quad x \rightarrow \infty. \quad (84)$$

As soluções $\psi(a)$ nesse estágio, portanto, oscilam da seguinte forma

$$\psi(a) \sim a^{-1} \left[E \cos\left(\frac{n}{1-n} \frac{k}{aH}\right) + F \sin\left(\frac{n}{1-n} \frac{k}{aH}\right) \right], \quad (85)$$

em que E e F , assim como C e D são as constantes que “absorveram” as outras constantes da Eq. (84).

4.2. Modelo de De Sitter

Um modelo de Universo composto apenas por constante cosmológica, isto é, um Universo composto apenas pelo “fluido” associado à constante cosmológica – na era cosmológica atual interpretado como energia escura – é conhecido como modelo de De Sitter [22]. A solução da equação de Friedmann (24) correspondente é a seguinte

$$a(t) = a_0 e^{Ht}, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (86)$$

⁶ Lei de Hubble: $v_r = HD$, onde v_r e D são, respectivamente, a velocidade radial de afastamento e a distância entre dois pontos.

onde a_0 , novamente, é tal que $a(t_0) = 1$. Avaliemos a equação (70) neste modelo cosmológico.

Substituindo o fator de escala (86) na Eq. (70), chegamos na seguinte equação

$$\ddot{\psi}(t) + 3H\dot{\psi}(t) + \frac{k^2}{a_0^2} e^{-2Ht} \psi(t) = 0. \quad (87)$$

Novamente, a solução desta equação em termos do fator de escala (86), tomando a substituição $u(t) \equiv e^t$, onde obtemos uma equação semelhante à Eq. (78), cuja solução é dada pela Ref. [21], pode ser escrita como

$$\psi(a) = a^{-3/2} \left[AJ_{3/2}\left(\frac{k}{aH}\right) + BJ_{-3/2}\left(\frac{k}{aH}\right) \right]. \quad (88)$$

Analogamente ao caso anterior, a expressão assintótica, dada pela Eq. (82), para o regime $k \ll aH$, assume a forma

$$\psi(a) \sim Ca^{-3} + D, \quad (89)$$

e, para $k \gg aH$, segue que

$$\psi(a) \sim a^{-1} \left[E \cos\left(\frac{k}{aH}\right) + F \sin\left(\frac{k}{aH}\right) \right]. \quad (90)$$

Segundo as previsões teóricas recentes [6], as frequências k típicas esperadas das ondas gravitacionais primordiais são da ordem de 10^{-17} Hz, enquanto a amplitude amplitude comóvel atual, $\psi(a = 1)$, é da ordem de 10^{-8} .

A partir desses dados, observamos na Fig. 1 o comportamento das ondas gravitacionais para três modelos de especial interesse em cosmologia, o modelo de fluido de radiação, que corresponde ao caso $w = 1/3$ e $n = 1/2$; o fluido de matéria não relativística (ou poeira), onde $w = 0$ e $n = 2/3$; e o modelo de De Sitter.

A partir da Fig. 1 observamos que, apesar do Universo expandir, as perturbações da métrica comóveis, representadas por ψ , decrescem em amplitude com o

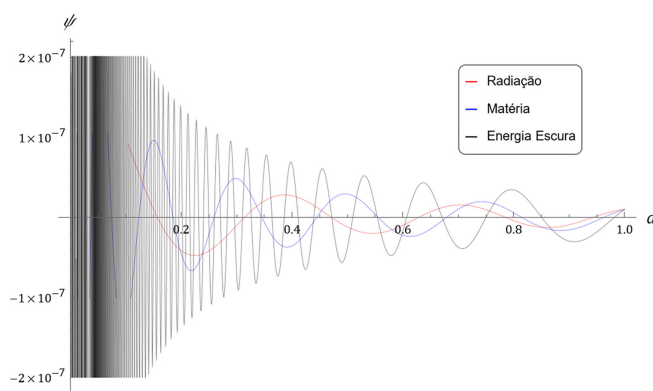


Figura 1: Comportamento da amplitude comóvel ψ em função do fator de escala a , para os três modelos de Universo: fluido de radiação; fluido de matéria; e fluido representando a energia escura, para $k = 20H_0$ e $A = 6, 14 \times 10^{-8}, 1, 16 \times 10^{-7}, -1, 55 \times 10^{-7}$, respectivamente.

tempo. Também notamos que as ondas gravitacionais em um Universo com energia escura são muito expressivas em relação às outras componentes do cosmo. Isto tem especial relevância durante a era da inflação cósmica – caracterizada por uma expansão exponencial do Universo – que, nos modelos mais simples pode ser modelada por meio de um fluido análogo ao de energia escura, já que é durante essa era que se acredita ter sido geradas as ondas gravitacionais primordiais.

4.3. Modelo Matéria e Constante Cosmológica

Vamos discutir agora, por fim, o comportamento das ondas gravitacionais no modelo matéria e constante cosmológica, o qual pressupõe um Universo composto por matéria escura⁷ e matéria bariônica não relativística e constante cosmológica, o qual funciona como uma aproximação, *na era atual*, para o modelo padrão da cosmologia, Λ CDM, (CDM: *Cold Dark Matter*) [23], o qual descreve bem o Universo atual [19].

A equação de Friedmann (24), e sua respectiva solução, para um fluido com densidade ρ e parâmetro $w = 0^8$, referente à matéria não relativística, e constante cosmológica Λ , são escritas agora como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\implies a(t) = a_0 \sinh^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}t\right), \quad (91)$$

com $a_0 = \left(\frac{\Omega_{0m}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3}$ (novamente, $a_0 \neq a(t_0)$), em que utilizamos as definições dos seguintes parâmetros de densidade

$$\Omega_{0m} \equiv \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (92)$$

com o subscrito “0” indicando o valor observado atualmente das respectivas quantidades.

Naturalmente que, no limite $\Lambda \rightarrow 0$ (ou $t \rightarrow 0$) recuperamos a relação para o fluido de matéria não relativística: $a(t) \propto t^{2/3}$, enquanto que, para $t \rightarrow \infty$, o modelo de De Sitter, $a(t) \propto e^{H_0 t}$, predomina.

⁷ A matéria escura é uma forma hipotética de matéria concebida como uma tentativa de resolver o problema da “massa faltante” da curva de rotação das estrelas em uma galáxia. O problema refere-se a uma inconsistência na relação entre a velocidade de rotação das estrelas em torno do núcleo da galáxia e a distância até este prevista pela RG e as observações, que sugerem que deve haver muito mais massa na galáxia do que observamos. Além disso, a matéria escura acelera o processo de formação das estruturas, já que esta colapsou antes da matéria bariônica.

⁸ O modelo com $w = 0$ é adequado para a matéria não relativística pois estamos desprezando quaisquer interações internas. Ou seja: estamos tratando-a como um fluido de “poeira” com pressão nula.

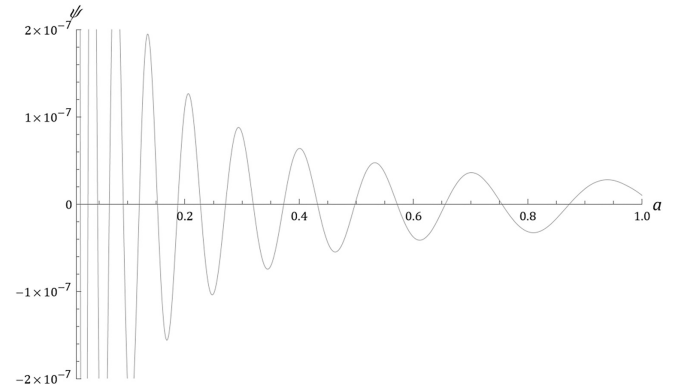


Figura 2: Comportamento da amplitude comóvel ψ em função do fator de escala a para o modelo matéria e constante cosmológica e $k = 20H_0$.

Colocando o fator de escala (92) na Eq. (70) e expressando esta em termos de a , obtemos

$$\psi''(a) + \left[\frac{5 + \frac{3}{1+(a_0/a)^3}}{2a} \right] \psi'(a) + \frac{3k^2}{\Lambda} \frac{1}{(a^4 + a_0^3 a)} \psi(a) = 0. \quad (93)$$

Dado que, pelas observações atuais [19], $\Omega_{0M} \approx 0,3$ e $\Omega_\Lambda \approx 0,7$, a Fig. 2 apresenta a solução gráfica da Eq. (93).

Observando a Fig. 2 notamos um comportamento semelhante ao do gráfico anterior, com uma presença bastante expressiva de ondas gravitacionais nos estágios mais primitivos do Universo.

5. Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma introdução, em geral, didática e detalhada acerca do problema da formulação teórica das ondas gravitacionais em um contexto cosmológico homogêneo e isotrópico, com foco em uma discussão detalhada sobre os calibres e nas soluções analíticas das equações de onda.

Na seção 2 apresentamos o modelo cosmológico geral de FLRW e particularizamos para o caso espacialmente plano. Em seguida, utilizamos os conhecimentos prévios da RG para deduzir as equações de Friedmann. Na seção 3 introduzimos o método da teoria das perturbações cosmológicas da métrica, em que linearizamos as equações de Einstein e obtivemos a dinâmica das perturbações gravitacionais. Após isto, apresentamos a teoria de calibre adaptada ao método perturbativo a partir da covariância geral da RG. Inicialmente, mostramos a acessibilidade do calibre síncrono pela escolha de um sistema de coordenadas infinitesimal ε^i dado pelas Eqs. (50) e (51). Com a liberdade de calibre residual decorrente deste, em conjunto com a equação da perturbação da conservação da energia 57, mostramos também a acessibilidade do calibre sem traço. Por último, utilizando novamente outra liberdade de calibre

residual, juntamente com as próprias equações de onda nos calibres anteriores, demonstramos a compatibilidade desses com o calibre transverso. Encontramos ainda que essas três condições fixam completamente o calibre, e uma consequência disso é a usual decomposição dos modos de polarização em dois. Na seção 4, por fim, estudamos algumas soluções analíticas das equações de onda decorrentes dessa escolha de calibre, incluindo os modelos com um fluido de parâmetro $w \neq -1$ e o modelo de De Sitter. Também obtivemos uma solução gráfica para o modelo de um Universo composto por matéria e constante cosmológica, com os valores dos parâmetros de densidade aceitos atualmente: $\Omega_{0M} \approx 0,3$ e $\Omega_{\Lambda} \approx 0,7$. De maneira geral, encontramos que as ondas gravitacionais, para um Universo composto por apenas um fluido, apresentam uma dependência com o fator de escala do tipo $Aa^{-3} + B$ para o regime $k \ll aH$, enquanto que, para o regime $k \gg aH$, as mesmas se comportam como ondas harmônicas ponderadas por um fator a^{-1} .

Acreditamos que esta exposição introdutória, com destaque para o problema dos calibres, seja relevante, uma vez que a demonstração da sua acessibilidade não é tão clara na literatura básica [16, 17]. Trabalhos adicionais podem incluir a discussão dos calibres para ondas gravitacionais se propagando em Universos anisotrópicos, os quais são adotados para estudar certas anomalias da CMB (a Ref. [24], por exemplo, apresenta um modelo anisotrópico para estudar o Universo primordial, o qual é justificado por variações direcionais da CMB observadas; sobre as ondas gravitacionais nesses Universos, as Refs. [25, 26] apresentam o embasamento necessário), além de introduzirmos também o formalismo invariante de calibre, tomando por base a Refs. [27, 28]. Nesses trabalhos futuros, o estudo da interação da anisotropia do cosmo com a radiação gravitacional pode fornecer novas interpretações físicas das ondas gravitacionais.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) – T.O. 365/2022.

Disponibilidade de Dados

Os dados utilizados neste artigo são provenientes de fontes públicas e estão devidamente referenciados no corpo do texto. A partir desses dados, realizamos modelagens teóricas que resultaram em gráficos e resultados analíticos originais. Esses resultados podem ser reproduzidos com base nas equações e métodos descritos no artigo. Nenhum conjunto adicional de dados foi depositado em repositórios.

Referências

- [1] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 844 (1915).
- [2] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 688 (1916).
- [3] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [4] C. Caprini e D.G. Figueroa, Class. Quantum Grav. **35**, 163001 (2018).
- [5] A.R. Liddle e D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [6] K. Kuroda, W.T. Ni e W.P. Ping, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530031 (2015).
- [7] J. Aasi, B.P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M.R. Abernathy, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari et al., Class. Quantum Grav. **32**, 074001 (2015).
- [8] F. Acernese, M. Agathos, K. Agatsuma, D. Aisa, N. Allemandou, A. Allocca, J. Amarni, P. Astone, G. Balestri, G. Ballardín et al., Class. Quantum Grav. **32**, 024001 (2015).
- [9] T. Akutsu, M. Ando, K. Arai, Y. Arai, S. Araki, A. Araya, N. Aritomi, Y. Aso, S.W. Bae, Y.B. Bae et al., Prog. Theor. Exp. Phys. **2021**, 05A101 (2021).
- [10] P. Amaro-Seoane, H. Audley, S. Babak, J. Baker, E. Barausse, P. Bender, E. Berti, P. Binétruy, M. Born, D. Bortoluzzi, et al., Gen. Relativ. Gravit. **51**, 41 (2019).
- [11] G. Hobbs, A. Archibald, Z. Arzoumanian, D. Backer, M. Bailes, N.D.R. Bhat, M. Burgay, S. Burke-Spolaor, D. Champion, I. Cognard et al., Class. Quantum Grav. **27**, 084013 (2010).
- [12] M. Maggiore, C. van den Broeck, N. Bartolo, E. Belgacem, D. Bertacca, M.A. Bizouard, M. Branchesi, S. Clesse, S. Foffa, J. García-Bellido et al., JCAP **2020**, 050 (2020).
- [13] D. Reitze, R.X. Adhikari, S. Ballmer, B. Barish, L. Barsotti, G. Billingsley, D.A. Brown, Y. Chen, D. Coyne, R. Eisenstein et al., Bull. Am. Astron. Soc. **51**, 035 (2019).
- [14] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, V.B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos et al., Living Rev. Relativ. **23**, 3 (2020).
- [15] P.A.R. Ade, R.W. Aikin, D. Barkats, S.J. Benton, C.A. Bischoff, J.J. Bock, J.A. Brevik, I. Buder, E. Bullock, C.D. Dowell et al., Phys. Rev. Lett. **112**, 241101 (2014).
- [16] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity* (John Wiley & Sons, New Jersey, 1972).
- [17] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman, New Jersey, 1973).
- [18] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- [19] Planck Collaboration, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020).
- [20] I.M. Gelfand e S.V. Fomin, *Calculus of variations* (Prentice-Hall, New Jersey, 1963).

- [21] F. Bowman, *Introduction to Bessel functions* (Dover, Nova York, 1958).
- [22] W. de Sitter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **77**, 155 (1916).
- [23] G.R. Blumenthal, S.M. Faber, J.R. Primack e M.J. Rees, *Nature* **311**, 517 (1984).
- [24] M. Watanabe, S. Kanno e J. Soda, *Prog. Theor. Phys.* **123**, 1041 (2010).
- [25] B.L. Hu, *Phys. Rev. D* **18**, 969 (1978).
- [26] P.G. Miedema e W.A. van Leeuwen, *Phys. Rev. D* **47**, 3151 (1993).
- [27] J.M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [28] K. Tomita e M. Den, *Phys. Rev. D* **34**, 3570 (1986).