



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

La Costante di Hubble

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Candidato

Gabriele Coppi
Matricola 1395391

Relatore

Prof. Alessandro Melchiorri

Anno Accademico 2012/2013

La Costante di Hubble

Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

© 2013 Gabriele Coppi. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L^AT_EX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: coppi.gabriele@gmail.com

A nonno

Indice

1	Introduzione	1
2	Il modello cosmologico	2
2.1	La Metrica di Robertson-Walker	2
2.2	Le equazioni di Friedmann	3
3	Misura della costante di Hubble	6
3.1	Misurare le distanze	6
3.1.1	Variabili Cefeidi	8
3.1.2	Supernovae Ia	10
3.1.3	Metodo Tully-Fisher	11
3.1.4	Fluttuazione di brillanza superficiale	11
3.2	Altri metodi per calcolare H_0	12
3.2.1	Effetto Sunyav-Zel'dovich	12
3.2.2	Anisotropie della CMB	13
4	Valori di H_0	18
4.1	H_0 e la statistica mediana	18
5	Conclusioni	21
	Bibliografia	22

Capitolo 1

Introduzione

La cosmologia nel 1929 ottenne uno dei più importanti risultati della propria storia, infatti Edwin Hubble trovò una relazione che legava la distanza delle galassie alla loro velocità di recessione, provando così che l'universo si stava espandendo. Fu la prima verifica sperimentale che confermava quanto già predetto nel 1927 da Georges Lemaitre e sconfessava l'esistenza di universo statico, come invece immaginava Einstein. La relazione, ricavata sperimentalmente, a quei tempi era di tipo lineare, quindi Hubble immaginò che a legare la distanza e la velocità di recessione vi fosse una costante. Oggi è noto che questa relazione lineare vale solo per distanze relativamente piccole, per distanze più grandi invece ci si allontana dalla linearità. La costante di Hubble (chiamata così in suo onore) è diventata a tutti gli effetti un parametro cosmologico fondamentale, che non lega più solo la distanza e la velocità di recessione ma permette anche di stimare altre grandezze importanti per la moderna cosmologia; infatti, conoscendo questa, è possibile stimare, o almeno porre dei vincoli, al valore di alcuni parametri fondamentali dell'universo, quali la costante cosmologica, la massa del neutrino o l'età dell'universo.

In questo lavoro si cerca di analizzare alcuni metodi che permettono di misurare la costante di Hubble, sia utilizzando dei metodi classici, cioè attraverso la misura delle distanze, come fece originariamente Hubble, sia sfruttando tecniche più moderne che coinvolgono i parametri cosmologici. Nel secondo capitolo viene descritta la geometria dell'universo, con la metrica di Robertson-Walker e con l'equazione di Friedmann, per comprendere così in che universo avviene il moto di allontanamento delle galassie. Nel terzo capitolo invece, si descrivono prima le differenti distanze (distanza di luminosità, distanza angolare e distanza comobile) e poi si espongono alcuni metodi per il calcolo delle stesse al fine di determinare la costante di Hubble, sfruttando la legge di Hubble. Inoltre si analizzano metodi più moderni che permettono di calcolare la costante di Hubble, sfruttando differenti anisotropie della radiazione di fondo cosmico. Il quarto capitolo invece riporta alcuni valori delle misure più significative per la costante di Hubble e la possibilità di fare un'analisi statistica sul campione dei molti valori che sono stati acquisiti nel corso degli anni.

Capitolo 2

Il modello cosmologico

2.1 La Metrica di Robertson-Walker

Il modello cosmologico odierno si basa sul principio che la materia sia distribuita in maniera omogenea ed isotropa a grandi scale (oltre i 100Mpc) e che a queste distanze la principale interazione presente sia quella di tipo gravitazionale secondo la teoria di Einstein. Mentre l'isotropia può essere verificata direttamente utilizzando come indicatore l'uniformità della temperatura della CMBR (Cosmic Microwave Backgroud Radiation), l'omogenità invece si basa su un principio filosofico, quale quello copernicano, secondo cui la Terra non si trova in una posizione privilegiata; per cui bisogna presupporre che l'universo sia isotropo per un qualsiasi punto di osservazione nell'universo. Grazie all'ipotesi di isotropia ed omogenità, la descrizione geometrica dell'universo può essere fatta in modo semplice. Infatti una volta fissato un sistema di coordinate, la distanza spazio-tempo può essere scritta come:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{i,j} dX^i dX^j \quad (2.1)$$

dove $g_{i,j}$ è detto *tensore metrico*, e rappresenta le proprietà geometriche dell'universo. Nel caso di un universo in evoluzione, cioè che si contrae o si espande, ma non curvo, si trova:

$$g_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ne risulta quindi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + (\chi d\theta)^2 + (\chi \sin \theta d\phi)^2] \quad (2.3)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala e χ è la distanza comobile. Tuttavia la presenza di massa-energia, secondo la relatività generale, introduce una curvatura nello spazio-tempo e la metrica più adatta a descrivere un universo omogeneo ed isotropo, in cui siano presenti anche effetti di curvatura, è la **metrica di Robertson-Walker**:

$$ds^2 = +c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\left(\frac{d\chi}{\sqrt{1-k\chi^2}} \right)^2 + (\chi d\theta)^2 + (\chi \sin \theta d\phi)^2 \right] \quad (2.4)$$

il fattore k è un valore dipendente dalla curvatura dell'universo e risulta:

- $k = 0$: l'universo è sostanzialmente piatto quindi non curvo, in questo caso l'eq.2.3 e l'eq.2.4 coincidono come ci si sarebbe aspettato;
- $k > 0$: l'universo ha curvatura positiva, e viene detto chiuso;
- $k < 0$: l'universo ha curvatura negativa, e viene detto aperto a cui viene associato l'idea di un universo iperbolico.

La distanza comobile χ e gli angoli ϕ e θ rimangono costanti durante l'espansione dell'universo, per cui è possibile definire una *distanza propria*, cioè la distanza tra due punti, come:

$$dr = a(t)d\chi$$

integrandolo:

$$r(t) = a(t) \int_0^\chi d\chi = a(t)\chi \quad (2.5)$$

derivando la 2.5 si trova la **legge di Hubble**, che lega la velocità di recessione alla distanza propria:

$$\dot{r}(t) = \dot{a}(t)\chi = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r(t) = \mathbf{H}r(t) \quad (2.6)$$

dove si è definito il parametro di Hubble $\mathbf{H} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ che, calcolato oggi, cioè per $t = t_0$, fornisce la costante di Hubble \mathbf{H}_0 .

2.2 Le equazioni di Friedmann

Descritta la metrica che definisce la geometria dell'universo, bisogna cercare di studiare il comportamento del fattore di scala $a(t)$ in funzione del tempo. Per analizzarne l'evoluzione temporale, è possibile utilizzare l'**equazione di Friedmann**:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{k c^2}{R_0^2 a^2} \quad (2.7)$$

dove R_0 è il raggio di curvatura dell'universo. Nel caso in cui $k = 0$ è possibile definire un nuovo parametro detto *densità critica*:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Tuttavia l'equazione di Friedmann non può fornire da sola le informazioni sull'evoluzione del fattore di scala (oltre ad $a(t)$ anche ρ è incognito), quindi si deve trovare almeno un'altra equazione che leggi questi due parametri. Questa seconda equazione è l'**equazione di conservazione dell'energia**:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (2.8)$$

considera l'universo come un fluido uniforme, con pressione p .

L'equazioni 2.7 e 2.8, però, non forniscono informazioni su come l'universo si evolva, cioè se l'evoluzione (contrazione o espansione) sia di tipo accelerato o decelerato, questo viene descritto dall'**equazione di accelerazione**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) \quad (2.9)$$

Queste 3 equazioni, comunque, non sono tra di loro slegate, infatti la 2.9 è legata sia alla 2.7 sia alla 2.8, per cui, per ottenere le informazioni sul fattore di scala, è necessario fare un'ulteriore ipotesi, ovvero che il fluido in considerazione sia un fluido perfetto. Quindi si può scrivere un'**equazione di stato** del tipo:

$$p = w\rho \quad (2.10)$$

dove il parametro w è adimensionale. Dalla 2.8, ricordando la definizione di \mathbf{H} , si ricava

$$\rho(a) \propto \frac{1}{a^{3(1+w)}} \quad (2.11)$$

In generale l'universo sarà formato da diverse componenti, le quali avranno un legame differente con il fattore di scala. Le componenti presenti nell'universo sono 3:

- *materia non relativistica*: in questo caso si può considerare che la densità di massa scali in modo inversamente proporzionale al volume, per cui $\rho_M \propto \frac{1}{a^3}$. Quindi secondo la 2.11, $w = 0$;
- *materia relativistica*: per questa componente bisogna tenere conto che, oltre a scalare come $1/a^3$ come nel caso di materia non relativistica, si ha un ulteriore fattore $1/a$ dovuto al *redshift*, il quale *stira* le lunghezze d'onda, e si ha così $\rho_r \propto \frac{1}{a^4}$. Quindi secondo la 2.11, $w = 1/3$;
- *energia oscura*, è una componente inserita per giustificare l'espansione accelerata dell'universo. Una particolare forma è data dalla *costante cosmologica* (Λ), per la quale si trova $w = -1$, quindi per la 2.11 una densità costante.

Una grandezza utile a descrivere le varie componenti dell'universo è il *parametro di densità*:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$$

dove ρ_i è la densità di ogni componente. Utilizzando i parametri di densità e calcolandoli ad oggi, cioè quando $H = H_0$, si può scrivere l'equazione 2.7 in questo modo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{R0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^4} + \Omega_\Lambda \right) \quad (2.12)$$

dove il fattore $1 - \Omega_0 = \Omega_{K_0}$ indica la curvatura dell'universo. La condizione generale sui diversi fattori omega è:

$$1 = \Omega_{R_0} + \Omega_{M_0} + \Omega_\Lambda + \Omega_{K_0} \quad (2.13)$$

Un utile parametro da tenere in considerazione per comprendere l'evoluzione dell'universo è *il parametro di decelerazione* definito come:

$$q_0 = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \Big|_{t=t_0} = \frac{\Omega_{M_0}}{2} + \Omega_{R_0} + \Omega_\Lambda \quad (2.14)$$

È evidente che, quando $q_0 < 1$, l'universo sta accelerando la propria espansione, mentre se $q_0 > 1$ l'universo sta decelerando la propria espansione.

Capitolo 3

Misura della costante di Hubble

Come mostra la 2.12, la misura della costante di Hubble ad oggi è fondamentale per comprendere a fondo come si evolve il fattore di scala, quindi l'universo; per cui, cercare di determinare nel modo più esatto possibile H_0 è uno dei traguardi della cosmologia moderna (infatti la NASA ha inserito questo scopo come uno dei Key Project dell'Hubble Space Telescope). In questo capitolo si mostra come H_0 può essere calcolata mediante:

- metodi di distanza, sfruttando il legame che vi è tra la distanza e la velocità di recessione (ciò che fece Hubble nel 1929);
- metodi legati alle anisotropie (primarie o secondarie) della CMB.

3.1 Misurare le distanze

Per molti anni gli astronomi hanno cercato di trovare un legame tra proprietà intrinseche di alcune stelle e la distanza che queste hanno da noi. In genere però in cosmologia si utilizzano due tipi di distanze:

- *distanza di luminosità*: lega il flusso della stella (F) (integrato su tutte le frequenze) con la luminosità intrinseca della stella (L):

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (3.1)$$

- *distanza angolare* lega la dimensione angolare apparente (θ in radianti) con il diametro dell'oggetto (D):

$$d_A = \frac{D}{\theta} \quad (3.2)$$

Inoltre queste due distanze sono legate tra di loro attraverso il redshift z tramite la relazione:

$$d_L = (1+z)^2 d_A \quad (3.3)$$

La distanza di luminosità ha un legame anche con la coordinata comobile dell'oggetto in considerazione, infatti:

$$d_L = (1+z)\chi \quad (3.4)$$

Però, in generale il flusso che viene ricevuto a terra dovrà tenere conto che tra l'oggetto osservato e l'osservatore vi sono oggetti che assorbono parte della radiazione e quindi diminuiscono il flusso. Utilizzando la magnitudine apparente, la magnitudine assoluta e la distanza di luminosità, si trova:

$$m = M + 5 \log_{10} d_L - 5 + A \quad (3.5)$$

dove A è l'estinzione interstellare, che è diversa in ogni banda e tiene conto della diminuzione del flusso. Quindi, quando si cerca di misurare una distanza, bisogna tenere conto di questo effetto. In alcuni casi si trova la 3.5 scritta come $\mu = m - M = 5 \log_{10} d_L - 5 + A$, dove $m - M$ indica il modulo di distanza; per cui esplicitando la distanza si trova:

$$d_L = 10^{\frac{\mu+5-A}{5}} \quad (3.6)$$

Calcolare la distanza è fondamentale per stimare un valore della costante di Hubble, infatti la legge di Hubble lega la distanza alla velocità di recessione delle galassie secondo la relazione:

$$v = H_0 d_L \quad (3.7)$$

Questo andamento lineare vale però solo per un universo che si espande con una velocità costante. In realtà l'universo si espande in maniera accelerata (Perlmutter et al. 1997, Schmidt, Riess et al. 1997), per cui questo andamento lineare può essere considerato esatto solo per sorgenti relativamente vicine.

Il diagramma di Hubble Uno strumento utile per verificare la 3.7 ed osservarne le eventuali variazioni dovute all'espansione dell'universo è il *diagramma di Hubble*. La prima operazione da eseguire per creare un diagramma di Hubble è ricavare il legame che vi è tra la coordinate comobile χ ed il redshift z . Dall'equazione di Friedmann si trova:

$$\chi = \frac{c}{H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_{R_0} a^{-4} + \Omega_{M_0} a^{-3} + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_0)a^{-2}}} \quad (3.8)$$

per sorgenti relativamente vicine, con $z \ll 1$ si trova:

$$\chi = \frac{zc}{H_0} \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots \right] \quad (3.9)$$

la quale, sfruttando la 3.4, diventa:

$$d_L = \frac{zc}{H_0} \left[1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right] \quad (3.10)$$

che si riduce alla 3.7 se si considera l'approssimazione lineare e si pone $v = cz$.

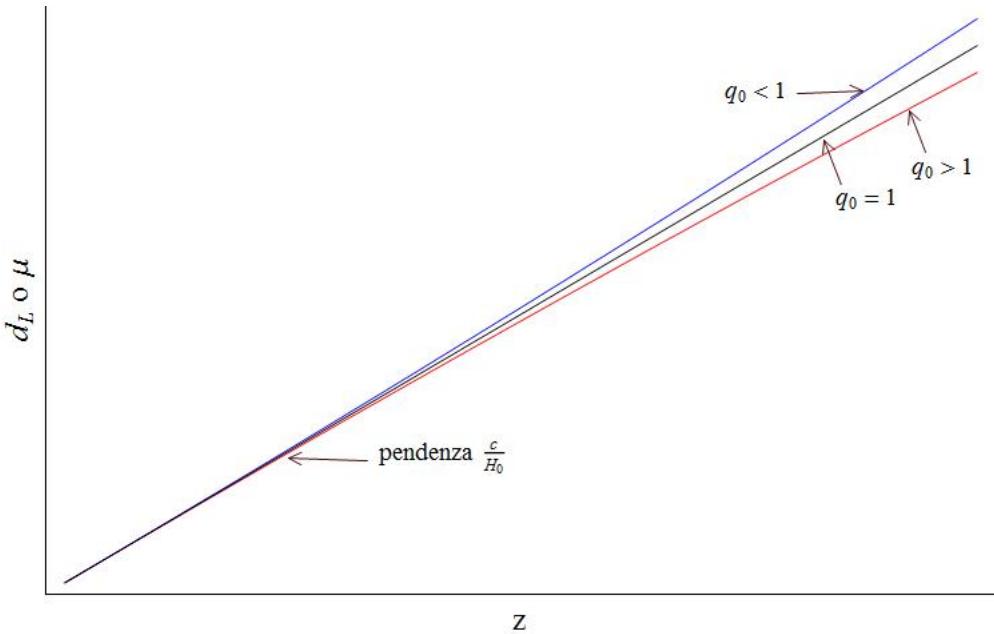


Figura 3.1. Diagramma di Hubble in funzione del parametro di decelerazione. Come si vede, indipendentemente dal parametro e per redshift piccoli, la pendenza rispecchia la 3.7.

3.1.1 Variabili Cefeidi

Le variabili Cefeidi ricoprono un ruolo fondamentale nel determinare la distanza di galassie vicine sin dal 1908, quando Henrietta Leavitt trova un legame tra la magnitudine media assoluta in una determinata banda e il periodo di pulsazione della stella. Questa relazione, chiamata *legge di Leavitt*, può essere scritta (per la banda del visibile) come:

$$M_{<V>} = a \log_{10} P_d + b + c(B - V) \quad (3.11)$$

dove a, b e c sono delle costanti che devono essere determinate calibrando le Cefeidi, P_d è il periodo di pulsazione in giorni e $B - V$ è l'indice di colore. Cambiando banda saranno diverse anche le costanti di calibrazione. Utilizzando quindi la 3.5 è possibile calcolare la distanza, a patto che si conosca l'estinzione interstellare.

Per ridurre al minimo l'effetto dell'estinzione, è possibile utilizzare la *magnitudine di Wesenheit* definita come:

$$w = V - R_V \cdot (B - V) \quad (3.12)$$

dove $R_V = \frac{A_V}{E(B-V)}$ ed $E(B - V)$ rappresenta l'eccesso di colore. La particolarità della magnitudine di Wesenheit risiede nel fatto che è indipendente dall'arrossamento; infatti, R_V è costante lungo la linea di vista (differenti linee di vista forniscono valori di R_V diversi). Similmente a quanto è stato fatto con la magnitudine apparente per definire w , si può definire una funzione di Wesenheit per la magnitudine assoluta:

$$W = M_V - R_V \cdot (M_B - M_V) \quad (3.13)$$

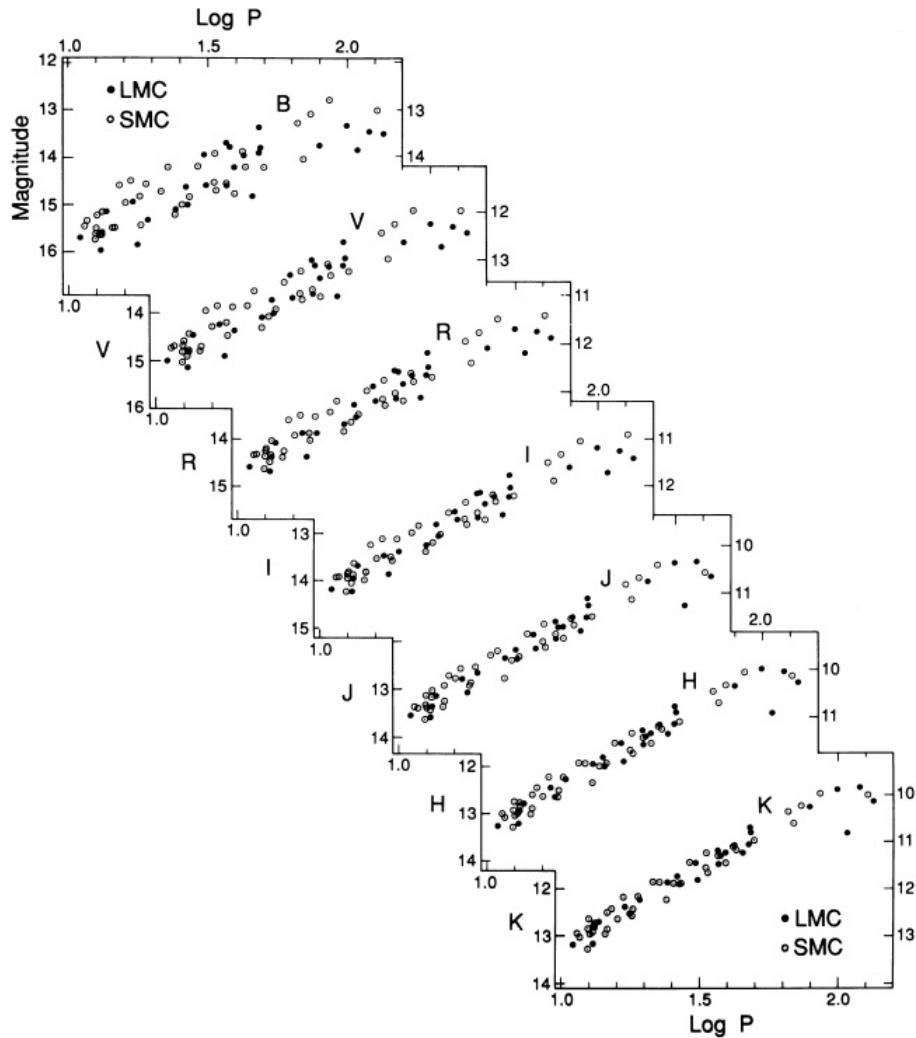


Figura 3.2. Relazione tra periodo e magnitudine in diverse bande (Madore, Freedman, *The Cepheid Distance Scale*, Publication of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 103, No. 667, 1991)

Le magnitudini assolute nelle varie bande possono essere calcolate sfruttando la 3.11. Per cui è possibile calcolare il modulo di distanza attraverso le magnitudini di Wesenheit, il quale sarà dato da:

$$\mu = w - W \quad (3.14)$$

Come si vede per determinare il modulo di distanza di una variabile cefeide è fondamentale conoscere bene i parametri della 3.11. Un metodo per calibrare la legge di Leavitt è quello della parallasse, il quale è molto difficile da applicare; infatti la maggior parte delle cefeedi conosciute è oltre i 250pc di distanza, il che implica un'accuratezza di $\pm 0,2\text{milliarcsec}$ se la disanza vuole essere determinata con una precisione del 10%. Il meccanismo di pulsazione delle Cefeedi è legato alla variazione di opacità nella zona in cui è presente He^{2+} . Infatti, quando questa zona

è opaca alla radiazione, l'energia prodotta all'interno non riesce ad uscire e si ha un aumento della pressione interna della stella, la quale fa innalzare lo strato e il gas. Quest'ultimo allontandosi dal centro della stella si raffredda, di conseguenza l'elio doppiamente ionizzato inizia la fase di ricombinazione e lo strato diventa trasparente. Questo ciclo si ripete periodicamente e produce nella stella cambi di temperatura, luminosità e raggio. Le atmosfere stellari delle Cefeidi sono però ricche di metalli, quindi la magnitudine sarà una funzione della metallicità della stella. Pertanto quando si cercare di calibrare la legge di Leavitt, bisognerà anche tenere conto di questo fattore.

3.1.2 Supernovae Ia

Un metodo che ha fornito ottimi risultati per la misura della distanza è quello delle Supernovae Ia: infatti queste stelle hanno l'importante caratteristica di presentare un picco nella curva di luce della magnitudine assoluta più o meno allo stesso valore: $\langle M_B \rangle \simeq \langle M_V \rangle \simeq -19,3 \pm 0,03$. Quindi, utilizzando ancora la 3.5 è possibile calcolare la distanza. Il problema in generale è che non sempre il massimo in banda visibile si trova a quella magnitudine esatta o comunque la stella potrebbe essere osservata dopo il massimo di luminosità. Il vantaggio però è che la forma della curva di luce è simile per ogni supernova, per cui si cerca di sfruttare questa proprietà, per risolvere le difficoltà, attraverso due metodi principali:

- *metodo MCLS (multicolor light curve shape)*, compara la curva osservata con una famiglia di curve, che permette di determinare il massimo di luminosità
- *metodo del time stretch*, tramite il quale si adattano le curve di luminosità di più supernovae ad una curva modello (di solito si usa la banda B e quella V perché il massimo di luminosità, come scritto sopra, è conosciuto) che viene estesa o compressa, lungo il tempo, di un fattore particolare. Per determinare la magnitudine, si utilizza quindi questo fattore, che sarà diverso per ogni curva.

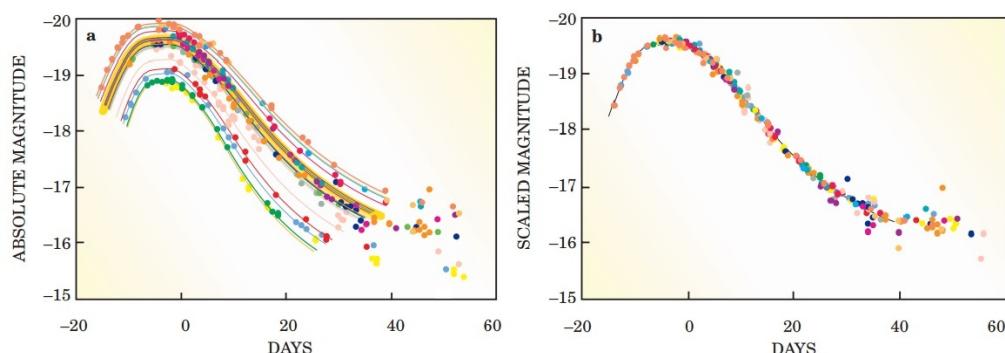


Figura 3.3. A sinistra vi sono curve di luce di più Supernovae Ia, a destra invece sono tutte scalate rispetto alla curva modello, secondo la teoria del Time Stretch. (Immagine tratta da Perlmutter, *Physics Today*, 56, No. 4, 53, 2003)

Le supernovae Ia hanno origine da un sistema binario in cui una stella è una nana bianca che può essere in grado di attirare massa dall'altra stella del sistema; se avviene questo, la nana bianca può raggiungere il limite di Chandrasekhar, producendo un'esplosione catastrofica. Il meccanismo che innesca la reazione non è chiaro, infatti vi sono due diversi modelli che descrivono quello che può accadere:

- *modello a doppia degenerazione*, in questo caso il sistema è formato da due nane bianche,
- *modello a singola degenerazione*, insieme alla nana bianca vi è un'altra stella

Ognuno dei due modelli presenta vantaggi e svantaggi: infatti il primo prevede un numero di fusioni in accordo con le osservazioni e la mancanza dell'idrogeno nelle righe nello spettro della supernova, ma al contempo le simulazioni al computer mostrano come il punto di innesco della fusione sia non centrato e causerebbe il collasso della nana bianca in una stella di neutroni e non l'esplosione in una supernova. Inoltre le abbondanze dei materiali pesanti sono inconsistenti con quello che si osserva. Il modello a singola degenerazione, invece, presenta un grave problema: il tasso di accrescimento della nana bianca deve essere molto preciso, altrimenti si potrebbe osservare una nova nana, o una nova invece che una supernova Ia. Tra i due modelli al momento non ve ne è uno preferito, probabilmente sono presenti tutti e due in natura.

3.1.3 Metodo Tully-Fisher

La relazione di Tully-Fisher è un potente metodo per misurare le distanze sfruttando la velocità di rotazione delle galassie a spirale. Questo metodo si fonda sulla relazione che c'è tra la massa (legata alla velocità radiale tramite il teorema del viriale) e la luminosità, e si trova che la magnitudine assoluta della galassia è legata alla velocità con la seguente relazione:

$$M = a \log_{10} V_{max} + b \quad (3.15)$$

dove a e b sono delle costanti che devono essere calibrate (solitamente si utilizza il metodo delle Cefeidi) e V_{max} è la velocità massima di rotazione. Quando si calcola quest'ultima, bisogna fare particolare attenzione al fatto che la galassia potrebbe essere inclinata di un angolo i rispetto alla linea di vista, per cui la velocità che viene misurata non è V_{max} ma è $V_{max}^{los} = V_{max} \sin i$. La maggior parte delle volte la velocità di rotazione viene misurata sfruttando la riga dell'H a 21cm, per cui è possibile trovare scritta la 3.15 in funzione della larghezza della riga al 20% del flusso, misurata in km/s come:

$$M = a \log_{10} W_{20\%} + b \quad (3.16)$$

3.1.4 Fluttuazione di brillanza superficiale

Un importante metodo per valutare la distanza di una galassia è quello di sfruttare la fluttuazione di brillanza che si ha su un rivelatore CCD tra pixel adiacenti. In genere, la distribuzione di stelle di una galassia non sarà uniforme, per cui un pixel

potrà registrare più stelle rispetto ad un altro pixel. Perciò quello che si può fare è un'analisi statistica di questa variazione sfruttando la statistica di Poisson; infatti, se vi sono N stelle intercettate all'interno di una superficie S , si avrà $N \propto S \propto d^2$, ma $\Delta N = \sqrt{N}$, per cui ne risulterà che :

$$\frac{\Delta N}{N} \propto d^{-1} \quad (3.17)$$

Questo metodo non permette di calcolare distanze oltre i 125Mpc poichè più ci si allontana, più la galassia sembrerà uniforme al rivelatore e non vi saranno delle oscillazioni tra i vari pixel.

3.2 Altri metodi per calcolare H_0

Come si è visto nella sezione precedente, la distanza può essere calcolata direttamente sfruttando delle proprietà intrinseche di stelle (o galassie), di conseguenza è possibile ricavare la costante di Hubble. Vi sono però alcuni metodi indiretti che sfruttano, ad esempio, la radiazione di fondo cosmico.

3.2.1 Effetto Sunyav-Zel'dovich

La radiazione di fondo cosmico, come è stato dimostrato da molti esperimenti, presenta delle anisotropie nello spettro angolare di temperatura. Queste variazioni possono essere raggruppate in due categorie: quelle primarie, la cui origine è riconducibile alla superficie di ultimo scattering, e quelle secondarie, le quali si originano durante il percorso tra la superficie di ultimo scattering e l'osservatore. Un esempio di anisotropia secondaria è dato dall'*effetto Sunyav-Zel'dovich*. Questo effetto dal punto di vista fisico è riconducibile ad un fenomeno di scattering Compton inverso, localizzato solitamente all'interno del mezzo intracluster, in cui $E_\gamma \ll E_{e^-}$. Questa situazione energetica può essere causata da diverse situazioni, infatti si ha la seguente classificazione dell'effetto SZ:

- *effetto termico*: la temperatura del gas intracluster è nell'ordine di KeV ed, in questo caso, si possono considerare gli elettroni in un limite non relativistico e ritenere che la distribuzione di energia degli stessi sia puramente termica;
- *effetto non termico*: in alcune zone degli ammassi (ad esempio aloni radio) sono presenti elettroni altamente relativistici per cui la distribuzione energetica non potrà più essere approssimata a quella termica;
- *effetto cinetico*: in questo caso il cluster ha un moto proprio rispetto all'osservatore e ciò causa una distorsione nello spettro di temperatura. Questa situazione, in generale, si può verificare contemporaneamente ad una delle due precedenti.

Storicamente il mezzo intracluster è stato studiato nella banda X e grazie alla combinazione tra le osservazioni a raggi X e l'effetto SZ, è possibile determinare la distanza angolare. Infatti, si trova che la variazione di intensità dovuta all'effetto SZ è:

$$\Delta I(x) = I_0 \int n_e \sigma_T \Psi(x, T_e) dl \quad (3.18)$$

dove n_e è la densità degli elettroni, $\Psi(x, T_e)$ è lo spettro dovuto all'effetto. Inoltre si trova che la brillanza ai raggi X è:

$$b_X = \frac{1}{4\pi(1+z)^3} \int n_e^2 \Lambda_e(E, T_e) dl \quad (3.19)$$

in cui $\Lambda_e(E, T_e)$ è l'emissività spettrale del cluster nei raggi X. Inoltre è possibile scrivere $dl = D_A d\zeta$, dove D_A è la distanza angolare e ζ è la misura angolare di distanza lungo la linea di vista. Per invertire queste relazioni e calcolare così la distanza angolare, si può supporre di descrivere la distribuzione degli elettroni (n_e), la temperatura (T), l'emissività spettrale ($\Lambda_e(E, T_e)$) e lo spettro dell'effetto SZ ($\Psi(x, T_e)$) in modo tale che ognuna di queste 4 funzioni sia centrata in un valore di riferimento (diverso per ogni funzione) e lo sviluppo angolare sia dato da funzioni adimensionali (anche esse diverse), secondo le variabili ζ, θ l'angolo dalla linea di vista e ϕ l'angolo azimutale rispetto alla linea di vista:

$$n_e(\vec{r}) = n_{e0} f_n(\theta, \phi, \zeta) \quad (3.20)$$

$$T_e(\vec{r}) = T_{e0} f_T(\theta, \phi, \zeta) \quad (3.21)$$

$$\Lambda_e(E, T_e) = \Lambda_{e0} f_\Lambda(\theta, \phi, \zeta) \quad (3.22)$$

$$\Psi(x, T_e) = \Psi_0 f_\Psi(\theta, \phi, \zeta) \quad (3.23)$$

Bisogna però fare attenzione alle ultime due in quanto sono legate esplicitamente a n_e e T_e . Utilizzando queste relazioni e combinando la 3.18 e la 3.19, si trova:

$$D_A \propto \frac{\Delta I(x)^2}{\theta b_x} \quad (3.24)$$

Quindi dalla distanza angolare è possibile calcolare la distanza di luminosità e conseguentemente la costante di Hubble.

3.2.2 Anisotropie della CMB

Le anisotropie della radiazione di fondo cosmico sono state una scoperta fondamentale nella cosmologia moderna, infatti ci permettono di comprendere e di calcolare i parametri presenti nella 2.12: questo è possibile studiando lo spettro di potenza angolare della CMB. L'origine delle anisotropie è rintracciabile nelle fluttuazioni che si hanno tra le 4 componenti che costituiscono il plasma primordiale: fotoni, barioni, neutrini e materia oscura. Se le fluttuazioni delle diverse componenti sono proporzionali tra di loro e non vi è scambio di energia, allora si parla di *fluttuazioni adiabatiche*; se invece la somma delle diverse fluttuazioni di densità è pari a zero, allora si parla di *fluttuazioni isoterme*. Il problema delle informazioni che ricaviamo dallo spettro è dovuto alla 2.13, che lega tra di loro i parametri cosmologici. La 2.13 può essere espressa in modo diverso scrivendo la costante di Hubble come $100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Di conseguenza le densità fisiche si possono scrivere come $\omega_i = \Omega_i h^2$, quindi:

$$h^2 = \omega_r + \omega_m + \omega_\Lambda + \omega_k \quad (3.25)$$

La densità ω_m , in realtà, non ha solo una componente, infatti l'universo è composto sia da materia barionica che da materia oscura fredda, per cui risulta $\omega_m = \omega_b + \omega_c$. La 3.25 pone quindi dei vincoli alla determinazione della costante di Hubble, che possono essere tolti solo nel caso in cui siano note tutte le densità.

Per ottenere informazioni riguardo i vari parametri di densità sfruttando la CMB, si utilizza lo spettro di potenza angolare. Le fluttuazioni della CMB possono essere espresse come differenze di temperatura e la variazione rispetto ad una direzione θ e ϕ può essere scritta come:

$$\Delta(\theta, \phi) = \frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.26)$$

dove $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono le armoniche sferiche. Tra due direzioni contraddistinte dai coni direttori \vec{n} e \vec{n}' è possibile calcolare la funzione di correlazione tra due punti separati di un angolo θ ($\vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos \theta$):

$$c(\theta) = < \Delta(\vec{n}) \Delta(\vec{n}') > = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \theta) \quad (3.27)$$

dove $P_l(\cos \theta)$ sono i polinimi di Legandre derivanti dalle armoniche sferiche, e C_l rappresenta lo spettro di potenza di angolare. Poichè la CMB può essere descritta da una distribuzione gaussiana, nel caso in cui si analizzasse la situazione in cui $\theta = 0$, allora nella 3.27 si avrebbe $\vec{n} = \vec{n}'$ e si otterrebbe:

$$c(0) = < \Delta(\vec{n}) \Delta(\vec{n}) > = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l$$

che corrisponde alla varianza della distribuzione gaussiana. Per calcolare questo termine, si può graficare la funzione $\frac{1}{4\pi}(2l+1)C_l$ e ricavarne l'area sotto la curva. In genere però, si grafica l in scala logaritmica, per cui la funzione da graficare sarà del tipo $l(l+1)C_l/4\pi$. Il grafico così ottenuto presenta diversi picchi, i quali hanno un significato fisico profondo e ci permettono di calcolare alcuni parametri di densità:

- *il primo picco* nasce da una prima compressione che raggiunge il massimo nella fase di disaccoppiamento. Permette di ricavare informazioni riguardo la scala angolare della superficie di ultimo scattering, e di conseguenza capire la geometria dell'universo;
- *il secondo picco* invece è legato ad una fase di massima rarefazione al tempo del disaccoppiamento e permette di stimare la densità di barioni;
- *il terzo picco* è dovuto alla seconda compressione (sempre nella fase di disaccoppiamento) e fornisce informazioni riguardo la densità di materia oscura.

Per cui, sfruttando queste informazioni, possiamo ridurre le variabili incognite della 3.25 e di conseguenza cercare di ricavare informazioni riguardo h e circa la costante di Hubble.

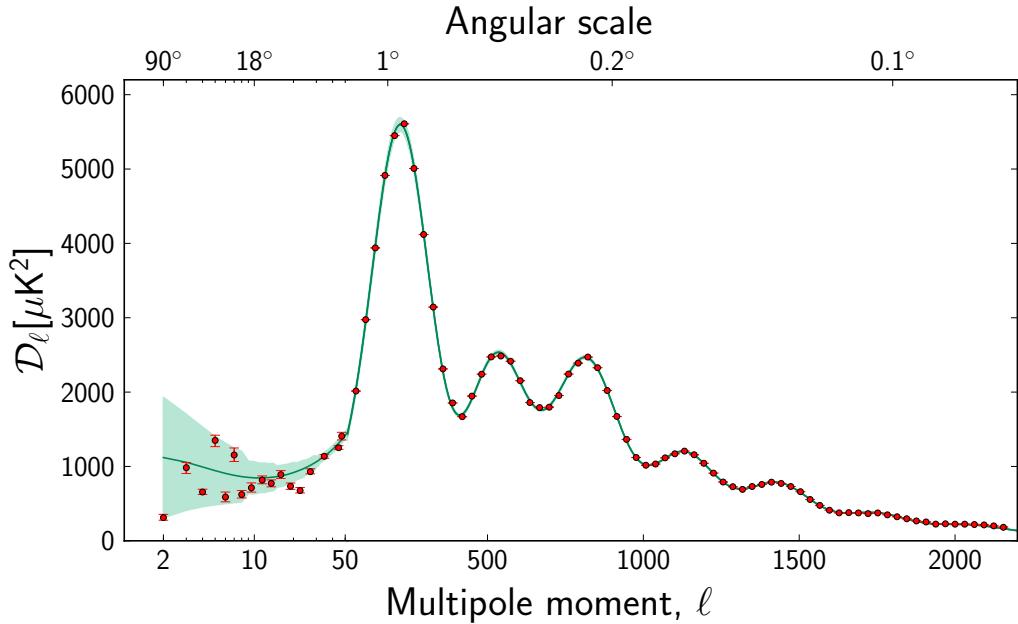


Figura 3.4. Grafico più recente dello spettro di potenza angolare della CMB (Planck Collaboration 2013)

Oscillazioni acustiche dei barioni Le anisotropie della radiazione di fondo cosmico hanno diverse origini e diverse cause: una di queste è rintracciabile nel legame (attraverso lo scattering Thomson) che si ha tra barioni e fotoni prima della fase di ricombinazione e disaccoppiamento. L'attrazione gravitazionale tra i barioni tende a creare delle sovradensità, mentre la pressione dovuta ai fotoni tende a rompere questi aloni densi. L'effetto combinato di queste due forze genera delle oscillazioni nel fluido composto da fotoni. Queste oscillazioni corrispondono a delle perturbazioni nel fluido; è possibile immaginare che si propaghino come onde sferiche di tipo acustico con una velocità $c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}$, dove R tiene conto del rapporto tra

le densità dei barioni e quelle dei fotoni ed è pari a $\frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$. Quando però si raggiunge la fase di ricombinazione, i fotoni sono liberi di propagarsi e la pressione sui barioni è rimossa, per cui non vi è più la possibilità di avere delle oscillazioni, e se vi sono delle sovradensità, queste rimangono e si possono formare con maggiore probabilità ad una distanza comobile s tale che:

$$s = \int_{z_{rec}}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m H_0^2}} \frac{2c}{\sqrt{3z_{eq} R_{eq}}} \ln \frac{\sqrt{1 + R_{rec}} + \sqrt{R_{rec} + R_{eq}}}{1 + \sqrt{R_{eq}}} \quad (3.28)$$

dove il pedice eq si riferisce al tempo dell'equivalenza tra radiazione e materia, mentre rec si riferisce alla fase di ricombinazione. Le sovradensità che rimangono a questa scala caratteristica inizieranno ad attrarre, per effetti gravitazionali, altra materia (sia barionica che oscura) e inizieranno a formarsi delle galassie, per cui ci si aspetta di trovare molte galassie separate da questa distanza s .

Per ricavare informazioni riguardo la scala caratteristica, è possibile utilizzare la funzione di correlazione $\epsilon(r) \propto (r/r_0)^\gamma$, dove $r_0 = 5h^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Questa funzione

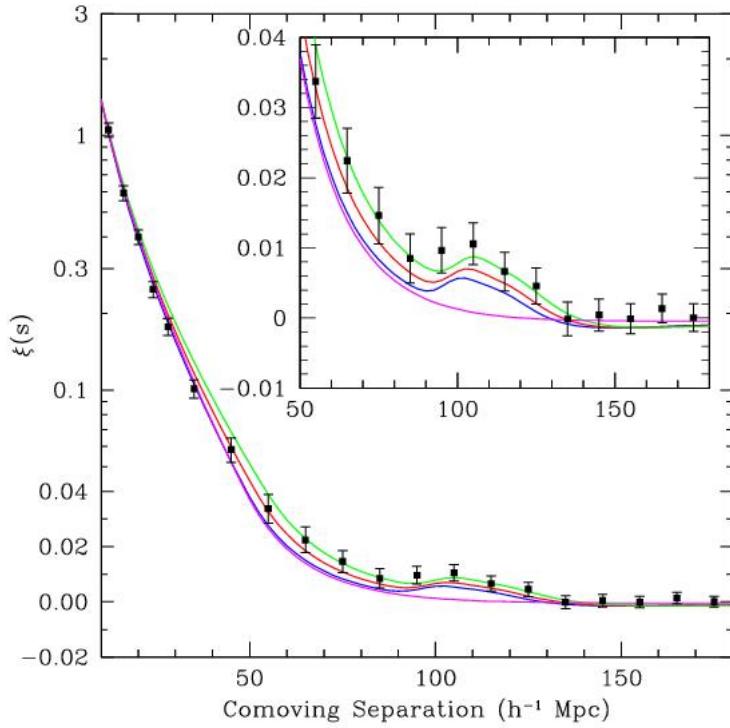


Figura 3.5. Grafico della funzione di correlazione, in cui è evidenziato il picco dovuto agli eccessi di cluster per una distanza r (Eisenstein et al. 2005, *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies*).

permette di identificare se sono presenti degli eccessi di cluster ad una determinata distanza, rispetto ad una distribuzione uniforme con la stessa densità media. Infatti, graficando la funzione di correlazione, è possibile individuare subito la scala caratteristica, in quanto questa dovrà apparire come un picco o come un minimo locale.

La scala caratteristica può essere utilizzata in combinazione con il test di Alcock-Paczynski, il quale fornisce un vincolo al prodotto $H(z)d_A(z)$ misurando $\Delta z/\Delta\theta$ per superfici sferiche sconosciute. In questo caso però, si pone il raggio della sfera pari ad s ed è possibile quindi disaccoppiare questo prodotto. Si ha, infatti:

$$d_A(z) = \frac{s_\perp}{\Delta\theta(1+z)} \quad (3.29)$$

dove vi è s_\perp in quanto si deve considerare la proiezione tangenziale. La costante di Hubble ad un redshift z è

$$H(z) = \frac{c\Delta z}{s_\parallel(z)} \quad (3.30)$$

Questa relazione non fornisce il valore di H_0 bensì il valore di H per un determinato redshift z , per cui per calcolare H_0 è possibile utilizzare l'equazione di Friedmann, a patto che siano noti i valori dei parametri di densità.

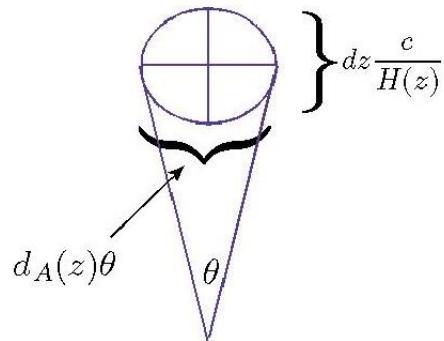


Figura 3.6. Schema del test di Alcock-Paczynski (Bassett & Hlozek 2009)

Quindi, nel caso delle informazioni ricavate dalla CMB non è possibile calcolare direttamente il valore di H_0 , ma solo porne dei vincoli o calcolarla ipotizzando alcuni valori dei parametri di densità in confronto ai quali H_0 è degenere.

Capitolo 4

Valori di H_0

Come si è visto nel capitolo 3, vi sono diversi metodi per calcolare la costante di Hubble: questi metodi forniscono dei valori diversi tra di loro, non sempre compatibili. Il primo valore di H_0 è stato ricavato da Edwin Hubble ed è stato di circa $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, il quale si discosta fortemente da quello che oggi è stimato essere nell'intervallo tra $60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Negli ultimi anni la costante di Hubble è stata calcolata molte volte, sfruttando tutti i possibili metodi; tra questi valori è utile ricordare alcuni risultati fondamentali:

- $H_0 = 65 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$: è uno dei primi valori misurato tramite gli effetti ossevabili della CMB dall'esperimento Boomerang (Netterfield et al. 2001). L'importanza di questo esperimento è dovuta al fatto che, per la prima volta, è stata fatta un'immagine di alta definizione di una piccola porzione della CMB;
- $H_0 = 73 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$: questo valore è il risultato fornito dall' Hubble Space Telescope (Riess et al. 2011) ed è stato ricavato utilizzando diversi metodi di distanza, sia con le Cefeidi sia con altri metodi quali Supernovae Ia. Quest'ultimo è stato calibrato utilizzando il metodo delle Cefeidi;
- $H_0 = 67.3 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$: è il valore più recente (Planck Collaboration 2013) ricavato dalle anisotropie della CMB tramite il satellite dell'ESA Planck. A differenza di Boomerang, il satellite Planck ha scandagliato tutte le direzioni ottenendo così una mappa completa della CMB.

4.1 H_0 e la statistica mediana

Nel corso degli anni sono stati eseguiti diversi esperimenti che hanno avuto come scopo quello di misurare la costante di Hubble. Si è così arrivati ad avere un gran numero di risultati, alcune volte non compatibili tra di loro (basti confrontare il primo valore misurato da Edwin Hubble, con quello prodotto dall'Hubble Space Telescope o dal satellite Planck). Una soluzione sarebbe quindi cercare di minimizzare il più possibile l'influenza dei valori troppo alti o troppo bassi, e per fare questo è possibile ricorrere alla *statistica mediana*, secondo cui il valore esatto di una grandezza fisica corrisponde alla mediana di un insieme di dati. Le ipotesi su cui si basa sono due:

- i dati devono essere tra di loro statisticamente indipendenti,

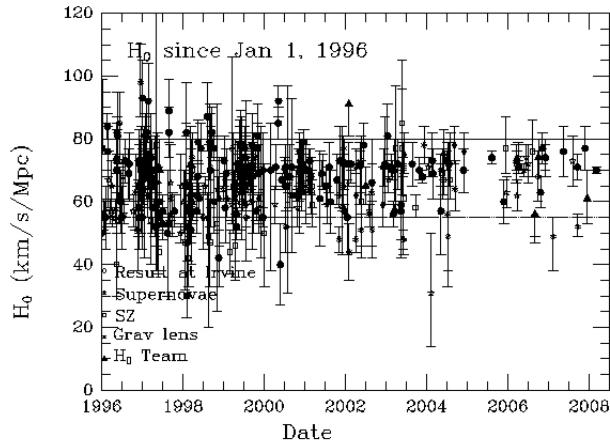


Figura 4.1. Grafico dei vari valori della costante di Hubble in funzione dell’anno in cui è stata fatta la misura, dal 1996 al 2008. I dati utilizzati sono quelli della lista di Huchra

- non ci devono essere errori sistematici complessivi.

Si immagini che i valori delle misure di H_0 rispettino queste due ipotesi e costituiscano un insieme di N misure. Questo insieme di dati appena creato può essere ordinato dal valore più basso a quello più alto segnando ogni dato con la lettera M_i con $i = 1, \dots, N$: allora la probabilità che la mediana dell’insieme si trovi tra M_i ed M_{i+1} è data da:

$$P = \frac{2^{-N} N!}{i!(N-1)!} \quad (4.1)$$

in cui è stato posto $M_0 = -\infty$ e $M_{N+1} = \infty$. Con la probabilità definita in questo modo è facile stabilire i limiti di confidenza (c.l.) tra M_j e M_{N+1-j} :

$$C_j = 100 \sum_{k=j}^{N-j} P_k \quad (4.2)$$

Il problema di questo metodo è che non tiene conto di eventuali errori sistematici, ma solo di quelli statistici. Una soluzione potrebbe essere quella di eseguire una statistica mediana anche per i parametri di calibrazione dei vari metodi e l’errore che si ricava può essere considerato come l’errore sistematico del singolo metodo. Il problema di una procedura del genere deriva dal fatto che questa non trova un errore sistematico globale, e quindi non può essere associato al valore di H_0 ricavato tramite la mediana; al più si può pensare di ricavare diversi valori di H_0 per ogni metodo e ad ognuno associargli il proprio errore. Per calcolare invece l’errore sulla mediana di tutti i valori si può considerare che ad oggi la maggior parte dei valori della costante di Hubble è stata ottenuta tramite metodi delle distanze. Pur escludendo dalla statistica mediana valori non legati a metodi di distanza (quali effetto SZ, o ricavati dal fit della CMB), il valore di H_0 non viene modificato, per cui una stima dell’errore sistematico può essere dato dall’errore proveniente dai diversi metodi di distanza, che rimangono comunque molteplici. Si può quindi pensare, che nel caso

della misura della costante di Hubble utilizzando il calcolo della distanza, la maggior parte dei metodi è calibrata utilizzando le Cefeidi, per cui un errore di calibrazione sulla legge di Leawitt si ripercuoterebbe su tutti questi metodi; perciò si può ritenere di stimare l'errore sistematico solo per il metodo delle Cefeidi e considerarlo uguale per tutti i metodi.

Il risultato che si ottiene analizzando la lista dei valori di H_0 di Huchra¹ (aggiornata al 07/10/2010) è $H_0 = 68 \pm 5.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Analizzando invece i differenti metodi, si possono vedere i vari valori della mediana della costante di Hubble nella Tabella 4.1.

Metodo	Numero di Valori	Mediana	95% c.l. (intervallo) $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
tutti i dati	553	68	$67 \sim 69$ (2)
Metodi Generali	111	79	$68 \sim 72$ (4)
Supernovae Ia	92	64	$60 \sim 65$ (5)
Altri	83	68	$60 \sim 71$ (11)
Sunyaev-Zel'dovich	46	60.5	$57 \sim 66$ (9)
B Tully-Fisher	23	60	$56 \sim 72$ (16)
IR Tully-Fisher	19	82	$65 \sim 90$ (25)
Fluttuazioni Superficiali di Brillanza	18	75	$71 \sim 82$ (11)
Tully-Fisher	18	72.5	$68 \sim 74$ (6)
CMB fit	16	69.5	$59 \sim 72$ (14)
I, R Tully-Fisher	9	74	

Tabella 4.1. Tabella dei valori della costante di Hubble calcolata con la mediana per diversi metodi. Il limite di confidenza al 95% è mostrato solo per i metodi che hanno più di 10 misure, perchè per gruppi più piccoli non ha valore statistico rilevante.

¹<https://www.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/hubble.plot.dat>

Capitolo 5

Conclusioni

Come si vede dall'ultimo grafico, i valori della costante di Hubble variano ancora in un intervallo significativo e molti valori risultano non essere compatibili tra di loro; inoltre, si nota come i valori calcolati con un determinato metodo, ma con diversi esperimenti, tendono invece a fornire risultati compatibili tra di loro. Questa situazione si verifica specialmente tra le misure derivanti dalla radiazione di fondo cosmico, rispetto a valori ricavati tramite le distanze: infatti, le prime risultano essere fortemente dipendenti dal modello scelto, mentre le seconde si basano su leggi che devono essere calibrate alla perfezione. Particolare è il caso delle misure di Reiss con l'Hubble Space Telescope (Cefeidi+Supernovae Ia) e del satellite Planck (CMB), le quali forniscono risultati abbastanza diversi tra di loro anche se tutti e due i valori hanno un margine di errore relativamente piccolo, tuttavia entrambe le misure si accordano molto bene con i relativi modelli. La statistica mediana invece risulta compatibile con entrambi i valori, anche se il valore della costante di Hubble si avvicina di più a quello ricavato tramite il satellite Planck in confronto a quello ottenuto dal Telescopio Hubble. L'importanza di far convergere i due modelli ad un unico risultato è fondamentale, in quanto si avrebbe la conferma sperimentale che la fisica dei due modelli può essere descritta da una sola teoria.

Bibliografia

- [1] F. Madore Barry. “The distance to NGC 2403”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1976).
- [2] B. Bassett e R. Hlozek. “Baryon acoustic oscillations”. In: *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*. 2010.
- [3] M. Birkinshaw. “The Suyaev-Zel'dovich effect”. In: *Physics Reports* (1999).
- [4] W. Carroll Bradley e A. Ostlie Dale. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson International Edition, 2007.
- [5] G. Chen e B. Ratra. “Median Statistics and the Hubble Constant”. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* (2011).
- [6] Planck Collaboration. “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”. In: *ArXiv e-prints* (2013).
- [7] G. Efstathiou e J. R. Bond. “Cosmic confusion: degeneracies among cosmological parameters derived from measurements of microwave background anisotropies”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (1999).
- [8] W. L. Freedman e B. F. Madore. “The Hubble Constant”. In: *araa* (2010).
- [9] J. R. Gott III et al. “Median Statistics, H_0 , and the Accelerating Universe”. In: *The Astrophysical Journal* (2001).
- [10] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley, 2002.