Relativistic Dissipative Hydrodynamics with Conserved Currents and Onsager Reciprocal Relations

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻
門内晶彦、平野哲文

1 はじめに

相対論的重イオン衝突型加速器 (RHIC) 実験で生成されるとされるクオークグルーオンプラズマ (QGP) の時空発展の解析においては相対論的完全流体モデルが有効であるが [1]、より第一原理的なパラメータのもとでは粘性補正の評価が必要となる。大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) での重イオン衝突実験 [2] においては QCD の漸近的自由性により QGP の強結合性が弱まる可能性があり、粘性流体モデルが重要度を増すと期待される。一方で流体モデルには未だ粒子流が保存する単成分系における流体力学が用いられる。この研究では、実際に必要な複数保存荷電流・多成分系における相対論的散逸流体力学を因果律を破らないように構築する。この中で得られる構成方程式はオンサーガーの相反定理 [3] を満たし、相対論的なソレー効果やデュフォー効果などを表す交差項を含むことを見る。

2 相対論的粘性流体方程式の導出

多成分かつ複数保存流のある系における相対論的散逸流体力学をエネルギー運動量保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$、荷電保存則 $\partial_\mu N_J^\mu = 0$ およびエントロピー増大則 $\partial_\mu s^\mu \geq 0$ と状態方程式 $P_0 = P_0(e_0, \{n_{J0}\})$ を用いて定式化する [4]。ここで J はバリオン数やフレーバー等の保存流の種類を表し、N 種類あるとする。

エネルギー運動量テンソル及び保存流を流速 u^μ とそれに直交する $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$ で射影すると

$$T^{\mu\nu} = (e_0 + \delta e)u^\mu u^\nu - (P_0 + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + W^\mu u^\nu + W^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}, \ \ N_J^\mu = (n_{J0} + \delta n_J)u^\mu + V_J^\mu, \tag{1}$$

となる。ここで未知数は $2 + N$ 個の平衡量と $10 + 4N$ 個の散逸流に分けることができる。局所静止系においては e_0 はエネルギー密度、P_0 は静水圧、n_{J0} は種類 J の荷電密度であり、Π は体積粘性応力、δe はエネルギー密度補正、W^μ はエネルギー散逸流、$\pi^{\mu\nu}$ はずれ粘性応力テンソル、δn_J は種類 J の荷電密度補正、V_J^μ は種類 J の荷電散逸流である。δe と δn_J は熱力学的安定性から後に 0 となる。

完全流体力学では未知数は平衡量と流速を併せて $5 + N$ 個であるので保存則と状態方程式で系が記述できるが、散逸流体力学では増えた $10 + 4N$ 個の未知数に相当する構成方程式が必要となる。そのためモーメント方程式 $\partial_\alpha I^{\mu\nu\alpha} = Y^{\mu\nu}$ と $\partial_\alpha I_J^{\mu\alpha} = Y_J^\mu$ を導入し、エントロピー増大則からその具体形を決める方法を採る。相対論的運動学の枠組みでは $I^{\mu\nu\alpha}$ と $I_J^{\mu\alpha}$ はエネルギー運動量テンソルと保存流の分布関数 f^i に対する高次のモーメントとして以下のように定義される。

$$I^{\mu\nu\alpha} = \sum_i \int \frac{g_i d^3 p}{(2\pi)^3 E_i} p_i^\mu p_i^\nu p_i^\alpha f^i, \ \ I_J^{\mu\alpha} = \sum_i \int \frac{q_i^J g_i d^3 p}{(2\pi)^3 E_i} p_i^\mu p_i^\alpha f^i, \tag{2}$$

ここで g_i と q_i^J はそれぞれ i 番目の粒子種の縮重度と保存量子数である。

モーメント方程式を見積もるため、まず分布関数の局所熱平衡分布からの歪み $\delta f^i = f^i - f_0^i$ を決定する必要がある。ここでグラッドのモーメント法 [5] を複数保存流を含んだ場合に拡張すると

$$\delta f^i = -f_0^i(1 + \epsilon f_0^i)(p_i^\mu \sum_J q_i^J \varepsilon_\mu^J + p_i^\mu p_i^\nu \varepsilon_{\mu\nu}), \tag{3}$$

となる。ϵ はフェルミオンに対し +1 を、ボゾンに対し −1 をとる量子統計の符号で、古典極限は $\epsilon=0$ に相当する。この展開の正当性については、ここから得られる構成方程式がオンサーガーの相反定理を満たしていることを後に見る。ここで導入された歪みテンソル $\varepsilon_{\mu\nu}$ と ε^J_μ は $T^{\mu\nu}$ と N^μ_J の定義式および式 (1) から散逸流の線形結合で表される。導出の詳細については文献 [6] を参照。

一方、エントロピー生成は

$$\partial_\mu s^\mu = -\partial_\mu \sum_i \int \frac{g_i d^3p}{(2\pi)^3 E_i} p^\mu_i \left[f^i \ln f^i - \frac{1}{\epsilon}(1+\epsilon f^i)\ln(1+\epsilon f^i) \right] = \sum_J \varepsilon^J_\nu Y^\nu_J + \varepsilon_{\nu\rho} Y^{\nu\rho} \geq 0, \tag{4}$$

と表され、任意の粘性歪みに対して半正定値性を保つには上式が二次形式で書かれる必要がある。これは $Y^{\mu\nu}$ と Y^μ_J の独立成分がそれぞれ $\varepsilon_{\mu\nu}$ と ε^J_μ の独立成分の線形結合で表されることに相当する。以上のことから結局、モーメント方程式の $Y^{\mu\nu}$ および Y^μ_J は散逸流の線形結合で表されることがわかる。一方 $\partial_\alpha I^{\mu\nu\alpha}$ と $\partial_\alpha I^{\mu\alpha}_J$ に δf^i の具体形を代入し定義に従って計算するとモーメント方程式は

$$\begin{aligned}
\Pi = & -\zeta\nabla_\mu u^\mu - \zeta_{\Pi\delta e} D\frac{1}{T} + \sum_J \zeta_{\Pi\delta n_J} D\frac{\mu_J}{T} - \tau_\Pi D\Pi \\
& + \sum_J \chi^{aJ}_{\Pi\Pi}\Pi D\frac{\mu_J}{T} + \chi^b_{\Pi\Pi}\Pi D\frac{1}{T} + \chi^c_{\Pi\Pi}\Pi\nabla_\mu u^\mu + \chi_{\Pi\pi}\pi_{\mu\nu}\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} \\
& + \sum_J \chi^{aJ}_{\Pi W} W_\mu \nabla^\mu \frac{\mu_J}{T} + \chi^b_{\Pi W} W_\mu \nabla^\mu \frac{1}{T} + \chi^c_{\Pi W} W_\mu D u^\mu + \chi^d_{\Pi W}\nabla^\mu W_\mu \\
& + \sum_{J,K} \chi^{aK}_{\Pi V_J} V^J_\mu \nabla^\mu \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi^b_{\Pi V_J} V^J_\mu \nabla^\mu \frac{1}{T} + \sum_J \chi^c_{\Pi V_J} V^J_\mu D u^\mu + \sum_J \chi^d_{\Pi V_J} \nabla^\mu V^J_\mu,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
W^\mu = & -\kappa_W\left(\frac{1}{T}Du^\mu + \nabla^\mu\frac{1}{T}\right) + \sum_J \kappa_{WV_J}\nabla^\mu\frac{\mu_J}{T} - \tau_W \Delta^{\mu\nu} D W_\nu \\
& + \sum_J \chi^{aJ}_{WW} W^\mu D\frac{\mu_J}{T} + \chi^b_{WW} W^\mu D\frac{1}{T} + \chi^c_{WW} W^\mu \nabla_\nu u^\nu + \chi^d_{WW} W^\nu\nabla_\nu u^\mu + \chi^e_{WW} W^\nu \nabla^\mu u_\nu \\
& - \sum_J \tau_{WV_J}\Delta^{\mu\nu} D V^J_\nu + \sum_{J,K} \chi^{aK}_{WV_J} V^\mu_J D\frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi^b_{WV_J} V^\mu_J D\frac{1}{T} + \sum_J \chi^c_{WV_J} V^\mu_J \nabla^\nu u_\nu \\
& + \sum_J \chi^d_{WV_J} V^\nu_J \nabla_\nu u^\mu + \sum_J \chi^e_{WV_J} V^\nu_J \nabla^\mu u_\nu + \sum_J \chi^{aJ}_{W\pi}\pi^{\mu\nu}\nabla_\nu\frac{\mu_J}{T} + \chi^b_{W\pi}\pi^{\mu\nu}\nabla_\nu\frac{1}{T} \\
& + \chi^c_{W\pi}\pi^{\mu\nu} D u_\nu + \chi^d_{W\pi}\Delta^{\mu\nu}\nabla^\rho\pi_{\nu\rho} + \sum_J \chi^{aJ}_{W\Pi}\Pi\nabla^\mu\frac{\mu_J}{T} + \chi^b_{W\Pi}\Pi\nabla^\mu\frac{1}{T} + \chi^c_{W\Pi}\Pi D u^\mu + \chi^d_{W\Pi}\nabla^\mu\Pi,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
V^\mu_J = & \sum_K \kappa_{V_J V_K}\nabla^\mu\frac{\mu_K}{T} - \kappa_{V_J W}\left(\frac{1}{T}Du^\mu + \nabla^\mu\frac{1}{T}\right) - \sum_K \tau_{V_J V_K}\Delta^{\mu\nu} D V^K_\nu \\
& + \sum_{K,L} \chi^{aL}_{V_J V_K} V^\mu_K D\frac{\mu_L}{T} + \sum_K \chi^b_{V_J V_K} V^\mu_K D\frac{1}{T} + \sum_K \chi^c_{V_J V_K} V^\mu_K \nabla_\nu u^\nu + \sum_K \chi^d_{V_J V_K} V^\nu_K \nabla_\nu u^\mu + \sum_K \chi^e_{V_J V_K} V^\nu_K \nabla^\mu u_\nu \\
& - \tau_{V_J W}\Delta^{\mu\nu} D W_\nu + \sum_K \chi^a_{V_J W} W^\mu D\frac{\mu_K}{T} + \chi^b_{V_J W} W^\mu D\frac{1}{T} + \chi^c_{V_J W} W^\mu \nabla^\nu u_\nu \\
& + \chi^d_{V_J W} W^\nu \nabla_\nu u^\mu + \chi^e_{V_J W} W^\nu \nabla^\mu u_\nu + \sum_K \chi^{aK}_{V_J\pi}\pi^{\mu\nu}\nabla_\nu\frac{\mu_K}{T} + \chi^b_{V_J\pi}\pi^{\mu\nu}\nabla_\nu\frac{1}{T} \\
& + \chi^c_{V_J\pi}\pi^{\mu\nu} D u_\nu + \chi^d_{V_J\pi}\Delta^{\mu\nu}\nabla^\rho\pi_{\nu\rho} + \sum_K \chi^{aK}_{V_J\Pi}\Pi\nabla^\mu\frac{\mu_K}{T} + \chi^b_{V_J\Pi}\Pi\nabla^\mu\frac{1}{T} + \chi^c_{V_J\Pi}\Pi D u^\mu + \chi^d_{V_J\Pi}\nabla^\mu\Pi,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu} = {} & 2\eta\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} - \tau_\pi D\pi^{\langle\mu\nu\rangle} \\
& + \sum_J \chi^{aJ}_{\pi\pi}\pi^{\mu\nu}D\frac{\mu_J}{T} + \chi^{b}_{\pi\pi}\pi^{\mu\nu}D\frac{1}{T} + \chi^{c}_{\pi\pi}\pi^{\mu\nu}\nabla_\rho u^\rho + \chi^{d}_{\pi\pi}\pi^{\rho\langle\mu}\nabla_\rho u^{\nu\rangle} + \chi_{\pi\Pi}\Pi\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} \\
& + \sum_J \chi^{aJ}_{\pi W}W^{\langle\mu}\nabla^{\nu\rangle}\frac{\mu_J}{T} + \chi^{b}_{\pi W}W^{\langle\mu}\nabla^{\nu\rangle}\frac{1}{T} + \chi^{c}_{\pi W}W^{\langle\mu}Du^{\nu\rangle} + \chi^{d}_{\pi W}\nabla^{\langle\mu}W^{\nu\rangle} \\
& + \sum_{J,K} \chi^{aJ}_{\pi V_J}V_J^{\langle\mu}\nabla^{\nu\rangle}\frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi^{b}_{\pi V_J}V_J^{\langle\mu}\nabla^{\nu\rangle}\frac{1}{T} + \sum_J \chi^{c}_{\pi V_J}V_J^{\langle\mu}Du^{\nu\rangle} + \sum_J \chi^{d}_{\pi V_J}\nabla^{\langle\mu}V_J^{\nu\rangle},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

と構成方程式の形になる。ここで時間微分と空間微分を $D = u^\mu\partial_\mu$ 及び $\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu}\partial_\nu$ と定義している。添え字の山括弧はトレースなしの対称化 $A^{\langle\mu}B^{\nu\rangle} = [\frac{1}{2}(\Delta^\mu{}_\alpha\Delta^\nu{}_\beta + \Delta^\mu{}_\beta\Delta^\nu{}_\alpha) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}]A^\alpha B^\beta$ を表す。ζ、κ および η は一次の係数であり、特に ζ を体積粘性係数、κ_W をエネルギー伝導率、$\kappa_{V_JV_J}$ を荷電伝導率、η をずれ粘性係数と呼ぶ。τ は緩和時間、χ は二次の輸送係数である。

得られた構成方程式には一次の交差項が存在し、スカラー・ベクトル・テンソルそれぞれについてオンサーガーの相反定理を満たしている。一般的な定式化では交差項は考慮されていない事が多いが、物理的に無視できない重要な項であり、例えば化学勾配に対するエネルギー散逸はデュフォー効果を、熱勾配に対する荷電散逸はソレー効果をそれぞれ表す。また二次の項がない相対論的なナヴィエ - ストークス方程式は不安定かつ非因果的であることが知られている [7]。ここで τ を含む緩和項は理論が因果律を破らないよう情報の伝搬を制限する。二次の項のテンソル構造は、単成分・単保存流の極限でもイスラエル - スチュワート理論 [5] の枠組みを超えたものを含んでおり、AdS/CFT 対応の方法 [8]、くり込み群の方法 [9] およびグラッドの 14 モーメント法 [10] から導出された式のものと一部の項を除きコンシステントである。比較の詳細は文献 [4] に記載している。

3 まとめと展望

相対論的な散逸流体力学を多成分かつ複数保存流の系において構築し、オンサーガーの相反定理が満たされていることを確認した。現在、高エネルギー重イオン衝突反応で生成される高温物質の解析において、粘性流体方程式を数値的に解くための準備を進めている。

参考文献

[1] T. Hirano, N. van der Kolk and A. Bilandzic, Lect. Notes Phys. **785** (2010) 139.

[2] K. Aamodt *et al.* [The ALICE Collaboration], arXiv:1011.3914 [nucl-ex]; K. Aamodt *et al.* [The ALICE Collaboration], arXiv:1011.3916 [nucl-ex].

[3] L. Onsager, Phys. Rev. **37** (1931) 405; L. Onsager, Phys. Rev. **38** (1931) 2265.

[4] A. Monnai and T. Hirano, Nucl. Phys. A **847** (2010) 283.

[5] W. Israel and J. M. Stewart, Annals Phys. **118** (1979) 341.

[6] A. Monnai and T. Hirano, Phys. Rev. C **80** (2009) 054906.

[7] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D **31** (1985) 725.

[8] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, JHEP **0804** (2008) 100.

[9] T. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. B **646** (2007) 134; T. Tsumura, T. Kunihiro, Phys. Lett. B **690** (2010) 255.

[10] B. Betz, D. Henkel and D. H. Rischke, J. Phys. G **36** (2009) 064029.