



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

VÍNCULOS DE ELETRODINÂMICAS NÃO LINEARES

Por

Pierre Niau Akmansoy

Natal
2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VÍNCULOS DE ELETRODINÂMICAS NÃO LINEARES

Pierre Niau Akmansoy

Orientador: **Prof. Dr. Léo Gouvêa de Medeiros**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação
em Física do Departamento de Física Teórica e Ex-
perimental da Universidade Federal do Rio Grande
do Norte como requisito parcial para obtenção do
título de **Doutor em Física**.

Natal

14 de dezembro de 2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Niau Akmansoy, Pierre.
Vínculos de eletrodinâmicas não lineares / Pierre Niau
Akmansoy. - 2018.
231 f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Física. Natal, RN, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros.

1. Eletrodinâmica não linear - Tese. 2. Vínculos - Tese. 3. Ionização - Tese. 4. Espalhamento fóton-fóton - Tese. I.
Medeiros, Léo Gouvêa. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 537.8(043.2)

Agradecimentos

Especialmente aos meus pais, ao meu irmão, à minha avó e a toda minha família.

A Léo pela sua orientação, apoio, paciência e amizade.

Ao professor Pimentel, pelas interessantes discussões e por me permitir participar do IFT.

Ao pessoal da sala Jayme Tiomno (Clube do Fanfarrão), pelas conversas e pelos risos.

Ao pessoal do Postinho pelo companheirismo.

À CNPq pelo apoio financeiro.

Finalmente, todos os que de forma direta ou indireta participaram desta fase.

Resumo

As eletrodinâmicas não lineares (NLED) são generalizações da eletrodinâmica de Maxwell que surgem e encontram aplicações em diversos âmbitos: na gravitação, no estudo clássico do vácuo quântico, nos limites de baixas energias das teorias de cordas, entre outros. Por causa disto, é importante deduzir a validade empírica destas teorias comparando suas previsões com os resultados experimentais correspondentes. Com o objetivo de vincular os valores acessíveis aos parâmetros que caracterizam estas teorias, nesta tese são usadas a medição mais precisa da energia de ionização do átomo de hidrogênio e a seção de choque obtida na observação pioneira do espalhamento fóton-fóton pela Colaboração ATLAS em colisões ultraperiféricas de íons de chumbo.

A forma como as eletrodinâmicas tipo Born-Infeld, uma família de NLED, modifica o potencial Coulombiano produzido pelo núcleo do átomo de hidrogênio é calculada. Usando a teoria de perturbação, a correção da energia do estado fundamental é obtida. É notável que a estrutura da teoria de perturbação impõe a necessidade de usar a forma completa da Lagrangiana. Por causa disto, apesar de se comportarem de forma semelhante no limite de baixas energias, cada eletrodinâmica tipo Born-Infeld modifica a energia de ionização de forma particular. Ao comparar com a medição experimental da energia de ionização, um vínculo para o parâmetro b que caracteriza estas eletrodinâmicas é obtido da ordem de $b \gtrsim 10^{21} \text{V m}^{-1}$.

As NLED preveem naturalmente a interação entre fótons. Assim, a seção de choque $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ passa a possuir uma contribuição devido às correções não lineares da Lagrangiana de Maxwell além da do Modelo Padrão. Na aproximação de fótons equivalentes, a seção de choque completa $\text{Pb Pb} \rightarrow \text{Pb Pb} + \gamma\gamma$ em colisões ultraperiféricas de chumbo é obtida através da convolução da seção de choque do subprocesso $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ com os fluxos de fótons produzidos pelos íons. Assim, a comparação da seção choque completa

com a seção de choque experimental obtida pelo ATLAS permite obter o vínculo mais preciso dos parâmetros não lineares $\alpha \sim \beta \lesssim 2 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-4} \approx 10^{-47} \text{m}^3 \text{J}^{-1}$.

Palavras chaves: eletrodinâmicas não lineares, vínculos, energia de ionização, átomo de hidrogênio, espalhamento fóton-fóton.

Abstract

Nonlinear electrodynamics (NLED) are a generalization of Maxwell's electrodynamics that arises and is used in several fields such as: gravitation, classical consequences of the quantum vacuum, low energy limits of string theories etc. Because of this, it is an important task to evaluate the empirical validity of these theories by comparing their predictions with the corresponding experimental measurements. In this thesis, the ionization energy of the hydrogen atom and the photon-photon scattering cross section recently observed by the ATLAS Collaboration with ultraperipheral collisions of lead ions are used.

The way in which Born-Infeld-like theories, a class of NLED, modify the Coulomb potential produced by the hydrogen atom's nucleus is calculated. Then, using the perturbation theory, the first order correction of the ground state energy is derived. It is remarkable that, although this class of NLED behaves identically in the low energy limit, each theory produces a slightly different correction. This is due to the framework of perturbation theory which forces the use of the complete Lagrangian. Comparison with the measurement of the ionization energy constrains the parameter b , which characterizes this class of theories, to be $b \gtrsim 10^{21} \text{V m}^{-1}$.

The direct interaction between photons is one of the most striking features of NLED. Therefore, the cross section for $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ scattering acquires a contribution due to nonlinear corrections to Maxwell's Lagrangian besides the Standard Model ones. In the equivalent photon approximation, the complete scattering cross section for $\text{Pb Pb} \rightarrow \text{Pb Pb} + \gamma\gamma$ in ultraperipheral collisions is derived through the convolution of the subprocess cross section $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ with the photon fluxes produced by the ions. Comparison of the complete cross section with the experimental measurement obtained by the ATLAS Collaboration yields the most precise constrain for the nonlinear parameters $\alpha \sim \beta \lesssim 2 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-4} \approx 10^{-47} \text{m}^3 \text{J}^{-1}$.

Keywords: nonlinear electrodynamics, constraint, ground state energy, hydrogen atom, photon-photon scattering.

Listas de Figuras

2.1	Campos elétricos das eletrodinâmicas tipo Born-Infeld	36
5.1	Diagrama de Feynman do processo de aniquilação $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$	88
5.2	Diagrama de Feynman <i>box</i> da interação $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	90
5.3	Referencial de centro de momento do espalhamento fóton-fóton	93
5.4	Diagrama de Feynman da interação $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ devido às correções não lineares	96
5.5	Referencial de centro de momento do espalhamento fóton-fóton	105
6.1	Contração do campo elétrico de uma partícula carregada em movimento . .	111
6.2	Espalhamento ultraperiférico de íons de chumbo	113
6.3	Parâmetros de impacto em colisões ultraperiféricas	121
6.4	Distribuições de carga	127
6.5	Fatores de forma	129
6.6	Seção de choque total $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ em função da massa invariante	132
6.7	Seção de choque diferencial $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ em função de $z = \cos\theta$	132
6.8	Espaço de fase dos parâmetros α e β	138

Lista de Tabelas

6.1	Seções de choque previstas pelo Modelo Padrão	133
6.2	Valores numéricos das constantes de proporcionalidade	135
6.3	Valores superiores dos vínculos dos parâmetros α e β	138

Sumário

1	Introdução	1
2	Eletrodinâmicas não lineares e correções não lineares a Maxwell	5
2.1	Eletrodinâmica de Maxwell	6
2.1.1	No vácuo clássico	6
2.1.2	Em meios materiais	12
2.2	Eletrodinâmicas não lineares	18
2.2.1	Efeito Cotton-Mouton: birrefringência magnética linear	23
2.2.2	Eletrodinâmicas tipo Born-Infeld	27
3	Mecânica quântica, átomo de hidrogênio e teoria de perturbação	37
3.1	Revisão de mecânica quântica	37
3.2	Átomo de hidrogênio	40
3.3	Teoria de perturbação independente do tempo	45
4	Vínculos de eletrodinâmicas tipo Born-Infeld a partir da energia de ionização do átomo de hidrogênio	49
4.1	Procedimento geral	50
4.2	Eletrodinâmica de Born-Infeld	53
4.3	Eletrodinâmica logarítmica	56
4.4	Eletrodinâmica exponencial	58
4.5	Vínculo do parâmetro b para as eletrodinâmicas tipo Born-Infeld	60

5 Teoria quântica de campos e seção de choque devido a correções não lineares	63
5.1 Introdução	63
5.2 Quantização do campo real de Klein-Gordon	65
5.3 Quantização do campo eletromagnético	76
5.4 Eletrodinâmica quântica	84
5.5 Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pela QED	89
5.6 Seção de choque $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ devido a correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell	95
6 Vínculo de Correções Não Lineares da Eletrodinâmica de Maxwell usando o Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	109
6.1 Introdução	109
6.2 Aproximação de fôtons equivalentes	111
6.3 Fatores de Forma	126
6.4 Seção de choque do espalhamento elástico $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pelo Modelo Padrão	130
6.5 Vínculo dos parâmetros α e β das correções não lineares de Maxwell	134
7 Conclusão	140
A Solução aproximada das integrais da eletrodinâmica exponencial	153
A.1 Integral I_1	154
A.2 Integral I_2	154
A.3 Integral I_3	158
A.4 Integral I_4	160
A.5 Solução da integral I	161
B Computação da probabilidade de interação $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	163
B.1 Cálculo dos 21 termos	168
B.2 Resumo dos termos	215
B.3 Soma dos 21 termos e probabilidade de interação	218

Capítulo 1

Introdução

A eletrodinâmica clássica é uma das teorias mais bem sucedidas da história da física. A primeira grande unificação, a da eletricidade, magnetismo e a ótica culminou com a publicação do artigo *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, por Maxwell em 1865 [1]. Desde sua publicação, no meio do século XIX, até os dias de hoje, tem sido a fonte de previsões notáveis. O estudo de suas consequências e a sua aplicação à radiação emitida pela matéria, serviu como base para o desenvolvimento de novas teorias, a relatividade especial e a mecânica quântica. Posteriormente, o estudo de sua quantização serviu como modelo para um novo campo da física, a teoria quântica de campos. Na sua versão quantizada, é uma das teorias mais precisas conhecidas, sendo capaz de concordar com resultados experimentais em até 10 partes por bilhão [2]. Apesar deste sucesso, a crescente engenhosidade dos experimentos, tanto para baixas quanto para altas energias, torna necessário continuar testando a sua versão atual, a eletrodinâmica quântica, seja para concluir que ela continua capaz de acompanhar a precisão dos valores medidos, seja para descobrir fontes de nova física .

Diversas generalizações da eletrodinâmica de Maxwell são possíveis. As eletrodinâmicas de Proca e de Podolsky [3, 4, 5] são extensões que surgem ao quebrar a invariância de *gauge* e permitindo equações de movimento do campo A^μ de ordem maior que 2, respectivamente. Por outro lado, uma classe interessante de eletrodinâmicas surgem ao permitir equações de movimento não lineares, estas teorias são genericamente chamadas de eletrodinâmicas não lineares, ou simplesmente NLED. A teoria mais conhecida que pertence a esta classe é a de Born-Infeld. Com uma Lagrangiana semelhante ao fator de

Lorentz, foi formulada em 1934 com o propósito de sanar a divergência da autoenergia de partículas puntiformes. Em 1936, Heisenberg e Euler incorporaram à eletrodinâmica clássica correções quânticas previstas pela teoria relativística do elétron de Dirac em uma Lagrangiana efetiva. A expansão desta Lagrangiana em série de potências dos campos explicita sua não linearidade.

As NLED possuem diversas propriedades interessantes, sendo as mais notáveis a previsão do espalhamento entre ondas eletromagnéticas e do fenômeno de birrefringência no vácuo [6, 7]. As NLED oferecem uma forma conveniente de estudar classicamente correções quânticas devido à polarização do vácuo. Neste sentido, a Lagrangiana de Euler-Heisenberg, permite testar as previsões da eletrodinâmica quântica em regimes de baixas energias, quando comparado à massa do elétron. Já eletrodinâmica de Born-Infeld é particularmente distinta por surgir em diversos cenários de teorias de cordas [8, 9]. Além do mais, NLED tipo Born-Infeld encontram aplicação no contexto de gravitação, como em cenários alternativos de inflação e buracos negros tipo Reissner-Nordström [10, 11].

Apesar da riqueza destas teorias, pouco se conhece sobre a sua validade empírica [12]. Os parâmetros que, são introduzidos ao generalizar a eletrodinâmica de Maxwell, precisam ser fixados ou vinculados comparando as previsões feitas por estas com resultados experimentais. Este trabalho tem como objetivo contribuir com esta tarefa fazendo uso tanto da medição mais precisa da energia de ionização do átomo de hidrogênio quanto da primeira observação direta do espalhamento fóton-fóton, feita pela Colaboração ATLAS em 2017 [13].

Uma das consequências das NLED é a de modificar o potencial Coulombiano. Por isso, deve modificar, por sua vez, a energia de ligação do elétron ao núcleo do átomo de hidrogênio. Com o intuito de investigar como a energia de ionização do átomo de hidrogênio é alterado pelas NLED, fazemos uso da teoria de perturbação independente do tempo para calcular a primeira ordem de correção. Apesar do comportamento do potencial generalizado divergir pouco do potencial Coulombiano nos comprimentos característicos do átomo, a estrutura da teoria de perturbação é tal que a Lagrangiana completa da eletrodinâmica deve ser usada. Como consequência, cada eletrodinâmica tipo Born-Infeld¹

¹Uma eletrodinâmica é dita tipo Born-Infeld se a primeira ordem de correção da eletrodinâmica de Maxwell é idêntica à de Born-Infeld. Para mais detalhes ver a Seção 2.2.

corrigir a energia de ionização de forma distinta.

A natureza não linear das NLED leva à possibilidade de interação entre ondas eletromagnéticas. Como resultado, a quantização destas teorias deve introduzir termos de interação direta entre fótons. Portanto, a amplitude de probabilidade do espalhamento elástico $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ deve possuir contribuições devido à não linearidade inerente à eletrodinâmica além das contribuições previstas pelo Modelo Padrão. Assim, a modificação da seção de choque permite vincular os parâmetros das correções da eletrodinâmica de Maxwell confrontando-a com o resultado experimental obtido pelo ATLAS em colisões ultraperiféricas de íons de chumbo. Para isto, calculamos a seção de choque entre um par de fótons devido às correções não lineares. Em seguida, fazendo uso da aproximação de fótons equivalentes, os íons de chumbo são substituídos por seus fluxos equivalentes de fótons. Finalmente, por meio da convolução dos fluxos e da seção de choque, e restringindo o espaço de fase àquele do experimento, estimamos como as correções contribuem para a seção de choque fóton-fóton em colisões ultraperiféricas de íons.

A primeira estimativa do parâmetro b que caracteriza a eletrodinâmica de Born-Infeld foi feita pelos próprios autores. Devido ao desconhecimento, na época, da existência de outras partículas, usaram as propriedades do elétron para concluir que $b \approx 1.2 \times 10^{20} \text{ V m}^{-1}$. Nos dias de hoje, graças à descoberta de diversas outras partículas elementares, não parece razoável privilegiar o elétron em detrimento de outras. Quatro décadas depois, Soff *et al.*, usando medições de energias de transição de átomos muônicos, estimaram que $b \gtrsim 1.7 \times 10^{22} \text{ V m}^{-1}$. A forma pela qual este vínculo foi derivado foi posteriormente criticado [12]. Mais recentemente, usando a medição do espalhamento fóton-fóton do ATLAS, Ellis aperfeiçoou em 5 ordens de grandeza o vínculo para $b \gtrsim 4.3 \times 10^{27} \text{ V m}^{-1}$ [14].

Apesar do átomo de hidrogênio não alcançar as energias necessárias para o estudo preciso de eletrodinâmicas não lineares, constitui um laboratório bastante simples e facilmente adaptável para obter vínculos de NLED. Por outro lado, as energias envolvidas no LHC permitem examinar de forma bastante precisa o comportamento das NLED. De fato, a partir da medição do espalhamento fóton-fóton obtemos os vínculos mais precisos das primeiras correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell. Além disto, devido à dependência quadrática da seção de choque do espalhamento entre dois

fôtons nos parâmetros, conseguimos restringir completamente o espaço destes parâmetros. Como complemento, o impacto que a escolha da distribuição de carga do íon e do fator de absorção tem sobre a seção de choque final também é analisada.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 2 iniciamos fazendo uma breve revisão da eletrodinâmica de Maxwell. Em seguida, revisamos as principais propriedades das NLED. Assim, derivamos a forma geral que a Lagrangiana de uma NLED deve ter e analisamos as consequências das primeiras correções. Como exemplo de aplicação clássica, estudamos o efeito de birrefringência magnética linear ou efeito Cotton-Mouton. Terminamos o capítulo com uma descrição das principais eletrodinâmicas tipo Born-Infeld. No Capítulo 3, revisamos os fundamentos da mecânica quântica, sua aplicação ao átomo de hidrogênio e derivamos os resultados relevantes da teoria de perturbação independente do tempo. No Capítulo 4, fazendo uso dos resultados obtido no capítulo anterior, calculamos como a energia de ionização é afetada pelas eletrodinâmicas tipo Born-Infeld - eletrodinâmicas de Born-Infeld, exponencial e logarítmica. Usando a medição mais precisa disponível para a energia de ionização, vinculamos o parâmetro b que caracteriza cada uma dessas eletrodinâmicas. No Capítulo 5, revisamos os principais conceitos da teoria quântica de campos. Iniciamos descrevendo o processo de quantização do campo mais simples, o escalar. Baseado nesta apresentação, usamos o processo de quantização desenvolvido por Gupta e Bleuler para quantizar o campo eletromagnético. Em seguida, descrevemos os principais resultados da eletrodinâmica quântica. Como aplicação desta, apresentamos as etapas para a obtenção da seção de choque do espalhamento elástico fóton-fóton. Concluímos o capítulo quantizando a Lagrangiana de Maxwell com correções não lineares e deduzimos a seção de choque correspondente. Finalmente, no Capítulo 6 derivamos, por meio da aproximação de fôtons equivalentes, a seção de choque do espalhamento $\gamma\gamma$ a ser medida em colisões ultraperiféricas de íons. O principal ingrediente da aproximação de fôtons equivalente é o fator de forma do íon, por isso, apresentamos 4 distribuições distintas que são usadas para fins comparativos. Finalmente, deduzimos a contribuição da seção de choque devido às correções não lineares e vinculamos o espaço de fase dos parâmetros usando o resultado experimental obtido pelo ATLAS. No Capítulo 7 apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Eletrodinâmicas não lineares e correções não lineares a Maxwell

Neste capítulo, a forma das eletrodinâmicas não lineares (NLED) abordadas será definida. Será feito um breve resumo da eletrodinâmica de Maxwell e das suas principais relações na Seção 2.1. Em seguida, na Seção 2.2 a partir de suposições básicas, deduziremos a dependência funcional que a Lagrangiana de uma NLED deve possuir e a forma genérica que a série de potências correspondente deve adquirir. As primeiras consequências das correções que as NLED trazem à eletrodinâmica de Maxwell serão interpretadas por meio das relações constitutivas. Desta forma, passaremos a observar o vácuo clássico efetivamente como um meio dielétrico. O fenômeno de birrefringência magnética linear, ou efeito Cotton-Mouton, será brevemente discutido. Finalmente, listaremos os principais resultados das eletrodinâmicas tipo Born-Infeld relevantes para este trabalho. Algumas das relações derivadas nesta seção servirão como base para o desenvolvimento das seções a seguir. As unidades do SI serão usadas nesta seção, bastando igualar $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$ para obter as relações correspondentes em unidades naturais. Da definição da velocidade da luz no vácuo $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ temos que, em unidades naturais, a permeabilidade magnética é $\mu_0 = 1$.

2.1 Eletrodinâmica de Maxwell

2.1.1 No vácuo clássico

A eletrodinâmica clássica é a teoria que descreve a interação entre os campos elétrico e magnético no mundo macroscópico. Sua história remonta à antiguidade, quando fenômenos como a polarização do âmbar por meio de fricção atraíram a atenção dos filósofos. Os resultados modernos se devem ao esforço de vários cientistas, entre os quais podemos citar Cavendish, Coulomb, Ampère, Faraday, Biot e Savart. Mas é graças ao trabalho de Maxwell, corrigindo a lei de Ampère e compilando as equações necessárias à sua descrição, que a eletrodinâmica clássica adquiriu sua forma atual. Graças à notação vetorial, podemos resumir a dinâmica dos campos elétrico e magnético no vácuo clássico em 4 equações,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.4)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético, e ρ e \mathbf{j} são as fontes, a densidades de carga e de corrente. As equações homogêneas de Maxwell, as leis de Gauss para o magnetismo e de Faraday, podem ser automaticamente satisfeitas escrevendo os campos elétrico e magnético em termos de funções escalares e vetoriais. Devido às simetrias do sistema de equações, conseguimos reduzir os 6 graus de liberdade iniciais para apenas 4. Desta forma, definimos os potenciais elétrico ϕ e vetor magnético \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

A principal vantagem da notação vetorial é a de permitir escrever uma formulação independente do sistema de coordenadas, tornando assim mais claras as propriedades dos

campos elétricos e magnéticos. Consequências matemáticas, como a definição de potenciais elétricos e magnéticos, e previsões da teoria, como a propagação de ondas eletromagnéticas, são facilmente obtidas graças a esta notação.

Baseando-se em simetrias de fenômenos eletromagnéticos, Einstein propôs que a eletrodinâmica deveria obedecer um princípio de relatividade semelhante à da mecânica clássica. Em 1905, supondo a invariância da velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, apresentou sua teoria da relatividade restrita onde as transformações de Galileu, que conectam referenciais inerciais definidos pela mecânica Newtoniana, foram substituídas pelas transformações de Lorentz. Assim, dados os sistemas de referência S e S' com mesmo sistema de coordenadas, cujas origens coincidem no tempo $t = t' = 0$, se S' se move na direção e sentido de z com velocidade v com relação a S , suas coordenadas estão conectadas através das transformações

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma (ct - \beta z), \\ x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \gamma (z - \beta ct), \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ é o fator de Lorentz, $\beta = v/c$ e c a velocidade da luz no vácuo. Estas relações recuperam as transformações de Galileu quando a velocidade relativa entre os referenciais é pequena quando comparada à velocidade da luz. Em particular, podemos definir um regime não relativístico, no qual $\beta < 0.3$ e $\gamma < 1.05$, onde a mecânica Newtoniana pode ser considerada uma boa aproximação. No regime relativístico, o tempo desempenha um papel tão importante quanto o do espaço. A estrutura das transformações de Lorentz (2.6) sugere que podemos agrupar o tempo e as coordenadas espaciais em um objeto com 4 componentes $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$. Objetos deste tipo são conhecidos como 4-vetores contravariantes, onde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Desta forma, podemos reescrever (2.6) usando uma notação matricial,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

onde a convenção de Einstein foi usada de tal forma que índices repetidos são somados, e

onde

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

para um boost ao longo do eixo z . De forma análoga, podemos reunir em 4-vetores objetos que se transformam de forma semelhante ao tempo e espaço ao passar de um referencial inercial para outro. Por este motivo, agrupamos os potenciais elétrico e vetor magnético, as densidades de carga e de corrente, e os operadores de diferenciação do tempo e espaço como

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right), \quad (2.7)$$

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad (2.8)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (2.9)$$

Neste trabalho usamos a métrica de Minkowski com as componentes espaciais negativas $\eta \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. A métrica permite definir o produto escalar e a norma dos 4-vetores, $x \cdot y = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$ e $|x| = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$, respectivamente. Podemos agrupar a grandeza $x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu$ definindo assim o vetor dual de x^μ , conhecido como 4-vetores covariantes.

À luz da relatividade restrita, os campos elétrico e magnético passam a ser vistos como sendo manifestações de uma entidade chamada de campo eletromagnético. Usando a definição dos potenciais (2.5) como base, o campo eletromagnético pode ser definido como um tensor antissimétrico através da relação

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.10)$$

é interessante notar que desta definição decorre imediatamente que o campo eletromagnético é invariante pelas transformações $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \psi$, chamadas de transformações de *gauge*. Esta propriedade pode ser usada para demonstrar que das 4 componentes do 4-potencial apenas 2 são independentes [15] (ver Seção 5.3). Em coordenadas cartesianas,

usando (2.9) e (2.7), e comparando com (2.5), obtemos que o tensor campo eletromagnético pode ser escrito como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Com o objetivo de mostrar que o campo eletromagnético definido em (2.10), junto com as propriedades dos 4-vetores, recupera os resultados conhecidos, obtemos a forma como este se transforma de um sistema de referência para outro a partir da sua definição,

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

Desta forma, para dois referenciais que se conectam através de um boost na direção z com velocidade v obtemos que os campos medidos por eles se relacionam através das expressões conhecidas [16]

$$E'_x = \gamma (E_x - vB_y), \quad (2.13)$$

$$E'_y = \gamma (E_y + vB_x), \quad (2.14)$$

$$E'_z = E_z, \quad (2.15)$$

e

$$B'_x = \gamma \left(B_x + \beta \frac{E_y}{c} \right), \quad (2.16)$$

$$B'_y = \gamma \left(B_y - \beta \frac{E_x}{c} \right), \quad (2.17)$$

$$B'_z = B_z. \quad (2.18)$$

é interessante notar que estas transformações, e consequentemente a equação (2.12), são simétricas pela troca simultânea $\mathbf{E}/c \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Aplicando esta troca simultânea

em $F^{\mu\nu}$ obtemos um tensor linearmente independente chamado de dual,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix},$$

que também pode ser definido a partir de

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita¹.

Graças à notação tensorial, é possível reescrever as equações de movimento do eletromagnetismo em uma forma covariante por transformações de Lorentz,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu, \\ \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

A primeira descreve como as fontes se acoplam ao campo eletromagnético e recupera as leis de Gauss e de Ampère-Maxwell. Já a segunda é uma consequência da definição (2.10) e recupera as leis de Gauss para o magnetismo e de Faraday. A segunda equação pode ser reescrita usando o tensor eletromagnético dual de tal forma a tornar o conjunto de

¹O símbolo totalmente antissimétrico de Levi-Civita é definido como $\epsilon_{01\dots n} = 1$ e

$$\epsilon_{a_1\dots a_n} = \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares de } 01\dots n \\ -1, & \text{para permutações ímpares de } 01\dots n \\ 0, & \text{para índices repetidos} \end{cases}.$$

Também definimos que $\epsilon^{01\dots n} = -1$, seguindo uma prescrição análoga para as permutações. Além do mais, é definido que o símbolo de Levi-Civita possua o mesmo valor em qualquer sistema de coordenadas,

$$\epsilon'_{a_1 a_2 \dots a_n} = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Como consequência disto, é uma densidade tensorial de peso 1.

O tensor de Levi-Civita é definido a partir do símbolo como

$$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{\sqrt{|\eta|}} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n},$$

Onde η é o determinante da métrica $\eta_{\mu\nu}$. No caso especial de Minkowski temos que $|\eta| = 1$.

equações mais simétrico,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

A partir do tensor campo eletromagnético e seu dual, é possível definir dois invariantes de Lorentz,

$$F \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right), \quad (2.21)$$

e

$$G \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.22)$$

Por serem invariantes, possuem o mesmo valor em qualquer sistema de referência inercial. Propriedades interessantes do sistema podem ser deduzidas a partir deles. Por exemplo, se em um dado sistema de referência existe uma configuração eletrostática ($F > 0$) ou magnetostática ($F < 0$), então o invariante $G = 0$. Devido às transformações do campo eletromagnético (2.12), outro sistema de referência observando o mesmo sistema irá medir uma mistura dos campos elétrico e magnéticos. A invariância de G nestes casos implicará que os campos elétrico e magnéticos necessariamente deverão ser perpendiculares. A situação inversa também é verdadeira, se os campos elétrico e magnético são transversais em um sistema de referência e $F \neq 0$, é possível encontrar um sistema de referência puramente eletrostático ou magnetostático [17].

Finalmente, a eletrodinâmica clássica satisfaz um princípio variacional. Definindo a densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_M \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu, \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \phi \rho + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}, \quad (2.24)$$

através das equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad (2.25)$$

recuperamos as duas equações inhomogêneas de Maxwell. As outras duas equações, como comentado acima, são consequência da definição do tensor eletromagnético (2.10). O formalismo Lagrangiano tem a vantagem de explicitar as simetrias da teoria. A densi-

dade Lagrangiana² de Maxwell (2.23) é explicitamente invariante por transformações de Lorentz, propriedade que as equações de movimento correspondentes possuem. Por outro lado, para que a Lagrangiana seja invariante por transformações de *gauge*, devemos assumir $\partial_\mu j^\mu = 0$, a conservação da carga elétrica³.

2.1.2 Em meios materiais

Os meios materiais são constituídos de átomos, que por sua vez são constituídos por um núcleo de carga positiva rodeado por uma nuvem de elétrons de carga negativa. Na presença de um campo eletromagnético, os meios materiais podem reagir de diversas maneiras e, de acordo com a sua estrutura, podem ser classificados em certos grupos. Pela forma como estes reagem à presença de um campo elétrico, de maneira geral podem ser agrupados em condutores e isolantes. Os primeiros possuem elétrons fracamente ligados e, na presença de um campo elétrico, no caso ideal, se reorganizam até anulá-lo completamente em seu interior. Uma carga superficial efetiva se forma nestes materiais satisfazendo características que os permitem ser tratados como condições de contorno. Já o segundo grupo possui elétrons mais fortemente ligados, tendo assim um movimento mais restrito. Os átomos e moléculas destes materiais se esticam e rotacionam na presença de um campo elétrico externo devido à tendência das cargas positivas serem puxadas na direção do campo e das cargas negativas serem puxadas no sentido contrário. Em consequência disto, momentos de dipolo elétrico se formam em seu interior gerando um campo elétrico que se opõe ao externo, processo este chamado de polarização elétrica. A forma como este processo ocorre é não linear, sendo assim bastante complexo. Porém, para campos suficientemente fracos, uma resposta linear do material ao campo elétrico oferece uma boa descrição aproximada do processo de polarização.

Pela forma como os meios materiais reagem à presença de um campo magnético podemos classificá-los em três grandes grupos: os materiais ferromagnéticos, paramagnéticos e diamagnéticos. Estes fenômenos podem ser compreendidos completamente somente

²Com o objetivo de simplificar a nomenclatura, daqui em diante a densidade Lagrangiana será simplesmente chamada de Lagrangiana.

³Por uma transformação de *gauge* $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \psi$, a Lagrangiana \mathcal{L}_M adquire um termo extra $j^\mu \partial_\mu \psi = \partial_\mu (j^\mu \psi) - \psi \partial_\mu j^\mu$. O termo de superfície não afeta as equações de movimento. Portanto, para a Lagrangiana ser invariante, devemos restringir as correntes tal que $\partial_\mu j^\mu = 0$. Este vínculo é automaticamente satisfeito ao acoplar minimamente o campo eletromagnético a campos de matéria.

a partir de uma descrição quântica, mas argumentos semiclássicos oferecem uma boa interpretação qualitativa. Os elétrons que orbitam ao redor dos núcleos que compõem a matéria agem efetivamente como uma corrente, produzindo assim um momento de dipolo magnético. Além disto, os elétrons possuem um momento de dipolo magnético intrínseco chamado de spin. Por causa disto, um campo magnético externo interage com a matéria. O diamagnetismo é um fenômeno presente em todos os materiais mas, por ser extremamente fraco, é facilmente ofuscado pelos outros tipos de magnetismo. Na presença de um campo magnético não uniforme, a variação do seu fluxo gera um campo elétrico que induz uma variação do momento magnético orbital. Por conservação de energia, esta variação provoca um campo magnético oposto ao campo externo, dando origem à força de repulsão que caracteriza os materiais diamagnéticos.

Os átomos ou moléculas que compõem os paramagnéticos e ferromagnéticos possuem elétrons desemparelhados, apresentando assim um momento de dipolo magnético líquido não nulo. A presença de um campo magnético externo tende a alinhar os dipolos gerando por sua vez um campo magnético no mesmo sentido. Desta forma, estes materiais se caracterizam por serem atraídos por um campo magnético. A diferença entre os materiais paramagnéticos e ferromagnéticos está na forma como seus dipolos interagem entre si. No primeiro caso, os dipolos interagem fracamente e tendem imediatamente à desordem na ausência de um campo externo. Já no segundo caso, interagem de forma mais intensa e tendem a formar regiões em que os dipolos ficam alinhados, chamados de domínios. Por causa disto, ao submeter os materiais ferromagnéticos a um campo magnético, dipolos na fronteira de um domínio tendem a se alinhar com os do domínio vizinho que estão alinhados com o campo externo. Consequentemente, quando o campo de fundo é desligado, os ferromagnéticos mantêm parte da magnetização, produzindo os ímãs permanentes. Assim, a magnetização destes materiais depende da sua história. Mais informações podem ser encontradas em [16, 18, 19].

O campo eletromagnético em meios materiais é extremamente complicado em escalas microscópicas. Em muitas aplicações, porém, é suficiente conhecer o comportamento médio em escalas macroscópicas, em volumes que contenham uma grande quantidade de átomos mas pequeno com relação ao material como um todo. Nestes casos, para descrever a polarização elétrica e magnética nos materiais definimos a densidade de dipolos elétricos,

ou vetor de polarização, \mathbf{P} , e a densidade dipolos magnéticos, ou o vetor magnetização, \mathbf{M} . Analisando o campo eletromagnético gerado por estas distribuições de dipolos, podemos concluir que é equivalente àquele produzido pelas distribuições de carga e correntes [16, 18],

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Com o objetivo de distinguir as distribuições de cargas e correntes devido à polarização do material das que tem qualquer outra origem (livres), fazemos a separação,

$$\rho = \rho_f + \rho_P,$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M,$$

onde f indica as distribuições de carga e correntes livres. Com isto, é possível reescrever as equações (2.1) e (2.4) como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \tag{2.26}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.27}$$

onde definimos

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{2.28}$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \tag{2.29}$$

e chamados de vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} e campo \mathbf{H} . As outras duas equações originais de Maxwell, por não dependerem das fontes, permanecem inalteradas. A vantagem de reescrever as equações em termos dos campos \mathbf{D} e \mathbf{H} é que elas dependem apenas das cargas e correntes que controlamos, não precisamos nos preocupar com as cargas e correntes oriundas do fenômeno de polarização. É importante manter em mente que (2.26)

e (2.27) não definem completamente estes campos, de tal forma que podem não ser nulos em situações em que $\rho_f = 0$ e $\mathbf{j}_f = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ (como é nos casos de um magneto e eletroto [16]). Desta forma, nem sempre há um paralelo óbvio com os campos fundamentais \mathbf{E} e \mathbf{B} . Os campos \mathbf{D} e \mathbf{H} podem ser tratados matematicamente como os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} apenas nos casos especiais em que possuam análogos às leis de Gauss para o magnetismo e de Faraday. Para que isto ocorra, as relações

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (2.30)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (2.31)$$

devem ser nulas. Desta forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (2.32)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Em situações em que há simetrias (sistemas esfericamente ou cilindricamente esféricos, por exemplo), estas relações são naturalmente satisfeitas e podemos usar as técnicas desenvolvidas para deduzir \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Para recuperar os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} a partir de \mathbf{D} e \mathbf{H} é preciso inverter as relações (2.28) e (2.29), e, para tal, precisamos conhecer a forma dos vetores de polarização \mathbf{P} e de magnetização \mathbf{M} . Em outras palavras, precisamos conhecer como o meio material reage à presença \mathbf{E} e \mathbf{B} . De maneira geral, os vetores \mathbf{P} e \mathbf{M} podem ser escritos em termos de séries de potências dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . No caso de campos eletromagnéticos suficientemente fracos, os materiais paramagnéticos e diamagnéticos possuem uma resposta aproximadamente linear ao campo, portanto os vetores de polarização e magnetização

podem ser corretamente descritos como

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_E \mathbf{E},$$

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H},$$

onde as susceptibilidades elétrica χ_E e magnética χ_M são parâmetros adimensionais que caracterizam o meio. Enquanto o primeiro somente assume valores positivos, o segundo pode assumir valores tanto negativos (no caso de materiais diamagnéticos) como positivos (materiais paramagnéticos). Desta forma, é possível inverter facilmente as relações para obter

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{2.35}$$

onde $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi_E)$ e $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_M)$ são as permissividade e permeabilidade do material.

Usando a notação tensorial é possível recuperar estes resultados em uma forma covariante por transformações de Lorentz. Definimos os tensores deslocamento elétrico e polarização-magnetização [20]:

$$D^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cP_x & cP_y & cP_z \\ -cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ -cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ -cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. A partir deles podemos escrever as distribuições de carga e correntes

provenientes da polarização do meio material através da relação

$$j_b^\nu = \partial_\mu M^{\mu\nu},$$

onde o índice b indica que são cargas e correntes ligadas (*bound*), e as definições dos campos deslocamento elétrico e \mathbf{H} , ou relações constitutivas, como

$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

A partir desta última, recuperamos as equações de Maxwell macroscópicas para meios materiais,

$$\partial_\mu D^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.37)$$

É interessante reescrever as condições (2.32) e (2.33) em sua forma covariante. As leis de Gauss para o magnetismo e de Faraday para o campo $D^{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$\partial_\mu \tilde{D}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu} = -\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

onde $\tilde{D}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_{\alpha\beta}$ e $\tilde{M}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$ são os tensores duais a $D^{\mu\nu}$ e $M^{\mu\nu}$, e podem ser obtidos pelas trocas simultâneas $c\mathbf{D} \rightarrow -\mathbf{H}$ e $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$ para o primeiro, e $c\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{M}$ e $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{P}$ para o segundo. Desta forma, haverá total simetria entre as equações de Maxwell no vácuo e na matéria se

$$\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\nu} = 0.$$

Finalmente, uma formulação Lagrangiana é possível de tal forma a recuperar estes resultados. Definindo a Lagrangiana

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu j_f^\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \phi \rho + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_f + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.40)$$

obtemos as equações macroscópicas inhomogêneas de Maxwell a partir da equação da equação de Euler-Lagrange (2.25). As relações constitutivas são obtidas através da definição

$$D^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}}, \quad (2.41)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}. \quad (2.42)$$

Para obter as expressões para a polarização e magnetização de um sistema a partir da Lagrangiana que o descreve, substituímos (2.36) em (2.41),

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}},$$

ou, de forma equivalente, (2.28) e (2.29) em (2.42),

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} - \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (2.44)$$

A partir destas expressões, será possível dar uma interpretação ao vácuo das eletrodinâmicas não lineares de um meio dielétrico e obter a partir delas a forma pela qual se polariza.

2.2 Eletrodinâmicas não lineares

A eletrodinâmica de Maxwell é caracterizada por uma série de propriedades. Se trata de uma teoria relativística, invariante por transformações de *gauge* do grupo $U(1)$ e possui equações de movimento lineares de segunda ordem no potencial. Abrir mão de uma ou várias destas propriedades permite desenvolver generalizações do eletromagnetismo clássico. Duas eletrodinâmicas conhecidas, a de Proca e a de Podolsky, surgem ao quebrar a invariância de *gauge* - adicionando um termo de massa à Lagrangiana - e permitindo equações de movimento de ordem maior que dois no potencial, respectivamente. A linearidade das equações de movimento é a consequência da validação do princípio de superposição em regimes macroscópicos com precisão da ordem de 0.1% [18]. Ao permitir equações de movimento não lineares, surge uma família de eletrodinâmicas genericamente chamadas de eletrodinâmicas não lineares ou NLED. Alguns fenômenos, que comumente acontecem

em meios materiais passam a ser previstos por estas eletrodinâmicas no vácuo. Este é o caso da birrefringência e do dicroísmo de ondas eletromagnéticas, ocorrendo na presença de um campo elétrico ou magnético de fundo, além do próprio espalhamento entre ondas eletromagnéticas [6, 21].

As eletrodinâmicas de Heisenberg-Euler e de Born-Infeld são os exemplos mais conhecidos de NLED. A primeira é o resultado da tese de doutorado de Euler em 1936 e parte da investigação do espalhamento fóton-fóton previsto por Halpern e Debye a partir da teoria relativística do elétron de Dirac [22, 23, 24]. Desta forma, corrige a eletrodinâmica de Maxwell incorporando, de forma não perturbativa, os efeitos da polarização do vácuo a um loop. Esta correção é exata quando devido a um campo eletromagnético constante de fundo e aproximada para campos de fundo que variam lentamente com relação ao comprimento de onda de Compton e intensidades muito menores que 10^{18} V m^{-1} . Por outro lado, Born e Infeld propuseram sua teoria em 1934 com o objetivo de corrigir a divergência da autoenergia do elétron impondo um limite superior b para o módulo do campo elétrico [25, 26]. Para isto, se inspiraram na forma como a relatividade restrita restringe o valor máximo possível da velocidade, sendo que a forma da Lagrangiana tem semelhança com o fator de Lorentz. Born e Infeld propuseram o valor $b \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ como limite, sendo o campo gerado por um elétron a uma distância igual ao seu raio clássico $r_e \equiv e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2$. O elétron era a única partícula elementar conhecida na época, hoje em dia não há mais razão para privilegiá-lo em detrimento de outras. Desta forma, vincular inferiormente parâmetro b da teoria continua sendo uma tarefa a ser realizada nos dias de hoje. A eletrodinâmica não linear de Born-Infeld possui algumas propriedades interessantes, sendo a única a não apresentar o efeito de birrefringência no vácuo [27].

As equações de movimento das teorias não lineares devem ser as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais. Esta covariância pelas transformações de Lorentz limita consideravelmente a forma que a Lagrangiana que descreve estas teorias pode assumir. Os únicos invariantes relativísticos disponíveis são F e G , definidos pelas equações (2.21) e (2.22). Ao mesmo tempo, como o tensor campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é invariante por transformações de *gauge*, consequentemente F e G também o são. Assim, ao construir uma Lagrangiana a partir destes invariantes, asseguramos tanto a invariância da teoria por transformações de Lorentz como por transformações de *gauge*. Estamos interessados

no estudo de teorias que possam ter suas Lagrangianas expressas analiticamente. Desta forma, podem se expressas em termos de uma expansão em série de MacLaurin,

$$\mathcal{L}(F, G) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} F^i G^j. \quad (2.45)$$

Pela estrutura dos invariantes, à medida que os campos se tornam mais intensos as peculiaridades das correções não lineares de cada teoria passam a dominar. Por outro lado, no limite de campo fraco as correções devem ser tornar suficientemente pequenas para que a NLED se comporte efetivamente como a eletrodinâmica de Maxwell. Como consequência disto, qualquer coeficiente c_{ij} com índices negativos devem ser nulos. Mais ainda, para recuperar a forma da Lagrangiana clássica neste limite, devemos impor que $c_{00} = c_{01} = 0$ e $c_{10} = 1$.

É possível restringir ainda mais a forma geral das Lagrangianas se assumimos o vácuo como sendo invariante por transformações C , P e T . Isto pode ser feito observando que o invariante G ganha um sinal a cada transformação de paridade ou temporal devido ao tensor antissimétrico de Levi-Civita em sua definição. Desta forma, para recuperar a invariância, impomos que todos os coeficientes c_{ij} com índice j ímpar sejam nulos. Assim, a Lagrangiana que descreve uma NLED genérica deve ser função do quadrado do invariante G , portanto os primeiros termos devem ser da forma

$$\mathcal{L}(F, G^2) = F + c_{20}F^2 + c_{02}G^2 + c_{30}F^3 + c_{12}FG^2 + \dots \quad (2.46)$$

Devido à analiticidade das teorias em questão, a sua expansão (2.46) deve convergir dentro de um raio de convergência, o regime de energia característico de cada teoria. Por causa disto, cada termo deve ser menos relevante que seu predecessor de ordem menor. Para os propósitos deste trabalho, truncamos a série (2.46) mantendo apenas os termos até segunda ordem nos invariantes. Desta forma, a Lagrangiana que será utilizada para estudar correções não lineares a Maxwell é,

$$\mathcal{L}(F, G^2) = F + c_{20}F^2 + c_{02}G^2. \quad (2.47)$$

A forma geral que a Lagrangiana com termos de fonte pode assumir é

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F, G^2) - A_\mu j^\mu, \quad (2.48)$$

em que a conservação da carga $\partial_\mu j^\mu = 0$ se faz necessária a fim de recuperar a invariância de *gauge*.

Para obter as equações de movimento de uma NLED genérica a partir (2.48) usamos a equação de Euler-Lagrange (2.25),

$$\partial_\mu \left(L_F F^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = j^\nu, \quad (2.49)$$

onde $L_F \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}$ e $L_G \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}$ são as derivadas da Lagrangiana com relação aos invariantes F e G , respectivamente. Esta equação é a generalização das leis de Gauss e de Ampère-Maxwell para as NLED. Devido à definição do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$, as outras duas equações, a lei de Gauss para o magnetismo e a lei de Faraday, para os campos **E** e **B** continuam válidas. A forma de (2.49) é semelhante à das equações de Maxwell em meios materiais. Para interpretar o termo entre parênteses, calculamos o tensor deslocamento elétrico (2.41) para a Lagrangiana (2.48) obtendo,

$$D^{\mu\nu} = L_F F^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2.50)$$

sendo este o campo produzido unicamente pelas cargas livres. Com esta definição, as equações de movimento das NLED podem ser escritas de forma mais compacta,

$$\partial_\mu D^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.51)$$

É importante manter em mente que, de forma análoga às equações de Maxwell para os meios materiais, a equação (2.51) não define completamente o campo $D^{\mu\nu}$, é necessário conhecer como se comporta o divergente do seu dual. Novamente, em casos de simetria (i.e. carga puntiforme), estas relações são naturalmente satisfeitas e podemos usar as técnicas desenvolvidas para a eletrodinâmica de Maxwell no vácuo⁴.

⁴Outros exemplos são aqueles em que o campo elétrico possui apenas uma componente, como nos casos de um fio ou plano homogeneamente carregado infinito.

Finalmente, os termos não lineares da Lagrangiana (2.46) podem ser interpretados como responsáveis pela origem das propriedades materiais ao vácuo. Esta interpretação é reforçada pela eletrodinâmica quântica, onde é prevista a constante produção e subsequente aniquilação de partículas e antipartículas virtuais no vácuo. Estas flutuações do vácuo quântico se polarizam na presença de um campo eletromagnético. A partir da Lagrangiana de Euler-Heisenberg podemos estudar classicamente como a polarização prevista pela QED altera as equações de Maxwell. Partindo das equações (2.43) e (2.44) obtemos os vetores de polarização e magnetização para (2.47)

$$\mathbf{P} = c_{20}\varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{E} + 2c_{02}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{M} = -\frac{c_{20}}{\mu_0} \left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{B} + 2c_{02}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E}. \quad (2.53)$$

Dependendo do campo eletromagnético, o vácuo passa a ser anisotrópico e, como consequência, sua permissividade e permeabilidade passam a ser grandezas tensoriais. Isto pode ser observado ao escrever os campos de deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo \mathbf{H} , usando (2.52) e (2.53), em termos dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} de forma análoga às equações (2.34) e (2.35), obtendo

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{e}_i \varepsilon_{ij} E_j,$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{e}_i \mu_{ij}^{-1} B_j,$$

onde \hat{e}_i é o versor na direção i e

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(1 + c_{20}\varepsilon_0 E^2 - \frac{c_{20}}{\mu_0} B^2 \right) \delta_{ij} + 2c_{02}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} B_i B_j, \quad (2.54)$$

$$\mu_{ij}^{-1} = \frac{1}{\mu_0} \left(1 + c_{20}\varepsilon_0 E^2 - \frac{c_{20}}{\mu_0} B^2 \right) \delta_{ij} - 2c_{02}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E_i E_j.$$

são os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo devido a um campo eletromagnético.

2.2.1 Efeito Cotton-Mouton: birrefringência magnética linear

A birrefringência em meios materiais ocorre quando o índice de refração depende da direção da polarização da onda eletromagnética. Este fenômeno foi primeiramente observado no século 17 na calcita, um mineral que devido à sua forte birrefringência faz os objetos vistos através dele aparecerem em dobro. Na primeira metade do século 19, Faraday, convencido de que a luz era um fenômeno eletromagnético, descobriu que um feixe de luz polarizado tem sua polarização rotacionada ao atravessar um material transparente permeado por um campo magnético paralelo ao feixe. Este fenômeno ocorre na maior parte dos materiais dielétricos transparentes [28, 29].

Os efeitos Faraday e Cotton-Mouton são semelhantes, descrevem anisotropias óticas que alguns materiais dielétricos adquirem devido à presença de um campo magnético. O primeiro trata da rotação do plano de polarização da onda polarizada em um meio material devido a um campo magnético paralelo e é quantificado pela diferença entre os índices de refração circulares, sendo também chamado de birrefringência magnética circular. Já o efeito Cotton-Mouton descreve a rotação do plano de polarização da onda polarizada em um meio material devido a um campo magnético perpendicular e é quantificado pela diferença entre os índices de refração linear, sendo assim também chamado de birrefringência magnética linear [30].

A partir do estudo das consequências da teoria de Dirac do elétron relativístico foi mostrado que esta previa a ocorrência de fenômenos não lineares no vácuo. Em particular, foi previsto a presença de birrefringência no vácuo quando na presença de um campo elétrico ou magnético de fundo. Porém, devido à pequena intensidade deste fenômeno, ainda não foi medido conclusivamente [31, 32].

Para o estudo do efeito Cotton-Mouton devido a uma eletrodinâmica não linear em regimes de energias óticas, usamos a Lagrangiana até segunda ordem nos invariantes (2.47) e escolhemos um sistema de coordenadas cartesiano tal que o campo magnético uniforme de fundo aponta na direção x e a propagação da onda eletromagnética polarizada se dá na direção z [6]. Decomponemos os campos elétrico e magnético totais em uma parte que representa o campo de fundo, indicada pelo índice 0, e em outra que representa a

onda eletromagnética, indicada pelo índice ω ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\omega.$$

Com o objetivo de linearizar as expressões, assumimos que o campo de fundo é muito mais intenso que a onda eletromagnética, $|\mathbf{B}_0| \gg |\mathbf{B}_\omega|$. Calculamos os vetores \mathbf{D} e \mathbf{H} usando os vetores de polarização (2.52) e magnetização (2.53) e mantemos apenas os termos lineares no campo da onda eletromagnética, desprezando os termos puramente devido ao campo de fundo. Desta forma obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\omega &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_\omega - c_{20} \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} B_0^2 \mathbf{E}_\omega + 2c_{02} \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} (\mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0, \\ \mathbf{H}_\omega &= \frac{\mathbf{B}_\omega}{\mu_0} - \frac{c_{20}}{\mu_0^2} B_0^2 \mathbf{B}_\omega - 2 \frac{c_{20}}{\mu_0^2} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_\omega) \mathbf{B}_0.\end{aligned}$$

Como todos os campos possuem componentes apenas no plano xy e estamos interessados em analisar o efeito da birrefringência nestas componentes, é útil reescrever as relações acima em uma notação matricial bidimensional,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\omega &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + (2c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega, \\ \mathbf{H}_\omega &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 1 - 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{B}_\omega,\end{aligned}\tag{2.55}$$

onde a componente z foi ignorada.

O próximo passo é vincular os campos usando as equações de Maxwell. Para isto, assumimos que a onda eletromagnética seja bem descrita por uma onda plana monocromática com índice de refração n ,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega &= \mathbf{E}_\omega^0 e^{i\omega(\frac{n}{c}\hat{z}\cdot\mathbf{r}-t)}, \\ \mathbf{B}_\omega &= \mathbf{B}_\omega^0 e^{i\omega(\frac{n}{c}\hat{z}\cdot\mathbf{r}-t)}.\end{aligned}$$

Notamos que todos os campos associados à onda eletromagnética possuem apenas de-

pendência nas variáveis z e t . Aplicando a lei de Faraday (2.3) nos campos \mathbf{E}_ω e \mathbf{B}_ω obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_\omega &= -\frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t}, \\ \hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial z} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t}, \\ \hat{z} \times \left(\frac{n}{c} \mathbf{E}_\omega \right) &= \mathbf{B}_\omega,\end{aligned}\tag{2.56}$$

indicando que os campos elétrico e magnético são perpendiculares entre si e à propagação da onda. Aplicando a lei de Ampère-Maxwell para o deslocamento elétrico \mathbf{D} e campo \mathbf{H} obtemos,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_\omega &= \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (\hat{z} \times \mathbf{H}_\omega) &= \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t}.\end{aligned}$$

Manipulamos primeiro o termo entre parênteses notando que o efeito do produto vetorial $\hat{z} \times \mathbf{H}_\omega$ pode ser representado em notação matricial como

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}_\omega.$$

Em seguida, usando a expressão (2.55) e substituindo o campo magnético da onda eletromagnética pela expressão (2.56) obtemos

$$\begin{aligned}\hat{z} \times \mathbf{H}_\omega &= \frac{n}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega, \\ &= \frac{n}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} -1 + c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & -1 + 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega.\end{aligned}$$

Desta forma, a lei de Ampère-Maxwell nos dá

$$\frac{n}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} -1 + c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & -1 + 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial z} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + (2c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t},$$

$$n^2 \begin{pmatrix} -1 + c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & -1 + 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega = - \begin{pmatrix} 1 + (2c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega,$$

ou

$$\begin{pmatrix} n^2 \left(1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}\right) - 1 - (2c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & n^2 \left(1 - 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}\right) - 1 + c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (2.57)$$

A equação (2.57) só pode ser satisfeita se o produto entre o operador e campo elétrico for nulo. Observamos que existem duas possibilidades para satisfazer esta condição. Para uma onda eletromagnética com polarização paralela ao campo magnético de fundo (na direção x), o índice de refração deve ser tal que o primeiro autovalor seja nulo. Igualando a zero e isolando n obtemos

$$n_{\parallel}^2 = \frac{1 + (2c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0}}{1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}} \approx 1 + 2c_{02} \frac{B_0^2}{\mu_0},$$

$$n_{\parallel} \approx 1 + c_{02} \frac{B_0^2}{\mu_0},$$

onde usamos o fato que $c_{20}B_0^2/\mu_0 \sim c_{02}B_0^2/\mu_0 \ll 1$. Da mesma forma, para uma onda eletromagnética com polarização perpendicular ao campo magnético de fundo, o segundo autovalor deve ser nulo. Resolvendo para o índice de refração, obtemos

$$n_{\perp}^2 = \frac{1 - c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}}{1 - 3c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}} \approx 1 + 2c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0},$$

$$n_{\perp} \approx 1 + c_{20} \frac{B_0^2}{\mu_0}.$$

A dependência do índice de refração na polarização da onda caracteriza o efeito de birrefringência. O efeito de birrefringência é quantificado pela diferença entre os índices de

refração ao longo dos eixos paralelo e perpendicular,

$$\begin{aligned}\Delta n_{CM} &= n_{\parallel} - n_{\perp}, \\ &= (c_{02} - c_{20}) \frac{B_0^2}{\mu_0}.\end{aligned}$$

É importante manter em mente que esta relação foi obtida apenas levando em conta termos da Lagrangiana até segunda ordem nos invariantes. Por causa disto, se por um lado podemos concluir a partir dela que uma teoria eletromagnética não linear possua birrefringência se $c_{02} \neq c_{20}$, por outro lado não podemos inferir que a teoria não possua birrefringência no caso em que $c_{02} = c_{20}$. De fato, as eletrodinâmicas de Born-Infeld, exponencial e logarítmica (ver seção 2.2.2) fazem parte de uma classe de teorias não lineares, chamadas tipo Born-Infeld, justamente caracterizadas por ter seus coeficientes $c_{02} = c_{20} = \frac{1}{2\varepsilon_0 b^2}$. É bem conhecido que, destas, apenas a própria teoria de Born e Infeld não apresenta o fenômeno de birrefringência [27].

Finalmente, como as eletrodinâmicas não lineares em consideração devem satisfazer o princípio de causalidade, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas devem ser menores ou iguais que c . Consequentemente, os índices de refração devem ser maiores ou iguais à unidade $n \geq 1$. Por consistência, deduzimos que os coeficientes c_{20} e c_{02} devem necessariamente ser positivos [33, 34].

2.2.2 Eletrodinâmicas tipo Born-Infeld

Nesta subseção listamos algumas das propriedades básicas das teorias tipo Born-Infeld. Estas eletrodinâmicas são caracterizadas por possuírem o mesmo comportamento que a eletrodinâmica de Born-Infeld no limite de campos fracos. Isto pode ser notado examinando as expansões em série de potências das Lagrangianas na forma de (2.46). Assim, além de recuperar a eletrodinâmica de Maxwell no limite de campos fracos, as correções não lineares são idênticas (coeficientes c_{20} e c_{02}). As diferenças entre estas teorias passam a se manifestar somente em ordens superiores.

A principal motivação que levou Max Born a construir uma eletrodinâmica não linear foi a de encontrar uma teoria na qual a autoenergia de uma carga puntiforme fosse finita. Mais recentemente, foi mostrado por Fradkin e Tseytlin que a Lagrangiana efetiva

a nível de árvore para uma teoria de cordas bosônicas é idêntica à de Born-Infeld [8].

As eletrodinâmicas tipo Born-Infeld encontram grande parte do seu uso na gravitação. O acoplamento da teoria eletromagnética de Born-Infeld com a gravitação de Einstein foi estudado em [35], pouco tempo depois da NLED ter sido proposta, procurando sanar os infinitos no centro da métrica de Schwarzschild. Como alternativa à inflação produzida por um campo escalar, um *toy-model*, que inclui teorias tipo Born-Infeld, é estudado em [36]. As eletrodinâmicas logarítmicas e exponenciais são aplicadas no estudo de buracos negros pontuais carregados e no comportamento assimptótico de buracos negros tipo Reissner-Nordstrom [10, 11]. Mais informações sobre as eletrodinâmicas logarítmicas e exponenciais podem ser encontradas em [37, 38].

Eletrodinâmica de Born-Infeld

A Lagrangiana proposta por Born e Infeld pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{BI} = \varepsilon_0 b^2 \left(1 - \sqrt{1 - 2X} \right),$$

onde $X \equiv \frac{F}{\varepsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\varepsilon_0^2 b^4}$. Nesta expressão, b é um parâmetro livre que possui unidades de V m^{-1} e é identificado com o valor superior da intensidade que o campo elétrico pode assumir. Como foi dito anteriormente, a primeira estimativa do parâmetro b foi feita usando as propriedades do elétron dando um limite superior para o campo elétrico da ordem de $b = \frac{e}{4\pi r_e^2} \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$, onde $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \sim 10^{-15} \text{ m}$ é o raio clássico do elétron. Esta teoria satisfaz o princípio de correspondência⁵, recuperando a eletrodinâmica de Maxwell no limite de campos fracos. Isto pode ser observado expandindo a Lagrangiana em série de potências nos invariantes relativísticos para $X \ll 1$,

$$\mathcal{L}_{BI} \approx F + \frac{F^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{FG^2}{2\varepsilon_0^2 b^4} + \frac{F^3}{2\varepsilon_0^2 b^4},$$

onde o primeiro termo corresponde à Lagrangiana de Maxwell. As eletrodinâmicas tipo Born-Infeld se caracterizam por possuírem os coeficientes dos termos de segunda ordem iguais a $c_{20} = c_{02} = \frac{1}{2\varepsilon_0 b^2}$.

⁵O termo princípio de correspondência é geralmente usado para designar que o comportamento de um sistema quântico recupera o comportamento clássico no limite de grandes números quânticos. Neste texto, o termo é usado para indicar a redução de uma nova teoria a uma teoria prévia.

A partir da definição do tensor deslocamento elétrico (2.50) podemos obter a dependência geral dos vetores \mathbf{D} e \mathbf{H} nos vetores \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= L_F \varepsilon_0 \mathbf{E} + L_G \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{B}, \\ &= \varepsilon_0 \frac{b^2 \mathbf{E} + c^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{\sqrt{b^4 - b^2 (E^2 - c^2 B^2) - c^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}},\end{aligned}\quad (2.58)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= L_F \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - L_G \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}, \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{b^2 \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E}}{\sqrt{b^4 - b^2 (E^2 - c^2 B^2) - c^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}}.\end{aligned}$$

Como exemplo e para uso posterior, obteremos abaixo o campo elétrico para uma carga puntiforme de intensidade q no vácuo. O sistema estando em equilíbrio e na ausência de um campo eletromagnético de fundo todos os campos envolvidos devem ser estáticos. A simetria esférica do problema indica que não pode existir um campo magnético e que o vetor de deslocamento elétrico deve possuir apenas componente radial. Portanto, esta simetria implica que $\nabla \times \mathbf{D} = 0$ permitindo usar as técnicas padrões para resolver a lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \delta(\mathbf{r}),$$

obtendo

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (2.59)$$

Temos também que o deslocamento elétrico em função do campo elétrico é dado pela equação (2.58),

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{b^2 \mathbf{E}}{\sqrt{b^4 - b^2 E^2}}. \quad (2.60)$$

Portanto, igualando as equações (2.59) e (2.60), o módulo deve ser

$$\frac{q}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \frac{b^2 E}{\sqrt{b^4 - b^2 E^2}}.$$

Assim, invertendo esta equação para o campo elétrico, obtemos

$$\mathbf{E}_{BI} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{\sqrt{r^4 + \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}\right)^2}}. \quad (2.61)$$

É interessante notar que a teoria introduz um comprimento R fundamental associado à carga q dado por $R^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$. Este comprimento é equivalente à distância da carga q para a qual o campo elétrico produzido por ela atinge o valor b na eletrodinâmica de Maxwell. Ao contrário da eletrodinâmica de Maxwell, o campo elétrico da carga puntiforme é bem comportado na origem. Tomando o limite $r \rightarrow 0$ desta expressão mostra que o valor máximo que o campo pode atingir independe da carga e é igual a b . No outro sentido, quando $r^2 \gg \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$, recuperamos o resultado clássico. Se usamos o valor estimado por Born e Infeld para o parâmetro $b \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ concluímos que para uma carga $q = e$ este limite é equivalente a $r \gg 10^{-15} \text{ m}$. Mais ainda, mantendo apenas a primeira correção ao campo elétrico obtemos

$$\mathbf{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{q^3}{128\pi^3 \epsilon_0^3 r^6 b^2} \hat{r}.$$

A razão entre a correção e o termo de Maxwell, para as mesmas condições usadas acima, $b \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ e $q = e$ é

$$\frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4 b^2} \ll 1.$$

para $r \gg 10^{-15} \text{ m}$.

Eletrodinâmica exponencial

A eletrodinâmica exponencial é descrita pela Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_E = \epsilon_0 b^2 (e^X - 1),$$

onde $X \equiv \frac{F}{\epsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\epsilon_0^2 b^4}$. No limite de campos fracos, ou seja,

$$\frac{F}{\epsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\epsilon_0^2 b^4} \ll 1,$$

esta Lagrangiana pode ser aproximada pelos primeiros termos da série de potência nos invariantes,

$$\mathcal{L}_E \approx F + \frac{F^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{FG^2}{2\varepsilon_0^2 b^4} + \frac{F^3}{6\varepsilon_0^2 b^4}.$$

Como pode ser notado, as correções de segunda ordem nos invariantes são idênticas às da eletrodinâmica de Born-Infeld, característica desta família de teorias eletromagnéticas. Porém, passa a diferir da mesma a partir dos termos de terceira ordem.

Os vetores de deslocamento elétrico \mathbf{D} e campo \mathbf{H} assumem a forma geral,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 e^X \left[\mathbf{E} + \frac{c^2}{b^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right], \quad (2.62)$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} e^X \left[\mathbf{B} - \frac{1}{b^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right],$$

onde

$$X = \frac{\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}}{2\varepsilon_0 b^2} + c^2 \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{2b^4}.$$

Para obter o vetor de deslocamento elétrico para uma carga puntiforme de intensidade q no vácuo, podemos usar os mesmos argumentos usados no caso da eletrodinâmica de Born-Infeld. Sendo assim, temos também que o deslocamento elétrico é dado por

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Igualando esta expressão com (2.62) obtemos a equação a ser invertida,

$$\varepsilon_0 e^{\frac{E^2}{2b^2}} E = \frac{q}{4\pi r^2},$$

Elevando ao quadrado e acrescentando os fatores necessários é possível obter

$$\frac{E^2}{b^2} e^{\frac{E^2}{b^2}} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 b} \right)^2. \quad (2.63)$$

Antes de inverter esta expressão, é necessário observar que ela se trata de uma equação transcendental cuja solução é obtida através de métodos gráficos, ou métodos perturbativos. Tendo isto em mente, notamos que no limite em que $r \rightarrow 0$, o lado direito da

tende ao infinito. Para o lado esquerdo acompanhar o crescimento, ou o monômio ou a potência da exponencial devem igualmente tender ao infinito. Como ambos possuem a mesma expressão, concluímos que o campo elétrico diverge na origem. Isto indica que, por mais que seja uma eletrodinâmica tipo Born-Infeld, os termos de ordem superior da Lagrangiana são relevantes para garantir a convergência do campo elétrico. Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$, o lado direito tende a zero. Para potências positivas, a exponencial tem seu menor valor igual a 1. Logo, para a expressão permanecer válida o monômio tende a zero e portanto $E \ll b$. Expandindo a exponencial em série de Taylor e mantendo apenas o primeiro termo recuperamos o campo elétrico de Maxwell para a carga puntiforme. Já, mantendo até o segundo termo da expansão obtemos um polinômio de segunda ordem para E^2 ,

$$\frac{E^4}{b^4} + \frac{E^2}{b^2} - \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 b} \right)^2 = 0,$$

que possui apenas uma solução que recupera Maxwell,

$$E^2 = -\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2 b} \right)^2}.$$

Assim, obtemos que

$$\mathbf{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{q^3}{128\pi^3 \epsilon_0^3 b^2 r^6} \hat{r},$$

resultado idêntico ao de Born-Infeld.

Para inverter a expressão (2.63), usamos a função Lambert ou produto logaritmo W definida pela relação $x = W(xe^x)$. Assim, aplicando a função Lambert em ambos lados obtemos,

$$\mathbf{E}_E = b \sqrt{W \left[\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 b} \right)^2 \right]} \hat{r}.$$

É interessante notar que, por mais que o campo elétrico de uma carga puntiforme divirja nesta eletrodinâmica, a sua autoenergia converge. Isto pode ser visto calculando a energia

total do campo elétrico produzido pela carga q ,

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon_0 \int d^3r E^2, \\ &= \varepsilon_0 b^2 \int d^3r W \left[\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 b} \right)^2 \right], \\ &= 4\pi\varepsilon_0 b^2 \int_0^\infty dr r^2 W \left(\frac{a^4}{r^4} \right), \end{aligned}$$

onde, por conveniência, definimos $a^2 \equiv \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}$. Fazendo a mudança de variáveis $\frac{a^4}{r^4} = ze^z$ para fazer uso das propriedades da função Lambert, obtemos

$$U = \pi\varepsilon_0 b^2 a^3 \int_0^\infty dz e^{-\frac{3z}{4}} \left(z^{\frac{1}{4}} + z^{-\frac{3}{4}} \right).$$

Mudando mais uma vez de variável $z = \frac{4}{3}u$, podemos reescrever a integral como

$$U = \pi\varepsilon_0 b^2 a^3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{5}{4}} \int_0^\infty du e^{-z} z^{\frac{5}{4}-1} + \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty du e^{-z} z^{\frac{1}{4}-1} \right].$$

Finalmente, reconhecendo a definição da função $\Gamma(z) = \int_0^\infty dx e^x x^{z-1}$, temos que a auto-energia de uma carga puntiforme q na eletrodinâmica exponencial é dada por

$$U = \pi\varepsilon_0 b^2 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{5}{4}} \Gamma \left(\frac{5}{4} \right) + \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \right],$$

ou

$$U \approx 5.2\pi\varepsilon_0 b^2 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.64)$$

Desta forma vemos que, apesar do campo elétrico não possuir um valor finito superior para sua intensidade, ao contrário da eletrodinâmica de Maxwell, a autoenergia de uma carga puntiforme é finita na eletrodinâmica exponencial.

Eletrodinâmica logarítmica

A eletrodinâmica logarítmica pode ser derivada a partir da Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_L = -\varepsilon_0 b^2 \ln(1 - X),$$

onde também fizemos uso da definição $X \equiv \frac{F}{\varepsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\varepsilon_0^2 b^4}$. Para o limite de campo fraco, os primeiros termos da expansão em série de potência são dados por,

$$\mathcal{L}_L \approx F + \frac{F^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{G^2}{2\varepsilon_0 b^2} + \frac{FG^2}{2\varepsilon_0^2 b^4} + \frac{F^3}{3\varepsilon_0^2 b^4}.$$

Da mesma forma, as correções de segunda ordem são idênticas às de Born-Infeld e passa a diferir a partir dos termos de terceira ordem nos invariantes. Os vetores de deslocamento elétrico \mathbf{D} e campo \mathbf{H} em função dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} nesta eletrodinâmica assumem a forma geral,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E} + \frac{c^2}{b^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{1 - \frac{\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}}{2\varepsilon_0 b^2} - \frac{c^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{2b^4}}, \quad (2.65)$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B} - \frac{1}{b^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E}}{1 - \frac{\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}}{2\varepsilon_0 b^2} - \frac{c^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{2b^4}}.$$

Novamente, para uma carga puntiforme de intensidade q no vácuo, o vetor de deslocamento elétrico é dado por

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Junto com a equação (2.65) temos que o módulo do campo elétrico pode ser derivado invertendo a expressão,

$$\varepsilon_0 \frac{E}{1 - \frac{E^2}{2b^2}} = \frac{q}{4\pi r^2},$$

obtendo

$$\frac{E}{1 - \frac{E^2}{2b^2}} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2},$$

ou

$$\frac{E^2}{2b^2} + \frac{4\pi \varepsilon_0 r^2}{q} E - 1 = 0.$$

Resolvendo este polinômio de segunda ordem e mantendo a solução que recupera Maxwell no limite $r \rightarrow \infty$ obtemos

$$\mathbf{E}_L = \frac{4\pi \varepsilon_0 b^2}{q} \left(\sqrt{r^4 + 2 \left(\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 b} \right)^2} - r^2 \right) \hat{r}. \quad (2.66)$$

é possível obter outra expressão para o campo elétrico multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{r^4 + 2 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)^2 + r^2}$,

$$\mathbf{E}_L = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2 b}\right)^2}} \hat{r}.$$

A partir da equação (2.66) é facilmente observado que, no limite $r \rightarrow 0$, o módulo do campo elétrico converge para $E_L = \sqrt{2}b$. Além disso, para

$$r^2 \gg \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b},$$

o campo elétrico pode ser aproximado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L &= \frac{4\pi\varepsilon_0 b^2}{q} r^2 \left(\sqrt{1 + 2 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b r^2}\right)^2} - 1 \right) \hat{r}, \\ &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{q^3}{128\pi^3 \varepsilon_0^3 b^2 r^6} \hat{r}, \end{aligned}$$

onde novamente obtemos um resultado idêntico ao da NLED de Born-Infeld.

É interessante comparar graficamente o comportamento dos campos elétricos de uma carga puntiforme devido a cada eletrodinâmica. Para isto, traçamos na Figura 2.1 os gráficos dos campos elétricos normalizado pelo parâmetro b em função da distância por unidade de raio de Bohr $x \equiv \frac{r}{a_0}$, onde $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$. Por simplicidade, fazemos $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2 b} = 1$. Como esperado, o valor dos campos elétricos das eletrodinâmicas de Born-Infeld e logarítmica são limitados superiormente pelo valor 1 e $\sqrt{2}$. O campo elétrico da eletrodinâmica exponencial diverge na origem, porém mais lentamente do que na eletrodinâmica de Maxwell. Graças a este comportamento, a autoenergia de uma carga puntiforme nesta eletrodinâmica é finita (ver equação (2.64)).

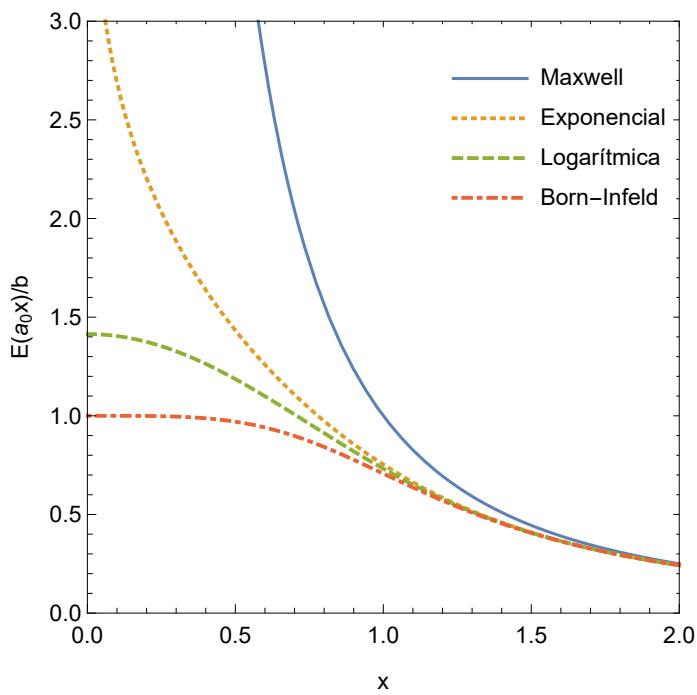


Figura 2.1: Gráfico dos campos elétricos das eletrodinâmicas de Maxwell, Born-Infeld, logarítmica e exponencial. O campo elétrico é normalizado pelo parâmetro b e é plotado em função de x em unidades de raio de Bohr. Por conveniência foi feito $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0^2 b} = 1$.

Capítulo 3

Mecânica quântica, átomo de hidrogênio e teoria de perturbação

Neste capítulo temos como objetivo apresentar uma expressão para correção à energia fundamental do átomo de hidrogênio. Esta expressão será usada no Capítulo 4 para vincular as teorias tipo Born-Infeld. Na primeira seção fazemos um breve resumo dos fundamentos da mecânica quântica não relativística. Na segunda seção, as principais etapas da resolução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio são apresentadas. A função de onda do estado fundamental é obtida. Finalmente, na última seção, usando a teoria de perturbação independente do tempo obtemos a expressão para a correção da energia de ionização.

3.1 Revisão de mecânica quântica

Os primeiros passos em direção à mecânica quântica são dados no início do século 20 com o objetivo de descrever os fenômenos para os quais a física da época - mecânica Newtoniana, eletromagnetismo de Maxwell e termodinâmica - não oferecia uma descrição adequada. Dentre estes fenômenos, podemos citar a radiação de um corpo negro, o espalhamento Compton, o efeito fotoelétrico e a estabilidade do átomo de hidrogênio e suas linhas espectrais. Para tentar explicar este último, Bohr amalgamou princípios da física clássica com a ideia inovadora de Planck - a emissão e absorção da radiação pela matéria se dá de forma discreta - para reconciliar o modelo atômico de Rutherford com os resultados

experimentais. O modelo atômico de Bohr explicava a estabilidade do átomo e, a partir da interpretação da emissão de radiação homogênea como consequência da transição do elétron de uma órbita para outra menos energética, recuperava a relação empírica de Balmer para as linhas espectrais [39, 40, 41].

Apesar do seu sucesso, o modelo atômico de Bohr recebeu duras críticas. De fato, este modelo não respondia alguns questionamentos como o porquê do elétron não emitir radiação ao longo de sua órbita circular, as causas da emissão espontânea de radiação ou o que acontecia com o elétron no intervalo de tempo durante uma transição entre estados, entre outros. Posteriormente, Louis de Broglie postulou, em analogia ao comportamento dual da radiação eletromagnética, que partículas massivas também deveriam apresentar um comportamento ondulatório [42]. O comprimento de onda de uma partícula seria inversamente proporcional ao seu momento. A partir desta ideia, de Broglie mostrou que as frequências acessíveis às ondas estacionárias do elétron ao redor do núcleo oferecia uma explicação para os estados discretos acessíveis ao átomo de hidrogênio. Esta hipótese foi confirmada independentemente por experimentos realizados nos EUA e na Escócia ao mostrar que um feixe de elétrons apresentava um padrão de difração ao refletir e espalhar em redes cristalinas, respectivamente [43, 44].

Ainda assim, existia na época o sentimento de que os vários postulados necessários para descrever os fenômenos não tinham a forma de uma teoria, ou seja, não surgiam a partir de primeiros princípios físicos e falhavam ao tentar descrever alguns sistemas, como é o caso de átomos com vários elétrons. Heisenberg e Schrödinger, com o objetivo construir uma base fundamental a partir da qual conseguissem derivar o modelo de Bohr e as linhas espectrais, desenvolveram independentemente em 1925 a mecânica quântica matricial e em 1926 a mecânica quântica ondulatória, respectivamente [45]. A primeira tinha como objetivo recuperar os resultados experimentais unicamente a partir de relações entre entidades mensuráveis e foi formulada usando a recente álgebra matricial. Ja, a segunda, surge como generalização do postulado de de Broglie e foi formulada em termos de uma equação diferencial de onda. Ambas formulações foram mostradas equivalentes e reunidas por Dirac numa formulação mais geral em termos de objetos abstratos batizados de kets e bras [46]. Posteriormente, em 1928, ao incorporar os princípios da relatividade de Einstein à mecânica quântica, Dirac deduziu uma equação para dinâmica relativística

do elétron e, a partir desta, previu a existência de uma partícula idêntica ao elétron mas com carga oposta [22]. O pósitron, como esta partícula ficou conhecida, foi descoberto 4 anos depois, consolidando assim o sucesso da teoria quântica [47].

A mecânica quântica não relativística pode ser formulada usando como base um conjunto de 5 postulados [45, 48]:

1. Todas as informações acessíveis de um sistema, em qualquer instante de tempo t , estão contidas em um vetor do espaço de Hilbert $|\psi(t)\rangle$;
2. A cada quantidade fisicamente mensurável \mathcal{O} corresponde um operador linear Hermitiano O definido no espaço de Hilbert;
3. A medição do observável \mathcal{O} é representado como a aplicação do operador correspondente no vetor que descreve o sistema $O|\psi(t)\rangle$. Os únicos resultados possíveis são os autovalores o_n do operador O . Imediatamente após a medição, o sistema passa a se encontrar no autoespaço cuja base é formada pelos i autovetores linearmente independentes $|o_n^i\rangle$ associados ao autovalor o_n ;
4. Se o sistema $|\psi(t)\rangle$ assume valores discretos do observável \mathcal{O} , a probabilidade de medir o autovalor o_n é

$$P(o_n) = \sum_{i=1}^N \frac{|\langle o_n^i | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle},$$

onde N indica a degenerescência do autovalor o_n . Se o sistema assume valores contínuos, a probabilidade do sistema ser encontrado no intervalo o e $o + do$ do observável é

$$dP = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(o')|^2 do'} |\psi(o)|^2 do,$$

onde $\psi(o) \equiv \langle o | \psi(t) \rangle$;

5. A evolução temporal do estado $|\psi(t)\rangle$ do sistema é descrita pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

onde H é o operador Hamiltoniano correspondente à energia total do sistema.

Na descrição Hamiltoniana da mecânica clássica, qualquer quantidade física $\mathcal{O}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ pode ser escrita em termos das variáveis dinâmicas fundamentais \mathbf{r} e \mathbf{p} que caracterizam o sistema. Para obter o operador correspondente no espaço de Hilbert, fazemos uso do princípio de correspondência de Heisenberg e substituímos os operadores Hermitianos correspondentes às posições e momentos, $O = \mathcal{O}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P})$. Esta receita nem sempre produz um resultado único ou satisfaz o segundo postulado. Um exemplo icônico é o da quantidade definida por $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$. A aplicação direta da receita gera dois possíveis operadores correspondentes $F_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$ e $F_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ que, devido à não comutatividade dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{P} , não são equivalentes. Mais ainda, nem F_1 nem F_2 são Hermitianos pois $F_1^\dagger = F_2$. Uma forma de solucionar este problema é exigir que, além da substituição das variáveis dinâmicas pelos seus operadores correspondentes, o operador seja simetrizado. Assim, escrevendo $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ obtemos $F = \frac{1}{2}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R})$, um operador devidamente Hermitiano.

3.2 Átomo de hidrogênio

Aplicamos a equação de Schrödinger a um átomo tipo hidrogênio não relativístico e sem spin composto por um núcleo de carga Ze orbitado por um elétron de carga $-e$. Para encontrar as energias acessíveis, escrevemos seu Hamiltoniano, dado pela soma das energias cinéticas do elétron e do núcleo, e da energia potencial eletrostática entre eles [45],

$$H_0 = \frac{P_e^2}{2m_e} + \frac{P_n^2}{2m_n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{|\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_n|}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{R}_e , \mathbf{P}_e , \mathbf{R}_n e \mathbf{P}_n são os operadores de posição e momento do elétron e do núcleo. Usando como base os autovetores dos operadores de posição, podemos reescrever a equação de Schrödinger para o átomo como,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n; t) = \left(-\frac{\hbar}{2m_e} \nabla_e^2 - \frac{\hbar}{2m_n} \nabla_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n|} \right) \Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n; t). \quad (3.3)$$

Os índices nos operadores Laplacianos ∇_e^2 e ∇_n^2 indicam que as derivadas devem ser aplicadas com relação às componentes dos vetores \mathbf{r}_e e \mathbf{r}_n , respectivamente. Devido ao fato da energia potencial não depender explicitamente do tempo, as soluções são estados

estacionários. Assim, separando a função de onda $\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n; t)$ como o produto de uma função que dependa unicamente das variáveis espaciais e outra que dependa unicamente do tempo,

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n; t) = X(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n) T(t), \quad (3.4)$$

obtemos

$$\frac{i\hbar}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{X} \left(-\frac{\hbar}{2m_e} \nabla_e^2 - \frac{\hbar}{2m_n} \nabla_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n|} \right) X. \quad (3.5)$$

O lado esquerdo da equação é uma função que depende unicamente do tempo e o lado direito uma função que depende apenas das variáveis espaciais. Por causa disto, dado um valor arbitrário do tempo, para que a equação seja válida para quaisquer valores das variáveis espaciais, as funções devem ser iguais a uma constante E_T com unidades de energia. A equação diferencial para $T(t)$ é facilmente resolvida, sua solução sendo dada por

$$T(t) = A e^{-i \frac{E_T}{\hbar} t}.$$

Se substituímos esta solução na expressão (3.4) e em seguida na equação (3.3), temos que o problema a ser resolvido é o de encontrar os autovalores E_T do operador Hamiltoniano do átomo. Pelo terceiro postulado, estes autovalores correspondem às energias totais acessíveis.

A equação diferencial para a função espacial $X(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n)$,

$$\left(-\frac{\hbar}{2m_e} \nabla_e^2 - \frac{\hbar}{2m_n} \nabla_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n|} \right) X(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n) = E_T X(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n), \quad (3.6)$$

tem como variáveis as posições do núcleo e do elétron a partir de um observador inercial arbitrário. Fazendo uma mudança de variáveis $(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_n) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{r})$ onde \mathbf{R} é a posição do centro de massa do átomo e \mathbf{r} é o vetor posição do elétron com relação ao núcleo,

$$\mathbf{R} = \frac{m_n \mathbf{r}_n + m_e \mathbf{r}_e}{m_n + m_e},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n,$$

podemos reescrever (3.6) como

$$\left(-\frac{\hbar}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \bar{X}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E_T \bar{X}(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \quad (3.7)$$

onde $M = m_n + m_e$ e $\mu = (m_e m_n) / (m_e + m_n)$ são a massa total e reduzida do átomo, e a função \bar{X} é obtida diretamente a partir da função X pela substituição das variáveis. O primeiro termo da equação (3.7) é a energia cinética do centro de massa do átomo de hidrogênio que, como não consideramos forças externas, deve ser constante. Já o segundo termo, descreve a energia cinética do elétron e o terceiro a energia potencial do elétron com massa reduzida acoplado ao núcleo. A energia total do átomo deve então ser composta de uma energia de translação do centro de massa mais a energia cinética da massa reduzida, além da energia potencial entre o núcleo e o elétron. Isto pode visto ao fazermos uma nova separação de variáveis,

$$\bar{X}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi_{CM}(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}).$$

A partir desta, obtemos duas equações diferenciais, uma para o centro de massa,

$$-\frac{\hbar}{2M} \nabla_R^2 \psi_{CM} = E_{CM} \psi_{CM},$$

e outra para o sistema acoplado,

$$\left(-\frac{\hbar}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

com o vínculo $E_T = E_{CM} + E$. A solução para a primeira equação diferencial é

$$\psi_{CM} = e^{i \frac{\mathbf{p}_{CM}}{\hbar} \cdot \mathbf{R}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher o referencial de centro de massa de tal forma que $\mathbf{p}_{CM} = 0$ e consequentemente $E_{CM} = 0$. É interessante notar que muitas vezes se faz referência à equação (3.8) quando se fala na equação de Schrödinger para o átomo tipo hidrogênio. Além disto, como a massa do núcleo é pelo menos 2000 vezes maior que a do elétron, é comum ver esta equação escrita usando $\mu = m_e$. A partir das características

do sistema - massa reduzida μ , carga do elétron $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ e constante de Planck \hbar - é possível definir um comprimento fundamental $a_0 \equiv \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ que se reduz ao raio de Bohr¹ quando $\mu \rightarrow m_e$.

As soluções da equação (3.8) são bem conhecidas e podem ser escritas como [45]

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.9)$$

onde $R(r)$ é a solução radial e $Y(\theta, \phi)$ os harmônicos esféricos normalizados. A tríade (n, l, m) de números quânticos caracteriza a nuvem de probabilidade, ou orbital, do elétron. O número principal pode assumir apenas valores inteiros $n = 1, 2, 3, \dots$. O número quântico de momento angular l , dado um valor de n , pode assumir os valores inteiros $l = 0, 1, \dots, n - 1$. Já o número quântico magnético, fixados os números n e l , pode assumir os valores inteiros $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$. Um quarto número quântico é necessário quando se leva em conta o spin do elétron e surge naturalmente ao usar a generalização relativística da equação de Schrödinger, a equação de Dirac. Para os propósitos deste trabalho, a solução da equação de Schrödinger sem correção relativística e sem spin é suficiente, sendo seus autoestados acessíveis completamente caracterizados pelos 3 primeiros números quânticos.

A parte radial da solução (3.9) é dada em termos dos polinômios associados de Laguerre $L_b^a(x)$,

$$R_{nl}(r) = - \left(\frac{2Z}{na_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^l e^{-\frac{Z}{na_0}r} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right),$$

e os harmônicos esféricos são dados em termos dos polinômios associados de Legendre $P_b^a(x)$,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

Por sua vez, os polinômios associados de Laguerre são dados em termos dos próprios

¹Bohr notou a necessidade de uma nova constante fundamental que produzisse um comprimento característico do átomo de hidrogênio. A física clássica é incapaz de definir as órbitas discretas e definidas que produzem o espectro do hidrogênio. A introdução da constante de Planck na descrição do átomo permite obter este comprimento característico e da ordem de grandeza que era de se esperar para o hidrogênio [39].

polinômios de Laguerre $L_b(x)$ pela relação,

$$L_b^a(x) = \frac{d^a}{dx^a} L_b(x),$$

e estes últimos pela fórmula de Rodrigues,

$$L_b(x) = e^x \frac{d^b}{dx^b} (x^b e^{-x}).$$

Já, os polinômios associados de Legendre, são dados por

$$P_b^a(x) = (1 - x^2)^{\frac{|a|}{2}} \frac{d^{|a|}}{dx^{|a|}} P_b(x),$$

e os polinômios de Legendre $P_b(x)$ pela sua fórmula correspondente de Rodrigues,

$$P_b(x) = \frac{1}{2^b b!} \frac{d^b}{dx^b} (x^2 - 1)^b.$$

Quando o número principal é $n = 1$, a função de onda é esfericamente simétrica e somente pode assumir o estado $(1, 0, 0)$ dado por,

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{Z}{a_0}r}. \quad (3.10)$$

Quando $n = 2$, o átomo tem 4 estados acessíveis. Para $l = 0$ temos 1 estado cuja função de onda é:

$$\psi_{200}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_0^3}} \left(\frac{Z}{a_0}r - 2 \right) e^{\frac{Z}{2a_0}r},$$

e para $l = 1$ temos 3 estados dadas pelos número quânticos $m = -1, 0, 1$ cujas funções de ondas são:

$$\begin{aligned} \psi_{210}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{Z^5}{32\pi a_0^5}} r e^{\frac{Z}{2a_0}r} \cos(\theta), \\ \psi_{21-1}(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{Z^5}{16\pi a_0^5}} r e^{\frac{Z}{2a_0}r - i\phi} |\sin(\theta)|, \\ \psi_{211}(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{Z^5}{64\pi a_0^5}} r e^{\frac{Z}{2a_0}r + i\phi} |\sin(\theta)|. \end{aligned}$$

As energias acessíveis aos átomos hidrogenoides obtidas são dadas pela mesma relação derivada por Bohr a partir do seu modelo planetário,

$$\begin{aligned}
E_n &= -\frac{\mu}{2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2}, \\
&= -\frac{Z^2\alpha^2}{2} \frac{\mu c^2}{n^2}, \\
&\approx -13.60569 \left(1 + \frac{m_e}{m_n} \right)^{-1} \frac{Z^2}{n^2} \text{eV},
\end{aligned}$$

onde $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ é chamada de constante de estrutura fina. A partir das energias acessíveis, obtemos a energia na forma de radiação que os elétrons emitem ao transitar de um estado para outro,

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E_m - E_n, \\
&= \frac{1}{2} Z^2 \mu c^2 \alpha^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Em particular, para $n = 1, 2$ e 3 , recuperamos as séries de linhas espectrais ultravioletas de Lyman, visíveis de Balmer e infravermelhas de Paschen [41]. Como pode ser notado, as energias associadas aos átomos tipo hidrogênio dadas pela equação de Schrödinger dependem apenas do número quântico principal n . Sendo assim, quaisquer dois orbitais que compartilhem este mesmo número possuem a mesma energia. Esta degenerescência é apenas aparente pois experimentos precisos mostram a presença de linhas espectrais não previstas pela equação (3.11). De fato, esta degenerescência é quebrada ao incluir correções relativísticas devido à velocidade do elétron, a interações dos momentos de dipolo magnético intrínsecos do núcleo e do elétron, e a criações de pares no vácuo quântico.

3.3 Teoria de perturbação independente do tempo

Uma quantidade bastante restrita de sistemas são completamente solucionáveis pela equação de Schrödinger. Na maioria dos casos se tratam de sistemas bastante simples, como por exemplo uma partícula com movimento limitado dentro de uma caixa, que permitem isolar e analisar as particularidades do mundo quântico mas que nem sempre tem corres-

pondente direto no mundo real. Uma curiosa exceção é o oscilador harmônico, um sistema ubíquo às áreas da física. Para o átomo de hidrogênio, como visto acima, é possível obter a partir de primeiros princípios as energias acessíveis e linhas espectrais correspondentes. Porém, para obter soluções mais precisas, é necessário incluir correções que acabam gerando equações diferenciais de difícil resolução. Como a maioria dos sistemas físicos não possuem solução analítica exata, foram desenvolvidas diversas técnicas para se obter soluções aproximadas. Para o propósito de estudar as correções da energia do estado fundamental do átomo tipo hidrogênio, a teoria de perturbação independente do tempo é suficiente.

A teoria de perturbação é um método matemático utilizado para se obter soluções aproximadas de um sistema que difere ligeiramente de outro para o qual existe uma solução exata. O resultado deste método são correções à energia e à função de onda da solução exata em termos de uma série de potências do parâmetro que caracteriza a diferença entre os sistemas. Desta forma, se H é o Hamiltoniano do sistema que desejamos estudar e H_0 é o Hamiltoniano para um sistema semelhante e para o qual possuímos soluções exatas, então escrevemos o primeiro como a soma de duas partes [49],

$$H = H_0 + H_p,$$

onde H_p é chamado de Hamiltoniano da perturbação ou simplesmente perturbação. Como H_p deve ser muito menor que H_0 , supomos que a perturbação seja caracterizada por um parâmetro adimensional $\lambda \ll 1$, podendo então ser escrito como $H_p = \lambda W$. Desta forma, podemos reescrever o Hamiltoniano como

$$H = H_0 + \lambda W. \quad (3.12)$$

Temos como objetivo encontrar os autoestados do Hamiltoniano completo e suas energias correspondentes,

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle. \quad (3.13)$$

A suposição de base da teoria da perturbação é que os autoestados e as energias podem

ser expandidos em série de potência do parâmetro λ ,

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= |\psi_n^0\rangle + \lambda |\psi_n^1\rangle + \lambda^2 |\psi_n^2\rangle + \dots, \\ E_n &= E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde os primeiros termos são as soluções exatas do sistema não perturbado,

$$H_0 |\psi_n^0\rangle = E_n^0 |\psi_n^0\rangle.$$

Ao substituirmos as expansões (3.14) e o Hamiltoniano completo (3.12) na equação de Schrödinger (3.13) obtemos,

$$\begin{aligned} (H_0 - E_n^0) |\psi_n^0\rangle + \lambda [(H_0 - E_n^0) |\psi_n^1\rangle + (W - E_n^1) |\psi_n^0\rangle] \\ + \lambda^2 [(H_0 - E_n^0) |\psi_n^2\rangle + (W - E_n^1) |\psi_n^1\rangle - E^2 |\psi_n^0\rangle] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Como monômios de λ de graus distintos são linearmente independentes, seus coeficientes devem se anular por separado. O termo de ordem λ^0 é a equação de Schrödinger para o sistema não perturbado e é identicamente nulo. Já o termo de ordem λ^1 é dado por

$$E_n^1 |\psi_n^0\rangle + E_n^0 |\psi_n^1\rangle = H_0 |\psi_n^1\rangle + W |\psi_n^0\rangle.$$

Realizando o produto interno desta equação com $\langle \psi^0 |$ obtemos

$$E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle + E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle = \langle \psi_n^0 | H_0 \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | W \psi_n^0 \rangle.$$

Supomos que o autoestado $|\psi_n^0\rangle$ está normalizado, portanto sua norma é $\langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle = 1$. Por outro lado, como o Hamiltoniano não perturbado é Hermitiano, temos que $\langle \psi_n^0 | H_0 \psi_n^1 \rangle = \langle \psi_n^0 | H_0 | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle$, assim

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | W \psi_n^0 \rangle.$$

Desta forma, a primeira correção à energia (3.14) é dada por,

$$E_n \approx E_n^0 + \langle \psi_n^0 | H_p \psi_n^0 \rangle. \quad (3.15)$$

A partir da equação (3.15) podemos estudar como pequenas correções ao Hamiltoniano do sistema afeta as energias acessíveis. Este procedimento é usado, por exemplo, para estudar a estrutura fina do átomo de hidrogênio (incluindo uma correção relativística à energia cinética do elétron, acoplando o spin do elétron com a sua órbita e adicionando o termo de Darwin que surge na expansão não relativística da equação de Dirac [50]). No próximo capítulo, usaremos esta expressão para estudar como correções à energia potencial eletrostática, vindas de generalizações não lineares da eletrodinâmica de Maxwell, afetam a energia de ionização ou do estado fundamental dos átomos tipo hidrogênio.

Capítulo 4

Vínculos de eletrodinâmicas tipo Born-Infeld a partir da energia de ionização do átomo de hidrogênio

Neste capítulo, temos como objetivo vincular o parâmetro que caracteriza as eletrodinâmicas tipo Born-Infeld usando a medição mais precisa da energia de ionização do átomo de hidrogênio disponível [51]. Além da própria teoria de Born-Infeld, serão também analisadas as eletrodinâmicas exponencial e logarítmica. Cada uma delas irá modificar o potencial elétrico de forma particular, recuperando o potencial Coulombiano para distâncias suficientemente grandes (ver Subseção 2.2.2). Por causa disto, podemos usar os resultados da teoria de perturbação, obtidos no capítulo anterior, para deduzir a correção da energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio causadas por estas eletrodinâmicas. Como a previsão teórica do Modelo Padrão está em concordância com o resultado experimental, qualquer correção da energia potencial de Maxwell deve ser menor do que a precisão experimental. Consequentemente, o erro experimental, associado a tal precisão, pode ser usado como vínculo superior para estas correções. Os resultados obtidos neste capítulo foram publicados em [52].

4.1 Procedimento geral

Como foi visto no Capítulo 3, o Hamiltoniano para um átomo hidrogenoide formado por um núcleo de carga Ze orbitado por um elétron de carga $-e$ é dado no referencial do centro de massa por

$$H = K + V_{NL},$$

onde $K = \frac{p_e^2}{2\mu}$ é a energia cinética, $\mu = \frac{m_n m_e}{m_n + m_e}$ é a massa reduzida do sistema, e V_{NL} é a energia potencial específica para cada eletrodinâmica não linear. No Capítulo 2, foi observado que, usando a estimativa do parâmetro $b \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ feita por Born e Infeld, e para distâncias $r \gg 10^{-15} \text{ m}$, a correção ao campo elétrico devido à eletrodinâmica não linear é muito menor que o termo de Maxwell. Como o comprimento envolvido no átomo de hidrogênio é da ordem do raio de Bohr $a_0 \sim 10^{-10}$, o sistema com potencial generalizado pode ser considerado como obtido a partir de uma pequena perturbação do sistema clássico. Assim, reescrevemos o Hamiltoniano como

$$H = \underbrace{K + V_M}_{H_0} + \underbrace{V_{NL} - V_M}_{H_p},$$

onde V_M é a energia potencial da eletrodinâmica de Maxwell, H_0 é o Hamiltoniano do átomo de hidrogênio de Schrödinger, e H_p a perturbação do Hamiltoniano.

Seguindo os procedimentos da teoria de perturbação, temos que a primeira ordem de correção devida à perturbação H_p é dada por

$$\begin{aligned} E_{100}^1 &= \langle \psi_{100}^0 | \hat{H}_p | \psi_{100}^0 \rangle, \\ &= \int d^3r |\psi_{100}^0(\mathbf{r})|^2 H_p(r), \\ &= \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \int d^3r e^{-\frac{2Z}{a_0}r} H_p(r), \end{aligned}$$

onde a função de onda para o estado fundamental (3.10) foi usada, e

$$\begin{aligned} H_p(r) &= V_{NL}(r) - V_M(r), \\ &= -e \int_r^\infty [E_{NL}(r') - E_M(r')] dr', \end{aligned}$$

onde $E_{NL}(r')$ e $E_M(r')$ são os campos elétricos produzidos por uma carga puntiforme nas eletrodinâmicas não linear e de Maxwell, respectivamente. Devido à simetria radial, podemos realizar a integral no elemento de ângulo sólido, portanto

$$E_{100}^1 = \frac{4Z^3}{a_0^3} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{2Z}{a_0}r} H_p(r). \quad (4.1)$$

Com o objetivo de tornar as variáveis de integração adimensionais, expressamos a distância radial em unidades de raio de Bohr realizando a mudança de variável $r = \frac{a_0}{Z}y$ em (4.1),

$$E_{100}^1 = 4 \int_0^\infty dy y^2 e^{-2y} H_p\left(\frac{a_0}{Z}y\right), \quad (4.2)$$

e em

$$H_p\left(\frac{a_0}{Z}y\right) = -e \int_{\frac{a_0}{Z}y}^\infty [E_{NL}(r') - E_M(r')] dr',$$

fazendo $r' = \frac{a_0}{Z}x$,

$$H_p\left(\frac{a_0}{Z}y\right) = -\frac{a_0}{Z}e \int_y^\infty \left[E_{NL}\left(\frac{a_0}{Z}x\right) - E_M\left(\frac{a_0}{Z}x\right) \right] dx. \quad (4.3)$$

Substituindo de volta (4.3) em (4.2) obtemos a expressão

$$E_{100}^1 = -4 \frac{a_0 e}{Z} \int_0^\infty dy \int_y^\infty dx y^2 e^{-2y} \left[E_{NL}\left(\frac{a_0}{Z}x\right) - E_M\left(\frac{a_0}{Z}x\right) \right].$$

A fim de simplificar a expressão para a correção da energia ainda sem fazer menção a uma eletrodinâmica em particular, invertemos a ordem das integrações,

$$E_{100}^1 = -4 \frac{a_0 e}{Z} \int_0^\infty dx \left[E_{NL}\left(\frac{a_0}{Z}x\right) - E_M\left(\frac{a_0}{Z}x\right) \right] \int_0^x dy y^2 e^{-2y},$$

e integrando em y obtemos,

$$E_{100}^1 = -\frac{a_0 e}{Z} \int_0^\infty dx \left[E_{NL}\left(\frac{a_0}{Z}x\right) - E_M\left(\frac{a_0}{Z}x\right) \right] [1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)]. \quad (4.4)$$

Como foi notado no capítulo anterior, a primeira correção ao campo elétrico de Maxwell para uma carga puntiforme é proporcional ao inverso da sexta potência da dis-

tância r^{-6} . Por causa disto, no limite $x \rightarrow \infty$ o integrando de (4.4) apresenta o mesmo comportamento, decrescendo com x^{-6} . Desta forma, se torna tentador expandir a expressão do campo elétrico E_{NL} em série de potências até segunda ordem. Porém, esta aproximação falha no limite inferior da integral. Isto ocorre porque os termos que foram truncados passam a prevalecer quando $x \rightarrow 0$. Mais ainda, como no limite $x \rightarrow 0$ o fator $1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)$ possui o mesmo comportamento que $\frac{4}{3}x^3$, a integral deve divergir para qualquer termo, vindo da diferença dos campos elétricos, proporcional a x^{-n} para $n \geq 4$. Isto implica que deve ocorrer um delicado cancelamento entre todos os termos da série para que (4.4) seja convergente. Por causa disto, a forma completa do campo elétrico deve ser usada ou, equivalentemente, todos os termos da Lagrangiana que descreve a eletrodinâmica não linear devem ser levados em conta. Como cada eletrodinâmica não linear tem suas características descritas pelos termos de ordem superior de suas Lagrangianas, cada uma deve gerar uma correção particular à energia de ionização do átomo de hidrogênio. Finalmente, o fato da expressão do campo elétrico generalizado divergir da de Maxwell para certos valores de x poderia ameaçar o uso da teoria de perturbação. Para poder justificar o uso deste procedimento, devemos obter resultados que satisfazam as suposições iniciais da teoria da perturbação, ou seja $E_{100}^1 \ll E_{100}^0$ para valores de b condizentes com os resultados experimentais.

Substituindo na integral o campo elétrico E_M dado por

$$E_M \left(\frac{a_0}{Z} x \right) = \frac{Z^3 e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \frac{1}{x^2},$$

podemos resolver o segundo termo

$$\begin{aligned} E_{100}^1 &= -\frac{a_0 e}{Z} \int_0^\infty dx \left[E_{NL} \left(\frac{a_0}{Z} x \right) - \frac{Z^3 e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \frac{1}{x^2} \right] [1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)], \\ -\frac{4\pi\epsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 &= \frac{4\pi\epsilon_0 a_0^2}{Z^3 e} \int_0^\infty dx E_{NL} \left(\frac{a_0}{Z} x \right) [1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)] \\ &\quad - \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{1}{x^2} [1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)]}_T. \end{aligned}$$

Antes de inverter a ordem das integrais, esta correspondia a

$$\begin{aligned}
T &= 4 \int_0^\infty dy y^2 e^{-2y} \int_y^\infty dx \frac{1}{x^2}, \\
&= 4 \int_0^\infty dy y e^{-2y} = \int_0^\infty dy y e^{-y}, \\
&= \Gamma(2) = 1.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}{Z^3 e} \int_0^\infty dx E_{NL} \left(\frac{a_0}{Z} x \right) [1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)] - 1. \quad (4.5)$$

Esta será a expressão de partida para calcular a correção da energia do estado fundamental devido às teorias não lineares.

4.2 Eletrodinâmica de Born-Infeld

Para calcular a correção de primeira ordem à energia de ionização de um átomo hidrogeônido (4.5), manipulamos o campo elétrico para uma carga puntiforme dada pela equação (2.61) para obter,

$$\begin{aligned}
E_{BI} \left(\frac{a_0}{Z} x \right) &= \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_0^2}{Z^2} x^4 + \left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^2}}, \\
&= \frac{Z^3 e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} \frac{1}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}},
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{Z^3 e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2 b}}$ é um parâmetro adimensional que mede o desvio de E_{BI} com relação a Maxwell. Para ter uma estimativa da ordem de grandeza deste parâmetro, considerando $b = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2} \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ temos que $\varepsilon = Z^{\frac{3}{2}} \frac{r_e}{a_0} \approx 5 \times 10^{-5} Z^{\frac{3}{2}}$.

Substituindo o campo elétrico em (4.5) obtemos

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 = \int_0^\infty dx \frac{1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2)}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}} - 1. \quad (4.6)$$

Expandindo o integrando e realizando a integral de cada termo individualmente, podemos

reescrever (4.6) como

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 = I_1 - I_2 - 2I_3 - 2I_4 - 1, \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}}, \\ I_2 &= \int_0^\infty dx \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}}, \\ I_3 &= \int_0^\infty dx \frac{xe^{-2x}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}}, \\ I_4 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^{-2x}}{\sqrt{x^4 + \varepsilon^4}}. \end{aligned}$$

Estas integrais possuem representação em termos de funções gama e funções de MeijerG [53],

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}\varepsilon}, \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{16\sqrt{2}\pi^2} G_{15}^{51} \left(\frac{\varepsilon^4}{16} \middle| \begin{smallmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4} \end{smallmatrix} \right), \\ I_3 &= \frac{\varepsilon^2}{16\sqrt{2}\pi^2} G_{15}^{51} \left(\frac{\varepsilon^4}{16} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4} \end{smallmatrix} \right), \\ I_4 &= \frac{\varepsilon^3}{16\sqrt{2}\pi^2} G_{15}^{51} \left(\frac{\varepsilon^4}{16} \middle| \begin{smallmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4} \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

Por mais que estas representações não sejam elucidativas, permitem uma solução exata para a primeira correção. É importante notar que, pelo princípio de correspondência, no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$ a correção à energia também deve tender a zero $E_{100}^1 \rightarrow 0$. Por causa disto, o lado direito de (4.7) não deve possuir termos constantes nem potências negativas de ε . Isto implica que o termo I_1 deve ser compensado pelas outras integrais. Para estudar o comportamento da correção E_{100}^1 em função do parâmetro ε , expandimos

as integrais I_n em série de potências de ε em torno de 0 até ordem ε^3 ,

$$\begin{aligned} I_2 &\approx -2 + 2\gamma_E + \ln 2\varepsilon^2 + \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}\varepsilon} - \frac{4\pi^{3/2}\varepsilon}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{2\varepsilon^2}{3} - \frac{\pi^{3/2}\varepsilon^3}{16\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)^2}, \\ I_3 &\approx -\gamma_E - \frac{1}{2}\ln 2\varepsilon^2 + \frac{4\pi^{3/2}\varepsilon}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \varepsilon^2 + \frac{\pi^{3/2}\varepsilon^3}{8\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)^2}, \\ I_4 &\approx \frac{1}{2} - \frac{2\pi^{3/2}\varepsilon}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \varepsilon^2 - \frac{3\pi^{3/2}\varepsilon^3}{16\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)^2}. \end{aligned}$$

Substituindo de volta em (4.7) e fazendo uso da propriedade da função gama $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ obtemos

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 \approx -\frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\varepsilon^3}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}.$$

Substituindo a definição do parâmetro adimensional ε , a correção à energia é dada por

$$E_{100}^1 \approx \frac{2}{3} \frac{Z^5 e^3}{(4\pi\varepsilon_0)^2 a_0^3 b} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \left(\frac{Z^3 e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2 b} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

É interessante notar que o primeiro termo já foi derivado por Heller e Motz em 1934 [54]. O resultado deles, porém, difere do deste trabalho por um fator Z . Isto é devido ao fato dos autores considerarem que o campo elétrico produzido por uma carga Ze seja igual a $Z\mathbf{E}_e^{BI}$, onde \mathbf{E}_e^{BI} é o campo elétrico produzido por uma carga e (ver equação (9) em [54]). Como foi visto no capítulo anterior, o campo elétrico deduzido não é diretamente proporcional à carga. De fato, se fosse proporcional, o limite superior do campo em um dado sistema dependeria da intensidade da carga que o produz, sendo igual Zb para uma carga puntiforme Ze .

Considerando apenas o primeiro termo, a correção à energia de ionização é dada por

$$E_{100}^1 \approx 2 \frac{Z^5 e^3}{48\pi^2 \varepsilon_0^2 a_0^3 b}. \quad (4.8)$$

Para os valores estimados pelos autores originais da teoria ($b \sim 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ e fazendo $Z = 1$), a correção é da ordem de $E_{100}^1 \sim 10^{-7} \text{ eV}$, justificando assim o uso da teoria de perturbação. É interessante notar também que, para os mesmos valores de b ou maiores, o primeiro termo (4.8) quando comparado com a solução exata (4.6) introduz um erro

relativo menor que 0.02%.

Finalmente, o fato da correção à energia ser positiva indica que o elétron está mais fracamente ligado ao núcleo. A análise da permissividade elétrica para um sistema eletrostático no limite de campo fraco (2.54) mostra que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{2b^2} E^2 \right).$$

Uma susceptibilidade positiva $\frac{\varepsilon_0}{2b^2} E^2 \geq 0$ indica uma tendência do meio a se opor à formação de um campo elétrico. Isto pode ser interpretado como havendo um efeito de blindagem devido à polarização do vácuo ao redor do núcleo.

4.3 Eletrodinâmica logarítmica

O procedimento para obter a correção à energia de ionização devido à eletrodinâmica logarítmica é semelhante ao da eletrodinâmica de Born-Infeld. Começamos manipulando o campo elétrico (2.66) na forma necessária para aplicar a equação (4.5),

$$\begin{aligned} E_L \left(\frac{a_0}{Z} x \right) &= \frac{4\pi\varepsilon_0 b^2}{Ze} \left[\sqrt{\frac{a_0^4}{Z^4} x^4 + 2 \left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^2} - \frac{a_0^2}{Z^2} x^2 \right], \\ &= \frac{b}{\varepsilon^2} \left[\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right], \end{aligned}$$

sendo que definimos $\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{Z^3 e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2 b}}$. Substituindo em (4.5) obtemos

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 = \frac{1}{\varepsilon^4} \int_0^\infty dx \left[\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right] \left[1 - e^{-2x} (1 + 2x + 2x^2) \right] - 1. \quad (4.9)$$

Fazendo a distribuição dos termos no integrando, podemos reescrever esta expressão como

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 = \frac{1}{\varepsilon^4} I_1 - \frac{1}{\varepsilon^4} I_2 - \frac{2}{\varepsilon^4} I_3 - \frac{2}{\varepsilon^4} I_4 - 1, \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty dx \left(\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right), \\
I_2 &= \int_0^\infty dx \left(\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right) e^{-2x}, \\
I_3 &= \int_0^\infty dx \left(\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right) x e^{-2x}, \\
I_4 &= \int_0^\infty dx \left(\sqrt{x^4 + 2\varepsilon^4} - x^2 \right) x^2 e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Estas integrais novamente possuem representação em termos de funções gama e funções de MeijerG [53],

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{3\varepsilon^3 \Gamma\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{16\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}}, \\
I_2 &= -\frac{1}{4} - \frac{2^{\frac{3}{4}}\varepsilon}{4\pi^2} G_{1,5}^{5,1} \left(\frac{\varepsilon^4}{8} \middle| \begin{smallmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4} \end{smallmatrix} \right), \\
I_3 &= -\frac{3}{8} - \frac{\varepsilon^2}{2\pi^2} G_{1,5}^{5,1} \left(\frac{\varepsilon^4}{8} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4} \end{smallmatrix} \right), \\
I_4 &= -\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon^3}{2^{\frac{3}{4}}\pi^2} G_{1,5}^{5,1} \left(\frac{\varepsilon^4}{8} \middle| \begin{smallmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4} \end{smallmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Baseado no caso da eletrodinâmica de Born-Infeld, a primeira correção é da ordem de ε^2 . Como a integral (4.9) está sendo multiplicada por um fator ε^{-4} , expandimos as funções de MeijerG em potências de ε em torno de 0 até sexta ordem a fim de determinar todas as contribuições de ordem ε^2 ,

$$\begin{aligned}
I_2 &\approx \frac{3\varepsilon^3 \Gamma\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{16\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}} - \left(\frac{5}{2} - 2\gamma_E - \frac{1}{2} \ln 8 - 2 \ln \varepsilon \right) \varepsilon^4 - \frac{2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{3}{2}}\varepsilon^5}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} + \frac{4\sqrt{2}\varepsilon^6}{9}, \\
I_3 &\approx \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln 8 - \ln \varepsilon - \gamma_E \right) \varepsilon^4 + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\varepsilon^5}{2^{\frac{7}{4}}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon^6}{3}, \\
I_4 &\approx \frac{\varepsilon^4}{2} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\varepsilon^5}{2^{\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} + \frac{2\sqrt{2}\varepsilon^6}{3}.
\end{aligned}$$

Substituindo de volta em (4.10) obtemos

$$\frac{4\pi\varepsilon_0a_0}{Z^2e^2}E_{100}^1 \approx \frac{4\sqrt{2}\varepsilon^2}{9}. \quad (4.11)$$

Assim, escrevendo a forma explícita do parâmetro ε temos que a correção à energia de ionização devido à eletrodinâmica logarítmica é,

$$E_{100}^1 \approx \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Z^5e^3}{48\pi^2\varepsilon_0^2a_0^3b}.$$

Comparando numericamente a solução aproximada (4.11) com a solução exata (4.9) da correção obtemos um erro relativo de 0.02% quando o valor estimado por Born e Infeld do parâmetro b é usado. É interessante notar que esta correção difere daquela produzida pela eletrodinâmica de Born-Infeld. Isto é devido à relevância da forma completa do campo elétrico ou, de forma equivalente, à relevância dos termos de ordem superior nos invariantes das respectivas Lagrangianas.

4.4 Eletrodinâmica exponencial

Agora calculamos a correção à energia de ionização produzida pela eletrodinâmica exponencial. O campo elétrico, com argumento modificado, é dado por

$$\begin{aligned} E_E\left(\frac{a_0}{Z}x\right) &= b\sqrt{W\left[\left(\frac{Z^3e}{4\pi\varepsilon_0a_0^2bx^2}\right)^2\right]}, \\ &= b\sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)}, \end{aligned}$$

onde mais uma vez $\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{Z^3e}{4\pi\varepsilon_0a_0^2b}}$. Substituindo esta expressão em (4.5) obtemos

$$-\frac{4\pi\varepsilon_0a_0}{Z^2e^2}E_{100}^1 = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} \left[1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2)\right] - 1}_I. \quad (4.12)$$

Não é possível obter uma solução analítica para a integral nem para suas partes. Por causa disto, é necessário realizar as aproximações possíveis graças à magnitude do parâmetro ε nesta etapa. Sabemos que no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$ a correção à energia também deve tender a zero $E_{100}^1 \rightarrow 0$. Por causa disto, a expansão em série da integral I não pode possuir nenhuma potência ε^n tal que $n \leq 1$. Além disto, o fator -1 em (4.12) deve ser cancelado pelo termo proporcional a ε^2 . Também, pelo padrão observado nas correções da energia nos casos das eletrodinâmicas de Born-Infeld e logarítmica (Eqs. (4.8) e (4.11), respectivamente), o primeiro termo da série de potências em ε é proporcional a ε^2 . Finalmente, como as teorias tipo Born-Infeld preveem uma susceptibilidade elétrica positiva, indicando assim uma resistência à produção de um campo elétrico, a correção deve ser positiva. Estas considerações nos permite prever que os primeiros termos série de potências da solução da integral I devem ser

$$I = \varepsilon^2 - \alpha \varepsilon^4,$$

onde $\alpha > 0$ é um fator numérico.

Separamos a integral em suas partes,

$$I = I_1 - I_2 - 2I_3 - 2I_4,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)}, \\ I_2 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x}, \\ I_3 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x e^{-2x}, \\ I_4 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x^2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

O procedimento detalhado para a obtenção da expansão em série destas integrais pode ser vista no Apêndice A. As soluções aproximadas até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ destas integrais são dadas

por

$$\begin{aligned}
I_1 &\approx \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon, \\
I_2 &\approx \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon + \left(\frac{5}{2} \gamma_E - 3 + \frac{1}{2} \ln 8\varepsilon^4 - 2 \operatorname{Ei}(-2) - 2\Gamma(0, 2)\right) \varepsilon^2 + \frac{1}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4, \\
I_3 &\approx \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \gamma_E - \frac{1}{4} \ln 8\varepsilon^4 + \operatorname{Ei}(-2) + \Gamma(0, 2)\right) \varepsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4, \\
I_4 &\approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Substituindo de volta obtemos que a integral I é aproximada por

$$I \approx \varepsilon^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4.$$

Assim, a correção à energia é dada por

$$\frac{4\pi\varepsilon_0 a_0}{Z^2 e^2} E_{100}^1 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^2, \quad (4.13)$$

e substituindo a definição do parâmetro ε obtemos

$$E_{100}^1 \approx \sqrt{\pi} \frac{Z^5 e^3}{48\pi^2 \varepsilon_0^2 a_0^3 b}.$$

Comparação numérica entre a aproximação (4.13) obtida e a solução exata (4.12) mostra um erro relativo de 0.02% usando a estimativa do parâmetro b feita por Born.

4.5 Vínculo do parâmetro b para as eletrodinâmicas tipo Born-Infeld

As correções de primeira ordem para a energia de ionização de um átomo tipo hidrogênio são dadas por

$$E_{100}^1 = K \frac{Z^5 e^3}{48\pi^2 \varepsilon_0^2 a_0^3 b},$$

onde $K = 2, 4\sqrt{2}/3$ e $\sqrt{\pi}$ para as eletrodinâmicas de Born-Infeld, logarítmica e exponencial, respectivamente.

O valor mais preciso da medida da energia de ionização do átomo de hidrogênio pode ser obtido em [51] e é dado em unidades de frequência por

$$\nu = 3288086856.8 \pm 0.7 \text{MHz}.$$

É importante notar que este valor foi obtido pelo *National Institute of Standards and Technology* (NIST) de forma independente de qualquer modelo. Outros valores disponíveis na literatura, como o que pode ser encontrado no *Particle Data Group* [55], assumem a validade do potencial eletrostático de Maxwell para poder serem derivados.

Sabemos que o Modelo Padrão é capaz de prever o valor medido experimentalmente. Desta forma, a correção à energia devida às eletrodinâmicas tipo Born-Infeld são limitadas superiormente pela incerteza teórica. Usando 3σ de nível de confiança, vinculamos a correção através de

$$E_{100}^1 < 3h\sigma_\nu,$$

onde h é a constante de Planck. Invertendo esta relação para o parâmetro b obtemos que

$$b > K \frac{e^3}{144\pi^2 \varepsilon_0^2 a_0^3 h \sigma_\nu},$$

onde $Z = 1$ para o átomo de hidrogênio. Usando os valores disponibilizados pelo *CODATA* [56],

$$\begin{aligned} e &= 1.6021766208 \times 10^{-19} \text{C}, \\ \varepsilon_0 &= 8.854187817 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}, \\ a_0 &= 0.52917721067 \times 10^{-10} \text{m}, \\ h &= 6.626070040 \times 10^{-34} \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

temos que o limite inferior para o parâmetro b é

$$b > 5.37 \times 10^{20} \text{KV m}^{-1}.$$

Concluímos, portanto, que o parâmetro das eletrodinâmicas tipo Born-Infeld é limi-

tado inferiormente pelos valores $b_{BI} > 1.07 \times 10^{21} \text{V m}^{-1}$, $b_l > 1.01 \times 10^{21} \text{V m}^{-1}$ e $b_e > 9.52 \times 10^{20} \text{V m}^{-1}$ para as eletrodinâmicas de Born-Infeld, logarítmica e exponencial respectivamente. O parâmetro adimensional é $\varepsilon < 4 \times 10^{-5}$ para todos os casos, justificando tanto as aproximações feitas quanto o uso da teoria de perturbação.

Quando comparado com a estimativa $b_{BI} = 1.2 \times 10^{20} \text{V m}^{-1}$ feita por Born e Infeld em 1934 [25], o vínculo obtido usando medições da energia de ionização do átomo de hidrogênio é 1 ordem de grandeza mais forte. Nos anos 70, Soff *et al.* [57] obtiveram o valor $b_{BI} > 1.7 \times 10^{22} \text{V m}^{-1}$ comparando energias de transições eletrônicas e muônicas em átomos de chumbo $_{82}Pb$. Apesar de ter duas ordens de precisão a mais que o resultado obtido neste trabalho, o procedimento seguido pelos autores é questionável, uma vez que não levaram em conta a perda de simetria esférica, o que torna a inversão entre os campos **D** e **E** mais delicada. Mais recentemente, foi sugerido por Dávila *et al.* [58] que o parâmetro de Born-Infeld poderia ser vinculado através do espectro de magnetares analisando o efeito de birrefringência magnética. Seguindo este procedimento, os autores chegaram ao vínculo $b_{BI} > 2.0 \times 10^{19} \text{V m}^{-1}$. Finalmente, no final de 2016 foi anunciada a primeira medição direta do espalhamento fóton-fóton pela colaboração ATLAS analisando dados de espalhamento de íons de chumbo [13]. Com base nesta medição, Ellis *et al.* [14] estabeleceram o limite inferior para o parâmetro de Born-Infeld $b_{BI} > 4.3 \times 10^{27} \text{V m}^{-1}$. O vínculo é 7 ordens de grandeza mais preciso que o obtido com o átomo de hidrogênio. Isto é principalmente devido ao fato das altas energias envolvidas no LHC, regime no qual as eletrodinâmicas não lineares manifestam suas características. Em contrapartida, o procedimento para a obtenção do vínculo por meio da energia de ionização do átomo de hidrogênio é muito mais simples e pode facilmente ser generalizado para outras teorias, como foi o caso das eletrodinâmicas logarítmica e exponencial.

Capítulo 5

Teoria quântica de campos e seção de choque devido a correções não lineares

Neste e no próximo capítulo temos como objetivo usar a medição experimental do espalhamento fóton-fóton obtida no LHC para vincular correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell. Esta medição do espalhamento fóton-fóton foi obtida pela Colaboração ATLAS analisando dados de colisões ultraperiféricas de íons de chumbo acelerados pelo LHC [13]. O modelo aceito nos dias de hoje para estudar a interação entre partículas elementares aceleradas a altas energias é o Modelo Padrão. Este, por sua vez, é descrito na linguagem matemática da teoria quântica de campos. Neste capítulo, portanto, introduzimos os conceitos fundamentais da teoria quântica de campos necessários para obter a seção de choque da interação fóton-fóton devido aos termos de correção não linear. Esta grandeza será de fundamental importância no próximo capítulo para vincular os parâmetros que caracterizam estas correções.

5.1 Introdução

Os resultados obtidos a partir da antiga teoria quântica, como as linhas espectrais do átomo de hidrogênio obtidas por Bohr, foram marcados por recorrer a manipulações matemáticas *ad-hoc* particulares a cada problema e eram justificados pelo fato de conseguirem reproduzir as medições experimentais. As formulações desenvolvidas por Heisenberg e Schrödinger em meados da década 1920 marcaram o êxito da mecânica quântica

por formarem uma única base teórica capaz de reproduzir a maior parte dos resultados anteriores. No final da mesma década, aplicando o formalismo quântico ao campo eletromagnético livre, foi recuperada a ideia proposta por Einstein em 1905 de que os modos do campo eletromagnético poderiam assumir apenas valores discretos de energia. Desta forma, a mecânica quântica seria capaz de descrever corretamente tanto partículas massivas, como o elétron e o próton, quanto o campo eletromagnético, do qual o fóton seria uma manifestação [59, 45].

A ideia de que o mundo físico é constituído por duas entidades fundamentalmente distintas, partículas e campos, foi reforçada pelo sucesso que Dirac obteve ao descrever a taxa de emissão espontânea de átomos em estados excitados e ao prever teoricamente a existência do pósitron formulando seu famoso mar de elétrons [60]. Porém, foi graças aos trabalhos de Jordan, Wigner, Pauli, Heisenberg, Furry e Oppenheimer que mostraram que partículas poderiam ser descritas por campos, incorporando naturalmente a existência de antipartículas, que a visão dualista foi abandonada para dar lugar a uma visão puramente campista [59]. Nesta perspectiva, existiria um campo associado a cada partícula permeando o universo e a interação entre elas seria descrita por acoplamentos entre seus modos. A teoria quântica de campos passou por altos e baixos ao longo da sua construção. Questões como o surgimento de quantidades físicas infinitas tanto como dificuldades de se obter previsões a partir dela tiveram que ser superadas. Nos dias de hoje, a teoria quântica de campos serve como base para a descrição das interações eletromagnéticas, fraca e forte. A partir dela conseguimos obter previsões tanto para seções de choques como taxas de decaimento e somos capazes de calcular propriedades físicas, como o momento anômalo do elétron, com precisão sem precedentes [61].

Na Seção 5.2, com o objetivo de discutir os aspectos importantes do processo de quantização, tratamos o modelo simples de um campo escalar real tipo Klein-Gordon. Em seguida, na Seção 5.3, discutimos os principais problemas da tentativa de quantizar o campo eletromagnético de forma análoga ao campo escalar. Para superar estes obstáculos, existem diversos caminhos que podem ser seguidos, um dos principais sendo recorrer ao formalismo de integrais de caminhos. Com o intuito de manter a mesma linha de raciocínio usado na seção anterior, seguimos o formalismo de quantização canônica proposta por Gupta e Bleuler no qual uma condição semelhante ao *gauge* de Lorenz é imposto.

Finalmente, na Seção 5.6 introduzimos as correções não lineares de primeira ordem à Lagrangiana de Maxwell discutidas no Capítulo 2. Estas correções acoplam os modos do campo eletromagnético permitindo a interação direta entre os fótons. Com o objetivo de estudar este fenômeno, deduzimos a probabilidade com a qual dois fótons reais interagem, conectada às medições experimentais através das seções de choque diferenciais e totais.

Neste capítulo usamos a métrica maioritariamente negativa, ou tipo tempo, $\eta = \text{diag}(1, -\vec{1})$ e as unidades naturais tal que $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$.

5.2 Quantização do campo real de Klein-Gordon

O campo escalar real de Klein-Gordon livre $\phi(\mathbf{x}, t)$ é descrito pela equação de campo relativístico dada por [61, 62, 63]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Esta equação pode ser obtida através do princípio variacional a partir da densidade Lagrangiana (ou simplesmente Lagrangiana),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \\ \mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

O espaço é permeado pelo campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ onde cada ponto é identificado pelo parâmetro \mathbf{x} . Assim, a equação (5.1) pode ser interpretada como descrevendo a dinâmica de um oscilador harmônico localizado em \mathbf{x} acoplado aos seus vizinhos pelo operador ∇^2 . A Lagrangiana do sistema é então dada pela soma das densidades Lagrangianas de cada oscilador e, portanto, pela integral sobre todo o espaço,

$$L_{KG} = \int d^3x \mathcal{L}_{KG}.$$

Se seguimos o esquema de quantização usando o princípio de correspondência de

Heisenberg em que $H(p, q) \rightarrow \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$, elevando as coordenadas a operadores, para uma única partícula escalar relativística de spin 0, obteríamos a equação de Klein-Gordon (5.1) como resultado. Nesta prescrição, a função de onda $\phi(\mathbf{x}, t)$ assume o papel de amplitude de probabilidade. É notório que este procedimento leva a diversas dificuldades. Em particular, na física relativística, a massa não é mais conservada mas está relacionada à energia através da relação de dispersão

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

Por causa disto, passam a ser permitidos processos em que o número de partículas, por sua vez, também não seja conservado. Portanto, a possibilidade de conversão de massa em energia não é compatível com a interpretação probabilística da função de onda. Mais ainda, as flutuações quânticas são descritas pela relação de incerteza de Heisenberg,

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}.$$

Isto implica que, em intervalos de tempo suficientemente pequenos podem existir sistemas de pares de partícula-antipartícula capazes de afetar a dinâmica de um sistema antes de serem novamente aniquilados. Assim, mesmo no caso em que não haja energia suficiente para produzir partículas de determinada massa, uma teoria quântica relativística é intrinsecamente uma teoria de muitas partículas [61].

Por outro lado, o conceito de causalidade introduzido pela relatividade restrita implica que um evento do espaço-tempo não pode ter sido a causa de outro evento localizado fora do cone de luz do primeiro. Isto implica que o propagador de qualquer teoria relativística deve ser nulo $U(x, x_0) = 0$ para distâncias no espaço-tempo do tipo espaço. A teoria quântica de uma única partícula relativística falha neste quesito pois o propagador entre dois pontos $U(x, x_0) = \langle x | e^{-iHt} | x_0 \rangle \neq 0$ para distâncias tipo espaço. Estes problemas, entre outros, são resolvidos ao abrir mão da interpretação probabilística da função de onda e passar a descrever as partículas como sendo manifestações do próprio campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ [61].

Para quantizar o campo de Klein-Gordon, aplicamos o mesmo esquema de quantização não relativística ao campo $\phi(\mathbf{x}, t)$. Desta forma, promovemos o próprio campo

$\phi(\mathbf{x}, t)$ e seu momento conjugado a operadores. O momento conjugado pode ser obtido a partir da Lagrangiana pela relação

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t).$$

Por sua vez, a densidade de Hamiltoniano (ou simplesmente Hamiltoniano) do campo escalar pode ser obtido a partir da Lagrangiana (5.2) através de uma transformada de Legendre,

$$\mathcal{H}_{KG} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_{KG}, \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (5.4)$$

Interpretando de forma semelhante à densidade Lagrangiana, esta densidade Hamiltoniana descreve a energia do oscilador harmônico de momento $\pi(\mathbf{x}, t)$ e coordenada $\phi(\mathbf{x}, t)$ localizado no ponto \mathbf{x} . Desta forma, a energia total do sistema é dada pela integral sobre todo espaço desta densidade,

$$H_{KG} = \int d^3x \mathcal{H}_{KG}. \quad (5.5)$$

Em seguida, em analogia a um sistema de osciladores, promovemos as coordenadas a operadores, $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ e $\pi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$, e impomos relações de comutação em tempos iguais

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde a delta de Kronecker, usual no caso de índices discretos, é substituída pela delta de Dirac para acomodar os índices contínuos das coordenadas espaciais. Desta forma, o Hamiltoniano também passa a ser um operador,

$$\hat{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} + \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 \right).$$

Este operador Hamiltoniano define um espaço de Hilbert que pode ser construído

calculando seus autovetores e autovalores. Estes, por sua vez, descrevem os estados e energias acessíveis ao sistema. Para este fim, fazemos uma mudança de variáveis das coordenadas generalizadas $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$ para as coordenadas dos modos normais do sistema $\hat{\phi}(\mathbf{p}, t)$ e $\hat{\pi}(\mathbf{p}, t)$. Este procedimento transforma o problema de um sistema de osciladores acoplados nas coordenadas originais em um sistema de osciladores livres nas novas coordenadas. Como consequência, a energia total do sistema passa a ser dada pela soma das energias contidas em cada modo. No limite em que as dimensões do sistema tendem ao infinito, os modos normais são obtidos pelas transformações de Fourier,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{\phi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.7)$$

Como as coordenadas originais são operadores Hermitianos, seus modos devem satisfazer $\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{p}, t) = \hat{\phi}(-\mathbf{p}, t)$ e $\hat{\pi}^\dagger(\mathbf{p}, t) = \hat{\pi}(-\mathbf{p}, t)$. Substituindo (5.7) na equação de movimento (5.1) obtemos a equação que descreve cada modo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + E_{\mathbf{p}}^2 \right) \hat{\phi}(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (5.8)$$

onde foi definido $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ para simplificar a relação. Resolvendo esta equação, obtemos que a solução geral de (5.8) é dada por

$$\hat{\phi}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}}t} \right), \quad (5.9)$$

onde foi usado o fato de $\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{p}, t) = \hat{\phi}(-\mathbf{p}, t)$. O fator $(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}$ foi extraído das constantes de integração para simplificar a relação de comutação entre os operadores $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ além de tornar o produto $\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger d^3 p$ adimensional. Além disto, a introdução deste fator torna o produto $(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2} d^3 p$ um invariante relativístico.

Por outro lado, a transformada de Fourier para o momento conjugado é dado por

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{\pi}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (5.10)$$

onde os modos $\hat{\pi}(\mathbf{p}, t)$ podem ser obtidos a partir de $\hat{\phi}(\mathbf{p}, t)$ através da definição do

momento conjugado,

$$\hat{\pi}(\mathbf{p}, t) = \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{p}, t) = -i\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger} e^{iE_{\mathbf{p}}t} \right). \quad (5.11)$$

Como consequência das relações de comutação (5.6), os operadores $\hat{\phi}(\mathbf{p}, t)$ e $\hat{\pi}(\mathbf{p}, t)$ satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}(\mathbf{p}, t), \hat{\pi}^{\dagger}(\mathbf{p}', t) \right] &= i(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \left[\hat{\phi}(\mathbf{p}, t), \hat{\phi}^{\dagger}(\mathbf{p}', t) \right] &= \left[\hat{\pi}(\mathbf{p}, t), \hat{\pi}^{\dagger}(\mathbf{p}', t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

É possível inverter as equações (5.9) e (5.11) para obter a expressão dos operadores $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ tal que

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}} &= \left[\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \hat{\phi}(\mathbf{p}, t) + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \pi(\mathbf{p}, t) \right] e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \\ \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} &= \left[\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \hat{\phi}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) - \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \pi^{\dagger}(\mathbf{p}, t) \right] e^{-iE_{\mathbf{p}}t}. \end{aligned}$$

Estas expressões são semelhantes aos operadores de criação e aniquilação introduzidos por Dirac para resolver algebricamente o oscilador harmônico simples quantizado. As relações de comutação entre estes operadores podem ser obtidas usando (5.12), sendo por sua vez também semelhantes aos operadores escada de Dirac,

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger} \right] &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'} \right] &= \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger} \right] = 0. \end{aligned}$$

Substituindo (5.9) em (5.7) e (5.11) em (5.10) para obter a expansão dos operadores $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$ em função dos operadores escada,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right), \quad (5.13)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip \cdot x} \right), \quad (5.14)$$

onde usamos a notação $p \cdot x = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ e $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Com estas expressões em mãos, reescrevemos o Hamiltoniano usando as coordenadas dos modos,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}(\mathbf{p}, t) \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{p}, t) + \frac{1}{2} E_{\mathbf{p}}^2 \hat{\phi}(\mathbf{p}, t) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{p}, t) \right].$$

Esta expressão mostra que os modos do sistema agem como osciladores livres, a energia total do sistema sendo dada pela soma da energia contida em cada modo. Em seguida, substituimos (5.9) e (5.11) nesta expressão do Hamiltoniano para obtê-lo em termos dos operadores $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \delta(0)]. \quad (5.15)$$

A delta de Dirac $\delta(0) \rightarrow \infty$ que aparece nesta expressão pode ser entendida como a generalização da energia do ponto zero de um oscilador harmônico simples no limite do contínuo. Usando o argumento de que apenas diferenças das energias com relação ao vácuo são fisicamente relevantes, podemos portanto descartá-lo. É importante manter em mente que é possível detectar diferenças da energia do ponto zero, este fenômeno é conhecido como Efeito Casimir [62]. Para deduzir os autovalores e autovetores do operador Hamiltoniano (5.15), é útil primeiro calcular os comutadores

$$[\hat{H}, a_{\mathbf{p}}] = -E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \quad (5.16)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad (5.17)$$

que indicam que os operadores $a_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ se comportam de forma análoga aos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. O operador Hamiltoniano é Hermitiano e positivo definido. Por causa disto, deve existir um estado de mínima energia, chamado vácuo do sistema, tal que

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0,$$

para qualquer \mathbf{p} . Como consequência de ter descartado a energia do ponto zero, este estado é caracterizado por possuir energia nula

$$\hat{H} |0\rangle = 0.$$

Por outro lado, a ação do operador de criação sobre o vácuo pode ser visto a partir da aplicação do Hamiltoniano,

$$\hat{H}(\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle) = E_{\mathbf{p}}(\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle),$$

mostrando que este cria um autoestado do operador Hamiltoniano com energia $E_{\mathbf{p}}$. Desta forma, é possível construir qualquer autovetor do operador Hamiltoniano por meio da aplicação sucessiva do operador de criação,

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \propto \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle,$$

tal que sua energia é dada por

$$\hat{H}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \dots + E_{\mathbf{p}_n})|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle.$$

Como em problemas de autovalores a característica importante do autovetor é apenas a sua “direção”, somos livres para escolher a sua normalização. Portanto, escolhemos que um estado produzido pelo operador de criação seja definido por

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle.$$

Esta escolha implica que a norma de um vetor,

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

seja invariante sob transformações de Lorentz.

A conservação da energia total dada pelo Hamiltoniano (5.5) é resultante da invariância do sistema por translações temporais. A relação entre quantidades conservadas e as simetrias contínuas de um sistema é consequência do teorema de Noether. A ação de Klein-Gordon ganha um termo de superfície por translações temporais e espaciais, portanto não afetam as equações de movimento. Como consequência, o teorema de Noether

estabelece que existe uma corrente conservada tal que sua 4-divergência é nula,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.18)$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

é chamado de tensor energia-momento. Supondo que a corrente é nula no infinito $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, podemos integrar (5.18) sobre todo o espaço para obter 4 cargas que invariante no tempo,

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0,$$

onde $P^\nu \equiv \int d^3x T^{0\nu}$. Identificamos a componente zero de P^ν como o Hamiltoniano (5.5).

As outras três componentes são interpretadas como o momento físico do sistema,

$$\hat{\mathbf{P}} = - \int d^3x \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) \nabla \phi(\mathbf{x}, t). \quad (5.19)$$

Da mesma forma que o Hamiltoniano, este pode ser reescrito em termos dos operadores de criação e aniquilação assumindo a forma

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d^3p \mathbf{p} \hat{a}_\mathbf{p}^\dagger \hat{a}_\mathbf{p}.$$

Também de forma semelhante, o comutador deste operador com os operadores de criação e aniquilação são dados por

$$[\hat{\mathbf{P}}, a_\mathbf{p}] = -\mathbf{p} a_\mathbf{p}, \quad (5.20)$$

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}_\mathbf{p}^\dagger] = \mathbf{p} \hat{a}_\mathbf{p}^\dagger, \quad (5.21)$$

implicando que os autoestados $|\mathbf{p}\rangle$ de energia definida $E_\mathbf{p}$ também são autovetores do operador de momento com autovalor \mathbf{p} ,

$$\hat{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle.$$

Como de maneira geral, o estado $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ possui momento total $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n$ e energia $E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} + \dots + E_{\mathbf{p}_n}$ bem definidos, é natural interpretar as excitações do campo como partículas.

Agora identificamos o comportamento do campo (5.13), que foi elevado à posição de operador. Aplicando este operador no vácuo obtemos que

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip \cdot x} |\mathbf{p}\rangle.$$

Ou seja, o operador $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ produz uma superposição de estados de momento. Calculando a amplitude de probabilidade de encontrar $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) |0\rangle$ no estado $|\mathbf{q}\rangle$ obtemos a onda plana

$$\langle \mathbf{q} | \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) |0\rangle = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}.$$

Portanto, o estado criado pela aplicação deste operador no vácuo é semelhante ao do estado de posição no caso não relativístico $|\mathbf{x}\rangle$, sendo então interpretado como o operador que cria uma partícula localizada em \mathbf{x} .

Finalmente, como a equação de Klein-Gordon para um campo livre é linear, podemos obter a função de Green do operador de Klein-Gordon,

$$D_G(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (5.22)$$

tal que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) D_G(x - y) = -i\delta^4(x - y).$$

A função de Green descreve como o sistema reage a um impulso. Uma fonte externa genérica, por sua vez, pode convenientemente ser descrita como uma distribuição de impulsos tipo delta de Dirac. Consequentemente, a solução do sistema linear à presença de uma fonte externa $j(x)$ é a soma das soluções dos impulsos devidamente moldadas, ou convolucionadas, pela mesma distribuição,

$$\phi(x) = i \int d^4 y D_G(x - y) j(y).$$

De acordo com as condições de contorno que desejamos impor ao sistema, pode-

mos incorporá-las à função de Green (5.22) deformando o percurso de integração. Isto pode ser feito deslocando corretamente os polos da parte temporal da integral $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ para o plano complexo. Por exemplo, a função retardada de Green $D_R(x - y)$, que é caracterizada por permitir que um impulso produzido em y^0 possa apenas afetar o sistema em tempos posteriores $x^0 > y^0$ pode ser obtida deslocando ambos os polos abaixo do eixo real. Isto pode ser realizado acrescentando um pequeno deslocamento imaginário $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} - i\varepsilon = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - i\varepsilon$. Este efeito pode ser visto diretamente da definição (5.22), pois se $x^0 < y^0$ podemos fechar o caminho de integração com um semicírculo na parte superior do plano complexo deixando os polos de fora, e neste caso a integral se anula. A função retardada de Green também pode ser obtida a partir do operador (5.13) pela relação

$$\begin{aligned} D_R(x - y) &= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle, \\ &= \Theta(x^0 - y^0) [D(x - y) - D(y - x)], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle, \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned}$$

é a amplitude de propagação de uma partícula criada em y ser aniquilada em x ou $\langle x | y \rangle$.

Os polos podem ser deslocados de 4 formas distintas. Ao usar a prescrição de Feynman os polos são deslocados de tal forma que $p^0 = \pm (E_{\mathbf{p}} - i\varepsilon) = \pm (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - i\varepsilon)$. A função de Green correspondente, ou propagador de Feynman, é

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \} | 0 \rangle, \\ &= \Theta(x^0 - y^0) D(x - y) + \Theta(y^0 - x^0) D(y - x), \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde $T \{ \dots \}$ é o operador de ordenamento temporal. O efeito deste operador é retornar $T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \} = \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)$ se $x^0 > y^0$ e $\hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x)$ se $y^0 > x^0$. Para ter uma interpreta-

ção física mais completa desta função de Green, é mais interessante analisar o caso de um campo escalar complexo. Ao contrário do caso real onde há somente um tipo de partícula e o operador $\hat{\phi}(x)$ tem tanto o papel de criá-las quanto de aniquilá-las em um ponto do espaço, um campo escalar complexo descreve dois tipos de partículas de mesma massa. Nesta situação, este campo possui uma simetria a mais associada a uma transformação de *gauge* global. A partir desta simetria, o teorema de Noether associa a cada uma destas partículas uma carga oposta. Neste caso, o operador $\hat{\phi}(x)$ tem o papel de criar antipartículas, e aniquilar partículas. O operador adjunto $\hat{\phi}^\dagger(x)$ tem o papel oposto. Assim, temos que a amplitude de propagação de uma partícula entre os pontos y e x é dada por

$$D^+(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle,$$

e a amplitude de propagação de uma antipartícula entre os mesmos pontos é dada por

$$D^-(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle.$$

O propagador de Feynman para o campo escalar complexo então é dado por

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \langle 0 | T \left\{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) \right\} | 0 \rangle \\ &= \Theta(x^0 - y^0) D^+(x - y) + \Theta(y^0 - x^0) D^-(y - x), \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned}$$

Assim, quando $x^0 > y^0$ temos $D^+(x - y)$ e no caso em que $y^0 > x^0$ temos $D^-(y - x)$. Partículas virtuais participam de etapas intermediárias em processos de espalhamento e decaimentos. Como estas não podem ser medidas, o princípio de superposição da mecânica quântica indica que devemos somar todas as amplitudes que contribuem para o processo. Em particular, a propagação de uma partícula do ponto y ao ponto x é indistintível da propagação de uma antipartícula do ponto x ao ponto y , portanto o propagador de Feynman tem o papel de incorporar automaticamente estas duas possibilidades na amplitude. Este propagador é um componente fundamental das regras de Feynman e surge naturalmente no teorema de Wick.

5.3 Quantização do campo eletromagnético

O campo de Klein-Gordon desenvolvido na seção anterior, é o campo mais simples de ser quantizado e será usado como analogia para o processo de quantização do campo eletromagnético. Como foi visto no Capítulo 2, o campo eletromagnético livre é descrito em termos do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ pela densidade de Lagrangiana [62, 64]

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (5.23)$$

ou, da definição $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, em termos do potencial eletromagnético A^μ por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu). \quad (5.24)$$

A partir da equação de Euler-Lagrange obtemos a equação de movimento para o campo A^μ ,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

ou

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.25)$$

Tentar quantizar o campo eletromagnético seguindo o mesmo procedimento usado para o campo escalar partindo da Lagrangiana (5.23) traz diversas dificuldades. O campo vetorial A^μ introduz 4 campos escalares reais na teoria, mas nem todas suas componentes constituem graus de liberdade. Como pode ser visto, a Lagrangiana não possui componente $\partial_0 A^0$, portanto o momento conjugado da componente A^0 é nulo,

$$\pi^0 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_0 A^0)} = 0.$$

Isto traz sérios problemas ao tentar impor as relações de comutação para \hat{A}^μ . Além disso, a função de Green da equação de movimento (5.25) não é definida. Ao tentar resolver a equação de movimento para uma fonte tipo delta de Dirac no espaço dos momentos,

$$(M^{-1})^{\mu\alpha} \tilde{D}_{\alpha\nu}(p) = -i\delta_\nu^\mu,$$

onde $(M^{-1})^{\mu\alpha} \equiv -k^2\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\alpha$, vemos que não é possível invertê-la para obter a função de Green $\tilde{D}_{\alpha\nu}(p)$. Estes problemas surgem porque as componentes do campo A^μ não são independentes, existem vínculos entre as elas que podem ser impostos escolhendo uma condição de *gauge* específico.

Como foi comentado no Capítulo 2, o campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é invariante por transformações de *gauge* $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\psi$, portanto a equação de movimento (5.25) e a Lagrangiana (5.23) também o são. Dentre todas as possibilidades, podemos sempre escolher uma função ψ de tal forma que $\partial_\mu A^\mu = 0$. Esta escolha é chamada de *gauge* ou condição de Lorenz (sem o t! [65]) e tem a vantagem de desacoplar a equação de movimento (5.25) para cada componente,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0. \quad (5.26)$$

A escolha de um *gauge* permite reduzir o número de graus de liberdade. Isto pode ser observado aplicando a condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ a uma solução genérica da equação de movimento (5.26) $A^\nu = \varepsilon^\nu e^{-ip\cdot x}$, implicando que o momento e o vetor de polarização devem ser ortogonais,

$$\varepsilon_\mu p^\mu = 0.$$

Para ver a consequência deste vínculo, escolhemos um sistema de coordenadas tal que o eixo z coincida com a direção de propagação da onda. Para que o vetor de polarização seja ortogonal ao momento $p^\mu = (|p|, 0, 0, |p|)$, este deve ter a forma $\varepsilon^\mu = N(1, a, b, 1)$, onde N é um fator de normalização. Vemos assim que a componente longitudinal A^3 fixa completamente a componente temporal A^0 . O *gauge* de Lorenz, porém, não fixa completamente o campo A^μ . De fato, é possível realizar mais uma transformação $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\lambda$ tal que o novo campo continue satisfazendo a condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Para isto, restringimos a escolha da função λ àquelas que satisfazem a equação de onda $\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0$. Como a equação de movimento (5.26) fixa a norma do momento $p^2 = 0$, então a escolha $\lambda = i\beta e^{-ip\cdot x}$ satisfaz a equação de onda, sendo o parâmetro β livre. O efeito desta nova transformação de *gauge* para a solução de onda plana é

$$A^\nu \rightarrow A^\nu + \beta p^\nu e^{-ip\cdot x} = \varepsilon^\nu e^{-ip\cdot x},$$

ou

$$A^\nu = \varepsilon^{\nu\mu} e^{-ip\cdot x},$$

onde $\varepsilon^{\nu\mu} = \varepsilon^\nu - \beta p^\nu$. Assim, podemos escolher convenientemente o parâmetro $\beta = -N/|\mathbf{p}|$ para que o novo vetor de polarização, e consequentemente o campo A^μ , possua apenas duas componentes independentes,

$$\varepsilon^{\nu\mu} = N(0, a, b, 0).$$

Notamos que, ao contrário da equação de movimento original, a equação (5.26) obtida impondo o *gauge* de Lorenz pode ser invertida facilmente. A função de Green correspondente é dada por

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2} e^{-ip\cdot(x-y)},$$

e possui uma forma semelhante à função de Green para o campo de Klein-Gordon (5.22) no limite em que a massa tende a zero.

Se a condição de Lorenz *não for imposta*, a mesma equação de movimento (5.26) pode ser obtida a partir da Lagrangiana original (5.24) adicionando o termo $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$,

$$\mathcal{L}_M^L = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (5.27)$$

possuindo, como consequência, a mesma função de Green. Além disso, graças ao termo adicional, a componente A^0 passa a possuir um momento conjugado não nulo,

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

A Lagrangiana (5.27) pode ser manipulada para obter um termo de divergência quadridimensional,

$$\mathcal{L}_M^L = -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu (A^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\mu \partial_\nu A^\nu).$$

Como este não altera as equações de movimento, pode ser descartado. Por causa disto, a

teoria descrita pela Lagrangiana (5.27) é equivalente àquela obtida através de

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^L &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu, \\ &= -\frac{1}{2}\dot{A}^0\dot{A}^0 - \frac{1}{2}\nabla A^0 \cdot \nabla A^0 + \frac{1}{2}\dot{A}^i\dot{A}^i + \frac{1}{2}\nabla A^i \cdot \nabla A^i.\end{aligned}\tag{5.28}$$

O tensor energia momento é obtido pelo teorema de Noether através da expressão

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L},$$

ou

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\alpha\partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Assim, obtemos o Hamiltoniano e o momento do sistema integrando T^{00} e T^{0i} sobre todo o espaço, respectivamente,

$$H_M^L = -\frac{1}{2}\int d^3x \left(\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu + \nabla A^\mu \cdot \nabla A_\mu\right),\tag{5.29}$$

$$\mathbf{p}_M^L = \int d^3x \dot{A}^\mu \nabla A_\mu.\tag{5.30}$$

A Lagrangiana (5.28) descreve uma teoria diferente da de Maxwell pois recupera as equações de movimento mas não possui as propriedades da condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Para lembrar disto, usamos o rótulo L . Em particular, não é mais invariante de *gauge* e portanto possui 4 graus de liberdade. Apesar disto, é possível quantizá-la e impor uma condição sobre o espaço dos estados acessíveis ao sistema que, no limite clássico, é equivalente ao *gauge* de Lorenz. Este procedimento, que será seguido aqui, foi desenvolvido por Gupta em 1950 e estendido por Bleuer no mesmo ano [66, 67].

Para quantizar o campo eletromagnético, calculamos primeiro os momentos conjugados. Partindo da Lagrangiana (5.28), para cada componente do campo A^μ obtemos

$$\begin{aligned}\pi^0 &= -\dot{A}^0, \\ \pi^i &= -\dot{A}^i.\end{aligned}$$

Impomos as relações de comutação entre os campos e os momentos conjugados

$$[\hat{A}^\mu(x), \partial_t \hat{A}^\nu(y)] = -i\eta^{\mu\nu}\delta(x-y),$$

e

$$[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(y)] = [\hat{\pi}^\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)] = 0.$$

A métrica é inserida para explicitar a covariância da expressão. É interessante notar que o comutador entre as componentes $\mu = \nu = 0$ possui o sinal errado quando comparado com o campo escalar de Klein-Gordon. Como será visto, este fato gera sérios problemas à versão quantizada da teoria, tal como não permitir a existência de um limite inferior para a energia do sistema.

Desejamos expandir o campo e definir os operadores de criação e aniquilação. Para poder expandir o campo A^μ em seus modos normais precisamos primeiramente definir uma base linearmente independente de vetores de polarização $\varepsilon^\mu(\lambda)$, onde $\lambda = 0, 1, 2$ e 3 . É natural impor uma condição de ortonormalidade quadridimensional tal que $\varepsilon^\mu(\lambda)\varepsilon_\mu(\lambda') = \eta^{\lambda\lambda'}$. Existem diversas opções de bases, porém, sem perda de generalidade, escolhemos os vetores de polarização de tal forma que sejam função do momento da sua onda plana correspondente. Em um referencial específico, escolhemos que dois dos vetores da base possuam componente temporal nula e suas componentes espaciais sejam perpendicular ao momento espacial da onda,

$$\varepsilon^0(1, \mathbf{p}) = \varepsilon^0(2, \mathbf{p}) = 0,$$

$$\mathbf{p} \cdot \varepsilon(1, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \varepsilon(2, \mathbf{p}) = 0.$$

Ambas imposições implicam que estes vetores de polarização são perpendiculares ao 4-momento,

$$p_\mu \varepsilon^\mu(1, \mathbf{p}) = p_\mu \varepsilon^\mu(2, \mathbf{p}) = 0. \quad (5.31)$$

Esta expressão é invariante sob transformações de Lorentz e, portanto, válida em qualquer referencial inercial.

Os vetores restantes $\varepsilon^\mu(0, \mathbf{p})$ e $\varepsilon^\mu(3, \mathbf{p})$ devem formar uma base para o plano perpendicular aos vetores $\varepsilon^\mu(1, \mathbf{p})$ e $\varepsilon^\mu(2, \mathbf{p})$. O momento p^μ , a única grandeza vetorial

que caracteriza o sistema, está contido neste plano perpendicular devido a (5.31). Porém, como consequência da equação de movimento, possui norma nula $p^2 = 0$. Como os vetores de polarização devem satisfazer a relação de ortonormalidade, nenhum deles pode ser paralelo a p^μ . Por conveniência, então definimos o vetor $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ neste sistema de referência. Desta maneira, associamos o vetor $\varepsilon^\mu(0, \mathbf{p}) = n^\mu$ e ortogonalizamos o vetor p^μ com relação n^μ para definir o vetor $\varepsilon^\mu(3, \mathbf{p}) = (p^\mu - n_\alpha p^\alpha n^\mu) / n_\alpha p^\alpha$. Ao contrário dos vetores $\varepsilon^\mu(1, \mathbf{p})$ e $\varepsilon^\mu(2, \mathbf{p})$ em (5.31), os vetores de polarização tipo tempo e longitudinal satisfazem a relação invariante dada por

$$p_\mu \varepsilon^\mu(0, \mathbf{p}) = -p_\mu \varepsilon^\mu(3, \mathbf{p}). \quad (5.32)$$

Por outro lado, é possível mostrar que os vetores de polarização satisfazem a relação de completeza

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(\lambda, \mathbf{p}) \varepsilon^{*\nu}(\lambda, \mathbf{p}) = -\eta^{\mu\nu}. \quad (5.33)$$

Com a base definida, expandimos o campo $\hat{A}^\mu(x)$ de forma análoga ao campo escalar,

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\hat{a}_{\lambda, \mathbf{p}} \varepsilon^\mu(\lambda, \mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\lambda, \mathbf{p}}^\dagger \varepsilon^{*\mu}(\lambda, \mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (5.34)$$

A partir desta expressão, podemos reescrever o Hamiltoniano (5.29) e o momento do sistema (5.30) em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\hat{H}_M^L = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left(-\hat{a}_{0, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{0, \mathbf{p}} + \hat{a}_{1, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{1, \mathbf{p}} + \hat{a}_{2, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{2, \mathbf{p}} + \hat{a}_{3, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{3, \mathbf{p}} \right), \quad (5.35)$$

$$\hat{\mathbf{P}}^L = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(-\hat{a}_{0, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{0, \mathbf{p}} + \hat{a}_{1, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{1, \mathbf{p}} + \hat{a}_{2, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{2, \mathbf{p}} + \hat{a}_{3, \mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{3, \mathbf{p}} \right). \quad (5.36)$$

Estas expressões mostram que, enquanto as componentes espaciais do campo eletromagnético contribuem positivamente, a componente temporal contribui negativamente para a energia. Por causa disto, podemos criar estados com um número arbitrário de fôtons tipo tempo tornando a energia tão negativa quanto desejarmos, o sistema portanto não possui um vácuo estável. Para resolver este problema devemos restringir os estados acessíveis ao

sistema de tal forma a limitar inferiormente a energia. Impor uma relação correspondente à condição de Lorenz $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ para o operador campo eletromagnético geraria uma inconsistência na definição das relações de comutação. No lugar, impomos a condição mais fraca de que todo estado acessível ao sistema deve satisfazer

$$\partial_\mu \hat{A}^{+\mu}(x) |\Psi\rangle = 0, \quad (5.37)$$

onde

$$\hat{A}^{+\mu}(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \hat{a}_{\lambda,\mathbf{p}} \varepsilon^\mu(\lambda, \mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (5.38)$$

é a parte de frequência positiva do campo \hat{A}^μ , equação (5.34). O complexo conjugado da condição (5.37) é dado por

$$\langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^{-\mu}(x) = 0,$$

e o valor esperado da condição de Lorenz na forma de operador é, portanto, igual a

$$\langle \Psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \Psi \rangle = 0. \quad (5.39)$$

Esta condição, por sua vez, indica que o limite clássico recupera a condição de Lorenz usual. Portanto podemos retirar o rótulo L da Lagrangiana (5.28) para a teoria quantizada com tal que mantenhamos a condição (5.37) sobre os estados.

Todos os estados acessíveis ao sistema devem satisfazer a relação (5.39). Substituindo a expansão de frequência positiva (5.38) na condição (5.37) obtemos que

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^3 p_\mu \varepsilon^\mu(\lambda, \mathbf{p}) \hat{a}_{\lambda,\mathbf{p}} |\Psi\rangle = 0. \quad (5.40)$$

Usando as propriedades da base dadas pelas relações (5.31) e (5.32) podemos reescrever (5.40) como

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2E_p}} p_\mu \varepsilon^\mu(0, \mathbf{p}) (\hat{a}_{0,\mathbf{p}} - \hat{a}_{3,\mathbf{p}}) |\Psi\rangle = 0.$$

Como esta expressão deve ser verdadeira para todos os modos, concluímos que os estados acessíveis são aqueles em que os operadores de aniquilação temporal e longitudinal

satisfazem a relação

$$\hat{a}_{0,\mathbf{p}} |\Psi\rangle = \hat{a}_{3,\mathbf{p}} |\Psi\rangle ,$$

e seu complexo conjugado

$$\langle \Psi | \hat{a}_{0,\mathbf{p}}^\dagger = \langle \Psi | \hat{a}_{3,\mathbf{p}}^\dagger .$$

Como consequência, os valores esperados de energias do Hamiltoniano (5.35) destes estados acessíveis não dependem dos fótons tipo tempo nem longitudinal,

$$\langle \Psi | \hat{H}_M | \Psi \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \langle \Psi | \left(\hat{a}_{1,\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{1,\mathbf{p}} + \hat{a}_{2,\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{2,\mathbf{p}} \right) | \Psi \rangle ,$$

tornando assim o vácuo bem definido e reduzindo o número de graus de liberdade de 4 para 2.

O propagador de Feynman é definido de forma análoga ao caso do campo escalar,

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{A}^\mu(x) A^\nu(y) \right\} | 0 \rangle , \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

A condição de Lorenz foi imposta na teoria quântica de campos através da imposição sobre os estados (5.37). Porém é possível escolher outras condições de *gauge*. Uma forma de generalizar (5.27) é incluindo o parâmetro ξ tal que [62]

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 .$$

É possível mostrar que, neste caso, o propagador correspondente é dado por

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] .$$

Para recuperar a condição de Lorenz devemos escolher $\xi = 1$, também conhecido como *gauge* de Feynman. Outras escolhas são possíveis, como o *gauge* de Landau $\xi = 0$ que, no espaço conjugado, tem a particularidade de gerar um propagador ortogonal ao momento, $p_\mu \tilde{D}_L^{\mu\nu}(p) = 0$. É interessante que por mais que a forma do propagador do fóton dependa da escolha de *gauge*, as grandezas fisicamente mensuráveis, como seções de choque e taxas

de decaimento, são independentes da escolha em qualquer ordem da teoria de perturbação.

5.4 Eletrodinâmica quântica

Os campos escalares e eletromagnéticos discutidos nas seções anteriores foram conectados apenas quadraticamente com seus primeiros vizinhos por meio de termos do tipo $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi$. Consequentemente, as equações de movimento destas teorias são lineares e acopladas. Por meio de uma transformação de coordenadas conveniente, na forma de uma transformada de Fourier, foi possível desacoplar estas equações de movimento. Assim, a energia total do sistema pôde ser escrita como a soma da energia contida em cada um dos modos do campo. Como consequência do desacoplamento, o estado do sistema permanece estacionário e, portanto, qualquer distribuição de modos excitados permanece inalterada com o passar do tempo. Não é possível realizar medidas em modelos com estas características, por isso, sistemas deste tipo, estão desconectados da realidade.

A eletrodinâmica quântica (QED) descreve como o campo eletromagnético interage com o elétron, sua Lagrangiana pode ser escrita como [61]

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (5.41)$$

onde $\psi(x)$ é um campo fermiônico (ou de Dirac) que descreve o elétron, $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$, e e m são a carga e a massa do elétron, respectivamente, e γ^μ são as matrizes 4×4 de Dirac. O campo $\bar{\psi}\psi$ é definido de tal forma a tornar o produto $\bar{\psi}\psi$ invariante por transformações de Lorentz (ver Capítulo 3 em [61]). As matrizes de Dirac podem ser escritas usando a representação de Weyl em forma de bloco como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\sigma^\mu \equiv (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma^i)$ e σ^i são as matrizes 2×2 de Pauli. Estas matrizes satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Os dois primeiros termos de (5.41) correspondem às Lagrangianas do campo eletromagnético e do campo fermiônico livres. O terceiro termo, por ser dado pelo produto de 3 campos, torna as equações de movimento não lineares e produz um acoplamento entre os modos dos campos eletromagnético e fermiônico. A Lagrangiana (5.41) pode ser obtida a partir do campo livre de Dirac impondo a invariância de *gauge* local $\psi(x) \rightarrow e^{-iex(x)}\psi(x)$ [15]. O campo auxiliar $A^\mu(x)$, que por transformações de *gauge* se transforma como $A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x)$, deve ser acrescentado na forma do termo de interação para manter a invariância da Lagrangiana. Por outro lado, na ausência de campo eletromagnético, usando a equação de Euler-Lagrange recuperamos a equação de Dirac para o campo ψ ,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (5.42)$$

A quantização do campo fermiônico livre segue um procedimento semelhante ao apresentado para o campo escalar, a principal diferença sendo que os campos satisfazem relações de anticomutação ao invés de relações de comutação. Este fato está diretamente ligado aos férmons satisfazerem o princípio de exclusão de Pauli e, portanto, serem descritos pela estatística de Fermi-Dirac. A quantização deste campo foge do escopo deste trabalho, de forma que apresentamos apenas os principais resultados. Mais informações sobre a quantização do campo fermiônico podem ser obtidas em [61]. O campo $\psi(x)$ pode ser expandido de forma semelhante ao campo $\phi(x)$ sendo escrito como

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(\hat{a}_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (5.43)$$

Os fatores $u^s(p) e^{-ip \cdot x}$ e $v^s(p) e^{ip \cdot x}$ correspondem às soluções de frequência positiva e negativa da equação de Dirac, respectivamente. Cada uma delas possuem 2 soluções linearmente independente indicadas por $s = 1, 2$ e associadas às duas projeções de spins acessíveis aos elétrons. Assim, os campos descritos pela equação de Dirac possuem spin 1/2. Os operadores \hat{a}_p^s e $\hat{a}_p^{s\dagger}$ aniquilam e criam férmons, e os operadores \hat{b}_p^s e $\hat{b}_p^{s\dagger}$ aniquilam e criam antiférmons, respectivamente. Os espinores de base são normalizados de tal forma que

$$\bar{u}^r(p) u^s(p) = 2m\delta^{rs} \quad \text{e} \quad \bar{v}^r(p) v^s(p) = -2m\delta^{rs},$$

e satisfazem as relações completeza

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m,$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m.$$

Os campos e operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de anticomutação¹ a tempos iguais dadas por

$$\left\{ \psi_a(x), \psi_b^\dagger(y) \right\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab},$$

$$\left\{ \psi_a(x), \psi_b(y) \right\} = \left\{ \psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y) \right\} = 0,$$

e

$$\left\{ a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{\dagger s} \right\} = \left\{ b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{\dagger s} \right\} = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

O propagador de Feynman pode ser escrito como

$$\begin{aligned} S_F(x - y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}, \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle, & \text{se } x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle, & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}, \\ &\equiv \langle 0 | T \left\{ \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \right\} | 0 \rangle, \end{aligned}$$

onde T é o operador de ordenamento temporal e usamos a notação $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ para simplificar objetos contraídos com as matrizes de Dirac.

O Hamiltoniano da teoria livre de Dirac, em termos dos operadores de criação e aniquilação, é dado por

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^s \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^s \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \right),$$

¹A relação de anticomutação entre dois operadores é definida como $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

e o momento total do sistema por

$$\hat{\mathbf{P}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \sum_s \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^s \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^s \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \right).$$

É possível mostrar usando a equação de Dirac livre (5.42) e a equação análoga para $\bar{\psi}$ que a corrente $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ é conservada. Como consequência, a integral da componente 0 sobre todo o espaço não varia no tempo,

$$\hat{Q} \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^s \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} - \hat{b}_{\mathbf{p}}^s \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} \right).$$

Este operador, quando aplicado sobre um estado, retorna os autovalores +1 para cada férnion, e -1 para cada antiférnion presente. Portanto, quando aplicado a um estado genérico, este operador retorna a carga elétrica total do sistema.

Devido à presença do termo de acoplamento em (5.41), os modos do campo eletromagnético e do campo de Dirac não são mais estacionários. Como consequência disto, a energia presente em um modo do campo eletromagnético pode excitar modos do campo de Dirac e vice versa. De maneira geral, a amplitude de probabilidade de um estado i ser encontrado no estado j pode ser obtida por meio da teoria de perturbação e é dada por [61]

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) \propto {}_0 \langle j | T \left\{ e^{-i \int d^4 x \mathcal{H}_i} \right\} | i \rangle_0, \quad (5.44)$$

em que o índice 0 indica os estados da teoria livre² e \mathcal{H}_i é o Hamiltoniano de interação (no caso particular da QED $\mathcal{H}_i = -\mathcal{L}_i = e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$). Devido à magnitude da carga e , a exponencial pode ser expandida e truncada de acordo com a precisão desejada. Para o cálculo de amplitudes de processos simples ou de baixa ordem, a expressão (5.44) é facilmente desenvolvida. Já para processos mais complexos ou de ordens maiores, a grande multiplicidade de termos idênticos torna a manipulação bastante complexa e tediosa. Entretanto, o cálculo recorrente torna aparente o padrão no qual certas estruturas da teoria aparecem nas amplitudes de probabilidades. Em virtude disto, é possível identificar um dado processo pictorialmente através de grafos chamados de diagramas de Feynman, cada parte destes diagramas estando associado a uma estrutura da teoria por meio das

²Os estados da teoria livre são construídos de forma análoga ao campo escalar.

chamadas regras de Feynman [61]. As regras de Feynman são particulares a cada teoria, sendo que para a QED, no espaço dos momentos, são dadas por:

- Propagador fermiônico interno: $\frac{i(p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}$;
- Propagador fotônico interno: $-\frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon}$;
- Vértices: $-ie\gamma^\mu$;
- Férnion inicial: $u^s(p)$;
- Férnion final: $\bar{u}^s(p)$;
- Antiférnion inicial: $\bar{v}^s(p)$;
- Antiférnion final: $v^s(p)$;
- Fóton inicial: $\varepsilon_\mu(p)$;
- Fóton final: $\varepsilon_\mu^*(p)$.

As amplitudes devem ser escritas de tal forma a serem escalares de Lorentz e espinoriais. Cada traço possui seu próprio momento e em cada vértice a conservação do momento deve ser imposta. Finalmente, os momentos que não podem ser fixados em função dos momentos das partículas externas devem ser integrados.

Como exemplo, analisamos um dos diagramas de Feynman associado ao espllhamento Bhabha que consiste na aniquilação de um par de elétron-pósitron produzindo um novo par de elétron-pósitron. Na Figura 5.1 vemos um elétron com momento k e

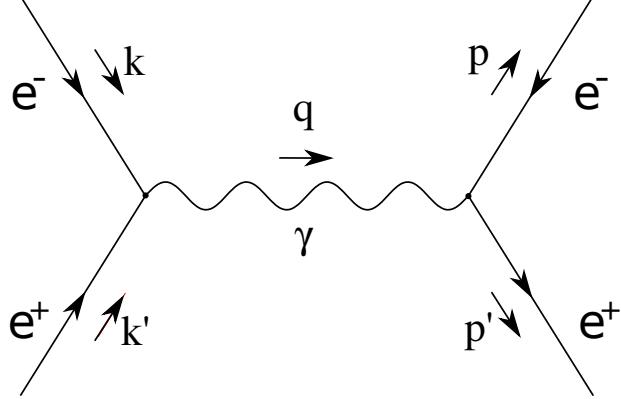


Figura 5.1: Diagrama de Feynman do processo de aniquilação $e^- (k) e^+ (k') \rightarrow e^- (p) e^+ (p')$.

um pósitron com momento k' iniciais sendo aniquilados e produzindo um fóton interno de momento q . Em sequida, o fóton é aniquilado produzindo um novo par de elétron-pósitron finais com momentos p e p' , respectivamente. Devido à conservação do momento em cada vértice, o momento do fóton é fixado pelos momentos iniciais $q = k + k'$. Usando as regras de Feynman, deduzimos que a amplitude de probabilidade deste processo é dado por

$$\mathcal{M}(e^- e^+ \rightarrow e^- e^+) = \bar{v}^{s'}(k') (-ie\gamma^\mu) u^s(k) \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} u^r(p) (-ie\gamma^\nu) v^{r'}(p').$$

O processo completo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ pode ocorrer de outra forma além da do diagrama descrito na Figura 5.1. No lugar das partículas iniciais se aniquilarem, o elétron inicial de momento k pode emitir um fóton de momento q e o pósitron inicial de momento k' pode absorvê-lo. Desta forma o fóton interno possui momento dado por $q = p - k$, onde p é o momento do elétron final. A amplitude de probabilidade do espalhamento Bhabha é dado, portanto, pela soma dos dois diagramas de Feynman.

5.5 Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pela QED

Como as equações de Maxwell incorporam o princípio de superposição dos campos elétrico e magnético, elas são naturalmente lineares. Uma das principais consequências desta propriedade é fazer com que a propagação de uma onda eletromagnética não possa ser modificada pela presença de outra. A revolução científica do início do século XX, que levou a uma visão quântica e relativística da natureza, mudou a forma pela qual entendemos como a radiação eletromagnética interage com a matéria. Como consequência da teoria relativística do elétron, proposta por Dirac no final da década de 1920, Helpern e Debye observaram a possibilidade da ocorrência de espalhamento entre fótons [23] no qual um par de fótons iniciais se aniquilam produzindo um par de partículas virtuais, um elétron e um pósitron, que por sua vez se aniquilam produzindo um novo par de fótons [68]. Este processo é descrito em primeira ordem, na linguagem das regras de Feynman, pelo diagrama tipo *box* da Figura 5.2.

O espalhamento fóton-fóton pode ocorrer em qualquer regime de energia. Mesmo quando o par de fótons não possui energia suficiente para produzir um par elétron-pósitron, o espalhamento ocorre devido à possibilidade virtual de criação de pares (polarização do vácuo) [24]. O primeiro cálculo da seção de choque do espalhamento de fótons de baixas energias, comparadas com a massa do elétron, foi apresentado por H. Euler em 1936 [68]. Para tal, ele deduziu a primeira correção do Hamiltoniano do campo eletromagnético devido à equação de Dirac na ausência de cargas reais e no limite em que os campos variam lentamente dentro de um comprimento de onda de Compton. Posteriormente, Heisenberg e Euler apresentaram a Lagrangiana efetiva que inclui de forma não perturbativa todas as correções não-lineares da eletrodinâmica de Maxwell no limite de campos constantes

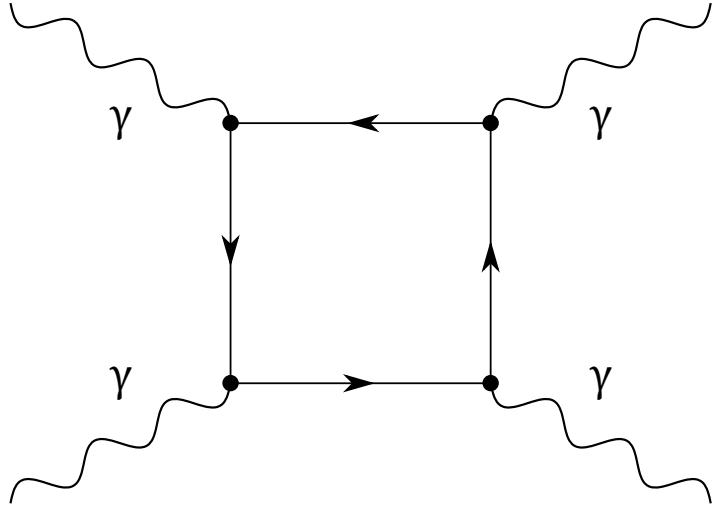


Figura 5.2: Diagrama de Feynman de ordem zero do espalhamento fóton-fóton. As principais partículas que podem compor o *loop* são os léptons, quarks e W^\pm .

[24]. Devido à magnitude das seções de choque estimadas, da ordem de $10^{-4}b$ para raios γ e $10^{-52}b$ para a luz visível, a medição deste processo fugia da capacidade experimental da época [68].

O espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pela QED possui 6 diagramas de Feynman como aquele mostrado na Figura 5.2, correspondendo à combinatoria de todas as formas distintas de distribuir os momentos externos ao redor do *box*. Desses diagramas, 3 diferem dos restantes pela direção em que a corrente do *loop* gira, sendo portanto idênticos. A partir das regras de Feynman, podemos escrever a amplitude de probabilidade dos 3 diagramas, e somando os 3 diagramas restantes, obtemos que [69]

$$\mathcal{M}(\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma) = \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \varepsilon_\alpha^*(p_1) \varepsilon_\beta^*(p_2) M^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2), \quad (5.45)$$

onde

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) &= 2e^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{\not{q} - \not{p}_1 + m}{(q - p_1)^2 - m^2} \right. \\
&\quad \times \gamma^\beta \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m}{(q - p_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + \not{k}_2 + m}{(q - p_1 - p_2 + k_2)^2 - m^2} \Big\} \\
&\quad + 2e^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{\not{q} - \not{p}_2 + m}{(q - p_2)^2 - m^2} \right. \\
&\quad \times \gamma^\alpha \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m}{(q - p_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + \not{k}_2 + m}{(q - p_1 - p_2 + k_2)^2 - m^2} \Big\} \\
&\quad + 2e^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{\not{q} - \not{p}_1 + m}{(q - p_1)^2 - m^2} \right. \\
&\quad \times \gamma^\nu \frac{\not{q} - \not{p}_1 + \not{k}_2 + m}{(q - p_1 + k_2)^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{\not{q} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + \not{k}_2 + m}{(q - p_1 - p_2 + k_2)^2 - m^2} \Big\} ,
\end{aligned}$$

sendo que o traço surge naturalmente para tornar o *loop* uma grandeza escalar. Este tensor de rank-4 diverge no limite superior da integral sobre o momento q do *loop*. Para visualizar isto, tomamos o limite $q \rightarrow \infty$ ou, de forma equivalente, $k_i \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0) &= \frac{2e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\alpha (\not{q} + m) \gamma^\beta (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \right\} \\
&\quad + \frac{2e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\beta (\not{q} + m) \gamma^\alpha (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \right\} \\
&\quad + \frac{2e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\alpha (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \gamma^\beta (\not{q} + m) \right\} .
\end{aligned}$$

Os traços podem ser avaliados usando a identidade [69],

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\alpha (\not{q} + m) \gamma^\beta (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \right\} &= 32q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta \\
&\quad - 8(q^2 + m^2) (q^\mu q^\alpha \eta^{\beta\nu} + q^\alpha q^\beta \eta^{\nu\mu} + q^\beta q^\nu \eta^{\mu\alpha} + q^\nu q^\mu \eta^{\alpha\beta}) \\
&\quad + 4(q^2 + m^2)^2 (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) .
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos reescrever $M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0)$ como

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0) &= \frac{192e^4}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta}{(q^2 - m^2)^4} \\ &- \frac{32e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^3} (q^\mu q^\alpha \eta^{\beta\nu} + q^\alpha q^\beta \eta^{\mu\nu} + q^\beta q^\nu \eta^{\mu\alpha} + q^\nu q^\mu \eta^{\alpha\beta} + q^\mu q^\beta \eta^{\alpha\nu} + q^\alpha q^\nu \eta^{\mu\beta}) \\ &+ \frac{24e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^2}. \end{aligned}$$

As integrais sobre as componentes do momento do *loop* podem ser simplificadas usando as identidades [61],

$$\begin{aligned} \int d^4q f(q^2) q^\mu q^\nu &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \int d^4q f(q^2) q^2, \\ \int d^4q f(q^2) q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta &= \frac{1}{24} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int d^4q f(q^2) q^4, \end{aligned}$$

para qualquer função $f(p^2)$. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0) &= \frac{8e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int d^4q \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^4} \\ &- \frac{16e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int \frac{d^4q q^2}{(q^2 - m^2)^3} \\ &+ \frac{24e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, completando os quadrados dos integrandos das duas primeiras integrais para obter potências de $(q^2 - m^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0) &= \frac{16e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^2} \\ &+ \frac{8e^4}{(2\pi)^4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\alpha\nu}) m^4 \int \frac{d^4q}{(q^2 - m^2)^4}. \end{aligned}$$

Notamos que, como a primeira integral possui a mesma potência do momento tanto no numerador quanto no denominador, diverge então logaritmicamente.

A amplitude de probabilidade (5.45) está diretamente associada à seção de choque e portanto uma quantidade fisicamente mensurável, o que implica que deve ser invariante por transformações de *gauge*. Como foi visto na seção 5.3, é possível realizar uma trans-

formação de *gauge* sem afetar a condição de Lorenz $\varepsilon \cdot k = 0$, implicando que por estas transformações, o vetor de polarização é modificado por $\varepsilon^\mu(k) \rightarrow \varepsilon^\mu(k) + \beta k^\mu$, onde β é uma constante arbitrária. Para que a amplitude (5.45) seja invariante por estas transformações de *gauge*, o tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ necessariamente deve satisfazer

$$k_{1\mu} M^{\mu\nu\alpha\beta} = k_{2\nu} M^{\mu\nu\alpha\beta} = \dots = 0, \quad (5.46)$$

para todos os momentos dos fótons externos. Notamos facilmente que $M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0)$ não satisfaz esta propriedade e, portanto, está associada à quebra da invariância de *gauge*. Desta forma, uma das formas de se recuperar a invariância é regularizando a amplitude subtraindo-a pela sua parte divergente³ [69],

$$M_R^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) = M^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) - M^{\mu\nu\alpha\beta}(0, 0, 0, 0). \quad (5.47)$$

É possível demonstrar que para que (5.47) satisfaça (5.46), a série de Taylor correspondente nos momentos externos deve iniciar com um termo proporcional à quarta potência nos momentos [61, 69, 72].

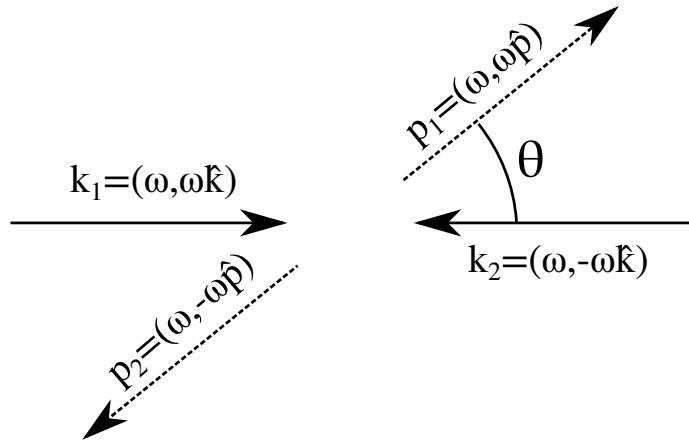


Figura 5.3: Referencial de centro de momento do espalhamento fóton-fóton.

Com a amplitude de probabilidade regularizada, calculamos a seção de choque especializando o processo para o sistema de referência de centro de momento (ver Figura

³É interessante notar que apesar do procedimento geralmente seguido ser o de regularizar o tensor $M^{\mu\nu\alpha\beta}$ [70], é possível mostrar que o coeficiente da integral divergente é nula [71]. Assim, introduzindo um *cut-off* superior para o momento interno, concluímos que o termo é nulo e independente do parâmetro de corte.

5.3). Escolhendo a direção do momento dos fótons iniciais como a direção do eixo z temos que,

$$k_1 = (\omega, \omega \hat{k}) \quad \text{e} \quad k_2 = (\omega, -\omega \hat{k}),$$

e o momento dos fótons finais dados por

$$p_1 = (\omega, \omega \hat{p}) \quad \text{e} \quad p_2 = (\omega, -\omega \hat{p}),$$

de tal forma que $\hat{k} \cdot \hat{p} = \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os fótons finais e o eixo z . A seção de choque diferencial no centro de momento é dado por [61],

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{128\pi^2\omega^2} \left| \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \varepsilon_\alpha^*(p_1) \varepsilon_\beta^*(p_2) M_R^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) \right|^2. \quad (5.48)$$

Neste ponto, é necessário desenvolver o tensor $M_R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Porém, uma forma analítica simples é acessível apenas nos casos limites de baixas e altas energias com relação à massa do elétron, $\omega \ll m$ e $\omega \gg m$, respectivamente. O caso geral foi calculado em 1951 por Karplus [73]. Para obter a seção de choque total, dada pela integral sobre o ângulo sólido da seção de choque diferencial, no limite de baixas energias, procedemos por análise dimensional. Expandimos o tensor $M_R^{\mu\nu\alpha\beta}$ em (5.48) em série de Taylor nos momentos externos mantendo apenas o primeiro termo. Como comentado, este termo é proporcional à quarta potência do momento dos fótons. Além disto, as regras de Feynman indicam que cada vértice acrescenta uma potência da carga do elétron à amplitude. Portanto, o módulo quadrado da amplitude é proporcional a $(e\omega)^8$. Como a seção de choque deve ter unidades de área e a única grandeza disponível para construí-la é a massa do elétron, além das constantes \hbar , c e ε_0 , a única forma possível é [69]

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{QED} = a \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \right)^4 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^6 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2, \quad (5.49)$$

onde a é uma constante adimensional. Na próxima seção, a seção de choque fóton-fóton devido a correções quadráticas da Lagrangiana de Maxwell será derivada. Esta seção de choque deve ser particularmente válida para a Lagrangiana de Euler-Heisenberg no limite de baixas energias e deve recuperar (5.49) (ver Equação (5.64)). Portanto, por

comparação, obtemos que

$$a = \frac{7}{5\pi} \frac{139}{2025}.$$

O espalhamento fóton-fóton discutido nesta seção é aquela prevista pela Lagrangiana da QED, na qual o elétron é acoplado minimamente ao campo eletromagnético. O Modelo Padrão prevê o acoplamento de diversas partículas elementares carregadas com o campo eletromagnético, como os demais léptons, os quarks e os bósons W. Porém, como a seção de choque no limite de baixas energias é proporcional ao inverso da oitava potência da massa, a contribuição do elétron é predominante em comparação às outras partículas mais massivas. Para obter o espalhamento fóton-fóton completo estas partículas intermediárias devem ser levadas em conta.

5.6 Seção de choque $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ devido a correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell

Como foi observado no Capítulo 2, as eletrodinâmicas não lineares generalizam a eletrodinâmica de Maxwell tornando as equações de movimento não lineares. Em primeira ordem de aproximação, as correções não lineares são parametrizadas pelos invariantes F^2 e G^2 (ver Equações (2.21) e (2.22)),

$$\mathcal{L}_{NL} = F + 4\alpha F^2 + 4\beta G^2, \quad (5.50)$$

São os parâmetros livres α e β , com unidades de energia ao inverso da quarta potência, que desejamos vincular superiormente usando a medição obtida pela Colaboração ATLAS. Estas teorias recuperam naturalmente a eletrodinâmica de Maxwell no limite em que $\alpha, \beta \rightarrow 0$.

Com o objetivo de obtê-las em uma forma mais conveniente, expandimos as correções usando a definição do tensor campo eletromagnético em termos do potencial

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

$$\begin{aligned} 4\alpha F^2 = \alpha & \left[(\partial^\mu A^\nu) (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\alpha A^\beta) (\partial_\alpha A_\beta) \right. \\ & - 2 (\partial^\mu A^\nu) (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\alpha A^\beta) (\partial_\beta A_\alpha) \\ & \left. + (\partial^\mu A^\nu) (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\alpha A^\beta) (\partial_\beta A_\alpha) \right], \quad (5.51) \end{aligned}$$

e

$$4\beta G^2 = \beta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta\sigma\rho} (\partial_\alpha A_\beta) (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\gamma A_\delta) (\partial_\sigma A_\rho). \quad (5.52)$$

Como pode ser visto, estes termos são formados por produtos quânticos do campos. Portanto, as equações de movimento da teoria não são lineares e não podem ser desacopladas através de uma simples mudança de coordenadas. Consequentemente passa a haver uma interação entre os modos do campo eletromagnético como mostrado na Figura 5.4.

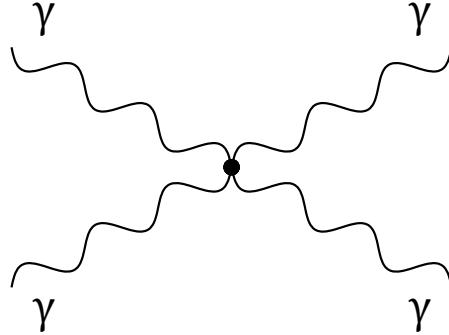


Figura 5.4: Diagrama de Feynman para a interação entre 4 fôtons devido à Lagrangiana 5.50.

Colocando o produto dos campos em (5.51) em evidência e usando índices genéricos, podemos reescrevê-lo como

$$4\alpha F^2 = \gamma_{F^2}^{a_1 \dots a_8} (\partial_{a_1} A_{a_2}) (\partial_{a_3} A_{a_4}) (\partial_{a_5} A_{a_6}) (\partial_{a_7} A_{a_8}),$$

onde $\gamma_{F^2}^{a_1 \dots a_8} = \gamma_{F^2}^{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ é uma matriz com 8 índices definida em termos de produtos de métricas,

$$\gamma_{F^2}^{a_1 \dots a_8} \equiv \alpha (\eta^{a_1 a_3} \eta^{a_2 a_4} \eta^{a_5 a_7} \eta^{a_6 a_8} - 2\eta^{a_1 a_3} \eta^{a_2 a_4} \eta^{a_5 a_8} \eta^{a_6 a_7} + \eta^{a_1 a_4} \eta^{a_2 a_3} \eta^{a_5 a_8} \eta^{a_6 a_7}), \quad (5.53)$$

de tal forma a recuperar a expressão original. Da mesma forma, o termo (5.52) pode ser

escrito de maneira semelhante,

$$4\beta G^2 = \gamma_{G^2}^{a_1 \dots a_8} (\partial_{a_1} A_{a_2}) (\partial_{a_3} A_{a_4}) (\partial_{a_5} A_{a_6}) (\partial_{a_7} A_{a_8}),$$

onde, por sua vez, $\gamma_{G^2}^{a_1 \dots a_8} = \gamma_{G^2}^{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ também é uma matriz com 8 índices, porém definida pelo produto de tensores de Levi-Civita,

$$\gamma_{G^2}^{a_1 \dots a_8} \equiv \beta \varepsilon^{a_1 a_2 a_3 a_4} \varepsilon^{a_5 a_6 a_7 a_8}.$$

O próximo passo é obter as simetrias das matrizes γ . Analisamos primeiro a matriz $\gamma_{F^2}^{a_1 \dots a_8}$. Observando as duas primeiras métricas de cada termo em (5.53), notamos que trocar simultaneamente os índices $a_1 \leftrightarrow a_3$ e $a_2 \leftrightarrow a_4$, graças à simetria da métrica, não altera a matriz. Pelo mesmo procedimento, observando as duas últimas métricas de cada termo, notamos que $\gamma_{F^2}^{a_1 \dots a_8}$ também é invariante pela troca simultânea dos índices $a_5 \leftrightarrow a_7$ e $a_6 \leftrightarrow a_8$. Por sua vez, a matriz $\gamma_{G^2}^{a_1 \dots a_8}$, formada pelo produto dos tensores antissimétricos, também possui estas simetrias graças às propriedades do tensor de Levi-Civita. Esta matriz, porém, possui uma simetria a mais já que é possível trocar um tensor de Levi-Civita pelo outro permutando os índices $a_i \leftrightarrow a_{i+4}$ para $i = 1, 2, 3$ e 4 .

Com o intuito de simplificar a notação tanto quanto explicitar estas simetrias, criamos a notação de bloco tal que $A_{ij} \equiv a_i a_j$. Desta forma, as matrizes gama podem ser reescritas como

$$\gamma_{F^2, G^2}^{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} \rightarrow \gamma_{F^2, G^2}^{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}}.$$

As permutações pelas quais as matrizes gama são invariantes podem ser obtidas facilmente pela permutação dos blocos, por exemplo $A_{12} \leftrightarrow A_{34}$ ou $A_{56} \leftrightarrow A_{78}$. Portanto, para explicitar estas simetrias, usamos a notação de colchetes:

$$\gamma_{F^2, G^2}^{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}} \rightarrow \gamma_{F^2, G^2}^{[A_{12} A_{34}] [A_{56} A_{78}]}.$$

Lembramos que a matriz $\gamma_{G^2}^{[A_{12} A_{34}] [A_{56} A_{78}]}$ também é simétrica pela permutação simultânea de $A_{12} \leftrightarrow A_{56}$ e $A_{34} \leftrightarrow A_{78}$.

Usando esta notação e colocando em evidência o produto dos campos tanto vindos

do termo F^2 quanto de G^2 , a Lagrangiana (5.50) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{NL} = F + \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} (\partial_{a_1} A_{a_2}) (\partial_{a_3} A_{a_4}) (\partial_{a_5} A_{a_6}) (\partial_{a_7} A_{a_8}), \quad (5.54)$$

onde reunimos em uma única matriz 8 dimensional $\gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \equiv \gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} + \gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]}.$

Amplitude de probabilidade

A inclusão das correções não lineares afeta os estados e as energias da teoria livre. Porém, supomos que os parâmetros α e β são tais que a presença destas correções não os modificam consideravelmente, justificando assim um estudo perturbativo da teoria interagente. Esta suposição será justificada quando estes parâmetros forem vinculados pelo experimento.

Temos como objetivo derivar a seção de choque do espalhamento fóton-fóton em primeira ordem. Esta grandeza é proporcional à probabilidade de interação entre os fótons, que por sua vez é dada pelo módulo quadrado da amplitude de probabilidade. Neste contexto, calculamos $\mathcal{M}(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^j \rightarrow \mathbf{p}_1^m, \mathbf{p}_2^n)$, a amplitude de probabilidade de interação entre dois fótons iniciais livres de momentos $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ e polarizações $\{i, j\}$ produzindo dois fótons finais de momentos $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, e polarizações $\{m, n\}$. A amplitude de probabilidade é obtida em série de potências a partir da expressão [61]

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) i\mathcal{M}(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^j \rightarrow \mathbf{p}_1^m, \mathbf{p}_2^n) = {}_0\langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | T \left\{ e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_i} \right\} | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0, \quad (5.55)$$

onde $\mathcal{H}_I \equiv \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ é o Hamiltoniano de interação e os subíndice 0 indicam os autoestados da teoria livre. Esta expressão nos permite obter a amplitude de probabilidade em termos de uma série de potências expandindo a exponencial dentro do operador de ordenamento temporal. O primeiro termo da exponencial é a identidade e descreve a situação em que as partículas não apresentam interação. Além disso, como o Hamiltoniano de interação é proporcional aos parâmetros α e β , podemos truncar a série de acordo com a precisão desejada. Para o propósito deste trabalho, é suficiente manter a primeira ordem de correção

ou correção a nível de árvore. Assim, temos que

$${}_0\langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | T \left\{ e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_i} \right\} | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0 \approx -i \int d^4x_0 \langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | T \{ \mathcal{H}_i \} | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0, \quad (5.56)$$

onde a identidade foi descartada para levar em conta apenas a probabilidade em que há interação.

No formalismo canônico, o objeto fundamental da teoria é o Hamiltoniano. Para teorias em que os termos de interação não dependem das derivadas do campo, a relação entre o Hamiltoniano de interação e a Lagrangiana de interação é dada simplesmente por $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$. Como pode ser visto em (5.54), o modelo em questão possui derivadas do campo na Lagrangiana de interação. Devido a isto, a obtenção da Hamiltoniana de interação por meio de uma transformada de Legendre introduz termos não covariantes. Pode ser mostrado que estes termos não covariantes são compensados por termos que surgem ao calcular contrações entre os campos ao aplicar o teorema de Wick [74, 75]. Sendo assim, podemos usar a relação $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$, ignorando os termos que surgem na transformada de Legendre, se ignorarmos os termos que surgem das contrações. Lembrando de compensar os fatores numéricos e a delta de Dirac presentes no lado esquerdo de (5.55), a amplitude de probabilidade em termos da Lagrangiana de interação é

$$\mathcal{M} = i\gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \int d^4x_0 \langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | T \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0. \quad (5.57)$$

Para manipular o operador de ordenamento temporal atuando sobre os campos fazemos uso do teorema de Wick [61]. Segundo este, um produto de campos em ordenamento temporal é equivalente à soma do mesmo produto mais todas as possíveis contrações entre os campos em ordenamento normal. Por sua vez, o ordenamento temporal de campos é definido posicionando os operadores de aniquilação à direita dos operadores de criação. Já a contração entre os campos é um número complexo definido pela expressão

$$C \left(\hat{A}_\alpha(x) \hat{A}_\beta(y) \right) = \Theta(x^0 - y^0) \left[\hat{A}_\alpha^+(x), A_\beta^-(y) \right] + \Theta(y^0 - x^0) \left[\hat{A}_\beta^+(y), \hat{A}_\alpha^-(x) \right], \quad (5.58)$$

onde os índices + e - indicam as partes de frequência positiva e negativa que possuem os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Desta forma, o produto temporal

é da forma

$$\begin{aligned}
T \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) &= N \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right. \\
&\quad + C \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \right) \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} + \dots \\
&\quad \left. + C \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \right) C \left(\partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) + \dots \right),
\end{aligned}$$

onde $N()$ indica ordenamento normal. Esta expressão possui 1 termo sem campos contraídos, 6 termos com dois campos contraídos e 3 termos com os 4 campos contraídos aos pares. Nem todos os termos desta expressão contribuem para o espalhamento dos fótons iniciais. De fato, podemos ver na expressão (5.57) que os termos que possuem 4 campos contraídos são proporcionais ao produto ${}_0 \langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0$, que é diferente de zero se e somente se os fótons iniciais forem iguais aos finais. Portanto, podemos concluir que contribuem somente para o caso em que não há interação. De maneira semelhante, os termos que possuem apenas dois campos contraídos também não contribuem. Assim, mantemos apenas o primeiro termo,

$$T \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) = N \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right).$$

Para manipular o produto normalmente ordenado devemos expressar os campos em termos de suas partes $+$ e $-$,

$$\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu^+ + \partial_\mu A_\nu^-.$$

Desta forma, o produto dos campos gera 16 termos em ordem normal. Da equação (5.57) notamos que se introduzimos um número desigual de operadores de criação e aniquilação, através da comutação sucessiva conseguimos aniquilar o vácuo. Portanto, a equação (5.57) é diferente de zero somente para os 6 produtos que possuem o mesmo número de operadores de criação e aniquilação. Desta forma, os termos relevantes do produto normal

são

$$\begin{aligned}
T \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) = & \partial_{a_1} A_{a_2}^- \partial_{a_3} A_{a_4}^- \partial_{a_5} A_{a_6}^+ \partial_{a_7} A_{a_8}^+ \\
& + \partial_{a_1} A_{a_2}^- \partial_{a_5} A_{a_6}^- \partial_{a_3} A_{a_4}^+ \partial_{a_7} A_{a_8}^+ \\
& + \partial_{a_1} A_{a_2}^- \partial_{a_7} A_{a_8}^- \partial_{a_3} A_{a_4}^+ \partial_{a_5} A_{a_6}^+ \\
& + \partial_{a_5} A_{a_6}^- \partial_{a_7} A_{a_8}^- \partial_{a_1} A_{a_2}^+ \partial_{a_3} A_{a_4}^+ \\
& + \partial_{a_3} A_{a_4}^- \partial_{a_7} A_{a_8}^- \partial_{a_1} A_{a_2}^+ \partial_{a_5} A_{a_6}^+ \\
& + \partial_{a_3} A_{a_4}^- \partial_{a_5} A_{a_6}^- \partial_{a_1} A_{a_2}^+ \partial_{a_7} A_{a_8}^+.
\end{aligned}$$

Este resultado pode ser simplificado se notarmos que todos os termos podem ser obtidos a partir do primeiro pela permutação correta dos índices. Por exemplo, obtemos o segundo termo permutando os índices $a_3 \leftrightarrow a_5$ e $a_4 \leftrightarrow a_6$. Esta permutação pode ser reescrita de forma mais compacta usando a notação de bloco proposta anteriormente como $A_{34} \leftrightarrow A_{56}$. Os outros termos são obtidos de forma semelhante. Como operadores de criação comutam entre si, o mesmo ocorrendo entre os operadores de aniquilação, se permutamos os índices em bloco do primeiro termo de todas as formas possíveis obtemos 4 vezes a expressão anterior. Portanto escrevemos,

$$T \left(\partial_{a_1} \hat{A}_{a_2} \partial_{a_3} \hat{A}_{a_4} \partial_{a_5} \hat{A}_{a_6} \partial_{a_7} \hat{A}_{a_8} \right) = \frac{1}{4} P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} \partial_{a_1} A_{a_2}^- \partial_{a_3} A_{a_4}^- \partial_{a_5} A_{a_6}^+ \partial_{a_7} A_{a_8}^+,$$

onde $P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}}$ indica que devemos adicionar todas as permutações possíveis dos índices em bloco da expressão à sua direita. Substituindo de volta em (5.57) obtemos

$$\mathcal{M} = \frac{i}{4} \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} \int d^4x_0 \langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | \partial_{a_1} A_{a_2}^- \partial_{a_3} A_{a_4}^- \partial_{a_5} A_{a_6}^+ \partial_{a_7} A_{a_8}^+ | \mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j \rangle_0.$$

Para resolver o produto interno dos estados com os campos intermediários, expandimos ambos em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{k}_1^i \mathbf{k}_2^j\rangle_0 &= \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1} 2E_{\mathbf{k}_2}} a_{i,\mathbf{k}_1}^\dagger a_{j,\mathbf{k}_2}^\dagger |0\rangle, \\
{}_0 \langle \mathbf{p}_1^m \mathbf{p}_2^n | &= \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}} \langle 0 | a_{m,\mathbf{p}_1} a_{n,\mathbf{p}_2},
\end{aligned}$$

e as partes de frequênci a positiva e negativa do campo como,

$$\begin{aligned}\partial_{a_i} A_{a_j}^+(x) &= -i \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{q_{a_i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \varepsilon_{a_j}(q, \lambda) a_{\lambda \mathbf{q}} e^{-iq \cdot x}, \\ \partial_{a_i} A_{a_j}^-(x) &= i \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{q_{a_i}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \varepsilon_{a_j}^*(q, \lambda) a_{\lambda \mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot x}.\end{aligned}$$

Desta forma, a amplitude de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{i}{4} \gamma^{[A_{12} A_{34}] [A_{56} A_{78}]} P_{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}} \\ &\times \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \int d^4 x \int \frac{d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 d^3 q_4}{(2\pi)^{12}} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}_1} 2E_{\mathbf{k}_2} 2E_{\mathbf{p}_1} 2E_{\mathbf{p}_2}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}_1} 2E_{\mathbf{q}_2} 2E_{\mathbf{q}_3} 2E_{\mathbf{q}_4}}} e^{i(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \cdot x} \\ &\times q_{1a_1} q_{2a_3} q_{3a_5} q_{4a_7} \varepsilon_{a_2}^*(q_1, \lambda_1) \varepsilon_{a_4}^*(q_2, \lambda_2) \varepsilon_{a_6}(q_3, \lambda_3) \varepsilon_{a_8}(q_4, \lambda_4) \\ &\times \langle 0 | a_{m, \mathbf{p}_1} a_{n, \mathbf{p}_2} a_{\lambda_1, \mathbf{q}_1}^\dagger a_{\lambda_2, \mathbf{q}_2}^\dagger a_{\lambda_3, \mathbf{q}_3} a_{\lambda_4, \mathbf{q}_4} a_{i, \mathbf{k}_1}^\dagger a_{j, \mathbf{k}_2}^\dagger | 0 \rangle.\end{aligned}$$

Usamos as relações de comutação entre os operadores a e a^\dagger para “aniquilar” o vácuo. O resultado desta manipulação é conectar os momentos dos fótons iniciais \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 com os momentos \mathbf{q}_3 e \mathbf{q}_4 do vértice de interação associados aos operadores de aniquilação $a_{\lambda_3, \mathbf{q}_3} a_{\lambda_4, \mathbf{q}_4}$. O mesmo processo ocorre entre os fótons finais e os operadores criação associados ao vértice, produzindo um total de 4 termos. As polarizações dos fótons acompanham seus respectivos momentos. Este processo tem como resultado

$$\begin{aligned}\langle 0 | a_{m, \mathbf{p}_1} a_{n, \mathbf{p}_2} a_{\lambda_1, \mathbf{q}_1}^\dagger a_{\lambda_2, \mathbf{q}_2}^\dagger a_{\lambda_3, \mathbf{q}_3} a_{\lambda_4, \mathbf{q}_4} a_{i, \mathbf{k}_1}^\dagger a_{j, \mathbf{k}_2}^\dagger | 0 \rangle &= (2\pi)^{12} \delta^{\lambda_1 m} \delta^{\lambda_2 n} \delta^{\lambda_3 i} \delta^{\lambda_4 j} \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{k}_2) \\ &+ (2\pi)^{12} \delta^{\lambda_1 n} \delta^{\lambda_2 m} \delta^{\lambda_3 i} \delta^{\lambda_4 j} \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{k}_2) \\ &+ (2\pi)^{12} \delta^{\lambda_1 m} \delta^{\lambda_2 n} \delta^{\lambda_3 j} \delta^{\lambda_4 i} \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{k}_1) \\ &+ (2\pi)^{12} \delta^{\lambda_1 n} \delta^{\lambda_2 m} \delta^{\lambda_3 j} \delta^{\lambda_4 i} \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{k}_1).\end{aligned}$$

Substituímos de volta na expressão da amplitude e usamos tanto as delta de Dirac quanto de Kronecker para resolver as integrais e a somatórias. A integral em $d^4 x$ gera a delta de Dirac que impõe a conservação do momento total no vértice de interação multiplicado por um fator $(2\pi)^4$. Este fator numérico, a unidade imaginária i e a delta

de Dirac, são os mesmos que aparecem no lado esquerdo da equação (5.55). Assim, a expressão correta para a amplitude de probabilidade de espalhamento é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{1}{4} \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} \\ & \times \left[p_{1a_1} p_{2a_3} k_{1a_5} k_{2a_7} \varepsilon_{a_2}^* (p_1, m) \varepsilon_{a_4}^* (p_2, n) \varepsilon_{a_6} (k_1, i) \varepsilon_{a_8} (k_2, j) \right. \\ & + p_{1a_3} p_{2a_1} k_{1a_5} k_{2a_7} \varepsilon_{a_4}^* (p_1, m) \varepsilon_{a_2}^* (p_2, n) \varepsilon_{a_6} (k_1, i) \varepsilon_{a_8} (k_2, j) \\ & + p_{1a_1} p_{2a_3} k_{1a_7} k_{2a_5} \varepsilon_{a_2}^* (p_1, m) \varepsilon_{a_4}^* (p_2, n) \varepsilon_{a_8} (k_1, i) \varepsilon_{a_6} (k_2, j) \\ & \left. + p_{1a_3} p_{2a_1} k_{1a_7} k_{2a_5} \varepsilon_{a_4}^* (p_1, m) \varepsilon_{a_2}^* (p_2, n) \varepsilon_{a_8} (k_1, i) \varepsilon_{a_6} (k_2, j) \right]. \end{aligned}$$

Como os quatro termos são idênticos a menos de uma permutação dos índices em bloco e o operador de permutação P é naturalmente invariante pela permutações dos seus índices, renomeamos os índices dos quatro termos para obter,

$$\mathcal{M} = \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} (p\varepsilon^*)_{A_{12}} (p'\varepsilon^*)_{A_{34}} (k\varepsilon)_{A_{56}} (k'\varepsilon)_{A_{78}},$$

onde $(p\varepsilon^*)_{A_{12}}$ indica $p_{a_1} \varepsilon_{a_2}^* (p, \lambda)$, e λ é a polarização desejada para o fóton. No caso de expansão desta expressão, o operador de permutação embaralharia os índices dos momentos e vetores de polarização para em seguida serem contraídos com os da matriz γ . Como os índices são mudos, este procedimento é equivalente a embaralhar os índices da matriz gama de todas as formas possíveis para em seguida contraí-las com o produto de momentos e vetores de polarização. Esta alternativa tem a vantagem de usufruir das simetrias dos índices da matriz gama. Portanto, reescrevemos a amplitude de probabilidade em uma forma equivalente dada por

$$\mathcal{M} (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^j \rightarrow \mathbf{p}_1^m, \mathbf{p}_2^n) = (p\varepsilon^*)_{A_{12}} (p'\varepsilon^*)_{A_{34}} (k\varepsilon)_{A_{56}} (k'\varepsilon)_{A_{78}} P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \quad (5.59)$$

Desta expressão conseguimos extrair a regra de Feynman para o vértice,

$$\mathcal{M} (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^j \rightarrow \mathbf{p}_1^m, \mathbf{p}_2^n) = \varepsilon_{a_2}^* (p, \lambda_1) \varepsilon_{a_4}^* (p', \lambda_2) \varepsilon_{a_6} (k, \lambda_3) \varepsilon_{a_8} (k', \lambda_4) M^{\alpha_2 a_4 a_6 a_8},$$

onde o tensor de rank 4 associado ao vértice é dado por

$$M^{\alpha_2 a_4 a_6 a_8} = p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} P_{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}} \gamma^{[A_{12} A_{34}] [A_{56} A_{78}]}.$$

Módulo quadrado da amplitude e seção de choque

Obtida a amplitude do processo, calculamos o seu módulo quadrado para obter a probabilidade de interação entre os fótons iniciais e finais com momentos bem definidos. O detector ATLAS usado para realizar a medição do espalhamento fóton-fóton não diferencia fótons finais com polarizações distintas [13]. Portanto iremos calcular a média da probabilidade da interação ocorrer sobre as duas possíveis polarizações dos fótons iniciais e somar sobre as polarizações dos fótons produzidos. Desta forma, a probabilidade da interação pode ser escrita como

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,m,n=1}^2 |\mathcal{M}(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^j \rightarrow \mathbf{p}_1^m, \mathbf{p}_2^n)|^2. \quad (5.60)$$

Substituindo (5.59) em (5.60) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j,m,n=1}^2 \varepsilon_{i,a_2}^* \varepsilon_{i,b_2} \varepsilon_{j,a_4}^* \varepsilon_{j,b_4} \varepsilon_{m,a_6} \varepsilon_{m,b_6}^* \varepsilon_{n,a_8} \varepsilon_{n,b_8}^* \right) \\ & \times p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} P_{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}} \gamma^{[A_{12} A_{34}] [A_{56} A_{78}]} \\ & \times p_{b_1} p'_{b_3} k_{b_5} k'_{b_7} P_{B_{12} B_{34} B_{56} B_{78}} \gamma^{[B_{12} B_{34}] [B_{56} B_{78}]} \end{aligned}$$

A soma sobre as polarizações pode ser computada usando a relação de completeza (5.33) de tal forma que

$$\sum_{i,j,m,n=1}^2 \varepsilon_{i,a_2}^* \varepsilon_{i,b_2} \varepsilon_{j,a_4}^* \varepsilon_{j,b_4} \varepsilon_{m,a_6} \varepsilon_{m,b_6}^* \varepsilon_{n,a_8} \varepsilon_{n,b_8}^* = \eta_{a_2 b_2} \eta_{a_4 b_4} \eta_{a_6 b_6} \eta_{a_8 b_8}.$$

A manipulação da expressão da probabilidade \mathcal{P} requer permutar as matrizes gama, contrair com os respectivos momentos e finalmente com as métricas. Devido ao fato deste cálculo ser longo e entediante, o procedimento foi relegado ao Apêndice B. Em termos das variáveis de Mandelstam, mostramos que a probabilidade de interação pode

ser escrita em uma forma invariante por transformações de Lorentz,

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 2 [(\alpha - \beta)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)] (s^4 + t^4 + u^4). \quad (5.61)$$

Sendo que usamos as variáveis de Mandelstam definidas como

$$s \equiv (k + k')^2,$$

$$t \equiv (k - p)^2,$$

$$u \equiv (k - p')^2,$$

e a soma deles, para o caso de partículas sem massa, corresponde a

$$s + t + u = 0.$$

É interessante notar que a probabilidade de interação (5.61) é simétrica por $\alpha \leftrightarrow \beta$, indicando que é impossível distinguir a contribuição das correções não lineares devido aos termos F^2 e G^2 no caso despolarizado.

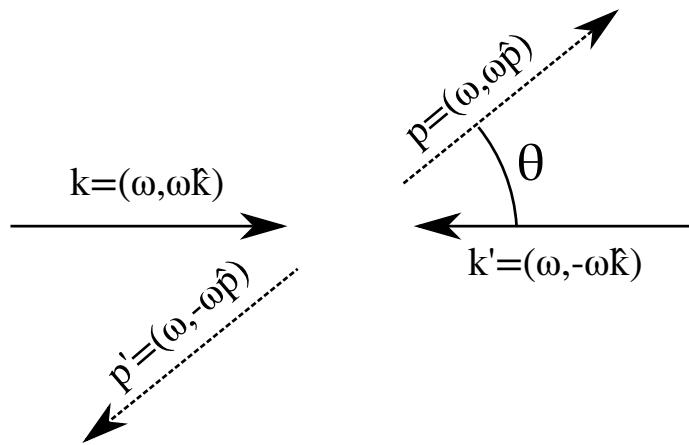


Figura 5.5: Referencial de centro de momento do espalhamento fóton-fóton.

Especializamos a expressão (5.61) para o centro de momento do espalhamento descrito na Figura 5.5. Neste sistema de referência, escolhemos a propagação dos fótons iniciais ao longo do eixo z , seus momentos podem ser escritos como

$$k^\mu = (\omega, \omega \hat{k}) \quad \text{e} \quad k'^\mu = (\omega, -\omega \hat{k}),$$

onde ω representa a energia dos fótons iniciais. Devido à conservação de energia e momento, o momento dos fótons finais são dados por,

$$p^\mu = (\omega, \omega \hat{p}) \quad \text{e} \quad p'^\mu = (\omega, -\omega \hat{p}),$$

tal que $\hat{k} \cdot \hat{p} = \cos \theta$. Portanto, as variáveis de Mandelstam assumem as formas

$$\begin{aligned} s &= 4\omega^2, \\ t &= -2\omega^2 (1 - \cos \theta), \\ u &= -2\omega^2 (1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Em termos da massa invariante do sistema de difótons definido como $m_{\gamma\gamma} \equiv \sqrt{s}$, estas quantidades podem ser escritas como

$$\begin{aligned} s &= m_{\gamma\gamma}^2, \\ t &= -\frac{1}{2}m_{\gamma\gamma}^2 (1 - \cos \theta), \\ u &= -\frac{1}{2}m_{\gamma\gamma}^2 (1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Desta forma, a probabilidade de espalhamento é dada por

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \right] (\cos 2\theta + 7)^2 m_{\gamma\gamma}^8.$$

A seção de choque diferencial é proporcional à probabilidade de espalhamento. No caso de um espalhamento $2 \rightarrow 2$ no qual todas as partículas possuem a mesma massa, a distribuição da seção de choque por unidade de ângulo sólido no referencial de centro de momento é dada por [61]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\mathcal{P} (m_{\gamma\gamma}, \cos \theta)}{64\pi^2 m_{\gamma\gamma}^2}.$$

Portanto, para o espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ temos que a seção de choque diferencial é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \right] \frac{(\cos 2\theta + 7)^2 m_{\gamma\gamma}^6}{512\pi^2}. \quad (5.62)$$

Para obter a seção de choque total, integramos sobre o ângulo sólido. Devido à simetria

do processo, a metade do ângulo sólido, correspondente ao intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, gera o mesmo espalhamento que a segunda metade. Para evitar esta dupla contagem, integramos apenas no primeiro intervalo obtendo

$$\sigma_{CM} = \frac{7}{40\pi} \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \right] m_{\gamma\gamma}^6. \quad (5.63)$$

As expressões (5.62) e (5.63) nos permite calcular as seções de choque diferencial e total do espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ a nível de árvore e no referencial de centro de momento devido às correções não lineares da Lagrangiana de Maxwell dada por (5.50).

A título de completeza é interessante aplicar estes resultados para as principais Lagrangianas da literatura. No caso da Lagrangiana de Euler-Heisenberg, podemos recuperar os primeiros termos de correção escolhendo

$$\alpha = \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m_e^4} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{7}{90} \frac{\alpha^2}{m_e^4},$$

recuperando os resultados conhecidos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{139}{16\,200} \frac{\alpha^4}{m_e^8} \frac{(\cos 2\theta + 7)^2}{512\pi^2} m_{\gamma\gamma}^6,$$

e

$$\sigma_{CM} = \frac{7}{40\pi} \frac{139}{16\,200} \frac{\alpha^4}{m_e^8} m_{\gamma\gamma}^6, \quad (5.64)$$

onde m_e é a massa do elétron e α é a constante de estrutura fina.

Por outro lado, para as teorias tipo Born-Infeld, devemos escolher os parâmetros tal que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{8b^2}.$$

Assim, obtemos que a seção de choque diferencial para a primeira correção devido a estas teorias é dada

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{16\,384\pi^2} \frac{1}{b^4} (\cos 2\theta + 7)^2 m_{\gamma\gamma}^6,$$

e a seção de choque total por

$$\sigma_{CM} = \frac{7}{1280\pi} \frac{1}{b^4} m_{\gamma\gamma}^6.$$

No próximo capítulo, a expressão (5.62) será de fundamental importância para acrescentar ao espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pelo Modelo Padrão a contribuição devida a correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell.

Capítulo 6

Vínculo de Correções Não Lineares da Eletrodinâmica de Maxwell usando o Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

6.1 Introdução

O espalhamento fóton-fóton participa de estágios intermediários em correções de ordem superior de vários processos. Desta forma, ele já foi precisamente medido, porém de forma indireta, por integrar os diagramas de ordem α^3 que corrigem o momento de dipolo magnético anômalo tanto do elétron como do mísseis [76, 77]. Dois processos semelhantes bem conhecidos são o espalhamento Delbrück e o fenômeno de birrefringência. O espalhamento Delbrück, no qual um fóton é espalhado elasticamente pelo potencial Coulombiano produzido por um núcleo atômico, já foi medido [78]. O efeito de birrefringência, no qual um fóton é dividido em dois na presença de um campo eletromagnético de fundo, foi recentemente tratado pelos grupos PVLAS e BMV¹ [31, 32]. Medições de birrefringência linear magnética foram realizadas pelo PVLAS, mas são compatíveis com o zero. O fenômeno de birrefringência e o espalhamento Delbrück se diferenciam do espalhamento fóton-fóton mostrado da Figura 5.2 pelo fato de, respectivamente, um e dois dos fótons que participam do processo serem virtuais e associados a uma fonte externa. Por outro

¹PVLAS e BMV são as siglas para Polarizzazione del Vuoto con Laser e Biréfringence Magnétique du Vide, respectivamente.

lado, colisões inelásticas de pares de fótons foram observadas e são comumente usadas para produzir partículas como elétrons, múons e W^\pm entre outras [79, 80, 81, 82].

Desde sua previsão, diversos mecanismos foram propostos para detectar diretamente o espalhamento fóton-fóton, porém sem sucesso. Exemplos destes são o uso de lasers de alta intensidade [83], lasers aprimorados por espalhamento Compton [84] e acoplamento de modos gerados dentro de guias de onda [85]. Uma forma de gerar fótons de alta energia é por meio de partículas carregadas ultrarrelativísticas. A partir destas é possível produzir as colisões inelásticas de fótons comentadas anteriormente. Neste âmbito, o CMS analisou dados de espalhamento de prótons buscando encontrar sinais do espalhamento fóton-fóton mas somente conseguiu impor um limite superior para a sua seção de choque [86]. Em 2013, d'Enterria e Silveira propuseram que o uso de íons de chumbo em colisões ultraperiféricas nas energias do LHC permitiria obter a luminosidade necessária para tornar o fenômeno observável [87]. A vantagem de usar os íons de chumbo, quando comparado aos prótons, está no fato de que a escala da luminosidade da radiação produzida é dada por um fator $Z^4 \sim 10^8$, onde $Z = 82$ é o número atômico. Como consequência, em 2016 o ATLAS anuncia a primeira observação direta do espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ medindo uma seção de choque $\sigma_{\gamma\gamma}^{ATLAS} = 70 \pm 24(\text{estat.}) \pm 17(\text{sist.})\text{nb}$ através da análise de dados de colisões de íons de chumbo acelerados no LHC com energias invariantes entre pares de núcleons $\sqrt{s_{NN}} = 5.02\text{TeV}$ [13].

Neste capítulo temos como objetivo final vincular os parâmetros α e β das correções não lineares à Lagrangiana de Maxwell (5.50) usando o resultado experimental obtido pelo ATLAS. Os resultados obtidos estão publicados em [88]. Na Seção 6.2 revisamos o método da aproximação de fótons equivalentes. Por meio deste, os íons ultrarrelativísticos em colisões ultraperiféricas são vistos como fontes de fótons de altas energias. Este método tem as vantagens de simplificar a dedução teórica da seção de choque total e de incorporar facilmente o fator de absorção, limitando o espaço de fase a colisões ultraperiféricas. O fator de forma do íon é o ingrediente principal do número de fótons equivalentes. Assim, na Seção 6.3 descrevemos 4 distribuições de carga distintas que serão usadas e seus fatores de forma correspondentes. Na Seção 6.4, os cortes usados na análise dos dados do ATLAS são descritos e calculamos numericamente a previsão da seções choque pelo Modelo Padrão para a o espalhamento $Pb + Pb \rightarrow Pb + Pb + \gamma\gamma$ para cada distribuição

de carga. Finalmente, na Seção 6.5, incorporamos a amplitude de probabilidade para o espalhamento fóton-fóton devido às correções não lineares e vinculamos os parâmetros α e β . Como aplicação vinculamos o parâmetros b de Born-Infeld e finalizamos com alguns comentários.

6.2 Aproximação de fótons equivalentes

As colisões ultraperiféricas (UPC) entre pares de íons são caracterizadas por ocorrerem com parâmetro de impacto maior que a soma de seus raios. Em colisões de íons podem ocorrer interações tanto eletromagnética (fóton-fóton e fotonuclear) como forte. Portanto, a vantagem de tratar com UPC está na diminuição de processos ligados à interação forte, reduzindo a produção de fótons por meio de outros mecanismos que não sejam puramente eletromagnéticos. Experimentalmente, processos devido à interação forte possuem seções de choque da ordem de *barns* e são distinguíveis devido à sua multiplicidade, permitindo descartá-los facilmente [89]. Teoricamente, a exclusão destes processos é levado em conta por meio do fator de absorção de tal forma a incluir apenas UPC.

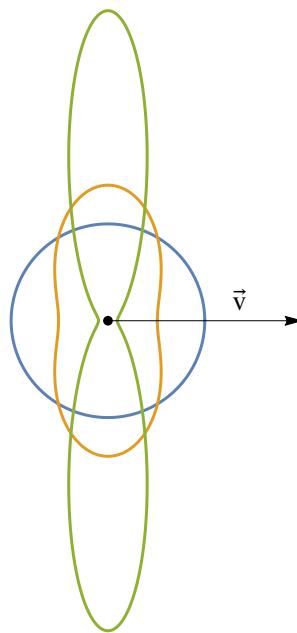


Figura 6.1: Plano transversal do campo elétrico de uma partícula carregada com velocidade constante. As curvas indicam a mesma equipotencial para velocidades distintas da partícula. A curva circular indica o caso $v/c = 0$, a curva intermediária $v/c = 0.7$ e a curva mais alongada $v/c = 0.95$. A medida que a velocidade da partícula aumenta, a componente paralela ao movimento diminui devido à contração de Lorentz, enquanto a componente perpendicular é enaltecida.

Partículas carregadas aceleradas a altas energias tem seu campo contraído na direção do movimento e amplificado no plano perpendicular como visto na Figura 6.1. Quando a velocidade da partícula $v \approx c$, o campo eletromagnético se comporta como uma onda plana que acompanha a carga. Um observador a um parâmetro de impacto b da trajetória da carga sente um pulso eletromagnético de duração $\Delta t \sim \frac{b}{\gamma c}$, onde γ é o fator de Lorentz da partícula e c a velocidade da luz [18]. Quando íons se espalham em UPC seus campos eletromagnéticos interagem entre si. Assim, o espalhamento fóton-fóton ocorre pela interação de fótons produzidos pelos íons, como mostrado na Figura 6.2. Devido à conservação de energia-momento dos íons, o momento dos fótons deve ser negativo $q^2 < 0$, possuindo massa não nula e virtualidade $Q^2 \equiv -q^2 > 0$. Por causa disto, estes fótons massivos podem ter tanto polarização transversal como escalar ou longitudinal [90]. Desta forma, a seção de choque total irá depender das seções de choque do subprocesso devido a fótons em ambas polarizações.

O íon possui um comprimento característico bem definido descrito pelo seu raio $R = 1.2A^{\frac{1}{3}}\text{fm} \approx 7.1\text{fm}$, onde $A = 208$ é o número de núcleons do íon de chumbo. Devido à borda bem definida do íon, o seu fator de forma, definido pela transformada de Fourier da distribuição de carga,

$$F(-q^2) = \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}},$$

é aproximadamente 1 até valores de $-q^2 \approx \frac{1}{R^2}$, após o qual decresce rapidamente [90, 91, 92] (ver Figura 6.5). A distribuição de carga é normalizada, portanto $\int d^3r \rho(r) = 1$. Como a amplitude de probabilidade do espalhamento possui um fator de forma para cada vértice de acoplamento entre os íons e os fótons, a região relevante para a seção de choque correspondente é restrita a momentos transferidos

$$-q_{1,2}^2 \lesssim \frac{1}{R^2}, \quad (6.1)$$

onde 1 e 2 indica o fóton produzido por cada íon. Acima deste valor, a seção de choque é desprezível. Além disto, o propagador associado a cada fóton possui um polo em $q_{1,2}^2 = 0$, tornando a região de integração dos momentos dos fótons mais relevante em torno dele. Por este motivo, a virtualidade é predominantemente baixa e os fótons emitidos pelos íons são ditos quase-reais.

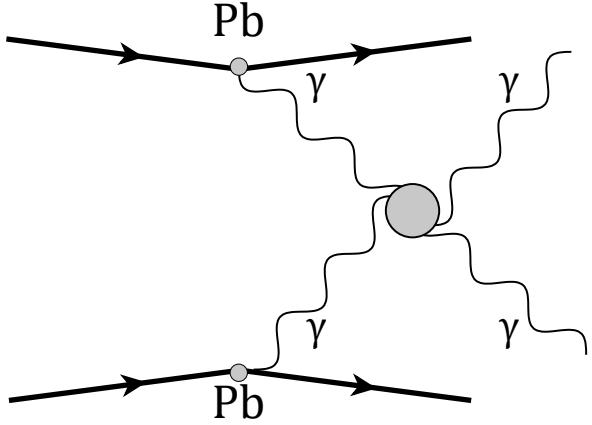


Figura 6.2: Interação fóton-fóton produzido em espalhamentos ultraperiféricos de íons de chumbo. O círculo maior cinza indica todas as possíveis interações entre os 4 fótons. No termo que lidera a expansão perturbativa, a interação é descrita pelo diagrama da Figura 5.2.

A amplitude de espalhamento total entre fótons virtuais pode ser separada de acordo com as polarizações dos fótons iniciais. Desta forma, a seção de choque possui contribuições devido a fótons iniciais unicamente com polarização transversal e contribuições devido a fótons iniciais com polarização escalar [90]. É possível mostrar que as contribuições à seção de choque vinda de fótons com polarização escalar são proporcionais a q^2 no limite em que $q^2 \rightarrow 0$, portanto são nulos na origem $\sigma_S(\omega, q^2 = 0) = 0$. Por outro lado, a seção de choque puramente transversal se aproxima, no mesmo limite, da seção de choque do processo em que os fótons são reais $\sigma_T(\omega, q^2 = 0) = \sigma_{\gamma\gamma}(\omega)$. O comportamento das seções de choque, do fator de forma e a presença do polo nos propagadores dos fótons, nos permite definir um parâmetro de *cutoff* $\Lambda_\gamma = \frac{1}{R}$ na integração dos momentos de tal forma que a seção de choque é desprezível para valores $-q^2 > \Lambda_\gamma^2$ e bem aproximada pela seção de choque para de fótons reais para valores $-q^2 < \Lambda_\gamma^2$ [90]. Assim, esta condição permite escrever a seção de choque total como

$$\sigma(PbPb \rightarrow PbPb + \gamma\gamma) = \int \sigma_{\gamma\gamma}(\omega_1, \omega_2) dn(\omega_1, \omega_2),$$

onde $dn(\omega_1, \omega_2)$ é a distribuição de fótons com energias ω_1 e ω_2 produzidos pelos íons e $\sigma_{\gamma\gamma}(\omega_1, \omega_2)$ é a seção de choque fóton-fóton cujos fótons incidentes são reais [92]. No caso geral, a distribuição $dn(\omega_1, \omega_2)$ não se fatoriza no produto de distribuições de fótons de cada núcleo. De fato, baseando-se na Figura 6.2, a emissão de um fóton pelo primeiro íon é função do momento do fóton emitido pelo segundo íon. Porém, para momentos

$q_i^2 < \Lambda_\gamma^2$ e UPC, podemos aproximar a distribuição total como o produto das distribuições individuais [90, 93].

Da cinemática do sistema, no referencial em que o íon se move ao longo do eixo z com velocidade v , o momento transferido ao fóton é dado por $q^\mu = (\omega, \mathbf{q}_\perp, q_z = \frac{\omega}{v})$. Assim, a virtualidade deste fóton é

$$Q^2 = \frac{\omega^2}{\gamma^2} + \mathbf{q}_\perp^2,$$

onde o fator de Lorentz do íon é dado por $\gamma^{-2} = 1 - v^2 = \frac{\sqrt{s}}{M_{Pb}} \approx 3000$ no referencial do laboratório para o LHC, onde os íons possuem energia de massa invariante núcleon-núcleon $\sqrt{s_{NN}} = 5.02\text{TeV}$. Portanto, a condição (6.1) implica que a energia dos fótons estão limitados superiormente a $\omega_{\max} \approx \frac{\gamma}{R} \approx 80\text{GeV}$ e o momento transverso a $q_\perp \lesssim \frac{1}{R} \approx 30\text{MeV}$. Estes resultados podem ser entendidos como sendo fruto do efeito de coerência dos núcleons do íons e da contração de Lorentz experimentado pelo campo eletromagnético. Os campos eletromagnéticos produzidos por cada próton interferem construtivamente enquanto possuírem comprimento de onda da ordem ou maior do que o raio do núcleo, não discernindo a sua estrutura. Comprimentos de onda menores passam a interferir destrutivamente, reduzindo consideravelmente o fluxo de fótons de altas energias com relação ao caso anterior. Por outro lado, acelerar o íon a velocidades próximas a da luz faz com que seu campo elétrico se concentre no plano perpendicular ao seu movimento. Portanto, o fluxo de energia do campo eletromagnético que acompanha o íon, descrito pelo vetor de Poynting, é praticamente paralelo à trajetória. Como consequência, o momento transverso dos fótons é desprezível quando comparado à sua energia. Para todos os efeitos, consideraremos a propagação dos fótons como sendo paralelos ao feixe [94].

A aproximação de fótons equivalentes se caracteriza por substituir a seção de choque fóton-fóton completa (levando em conta todas as polarizações do fóton massivo) pela seção de choque entre fótons reais, e por supor que o momento dos fótons emitidos é paralelo ao feixe de íons.

A intensidade da interação eletromagnética entre partículas com carga $Z_1 e$ e $Z_2 e$

é caracterizado pelo parâmetro adimensional de Sommerfeld [95]

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{v}, \\ &\approx \frac{Z_1 Z_2}{137}.\end{aligned}$$

Para os casos em que $\eta \ll 1$ (elétrons e prótons), devido à interação ser fraca, as partículas trocam poucos fótons. Portanto, a distribuição de probabilidade de emissão de fótons deve ser obtida analisando o vértice de acoplamento entre a partícula e o fóton a nível de árvore. Já, no caso em que $\eta \gg 1$ ($\eta = 49$ no caso do Pb), a interação eletromagnética é suficientemente forte para que diversos fótons sejam trocados entre os íons. Desta forma, a distribuição pode ser calculada no regime semiclássico [96, 95]. Para derivar a forma da distribuição de fótons $dn(\omega_1, \omega_2)$ calculamos inicialmente, a partir do vetor de Poynting, o fluxo de energia por unidade de área e unidade de frequência $\frac{dU}{dAd\omega}$ produzido por um íon ultrarrelativístico. Para isto, calculamos o campo eletromagnético produzido por um íon de carga Ze e distribuição de carga normalizada e esfericamente simétrica $\rho(r)$ com velocidade constante v . No referencial de repouso e com origem no centro da distribuição, o campo elétrico é dado pela Lei de Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{4\pi} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Introduzimos o fator de forma correspondente usando a relação

$$\rho(r') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'},$$

obtendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{4\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} F(-q^2) \int d^3r' e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Simplificamos esta expressão usando a identidade $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ e realizando uma integração por partes. Assim, o campo elétrico em função do fator de forma pode ser escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -iZe \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (6.2)$$

O campo elétrico gerado pela mesma distribuição de carga $\rho(r)$ em movimento

uniforme com velocidade \mathbf{v} pode ser obtido a partir da equação (6.2) realizando uma transformação de Lorentz. Escolhemos o observador inercial S' como sendo aquele que está em repouso com relação à distribuição. O observador S está em movimento uniforme com velocidade $-\mathbf{v}$ com relação a S' , sua origem coincide com a de S' em $t = t' = 0$. Escolhemos também que os eixos dos sistemas de coordenadas sejam paralelos e tal que \mathbf{v} aponte na direção z . Para encontrar o campo elétrico observado no referencial S , expressamos as coordenadas de S' em função das coordenadas de S usando (2.6),

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta z), \\ x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \gamma(z - \beta ct). \end{aligned}$$

O campo elétrico em S em função do campo elétrico de S' é obtido usando as equações (2.14)

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma E'_x, \\ E_y &= \gamma E'_y, \\ E_z &= E_z, \end{aligned}$$

e o campo magnético através de (2.17)

$$\begin{aligned} B_x &= -\gamma v E'_y = -v E_y, \\ B_y &= \gamma v E'_x = v E_x, \\ B_z &= 0. \end{aligned}$$

Assim, o campo elétrico no referencial S tem suas componentes dadas por

$$E_x = -iZe\gamma \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q_x}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.3)$$

$$E_y = -iZe\gamma \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q_y}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.4)$$

$$E_z = -iZe \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q_z}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (6.5)$$

Para um observador no referencial S medindo o campo elétrico no ponto $(b_x, b_y, 0)$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, \gamma(z - vt)), \\ &= (b_x, b_y, -\gamma vt). \end{aligned}$$

Já o campo magnético é sempre perpendicular à trajetória do íon e é dado por

$$\mathbf{B}_\perp = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

Como pode ser observado das equações (6.3), (6.4) e (6.5), as componentes perpendiculares à trajetória, E_x e E_y , são intensificadas por um fator γ quando comparadas com a componente longitudinal E_z .

Com o objetivo de visualizar melhor as consequências da contração do espaço, olhamos para as equações correspondentes a uma distribuição de carga puntiforme $F(-q^2) = 1$ dadas por [18]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \frac{1}{4\pi} \frac{q\gamma\mathbf{b}}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_z &= -\frac{1}{4\pi} \frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Notamos que o instante de maior intensidade do campo elétrico é $t = 0$ e que o intervalo de tempo relevante em que a interação ocorre é da ordem de $\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}$. Portanto, à medida que $v \rightarrow c$, o intervalo de interação se torna menor ocorrendo efetivamente no instante $t = 0$. Além disso, notamos que o campo elétrico longitudinal se torna desprezível e o

campo perpendicular é amplificado pelo fator de Lorentz. Desta forma, recuperamos o comportamento descrito na Figura 6.1. Como estamos interessados no comportamento do campo elétrico de uma distribuição de carga ultrarrelativística, a seguir desprezamos a componente z do campo elétrico, sendo assim dado por

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = -iZe\gamma \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}} e^{-i\gamma q_z v t}. \quad (6.7)$$

O vetor de Poynting associado ao campo eletromagnético do íon é dado por $\mathbf{S} = \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}_\perp$. Ao desprezar a componente z do campo elétrico, estamos mantendo apenas a componente S_z do vetor de Poynting. Portanto, o seu módulo indica o fluxo de energia por unidade de área perpendicular à trajetória e por unidade de tempo,

$$\frac{dU}{d^2bdt} = v |\mathbf{E}_\perp(\mathbf{b}, t)|^2,$$

onde (6.6) foi usado e o elemento de área $dA = d^2b$ é parametrizado em termos do parâmetro de impacto. Podemos relacionar o fluxo de energia por unidade de tempo com o fluxo correspondente por unidade de frequência fazendo uso do teorema de Parseval, pois este conecta os módulos quadrados no espaço do tempo e das frequências,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_\perp(\mathbf{b}, t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\perp(\mathbf{b}, \omega)|^2 d\omega.$$

Obtemos consequentemente que

$$\frac{dU}{d^2b d\omega} = \frac{v}{\pi} |\mathbf{E}_\perp(\mathbf{b}, \omega)|^2. \quad (6.8)$$

A probabilidade de interação de uma partícula α projetada aleatoriamente sobre um anteparo fino composto por partículas β com distribuição superficial n_β é dada por $P = n_\beta \sigma_{\alpha\beta}$, onde $\sigma_{\alpha\beta}$ é a seção de choque entre as partículas [97]. Para relacionar o fluxo por unidade de frequência (6.8) com a probabilidade de interação supomos um experimento em que a seção de choque para a interação entre um fóton de energia ω e uma partícula α de energia E seja dada por $\sigma_{\gamma\alpha}(\omega, E)$. Reconhecemos a distribuição superficial de fótons, ou número equivalente de fótons, com energia entre ω e $\omega + d\omega$ como

sendo dada pela distribuição de energia no mesmo intervalo dividida pela energia de um fóton nessa mesma energia,

$$N(\omega, b) d\omega \equiv \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dU}{d^2 b d\omega} d\omega, \quad (6.9)$$

Portanto, a probabilidade da partícula α interagir com uma distribuição superficial de fótons de qualquer energia produzida por um íon ultrarrelativístico é dada por

$$P(b, E) = \int_0^\infty \sigma_{\gamma\alpha}(\omega, E) \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dU}{d^2 b d\omega} d\omega,$$

e a seção de choque total por

$$\sigma_{\gamma\alpha}(E) = \int d^2 b \int_0^\infty \sigma_{\gamma\alpha}(\omega, E) \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dU}{d^2 b d\omega} d\omega,$$

sendo que integramos sobre a área onde a distribuição de fótons está contida. Desta forma, se reconhecemos a partícula $\alpha = \gamma$ como sendo também um fóton fazendo parte de uma distribuição produzida por outro íon, então a seção de choque total será dada por

$$\begin{aligned} \sigma(PbPb \rightarrow PbPb\gamma\gamma) &= \int d^2 b_1 d^2 b_2 d\omega_1 d\omega_2 S^2(b_1, b_2) \\ &\quad \times N(\omega_1, b_1) N(\omega_2, b_2) \sigma_{\gamma\gamma}(\sqrt{s_{\gamma\gamma}} = \sqrt{4\omega_1\omega_2}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde $S^2(b_1, b_2)$ é chamado de fator de absorção e foi introduzido de forma *ad-hoc*. As energias em (6.10) são aquelas medidas no referencial do laboratório. Para calcular a seção de choque $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ produzida pelos íons em UPC, devemos restringir os valores dos parâmetros de impacto de tal forma que $|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| \gtrsim 2R$ (ver Figura 6.3). Assim, o papel do fator de absorção é limitar o espaço dos parâmetros de impacto para excluir a possibilidade de ocorrer interações fortes entre os núcleons. Como primeira aproximação, podemos tratar os íons como esferas maciças de tal forma que podemos descrever o fator de absorção como $S^2(b_1, b_2) = \Theta(|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| - 2R)$, onde $\Theta(x)$ é a função escada de Heaviside [98]. Uma das vantagens da abordagem semiclássica do número de fótons equivalentes é a fácil inclusão do fator de absorção.

Para obter o número equivalente de fótons $N(\omega, b)$ em função do fator de forma

do íon devemos calcular a transformada de Fourier do campo elétrico (6.7) e substituir em (6.8). Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\perp(b, \omega) &= \int dt e^{i\omega t} \mathbf{E}_\perp(\mathbf{b}, t), \\
&= -iZe\gamma \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}_\perp}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}} \left[\int dt e^{i(\omega - \gamma v q_z)t} \right], \\
&= -iZe\gamma \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{q}_\perp}{q^2} F(-q^2) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}} \left[2\pi \frac{\delta\left(\frac{\omega}{\gamma v} - q_z\right)}{\gamma v} \right], \\
&= -\frac{iZe}{v} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \mathbf{q}_\perp \frac{F\left(-q_\perp^2 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}\right)}{q_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

Para calcular o módulo do campo elétrico, notamos que este é paralelo ao versor \hat{b} no ponto de observação, logo multiplicando escalarmente ambos lados por este obtemos

$$\begin{aligned}
E_\perp(b, \omega) &= -\frac{iZe}{v} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} q_\perp \cos \theta \frac{F\left(-q_\perp^2 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}\right)}{q_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}} e^{iq_\perp b \cos \theta}, \\
&= -\frac{iZe}{v} \int_0^\infty \frac{dq_\perp}{(2\pi)^2} q_\perp^2 \frac{F\left(-q_\perp^2 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}\right)}{q_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta e^{iq_\perp b \cos \theta}.
\end{aligned}$$

A integral em $d\theta$ representa uma função de Bessel do primeiro tipo, portanto

$$E_\perp(b, \omega) = -\frac{iZe}{v} \int_0^\infty \frac{dq_\perp}{(2\pi)^2} q_\perp^2 \frac{F\left(-q_\perp^2 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}\right)}{q_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2}} 2\pi i J_1(q_\perp b).$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{aligned}
q_\perp &= \frac{u}{b}, \\
dq_\perp &= \frac{du}{b},
\end{aligned}$$

podemos reescrever o módulo do campo elétrico como

$$E_\perp(b, \omega) = \frac{Ze}{2\pi v b} \int_0^\infty du J_1(u) u^2 \frac{F\left(-\frac{u^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2}\right)}{u^2 + x^2}, \quad (6.11)$$

onde $x = \frac{b\omega}{\gamma v}$. Finalmente, substituindo (6.11) e (6.8) em (6.9) obtemos o número de fótons equivalentes como

$$N(\omega, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{1}{\omega b^2} \phi(x, b)^2, \quad (6.12)$$

onde fizemos $v = c$ para o íon ultrarrelativístico, e

$$\phi(x, b) = \int_0^\infty du J_1(u) u^2 \frac{F\left(-\frac{u^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2}\right)}{u^2 + x^2}.$$

O número de fótons equivalentes (6.12) é proporcional ao quadrado do número atômico $Z^2 \sim 10^4$, portanto a seção de choque total (6.10) é amplificado por um fator $Z^4 \sim 10^8$ com relação à seção de choque em colisões de prótons. Devido à extensa distribuição espacial dos íons, os fótons emitidos são limitados superiormente a $\omega_{\max} \approx \frac{\gamma}{R} \approx 80\text{GeV}$, enquanto $\omega_{\max} \approx 1500\text{GeV}$ para o próton, ambos nas energias acessíveis no LHC. Porém, como a seção de choque fóton-fóton diminui com o quadrado da massa invariante dos fótons $m_{\gamma\gamma}^{-2}$ a partir de $m_{\gamma\gamma} \approx 3m$ [73], onde m é a massa das partículas que compõem o loop, o intenso fluxo de fótons mais brandos favorece o uso de colisões entre íons pesados [87].

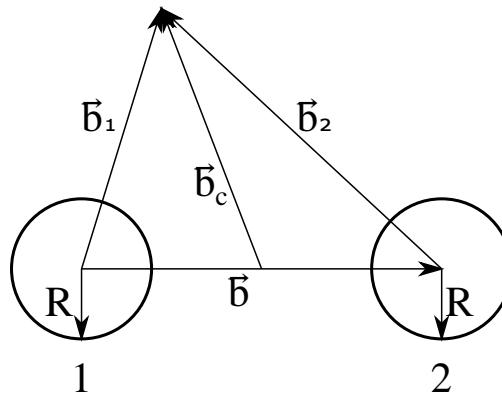


Figura 6.3: Seção perpendicular ao feixe dos íons. Parâmetros de impacto envolvidos na descrição da aproximação de fótons equivalentes.

É interessante reescrever a seção de choque (6.10) em termos do vetor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ com origem no íon 2 e final no íon 1, e do vetor com origem no ponto médio $\mathbf{b}_c = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$, como indicados na Figura 6.3. Desta forma, integrando sobre a distribuição

angular de \mathbf{b} obtemos

$$\begin{aligned}\sigma(PbPb \rightarrow PbPb\gamma\gamma) &= 2\pi \int_{2R}^{\infty} db \int d^2 b_c d\omega_1 d\omega_2 b \\ &\quad \times N(\omega_1, b_1) N(\omega_2, b_2) \sigma_{\gamma\gamma}(\sqrt{s_{\gamma\gamma}} = \sqrt{4\omega_1\omega_2}), \quad (6.13)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}b_1 &= \sqrt{\left(b_{cx} + \frac{b}{2}\right)^2 + b_y^2}, \\ b_2 &= \sqrt{\left(b_{cy} - \frac{b}{2}\right)^2 + b_y^2},\end{aligned}$$

A vantagem de usar este conjunto de variáveis é dele satisfazer automaticamente a condição do fator de absorção integrando na variável b somente a partir de $2R$.

Podemos também reescrever as energias dos fótons em termos da energia invariante do sistema $m_{\gamma\gamma} \equiv \sqrt{s_{\gamma\gamma}}$ e da rapidez do sistema de fótons Y . Em colisões, a rapidez de uma partícula (ou de um sistema) é uma medida do ângulo que esta faz com relação ao feixe. É definida em termos da energia e do momento longitudinal pela relação

$$Y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + P_z}{E - P_z} \right).$$

No referencial do laboratório temos que a massa invariante do sistema é dada por $m_{\gamma\gamma} \equiv \sqrt{s_{\gamma\gamma}} = \sqrt{4\omega_1\omega_2}$. Já a energia do sistema de fótons é dada pela soma das energias de cada fóton $E_{\gamma\gamma} = \omega_1 + \omega_2$ e seu momento ao longo do eixo z é dado por $P_z = \omega_1 - \omega_2$. Portanto, temos que $Y = \frac{1}{2} \ln(\omega_1/\omega_2)$, e as energias dos fótons $\omega_1 = \frac{m_{\gamma\gamma}}{2} e^Y$ e $\omega_2 = \frac{m_{\gamma\gamma}}{2} e^{-Y}$. Usando estas relações, a seção de choque total (6.13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\sigma(PbPb \rightarrow PbPb\gamma\gamma) &= \pi \int_{2R}^{\infty} db \int d^2 b_c dm_{\gamma\gamma} dY m_{\gamma\gamma} b \\ &\quad \times N\left(\frac{m_{\gamma\gamma}}{2} e^Y, b_1\right) N\left(\frac{m_{\gamma\gamma}}{2} e^{-Y}, b_2\right) \sigma_{\gamma\gamma}(m_{\gamma\gamma}). \quad (6.14)\end{aligned}$$

Com o objetivo de isolar o processo de interesse de outros e para maximizar a

eficiência dos componentes do detector, vários cortes são impostos durante a medição e a análise dos dados. No caso do espalhamento fóton-fóton, estes cortes descartam fótons com certas características e, portanto, não contribuindo para a seção de choque total. Para prever teoricamente o resultado experimental obtido por um detector de partículas devemos, então, conseguir incluir estes cortes nas variáveis dinâmicas, restringindo espaço de fase no qual estamos integrando. Os principais cortes implementados pelo ATLAS são no momento transverso dos fótons finais, nas suas rapidez e na energia invariante do sistema de fótons produzido [13]. Para incluir um corte no momento transversal é necessário incluir a informação da distribuição angular do espalhamento $\gamma\gamma$. Para isto, substituímos a seção de choque total pela seção de choque diferencial $\sigma_{\gamma\gamma}(m_{\gamma\gamma}) \rightarrow \int \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}(m_{\gamma\gamma}, z)}{dz} dz$, onde $z = \cos\theta$ parametriza o ângulo com relação ao feixe no referencial de centro de momento. Pela simetria do sistema, o intervalo de integração da variável z deve ser $[0, 1]$, caso contrário haveria dupla contagem dos estados finais. Em seguida, realizamos uma mudança de variáveis para o momento transverso. Para isto, expressamos z como a razão entre o momento longitudinal e o momento total, e estes em termos do momento transverso p_t e a massa invariante,

$$\begin{aligned} z &= \frac{p_z}{p}, \\ &= \frac{\sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}}{m_{\gamma\gamma}}, \\ dz &= -\frac{4p_t}{m_{\gamma\gamma}} \frac{dp_t}{\sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}}. \end{aligned}$$

Assim, a seção de choque total pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sigma(PbPb \rightarrow PbPb\gamma\gamma) &= 4\pi \int_{2R}^{\infty} db \int d^2 b_c dm_{\gamma\gamma} dY dp_t \frac{bp_t}{\sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}} \\ &\times N\left(\frac{m_{\gamma\gamma}}{2}e^Y, b_1\right) N\left(\frac{m_{\gamma\gamma}}{2}e^{-Y}, b_2\right) \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}\left(m_{\gamma\gamma}, \sqrt{1 - \frac{(2p_t)^2}{m_{\gamma\gamma}^2}}\right)}{dz}. \quad (6.15) \end{aligned}$$

Nesta integral, os valores acessíveis ao módulo do momento transverso estão no intervalo $0 \leq p_t \leq m_{\gamma\gamma}/2$. O sinal negativo do elemento dz é compensado pela inversão dos limites

de integração $\int_0^1 \rightarrow \int_{m_{\gamma\gamma}/2}^0 \rightarrow -\int_0^{m_{\gamma\gamma}/2}$.

Finalmente, fazemos uma mudança de variáveis para incluir as rapidez dos fótons individuais no referencial do laboratório. Para isto, relacionamos as variáveis $m_{\gamma\gamma}$ e Y com as rapidez y_1 e y_2 . Começamos relacionando as rapidez no referencial do laboratório com as rapidez do referencial de centro de momento dos fótons \bar{y}_1 e \bar{y}_2 . Da definição da rapidez temos que

$$\bar{y}_i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\bar{\omega}_i + \bar{p}_{zi}}{\bar{\omega}_i - \bar{p}_{zi}} \right),$$

onde $\bar{\omega}_i$ e \bar{p}_{zi} são a energia e o momento longitudinal dos fótons emitidos no referencial de centro de momento, onde $i = 1, 2$. Neste referencial temos que $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ e $\bar{p}_{z2} = -\bar{p}_{z1}$, portanto $\bar{y}_2 = -\bar{y}_1$. O referencial de centro de momento se move com velocidade

$$\beta = \frac{P_z}{E_{\gamma\gamma}},$$

ao longo do eixo z no referencial do laboratório. A energia e o momento longitudinal se transformam como as componentes de 4-vetores, por isso temos que

$$\bar{\omega}_i = \gamma (\omega_i - \beta p_{\gamma zi}),$$

$$\bar{p}_{zi} = \gamma (p_{zi} - \beta \omega_i),$$

onde ω_i e p_{zi} são a energia e o momento longitudinal dos fótons emitidos no referencial do laboratório. Portanto, obtemos que

$$\bar{y}_i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega_i + p_{zi}}{\omega_i - p_{zi}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_{\gamma\gamma} + P_z}{E_{\gamma\gamma} - P_z} \right),$$

ou

$$y_i = \bar{y}_i + Y.$$

Como consequência desta relação, a diferença entre as rapidez de duas partículas produzidas numa colisão é invariante por transformações de Lorentz ao longo do feixe, $y_2 - y_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$. Por outro lado,

$$Y = \frac{1}{2} (y_1 + y_2). \tag{6.16}$$

Usando novamente a definição da rapidez, expressamos \bar{y}_2 e \bar{y}_1 em função da massa invariante e do momento transverso,

$$\bar{y}_i = \pm \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{\gamma\gamma} + \sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}}{m_{\gamma\gamma} - \sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}} \right),$$

onde o sinal é positivo para \bar{y}_1 e negativo para \bar{y}_2 . Portanto, a diferença entre as rapidez é dada por

$$y_1 - y_2 = \ln \left(\frac{m_{\gamma\gamma} + \sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}}{m_{\gamma\gamma} - \sqrt{m_{\gamma\gamma}^2 - 4p_t^2}} \right).$$

Em seguida, invertemos esta equação isolando a massa invariante,

$$m_{\gamma\gamma} = 2p_t \cosh \left(\frac{y_1 - y_2}{2} \right). \quad (6.17)$$

Usando as expressões (6.16) e (6.17) podemos escrever o elemento de área $dY dm_{\gamma\gamma}$ em função de $dy_1 dy_2$,

$$dY dm_{\gamma\gamma} = |J| dy_1 dy_2,$$

onde o Jacobiano é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial y_1} & \frac{\partial Y}{\partial y_2} \\ \frac{\partial m_{\gamma\gamma}}{\partial y_1} & \frac{\partial m_{\gamma\gamma}}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

Desta forma obtemos que

$$dY dm_{\gamma\gamma} = p_t \sinh \left(\frac{|y_1 - y_2|}{2} \right) dy_1 dy_2.$$

Usando este elemento de área e as equações (6.16) e (6.17) escrevemos a seção de choque total (6.15) em sua forma final,

$$\begin{aligned}
\sigma(PbPb \rightarrow PbPb + \gamma\gamma) = & 4\pi \int_{2R}^{\infty} db \int d^2 b_c dp_t dy_1 dy_2 bp_t \\
& \times N\left(p_t \cosh\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) e^{\frac{1}{2}(y_1 + y_2)}, b_1\right) N\left(p_t \cosh\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}(y_1 + y_2)}, b_2\right) \\
& \times \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}(2p_t \cosh\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right), \tanh\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right))}{dz}. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

A partir da equação (6.18) serão calculados numericamente as seções de choque do espllhamento fóton-fóton em UPC de íons de chumbo. Os diferentes processos de interação entre os fótons produzidos pelos íons são descritos pela seção de choque diferencial. A forma pela qual a distribuição espacial de carga dos íons, codificada no fator de forma, modifica a produção de fótons é descrita pelo número de fótons equivalentes.

6.3 Fatores de Forma

O principal ingrediente do número de fótons equivalentes (6.12) é o fator de forma do íon. A principal forma de se obter informação experimental sobre a distribuição de carga do núcleo é bombardeando-o com partículas (por exemplo elétrons ou mísseis) e estudando a distribuição angular resultante. Diversas parametrizações e os valores correspondentes dos seus parâmetros obtidos experimentalmente podem ser encontradas em [99]. Para momentos pequenos transferidos aos projéteis pelo núcleo, os resultados experimentais são bem conhecidos e todas as distribuições devem recuperá-los. É necessário aumentar a energia do feixe de partículas incidente para que o comprimento de onda correspondente seja da ordem dos comprimentos das estruturas que desejamos observar. Porém, energias suficientemente altas podem provocar processos inelásticos e, em particular, quebrar o núcleo. Esta limitação torna o conhecimento do fator de forma pouco preciso para valores grandes de q^2 . Consequentemente, uma grande incerteza teórica é introduzida pela escolha das diversas parametrizações possíveis. Devido a isto, a incerteza teórica propagada para a seção de choque total é estimada em 20 [87].

Com o objetivo de estudar o impacto da escolha do fator de forma nas seções de choque totais, fazemos uso de 4 distribuições de carga distintas cujos gráficos são

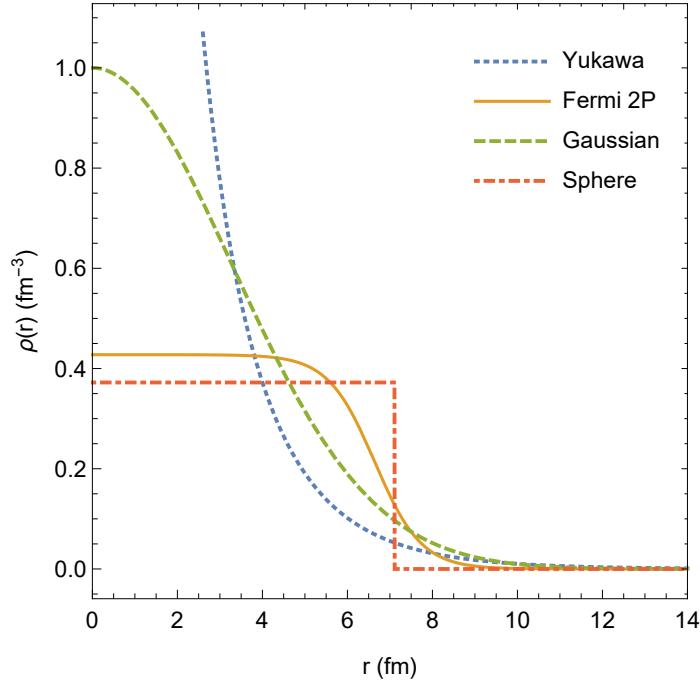


Figura 6.4: Gráfico normalizado das 4 distribuições de cargas usadas para descrever o íon de chumbo.

mostrados na Figura 6.4. A distribuição de carga tipo Yukawa [89], dada por

$$\rho(r) = \frac{\Lambda^2}{4\pi} \frac{e^{-r\Lambda}}{r},$$

tem seu fator de forma correspondente dado por

$$F(-q^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - q^2}.$$

O parâmetro Λ é obtido de tal forma a recuperar $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} = 5.5016\text{fm}$, para o chumbo, sendo igual a $\Lambda = 0.088\text{GeV}$ [98]. É considerado um modelo bastante simples e bastante irreal de distribuição de carga. Porém, possui a vantagem de permitir obter o número de fótons equivalente (6.12) de forma analítica. A função $\phi(\omega, b)$ correspondente é dada por

$$\phi(\omega, b) = \frac{\omega}{\gamma} K_1\left(\frac{b\omega}{\gamma}\right) - \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + \Lambda^2} K_1\left(b\sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + \Lambda^2}\right),$$

onde $K_1(x)$ é a função de Bessel modificada tipo 1.

A distribuição de carga de Fermi com dois parâmetros [100] é dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}},$$

onde ρ_0 deve ser escolhido de tal forma a normalizar a distribuição, os parâmetros $c = 6.642\text{fm}$ e $a = 0.549\text{fm}$ descrevem o raio de meia densidade e a espessura da superfície da distribuição [99], respectivamente. Resultados experimentais mostram que estes dois parâmetros são necessários para descrever corretamente a distribuição de carga nuclear [101]. Portanto, se trata de uma distribuição de carga mais realista quando comparada à de Yukawa, que possui apenas um parâmetro, e será usada como padrão para comparação. A complexidade desta distribuição não torna possível obter um fator de forma analítico. Porém, é possível obtê-lo em termos de uma série [102] sendo bem aproximado pelos seus dois primeiros termos,

$$F(-q^2) = \frac{4\pi^2\rho_0 a}{q^2 \sinh(\pi qa)} [\pi qa \cosh(\pi qa) \sin(qc) - qc \cos(qc) \sinh(\pi qa)] + \frac{8\pi\rho_0 a^3 e^{-\frac{c}{a}}}{(1 + q^2 a^2)^2}.$$

Duas outras distribuições bastante usadas na literatura são as de uma esfera carregada homogeneousemente [91] e a Gaussiana [103]. A primeira, para uma esfera de raio $R = 7.1\text{fm}$ é dada pela expressão

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \Theta(R - r).$$

Esta distribuição é obtida a partir da distribuição de Fermi no caso limite em que a espessura da superfície é nula, $a \rightarrow 0$. O fator de forma correspondente pode ser obtido analiticamente e é dado por

$$F(-q^2) = 3 \frac{j_1(qR)}{qR},$$

sendo $j_1(x)$ a função de Bessel esférica do primeiro tipo. Já a distribuição Gaussiana é descrita pela expressão

$$\rho(r) = \frac{Q_0}{\sqrt{8\pi^2}} e^{-\frac{1}{2}Q_0^2 r^2},$$

e tem um fator de forma dado por

$$F(-q^2) = e^{-\frac{1}{2} \frac{q^2}{Q_0^2}},$$

onde $Q_0 = 0.060 \text{ GeV}$ para o chumbo [103].

Os fatores de forma foram traçados na Figura 6.5. Notamos que eles decrescem rapidamente para $q \approx 0.05 \text{ GeV} \sim \frac{1}{R}$, como foi comentado acima. É possível observar também que o fator de forma tipo Yukawa superestima os valores, sendo por isso, considerado irreal. É interessante notar também o comportamento oscilatório dos fatores de forma de Fermi e da esfera homogeneamente carregada. Isto caracteriza o padrão de difração gerado por distribuições com bordas bem definidas.

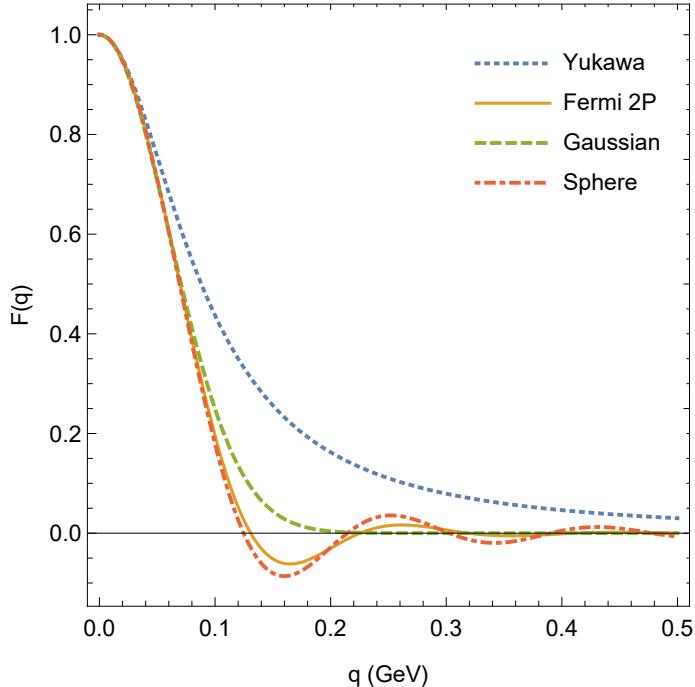


Figura 6.5: Fatores de forma correspondente às distribuições de carga da Figura 6.4. Notamos que decrescem rapidamente em torno de $q \approx 0.05 \text{ GeV} \sim \frac{1}{R}$. A distribuição de Yukawa tem a vantagem de permitir uma expressão analítica para o número de fótons equivalentes, porém é bastante irrealista ao superestimar o fator de forma. A oscilação dos fatores de forma das distribuições de Fermi e da esfera uniformemente carregada é causada pela parametrização de uma superfície bem definida.

6.4 Seção de choque do espalhamento elástico $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ previsto pelo Modelo Padrão

Grande parte dos processos interessantes possuem seções de choque muito pequenas. A baixa probabilidade de ocorrência destes processos os torna bastante raros. Uma das formas de ampliar o número de eventos interessantes é aumentando o número de colisões que os produzem, sendo a outra forma aumentar o tempo de duração do experimento. No LHC, aglomerados de partículas se cruzam numa taxa de 4×10^7 vezes por segundo, cada uma delas produzindo várias colisões. Porém, a taxa que o LHC consegue registrar dados é de apenas 400 eventos por segundo. É o papel dos gatilhos, ou *triggers*, de reduzir o número de eventos totais para os 400 por segundo removendo os eventos de menor interesse. Estes gatilhos são organizados em níveis, os eventos selecionados por um alimentando o próximo. Através de algoritmos implementados tanto no *hardware* do detector quanto em *clusters* de computadores, partículas são reconstruídas a partir dos sinais detectados pelo ATLAS. Desta forma, apenas os eventos que satisfazem uma lista de critérios são mantidos. Mais informações sobre os componentes do ATLAS e a reconstrução de eventos, entre outros, podem ser encontradas em [104].

A posterior análise dos dados armazenados, com o fim de estudar um processo específico, é feita de tal forma a remover processos que possuam estados finais semelhantes. Desta forma, o *background* é reduzido usando uma série de cortes nas variáveis dinâmicas para limpar o sinal e isolar o processo de interesse. Geradores de eventos, baseados em algoritmos tipo Monte Carlo, reproduzem o processo de estudo e o *background* produzido². Os cortes são otimizados aplicando-os nos eventos simulados de tal forma a reduzir o *background* afetando o menos possível o sinal para, em seguida, aplicá-los aos eventos medidos.

O ATLAS analisou $480\mu b^{-1}$ de dados coletados em 2015 a partir dos quais foi observado o espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ e deduzido uma seção de choque total [13]

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{ATLAS} = 70 \pm 24(\text{estat.}) \pm 17(\text{sist.}) \text{ nb.} \quad (6.19)$$

²Em seguida, estes eventos passam por uma simulação do detector. Este geralmente é feito usando o *Geant4* [105].

A maior parte do erro sistemático é devido às incertezas associadas à identificação e reconstrução dos fótons. Os fótons que foram selecionados devem possuir momento transverso $p_t > 3\text{GeV}$, massa invariante do sistema de fótons $m_{\gamma\gamma} > 6\text{GeV}$ e rapidez $|y| < 2.37$, excluindo a região de transição do calorímetro eletromagnético $1.37 < |y| < 1.52$. Outros cortes foram aplicados no momento transverso do sistema de fótons $p_t^{\gamma\gamma} < 2\text{GeV}$ e na acoplanariedade³ $1 - \Delta\phi < 0.01$. A descrição teórica não prevê a presença de acoplanariedade e, devido à suposição dos fótons emitidos pelos íons serem paralelos ao feixe, o momento transverso do sistema é nulo. Portanto, a redução da seção choque total devido a estes cortes foi estimado em 15% analisando o impacto no sinal simulado resumido na Tabela 1 em [13].

O Modelo Padrão prevê o espalhamento de fótons, em primeira ordem, através de um loop de partículas carregadas como mostrado na Figura 5.2. As principais partículas que podem compor o loop são os léptons, quarks e os bósons W^\pm . Além do diagrama box, o mecanismo VDM-Regge [98], no qual fótons oscilam em mésons vetoriais virtuais, contribui para o espalhamento dentro do regime de energia do LHC. Porém, como foi visto, a distribuição de fótons produzidos pelos íons é limitada superiormente a $\omega_{\max} \approx 80\text{GeV}$. Por causa disto, as partículas cujas massas sejam iguais ou superiores a $2\omega_{\max}$ são desprezadas: o quark t e os bósons W^\pm . Por outro lado, os fótons produzidos pelo mecanismo VDM-Regge são bastante frontais, sendo a rapidez predominante em torno de $|y| \approx 5$ (ou 0.77° com relação ao feixe), fugindo assim dos detectores do ATLAS. Além disto, este processo é completamente suprimido pelo corte no momento transverso $p_t > 3\text{GeV}$ imposto nos fótons detectados [106].

As seções de choque total $\sigma_{\gamma\gamma}(m_{\gamma\gamma})$ e diferencial $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dz}(m_{\gamma\gamma}, z)$ são obtidas numericamente usando os pacotes FeynArts, FormCalc e LoopTools [107, 108]. A seção de choque total é mostrada na Figura 6.6. Notamos a presença de um pico em torno de $m_{\gamma\gamma} \approx 3m_e$ devido ao loop de elétron-pósitron após o qual a seção de choque decresce com o inverso da massa invariante [73]. O pico devido ao loop de mísulas é $\sigma_{\gamma\gamma}(3m_\mu) \approx 0.5\mu b$, três ordens de grandeza menor. A seção de choque diferencial é apresentada na Figura 6.7 e mostra que os fótons são produzidos predominantemente ao longo do feixe.

³A acoplanariedade mede o ângulo entre os planos formados por cada partícula produzida e o feixe. A acoplanariedade é nula se os dois fótons forem produzidos no mesmo plano.

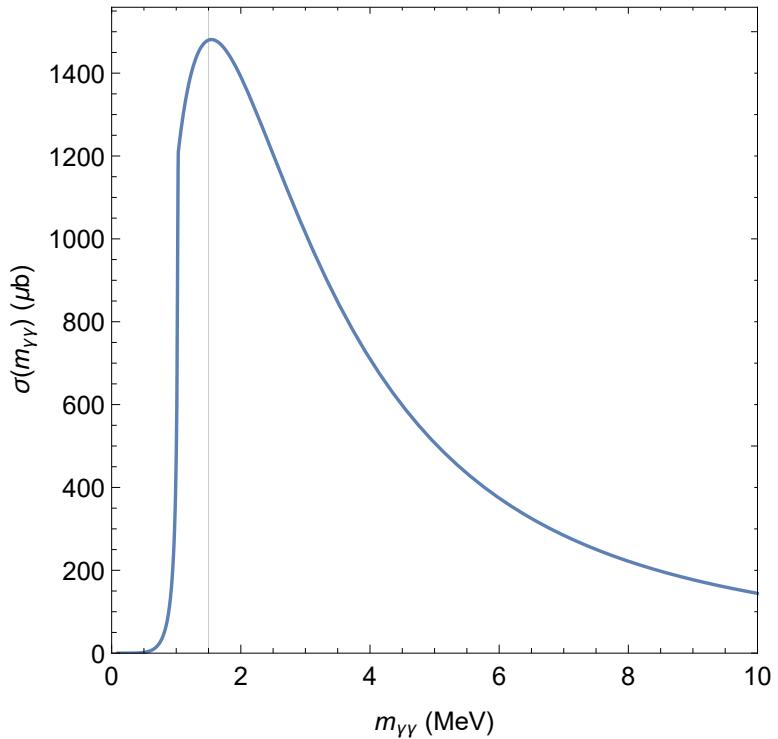


Figura 6.6: Seção de choque total $\sigma_{\gamma\gamma}$. Notamos o pico ao redor de $m_{\gamma\gamma} \approx 3m_e$ devido ao loop de elétrons. O pico que ocorre devido ao loop de múons atinge um valor de $\sigma_{\gamma\gamma}(3m_\mu) \approx 0.5\mu\text{b}$.

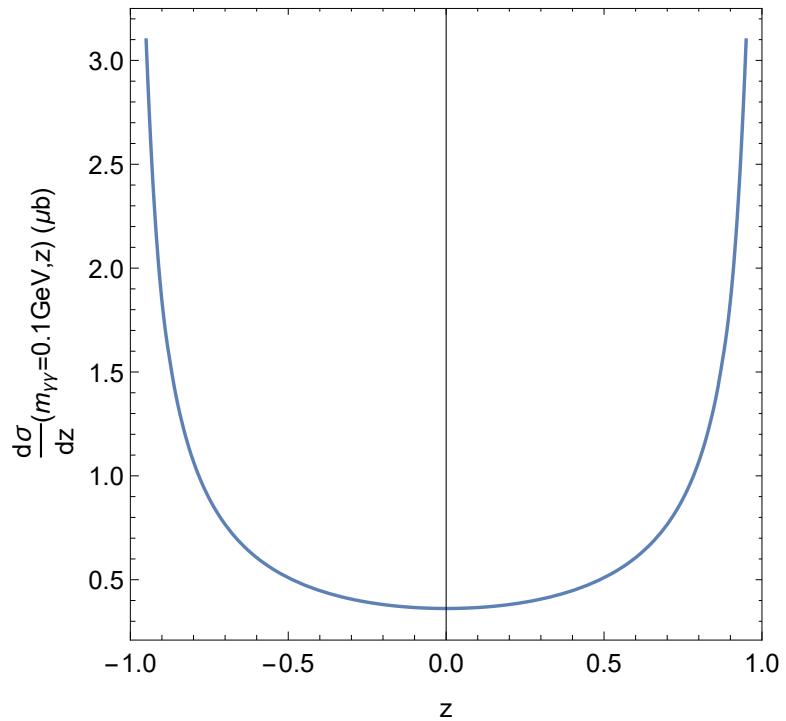


Figura 6.7: Seção de choque diferencial $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dz}$ para $m_{\gamma\gamma} = 100\text{MeV}$. Notamos que os fótons se concentram ao redor de ângulos pequenos com relação ao feixe.

Modelo	Com Absorção	Sem Absorção
Yukawa	$42 \pm 8\text{nb}$	$52 \pm 10\text{nb}$
Fermi 2P, Gaussiana, Esfera	$38 \pm 8\text{nb}$	$45 \pm 9\text{nb}$

Tabela 6.1: Seções de choque previstas pelo Modelo Padrão para o espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ em colisões ions de chumbo com energia $\sqrt{s_{NN}} = 5.02\text{TeV}$ no LHC. Os valores das seções de choque para cada distribuição de carga do íon são dados tanto no caso em que a colisão é ultraperiférica (com absorção) quanto no caso em que não há restrição no parâmetro de impacto. Neste segundo caso processos devido à interação forte não foram levados em conta.

Na Tabela 6.1 mostramos os resultados obtidos numericamente para a seção de choque total (6.18) previsto pelo Modelo Padrão. Apresentamos os resultados obtidos usando as 4 distribuições de carga apresentadas na seção anterior, tanto no caso em que o fator de absorção é incluído quanto no caso em que integramos o parâmetro de impacto b sobre todos os valores. É possível notar que a ausência do fator de absorção superestimaria a seção de choque em 20%. Isto é devido à integração sobre um espaço de fase maior. Vale ressaltar que as distribuições de Fermi, Gaussiana e de uma esfera maciça diferem em no máximo 0.1%. Por outro lado, a distribuição de Yukawa é, em ambos casos, 10% maior que o obtido com a distribuição de Fermi. As incertezas teóricas são principalmente devidas à incerteza do fator de forma e correspondem a 20% do valor da seção de choque [87]. Os valores obtidos estão de acordo, dentro da incerteza, com o valor experimental obtido pela Colaboração ATLAS. Quando comparado com os valores de referência citados em [13], $\sigma = 45 \pm 9\text{nb}$ [87] e $\sigma = 49 \pm 10\text{nb}$, o resultado obtido com a distribuição de Fermi $\sigma = 38 \pm 8\text{nb}$ é compatível mas ligeiramente menor. Uma possibilidade que leva a esta discrepância é a dos autores citados não terem levado em conta o *gap* de transição do calorímetro.

A Colaboração ATLAS tem como projeto futuro medir novamente o espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, porém com rapidez ampliada $|y| < 4$. Assim, fazemos as previsões da seções de choque com espaço de fase ampliado. Nesta situação, obtemos para a distribuição de Yukawa uma seção de choque total $\sigma_Y = 52 \pm 10\text{nb}$. Já, para as demais distribuições, que inclui o caso realista do modelo de Fermi com 2 parâmetros, obtemos que a seção de choque prevista é de $\sigma_{FGE} = 45 \pm 9\text{nb}$. O aumento considerável da seção de choque é devido à grande concentração de fótons espalhados ao longo do feixe, como pode ser observado na Figura 6.7.

6.5 Vínculo dos parâmetros α e β das correções não lineares de Maxwell

Com o objetivo de vincular os parâmetros α e β das correções não lineares à Lagrangiana de Maxwell (5.50), incluímos a contribuição ao espalhamento fóton-fóton devido às correções escrevendo a amplitude total como a soma da amplitude prevista pelo Modelo Padrão e da amplitude das correções não lineares (5.59),

$$\mathcal{M}(\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma) = \mathcal{M}_{MP} + \mathcal{M}_{NL}.$$

Assim, a seção de choque diferencial completa tem contribuições tanto das seções de choque diferenciais devido unicamente ao Modelo Padrão e às correções não lineares como de um termo de interferência,

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}}{dz} = \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{MP}}{dz} + \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{NL}}{dz} + \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^I}{dz}. \quad (6.20)$$

Como a amplitude de probabilidade devido às correções é dada por uma combinação linear dos parâmetros α e β , o termo de interferência da seção de choque também deve sê-lo. Portanto, fatoramos os parâmetros e reescrevemos o termo de interferência como

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^I}{dz} = \alpha \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\alpha}{dz} + \beta \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\beta}{dz},$$

onde $\sigma_{\gamma\gamma}^\alpha$ e $\sigma_{\gamma\gamma}^\beta$ possuem unidade de GeV^2 . Para obter $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\alpha}{dz}$ e $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\beta}{dz}$, primeiramente usamos o pacote FeynRules [109] para obter a amplitude de probabilidade $\mathcal{M}_{NL}(\alpha, \beta)$. Em seguida, usando os pacotes FeynArts, FormCalc e LoopTools, calculamos a seção de choque diferencial devido ao termo de interferência $2 \text{Re} [\mathcal{M}_{MP} \mathcal{M}_{NL}^*(\alpha, \beta)]$ fazendo $\beta = 0$ para obter $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\alpha}{dz}$, e $\alpha = 0$ para obter $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\beta}{dz}$. Fatoramos também os parâmetros da seção de choque devido às correções não lineares, dada pela equação (5.62),

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{NL}}{dz} = \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \right] \frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{\alpha\beta}}{dz}, \quad (6.21)$$

Modelo	$\bar{\sigma}_{NL}$ (GeV ⁶)	$\bar{\sigma}_\alpha$ (GeV ²)	$\bar{\sigma}_\beta$ (GeV ²)
Yukawa	3.2×10^{21}	-4.9×10^8	-1.1×10^9
Fermi 2P, Gaussiana, Esfera	2.5×10^{21}	-4.1×10^8	-9.3×10^8

Tabela 6.2: Valores numéricos das constantes de proporcionalidade das seções de choque totais devido às correções não lineares.

onde

$$\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{\alpha\beta}}{dz} = (2z^2 + 6)^2 \frac{m_{\gamma\gamma}^6}{512\pi^2}.$$

A seção de choque completa (6.18) é linear nas seções de choque diferenciais, portanto é dada pela soma das seções de choque devido a cada termo de (6.20),

$$\sigma(PbPb \rightarrow PbPb + \gamma\gamma) = \sigma_{MP} + \sigma_I + \sigma_{NL}, \quad (6.22)$$

onde os valores usados de σ_{MP} correspondem àqueles obtidos com fator de absorção dados na Tabela 6.1. Explicitando os parâmetros, vinculamos α e β impondo que a seção de choque total (6.22) deva ser compatível com a seção de choque medida pelo ATLAS $\sigma_{ATLAS} = 70 \pm 29$ nb, onde as incertezas estatísticas e sistemáticas foram adicionadas em quadratura. Assim, temos que

$$\left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \right] \bar{\sigma}_{NL} + \underbrace{\alpha \bar{\sigma}_\alpha + \beta \bar{\sigma}_\beta}_{\sigma_I} \cong \sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP}, \quad (6.23)$$

onde $\bar{\sigma}_{NL}$, $\bar{\sigma}_\alpha$, $\bar{\sigma}_\beta$ são as seções de choque totais calculadas usando (6.18) devido às seções de choque diferenciais $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^{\alpha\beta}}{dz}$, $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\alpha}{dz}$ e $\frac{d\sigma_{\gamma\gamma}^\beta}{dz}$, respectivamente. Seus valores são dados na Tabela 6.2 para cada distribuição de carga.

A diferença entre as seções de choque obtida pelo ATLAS e prevista pelo Modelo Padrão é igual a

$$\sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP} = \begin{cases} 28 \pm 30 \text{nb, Yukawa} \\ 32 \pm 30 \text{nb, Fermi 2P, Gaussiana, Esfera} \end{cases}. \quad (6.24)$$

Analisamos primeiramente a relevância do termo de interferência σ_I . Para isto,

expandimos a expressão (6.23) obtendo a equação de uma elipse,

$$\frac{3}{2}\bar{\sigma}_{NL}\alpha^2 - \bar{\sigma}_{NL}\alpha\beta + \frac{3}{2}\bar{\sigma}_{NL}\beta^2 + \bar{\sigma}_\alpha\alpha + \bar{\sigma}_\beta\beta \cong \sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP}. \quad (6.25)$$

Como coeficientes que multiplicam α^2 e β^2 são idênticos, o termo $-\bar{\sigma}_{NL}\alpha\beta$ rotaciona a elipse fazendo com que seu eixo maior realize um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rad com o eixo α . Eliminamos o termo cruzado rotacionando o eixo $\alpha\beta$ em 45° usando as relações

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - \beta), \\ \beta &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta),\end{aligned}$$

de tal forma a obter

$$\bar{\sigma}_{NL}\alpha^2 + 2\bar{\sigma}_{NL}\beta^2 + \alpha(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta) + \beta(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha) \cong \sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP}. \quad (6.26)$$

O efeito dos monômios é o de deslocar o centro da elipse e modificar o comprimento dos eixos. Para observar isto, usamos a identidade

$$A\alpha^2 + C\beta^2 + D\alpha + E\beta = A\left(\alpha + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(\beta + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C},$$

para reescrever (6.26) como

$$\frac{\left(\alpha + \frac{\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta}{2\bar{\sigma}_{NL}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}_{NL}}}\right)^2} + \frac{\left(\beta + \frac{\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha}{4\bar{\sigma}_{NL}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{\sigma}_{NL}}}\right)^2} \cong \sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP} + \frac{(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta)^2}{4\bar{\sigma}_{NL}} + \frac{(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)^2}{8\bar{\sigma}_{NL}}.$$

Usando os valores da Tabela 6.2 dos parâmetros $\bar{\sigma}_\alpha$, $\bar{\sigma}_\beta$ e $\bar{\sigma}_{NL}$ referentes à distribuição de Fermi, temos que o termo de correção no lado direito da equação é

$$\frac{(\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta)^2}{4\bar{\sigma}_{NL}} + \frac{(\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha)^2}{8\bar{\sigma}_{NL}} \approx 1.9 \times 10^{-4} \text{GeV}^2,$$

representando uma correção de menos de 0.001% com relação a $\sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP} = 32\text{nb}$. Por outro lado, quando os deslocamentos d_α do centro da elipse ao longo do eixo α e d_β

ao longo do eixo β ,

$$\begin{aligned} d_\alpha &= \frac{\bar{\sigma}_\alpha + \bar{\sigma}_\beta}{2\bar{\sigma}_{NL}}, \\ d_\beta &= \frac{\bar{\sigma}_\beta - \bar{\sigma}_\alpha}{4\bar{\sigma}_{NL}}, \end{aligned}$$

são comparados com os comprimentos de seus respectivos eixos,

$$\begin{aligned} r_\alpha &= \sqrt{\frac{\sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP}}{\bar{\sigma}_{NL}}}, \\ r_\beta &= \sqrt{\frac{\sigma_{ATLAS} - \sigma_{MP}}{2\bar{\sigma}_{NL}}}, \end{aligned}$$

estes representam uma correção de apenas 0.2% e 0.07%, respectivamente. Para todos os efeitos, a presença do termo de interferência é desprezível com relação aos termos principais e irrelevante com relação às incertezas teóricas envolvidas.

Como foi observado na discussão do efeito Cotton-Mouton na Subseção 2.2.1, valores negativos dos parâmetros α e β levam à violação da causalidade, podendo assumir, portanto, somente valores positivos. Desta forma, usando 3σ de nível de confiança na diferença entre as seções de choque (6.24), vinculamos os parâmetros α e β através da expressão (6.25)

$$\frac{3}{2}\bar{\sigma}_{NL}\alpha^2 - \bar{\sigma}_{NL}\alpha\beta + \frac{3}{2}\bar{\sigma}_{NL}\beta^2 \leq \begin{cases} 118\text{nb, Yukawa} \\ 122\text{nb, Fermi 2P, Gaussiana, Esfera} \end{cases}, \quad (6.27)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 6.8.

Nesta figura, o vínculo obtido usando as distribuições de Fermi com 2 parâmetros, Gaussiana e de uma esfera homogeneamente carregada são representadas pela área mais extensa. A distribuição de Yukawa restringe mais fortemente os vínculos. Isto é devido ao fato de superestimar a seção de choque total (Tabela 6.1) sobrando uma parcela menor de contribuição a ser atribuída às correções não lineares (Equação (6.24)). A reta $\alpha = \beta$ indica os valores referentes às teorias tipo Born-Infeld. Valores superiores para casos específicos são mostrados na Tabela 6.5.

É interessante notar que somos capazes de limitar completamente uma região finita do espaço de fase com apenas uma medição experimental. Isto é possível graças

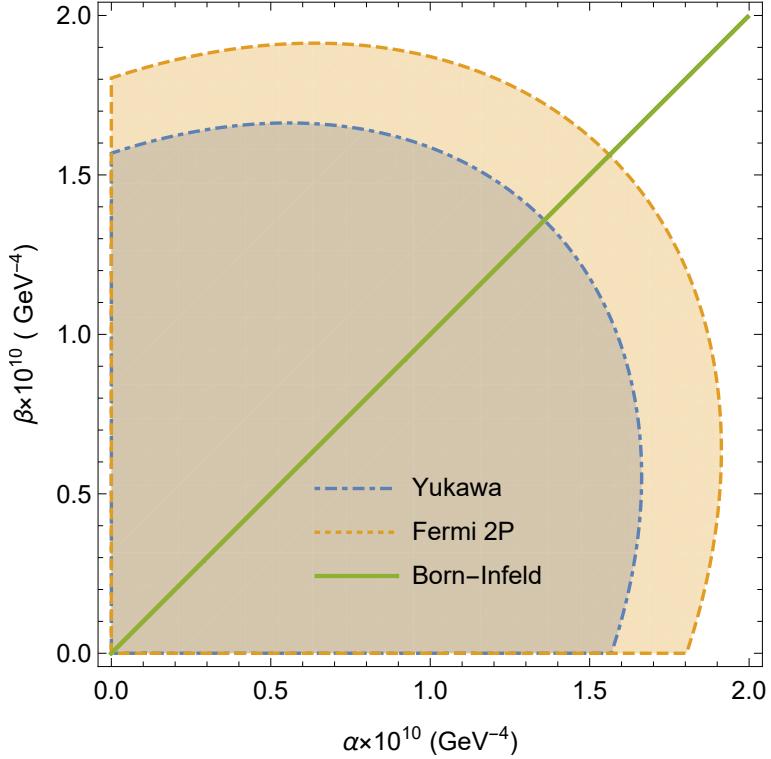


Figura 6.8: Espaço de fase acessível aos parâmetros α e β . A região mais extensa representa o vínculo obtido usando os modelos de Fermi com 2 parâmetros, Gaussiana e a de uma esfera uniformemente carregada para a distribuição de carga do íon. Já a área mais restrita representa o vínculo obtido com a distribuição de Yukawa. A reta $\alpha = \beta$ representa os pontos referente às teorias tipo Born-Infeld.

à dependência quadrática da seção de choque não linear (6.21) nos parâmetros α e β . Observe que isto nem sempre ocorre. De fato, experimentos que medem o efeito Lamb Shift ou a birrefringência magnética linear restringem apenas parte do espaço de fase [33].

Finalmente, usamos os valores superiores referente às teorias tipo Born-Infeld da Tabela 6.5 para vincular o parâmetro b da teoria de Born-Infeld. Nesta teoria os parâmetros são dados por $\alpha = \beta = \frac{1}{8b^2}$. Portanto, o parâmetro b é limitado inferiormente a $b_Y \gtrsim 3.0 \times 10^4 \text{ GeV}^2 \approx 1.3 \times 10^{28} \text{ V m}^{-1}$, para a distribuição de Yukawa, e $b_{FGE} \gtrsim 2.8 \times 10^4 \text{ GeV}^2 \approx 1.2 \times 10^{28} \text{ V m}^{-1}$ para as distribuições de Fermi, Gaussiana e da esfera

Modelo	$\alpha = \beta$ (GeV^{-4})	$\beta = 0$ (GeV^{-4})
Yukawa	1.4×10^{-10}	1.6×10^{-10}
Fermi 2P, Gaussiana, Esfera	1.6×10^{-10}	1.8×10^{-10}

Tabela 6.3: Valores superiores dos vínculos para teorias tipo Born-Infeld e o valor de α no caso em que $\beta = 0$. Pela simetria da equação (6.27), este último caso também corresponde ao valor de β no caso em que $\alpha = 0$.

homogeneamente carregada. Uma massa característica para a teoria de Born-Infeld pode ser definida como $M \equiv \sqrt{b}$. A partir dos vínculos obtidos temos que esta massa é limitada inferiormente a $M \gtrsim 170\text{GeV}$, compatível com o resultado obtido em [14]. Os vínculos obtidos a partir do espalhamento fóton-fóton medido pela Colaboração ATLAS são os mais precisos até o momento. Quando comparamos o vínculo obtido para o parâmetro de Born-Infeld usando medições da energia de ionização do hidrogênio $b_H \gtrsim 1.07 \times 10^{21}\text{V m}^{-1}$, correspondente a $\alpha = \beta \leq 8.1 \times 10^4\text{GeV}^{-4}$ obtemos uma precisão de 14 ordens de grandeza a mais. Obtemos 12 ordens de grandeza de precisão quando comparado ao vínculo do parâmetro de Born-Infeld obtido em [57].

A primeira medição direta do espalhamento fóton-fóton é sem dúvida um marco na história e um grande passo no âmbito de testes da QED. Este acontecimento permite derivar os vínculos mais precisos até o presente momento para correções não lineares. Além disso, permite colaborar com novos vínculos para modelos além do Modelo Padrão que introduzem novas partículas. Este é o caso de partículas tipo-axions [110, 111]. Não obstante, a incerteza de 40% nas medições é um obstáculo a ser superado.

Futuros experimentos realizados em escalas de energias maiores e com precisão aprimorada irão impor uma análise teórica mais sofisticada. No âmbito de correções não lineares a Maxwell, para obter vínculos mais precisos será necessário incluir correções de ordem maior na Lagrangiana de Maxwell.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta tese, o valor experimental da energia de ionização do átomo de hidrogênio e a seção de choque da primeira observação do espalhamento elástico $\gamma\gamma$ foram usadas para vincular os parâmetros de generalizações não lineares da eletrodinâmica de Maxwell. Para vincular o parâmetro b que caracteriza as eletrodinâmicas tipo Born-Infeld, foi investigado como estas modificam o potencial Coulombiano produzido pelo núcleo do átomo de hidrogênio. Usando a teoria de perturbação independente do tempo, a primeira correção à energia de ionização foi calculada. Devido à estrutura da teoria da perturbação, foi necessário levar em conta a Lagrangiana completa de cada uma das teorias. Como consequência disto, cada teoria corrige de forma distinta a energia de ionização apesar de possuírem o mesmo comportamento no limite de baixas energias. Estas correções tem como resultado diminuir a energia de ligação entre o elétron e o núcleo, resultado compatível com a interpretação clássica da polarização do vácuo estar blindando o núcleo.

Os vínculos obtidos para as eletrodinâmicas de Born-Infeld, exponencial e logarítmica foram $b_{BI} > 1.07 \times 10^{21} \text{ V m}^{-1}$, $b_l > 6.76 \times 10^{20} \text{ V m}^{-1}$ e $b_e > 6.34 \times 10^{20} \text{ V m}^{-1}$, respectivamente [52]. Quando comparado com a estimativa feita por Born e Infeld - privilegiando as propriedades do elétron -, ganhamos uma ordem de grandeza de precisão. Por outro lado, quando comparado com o vínculo obtido por Soff *et al*, o vínculo deles é mais preciso por uma ordem de grandeza [57]. Porém, como foi notado recentemente, a derivação deste vínculo por estes autores é questionável [12]. Finalmente, apesar do vínculo para a teoria de Born-Infeld usando medições do espalhamento fóton-fóton produzir 6 ordens de grandeza a mais de precisão, o procedimento teórico, usando o átomo de hi-

drogênio, é muito mais simples. Além disto, tem a vantagem de ser facilmente adaptável a outras generalizações da eletrodinâmica de Maxwell.

A observação do espalhamento fóton-fóton, por se tratar de um experimento que explora regimes de altas energias, onde a teoria clássica passa a divergir da teoria mais completa, permitiu vincular correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell de forma bastante precisa. Para calcular a seção de choque elástica $\gamma\gamma$ medida pela Colaboração ATLAS em colisões ultraperiféricas de íons de chumbo, fizemos uso da aproximação de fótons equivalentes. Desta forma, os íons foram tratados como fontes de fótons energéticos descritos por uma distribuição ou número de fótons equivalentes. A seção de choque entre dois dos fótons emitidos pelos íons possui contribuições tanto daquelas vindas do Modelo Padrão - em primeira ordem através de um loop de partículas carregadas - como das correções não lineares da Lagrangiana de Maxwell. Assim, a convolução do número de fótons equivalente com esta seção de choque, impondo os cortes necessários, é igual à seção de choque $\gamma\gamma$ em colisões ultraperiféricas. Desta forma, ao comparar esta seção de choque com aquela obtida experimentalmente pelo ATLAS, foi possível vincular os parâmetros α e β que caracterizam as correções não lineares. Como a seção de choque elástica para um par de fótons devido às correções não lineares tem uma dependência quadrática nos parâmetros, foi possível restringir completamente o espaço de fase correspondente. Além disto, os vínculos foram obtidos usando 4 distribuições de carga do íon de chumbo distintas. Como resultado particular, recuperamos o vínculo obtido em [14] para o parâmetro de Born-Infeld.

Os parâmetros α e β foram vinculados de tal forma que $\alpha \sim \beta \lesssim 2 \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-4} \approx 10^{-47} \text{ m}^3 \text{ J}^{-1}$ [88]. Até o presente momento são os vínculos mais precisos para as correções não lineares da eletrodinâmica de Maxwell. Quando comparado com o vínculo da eletrodinâmica de Born-Infeld obtido em [57], obtemos uma precisão de 12 ordens de grandeza a mais. Por outro lado, de resultados obtidos a partir de experimentos de baixas energias que medem o fenômeno de birrefringência e do Lamb Shift [33], obtemos um aumento da precisão de até 20 ordens de grandeza.

Futuras análises, que aproveitem os esquemas desenvolvidos neste trabalho, podem ser realizadas. Em particular, o espalhamento fóton-fóton deve se capaz de vincular de forma precisa outros tipos de generalizações da eletrodinâmica de Maxwell que ma-

nifestem seus efeitos em regimes de altas energias como, por exemplo, a eletrodinâmica de Podolsky. Além disto, devido à crescente precisão experimental e energias envolvidas, correções *next-to-leading order* devem ser estudadas. Finalmente, partículas ainda não detectadas que se acoplem ao fóton devem contribuir para o espalhamento fóton-fóton. Desta forma, o espalhamento fóton-fóton se torna uma forma elegante de sondar o vácuo quântico. A exemplo de partículas tipo axions [110, 111], a medição do ATLAS permite impor vínculos sobre teorias nas quais novas partículas carregadas sejam previstas.

Referências Bibliográficas

- 1 MAXWELL, J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society, v. 155, n. 0, p. 459–512, jan 1865. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008>>.
- 2 BINGER, J. et al. Review of particle physics. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 1, p. –, jul 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.86.010001>>.
- 3 PROCA, A. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, EDP Sciences, v. 7, n. 8, p. 347–353, 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jphysrad:0193600708034700>>.
- 4 BOPP, F. Eine lineare Theorie des Elektrons. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 430, n. 5, p. 345–384, 1940. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19404300504>>.
- 5 PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part i—non-quantum. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 62, n. 1-2, p. 68–71, jul 1942. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.62.68>>.
- 6 BATTESTI, R.; RIZZO, C. Magnetic and electric properties of a quantum vacuum. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 76, n. 1, p. 016401, dec 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/1/016401>>.
- 7 BIALYNICKI-BIRULA, I. Nonlinear electrodynamics: Variations on a theme by Born and Infeld. 1984.
- 8 FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 163, n. 1-4, p. 123–130, nov 1985. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90205-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90205-9)>.
- 9 BERGSHOEFF, E. et al. The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 188, n. 1, p. 70–74, apr 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90707-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90707-6)>.
- 10 SOLENG, H. H. Charged black points in general relativity coupled to the logarithmic U(1) gauge theory. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 52, n. 10, p. 6178–6181, nov 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.52.6178>>.
- 11 HENDI, S. Asymptotic Reissner–Nordström black holes. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 333, p. 282–289, jun 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aop.2013.03.008>>.

- 12 CARLEY, H.; KIESSLING, M. K.-H. Nonperturbative calculation of Born-Infeld effects on the Schrödinger spectrum of the hydrogen atom. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 3, p. –, jan 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.030402>>.
- 13 AABOUD, M. et al. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC. *Nature Physics*, Springer Nature, v. 13, n. 9, p. 852–858, aug 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys4208>>.
- 14 ELLIS, J.; MAVROMATOS, N. E.; YOU, T. Light-by-light scattering constraint on Born-Infeld theory. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 118, n. 26, p. –, jun 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.261802>>.
- 15 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *Notes for a Course on Classical Fields*. IFT-UNESP, 2012. Disponível em: <<http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/ClassiFields.pdf>>.
- 16 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 1108420419. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Introduction-Electrodynamics-David-J-Griffiths/dp/1108420419>>.
- 17 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. *The Classical Theory of Fields: Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)*. Butterworth-Heinemann, 1980. ISBN 0750627689. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Classical-Theory-Fields-Theoretical-Physics/dp/0750627689>>.
- 18 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998. ISBN 047130932X. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Classical-Electrodynamics-Third-David-Jackson/dp/047130932X>>.
- 19 FEYNMAN, R. P. *Lições de Física de Feynman - 4 Volumes*. Bookman, 2008. ISBN 8577802590. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Li%C3%A7%C3%A3o-F%C3%A9nomeno-Portuguese/dp/8577802590>>.
- 20 VANDERLINDE, J. *Classical Electromagnetic Theory (Fundamental Theories of Physics)*. Springer, 2005. ISBN 9781402026997. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Classical-Electromagnetic-Fundamental-Theories-Physics/dp/1402026994>>.
- 21 AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Thermodynamics of a photon gas in nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 738, p. 317–322, nov 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.10.003>>.
- 22 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 117, n. 778, p. 610–624, feb 1928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>>.
- 23 HALPERN, O. Scattering processes produced by electrons in negative energy states. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 44, n. 10, p. 855–856, nov 1933. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.44.855.2>>.

- 24 HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. *Zeitschrift für Physik*, Springer Nature, v. 98, n. 11-12, p. 714–732, nov 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/bf01343663>>.
- 25 BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 144, n. 852, p. 425–451, mar 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059>>.
- 26 BORN, M.; INFELD, L. On the quantization of the new field equations. i. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 147, n. 862, p. 522–546, dec 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0234>>.
- 27 BOILLAT, G. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 11, n. 3, p. 941–951, mar 1970. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1665231>>.
- 28 MANSURIPUR, M. The Faraday effect. *Optics and Photonics News*, The Optical Society, v. 10, n. 11, p. 32, nov 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1364/opn.10.1100032>>.
- 29 LANDAU, L. D.; PITAEVSKII, L. P.; LIFSHITZ, E. *Electrodynamics of Continuous Media: Volume 8 (Course of Theoretical Physics S)*. Butterworth-Heinemann, 1984. ISBN 0750626348. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Electrodynamics-Continuous-Media-Theoretical-Physics/dp/0750626348>>.
- 30 CADÈNE, A. et al. Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at $\lambda=1064\text{nm}$. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 88, n. 4, oct 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physreva.88.043815>>.
- 31 VALLE, F. D. et al. First results from the new PVLAS apparatus: A new limit on vacuum magnetic birefringence. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 90, n. 9, p. –, nov 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.90.092003>>.
- 32 CADÈNE, A. et al. Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: status of the BMV experiment. *The European Physical Journal D*, Springer Nature, v. 68, n. 1, p. –, jan 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-40725-9>>.
- 33 FOUCHÉ, M.; BATTESTI, R.; RIZZO, C. Limits on nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 9, p. –, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.93.093020>>.
- 34 SHABAD, A. E.; USOV, V. V. Effective lagrangian in nonlinear electrodynamics and its properties of causality and unitarity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 83, n. 10, may 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.83.105006>>.
- 35 HOFFMANN, B. Gravitational and electromagnetic mass in the Born-Infeld electrodynamics. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 47, n. 11, p. 877–880, jun 1935. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.47.877>>.

- 36 ALTSHULER, B. L. An alternative way to inflation and the possibility of anti-inflation. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 7, n. 2, p. 189–201, feb 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/2/012>>.
- 37 GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. Finite field-energy and interparticle potential in logarithmic electrodynamics. *The European Physical Journal C*, Springer Nature, v. 74, n. 3, p. –, mar 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1312.5157>>.
- 38 GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. Remarks on nonlinear electrodynamics. *The European Physical Journal C*, Springer Nature, v. 74, n. 11, p. –, nov 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1408.3363>>.
- 39 BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Informa UK Limited, v. 26, n. 151, p. 1–25, jul 1913. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786441308634955>>.
- 40 WAERDEN, B. L. van der. *Sources of Quantum Mechanics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2007. ISBN 048645892X. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Sources-Quantum-Mechanics-Dover-Physics/dp/048645892X>>.
- 41 EISBERG, R.; RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. John Wiley & Sons, 1985. ISBN 047187373X. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Quantum-Physics-Molecules-Solids-Particles/dp/047187373X>>.
- 42 BROGLIE, L. D. Recherches sur la théorie des quanta. *Annales de Physique*, EDP Sciences, v. 10, n. 3, p. 22–128, 1925. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/anphys/192510030022>>.
- 43 THOMSON, G. P.; REID, A. Diffraction of cathode rays by a thin film. *Nature*, Springer Nature, v. 119, n. 3007, p. 890–890, jun 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/119890a0>>.
- 44 DAVISSON, C.; GERMER, L. H. The scattering of electrons by a single crystal of nickel. *Nature*, Springer Nature, v. 119, n. 2998, p. 558–560, apr 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/119558a0>>.
- 45 ZETTILI, N. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley, 2009. ISBN 0470026790. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Quantum-Mechanics-Applications-Nouredine-Zettilli/dp/0470026790>>.
- 46 DIRAC, P. A. M. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press (CUP), v. 35, n. 03, p. 416, jul 1939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/s0305004100021162>>.
- 47 ANDERSON, C. D. The positive electron. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 43, n. 6, p. 491–494, mar 1933. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.43.491>>.
- 48 SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics, 2nd Edition*. Plenum Press, 2011. ISBN 9780306447907. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Principles-Quantum-Mechanics-2nd-Shankar/dp/0306447908>>.

- 49 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2016. ISBN 9781107179868. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Introduction-Quantum-Mechanics-David-Griffiths/dp/1107179866>>.
- 50 EIDES, M. I.; GROTCHE, H.; SHELYUTO, V. A. Theory of light hydrogenlike atoms. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 342, n. 2-3, p. 63–261, feb 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0370-1573\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(00)00077-6)>.
- 51 KRAMIDA, A. A critical compilation of experimental data on spectral lines and energy levels of hydrogen, deuterium, and tritium. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Elsevier BV, v. 96, n. 6, p. 586–644, nov 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.adt.2010.05.001>>.
- 52 AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Constraining Born–Infeld-like nonlinear electrodynamics using hydrogen’s ionization energy. *The European Physical Journal C*, Springer Nature, v. 78, n. 2, p. –, feb 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5643-1>>.
- 53 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2007. ISBN 0123736374. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Table-Integrals-Products-Alan-Jeffrey-ebook/dp/B00ZABXV6E>>.
- 54 HELLER, G.; MOTZ, L. Averages over portions of configuration space. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 46, n. 6, p. 502–505, sep 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.46.502>>.
- 55 OLIVE, K. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, IOP Publishing, v. 38, n. 9, p. 090001, aug 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001>>.
- 56 MOHR, P. J.; NEWELL, D. B.; TAYLOR, B. N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, AIP Publishing, v. 45, n. 4, p. 043102, dec 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4954402>>.
- 57 SOFF, G.; RAFELSKI, J.; GREINER, W. Lower bound to limiting fields in nonlinear electrodynamics. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 7, n. 3, p. 903–907, mar 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physreva.7.903>>.
- 58 DÁVILA, J. M.; SCHUBERT, C.; TREJO, M. A. Photonic processes in Born–Infeld theory. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 30, p. 1450174, dec 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/s0217751x14501747>>.
- 59 WEINBERG, S. The search for unity: Notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, The MIT Press, v. 106, n. 4, p. 17–35, 1977. ISSN 00115266. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/20024506>>.
- 60 DIRAC, P. A. M. A theory of electrons and protons. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 126, n. 801, p. 360–365, jan 1930. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0013>>.

- 61 SCHROEDER, D. V.; PESKIN, M. E. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [s.n.], 2005. ISBN 8187169524. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Introduction-Quantum-Field-Theory/dp/8187169524>>.
- 62 AITCHISON, I. J. R.; HEY, A. J. G. *Gauge Theories in Particle Physics, Vol. 1: From Relativistic Quantum Mechanics to QED, 3rd Edition*. CRC Press, 2002. ISBN 0750308648. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Gauge-Theories-Particle-Physics-Vol/dp/0750308648>>.
- 63 HUANG, K. *Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals*. Wiley-VCH, 2010. ISBN 9783527408467. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Quantum-Field-Theory-Operators-Integrals/dp/3527408460>>.
- 64 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. Springer, 2013. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Field-Quantization-Walter-Greiner-ebook/dp/B00HWV1XZG>>.
- 65 NEVELS, R.; SHIN, C.-S. Lorenz, Lorentz, and the gauge. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 43, n. 3, p. 70–71, jun 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/74.934904>>.
- 66 GUPTA, S. N. Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, IOP Publishing, v. 63, n. 7, p. 681–691, jul 1950. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0370-1298/63/7/301>>.
- 67 BLEULER, K. Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen. *Helvetica Physica Acta*, Birkhäuser, v. 63, n. 7, p. 567–586, 1950. Disponível em: <<http://retro.seals.ch/digbib/view?pid=hpa-001:1950:23::949>>.
- 68 EULER, H. Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 418, n. 5, p. 398–448, 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19364180503>>.
- 69 AKHIEZER, A. I.; BERESTETSKY, V. B. *Quantum Electrodynamics*. Interscience Publishers, 1965. ISBN 0470018488. Disponível em: <<https://www.amazon.com/QUANTUM-ELECTRODYNAMICS-I-Berestetsky-Akhiezer/dp/0470018488>>.
- 70 KARPLUS, R.; NEUMAN, M. Non-linear interactions between electromagnetic fields. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 80, n. 3, p. 380–385, nov 1950. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.80.380>>.
- 71 JAUCH, J. M.; ROHRLICH, F. *The Theory of Photons and Electrons*. Springer Verlag, 1980. ISBN 0387072950. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Electrons-Relativistic-Particles-One-half-Monographs/dp/0387072950>>.
- 72 LIFSHITZ, E. M.; BERESTETSKI, V. B.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics (Course of Theoretical Physics, Vol. 4) (Volume 4)*. Pergamon, 1982. ISBN 0080265049. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Quantum-Electrodynamics-Course-Theoretical-Physics/dp/0080265049>>.

- 73 KARPLUS, R.; NEUMAN, M. The scattering of light by light. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 83, n. 4, p. 776–784, aug 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.83.776>>.
- 74 BOGOLIUBOV, N.; SHIRKOV, N. *Introduction To the Theory of Quantized Fields*. Interscience Publishers, 1959. ISBN 0470086130. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Introduction-Theory-Quantized-Fields-Bogoliubov/dp/0470086130>>.
- 75 ZUBER, J.-B.; ITZYKSON, C. *Quantum Field Theory (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2006. ISBN 0486445682. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Quantum-Field-Theory-Dover-Physics/dp/0486445682>>.
- 76 DYCK, R. S. V.; SCHWINBERG, P. B.; DEHMELT, H. G. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 1, p. 26–29, jul 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.59.26>>.
- 77 BROWN, H. N. et al. Precise measurement of the positive muon anomalous magnetic moment. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 11, p. 2227–2231, mar 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.2227>>.
- 78 MILSTEIN, A.; SCHUMACHER, M. Present status of Delbrück scattering. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 243, n. 4, p. 183–214, jul 1994. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)00058-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)00058-1)>.
- 79 ABBAS, E. et al. Charmonium and e^+e^- pair photoproduction at mid-rapidity in ultra-peripheral Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$. *The European Physical Journal C*, Springer Nature, v. 73, n. 11, nov 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2617-1>>.
- 80 CHATRCHYAN, S. et al. Exclusive $\gamma\gamma \rightarrow \mu + \mu^-$ production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$. *Journal of High Energy Physics*, Springer Nature, v. 2012, n. 1, jan 2012. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/jhep01\(2012\)052](https://doi.org/10.1007/jhep01(2012)052)>.
- 81 CHATRCHYAN, S. et al. Study of exclusive two-photon production of $w+w^-$ in pp collisions at $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$ and constraints on anomalous quartic gauge couplings. *Journal of High Energy Physics*, Springer Nature, v. 2013, n. 7, jul 2013. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/jhep07\(2013\)116](https://doi.org/10.1007/jhep07(2013)116)>.
- 82 ABELEV, B. et al. Coherent J/ψ photoproduction in ultra-peripheral pb-pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 718, n. 4-5, p. 1273–1283, jan 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.11.059>>.
- 83 LUNDSTRÖM, E. et al. Using high-power lasers for detection of elastic photon-photon scattering. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 8, mar 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.083602>>.
- 84 MIKAElian, K. O. Detection of elastic light-by-light scattering at SLAC. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 115, n. 3, p. 267–269, sep 1982. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90660-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90660-8)>.

- 85 BRODIN, G.; MARKLUND, M.; STENFLO, L. Proposal for detection of QED vacuum nonlinearities in maxwell's equations by the use of waveguides. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 87, n. 17, oct 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.171801>>.
- 86 CHATRCHYAN, S. et al. Search for exclusive or semi-exclusive $\gamma\gamma$ production and observation of exclusive and semi-exclusive e^+e^- production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$. *Journal of High Energy Physics*, Springer Nature, v. 2012, n. 11, nov 2012. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/jhep11\(2012\)080](https://doi.org/10.1007/jhep11(2012)080)>.
- 87 D'ENTERRIA, D.; SILVEIRA, G. G. da. Observing light-by-light scattering at the large hadron collider. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 111, n. 8, p. –, aug 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.111.080405>>.
- 88 AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. *Constraining nonlinear corrections to Maxwell electrodynamics using $\gamma\gamma$ scattering*. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1809.01296>>.
- 89 BAUR, G.; FILHO, L. Coherent particle production at relativistic heavy-ion colliders including strong absorption effects. *Nuclear Physics A*, Elsevier BV, v. 518, n. 4, p. 786–800, nov 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0375-9474\(90\)90191-n](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90191-n)>.
- 90 BUDNEV, V. et al. The two-photon particle production mechanism. physical problems. applications. equivalent photon approximation. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 15, n. 4, p. 181–282, jan 1975. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(75\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(75)90009-5)>.
- 91 BAUR, G.; FILHO, L. Charge form-factor effects in $\gamma\gamma$ production of non-strongly interacting particles in relativistic heavy-ion collisions. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 254, n. 1-2, p. 30–34, jan 1991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90390-c](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90390-c)>.
- 92 BAUR, G. Coherent $\gamma\gamma$ and $\gamma\alpha$ interactions in very peripheral collisions at relativistic ion colliders. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 364, n. 5, p. 359–450, jul 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0370-1573\(01\)00101-6](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(01)00101-6)>.
- 93 CAHN, R. N.; JACKSON, J. D. Realistic equivalent-photon yields in heavy-ion collisions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 42, n. 11, p. 3690–3695, dec 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevd.42.3690>>.
- 94 LYTH, D. H. The equivalent photon approximation. *Le Journal de Physique Colloques*, EDP Sciences, v. 35, n. C2, p. C2–113–C2–114, mar 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jphyscol:1974215>>.
- 95 BAUR, G.; HENCKEN, K.; TRAUTMANN, D. Photon-photon physics in very peripheral collisions of relativistic heavy ions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 24, n. 9, p. 1657–1691, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0954-3899/24/9/003>>.

- 96 GREIDER, K. R. Reactions between complex nuclei. *Annual Review of Nuclear Science*, Annual Reviews, v. 15, n. 1, p. 291–324, dec 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.ns.15.120165.001451>>.
- 97 TAYLOR, J. R. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005. ISBN 189138922X. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Classical-Mechanics-John-R-Taylor/dp/189138922X>>.
- 98 KŁUSEK-GAWENDA, M.; SZCZUREK, A. Exclusive muon-pair production in ultrarelativistic heavy-ion collisions: Realistic nucleus charge form factor and differential distributions. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 1, p. –, jul 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevc.82.014904>>.
- 99 BARRETT, R. C.; JACKSON, D. F. *Nuclear Sizes and Structure (International Series of Monographs on Physics)*. Clarendon Pr, 1977. ISBN 0198512724. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Nuclear-Structure-International-Monographs-Physics/dp/0198512724>>.
- 100 BURLESON, G. R.; HOFSTADTER, R. High-energy electron scattering from lithium-6. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 112, n. 4, p. 1282–1286, nov 1958. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.112.1282>>.
- 101 RAVENHALL, D. G.; YENNIE, D. R. Results of a phase shift calculation of high-energy electron scattering. *Physical Review*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 1, p. 239–240, oct 1954. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrev.96.239>>.
- 102 MAXIMON, L.; SCHRACK, R. The form factor of the Fermi model spatial distribution. *Journal of Research of the National Bureau of Standards Section B Mathematics and Mathematical Physics*, National Institute of Standards and Technology (NIST), v. 70B, n. 1, p. 85, jan 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.6028/jres.070b.007>>.
- 103 HENCKEN, K.; TRAUTMANN, D.; BAUR, G. Electromagnetic electron-positron pair production in heavy-ion collisions with impact parameter zero. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 49, n. 3, p. 1584–1596, mar 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physreva.49.1584>>.
- 104 ALISON, J. *Road to Discovery: Detector Alignment, Electron Identification, Particle Misidentification, W Physics, and the Discovery of the Higgs Boson*. Tese (Doutorado) — Pennsylvania, 2012. Disponível em: <http://www.hep.upenn.edu/~johnda/Papers/alison_thesis_versionForPennNew2.pdf>.
- 105 AGOSTINELLI, S. et al. Geant4—a simulation toolkit. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier BV, v. 506, n. 3, p. 250–303, jul 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0168-9002\(03\)01368-8](https://doi.org/10.1016/s0168-9002(03)01368-8)>.
- 106 KŁUSEK-GAWENDA, M.; LEBIEDOWICZ, P.; SZCZUREK, A. Light-by-light scattering in ultraperipheral Pb-Pb collisions at energies available at the CERN large

hadron collider. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 4, p. –, apr 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevc.93.044907>>.

107 HAHN, T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Computer Physics Communications*, Elsevier BV, v. 140, n. 3, p. 418–431, nov 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9)>.

108 HAHN, T.; PÉREZ-VICTORIA, M. Automated one-loop calculations in four and d dimensions. *Computer Physics Communications*, Elsevier BV, v. 118, n. 2-3, p. 153–165, may 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(98\)00173-8](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(98)00173-8)>.

109 ALLOUL, A. et al. FeynRules 2.0 — a complete toolbox for tree-level phenomenology. *Computer Physics Communications*, Elsevier BV, v. 185, n. 8, p. 2250–2300, aug 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2014.04.012>>.

110 KNAPEN, S. et al. Searching for axionlike particles with ultraperipheral heavy-ion collisions. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 118, n. 17, p. –, apr 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.171801>>.

111 BALDENEGRO, C. et al. Searching for axion-like particles with proton tagging at the LHC. *Journal of High Energy Physics*, Springer Nature, v. 2018, n. 6, p. –, jun 2018. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/jhep06\(2018\)131](https://doi.org/10.1007/jhep06(2018)131)>.

Apêndice A

Solução aproximada das integrais da eletrodinâmica exponencial

Neste apêndice, obtemos uma solução aproximada para as integrais que surgem no Capítulo 4 ao aplicar a teoria de perturbação para encontrar a correção à energia de ionização do átomo de hidrogênio na eletrodinâmica exponencial. A expressão que desejamos calcular é

$$I = I_1 - I_2 - 2I_3 - 2I_4,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)}, \\ I_2 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x}, \\ I_3 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x e^{-2x}, \\ I_4 &= \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x^2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

A função $W(x)$ é chamada de função Lambert ou produto logaritmo e é definida pela relação $W(ze^z) = z$. Ela é monotonicamente crescente para valores positivos de seu argumento, sendo $W(0) = 0$ na origem.

A.1 Integral I_1

Analisamos a integral

$$I_1 = \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)}.$$

Usando as propriedades da função W de Lambert, a seguinte substituição é padrão,

$$\begin{aligned} ue^u &= \frac{\varepsilon^4}{x^4}, \\ x &= \varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}, \\ dx &= -\frac{\varepsilon}{4} \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{u}{4}}. \end{aligned}$$

Como todas as outras integrais lidam com a mesma função de Lambert, a mesma substituição será usada repetidamente. Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{4} \int_0^\infty \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) u^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{4}}, \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \int_0^\infty \left(u^{-\frac{3}{4}} + u^{\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{u}{4}}, \\ &= \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4} \int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{4}-1} + 4u^{\frac{5}{4}-1}\right) e^{-u} du, \\ &= \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + 4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right], \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

onde foram usadas a definição da função gama $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ e a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

A.2 Integral I_2

Analisamos a integral dada por

$$I_2 = \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x}.$$

Devido à presença da exponencial e^{-2x} nesta e nas próximas variáveis, a substituição de variável $\frac{\varepsilon^4}{x^4} = ue^u$ vai dar origem a uma exponencial de outra exponencial. Isto dificulta a obtenção de uma solução analítica e por causa disto é necessário seguir por aproximação. A expansão em série de potências da função Lambert W em torno da origem é

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \dots,$$

$$\sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} = \frac{\varepsilon^2}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^6}{x^6} + \frac{5}{8}\frac{\varepsilon^{10}}{x^{10}} + \dots$$

Isto mostra que para $x \gg \varepsilon$, é possível truncar esta série. Como o parâmetro é pelo menos da ordem $\varepsilon \sim 10^{-4} \ll 1$, então o primeiro termo da expansão constitui uma excelente aproximação para a série no intervalo $[1, \infty)$. Mais ainda, como queremos calcular apenas correções até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$, a série pode ser truncada a partir do segundo termo. Desta forma, para poder fazer uso desta aproximação, separamos a integral em dois intervalos, de $[0, 1]$ e de $[1, \infty)$. Este procedimento também será usado as outras 2 integrais restantes.

Assim, temos que

$$I_2 = \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x},$$

$$= \int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} + \int_1^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x},$$

$$\approx \underbrace{\int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x}}_{A_2} + \varepsilon^2 \underbrace{\int_1^\infty dx \frac{e^{-2x}}{x^2}}_{B_2}.$$

Resolvemos primeiro a integral B_2 ,

$$B_2 = \int_1^\infty dx \frac{e^{-2x}}{x^2},$$

$$= 2 \int_2^\infty dx x^{-1-1} e^{-x},$$

$$= 2\Gamma(-1, 2),$$

onde $\Gamma(z, x) \equiv \int_y^\infty dy y^{z-1} e^{-y}$ é a função gama incompleta. Finalmente, fazendo uso da

propriedade $\Gamma(s+1, x) = s\Gamma(s, x) + x^s e^{-x}$ reescrevemos B_2 como

$$B_2 = \frac{1}{e^2} - 2\Gamma(0, 2).$$

Para resolver a integral A_2 , é feita a substituição de variável,

$$\begin{aligned} ue^u &= \frac{\varepsilon^4}{x^4}, \\ x &= \varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}, \\ dx &= -\frac{\varepsilon}{4} \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}} \right) e^{-\frac{u}{4}}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{\varepsilon}{4} \int_{\infty}^{W(\varepsilon^4)} \left(u^{-\frac{3}{4}} + u^{\frac{1}{4}} \right) e^{-\frac{u}{4}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}} \\ &\approx \frac{\varepsilon}{4} \int_{\varepsilon^4}^{\infty} \left(u^{-\frac{3}{4}} + u^{\frac{1}{4}} \right) e^{-\frac{u}{4}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}}, \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \int_{\varepsilon^4}^{\infty} \left(u^{-\frac{3}{4}} + u^{\frac{1}{4}} \right) e^{-\frac{u}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}} \right)^n, \end{aligned}$$

onde aproximamos $W(\varepsilon^4) \approx \varepsilon^4$ e expandimos em séries de potências a exponencial de exponencial. Mantemos o termo $e^{-\frac{u}{4}}$ pois assegura a convergência da integral no limite $u \rightarrow \infty$ quando $n = 0$. Poderíamos supor que somente os termos $n = 0, 1, 2$ e 3 devem contribuir para a solução pois assim gerariam correções até ordem 4. Porém, devido à dependência do limite inferior, há uma contribuição da ordem de ε^2 para todos os valores de n . Retirando todos os termos que não dependam de u de dentro da integral obtemos,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \int_{\varepsilon^4}^{\infty} \left(u^{-\frac{n+3}{4}} + u^{-\frac{n-1}{4}} \right) e^{-\frac{n+1}{4}u}, \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \varepsilon^{1-n} \left[\varepsilon^4 \operatorname{Ei}_{\frac{n-1}{4}} \left(\frac{n+1}{4} \varepsilon^4 \right) + \operatorname{Ei}_{\frac{n+3}{4}} \left(\frac{n+1}{4} \varepsilon^4 \right) \right], \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\varepsilon^6 \operatorname{Ei}_{\frac{n-1}{4}} \left(\frac{n+1}{4} \varepsilon^4 \right) + \varepsilon^2 \operatorname{Ei}_{\frac{n+3}{4}} \left(\frac{n+1}{4} \varepsilon^4 \right) \right], \end{aligned}$$

onde $\operatorname{Ei}_n(x) \equiv \int_1^{\infty} e^{-xt} / t^n dt$ é a função exponencial integral. Expandindo as funções

integrais e mantendo somente as potências de ε relevantes, obtemos

$$\begin{aligned} A_2 &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\frac{4}{n-1} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n-5}{4}} \Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right) \varepsilon^{n+1} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\frac{4}{n-1} \varepsilon^2 + 2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n-5}{4}} \Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right) \varepsilon^{n+1} \right], \end{aligned}$$

onde fica claro que para todos os valores de n obtemos correções de ε^2 . Para $n = 0$ obtemos uma correção de ordem ε . Para $n = 1$, os dois termos divergem por separado mas juntos se compensam. Isto pode ser visto expandindo a função $\Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right)$ em torno de $n = 1$,

$$\Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right) = -\frac{4}{n-1} - \gamma_E + O(n-1).$$

Assim, calculando os termos $n = 0, 1$, a série proporcional a ε^2 e as correções de ordem ε^3 e ε^4 ,

$$\begin{aligned} A_2 &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon - \varepsilon^2}_{n=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \gamma_E - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon^4}{2}\right) \varepsilon^2}_{n=1} \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \left(\frac{1}{n-1} \right) + \sum_{n=2}^3 \frac{(-2)^n}{4n!} \left(2^{\frac{3}{2}-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n-5}{4}} \Gamma\left(\frac{1-n}{4}\right) \varepsilon^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Uma situação semelhante ocorre nas próximas duas integrais. Finalmente, calculando as somatórias restantes temos que,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon - \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_E - 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon^4}{2} \right) \varepsilon^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{e^2} - 1 + 2\gamma_E - 2 \operatorname{Ei}(-2) + \ln 4 \right) + \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon + \left(\frac{5}{2} \gamma_E - 3 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \ln 8\varepsilon^4 - 2 \operatorname{Ei}(-2) \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Desta forma, a solução aproximada da integral I_2 é dada pela soma das integrais $A_2 + \varepsilon^2 B_2$,

$$I_2 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \varepsilon + \left(\frac{5}{2} \gamma_E - 3 + \frac{1}{2} \ln 8\varepsilon^4 - 2 \operatorname{Ei}(-2) - 2\Gamma(0, 2) \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4.$$

A.3 Integral I_3

Analisamos a integral

$$I_3 = \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x$$

A resolução desta integral segue passos semelhantes à anterior. Separamos a integral nos intervalos de $[0, 1]$ e de $[1, \infty)$. Em seguida, aproximamos a função Lambert pelo seu primeiro termo da expansão em série de potências no segundo intervalo,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x e^{-2x} + \int_1^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x, \\ &\approx \underbrace{\int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} x e^{-2x}}_{A_3} + \varepsilon^2 \underbrace{\int_1^\infty dx \frac{e^{-2x}}{x}}_{B_3}. \end{aligned}$$

Para resolver B_3 , manipulamos para obter a forma da representação da função gama incompleta,

$$\begin{aligned} B_3 &= \int_2^\infty dx x^{0-1} e^{-x}, \\ &= \Gamma(0, 2). \end{aligned}$$

Para a integral A_3 , realizamos a substituição de variáveis padrão,

$$\begin{aligned} ue^u &= \frac{\varepsilon^4}{x^4}, \\ x &= \varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}, \\ dx &= -\frac{\varepsilon}{4} \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{u}{4}}, \end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\frac{\varepsilon^2}{4} \int_{\infty}^{W(\varepsilon^4)} (u^{-1} + 1) e^{-\frac{u}{2}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}}} e^{-\frac{u}{4}} \\
&\approx \frac{\varepsilon^2}{4} \int_{\varepsilon^4}^{\infty} (u^{-1} + 1) e^{-\frac{u}{2}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}}} e^{-\frac{u}{4}}, \\
&= \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \int_{\varepsilon^4}^{\infty} (u^{-1} + 1) u^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{(n+2)}{4}u} du,
\end{aligned}$$

onde foi expandida a segunda exponencial em série de potências. A integral em u tem novamente solução termos da função exponencial integral,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \varepsilon^{-n} \left[\varepsilon^4 \text{Ei}_{\frac{n}{4}} \left(\frac{n+2}{4} \varepsilon^4 \right) + \text{Ei}_{\frac{n}{4}+1} \left(\frac{n+2}{4} \varepsilon^4 \right) \right], \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\varepsilon^6 \text{Ei}_{\frac{n}{4}} \left(\frac{n+2}{4} \varepsilon^4 \right) + \varepsilon^2 \text{Ei}_{\frac{n}{4}+1} \left(\frac{n+2}{4} \varepsilon^4 \right) \right].
\end{aligned}$$

Em seguida expandimos as funções exponencial integral em série de potências. É importante notar que o termo $n = 0$ de cada série diverge por separado mas, como no caso anterior, o limite da soma dos dois é bem comportado. Mais uma vez, temos contribuições de ordem ε^2 para todos os valores de n . Assim, temos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\frac{4}{n} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6) \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[2^{1-\frac{n}{2}} (2+n)^{\frac{n}{4}-1} \Gamma\left(-\frac{n}{4}\right) \varepsilon^{2+n} \right], \\
&\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\frac{4}{n} \varepsilon^2 + 2^{1-\frac{n}{2}} (2+n)^{\frac{n}{4}-1} \Gamma\left(-\frac{n}{4}\right) \varepsilon^{2+n} \right], \\
&= \underbrace{\frac{1}{4} \left(2 - \gamma_E - \ln \frac{\varepsilon^4}{2} \right) \varepsilon^2}_{n=0} + \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4, \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \gamma_E - \frac{1}{4} \ln 8 \varepsilon^4 + \text{Ei}(-2) \right) \varepsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Finalmente, adicionando as integrais $A_3 + \varepsilon^3 B_3$ obtemos,

$$I_3 \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \gamma_E - \frac{1}{4} \ln 8 \varepsilon^4 + \text{Ei}(-2) + \Gamma(0, 2) \right) \varepsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2} 3^{\frac{3}{4}}} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4.$$

A.4 Integral I_4

Analisamos a integral

$$I_4 = \int_0^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x^2.$$

Mais uma vez fazemos a separação da integral nos intervalos de $[0, 1]$ e de $[1, \infty)$ e aproximamos a função Lambert pelo primeiro termo de sua expansão em série de potências no segundo intervalo,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x^2 + \int_1^\infty dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x^2, \\ &\approx \int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x^2 + \varepsilon^2 \int_1^\infty dx e^{-2x}, \\ &= \underbrace{\int_0^1 dx \sqrt{W\left(\frac{\varepsilon^4}{x^4}\right)} e^{-2x} x^2}_{A_4} + \underbrace{\varepsilon^2 \frac{1}{2e^2}}_{B_4}. \end{aligned}$$

Seguimos o mesmo procedimento para a integral A_4 fazendo a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} ue^u &= \frac{\varepsilon^4}{x^4}, \\ x &= \varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}, \\ dx &= -\frac{\varepsilon}{4} \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{u}{4}}, \end{aligned}$$

obtendo assim,

$$\begin{aligned} A_4 &= -\frac{\varepsilon^3}{4} \int_\infty^{W(\varepsilon^4)} \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{3u}{4}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}}, \\ &\approx \frac{\varepsilon^3}{4} \int_{\varepsilon^4}^\infty \left(u^{-\frac{5}{4}} + u^{-\frac{1}{4}}\right) e^{-\frac{3u}{4}} e^{-2\varepsilon u^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{4}}}, \\ &= \frac{\varepsilon^3}{4} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \int_{\varepsilon^4}^\infty \left(u^{-\frac{n+5}{4}} + u^{-\frac{n+1}{4}}\right) e^{-\left(\frac{n+3}{4}\right)u}. \end{aligned}$$

Escrevendo a solução da integral em termos de funções exponencial integral,

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{\varepsilon^3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \varepsilon^n \varepsilon^{-1-n} \left[\varepsilon^4 \operatorname{Ei}_{\frac{n+1}{4}} \left(\frac{n+3}{4} \varepsilon^4 \right) + \operatorname{Ei}_{\frac{n+5}{4}} \left(\frac{n+3}{4} \varepsilon^4 \right) \right], \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\varepsilon^6 \operatorname{Ei}_{\frac{n+1}{4}} \left(\frac{n+3}{4} \varepsilon^4 \right) + \varepsilon^2 \operatorname{Ei}_{\frac{n+5}{4}} \left(\frac{n+3}{4} \varepsilon^4 \right) \right]. \end{aligned}$$

Novamente fazemos uma expansão em série de potências,

$$\begin{aligned} A_4 &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{4n!} \left[\frac{4}{n-1} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6) \right] + \sum_{n=0}^1 \frac{(-2)^n}{4n!} \left[2^{\frac{1-n}{2}} (3+n)^{\frac{n-3}{4}} \Gamma \left(-\frac{n+1}{4} \right) \varepsilon^{3+n} \right] \\ &= \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4, \\ &= \left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Finalmente, adicionando $A_4 + \varepsilon^2 B_4$ obtemos

$$I_4 \approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4.$$

A.5 Solução da integral I

A integral I é dada por

$$I = I_1 - I_2 - 2I_3 - 2I_4,$$

onde

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \varepsilon,$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \varepsilon + \left(\frac{5}{2} \gamma_E - 3 + \frac{1}{2} \ln 8\varepsilon^4 - 2 \operatorname{Ei}(-2) - 2\Gamma(0, 2) \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4,$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \gamma_E - \frac{1}{4} \ln 8\varepsilon^4 + \operatorname{Ei}(-2) + \Gamma(0, 2) \right) \varepsilon^2 - \frac{1}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4,$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}} \Gamma \left(-\frac{1}{4} \right) \varepsilon^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon^4.$$

Substituindo de volta na expressão obtemos que a integral I possui como solução aproximada,

$$I \approx \varepsilon^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \varepsilon^4.$$

Apêndice B

Computação da probabilidade de interação $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

Nesta apêndice calculamos a probabilidade de interação $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ necessária para obter as seções de choque diferencial e total devido às correções não lineares do Capítulo 5. A probabilidade de interação média sobre as polarizações dos fôtons iniciais e somada sobre as polarizações finais é dada por

$$\mathcal{P} = \underbrace{\frac{1}{4} \eta_{a_2 b_2} \eta_{a_4 b_4} \eta_{a_6 b_6} \eta_{a_8 b_8}}_{\eta} \times \underbrace{p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} P_{A_{12} A_{34} A_{56} A_{78}} \gamma^{[A_{12} A_{34}][A_{56} A_{78}]} }_I \times \underbrace{p_{b_1} p'_{b_3} k_{b_5} k'_{b_7} P_{B_{12} B_{34} B_{56} B_{78}} \gamma^{[B_{12} B_{34}][B_{56} B_{78}]} }_{II}.$$

Notamos que o termo I é idêntico ao termo II , bastando trocar o rótulo dos índices $a \leftrightarrow b$.

Fazendo uso das simetrias, temos que o resultado do operador de permutação P

sobre a matriz gama em I é

$$\begin{aligned}
P_{A_{12}A_{34}A_{56}A_{78}} \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} &= 4\gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} + 4\gamma^{[A_{12}A_{56}][A_{34}A_{78}]} \\
&+ 4\gamma^{[A_{12}A_{78}][A_{34}A_{56}]} + 4\gamma^{[A_{56}A_{78}][A_{12}A_{34}]} \\
&+ 4\gamma^{[A_{34}A_{78}][A_{56}A_{12}]} + 4\gamma^{[A_{56}A_{34}][A_{12}A_{78}]}.
\end{aligned}$$

Expandindo a matriz gama usando sua definição $\gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \equiv \gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} + \gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]}$ e fazendo uso da simetria adicional da matriz γ_{G^2} obtemos

$$\begin{aligned}
P(A_{12}, A_{34}, A_{56}, A_{78}) \gamma^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} &= 4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} + 4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{56}][A_{34}A_{78}]} \\
&+ 4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{78}][A_{34}A_{56}]} + 4\gamma_{F^2}^{[A_{56}A_{78}][A_{12}A_{34}]} \\
&+ 4\gamma_{F^2}^{[A_{34}A_{78}][A_{12}A_{56}]} + 4\gamma_{F^2}^{[A_{34}A_{56}][A_{12}A_{78}]} \\
&+ 8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} + 8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{56}][A_{34}A_{78}]} + 8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{78}][A_{34}A_{56}]}.
\end{aligned}$$

Para obter I , contraímos estes 9 termos pelos momentos $p_{a_1}p'_{a_3}k_{a_5}k'_{a_7}$ usando as definições das matrizes gama,

$$\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \equiv \alpha (\eta^{a_1a_3}\eta^{a_2a_4}\eta^{a_5a_7}\eta^{a_6a_8} - 2\eta^{a_1a_3}\eta^{a_2a_4}\eta^{a_5a_8}\eta^{a_6a_7} + \eta^{a_1a_4}\eta^{a_2a_3}\eta^{a_5a_8}\eta^{a_6a_7}),$$

e

$$\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} \equiv \beta \varepsilon^{a_1a_2a_3a_4} \varepsilon^{a_5a_6a_7a_8}.$$

É mais fácil manipular o produto de tensores de Levi-Civita usando uma notação matricial, portanto usamos a identidade para expressá-lo em termos de um determinante,

$$\varepsilon^{a_1a_2a_3a_4} \varepsilon^{a_5a_6a_7a_8} = - \begin{vmatrix} \eta^{a_1a_5} & \eta^{a_1a_6} & \eta^{a_1a_7} & \eta^{a_1a_8} \\ \eta^{a_2a_5} & \eta^{a_2a_6} & \eta^{a_2a_7} & \eta^{a_2a_8} \\ \eta^{a_3a_5} & \eta^{a_3a_6} & \eta^{a_3a_7} & \eta^{a_3a_8} \\ \eta^{a_4a_5} & \eta^{a_4a_6} & \eta^{a_4a_7} & \eta^{a_4a_8} \end{vmatrix}.$$

Assim, temos

1. o primeiro termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{a_2 a_4} \eta^{a_6 a_8} - 2(p \cdot p') \eta^{a_2 a_4} k^{a_8} k'^{a_6} + p^{a_4} p'^{a_2} k^{a_8} k'^{a_6}];$$

2. o segundo termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{56}][A_{34}A_{78}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{a_2 a_6} \eta^{a_4 a_8} - 2(p \cdot k) \eta^{a_2 a_6} p'^{a_8} k'^{a_4} + p^{a_6} k^{a_2} p'^{a_8} k'^{a_4}];$$

vemos que conseguimos facilmente o segundo termo a partir do primeiro trocando $k \leftrightarrow p'$ e $a_6 \leftrightarrow a_4$. Usamos esta simetria para os próximos termos.

3. o terceiro termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{12}A_{78}][A_{34}A_{56}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot k') (k \cdot p') \eta^{a_2 a_8} \eta^{a_6 a_4} - 2(p \cdot k') \eta^{a_2 a_8} k^{a_4} p'^{a_6} + p^{a_8} k'^{a_2} k^{a_4} p'^{a_6}];$$

onde foi realizada a troca $k' \leftrightarrow p'$ e $a_8 \leftrightarrow a_4$ no primeiro termo.

4. o quarto termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{56}A_{78}][A_{12}A_{34}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{a_2 a_4} \eta^{a_6 a_8} - 2(k \cdot k') \eta^{a_6 a_8} p^{a_4} p'^{a_2} + p^{a_4} p'^{a_2} k^{a_8} k'^{a_6}];$$

onde trocamos $k \leftrightarrow p$ e $k' \leftrightarrow p'$, e $a_2 \leftrightarrow a_6$ e $a_4 \leftrightarrow a_8$ no primeiro termo.

5. o quinto termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{34}A_{78}][A_{56}A_{12}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{a_2 a_6} \eta^{a_4 a_8} - 2(p' \cdot k') \eta^{a_4 a_8} p^{a_6} k^{a_2} + p^{a_6} p'^{a_8} k^{a_2} k'^{a_4}];$$

onde trocamos $p' \leftrightarrow k$ e $a_2 \leftrightarrow a_8$ no *quarto* termo.

6. o sexto termo,

$$4\gamma_{F^2}^{[A_{56}A_{34}][A_{12}A_{78}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} \\ = 4\alpha [(p \cdot k') (k \cdot p') \eta^{a_2 a_8} \eta^{a_6 a_4} - 2 (k \cdot p') \eta^{a_6 a_4} p^{a_8} k'^{a_2} + p^{a_8} k'^{a_2} k^{a_4} p'^{a_6}];$$

onde trocamos $k' \leftrightarrow p'$ e $a_4 \leftrightarrow a_8$ no *primeiro* termo.

7. o sétimo termo,

$$8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{34}][A_{56}A_{78}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} = 8\beta \varepsilon^{a_1 a_2 a_3 a_4} \varepsilon^{a_5 a_6 a_7 a_8} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7}, \\ = -8\beta \begin{vmatrix} \eta^{a_1 a_5} & \eta^{a_1 a_6} & \eta^{a_1 a_7} & \eta^{a_1 a_8} \\ \eta^{a_2 a_5} & \eta^{a_2 a_6} & \eta^{a_2 a_7} & \eta^{a_2 a_8} \\ \eta^{a_3 a_5} & \eta^{a_3 a_6} & \eta^{a_3 a_7} & \eta^{a_3 a_8} \\ \eta^{a_4 a_5} & \eta^{a_4 a_6} & \eta^{a_4 a_7} & \eta^{a_4 a_8} \end{vmatrix} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7}, \\ = -8\beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{a_6} & p \cdot k' & p^{a_8} \\ k^{a_2} & \eta^{a_2 a_6} & k'^{a_2} & \eta^{a_2 a_8} \\ p' \cdot k & p'^{a_6} & p' \cdot k' & p'^{a_8} \\ k^{a_4} & \eta^{a_4 a_6} & k'^{a_4} & \eta^{a_4 a_8} \end{vmatrix}.$$

8. O oitavo termo,

$$8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{56}][A_{34}A_{78}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} = 8\beta \varepsilon^{a_1 a_2 a_5 a_6} \varepsilon^{a_3 a_4 a_7 a_8} p_{a_1} k_{a_5} p'_{a_3} k'_{a_7}, \\ = -8\beta \begin{vmatrix} \eta^{a_1 a_3} & \eta^{a_1 a_4} & \eta^{a_1 a_7} & \eta^{a_1 a_8} \\ \eta^{a_2 a_3} & \eta^{a_2 a_4} & \eta^{a_2 a_7} & \eta^{a_2 a_8} \\ \eta^{a_5 a_3} & \eta^{a_5 a_4} & \eta^{a_5 a_7} & \eta^{a_5 a_8} \\ \eta^{a_6 a_3} & \eta^{a_6 a_4} & \eta^{a_6 a_7} & \eta^{a_6 a_8} \end{vmatrix} p_{a_1} k_{a_5} p'_{a_3} k'_{a_7}, \\ = -8\beta \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{a_4} & p \cdot k' & p^{a_8} \\ p'^{a_2} & \eta^{a_2 a_4} & k'^{a_2} & \eta^{a_2 a_8} \\ p' \cdot k & k^{a_4} & k \cdot k' & k^{a_8} \\ p'^{a_6} & \eta^{a_4 a_6} & k'^{a_6} & \eta^{a_6 a_8} \end{vmatrix},$$

vemos que obtivemos um termo semelhante ao sétimo a menos da troca $k \leftrightarrow p'$ e $a_4 \leftrightarrow a_6$. Usamos isto para obter o próximo termo.

9. O nono termo,

$$8\gamma_{G^2}^{[A_{12}A_{78}][A_{34}A_{56}]} p_{a_1} p'_{a_3} k_{a_5} k'_{a_7} = -8\beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{a_6} & p \cdot p' & p^{a_4} \\ k^{a_2} & \eta^{a_2 a_6} & p'^{a_2} & \eta^{a_2 a_4} \\ k' \cdot k & k'^{a_6} & p' \cdot k' & k'^{a_4} \\ k^{a_8} & \eta^{a_6 a_8} & p'^{a_8} & \eta^{a_4 a_8} \end{vmatrix}$$

onde trocamos $a_4 \leftrightarrow a_8$ e $p' \leftrightarrow k'$ no sétimo termo.

Adicionando estes 9 termos obtemos a expressão I ,

$$I = 8 \{ \alpha [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{a_2 a_4} \eta^{a_6 a_8} - (p \cdot p') \eta^{a_2 a_4} k'^{a_6} k^{a_8} - (k \cdot k') \eta^{a_6 a_8} p'^{a_2} p^{a_4} + p'^{a_2} p^{a_4} k'^{a_6} k^{a_8}] \\ + \alpha [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{a_2 a_6} \eta^{a_4 a_8} - (p \cdot k) \eta^{a_2 a_6} k'^{a_4} p'^{a_8} - (p' \cdot k') \eta^{a_4 a_8} k^{a_2} p^{a_6} + k^{a_2} k'^{a_4} p^{a_6} p'^{a_8}] \\ + \alpha [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{a_2 a_8} \eta^{a_4 a_6} - (p \cdot k') \eta^{a_2 a_8} k^{a_4} p'^{a_6} - (p' \cdot k) \eta^{a_4 a_6} k'^{a_2} p^{a_8} + k'^{a_2} k^{a_4} p'^{a_6} p^{a_8}] \\ - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{a_6} & p \cdot k' & p^{a_8} \\ k^{a_2} & \eta^{a_2 a_6} & k'^{a_2} & \eta^{a_2 a_8} \\ p' \cdot k & p'^{a_6} & p' \cdot k' & p'^{a_8} \\ k^{a_4} & \eta^{a_4 a_6} & k'^{a_4} & \eta^{a_4 a_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{a_4} & p \cdot k' & p^{a_8} \\ p'^{a_2} & \eta^{a_2 a_4} & k'^{a_2} & \eta^{a_2 a_8} \\ p' \cdot k & k^{a_4} & k \cdot k' & k^{a_8} \\ p'^{a_6} & \eta^{a_4 a_6} & k'^{a_6} & \eta^{a_6 a_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{a_6} & p \cdot p' & p^{a_4} \\ k^{a_2} & \eta^{a_2 a_6} & p'^{a_2} & \eta^{a_2 a_4} \\ k \cdot k' & k'^{a_6} & p' \cdot k' & k'^{a_4} \\ k^{a_8} & \eta^{a_6 a_8} & p'^{a_8} & \eta^{a_4 a_8} \end{vmatrix} \}$$

Em seguida, contrairmos esta expressão com o produto de métrica η para obter

$$\eta I = 8 \{ \alpha [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\ + \alpha [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \\ + \alpha [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6}] \\ - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' & k_{b_8} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} & \eta_{b_6 b_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot p' & p_{b_4} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'_{b_6} & p' \cdot k' & k'_{b_4} \\ k_{b_8} & \eta_{b_6 b_8} & p'_{b_8} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \}$$

Como observado, para obter II a partir de I , basta fazer a troca $a \leftrightarrow b$,

$$\begin{aligned}
II = & 8 \left\{ \alpha \left[(p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k'^{b_6} k^{b_8} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p'^{b_2} p^{b_4} k'^{b_6} k^{b_8} \right] \right. \\
& + \alpha \left[(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \right] \\
& + \alpha \left[(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \right] \\
& \left. - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicamos a expressão ηI por II e contraímos os índices. Iremos multiplicar termo por termo (o índice i em ηI_i indicará o i -ésimo termo da expressão ηI , assim, $\eta I_i \times II_j$ é o produto do i -ésimo termo da expressão ηI vezes o j -ésimo termo da expressão II , o resultado final pode ser escrito como $\sum_{i,j=1}^6 \eta I_i \times II_j$). Notamos que como $\eta I_i^{b_2 b_4 b_6 b_8} = II_i^{b_2 b_4 b_6 b_8}$, então $\eta I_i \times II_j = \eta I_j \times II_i$. Portanto o resultado final pode ser escrito como $\sum_{i,j=1}^6 \eta I_i \times II_j = \sum_{i=1}^6 \eta I_i \times II_i + 2 \sum_{i < j=1}^6 \eta I_i \times II_j$, diminuindo o número de termos a ser computado de 36 para 21.

B.1 Cálculo dos 21 termos

Quando possível usamos o dicionário

$$\begin{aligned}
A &= p \cdot k, \quad B = p \cdot k', \\
C &= p' \cdot k, \quad F = p' \cdot k', \\
G &= p \cdot p' \quad \text{e} \quad H = k \cdot k'.
\end{aligned}$$

para aliviar a notação e simplificar os cálculos.

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_1$

$$\frac{\eta I_1 \times II_1}{64\alpha^2}$$

$$= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\ \times [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k'^{b_6} k^{b_8} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p'^{b_2} p^{b_4} k'^{b_6} k^{b_8}],$$

$$= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8}] \{ (p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} \\ - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k^{b_8} k'^{b_6} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p^{b_4} p'^{b_2} k^{b_8} k'^{b_6} \} \\ - [(p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k_{b_8} k'_{b_6}] \{ (p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} \\ - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k^{b_8} k'^{b_6} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p^{b_4} p'^{b_2} k^{b_8} k'^{b_6} \} \\ - [(k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p_{b_4} p'_{b_2}] \{ (p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} \\ - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k^{b_8} k'^{b_6} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p^{b_4} p'^{b_2} k^{b_8} k'^{b_6} \} \\ + [p_{b_4} p'_{b_2} k_{b_8} k'_{b_6}] \{ (p \cdot p') (k \cdot k') \eta^{b_2 b_4} \eta^{b_6 b_8} \\ - (p \cdot p') \eta^{b_2 b_4} k^{b_8} k'^{b_6} - (k \cdot k') \eta^{b_6 b_8} p'^{b_2} p^{b_4} + p^{b_4} p'^{b_2} k^{b_8} k'^{b_6} \},$$

$$= 9 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 \\ - 3 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + 3 (p \cdot p')^2 k^2 k'^2 \\ - 3 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + 3 (k \cdot k')^2 p^2 p'^2 \\ - (p \cdot p')^2 k^2 k'^2 - (k \cdot k')^2 p^2 p^2 + p^2 p'^2 k^2 k^2,$$

$$\frac{\eta I_1 \times II_1}{64\alpha^2} = 4 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2.$$

Cálculo do termo $\eta I_2 \times II_2$

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta I_2 \times II_2}{64\alpha^2} \\
&= [(p \cdot k)(p' \cdot k')\eta_{b_2b_6}\eta_{b_4b_8} - (p \cdot k)\eta_{b_2b_6}k'_{b_4}p'_{b_8} - (p' \cdot k')\eta_{b_4b_8}k_{b_2}p_{b_6} + k_{b_2}k'_{b_4}p_{b_6}p'_{b_8}] \\
&\times [(p \cdot k)(p' \cdot k')\eta^{b_2b_6}\eta^{b_4b_8} - (p \cdot k)\eta^{b_2b_6}k'^{b_4}p'^{b_8} - (p' \cdot k')\eta^{b_4b_8}k^{b_2}p^{b_6} + k^{b_2}k'^{b_4}p^{b_6}p'^{b_8}],
\end{aligned}$$

esta expressão é idêntica à 1 a menos da troca $p' \leftrightarrow k$, assim,

$$\frac{\eta I_2 \times II_2}{64\alpha^2} = 4(p \cdot k)^2(p' \cdot k')^2.$$

Cálculo do termo $\eta I_3 \times II_3$

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta I_3 \times II_3}{64\alpha^2} \\
&= [(p \cdot k')(p' \cdot k)\eta_{b_2b_8}\eta_{b_4b_6} - (p \cdot k')\eta_{b_2b_8}k_{b_4}p'_{b_6} - (p' \cdot k)\eta_{b_4b_6}k'_{b_2}p_{b_8} + k'_{b_2}k_{b_4}p_{b_8}p'_{b_6}] \\
&\times [(p \cdot k')(p' \cdot k)\eta^{b_2b_8}\eta^{b_4b_6} - (p \cdot k')\eta^{b_2b_8}k^{b_4}p'^{b_6} - (p' \cdot k)\eta^{b_4b_6}k'^{b_2}p^{b_8} + k'^{b_2}k^{b_4}p'^{b_6}p^{b_8}],
\end{aligned}$$

esta expressão é idêntica à 1 a menos da troca $p' \leftrightarrow k'$, assim,

$$\frac{\eta I_3 \times II_3}{64\alpha^2} = 4(p \cdot k')^2(p' \cdot k)^2.$$

Cálculo do termo $\eta I_4 \times II_4$

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2} = \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2b_6} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4b_6} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4b_8} \end{vmatrix},$$

Expandindo em cofatores usando a segunda coluna para o primeiro determinante, e a quarta coluna para o segundo determinante,

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -p_{b_6} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta_{b_2 b_6} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - p'_{b_6} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta_{b_4 b_6} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{vmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ -p^{b_8} \begin{vmatrix} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \eta^{b_2 b_8} \begin{vmatrix} A & p^{b_6} & B \\ C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - p'^{b_8} \begin{vmatrix} A & p^{b_6} & p \cdot k' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \eta^{b_4 b_8} \begin{vmatrix} A & p^{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ C & p'^{b_6} & F \end{vmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicando pelos 4-vetores e métricas em evidência,

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & A & p^{b_6} & B \\ C & p'^{b_6} & F & C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&\quad + p'^{b_8} p_{b_6} \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & p^{b_6} & B & A & p^{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & -\eta^{b_4 b_8} p_{b_6} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & C & p'^{b_6} & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & A & p^{b_6} & B \\ -p^{b_8} \eta_{b_2 b_6} & C & p'^{b_6} & F & +\eta^{b_2 b_8} \eta_{b_2 b_6} & C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&\quad - p'^{b_8} \eta_{b_2 b_6} \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & p^{b_6} & B & A & p^{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & +\eta^{b_4 b_8} \eta_{b_2 b_6} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & C & p'^{b_6} & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & A & p^{b_6} & B \\ p^{b_8} p'_{b_6} & C & p'^{b_6} & F & -\eta^{b_2 b_8} p'_{b_6} & C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&\quad + p'^{b_8} p'_{b_6} \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & p^{b_6} & B & A & p^{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & -\eta^{b_4 b_8} p'_{b_6} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & C & p'^{b_6} & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & A & p^{b_6} & B \\ -p^{b_8} \eta_{b_4 b_6} & C & p'^{b_6} & F & +\eta^{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} & C & p'^{b_6} & F \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&\quad - p'^{b_8} \eta_{b_4 b_6} \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & p^{b_6} & B & A & p^{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & +\eta^{b_4 b_8} \eta_{b_4 b_6} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & C & p'^{b_6} & F \end{array} \right\} .
\end{aligned}$$

O produto de um escalar por um determinante multiplica todas as componentes de uma de suas linhas ou colunas. Escolhemos a linha ou coluna que contenha o mesmo índice

para realizar o produto e em seguida a contração,

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} & A & 0 & B \\ C & G & F & C & G & F \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} & k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right. - \eta^{b_2 b_8} \left. \begin{array}{ccc} A & 0 & B \\ C & G & F \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right\} \\
&\quad + p'^{b_8} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & 0 & B & A & 0 & B \\ k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} & -\eta^{b_4 b_8} & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} & C & G & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} & A & p_{b_2} & B \\ C & p'_{b_2} & F & +\eta^{b_2 b_8} & C & p'_{b_2} & F \\ k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} & k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right. \\
&\quad - p'^{b_8} \left. \begin{array}{ccc} A & p_{b_2} & B \\ k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right\} + \eta^{b_4 b_8} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & p_{b_2} & B \\ k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ C & p'_{b_2} & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & A & G & B \\ C & 0 & F & -\eta^{b_2 b_8} & C & 0 & F \\ k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} & k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right. \\
&\quad + p'^{b_8} \left. \begin{array}{ccc} A & G & p \cdot k' \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right\} - \eta^{b_4 b_8} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} A & G & B \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & 0 & F \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} k^{b_2} & \delta_{b_4}^{b_2} & k'^{b_2} & A & p_{b_4} & B \\ C & p'_{b_4} & F & +\eta^{b_2 b_8} & C & p'_{b_4} & F \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} & k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{array} \right. \\
&\quad - p'^{b_8} \left. \begin{array}{ccc} A & p_{b_4} & B \\ k^{b_2} & \delta_{b_4}^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{ccc} A & p^{b_8} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & k'^{b_2} \\ C & p'^{b_8} & F \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicando pelos determinantes em evidência,

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2} \\
= & p^{b_8} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & G & F \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} - \eta^{b_2b_8} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 & B \\ C & G & F \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} \\
& + p'^{b_8} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 & B \\ k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} - \eta^{b_4b_8} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 & B \\ k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & G & F \end{vmatrix} \\
& - p^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ C & p'_{b_2} & F \\ k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \eta^{b_2b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p_{b_2} & B \\ C & p'_{b_2} & F \\ k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} \\
& - p'^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p_{b_2} & B \\ k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \eta^{b_4b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p_{b_2} & B \\ k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ C & p'_{b_2} & F \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & 0 & F \\ k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} - \eta^{b_2b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & G & B \\ C & 0 & F \\ k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} \\
& + p'^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & G & p \cdot k' \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & p'^{b_4} & k'^{b_4} \end{vmatrix} - \eta^{b_4b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & G & B \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & 0 & F \end{vmatrix} \\
& - p^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k^{b_2} & \delta_{b_4}^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & p'_{b_4} & F \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \eta^{b_2b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p_{b_4} & B \\ C & p'_{b_4} & F \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{vmatrix} \\
& - p'^{b_8} \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p_{b_4} & B \\ k^{b_2} & \delta_{b_4}^{b_2} & k'^{b_2} \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p^{b_8} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2b_8} & k'^{b_2} \\ C & p'^{b_8} & F \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Contraindo os 4-vetores com as colunas que contêm o mesmo índice,

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & F & G & C & G & F \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 \\ C & F & p'^{b_2} & C & G & F \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & A & 0 & B \\ C & F & 0 & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_2} & k_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_2} \\ C & F & p'^{b_2} & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & 0 & k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ C & F & G & C & p'_{b_2} & F \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & B & p^{b_2} \\ C & F & p'^{b_2} & C & p'_{b_2} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p_{b_2} & B \\ C & F & 0 & k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_4} & A & p_{b_2} & B \\ C & F & p'^{b_4} & k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & 0 & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & C & 0 & F \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & G & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & C & 0 & F \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & G & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_4} & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & k^{b_4} & \delta^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & 0 & k^{b_2} & \delta^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & C & p'_{b_2} & F \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & p_{b_4} & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & C & p'_{b_4} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p_{b_4} & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & k^{b_2} & \delta^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & A & p^{b_8} & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & k'^{b_2} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p_{b_8} & B \\ C & F & 0 & k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p'_{b_8} & C & p'_{b_8} & F \\ C & F & p'_{b_8} & C & p'^{b_8} & F \end{array} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & 0 & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & C & 0 & F \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & G & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & C & 0 & F \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & G & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_4} & k^{b_2} & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & k^{b_4} & \delta^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & 0 & k^{b_2} & \delta^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & C & p'_{b_4} & F \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & p_{b_4} & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & C & p'_{b_4} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p_{b_4} & B \\ C & F & G & k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p'^{b_2} & k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \\ C & F & G & C & p'_{b_8} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p_{b_8} & B \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & k^{b_2} & \delta^{b_2} & k'^{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & C & p'_{b_8} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & A & p'^{b_8} & B \\ C & F & 0 & k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p'^{b_8} & C & p'^{b_8} & F \\ C & F & p'_{b_8} & C & p'^{b_8} & F \end{array} \right|
\end{aligned}$$

Juntamos alguns termos invertendo a ordem de alguns produtos de determinantes e renomeando índices, obtemos

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & p_{b_2} & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ C & F & G & C & G & F \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p_{b_4} & k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&- 4 \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & 4 & A & 0 & B & A & B & G \\ C & F & p'^{b_2} & C & G & F & C & F & 0 \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \delta_{b_4}^{b_2} & k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} & k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} \end{array} \right| - 4 \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & G & k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ C & F & 0 & k^{b_2} & 4 & k'^{b_2} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| \\
&+ 2 \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p^{b_2} & A & p_{b_2} & B & A & B & p^{b_4} \\ C & F & p'^{b_2} & C & p'_{b_2} & F & C & F & p'^{b_4} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \delta_{b_4}^{b_2} & k^{b_4} & \delta_{b_2}^{b_4} & k'^{b_4} & k_{b_4} & k'_{b_4} & 4 \\ & & & & & & C & p'_{b_2} & F \end{array} \right| + 2 \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & p'_{b_2} & A & 0 & B \\ C & F & 0 & k^{b_2} & p^{b_2} & k'^{b_2} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & k^{b_4} & p^{b_4} & k'^{b_4} \end{array} \right| .
\end{aligned}$$

Calculando o produto dos determinantes,

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2A^2F^2 - 4ABCF - 4AFGH + 2B^2C^2 - 4BCGH + 2G^2H^2 \\
&+ 2A^2F^2 - 4ABCF - 4AFGH + 2B^2C^2 - 4BCGH + 2G^2H^2 \\
&- 8A^2F^2 + 16ABCF + 8GHAF - 8B^2C^2 + 8GHBC \\
&- 8A^2F^2 + 16ABCF + 8GHAF - 8B^2C^2 + 8GHBC \\
&- 4BCGH - 4AFGH \\
&+ 8(BC - AF)^2 \\
&+ 4A^2F^2 - 8ABCF - 4GHAF + 4B^2C^2 - 4GHBC.
\end{aligned}$$

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2} = 4G^2H^2,$$

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2} = 4(p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2.$$

Cálculo do termo $\eta I_5 \times II_5$

Esta expressão é idêntica a $\eta I_4 \times II_4$ a menos da troca $p' \leftrightarrow k$ (e dos índices mudos $b_4 \leftrightarrow b_6$). Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_5 \times II_5}{64\beta^2} &= \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' & k_{b_8} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} & \eta_{b_6 b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix}, \\ &= 4(p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2. \end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_6 \times II_6$

Esta expressão é idêntica à $\eta I_4 \times II_4$ a menos da troca $p' \leftrightarrow k'$ (e dos índices mudos $b_4 \leftrightarrow b_8$). Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_6 \times II_6}{64\beta^2} &= \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot p' & p_{b_4} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'_{b_6} & p' \cdot k' & k'_{b_4} \\ k_{b_8} & \eta_{b_6 b_8} & p'_{b_8} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}, \\ &= 4(p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2. \end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_2$

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_1 \times II_2}{64\alpha^2} &= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\ &\quad \times [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8}] \{ (p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} \\
&\quad - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \} \\
&\quad - [(p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \{ (p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} \\
&\quad - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \} \\
&\quad - [(k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4}] \{ (p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} \\
&\quad - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \} \\
&\quad + [p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \{ (p \cdot k) (p' \cdot k') \eta^{b_2 b_6} \eta^{b_4 b_8} \\
&\quad - (p \cdot k) \eta^{b_2 b_6} k'^{b_4} p'^{b_8} - (p' \cdot k') \eta^{b_4 b_8} k^{b_2} p^{b_6} + k^{b_2} k'^{b_4} p^{b_6} p'^{b_8} \} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta I_1 \times II_2}{64\alpha^2} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') ,
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_3$

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta I_1 \times II_3}{64\alpha^2} \\
&= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\
&\quad \times [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8}] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\
&\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\
&\quad - [(p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\
&\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\
&\quad - [(k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\
&\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\
&\quad + [p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\
&\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_1 \times II_3}{64\alpha^2} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ &\quad - 2 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') , \end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_2 \times II_3$

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_2 \times II_3}{64\alpha^2} &= [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \\ &\quad \times [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8}] \\ &= [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\ &\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\ &\quad - [(p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\ &\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\ &\quad - [(p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\ &\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} \\ &\quad + [k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \{ (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta^{b_2 b_8} \eta^{b_4 b_6} \\ &\quad - (p \cdot k') \eta^{b_2 b_8} k^{b_4} p'^{b_6} - (p' \cdot k) \eta^{b_4 b_6} k'^{b_2} p^{b_8} + k'^{b_2} k^{b_4} p'^{b_6} p^{b_8} \} , \\ \frac{\eta I_2 \times II_3}{64\alpha^2} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ &\quad - 2 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') , \end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_4$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_1 \times II_4}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot p') (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_8 b_4} & k'_{b_4} & \delta_{b_4}^{b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_8} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \delta_{b_8}^{b_4} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot p') \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot k \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & k'_{b_4} & k_{b_4} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k_{b_8} \\ k^{b_4} & k'^{b_4} & k'^{b_4} & k^{b_4} \end{vmatrix} \\
&\quad - (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_8} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_8} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot k \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k \\ p \cdot k & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot k \end{vmatrix}, \\
&= (p \cdot p') (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_8 b_4} & k'_{b_4} & \delta_{b_4}^{b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_8} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \delta_{b_8}^{b_4} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}, \\
&= (p \cdot p') (k \cdot k') \begin{vmatrix} A & p_{b_8} & B & p^{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_8 b_4} & k'_{b_4} & \delta_{b_4}^{b_8} \\ C & p'_{b_8} & F & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \delta_{b_8}^{b_4} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}, \\
&\quad - \frac{\eta I_1 \times II_4}{64\alpha\beta} = 0.
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_5$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_1 \times II_5}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot p') (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_2} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & 4 & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_2} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'_{b_8} & \eta_{b_2 b_8} & k'_{b_8} & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot p') \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p \cdot k \\ p'_{b_4} & 4 & k'_{b_4} & k_{b_4} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k' & k'^{b_4} & 0 & k \cdot k' \end{vmatrix} \\
&\quad - (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot p' & 0 & p \cdot k' & p^{b_8} \\ 0 & p \cdot p' & p' \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & p \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'_{b_8} & p_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} p \cdot p' & 0 & p \cdot k' & p \cdot k \\ 0 & p \cdot p' & p' \cdot k' & p' \cdot k \\ p' \cdot k & p \cdot k & k \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k' & p \cdot k' & 0 & k \cdot k' \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2GH(BC - GH) \\
&\quad + GH(BC + AF - GH) \\
&\quad + GH(BC + AF - GH) \\
&\quad + A^2F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2C^2 - 2BCGH + G^2H^2,
\end{aligned}$$

$$= G^2H^2 + A^2F^2 + B^2C^2 - 2ABCF - 2BCGH,$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\eta I_1 \times II_5}{64\alpha\beta} = (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k)(p \cdot k')(p' \cdot k)(p' \cdot k') - 2(p \cdot k')(p' \cdot k)(p \cdot p')(k \cdot k'),
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_1 \times II_6$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_1 \times II_6}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot p') (k \cdot k') \eta_{b_2 b_4} \eta_{b_6 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot p') \eta_{b_2 b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (k \cdot k') \eta_{b_6 b_8} p'_{b_2} p_{b_4} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + p'_{b_2} p_{b_4} k'_{b_6} k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot p') (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} & p'_{b_2} & 4 \\ k \cdot k' & k'_{b_8} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & 4 & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot p') \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & p'_{b_4} & 4 \\ k \cdot k' & 0 & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ 0 & k \cdot k' & p' \cdot k & k^{b_4} \end{vmatrix} \\
&\quad - (k \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_8} & p \cdot p' & 0 \\ p' \cdot k & p'_{b_8} & 0 & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'_{b_8} & p' \cdot k' & p \cdot k' \\ k^{b_8} & 4 & p'^{b_8} & p^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p \cdot p' & 0 \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & 0 & p \cdot p' \\ k \cdot k' & 0 & p' \cdot k' & p \cdot k' \\ 0 & k \cdot k' & p' \cdot k & p \cdot k \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2GH (AF - GH) \\
&\quad + GH (BC + AF - GH) \\
&\quad + GH (BC + AF - GH) \\
&\quad + A^2 F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2 C^2 - 2BCGH + G^2 H^2,
\end{aligned}$$

$$= G^2 H^2 + A^2 F^2 + B^2 C^2 - 2ABCF - 2AFGH,$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\eta I_1 \times II_6}{64\alpha\beta} = (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k'),
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_2 \times II_4$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_2 \times II_4}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot k)(p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot k)(p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k) (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p_{b_4} \\ k_{b_6} & 4 & k'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'_{b_4} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & 4 \end{vmatrix} - (p \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p \cdot p' \\ k_{b_6} & 4 & k'_{b_6} & p'_{b_6} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & 0 \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & 0 & p' \cdot k' \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & 0 & p \cdot k' & p^{b_8} \\ 0 & p \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p' \cdot k & p \cdot p' & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k_{b_8} & p_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p \cdot k & 0 & p \cdot k' & p \cdot p' \\ 0 & p \cdot k & k \cdot k' & p' \cdot k \\ p' \cdot k & p \cdot p' & p' \cdot k' & 0 \\ k \cdot k' & p \cdot k' & 0 & p' \cdot k' \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2AF(BC - AF) \\
&\quad + AF(BC - AF + GH) \\
&\quad + AF(BC - AF + GH) \\
&\quad + A^2F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2C^2 - 2BCGH + G^2H^2, \\
&= G^2H^2 + A^2F^2 + B^2C^2 - 2ABCF - 2BCGH,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\eta I_2 \times II_4}{64\alpha\beta} = (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k'),
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_2 \times II_5$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\eta I_2 \times II_5}{64\alpha\beta} \\
&= [(p \cdot k) (p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \\
&\quad \times \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k) (p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k) (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_6 b_8} & k'_{b_6} & \delta_{b_6}^{b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_8} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \delta_{b_8}^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot p' \\ p'_{b_6} & k'_{b_6} & k'_{b_6} & p'_{b_6} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k \cdot k' & p' \cdot k \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & k'^{b_6} & p'^{b_6} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_8} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_8} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p \cdot p' & p_{b_8} & p \cdot k' & p^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot p' \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k \cdot k' & p' \cdot k \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k \cdot k' & p' \cdot k \\ p \cdot p' & p \cdot k' & p \cdot k' & p \cdot p' \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$= AF \begin{vmatrix} G & p_{b_8} & B & p^{b_8} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_6 b_8} & k'_{b_6} & \delta_{b_6}^{b_8} \\ C & k_{b_8} & H & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta_{b_8}^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix},$$

$$-\frac{\eta I_2 \times II_5}{64\alpha\beta} = 0$$

Cálculo do termo $\eta I_2 \times II_6$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_2 \times II_6}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot k)(p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot k)(p' \cdot k') \eta_{b_2 b_6} \eta_{b_4 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot k) \eta_{b_2 b_6} k'_{b_4} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p' \cdot k') \eta_{b_4 b_8} k_{b_2} p_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + k_{b_2} k'_{b_4} p_{b_6} p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k) (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_2} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & 4 & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'_{b_2} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_2} & p'_{b_4} & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad - (p \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_2} & p \cdot p' & p \cdot k' \\ k^{b_2} & 4 & p'^{b_2} & k'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'_{b_2} & p' \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k & p'_{b_2} & 0 & p' \cdot k' \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & 0 & p \cdot p' & p^{b_4} \\ 0 & p \cdot k & p' \cdot k & k^{b_4} \\ k \cdot k' & p \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k_{b_4} & p_{b_4} & p'_{b_4} & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} p \cdot k & 0 & p \cdot p' & p \cdot k' \\ 0 & p \cdot k & p' \cdot k & k \cdot k' \\ k \cdot k' & p \cdot k' & p' \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k & p \cdot p' & 0 & p' \cdot k' \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2AF(AF - GH) \\
&\quad + AF(BC - AF + GH) \\
&\quad + AF(BC - AF + GH) \\
&\quad + A^2F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2C^2 - 2BCGH + G^2H^2,
\end{aligned}$$

$$= G^2H^2 + A^2F^2 + B^2C^2 - 2AFGH - 2BCGH,$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\eta I_2 \times II_6}{64\alpha\beta} = (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k'),
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_3 \times II_4$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_3 \times II_4}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'^{b_6} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k') (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k_{b_8} & \eta_{b_4 b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ p' \cdot k & p'_{b_4} & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} - (p \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ k_{b_8} & p'_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ p' \cdot k & 0 & p' \cdot k' & p'^{b_8} \\ 0 & p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_4} & p \cdot k' & 0 \\ k \cdot k' & k'_{b_4} & 0 & p \cdot k' \\ p' \cdot k & p'_{b_4} & p' \cdot k' & p \cdot p' \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} & p^{b_4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p \cdot k' & 0 \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & 0 & p \cdot k' \\ p' \cdot k & 0 & p' \cdot k' & p \cdot p' \\ 0 & p' \cdot k & k \cdot k' & p \cdot k \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= BC \begin{vmatrix} A & p_{b_4} & B & p^{b_8} \\ k_{b_8} & \eta_{b_4 b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ C & p'_{b_4} & F & p'^{b_8} \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} A & G & B & p^{b_8} \\ k_{b_8} & p'_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ C & 0 & F & p'^{b_8} \\ 0 & C & H & k^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - C \begin{vmatrix} A & p_{b_4} & B & 0 \\ H & k'_{b_4} & 0 & B \\ C & p'_{b_4} & F & G \\ k^{b_4} & 4 & k'^{b_4} & p^{b_4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & G & B & 0 \\ H & F & 0 & B \\ C & 0 & F & G \\ 0 & C & H & A \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2BC(BC - AF) \\
&\quad + BC(AF - BC + GH) \\
&\quad + BC(AF - BC + GH) \\
&\quad + A^2F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2C^2 - 2BCGH + G^2H^2, \\
&= G^2H^2 + A^2F^2 + B^2C^2 - 2AFGH - 2ABCF,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_3 \times II_4}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') ,
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_3 \times II_5$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_3 \times II_5}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& = (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k') (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_6} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'_{b_8} & \eta_{b_6 b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ p' \cdot k & k_{b_6} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & 4 & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} - (p \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'_{b_8} & k_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ p' \cdot k & 0 & k \cdot k' & k^{b_8} \\ 0 & p' \cdot k & p' \cdot k' & p'^{b_6} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_6} & p \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k' & k'_{b_6} & 0 & p \cdot k' \\ p' \cdot k & k_{b_6} & k \cdot k' & p \cdot k \\ p'^{b_6} & 4 & k'^{b_6} & p^{b_6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k & p \cdot k' & 0 \\ p' \cdot k' & k \cdot k' & 0 & p \cdot k' \\ p' \cdot k & 0 & k \cdot k' & p \cdot k \\ 0 & p' \cdot k & p' \cdot k' & p \cdot p' \end{vmatrix}, \\
&= BC \begin{vmatrix} G & p_{b_6} & B & p^{b_8} \\ p'_{b_8} & \eta_{b_6 b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ C & k_{b_6} & H & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & 4 & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} G & A & B & p^{b_8} \\ p'_{b_8} & k_{b_8} & k'_{b_8} & 4 \\ C & 0 & H & k^{b_8} \\ 0 & C & F & p^{b_6} \end{vmatrix} \\
&\quad - C \begin{vmatrix} G & p_{b_6} & B & 0 \\ F & k'_{b_6} & 0 & B \\ C & k_{b_6} & H & A \\ p'^{b_6} & 4 & k'^{b_6} & p^{b_6} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G & A & B & 0 \\ F & H & 0 & B \\ C & 0 & H & A \\ 0 & C & F & G \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2BC(BC - GH) \\
&\quad + BC(AF - BC + GH) \\
&\quad + BC(AF - BC + GH) \\
&\quad + A^2F^2 - 2ABCF - 2AFGH + B^2C^2 - 2BCGH + G^2H^2, \\
&= G^2H^2 + A^2F^2 + B^2C^2 - 2AFGH - 2BCGH,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_3 \times II_5}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k').
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_3 \times II_6$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta I_3 \times II_6}{64\alpha\beta} \\
& = [(p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6}] \\
& \quad \times \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (p \cdot k') (p' \cdot k) \eta_{b_2 b_8} \eta_{b_4 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p \cdot k') \eta_{b_2 b_8} k_{b_4} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad - (p' \cdot k) \eta_{b_4 b_6} k'_{b_2} p_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \\
& \quad + k'_{b_2} k_{b_4} p_{b_8} p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k') (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p_{b_6} \\ k_{b_8} & \delta_{b_8}^{b_6} & p'_{b_8} & \eta_{b_6 b_8} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'_{b_6} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \delta_{b_6}^{b_8} \end{vmatrix} - (p \cdot k') \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p \cdot p' & p \cdot k \\ k_{b_8} & p'_{b_8} & p'_{b_8} & k_{b_8} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k' & k \cdot k' \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & p'^{b_8} & k^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - (p' \cdot k) \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_4} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & k'_{b_4} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k \cdot k' & k'_{b_4} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ p \cdot k & p_{b_4} & p \cdot p' & p^{b_4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p \cdot p' & p \cdot k \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k' & k \cdot k' \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & p' \cdot k' & k \cdot k' \\ p \cdot k & p \cdot p' & p \cdot p' & p \cdot k \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_2 \times II_4}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') ,
\end{aligned}$$

$$-\frac{\eta I_2 \times II_5}{64\alpha\beta} = 0$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_2 \times II_6}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_3 \times II_4}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta I_3 \times II_5}{64\alpha\beta} &= (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
&\quad - 2 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') .
\end{aligned}$$

$$-\frac{\eta I_3 \times II_6}{64\alpha\beta} = 0$$

Cálculo do termo $\eta I_4 \times II_5$

$$\frac{\eta I_4 \times II_5}{64\beta^2} = \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p^{b_4} & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k^{b_4} & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & \eta^{b_4 b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix}.$$

Expandindo em cofatores, os dois determinantes em termos da segunda coluna,

$$\begin{aligned} &= \left\{ -p_{b_6} \begin{vmatrix} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta_{b_2 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. - p'_{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta_{b_4 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad \times \left\{ -p^{b_4} \begin{vmatrix} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_2 b_4} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. - k^{b_4} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_4 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Realizando o produto e distribuindo os 4-vetores e as métricas,

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_2 b_4} p_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| \right. \\
&\quad \left. + k^{b_4} p_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_4 b_6} p_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{array} \right| \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_2 b_4} \eta_{b_2 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| \right. \\
&\quad \left. - k^{b_4} \eta_{b_2 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_4 b_6} \eta_{b_2 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{array} \right| \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k_{b_4} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_2 b_4} p'_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| \right. \\
&\quad \left. + k^{b_4} p'_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_4 b_6} p'_{b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{array} \right| \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p' \cdot k' & p'_{b_8} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_2 b_4} \eta_{b_4 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| \right. \\
&\quad \left. - k^{b_4} \eta_{b_4 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'^{b_6} & k'^{b_6} & \eta^{b_6 b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_4 b_6} \eta_{b_4 b_6} \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p \cdot k' & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k \cdot k' & k^{b_8} \end{array} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Usando o dicionário para simplificar a notação,

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \\ A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \\ k^{b_2} & k'^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_8} & G & B & p^{b_8} \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ 0 & H & k_{b_8} & G & B & p^{b_8} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ A & B & p^{b_8} & C & H & k^{b_8} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \\ A & B & p_{b_8} & p'_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \\ k^{b_2} & k'^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_8} & p'_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_2} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ 0 & H & k_{b_8} & p'_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & C & H & k^{b_8} \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & C & H & k^{b_8} \\ A & B & p_{b_8} & 0 & F & p'^{b_8} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & C & H & k^{b_8} \\ k^{b_2} & k'^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_8} & 0 & F & p'^{b_8} \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ 0 & H & k_{b_8} & 0 & F & p'^{b_8} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & A & B & p_{b_8} \\ C & H & k^{b_8} & k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ G & B & p^{b_8} & C & F & p'_{b_8} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} G & B & p^{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ C & H & k^{b_8} & k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & C & F & p'_{b_8} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} G & B & p^{b_8} & A & B & p_{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} & k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ C & H & k^{b_8} & C & F & p'_{b_8} \end{array} \right| + 4 \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & B & p_{b_8} & G & B & p^{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} & p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ C & F & p'_{b_8} & C & H & k^{b_8} \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Simplificando a expressão,

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ 0 & H & k_{b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G & B & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ 0 & F & p'^{b_8} \end{vmatrix} \\
&\quad - \underbrace{\begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ C & F & p'_{b_8} \\ 0 & H & k_{b_8} \end{vmatrix}}_{=0} \underbrace{\begin{vmatrix} G & B & p^{b_8} \\ p'^{b_2} & k'^{b_2} & \eta^{b_2 b_8} \\ p'_{b_2} & k'_{b_2} & \delta^{b_8}_{b_2} \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} A & B & p_{b_8} \\ k_{b_2} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ k^{b_2} & k'^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_8} \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} G & B & p^{b_8} \\ C & H & k^{b_8} \\ 0 & F & p'^{b_8} \end{vmatrix}}_{=0}.
\end{aligned}$$

Calculando cada produto de determinantes,

$$= A^2 F^2 - 2ABC F + B^2 C^2 - 2BCGH + G^2 H^2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta I_4 \times II_5}{64\beta^2} &= (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') \\
&\quad + B^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2,
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_4 \times II_6$

$$\frac{\eta I_4 \times II_6}{64\beta^2} = \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' & p'_{b_8} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} & \eta_{b_4 b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix},$$

Expandindo em cofatores com relação à quarta coluna,

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -p_{b_8} \begin{vmatrix} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{vmatrix} + \eta_{b_2 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - p'_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{vmatrix} + \eta_{b_4 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \end{vmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ -p^{b_4} \begin{vmatrix} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_2 b_4} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - k'^{b_4} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_4 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \end{vmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

Multiplicando cada termo da primeira linha pela segunda linha e distribuindo o 4-vetor em evidência,

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p^{b_4} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_2 b_4} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| \\ + k'^{b_4} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_4 b_8} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} -p^{b_4} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_2 b_4} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| \\ -k'^{b_4} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_4 b_8} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ k_{b_4} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_4} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p^{b_4} p'_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_2 b_4} p'_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| \\ + k'^{b_4} p'_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| - \eta^{b_4 b_8} p'_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left\{ \begin{array}{ccc} p \cdot k & p_{b_6} & p \cdot k' \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & p'_{b_6} & p' \cdot k' \end{array} \right| \begin{array}{ccc} -p^{b_4} \eta_{b_4 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_2 b_4} \eta_{b_4 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| \\ -k'^{b_4} \eta_{b_4 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} \end{array} \right| + \eta^{b_4 b_8} \eta_{b_4 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' \end{array} \right| \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Simplificando a notação usando o dicionário,

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ C & p'_{b_6} & F & H & k'^{b_6} & F \\ A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & H & k'^{b_6} & F \\ k^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & k'^{b_2} & A & p^{b_6} & G \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ H & k'_{b_6} & 0 & A & p^{b_6} & G \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & A & p_{b_6} & B \\ H & k'^{b_6} & F & A & p^{b_6} & G \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ C & p'_{b_6} & F & H & k'^{b_6} & F \\ A & p_{b_6} & B & k_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & p'_{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & H & k'^{b_6} & F \\ k^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & k'^{b_2} & k_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & p'_{b_2} \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & C & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ H & k'_{b_6} & 0 & k_{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & p'_{b_2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ C & p'_{b_6} & F & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & H & k'^{b_6} & F \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & H & k'^{b_6} & F \\ A & p_{b_6} & B & C & p'^{b_6} & 0 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & H & k'^{b_6} & F \\ k^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_6} & k'^{b_2} & C & p'^{b_6} & 0 \end{array} \right| \\
&+ \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ H & k'_{b_6} & 0 & C & p'^{b_6} & 0 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ H & k'^{b_6} & F & C & p'^{b_6} & 0 \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & A & p_{b_6} & B \\ H & k'^{b_6} & F & k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ A & p^{b_6} & G & C & p'_{b_6} & F \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p^{b_6} & G & A & p_{b_6} & B \\ H & k'^{b_6} & F & k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & C & p'_{b_6} & F \end{array} \right| \\
&- \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p^{b_6} & G & A & p_{b_6} & B \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ H & k'^{b_6} & F & C & p'_{b_6} & F \end{array} \right| + 4 \left| \begin{array}{ccc|ccc} A & p_{b_6} & B & A & p^{b_6} & G \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} & H & k'^{b_6} & F \\ C & p'_{b_6} & F & C & p'_{b_6} & F \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Juntando os termos e simplificando a expressão,

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} A & p_{b_6} & B \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ H & k'_{b_6} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & p^{b_6} & G \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ C & p'^{b_6} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - \underbrace{\begin{vmatrix} A & p_{b_6} & B \\ k_{b_2} & \eta_{b_2 b_6} & k'_{b_2} \\ k^{b_2} & \delta_{b_6}^{b_2} & k'^{b_2} \end{vmatrix}}_{=0} \begin{vmatrix} A & p^{b_6} & G \\ H & k'^{b_6} & F \\ C & p'^{b_6} & 0 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} A & p^{b_6} & G \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} \\ k_{b_2} & \delta_{b_2}^{b_6} & p'_{b_2} \end{vmatrix}}_{=0} \begin{vmatrix} A & p_{b_6} & C \\ C & p'_{b_6} & F \\ H & k'_{b_6} & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculando os produtos de determinantes obtemos,

$$= A^2 F^2 - 2ABC F + B^2 C^2 - 2AFGH + G^2 H^2.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta I_4 \times II_6}{64\beta^2} &= (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') \\
&\quad + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2,
\end{aligned}$$

Cálculo do termo $\eta I_5 \times II_6$

$$\frac{\eta I_5 \times II_6}{64\beta^2} = \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' & p_{b_8} \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} & \eta_{b_2 b_8} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' & k_{b_8} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} & \eta_{b_6 b_8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \cdot k & p^{b_6} & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & \eta^{b_2 b_6} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & k'^{b_6} & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & \eta^{b_6 b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix}.$$

Expandindo em cofatores, usando a quarta coluna do primeiro determinante, e segunda coluna do segundo determinante,

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -p_{b_8} \begin{vmatrix} p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{vmatrix} + \eta_{b_2 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - k_{b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{vmatrix} + \eta_{b_6 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \end{vmatrix} \right\} \\
&\quad \left\{ -p^{b_6} \begin{vmatrix} k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_2 b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - k'^{b_6} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{vmatrix} + \eta^{b_6 b_8} \begin{vmatrix} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \end{vmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicando cada termo da primeira linha pela segunda linha e distribuindo o 4-vetor em evidência,

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ccc} p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p^{b_6} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| \\ + k'^{b_6} p_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ -\eta^{b_6 b_8} p_{b_8} & k^{b_2} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} -p^{b_6} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| \\ -k'^{b_6} \eta_{b_2 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ + \eta^{b_6 b_8} \eta_{b_2 b_8} & k^{b_2} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p'_{b_6} & \eta_{b_4 b_6} & k'_{b_6} \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} p^{b_6} k_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| \\ + k'^{b_6} k_{b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ -\eta^{b_6 b_8} k_{b_8} & k^{b_2} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \end{array} \right| \end{array} \right\} \\
&+ \left| \begin{array}{ccc} p \cdot p' & p_{b_4} & p \cdot k' \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p' \cdot k & k_{b_4} & k \cdot k' \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{ccc} -p^{b_6} \eta_{b_6 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| \\ -k'^{b_6} \eta_{b_6 b_8} & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k^{b_8} & p'^{b_8} & \eta^{b_4 b_8} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p \cdot k & p \cdot p' & p^{b_4} \\ + \eta^{b_6 b_8} \eta_{b_6 b_8} & k^{b_2} & p'^{b_2} \\ k \cdot k' & p' \cdot k' & k'^{b_4} \end{array} \right| \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Contraindo os 4-vetores com os determinantes,

Usando o dicionário para simplificar a notação,

Juntando os termos e simplificando a expressão,

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} G & p_{b_4} & B \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ F & k'_{b_4} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & G & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ 0 & C & k^{b_4} \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} G & p_{b_4} & B \\ C & k_{b_4} & H \\ F & k'_{b_4} & 0 \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} A & G & p^{b_4} \\ k^{b_2} & p'^{b_2} & \eta^{b_2 b_4} \\ k_{b_2} & p'_{b_2} & \delta^{b_4}_{b_2} \end{vmatrix}}_{=0} - \underbrace{\begin{vmatrix} G & p_{b_4} & B \\ p'_{b_2} & \eta_{b_2 b_4} & k'_{b_2} \\ p'^{b_2} & \delta^{b_2}_{b_4} & k'^{b_2} \end{vmatrix}}_{=0} \begin{vmatrix} A & G & p^{b_4} \\ H & F & k'^{b_4} \\ 0 & C & k^{b_4} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculando o produto dos determinantes,

$$= A^2 F^2 - 2 A F G H + B^2 C^2 - 2 B C G H + G^2 H^2.$$

$$A = p \cdot k, \quad B = p \cdot k',$$

$$C = p' \cdot k, \quad F = p' \cdot k',$$

$$G = p \cdot p' \text{ e } H = k \cdot k'.$$

$$\frac{\eta I_5 \times II_6}{64\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') \\
&\quad + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2.
\end{aligned}$$

B.2 Resumo dos termos

Os 21 termos calculados são resumidos a seguir.

1.

$$\frac{\eta I_1 \times II_1}{64\alpha^2} = 4(p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2$$

2.

$$\frac{\eta I_2 \times II_2}{64\alpha^2} = 4(p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2.$$

3.

$$\frac{\eta I_3 \times II_3}{64\alpha^2} = 4(p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2.$$

4.

$$\frac{\eta I_4 \times II_4}{64\beta^2} = 4(p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2.$$

5.

$$\frac{\eta I_5 \times II_5}{64\beta^2} = 4(p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2.$$

6.

$$\frac{\eta I_6 \times II_6}{64\beta^2} = 4(p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2.$$

7.

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_1 \times II_2}{64\alpha^2} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ & - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k'), \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_1 \times II_3}{64\alpha^2} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ & - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k'), \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \frac{\eta I_2 \times II_3}{64\alpha^2} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ & - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k'), \end{aligned}$$

10.

$$\frac{\eta I_1 \times II_4}{64\alpha\beta} = 0.$$

11.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\eta I_1 \times II_5}{64\alpha\beta} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
 & - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') ,
 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\eta I_1 \times II_6}{64\alpha\beta} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
 & - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') ,
 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\eta I_2 \times II_4}{64\alpha\beta} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
 & - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') ,
 \end{aligned}$$

14.

$$-\frac{\eta I_2 \times II_5}{64\alpha\beta} = 0$$

15.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\eta I_2 \times II_6}{64\alpha\beta} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
 & - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') ,
 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\eta I_3 \times II_4}{64\alpha\beta} = & (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\
 & - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') ,
 \end{aligned}$$

17.

$$-\frac{\eta I_3 \times II_5}{64\alpha\beta} = (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \\ - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k').$$

18.

$$-\frac{\eta I_3 \times II_6}{64\alpha\beta} = 0$$

19.

$$\frac{\eta I_4 \times II_5}{64\beta^2} = (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') \\ + B^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2,$$

20.

$$\frac{\eta I_4 \times II_6}{64\beta^2} = (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') \\ + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2,$$

21.

$$\frac{\eta I_5 \times II_6}{64\beta^2} = (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 - 2(p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') \\ + (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 - 2(p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') + (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2.$$

B.3 Soma dos 21 termos e probabilidade de interação

Finalmente, adicionamos todos os termos seguindo a relação

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 (I \times III)_i \times II_i + \frac{1}{2} \sum_{i < j=1}^6 (I \times III)_i \times II_j,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = & 64 (\alpha^2 + \beta^2) \left[10 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + 10 (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + 10 (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \right. \\
& - 8 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 8 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 8 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') \\
& - 64\alpha\beta \left[12 (p \cdot p')^2 (k \cdot k')^2 + 12 (p \cdot k)^2 (p' \cdot k')^2 + 12 (p \cdot k')^2 (p' \cdot k)^2 \right. \\
& \left. \left. - 16 (p \cdot k) (p \cdot k') (p' \cdot k) (p' \cdot k') - 16 (p \cdot k) (p' \cdot k') (p \cdot p') (k \cdot k') - 16 (p \cdot k') (p' \cdot k) (p \cdot p') (k \cdot k') \right] \right].
\end{aligned}$$

Para escrever esta expressão em termos das variáveis de Mandelstam, definimos

$$\begin{aligned}
s &= (k + k')^2 = (p + p')^2, \\
&= 2k \cdot k' = 2p \cdot p',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t &= (k - p)^2 = (k' - p')^2, \\
&= -2k \cdot p = -2k' \cdot p',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= (k - p')^2 = (k' - p)^2, \\
&= -2k \cdot p' = -2k' \cdot p,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
p \cdot p' &= k \cdot k' = \frac{s}{2}, \\
p \cdot k &= p' \cdot k' = -\frac{t}{2}, \\
p \cdot k' &= p' \cdot k = -\frac{u}{2}.
\end{aligned}$$

onde k e k' são os momentos dos fótons iniciais e p e p' os momentos dos fótons finais. Substituindo estas relações na probabilidade de interação, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = & (\alpha^2 + \beta^2) (10s^4 + 10t^4 + 10u^4 - 8t^2u^2 - 8t^2s^2 - 8u^2s^2) \\ & - 2\alpha\beta (6s^4 + 6t^4 + 6u^4 - 8t^2u^2 - 8t^2s^2 - 8u^2s^2).\end{aligned}$$

Manipulando esta expressão, podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = & 4(\alpha - \beta)^2 [(s - t - u)(s + t - u)(s - t + u)(s + t + u)] \\ & + 2(\alpha - \beta)^2 (s^4 + t^4 + u^4) + 4(\alpha^2 + \beta^2) (s^4 + t^4 + u^4).\end{aligned}$$

Porém, como para os fótons a soma das variáveis de Mandelstam é nula,

$$s + t + u = 0,$$

o primeiro termo é nulo e a probabilidade de interação é dada por

$$\mathcal{P} = 2 [(\alpha - \beta)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2)] (s^4 + t^4 + u^4).$$