

多量子比特 WV 纠缠态在 Lipkin-Meshkov-Glick 模型下的量子 Fisher 信息*

李岩^{1)2)†} 任志红³⁾

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院, 计算物理与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (山西师范大学物理与信息工程学院, 太原 030031)

(2023 年 7 月 20 日收到; 2023 年 8 月 20 日收到修改稿)

量子 Fisher 信息在参数估计理论和量子精密测量领域扮演着非常重要的角色, 不仅可以用来标定量子系统的测量精度极限, 还可用于有益量子计量的纠缠态判定. 本文从量子测量的角度出发, 对多比特 WV 态 ($\alpha|W_N\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|00\dots 0\rangle$) 进行研究, 通过计算其在局域操作下和 Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) 非局域操作模型下的量子 Fisher 信息, 分析其在精密测量方面的表现. 研究发现: 在局域操作下, 随着参数 α 由 0 到 1 的变化, 多比特 WV 态的量子 Fisher 信息逐渐变大, 表明其量子纠缠程度在不断增加, 也体现出更强的量子测量能力. 在 LMG 非局域操作下, 随着相互作用强度 γ 的增大, $N=3$ 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息值趋于稳定, 几乎不受参数 α 的影响, 而当体系量子比特数 $N>3$ 时, 量子 Fisher 信息值会随参数 α 的变大而变大; 当参数 α 固定时, 多比特 WV 态的量子 Fisher 信息会随着相互作用强度 γ 的增强而变大, 呈现出相互作用强度越大, WV 态的量子测量能力越强.

关键词: 量子 Fisher 信息, WV 纠缠态, Lipkin-Meshkov-Glick 模型, 精密测量

PACS: 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Ta

DOI: 10.7498/aps.72.20231179

1 引言

作为数理统计中重要的信息量, Fisher 信息客观反映了人们对待估计参数 (例如相位 θ) 或物理量 (例如重力常数 g) 的相关信息的掌握程度^[1-5], 其值越大, 表明对待估计参数认识越准确, 这也是精密测量所追求的目的^[6-10]. 在经典测量理论中, Fisher 信息用来估计条件概率相乘所得最大似然函数 (maximum likelihood function) 的方差, 明确地体现出采集数据越多, 或样本越大, 待估计参数的波动或方差越小, 获取的待估参数信息量越准确^[11]. 在量子测量领域, 条件概率的获取方式有所

不同, 是通过量子算符测量实现的, 对测量算符的优化可以帮助我们获得最大的 Fisher 信息量, 即量子 Fisher 信息^[12].

Fisher 信息在量子力学中的早期拓展是美国物理学家 Wootters 教授^[13] 在 1981 年研究量子态的统计距离和希尔伯特空间关系时提出的. 之后, 1994 年美国物理学家 Braunstein 教授和 Caves 教授^[12] 在研究统计距离和量子态的几何量时给出了更为严格的不确定关系和量子 Fisher 信息之间的关系. 2009 年意大利光学研究所 Smerzi 研究员和 Pezze 博士^[14] 首次提出了可以通过量子 Fisher 信息来判定有益于量子计量的量子纠缠, 并给出了相关判据. 量子 Fisher 信息可以看作是量子态本身

* 国家自然科学基金 (批准号: 12305024, 12205176) 和山西省应用基础研究计划 (批准号: 202203021212193, 202103021223251) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: li8989971@163.com

特有的一种属性, 依据量子态的几何学观点, 其反映了量子态在外界扰动下统计速度的快慢, 而量子纠缠在局域操作扰动下的反应速度 (或统计速度) 要高于分离态, 故可以用来判定量子纠缠 [15]. 近年来, 量子 Fisher 信息被广泛地应用在量子信息科学的各个方面, 包括量子计量学 [6,16,17]、量子相变刻画 [18-21]、量子纠缠及结构判定 [14,15,22-26]、量子混沌 [27-29] 以及量子计算 [30,31] 等. 借助量子 Fisher 信息, 可以迅速地捕捉或获取量子态的相关信息, 为将来开展相关的技术应用提供理论基础.

多量子比特 WV 态, 即 W 态和真空态 (vacuum state) 的叠加态,

$$|\psi_{\text{WV}}^{(N)}\rangle = \alpha |W_N\rangle + \beta |00\dots 0\rangle, \quad (1)$$

其中, 参数 α 和 β 满足关系 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $|00\dots 0\rangle$ 为真空态, $|W_N\rangle$ 是常见的多比特 W 态, 可表示为 [24]

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|0^{\otimes(N-1)}1\rangle + \sqrt{N-1}|W_{N-1}\rangle|0\rangle). \quad (2)$$

容易发现, 当 $\alpha = 0$ 时, 即常见的直积分离态, 而当 $\alpha = 1$ 时, 即 N 量子比特 W 态. 这两种特殊情况的量子 Fisher 信息都被大家所熟知, 但二者的叠加态很少被研究. 近期, 类 WV 量子态被广泛地用来研究量子纠缠的单配性和多配性, 并给出了相应的判定依据 [32-35].

本文从量子测量的角度出发, 对多量子比特 WV 态开展研究, 通过计算其在局域操作和 LMG 非局域操作模型下的量子 Fisher 信息, 探究其在精密测量方面的表现. 在局域操作下, 随着参数 α 从 0 到 1 的变化, 体系的量子 Fisher 信息逐渐增大, 表明其量子纠缠程度逐渐变强, 拥有更好的量子测量能力. 在 LMG 非局域操作模型下, 固定相互作用强度 γ , 研究了不同比特 WV 态的量子 Fisher 信息随参数 α 的变化, 发现随着相互作用强度 γ 的变强, $N = 3$ 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息近乎不受参数 α 的影响, 而 $N > 3$ 比特 WV 态的量子 Fisher 信息会随 α 的变大逐渐变大. 当固定参数 α 时, 多比特 WV 态的量子 Fisher 信息随相互作用强度 γ 的变强而变大, 体现了非局域操作会大大增强 WV 态的量子测量能力. 与此同时, 也再次验证了当相互作用强度 γ 较大时, $N = 3$ 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息受参数 α 的影响很小, 这为将来实验上实现 $N = 3$ 量子比特 WV 态的高精密测量提供了一种理论依据.

2 模型及相关计算

2.1 量子 Fisher 信息

量子 Fisher 信息是经典 Fisher 信息的量子版本, 即考虑量子力学基本原理后计算所得的信息量. 在无偏差参数估计中, Fisher 信息扮演着非常重要的角色, 可以给出系统测量精度的理论极限. 一般地, 针对实验上获取的条件概率分布 $p(\mu|\theta)$, 其 Fisher 信息 $F(\theta)$ 可以表示为

$$F(\theta) \equiv \sum_{\mu} p(\mu|\theta) \left(\frac{\partial \log p(\mu|\theta)}{\partial \theta} \right)^2. \quad (3)$$

依据统计学中的克拉美罗下界 (Cramér-Rao lower bound) [2,3],

$$\Delta\theta \geq 1/\sqrt{mF(\theta)}, \quad (4)$$

其中, m 代表试验样本的次数, 当 m 趋于无穷大时, 可以得到测量精度的极限. 从中容易看出, Fisher 信息值越大, 误差 $\Delta\theta$ 越小, 参数估计就越准确.

在量子力学中, 通过对可观测量算符 \hat{M} 进行正算符投影测量 (POVM), $\sum_i \hat{M}_i = 1$, 条件概率分布可表示为 $p(\mu|\theta) = \text{Tr}[\hat{\rho}_{\theta} \hat{M}_i]$, 将其代入 (3) 式, 经过优化选取测量算符, 便得到量子纯态的量子 Fisher 信息 [12]:

$$F_{\text{Q}}[\hat{\rho}, \hat{H}] = 4\Delta\hat{H}^2, \quad (5)$$

其中, $\hat{\rho}$ 为系统量子初始态的密度矩阵, $\hat{\rho}_{\theta}$ 为量子初始态在局域操作或非局域操作下演化后的密度矩阵 (包含相位 θ 的信息), \hat{H} 为相位 θ 的产生算符. 相位 θ 中通常包含待测物理量的相关信息, 例如 $\theta = \omega t$, 如果知道时间的确切信息, 就可以反推出频率 ω 的信息, 进而开展频率的精密测量. 此处, 本文给出的是纯态的量子 Fisher 信息的计算公式, 混合态的量子 Fisher 信息公式见文献 [24]. 类似地, 将量子 Fisher 信息代入 (4) 式, 便可得到量子版本的克拉美罗下界:

$$\Delta\theta_{\min} \geq 1/\sqrt{mF_{\text{Q}}}. \quad (6)$$

该测量极限也常作为评定待测量子态是否成为量子增强计量资源的标准之一 [36].

2.2 LMG 模型下的量子 Fisher 信息计算

通常情况下, 我们所讲的量子 Fisher 信息是

在局域操作下获得的, 即

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{2} \sigma_n^{(i)}, \quad (7)$$

其中, μ_i 代表非均匀的线性耦合, $\sigma_n^{(i)} = \sigma^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ 表示第 i 个量子比特的泡利矩阵, \mathbf{n} 代表方向矢量. 在给定量子纯态 $\hat{\rho}$ 下, 将 \hat{H}_0 代入方程 (5), 经过优化计算, 找到 Fisher 信息的最大值, 便得到了量子 Fisher 信息.

在非局域操作下, 或包含相互作用的环境中, 操控量子体系的哈密顿量可简单描述为^[23]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (8)$$

其中, \hat{H}_1 代表相互作用项. 这里考虑最简单的情况, 即全域两体相互作用, Lipkin-Meshkov-Glick

模型^[37],

$$\hat{H}_1 = \sum_{i,j=1}^N \frac{V_{ij}}{4} \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}, \quad (9)$$

这里 $V_{ij} = V_{ji}$ 代表两体之间均匀的相互作用强度. 依据纯态量子 Fisher 信息计算公式, LMG 模型下量子态的量子 Fisher 信息可表示为^[26]

$$F_Q = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2, \quad (10)$$

其中, $v_0^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_0$, $v_1^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_1$ 和 $v_2^2 = 4(\langle \{\hat{H}_0, \hat{H}_1\} \rangle - 2\langle \hat{H}_0 \rangle \langle \hat{H}_1 \rangle)$ 分别表示局域操作下的量子 Fisher 信息、非局域操作下的量子 Fisher 信息、以及交互量子 Fisher 信息. 对于给定的量子纯态, 其在两体非局域操作下的量子 Fisher 信息可通过计算以下公式得到:

$$v_0^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i^2 (1 - \langle \sigma_n^{(i)} \rangle^2) + \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \mu_i \mu_j \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \rangle \langle \sigma_n^{(j)} \rangle \right), \quad (11)$$

$$v_1^2 = \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \frac{V_{ij}^2}{2} \left(1 - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle^2 \right) + \sum_{i,j,k=1; i \neq j \neq k}^N V_{ij} V_{jk} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(k)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \rangle \langle \sigma_n^{(k)} \rangle \right) \\ + \sum_{i,j,k,l=1; i \neq j \neq k \neq l}^N \frac{V_{ij} V_{kl}}{4} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle \right), \quad (12)$$

$$v_2^2 = 2 \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \mu_i V_{ij} \left(\langle \sigma_n^{(j)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(i)} \rangle \right) + \sum_{i,j,k=1; i \neq j \neq k}^N \mu_k V_{ij} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(k)} \rangle \right). \quad (13)$$

容易看出, 上式的计算过程是比较复杂的, 但鉴于多量子比特 WV 纠缠态具有很好的交换对称性, 故在随后的计算过程中仅需对单比特项 $\langle \sigma_n^{(i)} \rangle$ 和多比特项 $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle$, $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle$, $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle$ 进行计算, 便可获得最终的量子 Fisher 信息.

3 理论计算与数值模拟

下面分别在局域操作下和 LMG 非局域操作下计算不同量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息, 通过对其进行分析研究, 探究其在精密测量方面的表现.

3.1 多比特 WV 态在局域操作下的量子 Fisher 信息

对于 3 量子比特 WV 态来说, 首先考虑局域操作下的量子 Fisher 信息计算, 不失一般性, 令

$\mu_i = 1$, $\sigma_n^{(i)} = a\sigma_x^{(i)} + b\sigma_y^{(i)} + c\sigma_z^{(i)}$. 这里选取 $N = 3$ 量子比特 WV 态和 $N > 3$ 量子比特 WV 态两种情况进行量子 Fisher 信息计算:

$$|\psi_{\text{WV}}^{(3)}\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + \beta|00\dots 0\rangle, \quad (14)$$

单独每个量子比特的一阶矩或在量子态下的平均值是相同的, 即

$$\langle \sigma_n^{(i)} \rangle = \frac{2a\alpha\beta}{\sqrt{3}} + c \left(\frac{\alpha^2}{3} + \beta^2 \right). \quad (15)$$

相互作用量子比特的平均值也相同, 表示为

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle = \left(\frac{2}{3} - c^2 \right) \alpha^2 + \frac{4ac\alpha\beta}{\sqrt{3}} + c^2 \beta^2, \quad (16)$$

将 (15) 式和 (16) 式代入 (11) 式, 便得到了量子 Fisher 信息的解析表达式:

$$F_Q^{(3)} = 3 + 2(3c^2 - 2)\alpha^2 + 8\sqrt{3}ac\alpha\beta + 6c^2\beta^2 - [2\sqrt{3}a\alpha\beta + c(\alpha^2 + 3\beta^2)]^2. \quad (17)$$

当量子比特数 $N > 3$ 时, 单量子比特和相互作用量子比特在 WV 量子态下的平均值表示为

$$\langle \sigma_n^{(i)} \rangle = \frac{2a\alpha\beta}{\sqrt{N}} + c \left[\frac{(N-2)\alpha^2}{N} + \beta^2 \right], \quad (18)$$

和

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle = \frac{1}{N} [2 + (N-6)c^2]\alpha^2 + \frac{4ac\alpha\beta}{\sqrt{N}} + c^2\beta^2, \quad (19)$$

将二者代入 (11) 式, 可以得到 N 比特 WV 态在局域操作下的量子 Fisher 信息为

$$F_Q^{(N)} = N + (N-1)[2 + (N-6)c^2]\alpha^2 + 4\sqrt{N}(N-1)ac\alpha\beta + (N^2 - N)c^2\beta^2 - [(N-2)c\alpha^2 + 2\sqrt{N}a\alpha\beta + Nc\beta^2]^2. \quad (20)$$

明显地, 当 $\alpha = 0$ 时, 量子 Fisher 信息约化为 $F_Q^{(N)} = N(1 - c^2)$, 即分离态的量子 Fisher 信息; 当 $\alpha = 1$, 量子 Fisher 信息为 $F_Q^{(N)} = (3N - 2)(1 - c^2)$, 即为 W 态的量子 Fisher 信息. 图 1 给出了多比特 WV 态在局域操作下的量子 Fisher 信息 (最优极大值) 随参数 α 的变化, 从下到上 (黑色实线到浅粉色实线) 分别代表 3 量子比特 WV 态, 4 量子比特 WV 态, ..., 8 量子比特 WV 态的结果. 随着参数 α 的变大, 体系的量子 Fisher 信息值逐步增大, 表明了体系量子纠缠程度不断增加. 此外, 根据克拉美罗下界公式, 可以得出随着参数 α 的变化, 量子体系

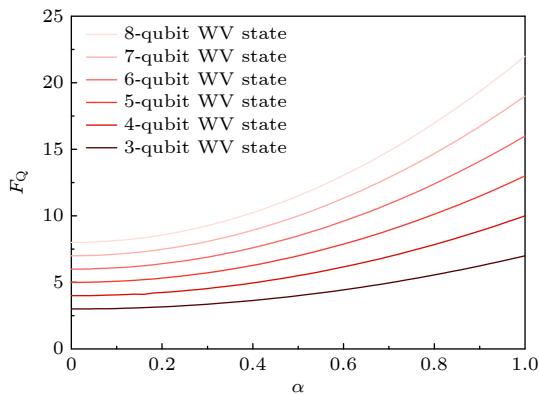


图 1 N 量子比特 WV 态在局域操作下的量子 Fisher 信息随参数 α 的变化. 从下 (黑色实线) 到上 (浅粉色实线) 分别表示 3 量子比特 WV 态到 8 量子比特 WV 态的结果

Fig. 1. Quantum Fisher information of an N -qubit WV state with respect to α under local operation. From bottom (black line) to top (light pink line) it respectively denotes the result from 3-qubit WV state to 8-qubit WV state.

的高精度测量能力也逐步提高.

3.2 多比特 WV 态在 LMG 模型下的量子 Fisher 信息

随着量子科技的不断发展, 多体纠缠的实验和理论研究成为了当前乃至未来量子信息技术发展的关键, 然而想要独立地对多体纠缠中的单个量子比特进行完美的局域操作很难, 尤其是对相邻的量子比特来说, 它们的局域操作之间存在着串扰效应, 会影响最终的计算结果. 因此, 这里探究非局域操作对多比特 WV 态量子 Fisher 信息的影响.

选择全域两体相互作用的非局域操作, 即 LMG 模型, 开展相关研究, 计算在此模型下多比特 WV 态的量子 Fisher 信息, 进而探究其在精密测量方面的表现. 类似地, 对每个量子比特有 $\mu_i = 1$, $V_{ij} = \gamma$ 且 $\sigma_n^{(i)} = a\sigma_x^{(i)} + b\sigma_y^{(i)} + c\sigma_z^{(i)}$. 通过 (10) 式, 可以解析得到 N 比特 WV 态的量子 Fisher 信息. 下面分别针对 $N = 3$ 比特、 $N > 3$ 比特 WV 态进行量子 Fisher 信息的计算研究.

对于 3 量子比特 WV 态来说, 单个量子比特的平均值和相互作用量子比特的平均值分别为 (15) 式和 (16) 式. 3 量子比特相互作用的平均值表示为

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle = c[(2 - 3c^2)\alpha^2 + 2\sqrt{3}ac\alpha\beta + c^2\beta^2]. \quad (21)$$

将其代入 (10) 式, 可以得到

$$F_{\text{LMG}}^{(3)} = 3 + 2(3c^2 - 2)\alpha^2 + 8\sqrt{3}ac\alpha\beta + 6c^2\beta^2 - [2\sqrt{3}a\alpha\beta + c(\alpha^2 + 3\beta^2)]^2 + \gamma \left\{ 8\sqrt{3}a\alpha(1 - \alpha^2)\beta + 4\sqrt{3}ac^2 \times \alpha\beta(3 + \alpha^2 - 9\beta^2) + 6c^3[\alpha^4 + \beta^2 - 3\beta^4 + \alpha^2(10\beta^2 - 3)] - 4c\{\alpha^4 - 3\beta^2 - \alpha^2[4 + 3(4b^2 - 5)\beta^2]\} \right\} + \gamma^2 \left\{ 3 + (2 - 3c^2)\alpha^2 + 8\sqrt{3}ac\alpha\beta + 6c^2\beta^2 - 9 \left[\left(\frac{2}{3} - c^2 \right) \alpha^2 + \frac{4ac\alpha\beta}{\sqrt{3}} + c^2\beta^2 \right]^2 \right\}. \quad (22)$$

对于 $N > 3$ 量子比特 WV 态来说, 单比特和双量子比特相互作用的平均值可以由 (18) 式和 (19) 式给出. 3 量子比特相互作用的平均值可以由通式表示为

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle = \frac{c}{N} \left\{ [6 - (12 - N)c^2] \alpha^2 + 6\sqrt{N}aca\beta + Nc^2\beta^2 \right\}, \quad (23)$$

同理, 4 量子比特相互作用的平均值也可由通式表示为

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle = \frac{c^2}{N} \left\{ [12 - (20 - N)c^2] \alpha^2 + 8\sqrt{N}aca\beta + Nc^2\beta^2 \right\}, \quad (24)$$

将上述方程代入 (10) 式, 便可以解析得到 N 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息:

$$\begin{aligned} F_{\text{LMG}}^{(N)} = & N + (N - 1)[2 + (N - 6)c^2]\alpha^2 + 4\sqrt{N}(N - 1)aca\beta + (N^2 - N)c^2\beta^2 - [(N - 2)c\alpha^2 + 2\sqrt{N}aca\beta + Nc\beta^2]^2 \\ & + 2\gamma(N - 1) \left\{ 2a\sqrt{N}\alpha\beta^3 + 2ac^2\sqrt{N}\alpha\beta(2 - 5\beta^2) + c[3N - 6 - 2(N - 2 + 2a^2N)\beta^2 + (2 + 4a^2N)\beta^4] \right. \\ & \left. + c^3[6 - 6\beta^4 + N(2\beta^2 - 3)] \right\} + \frac{\gamma^2}{2}(N - 1) \left\{ 3(N - 2) + c^2 \{ 48 - 32N + 6N^2 + c^2[(29 - 6N)N - 42] \} \right. \\ & \left. + 8ac\sqrt{N}(c^2N - 1)\alpha\beta + 4 \left\{ 1 + c^4(N^2 - 2N + 6) - c^2 \{ 9 + N[2a^2(N - 1) + N - 4] \} \right\} \beta^2 \right. \\ & \left. - 8ac(3c^2 - 1)(N - 1)\sqrt{N}\alpha\beta^3 + 2(N - 1)[c^2(6 + 4a^2N) - 9c^4 - 1]\beta^4 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

图 2 和图 3 分别对固定参数 γ 和固定参数 α 情况下, 不同量子比特数 WV 态的量子 Fisher 信息进行了分析研究, 即对 (21) 式和 (25) 式进行参数 (α 或 γ) 固定下的数值最大化分析. 从图 2(a) 可以看出, 随着参数 γ 的增大, $N = 3$ 比特 WV 态的量子 Fisher 信息值趋于稳定, 近乎不受参数 α 的影响, 这在精密测量中非常重要, 3 比特 WV 态

可以在任意比例的叠加下实现恒定测量精度的量子计量. 图 2(b)—(d) 分别给出了 4, 5, 6 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息随参数 α 变化的结果, 容易看出, 在相互作用强度 γ (固定值) 不同的情况下, 体系的量子 Fisher 信息总是随着参数 α 的变大而变大. 图 3(a)—(d) 分别给出了 3, 4, 5, 6 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息在固定参数 α

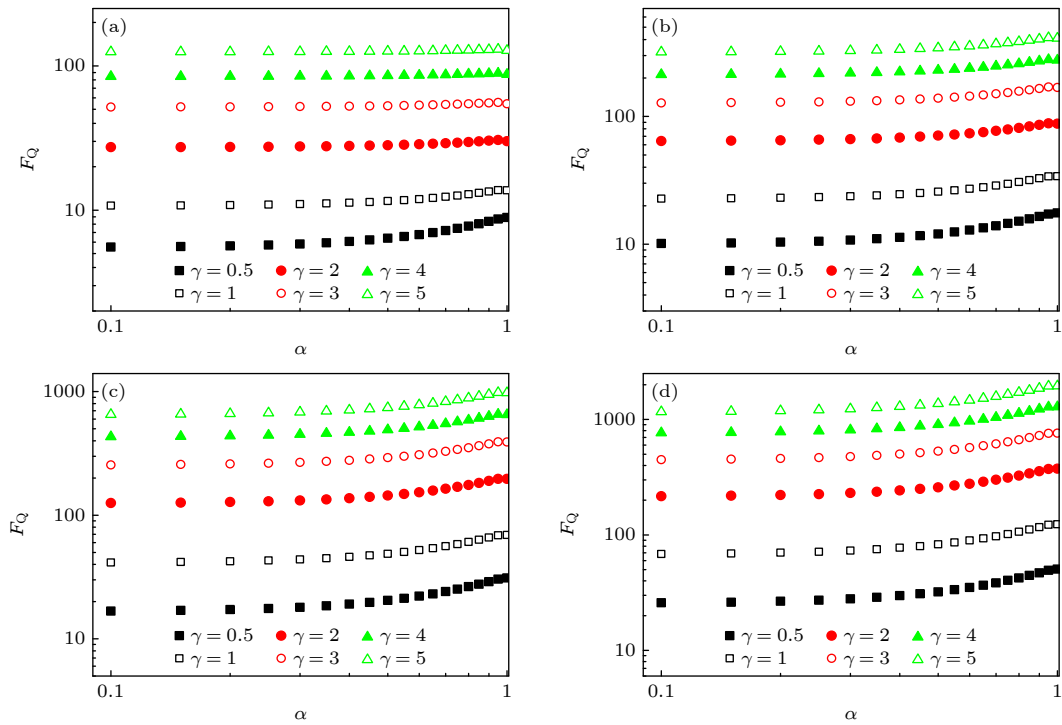


图 2 量子比特 WV 态在 LMG 模型下的量子 Fisher 信息随参数 α 的变化 (a) 3 比特; (b) 4 比特; (c) 5 比特; (d) 6 比特

Fig. 2. Quantum Fisher information of qubit WV state with respect to α in the LMG model: (a) 3-qubit; (b) 4-qubit; (c) 5-qubit; (d) 6-qubit.

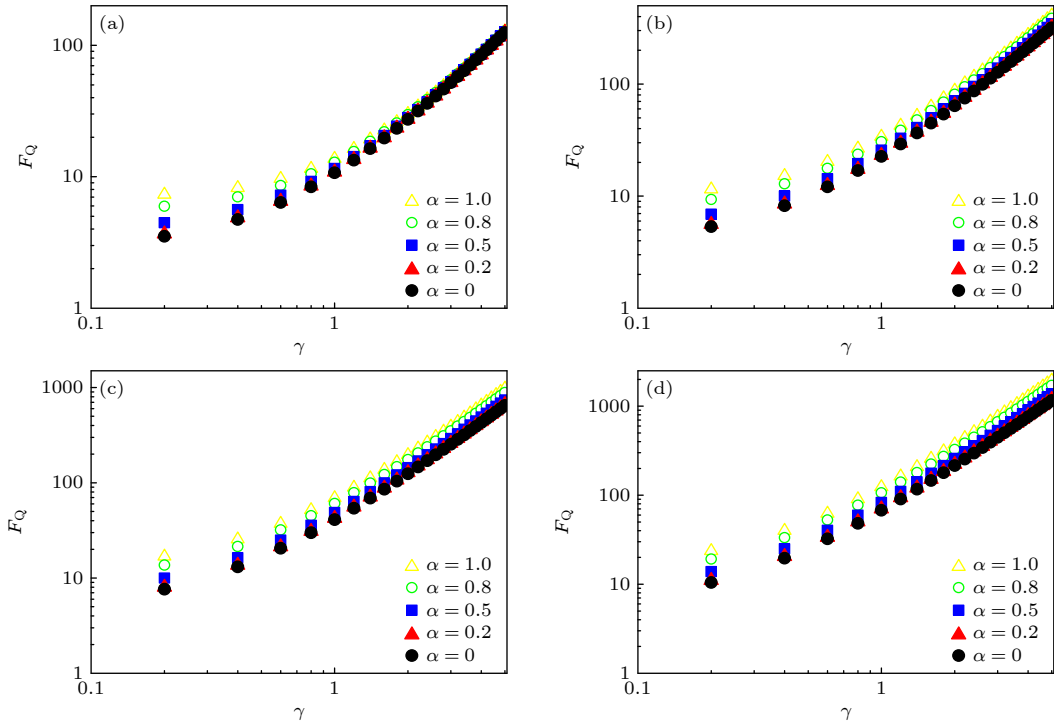


图 3 量子比特 WV 态在 LMG 模型下的量子 Fisher 信息随相互作用强度 γ 的变化 (a) 3 比特; (b) 4 比特; (c) 5 比特; (d) 6 比特
 Fig. 3. Quantum Fisher information of qubit WV state with respect to interaction strength γ in the LMG model: (a) 3-qubit; (b) 4-qubit; (c) 5-qubit; (d) 6-qubit.

下随相互作用强度 γ 的变化情况, 可以得出, 随着相互作用强度的变强, WV 态的量子 Fisher 信息变得越来越大, 表明可控的非局域操作有助于高精密的量子测量. 此外, 从图 3(a) 也容易看出, 随着相互作用强度 γ 的增强, 参数 α 对 3 比特 WV 态的量子 Fisher 值影响越来越小, 再次验证了图 2(a) 得出的结论.

4 结 论

综上所述, 本文从量子测量的角度出发, 探究了多量子比特 WV 态在高精密测量方面的表现. 通过计算不同比特数 WV 态在局域操作和 LMG 模型下的量子 Fisher 信息, 发现在局域操作下, 体系的量子 Fisher 信息会随着参数 α 的变大而变大, 显示出增强的量子测量能力. 在 LMG 非局域操作模型下, 分两种情况进行了研究. 在固定相互作用强度 γ 的情况下, 探究体系量子 Fisher 信息随参数 α 的变化, 发现随着 γ 的增加, $N = 3$ 量子比特 WV 态的量子 Fisher 信息近乎不受参数 α 的影响, 这一点在精密测量领域很重要, 它降低了对初态制备的要求. 但其他多比特 WV 态的量子 Fisher 信息会随参数 α 的变大而增大. 在固定参数 α 下, 也

探究了 WV 态的量子 Fisher 信息随相互作用强度 γ 的变化, 发现随着相互作用强度 γ 的增强, 体系的量子 Fisher 信息逐步变大, 表明了非局域操作有助于实现多比特 WV 态的高精密测量. 另外, 发现 $N = 3$ 量子比特的量子 Fisher 信息在相互作用强度 γ 较大的情况下, 几乎不受参数 α 变化的影响, 再次验证了前面的结论. 本文的研究结果有助于加深人们对多量子比特 WV 态的认识, 尤其是 $N = 3$ 量子比特 WV 态在 LMG 模型下具有相对稳定的量子 Fisher 信息, 另外, 对未来实现非局域操作下的高精密量子测量也有一定的启发和参考意义.

参考文献

- [1] Fisher R A 1912 *Messenger of Mathematics* **41** 155
- [2] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press) pp235-293
- [3] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North Holland) pp52-96
- [4] Kreutz C, Timmer J 2013 *Optimal Experiment Design, Fisher Information*. In: Dubitzky W, Wolkenhauer O, Cho K H, Yokota H, editors. *Encyclopedia of Systems Biology* (New York: Springer) pp1576-1579
- [5] Ly A, Marsman M, Verhagen J, Grasman R P, and Wagenmakers E J 2017 *J. Math. Psychol.* **80** 40
- [6] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96**

- 010401
- [7] Li Y, Pezzè L, Li W D, Smerzi A 2019 *Phys. Rev. A* **99** 022324
- [8] Fiderer L J, E. Fraïsse J M, Braun D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 250502
- [9] Li Y, Ren Z H 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012403
- [10] Yin P, Zhao X B, Yang Y X, Guo Y, Zhang W H, Li G C, Han Y J, Liu B H, Xu J S, Chiribella G, Chen G, Li C F, Guo G C 2023 *Nat. Phys.* **19** 1122
- [11] Li Y, Pezzè L, Gessner M, Ren Z H, Li W D, Smerzi A 2018 *Entropy* **20** 628
- [12] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [13] Wootters W K 1981 *Phys. Rev. D* **23** 357
- [14] Pezzè L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [15] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, Schwemmer C, Wiecek W, Weinfurter H, Pezzè L, Smerzi A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
- [16] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [17] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [18] Zanardi P, Paris M G A, Venuti L C 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042105
- [19] Hauke P, Heyl M, Tagliacozzo L, Zoller P 2016 *Nat. Phys.* **12** 778
- [20] Gabbriellini M, Smerzi A, Pezzè L 2018 *Sci. Rep.* **8** 15663
- [21] Gietka K, Ruks L, Busch T 2022 *Quantum* **6** 700
- [22] Gülhne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [23] Pezzè L, Li Y, Li W D, Smerzi A 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** 11459
- [24] Li Y and Li P F 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126413
- [25] Ren Z H, Li W D, Smerzi A, Gessner M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 080502
- [26] Li Y, Ren Z H 2022 *Physica A* **596** 127137
- [27] Song L J, Yan D, Liu Y 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 120302 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 刘焯 2011 物理学报 **60** 120302]
- [28] Wang X Q, Ma J, Zhang X H, Wang X G 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050510
- [29] Berrada K, Abdel-Khalek S, Khalil E M, Alkaoud A, Eleuch H 2022 *Chaos, Solitons Fractals* **164** 112621
- [30] Meyer J J 2021 *Quantum* **5** 539
- [31] Yu M, Li D, Wang J, Chu Y M, Yang P, Gong M, Goldman N, Cai J M 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 043122
- [32] Jin H C, Jeong S K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 042307
- [33] Shi X, Chen L 2020 *Phys. Rev. A* **101** 032344
- [34] Shi X 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126392
- [35] Lai L M, Fei S M, Wang Z X 2021 *J. Phys. A* **54** 425301
- [36] Jarzyna M, Demkowicz-Dobrzanski R 2015 *New J. Phys.* **17** 013010
- [37] Lipkin H J, Meshkov N, Glick A 1965 *Nucl. Phys.* **62** 188

Quantum Fisher information of multi-qubit WV entangled state under Lipkin-Meshkov-Glick model*

Li Yan^{1)2)†} Ren Zhi-Hong³⁾

1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

2) (*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

3) (*School of Physics and Information Engineering, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, China*)

(Received 20 July 2023; revised manuscript received 20 August 2023)

Abstract

As an important quantity in the field of parameter estimation theory and quantum precision measurement, quantum Fisher information (QFI) can not only be used to set the theoretical limit of measurement precision in quantum system, but also be exploited to witness metrological useful quantum entanglement. Recently, it has also been broadly used in many aspects of quantum information science, including quantum metrology, multipartite entanglement structure detection, quantum phase transition, quantum chaos, quantum computation and etc. In this work, from the perspective of quantum measurement, we study the quantum Fisher information of an N -qubit WV state ($\alpha|W_N\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|00\cdots 0\rangle$) under local operation and Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) model. Furthermore, with the general Cramér-Rao lower bound (CRLB) we analyze its performance in high-precision phase measurement. The results show that, under the local operation, the QFI of an N -qubit WV state becomes larger with the increase of parameter α . This not only means the enhanced quantum entanglement, but also implies the powerful ability in high-precision quantum measurement. In the LMG model, as the increase of interaction strength γ the QFI of $N = 3$ qubits WV state gradually tends to be stable and almost not be affected by parameter α , which relaxes the requirement in the preparation of target state and indicates a great potential in achieving the relatively stable measurement precision. When the number of qubits from WV state is larger than 3, the QFI of WV state increases with the increase of parameter α . In the case of fixed parameter α , we investigate the QFI of an N -qubit WV state with respect to interaction strength γ . It is found that the QFI of WV state will increase with the increasing interaction strength, which implies that the greater the interaction strength, the stronger the quantum measurement ability of the WV state. Our work will promote the development of high-precision quantum metrology and especially the interaction-enhanced quantum measurement, and further provide new insights in quantum information processing.

Keywords: quantum Fisher information, WV state, Lipkin-Meshkov-Glick model, precision measurement

PACS: 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Ta

DOI: [10.7498/aps.72.20231179](https://doi.org/10.7498/aps.72.20231179)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12305024, 12205176) and the Applied Basic Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 202203021212193, 202103021223251).

† Corresponding author. E-mail: li8989971@163.com



多量子比特WV纠缠态在Lipkin-Meshkov-Glick模型下的量子Fisher信息

李岩 任志红

Quantum Fisher information of multi-qubit WV entangled state under Lipkin-Meshkov-Glick model

Li Yan Ren Zhi-Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 220302 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231179

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231179>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Lipkin-Meshkov-Glick模型中的能级劈裂与宇称振荡研究

Energy level splitting and parity oscillation in Lipkin-Meshkov-Glick model

物理学报. 2018, 67(18): 182101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181069>

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

电子束离子阱光谱标定和Ar¹³⁺离子M1跃迁波长精密测量

Spectral calibration for electron beam ion trap and precision measurement of M1 transition wavelength in Ar¹³⁺

物理学报. 2022, 71(3): 033201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211663>

频域反射法光纤延时精密测量

Accurate measurement of optical fiber time delay based on frequency domain reflectometry

物理学报. 2021, 70(8): 084204 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201075>

基于金刚石氮-空位色心的精密磁测量

High-resolution magnetometry based on nitrogen-vacancy centers in diamond

物理学报. 2018, 67(16): 167601 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181084>