T. A. Bolokhov, Infrared extensions of the quadratic form of the ground state of scalar field theory, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2020, Volume 494, 64–74

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

Т. А. Болохов

ИНФРАКРАСНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Введение

Формулировка квантовой теории поля в терминах представления Шредингера является удобной базой для описания краевых эффектов на пространстве полевых конфигураций. В этом представлении квантовые состояния являются функционалами на конфигурационном пространстве классической теории, а наблюдаемые – линейными операторами, действующими на такие функционалы (см., например, [1], [2]). Функционалы свободной теории строятся как возбуждения основного состояния, которое является Гауссовым функционалом, то есть экспонентой некоторой отрицательно определенной квадратичной формы. При этом оказывается, что множество конфигураций, на котором определен Гауссов функционал, с точки зрения поведения в инфракрасной области меньше множества, допустимого в классической теории. В данной работе мы исследуем математические объекты, которые возникают при попытке расширить квадратичную форму основного состояния на конфигурации с более медленным убыванием на бесконечности.

Основное состояние свободного скалярного квантового поля строится как собственное состояние оператора Гамильтона, дейтсвие которого на функционалы $\Omega(\varphi)$ выглядит следующим образом

$$\mathcal{H} : \Omega(\varphi) \to -\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})}\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})}\Omega(\varphi) + Q_\Delta(\varphi)\Omega(\varphi), \tag{1}$$

где Q_Δ – это квадратичная форма лапласиана

$$Q_\Delta(\varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbb{R}^3} \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big|^2\, d^3x.$$

Ключевые слова: расширения квадратичных форм, свободный квантовый гамильтониан, сингулярные возмущения самосопряженных операторов.

После замены переменных в конфигурационном пространстве в виде преобразования Фурье

$$\varphi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3x$$

потенциальная часть гамильтониана переходит в интеграл с весом $|\vec{k}|^2$

$$Q_\Delta(\varphi(\vec{k})) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 |\varphi(\vec{k})|^2\, d^3k, \quad k = |\vec{k}|, \tag{2}$$

а кинетическая часть не меняет свой вид. Это позволяет переписать оператор $\mathcal{H}$ как интеграл по трехмерному пространству

$$\mathcal{H} : \Omega(\varphi) \to \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3k \Big(-\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{k})} \frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{k})} + k^2 |\varphi(\vec{k})|^2\Big)\Omega(\varphi),$$

и превратить уравнения движения

$$i\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \mathcal{H}\Omega \tag{3}$$

для каждой переменной $\varphi(\vec{k})$ в уравнение движения гармонического осциллятора с частотой k. Решения уравнения (3) теперь могут быть построены как осцилляции возбуждений основного состояния, задаваемого функционалом

$$\Omega_{\Delta^{1/2}} = \exp\{-\frac{1}{2}\int k|\varphi(\vec{k})|^2\, d^3k\} = \exp\Big\{-\frac{1}{2} Q_{\Delta^{1/2}}(\varphi)\Big\}.$$

Исходя из вида дейтсвия оператора (1), можно заметить, что в область его определения входят 2 раза дифференцируемые функционалы, заданные на области определения $\mathcal{D}[\Delta]$ квадратичной формы Q_Δ. В то же время, основное состояние $\Omega_{\Delta^{1/2}}$ задано на области определения $\mathcal{D}[\Delta^{1/2}]$ квадратичной формы $Q_{\Delta^{1/2}}$, которая на инфракрасно расходящихся функциях отличается от $\mathcal{D}[\Delta]$. Действительно, интеграл в (2) накладывает более мягкие условия на поведение $\varphi(\vec{k})$ в окрестности начала координат, чем интеграл в

$$Q_{\Delta^{1/2}}(\varphi(\vec{k})) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k|\varphi(\vec{k})|^2\, d^3k. \tag{4}$$

Например, функции с поведением

$$\varphi(\vec{k}) \simeq \frac{1}{k^2}, \quad k \to 0, \tag{5}$$

и даже более сингулярным, попадают в $\mathcal{D}[\Delta]$, но не попадают в $\mathcal{D}[\Delta^{1/2}]$.

Таким образом, целью настоящей работы является построение расширений $Q^M_{\Delta^{1/2}}$ квадратичной формы $Q_{\Delta^{1/2}}$

$$Q_{\Delta^{1/2}} \subset Q^M_{\Delta^{1/2}} : \quad Q_{\Delta^{1/2}}(\varphi) = Q^M_{\Delta^{1/2}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}[\Delta^{1/2}]$$

на множество функций с поведением вида (5) в окрестности начала координат. Такие расширения далее могут быть использованы для построения собственных функций квантовых операторов, включающих в себя квадратичное длинноволновое взаимодействие определенного вида.

§1. Симметрический оператор

Квадратичная форма Q_Δ на пространстве функций в $\mathbb{R}^3$ порождает скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 \overline{\varphi(\vec{k})} \psi(\vec{k})\, d^3k \tag{6}$$

и Гильбертово пространство $\mathcal{H}_\Delta$. Действительно, на каждой ограниченной области σ, не включающей окрестность начала координат, произведение (6) эквивалентно скалярному произведению из пространства $L_2(\sigma)$. Для того, чтобы показать, что каждый элемент из $\mathcal{H}_\Delta$ может быть представлен в виде функции, надо лишь убедиться, что норма, порожденная (6) запрещает особенности типа δ-функции в начале координат.

Квадратичная форма $Q_{\Delta^{1/2}}$ в скалярном произведении (6) задается самосопряженным оператором

$$T_\infty : \quad \varphi(\vec{k}) \to \frac{1}{k} \varphi(\vec{k}),$$

действительно

$$Q_{\Delta^{1/2}}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k |\varphi(\vec{k})|^2 = (\varphi, T_\infty \varphi)_\Delta, \quad \varphi \in \mathcal{D}(T_\infty).$$

Этот оператор определен на линейном множестве $\mathcal{D}(T_\infty)$, которое является пересечением пространств $\mathcal{H}_\Delta$ и $L_2(\mathbb{R}^3)$. Для построения расширений квадратичной формы $Q_{\Delta^{1/2}}$ мы воспользуемся идеями теории сингулярных возмущений дифференциальных операторов [3] и ее первоначальной реализации в импульсном представлении [4]. Выберем в качестве сингулярного потенциала следующую функцию

$$v(\vec{k}) = \frac{\rho}{k^3(k+\rho)}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \infty$$

и рассмотрим линейное множество

$$\mathcal{D}_v = \{\varphi \in \mathcal{H}_\Delta, \varphi \in L_2(\mathbb{R}^3) : (v, \varphi)_\Delta = 0\},$$

где под обозначением $(v, \varphi)_\Delta$ мы подразумеваем интеграл

$$(v, \varphi)_\Delta = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 v(\vec{k})\varphi(\vec{k})\, d^3k = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{k(k+\rho)}\varphi(\vec{k})\, d^3k.$$

Функция $v(\vec{k})$ не лежит в $\mathcal{H}_\Delta$, при этом множество $\mathcal{D}_v$ всюда плотно в $\mathcal{H}_\Delta$, а значит его можно использовать в качестве области определения оператора

$$T_v = T_\infty|_{\mathcal{D}_v} : \quad \varphi(\vec{k}) \to \frac{1}{k}\varphi(\vec{k}), \quad \varphi \in \mathcal{D}_v.$$

Этот оператор, являясь сужением самосопряженного оператора T_∞, симметричен. Для того, чтобы говорить о самосопряженных расширениях T_v, нужно проверить его замкнутость, то есть доказать, что верно

Утверждение. *Если последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}_v$ сходится в себе в пространстве $\mathcal{H}_\Delta$ и в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$, то существует $\varphi \in \mathcal{D}_v$, такой, что $||\varphi_n - \varphi||_{\mathcal{H}_\Delta} \to 0$ и $||\varphi_n - \varphi||_{L_2(\mathbb{R}^3)} \to 0$.*

Доказательство. Существование $\varphi \in \mathcal{H}_\Delta \cap L_2(\mathbb{R}^3)$, к которому сходится последовательность φ_n по нормам в пространствах $\mathcal{H}_\Delta$ и $L_2(\mathbb{R}^3)$, очевидно ввиду того, что T_v является сужением самосопряженного оператора T_∞. Из неравенства Коши-Буняковского для пространства $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{k(k+\rho)}\varphi(\vec{k})\, d^3k\Big| \leqslant \Big\|\frac{\rho}{k(k+\rho)}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \cdot \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

следует конечность интеграла

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{k(k+\rho)}\varphi(\vec{k})\, d^3k\Big| < \infty, \tag{7}$$

а из этого же неравенства, примененного к разности $\varphi_n - \varphi$, $\varphi_n \in \mathcal{D}_v$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{k(k+\rho)}(\varphi_n(\vec{k}) - \varphi(\vec{k}))\, d^3k\Big| \leqslant \Big\|\frac{\rho}{k(k+\rho)}||_{L_2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||\varphi_n - \varphi\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

следует, что интеграл (7) равен нулю для всех $\rho < \infty$.

Если $\rho = \infty$, то функция $k^2 v_\infty = \frac{1}{k}$ не интегрируема с квадратом в пространстве $\mathbb{R}^3$. В этом случае можно разделить интегрирование на две части: по шару B_Λ с центром в начале координат и по его дополнению $\mathbb{R}^3 \setminus B_\Lambda$

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{k}(\varphi_n(\vec{k}) - \varphi(\vec{k}))\, d^3k\Big| \leqslant \Big\|\frac{1}{k}\Big\|_{L_2(B_\Lambda)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{L_2(B_\Lambda)} \\ + \Big\|\frac{1}{k^2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda)} \cdot \|k(\varphi_n - \varphi)\|_{L_2(\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda)},\end{aligned} \tag{8}$$

и воспользоваться неравенствами

$$||(\varphi_n - \varphi)||^2_{L_2(B_\Lambda)} \leqslant ||(\varphi_n - \varphi)||^2_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

$$||k(\varphi_n - \varphi)||^2_{L_2(\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda)} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda} k^2|\varphi_n(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})|^2\, d^3k \leqslant ||\varphi_n - \varphi||^2_{\mathcal{H}_\Delta}.$$

Здесь правые части стремятся к нулю, и значит интеграл в левой части (8) также равен нулю. □

Таким образом, мы доказали, что T_v является замкнутым симметрическим оператором в пространстве $\mathcal{H}_\Delta$ с всюду плотной областью определения, а оператор T_∞ является его самосопряженным расширением.

§2. Самосопряженные расширения

Для построения других самосопряженных расширений оператора T_v воспользуемся формулами из теории Бирмана–Вишика–Крейна [5]. Мы знаем, что резольвента оператора T_∞ является оператором умножения на функцию $(\frac{1}{k} - \mu)^{-1}$

$$R(\mu): \quad \varphi(\vec{k}) \to \frac{1}{\frac{1}{k} - \mu}\varphi(\vec{k}).$$

Несложно увидеть, что, в соответствие с теорией сингулярных возмущений, результат применения резольвенты к потенциалу $v_\rho(\vec{k})$

$$d_\mu = R(\mu)v_\rho = \frac{\rho}{k^2(k+\rho)(1-k\mu)}$$

лежит в дефектном подпространстве оператора T_v

$$\begin{aligned}(R(\mu)v_\rho, (T_v - \bar{\mu})\varphi)_\Delta &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 \frac{1}{\frac{1}{k} - \bar{\mu}} v_\rho(\vec{k}) \Big(\frac{1}{k} - \bar{\mu}\Big) \varphi(\vec{k})\, d^3k \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} k^2 v_\rho(\vec{k}) \varphi(\vec{k})\, d^3k = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}_v.\end{aligned}$$

Таким образом, функция d_μ является аналитическим дефектным вектором оператора T_v для резольвенты $R(\mu)$

$$d_\mu - d_\lambda = (R(\mu) - R(\lambda))v = (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda)v = (\mu-\lambda)R(\mu)d_\lambda.$$

Вычислим скалярное произведение дефектных векторов

$$\begin{aligned}(d_{\bar{\mu}}, d_\lambda) = (R(\bar{\mu})v, R(\lambda)v) &= \frac{1}{\mu - \lambda}(v, (R(\bar{\mu}) - R(\lambda))v) \\ &= \lim_{\Lambda \to 0} \frac{\gamma(\mu, \Lambda) - \gamma(\lambda, \Lambda)}{\mu - \lambda},\end{aligned} \tag{9}$$

где мы ввели обозначение

$$\begin{aligned}\gamma(\mu, \Lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\Lambda} \frac{\rho^2}{k^3(k+\rho)^2(1-k\mu)}\, d^3k \\ &= 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \frac{\rho^2}{k(k+\rho)^2(1-k\mu)}\, dk \\ &= 4\pi \Big(\frac{\rho\mu}{1+\rho\mu} - \frac{\rho^2\mu^2}{(1+\rho\mu)^2} \ln(-\rho\mu) + \ln\frac{\rho}{\Lambda} - 1 + \sigma(\Lambda)\Big),\end{aligned} \tag{10}$$

и вынесли стремящиеся к нулю слагаемые в выражение $\sigma(\Lambda)$

$$\sigma(\Lambda) = \frac{\rho^2\mu^2}{(1+\rho\mu)^2} \ln(1 - \Lambda\mu) + \frac{1 + 2\rho\mu}{(1+\rho\mu)^2} \ln\frac{\Lambda + \rho}{\rho} + \frac{\Lambda}{(\Lambda+\rho)(1+\rho\mu)}.$$

При вычислении интеграла (10) мы считаем, что разрез у логарифма направлен вдоль отрицательной полуоси и выбрана такая ветвь, что

$$\overline{\ln \mu} = \ln \bar{\mu}.$$

После сокращения расходящихся слагаемых $\ln \Lambda$ и констант скалярное произведение (9) представляется как отношение разностей

$$(d_{\bar{\mu}}, d_\lambda) = \frac{\Gamma(\mu) - \Gamma(\lambda)}{\mu - \lambda}, \tag{11}$$

где

$$\Gamma(\mu) = -4\pi\Big(\frac{\mu^2\rho^2}{(1+\mu\rho)^2}\ln(-\mu\rho) - \frac{\mu\rho}{1+\mu\rho}\Big), \tag{12}$$

то есть в виде, необходимом для построения самосопряженных расширений оператора T_v. Из работ теории Бирмана–Вишика–Крейна следует, что резольвента $R_M(\mu)$ такого расширения может быть записана через резольвенту оператора T_∞ следующим образом

$$R_M(\mu) = R(\mu) + \frac{1}{M - \Gamma(\mu)} d_\mu(d_{\bar{\mu}}, \cdot\,). \tag{13}$$

Так как $\overline{\Gamma(\mu)} = \Gamma(\bar{\mu})$ и $\overline{d_\mu} = d_{\bar{\mu}}$, то выражение $R_M(\mu)$ удовлетворяет требованию

$$\overline{R_M(\mu)} = R_M(\bar{\mu})$$

для резольвенты самосопряженного оператора, только если M – это вещественный (самосопряженный) параметр. Следовательно разность $M - \Gamma(\mu)$ может иметь только вещественные нули по аргументу μ. Учитывая, что

$$\operatorname{Im}\Gamma(\mu \pm i0) = \mp 4\pi^2 \frac{\mu^2\rho^2}{(1+\mu\rho)}, \quad \mu > 0,$$

можно сделать вывод, что полюса в (13) могут появляться только при $\mu \leqslant 0$. Несложный анализ показывает, что функция $\Gamma(\mu)$ равна нулю при $\mu = 0$ и монотонно возрастает до бесконечности при $\mu \to -\infty$. Отсюда следует, что при $M < 0$ резольвента (13) не имеет полюсов, а соответствующее ей самосопряженное расширение T_M не имеет дискретного спектра. И, напротив, при любом $M \geqslant 0$ резольвента (13) имеет простой полюс, а расширение T_M имеет одномерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению, которое определяется как корень уравнения

$$\Gamma(\mu) - M = 0.$$

В случае $\rho = \infty$ происходит размерная трансмутация, подобная процессу, описанному в [6]. Функция $\Gamma(\mu)$ превращается в

$$\Gamma(\mu) = -4\pi\ln(-\kappa\mu),$$

где κ – новый размерный параметр модели. Знаменатель $M-\Gamma(\mu)$ теперь обращается в ноль при любом M, а соответствующее расширение T_M имеет отрицательное дискретное собственное значение.

§3. Перенормировка и квадратичная форма

Для того, чтобы записать квадратичную форму самосопряженного расширения оператора T_M, вычислим его действие в виде перенормировки возмущения оператора T_∞. Введем проекторы

$$P_\Lambda: \quad \varphi(\vec{k}) \to P_\Lambda \varphi(\vec{k}) = \chi(k-\Lambda)\varphi(\vec{k}),$$

где $\chi(k)$ – это ступенчатая функция Хевисайда. Векторы

$$v^\Lambda(\vec{k}) = P_\Lambda v(\vec{k}) = \frac{\rho\chi(k-\Lambda)}{k^3(k+\rho)}$$

лежат в пространстве $\mathcal{H}_\Delta$ и при $\Lambda \to 0$ слабо сходятся к сингулярному потенциалу $v(\vec{k})$. Рассмотрим самосопряженный оператор

$$T^\Lambda = P_\Lambda T_\infty - \alpha(\Lambda) v^\Lambda(v^\Lambda, \cdot) \tag{14}$$

и попытаемся построить его P_Λ-резольвенту в виде следующего выражения

$$R^\Lambda(\mu) = P_\Lambda R(\mu) + b(\mu) d_\mu^\Lambda (d_{\bar{\mu}}^\Lambda, \cdot), \tag{15}$$

где

$$d_\mu^\Lambda = P_\Lambda d_\mu = P_\Lambda R(\mu) v = R(\mu) v^\Lambda.$$

Подберем функцию $b(\mu)$ таким образом, чтобы при всех μ было выполнено равенство

$$R^\Lambda(\mu)(T^\Lambda - \mu) = P_\Lambda.$$

Подставим в это равенство выражения (14) и (15)

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= P_\Lambda R(\mu)(T_\infty - \mu) + b(\mu) d_\mu^\Lambda (d_{\bar{\mu}}^\Lambda, (P_\Lambda T_\infty - \mu)\,\cdot) \\ &\quad - \alpha b(\mu) d_\mu^\Lambda (d_{\bar{\mu}}^\Lambda, v^\Lambda)(v^\Lambda, \cdot) - \alpha R(\mu) v^\Lambda (v^\Lambda, \cdot) \\ &= P_\Lambda + (b(\mu) - \alpha b(\mu)(d_{\bar{\mu}}^\Lambda, v^\Lambda) - \alpha) d_\mu^\Lambda (v^\Lambda, \cdot), \end{aligned} \tag{16}$$

отсюда следует, что

$$b(\mu) - \alpha b(\mu)\gamma(\mu) - \alpha = 0,$$

где мы обозначили

$$\gamma(\mu) = \gamma(\mu, \Lambda) = (d_{\bar{\mu}}^\Lambda, v^\Lambda) = (v^\Lambda, R(\mu) v^\Lambda). \tag{17}$$

Выразим α через $b(\mu)$ и $\gamma(\mu)$

$$\alpha = \frac{b(\mu)}{1 + b(\mu)\gamma(\mu)}. \tag{18}$$

Мы хотим, чтобы функция $\alpha(\Lambda)$, участвующая в построении оператора T^Λ, не зависела от спектрального параметра μ. Тогда должно быть верно равенство

$$0 = \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{b'(1+b\gamma) - b(b'\gamma + b\gamma')}{(1+b\gamma)^2} = \frac{b' - b^2\gamma'}{(1+b\gamma)^2} = \frac{d(\frac{1}{b} + \gamma)^{-1}}{d\mu},$$

из которого следует, что сумма $\frac{1}{b} + \gamma$ не зависит от μ и функция $b(\mu)$ выражается через $\gamma(\mu)$ следующим образом

$$b(\mu, \Lambda) = \frac{1}{\alpha^{-1}(\Lambda) - \gamma(\mu, \Lambda)}.$$

Здесь константа интегрирования $\alpha^{-1}(\Lambda)$ подобрана так, чтобы функция $b(\mu)$ удовлетворяла соотношению (18). Подставим теперь конкретные функции v^Λ и $R(\mu)$ в скалярное произведение (17)

$$\begin{aligned}\gamma(\mu, \Lambda) = (v^\Lambda, R(\mu)v^\Lambda) &= \int\limits_0^\infty \frac{\rho^2\chi^2(k-\Lambda)}{k(k+\rho)^2(1-k\mu)}\, d^3k \\ &= 4\pi \int\limits_\Lambda^\infty \frac{\rho^2}{k(k+\rho)^2(1-k\mu)}\, d^3k.\end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, функция $\gamma(\mu, \Lambda)$ совпадает с функцией (10) из предыдущей части. Теперь подставим выражение для $b(\mu, \Lambda)$ в (15), получим

$$R^\Lambda(\mu) = P_\Lambda R(\mu) + \frac{1}{\alpha^{-1}(\Lambda) - \gamma(\mu, \Lambda)} d_\mu^\Lambda(d_{\bar\mu}^\Lambda, \cdot\,). \tag{19}$$

Мы хотим, чтобы резольвента $R^\Lambda(\mu)$ переходила в пределе $\Lambda \to 0$ в резольвенту (13)

$$R_M(\mu) = R(\mu) + \frac{1}{M - \Gamma(\mu)} d_\mu(d_{\bar\mu}, \cdot\,).$$

Это требование выполняется, если

$$\frac{1}{\alpha^{-1}(\Lambda) - \gamma(\mu, \Lambda)} \to \frac{1}{M - \Gamma(\mu)}$$

при $\Lambda \to 0$ или
$$\alpha^{-1}(\Lambda) \to \gamma(\mu, \Lambda) - \Gamma(\mu) + M.$$
Подставляя в правую часть формулы (10) и (12) получаем
$$\alpha^{-1}(\Lambda) \to \gamma(\mu, \Lambda) - \Gamma(\mu) + M = 4\pi\big(\ln\frac{\rho}{\Lambda} - 1 + \sigma(\Lambda)\big) + M.$$
Учитывая, что $\sigma(\Lambda) \to 0$ при $\Lambda \to 0$, можно сделать вывод, что если взять в качестве $\alpha(\Lambda)$ функцию
$$\alpha(\Lambda) = \Big(4\pi\big(\ln\frac{\rho}{\Lambda} - 1\big) + M\Big)^{-1},$$
то выражение (14) будет, по крайней мере слабо, стремиться к самосопряженному расширению T_M, определяемому параметром M. Такой вид представления действия оператора T_M позволяет записать выражение для его квадратичной формы в виде предела по параметру регуляризации Λ
$$Q^M_{\Delta^{1/2}}(\varphi) = \lim_{\Lambda\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda} k|\varphi(\vec{k})|^2\,d^3k - \alpha(\Lambda)\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda} \frac{\rho\varphi(\vec{k})}{k(k+\rho)}\,d^3k\Big|^2\Big). \quad (20)$$
Видно, что если функция $\varphi(\vec{k})$ попадает в область определения оператора T_∞, то она лежит в $L_2(\mathbb{R}^3)$, норма интеграла
$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\Lambda} \frac{\rho\varphi(\vec{k})}{k(k+\rho)}\,d^3k\Big| \leqslant \Big\|\frac{\rho}{k(k+\rho)}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \cdot \|\varphi(\vec{k})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$
ограничена, всё второе слагаемое стремится к нулю и правая часть в (20) переходит в интеграл
$$Q^M_{\Delta^{1/2}}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} k|\varphi(\vec{k})|^2\,d^3k = Q_{\Delta^{1/2}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(T_\infty).$$
В то же время, если $\varphi(\vec{k})$ ведет себя в окрестности начала координат как
$$\varphi(\vec{k}) \simeq \frac{1}{k^2}, \quad k \to 0,$$
то первое слагаемое в $Q^M_{\Delta^{1/2}}(\varphi)$ расходится как $-4\pi\ln\Lambda$, квадрат интеграла во втором слагаемом расходится как $16\pi^2(\ln\Lambda)^2$ и, с учетом знаменателя в $\alpha(\Lambda)$, ведущего себя как $-4\pi\ln\Lambda$, разность (20) приобретает конечное значение, зависящее от M. То есть квадратичная форма (20) является расширением квадратичной формы $Q_{\Delta^{1/2}}$.

Заключение

Мы показали, что квадратичная форма оператора $\Delta^{1/2}$, участвующая в построении основного состояния свободного квантового поля, имеет нетривиальные расширения на набор функций, сравнительно медленно (как $|\vec{x}|^{-1}$) убывающих на бесконечности. Полученные расширения зависят от искусственно введенного положительного размерного параметра ρ, вещественного безразмерного параметра расширения M и при отрицательных значениях последнего имеют однократный отрицательный дискретный спектр.

Список литературы

1. R. Jackiw, *Functional representations for quantized fields.* Published in: Asia Pacific Conf.1987:0003, Seoul Sympos.1987:0001, Contr. to: 1st Asia Pacific Conference on High-energy Physics: Superstrings, Anomalies and Field Theory.
2. M. Luscher, *Schrödinger representation in quantum field theory.* – Nucl. Phys. B **254** (1985), 52–57.
3. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbation of differential operators. Solvable Schrödinger type operators.* — Cambridge University Press (2000).
4. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом.* — Доклады АН СССР, **137**, вып. 5 (1961), 1011–1014.
5. A. Alonso, B. Simon, *The Birman – Krein – Vishik theory of selfadjoint extensions of semibounded operators.* — J. Operator Theory, **4** (1980), 251–270.
6. Л. Д. Фаддеев, *Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга-Миллса.* — Теор. Мат. Физ., **148** (2006), стр. 133.

Bolokhov T. A. Infrared extensions of the quadratic form of the ground state of scalar field theory.

We extend the quadratic forms of the Gaussian functionals of the free quantum scalar field theory to the set of functions decreasing in the infinity as $|\vec{x}|^{-1}$. We use the momentum-space representation (after the Fourrier transform) and as the scalar product we take the product generated by the quadratic form of the Laplace operator (potential term of the quantum Hamiltonian).

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 14 сентября 2020 г.