

Chirale Störungsrechnung im Sektor ungerader innerer Parität bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Christian Hacker
geboren in Frankfurt am Main

Mainz, September 2008

Dekan:

1.Gutachter:

2.Gutachter:

Datum der mündlichen Prüfung: 12.12.2008

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation behandelt den anomalen Sektor bzw. den Sektor ungerader innerer Parität in mesonischer chiraler Störungsrechnung (mesonische ChPT) bis zur chiralen Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$. Auf eine Einführung in die Quantenchromodynamik (QCD) und ihrer Verknüpfung mit der chiralen Symmetrie folgt die Betrachtung der mesonischen ChPT im Sektor gerader sowie ungerader innerer Parität bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$. Der so genannte Wess-Zumino-Witten Term, welcher den Einfluss der axialen Anomalie bezogen auf die ChPT widerspiegelt, wird studiert. Anschließend wird die allgemeinste Lagrangedichte der Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$ $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ im Sektor ungerader innerer Parität detailliert analysiert. Sie enthält in ihrer $\text{SU}(3)$ -Formulierung 23 Niederenergiekonstanten (*low-energy constant* = LEC). Aus Sicht der ChPT sind diese LECs freie Parameter, die auf irgendeine Art und Weise fixiert werden müssen. Es wird herausgearbeitet, bei welchen Prozessen und in welchen Kombinationen die jeweiligen LECs auftreten. Daraufhin wird versucht so viele dieser LECs wie möglich mittels Vektormesondominanz sowie experimenteller Daten abzuschätzen und anzupassen. Hierfür wird zuerst die Vorgehensweise einer konsistenten Rechnung im Sektor ungerader innerer Parität bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$ studiert, gefolgt von der Berechnung von insgesamt vierzehn geeigneten Prozessen im Rahmen der ChPT bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$. Unter Verwendung experimenteller Daten werden dreizehn der LECs angepasst, wobei gegenwärtig nicht bei allen betrachteten Prozessen experimentelle Daten zur Verfügung stehen. Die Ergebnisse werden diskutiert und Unterschiede bzw. Übereinstimmungen mit anderen Rechnungen herausgearbeitet. Zusammenfassend erhält man einen umfassenden Einblick in den Sektor ungerader innerer Parität in mesonischer ChPT bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^6)$.

Abstract

This thesis is concerned with the anomalous sector, respectively the odd intrinsic parity sector, in mesonic chiral perturbation theory (mesonic ChPT) up to chiral order $\mathcal{O}(q^6)$. The starting point is an introduction to quantum chromodynamics (QCD) and the connection between QCD and chiral symmetry. Afterwards we examine the even and odd intrinsic parity sector in mesonic ChPT up to the chiral order $\mathcal{O}(q^4)$. The so called Wess-Zumino-Witten term, which reflects the influence of the axial anomaly on ChPT, is studied. We then make a detailed analysis of the most general anomalous Lagrangian density of chiral order $\mathcal{O}(q^6)$. In the $SU(3)$ -version $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ contains 23 low-energy constants (LECs). From the point of view of ChPT these LECs are free parameters, which have to be fixed in some way. We derive for which processes and in what combinations the particular LECs contribute. Then we try to fix as many LECs as possible by using vector meson dominance and experimental data. For this purpose we first study the procedure of performing a consistent calculation in the anomalous sector up to chiral order $\mathcal{O}(q^6)$. The second step is the calculation of fourteen appropriate processes in the framework of ChPT up to order $\mathcal{O}(q^6)$. With the use of experimental data we can fix thirteen LECs. The results are discussed and compared to other calculations. In summary one gets a global insight into the odd intrinsic parity sector of the mesonic ChPT up to order $\mathcal{O}(q^6)$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	QCD und chirale Symmetrie	7
2.1	Die Lagrangedichte der QCD	7
2.1.1	Symmetrieströme und Symmetriebrechung	10
2.1.2	Externe Felder	12
2.1.3	Spontane Symmetriebrechung in der QCD	15
3	Chirale Störungsrechnung	18
3.1	Effektive Lagrangedichten	18
3.1.1	Anomalien	22
3.2	Die anomale Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^4)$	26
3.2.1	Wess-Zumino-Witten (WZW) Wirkung	26
4	ChPT im Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$	30
4.1	Die effektive Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$	30
4.2	Konsistente Rechnung bis zur $\mathcal{O}(q^6)$	33
4.2.1	Renormierung	35
4.2.2	Vektormesondominanz (VMD)	39
5	Ergebnisse	44
5.1	Reaktionstyp $\phi + 2\gamma^*$ und $\phi + \gamma^*W$	44
5.1.1	$\pi^0 \rightarrow \gamma^*\gamma^*$	44
5.1.2	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	45
5.1.3	$\pi^0 \rightarrow \gamma e^+e^-$	46
5.1.4	$\eta \rightarrow \gamma^*\gamma^*$	49
5.1.5	$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	50
5.1.6	$\eta \rightarrow \gamma e^+e^-$	51

5.1.7	$K^+/\pi^+ \rightarrow e^+\nu\gamma$	53
5.2	Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*/W$	57
5.2.1	$\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$	57
5.2.2	$\pi^-e^- \rightarrow \pi^-e^-\pi^0$	60
5.2.3	$K^-e^- \rightarrow K^-e^-\pi^0/\eta$	65
5.2.4	$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu$	68
5.3	Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma$	71
5.3.1	$\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	71
5.3.2	$\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$	77
5.4	Reaktionstyp 5ϕ	82
5.4.1	$K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	82
5.5	Numerische Werte der LECs	85
6	Zusammenfassung	88
A	SU(3) und Homotopiegruppen	91
B	Diagrammatik	94
C	Integrale	97
D	Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten	100
E	Kinematik	102
F	Prozesse	107
G	Mischungsschema	116
H	Lagrangedichten	118

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten 100 Jahren ist wohl eine der bedeutendsten Erkenntnisse, die die naturwissenschaftliche Gemeinschaft erlangt hat, diejenige, dass Symmetrien bzw. Symmetriebrechungen und die damit verbundenen Folgerungen zum Verständnis der Natur unverzichtbar sind. Beginnend mit Einsteins Relativitätstheorie, weiterführend durch die Entwicklung der Quantenmechanik bis hin zum Standardmodell der Teilchenphysik und zur Supersymmetrie, fast alle der heutigen Modelle und Theorien basieren auf Symmetrien. Sie stellen nicht nur ein schönes Werkzeug dar, um mit den Theorien und Modellen zu arbeiten, sie sind auch notwendig, um diese Theorien und Modelle zu definieren. Klassische Symmetrien sind z.B. Zeit- bzw. Raumtranslationen und Rotationen, unter deren Invarianz die Erhaltung von Energie bzw. Impuls und Drehimpuls für das betrachtete System folgt. Andere Beispiele sind die $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie des Standardmodells, die Isospin- und *flavor*-Symmetrie der Starken Wechselwirkung, um nur einige zu nennen. Man unterscheidet zwischen lokalen und globalen Symmetrien und den hieraus abgeleiteten Folgerungen. Des Weiteren können viele Phänomene der Natur unter der Annahme, dass Symmetrien gebrochen sind, beschrieben werden. Hierbei können Symmetrien spontan, explizit oder auch durch Anomalien gebrochen werden. Das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung taucht häufig in Zusammenhang mit Phasenübergängen auf und beschreibt z.B. Magnetismus, Supraleitung und die Struktur der vereinheitlichten elektroschwachen Wechselwirkung des Standardmodells. Der wissenschaftliche Fortschritt im letzten Jahrhundert beruht unter anderem auch auf der Erkenntnis, dass allein die Annahme, eine Symmetrie sei gebrochen, zu Schlussfolgerungen führte, die wesentlich zur Beschreibung der in

der Natur auftauchenden Phänomene beitrug. Die wirkliche Kenntnis warum oder wie der Mechanismus der Symmetriebrechung zustande kommt ist nicht erforderlich.

Nach unserem heutigen Wissensstand bilden die Gravitation, die starke und elektroschwache Wechselwirkungen die fundamentalen Kräfte in der Natur. Letztere lassen sich in einer Eichtheorie, dem so genannten Standardmodell, zusammenfassen. Im Allgemeinen stellt zur Beschreibung einer Wechselwirkung eine Quantenfeldtheorie (QFT) und hierdurch insbesondere als Kernstück die zugehörige Lagrangedichte die Basis dar.

Bei der starken Wechselwirkung hat sich die Quantenchromodynamik (QCD) als Beschreibung etabliert [1, 2, 3]¹. Die Lagrangedichte der QCD wird ausgedrückt durch Quark- und Gluonfelder und weist eine exakte lokale *color* $SU(3)$ -Symmetrie sowie eine annähernde globale *flavor* $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie auf. Dem Standardmodell der Teilchenphysik folgend sind die fundamentalen Bausteine, die die Materie formen, einerseits Quarks und andererseits Leptonen. Es existieren sechs verschiedene Arten von Quarks, genannt *flavors*. Letztere bezeichnet man mit *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charmed* (c), *bottom* (b) und *top* (t), deren elektrische Ladung die Werte von $2/3$ für die u, c und t Quarks und $-1/3$ für die d, s und b Quarks annimmt. Die Massen reichen von ein paar MeV für die u und d Quarks bis zu ungefähr 172 GeV für das t Quark [4]. Des Weiteren besitzt jedes Quark unabhängig vom *flavor* eine Farbladung, die drei so genannte *colors* (rot, grün, blau) annehmen kann. Die Gluonen bezeichnet man als die Eichbosonen der QCD. Sie tragen selbst Farbladung und vermitteln die Wechselwirkung zwischen den Quarks. Der nichtabelsche Charakter der zugrunde liegenden Eichgruppe $SU(3)$ zeigt sich in der Selbstwechselwirkung der Gluonen.

Betrachtet man das hadronische Spektrum, so stellt man fest, dass isolierte freie Quark- bzw. Gluonzustände in der Natur nicht existieren. Man findet nur farbneutrale Kombinationen von Quarks und Gluonen, wie Pionen, Nukleonen etc., genannt Hadronen. Diese bemerkenswerte Eigenschaft, deren exakter physikalischer Ursprung bis zur heutigen Zeit unklar ist, bezeichnet man als *confinement* [5]. Die Herleitung dieses Phänomens aus der QCD heraus bleibt somit eine interessante offene Frage, deren Beantwortung jedoch möglicherweise mit einem anderen Merkmal, der so genannten *asymptotischen Freiheit* [1, 5, 6], verknüpft ist. Hiermit bezeichnet man die

¹In dieser Arbeit wird hauptsächlich die starke Wechselwirkung betrachtet. Eine Einführung in das Standardmodell der Teilchenphysik ist z.B. in Ref. [4] gegeben.

Veränderung der effektiven starken Kopplungskonstante in Abhängigkeit der betrachteten Energie. Es zeigte sich, dass bei der Erhöhung der Energie die Stärke der Kopplungskonstante abnimmt und beim Erniedrigen der Energie die Stärke der Kopplungskonstante zunimmt, wodurch ein Mechanismus für *confinement* bereitgestellt werden könnte. Die Zunahme der Stärke der Kopplungskonstante im Niederenergiebereich, also bei großen Längenskalen, stellt für QCD-Rechnungen ein signifikantes Problem dar. Bei niedrigen Energien ist eine perturbative Behandlung der Theorie bezogen auf die Kopplungskonstante nicht anwendbar. Bisher zumindest ist keine analytische Methode bekannt, mit der man die QCD bei niedrigen Energien lösen könnte.

Natürlich wurden in der Vergangenheit verschiedene Versuche unternommen, sich aus diesem Dilemma zu lösen. Neben phänomenologischen Modellen (wie *Bag*, *Skyrme*, usw.), die konstruiert wurden, um die QCD im Niederenergiebereich nachzuahmen [7, 8, 9], stellt die Gitter-QCD [10] ein Werkzeug zur nichtperturbativen Behandlung der QCD dar². Hierbei wird die Wirkung ins Euklidische fortgesetzt und die Raumzeit durch Einführung eines endlichen Gitters diskretisiert, wodurch numerische Lösungen der QCD erzeugt werden können. Neben der Gitter-QCD, die bis jetzt Fortschritte gemacht hat und wohl auch zukünftig weitere Fortschritte machen wird, ist natürlich auch eine analytische Methode für den Niederenergiebereich, d.h. unter der Skala von ~ 1 GeV wünschenswert.

So genannte Effektive Feldtheorien (EFT) stellen hierfür eine Möglichkeit zur Verfügung [12]. Im Allgemeinen versteht man unter einer EFT eine Niederenergieapproximation einer fundamentalen Theorie. Durch das Aufstellen der allgemeinsten Lagrangedichte, die alle Symmetrien der fundamentalen Theorie erhält, geschrieben jedoch in Form effektiver Variablen, ist eine Beschreibung der Physik im Niederenergiebereich möglich ohne explizite Lösung der zugrunde liegenden Theorie. Genauer gesagt lassen sich mit einer EFT physikalische Größen in Form einer Entwicklung von q/Λ berechnen, wobei q für Impulse oder Massen steht und Λ die betrachtete Skala im Niederenergiebereich bezeichnet. Jedoch sollte man beachten, dass die EFT durch die Entwicklung in q/Λ für zu große Werte von q unbrauchbar wird. Des Weiteren berechnet man in der Realität physikalische Größen bis zu einer gegebenen Ordnung. Diese enthält eine endliche Anzahl von Termen, wodurch die erreichbare Genauigkeit begrenzt ist. Eine systematische Verbesserung der Genauigkeit erhält man durch die nächst höhere Ordnung. Die Lagrange-

²Eine Einführung in Gitter-QCD ist z.B. in Ref. [11] gegeben.

dicke jeder EFT enthält, bedingt durch ihre Konstruktion, eine unendliche Anzahl an Termen. Jeder in der Lagrangedichte auftretende Term wird mit einem Koeffizient gewichtet. Diese Koeffizienten bezeichnet man als Niederenergiekopplungskonstanten (*low-energy coupling constant* = LEC). Letztere sind aus Sicht der EFT freie Parameter. Falls die Lösung der zugrunde liegende Theorie bekannt ist, können diese LECs berechnet werden. Ist dies jedoch nicht der Fall, müssen die LECs in irgendeiner Weise abgeschätzt oder angepasst werden. Des Weiteren ist eine EFT nicht im traditionellen Sinne renormierbar. Da jedoch in Wirklichkeit physikalische Größen bis zu einer endlichen Ordnung berechnet werden und die Lagrangedichte alle Terme, die durch Symmetrieüberlegungen erlaubt sind, berücksichtigt, können die auftretenden Unendlichkeiten Ordnung für Ordnung von den jeweils auftretenden LECs absorbiert werden. In diesem Sinne ist die Renormierbarkeit einer EFT zu verstehen [13, 14].

Die Methode der EFT lässt sich auf die QCD im Niederenergiebereich anwenden. Ein Versuch besteht darin, einen Teil der Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie, die so genannte chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie und ihre dynamische Realisierung, d.h. der spontane Symmetriebruch zur $SU(3)_V$, auf eine effektive Lagrangedichte zu übertragen. Letztere wird ausgedrückt in Form effektiver dynamischer Freiheitsgrade, hier nicht Quarks und Gluonen, sondern die für diesen Energiebereich asymptotisch messbaren Zustände. Diese EFT bezeichnet man als Chirale Störungstheorie (ChPT) [15, 16, 17]. In ihrer $SU(3)$ Formulierung sind die Mitglieder des pseudoskalaren Mesonoktetts (π , K , η), identifiziert als die Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung, die effektiven dynamischen Freiheitsgrade³. Physikalische Größen werden berechnet als eine Entwicklung in kleinen Parametern wie die Mesonmassen und kleine Impulse. Die Wechselwirkung zwischen den effektiven Freiheitsgraden im chiralen Grenzfall verschwindet für verschwindende Energien⁴. Die betrachtete Skala in der ChPT liegt in der Größenordnung von $\Lambda \sim 1 \text{ GeV}$; die auftretenden LECs werden zurzeit mit Hilfe der Gitter-QCD [18] und QCD-inspirierter Modelle abgeschätzt oder an experimentelle Daten angepasst. Für praktische Rechnungen ist es wichtig, entscheiden zu können, welche Diagramme bis zu einer gegebenen Ordnung relevant sind. Hierfür steht das so genannte Weinberg'sche Zählchema [15], welches eine Verknüpfung zwischen der chiralen Entwicklung und der Schlei-

³Mesonische ChPT. Baryonische ChPT wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

⁴Im chiralen Grenzfall werden Quarkmassen null gesetzt.

fenentwicklung herstellt, zur Verfügung⁵. Die effektive Lagrangedichte in der mesonischen ChPT lässt sich symbolisch schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots, \quad (1.1)$$

wobei der Index die chirale Ordnung in der Entwicklung bezeichnet. In der mesonischen ChPT treten nur gerade Ordnungen auf. Im Allgemeinen unterscheidet man in der ChPT zwischen dem normalen Sektor oder dem Sektor gerader innerer Parität und dem anomalen Sektor oder dem Sektor ungerader innerer Parität. Der normale Sektor beginnt in führender Ordnung mit der bekannten Gasser-Leutwyler Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^2)$ [17].

Diese Dissertation behandelt den anomalen Sektor in mesonischer ChPT bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Betrachtet man die QCD-Lagrangedichte im chiralen Grenzfall, so weist diese, abgesehen von der lokalen *color* $SU(3)$ -Symmetrie und den diskreten Symmetrien, eine globale

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A, \quad (1.2)$$

Symmetrie auf. Die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen zur $SU(3)_V$, die $U(1)_V$ -Symmetrie ist erhalten und gewährleistet die Erhaltung der Baryonenzahl, die $U(1)_A$ -Symmetrie ist jedoch nur auf klassischem Niveau erhalten. Durchläuft man die volle Quantentheorie, so wird diese explizit durch die so genannte axiale abelsche Anomalie gebrochen [19, 20]. Der Einfluss der Anomalie bezogen auf die ChPT spiegelt sich im so genannten Wess-Zumino-Witten (WZW) Term [21, 22] wider, welcher den führenden Beitrag der $\mathcal{O}(q^4)$ des anomalen Sektors darstellt. Die Konstruktion der Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$ wurde von mehreren Autoren vorgenommen [23, 24]. Wir beziehen uns in dieser Arbeit auf die in Ref. [23] angegebene Lagrangedichte. Letztere enthält in ihrer $SU(3)$ -Formulierung 23 LECs. Unter anderem soll einerseits aufgezeigt werden, bei welchen Prozessen und in welchen Kombinationen die jeweiligen LECs auftreten und andererseits unter Verwendung experimenteller Daten sowie Modellen so viele dieser LECs wie möglich abgeschätzt bzw. angepasst werden. Diese Dissertation zeigt einen umfassenden Einblick in den anomalen Sektor der mesonischen ChPT bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ und ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird eine Einführung in die QCD und ihrer Verknüpfung mit der chiralen Symmetrie gegeben. Beginnend mit der Lagrangedichte der QCD

⁵Das Weinberg'sche Zählschema wird in Abschnitt 3.1 diskutiert.

und den zugehörigen Symmetrieströmen werden folgend die explizite und spontane Brechung von Symmetrien sowie die Kopplung an externe Felder behandelt.

Kapitel 3 befasst sich mit der mesonischen ChPT. Hierbei wird insbesondere auf die effektiven Lagrangedichten bis zur $\mathcal{O}(q^4)$ eingegangen. Einerseits wird der normale Sektor und auf der anderen Seite der anomale Sektor behandelt. Im historischen Kontext wird auf die abelsche Anomalie eingegangen und abschließend der hieraus folgende WZW-Term betrachtet.

Kapitel 4 behandelt die mesonische ChPT im anomalen Sektor oder besser im Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Als Startpunkt dient die SU(3)-Version der effektiven Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ mit ihren 23 LECs aus Ref. [23]. Im Folgenden wird die Vorgehensweise für eine konsistente Rechnung im Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ vorgestellt, wobei insbesondere auf die benötigten Lagrangedichten und auf die Renormierung eingegangen wird. Zum Schluss wird das Vektormesondominanz (VMD) Modell behandelt und hiermit eine Abschätzung für die „dynamischen“ LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ angegeben⁶.

Der Inhalt des fünften Kapitels zeigt die Ergebnisse der Berechnung von insgesamt vierzehn Prozessen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Letztere sind gegliedert nach den Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$, $\phi + \gamma^*W$, $3\phi + \gamma^*$, $3\phi + W$, $3\phi + 2\gamma^*$ und 5ϕ , wobei ϕ für (π, K, η) steht und γ bzw. W das Photon bzw. W -Boson bezeichnet. Die aus den Amplituden berechneten physikalischen Größen wie Zerfallsbreiten, Formfaktoren und Wirkungsquerschnitte werden verwendet, um mit Hilfe experimenteller Daten die auftretenden LECs anzupassen. Des Weiteren werden die Ergebnisse diskutiert und Unterschiede oder Übereinstimmungen mit anderen Rechnungen herausgearbeitet. Abschließend werden alle abgeschätzten bzw. angepassten numerischen Werte der LECs und die zugehörigen Prozesse in einer Tabelle zusammengefasst.

Kapitel 6 schließt diese Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung der behandelten Aspekte und gibt einen Ausblick auf mögliche zukünftige Projekte, während der Anhang nützliche Details wie z.B. Definitionen von Integralen, Zerfallsbreiten und Wirkungsquerschnitten sowie einige Beispielrechnungen enthält.

⁶Hierbei bezieht sich „dynamisch“ auf diejenigen Größen, die nicht Koeffizienten der chiralen Symmetriebrechung sind.

Kapitel 2

QCD und chirale Symmetrie

Die Quantenchromodynamik (QCD) [1, 2, 3] ist die Eichtheorie der starken Wechselwirkung mit der $SU(3)_C$ ¹ als zugrunde liegender Eichgruppe. Sie beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks durch den Austausch masseloser Eichbosonen, den so genannten Gluonen. Im Folgenden wird eine Einführung in die QCD und ihrer Verknüpfung mit der chiralen Symmetrie in Anlehnung an [25] gegeben. Beginnend mit der Lagrangedichte der QCD und den zugehörigen Symmetrieströmen wird die explizite und spontane Symmetriebrechung sowie die Kopplung an externe Felder behandelt.

2.1 Die Lagrangedichte der QCD

Bezeichnet man die Quarkfelder mit q_f , wobei f eines der sechs *flavors*, *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) und *top* (t) bezeichnet, so ist die QCD-Lagrangedichte gegeben durch [26, 27]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Quarks tragen die so genannte Farbladung, welche die drei *colors* rot (r), grün (g) und blau (b) annehmen kann. Quarkfelder sind Farbtripletts

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

¹ $\mathcal{C}$ steht für *color*.

Definiert man²

$$\tilde{\mathcal{O}} := \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{O}_a, \quad (2.3)$$

so transformiert q_f unter einer Eichtransformation $g(x)$, beschrieben durch einen Satz aus Parametern $\theta(x) = [\theta_1(x), \dots, \theta_8(x)]$, gemäß

$$q_f \mapsto q'_f = \exp[-i\tilde{\theta}(x)] q_f = U[g(x)] q_f. \quad (2.4)$$

Die kovariante Ableitung $D_\mu q_f$

$$D_\mu q_f = \partial_\mu q_f - i\mathbf{g}\tilde{A}_\mu q_f, \quad (2.5)$$

transformiert gemäß

$$D_\mu q_f \mapsto D'_\mu q'_f = U[g(x)] D_\mu q_f. \quad (2.6)$$

Durch Forderung nach Eichinvarianz folgt die Transformation der Eichfelder zu

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \mapsto \tilde{\mathcal{A}}'_\mu(x) = U[g(x)] \tilde{\mathcal{A}}_\mu(x) U^\dagger[g(x)] - \frac{i}{\mathbf{g}} \partial_\mu U[g(x)] U^\dagger[g(x)]. \quad (2.7)$$

Ausgehend von Gl. (2.7), transformiert der Feldstärketensor

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + \mathbf{g} f_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,c}, \quad (2.8)$$

gemäß

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}(x) \mapsto \tilde{\mathcal{G}}'_{\mu\nu}(x) = U[g(x)] \tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}(x) U^\dagger[g(x)]. \quad (2.9)$$

Die acht Eichfelder werden mit $\mathcal{A}_{\mu,a}$ assoziiert. f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Gruppe $\text{SU}(3)$ und $\mathbf{g}$ ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Quarks sind nicht als freie asymptotische Zustände messbar, die Bedeutung ihrer Massen und deren numerischen Werte sind somit immer eng mit der Methode der Extraktion aus hadronischen Eigenschaften verknüpft [4]. Ausgehend von Tabelle 2.1 können die sechs Quark *flavors* in zwei Gruppen unterteilt werden,

$$m_u, m_d, m_s \ll 1 \text{ GeV} \leq m_c, m_b, m_t, \quad (2.10)$$

² λ_a bezeichnet die Gell-Mann Matrizen, welche in Anhang A angegeben sind.

<i>flavor</i>	u	d	s
Masse [MeV]	1.5 – 3.3	3.5 – 6.0	104 ± 26
<i>flavor</i>	c	b	t
Masse [GeV]	1.27 ± 0.07	4.20 ± 0.07	171.2 ± 2.1

Tabelle 2.1: Die Quarks und ihre Massen [4].

wobei die Größenordnung von 1 GeV mit den Massen der leichtesten Hadronen (keine Goldstone-Bosonen), wie z.B. $m_\rho = 0.77$ GeV, verknüpft ist. Betrachtet man die Massen der leichtesten Mesonen und Baryonen, die ein *charmed* Quark enthalten, $D^+ = c\bar{d}$ und $\Lambda_c^+ = udc$, mit $m_{D^+} = (1869.4 \pm 0.5)$ MeV und $m_{\Lambda_c^+} = (2284.9 \pm 0.6)$ MeV [4], so benötigt man z.B. zur Produktion eines D^+D^- Paares in einer e^+e^- Kollision eine Schwerpunktsenergie von ungefähr 3.74 GeV, weit entfernt von dem Niederenergiebereich ($\ll 1$ GeV). Betrachtet man des Weiteren die Masse der aus leichten Quarks aufgebauten Hadronen, so sieht man, dass deren Masse sehr viel größer ist als die Summe der in ihnen enthaltenen Quarkmassen. Für das Proton z.B. gilt

$$m_p \gg 2m_u + m_d. \quad (2.11)$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass der Hauptteil der Masse durch Wechselwirkungen der Quarks und der Gluonen innerhalb des Protons erzeugt wird. Hierdurch motiviert lässt sich die volle QCD Lagrangedichte durch ihre *light-flavor* Version approximieren³ und die Lagrangedichte im chiralen Grenzfall, $\mathcal{L}_{\text{qcd}}^0$, sollte somit als guter Startpunkt zur Diskussion des Niederenergiebereichs der QCD dienen⁴

$$\mathcal{L}_{\text{qcd}}^0 = \sum_f \bar{q}_f i\gamma^\mu D_\mu q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Durch Einführung von Projektionsoperatoren

$$\xi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad \xi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (2.13)$$

³Effekte hervorgerufen durch virtuelle schwere Quark-Antiquark Paare werden vernachlässigt.

⁴Die Summation läuft über die drei leichtesten Quarkflavors $f = (u, d, s)$.

lässt sich die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{qcd}}^0$ umschreiben zu

$$\mathcal{L}_{\text{qcd}}^0 = \sum_f (\bar{q}_{\text{R},f} i\gamma^\mu D_\mu q_{\text{R},f} + \bar{q}_{\text{L},f} i\gamma^\mu D_\mu q_{\text{L},f}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

wobei q_{R} (q_{L}) die rechtshändigen (linkshändigen) Quarkfelder

$$q_{\text{R}} = \xi_{\text{R}} q, \quad q_{\text{L}} = \xi_{\text{L}} q, \quad (2.15)$$

bezeichnen. Die in Gl. (2.14) angegebene Lagrangedichte ist invariant unter einer globalen $\text{SU}(3)_{\text{L}} \times \text{SU}(3)_{\text{R}}$ -Transformation. Letztere wird in der Literatur als die so genannte chirale Symmetrie bezeichnet.

2.1.1 Symmetrieströme und Symmetriebrechung

Die Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{qcd}}^0$ aus Gl. (2.14) bzgl. der globalen, chiralen $\text{SU}(3)_{\text{L}} \times \text{SU}(3)_{\text{R}}$ -Transformation führt zu erhaltenen Strömen. Unter Verwendung von Noethers Theorem erhält man

$$\begin{aligned} \text{L}^{\mu,a} &= \bar{q}_{\text{L}} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_{\text{L}}, \quad \partial_\mu \text{L}^{\mu,a} = 0, \\ \text{R}^{\mu,a} &= \bar{q}_{\text{R}} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_{\text{R}}, \quad \partial_\mu \text{R}^{\mu,a} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die acht linkshändigen Ströme $\text{L}^{\mu,a}$ transformieren unter $\text{SU}(3)_{\text{L}} \times \text{SU}(3)_{\text{R}}$ als $(8, 1)$ -Multipllett, die acht rechtshändigen Ströme $\text{R}^{\mu,a}$ als $(1, 8)$ -Multipllett. Üblicherweise verwendet man folgende Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \text{V}^{\mu,a} &= \text{R}^{\mu,a} + \text{L}^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \\ \text{A}^{\mu,a} &= \text{R}^{\mu,a} - \text{L}^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q, \end{aligned} \quad (2.17)$$

welche sich unter der Paritätstransformation gemäß

$$P : \text{V}^{\mu,a}(\vec{x}, t) \mapsto \text{V}_\mu^a(-\vec{x}, t), \quad (2.18)$$

$$P : \text{A}^{\mu,a}(\vec{x}, t) \mapsto -\text{A}_\mu^a(-\vec{x}, t), \quad (2.19)$$

wie Vektor- und Axialvektorstromdichten verhalten. Des Weiteren erhält man nach Noethers Theorem einen erhaltenen Singulett-Vektorstrom, resultierend

aus der Transformation aller linkshändigen und rechtshändigen Quarkfelder mit gleicher Phase,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu q, \\ \partial_\mu \mathbf{V}^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

und einen Singulett-Axialvektorstrom

$$\mathbf{A}^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q, \quad (2.21)$$

erzeugt durch die Transformation aller linkshändigen Quarkfelder mit einer Phase und aller rechtshändigen Quarkfelder mit entgegengesetzter Phase. $\mathbf{A}^\mu$ ist nur auf klassischem Niveau erhalten. Die zugehörige Symmetrie bleibt beim Durchlaufen der vollen Quantentheorie nicht mehr erhalten, man spricht von so genannter anomaler Symmetriebrechung, deren Details im Abschnitt 3.1.1 diskutiert werden. Die Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ bzgl. der globalen $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V$ -Transformation impliziert, dass der zugehörige QCD-Hamiltonoperator im chiralen Grenzfalle, $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$, dieselbe Symmetrie aufweist. Die so genannten Ladungsoperatoren, definiert durch

$$\mathcal{Q}_L^a(t) = \int d^3x q_L^\dagger(\vec{x}, t) \frac{\lambda^a}{2} q_L(\vec{x}, t), \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{Q}_R^a(t) = \int d^3x q_R^\dagger(\vec{x}, t) \frac{\lambda^a}{2} q_R(\vec{x}, t), \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{Q}_V(t) = \int d^3x \left[q_L^\dagger(\vec{x}, t) q_L(\vec{x}, t) + q_R^\dagger(\vec{x}, t) q_R(\vec{x}, t) \right], \quad (2.24)$$

sind für erhaltene Ströme zeitunabhängig, kommutieren also mit dem Hamiltonoperator,

$$[\mathcal{Q}_L^a, \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0] = [\mathcal{Q}_R^a, \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0] = [\mathcal{Q}_V, \mathcal{H}_{\text{QCD}}^0] = 0, \quad (2.25)$$

und bezeichnen die Generatoren der infinitesimalen Transformationen des Hilbertraumes verbunden mit $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$. Sie erfüllen somit die Kommutatorrelation der Lie-Algebra $\text{su}(3)_L \times \text{su}(3)_R \times \text{u}(1)_V$,

$$[\mathcal{Q}_L^a, \mathcal{Q}_L^b] = if_{abc} \mathcal{Q}_L^c, \quad (2.26)$$

$$[\mathcal{Q}_R^a, \mathcal{Q}_R^b] = if_{abc} \mathcal{Q}_R^c, \quad (2.27)$$

$$[\mathcal{Q}_L^a, \mathcal{Q}_R^b] = 0, \quad (2.28)$$

$$[\mathcal{Q}_L^a, \mathcal{Q}_V] = [\mathcal{Q}_R^a, \mathcal{Q}_V] = 0, \quad (2.29)$$

und bestimmen das Transformationsverhalten eines gegebenen Operators unter der Gruppe $\text{SU}(3)_\text{L} \times \text{SU}(3)_\text{R} \times \text{U}(1)_\text{V}$ durch die Kommutatorrelationen mit diesem Operator.

Sei

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

die Quarkmassenmatrix für die drei leichten Quarks, dann ist die Symmetrie brechende Lagrangedichte $\mathcal{L}_M$ gegeben durch

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q}Mq = -(\bar{q}_\text{R}Mq_\text{L} + \bar{q}_\text{L}Mq_\text{R}). \quad (2.31)$$

Der Symmetrie brechende Term transformiert unter $\text{SU}(3)_\text{L} \times \text{SU}(3)_\text{R}$ als ein Mitglied der $(3, 3^*) + (3^*, 3)$ Darstellung. Unter Verwendung von Noethers Theorem erhält man die folgenden expliziten Divergenzen

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{V}^{\mu,a} &= i\bar{q} \left[M, \frac{\lambda^a}{2} \right] q, \\ \partial_\mu \mathbf{A}^{\mu,a} &= i\bar{q} \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, M \right\} \gamma^5 q, \\ \partial_\mu \mathbf{V}^\mu &= 0, \\ \partial_\mu \mathbf{A}^\mu &= 2i\bar{q}M\gamma^5 q + \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Flavorunabhängigkeit der starken Wechselwirkung spiegelt sich in der Erhaltung der individuellen Flavorströme $\bar{u}\gamma^\mu u$, $\bar{d}\gamma^\mu d$ und $\bar{s}\gamma^\mu s$ wider. Der Singulett-Vektorstrom $\mathbf{V}^\mu$, als Summe der drei Flavorströme ist somit immer erhalten. Im Grenzfall masseloser Quarks sind die sechszehn Ströme $\mathbf{V}^{\mu,a}$ und $\mathbf{A}^{\mu,a}$ erhalten. Das Gleiche gilt für den Singulett-Vektorstrom $\mathbf{V}^\mu$. Der Singulett-Axialvektorstrom $\mathbf{A}^\mu$ hingegen hat eine Anomalie $\mathbf{A}$, die in Abschnitt 3.1.1 behandelt wird.

2.1.2 Externe Felder

Bisher wurde die Lagrangedichte in Abwesenheit äußerer Felder betrachtet. Folgend der Prozedur von Gasser und Leutwyler [16] werden die Vektor- und Axialvektorströme sowie die skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten

gemäß⁵

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 + \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \frac{1}{3}v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q, \quad (2.33)$$

an äußere Felder $(v^\mu, v_s^\mu, a^\mu, s, p)$ gekoppelt. Die externen Felder werden durch farbneutrale, hermitesche 3×3 -Matrizen dargestellt

$$v^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} v_a^\mu, \quad a^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} a_a^\mu, \quad s = \sum_{a=0}^8 \lambda_a s_a, \quad p = \sum_{a=0}^8 \lambda_a p_a, \quad (2.34)$$

wobei $v_{(s)}^\mu$ als Vektorfeld proportional zur Einheitsmatrix ist. Setzt man in Gl. (2.33) $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$ und $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, so erhält man die ursprüngliche Lagrangedichte für nichtverschwindende Quarkmassen. Die Forderung, dass die totale Lagrangedichte aus Gl. (2.33) hermitesch und invariant unter Parität (P), Ladungskonjugation (C) und Zeitumkehr (T) ist, führt zu dem folgenden Transformationsverhalten der äußeren Felder:⁶

$$\begin{aligned} P : v^\mu &\mapsto v_\mu, & v_{(s)}^\mu &\mapsto v_{\mu(s)}, & a^\mu &\mapsto -a_\mu, & p &\mapsto -p, & s &\mapsto s, \\ C : v_\mu &\mapsto -v_\mu^T, & v_{(s)}^\mu &\mapsto -v_{\mu(s)}^{(s)T}, & a_\mu &\mapsto a_\mu^T, & p &\mapsto p^T, & s &\mapsto s^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die Paritätstransformation impliziert die Änderung der Argumente gemäß $(\vec{x}, t) \mapsto (-\vec{x}, t)$. Bei der Ladungskonjugation bezieht sich die Transposition auf den *flavor*. Fordert man für die Lagrangedichte in Gl. (2.33) die Invarianz unter einer lokalen $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V$ -Transformation, bezeichnet durch das Gruppenelement $(\mathbf{V}_R(x), \mathbf{V}_L(x), \exp[-i\Theta(x)/3])$, so transformieren sich die äußeren Felder gemäß

$$\begin{aligned} (v^\mu + a^\mu) &= r_\mu \mapsto \mathbf{V}_R r_\mu \mathbf{V}_R^\dagger + i\mathbf{V}_R \partial^\mu \mathbf{V}_R^\dagger, \\ (v^\mu - a^\mu) &= l_\mu \mapsto \mathbf{V}_L l_\mu \mathbf{V}_L^\dagger + i\mathbf{V}_L \partial^\mu \mathbf{V}_L^\dagger, \\ v_{(s)}^\mu &\mapsto v_{(s)}^\mu - \partial_\mu \Theta, \\ (s + ip) &\mapsto \mathbf{V}_R (s + ip) \mathbf{V}_L^\dagger, \\ (s - ip) &\mapsto \mathbf{V}_L (s - ip) \mathbf{V}_R^\dagger. \end{aligned} \quad (2.36)$$

⁵Die Kopplung an den Singulett-Axialvektorstrom ist hier nicht berücksichtigt.

⁶Es ist ausreichend P und C zu betrachten (CPT-Theorem).

Des Weiteren stellt die Invarianz unter lokalen Transformationen die Möglichkeit zur Verfügung, Kopplungen an externe Eichfelder zu diskutieren [16]. Betrachten wir explizit zwei Beispiele:

1) Die Kopplung von Quarks an ein äußeres elektromagnetisches Feld A_μ ist gegeben durch

$$r_\mu = l_\mu = -eA_\mu Q, \quad (2.37)$$

wobei $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ die Quarkladungsmatrix bezeichnet. Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ext}} &= -eA_\mu(\bar{q}_L Q \gamma^\mu q_L + \bar{q}_R Q \gamma^\mu q_R) \\ &= -eA_\mu \bar{q} Q \gamma^\mu q \\ &= -eA_\mu \left(\frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s \right) \\ &= -eA_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2) Zur Beschreibung von semileptonischen Prozessen wie $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ benötigt man die Wechselwirkung von Quarks mit den massiven, geladenen Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung. Die Kopplung für obigen Prozess ist gegeben durch

$$l_\mu = -eA_\mu Q - \frac{g}{\sqrt{2}} \mathcal{W}_\mu, \quad r_\mu = 0, \quad (2.39)$$

mit

$$\mathcal{W}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \cos \theta & W_\mu^+ \sin \theta \\ W_\mu^- \cos \theta & 0 & 0 \\ W_\mu^- \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

wobei θ den Cabibbo Winkel bezeichnet [4]. In Störungsrechnung niedrigster Ordnung ist die Fermi Konstante G_F mit der Eichkopplung g und der Masse des W -Bosons verknüpft durch

$$G_F = \sqrt{2} \frac{g^2}{8M_W^2} = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (2.41)$$

Die Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^+ [\cos \theta \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d + \sin \theta \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s] + h.c. \right\}. \quad (2.42)$$

2.1.3 Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Sei G die Symmetriegruppe des Hamiltonoperators. Allgemein spricht man von einer spontanen Symmetriebrechung, wenn der Grundzustand eines Systems nicht invariant unter G , sondern nur invariant unter einer Untergruppe H von G ist. Bezeichne n_G die Anzahl der Generatoren der Gruppe G und n_H die Anzahl der Generatoren der Untergruppe H von G , dann führt nach Goldstones Theorem [28] die spontane Brechung der Symmetrie von G nach H zur Existenz von $n_G - n_H$ masselosen Goldstone-Bosonen. Des Weiteren wird nach dem Coleman'schen Theorem [29] die Symmetrie des Systems durch die Symmetrie des Grundzustandes und nicht durch die Symmetrie des Hamiltonoperators bestimmt.

Betrachtet man die QCD-Lagrangedichte im chiralen Grenzfall, so würde man aufgrund der $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie annehmen, dass sich die Hadronen in Multipletts der verschiedenen irreduziblen Darstellungen der chiralen Gruppe einordnen lassen. Die $U(1)_V$ -Symmetrie ergibt die Erhaltung der Baryonenzahl und führt zur Klassifikation der Hadronen in Mesonen ($B = 0$) und Baryonen ($B = 1$). Die Ladungsoperatoren $Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a$ und $Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a$ kommutieren mit dem Hamiltonoperator $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$ und haben entgegengesetzte Parität. Hieraus folgend würde man erwarten, dass zu jedem Multiplett positiver Parität eines negativer Parität existieren sollte. Das Niederenergiespektrum der Baryonen enthält kein Baryonoktett negativer Parität und legt nahe, dass die Gruppe $SU(3)$ als Symmetriegruppe realisiert ist und die obige $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie spontan zu einer $SU(3)_V$ -Symmetrie gebrochen ist.

Im chiralen Grenzfall ist der Grundzustand und somit auch der Hamiltonoperator invariant unter $SU(3)_V \times U(1)_V$, d.h. die acht Vektorladungsoperatoren Q_V^a genauso wie der Baryonenzahloperator $Q_V/3$ vernichten den Grundzustand

$$Q_V^a|0\rangle = Q_V|0\rangle = 0. \quad (2.43)$$

Die physikalischen Zustände des Spektrums von $\mathcal{H}_{\text{QCD}}^0$ können bzgl. der irreduziblen Darstellungen von $SU(3)_V \times U(1)_V$ organisiert werden. Da im Niederenergiespektrum der Baryonen hingegen keine Paritätsverdopplung beobachtbar ist, nimmt man an, dass die acht Axialvektorladungsoperatoren Q_A^a den Grundzustand nicht vernichten

$$Q_A^a|0\rangle \neq 0. \quad (2.44)$$

Der Grundzustand der QCD besitzt keine Invarianz bzgl. axialer Transformationen. Unter Verwendung von Goldstones Theorem [28] wird mit jedem $\mathcal{Q}_\mathbf{A}^a$, der das Vakuum nicht vernichtet, ein masseloses Goldstone-Boson Feld $\phi^a(x)$ assoziiert. Im Falle von $\mathbf{G} = \mathrm{SU}(3)_\mathrm{L} \times \mathrm{SU}(3)_\mathrm{R}$ mit $\mathbf{n}_\mathbf{G} = 16$ und $\mathbf{H} = \mathrm{SU}(3)_\mathrm{V}$ mit $\mathbf{n}_\mathbf{H} = 8$ erwartet man also $\mathbf{n}_\mathbf{G} - \mathbf{n}_\mathbf{H} = 8$ Goldstone-Bosonen, die pseudoskalaren Charakter aufweisen und sich unter $\mathbf{H} = \mathrm{SU}(3)_\mathrm{V}$ wie ein Oktett gemäß

$$[\mathcal{Q}_\mathbf{V}^a, \phi^b(x)] = if_{abc}\phi^c(x), \quad (2.45)$$

transformieren. Das pseudoskalare Mesonoktett (π, K, η_8) erfüllt diese Eigenschaften und wird mit den Goldstone-Bosonen assoziiert. Die Eigenschaften der Goldstone-Bosonen und ihre Wechselwirkungen im Niederenergiebereich können allein durch die Annahme, dass die Theorie invariant ist unter einer Gruppe $\mathbf{G}$ spontan gebrochen zur Untergruppe $\mathbf{H}$, abgeleitet werden, ohne wirkliches detailliertes Verständnis des Mechanismus der Brechung der chiralen Symmetrie.

Im Folgenden wird in Anlehnung an [25] kurz erläutert, dass einerseits ein nichtverschwindendes skalares Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung und andererseits ein nicht verschwindender Wert der Goldstone-Boson Zerfallskonstanten im chiralen Grenzfall, F_0 , eine notwendige und hinreichende Bedingung für spontane Symmetriebrechung in der QCD darstellt. Seien die skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten gegeben durch

$$S_a(x) = \bar{q}(x)\lambda_a q(x), \quad a = 0, \dots, 8, \quad (2.46)$$

$$P_a(x) = i\bar{q}(x)\gamma_5\lambda_a q(x), \quad a = 0, \dots, 8, \quad (2.47)$$

und transformieren unter $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{V}$ gemäß

$$[\mathcal{Q}_\mathbf{V}^a(t), \mathcal{X}_0(x)] = 0, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.48)$$

$$[\mathcal{Q}_\mathbf{V}^a(t), \mathcal{X}_b(x)] = if_{abc}\mathcal{X}_c(x), \quad a, b = 1, \dots, 8, \quad (2.49)$$

für $\mathcal{X} = S, P$. Im chiralen Grenzfall ist der Grundzustand invariant unter $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{V}$ [30], d.h. $\mathcal{Q}_\mathbf{V}^a|0\rangle = 0$, und man erhält

$$\langle 0|S_a(x)|0\rangle = \langle 0|S_a(0)|0\rangle = \langle S_a\rangle = 0 \quad a, b = 1, \dots, 8. \quad (2.50)$$

Hieraus folgend ergibt sich

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle. \quad (2.51)$$

Dieselbe Argumentation funktioniert aufgrund von Gl. (2.48) für das Singulettkondensat nicht. Nimmt man ein nichtverschwindendes Singulett Quarkkondensat im chiralen Grenzfall an, so ergibt sich

$$0 \neq \langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle = 3\langle \bar{u}u \rangle = 3\langle \bar{d}d \rangle = 3\langle \bar{s}s \rangle, \quad (2.52)$$

und man erhält für einen Grundzustand, der invariant ist bzgl. $SU(3)_v$

$$\langle 0 | i[\mathcal{Q}_A^a(t), P_a(x)] | 0 \rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (2.53)$$

Hieraus folgend ist das Matrixelement des axialen Vektorstromoperators A_μ^a zwischen dem Vakuum und einem masselosen Goldstone-Boson gegeben durch

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \phi^b(p) \rangle = ip_\mu F_0 \delta^{ab}, \quad (2.54)$$

wobei $F_0 \approx 93 \text{ MeV}$ die Zerfallskonstante der Goldstone-Bosonen im chiralen Grenzfall bezeichnet. Unter der Annahme $\mathcal{Q}_A^a | 0 \rangle \neq 0$, ist ein nichtverschwindender Wert von F_0 eine notwendige und hinreichende Bedingung für spontane chirale Symmetriebrechung. Andererseits stellt durch Gl. (2.53) ein nichtverschwindendes skalares Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ ein hinreichendes aber nicht notwendiges Kriterium für spontane Symmetriebrechung in der QCD dar. $\langle \bar{q}q \rangle$ bezeichnet man in der Literatur oft auch als Ordnungsparameter in Anlehnung an die Theorie der Phasenübergänge, in welcher das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung eine entscheidende Rolle spielt.

Kapitel 3

Chirale Störungsrechnung

Die chirale Störungstheorie (ChPT = chiral perturbation theory) ist die effektive Feldtheorie der QCD bei Energien weit unterhalb der Skala spontaner Symmetriebrechung ($\ll 1 \text{ GeV}$) [15, 16, 17]. Sie stellt somit, im Gegensatz zur störungstheoretischen Behandlung der QCD bei hohen Impulsüberträgen im Sinne einer laufenden Kopplungskonstanten, einen systematischen perturbativen Rahmen zur Erforschung stark wechselwirkender Prozesse im Niederenergiebereich dar. Die effektive Lagrangedichte wird ausgedrückt durch diejenigen hadronischen Freiheitsgrade, die bei niedrigen Energien als physikalisch messbare asymptotische Zustände auftreten. In der mesonischen ChPT werden die Mitglieder des pseudoskalaren Mesonoktetts (π, K, η) mit den effektiven Freiheitsgraden assoziiert. Sie werden als Goldstone-Bosonen der spontanen Brechung der globalen chiralen $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ -Symmetrie zur $\text{SU}(3)_V$ -Symmetrie betrachtet. Die nicht verschwindenden Massen der leichten pseudoskalaren Mesonen in der wirklichen Welt stehen im Bezug zur expliziten Symmetriebrechung in der QCD infolge der endlichen Quarkmassen. Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die mesonische ChPT bis zur $\mathcal{O}(q^4)$ im normalen und anomalen Sektor. Hierbei wird besonders auf die effektiven Lagrangedichten Wert gelegt.

3.1 Effektive Lagrangedichten

In der effektiven Beschreibung ist der Ausgangspunkt die allgemeinste Lagrangedichte, die mit allen Symmetrien der QCD vereinbar ist. Dies umschließt neben der Symmetrie bezogen auf Zeitumkehr, Parität und Ladungs-

konjugation im Besonderen die chirale Symmetrie. Ausgehend vom chiralen Grenzfall werden in der ChPT Quarkmassen und kleine externe Impulse als Störparameter betrachtet. Hieraus folgend wird die Lagrangedichte nach Quarkmassen und Ableitungen entwickelt, wobei eine auf ein Feld wirkende Ableitung in der Lagrangedichte als Impuls in einer Feynman-Regel erscheint. Die effektive Lagrangedichte lässt sich symbolisch schreiben gemäß

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots, \quad (3.1)$$

wobei der Index die chirale Ordnung in der Entwicklung bezeichnet. Bei der störungstheoretischen Berechnung physikalischer Observablen ist es notwendig, die Beiträge verschiedener Terme nach ihrer Bedeutung zu ordnen. Weinbergs Zählchema [15] stellt hierfür ein Ordnungsschema bereit, welches eine Verknüpfung zwischen der Schleifenentwicklung und der chiralen Entwicklung herstellt und somit die Wichtigkeit einzelner Diagramme bestimmt. Hierfür wird das Verhalten der invarianten Amplitude unter einer Reskalierung der externen Impulse, $p_i \mapsto tp_i$, und quadratischer Reskalierung der Quarkmassen, $m_q \mapsto t^2 m_q$, betrachtet:

$$\mathcal{M}(p_i, m_q) \mapsto \mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q), \quad (3.2)$$

wobei D die chirale Ordnung des Diagramms bezeichnet und gegeben ist durch

$$D = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \quad (3.3)$$

N_{2n} steht für die Anzahl der Vertices aus $\mathcal{L}^{(2n)}$ und N_L für die Anzahl der unabhängigen Schleifen. Hieraus folgend sind Diagramme mit höherer chiraler Ordnung für den Fall kleiner Impulse und Quarkmassen unterdrückt, wodurch ein Ordnungsschema für die Entwicklung physikalischer Observablen in eine Störungsreihe etabliert wird. Die effektiven Freiheitsgrade (π , K , η) werden durch eine unitäre unimodulare Matrix U gemäß

$$U = \exp\left(i \frac{\phi}{F_0}\right), \quad (3.4)$$

mit

$$\phi = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

parametrisiert. Durch die Bedingungen $U^\dagger U = 1$ und $\det U = 1$ handelt es sich hierbei um eine nichtlineare Realisierung der Gruppe $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3)$. Weitere Bestandteile zur Konstruktion der effektiven Lagrangedichte sind

$$\begin{aligned} D_\mu U &= \partial_\mu U - ir_\mu U + iU l_\mu, \\ f_{\mu\nu}^{\mathbf{R}} &= \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \\ f_{\mu\nu}^{\mathbf{L}} &= \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \\ \chi &= 2B_0(s + ip), \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit $r_\mu = (v_\mu + a_\mu)$ und $l_\mu = (v_\mu - a_\mu)$. Den oben aufgeführten Bestandteilen der effektiven Lagrangedichte werden folgende chirale Ordnungen zugewiesen:

$$U = \mathcal{O}(q^0), \quad D_\mu U = \mathcal{O}(q^1), \quad f_{\mu\nu}^{\mathbf{R}/\mathbf{L}} = \mathcal{O}(q^2), \quad \chi = \mathcal{O}(q^2), \quad (3.7)$$

wobei hier q für einen kleinen Parameter steht. Unter der lokalen $\mathbf{SU}(3)_\mathbf{L} \times \mathbf{SU}(3)_\mathbf{R} \times \mathbf{U}(1)_\mathbf{V}$ -Transformation, bezeichnet durch das Gruppenelement $[\mathbf{V}_\mathbf{R}(x), \mathbf{V}_\mathbf{L}(x), \exp[-i\Theta(x)/3]]$ ergibt sich folgendes Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} U &\mapsto \mathbf{V}_\mathbf{R} U \mathbf{V}_\mathbf{L}^\dagger, \\ r_\mu &\mapsto \mathbf{V}_\mathbf{R} r_\mu \mathbf{V}_\mathbf{R}^\dagger + i\mathbf{V}_\mathbf{R} \partial^\mu \mathbf{V}_\mathbf{R}^\dagger, \\ l_\mu &\mapsto \mathbf{V}_\mathbf{L} l_\mu \mathbf{V}_\mathbf{L}^\dagger + i\mathbf{V}_\mathbf{L} \partial^\mu \mathbf{V}_\mathbf{L}^\dagger, \\ (s + ip) &\mapsto \mathbf{V}_\mathbf{R} (s + ip) \mathbf{V}_\mathbf{L}^\dagger, \\ (s - ip) &\mapsto \mathbf{V}_\mathbf{L} (s - ip) \mathbf{V}_\mathbf{R}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Durch Forderung nach Lorentzinvarianz treten in der mesonischen ChPT nur Lagrangedichten gerader Ordnung auf. Die effektive Lagrangedichte niedrigster Ordnung ist gegeben durch [17]

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger]. \quad (3.9)$$

$\mathcal{L}^{(2)}$ enthält zwei Niederenergiekopplungskonstanten (LEC = *low-energy coupling constant*), F_0 und B_0 . Durch den schwachen Zerfall des Pions $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ist F_0 mit der Pionzerfallskonstante im chiralen Grenzfall verknüpft (siehe Gl. (2.54)). Die Entartung der einzelnen Konstante F_0 wird ab der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, sobald $\mathbf{SU}(3)$ -Symmetriebrechung in Betracht gezogen wird, aufgehoben. Der empirische numerische Wert für die Pionzerfallskonstante F_π ist gegeben durch $F_\pi \simeq 92.4 \text{ MeV}$ [17], die Kaonzerfallskonstante ist

$F_K \simeq 113 \text{ MeV}$ [4]. In der Anwesenheit elektromagnetischer externer Felder ist die führende Ordnung in der Entwicklung der Bausteine bezogen auf ϕ , $\chi = 2B_0M$ und A_μ gegeben durch¹

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_{2\phi+\gamma^*}^{(2)} + \mathcal{L}_{4\phi}^{(2)}, \quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\phi+\gamma^*}^{(2)} &= \frac{ie A_\mu}{2} \text{Tr}[\partial^\mu \phi [Q, \phi]], \\ \mathcal{L}_{4\phi}^{(2)} &= \frac{1}{24F_0^2} \left\{ \text{Tr}[\partial_\mu \phi [\phi, \partial^\mu \phi] \phi] + B_0 \text{Tr}[M\phi^4] \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Betrachtet man den Symmetrie brechenden Term der effektiven Lagrange-dichte

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}[MU^\dagger + UM^\dagger], \quad (3.12)$$

so erhält man die Energiedichte des Grundzustandes zu

$$\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle_{\text{min}} = -F_0^2 B_0 (m_u + m_d + m_s). \quad (3.13)$$

Durch den Vergleich der Ableitung von $\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle_{\text{min}}$ bzgl. leichter Quarkmassen mit der entsprechenden Größe in der QCD

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | \mathcal{H}_{\text{QCD}} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=m_s=0} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle_0, \quad (3.14)$$

erhält man die Verknüpfung des Parameters B_0 mit dem skalaren Quarkkondensat gemäß

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle_0. \quad (3.15)$$

Betrachtet man die Massen der Goldstone-Bosonen in niedrigster Ordnung in den Quarkmassen im isospinsymmetrischen Grenzfall $m_u = m_d = \hat{m}$

$$m_\pi^2 = 2B_0 \hat{m}, \quad (3.16)$$

$$m_K^2 = B_0(\hat{m} + m_s), \quad (3.17)$$

$$m_\eta^2 = \frac{2}{3} B_0(\hat{m} + 2m_s), \quad (3.18)$$

¹ Q bezeichnet die Quarkmassenmatrix $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ und A_μ das e.m. Feld.

so erfüllen diese die Gell-Mann-Okubo Relation [31]

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2, \quad (3.19)$$

unabhängig vom Parameter B_0 . Ohne numerischen Wert des Parameters B_0 ist es nicht möglich, die absoluten Werte der Quarkmassen $\hat{m}$ und m_s zu extrahieren. Für die Verhältnisse der Quarkmassen erhält man unter Verwendung der empirischen Werte des pseudoskalaren Oktetts

$$\frac{m_K^2}{m_\pi^2} = \frac{\hat{m} + m_s}{2\hat{m}} \Rightarrow \frac{m_s}{\hat{m}} = 25.9, \quad (3.20)$$

$$\frac{m_\eta^2}{m_\pi^2} = \frac{\hat{m} + 2m_s}{3\hat{m}} \Rightarrow \frac{m_s}{\hat{m}} = 24.3. \quad (3.21)$$

Die effektive Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^4)$ ist gegeben durch [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)} = & L_1 \left\{ \text{Tr}[D_\mu U (D_\mu U)^\dagger] \right\}^2 + L_2 \text{Tr}[D_\mu U (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] \\ & + L_3 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \\ & + L_5 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 \left\{ \text{Tr}[(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] \right\}^2 \\ & + L_7 \left\{ \text{Tr}[(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)] \right\}^2 + L_8 \text{Tr}[(U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger)] \\ & + i L_9 \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{Tr}[(U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_R^{\mu\nu})] \\ & + H_1 \text{Tr}[(f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu})] + H_2 \text{Tr}[(\chi \chi^\dagger)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die numerischen Werte der LECs werden nicht durch die chirale Symmetrie bestimmt. Im Allgemeinen enthalten sie Information über die zugrunde liegende QCD-Dynamik und werden zurzeit mit Hilfe der Gitter-QCD [10] und QCD-inspirierter Modelle abgeschätzt oder an experimentelle Daten angepasst. Des Weiteren werden die LECs benötigt, um die bei Einschleifendiagrammen auftretenden Divergenzen zu absorbieren, was in Abschnitt 4.2.1 diskutiert wird.

3.1.1 Anomalien

Im Allgemeinen spricht man von Anomalien, sobald klassische Symmetrien durch die Existenz von Quantenkorrekturen verletzt werden. Anomalien

können globale Symmetrien verletzt werden aber auch lokale Eichsymmetrien, wobei im letzteren Fall die Theorie inkonsistent wird, so dass die Bedingung an die Aufhebung der Anomalie als Zwangsbedingung für die physikalische Eichtheorie benutzt werden kann.

Historisch gesehen tauchten Anomalien erstmals im Zusammenhang mit dem Zerfall des neutralen Pions auf². Das π^0 wurde als ein Goldstone-Boson der spontan gebrochenen $SU(2) \times SU(2)$ -Symmetrie der starken Wechselwirkung betrachtet. Dessen Zerfall in zwei Photonen ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) konnte jedoch aus Sicht der 60er Jahre nicht erklärt werden. Die Lösung dieses Problems führte zur Entdeckung Symmetrie brechender Anomalien. Im Folgenden wird in Anlehnung an Ref. [32] die zugrunde liegende Idee kurz erläutert.

Die effektive Lagangedichte für $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ist gegeben durch eine eich- und lorentzinvariante Struktur mit nicht mehr als zwei Ableitungen gemäß

$$\mathcal{L}_{\pi\gamma\gamma} = g \pi^0 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (3.23)$$

wobei g eine unbekannte Konstante mit der Dimension $[\text{Masse}^{-1}]$ bezeichnet. Die Zerfallsrate ergibt sich hieraus zu

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{m_\pi^3 g^2}{\pi}, \quad (3.24)$$

und man würde in naiver Weise annehmen, dass sich g in der Größenordnung von

$$g \approx \frac{e^2}{16\pi^2 F_\pi}, \quad (3.25)$$

mit $F_\pi \approx 93 \text{ MeV}$ befindet. Diese Abschätzung jedoch lässt spezielle Zwangsbedingungen, auferlegt durch die $SU(2) \times SU(2)$ -Symmetrie, außer acht. Die elektromagnetische Wechselwirkung hat nämlich keinen Effekt auf die $U(1) \times U(1)$ -Untergruppe, erzeugt durch den elektrisch neutralen Generator von $SU(2) \times SU(2)$. Das π^0 ist ein Goldstone-Boson assoziiert mit dieser Symmetrie, weswegen eine Wechselwirkung beschrieben durch die effektive Lagangedichte aus Gl. (3.23) nur durch Brechung dieser Symmetrie durch Quarkmassen entstehen kann. Die Konstante g sollte somit einen zusätzlichen Faktor, der die Symmetriebrechung widerspiegelt, enthalten

$$g \approx \frac{e^2}{16\pi^2 F_\pi} \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right), \quad (3.26)$$

²Im Folgenden werden Gruppenindices wie L und R vernachlässigt.

wobei $\Lambda = 4\pi F_\pi \simeq 1.2 \text{ GeV}$ die Skala der chiralen Symmetriebrechung bezeichnet. Hieraus erhält man die Zerfallsrate zu

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \approx \frac{m_\pi^7 \alpha^2}{16\pi^3 F_\pi^2 \Lambda^4} \simeq 2 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}. \quad (3.27)$$

Die naive Abschätzung für g aus Gl. (3.25) führt hingegen zu

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \approx \frac{m_\pi^3 \alpha^2}{16\pi^3 F_\pi^2} \simeq 4.4 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}. \quad (3.28)$$

Zusammenfassend ausgedrückt verhält sich die Zerfallsrate bei chiraler Symmetrie wie m_π^7 anstatt m_π^3 für $m_\pi \rightarrow 0$. Der gemessene Wert hingegen ist $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \simeq (1.20 \pm 0.05) \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$, in recht guter Übereinstimmung mit der naiven Abschätzung aus Gl. (3.28) und drei Größenordnungen größer als die Zerfallsrate aus Gl. (3.27). Als Fazit zog man hieraus die Annahme, dass irgendetwas Anomales bei diesem Zerfall die chirale Symmetrie außer Kraft setzt. Interessanterweise wurde der Wert von g bereits 1949 unter Verwendung von Vor-QCD Theorien abgeschätzt. Steinberger berechnete g mit Hilfe eines Protoneinschleifendiagrammes zu

$$g = \frac{e^2 G_{\pi N}}{32\pi^2 m_N}, \quad (3.29)$$

was unter Verwendung der Goldberger-Treiman Relation [33] für $g_A = 1$ zu $G_{\pi N} = 2m_N/F_\pi$ führt und mit der naiven Abschätzung aus Gl. (3.25) übereinstimmt. Der Grund, warum Steinberger ohne Kenntnis von Anomalien den Pionzerfall näherungsweise recht gut beschreiben konnte, liegt in der Tatsache, dass die richtige Antwort durch eine Dreiecksanomalie, die axiale abelsche Anomalie, bestimmt ist. Diese ist proportional zu $\text{Tr}[q^2 \tau_3]$, was für ein Proton den Wert e^2 ergibt, das Gleiche also wie der Quarkwert für drei Quarkfarben³

$$\text{Tr}[q^2 \tau_3] = \frac{N_C e^2}{3}. \quad (3.30)$$

Betrachtet man die QCD-Lagrangedichte im chiralen Grenzfall, so stellt man eine Invarianz bzgl. einer globalen axialen $U(1)_A$ -Transformation fest. Unter Verwendung von Noethers Theorem erhält man den auf klassischem

³ $\mathcal{C}$ steht für *color*.

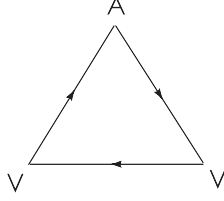


Abbildung 3.1: Das fermionische Dreiecksdiagramm mit einem Axialvektorstrom und zwei Vektorströmen.

Niveau erhaltenen Singulett-Axialvektorstrom aus Gl. (2.21), $\mathbf{A}^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q$ mit $\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0$. Die Divergenz dieses Stromes ist jedoch unter Benutzung der vollen Quantentheorie proportional zur folgenden Anomalie [19, 20, 34]

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu \equiv \mathbf{A} = \frac{3g^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\alpha\beta}, \quad (3.31)$$

wobei sich der Faktor 3 auf die Anzahl der *flavors* bezieht. Diese axiale abelsche Anomalie $\mathbf{A}$ unterbindet, dass das η' ein Goldstone-Boson wird und trennt somit das $\text{SU}(3)$ -Spektrum in einen Oktett- und Singulettanteil. Üblicherweise werden in der Literatur zwei Zugänge beschrieben, die Verwendung finden, um zur Anomalie zu gelangen. Auf der einen Seite, der 1979 von Fujikawa [34] entdeckte Zugang mit Hilfe des Pfadintegralformalismus von Feldtheorien, welcher die Entstehung der chiralen brechenden Anomalie aufzeigt. Seine Analyse basierte auf der Verwendung des Pfadintegralformalismus im euklidischen Raum und auf einer Entwicklung fermionischer Integrationsvariablen in Eigenfunktionen des eichinvarianten Diracoperators. Die Anomalie wird dann interpretiert als ein Symptom der Unmöglichkeit ein geeignetes invariantes Maß für die Integration über fermionische Variablen zu definieren. Auf der anderen Seite steht die direkte Berechnung durch das in Abb. 3.1 gezeigte Dreiecksdiagramm. Dieser Zugang wurde ursprünglich von den Entdeckern der Anomalie, Adler [19], Bell und Jackiw [20], vorgenommen. Zusammenfassend wurde hierbei das Matrixelement des in Abb. 3.1 gezeigten Dreiecksdiagramms berechnet, wobei sich herausstellte, dass bei einer Änderung der Integrationsvariablen der erhaltene Ausdruck entweder mit der Erhaltung des Vektorstroms oder des $\text{U}(1)_A$ -Stroms, aber nicht mit beiden, vereinbar ist. Phänomenologisch gesehen ist der Vektorstrom erhalten, was zur axialen Anomalie führt.

3.2 Die anomale Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^4)$

Die bis jetzt diskutierten Lagrangedichten $\mathcal{L}^{(2)}$ und $\mathcal{L}^{(4)}$ weisen eine weitere Symmetrie auf, die in der wirklichen Welt jedoch nicht vorkommt. Betrachtet man die QCD ohne externe Felder außer $\chi = 2B_0M$ mit der Quarkmassenmatrix $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, so stellt man fest, dass diese zwei Lagrangedichten eine Invarianz unter der Transformation $\phi(x) \mapsto -\phi(x)$ zeigen. Anders ausgedrückt heißt das, dass sie nur Wechselwirkungsterme mit einer geraden Anzahl von Goldstone-Bosonen besitzen, man sagt, sie haben gerade innere Parität. Prozesse wie z.B. $K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ oder auch $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ können mit den Lagrangedichten $\mathcal{L}^{(2)}$ und $\mathcal{L}^{(4)}$ nicht beschrieben werden. Diese Beobachtung zeigt, dass die oben beschriebene Anomalie durch die bis jetzt diskutierten Lagrangedichten keine Berücksichtigung findet und führt zur effektiven Wess-Zumino-Witten (WZW) Wirkung [21, 22].

3.2.1 Wess-Zumino-Witten (WZW) Wirkung

In der Umsetzung des Programs der effektiven Feldtheorie ist es notwendig, dass die Wirkung alle möglichen Terme beinhaltet, die durch die angenommenen Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie erlaubt sind. Für den Fall von $\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ entdeckten Wess, Zumino und Witten bei der Studie von Anomalien bezogen auf Quarschleifengraphen den einzigen anomalen Term der effektiven Wirkung [21, 22]. Interessanterweise lässt sich die Struktur dieses Terms ohne jegliche Kenntnis der zugrunde liegenden Theorie von Quarks und Gluonen verstehen, was im Folgenden in Anlehnung an [32] kurz beschrieben wird.

Der einfachste Weg zur Beschreibung der WZW Wirkung ist die Erweiterung der Raumzeit auf fünf Dimensionen. Sei $\mathbf{G} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ gebrochen zur Untergruppe $\mathbf{H} = \text{SU}(3)$, so repräsentiert der Satz von Funktionen $\phi_a(x)$, assoziiert mit den Goldstone-Bosonen, eine Abbildung von der vierdimensionalen Raumzeit S_4 in die Nebenklasse $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Die Homotopiegruppe $\pi_4(\mathbf{G}/\mathbf{H})^4$ ist für den hier betrachteten Fall trivial, $\pi_4(\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)/\text{SU}(3)) = \pi_4(\text{SU}(3)) = 0$, d.h. es ist möglich, jede Viersphäre in $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ zu einem Punkt zu deformieren, was die Erweiterung der Funktionen $\phi_a(x)$ gemäß

$$\phi_a(x) \Rightarrow \phi_a(x; s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (3.32)$$

⁴Die Definition und einige Beispiele von Homotopiegruppen sind in Anhang A gegeben.

mit

$$\phi_a(x; 0) = \phi_a(x; 1) = \phi_a(x), \quad (3.33)$$

ermöglicht. Die unitäre Matrix $U(x)$, welche die Goldstone-Bosonen parametrisiert, kann also zu einer Matrix $U(y)$ erweitert werden, definiert in einem fünfdimensionalen Ball B_5 mit Koordinaten x^μ und s , dessen Oberfläche die vierdimensionale Sphäre S_4 , die Raumzeit darstellt. Betrachtet man nun die folgende Funktion:

$$\omega(y) \equiv -\frac{i}{240\pi^2} \epsilon^{ijklm} \text{Tr}(\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \mathcal{U}_l \mathcal{U}_m), \quad (3.34)$$

wobei die Indizes $i, \dots, m$ von 0 bis 4 laufen mit $y_4 = y^4 = s$ und $\mathcal{U}_i = U^\dagger \partial U / \partial y^i$. $\omega(y)$ ist invariant unter chiralen Transformationen und bedingt durch⁵ ϵ^{ijklm} ist das Integral von $\omega(y)$ über B_5 , bis auf ein Vorzeichen, unabhängig von den Koordinaten y^i . Des Weiteren hängt das Integral nur von den Werten von $U(y)$ auf der Oberfläche von B_5 , der Raumzeit S_4 ab, weswegen $\omega(y)$ der effektiven Wirkung hinzugefügt werden kann

$$S_{\text{WZW}}^0 = n \int_{B_5} d^5 y \omega(y), \quad (3.35)$$

mit n betrachtet als beliebigen Koeffizienten. Dieser Term lässt sich als ein vierdimensionales Integral über eine Lagrangedichte schreiben, aber nicht über eine $\mathbf{G} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$ -invariante Lagrangedichte. In mathematischer Formulierung ist $\omega(y)$ der einzige Generator der de Rham'schen Kohomologiegruppe $H^5(\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)/\text{SU}(3); \mathbb{R})$. Bemerkenswert ist, dass der Koeffizient n kein frei wählbarer Parameter ist. Witten konnte zeigen, dass der Koeffizient n nur ganzzahlige Werte annehmen kann. In der QCD wird $n = 3$ gesetzt.

In Anwesenheit externer Felder lässt sich die effektive Wirkung schreiben gemäß [35, 36, 37, 38]

$$S_{\text{WZW}} = S_{\text{WZW}}^0 + S_{\text{WZW}}^{\text{ext}}, \quad (3.36)$$

mit

$$S_{\text{WZW}}^{\text{ext}} = -\frac{i n}{48\pi^2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(Z_{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (3.37)$$

⁵Die Konvention von ϵ^{ijklm} ist gegeben durch $\epsilon_{01234} = -\epsilon^{01234} = 1$.

wobei

$$\begin{aligned}
Z_{\mu\nu\alpha\beta} = & \frac{1}{2}Ul_\mu U^\dagger r_\nu Ul_\alpha U^\dagger r_\beta + Ul_\mu l_\nu l_\alpha U^\dagger r_\beta - U^\dagger r_\mu r_\nu r_\alpha Ul_\beta \\
& + iU\partial_\mu l_\nu l_\alpha U^\dagger r_\beta - iU^\dagger \partial_\mu r_\nu r_\alpha Ul_\beta + i\partial_\mu r_\nu Ul_\alpha U^\dagger r_\beta \\
& - i\partial_\mu l_\nu U^\dagger r_\alpha Ul_\beta - i\mathcal{U}_\mu^L l_\nu U^\dagger r_\alpha Ul_\beta + i\mathcal{U}_\mu^R r_\nu Ul_\alpha U^\dagger r_\beta \\
& - i\mathcal{U}_\mu^L l_\nu l_\alpha l_\beta + i\mathcal{U}_\mu^R r_\nu r_\alpha r_\beta + \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^L U^\dagger \partial_\nu r_\alpha Ul_\beta - \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^R U \partial_\nu l_\alpha U^\dagger r_\beta \\
& + \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^L U^\dagger r_\nu U \partial_\alpha l_\beta - \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^R Ul_\nu U^\dagger \partial_\alpha r_\beta - \mathcal{U}_\mu^L \mathcal{U}_\nu^L U^\dagger r_\alpha Ul_\beta \\
& + \mathcal{U}_\mu^R \mathcal{U}_\nu^R Ul_\alpha U^\dagger r_\beta + \mathcal{U}_\mu^L l_\nu \partial_\alpha r_\beta - \mathcal{U}_\mu^R r_\nu \partial_\alpha r_\beta + \mathcal{U}_\mu^L \partial_\nu l_\alpha l_\beta - \mathcal{U}_\mu^R \partial_\nu r_\alpha r_\beta \\
& + \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^L l_\nu \mathcal{U}_\alpha^L l_\beta - \frac{1}{2}\mathcal{U}_\mu^R r_\nu \mathcal{U}_\alpha^R r_\beta - i\mathcal{U}_\mu^L \mathcal{U}_\nu^L \mathcal{U}_\alpha^L l_\beta + i\mathcal{U}_\mu^R \mathcal{U}_\nu^R \mathcal{U}_\alpha^R r_\beta,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

mit der Definition $\mathcal{U}_\mu^L = U^\dagger \partial_\mu U$ und $\mathcal{U}_\mu^R = U \partial_\mu U^\dagger$. In der üblich benutzten Version [38] erfüllt die effektive Wirkung die Invarianz unter Ladungskonjugation und Hermitizität bis auf eine totale Ableitung. Die oben angegebene effektive Wirkung hingegen ist manifest C-invariant und hermitesch. Betrachtet man den Fall externer elektromagnetischer Felder

$$r_\mu = l_\mu = -eA_\mu Q, \tag{3.39}$$

und setzt $n = 3$, so lässt sich die effektive Lagrangedichte schreiben gemäß⁶

$$\mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)} = \mathcal{L}_0^{(4)} + \mathcal{L}_{\text{ext}}^{(4)}, \tag{3.40}$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}^{(4)} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{16\pi^2} \left\{ -eA_\mu \text{Tr}(Y_{\nu\alpha\beta}) + ie^2 \partial_\nu A_\alpha A_\beta \text{Tr}(Z_\mu) \right\}, \tag{3.41}$$

$$Y_{\nu\alpha\beta} = Q\partial_\nu UU^\dagger \partial_\alpha UU^\dagger \partial_\beta UU^\dagger + QU^\dagger \partial_\nu UU^\dagger \partial_\alpha UU^\dagger \partial_\beta U, \tag{3.42}$$

$$Z_\mu = 2Q^2(U\partial_\mu U^\dagger - U^\dagger \partial_\mu U) - QU^\dagger Q\partial_\mu U + QUQ\partial_\mu U^\dagger. \tag{3.43}$$

⁶ $\mathcal{L}_0^{(4)}$ steht symbolisch für die Lagrangedichte ohne externe Felder. $\mathcal{L}_0^{(4)}$ lässt sich nicht als geschlossenen Ausdruck angeben.

Entwickelt man die effektive Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)}$ bzgl. ϕ und A_μ , so ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)} = \mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{3\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi+\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi}^{(4)} + \mathcal{L}_{7\phi}^{(4)} + \dots, \quad (3.44)$$

mit⁷

$$\mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(4)} = \frac{3e^2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{8\pi^2 F_0} \left\{ A_\beta \partial_\nu A_\alpha \text{Tr}(Q^2 \partial_\mu \phi) \right\}, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{L}_{5\phi}^{(4)} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{80\pi^2 F_0^5} \left\{ \text{Tr}(\phi \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \right\}. \quad (3.46)$$

Man bemerke hier, dass der führende Term in Abwesenheit elektromagnetischer Felder, d.h. pure QCD, mit mindestens fünf Feldern beginnt. Außerdem sollte man beachten, dass der anomale Sektor in führender Ordnung mit dem WZW Term anfängt, welcher die chirale $\mathcal{O}(q^4)$ aufweist. Die axiale abelsche Anomalie ist vollständig durch den WZW Term beschrieben. Konstruierte effektive Lagrangedichten höherer Ordnungen, wie z.B. die in dieser Arbeit betrachtete Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$, beziehen sich auf den anomalen Sektor im Sinne von ungerader innerer Parität. Hiermit lassen sich Prozesse mit einer ungeraden Anzahl an Goldstone-Bosonen in nächst höherer Ordnung betrachten.

⁷ Alle in Gl. (3.44) auftretenden Lagrangedichten sind im Anhang H explizit angegeben.

Kapitel 4

ChPT im Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$

4.1 Die effektive Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$

Die Konstruktion der anomalen Lagrangedichte oder, besser gesagt, der effektiven chiralen Lagrangedichte im Sektor ungerader innerer Parität der $\mathcal{O}(q^6)$ wurde von mehreren Autoren vorgenommen [23, 24, 39, 40, 41, 42]. In dieser Arbeit beziehen wir uns auf die in Ref. [23] angegebene Lagrangedichte. Die Liste der anomalen $\text{SU}(3)$ Monome der $\mathcal{O}(q^6)$, welche die allgemeinste Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ bilden, ist gegeben durch Tabelle 4.1 mit der Definition¹

$$(A)_\pm \equiv u^\dagger(AU^\dagger \pm UA^\dagger)u, \quad u^2 \equiv U. \quad (4.1)$$

$\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ ist klassifiziert nach Beiträgen führender Ordnung bezogen auf die Reaktionstypen $\phi + 2\zeta$, $3\phi + \zeta$, $3\phi + 2\zeta$, 5ϕ und $5\phi + \zeta$, wobei ζ im Allgemeinen für externe Felder r_μ und l_μ steht. $f_{\text{R/L}}^{\mu\nu}$ bezeichnet den Feldstärketensor bezogen auf die zugehörigen externen Felder r_μ und l_μ und $G^{\mu\nu} \equiv f_{\text{R}}^{\mu\nu}U + Uf_{\text{L}}^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu} \equiv f_{\text{R}}^{\mu\nu}U - Uf_{\text{L}}^{\mu\nu}$. Der $\chi \equiv 2B_0(s + ip)$ Block beinhaltet die externen skalaren und pseudoskalaren Felder und B_0 ist verknüpft mit dem skalaren Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle_0$ im chiralen Grenzfall. Die kovariante Ableitung ist definiert durch

$$D_\mu f_{\nu\alpha}^{\text{R}} = \partial_\mu f_{\nu\alpha}^{\text{R}} - i[r_\mu, f_{\nu\alpha}^{\text{R}}]. \quad (4.2)$$

¹In der Tabelle 4.1 bezeichnet „rev“ den jeweils in Klammern stehenden Ausdruck in entgegengesetzter Reihenfolge.

Reaktionstyp	LECs	SU(3)
$\phi + 2\zeta$	$L_3^{6,\epsilon}$ $L_8^{6,\epsilon}$ $L_9^{6,\epsilon}$ $L_{19}^{6,\epsilon}$	$i\text{Tr}[(\chi)_+ \{ (G_{\mu\nu})_+ (H_{\alpha\beta})_+ - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(\chi)_- (G_{\mu\nu})_+ (G_{\alpha\beta})_+] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(\chi)_-] \text{Tr}[(G_{\mu\nu})_+ (G_{\alpha\beta})_+] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(D^\lambda G_{\lambda\mu})_+ \{ (G_{\nu\alpha})_+ (D_\beta U)_- + \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$
$3\phi + \zeta$	$L_1^{6,\epsilon}$ $L_2^{6,\epsilon}$ $L_5^{6,\epsilon}$ $L_6^{6,\epsilon}$ $L_7^{6,\epsilon}$ $L_{13}^{6,\epsilon}$ $L_{14}^{6,\epsilon}$	$\text{Tr}[(\chi)_+ \{ (H_{\mu\nu})_+ (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_- + \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(\chi)_+ (D_\mu U)_-] \text{Tr}[(D_\nu U)_- (H_{\alpha\beta})_+] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(\chi)_- \{ (G_{\mu\nu})_+ (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(\chi)_- (D_\mu U)_- (G_{\nu\alpha})_+ (D_\beta U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(\chi)_-] \text{Tr}[(G_{\mu\nu})_+ (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(G_{\mu\nu})_+ \{ (D^\lambda D_\alpha U)_-^s (D_\beta U)_- (D_\lambda U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(G_{\mu\nu})_+ \{ (D_\lambda D_\alpha U)_-^s (D^\lambda U)_- (D_\beta U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$
$3\phi + 2\zeta$	$L_{10}^{6,\epsilon}$ $L_{11}^{6,\epsilon}$ $L_{20}^{6,\epsilon}$ $L_{21}^{6,\epsilon}$ $L_{22}^{6,\epsilon}$ $L_{23}^{6,\epsilon}$ $L_{24}^{6,\epsilon}$	$i\text{Tr}[(\chi)_- (H_{\mu\nu})_+ (H_{\alpha\beta})_+] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(\chi)_-] \text{Tr}[(H_{\mu\nu})_+ (H_{\alpha\beta})_+] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(D^\lambda H_{\lambda\mu})_+ \{ (H_{\nu\alpha})_+ (D_\beta U)_- + \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(G_{\lambda\mu})_+ \{ (H^\lambda_\nu)_+ (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(G_{\lambda\mu})_+ \{ (H_{\nu\alpha})_+ (D_\beta U)_- (D^\lambda U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(G_{\mu\nu})_+ \{ (H_{\alpha\beta})_+ (D_\lambda U)_- (D^\lambda U)_- - \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(G_{\lambda\mu})_+ (D_\nu U)_- (H^\lambda_\alpha)_+ (D_\beta U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$
5ϕ	$L_4^{6,\epsilon}$ $L_{12}^{6,\epsilon}$	$i\text{Tr}[(\chi)_- (D_\mu U)_- (D_\nu U)_- (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $i\text{Tr}[(D_\lambda D_\mu U)_-^s \{ (D^\lambda U)_- (D_\nu U)_- (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_- + \text{rev} \}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$
$5\phi + \zeta$	$L_{15}^{5,\epsilon}$ $L_{16}^{6,\epsilon}$ $L_{17}^{6,\epsilon}$ $L_{18}^{6,\epsilon}$	$-\text{Tr}[(H_{\mu\nu})_+ \{ (D_\lambda U)_- (D^\lambda U)_- (D_\alpha U)_- (D_\beta U)_- \} + \text{rev}] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(H_{\mu\nu})_+ \{ (D_\lambda U)_- (D_\alpha U)_- + \text{rev} \}] \text{Tr}[(D^\lambda U)_- (D_\beta U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ $\text{Tr}[(H_{\mu\nu})_+ (D_\alpha U)_-] \text{Tr}[(D_\beta U)_- (D_\lambda U)_- (D^\lambda U)_-] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$

Tabelle 4.1: Die anomalen SU(3) Monome der chiralen $\mathcal{O}(q^6)$ bezogen auf die Reaktionstypen $\phi + 2\zeta$, $3\phi + \zeta$, $3\phi + 2\zeta$, 5ϕ und $5\phi + \zeta$. „rev“ bezeichnet den jeweils in Klammern stehenden Ausdruck in entgegengesetzter Reihenfolge. Die Struktur gewichtet mit dem Koeffizienten $L_{15}^{6,\epsilon}$ tritt nur für SU(N) mit $N \geq 4$ auf.

Die symmetrisierte kovariante Ableitung $(D_\mu D_\nu U)_-^s$ ist gegeben durch

$$(D_\mu D_\nu U)_-^s = (D_\mu D_\nu U)_- + \frac{i}{2}(H_{\mu\nu})_+. \quad (4.3)$$

In der Anwesenheit elektromagnetischer externer Felder, d.h. $r_\mu = l_\mu = -eA_\mu Q$ und $\chi = \chi^\dagger$, ist die führende Ordnung in der Entwicklung der Bausteine bzgl. ϕ , $\chi = 2B_0 M$ und A_μ gegeben durch

$$\mathcal{L}_\epsilon^{(6)} = \mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} + \mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(6)} + \mathcal{L}_{5\phi}^{(6)} + \dots, \quad (4.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} = & \frac{32e^2}{F_0^3} \left\{ B_0 (L_8^{6,\epsilon} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr}[\{M, \phi\} Q^2] + L_9^{6,\epsilon} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr}[\{M, \phi\}] \text{Tr}[Q^2]) \right. \\ & \left. - L_{19}^{6,\epsilon} \partial^\lambda F_{\lambda\mu} F_{\nu\alpha} \text{Tr}[Q \{\partial^\beta \phi, Q\}] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(6)} = & -\frac{32ie F_{\mu\nu}}{F_0^3} \left\{ B_0 (L_1^{6,\epsilon} \text{Tr}[M \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi [\phi, Q] + M [\phi, Q] \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi] \right. \\ & + L_2^{6,\epsilon} \text{Tr}[\partial_\beta \phi [\phi, Q]] \text{Tr}[M \partial_\alpha \phi] \\ & + L_5^{6,\epsilon} \text{Tr}[\{\phi, M\} (Q \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi Q)] \\ & + L_6^{6,\epsilon} \text{Tr}[\{\phi, M\} \partial_\alpha \phi Q \partial_\beta \phi] \\ & + L_7^{6,\epsilon} \text{Tr}[\{\phi, M\}] \text{Tr}[Q \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi]) \\ & - L_{13}^{6,\epsilon} \text{Tr}[Q (\partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \partial_\lambda \phi - \partial_\lambda \phi \partial_\beta \phi \partial^\lambda \partial_\alpha \phi)] \\ & \left. - L_{14}^{6,\epsilon} \text{Tr}[Q (\partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\lambda \phi \partial_\beta \phi - \partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \partial_\lambda \phi)] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Die LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Einerseits sind es Koeffizienten der chiralen Symmetriebrechung und andererseits Koeffizienten der Ableitungen. Letztere werden unter Verwendung des Vektormesondominanz (VMD) Modells abgeschätzt, was in dem Abschnitt 4.1.3 diskutiert wird. Die übrigen LECs sollen mit Hilfe experimenteller Daten angepasst werden. Hierfür zeigt die Tabelle 4.2 für die jeweiligen Reaktionstypen eine Wahl geeigneter Amplituden und die jeweils beitragenden LECs². Es sollte betont werden, dass, mit Ausnahme von

²Der Reaktionstyp $5\phi + \zeta$ wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Reaktionstyp	Amplitude	LECs
$\phi + 2\zeta$	$\pi^0\gamma\gamma$ $\eta_8\gamma\gamma$ $\pi^+ \rightarrow e^+\nu\gamma$ $K^+ \rightarrow e^+\nu\gamma$	$L_8^{6,\epsilon}, L_{19}^{6,\epsilon}$ $L_8^{6,\epsilon}, L_9^{6,\epsilon}, L_{19}^{6,\epsilon}$ $L_8^{6,\epsilon}, L_{19}^{6,\epsilon}$ $L_3^{6,\epsilon}, L_8^{6,\epsilon}, L_{19}^{6,\epsilon}$
$3\phi + \zeta$	$\pi^+\pi^-\pi^0\gamma$ $\pi^+\pi^-\eta_8\gamma$ $K^+K^-\pi^0\gamma$ $K^+K^-\eta_8\gamma$ $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu$	$L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}, L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}$ $L_2^{6,\epsilon}, L_7^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}, L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}$ $L_1^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}, L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}$ $L_1^{6,\epsilon}, L_2^{6,\epsilon}, L_7^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}, L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}$ $L_1^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}, L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}$
$3\phi + 2\zeta$	$\pi^+\pi^-\pi^0\gamma\gamma$ $K^+K^-\pi^0\gamma\gamma$ $\pi^+\pi^-\eta_8\gamma\gamma$ $K^+K^-\eta_8\gamma\gamma$	$L_{22}^{6,\epsilon}$ $L_{10}^{6,\epsilon}, L_{20}^{6,\epsilon}, L_{22}^{6,\epsilon}, L_{23}^{6,\epsilon}$ $L_{10}^{6,\epsilon}, L_{11}^{6,\epsilon}, L_{20}^{6,\epsilon}, L_{22}^{6,\epsilon}, L_{23}^{6,\epsilon}$ $L_{10}^{6,\epsilon}, L_{11}^{6,\epsilon}, L_{20}^{6,\epsilon}, L_{22}^{6,\epsilon}, L_{23}^{6,\epsilon}$
5ϕ	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\eta_8$ $K^+K^-\pi^+\pi^-\pi^0$	$L_{12}^{6,\epsilon}$ $L_4^{6,\epsilon}, L_{12}^{6,\epsilon}$

Tabelle 4.2: Mögliche Kombinationen aus Goldstone-Bosonen und externen Feldern und die beitragenden LECs.

$3\phi + 2\zeta$, keine Überlappungen der einzelnen Reaktionstypen auftreten. Bei dem Reaktionstyp $3\phi + 2\zeta$ hingegen treten sowohl LECs der Reaktionstypen $\phi + 2\zeta$ als auch $3\phi + \zeta$ bei, die jedoch nicht explizit in der Tabelle 4.2 aufgelistet sind.

4.2 Konsistente Rechnung bis zur $\mathcal{O}(q^6)$

Zur Ausführung einer konsistenten Rechnung bis zu einer gegebenen Ordnung müssen alle möglichen Feynmandiagramme in Betracht gezogen werden, die durch die effektive Lagrangedichte erzeugt werden können. Hierfür steht Weinbergs Zählchema [15] zur Verfügung, welches die Verknüpfung zwischen der Schleifenentwicklung und der chiralen Entwicklung herstellt und somit die Wichtigkeit einzelner Diagramme bestimmt:

$$D = 2 + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \quad (4.7)$$

N_{2n} steht für die Anzahl der Vertices aus $\mathcal{L}^{(2n)}$, N_L für die Anzahl der unabhängigen Schleifen und D bezeichnet die chirale Ordnung des Diagramms. Die effektive Lagrangedichte in dem Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{N}} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{A}}, \quad (4.8)$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{N}} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{A}} = \mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)} + \mathcal{L}_{\epsilon}^{(6)} + \dots \quad (4.10)$$

Hierbei steht der Index N für normal (= gerade innere Parität) und A für anomal (= ungerade innere Parität). Der explizite Ausdruck der jeweiligen Lagrangedichten ist in den Gl. (3.22), (3.9), (3.40) und (4.4) angegeben. Unter Verwendung der Gl. (4.7) sind die beitragenden Diagrammklassen für die Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$, $\phi + \gamma^*W$, $3\phi + \gamma^*$, $3\phi + W$, 5ϕ und $3\phi + 2\gamma^*$ bis zur Ordnung $D \leq 6$ in den Abb. B1 - B6 im Anhang B gezeigt³. Letztere lassen sich mit Ausnahme des Reaktionstyps $3\phi + 2\gamma^*$ wie folgt zusammenfassen. Die niedrigste Ordnung besteht aus einem WZW Vertex. In nächst höherer Ordnung bestehen die beitragenden Diagramme, auf Baumniveau, aus einem Vertex der $\mathcal{O}(q^6)$ von $\mathcal{L}_{\epsilon}^{(6)}$, auf Einschleifenniveau, aus einem einzigen WZW Vertex mit geschlossener Schleife oder aus einem WZW Vertex und einem Vertex der $\mathcal{O}(q^2)$ von $\mathcal{L}^{(2)}$. Betrachtet man den Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma^*$, so tragen in niedrigster Ordnung sowohl Diagramme mit einem einzigen WZW Vertex als auch Diagramme mit einem WZW Vertex und einem Vertex der $\mathcal{O}(q^2)$ von $\mathcal{L}^{(2)}$ bei. In nächst höherer Ordnung tragen auf Baumniveau sowohl Diagramme mit einem Vertex der $\mathcal{O}(q^6)$ von $\mathcal{L}_{\epsilon}^{(6)}$ als auch mit einem WZW Vertex und einem Vertex der $\mathcal{O}(q^4)$ von $\mathcal{L}^{(4)}$ als auch Diagramme mit einem Vertex der $\mathcal{O}(q^6)$ von $\mathcal{L}_{\epsilon}^{(6)}$ und einem Vertex der $\mathcal{O}(q^2)$ von $\mathcal{L}^{(2)}$ bei. Auf Einschleifenniveau tragen Diagramme mit einem einzigen WZW Vertex mit geschlossener Schleife sowie Diagramme mit einem WZW Vertex und einem Vertex der $\mathcal{O}(q^2)$ von $\mathcal{L}^{(2)}$ und Diagramme mit einem WZW Vertex und zwei Vertices der $\mathcal{O}(q^2)$ von $\mathcal{L}^{(2)}$ bei. Des Weiteren erhalten alle Diagramme niedrigster Ordnung zusätzlich Korrekturen der $\mathcal{O}(q^2)$

³ ϕ steht für (π, K, η) und γ^* bzw. W bezeichnet das Photon bzw. W -Boson.

erzeugt durch die Zerfallskonstanten- und Wellenfunktionsrenormierung der Goldstone-Bosonen⁴.

4.2.1 Renormierung

Weinbergs Zählschema [15] folgend tragen Einschleifendiagramme immer in nächst höherer Ordnung bei. Berechnet man z.B. unter Verwendung der Vertices von $\mathcal{L}^{(2)}$ Einschleifendiagramme, so müssen die auftretenden ultravioletten Divergenzen durch die Renormierung der Koeffizienten von $\mathcal{L}^{(4)}$ absorbiert werden. In Ref. [16, 17] werden die entsprechenden Pole in dimensionaler Regularisierung zusammen mit den benötigten Gegentermen in einer geschlossenen Form angegeben. Hierfür wurde die so genannte Sattelpunktmethode verwendet, welche ausgehend von dem erzeugenden Funktional

$$\exp(iZ) \propto \int \mathcal{D}U \exp\left[i \int dx \mathcal{L}(U)\right], \quad (4.11)$$

die Möglichkeit bietet, die Einschleifenbeiträge zu bestimmen

$$Z_{1\text{-Schleife}} = \frac{i}{2} \ln(\det \mathbb{D}). \quad (4.12)$$

$\mathbb{D}$ bezeichnet einen elliptischen Differentialoperator. Um obiges Resultat zu erhalten, entwickelt man die Wirkung um die klassische Lösung und führt das Pfadintegral bezogen auf Terme, die quadratisch in den Fluktuationen sind, durch. Der resultierende Einschleifenanteil des erzeugenden Funktionals wird unter Verwendung dimensionaler Regularisierung behandelt und die Pole durch die so genannte Wärmekernentwicklung isoliert⁵. Folgend wird in Anlehnung an [43] die prinzipielle Idee an einem Beispiel kurz erläutert. Sei

$$S(q) = \int_{\tau}^{\tau'} dt \frac{\dot{q}(t)^2}{2}, \quad (4.13)$$

die gewählte Wirkung, so folgt

$$\int_{q(\tau)=\beta}^{q(\tau')=\alpha} \mathcal{D}q \exp[-S(q)] = \exp[-S(q_{kl})] \int_{q(\tau)=0}^{q(\tau')=0} \mathcal{D}q \exp[-S(q)], \quad (4.14)$$

⁴Der explizite Ausdruck für die Zerfallskonstanten- und Wellenfunktionsrenormierung der Goldstone-Bosonen ist im Anhang G angegeben.

⁵Im Englischen wird die Wärmekernentwicklung als *heat-kernel-method* bezeichnet

wobei q_{kl} die Lösung des Wirkungsprinzip

$$S(q) \doteq \text{stationär}, \quad q(\tau) = \beta, \quad q(\tau') = \alpha, \quad (4.15)$$

bezeichnet. Die interessierenden Quantenfluktuationen berechnet man zu

$$\int_{q(\tau)=0}^{q(\tau')=0} \mathcal{D}q \exp[-S(q)] = \left[2\pi(\tau' - \tau)\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Der Trick hierbei besteht darin, die Wirkung $S(q)$ als eine quadratische Form $\frac{1}{2}\langle q|\mathbf{D}q\rangle$ mit einem geeigneten Differentialoperator $\mathbf{D}$ zu schreiben:

$$\int_{q(\tau)=0}^{q(\tau')=0} \mathcal{D}q \exp[-S(q)] = \int_{q(\tau)=0}^{q(\tau')=0} \mathcal{D}q \exp\left[-\frac{1}{2}\langle q|\mathbf{D}q\rangle\right]. \quad (4.17)$$

Motiviert durch das klassische Gauß'sche Integral lässt sich somit der formale Ansatz

$$\int_{q(\tau)=0}^{q(\tau')=0} \mathcal{D}q \exp\left[-\frac{1}{2}\langle q|\mathbf{D}q\rangle\right] := \text{const} \times [\det \mathbf{D}]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.18)$$

machen. Sei nun $\mathbf{D} := -\frac{d^2}{dt^2}$, so führt (4.13) zur Eigenwertgleichung

$$\mathbf{D}q_n(t) = \lambda_n q_n(t), \quad \tau \leq t \leq \tau', \quad (4.19)$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\tau' - \tau}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Die Einführung der Zeta-Funktion für den gegebenen Operator $\mathbf{D}$ gemäß

$$\zeta_{\mathbf{D}}(s) := \sum_n \lambda_n^{-s}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.21)$$

ergibt

$$\det \mathbf{D} = \exp\left(-\frac{d}{ds} \zeta_{\mathbf{D}}(0)\right). \quad (4.22)$$

Für das hier betrachtete Beispiel berechnet man

$$\zeta_{\mathbf{D}}(s) = \exp\left[2s \ln\left(\frac{\tau' - \tau}{\pi}\right)\right] \zeta(2s), \quad (4.23)$$

wobei ζ die klassische Riemann'sche Zeta-Funktion bezeichnet. Dies führt zu

$$\det D = 2(\tau' - \tau). \quad (4.24)$$

Die Wahl der Normierungskonstante $\text{const} = (\pi)^{-1/2}$ ergibt schließlich das Ergebnis aus Gl. (4.16). Die Berechnung von $\zeta_D(s)$ ist i.A. die Hauptaufgabe. Hierfür verwendet man die Mellin-Transformation des Wärmekerns, welche zu $\zeta_D(s)$ führt

$$\zeta_D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt K_D(t) t^{s-1}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

mit dem Wärmekern

$$K_D(t) = \sum_n \exp(-\lambda_n t), \quad t > 0, \quad (4.26)$$

der für sich selbst genommen die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Berechnet man für einen gegebenen Differentialoperator D unter Verwendung der Wärmeleitungsgleichung den Wärmekern, so erhält man $\zeta_D(s)$ und somit die erwünschten Einschleifensingularitäten.

Betrachtet man die ChPT, so lässt sich Gl. (4.11) umschreiben zu

$$\exp(iZ)_{1\text{-Schleife}} \propto \int \mathcal{D}\xi \exp\left(-i\frac{F_0^2}{2} \langle \xi | D \xi \rangle\right), \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} D &= d^\mu d_\mu + \rho, \\ d_\mu \xi &= \partial_\mu \xi + [j_\mu, \xi], \end{aligned} \quad (4.28)$$

und

$$\begin{aligned} U &= u \exp(i\xi) u, \\ u^2 &= \bar{U}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei $\bar{U}$ die klassische Lösung bezeichnet. Die antihermitesche Größe j_μ und die hermitesche Größe ρ sind diejenigen Objekte, die die vollständige Information auf dem Einschleifenniveau der betrachteten Theorie, definiert durch ihre Lagrangedichte, beinhalten. Nach oben beschriebener Prozedur erhält

Kopplungskonstante	empirischer Wert [10^{-3} GeV^{-2}]	Koeffizient Γ_i
L_1^r	0.4 ± 0.3	$\frac{3}{32}$
L_2^r	1.35 ± 0.3	$\frac{3}{16}$
L_3^r	-3.5 ± 1.1	0
L_4^r	-0.3 ± 0.5	$\frac{1}{8}$
L_5^r	1.4 ± 0.5	$\frac{3}{8}$
L_6^r	-0.2 ± 0.3	$\frac{11}{144}$
L_7^r	-0.4 ± 0.2	0
L_8^r	0.9 ± 0.3	$\frac{5}{48}$
L_9^r	6.9 ± 0.7	$\frac{1}{4}$
L_{10}^r	-5.5 ± 0.7	$-\frac{1}{4}$

Tabelle 4.3: Renormierte Niederenergiekopplungskonstanten L_i^r in Einheiten von 10^{-3} GeV^{-2} bei der Skala $\mu = m_\rho$ [44].

man nach länglicher Rechnung Ref. [45, 46, 41] folgend die Wärmekern-Formel

$$Z_{1\text{-Schleife}}^{(\text{singulär})} = -\frac{1}{16\pi^2(n-4)} \int dx \text{Tr} \left[\frac{1}{12} j_{\mu\nu} j^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \rho^2 \right], \quad (4.30)$$

mit

$$j_{\mu\nu} = \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu + [j_\mu, j_\nu]. \quad (4.31)$$

Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, dass im Rahmen der dimensional Regularisierung⁶ die Divergenzen als Pole bei der Dimension $n = 4$ in Erscheinung treten. Die Hauptaufgabe besteht in der Bestimmung von $j_{\mu\nu}$ und ρ für den jeweilig betrachteten Fall. Letzteres wurde von Gasser und Leutwyler für $\mathcal{L}^{(2)}$ bestimmt und die Definition der renormierten Kopplungskonstanten von $\mathcal{L}^{(4)}$

$$\begin{aligned} L_i &= L_i^r + \Gamma_i \frac{\mu^{n-4}}{32\pi^2} R, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \\ H_i &= H_i^r + \Delta_i \frac{\mu^{n-4}}{32\pi^2} R, \quad i = 1, 2, \\ R &= \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) - \gamma_E + 1], \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁶Eine Einführung in dimensionale Regularisierung ist z.B. in Ref. [25] gegeben.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$32\pi^2 F_0^2 \delta_i$	$-\frac{7}{96}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{5}{96}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{32}$
i	13	14	-	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$32\pi^2 F_0^2 \delta_i$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	-	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$	$-\frac{3}{16}$

Tabelle 4.4: Koeffizienten δ_i für die in dieser Arbeit verwendeten Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$ erzeugt aus den Ergebnissen von Ref. [39].

so gewählt, das die Summe von $\mathcal{L}^{(4)} + \frac{i}{2} \ln \det \mathbf{D}$ für $n = 4$ endlich ist [17]. In der Tabelle 4.3 sind die empirischen Werte der renormierten LECs von $\mathcal{L}^{(4)}$ bei der Skala $\mu = m_\rho$ und die Koeffizienten Γ_i angegeben [44]⁷. Für den anomalen Bereich ist diese Prozedur von mehreren Autoren vorgenommen worden mit unterschiedlichen Definitionen und unterschiedlicher Nomenklatur [45, 46, 41]. Wir verwenden in dieser Arbeit die effektive Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$ im Sektor ungerader innerer Parität aus Ref. [23] (siehe Abschnitt 4.1). Aus den berechneten Ergebnissen von Ref. [39] lassen sich mit der Definition

$$L_i^{6,\epsilon} = L_{i,r}^{6,\epsilon} + \delta_i \frac{\mu^{n-4}}{32\pi^2} R, \quad i = 1, 2, \dots, 24, \quad (4.33)$$

die Koeffizienten δ_i für die in dieser Arbeit verwendete Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$ angeben. Tabelle 4.4 zeigt für den Fall von $\mathbf{SU}(3)$ die jeweiligen Koeffizienten. Im Folgenden beziehen wir uns, wenn nicht anders angegeben, auf renormierte Größen.

4.2.2 Vektormesondominanz (VMD)

VMD ist ein sehr erfolgreiches phänomenologisches Modell basierend auf der Sachlage, dass Teilchen mit größerer Masse immer durch virtuelle Effekte in der Theorie in Erscheinung treten. Grob gesprochen besagt VMD, dass der Hauptteil der dynamischen Effekte unterhalb der Skala chiraler Symmetriebrechung bei den meisten Prozessen durch den Austausch dieser massiveren

⁷ H_1 und H_2 besitzen keine physikalische Relevanz [17], weswegen diese LECs im Folgenden nicht mehr auftauchen.

Resonanzen gegeben ist. Hierdurch lassen sich die LECs, die physikalisch gesehen all jene Information der QCD über Teilchen beinhalten, die nicht zum Oktett der Goldstone-Bosonen gehören, abschätzen. Bei sehr niedrigen Energien erwartet man, dass die Leichtesten, die so genannten Vektormesonen den Hauptbeitrag liefern. Diese können in gleicher Weise wie das pseudoskalare Mesonoktett in einer Matrix zusammengefasst werden gemäß

$$V_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\rho_\mu^0}{2} + \frac{\omega_\mu}{2} & \frac{\rho_\mu^+}{\sqrt{2}} & \frac{K_\mu^{*+}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\rho_\mu^-}{\sqrt{2}} & \frac{\omega_\mu}{2} - \frac{\rho_\mu^0}{2} & \frac{K_\mu^{*0}}{\sqrt{2}} \\ \frac{K_\mu^{*-}}{\sqrt{2}} & \frac{\bar{K}_\mu^{*0}}{\sqrt{2}} & \frac{\phi_\mu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Nach Ref. [47] werden die Vektormesonen als dynamische Eichbosonen einer verborgenen lokalen Symmetrie eingeführt⁸. Ein alternatives Schema beschreibt die Vektormesonen als massive Yang-Mills Bosonen [49, 50, 51]. Letzterer Ansatz und seine Verknüpfung mit dem Schema verborgener Symmetrien werden in Ref. [52] diskutiert. Ref. [47] folgend ist die effektive Lagrangedichte gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{VMD}} = \mathcal{L}_{\text{N}}^{\text{VMD}} + \mathcal{L}_{\text{A}}^{\text{VMD}}, \quad (4.35)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{N}}^{\text{VMD}} = & \frac{F_0^2}{4} \left\{ \text{Tr}(\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) + \text{Tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger) \right. \\ & \left. - a \text{Tr}[(D_\mu \xi^\dagger \xi + D_\mu \xi \xi^\dagger)(D^\mu \xi^\dagger \xi + D^\mu \xi \xi^\dagger)] \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{A}}^{\text{VMD}} = & \frac{3\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{16\pi^2} \left\{ i \text{Tr}(\Lambda_\mu \Lambda_\nu \Lambda_\alpha \Theta_\beta - \Theta_\mu \Theta_\nu \Theta_\alpha \Lambda_\beta) \right. \\ & + i \text{Tr}(\Lambda_\mu \Theta_\nu \Lambda_\alpha \Theta_\beta) - \text{Tr}[F_{\mu\nu}(\Lambda_\alpha \Theta_\beta - \Theta_\alpha \Lambda_\beta)] \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu}(\xi \Lambda_\alpha \Theta_\beta \xi^\dagger - \xi^\dagger \Theta_\alpha \Lambda_\beta \xi + \xi^\dagger \Lambda_\alpha \Theta_\beta \xi - \xi \Theta_\alpha \Lambda_\beta \xi^\dagger)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei

$$D_\mu \xi = \partial_\mu \xi - ig V_\mu \xi - ie A_\mu \xi Q, \quad \xi^2 = U. \quad (4.38)$$

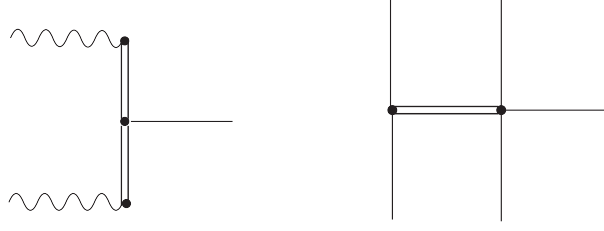


Abbildung 4.1: Die zu berechnenden Diagrammklassen in dem VMD-Modell für die Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$ (links) und 5ϕ (rechts). Die doppelte Linie bezeichnet Vektormesonen V_μ .

Die Indizes **N** bzw. **A** stehen für gerade bzw. ungerade innere Parität und $D_\mu U$ bezeichnet die konventionelle kovariante Ableitung mit elektromagnetischen externen Feldern. a bezeichnet einen globalen Koeffizient eingeführt aufgrund von Symmetrieüberlegungen. Die einzelnen Bausteine sind definiert durch

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu &= \partial_\mu \xi^\dagger \xi - igV_\mu - ieA_\mu \xi^\dagger Q \xi, \\
\Theta_\mu &= \partial_\mu \xi \xi^\dagger - igV_\mu - ieA_\mu \xi Q \xi^\dagger, \\
F_{\mu\nu} &= g\partial_\mu V_\nu - ig^2 V_\mu V_\nu, \\
G_{\mu\nu} &= -e\partial_\mu A_\nu Q - ie^2 A_\mu A_\nu Q^2.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Die Entwicklung von $\mathcal{L}_N^{\text{VMD}}$ bzgl. ϕ und V_μ führt zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N^{\text{VMD}} &= m_V^2 \text{Tr}(V_\mu V^\mu) + 2eg_V A_\mu \text{Tr}(Q V^\mu) + \left(\frac{eg_V}{m_V^2}\right)^2 A_\mu A^\mu \text{Tr}(Q^2) \\
&\quad - \frac{ig_{V\phi\phi}}{2} \text{Tr}(V_\mu [\phi, \partial^\mu \phi]) - \frac{iae}{4} A_\mu \text{Tr}(Q [\phi, \partial^\mu \phi]) \\
&\quad + \frac{eg_{V\phi\phi}}{2} A_\mu \text{Tr}([[\phi, Q], \phi] V^\mu).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

In obiger Gleichung sind die Relationen für die Masse des Vektormesons, $m_V^2 = ag^2 F_0^2$, die Vektor-Photon Mischung $g_V = agF_0^2$ und die Vektor- $\phi\phi$ Kopplung $g_{V\phi\phi} = ag/2$ bereits eingeführt. Dies führt zur bekannten KSFF Relation [53, 54],

$$\frac{g_V}{g_{V\phi\phi}} = 2F_0^2. \tag{4.41}$$

⁸Eine Einführung in verborgene lokale Symmetrien ist z.B. in Ref. [48] angegeben.

unabhängig vom Koeffizient a . Die Wahl $a = 2$ führt zur universellen Vektor-Meson Kopplung $g_{V\phi\phi} = g$ und zur kompletten Vektormesondominanz des elektromagnetischen Formfaktors, beides basierend auf phänomenologischen Überlegungen [47]. Man sollte beachten, dass das VMD-Modell nicht die Koeffizienten der Quarkmassenterme in der chiralen Theorie vorhersagen kann, weil die VMD-Lagrangedichte keine explizite Symmetriebrechung berücksichtigt. Hieraus folgend kann dieses Modell nur eine Abschätzung der „dynamischen“ LECs liefern. Diejenigen LECs, die Koeffizienten der chiralen Symmetriebrechung sind, werden mit Hilfe experimenteller Daten angepasst. Des Weiteren ist hier anzumerken, dass für den Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*$ die so genannte exakte VMD aufgrund der sehr genauen Messung des $\omega \rightarrow 3\pi$ Zerfalls nicht aufrechterhalten werden kann [47].

Betrachten wir als Beispiel die Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$ und 5ϕ . Die zu berechnenden Diagrammklassen sind in Abb. 4.1 gezeigt. Definiert man für $\phi + 2\gamma^*$ die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = -i \mathbf{F} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\mu \epsilon'_\nu q_\alpha q'_\beta$, wobei q_μ und q'_μ die Photonimpulse mit ihren Polarisationsvektoren ϵ_μ und ϵ'_μ bezeichnen und entwickelt die auftretenden Propagatoren gemäß

$$\frac{m_V^2}{m_V^2 - p^2} = 1 + \frac{p^2}{m_V^2} + \dots, \quad (4.42)$$

so erhält man für den $\mathcal{O}(q^6)$ Anteil

$$\mathbf{F}^{\text{VMD}} = \frac{3e^2(q^2 + q'^2)}{12F_0 m_V^2 \pi^2}. \quad (4.43)$$

Der Vergleich mit dem anomalen Beitrag der $\mathcal{O}(q^6)$

$$\mathbf{F}_A = -\frac{128e^2(q^2 + q'^2) L_{19}^{6,\epsilon}}{3F_0}, \quad (4.44)$$

liefert die Abschätzung $L_{19}^{6,\epsilon} = -6\Delta$ mit $\Delta = 1/1024\pi^2\Lambda^2$, wobei $\Lambda = m_\rho = 0.77 \text{ GeV}$ ist. Definiert man für 5ϕ die invariante Amplitude für die Reaktion $\pi^0(p_1) + \pi^+(p_2) + \pi^-(p_3) + K^+(p_4) + K^-(p_5) \rightarrow 0$ durch $\mathbf{M} = -i \mathbf{F} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{2\mu} p_{3\nu} p_{4\alpha} p_{5\beta}$ und entwickelt die Propagatoren nach Gl. (4.42), so erhält man für den $\mathcal{O}(q^6)$ Anteil⁹

$$\mathbf{F}^{\text{VMD}} = -\frac{3}{16F_0^5 m_V^2 \pi^2} \mathbf{U}. \quad (4.45)$$

⁹ $\mathbf{U}$ ist eine Linearkombination der Skalarprodukte der Impulse, deren expliziter Ausdruck für den Vergleich irrelevant ist.

Reaktionstyp	LECs	Abgeschätzter Wert durch VMD-Modell
$\phi + 2\gamma^*$	$L_{19}^{6,\epsilon}$	-6Δ
$3\phi + \gamma^*$	$L_{13}^{6,\epsilon}$	-3Δ
	$L_{14}^{6,\epsilon}$	$+9\Delta$
$3\phi + 2\gamma^*$	$L_{20}^{6,\epsilon}$	-3Δ
	$L_{21}^{6,\epsilon}$	$-$
	$L_{22}^{6,\epsilon}$	$-\frac{3}{2}\Delta$
	$L_{23}^{6,\epsilon}$	$+\frac{3}{8}\Delta$
	$L_{24}^{6,\epsilon}$	$-$
5ϕ	$L_{12}^{6,\epsilon}$	$-\frac{3}{4}\Delta$

Tabelle 4.5: Abschätzung der LECs durch VMD-Modell mit $\Delta = 1/1024\Lambda^2\pi^2$, $\Lambda = m_\rho = 0.77 \text{ GeV}$.

Der Vergleich mit dem anomalen Beitrag der $\mathcal{O}(q^6)$

$$\mathbf{F}_A = \frac{256 L_{12}^{6,\epsilon}}{F_0^5} \mathbf{U}, \quad (4.46)$$

führt zur Abschätzung $L_{12}^{6,\epsilon} = -3\Delta/4$. Eine analoge Vorgehensweise bei den übrigen Reaktionstypen führt zur Abschätzung der „dynamischen“ LECs durch das VMD-Modell zusammengefasst in Tabelle 4.2.2. Die Konstanten $L_{21}^{6,\epsilon}$ und $L_{24}^{6,\epsilon}$ liefern für den Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma^*$ keine Beiträge.

Kapitel 5

Ergebnisse

Dieses Kapitel zeigt die Ergebnisse der Berechnung von insgesamt vierzehn Prozessen in ChPT im Sektor ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die einzelnen Prozesse sind klassifiziert nach den Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$, $\phi + \gamma^*W$, $3\phi + \gamma^*$, $3\phi + W$, $3\phi + 2\gamma^*$ und $5\phi^1$. Auf der einen Seite bekommt man einen detaillierten Einblick, bei welchen Prozessen und in welchen Kombinationen die LECs beitragen, und andererseits werden so viele LECs wie möglich unter Verwendung experimenteller Daten angepasst. Hierfür sind die Amplituden bis zur $\mathcal{O}(q^6)$, Wirkungsquerschnitte, Zerfallsbreiten und Formfaktoren berechnet worden. Die Resultate werden diskutiert und abschließend die numerischen Werte der LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ und die jeweils zugehörigen Prozesse in einer Tabelle zusammengefasst.

5.1 Reaktionstyp $\phi + 2\gamma^*$ und $\phi + \gamma^*W$

5.1.1 $\pi^0 \rightarrow \gamma^*\gamma^*$

Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = -i \mathbf{F} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu q_\alpha q'_\beta$, wobei q_μ und q'_μ die Photonimpulse mit ihren Polarisationsvektoren ε_μ und ε'_μ bezeichnen, dann ergibt die Berechnung der in Abb. 5.1 gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$

¹ ϕ bezeichnet die Mesonen (π , K , η), γ^* steht für das Photon und W bezeichnet das W -Boson.

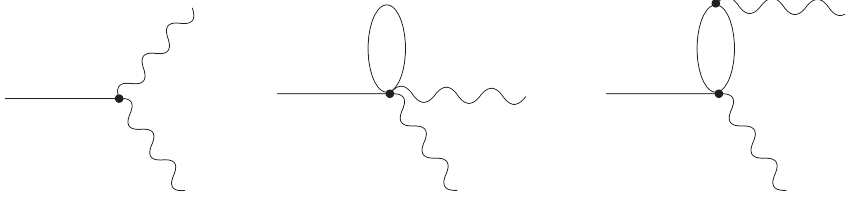


Abbildung 5.1: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien bezeichnen die Mesonen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*) &= \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi} \left\{ 1 + C_1 m_\pi^2 + C_2 (q^2 + q'^2) \right. \\
&\quad + \frac{2}{F_0^2} \left(A[q^2, m_\pi^2] + A[q^2, m_K^2] + A[q'^2, m_\pi^2] + A[q'^2, m_K^2] \right. \\
&\quad \left. \left. - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}, \tag{5.1}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1024\pi^2}{3} L_{8,\epsilon}^{6,\epsilon}, \\
C_2 &= -\frac{512\pi^2}{3} L_{19,\epsilon}^{6,\epsilon}. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [45, 55, 56].

5.1.2 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Setzt man in Gl. (5.1) $q^2 = q'^2 = 0$ für reelle Photonen, so erhält man

$$\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi} \left\{ 1 + C_1 m_\pi^2 \right\}. \tag{5.3}$$

Die Zerfallsbreite lässt sich schreiben gemäß²

$$\Gamma = \frac{1}{2! 2m_\pi (2\pi)^2} \frac{\pi \sqrt{\lambda[m_\pi^2, 0, 0]}}{2m_\pi^2} \int d\Omega \sum |\mathbf{M}|^2. \tag{5.4}$$

²Die Definitionen von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsbreiten sind im Anhang D angegeben. $\lambda[x, y, z] = (x - y - z)^2 - 4yz$.

Experiment/Theorie	$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ [eV]
PDG (2008) [4]	7.84 ± 0.56
Jefferson Lab (PrimEx Koll. 2007)[57]	$7.93 \pm 2.0\%(\text{stat}) \pm 2.0\%(\text{syst})$
J. L. Goity et al. [58]	8.1 ± 0.081

Tabelle 5.1: Die Resultate für die Zerfallsbreite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ aus Experimenten und der Theorie.

Unter Verwendung von $\sum_\lambda \varepsilon_{(\lambda)\mu}^* \varepsilon_{(\lambda)\mu'} = -g_{\mu\mu'}$ erhält man

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{m_\pi^3}{64\pi} |\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)|^2. \quad (5.5)$$

Setzt man $L_8 = 0$, so führt Gl. (5.5) zu $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.73 \text{ eV}$, in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten [4]. Da jedoch die PrimEx Kollaboration am Jefferson Lab [57] zurzeit die neuste und präziseste Messung des π^0 Zerfalls bietet, haben wir L_8 daran angepasst. Hieraus folgend erhält man $L_8^{6,\epsilon} = (-0.2 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$. In der Tabelle 5.1 ist die Zerfallsbreite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ aus Experimenten und der Theorie angegeben.

5.1.3 $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$

Definiert man q_μ und $\varepsilon_\mu = e/s [\bar{u}\gamma_\mu v]$ als virtuellen Photonimpuls und Polarisationsvektor mit $s = q^2$, und q'_μ und ε'_μ als den reellen Photonimpuls und Polarisationsvektor mit $q'^2 = 0$, so erhält man aus Gl. (5.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-) = & \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi} \left\{ 1 + C_1 m_\pi^2 + C_2 s \right. \\ & \left. + \frac{1}{F_0^2} \left(2A[s, m_\pi^2] + 2A[s, m_K^2] - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Zerfallsbreite lässt sich schreiben gemäß

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-) = \int_{4m_e^2}^{m_\pi^2} ds \frac{\sqrt{\lambda[m_\pi^2, s, 0]} \sqrt{\lambda[s, m_e^2, m_e^2]}}{1024 m_\pi^3 \pi^4 s} \int d\Omega_{ee} \sum \overline{|\mathbf{M}|^2}. \quad (5.7)$$

Chirale Ordnung	$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ [meV]
$\mathcal{O}(q^4) :$	91.66
$\mathcal{O}(q^6) : C_1 = 0, C_2 = 0$	91.70
$\mathcal{O}(q^6) : C_1 = 0, C_2 = 1/\Lambda^2$	91.88
$\mathcal{O}(q^6) : C_1 m_\pi^2 = 0.013 \pm 0.020, C_2 = 1/\Lambda^2$	94.3 ± 5.5

Tabelle 5.2: Die Resultate für die Zerfallsbreite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ in niedrigster Ordnung und für die $\mathcal{O}(q^6)$.

Definiert man den leptonischen Tensor durch

$$L^{\mu\nu} \equiv \sum_{\text{Spin}} [\bar{u} \gamma^\mu v] [\bar{u} \gamma^\nu v]^*, \quad (5.8)$$

und verwendet

$$\int \frac{d\Omega_{ee}}{4\pi} L_{\mu\mu'} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{2m_e^2}{q^2} \right) (q_\mu q_{\mu'} - q^2 g_{\mu\mu'}), \quad q^2 = s, \quad (5.9)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-) &= \\ \frac{e^2}{384 m_\pi^3 \pi^3} \int_{4m_e^2}^{m_\pi^2} ds &\frac{\sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} (m_\pi^2 - s)^3 (2m_e^2 + s)}{s^2} |\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma \mathbf{e}^+ \mathbf{e}^-)|^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die angepassten bzw. abgeschätzten Werte³ von $L_8^{6,\epsilon} = (-0.2 \pm 0.3) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$ bzw. $L_{19}^{6,\epsilon} = -6\Delta$ führt zu $C_1 m_\pi^2 = 0.013 \pm 0.020$ bzw. $C_2 = 1/\Lambda^2$. Eine abschließende Integration über s resultiert in

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-) = (94.3 \pm 5.5) \text{ meV}. \quad (5.11)$$

Unser Ergebnis zeigt eine schöne Übereinstimmung mit den experimentellen Daten $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-) = (93.9 \pm 7.2) \text{ meV}$ [4]. Man sollte jedoch beachten, dass aufgrund des Integranden in Gl. (5.10), die Breite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ den Hauptteil ihres Wertes von $\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma \mathbf{e}^+ \mathbf{e}^-)$ in demjenigen Bereich erhält,

³ $L_{19}^{6,\epsilon}$ ist abgeschätzt durch VMD mit $\Delta = 1/1024\pi^2\Lambda^2$, $\Lambda = 0.77 \text{ GeV}$. Informationen hierzu findet man in Abschnitt 4.2.2.

Experiment	π^0 <i>slope</i> -Parameter [GeV ⁻²]
PDG (2008) [4]	$+1.76 \pm 0.22$
F. Farzanpay et al. (1992) [59]	$+1.4 \pm 3.0$
SINDRUM I Kollaboration (1992) [60]	$+1.4 \pm 1.6$
F. Fonvieille et al. (1989) [61]	-6.0 ± 4.7
H. Kobrak (1961) [62]	$+0.6 \pm 6.0$
J. Fischer et al. (1978) [63]	$+5.5 \pm 1.7$

Tabelle 5.3: Der π^0 *slope*-Parameter aus Experimenten.

in dem das virtuelle Photon nahe der Massenschale ist, weswegen die totale Zerfallsrate eine nicht wirklich gute Messsonde des virtuellen Verhaltens darstellt. Tabelle 5.2 zeigt die Resultate für die Zerfallsbreite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ in niedrigster Ordnung und für $\mathcal{O}(q^6)$ und spiegelt letztere Aussage wider. Das Verzweungsverhältnis für den π^0 Zerfall [4],

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma)} = (1.213 \pm 0.030) \%, \quad (5.12)$$

wird mit unserer Rechnung reproduziert, jedoch ist es kein spezifischer Test des virtuellen Verhaltens, da QED-Effekte für sich allein genommen das obige Verhältnis erklären. Für $s \neq 0$ kann man den so genannten *slope*-Parameter definieren durch

$$\begin{aligned} \text{slope} &:= \frac{1}{\mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma)} \frac{d}{ds} \mathbf{F}(\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma^*)|_{s=0} \\ &= \frac{1}{1 + C_1 m_\pi^2} \left\{ C_2 + C_{\text{Schleife}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hierbei bezeichnet C_{Schleife} die Schleifenkorrekturen

$$C_{\text{Schleife}} = - \frac{2 + \ln\left(\frac{m_\pi^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{m_K^2}{\mu^2}\right)}{96 F_0^2 \pi^2} = 0.28 \text{ GeV}^{-2}, \quad (5.14)$$

bei der Skala $\mu = 0.77 \text{ GeV}$. Unter Verwendung von $C_1 m_\pi^2 = 0.013 \pm 0.020$ und $C_2 = 1/\Lambda^2$, führt eine perturbative Behandlung bezogen auf $C_1 m_\pi^2$ zu⁴

$$\begin{aligned} \text{slope} &= (1 - 0.013 \pm 0.020) (1.69 + 0.28) \text{ GeV}^{-2} \\ &= (1.94 \pm 0.04) \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

⁴Da für den Parameter $C_1 m_\pi^2 \ll 1$ gilt, ist eine perturbative Behandlung möglich.

Der erste Term in der zweiten Klammer spiegelt die VMD-Abschätzung und der zweite die Schleifenkorrekturen wider. Die experimentellen Daten für den π^0 *slope*-Parameter sind in Tabelle 5.3 gezeigt. Innerhalb der Fehlerbalken finden wir Übereinstimmung mit Ref. [4, 59, 60] und keine Übereinstimmung mit Ref. [61, 63].

5.1.4 $\eta \rightarrow \gamma^* \gamma^*$

Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = -i \mathbf{F} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu q_\alpha q'_\beta$, wobei q_μ und q'_μ die Photonimpulse mit ihren Polarisationsvektoren ε_μ und ε'_μ bezeichnen, so führt die Berechnung der in Abb. 5.2 gezeigten Diagrammklassen zu⁵

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\eta_8 \rightarrow \gamma^* \gamma^*) &= \frac{e^2}{4\pi^2 \sqrt{3} F_{\eta_8}} \left\{ 1 + C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 + C_2 (q^2 + q'^2) \right. \\ &\quad + \frac{2}{F_0^2} \left(A[q^2, m_\pi^2] + A[q^2, m_K^2] + A[q'^2, m_\pi^2] + A[q'^2, m_K^2] \right. \\ &\quad \left. \left. - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\eta_0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*) &= \frac{e^2}{\pi^2 \sqrt{6} F_{\eta_0}} \left\{ 1 + C_{m^2} + C_{q^2} (q^2 + q'^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{F_0^2} \left(A[q^2, m_\pi^2] + A[q^2, m_K^2] + A[q'^2, m_\pi^2] + A[q'^2, m_K^2] \right. \\ &\quad \left. \left. - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{512\pi^2}{3} L_{19}^{6,\epsilon}, \\ C_3 &= -\frac{1024\pi^2}{9} (7L_8^{6,\epsilon} + 24L_9^{6,\epsilon}), \\ C_4 &= \frac{4096\pi^2}{9} (L_8^{6,\epsilon} + 6L_9^{6,\epsilon}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

⁵Wir verwenden das phänomenologische η - η' Mischungschema [64]. Nähere Informationen hierzu findet man im Anhang G.

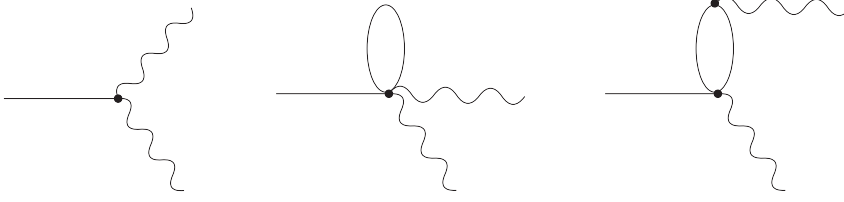


Abbildung 5.2: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $\eta \rightarrow \gamma^* \gamma^*$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien bezeichnen die Mesonen.

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [45, 55]. Hierbei sollte man beachten, dass zur Absorption der in den Schleifenintegralen auftretenden Divergenzen für die Amplitude des η_0 zusätzliche Gegenterme der $\mathcal{O}(q^6)$ benötigt werden. Hierfür ist eine Erweiterung der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ notwendig, die durch $\mathcal{L}'_\epsilon^{(6)}$ dargestellt wird. Letztere wurde für den hier betrachteten Fall konstruiert. Hieraus folgt, dass sich die Konstanten C_{m^2} und C_{q^2} aus Linearkombinationen der LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ und der LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}'_\epsilon^{(6)}$ zusammensetzen⁶. Für eine Anpassung der LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ nehmen wir an, dass sich C_{m^2} und C_{q^2} in der Größenordnung von $C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2$ und C_2 befinden.

5.1.5 $\eta \rightarrow \gamma\gamma$

Setzt man in den Gl. (5.16) und (5.17) $q^2 = q'^2 = 0$ für reelle Photonen ein, so erhält man

$$\mathbf{F}(\eta_8 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{e^2}{4\pi^2 \sqrt{3} F_{\eta_8}} \left\{ 1 + C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 \right\}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{F}(\eta_0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{e^2}{\pi^2 \sqrt{6} F_{\eta_0}} \left\{ 1 + C_{m^2} \right\}. \quad (5.20)$$

Die experimentellen Zerfallsbreiten sind gegeben durch [4]:

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) &= (7.93 \pm 0.32) \text{ eV (PrimEx Kollaboration, 2007)}, \\ \Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma) &= (0.51 \pm 0.03) \text{ keV}, \\ \Gamma(\eta' \rightarrow \gamma\gamma) &= (4.28 \pm 0.19) \text{ keV}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

⁶Die expliziten Ausdrücke für C_{m^2} und C_{q^2} sind im Anhang H angegeben.

Dies führt zu den folgenden reduzierten Verhältnissen:

$$\varrho_\eta = \frac{3m_\pi^3 \Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)}{m_\eta^3 \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} = (2.89 \pm 0.25), \quad (5.22)$$

$$\varrho_{\eta'} = \frac{3m_\pi^3 \Gamma(\eta' \rightarrow \gamma\gamma)}{8m_{\eta'}^3 \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} = (0.56 \pm 0.05). \quad (5.23)$$

Wir nehmen für den Mischungswinkel⁷ $\theta = -20^\circ$ und $F_{\eta_8} \simeq 1.3 F_\pi$, woraus sich F_{η_0}/F_π aus dem experimentellen Wert für $\varrho_{\eta'}$ ableiten lässt. Mit der Anpassung von $C_{m^2} \simeq C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 = 0.03 \pm 0.05$, erhält man F_{η_0}/F_π im Bereich von 1.13 ± 0.08 . Wir wählen $F_{\eta_0} = 1.06 F_\pi$, was zu $\varrho_\eta = 2.77 \pm 0.4$ führt in Übereinstimmung mit dem experimentellen Resultat. Für die Zerfallsbreite

$$\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{m_\eta^3}{64\pi} |\mathbf{F}(\eta \rightarrow \gamma\gamma)|^2, \quad (5.24)$$

erhält man

$$\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma) = (0.49 \pm 0.05) \text{ keV}. \quad (5.25)$$

Dieses Ergebnis stimmt innerhalb der Fehlerbalken mit den experimentellen Daten überein. Der angepasste Wert für $L_9^{6,\epsilon}$ ist gegeben durch $L_9^{6,\epsilon} = (0.04 \pm 0.07) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$. Man sollte hier anmerken, dass die Physik des η bzw. η' i.A. ein sehr komplexes Gebiet ist, auf das hier aber nicht näher eingegangen wird⁸. Wir verwenden in dieser Arbeit das phänomenologische η - η' Mischungsschema [64] und betrachten nur das η , mögliche Ergebnisse für das η' werden nicht angegeben.

5.1.6 $\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-$

Definiert man q_μ und $\varepsilon_\mu = e/s [\bar{u}\gamma_\mu v]$ als virtuellen Photonimpuls und Polarisationsvektor mit $s = q^2$ sowie q'_μ und ε'_μ als reellen Photonimpuls und

⁷Ref. [64] folgend verwenden wir $\theta = -20^\circ$ als Mischungswinkel.

⁸Informationen zu diesem Gebiet findet man z.B. in Ref. [64, 65].

Chirale Ordnung	$\Gamma(\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ [eV]
$\mathcal{O}(q^4) :$	10.13
$\mathcal{O}(q^6) : C_{m^2} = 0, C_2 = 0$	7.5
$\mathcal{O}(q^6) : C_{m^2} = 0, C_2 = 1/\Lambda^2$	7.75
$\mathcal{O}(q^6) : C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 = 0.03 \pm 0.05, C_2 = 1/\Lambda^2$	8.2 ± 0.7

Tabelle 5.4: Die Resultate für die Zerfallsbreite $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-)$ in niedrigster Ordnung und für die $\mathcal{O}(q^6)$.

Polarisationsvektor mit $q'^2 = 0$, so führen die Gl. (5.16) und (5.17) zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\eta_8 \rightarrow \gamma \mathbf{e}^+ \mathbf{e}^-) &= \frac{e^2}{4\pi^2 \sqrt{3} F_{\eta_8}} \left\{ 1 + C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 + C_2 s \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{F_0^2} \left(2A[s, m_\pi^2] + 2A[s, m_K^2] - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\eta_0 \rightarrow \gamma \mathbf{e}^+ \mathbf{e}^-) &= \frac{e^2}{\pi^2 \sqrt{6} F_{\eta_0}} \left\{ 1 + C_{m^2} + C_s s \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2F_0^2} \left(2A[s, m_\pi^2] + 2A[s, m_K^2] - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Die Zerfallsbreite lässt sich schreiben gemäß

$$\begin{aligned}
\Gamma(\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-) &= \\
&\frac{e^2}{384 m_\eta^3 \pi^3} \int_{4m_e^2}^{m_\eta^2} ds \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} (m_\eta^2 - s)^3 (2m_e^2 + s)}{s^2} |\mathbf{F}(\eta \rightarrow \gamma \mathbf{e}^+ \mathbf{e}^-)|^2.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Unter Verwendung von $C_{m^2} \simeq C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 = 0.03 \pm 0.05$ und $C_s \simeq C_2 = 1/\Lambda^2$ erhält man

$$\Gamma(\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-) = (8.2 \pm 0.7) \text{ eV}, \tag{5.29}$$

in Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-) = (7.8 \pm 1.1) \text{ eV}$ [4]. Die Tabelle 5.4 zeigt die Resultate für die Zerfallsbreite $\Gamma(\eta \rightarrow$

Experiment/Theorie	η <i>slope</i> -Parameter [GeV ⁻²]
CELLO Kollaboration (1991) [66]	+1.42 ± 0.21
TPC/Two-Gamma Kollaboration (1990) [67]	+2.0 ± 0.4
Lepton-G Kollaboration (1980) [68]	+1.9 ± 0.4
B. Borasoy et al. (CC analysis)(2004) [56]	+1.58
J. Bijnens et al. (1988) [55]	+1.9

Tabelle 5.5: Der η *slope*-Parameter aus Experimenten und theoretischen Rechnungen.

$\gamma e^+ e^-$) in niedrigster Ordnung und für die $\mathcal{O}(q^6)$.
Der *slope*-Parameter ist gegeben durch

$$slope := \frac{1}{\mathbf{F}(\eta \rightarrow \gamma\gamma)} \frac{d}{ds} \mathbf{F}(\eta \rightarrow \gamma\gamma^*)|_{s=0}. \quad (5.30)$$

Unter Verwendung der Gl. (5.19), (5.20), (5.26) und (5.27) erhält man⁹

$$\begin{aligned} slope &= (1 - 0.03 \pm 0.05) (1.69 + 0.2) \text{ GeV}^{-2} \\ &= (1.83 \pm 0.1) \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Der erste Term in der zweiten Klammer zeigt die VMD-Abschätzung und der Zweite steht für die Schleifenkorrekturen. In der Tabelle 5.5 sind die experimentellen und theoretischen Werte des η *slope*-Parameter angegeben. Mit Ref. [55, 67, 68] finden wir Übereinstimmung mit Ref. [56, 66] hingegen nicht. Letztere theoretische Rechnung basiert auf einer Analyse mit gekoppelten Kanälen und zeigt, bezogen auf die in der Tabelle 5.5 angegebenen Mittelwerte, die größte Abweichung.

5.1.7 $K^+/\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$

Der semileptonische Zerfall des Kaons ($K^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$) bzw. Pions ($\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$) bietet durch den strukturabhängigen Vektorformfaktor ($\mathbf{F}_V$) einen Zugang zum anomalen Sektor der ChPT. Im Allgemeinen unterscheidet man bei diesen Zerfällen zwischen zwei Anteilen. Einerseits den Beitrag hervorgerufen durch innere Bremsstrahlung (IB) und andererseits den strukturabhängigen Beitrag (SD). Letzterer enthält zwei Formfaktoren $\mathbf{F}_V$ und $\mathbf{F}_A$, die den

⁹Der Parameter $C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2 \ll 1$ ist perturbativ behandelt worden.

Einfluß der QCD auf diese Zerfälle widerspiegeln und somit hadronische Beiträge beinhalten¹⁰. Für die Berechnung von $\mathbf{F}_V$ benötigt man diejenigen Teile der WZW-Lagrangedichte, die ein und zwei Eichbosonen enthalten, gegeben durch [21, 22]

$$\mathcal{L}_{ext}^{(4)} = \frac{-\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{16\pi^2} \left[\text{Tr}(X_{\mu\nu\alpha\beta}) + i\text{Tr}(\Sigma_{\mu\nu\alpha\beta}) \right], \quad (5.32)$$

mit

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu\alpha\beta} &= U\partial_\mu U^\dagger\partial_\nu U\partial_\alpha U^\dagger l_\beta - U^\dagger\partial_\mu U\partial_\nu U^\dagger\partial_\alpha U r_\beta, \\ \Sigma_{\mu\nu\alpha\beta} &= \partial_\mu U^\dagger\partial_\nu l_\alpha U r_\beta - \partial_\mu U\partial_\nu r_\alpha U^\dagger l_\beta + U\partial_\mu U^\dagger l_\nu\partial_\alpha l_\beta + U\partial_\mu U^\dagger\partial_\nu l_\alpha l_\beta. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Hier sind nur die benötigten Terme angegeben. Die Einbeziehung der elektroschwachen Felder ist gegeben durch

$$\begin{aligned} l_\mu &= -eA_\mu Q - \frac{g}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_\mu, \\ r_\mu &= -eA_\mu Q, \end{aligned} \quad (5.34)$$

mit

$$\mathcal{W}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \cos \theta & W_\mu^+ \sin \theta \\ W_\mu^- \cos \theta & 0 & 0 \\ W_\mu^- \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

wobei θ den Cabibbo-Winkel bezeichnet [4]. Das leptonische Paar im Endzustand erscheint in dem leptonischen Strom l_μ durch die Substitution¹¹

$$W_\mu \rightarrow \frac{g}{2\sqrt{2}M_W^2} l_\mu = \frac{g}{2\sqrt{2}M_W^2} \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_e, \quad (5.36)$$

mit $G_F = g^2/4\sqrt{2}M_W^2$. Für den (SD) Anteil ist die invariante Amplitude gegeben durch [69]

$$\mathbf{M} = ieG_F \Theta_{K/\pi} H^{\mu\nu} \varepsilon_\mu l_\nu, \quad (5.37)$$

¹⁰Im anomalen Sektor trägt nur $\mathbf{F}_V$ bei, weswegen $\mathbf{F}_A$ hier nicht detailliert betrachtet wird. Des Weiteren ist der (IB) Anteil unterdrückt.

¹¹Hierbei kommt $e^+\nu_e$ immer von W^+ .

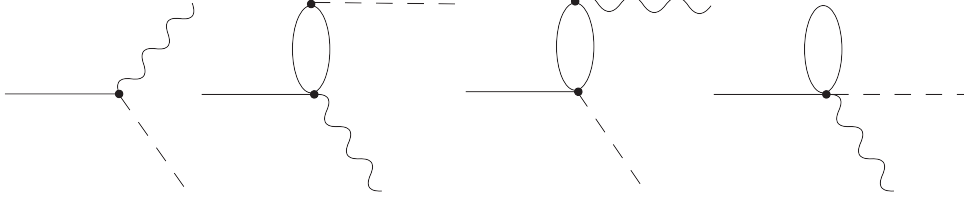


Abbildung 5.3: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp $\phi + \gamma^* W$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen und die gestrichelte Linie bezeichnet das W -Boson.

mit

$$H^{\mu\nu} = \frac{-i}{\sqrt{2} m_{K^+/\pi^+}} \mathbf{F}_V^{K/\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha q_\beta. \quad (5.38)$$

Hierbei bezeichnet k_μ den Viererimpuls des Photons mit Polarisationsvektor ε_μ und q_μ steht für den Impuls des Leptonenpaares. Außerdem ist $\Theta_K = \sin \theta$ und $\Theta_\pi = \cos \theta$. Die Berechnung der in Abb. 5.3 gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ führt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V^\pi = & \frac{m_{\pi^+}}{4\sqrt{2}\pi^2 F_\pi} \left\{ 1 + C_1 m_\pi^2 + C_2 (q^2 + k^2) \right. \\ & \left. + \frac{2}{F_0^2} \left(2A[q^2, m_\pi^2] + 2A[k^2, m_K^2] - I[m_\pi^2] - I[m_K^2] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_V^K = & \frac{m_{K^+}}{4\sqrt{2}\pi^2 F_K} \left\{ 1 + C_1 m_\pi^2 + C_2 (q^2 + k^2) + C_5 (m_K^2 - m_\pi^2) \right. \\ & + \frac{2}{F_0^2} \left(2A[k^2, m_\pi^2] + C[q^2, m_\pi^2, m_K^2] + C[q^2, m_K^2, m_\eta^2] \right. \\ & \left. \left. - \frac{7}{8} I[m_\pi^2] - \frac{3}{4} I[m_K^2] - \frac{3}{8} I[m_\eta^2] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

mit

$$C_5 = -1024\pi^2 L_3^{6,\epsilon}. \quad (5.41)$$

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf

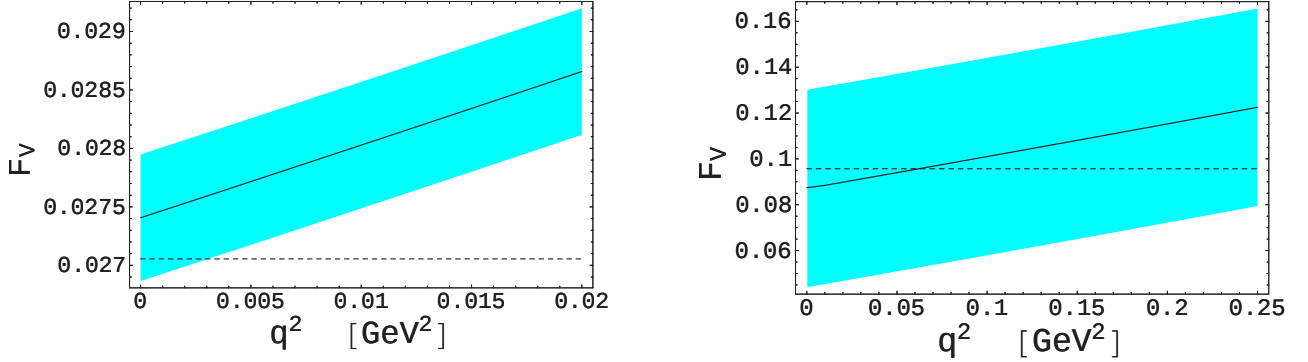


Abbildung 5.4: Gezeigt ist $\mathbf{F}_V$ für das Pion (links) und für das Kaon (rechts) als Funktion des Impulsübertrages q^2 . Die gestrichelte Linie repräsentiert das Ergebnis niedrigster Ordnung. Die durchgezogene Linie zeigt das Resultat zur $\mathcal{O}(q^6)$ mit $C_1 m_\pi^2 = 0.013 \pm 0.020$ auf der linken Seite und mit $C_1 m_\pi^2 + C_5(m_K^2 - m_\pi^2) = 0.04 \pm 0.54$ auf der rechten Seite. Der gefüllte Bereich spiegelt jeweils die Fehler bezogen auf obige Parameter wider.

die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [70]. Auf experimenteller Seite wird für das Pion ein konstanter Vektorformfaktor angegeben [4]

$$\mathbf{F}_V^\pi = (0.017 \pm 0.008). \quad (5.42)$$

Aus Gl. (5.39) erhält man in niedrigster Ordnung

$$\mathbf{F}_V^\pi = 0.027, \quad (5.43)$$

gezeigt durch die gestrichelte Linie in der linken Grafik in Abb. 5.4. Setzt man in Gl. (5.39) q^2 und k^2 null, kann $L_8^{6,\epsilon}$ angepasst werden. Man erhält $L_8^{6,\epsilon} = (5.6 \pm 4.4) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$. Wir wollen hier jedoch betonen, dass die Messung von $\mathbf{F}_V^\pi$ im Vergleich zum $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall (PrimEx Kollaboration [57]) aus Abschnitt 5.1.2 sehr ungenau ist, weswegen der hier angepasste Wert für $L_8^{6,\epsilon}$ als eine obere Grenze gesehen werden sollte.

Aus den experimentellen Daten von Ref. [71] bezogen auf $K^+ \rightarrow e^+ \nu_e \gamma$ und unter Verwendung von $C_1 m_\pi^2 = 0.013 \pm 0.020$ lässt sich $L_3^{6,\epsilon}$ anpassen. Man erhält $L_3^{6,\epsilon} = (-0.01 \pm 0.24) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$. In Abb. 5.4 ist $\mathbf{F}_V^\pi$ (links) und $\mathbf{F}_V^K$ (rechts) als Funktion des Impulsübertrages q^2 gezeigt. Die gestrichelten Linien bezeichnen jeweils die Ergebnisse niedrigster Ordnung und die durchgezogenen Linien die Ergebnisse der $\mathcal{O}(q^6)$.

5.2 Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*/W$

5.2.1 $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$

Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = -i\mathbf{F}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_\mu p_\nu p'_\alpha q_\beta$, wobei q_μ und ε_μ den reellen Photonimpuls und Polarisationsvektor sowie p und p' die Mesonimpulse mit $s = (p + p')^2$ bezeichnen, so führt die Berechnung der in Abb. 5.5 gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\eta_8 \rightarrow \pi\pi\gamma) = & \frac{e}{4\sqrt{3}F_{\eta_8}F_\pi^2\pi^2} \left\{ 1 + C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2 + C_{15}s \right. \\ & \left. + \frac{1}{F_0^2} \left(4A[s, m_K^2] + 2A[s, m_\pi^2] - 3I[m_\pi^2] \right) \right\}, \quad (5.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\eta_0 \rightarrow \pi\pi\gamma) = & \frac{e\sqrt{2}}{4\sqrt{3}F_{\eta_0}F_\pi^2\pi^2} \left\{ 1 + C'_{m^2} + C'_s s \right. \\ & \left. + \frac{1}{F_0^2} \left(A[s, m_K^2] + 2A[s, m_\pi^2] - \frac{3}{2}I[m_K^2] - 3I[m_\pi^2] \right) \right\}, \quad (5.45) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C_{13} &= -512\pi^2(2(L_{13}^{6,\epsilon} + L_{14}^{6,\epsilon}) + \mathbf{k}_{27} + \mathbf{k}_{56}), \\ C_{14} &= 512\pi^2(L_{13}^{6,\epsilon} + \mathbf{k}_{27}), \\ C_{15} &= 512\pi^2(2L_{13}^{6,\epsilon} + L_{14}^{6,\epsilon}), \\ \mathbf{k}_{27} &= 3(L_2^{6,\epsilon} + L_7^{6,\epsilon}), \\ \mathbf{k}_{56} &= 2L_5^{6,\epsilon} + L_6^{6,\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [72, 73]. Den Erklärungen aus Abschnitt 5.1.4 folgend nehmen wir auch hier an, dass sich C'_{m^2} bzw. C'_s in der Größenordnung von $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$ bzw. C_{15} befindet und somit näherungsweise $C'_{m^2} \simeq C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$ und $C'_s \simeq C_{15}$ gilt. Das VMD-Modell kann nicht die Koeffizienten der Quarkmassenterme in der chiralen Theorie vorhersagen, weil die VMD-Lagrangedichte keine explizite Symmetriebrechung berücksichtigt. Da sich nach Gl. (5.46) die Parameter C_{13} und C_{14} aus Linearkombinationen von LECs zusammensetzen,

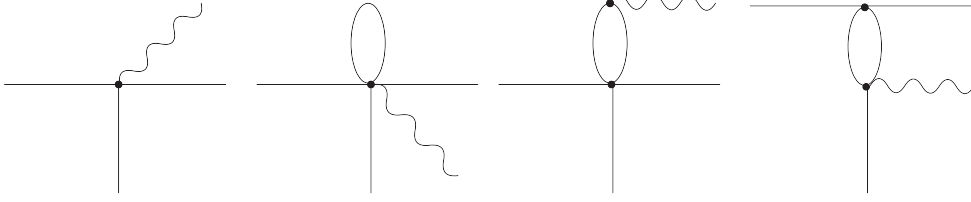


Abbildung 5.5: Die beitragenden Diagrammklassen für den Zerfall $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen.

die einerseits Koeffizienten der expliziten Symmetriebrechung, $(\mathbf{k}_{27}, \mathbf{k}_{56})$, und andererseits Koeffizienten der Ableitungen, $(L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon})$, sind, betrachten wir $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$ als freien Parameter. Unter Verwendung der abgeschätzten Werte für $L_{13}^{6,\epsilon}$ und $L_{14}^{6,\epsilon}$ durch VMD¹², erhält man $C_{15} = 3/2\Lambda^2$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich als Funktion der Photonenergie ω des reellen Photons schreiben gemäß

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = \frac{m_\eta \omega^3 (m_\eta^2 - 4m_\pi^2 - 2m_\eta \omega)}{384\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\eta^2 - 2m_\eta \omega}} |\mathbf{F}(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma)|^2. \quad (5.47)$$

In niedrigster Ordnung ist die Zerfallsbreite gegeben durch

$$\Gamma(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma) = 36 \text{ eV}, \quad (5.48)$$

d.h. deutlich kleiner als der experimentelle Wert von $\Gamma(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma) = (60.8 \pm 3.5) \text{ eV}$ [4]. Für die $\mathcal{O}(q^6)$ wählen wir zuerst $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2 = 0$ und die VMD-Abschätzung $C_{15} = 3/2\Lambda^2$. Hiermit erhält man

$$\Gamma(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma) = 51 \text{ eV}, \quad (5.49)$$

was prinzipiell schon in Übereinstimmung mit den in Ref. [72, 73] gemachten Aussagen zeigt, dass man zur Beschreibung der Zerfallsbreite sowie des Photonenergiespektrums die Korrekturen der $\mathcal{O}(q^6)$ benötigt. Die Anpassung von $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$ an die experimentellen Daten (Zerfallsbreite [4] und Photonenergiespektrum [74]) führt zu $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2 = 0.13 \pm 0.04$.

¹² $L_{13}^{6,\epsilon} = -3\Delta$, $L_{14}^{6,\epsilon} = +9\Delta$ mit $\Delta = 1/1024\pi^2\Lambda^2$. Informationen hierzu findet man in Abschnitt 4.2.2.

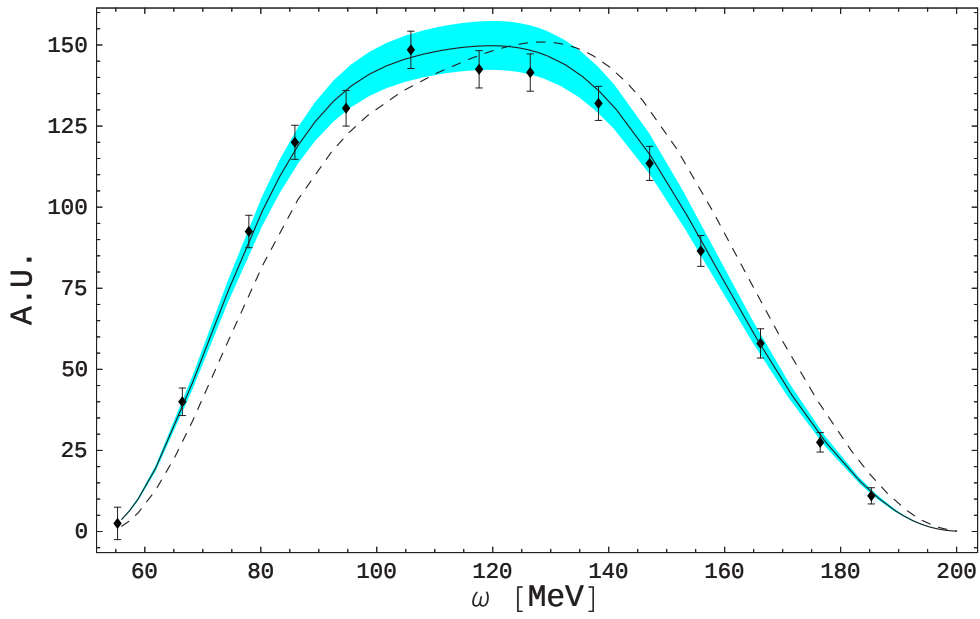


Abbildung 5.6: Gezeigt ist das Photonenergiespektrum für den Zerfall $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$. Die gestrichelte Linie bezeichnet das Ergebnis für die Amplitude niedrigster Ordnung und die durchgezogene Linie das Ergebnis für die Amplitude der $\mathcal{O}(q^6)$ unter Berücksichtigung der Detektoreffizienz [74]. Der gefüllte Bereich spiegelt den Fehler bezogen auf den Parameter $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$ wider. Die experimentellen Daten stammen von Ref. [74].

Die Beiträge der LECs besitzen im Vergleich zu den Schleifenkorrekturen entgegengesetztes Vorzeichen. Interessant ist, dass die Beiträge der LECs die Schleifenkorrekturen dominieren in Übereinstimmung mit den in Ref. [72, 73] gemachten Aussagen. Hierbei stellt sich dann natürlich die Frage, inwieweit die Konvergenz im Sinne einer Störungstheorie aufrechterhalten werden kann. Des Weiteren möchten wir darauf hinweisen, dass die Zerfallsbreite für das η_8 in niedrigster Ordnung ungefähr 3.4 mal kleiner ist als der experimentelle Wert

$$3.4 \times \Gamma(\eta_8 \rightarrow \pi\pi\gamma)_{\text{LO}} \simeq 3.4 \times 17.89 \text{ eV} = 60.8 \text{ eV}. \quad (5.50)$$

In Abb. 5.6 ist das Photonenergiespektrum für die Amplitude niedrigster Ordnung und der $\mathcal{O}(q^6)$ unter Berücksichtigung der Detektoreffizienz [74] gezeigt. Die experimentellen Daten stammen von Ref. [74]. Man kann gut erkennen, dass die Korrekturen der $\mathcal{O}(q^6)$ das Photonenergiespektrum weicher machen, was auch schon in Ref. [75] beobachtet wurde und in Übereinstimmung mit den Aussagen von Ref. [72] ist. Der gefüllte Bereich in Abb. 5.6 zeigt den Fehler des Parameters $C_{13}m_\pi^2 + C_{14}m_\eta^2$. Mit Hilfe des angepassten Wertes von $\mathbf{k}_{56} = (-2.32 \pm 1.30) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$ durch den Prozess $\pi^-e^- \rightarrow \pi^-e^-\pi^0$ aus Abschnitt 5.2.2 und unter Verwendung der Gl. (5.46) erhält man $\mathbf{k}_{27} = (0.61 \pm 0.12) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$.

5.2.2 $\pi^-e^- \rightarrow \pi^-e^-\pi^0$

Der Prozess $\pi^-e^- \rightarrow \pi^-e^-\pi^0$ bietet die Möglichkeit die anomale $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ -Amplitude zu testen. Dies wurde in Ref. [76] diskutiert. Hierbei jedoch wurden alle auftretenden LECs durch VMD abgeschätzt, auch diejenigen, die Koeffizienten der expliziten Symmetriebrechung sind. Letztere betrachten wir jedoch als freie Parameter. Des Weiteren sind experimentelle Daten des Prozesses vorhanden [77], weswegen eine erneute Analyse die Möglichkeit bietet die freien Parameter anzupassen.

In der Einphotonenaustauschnäherung lässt sich durch den Prozess $\pi^-e^- \rightarrow \pi^-e^-\pi^0$ die $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ -Amplitude testen. Hierbei wird ein einlaufendes π^- inelastisch an einem Elektrontarget gestreut und produziert im Endzustand ein zusätzliches π^0

$$e^-(p_a) + \pi^-(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \pi^0(p_2) + \pi^-(p_3), \quad (5.51)$$

(siehe Abb. 5.7). Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = i \mathbf{F}_{3\pi} \varepsilon^\mu \mathcal{G}_\mu$, wobei $\varepsilon^\mu = e/t_1 [\bar{u}\gamma^\mu u]$ den virtuellen Polarisationsvektor bezeichnet und

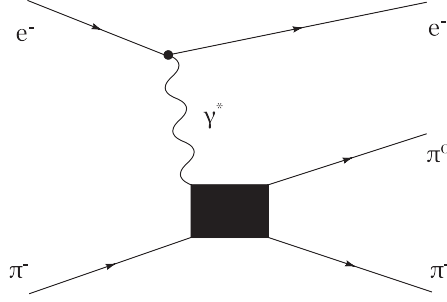


Abbildung 5.7: Gezeigt ist der Prozess $e^-(p_a) + \pi^-(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \pi^0(p_2) + \pi^-(p_3)$ in der Einphotonenaustauschnäherung.

$\mathcal{G}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_b^\nu p_2^\alpha p_3^\beta$ für den hadronischen Anteil steht, so lässt sich mit der Definition der Mandelstamvariablen

$$\begin{aligned}
s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\
t_1 &= (p_a - p_1)^2, \\
u_2 &= (p_b - p_2)^2, \\
s_2 &= (p_2 + p_3)^2, \\
t_2 &= (p_b - p_3)^2, \\
s &= (p_a + p_b)^2,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

den differentiellen Wirkungsquerschnitt schreiben als

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{ds_2 dt_1} &= \\
&\frac{e^2 \sqrt{\lambda[s_2, m_\pi^2, m_\pi^2]}}{1024\pi^4 s_2 t_1^2 \lambda[s, m_e^2, m_\pi^2]} \int d\Omega_{\pi\pi} |\mathbf{F}_{3\pi}|^2 (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu,
\end{aligned} \tag{5.53}$$

wobei $\Omega_{\pi\pi}$ das Ruhesystem der Pionen im Endzustand und $(2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu})$ den leptonischen Tensor bezeichnet¹³. Die Berechnung der in Abb. 5.8

¹³Die Kontraktion von $(2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu})$ mit $\mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu$ und Informationen zu Wirkungsquerschnitten und Zerfallsbreiten sind im Anhang D/E angegeben.

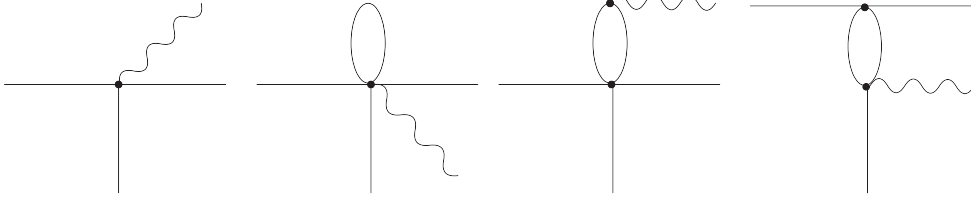


Abbildung 5.8: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen.

gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$, führt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3\pi} = & \frac{e}{4\pi^2 F_\pi^3} \left\{ 1 + C_7 m_\pi^2 + C_8 t_1 - \frac{C_{em}}{t_2} \right. \\ & + \frac{1}{F_0^2} \left(2A[s_2, m_\pi^2] + 6A[t_1, m_K^2] + 2A[t_2, m_\pi^2] + 2A[u_2, m_\pi^2] \right. \\ & \left. \left. - 3I[m_\pi^2] - 3I[m_K^2] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

mit

$$\begin{aligned} C_7 &= 512\pi^2(\mathbf{k}_{1314} - \mathbf{k}_{56}), \\ C_8 &= -\frac{512\pi^2}{3}\mathbf{k}_{1314}, \\ C_{em} &= 2e^2 F_\pi^2, \\ \mathbf{k}_{1314} &= L_{13}^{6,\epsilon} - L_{14}^{6,\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

C_{em} bezeichnet die elektromagnetischen Korrekturen [78] (siehe Abb. 5.9). $\mathbf{F}_{3\pi}$ stimmt mit dem aus Ref. [76] abgeleiteten Ergebnis überein. Beachtet man des Weiteren die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [72, 79]. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes verwenden wir Ref. [76, 77] folgend 300 GeV für die Pionstrahlenergie und den experimentellen Schnitt $t_1^s = -0.001 \text{ GeV}^2$. Unter Verwendung der Gleichungen für die kinematischen

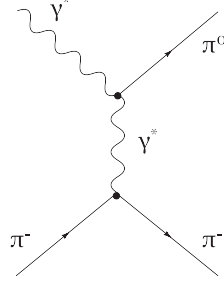


Abbildung 5.9: Die elektromagnetischen Korrekturen zur Amplitude $\mathbf{F}_{3\pi}$ [78].

Grenzen erhält man¹⁴

$$\begin{aligned}
0.0184 \text{ GeV}^2 &< s_1 < 0.186 \text{ GeV}^2, \\
0.0754 \text{ GeV}^2 &< s_2 < 0.325 \text{ GeV}^2, \\
-0.236 \text{ GeV}^2 &< t_1 < -0.001 \text{ GeV}^2 = t_1^s, \\
-0.269 \text{ GeV}^2 &< t_2 < 0 \text{ GeV}^2,
\end{aligned} \tag{5.56}$$

für die maximalen und minimalen Werte der Mandelstamvariablen. Betrachten wir zuerst die Abschätzung der LECs vorgenommen in Ref. [76]. Sie verwenden als Abschätzung $C_7 = 3/2\Lambda^2$ und $C_8 = 2/\Lambda^2$. Dies führt zu dem Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1.92 + 0.19 - 0.21 + 0.10 + 0.17) \text{ nb} \\
&= 2.17 \text{ nb},
\end{aligned} \tag{5.57}$$

in Übereinstimmung mit Ref. [76] und dem experimentellen Wert von $(2.11 \pm 0.47) \text{ nb}$ [77]. Neu ist hier, dass man sehen kann durch welche individuellen Beiträge sich der totale Wirkungsquerschnitt zusammensetzt. Der erste Term bezeichnet die Vorhersage niedrigster Ordnung. Die folgenden vier Terme zeigen jeweils die Korrekturen zur niedrigsten Ordnung unter Einbeziehung von C_7 , C_8 , C_{em} und den Schleifen. Im Vergleich zu dem Zerfall $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ aus Abschnitt 5.2.1, bei dem die Beiträge der LECs die Schleifenkorrekturen dominieren, sind sich hier diese Beiträge bezogen auf die Größenordnung sehr ähnlich. Es ist zu erkennen, dass sich die Beiträge der LECs gegenseitig fast wegheben, wenn man die Abschätzung aus Ref. [76] annimmt.

¹⁴Die verwendeten Gleichungen für die kinematischen Grenzen sind im Anhang E angegeben.

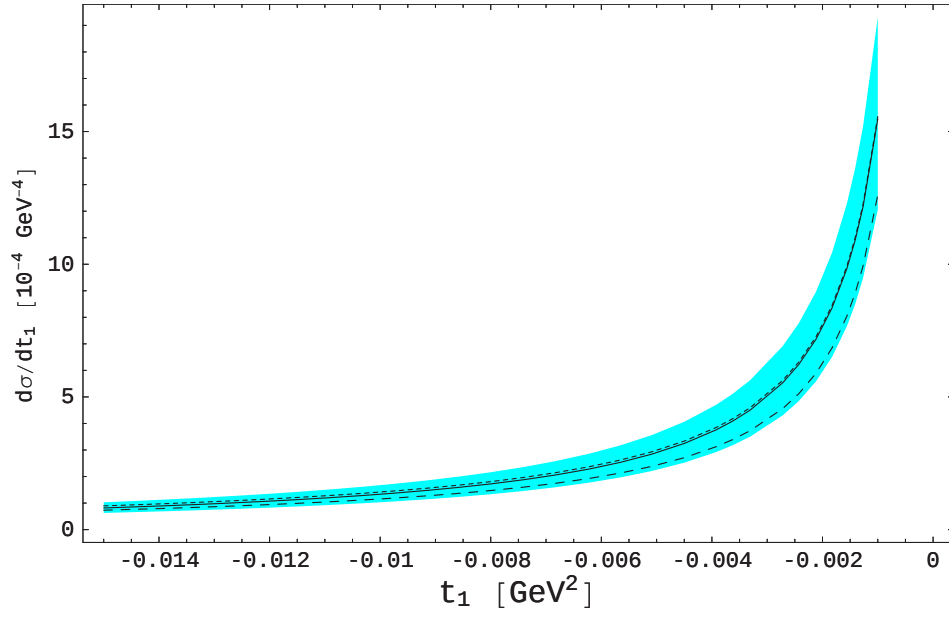


Abbildung 5.10: Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dt_1$ als Funktion von t_1 im Bereich von $(-0.015 \leq t_1 \leq -0.001)$ GeV^2 . Die gestrichelte Linie bezeichnet das Ergebnis für die Amplitude niedrigster Ordnung und die durchgezogene bzw. gepunktete Linie das Ergebnis für die Amplitude der $\mathcal{O}(q^6)$ mit t_1 bzw. ohne t_1 Abhängigkeit. Der gefüllte Bereich steht für den Fehler des Parameters $C_7 m_\pi^2$.

Das VMD-Modell kann jedoch nicht die Koeffizienten der Quarkmassenterme in der chiralen Theorie vorhersagen, weil die VMD-Lagrangedichte keine explizite Symmetriebrechung berücksichtigt. Nach Gl. (5.55) setzt sich C_7 aus einer Linearkombination von LECs zusammen, die einerseits Koeffizienten der expliziten Symmetriebrechung sind, $\mathbf{k}_{56}$, und andererseits Koeffizienten der Ableitungen, $\mathbf{k}_{1314}$, weswegen wir $C_7 m_\pi^2$ als freien Parameter betrachten. Für die Anpassung von $C_7 m_\pi^2$ verwenden wir den experimentellen Wert für den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma = (2.11 \pm 0.47) \text{ nb}$ [77] und erhalten $C_7 m_\pi^2 = 0.03 \pm 0.13$. In Abb. 5.10 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dt_1$ als eine Funktion von $q^2 = t_1$ gezeigt. Es ist kein signifikanter Unterschied zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten für die Amplituden der $\mathcal{O}(q^6)$ mit bzw. ohne t_1 Abhängigkeit festzustellen in Übereinstimmung mit Ref. [76]. Der gefüllte Bereich zeigt den Fehler des Parameters $C_7 m_\pi^2$. Unser berechneter differentieller Wirkungsquerschnitt ist jedoch eine Größenordnung höher als der in Abb. 11 aus Ref. [76] gezeigte. Abschließend erhält man mit $C_7 m_\pi^2 = 0.03 \pm 0.13$, der Verwendung der Gl. (5.55) und der VMD-Abschätzung¹⁵ von $\mathbf{k}_{1314}$ die Anpassung $\mathbf{k}_{56} = (-2.32 \pm 1.30) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$.

5.2.3 $K^- e^- \rightarrow K^- e^- \pi^0 / \eta$

Der Prozess $K^- e^- \rightarrow K^- e^- \pi^0 / \eta$ bietet die Möglichkeit die anomalen $\gamma K \rightarrow \pi^0 / \eta K$ -Amplituden zu testen. Aufgrund nicht existierender experimenteller Daten ist eine Anpassung der LECs nicht möglich. Trotzdem wurden die Amplituden $\gamma K \rightarrow \pi / \eta K$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ berechnet. Des Weiteren ist der totale Wirkungsquerschnitt für die im pionischen Prozess angegebene Strahlenergie von 300 GeV in niedrigster Ordnung für die Amplitude $\gamma K \rightarrow \pi^0 K$ berechnet worden.

Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = i \mathbf{F}_{3\phi} \varepsilon^\mu \mathcal{G}_\mu$, wobei $\varepsilon^\mu = e/t_1 [\bar{u} \gamma^\mu u]$ den virtuellen Polarisationsvektor bezeichnet und $\mathcal{G}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_b^\nu p_2^\alpha p_3^\beta$ für den hadronischen Anteil steht¹⁶, so führt, mit der Definition der Mandel-

¹⁵ $\mathbf{k}_{1314} = -12\Delta$ mit $\Delta = 1/1024\pi^2\Lambda^2$. Informationen hierzu findet man in Abschnitt 4.2.2.

¹⁶Die Notation der Kinematik ist $e^-(p_a) + K^-(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \pi^0/\eta(p_2) + K^-(p_3)$.

stamvariablen

$$\begin{aligned}
s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\
t_1 &= (p_a - p_1)^2, \\
u_2 &= (p_b - p_2)^2, \\
s_2 &= (p_2 + p_3)^2, \\
t_2 &= (p_b - p_3)^2, \\
s &= (p_a + p_b)^2,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

die Berechnung der in Abb. 5.8 gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\pi\mathbf{KK}} &= \frac{e}{4\pi^2 F_\pi F_K^2} \left\{ 1 + C_9 m_\pi^2 + C_{10} m_K^2 + C_{11} t_1 + C_{12} t_2 + \frac{1}{F_0^2} \left(6A[t_1, m_\pi^2] \right. \right. \\
&\quad + 3A[t_2, m_K^2] + A[t_2, m_\pi^2] - \frac{5}{2}I[m_K^2] - \frac{3}{4}I[m_\eta^2] - \frac{11}{4}I[m_\pi^2] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(C[s_2, m_\pi^2, m_K^2] + C[u_2, m_K^2, m_\eta^2] + C[u_2, m_\pi^2, m_K^2] \right. \\
&\quad \left. \left. + C[s_2, m_K^2, m_\eta^2] \right) \right\},
\end{aligned} \tag{5.59}$$

mit

$$\begin{aligned}
C_9 &= \frac{256\pi^2}{3} \left(4L_{13}^{6,\epsilon} - L_{14}^{6,\epsilon} + 2(6L_1^{6,\epsilon} - 4L_5^{6,\epsilon} + L_6^{6,\epsilon}) \right), \\
C_{10} &= -\frac{1024\pi^2}{3} \left(L_{13}^{6,\epsilon} + 2L_{14}^{6,\epsilon} + 3L_1^{6,\epsilon} + L_5^{6,\epsilon} + 2L_6^{6,\epsilon} \right), \\
C_{11} &= -\frac{256\pi^2}{3} \left(4L_{13}^{6,\epsilon} - L_{14}^{6,\epsilon} \right), \\
C_{12} &= 256\pi^2 \left(2L_{13}^{6,\epsilon} + L_{14}^{6,\epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [39]. Wir verwenden in Analogie zum pionischen Prozess 300 GeV für die Kaonstrahlenergie und den experimentellen Schnitt $t_1^s = -0.001 \text{ GeV}^2$. Mit

Hilfe der Gleichungen für die kinematischen Grenzen erhält man

$$\begin{aligned}
0.0184 \text{ GeV}^2 &< s_1 < 0.062 \text{ GeV}^2, \\
0.395 \text{ GeV}^2 &< s_2 < 0.549 \text{ GeV}^2, \\
-0.0864 \text{ GeV}^2 &< t_1 < -0.001 \text{ GeV}^2 = t_1^s, \\
-0.143 \text{ GeV}^2 &< t_2 < 0 \text{ GeV}^2,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

für die maximalen und minimalen Werte der Mandelstamvariablen. Der totale Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch¹⁷

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int ds_2 dt_1 d\Omega \\
&\times \frac{e^2 \sqrt{\lambda[s_2, m_\pi^2, m_K^2]}}{1024 \pi^4 s_2 t_1^2 \lambda[s, m_e^2, m_K^2]} |\mathbf{F}_{\pi \mathbf{k} \mathbf{k}}|^2 (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

In führender Ordnung in dem oben angegebenen physikalischen Bereich erhält man

$$\sigma \simeq 0.18 \text{ nb}, \tag{5.63}$$

also ungefähr 10 % des pionischen Wirkungsquerschnittes niedrigster Ordnung. Die Berechnung der in Abb. 5.8 gezeigten Diagrammklassen für das Kaon-Eta-System bis $\mathcal{O}(q^6)$ ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\eta 8 \mathbf{K} \mathbf{K}} &= \frac{e}{4\pi^2 \sqrt{3} F_{\eta 8} F_K^2} \left\{ 1 + C_{19} m_K^2 + C_{20} m_\eta^2 + C_{21} t_1 + C_{22} t_2 \right. \\
&+ \frac{1}{F_0^2} \left(6A[t_1, m_\pi^2] - A[t_2, m_K^2] + A[t_2, m_\pi^2] - \frac{5}{2} I[m_K^2] \right. \\
&- \frac{3}{4} I[m_\eta^2] - \frac{11}{4} I[m_\pi^2] + \frac{3}{2} \left(C[s_2, m_\pi^2, m_K^2] + C[u_2, m_K^2, m_\eta^2] \right. \\
&\left. \left. + C[u_2, m_\pi^2, m_K^2] + C[s_2, m_K^2, m_\eta^2] \right) \right) \left. \right\},
\end{aligned} \tag{5.64}$$

¹⁷Die Berechnung von σ ist als Beispiel im Anhang E gezeigt.

mit

$$\begin{aligned}
C_{19} &= 1024\pi^2 \left(L_{13}^{6,\epsilon} + 9L_1^{6,\epsilon} - 6L_2^{6,\epsilon} - 5L_5^{6,\epsilon} + 2L_6^{6,\epsilon} - 6L_7^{6,\epsilon} \right), \\
C_{20} &= -256\pi^2 \left(L_{14}^{6,\epsilon} + 36L_1^{6,\epsilon} - 24L_2^{6,\epsilon} - 16L_5^{6,\epsilon} + 10L_6^{6,\epsilon} - 24L_7^{6,\epsilon} \right), \\
C_{21} &= 256\pi^2 L_{14}^{6,\epsilon}, \\
C_{22} &= -256\pi^2 \left(2L_{13}^{6,\epsilon} + L_{14}^{6,\epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

In der Literatur findet sich gegenwärtig keine vergleichbare Rechnung und auch keine experimentellen Daten, weswegen wir es bei dem oben gezeigten Ergebnis für die Amplitude der $\mathcal{O}(q^6)$ für das η_8 belassen.

5.2.4 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$

Der semileptonische Zerfall des Kaons ($K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$) bietet durch den hadronischen Vektorformfaktor H einen Zugang zum anomalen Sektor der ChPT. Für die Berechnung von H benötigt man diejenigen Teile der WZW-Lagrangedichte, die ein Eichboson enthalten, gegeben durch [21, 22]

$$\mathcal{L}_{ext}^{(4)} = \frac{-\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{16\pi^2} \text{Tr}(X_{\mu\nu\alpha\beta}), \tag{5.66}$$

mit

$$X_{\mu\nu\alpha\beta} = U \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\alpha U^\dagger l_\beta - U^\dagger \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial_\alpha U r_\beta, \tag{5.67}$$

wobei nur die benötigten Terme angegeben sind¹⁸. Ref. [69] folgend lässt sich die invariante Amplitude schreiben gemäß¹⁹

$$\mathbf{M} = i G_F \sin \theta l_\mu H^\mu, \tag{5.68}$$

mit

$$H^\mu = \frac{-i}{\sqrt{2} m_K^3} H \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\nu P_\alpha Q_\beta. \tag{5.69}$$

p^+ , p^- , p_e und p_ν bezeichnen die Viererimpulse des π^+ , π^- , e^+ und ν_e mit $P = p^+ + p^-$, $Q = p^+ - p^-$, und $q = p_e + p_\nu$. Die Berechnung der in Abb.

¹⁸Die Einbeziehung der elektroschwachen Felder ist gegeben durch die Gl. (5.34), (5.35) und (5.36) aus Abschnitt 5.1.7.

¹⁹Hier wird nur der anomale vektorielle Formfaktor H betrachtet.

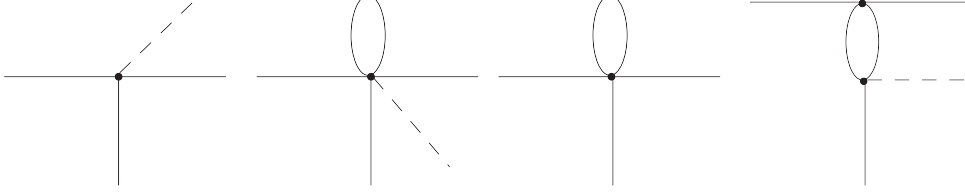


Abbildung 5.11: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen und die gestrichelte für das W -Boson.

5.11 gezeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ führt zu

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{-m_K^3}{4\sqrt{2}\pi^2 F_\pi^2 F_K} \left\{ 1 + \tilde{C}_{m^2} + C_{16} p^- \cdot (p^+ + p^- + q) + C_{17} p^+ \cdot (p^+ + q) \right. \\
 & + \frac{2}{F_0^2} \left(\frac{1}{2} A[(p^+ + p^-)^2, m_\pi^2] + \frac{1}{4} A[(p^+ + p^-)^2, m_K^2] \right. \\
 & + \frac{1}{2} C[(p^- + q)^2, m_\pi^2, m_K^2] + \frac{1}{4} C[(p^- + q)^2, m_K^2, m_\eta^2] + \frac{3}{4} C[q^2, m_\pi^2, m_K^2] \\
 & \left. \left. + \frac{3}{4} C[q^2, m_K^2, m_\eta^2] - \frac{11}{4} I[m_\pi^2] - \frac{5}{4} I[m_K^2] - \frac{3}{4} I[m_\eta^2] \right) \right\}, \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{m^2} &= -512\pi^2 (\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 - \mathbf{k}_{15} (m_K^2 - m_\pi^2)), \\
 C_{16} &= 1024\pi^2 L_{13}^{6,\epsilon}, \\
 C_{17} &= -512\pi^2 L_{14}^{6,\epsilon}, \\
 \mathbf{k}_{56} &= 2L_5^{6,\epsilon} + L_6^{6,\epsilon}, \\
 \mathbf{k}_{15} &= L_1^{6,\epsilon} + L_5^{6,\epsilon}. \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

Beachtet man die unterschiedlichen Formulierungen der Beiträge bezogen auf die Kontaktterme der $\mathcal{O}(q^6)$, so finden wir Übereinstimmung mit Ref. [81]. Experimentelle Daten für den energieabhängigen vektoriellen Formfaktor H sind gegeben durch Ref. [4, 80]. Das Letztere im Jahre 2001 durchgeführte Experiment E865 am Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron erbrachte Daten durch eine Probe von 4×10^5 Ereignissen für den Zerfall $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$ in einem großen kinematischen Bereich. Sechs Datenpunkte für H als Funktion der invarianten Dipionmasse $M_{\pi\pi}$ sind in dem Bereich von 280 MeV bis 390 MeV angegeben. Hierbei wurde keine Winkelabhängigkeit

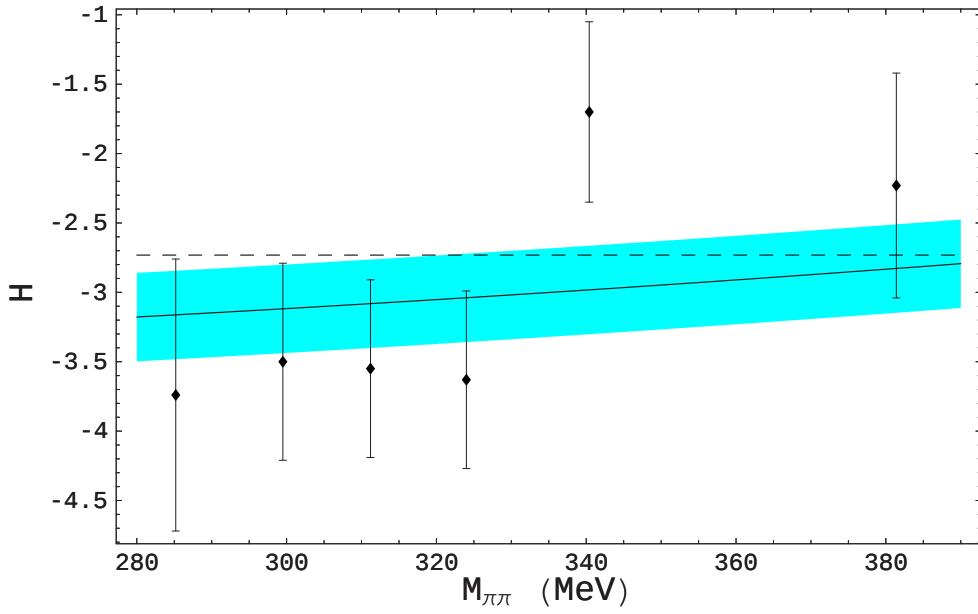


Abbildung 5.12: Gezeigt ist der vektorielle Formfaktor H als Funktion der invarianten Dipionmasse $M_{\pi\pi}$. Die gestrichelte Linie bezeichnet das Ergebnis niedrigster Ordnung und die durchgezogene Linie das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$. Die experimentellen Daten stammen von Ref. [80]. Der gefüllte Bereich zeigt den Fehler des Parameters k_{15} .

festgestellt und für den Fit angenommen, dass H nicht von der invarianten Dileptonmasse $M_{e\nu}$ abhängt. Das Ergebnis für den vektoriellen Formfaktor H aus Gl. (5.70) als Funktion von $M_{\pi\pi}$ im Vergleich mit den experimentellen Daten ist in Abb. 5.12 angegeben. Hierbei zeigt die gestrichelte Linie das Ergebnis niedrigster Ordnung und die durchgezogene Linie das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$. In niedrigster Ordnung erhält man

$$H = -2.73. \quad (5.72)$$

Für das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$ verwenden wir die VMD-Abschätzung²⁰ $C_{16} = -3/\Lambda^2$ und $C_{17} = -9/2\Lambda^2$ und betrachten $\tilde{C}_{m^2}$ als freien Parameter. Als angepasstes Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$ erhält man die durchgezogene Linie in Abb. 5.12, woraus sich mit Hilfe der Gl. (5.71) und $\mathbf{k}_{56} = (-2.32 \pm 1.30) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$, gegeben durch den Prozess $\pi^- e^- \rightarrow \pi^- e^- \pi^0$ aus Abschnitt 5.2.2, die Anpassung $\mathbf{k}_{15} = (-0.21 \pm 0.25) \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$ ergibt.

5.3 Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma$

5.3.1 $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

Dieser Prozess wurde von mehreren Autoren betrachtet [82, 83, 84, 85, 86]. Im theoretischen Kontext der Stromalgebra wurde er in Ref. [82, 83] und in ChPT im Rahmen von $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R$ in Ref. [84] jeweils in niedrigster Ordnung behandelt. Korrekturen der $\mathcal{O}(q^6)$ sind in Ref. [85, 86] im Rahmen von $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ diskutiert worden. Bezogen auf den totalen Wirkungsquerschnitt unterscheiden sich jedoch die einzelnen Referenzen untereinander, obwohl die zugrunde liegende Amplitude niedrigster Ordnung in allen Fällen gleich ist, weswegen wir eine erneute Betrachtung dieses Prozesses als sinnvoll erachten. Des Weiteren sind für diesen Prozess alle auftretenden LECs bereits durch VMD abgeschätzt bzw. durch Prozesse angepasst. Definiert man für den Prozess

$$\gamma(p_a) + \gamma(p_b) \rightarrow \pi^-(p_1) + \pi^0(p_2) + \pi^+(p_3), \quad (5.73)$$

²⁰ $L_{13}^{6,\epsilon} = -3\Delta$ und $L_{14}^{6,\epsilon} = +9\Delta$ mit $\Delta = 1/1024\pi^2\Lambda^2$. Informationen hierzu findet man in Abschnitt 4.2.2.

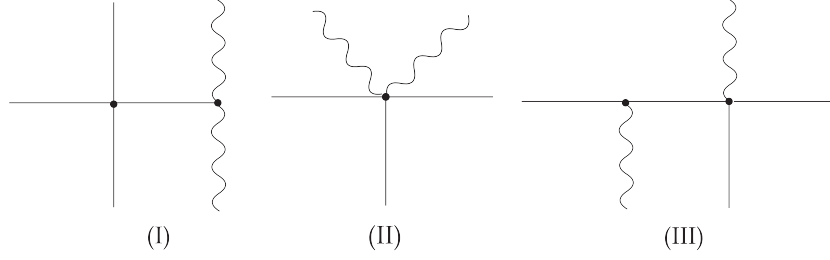


Abbildung 5.13: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi\pi$ in niedrigster Ordnung. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen.

die Mandelstamvariablen

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\
 t_1 &= (p_a - p_1)^2, \\
 s_2 &= (p_2 + p_3)^2, \\
 t_2 &= (p_b - p_3)^2, \\
 s &= (p_a + p_b)^2,
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

so lässt sich der totale Wirkungsquerschnitt als Funktion von $s = (p_a + p_b)^2$ schreiben als

$$\sigma(s) = \frac{1}{1024\pi^4 s^2} \int ds_2 dt_1 ds_1 dt_2 \frac{|\mathbf{M}|^2}{\sqrt{-\Delta_4}}, \tag{5.75}$$

mit der Gram Determinante

$$\Delta_4 = \frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & s & m_\pi^2 - t_1 & s - s_1 + t_2 \\ s & 0 & s - s_2 + t_1 & m_\pi^2 - t_2 \\ m_\pi^2 - t_1 & s - s_2 + t_1 & 2m_\pi^2 & m_\pi^2 + s - s_1 - s_2 \\ s - s_1 + t_2 & m_\pi^2 - t_2 & m_\pi^2 + s - s_1 - s_2 & 2m_\pi^2 \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

Die Integration in Gl. (5.75) erstreckt sich über den physikalischen Bereich des Prozesses, welcher $\Delta_4 \leq 0$ erfüllt. Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = i \mathbf{F}_{\alpha\beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon'^\beta$, wobei ε und ε' die Polarisationsvektoren zu $\gamma(p_a)$ und $\gamma(p_b)$ bezeichnen, so ergibt die Berechnung der in Abb. 5.13 gezeigten

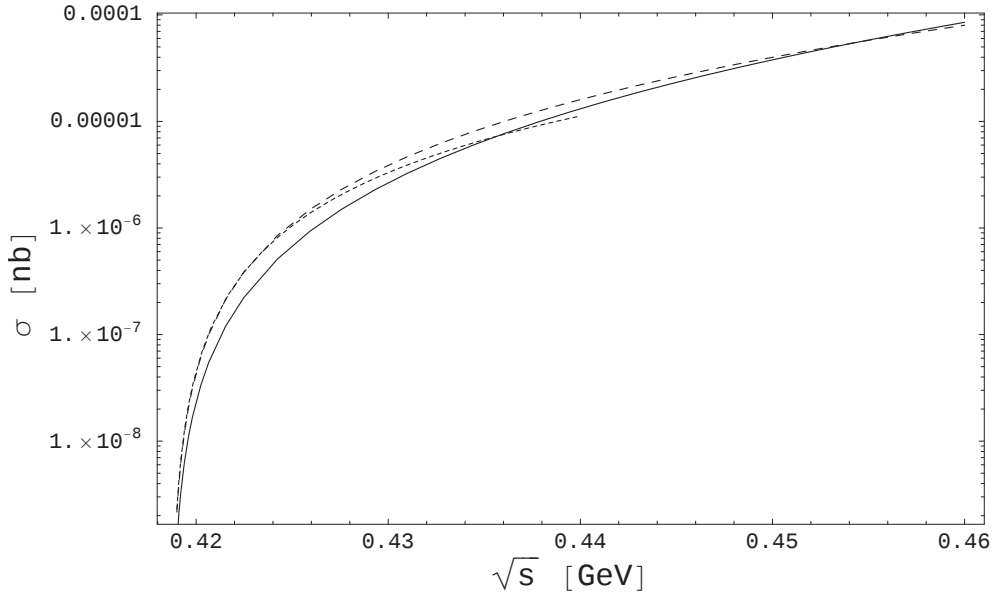


Abbildung 5.14: Gezeigt ist der totale Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ im Bereich von $3m_\pi$ bis 0.46 GeV. Die gepunktete Linie zeigt die nichtrelativistische Approximation, die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis niedrigster Ordnung und die durchgezogene Linie das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$.

Diagramklassen die Amplitude in niedrigster Ordnung zu

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} = \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi^3} \left(\mathbf{F}_{\alpha\beta}^1 + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^3 \right), \quad (5.77)$$

mit

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^1 = \frac{7m_\pi^2 + 2s - 3(s_1 + s_2)}{3(s - m_\pi^2)} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} p_a^\sigma p_b^\varrho, \quad (5.78)$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{3} \left[3(p_1 + p_3)^\sigma (p_a - p_b)^\varrho + 4p_a^\sigma p_b^\varrho \right] \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho}, \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha\beta}^3 = & 2 \left[\left(\frac{p_{1\beta} p_2^\sigma p_3^\rho}{s - s_2 + t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\beta}}{m_\pi^2 - t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p_a^\tau \right. \\ & \left. + \left(\frac{p_{1\alpha} p_2^\sigma p_3^\rho}{m_\pi^2 - t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\alpha}}{s - s_1 + t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p_b^\tau \right], \end{aligned} \quad (5.80)$$

in Übereinstimmung mit früheren Berechnungen aus Ref. [82, 84, 85, 86]. Die Diagrammkategorie I ist für sich alleine genommen eichinvariant. Bei den Diagrammkategorien II und III hingegen ist nur die Summe eichinvariant. Der totale Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ ist im Bereich von $3m_\pi$ bis 0.46 GeV in Abb. 5.14 und im Bereich von $3m_\pi$ bis 0.52 GeV in Abb. 5.15 dargestellt. Hierbei bezeichnet die kurze gepunktete Linie die nichtrelativistische Approximation nahe der Schwelle und die gestrichelte Linie das Ergebnis obiger Amplitude niedrigster Ordnung. Die durchgezogene Linie steht für das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$, dessen Details weiter unten diskutiert werden. In niedrigster Ordnung finden wir Übereinstimmung mit Ref. [85, 86] und einen Unterschied zu Ref. [83, 84]. Unser totaler Wirkungsquerschnitt ist eine Größenordnung kleiner als in Ref. [84] und zwei Größenordnungen kleiner als in Ref. [83]. Betrachtet man sich den Wirkungsquerschnitt der nichtrelativistischen Approximation nahe der Schwelle $s = 9m_\pi^2$, so erhält man

$$\sigma(s)_{\text{NR}} = \frac{1}{384\sqrt{3}\pi^2} \left(1 - \frac{6m_\pi}{\sqrt{s}} + \frac{9m_\pi^2}{s} \right) |T|_{\mathbf{S}}^2, \quad (5.81)$$

mit

$$|T|_{\mathbf{S}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{Pol}} |\mathbf{M}|_{\mathbf{S}}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi^3} \right)^2 \left(\frac{9m_\pi^4}{128} \right), \quad (5.82)$$

wobei der Index $\mathbf{S}$ den Wert an der Schwelle $s = 9m_\pi^2$ bezeichnet. Aus Gl. (5.81) ergibt sich die kurze gepunktete Linie nahe der Schwelle gezeigt in Abb. 5.14, in guter Übereinstimmung mit der Amplitude niedrigster Ordnung. Zusammengefasst kommen wir zu dem Ergebnis, dass die in Ref. [85, 86] gemachten Aussagen bezogen auf den Wirkungsquerschnitt niedrigster Ordnung durch unsere Rechnung Bestätigung finden. Eine starke destruktive Interferenz zwischen den Amplituden in Gl. (5.77) generiert den totalen Wirkungsquerschnitt niedrigster Ordnung.

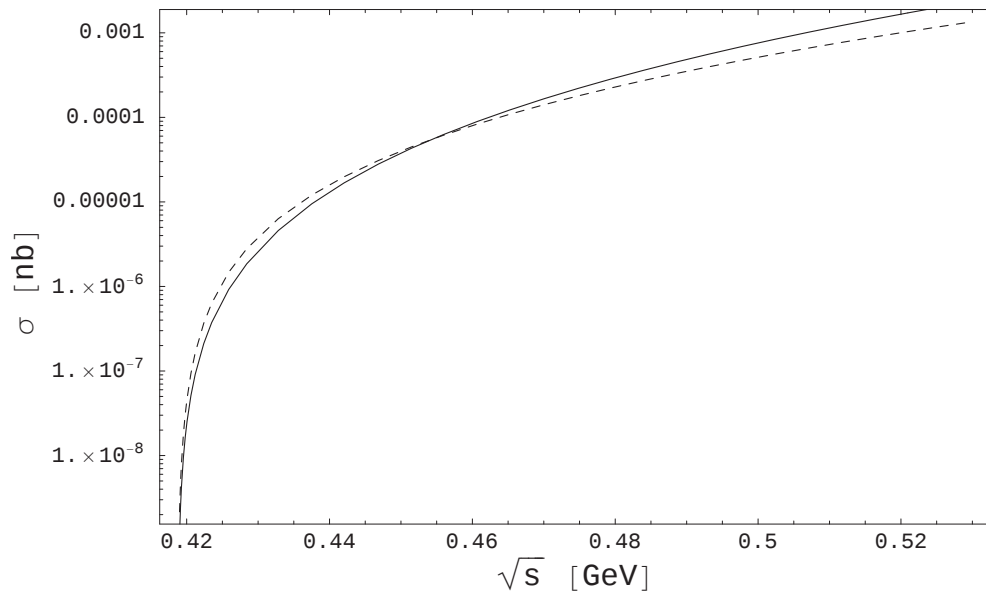


Abbildung 5.15: Gezeigt ist der totale Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ im Bereich von $3m_\pi$ bis 0.52 GeV. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis niedrigster Ordnung und die durchgezogene Linie das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$.

Die Amplitude der $\mathcal{O}(q^6)$ setzt sich aus verschiedenen Beiträgen zusammen und lässt sich symbolisch schreiben gemäß

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi\pi) = \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6}. \quad (5.83)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4}$ die Beiträge niedrigster Ordnung und $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6}$ die der $\mathcal{O}(q^6)$. Letztere setzen sich zusammen aus Beiträgen der LECs und aus Schleifenbeiträgen. Die auftretenden LECs kommen sowohl von der normalen Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte $\mathcal{L}^{(4)}$ aus Gl. (3.22) als auch der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ aus Gl. (4.4). Letztere sind $L_8^{6,\epsilon}$ aus dem Reaktionstyp $\phi + 2\gamma^*$, $(L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}, \mathbf{k}_{56})$ aus dem Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*$ und $L_{22}^{6,\epsilon}$ aus dem Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma^*$. Alle auftretenden LECs sind abgeschätzt²¹. Der vollständige Ausdruck für die Amplitude ist diagrammatisch durch die im Anhang B in Abb. B.6 gezeigten Diagrammklassen und explizit im Anhang F angegeben. In Abb. 5.15 zeigt die durchgezogene Linie den totalen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ der $\mathcal{O}(q^6)$. Wir erhalten nahe der Schwelle Korrekturen von bis zu 45% im Vergleich zur niedrigsten Ordnung. Im weiteren Verlauf werden die Korrekturen zuerst kleiner und steigen ab circa $\sqrt{s} \simeq 0.46$ wieder an. Am Ende des gezeigten Energiebereiches erreichen die Korrekturen bis zu 50% im Vergleich zur niedrigsten Ordnung. Nahe der Schwelle dominieren die Beiträge der LECs der normalen Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte und drücken den Wirkungsquerschnitt nach unten. Die LECs der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ liefern nahe der Schwelle keinen signifikanten Beitrag²². Im weiteren Verlauf wird der Wirkungsquerschnitt durch das Zusammenspiel aller Beiträge größer, wobei die Schleifenkorrekturen im Vergleich zu den Beiträgen der LECs entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen.

Zusammenfassend können wir in Übereinstimmung mit den Aussagen in Ref. [86] und im Widerspruch zu Ref. [85] sagen, dass sich die chiralen Korrekturen in der Größenordnung der Schleifenkorrekturen befinden. Das empfindliche Gleichgewicht, welches zur stark destruktiven Interferenz zwischen den Amplituden führt und den totalen Wirkungsquerschnitt niedrigster Ordnung erzeugt, wird nicht gravierend beeinflusst.

Auf experimenteller Seite steht die DAΦNE Φ -factory [87] mit einer totalen Strahlenergie von 510 MeV oder die τ -charm factory [88] mit einer vierfach höheren Strahlenergie für diesen Prozess zur Verfügung. Für beide Anlagen

²¹Für die Gasser-Leutwyler-Niederenergiekonstanten verwenden wir die Mittelwerte aus Abschnitt 4.2.1.

²²Der Beitrag kommt von $L_8^{6,\epsilon}$.

wurde in Ref. [86] eine Abschätzung der zu erwartenden Anzahl an Ereignissen für diesen Prozess vorgenommen. Für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} \lesssim 0.6 \text{ GeV}$ erwartet man bei DAΦNE ungefähr 5 ± 1 Ereignisse pro Jahr. Bei der τ -charm factory hingegen ungefähr 16 ± 4 Ereignisse pro Jahr für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 0.5 \text{ GeV}$. In dem Energiebereich, in dem die ChPT eine sinnvolle Anwendung findet, sieht die Lage also sehr dürrftig aus. Erst ab höheren Energien steigt die Anzahl an Ereignissen bei der τ -charm factory signifikant an (siehe Ref. [86]).

5.3.2 $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma \gamma$

Dieser Prozess wurde von mehreren Autoren betrachtet [89, 90]. Die niedrigste Ordnung behandelte Ref. [89] und Korrekturen hierzu Ref. [90]. Die Definition der kinematischen Variablen für den geladenen Zerfall $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma \gamma$ ist gegeben durch

$$\eta(p) \rightarrow \pi^+(k_1) + \pi^-(k_2) + \gamma(q_1) + \gamma(q_2). \quad (5.84)$$

Die vollständige Kinematik zur Beschreibung eines Zerfallsprozesses mit vier Teilchen im Endzustand benötigt fünf unabhängige kinematische Variablen. Wir wählen s_π , s_γ , β , θ und Φ als kinematische Variablen mit der Definition

$$\begin{aligned} s_\pi &= (k_1 + k_2)^2, \\ s_\gamma &= (q_1 + q_2)^2, \\ \cos \beta &= \frac{\mathbf{w} \cdot \vec{k}_1}{|\vec{k}_1|}, \\ \cos \theta &= \frac{-\mathbf{w} \cdot \vec{q}_1}{|\vec{q}_1|}, \\ \cos \Phi &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\vec{k}_1 - \mathbf{w} \frac{\mathbf{w} \cdot \vec{k}_1}{|\mathbf{w}|}}{\sqrt{\vec{k}_1^2 - (\vec{k}_1 \cdot \mathbf{w})^2}}, \\ \mathbf{v} &= \frac{\vec{q}_1 - \mathbf{w} \frac{\mathbf{w} \cdot \vec{q}_1}{|\mathbf{w}|}}{\sqrt{\vec{q}_1^2 - (\vec{q}_1 \cdot \mathbf{w})^2}}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

gezeigt in Abb. 5.16. Hierbei ist s_π das Quadrat der Schwerpunktsenergie der

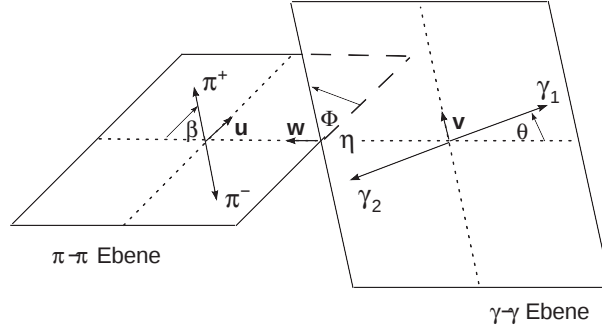


Abbildung 5.16: Gezeigt ist die Kinematik für den Zerfall $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$.

Pionen und s_γ das Quadrat der Schwerpunktsenergie der Photonen. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ bezeichnen Einheitsvektoren bezüglich der in Abb. 5.16 gezeigten Richtungen. Sei Σ_η das Ruhesystem des η -Mesons und $\Sigma_{\pi\pi}$ bzw. $\Sigma_{\gamma\gamma}$ das Dipion- bzw. Diphoton-Schwerpunktssystem, so ist β der Winkel des Pions mit Impuls k_1 in $\Sigma_{\pi\pi}$ in Bezug auf die Flugrichtung des Dipions in Σ_η , θ der Winkel des Photons mit Impuls q_1 in $\Sigma_{\gamma\gamma}$ in Bezug auf die Flugrichtung des Diphotons in Σ_η und Φ ist der Winkel zwischen der π - π -Ebene und der dazugehörigen γ - γ -Ebene in Σ_η . Definiert man nun die folgenden Linearkombinationen der Impulse k_1 , k_2 , q_1 und q_2 durch

$$\begin{aligned} K_s &= k_1 + k_2, \\ K_a &= k_1 - k_2, \\ Q_s &= q_1 + q_2, \\ Q_a &= q_1 - q_2, \end{aligned} \tag{5.87}$$

so lässt sich die differentielle Zerfallsbreite schreiben gemäß

$$\frac{d\Gamma}{ds_\pi ds_\gamma d\cos\beta d\cos\theta d\Phi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s_\pi}} \sqrt{(K_s \cdot Q_s)^2 - s_\pi s_\gamma}}{2!(2\pi)^5 512\pi m_\eta^3} |\mathbf{M}|^2. \tag{5.88}$$

Der Zusammenhang zwischen den kinematischen Variablen s_π , s_γ , β , θ und Φ und den Variablen K_s , K_a , Q_s und Q_a ist im Anhang F angegeben. Die Integration in Gl. (5.88) erstreckt sich über den physikalischen Bereich des

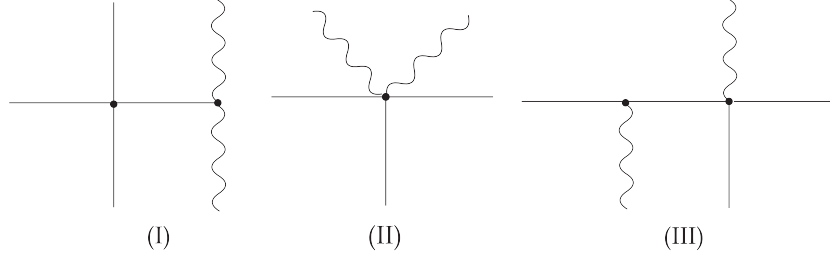


Abbildung 5.17: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$ in niedrigster Ordnung. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen.

Prozesses, gegeben durch

$$\begin{aligned}
0 &\leq s_\gamma \leq (m_\eta - 2m_\pi)^2, \\
4m_\pi^2 &\leq s_\pi \leq (m_\eta - \sqrt{s_\gamma})^2, \\
0 &\leq \beta \leq \pi, \\
0 &\leq \theta \leq \pi, \\
0 &\leq \Phi \leq 2\pi.
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Definiert man die invariante Amplitude durch $\mathbf{M} = i \mathbf{F}_{\alpha\beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon'^\beta$, wobei ε und ε' die Polarisationsvektoren zu $\gamma(q_1)$ und $\gamma(q_2)$ bezeichnen, so ergibt die Berechnung der in Abb. 5.17 gezeigten Diagrammklassen für das η_8 die isospin-erhaltende Amplitude in niedrigster Ordnung zu

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} = \frac{e^2}{4\pi^2 \sqrt{3} F^3} \left(\mathbf{F}_{\alpha\beta}^1 + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^3 \right), \tag{5.90}$$

mit

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^1 = \frac{m_\pi^2}{3(s_\gamma - m_\eta^2)} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} q_1^\sigma q_2^\varrho, \tag{5.91}$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^2 = -p^\sigma (q_1 - q_2)^\varrho \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho}, \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\alpha\beta}^3 = & \left[\left(\frac{k_{1\beta} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_2} + \frac{k_1^\sigma k_{2\beta}}{k_2 \cdot q_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p^\varrho q_1^\tau \right. \\
& \left. + \left(\frac{k_{1\alpha} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_1} + \frac{k_1^\sigma k_{2\alpha}}{k_2 \cdot q_1} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p^\varrho q_2^\tau \right],
\end{aligned} \tag{5.93}$$

in Übereinstimmung mit Ref. [89, 90]. Die Diagrammklasse I besteht aus einem Vertex der $\mathcal{O}(q^2)$ mit vier Mesonen, einem propagierenden neutralen Meson und einem WZW-Vertex der $\mathcal{O}(q^4)$ mit diesem Meson und zwei Photonen. Die Diagrammklasse I ist für sich alleine genommen eichinvariant. Die Diagrammklasse II ist ein WZW-Kontaktterm der $\mathcal{O}(q^4)$ und die Diagrammklasse III beschreibt innere Bremsstrahlung, bei dem ein Photon von einer geladenen Pionlinie abgestrahlt wird. Bei den Diagrammklassen II und III hingegen ist nur die Summe eichinvariant. Betrachtet man sich das Diphotonenergiespektrum in Abb. 5.18, so bezeichnet die gestrichelte Linie das Ergebnis niedrigster Ordnung für den $\eta_8 \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$ Prozess und die durchgezogene Linie das Ergebnis der $\mathcal{O}(q^6)$ für den $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$ Prozess, dessen Details weiter unten diskutiert werden. Mit unserem Ergebnis des Diphotonenergiespektrums niedrigster Ordnung finden wir Übereinstimmung mit Ref. [89, 90]. Das Diphotonenergiespektrum zeigt bei $s_\gamma = m_{\pi^0}^2$ ein Interferenzmuster welches dem π^0 -Pol durch den Zerfallskanal $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$ zugeschrieben wird. Dieser Isospin brechende Beitrag, $\tilde{\mathbf{F}}^{\alpha\beta}$, wird hervorgerufen durch ein propagierendes π^0 in der Diagrammklasse I gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\alpha\beta} = \frac{B_0(m_u - m_d)}{3(s_\gamma - m_{\pi^0}^2)} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} q_1^\sigma q_2^\varrho, \quad (5.94)$$

welcher durch Hinzufügen einer endlichen Breite $\Gamma = 7.93 \text{ eV}$ [4] und $B_0(m_u - m_d) = -\Delta m_K^2 \simeq -6.2 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2$ [91] abgeschätzt wird. Des Weiteren ist aus Gl. (5.93) ersichtlich, dass die Diagrammklasse III, welche einen Bremsstrahlungsprozess beschreibt, bei verschwindenden Photonenergien singulär wird und somit für die Divergenz im Spektrum für $s_\gamma \rightarrow 0$ verantwortlich ist. Schaltet man Diagrammklasse I aus, ist die Amplitude immer noch eichinvariant und unsere Rechnung zeigt in Übereinstimmung mit den in Ref. [89] gemachten Aussagen, dass sich das Diphotonenergiespektrum im Vergleich zur vollen Amplitude nicht signifikant ändert. Hieraus folgernd kommen wir, in Übereinstimmung mit Ref. [89, 90], zu dem Ergebnis, dass der Reaktionsmechanismus der Diagrammklassen II und III das Spektrum dominiert. Für die Korrekturen der $\mathcal{O}(q^6)$ ist es somit ausreichend, sich auf die dominierenden Bereiche zu beschränken. Die Amplitude der $\mathcal{O}(q^6)$ lässt sich symbolisch schreiben gemäß

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma) = \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6}. \quad (5.95)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4}$ die Beiträge niedrigster Ordnung und $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6}$ die Beiträge der $\mathcal{O}(q^6)$. Letztere setzen sich zusammen aus Beiträgen der LECs

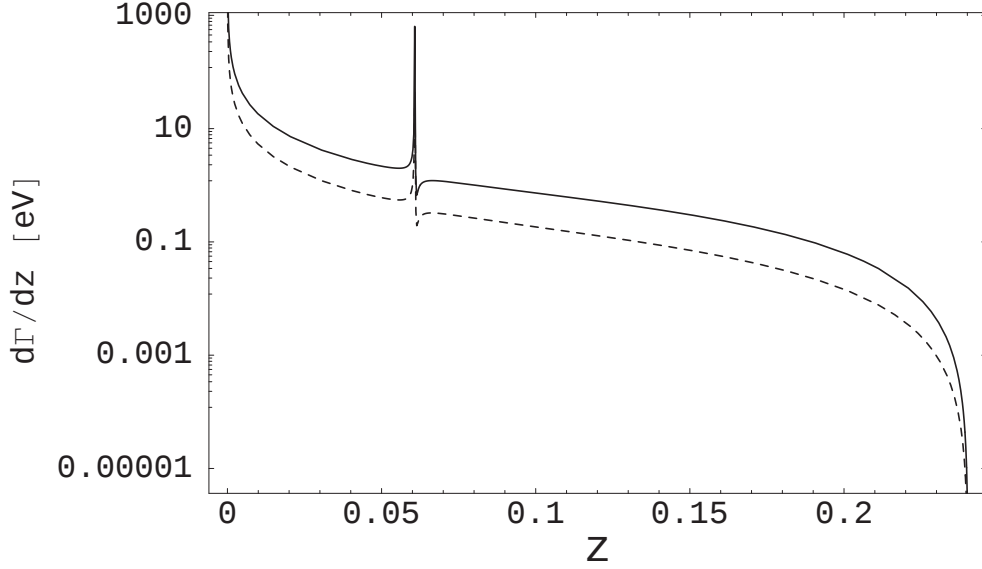


Abbildung 5.18: Das Diphotonenergiespektrum $\frac{d\Gamma}{dz}$ ($z = s_\gamma/m_\eta^2$) für den Zerfall $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis niedrigster Ordnung für $\eta_8 \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$ und die durchgezogene das der $\mathcal{O}(q^6)$ für $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$.

und aus Schleifenbeiträgen. Die auftretenden LECs kommen sowohl von der normalen Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte aus Gl. (3.22) als auch der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ aus Gl. (4.4). Letztere sind $(L_8^{6,\epsilon}, L_9^{6,\epsilon})$ aus dem Reaktionstyp $\phi + 2\gamma^*$, $(L_{13}^{6,\epsilon}, L_{14}^{6,\epsilon}, \mathbf{k}_{27}, \mathbf{k}_{56})$ aus dem Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*$ und $(L_{10}^{6,\epsilon}, L_{11}^{6,\epsilon}, L_{20}^{6,\epsilon}, L_{22}^{6,\epsilon}, L_{23}^{6,\epsilon})$ aus dem Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma^*$. Alle auftretenden Niederenergiekonstanten sind ausgenommen von $L_{10}^{6,\epsilon}$ und $L_{11}^{6,\epsilon}$ abgeschätzt²³. Des Weiteren benutzen wir das phänomenologische η - η' Mischungsschema²⁴ mit dem Mischungswinkel von $\theta \simeq -20^\circ$. Der vollständige Ausdruck für die Amplitude ist diagrammatisch durch die im Anhang B in Abb. B.6 gezeigten Diagrammklassen und explizit im Anhang F angegeben. Zur Berechnung des Diphotonenergiespektrums der $\mathcal{O}(q^6)$ setzen wir $L_{10}^{6,\epsilon} = L_{11}^{6,\epsilon} \equiv 0$ und verwenden für alle anderen Konstanten die abgeschätzten Werte. Als Ergebnis

²³Für die Gasser-Leutwyler-Niederenergiekonstanten verwenden wir die Mittelwerte aus Abschnitt 4.2.1.

²⁴Nähere Informationen zu dem verwendeten η - η' Mischungsschemas sind im Anhang G angegeben.

erhält man die durchgezogene Linie gezeigt in Abb. 5.18, welche im Vergleich zur niedrigsten Ordnung ungefähr dreieinhalb mal so groß ist:

$$\frac{d\Gamma}{dz}(\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma) \approx 3.4 \times \frac{d\Gamma}{dz}(\eta_8 \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma)_{\text{LO}}. \quad (5.96)$$

Dieses Ergebnis war, bedingt durch die Dynamik des zugrunde liegenden $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ Übergangs, zu erwarten und konnte durch unsere Rechnung Bestätigung finden²⁵. Die Beiträge der LECs ($L_{13}^{6,\epsilon}$, $L_{14}^{6,\epsilon}$, $\mathbf{k}_{27}$, $\mathbf{k}_{56}$) des Reaktionstyps $3\phi+\gamma^*$ dominieren die Schleifenkorrekturen und die Beiträge der übrigen LECs. Zusammenfassend kommen wir, in Übereinstimmung mit den Aussagen von Ref. [90], zu dem Fazit, dass die obigen Ergebnisse sich in Wirklichkeit eher auf die Dynamik der $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ - und $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ -Amplituden beziehen, als dass es eigenständige dynamische Effekte bezogen auf $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$ sind. Letzteres von diesem dominanten Hintergrund zu entkoppeln wird wohl sehr schwierig sein. Des Weiteren kann, aufgrund fehlender experimenteller Daten, keine Abschätzung der LECs $L_{10}^{6,\epsilon}$ und $L_{11}^{6,\epsilon}$ vorgenommen werden.

5.4 Reaktionstyp 5ϕ

5.4.1 $K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$

In Ref. [92] wurde dieser Prozess unter dem Gesichtspunkt der Renormierbarkeit betrachtet. Die Definition der kinematischen Variablen für den Prozess $KK \rightarrow 3\pi$ ist gegeben durch

$$K^+(p_a) + K^-(p_b) \rightarrow \pi^0(p_1) + \pi^+(p_2) + \pi^-(p_3). \quad (5.97)$$

Definiert man weiterhin die invariante Amplitude durch

$\mathbf{M} = i \mathbf{F}_{5\phi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{2\mu} p_{3\nu} p_{a\alpha} p_{b\beta}$, so führt die Berechnung der in Abb. 5.19 ge-

²⁵Siehe Abschnitt 5.2.1.

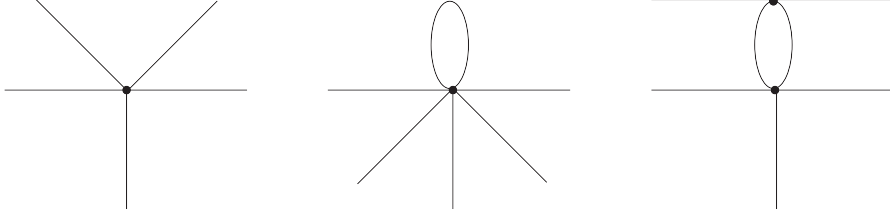


Abbildung 5.19: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp 5ϕ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Die durchgezogenen Linien stehen für die Mesonen.

zeigten Diagrammklassen bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{5\phi} = & \frac{3}{4\pi^2 F_\pi^3 F_k^2} \left\{ 1 + C_{23}(2m_K^2 + 3m_\pi^2) \right. \\
& + C_{24}(2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_a - p_1 \cdot p_b + 2p_2 \cdot p_3 - 2p_2 \cdot p_b \\
& - 2p_3 \cdot p_a + 3p_a \cdot p_b) + \frac{1}{F_0^2} \left[2A[(p_1 + p_2)^2, m_\pi^2] + 2A[(p_1 + p_3)^2, m_\pi^2] \right. \\
& + 2A[(p_2 + p_3)^2, m_\pi^2] + 3A[(p_a + p_b)^2, m_K^2] + C[(p_a - p_3)^2, m_\pi^2, m_K^2] \\
& + C[(p_a - p_3)^2, m_\eta^2, m_K^2] + C[(p_b - p_2)^2, m_\pi^2, m_K^2] \\
& + C[(p_b - p_2)^2, m_\eta^2, m_K^2] + \frac{1}{2} \left(C[(p_a - p_1)^2, m_\pi^2, m_K^2] \right. \\
& + C[(p_a - p_1)^2, m_\eta^2, m_K^2] + C[(p_b - p_1)^2, m_\pi^2, m_K^2] \\
& \left. \left. + C[(p_b - p_1)^2, m_\eta^2, m_K^2] \right) - 3I[m_K^2] - \frac{3}{4}I[m_\eta^2] - \frac{15}{4}I[m_\pi^2] \right] \left. \right\}, \quad (5.98)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
C_{23} &= 512L_4^{6,\epsilon}\pi^2, \\
C_{24} &= -\frac{1024}{3}L_{12}^{6,\epsilon}\pi^2.
\end{aligned} \quad (5.99)$$

Unter Vernachlässigung der Konstanten C_{23} und C_{24} finden wir Übereinstimmung mit Ref. [92]. Die $K^+K^- \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ -Amplitude könnte man in Meson-Baryon Streuprozessen, dort insbesondere im t -Kanal, testen. Hierbei stünde der Streuprozess $K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0\pi^+\pi^-$ für das Studium der $K^+K^- \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ -Amplitude sowohl unter experimenteller als auch theoretischer Sicht zur Verfügung (siehe Abb. 5.20). Auf experimenteller Seite ist obiger Streuprozess

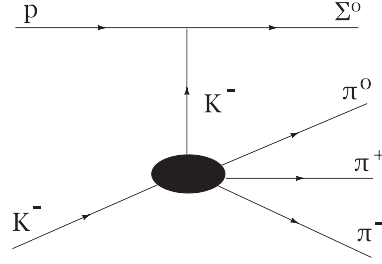


Abbildung 5.20: Gezeigt ist hier symbolisch der Streuprozess $K^- p \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^+ \pi^-$, welcher die $K^+ K^- \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ -Amplitude testen könnte.

ein Nebenprodukt der polarisierten Hyperonproduktion, die z.B. am Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron im Experiment E811 durchgeführt wurde [93, 94]. Hierbei wurde der Prozess $K^- p \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ sorgfältig analysiert. Für das Studium des Prozesses $K^- p \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^+ \pi^-$ bräuchte man also zusätzlich noch den Nachweis von π^+ und π^- . Auf theoretischer Seite hingegen ist der in Abb. 5.20 gezeigte Prozess, in dem ein Kaon im inneren Propagator läuft, die günstigste kinematische Situation bezogen auf die störungstheoretische Entwicklung in ChPT. Jedoch ist schon hierbei der Energiebereich, in dem eine Vorhersage durch ChPT vertrauenswürdig wäre, sehr begrenzt, da schon die minimale totale Energie des Kaons zur Produktion der Teilchen im Endzustand, $E = M_\Sigma - M_P + 3m_\pi \simeq 0.75 \text{ GeV}$, sehr groß ist. Hieraus folgend wären Vorhersagen nur in der Nähe der Produktionsschwelle möglicherweise glaubwürdig. Die t -Kanal-Amplitude lässt sich unter Verwendung baryonischer chiraler Störungsrechnung [17] berechnen. Die hierfür benötigte Lagrangedichte ist gegeben durch [95]

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{D}{2} \text{Tr} \left(\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 \{u_\mu, B\} \right) - \frac{F}{2} \text{Tr} \left(\bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 [u_\mu, B] \right), \quad (5.100)$$

mit

$$u_\mu = i (u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger), \quad u^2 \equiv U. \quad (5.101)$$

B bezeichnet das Oktett der $\frac{1}{2}^+$ Baryonen, parametrisiert durch eine spurlose 3×3 -Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda \end{pmatrix}, \quad (5.102)$$

deren jeweiligen Elemente mit komplexen, vierkomponentigen Dirac-Feldern assoziiert werden. Die Berechnung der t -Kanal-Amplitude ergibt sich zu

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{F}_{5\phi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\mu^+ p_\nu^- q_\alpha K_\beta^- (D - F)}{8F_K m_P m_\Sigma (t - m_K^2)} \times [t - (m_\Sigma^2 - m_P^2)], \quad (5.103)$$

mit $t = q^2$. Die Konstanten D und F lassen sich durch die Anpassung an die semileptonischen Zerfälle $B \rightarrow B' + e^- + \bar{\nu}_e$ auf Baumniveau bestimmen [96] zu

$$D = 0.80, \quad F = 0.50. \quad (5.104)$$

Da gegenwärtig keine experimentellen Daten vorliegen und außerdem die Anwendbarkeit der ChPT in diesem Energiebereich mit Vorsicht zu genießen ist, belassen wir es bei der Berechnung der Amplitude²⁶.

5.5 Numerische Werte der LECs

In den folgenden zwei Tabellen sind alle berechneten Prozesse auf einen Blick dargestellt. In der Tabelle 5.6 zeigt die erste Spalte den betrachteten Prozess, die zweite Spalte die verwendeten experimentellen Daten und die dritte Spalte die beitragenden LECs mit ihren abgeschätzten bzw. angepassten numerischen Werten. Die durch das VMD-Modell abgeschätzten „dynamischen“ LECs haben die Kennzeichnung (VMD) und keine Angabe des Fehlers. Die angegebenen experimentellen Daten dienen zur Anpassung, ausgenommen die in runden Klammern stehenden Ausdrücke. Letztere werden zum Vergleich herangezogen, da bereits alle beitragenden LECs abgeschätzt bzw. angepasst sind. In der Tabelle 5.7 sind diejenigen Prozesse gezeigt, für die keine experimentellen Daten vorliegen. Die Einteilung der Spalten erfolgt in Analogie zur ersten Tabelle. Die Bezeichnung GL-LECs bezeichnet die Gasser-Leutwyler-Niederenergiekonstanten der Lagrangedichte $\mathcal{L}^{(4)}$, für die wir die Mittelwerte aus Abschnitt 4.2.1. verwenden [44].

²⁶Weiterführende Informationen findet man z.B. in Ref. [92].

Prozess	Experimentelle Daten	numerischer Wert [10^{-3} GeV^{-2}]
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	Zerfallsbreite [57]	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$
$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	Zerfallsbreite [4]	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_9^{6,\epsilon} = +0.04 \pm 0.07$
$\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$	(Zerfallsbreite und <i>slope</i> -Parameter [4])	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_{19}^{6,\epsilon} = -1.0$ (VMD)
$\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-$	(Zerfallsbreite und <i>slope</i> -Parameter [4])	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_9^{6,\epsilon} = +0.04 \pm 0.07$ $L_{19}^{6,\epsilon} = -1.0$ (VMD)
$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$	Formfaktor [4]	$L_8^{6,\epsilon} = +5.6 \pm 4.4$
$K^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$	Formfaktor [71]	$L_3^{6,\epsilon} = -0.01 \pm 0.24$ $L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$
$\pi^- e^- \rightarrow \pi^- e^- \pi^0$	Wirkungsquerschnitt [77]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD)
$\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$	Zerfallsbreite [4] und Photonenergiespektrum [74]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $k_{27} = +0.61 \pm 0.12$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD)
$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$	Formfaktor [80]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $k_{15} = -0.21 \pm 0.25$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD)

Tabelle 5.6: Gezeigt sind die berechneten Prozesse mit den zur Anpassung der LECs verwendeten experimentellen Daten und die abgeschätzten bzw. angepassten numerischen Werte.

Prozess	Experimentelle Daten	numerischer Wert [10^{-3}GeV^{-2}]
$K^-e^- \rightarrow K^-e^-\pi^0$	Keine	$L_1^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD)
$K^-e^- \rightarrow K^-e^-\eta_8$	Keine	$L_1^{6,\epsilon}, L_2^{6,\epsilon}, L_7^{6,\epsilon}, L_5^{6,\epsilon}, L_6^{6,\epsilon}$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD)
$\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	Keine	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ $L_{22}^{6,\epsilon} = -0.25$ GL-LECs
$\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma\gamma$	Keine	$L_{10}^{6,\epsilon}, L_{11}^{6,\epsilon}$ $k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5$ (VMD) $L_{20}^{6,\epsilon} = -0.5$ (VMD) $L_{22}^{6,\epsilon} = -0.25$ (VMD) $L_{23}^{6,\epsilon} = +0.063$ (VMD) GL-LECs
$K^+K^- \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ $(K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0\pi^+\pi^-)$	Keine	$L_4^{6,\epsilon}$ $L_{12}^{6,\epsilon} = -0.125$ (VMD)

Tabelle 5.7: Gezeigt sind die berechneten Prozesse bei denen keine experimentellen Daten vorliegen. Des Weiteren sind die beitragenden LECs angegeben. GL-LECs steht für Gasser-Leutwyler-Niederenergiekonstanten aus Abschnitt 4.2.1.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Dissertation wurde der anomale Sektor bzw. der Sektor ungerader innerer Parität in mesonischer ChPT bis zur chiralen $\mathcal{O}(q^6)$ behandelt. Auf eine Einführung in die QCD und ihrer Verknüpfung mit der chiralen Symmetrie folgte die Betrachtung der mesonischen ChPT im Sektor gerader sowie ungerader innerer Parität bis zur $\mathcal{O}(q^4)$. Die WZW-Wirkung, welche den Einfluss der axialen abelschen Anomalie bezogen auf die ChPT widerspiegelt, wurde analysiert. Danach wurde die Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ aus Ref. [23] detailliert studiert¹. $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ enthält in ihrer $\text{SU}(3)$ -Formulierung 23 LECs, klassifiziert nach fünf Reaktionstypen: $\phi+2\zeta$, $3\phi+\zeta$, $3\phi+2\zeta$, 5ϕ und $5\phi+\zeta$, wobei ϕ die pseudoskalaren Mesonen (ϕ , K , η) bezeichnet und ζ für ein externes Feld steht². Es ist herausgearbeitet worden, bei welchen Prozessen und in welchen Kombinationen die jeweiligen LECs auftreten. Daraufhin wurden, unter Verwendung des VMD-Modells sowie experimenteller Daten, so viele LECs wie möglich abgeschätzt bzw. angepasst. Hierfür ist zuerst die Vorgehensweise einer konsistenten Rechnung im Sektor ungerader innerer Parität bis zur chiralen $\mathcal{O}(q^6)$ studiert worden, und es folgte als Anwendung die Berechnung von insgesamt vierzehn Prozessen. Zuerst sind die Amplituden, dann Wirkungsquerschnitte, Zerfallsbreiten, Formfaktoren und *slope*-Parameter berechnet worden. Mit Hilfe experimenteller Daten ließen sich die LECs anpassen. Hier-

¹Die Konstruktion der allgemeinsten effektiven Lagrangedichte der $\mathcal{O}(q^6)$ in dem Sektor ungerader innerer Parität wurde von mehreren Autoren vorgenommen [23, 24, 39, 40, 41, 42].

²Der Reaktionstyp $5\phi+\zeta$ ist wegen seiner aufwendigen Kinematik und fehlender sowie auch in Zukunft nicht zu erwartender, experimenteller Information in dieser Arbeit nicht betrachtet worden.

Prozess	Experimentelle Daten	numerischer Wert [10^{-3} GeV^{-2}]
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	Zerfallsbreite [57]	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$
$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	Zerfallsbreite [4]	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_9^{6,\epsilon} = +0.04 \pm 0.07$
$\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$	(Zerfallsbreite und <i>slope</i> -Parameter [4])	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_{19}^{6,\epsilon} = -1.0 \text{ (VMD)}$
$\eta \rightarrow \gamma e^+ e^-$	(Zerfallsbreite und <i>slope</i> -Parameter [4])	$L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$ $L_9^{6,\epsilon} = +0.04 \pm 0.07$ $L_{19}^{6,\epsilon} = -1.0 \text{ (VMD)}$
$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$	Formfaktor [4]	$L_8^{6,\epsilon} = +5.6 \pm 4.4$
$K^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$	Formfaktor [71]	$L_3^{6,\epsilon} = -0.01 \pm 0.24$ $L_8^{6,\epsilon} = -0.2 \pm 0.3$
$\pi^- e^- \rightarrow \pi^- e^- \pi^0$	Wirkungsquerschnitt [77]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5 \text{ (VMD)}$ $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5 \text{ (VMD)}$
$\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$	Zerfallsbreite [4] und Photonenergiespektrum [74]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $k_{27} = +0.61 \pm 0.12$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5 \text{ (VMD)}$ $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5 \text{ (VMD)}$
$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu$	Formfaktor [80]	$k_{56} = -2.32 \pm 1.30$ $k_{15} = -0.21 \pm 0.25$ $L_{13}^{6,\epsilon} = -0.5 \text{ (VMD)}$ $L_{14}^{6,\epsilon} = +1.5 \text{ (VMD)}$

Tabelle 6.1: Gezeigt sind die berechneten Prozesse mit den zur Anpassung der LECs verwendeten experimentellen Daten und die abgeschätzten bzw. angepassten, numerischen Werte.

bei stellte sich heraus, dass die LECs bei unterschiedlichen Prozessen in den gleichen Linearkombinationen auftraten, so dass eine sukzessive Anpassung möglich war. Ein Überblick der zur Anpassung der LECs betrachteten Prozesse zeigt die Tabelle 6.1. In der ersten Spalte ist der physikalische Prozess, in der zweiten Spalte die experimentellen Daten und in der letzten Spalte die abgeschätzten bzw. angepassten, numerischen Werte der LECs angegeben. Standen keine experimentellen Daten zur Verfügung, wurden, falls es für sinnvoll erachtet wurde, trotzdem physikalische Observablen berechnet³. Des Weiteren wurden die Ergebnisse diskutiert und Unterschiede bzw. Übereinstimmungen mit anderen Rechnungen herausgearbeitet. Alles zusammengekommen, d.h. die berechneten Prozesse, die erhaltenen Ergebnissen sowie der Vergleich mit anderen Rechnungen sind detailliert im fünften Kapitel angegeben.

Als Fazit ergab sich ein umfassender Einblick in den Sektor ungerader innerer Parität bis zur chiralen $\mathcal{O}(q^6)$. Es konnten dreizehn LECs angepasst werden. Das zur Abschätzung der dynamischen LECs verwendete VMD-Modell erwies sich als glaubwürdig. Um jedoch einerseits die Fehler der angepassten numerischen Werte der LECs minimieren und andererseits den Gültigkeitsbereich des verwendeten Modells ausloten zu können, müssten weitere detaillierte Experimente folgen, die den anomalen Sektor testen. Auf theoretischer Seite wäre eine eindeutige Zuordnung zwischen den unterschiedlichen Formulierungen der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ wünschenswert, was bereits in Bearbeitung ist [97]. Zu guter Letzt würde man sich auf einer längerfristigen Skala die Vorhersage der LECs im Rahmen der QCD erhoffen, etwa mit Hilfe von Gittermethoden⁴.

³Zusammenfassend gezeigt in Abschnitt 5.5. durch die Tabellen 5.6 und 5.7.

⁴Die aktuellsten Informationen hierzu findet man z.B. in Ref. [98].

Anhang A

SU(3) und Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt sind die Eigenschaften der Gruppe SU(3) und in Anlehnung an Ref. [99] Beispiele von Homotopiegruppen angegeben.

- Die Generatoren der Gruppe SU(3) bezeichnet man als Gell-Mann Matrizen gegeben durch

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(A.1)

Sei $\kappa_i \equiv \frac{1}{2}\lambda_i$, dann folgt

$$\kappa_i^\dagger = \kappa_i, \quad (\text{A.2})$$

$$\det \kappa_i = 0, \quad (i = 1, \dots, 7), \quad \det \kappa_8 = -\frac{1}{12\sqrt{3}}, \quad (\text{A.3})$$

$$[\kappa_i, \kappa_j] = if_{ijk} \kappa_k, \quad \{\kappa_i, \kappa_j\} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk}\kappa_k, \quad (\text{A.4})$$

wobei f_{ijk} bzw. d_{ijk} die total antisymmetrischen bzw. symmetrischen Strukturkonstanten der Gruppe $\text{SU}(3)$ bezeichnen.

• Im Folgenden bezeichnet Z die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition als Gruppenmultiplikation. Z_n steht für die Gruppe der ganzen Zahlen modulo n . Die triviale Gruppe wird mit 0 bezeichnet. $\pi_n(M)$ steht für die Homotopiegruppe der Mannigfaltigkeit M und S für Sphären.

Sphären:

$$\pi_n(S_m) = 0 \quad \text{für } n < m, \quad (\text{A.5})$$

$$\pi_n(S_n) = Z, \quad (\text{A.6})$$

$$\pi_{n+1}(S_n) = Z_2 \quad \text{außer } \pi_2(S_1) = 0, \quad \pi_3(S_2) = Z, \quad (\text{A.7})$$

$$\pi_{n+2}(S_n) = Z_2 \quad \text{außer } \pi_2(S_1) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Lie-Gruppen:

$$\pi_1(G) = Z, \quad G = \text{U}(1) \quad (\text{A.9})$$

$$\pi_1(G) = Z_2, \quad G = \text{SO}(n) \quad (n \geq 3), \quad (\text{A.10})$$

$$\pi_1(G) = 0, \quad G = \text{andere einfach zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe.} \quad (\text{A.11})$$

$$\pi_2(G) = 0, \quad G = \text{beliebige zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe}, \quad (\text{A.12})$$

$$\pi_3(G) = \mathbb{Z}, \quad G = \text{beliebige einfach zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe}. \quad (\text{A.13})$$

$$\pi_4(G) = \mathbb{Z}_2, \quad G = \text{SU}(2), \text{SO}(3), \text{SO}(5), \quad (\text{A.14})$$

$$\pi_4(G) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad G = \text{SO}(4), \quad (\text{A.15})$$

$$\pi_4(G) = 0, \quad G = \text{SU}(n) \quad (n \geq 3), \text{SO}(n) \quad (n \geq 6). \quad (\text{A.16})$$

Nebenklassen:

Für jede Lie-Gruppe G und Lie-Untergruppe $H \subset G$ gilt

$$\pi_2(G/H) = \ker \left\{ \pi_1(H) \mapsto \pi_1(G) \right\}. \quad (\text{A.17})$$

Als speziellen Fall

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H), \quad \text{für } \pi_1(G) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Anhang B

Diagrammatik

Dieser Abschnitt zeigt unter Verwendung des Weinberg'schen Zählschemas [15] die beitragenden Diagrammklassen für die jeweiligen Reaktionstypen $\phi + 2\gamma^*$, $\phi + \gamma^*W$, $3\phi + \gamma^*$, $3\phi + W$, $3\phi + 2\gamma^*$ und 5ϕ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$. Zur Erzeugung der möglichen Diagrammklassen wurde *Feyn Arts* [100] verwendet. Die durchgezogenen Linien in den folgenden Abbildungen stehen für die Goldstone-Bosonen $\phi = (\pi, K, \eta)$, die gestrichelten Linien für die W -Bosonen und die Schlangenlinien für die Photonen γ^* . Die jeweiligen Ordnungen der Vertices sind nicht explizit angegeben, weswegen hier auch von Diagrammklassen gesprochen wird. Die Angabe der explizit auftretenden Vertices ist in Abschnitt 4.1.1 angegeben.

-
- Diagrammklassen:

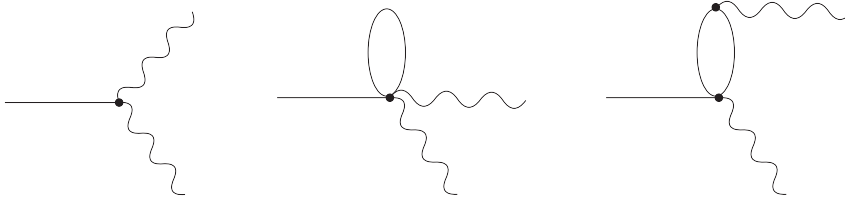


Abbildung B.1: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp $\phi + 2\gamma^*$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

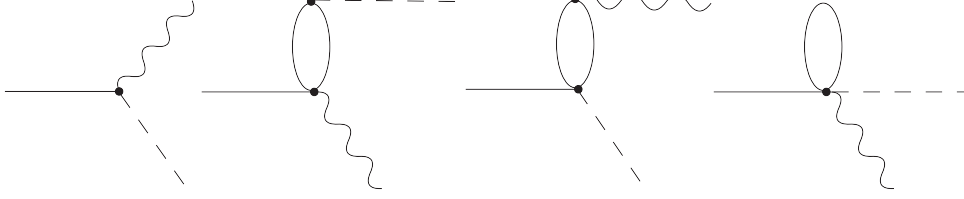


Abbildung B.2: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp $\phi + \gamma^* W$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

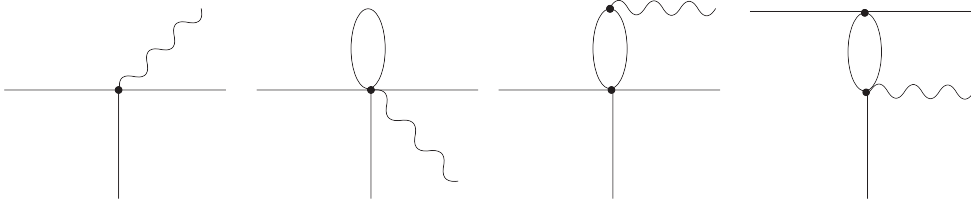


Abbildung B.3: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp $3\phi + \gamma^*$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

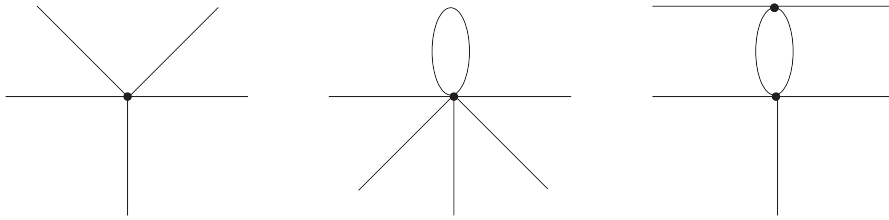


Abbildung B.4: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp 5ϕ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

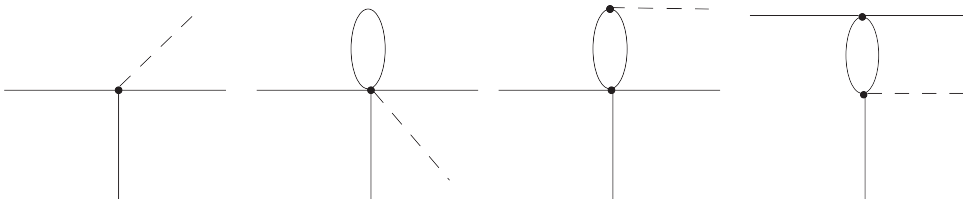


Abbildung B.5: Die beitragenden Diagrammklassen für den Prozess $3\phi + W$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

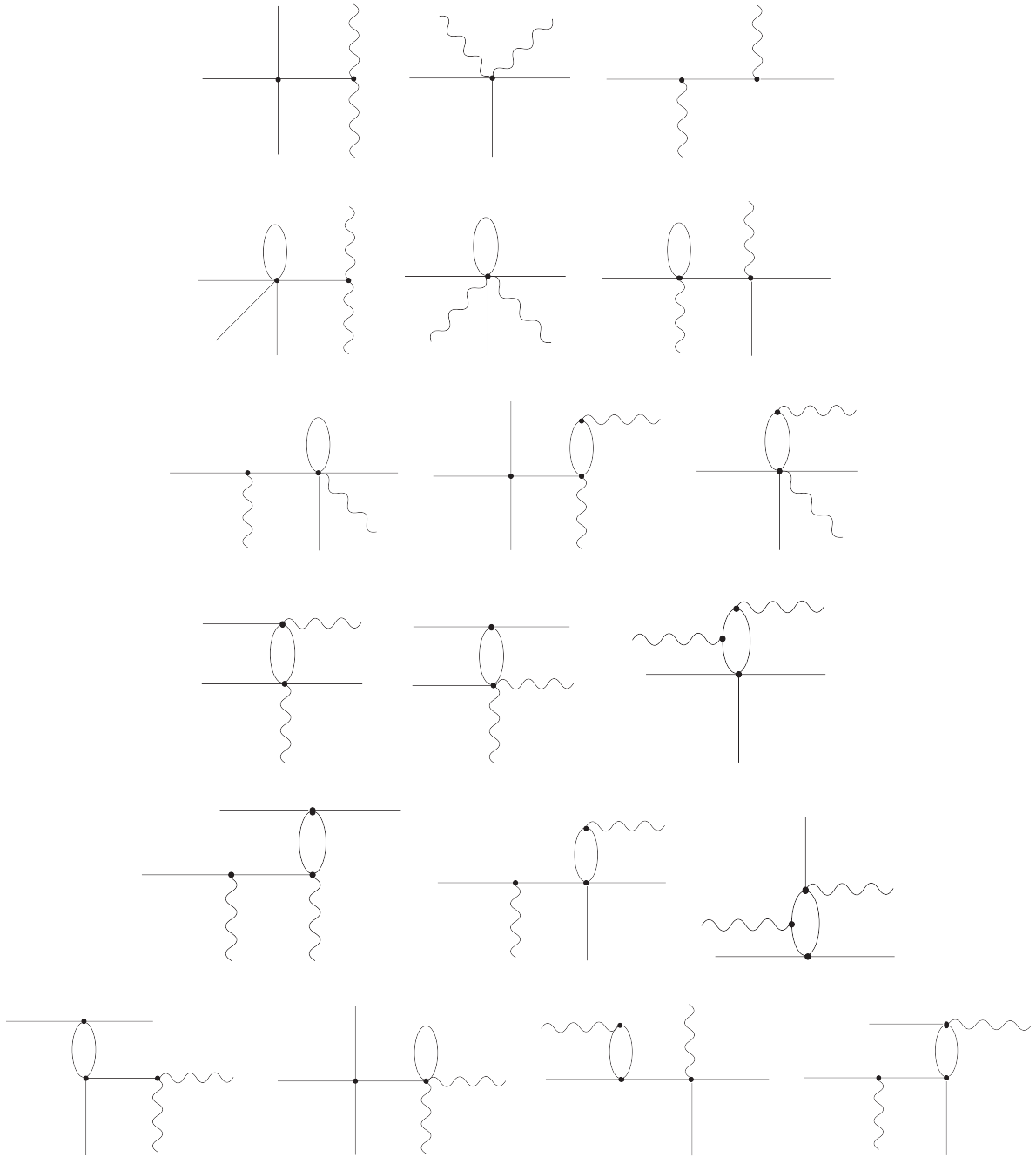


Abbildung B.6: Die beitragenden Diagrammklassen für den Reaktionstyp $3\phi + 2\gamma^*$ bis zur $\mathcal{O}(q^6)$.

Anhang C

Integrale

In diesem Abschnitt ist die Definition der in dieser Arbeit auftretenden Integrale angegeben. Hierbei bezeichnet $\mu = m_\rho = 0.77 \text{ GeV}$ die Renormierungsskala eingeführt in dimensionaler Regularisierung¹. Des Weiteren verwenden wir das in der mesonischen ChPT standardisierte Subtraktionsschema, das so genannte $\overline{MS}$ -Abzugsschema [101].

• Skalare Integrale:

$$R = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1], \quad (\text{C.1})$$

$$A_0(m^2) \equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0^+} = \frac{m^2}{16\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] + O(n-4), \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} B_0(q^2, m^2) &\equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i0^+][(k+q)^2 - m^2 + i0^+]} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[R + 1 + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + J^{(0)}\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

mit

$$J^{(k)}(x) := \int_0^1 dy y^k \ln[1 + x(y^2 - y)] \quad (\text{C.4})$$

¹Eine Einführung in dimensionaler Regularisierung findet man z.b. in Ref. [25]

$$\tilde{B}_0(q^2, m^2, \tilde{m}^2) \equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i0^+][(k+q)^2 - \tilde{m}^2 + i0^+]}. \quad (\text{C.5})$$

• Tensorielle Integrale:

$$q^\mu B_1(q^2, m^2) \equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2 + i0^+][(k+q)^2 - m^2 + i0^+]}, \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} & q^\mu q^\nu B_{20}(q^2, m^2) + g^{\mu\nu} q^2 B_{21}(q^2, m^2) \\ & \equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2 + i0^+][(k+q)^2 - m^2 + i0^+]}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} & q^\mu q^\nu \tilde{B}_{20}(q^2, m^2, \tilde{m}^2) + g^{\mu\nu} q^2 \tilde{B}_{21}(q^2, m^2, \tilde{m}^2) \\ & \equiv i\mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2 + i0^+][(k+q)^2 - \tilde{m}^2 + i0^+]}, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} B_1(q^2, m^2) &= -\frac{1}{2}B_0(q^2, m^2), \\ B_{20}(q^2, m^2) &= \frac{A_0(m^2)}{3q^2} + \frac{B_0(q^2, m^2)(q^2 - m^2)}{3q^2} - \frac{1}{288\pi^2} + \frac{m^2}{48\pi^2 q^2}, \\ q^2 B_{21}(q^2, m^2) &= \frac{A_0(m^2)}{6} + \frac{B_0(q^2, m^2)(4m^2 - q^2)}{12} + \frac{q^2}{288\pi^2} - \frac{m^2}{48\pi^2}, \\ q^2 \tilde{B}_{21}(q^2, m^2, \tilde{m}^2) &= \frac{A_0(m^2) + A_0(\tilde{m}^2)}{12} + \frac{(m^2 - \tilde{m}^2)[A_0(m^2) - A_0(\tilde{m}^2)]}{12q^2} \\ &\quad - \frac{m^2 + \tilde{m}^2}{96\pi^2} + \frac{q^2}{288\pi^2} - \tilde{B}_0(q^2, m^2, \tilde{m}^2) \\ &\quad \times \left[\frac{q^2}{12} - \frac{(m^2 + \tilde{m}^2)}{6} + \frac{(m^2 - \tilde{m}^2)^2}{12q^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

• Definitionen:

$$I[m^2] := A_0(m^2), \quad (C.10)$$

$$A[q^2, m^2] := q^2 B_{21}(q^2, m^2), \quad (C.11)$$

$$C[q^2, m^2, \tilde{m}^2] := q^2 \tilde{B}_{21}(q^2, m^2, \tilde{m}^2) \quad (C.12)$$

Anhang D

Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten

In diesem Abschnitt sind die Definitionen der Zerfallsbreiten und Wirkungsquerschnitte angegeben. Des Weiteren sind als Beispiele die Phasenraumfunktionen R_2 und R_3 berechnet.

-
- Zerfallsrate und Wirkungsquerschnitt:

Sei

$$R_n(m^2; m_1^2, \dots, m_n^2) \equiv \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i} \delta^4(p - \sum_{i=1}^n p_i), \quad (D.1)$$

die Definition der Phasenraumfunktion, so ist die Zerfallsrate ($0 \rightarrow 1 \dots n$) gegeben durch

$$\Gamma = \frac{S}{2m(2\pi)^{3n-4}} R_n(m^2; m_1^2, \dots, m_n^2) \sum \overline{|\mathbf{M}_{0 \rightarrow 1, \dots, n}|^2}, \quad (D.2)$$

und der Wirkungsquerschnitt ($a b \rightarrow 1 \dots n$) gegeben durch

$$\sigma = \frac{S}{2(2\pi)^{3n-4} \sqrt{\lambda[s, m_a^2, m_b^2]}} R_n(s; m_1^2, \dots, m_n^2) \sum \overline{|\mathbf{M}_{ab \rightarrow 1 \dots n}|^2}. \quad (D.3)$$

Hierbei bezeichnet S den Faktor $1/k!$ für jede Gruppe k identischer Teilchen im Endzustand.

-
- Beispiel 1:

$$\mathbf{P} \rightarrow 1 + 2,$$

$$R_2(\mathbf{P}^2; m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \delta^4(\mathbf{P} - p_1 - p_2) = \frac{\pi \sqrt{\lambda[\mathbf{P}^2, m_1^2, m_2^2]}}{2\mathbf{P}^2}. \quad (\text{D.4})$$

Als Spezialfall erhält man für

$$m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad R_2(\mathbf{P}^2; m^2, m^2) = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\mathbf{P}^2}}. \quad (\text{D.5})$$

- Beispiel 2:

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + 3,$$

mit den Mandelstamvariablen

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t_1 = (p_a - p_1)^2, \quad s_2 = (p_2 + p_3)^2, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} R_3(s; m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} \delta^4(\sqrt{s} - p_1 - p_2 - p_3) \\ &= \int ds_2 \left[\int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_{23}}{2E_{23}} \delta^4(\sqrt{s} - p_1 - p_{23}) \right] \left[\int \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} \delta^4(p_{23} - p_2 - p_3) \right] \\ &= \int ds_2 dt_1 \frac{\pi^2}{4s_2} \sqrt{\frac{\lambda[s_2, m_2^2, m_3^2]}{\lambda[s, m_a^2, m_b^2]}}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Anhang E

Kinematik

Dieser Abschnitt zeigt weiterführende Informationen zu dem verallgemeinerten Prozess $e^- \phi_1 \rightarrow e^- \phi_2 \phi_3$, welcher in der Einphotonenaustauschnäherung die $\gamma \phi_1 \rightarrow \phi_2 \phi_3$ -Amplituden testen kann (siehe Abb. E.1 (a)). Hierbei wird ein einlaufendes ϕ Meson inelastisch an einem Elektrontarget gestreut und produziert im Endzustand ein zusätzliches ϕ Meson

$$e^-(p_a) + \phi_1(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \phi_2(p_2) + \phi_3(p_3), \quad (\text{E.1})$$

wobei ϕ_i für die Goldstone-Bosonen (π , K , η) steht. Die Kinematik ist in Abb. E.1 (b) gezeigt. Des Weiteren ist die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes σ für die $\gamma K^- \rightarrow K^- \pi^0$ -Amplitude niedrigster Ordnung als Beispiel gezeigt.

-
- Die Definition der Mandelstamvariablen für den Prozess

$$e^-(p_a) + \phi_1(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \phi_2(p_2) + \phi_3(p_3), \quad (\text{E.2})$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\ t_1 &= (p_a - p_1)^2, \\ u_2 &= (p_b - p_2)^2, \\ s_2 &= (p_2 + p_3)^2, \\ t_2 &= (p_b - p_3)^2, \\ s &= (p_a + p_b)^2. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

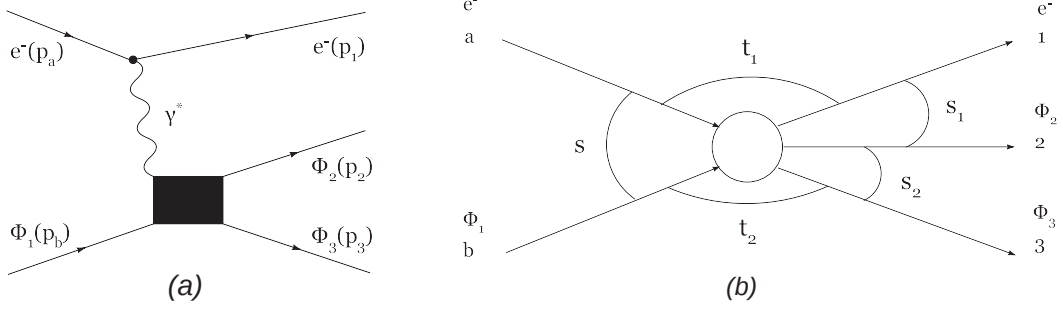


Abbildung E.1: Der Prozess $e^-(p_a) + \phi_1(p_b) \rightarrow e^-(p_1) + \phi_2(p_2) + \phi_3(p_3)$ in Einphotonenaustauschnäherung bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ (a) und die dazugehörige Kinematik (b).

- Die Kontraktion des standardisierten leptonischen Tensors ($2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}$), bekannt aus der Einphotonenaustauschnäherung mit dem hadronischen Tensor $\mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu$, ($\mathcal{G}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_b^\nu p_2^\alpha p_3^\beta$), ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu = & 2 \left\{ 2p_1 \cdot p_b (p_2^2 p_3^2 - (p_2 \cdot p_3)^2) p_a \cdot p_b \right. \\
 & + 2(p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot p_b - p_2 \cdot p_b p_3^2) (p_1 \cdot p_b p_2 \cdot p_a + p_1 \cdot p_2 p_a \cdot p_b) \\
 & + 2(p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_b - p_2^2 p_3 \cdot p_b) (p_1 \cdot p_b p_3 \cdot p_a + p_1 \cdot p_3 p_a \cdot p_b) \\
 & + 2p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_a (p_2^2 p_b^2 - (p_2 \cdot p_b)^2) \\
 & + 2(p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_a + p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_a) (p_2 \cdot p_b p_3 \cdot p_b - p_2 \cdot p_3 p_b^2) \\
 & + 2p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_a (p_3^2 p_b^2 - (p_3 \cdot p_b)^2) + (t_1/2 + 2p_1 \cdot p_a) \\
 & \left. \times (p_b^2 (p_2 \cdot p_3)^2 - 2p_2 \cdot p_b p_3 \cdot p_b p_2 \cdot p_3 + p_2^2 (p_3 \cdot p_b)^2 + p_3^2 (p_2 \cdot p_b)^2 - p_2^2 p_3^2 p_b^2) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{E.4}$$

- Die Gleichungen für die kinematischen Grenzen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
t_1^\pm[s_2] &= m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s} \left[(s + m_a^2 - m_b^2)(s - s_2 + m_1^2) \mp \xi(s_2) \right], \\
s_2^\pm[t_1] &= s + m_1^2 - \frac{1}{2m_a^2} \left[(s + m_a^2 - m_b^2)(m_a^2 + m_1^2 - t_1) \mp \zeta(t_1) \right],
\end{aligned} \tag{E.5}$$

mit

$$\begin{aligned}
\xi(s_2) &= \sqrt{\lambda[s, m_a^2, m_b^2] \lambda[s, s_2, m_1^2]}, \\
\zeta(t_1) &= \sqrt{\lambda[s, m_a^2, m_b^2] \lambda[t_1, m_a^2, m_1^2]}, \\
\lambda[x, y, z] &:= (x - y - z)^2 - 4yz.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

• Im Folgenden ist die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitt σ für den Prozess $K^- e^- \rightarrow e^- \pi^0 K^-$ in niedrigster Ordnung gezeigt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist mit $m_e = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{ds_2 dt_1} &= \\
&\frac{e^2 \sqrt{\lambda[s_2, m_\pi^2, m_K^2]}}{1024\pi^4 s_2 t_1^2 \lambda[s, 0, m_K^2]} \int d\Omega_{\phi\phi} |\mathbf{F}_{\pi\mathbf{k}\mathbf{k}}|^2 (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

In niedrigster Ordnung ist

$$|\mathbf{F}_{\pi\mathbf{k}\mathbf{k}}|^2 = \left(\frac{e}{4\pi^2 F^3} \right)^2, \tag{E.8}$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{ds_2 dt_1} &= \left(\frac{e}{8\pi} \right)^4 \frac{\sqrt{m_K^4 - 2(m_\pi^2 + s_2)m_K^2 + (m_\pi^2 - s_2)^2}}{4\pi^4 F^6 (m_K^2 - s)^2 s_2 t_1^2} \\
&\times \int d\Omega_{\phi\phi} (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu.
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Für die Integration

$$\int d\Omega_{\phi\phi} (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu, \quad (\text{E.10})$$

schreibt man die Viererimpulse gemäß

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

um, wählt Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} p_x &= |\vec{p}| \sin \theta \cos \phi, \\ p_y &= |\vec{p}| \sin \theta \sin \phi, \\ p_z &= |\vec{p}| \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

und integriert über das Ruhesystem der Mesonen. Der erhaltene Ausdruck wird zurücktransformiert auf die Mandelstamvariablen und man erhält

$$\begin{aligned} &\int d\Omega_{\phi\phi} (2p_a^\mu p_1^\nu + 2p_1^\mu p_a^\nu + t_1 g^{\mu\nu}) \mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu \\ &= -\frac{\pi t_1}{6s_2} \left[\{m_K^4 - 2(s + t_1)m_K^2 + 2s^2 + (s_2 - t_1)^2 - 2s(s_2 - t_1)\} \right. \\ &\quad \left. \times \{m_K^4 - 2(m_\pi^2 + s_2)m_K^2 + (m_\pi^2 - s_2)^2\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich hieraus zu

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds_2 dt_1} &= -\left(\frac{e}{8\pi}\right)^4 \frac{1}{24\pi^3 F^6 (m_K^2 - s)^2 s_2^2 t_1} \\ &\times \left\{ \left[m_K^4 - 2(m_\pi^2 + s_2)m_K^2 + (m_\pi^2 - s_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[m_K^4 - 2(s + t_1)m_K^2 + 2s^2 + (s_2 - t_1)^2 - 2s(s_2 - t_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Für eine Strahlenergie von 300 GeV und einem experimentellen Schnitt von $t_1^s = -0.001 \text{ GeV}^2$ erhält man $s \simeq 0.55 \text{ GeV}^2$ und unter Verwendung der

kinematischen Grenzen den totalen Wirkungsquerschnitt zu

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\left(\frac{e}{8\pi}\right)^4 \int_{-0.0864 \text{ GeV}^2}^{-0.001 \text{ GeV}^2} dt_1 \int_{0.3952 \text{ GeV}^2}^{(0.55+1.79 t_1) \text{ GeV}^2} ds_2 \\
&\frac{1}{24\pi^3 F^6 (m_K^2 - s)^2 s_2^2 t_1} \\
&\times \left\{ \left[m_K^4 - 2(m_\pi^2 + s_2)m_K^2 + (m_\pi^2 - s_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\times \left. \left[m_K^4 - 2(s + t_1)m_K^2 + 2s^2 + (s_2 - t_1)^2 - 2s(s_2 - t_1) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Für $m_K = 0.4936 \text{ GeV}$, $m_\pi = 0.135 \text{ GeV}$ und $F = 92.4 \text{ MeV}$ ergibt sich

$$\sigma \simeq 4.7 \times 10^{-7} \text{ } 0.389 \times 10^6 \text{ nb} \simeq 0.18 \text{ nb}. \tag{E.16}$$

Anhang F

Prozesse

Dieser Abschnitt zeigt weiterführende Informationen der Prozesse $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$ bzw. $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi\pi$ aus Abschnitt 5.3.1 bzw. 5.3.2. Hierbei werden insbesondere die Zusammenhänge zwischen den kinematischen Variablen sowie die vollständigen Amplituden angegeben.

-
- Der Zusammenhang zwischen den kinematischen Variablen $s_\pi, s_\gamma, \beta, \theta, \Phi$ und K_s, K_a, Q_s, Q_a für den Prozess

$$\eta(p) \rightarrow \pi^+(k_1) + \pi^-(k_2) + \gamma(q_1) + \gamma(q_2), \quad (\text{F.1})$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} K_s \cdot K_s &= s_\pi, \\ Q_s \cdot Q_s &= s_\gamma, \\ K_s \cdot Q_s &= \frac{1}{2}(m_\eta^2 - s_\pi - s_\gamma), \\ K_s \cdot Q_a &= \sqrt{(K_s \cdot Q_s)^2 - s_\pi s_\gamma} \cos \theta, \\ K_a \cdot Q_s &= \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s_\pi}} \sqrt{(K_s \cdot Q_s)^2 - s_\pi s_\gamma} \cos \beta, \\ K_a \cdot Q_a &= \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s_\pi}} \left(K_s \cdot Q_s \cos \beta \cos \theta - \sqrt{s_\pi s_\gamma} \sin \beta \sin \theta \cos \Phi \right), \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

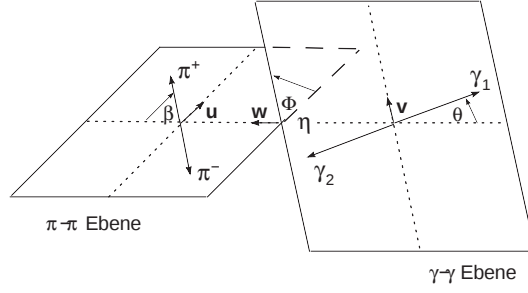


Abbildung F.1: Gezeigt ist die Kinematik für den Zerfall $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma\gamma$.

mit

$$\begin{aligned}
 K_s &= k_1 + k_2, \\
 K_a &= k_1 - k_2, \\
 Q_s &= q_1 + q_2, \\
 Q_a &= q_1 - q_2,
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 k_1 \cdot k_2 &= \frac{1}{2} (K_s \cdot K_s - 2m_\pi^2), \\
 q_1 \cdot q_2 &= \frac{1}{2} Q_s \cdot Q_s, \\
 k_1 \cdot q_1 &= \frac{1}{4} (K_s \cdot Q_s + K_a \cdot Q_s + K_s \cdot Q_a + K_a \cdot Q_a), \\
 k_2 \cdot q_1 &= \frac{1}{4} (K_s \cdot Q_s - K_a \cdot Q_s + K_s \cdot Q_a - K_a \cdot Q_a), \\
 k_1 \cdot q_2 &= \frac{1}{4} (K_s \cdot Q_s + K_a \cdot Q_s - K_s \cdot Q_a - K_a \cdot Q_a), \\
 k_2 \cdot q_2 &= \frac{1}{4} (K_s \cdot Q_s - K_a \cdot Q_s - K_s \cdot Q_a + K_a \cdot Q_a).
 \end{aligned} \tag{F.4}$$

s_π ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie der Pionen und s_γ das Quadrat der Schwerpunktsenergie der Photonen. Die Winkel β , θ und Φ sind in Abb. F.1 definiert.

-
- Die invariante Amplitude bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{4\pi^2\sqrt{3}F^3} \left(\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6} \right), \quad (\text{F.5})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} = & \left[\left(\frac{m_\pi^2}{3(s_\gamma - m_\eta^2)} - \frac{\Delta m_K^2}{3(s_\gamma - m_{\pi^0}^2)} \right) q_1^\sigma q_2^\rho - p^\sigma (q_1 - q_2)^\rho \right] \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \\ & + \left[\left(\frac{k_{1\beta} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_2} + \frac{k_1^\sigma k_{2\beta}}{k_2 \cdot q_2} \right) \epsilon_{\sigma\rho\tau\alpha} p^\rho q_1^\tau \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_{1\alpha} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_1} + \frac{k_1^\sigma k_{2\alpha}}{k_2 \cdot q_1} \right) \epsilon_{\sigma\rho\tau\beta} p^\rho q_2^\tau \right], \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6} = & \frac{m_\pi^2 (C_3 m_\pi^2 + C_4 m_K^2)}{3(s_\gamma - m_\eta^2)} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} q_1^\sigma q_2^\rho \\ & + 256\pi^2 \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} \left\{ 4q_1^\sigma q_2^\rho \left[L_{10}^{6,\epsilon} m_\pi^2 - 3L_{11}^{6,\epsilon} (m_\eta^2 - m_\pi^2) + 4L_{23}^{6,\epsilon} (k_1 + k_2) \cdot p \right] \right. \\ & \left. + (q_1^\rho q_2 - q_2^\rho q_1) \cdot \left[p^\sigma (L_{22}^{6,\epsilon} - L_{20}^{6,\epsilon}) (k_1 + k_2) + 2L_{22}^{6,\epsilon} (k_1 + k_2)^\sigma p \right] \right\} \\ & + 256\pi^2 q_1^\rho q_2^\tau \left\{ \left[2L_{22}^{6,\epsilon} (k_1 + k_2)^\sigma p_\beta + (2L_{22}^{6,\epsilon} - L_{20}^{6,\epsilon}) (k_1 + k_2)_{\beta} p^\sigma \right] \epsilon_{\sigma\rho\tau\alpha} \right. \\ & \left. - \left[2L_{22}^{6,\epsilon} (k_1 + k_2)^\sigma p_\alpha + (2L_{22}^{6,\epsilon} - L_{20}^{6,\epsilon}) (k_1 + k_2)_\alpha p^\sigma \right] \epsilon_{\sigma\rho\tau\beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +512\pi^2 \left\{ \left[k_{1\beta} k_2^\sigma \left(\frac{\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 - \mathbf{k}_{27} (m_\eta^2 - m_\pi^2)}{k_1 \cdot q_2} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2 \left(L_{13}^{6,\epsilon} (k_1 \cdot k_2 + (k_1 + k_2) \cdot p - (k_2 + p) \cdot q_2) + L_{14}^{6,\epsilon} (k_1 - q_2) \cdot k_2 \right)}{k_1 \cdot q_2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + k_1^\sigma k_{2\beta} \left(\frac{\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 - \mathbf{k}_{27} (m_\eta^2 - m_\pi^2)}{k_2 \cdot q_2} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2 \left(L_{13}^{6,\epsilon} (k_1 \cdot k_2 + (k_1 + k_2) \cdot p - (k_1 + p) \cdot q_2) + L_{14}^{6,\epsilon} (k_2 - q_2) \cdot k_1 \right)}{k_2 \cdot q_2} \right) \right] \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p^\varrho q_1^\tau \right. \\
& \quad \left. + \left[k_{1\alpha} k_2^\sigma \left(\frac{\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 - \mathbf{k}_{27} (m_\eta^2 - m_\pi^2)}{k_1 \cdot q_1} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2 \left(L_{13}^{6,\epsilon} (k_1 \cdot k_2 + (k_1 + k_2) \cdot p - (k_2 + p) \cdot q_1) + L_{14}^{6,\epsilon} (k_1 - q_1) \cdot k_2 \right)}{k_1 \cdot q_1} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + k_1^\sigma k_{2\alpha} \left(\frac{\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 - \mathbf{k}_{27} (m_\eta^2 - m_\pi^2)}{k_2 \cdot q_1} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{2 \left[L_{13}^{6,\epsilon} (k_1 \cdot k_2 + (k_1 + k_2) \cdot p - (k_1 + p) \cdot q_1) + L_{14}^{6,\epsilon} (k_2 - q_1) \cdot k_1 \right]}{k_2 \cdot q_1} \right] \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p^\varrho q_2^\tau \right\} \\
& - \frac{2L_5 m_\pi^2 + 3L_4 (m_\eta^2 + m_\pi^2)}{F_0^2} \left[\left(\frac{k_{1\beta} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_2} + \frac{k_1^\sigma k_{2\beta}}{k_2 \cdot q_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p^\varrho q_1^\tau \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{k_{1\alpha} k_2^\sigma}{k_1 \cdot q_1} + \frac{k_1^\sigma k_{2\alpha}}{k_2 \cdot q_1} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p^\varrho q_2^\tau \right] + \frac{\epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} q_1^\sigma q_2^\varrho}{3(s_\gamma - m_\eta^2) F_0^2} \\
& \times \left\{ 8 \left[(12L_1 + 2L_3 - 12L_4 - L_5 + 15L_6 - 12L_7) m_\eta^2 - (L_5 - 3(L_6 + 4L_7) - 8L_8) m_\pi^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (k_1 + k_2) \cdot (q_1 + q_2) (-12L_1 - 2L_3 + 6L_4 + L_5) \right] m_\pi^2 + 8(6L_1 + L_3) s_\pi^2 \right. \\
& \quad \left. - 32k_1 \cdot (q_1 + q_2) k_2 \cdot (q_1 + q_2) (3L_2 + L_3) + 4 \left[-2(6L_1 + L_3 - 3L_4) m_\eta^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (4(6L_1 + L_3 - 3L_4) - L_5) m_\pi^2 + 6(k_1 + k_2) \cdot (q_1 + q_2) (2L_1 - L_2) \right] s_\pi \right\}, \quad (\text{F.7})
\end{aligned}$$

Durch die in Abschnitt 5.3.2 gemachten Aussagen bezogen auf die Korrekturen der $\mathcal{O}(q^6)$ sind die Schleifenbeiträge gegeben durch Anwendung des Niederenergiethorems auf die Beiträge der $\mathcal{O}(q^6)$ des Prozesses $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ angegeben in Abschnitt 5.2.1 durch die Gl. (5.44) und (5.45). Des Weiteren verwenden wir das η - η' Mischungsschema, dessen Details in Anhang G gezeigt sind.

- Die Amplitude für den Prozess

$$\gamma(p_a) + \gamma(p_b) \rightarrow \pi^-(p_1) + \pi^0(p_2) + \pi^+(p_3), \quad (\text{F.8})$$

mit den Mandelstamvariablen

$$\begin{aligned} s_1 &= (p_1 + p_2)^2, \\ t_1 &= (p_a - p_1)^2, \\ s_2 &= (p_2 + p_3)^2, \\ t_2 &= (p_b - p_3)^2, \\ s &= (p_a + p_b)^2, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

ist bis zur $\mathcal{O}(q^6)$ gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi^3} \left[\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} + \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6} \right], \quad (\text{F.10})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^4} &= \frac{7m_\pi^2 + 2s - 3(s_1 + s_2)}{3(s - m_\pi^2)} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} p_a^\sigma p_b^\varrho \\ &+ \frac{1}{3} \left[3(p_1 + p_3)^\sigma (p_a - p_b)^\varrho + 4p_a^\sigma p_b^\varrho \right] \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} \\ &+ 2 \left[\left(\frac{p_{1\beta} p_2^\sigma p_3^\varrho}{s - s_2 + t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\varrho p_{3\beta}}{m_\pi^2 - t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p_a^\tau \right. \\ &\left. + \left(\frac{p_{1\alpha} p_2^\sigma p_3^\varrho}{m_\pi^2 - t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\varrho p_{3\alpha}}{s - s_1 + t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p_b^\tau \right], \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\alpha\beta}^{q^6} = & \frac{256\pi^2 L_{22}^{6,\epsilon}}{3} \left\{ \left[(s_1 + s_2 - 2s - 2m_\pi^2) p_a^\sigma p_b^\varrho + s(p_1 + p_3)^\sigma (p_a - p_b)^\varrho \right] \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} \right. \\
& + 2 \left\{ p_a^\varrho p_b^\tau \left[\left(p_2^\sigma (p_1 + p_3)_\beta - p_{2\beta} (p_1 + p_3)^\sigma \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(p_{2\alpha} (p_1 + p_3)^\sigma - p_2^\sigma (p_1 + p_3)_\alpha \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} \right] \right\} \\
& + \frac{1024\pi^2}{3} \left\{ \left[\frac{p_{1\beta} p_2^\sigma p_3^\varrho \left(\mathbf{k}_{1314} (3m_\pi^2 - s + s_2 - t_1) - 3\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 \right)}{s - s_2 + t_1} \right. \right. \\
& - \frac{p_1^\sigma p_2^\varrho p_{3\beta} \left(\mathbf{k}_{1314} (2m_\pi^2 + t_2) - 3\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 \right)}{m_\pi^2 - t_2} \left. \right] \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p_a^\tau \\
& + \left[\frac{p_{1\alpha} p_2^\sigma p_3^\varrho \left(\mathbf{k}_{1314} (2m_\pi^2 + t_1) - 3\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 \right)}{m_\pi^2 - t_1} \right. \\
& - \frac{p_1^\sigma p_2^\varrho p_{3\alpha} \left(\mathbf{k}_{1314} (3m_\pi^2 - s + s_1 - t_2) - 3\mathbf{k}_{56} m_\pi^2 \right)}{s - s_1 + t_2} \left. \right] \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p_b^\tau \\
& - \frac{m_\pi^2 L_8^{6,\epsilon} \left[7m_\pi^2 + 2s - 3(s_1 + s_2) \right] p_a^\sigma p_b^\varrho \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho}}{3(s - m_\pi^2)} \left. \right\} + \frac{p_a^\sigma p_b^\varrho \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho}}{3(s - m_\pi^2) F_0^2} \\
& \times \left\{ 4 \left[(12L_1 + 12L_2 + 6L_3 + 21L_5 + 28L_6 + 16L_8) m_\pi^4 + 8L_6 m_K^2 m_\pi^2 \right. \right. \\
& + s m_\pi^2 (12L_1 + 12L_2 + 6L_3 + 7L_5) - s_1 m_\pi^2 (18L_1 + 9L_2 + 9L_3 + 12L_5) \\
& + 3(2L_1 + L_2 + L_3)(s_1^2 + s_2^2 - s s_1) \\
& - 3(3L_2 m_\pi^2 + 3L_3 m_\pi^2 + 4L_5 m_\pi^2 + L_2 s + L_3 s) \\
& + 2L_1(3m_\pi^2 + s - 2s_1) - 2L_3 s_1 s_2 \\
& \left. \left. + 2L_4(2(6m_\pi^2 + 2s - 3(s_1 + s_2)) m_K^2 + m_\pi^2(15m_\pi^2 + 5s - 9(s_1 + s_2))) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16(2L_4 m_K^2 + (L_4 + L_5)m_\pi^2)}{F_0^2} \left[\left(\frac{p_{1\beta} p_2^\sigma p_3^\rho}{s - s_2 + t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\beta}}{m_\pi^2 - t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} p_a^\tau \right. \\
& + \left. \left(\frac{p_{1\alpha} p_2^\sigma p_3^\rho}{m_\pi^2 - t_1} - \frac{p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\alpha}}{s - s_1 + t_2} \right) \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} p_b^\tau \right] - \frac{1}{90F_0^2} \\
& \times \left\{ 60A[t_1, m_\pi^2] p_1^\sigma p_a^\rho - 240A[2m_\pi^2 - s_1 - t_1 + t_2, m_\pi^2] p_2^\sigma p_a^\rho \right. \\
& + 60A[m_\pi^2 - s + s_1 - t_2, m_\pi^2] p_3^\sigma p_a^\rho - 60I[m_\pi^2] p_2^\sigma (p_a - p_b)^\rho \\
& - \frac{15}{2} ((2I[m_\pi^2] + 3(2m_\pi^2 - s_2)B_0[s_2, m_\pi^2]) p_1^\sigma + 12A[s_2, m_\pi^2] (p_2 - p_3)^\sigma) (p_a - p_b)^\rho \\
& - \frac{15}{2} (12I[s_1, m_\pi^2] (p_1 - p_2)^\sigma + (3(s_1 - 2m_\pi^2)B_0[s_1, m_\pi^2] - 2I[m_\pi^2]) p_3^\sigma) (p_a - p_b)^\rho \\
& - 60A[m_\pi^2 - s + s_2 - t_1, m_\pi^2] p_1^\sigma p_b^\rho + 240A[2m_\pi^2 - s_2 + t_1 - t_2, m_\pi^2] p_2^\sigma p_b^\rho \\
& - 60A[t_2, m_\pi^2] p_3^\sigma p_b^\rho + 10(I[m_\pi^2] - \frac{3}{2}(3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2)B_0[3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2, m_\pi^2]) \\
& \times (3p_2^\sigma (p_a - p_b)^\rho - 2p_a^\sigma p_b^\rho) + 6I[m_\pi^2] (18p_2^\rho - 7(p_1 + p_3)^\rho) (p_a - p_b)^\sigma \Big\} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} \\
& + \frac{p_a^\sigma p_b^\rho}{12960F_0^2\pi^2(m_\pi^2 - s)} \left\{ 5(18m_\pi^4 + 6(s_1 + s_2)m_\pi^2 - 2s^2 - 3s_1^2 - 3s_2^2 \right. \\
& - 4s_1s_2 + 4s(s_1 + s_2)) \\
& - 1440\pi^2(27m_\pi^2 + 9s - 2(5s_1 + 9s_2))A[s_1, m_\pi^2] \\
& + 2880\pi^2(3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2)A[3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2, m_\pi^2] \\
& + 24\pi^2(-60(9(3m_\pi^2 + s - 2s_1) - 10s_2)A[s_2, m_\pi^2] \\
& + 5((90m_\pi^4 + (18s - 103s_1)m_\pi^2 + s_1(28s_1 - 9s))B_0(s_1, m_\pi^2) \\
& + 2(240m_\pi^4 + (146s - 173(s_1 + s_2))m_\pi^2 + 19s^2 + 28(s_1 + s_2)^2 - 47s(s_1 + s_2)) \\
& \times B_0(3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2, m_\pi^2) + (90m_\pi^4 + (18s - 103s_2)m_\pi^2 + s_2(28s_2 - 9s)) \\
& \times B_0(s_2, m_\pi^2)) + 2(1563m_\pi^2 + 632s - 1000s_1 - 880s_2)I(m_\pi^2)) \Big\} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho} \\
& + \frac{1}{2F_0^2(s - s_2 + t_1)(m_\pi^2 - t_2)} \left\{ 2((s - s_2 + t_1)(6A[s_1, m_\pi^2] + 5I[m_\pi^2])) p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\beta} \right. \\
& - (m_\pi^2 - t_2)(6A[s_2, m_\pi^2] + 5I[m_\pi^2]) p_{1\beta} p_2^\sigma p_3^\rho p_a^\tau \epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha} \Big\} + \frac{1}{3F_0^2(m_\pi^2 - t_1)(s + s_1 + t_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 2((m_\pi^2 - t_1)(6(A[s_1, m_\pi^2] + A[m_\pi^2 - s + s_2 - t_1, m_\pi^2]) \right. \\
& + A[2m_\pi^2 - s_2 + t_1 - t_2, m_\pi^2]) + 5I[m_\pi^2])p_1^\sigma p_2^\rho p_{3\alpha} \\
& - (s - s_1 + t_2)p_2^\sigma((6(A[s_2, m_\pi^2] + A[2m_\pi^2 - s_2 + t_1 - t_2, m_\pi^2]) + 5I[m_\pi^2])p_{1\alpha} \\
& - 6A[t_2, m_\pi^2])p_{3\alpha})p_3^\rho p_b^\tau \epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta} \left. \right\} - \frac{\epsilon_{\alpha\beta\sigma\varrho}}{F_0^2} \left\{ -\frac{(s_1 t_1 + (t_1 - 2m_\pi^2)t_2)p_3^\sigma p_b^\rho}{s_1 - t_2} \right. \\
& \times G[(p_1 + p_2)^2, p_a \cdot (p_1 + p_2)] + \frac{(t_1 - m_\pi^2)t_2 p_3^\sigma p_b^\rho G[(p_1 + p_2)^2, (p_a - (p_1 + p_2))^2]}{s_1 - t_2} \\
& + \frac{(m_\pi^4 - (s_2 - t_1 + t_2)m_\pi^2 - (s - s_2 + t_1)(s - 2s_1 + t_2))p_3^\sigma p_a^\rho G[(p_1 + p_2)^2, p_b \cdot (p_1 + p_2)]}{m_\pi^2 - s - t_2} \\
& - \frac{(s - s_2 + t_1)(-m_\pi^2 + s - s_1 + t_2)p_3^\sigma p_a^\rho G[(p_1 + p_2)^2, (p_b - (p_1 + p_2))^2]}{-m_\pi^2 + s + t_2} \\
& + \frac{(m_\pi^4 - (s_1 + t_1 - t_2)m_\pi^2 - (s - 2s_2 + t_1)(s - s_1 + t_2))p_1^\sigma p_b^\rho G[(p_2 + p_3)^2, p_a \cdot (p_2 + p_3)]}{-m_\pi^2 + s + t_1} \\
& + \frac{(m_\pi^2 - s + s_2 - t_1)(s - s_1 + t_2)p_1^\sigma p_b^\rho G[(p_2 + p_3)^2, (p_a - (p_2 + p_3))^2]}{m_\pi^2 - s - t_1} \\
& + \frac{((s_2 + t_1)t_2 - 2m_\pi^2 t_1)p_1^\sigma p_a^\rho G[(p_2 + p_3)^2, p_b \cdot (p_2 + p_3)]}{s_2 - t_1} \\
& + \frac{t_1(m_\pi^2 - t_2)p_1^\sigma p_a^\rho G[(p_2 + p_3)^2, (p_b - (p_2 + p_3))^2]}{s_2 - t_1} \\
& + (3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2)p_2^\sigma p_b^\rho G[(p_1 + p_3)^2, p_a \cdot (p_1 + p_3)] \\
& + (-3m_\pi^2 - s + s_1 + s_2)p_2^\sigma p_a^\rho G[(p_1 + p_3)^2, p_b \cdot (p_1 + p_3)] \left. \right\} - \frac{\epsilon_{\sigma\varrho\tau\alpha}}{F_0^2} \\
& \times \left\{ \frac{2(m_\pi^4 - (s_2 - t_1 + t_2)m_\pi^2 - (s - s_2 + t_1)(s - 2s_1 + t_2))(p_1 + p_2)_\beta p_3^\sigma p_a^\rho p_b^\tau}{(-m_\pi^2 + s + t_2)^2} \right. \\
& \times G[(p_1 + p_2)^2, p_b \cdot (p_1 + p_2)] + \frac{2(m_\pi^2 - s + s_1 - t_2)p_{1\beta} p_3^\sigma p_a^\rho p_b^\tau}{m_\pi^2 - s - t_2} \\
& \times G[(p_1 + p_2)^2, (p_b - (p_1 + p_2))^2] + \frac{2(3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2)p_2^\sigma (p_1 + p_3)_\beta p_a^\rho p_b^\tau}{m_\pi^2 + s - s_2 + t_1 - t_2} \\
& \times G[(p_1 + p_3)^2, p_b \cdot (p_1 + p_3)] + G[(p_2 + p_3)^2, p_b \cdot (p_2 + p_3)] \\
& \times \frac{2(2m_\pi^2 t_1 - (s_2 + t_1)t_2)p_1^\sigma (p_2 + p_3)_\beta p_a^\rho p_b^\tau}{(s_2 - t_1)^2} - \frac{2t_1 p_1^\sigma p_{3\beta} p_a^\rho p_b^\tau G[(p_2 + p_3)^2, (p_b - (p_2 + p_3))^2]}{s_2 - t_1} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\epsilon_{\sigma\varrho\tau\beta}}{F_0^2} \left\{ \frac{2(t_1(s_1+t_2) - 2m_\pi^2 t_2)(p_1+p_2)_\alpha p_3^\sigma p_a^\rho p_b^\tau G[(p_1+p_2)^2, p_a \cdot (p_1+p_2)]}{(s_1-t_2)^2} \right. \\
& + \frac{2t_2 p_{1\alpha} p_3^\sigma p_a^\rho p_b^\tau G[(p_1+p_2)^2, (p_a - (p_1+p_2))^2]}{s_1-t_2} - \frac{2(3m_\pi^2 + s - s_1 - s_2)p_2^\sigma (p_1+p_3)_\alpha p_a^\rho p_b^\tau}{m_\pi^2 + s - s_1 - t_1 + t_2} \\
& \times G[(p_1+p_3)^2, p_a \cdot (p_1+p_3)] \\
& - \frac{2(m_\pi^4 - (s_1+t_1-t_2)m_\pi^2 - (s-2s_2+t_1)(s-s_1+t_2))p_1^\sigma (p_2+p_3)_\alpha p_a^\rho p_b^\tau}{(-m_\pi^2 + s + t_1)^2} \\
& \times G[(p_2+p_3)^2, p_a \cdot (p_2+p_3)] - \frac{2(m_\pi^2 - s + s_2 - t_1)p_1^\sigma p_{3\alpha} p_a^\rho p_b^\tau}{m_\pi^2 - s - t_1} \\
& \left. \times G[(p_2+p_3)^2, (p_a - (p_2+p_3))^2] \right\}. \tag{F.12}
\end{aligned}$$

- Die Definitionen von $A[q^2, m^2]$, $I[m^2]$ und $B_0(q^2, m^2)$ sind in Anhang C angegeben und $G[p^2, p \cdot q]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
G[p^2, p \cdot q] & \equiv \frac{J(x^2) - J(y^2)}{x^2 - y^2} - \left[\frac{\alpha}{2} \ln(\varpi) + 2 \right], \\
J(x^2) & \equiv \frac{1}{2} \left[3x^2 + \alpha x^2 \ln(\varpi) + \ln^2(\varpi) \right], \\
\alpha & \equiv (1 - 4/x^2)^{1/2}, \quad \varpi \equiv \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \\
x^2 & \equiv p^2/m_\pi^2, \quad y^2 \equiv (p^2 - 2p \cdot q)/m_\pi^2. \tag{F.13}
\end{aligned}$$

Anhang G

Mischungsschema

Dieser Abschnitt zeigt das verwendete phänomenologische η - η' Mischungsschema [64]. Des Weiteren sind die Gleichungen der Zerfallskonstanten- und Wellenfunktionsrenormierung [17] sowie die numerischen Werte der physikalischen Massen und Zerfallskonstanten angegeben [4]¹.

- Unter Vernachlässigung möglicher Mischungen des η bzw. η' mit anderen pseudoskalaren Zuständen und angeregten Quark-, Gluon- oder exotischen Zuständen sind die SU(3) Basiszustände gegeben durch

$$|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\rangle, \quad (\text{G.1})$$

$$|\eta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\rangle. \quad (\text{G.2})$$

Die physikalischen Zustände des η bzw. η' sind dann definiert durch

$$|\eta\rangle = \cos\theta |\eta_8\rangle - \sin\theta |\eta_0\rangle, \quad (\text{G.3})$$

$$|\eta'\rangle = \sin\theta |\eta_8\rangle + \cos\theta |\eta_0\rangle, \quad (\text{G.4})$$

¹Es werden natürliche Einheiten verwendet ($\hbar = c = 1$).

mit einem Mischungswinkel von $\theta \simeq -20^\circ$. Dieses Schema bezeichnet die einfachste mögliche Situation einer Mischung, bei der ein Zweizustandssystem angenommen wird, dessen physikalischen Zustände orthogonal zueinander sind, d.h., dass ihre Mischung nicht von der Energie abhängt. Weiterführende Informationen zur Physik des η bzw. η' findet man z.B. in Ref. [4, 64, 65].

-
- Die Zerfallskonstanten- und Wellenfunktionsrenormierung des pseudoskalaren Mesonoktetts (π , K , η_8) sind gegeben durch [17]

$$\sqrt{Z_\pi} \frac{F_\pi}{F_0} = 1 - \frac{2}{3F_0^2} I[m_\pi^2] - \frac{1}{3F_0^2} I[m_K^2] + \mathcal{O}(q^4), \quad (\text{G.5})$$

$$\sqrt{Z_K} \frac{F_K}{F_0} = 1 - \frac{1}{4F_0^2} I[m_\pi^2] - \frac{1}{2F_0^2} I[m_K^2] - \frac{1}{4F_0^2} I[m_\eta^2] + \mathcal{O}(q^4), \quad (\text{G.6})$$

$$\sqrt{Z_{\eta_8}} \frac{F_{\eta_8}}{F_0} = 1 - \frac{1}{F_0^2} I[m_K^2] + \mathcal{O}(q^4), \quad (\text{G.7})$$

-
- Die verwendeten numerischen Werte der physikalischen Massen und Zerfallskonstanten sind gegeben durch [4]²

$$\begin{aligned} m_e &= 0.511, \\ m_\pi &= 139.57, \\ m_{\pi^0} &= 134.97, \\ m_K &= 493.67, \\ m_\eta &= 547.51, \\ m_{\eta'} &= 957.78, \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{aligned} F_\pi &= 92.4, \\ F_K &= 1.2 F_\pi, \\ F_{\eta_8} &= 1.3 F_\pi, \\ F_{\eta_0} &= 1.06 F_\pi. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

²Die Massen und Zerfallskonstanten sind in Einheiten von MeV angegeben.

Anhang H

Lagrangedichten

In diesem Abschnitt sind weitere Informationen zu den effektiven Lagrangedichten $\mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)}$, $\mathcal{L}_\epsilon^{(6)}$ und $\mathcal{L}'_\epsilon^{(6)}$ gegeben.

- Die Entwicklung der Lagrangedichten bzgl. ϕ und A_μ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{WZW}}^{(4)} = \mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{3\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi+2\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi+\gamma^*}^{(4)} + \mathcal{L}_{5\phi}^{(4)} + \mathcal{L}_{7\phi}^{(4)} + \dots, \quad (\text{H.1})$$

$$\mathcal{L}_\epsilon^{(6)} = \mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} + \mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(6)} + \mathcal{L}_{5\phi}^{(6)} + \dots, \quad (\text{H.2})$$

$$\mathcal{L}'_\epsilon^{(6)} = \mathcal{L}'_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} + \dots, \quad (\text{H.3})$$

mit

$$\mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(4)} = \frac{3e^2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{8\pi^2 F_0} \left\{ A_\beta \partial_\nu A_\alpha \text{Tr}(Q^2 \partial_\mu \phi) \right\}, \quad (\text{H.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3\phi+2\gamma^*}^{(4)} = & \frac{e^2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{16\pi^2 F_0^3} \left\{ A_\beta \partial_\nu A_\alpha \text{Tr}[Q^2(\phi \partial_\mu \phi \phi - \phi^2 \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi \phi^2) \right. \\ & \left. + Q(\phi Q \phi \partial_\mu \phi + \phi Q \partial_\mu \phi \phi - \phi^2 Q \partial_\mu \phi)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5\phi+2\gamma^*}^{(4)} = & \frac{e^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{960\pi^2 F_0^5} \left\{ A_\beta \partial_\nu A_\alpha \text{Tr} [3Q^2 \partial_\mu \phi \phi^4 - 7Q^2 \phi \partial_\mu \phi \phi^3 + 13Q^2 \phi^2 \partial_\mu \phi \phi^2 \right. \\
& - 7Q^2 \phi^3 \partial_\mu \phi \phi + 3Q^2 \phi^4 \partial_\mu \phi - 5Q\phi Q \partial_\mu \phi \phi^3 - 5Q\phi Q \partial_\mu \phi \phi^2 \\
& - 5Q\phi Q \phi^2 \partial_\mu \phi \phi - 5Q\phi Q \phi^3 \partial_\mu \phi + 10Q\phi^2 Q \partial_\mu \phi \phi^2 \\
& + 10Q\phi^2 Q \phi \partial_\mu \phi \phi + 10Q\phi^2 Q \phi^2 \partial_\mu \phi - 10Q\phi^3 Q \partial_\mu \phi \phi \\
& \left. - 10Q\phi^3 Q \phi \partial_\mu \phi + 5Q\phi^4 Q \partial_\mu \phi] \right\},
\end{aligned} \tag{H.6}$$

$$\mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(4)} = \frac{ie \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{8\pi^2 F_0^3} \left\{ A_\mu \text{Tr} [Q \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi] \right\}, \tag{H.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5\phi+\gamma^*}^{(4)} = & \frac{ie \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{96\pi^2 F_0^5} \left\{ A_\mu \text{Tr} [Q \phi \partial_\nu \phi \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - Q \partial_\nu \phi \phi^2 \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \right. \\
& + Q \partial_\nu \phi \phi \partial_\alpha \phi \phi \partial_\beta \phi - Q \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \phi^2 \partial_\beta \phi + Q \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \phi \partial_\beta \phi \phi \\
& \left. - 2(Q \phi^2 \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + Q \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \phi) + 3Q \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \phi] \right\},
\end{aligned} \tag{H.8}$$

$$\mathcal{L}_{5\phi}^{(4)} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{80\pi^2 F_0^5} \left\{ \text{Tr} (\phi \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \right\}. \tag{H.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{7\phi}^{(4)} = & \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{1344\pi^2 F_0^7} \text{Tr} [9\phi \phi \partial_\mu \phi \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - 3\phi \phi \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \\
& - 8\phi \phi \phi \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi].
\end{aligned} \tag{H.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} = & \frac{32e^2}{F_0} \left\{ B_0 (L_8 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr} [\{M, \phi\} Q^2] + L_9 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr} [\{M, \phi\}] \text{Tr} [Q^2]) \right. \\
& \left. - L_{19}^{\epsilon} \partial^\lambda F_{\lambda\mu} F_{\nu\alpha} \text{Tr} [Q \{ \partial^\beta \phi, Q \}] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{H.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3\phi+\gamma^*}^{(6)} = & -\frac{32ie F_{\mu\nu}}{F_0^3} \left\{ B_0 (L_1 \text{Tr}[M \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi [\phi, Q] + M [\phi, Q] \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi] \right. \\
& + L_2 \text{Tr}[\partial_\beta \phi [\phi, Q]] \text{Tr}[M \partial_\alpha \phi] \\
& + L_5 \text{Tr}[\{\phi, M\} (Q \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi Q)] \\
& + L_6 \text{Tr}[\{\phi, M\} \partial_\alpha \phi Q \partial_\beta \phi] \\
& + L_7 \text{Tr}[\{\phi, M\}] \text{Tr}[Q \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi]) \\
& - L_{13}^{6,\epsilon} \text{Tr}[Q (\partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \partial_\lambda \phi - \partial_\lambda \phi \partial_\beta \phi \partial^\lambda \partial_\alpha \phi)] \\
& \left. - L_{14}^{6,\epsilon} \text{Tr}[Q (\partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\lambda \phi \partial_\beta \phi - \partial^\lambda \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \partial_\lambda \phi)] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{H.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5\phi}^{(6)} = & \frac{32e^2}{F_0^5} \left\{ B_0 L_4^{6,\epsilon} \text{Tr}[\{M, \phi\} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi] \right. \\
& \left. - L_{12}^{6,\epsilon} \text{Tr}[\partial^\lambda \partial_\mu \phi (\partial_\lambda \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi)] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{H.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\phi+2\gamma^*}^{(6)} = & \frac{64e^2}{F_0} \left\{ B_0 (\eta_0 L_8'^{6,\epsilon} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr}[MQ^2] + \eta_0 L_9'^{6,\epsilon} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \text{Tr}[M] \text{Tr}[Q^2]) \right. \\
& \left. - \eta_0 L_{19}'^{6,\epsilon} \partial_\beta \partial^\lambda F_{\lambda\mu} F_{\nu\alpha} \text{Tr}[Q^2] \right\} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{H.14})
\end{aligned}$$

-
- Die Konstanten C_{m^2} und C_{q^2} aus Abschnitt 5.1.4 sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
C_{m^2} = & -\frac{2048\pi^2}{9} \left\{ 3(2L_9^{6,\epsilon} + \sqrt{6}L_9'^{6,\epsilon})(2m_K^2 + m_\pi^2) + 2L_8^{6,\epsilon}(m_K^2 + 2m_\pi^2) \right. \\
& \left. + \sqrt{6}L_8'^{6,\epsilon}(m_K^2 + 2m_\pi^2) \right\}, \quad (\text{H.15})
\end{aligned}$$

$$C_{q^2} = -\frac{1024\pi^2}{3} \left\{ 2L_{19}^{6,\epsilon} - \sqrt{6}L_{19}'^{6,\epsilon} \right\}. \quad (\text{H.16})$$

Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [3] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47**, 365 (1973).
- [4] Particle Data Group, C. Amsler *et al.*, Phys. Lett. **B667**, 1 (2008).
- [5] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D8**, 3633 (1973).
- [6] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [7] I. Zahed and G. E. Brown, Phys. Rept. **142**, 1 (1986).
- [8] R. K. Bhaduri, Redwood City, USA: Addison-Wesley (1988). (Lecture notes and supplements in physics, 22).
- [9] A. W. Thomas and W. Weise, Berlin, Germany: Wiley-VCH (2001).
- [10] K. G. Wilson, Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).
- [11] H. J. Rothe, World Sci. Lect. Notes Phys. **74**, 1 (2005).
- [12] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43**, 209 (1993).
- [13] S. Weinberg, arXiv:hep-th/9702027.
- [14] S. Weinberg, Cambridge University Press (1996), (The Quantum Theory of Fields I).
- [15] S. Weinberg, Physica **A96**, 327 (1979).

- [16] J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* **158**, 142 (1984).
- [17] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985).
- [18] S. Necco, *PoS LAT2007*, 021 (2007).
- [19] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [20] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim.* **A60** (1969).
- [21] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **B37**, 95 (1971).
- [22] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 422 (1983).
- [23] T. Ebertshäuser, H. W. Fearing, and S. Scherer, *Phys. Rev.* **D65** (2002).
- [24] J. Bijnens, L. Girlanda, and P. Talavera, *Eur. Phys. J.* **C23**, 539 (2002).
- [25] S. Scherer, *Adv. Nucl. Phys.* **27**, 277 (2003).
- [26] W. J. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rept.* **36**, 137 (1978).
- [27] G. Altarelli, *Phys. Rept.* **81**, 1 (1982).
- [28] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [29] S. Coleman, *J. Math. Phys.* **7**, 787 (1966).
- [30] C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 173 (1984).
- [31] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968).
- [32] S. Weinberg, Cambridge University Press (1996), (*The Quantum Theory of Fields II*).
- [33] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.* **111**, 354 (1958).
- [34] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D23**, 2262 (1981).
- [35] K.-c. Chou, H.-y. Guo, K. Wu, and X.-c. Song, *Phys. Lett.* **B134**, 67 (1984).

- [36] N. K. Pak and P. Rossi, Nucl. Phys. **B250**, 279 (1985).
- [37] J. L. Manes, Nucl. Phys. **B250**, 369 (1985).
- [38] J. Bijmens, Int. J. Mod. Phys. **A8**, 3045 (1993).
- [39] T. Ebertshäuser, *Mesonic Chiral Perturbation Theory: Odd Intrinsic Parity Sector*, PhD Thesis, Johannes-Gutenberg-Universität (2001).
- [40] H. W. Fearing and S. Scherer, Phys. Rev. **D53**, 315 (1996).
- [41] R. Akhoury and A. Alfakih, Ann. Phys. **210**, 81 (1991).
- [42] D. Issler, SLAC-PUB-4943, (1990, unveröffentlicht).
- [43] E. Zeidler, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006), (Quantum Field Theory I).
- [44] G. E. J. Bijmens and J. Gasser, The Second DAΦNE Physics Handbook edited by L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver (1995, Italy).
- [45] J. F. Donoghue and D. Wyler, Nucl. Phys. **B316**, 289 (1989).
- [46] J. Bijmens, A. Bramon, and F. Cornet, Z. Phys. **C46**, 599 (1990).
- [47] T. Fujiwara, T. Kugo, H. Terao, S. Uehara, and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **73**, 926 (1985).
- [48] M. Bando, T. Kugo, and K. Yamawaki, Phys. Rept. **164**, 217 (1988).
- [49] O. Kaymakcalan, S. Rajeev, and J. Schechter, Phys. Rev. **D30**, 594 (1984).
- [50] O. Kaymakcalan and J. Schechter, Phys. Rev. **D31**, 1109 (1985).
- [51] P. Jain, R. Johnson, U. G. Meißner, N. W. Park, and J. Schechter, Phys. Rev. **D37**, 3252 (1988).
- [52] U. G. Meißner, Phys. Rept. **161**, 213 (1988).
- [53] K. Kawarabayashi and M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. **16**, 255 (1966).
- [54] Riazuddin and Fayyazuddin, Phys. Rev. **147**, 1071 (1966).

- [55] J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, Phys. Rev. Lett. **61**, 1453 (1988).
- [56] B. Borasoy and R. Nissler, Eur. Phys. J. **A19**, 367 (2004).
- [57] Phys. Lett. **B278**, 413 (1992), PrimEx Collaboration.
- [58] J. L. Goity, A. M. Bernstein, and B. R. Holstein, Phys. Rev. **D66**, 076014 (2002).
- [59] F. Farzanpay *et al.*, Phys. Lett. **B278**, 413 (1992).
- [60] R. M. Drees *et al.*, Phys. Rev. Lett. **D45**, 1439 (1992).
- [61] H. Fonvieille *et al.*, Phys. Lett. **B233**, 65 (1989).
- [62] H. Kobrak, Nuovo Cimento. **20**, 1115 (1961).
- [63] J. Fischer *et al.*, Phys. Lett. **B73**, 359 (1978).
- [64] F. J. Gilman and R. Kauffman, Phys. Rev. **D36**, 2761 (1987).
- [65] N. Beisert and B. Borasoy, Eur. Phys. J. **A11**, 329 (2001).
- [66] CELLO, H. J. Behrend *et al.*, Z. Phys. **C49**, 401 (1991).
- [67] TPC/Two Gamma, H. Aihara *et al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 172 (1990).
- [68] R. I. Dzhelyadin *et al.*, Phys. Lett. **B94**, 548 (1980).
- [69] S. M. Berman, Phys. Rev. Lett. **1**, 468 (1958).
- [70] C. Q. Geng, I.-L. Ho, and T. H. Wu, Nucl. Phys. **B684**, 281 (2004).
- [71] A. A. Poblaguev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 061803 (2002).
- [72] J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, Phys. Lett. **B237**, 488 (1990).
- [73] B. Borasoy and R. Nissler, Nucl. Phys. **A740**, 362 (2004).
- [74] M. Gormley *et al.*, Phys. Rev. **D2**, 501 (1970).
- [75] J. G. Layter *et al.*, Phys. Rev. **D7**, 2565 (1973).

- [76] I. Giller, A. Ocherashvili, T. Ebertshäuser, M. A. Moinester, and S. Scherer, *Eur. Phys. J.* **A25**, 229 (2005).
- [77] S. R. Amendolia *et al.*, *Phys. Lett.* **B155**, 457 (1985).
- [78] L. Ametller, M. Knecht, and P. Talavera, *Phys. Rev.* **D64**, 094009 (2001).
- [79] A. Bramon, E. Pallante, and R. Petronzio, *Phys. Lett.* **B271**, 237 (1991).
- [80] BNL-E865, S. Pislak *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 221801 (2001).
- [81] L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, *Phys. Lett.* **B303**, 140 (1993).
- [82] S. L. Adler, B. W. Lee, S. B. Treiman, and A. Zee, *Phys. Rev.* **D4**, 3497 (1971).
- [83] M. Prapat, J. Smith, and Z. E. S. Uy, *Phys. Rev.* **D5**, 269 (1972).
- [84] J. W. Bos, Y. C. Lin, and H. H. Shih, *Phys. Lett.* **B337**, 152 (1994).
- [85] P. Talavera, L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, *Phys. Lett.* **B376**, 186 (1996).
- [86] L. Ametller, J. Kambor, M. Knecht, and P. Talavera, *Phys. Rev.* **D60**, 094003 (1999).
- [87] J. Lee-Franzini, in *Status of Daphne and KLOE, The Second DAΦNE Physics Handbook* edited by L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver (1995, Italy).
- [88] *Proceedings of the Third Workshop on the Tau-Charm Factory, Spain, 1-6 June 1993*, edited by J. Kirkby and R. Kirkby (1994, France).
- [89] G. Knöchlein, S. Scherer, and D. Drechsel, *Phys. Rev.* **D53**, 3634 (1996).
- [90] L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon, and P. Talavera, *Phys. Lett.* **B400**, 370 (1997).

- [91] L. Ametller, J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, Phys. Lett. **B276**, 185 (1992).
- [92] H. H. Shih and Y. C. Lin, Chinese Journal of Physics **35** (1997).
- [93] K. D. Larson *et al.*, Phys. Rev. **D47**, 799 (1993).
- [94] A. J. Noble *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 414 (1992).
- [95] A. Krause, Helv. Phys. Acta **63**, 3 (1990).
- [96] B. Borasoy and B. R. Holstein, Phys. Rev. **D59**, 054019 (1999).
- [97] J. Weber, Diplomarbeit Universität Mainz, in Bearbeitung.
- [98] S. Necco, *Chiral low-energy constants from Lattice QCD*, Vortrag bei der Confinement8 Konferenz, Mainz (2008).
- [99] A. Actor, Rev. Mod. Phys. **51**, 461 (1979).
- [100] Wolfram Research, Inc., Mathematica 5.0, *Feyn Arts*.
- [101] T. Fuchs, J. Gegelia, G. Japaridze, and S. Scherer, Phys. Rev. **D68**, 056005 (2003).