

专题: 量子信息处理

非厄米系统量子态区分的新进展*

董勤亮¹⁾ 郑超^{1)2)†}

1) (北方工业大学储能科学与工程学院, 北京 100144)

2) (信息超材料北京市重点实验室, 北京 100144)

(2025年11月10日收到; 2025年12月22日收到修改稿)

量子态区分是量子信息科学中的核心问题, 其目标是在有限资源条件下实现对非正交量子态的最优判别. 在传统量子力学框架下, 非正交态无法通过单次测量被完美区分. 然而, 在非厄米量子力学框架下, 通过构建适当的宇称-时间 (parity-time, PT) 对称或 P 赝厄米 (P-pseudo-Hermitian, PPH) 对称哈密顿量, 初始非正交态可以在有限时间内演化为正交态, 从而可通过单次测量实现量子态区分. 基于这一思想, 研究人员围绕非厄米哈密顿量的构建、量子快速演化等关键问题, 开展了针对不同对称性非厄米系统的量子态区分理论研究. 在实验方面, PT 对称非厄米系统中的量子态区分已在光学、离子阱等量子模拟平台上成功验证, 而对于赝厄米系统, 相关实验研究尚未开展. 本文对非厄米量子态区分的研究进展进行综述, 相关工作不仅丰富了非厄米量子系统的理论与实验探索, 也为实现高效量子态区分提供了新的途径.

关键词: 量子态区分, 宇称-时间对称系统, P 赝厄米系统

DOI: 10.7498/aps.75.20251579

CSTR: 32037.14.aps.75.20251579

1 引言

量子力学建立在一系列基本假设之上, 其中哈密顿量的厄米性至关重要, 其不仅保证了能量本征值为实数, 符合物理观测的要求, 而且确保了孤立系统时间演化满足么正性, 从而维持概率守恒. 然而, 实际量子系统往往并非孤立, 它们不可避免地与外界环境发生能量、粒子或信息的交换, 导致系统的概率守恒被破坏. 处理此类系统时, 引入非厄米哈密顿量具有便利性^[1-14]. 因此, 构建系统化的非厄米量子理论已成为重要的发展方向. 通常, 非厄米系统的能谱为复数, 这可以视为传统量子力学在复数域上的推广.

在量子信息与量子计算中, 信息被编码在量子态中. 因此, 量子信息处理中一个基本任务是根据测量结果确定系统的状态. 量子态区分 (quantum

state discrimination, QSD)^[15-27] 是完成这一任务的常用方法, 其核心问题如下: 假设一个量子系统处于 $N \geq 2$ 个已知量子态 $\{|\psi_i\rangle | i = 1, 2, \dots, N\}$ 之一, QSD 的目标是确定系统所处的具体状态^[28]. 一种策略是最小化由于态重叠而导致的测量误差, 即最小误差区分 (minimum error discrimination, MED)^[29-31], 最小误差区分不能完全确定系统的状态, 其目标是最小化误判的平均概率, 其最小误差概率由 Helstrom 界限^[29] 给出: $P_{\text{err}} = (1 - \sqrt{1 - 4p_1p_2|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2})/2$, 其中 $p_1(p_2)$ 表示先验概率. 这一方法的核心是充分分析测量算符的性质, 从而构造一组测量算符以实现最优测量, 最大程度减少误判. 在另一些应用中, 需要最大化对某一测量事件的置信度, 以确保测量结果的准确性和可靠性. 对应的策略被称为无歧义区分 (unambiguous state discrimination, USD)^[32-38]. 具体而言, 可以通过将量子系统与辅助环境耦合, 并利用测量结果

* 国家自然科学基金 (批准号: 12175002, 11705004, 12381240288) 和北京市自然科学基金 (批准号: 1222020) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: czheng@ncut.edu.cn

对系统实施反馈来实现. 然而, 这一过程本质上是概率性的. 当先验概率相等 $p_1 = p_2 = 1/2$ 时, 得到不确定结果 (即空结果) 的概率由 Ivanovic-Dieks-Peres 界给出: $P_{\text{IDP}} = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$ [35-37]. 此外, 自量子态区分概念提出以来, 在传统量子力学框架下对最优策略的改进以及新型量子测量方法的发展方面也取得了许多重要进展 [15,17-23,39-44]. 与此同时, 实验与应用方面也取得了许多成果, 包括利用光子 [45-47]、超导量子比特 [48]、空间光场 [49,50] 以及半导体材料作为量子传感器 [51] 进行的研究. 到目前为止, 厄米系统的 MED 和 USD 方案仅限于一组特定的非正交态 [52], 对于任意非正交量子态的区分, 仍然需要一个最优的解决方案. 在厄米系统难以解决的问题, 或许可以在非厄米系统中找到答案.

20 世纪 40 年代, Pauli [1] 和 Dirac [2] 为解决一些物理现象的发散问题分别提出了非厄米理论, 标志着非厄米量子力学的萌芽. 非厄米系统的哈密顿量不满足厄米性, 因此其时间演化一般不具有么正性, 而系统可能出现的量子态的概率总和不再保持归一化, 随时间发生变化. 非厄米物理为 QSD 问题提供了新视角. 对于两个非正交量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$, 它们的内积在么正演化下保持不变, 但在非厄米哈密顿量 H 的作用下可以演化为正交态, 从而在一次测量中实现区分 [53,54]. 并非所有非厄米哈密顿量都仅具有虚本征值, 有一种特殊情况, 如满足宇称-时间 (parity-time, PT) 对称性的非厄米哈密顿量, 在一定参数范围内可呈现全部实能谱 [55-59]. 这一发现引发了广泛的理论与实验研究兴趣. Bender 等 [55-58] 和 Mostafazadeh [60-64] 分别系统性地研究了此类系统, 构建出多种具有实本征值的非厄米模型, 逐步建立了完备的非厄米量子力学理论框架. 过去几十年中, 非厄米量子力学在开放量子系统 [7-12,65,66] 和量子信息处理 [14,67-94] 等领域得到了广泛研究.

PT 对称量子力学由圣路易斯华盛顿大学的 Bender 和 Boettcher [55] 于 1998 年提出, 是非厄米量子理论的一个重要分支. 他们的开创性工作表明, 即使哈密顿量是非厄米的, 只要满足 PT 对称性, 其本征值谱仍可保持全实数. 在数学上, PT 对称性要求哈密顿量与 PT 算符对易: $[H, PT] = 0$, 其中 P 为宇称算符, T 为时间反演算符. 在 PT 对称未破缺相中, H 的本征值为实数; 而在破缺相中, 本征值以复共轭对出现. 两相之间由奇异点 (excep-

tional point, EP) 分隔, 其附近涌现出诸多新奇物理现象, 如功率振荡、手性传输等, 成为非厄米物理研究的焦点 [95-104]. 文献 [105] 表明, 在厄米系统中, 初态 $|\psi_1\rangle$ 演化到末态 $|\psi_F\rangle$ 所需的时间是有限且非零的, 即“量子最速降线问题” (quantum brachistochrone problem) [106,107] 所限定的时间. 然而, 在 PT 对称系统中, 演化时间却可能趋于零 [105]. 这一现象已在核磁共振 (NMR) 体系中得到实验验证, 其中量子比特被规定为从初态 $|0\rangle$ 演化到末态 $|1\rangle$, 观测到演化时间趋于零的现象 [108], 预示着 PT 对称系统在加速量子信息处理方面的潜力.

在 PT 对称量子理论提出之后, 研究人员发现, 仍有大量非厄米系统虽然不具备 PT 对称性, 却依然能够拥有实本征值谱 [61,109]. 因此, PT 对称性既不是非厄米系统具有实本征值的充分条件, 也不是必要条件. 此类虽非厄米但仍可保证实能谱的系统被统称为赝厄米系统 (Pseudo-Hermitian systems). 从数学上看, 赝厄米性构成了非厄米哈密顿量拥有实本征值的充要条件 [3,60,74,110]. 赝厄米理论最早由 Pauli [1] 基于不定内积提出, 其哈密顿量满足 $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$, 其中, η 通常为线性厄米算符. 2002 年, Mostafazadeh [60-64] 系统地建立了赝厄米量子力学的理论框架. 在这一框架下, 对于可对角化且具有离散能谱的非厄米哈密顿量 H , 其右本征态与左本征态可所构成一组双正交基. Mostafazadeh [60-64] 通过构造与该双正交基对应的正定度规算符 η , 重新定义了希尔伯特空间的内积 $\langle \Psi, \Phi \rangle_\eta = \langle \Psi | \eta | \Phi \rangle$. 从而保证了概率诠释的一致性. 更重要的是, 在此内积结构下 H 成为厄米算符, 从而奠定了此类系统的量子理论基石.

本文简要介绍了近年来非厄米系统的量子态区分理论方案与实验研究新进展.

2 PT 对称量子态区分的理论研究

2.1 时间演化

Bender 等 [54] 最早提出可以利用 PT 对称哈密顿量所生成的非么正时间演化算符, 使两个初始非正交的量子态在有限时间内演化为正交态, 从而仅通过一次测量即可完美区分两态, 这一思想为非厄米量子力学在量子信息处理中的应用开辟了新的方向. 考虑一个由量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 张成的二维子空间, 假设这两个态在布洛赫球上的角间距为 2ϵ ,

通过适当参数化,使得这两个态位于同一经线上. 具体而言, 设 $|\psi_1\rangle$ 位于球坐标 (Φ, φ) 处, $|\psi_2\rangle$ 位于 $(\Phi+2\varepsilon, \varphi)$ 处. 此时, 这两个态可表示为

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} \\ e^{i\Phi} \sin \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi+2\varepsilon}{2} \\ e^{i\Phi} \sin \frac{\Phi+2\varepsilon}{2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

为简化表达, 研究者取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\Phi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. 代入上述参数后, 两态化为

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi-2\varepsilon}{4} \\ -i \sin \frac{\pi-2\varepsilon}{4} \end{pmatrix}, |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi+2\varepsilon}{4} \\ -i \sin \frac{\pi+2\varepsilon}{4} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

选取宇称算符 $P = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 时间反演算符 T 作用是取复共轭, 由此可构造 PT 对称的二能级哈密顿量. 其一般形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{PT}} &= \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s \\ s & r e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ &= r \cos \theta \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (s, 0, i r \sin \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 参数 s, r, θ 均是实数, $\mathbf{1}$ 是单位矩阵, $\boldsymbol{\sigma}$ 代表泡利矩阵向量. 该哈密顿量的本征值为 $E_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$, 当满足 $s^2 > r^2 \sin^2 \theta$, 系统处于 PT 未破缺区域, 其本征值为实数. 定义 $\sin \alpha = r \sin \theta / s \in (-1, 1)$, 系统的能级差 $\Delta = \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$. 利用矩阵恒等式:

$$e^{i\varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}} = \cos \varphi \mathbf{1} + i \sin \varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (4)$$

可以得到时间演化算符为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{PT}}(t) &= e^{-i\mathbf{H}_{\text{PT}}t} \\ &= \frac{e^{-irt \cos \theta}}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} \cos(\Delta t - \alpha) & -i \sin(\Delta t) \\ -i \sin(\Delta t) & \cos(\Delta t + \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

两个初始非正交态经过 $\mathbf{U}_{\text{PT}}(t)$ 演化后的内积随时间变化, 并在特定时间 t_1 处满足 $\langle \psi_1 | \mathbf{U}_{\text{PT}}^\dagger \mathbf{U}_{\text{PT}} | \psi_2 \rangle = 0$, 即时间演化态在此刻变得正交, 此时仅需一次测量即可实现完美区分, 这一条件可转化为

$$\sin^2(\Delta t_1) = \frac{\cos^2 \alpha \cos \varepsilon}{2 \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \varepsilon}, \quad (6)$$

Chen 等^[59] 进一步给出 t_1 为非平凡解的条件:

$$\cos \varepsilon \leq 2 \sin \alpha / (1 + \sin^2 \alpha). \quad (7)$$

在临界点:

$$\cos \varepsilon = 2 \sin \alpha / (1 + \sin^2 \alpha), \quad (8)$$

对应的演化时间为 $t_1 = \pi / (2\Delta)$. 当固定系统的能

级差 Δ , 并让 $s \rightarrow \infty$, 此时 $\alpha \rightarrow \pm\pi/2$, 进一步得到演化时间 $t_1 \rightarrow 0$ ^[54,59].

2.2 CPT 内积

在狄拉克内积下, PT 对称系统的本征态非正交. 类比于粒子物理中的电荷共轭 (charge conjugation) 运算符^[111], Bender 等^[54] 引入了与系统参数相关的 C (charge) 算符, 建立了电荷-宇称-时间 (charge-parity-time, CPT) 内积框架. CPT 内积框架的核心在于重新定义了对偶矢量的构造方式, 使得在 PT 对称未破缺相中, 体系仍然满足概率守恒与么正性要求. C 算符可根据体系哈密顿量参数显式构造, 其一般形式可写为

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中 $\sin \alpha = (r \sin \theta) / s$. 使用 CPT 算符, 可以计算得出向量 $|\psi_1\rangle$ 对应的向量 $\langle \psi_1|$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1| &= \frac{1}{\cos \alpha} \left(\cos \frac{\pi-2\varepsilon}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi-2\varepsilon}{4}, \right. \\ &\quad \left. -i \sin \alpha \cos \frac{\pi-2\varepsilon}{4} + i \sin \frac{\pi-2\varepsilon}{4} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

当内积 $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$ 时, 需满足 $\sin \alpha = \cos \varepsilon$. 为实现量子态区分, 需要构造投影算符. 为此, 首先对待区分态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 进行归一化处理. 随后得到两个归一化的投影算符 $|\psi_1\rangle\langle \psi_1|$ 和 $|\psi_2\rangle\langle \psi_2|$. 这些算符具有 CPT 自伴性^[57,111], 即与 CPT 算符对易, 因此是满足 PT 对称条件的可观测量. 此外, 这些投影算符构成了单位算符的分解. 进一步分析表明, 上述投影算符可以表示为泡利矩阵的线性组合:

$$|\psi_1\rangle\langle \psi_1| = \frac{1}{2} \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-\frac{i}{2} \cot \varepsilon, 0, \frac{1}{\sin \varepsilon} \right), \quad (11)$$

对应哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \sqrt{r^2 - s^2 \cos^2 \varepsilon} \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (s, 0, i s \cos \varepsilon). \quad (12)$$

这些算符等价于在复数方向上施加的“有效磁场”. 在这种 PT 对称系统中, 施加一次投影测量即可实现对两态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的确定性区分.

3 PT 对称量子态区分的实验研究

3.1 基于光学平台的 PT 对称量子态区分实验研究

近年来, PT 对称系统在量子动力学研究中展

现了丰富的行为,尤其是在量子态可区分性方面. 在一般的量子系统中,迹距离 (trace distance) 是量子动力学过程中态可区分性的一个有效度量^[112-114],其定义为

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma|, \quad (13)$$

其中 $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$, ρ 和 σ 分别表示两量子态的密度矩阵. 迹距离的取值范围为 $D \in [0, 1]$, 当 $D = 0$ 时, 两量子态完全相同; 当 $D = 1$ 时, 两态完全正交, 可被完美区分. 迹距离具有以下两个重要性质: 1) 迹距离在么正变换下保持不变, 并且在任何完全正且保持迹 (completely positive and trace-preserving map, CPTP) 的映射下单调不减^[115]; 2) 迹距离可直接反映两量子态的可区分程度. 若两态以相同的先验概率 $1/2$ 被制备, 则量子测量正确区分它们的最大成功概率为 $\{1 + D[\rho_1(t), \rho_2(t)]\} / 2$ ^[113,116]. 光学系统不仅为非厄米哈密顿量的模拟提供了可控的平台^[117-121], 也与近年来快速发展的模拟光计算技术密切相关, 该技术在智能信息处理等方面展现出广阔的应用前景^[122]. Wang 等^[118] 构建了离散时间模式的回收结构 PT 对称量子模拟器, 单光子的离散时间量子动力学过程可以有效地在 PT 对称未破缺和破缺相中模拟. 设 PT 对称哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} ia & 1 \\ 1 & -ia \end{pmatrix}, \quad (14)$$

式中, 实数 $a \geq 0$ 表示非厄米程度^[114,118]. $a \in [0, 1)$, $a \in (1, +\infty)$, $a = 1$ 分别 PT 对称未破缺区域, PT 对称破缺区域, 奇异点. 对应的动态映射为 $\xi[\rho(0), t] = \frac{U(t)\rho(0)U^\dagger(t)}{\text{Tr}[U(t)\rho(0)U^\dagger(t)]}$, 量子态在时间 t 的演化为 $\rho(t) = \xi[\rho(0), t]$. 量子态的演化只依赖于当前的状态, 因此该过程表现出马尔可夫性. 接下来给出 P 可分的定义^[123]: 假设对于所有时间 $t \geq 0$, 映射 Φ_t 的逆都存在. 于是可以定义一个两参数族的映射: $\Phi_{t,s} = \Phi_t \Phi_s^{-1}$, $t \geq s \geq 0$, 从而满足 $\Phi_{t,0} = \Phi_t$ 以及 $\Phi_{t,0} = \Phi_{t,s} \Phi_{s,0}$, $\Phi_{t,0}$ 和 $\Phi_{s,0}$ 都是正映射, 但中间映射 $\Phi_{t,s}$ 未必是正的, 因为正映射 Φ_s 的逆映射 Φ_s^{-1} 并不一定具有正性. 如果对所有 $t \geq s \geq 0$, 中间映射 $\Phi_{t,s}$ 是正映射, 则称该动力学映射族是 P 可分 (positive divisible) 的. 已有研究表明线性量子动力学映射的 P 可分性 (positive divisibility) 与量子过程的马尔可夫性是等价的^[124,125]. 既然 PT 对

称系统的动力学是马尔可夫的, 则根据上述等价关系, 它必然满足 P 可分性. Wang 等^[118] 得到的实验结果如图 1 所示, 在 PT 对称未破缺相中, 量子态可区分性呈现显著的周期性振荡, 并且周期随非厄米程度 a 增大而延长. 而在 PT 对称破缺相, 可区分性表现为单调衰减, 振荡行为消失, 且衰减速率随着非厄米程度 a 增大而增大. 与此相关的特征时间分别为未破缺相的振荡周期和破缺相的弛豫时间, 它们在接近奇异点时趋向无穷. 具有可变状态区分性的量子动力学也存在于传统开放量子系统中, 其中状态区分性的增大是非马尔可夫量子动力学的指标^[123,126], 对应于环境向系统的信息回流. 然而, PT 对称系统的动力学与此有本质区别. 首先, PT 对称系统的动态映射是 P 可分的, 通常不保持迹. 其次, 在未破缺相中, 可区分性的振荡源于偏斜本征态之间的动力学重叠, 形成类似拍频的干涉效果, 其振荡周期与拍频周期一致; 而在破缺相中, 本征态重叠消失, 且本征态幅度在演化中单调增长或衰减, 导致可区分性单调下降.

Chen 等^[59] 通过线性光学实验首次实现了 PT 对称系统中两态与三态的非正交量子态区分, 揭示了该系统在不同参数条件下量子态区分所需时间与系统耗散之间的关系, 并指出在某一参数设置下 PT 对称量子态区分等同于厄米系统中的 USD 方案. 在实验中, 研究人员以单光子偏振态作为量子比特, 其中 $|H\rangle = (1, 0)^T$, $|V\rangle = (0, 1)^T$. 如图 2 所示, 在态制备阶段, 研究者通过偏振分束器 (PBS)、1/4 波片 (QWP) 及半波片 (HWP), 制备出 (2) 式所示的两个初始非正交态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$, 为后续动力学演化奠定基础. 实验的关键在于如何在光学系统中有效实现非么正演化. 研究者利用奇异值分解 (SVD) 方法, 将目标非么正演化算符分解为么正部分与损耗部分的乘积^[127]. 其中, 么正部分通过波片组合实现^[128]; 而损耗部分则由偏振干涉仪和内部的半波片实现, 代表量子态向环境的耗散. 研究人员通过在相应时间演化算符中去除增益对应的尺度因子, 实现了对具有增益与损耗系统的有效模拟. 在测量阶段, 实验采用量子态层析技术重构演化后量子态的密度矩阵.

Chen 等^[59] 的实验中, 固定 PT 对称哈密顿量 ((3) 式) 中 $\theta = \pi/2$, 使哈密顿量对角元实部为零, 并设置能极差 $\Delta = 1$. 系统性考察了初始态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在一个演化周期 ($t \in [0, \pi]$) 内的动力学行为.

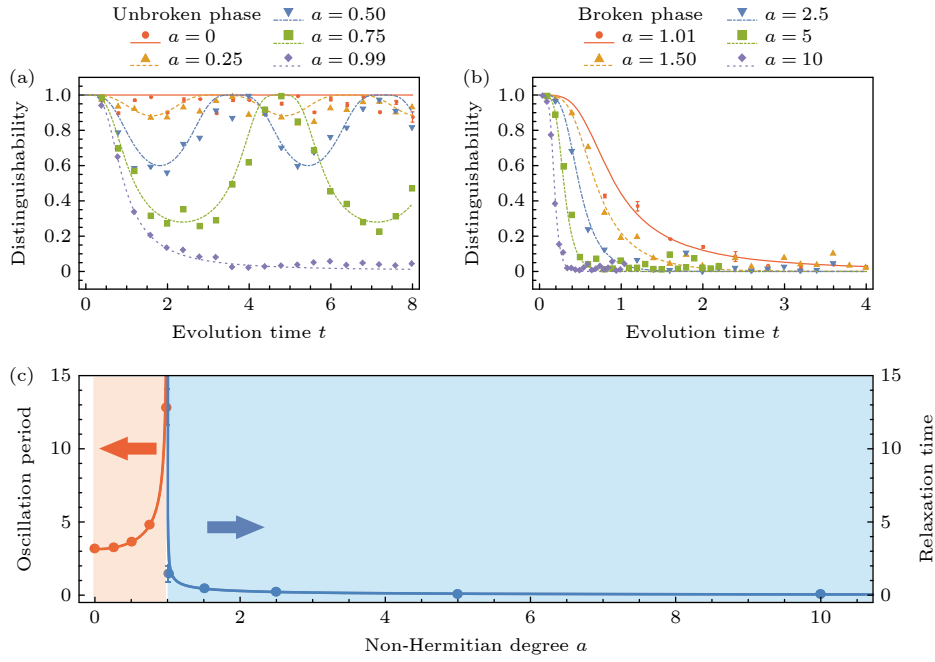


图 1 PT 对称系统中量子态可区分性的动力学 (a) 未破缺相; (b) 破缺相; (c) 量子态可区分性动力学的特征时间所展示的相变过程; 曲线和数据点分别表示理论结果和实验结果^[118]

Fig. 1. State-distinguishability dynamics in PT symmetric: (a) Unbroken phase; (b) broken phase; (c) phase-transition process exhibited by the characteristic times of state-distinguishability dynamics; the lines and points are theoretical and experimental results, respectively^[118].

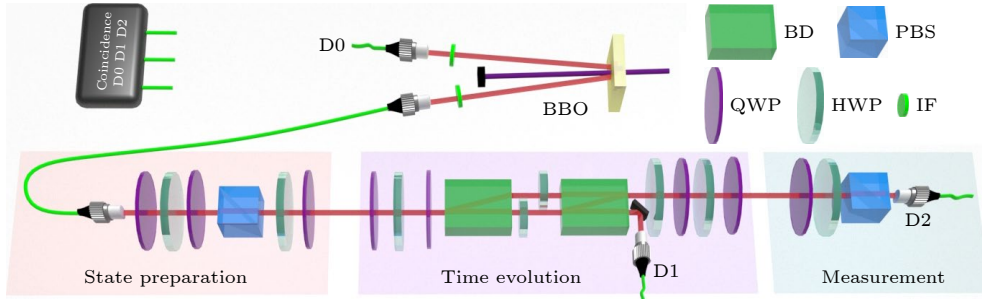


图 2 由态制备、时间演化和态测量 3 个部分组成的实验装置示意图^[59]

Fig. 2. Schematic diagram of the experimental setup consisting of three parts: state preparation, time evolution, and state measurement^[59].

在研究中, 耗散被定义为光子数的损失, 即

$$\text{耗散} = n_1 / (n_1 + n_2), \quad (15)$$

其中 n_i 表示在探测器 D_i 上的计数.

Chen 等^[59] 的实验结果揭示了非平凡解存在的临界参数条件. 图 3(a)–(c) 中 s 分别为 1.1, 3, 1.038, 黑色曲线表示两演化态 $U_{PT}|\psi_1\rangle$ 和 $U_{PT}|\psi_2\rangle$ 间迹距离 D 随时间的动态变化, 红色 (蓝色) 曲线表示态 $|\psi_1\rangle$ ($|\psi_2\rangle$) 向环境的耗散过程, 带误差棒的散点为实验数据, 连续曲线为理论模拟结果. 当初始态夹角为 $\varepsilon = \pi/3$ 时, 需满足 $s \geq 1.038$ 才能使态演化为正交. 在临界点 ($s = 1.038$), 时间演化态在

$t_1 = \pi/2$ 时刻达到正交, 此时两个初始态的耗散率相等. 对于 $s = 1.1$ 和 $s = 3$, 时间演化态在两个时刻 (t_1 和 $\pi - t_1$) 变为正交. 随着 s 增大, 首次正交时间 t_1 显著缩短, $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的耗散增大. 研究者进一步表明, 初始态相似度对区分过程具有显著影响. 当 ε 减小为 $\pi/6$ 时, 系统需要更大的参数 ($s \geq 1.225$) 才能实现正交.

Chen 等^[59] 将 PT 对称量子态区分与厄米系统中的 USD 和 MED 方案进行比较. 假设两个初始态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的先验概率相等, 并测量通过测量获得的互信息. 图 4 所示为 $\varepsilon = \pi/3$ 时, 不同 s 取值所对应的互信息变化. 图中黑色实线表示 PT 对称

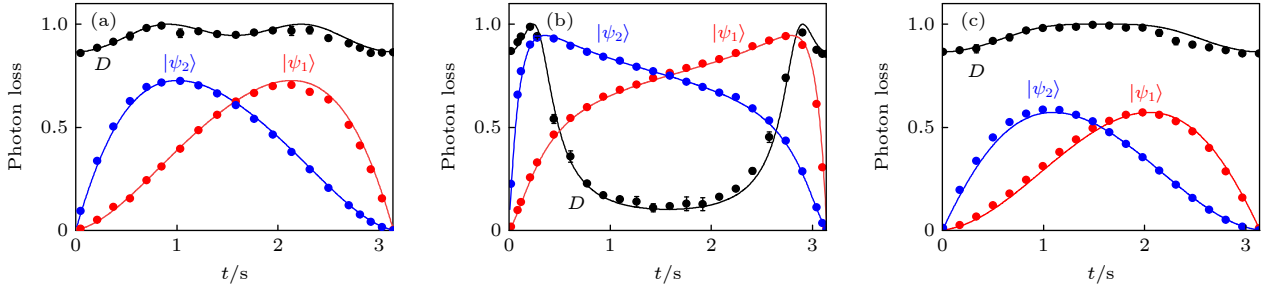


图 3 当 $\varepsilon = \pi/3$ 时的量子态演化过程 (a) $s = 1.1$; (b) $s = 3$; (c) $s = 1.038$; 黑色曲线表示态 $U_{PT}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{PT}|\psi_2\rangle$ 之间的迹距离 D 的动力学变化, 红色(蓝色)曲线表示态 $|\psi_1\rangle$ ($|\psi_2\rangle$) 向环境的耗散过程^[59]

Fig. 3. Time evolution of the states when $\varepsilon = \pi/3$: (a) $s = 1.1$; (b) $s = 3$; (c) $s = 1.038$; the black lines represent the dynamical evolution of the trace distance D between the states $U_{PT}|\psi_1\rangle$ and $U_{PT}|\psi_2\rangle$, the red (blue) lines indicate the dissipation of the state $|\psi_1\rangle$ ($|\psi_2\rangle$) into the environment^[59].

量子态区分所能获取的互信息, 而蓝色虚线(对应 USD, 互信息为 0.5) 与品红色虚线(对应 MED, 互信息为 0.6) 则分别表示两种厄米态区分方案获得的互信息. 随着 s 的增大, PT 对称系统所能获取的互信息逐渐提升并最终趋于饱和. 在临界点 $s = 1.038$ 处, PT 对称量子态区分的互信息曲线与 USD 的互信息曲线相交, 表明在此参数下, 使用 PT 哈密顿量进行量子态区分等价于应用 USD 策略.

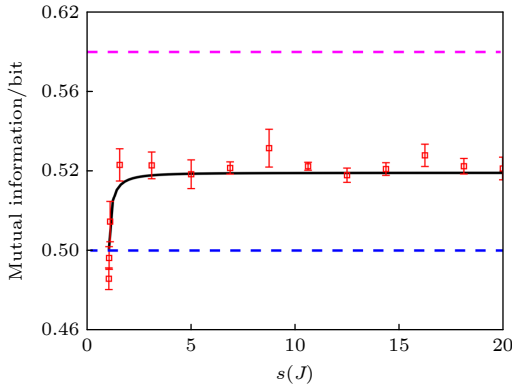


图 4 当 $\varepsilon = \pi/3$ 时获得的互信息^[59]

Fig. 4. Mutual information obtained for the case of $\varepsilon = \pi/3$ ^[59].

基于 PT 对称系统的量子态区分方案不仅适用于两态情形, 还可进一步推广至对多个非正交态的区分. Chen 等^[59] 提出了一种针对 3 个任意非正交量子态的扩展方案. 设三态分别为^[59,129]

$$|\psi_j\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta_j}{2} \\ e^{i\gamma_j} \sin \frac{\beta_j}{2} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

其中 β_j 和 γ_j 分别为该态在布洛赫球上的纬度角与经度角. 区分过程分两步: 首先通过一次测量将其中一个态与其余两个区分开, 然后在第 2 次测量中

区分剩下的两个态, 因此最多只需两次测量即可完成三态区分. 通过适当的幺正变换, 三态可以等价地表示为

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi - 2\varepsilon_{12}}{4} \\ -i \sin \frac{\pi - 2\varepsilon_{12}}{4} \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi + 2\varepsilon_{12}}{4} \\ -i \sin \frac{\pi + 2\varepsilon_{12}}{4} \end{pmatrix},$$

$$|\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\mu}{2} \\ e^{i\gamma} \sin \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中 $\cos \varepsilon_{12} = |\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle|$ 表示 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的重叠度, γ 和 μ 分别为 $|\psi_3\rangle$ 的经度角和纬度角. 根据前面的介绍, 若选择合适的 PT 对称哈密顿量并且参数满足 (6) 式, 则 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的时间演化态可以严格正交. 研究人员进一步分析表明, $|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 的时间演化态之间的重叠度也随参数 $\alpha \rightarrow \pi/2$ 逐渐减小, 并趋近于一个非零值. 因此, 在第 1 次测量中, 当 $\alpha \rightarrow \pi/2$ 时, 可以将 $|\psi_2\rangle$ 区分于 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$. 在第 2 次测量过程中, 再通过适当的变换将态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 写成:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi - 2\varepsilon_{13}}{4} \\ -i \sin \frac{\pi - 2\varepsilon_{13}}{4} \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi + 2\varepsilon_{13}}{4} \\ -i \sin \frac{\pi + 2\varepsilon_{13}}{4} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

此时两态经过 PT 对称哈密顿量的时间演化后可被无歧义区分.

Chen 等^[59] 进一步设计了针对 3 个非正交量子态的区分实验. 在实验中设定参数 $\beta_j = \beta$, $\gamma_j = \frac{2\pi}{3}(j-1)$, 即 3 个量子态 $|\psi_j\rangle$ 在布洛赫球同一纬度圆周上均匀分布, 相邻态间的夹角均为 β . 在测量部分, 时间演化后的状态被投影到状态 $|H\rangle$ 和

$|V\rangle$ 上, 并由单光子探测器进行检测. 在这个设置中, 如果在第 1 次测量中检测到状态 $|V\rangle$, 则可以断定输入态是 $|\psi_2\rangle$, 否则为 $|\psi_1\rangle$ 或 $|\psi_3\rangle$. 然后在第 2 次测量中, $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 被明确区分. 注意, 在第 1 次测量中, 由于 $|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 的时间演化状态并不严格正交, 因此如果输入状态是 $|\psi_3\rangle$, 则存在获得错误结果的概率. 图 5 展示了在不同 α 值 (包括由 (8) 式确定的临界值 α_c , 以及 0.8, 1.2, 1.5) 和两种夹角设定 ($\beta = \pi/3$ 与 $\pi/2$) 下的实验结果. P_j 代表输入态为 $|\psi_j\rangle$ 时, 三态被正确区分的概率. 理论分析表明, P_1 和 P_2 均恒为 1, 即若输入态为 $|\psi_1\rangle$ 或 $|\psi_2\rangle$, 总能获得正确区分. 若输入态为 $|\psi_3\rangle$, 仍然存在一定概率被误判为 $|\psi_2\rangle$. 而 P_3 虽小于 1, 但随着 $\alpha \rightarrow \pi/2$ 而逐渐提高, 显示系统性能可通过参数调控进一步优化. 需要指出的是, 由于时间演化过程的非幺正性伴随光子损耗, 尽管理论上两次测量即可完成三态区分, 实验上为获取足够的统计精度, 仍需采集更多样本以降低随机误差.

Wang 等^[130] 通过执行后选择门和基于损耗的非幺正演化, 实验研究了光子单量子比特态下的 PT 对称量子态确定性区分, 并从高维嵌入的角度揭示了其与厄米系统中 USD 方案的关联. 实验装置如图 6 所示, 生成的两个光子中, 一个作为触发光, 另一个作为信号光. 信号光子的偏振态 $|H\rangle = (1, 0)^T$ 和 $|V\rangle = (0, 1)^T$ 经过 PBS, QWP 及 HWP 后被制备为 (2) 式所示的初始态. 在实验中, 取 PT 对称哈密顿量 ((3) 式) 中 $\theta = \pi/2$ 和 $s = 1$. 研究人员并未直接模拟原始哈密顿量, 而是构建了一个具有被动 PT 对称性的等效有效哈密顿量 $H' = H + (d/t) \cdot I$ ^[131,132], 参数 d 由条件 $d = i \ln \sqrt{1/\max|\lambda_k|}$

确定, 其中 λ_k 为 $e^{-iHt}e^{iH^\dagger t}$ 的特征值. 在光学系统中, 该非幺正演化算符 U' 可分解为旋转算符与偏振依赖的损耗算符的组合, 其中旋转算符可由一片设置角度为 φ_i 的 QWP 和一片设置角度为 ϑ_i 的 HWP 实现, 偏振依赖的损耗算符可由两块光束偏移器 (BD) 与两片 HWP 的组合实现. 在实验中, 研究人员利用量子态层析在光子通过干涉仪装置后重构末态的密度矩阵. 随后, 在基 $\{|H\rangle, |V\rangle, (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}, (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}\}$ 上测量光子的概率, 测量由 QWP, HWP 和 PBS 的组合来实现. 基于测量结果, 使用最大似然估计重构密度矩阵.

Wang 等^[130] 选择了 5 组不同的初始态对, 参数分别为 $\varepsilon = \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$, 并构造相应的 PT 对称哈密顿量, 使得输入态在演化后能够转化为正交态. 图 7 展示了初始态与演化态的迹距离. 实验结果表明, 初始态对的迹距离范围从 0.260 ± 0.030 到 0.985 ± 0.007 , 而未态对的迹距离均不小于 0.990 ± 0.006 , 与理论预测的 1 符合良好. 这表明通过一次投影测量即可对两末态进行无歧义区分. 为了测试所构建的量子态区分装置的性能, 研究人员引入了效率, 定义为

$$E = \frac{1}{2} \text{Tr}(U|\psi_1\rangle\langle\psi_1|U^\dagger + U|\psi_2\rangle\langle\psi_2|U^\dagger). \quad (19)$$

在 (19) 式中应用时间演化算符 U (PT 对称哈密顿量的时间演化算符) 或 U' 得到的结果相同, 因为它们之间的差异仅导致一个全局相位, 不影响上述定义. 在实验中, 通过优化哈密顿量参数 r , 可得到最优效率:

$$E_{\text{opt}} = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = 1 - |\cos\varepsilon|. \quad (20)$$

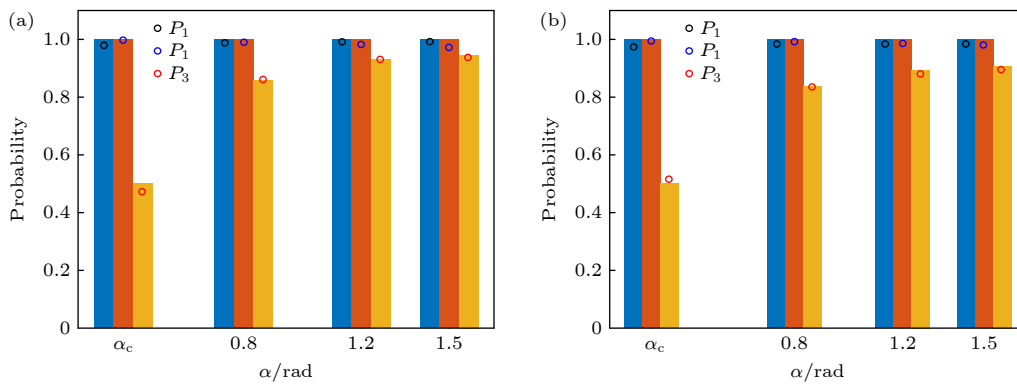


图 5 在不同参数下正确区分三态的概率 (a) $\beta = \pi/3$; (b) $\beta = \pi/2$; 黑色、蓝色和红色圆点分别表示当输入态为 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 时的实验结果, 柱状条为理论预测值^[59]

Fig. 5. Probabilities of correctly finding the states: (a) $\beta = \pi/3$; (b) $\beta = \pi/2$; the black, blue, and red circles are experimental results when the input states are $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ and $|\psi_3\rangle$, respectively, the bars are theoretical values^[59].

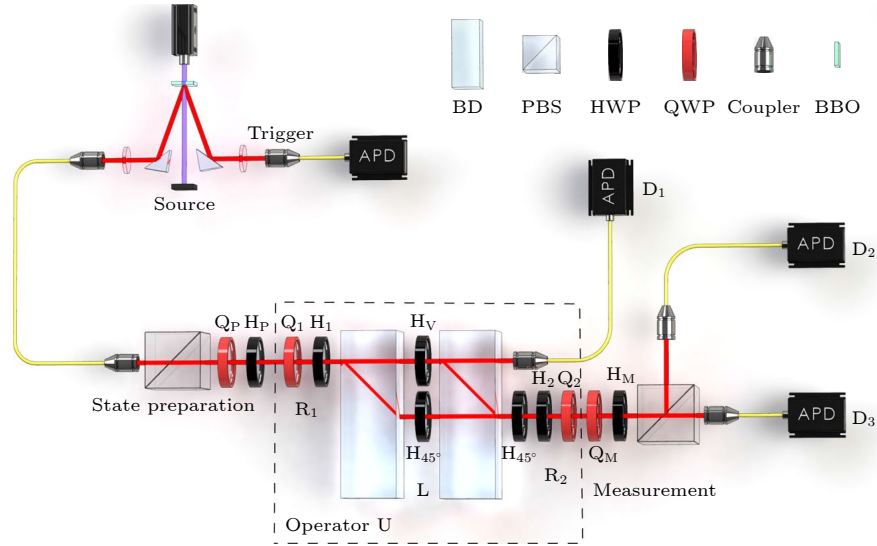

 图 6 由态制备、时间演化和态测量 3 个部分组成的实验装置示意图^[130]

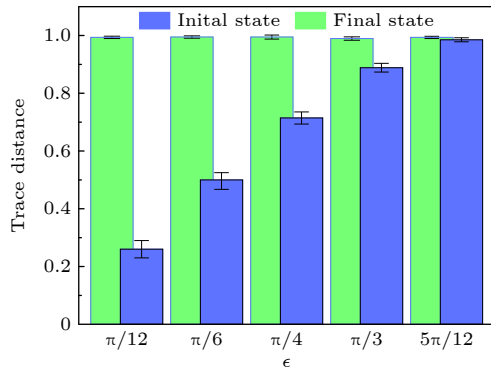
 Fig. 6. Schematic diagram of the experimental setup consisting of three parts: state preparation, time evolution, and state measurement^[130].

 图 7 初始态和演化后态迹距离的实验结果, 空心柱状则对应其理论模拟结果, 误差棒来源于统计不确定性, 其估计方法为基于泊松分布光子计数统计的蒙特卡罗模拟^[130]

 Fig. 7. Experimental results of the trace distances of both pairs of initial states and evolved states, hollow bars are for their theoretical simulations, error bars represent statistical uncertainty, obtained from Monte Carlo simulations assuming Poisson photon counting statistics^[130].

最后, 研究人员对两个正交的最终状态进行投影测量. 测得的效率可以通过光子计数来计算. 理论与实验测得效率随初始态重叠度增加而下降, 且十分吻合. 即便在 PT 对称哈密顿量下可以实现量子态的确定性区分, 实际装置效率仍受光子损耗限制.

为进一步揭示 PT 对称量子态区分的物理本质, 研究人员将该动力学嵌入至一个三能级系统中, 通过引入单光子的空间模作为辅助自由度, 此时输入态可表示为^[130]

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\psi}_1\rangle &= \left(0, \cos \frac{\pi - 2\varepsilon}{4}, -i \sin \frac{\pi - 2\varepsilon}{4} \right)^T, \\
 |\tilde{\psi}_2\rangle &= \left(0, \cos \frac{\pi + 2\varepsilon}{4}, -i \sin \frac{\pi + 2\varepsilon}{4} \right)^T, \quad (21)
 \end{aligned}$$

其基矢为 $\{|UV\rangle, |DH\rangle, |DV\rangle\}$. 在其对应的希尔伯特空间中, 该三能级系统的时间演化是幺正的, 可由 PT 时间演化算符直接构造得到, 因此该演化算符可以通过图 6 所示的实验装置实现. 随后对时间演化态施加投影算符, 该过程可能产生“空结果”, 类似于厄米系统中的 USD 策略, 其成功的概率为

$$\begin{aligned}
 P_{\text{succ}} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(P_1 U_3 |\tilde{\psi}_1\rangle \langle \tilde{\psi}_1| U_3^\dagger P_1 + P_1 U_3 |\tilde{\psi}_2\rangle \langle \tilde{\psi}_2| U_3^\dagger P_1) \\
 &= 1 - \left| \langle \tilde{\psi}_1 | \tilde{\psi}_2 \rangle \right| = 1 - |\cos \varepsilon|, \quad (22)
 \end{aligned}$$

与 PT 对称态区分的效率完全一致, 同时满足 Ivanovic-Dieks-Peres 界限, 实验结果与理论预测吻合良好. 该分析表明, 通过引入辅助自由度并适当扩展希尔伯特空间, PT 对称量子态判别在本质上等价于厄米系统的 USD 策略.

3.2 基于离子阱体系的 PT 对称量子态区分实验研究

Zhu 等^[133] 在单个钙离子体系中, 利用 PT 对称哈密顿量实现了对两个非正交二能级量子态的无歧义区分, 并且首次在 PT 对称未破缺区域和破缺区域均成功实现了量子态区分. 对于给定的一对

非正交态, 研究人员还确定了可实现最快正交化的最优耗散参数. 考虑一个具有 PT 对称性的二维量子系统, 其哈密顿量可表示为 $H_{PT} = i\Gamma\sigma_z + J\sigma_x$, 其中 J 和 Γ 分别为系统耦合强度和耗散率, 设为正实数. 引入无量纲耗散参数 $a \equiv \Gamma/J$, 哈密顿量可重写为 $H_{PT} = \omega\sigma \cdot n$, 这里 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, $n = (J, 0, i\Gamma)/\omega$, $\omega = \sqrt{J^2 - \Gamma^2} = J\sqrt{1 - a^2}$ 在自旋空间中起到单位矢量的作用.

对于任意两个待区分的量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$, 研究人员通过适当选取自旋坐标, 使得这两个态位于 γ - z 平面内并关于 γ 轴对称, 可表示为 $|\psi_{1,2}\rangle = \left(\cos\frac{\pi \mp 2\theta}{4}, e^{i\varphi} \sin\frac{\pi \mp 2\theta}{4}\right)^T$, 基矢选为 $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$. 两个态的重叠为 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \cos\theta$, 其中 $\theta \in (0, \pi/2)$. 两态在 H_{PT} 作用下的时间演化可利用矩阵恒等式 $e^{i\omega\sigma \cdot n} = \cos\omega\sigma_0 + i\sin\omega\sigma \cdot n$, 在自旋坐标中表示为 $r_{i=1,2}(t) = \text{Tr}[|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|\sigma_r]$ [112], 其中 $r = \{x, y, z\}$. 当相对相位取 $\varphi = (2n - 1/2)\pi$ 时, 可以通过对应坐标来追踪两态的演化. 演化算符可视为绕 x 轴旋转, 其角速度随时间变化并受参数 a 调控. 当 $a < 1$ 时 (PT 未破缺区, PTS), 态的轨迹为椭圆, 其右焦点位于自旋空间的原点, 两个初始态沿椭圆轨迹逆时针旋转, 并在轨迹上另一位置实现正交, 如图 8(a) 所示, 由于轨迹封闭, 该区演化具有周期性, 在一个周期内出现两次正交化. 当 $1 < a < 1/\cos\theta$ 时, 态沿双曲线左支逆时针运动, 左焦点位

于原点, 两态可以一次达到正交, 如图 8(b) 所示. 当 $a > 1/\cos\theta$ 时, 右焦点位于原点, 两态无法达到正交, 如图 8(d) 所示. 另一个发现是: 在 PTS 区域中存在耗散参数的下限 $a_l = (1 - \sin\theta)/\cos\theta$, 而在 PTB 区域中存在上限 $a_u = 1/\cos\theta$. 当 $a < a_l$ 时, 系统的非厄米性较弱, 相应的椭圆轨迹接近圆形, 两态旋转速度的差异过小, 无法达到正交 (图 8(c)). 至于 PTB 区域中的上限 a_u , 需注意此时系统的初态记忆会持续流入环境并最终完全耗散, 最终态趋于与具有正虚部本征值 E_+ 对应的本征态 $|\psi_+\rangle$. 当 $a > a_u$, 渐近态 $|\psi_+\rangle$ 位于 $|\psi_1\rangle$ 之上 (在 y - z 平面上), 在演化过程中, $|\psi_{1,2}\rangle$ 顺时针旋转接近最终态, 但仍无法演化为正交态, 如图 8(d) 所示.

Zhu 等 [133] 为了与囚禁离子体系建立联系, 研究人员引入 $|\psi_{i=1,2}\rangle$ 在基矢 $|s\rangle$ 上的时间依赖归一化布居数:

$$\bar{P}_{i,s}^{\text{PT}}(t) = \frac{P_{i,s}^{\text{PT}}(t)}{P_{i,z_+}^{\text{PT}}(t) + P_{i,z_-}^{\text{PT}}(t)}, \quad (23)$$

其中 $P_{i,s}^{\text{PT}}(t) = |\langle s|e^{-iH_{PT}t}|\psi_i\rangle|^2$ 为未归一化布居数. 基矢 $|s\rangle$ 为泡利矩阵 σ_y 或 σ_z 的一个本征态, 分别记作 $|y_{\pm}\rangle \equiv |\uparrow(\downarrow)_y\rangle = (i, \mp 1)^T/\sqrt{2}$ 和 $|z_{\pm}\rangle \equiv |\uparrow(\downarrow)_z\rangle$. 当两态 $|\psi_{1,2}\rangle$ 在时间演化过程中实现正交时, 它们在基态 $|z_{\pm}\rangle$ 上的归一化布居数满足 $\bar{P}_{1,z_+}^{\text{PT}}(t) = \bar{P}_{2,z_-}^{\text{PT}}(t)$ 或 $\bar{P}_{2,z_+}^{\text{PT}}(t) = \bar{P}_{1,z_-}^{\text{PT}}(t)$. 此外, 为了避免仅因关于 γ 轴对称而并非真正正交的情况, 还需同时

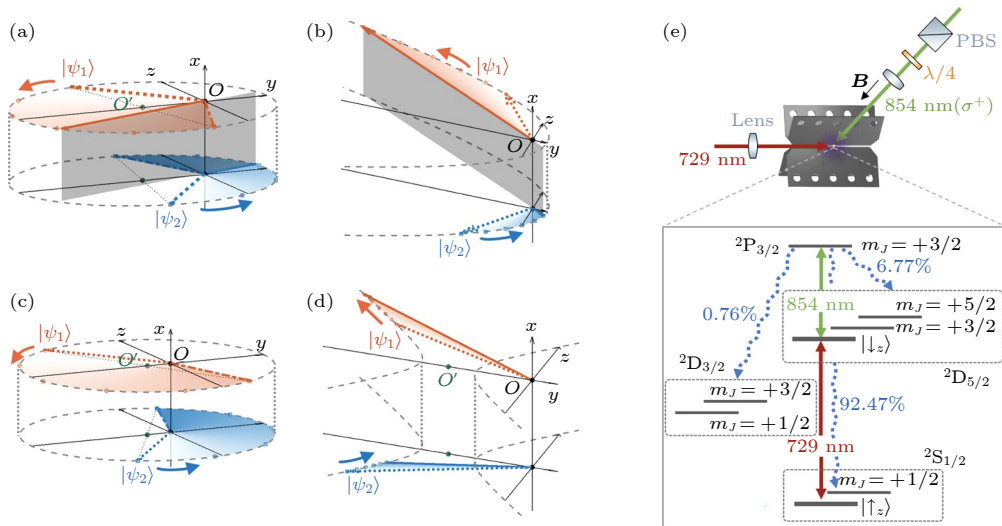


图 8 两个初态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在布洛赫球面上的演化轨迹 (a), (c) 表示 PT 对称未破缺区; (b), (d) 表示 PT 对称破缺区; (e) 表示实验装置示意图及钙离子的能级结构 [133]

Fig. 8. Evolution of two initial states $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ on the Bloch sphere in (a), (c) PTS regime or (b), (d) PTB regime; (e) schematic experimental setup and level diagram of $^{40}\text{Ca}^+$ ion [133].

测量 $P_{1,y+}^{\text{PT}}(t)$ 和 $P_{2,y+}^{\text{PT}}(t)$. 这一正交化判据同样适用于映射到纯耗散系统情形, 即所谓的被动 PT 对称系统, 其哈密顿量可写为 $H_{\text{Diss}} = H_{\text{PT}} - i\Gamma\sigma_0$, 此时未归一化布居为 $P_{i,s}^{\text{Diss}}(t) = e^{-2\Gamma t} P_{i,s}^{\text{PT}}(t)$, 相比 PT 对称系统仅多出一个随时间指数衰减的因子. 接下来, Wang 等^[134] 进行 PT 对称量子态区分的实验研究. 利用单个囚禁钙离子的八能级非厄米模型, 实现了该二能级纯耗散哈密顿量, 如图 8(e) 所示. 其核心机制是利用一束 854 nm 耗散激光将态 $|\downarrow_z\rangle$ 耦合到一个寿命极短的激发态, 该激发态快速衰减至多个其他能级. 此过程在态 $|\downarrow_z\rangle$ 上产生一个可调的有效衰减率, 其与系统内由 729 nm 激光驱动的相干耦合共同实现了非厄米动力学.

Zhu 等^[133] 的实验结果如图 9 所示. 在纯耗散模型下, 态 $|\psi_1(\theta = 1.3)\rangle$ 的非归一化布居数 $P_{1,z+}^{\text{Diss}}(t)$ (对应态 $|z_+\rangle$) 与 $P_{1,z-}^{\text{Diss}}(t)$ (对应态 $|z_-\rangle$) 随时间的演化 (见图 9(a)). 实验参数选取为 $a = \Gamma/J = 0.3033$, 对应于 PTS 区间. 同样的量在图 9(b) 中给出相同条件下 $|\psi_2(\theta = 1.3)\rangle$ 的结果. 此外, Zhu 等^[133] 还基于相同初态和相同有效耗散系数求解了 Lindblad 方程, 得到理论曲线 $P_{i,z+}^{\text{Lind}}(t)$ 与 $P_{i,z-}^{\text{Lind}}(t)$. 图 9(c) 给出了对应的归一化布居数 $\bar{P}_{1,z+}^{\text{Diss/Lind}}$ 与 $\bar{P}_{2,z-}^{\text{Diss/Lind}}$. 在图 9 所示的时间尺度内, 两能级 PT 对称系统与 Lindblad 方程模型之间的偏差非常小. 通过对实验数据的拟合, 得到实验测得的正交时间为 $Jt_{\text{orth}}^{\text{Exp}} = 0.7420$, 该值与 $\bar{P}_{1,z+}^{\text{Lind}}$ 和 $\bar{P}_{2,z-}^{\text{Lind}}$ 交点对应的 $Jt_{\text{orth}}^{\text{Lind}} = 0.7564$ 及耗散哈密顿量

模型结果 $Jt_{\text{orth}}^{\text{Diss}} = 0.7566$ 高度一致. 另外, PTB 区域的实验结果与耗散模型及 Lindblad 演化结果均高度吻合, 证明了该区间下 PT 对称态区分方案同样有效, 如图 9(d), (e) 所示.

Zhu 等^[133] 还研究了正交化时间随初始态夹角 θ 的变化关系. 如图 10 所示, 无量纲正交时间 Jt_{orth} 随初始夹角 θ 的增大而减小. 实验数据在 PTS 区与理论曲线符合良好; 而在 PTB 区, 当 θ 较小且 a 接近上界 $a_u = 1/\cos\theta$ 时, 实验出现明显偏离. 进一步地, 作者通过系统改变初态与有效耗散参数 a , 测量了正交时间. 图 11(a) 给出了二维 PT 对称哈密顿量的理论预测结果. 黑色实线和虚线分别表示参数 a 的下界和上界, 二者围成的区域即为实现 PT 对称量子态区分的有效范围, 其中正交时间以伪彩色形式表示. a 的下界位于 PTS 区并随 θ 增大而减小, 上界位于 PTB 区并随 θ 增大而增大, 因此整体可行区随夹角扩大而扩展. 对于给定的一对候选量子态, 总存在一个最优的耗散参数 $a(t_{\text{opt}})$, 可使正交化所需时间达到最短, 即构成 PT 对称量子态区分中的“量子最速降线问题”. 该最优参数可能位于 PTS 区域或 PTB 区域, 其在图 11(a) 中以蓝色虚线表示. 图 11(b) 给出了实验测量结果. 可以看到, 在 PTS 区及浅 PTB 区间, 实验值与理论预测符合良好; 而当耗散强度较大、初始态接近上界时, 实验偏离显著. 这主要源于系统衰减速率与正交化时间均增大, 使实验误差放大. 因此, 在实际实现量子态区分时, 应避免参数靠近上界 a_u 的区域.

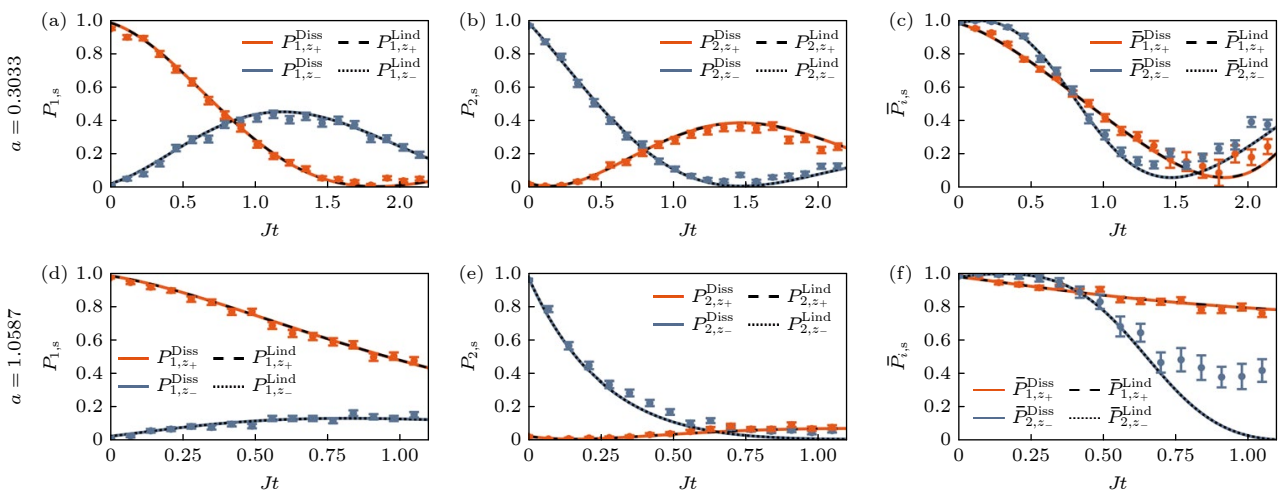


图 9 PT 对称系统中未归一化布居数随时间演化的理论-实验对比^[133]

Fig. 9. Theoretical and experimental comparison of the time evolution of unnormalized populations in PT-symmetric systems^[133].

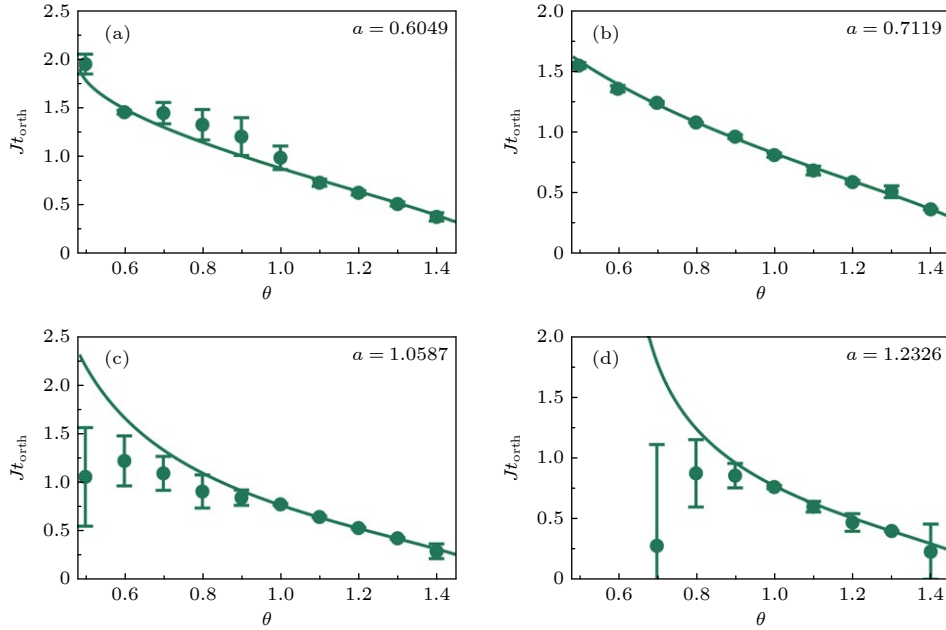


图 10 不同角度 θ 下的正交时间 t_{orth} , 实线表示基于 PT 对称哈密顿量的理论计算结果, 圆点表示通过拟合量子态布居数演化所得的实验数据^[133]

Fig. 10. The orthogonal time t_{orth} as a function of relative angle θ , the solid lines are theoretical results of a PT-symmetric Hamiltonian, the experimental data marked by dots are obtained by fitting the evolution of state populations^[133].

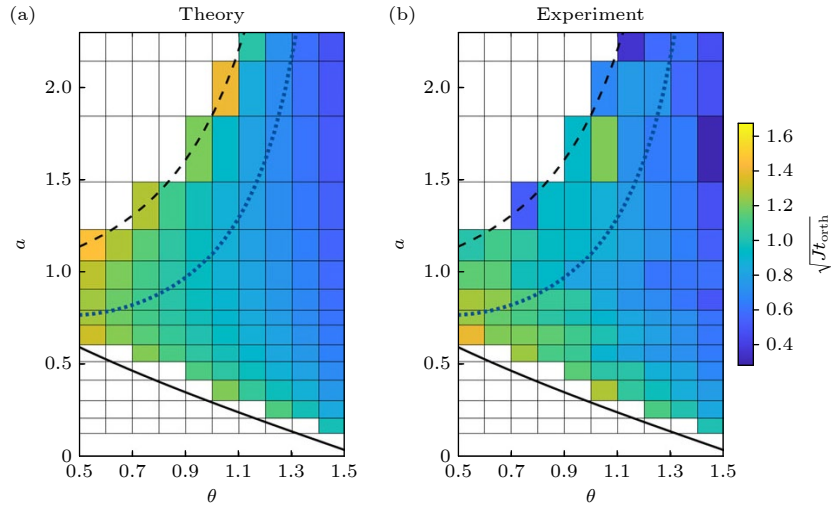


图 11 PT 对称量子态区分的有效区域由上界(黑色虚线)和下界(黑色实线)围成, 在该区域内用伪彩色表示正交时间^[133]

Fig. 11. The valid region of PT-symmetric quantum state discrimination is enclosed by the upper bound (black dashed line) and lower bound (black solid line), within which the orthogonal time is depicted by false-color^[133].

4 P 赝厄米系统量子态区分的理论研究

4.1 P 赝厄米系统实本征值区域

Dong 等^[53] 将基于非幺正时间演化的量子态区分方法推广到 P 赝厄米 (P-pseudo-Hermitian, PPH) 系统实本征值区域, 从理论上证明了任意两

非正交量子态均可在适当的 P 赝厄米哈密顿量下实现正交化. 另外, 在能级差相等的条件下, 作者给出了选择 P 赝厄米哈密顿量参数的准则, 当满足准则时, P 赝厄米系统能够较任意固定的 PT 对称系统更高效地完成态区分, 从而为发展高效、低资源消耗的量子态区分策略提供了新的思路. 把 η 算符用宇称算符 P 替代, P 赝厄米系统的哈密顿量有如下形式:

$$H_{\text{PPH}} = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ u & re^{-i\theta} \end{pmatrix} = r \cos \theta 1 + \sigma \cdot \left(\frac{s+u}{2}, i \frac{s-u}{2}, ir \sin \theta \right), \quad (24)$$

参数 s, u, r, θ 均是实数, s, u 为 P 赭厄米哈密顿量的反对角元. 其本征值为 $E_{\text{PPH}\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{su - r^2 \sin^2 \theta}$. 系统的能级差为 $\omega = \sqrt{su - r^2 \sin^2 \theta}$, 为保证能谱为实数, 引入约束 $\sin \zeta = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{su}} \in (-1, 1)$. 由此可计算出系统的时间演化算符为

$$U_{\text{PPH}}(t) = e^{-iH_{\text{PPH}}t} = \frac{e^{-irt \cos \theta}}{\cos \zeta} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \zeta) & -i \sin(\omega t) \frac{\sqrt{su}}{u} \\ -i \sin(\omega t) \frac{\sqrt{su}}{s} & \cos(\omega t + \zeta) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

由 (2) 式初始非正交态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 在 $U_{\text{PPH}}(t)$ 演化下的内积为

$$\langle \psi_1 | U_{\text{PPH}}^\dagger U_{\text{PPH}} | \psi_2 \rangle = \frac{\sin^2(\omega t) \left(-\cos \varepsilon \cos(2\zeta) - \frac{s+u}{\sqrt{su}} \sin \zeta + \frac{s^2+u^2}{2su} \cos \varepsilon \right) + \frac{u-s}{2\sqrt{su}} \cos \zeta \sin(2\omega t) + \cos^2 \zeta \cos \varepsilon}{\cos^2 \zeta}. \quad (26)$$

当内积为零时, 演化态达到正交, 对应正交化时间 t_2, t_3 满足:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{a^2 + b^2 + ac \pm \sqrt{b^2(a^2 + b^2 - c^2)}}{2(a^2 + b^2)}, \quad (27)$$

其中, $a = \cos \varepsilon \cos(2\zeta) + \frac{s+u}{\sqrt{su}} \sin \zeta - \frac{s^2+u^2}{2su} \cos \varepsilon$, $b = \frac{u-s}{\sqrt{su}} \cos \zeta$, $c = \frac{(s+u)^2}{2su} \cos \varepsilon - \frac{s+u}{\sqrt{su}} \sin \zeta$. 演化时间 t_2 和 t_3 为非平凡解的唯一条件是 $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$, 该条件可进一步转化为对初始态重叠度 $\cos \varepsilon$ 的上界约束. 特别地, 当固定能级差 ω , 并让 s 和 u 其中一个值趋于无穷大, 另一个值不变, 此时可以得到 $t_2 \rightarrow 0, t_3 \rightarrow 0$.

Dong 等 [53] 在固定 PT 对称系统和 P 赭厄米系统的能级差相等的前提下, 提出了选择 P 赭厄米哈密顿量参数的准则, 对于初始非正交态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 首次在 PT 对称系统中演化为正交态的时间 t_1 , 如满足:

$$\min\{t_2, t_3\} < t_1, \quad (28)$$

表明 P 赭厄米系统能够以更短的时间完成态正交化. 除迹距离外, 研究中亦引入量子相对熵作为态可区分性的辅助度量, 定义为 $S(\rho|\sigma) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$. 在非幺正演化下, 需对密度矩阵进行适当的归一化与正则化处理. 在初态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的时间演化过程中, 量子相对熵出现峰值的时刻, 即时间演化态达到正交.

Dong 等 [53] 依据准则 ((28) 式) 选取了多组参数, 并分别采用迹距离 D 与量子相对熵 S 对 P 赭

厄米系统与 PT 对称系统的态区分动力学进行了数值模拟. 图 12 展示了模拟结果, 其中红色与蓝色曲线分别描述了 P 赭厄米系统与 PT 对称系统中演化态的可区分性随时间的变化. 结果表明, $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$ 的正交化速度快于 $U_{\text{PT}}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{\text{PT}}|\psi_2\rangle$. 此外, 通过迹距离 D 与量子相对熵 S 两种方法得到的数值模拟结果一致. 接下来, 在固定 $\omega = \Delta$ 和 $\sqrt{su} = k$ (k 为 (3) 式中 PT 对称哈密顿量的反对角元) 的前提下, 结果发现当 $s > u$ 时, $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ 和 $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$ 比 $U_{\text{PT}}|\psi_1\rangle$ 和 $U_{\text{PT}}|\psi_2\rangle$ 更快达到正交; 当 $s < u$ 时, $U_{\text{PT}}|\psi_1\rangle$ 和 $U_{\text{PT}}|\psi_2\rangle$ 比 $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ 和 $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$ 更快达到正交. 这一发现表明, 参数 s 和 u 的相对大小是调控系统演化动力学的关键因素. 值得注意的是, 导致这种性能反转的深层物理机制尚未被完全揭示, 其内在机理的探索仍是一个开放且具有潜在突破价值的研究方向.

4.2 P 赭厄米系统复本征值区域

截至目前, 尚未有研究系统地探讨在 P 赭厄米系统复本征值区域中实现量子态区分的可行性. 为填补这一空白, 我们开展了数值模拟研究, 对该方案进行了初步验证. 如图 13 所示, 我们选取了 4 组不同的系统参数, 使系统的能级差 ω 为纯虚数, 从而确保系统处于 P 赭厄米系统复本征值区域. 数值结果表明, 尽管初始态之间存在非零重叠, 但在经过适当的非幺正演化后, 这些量子态均可演化为相互正交的末态, 从而实现一次测量即可完美区分.

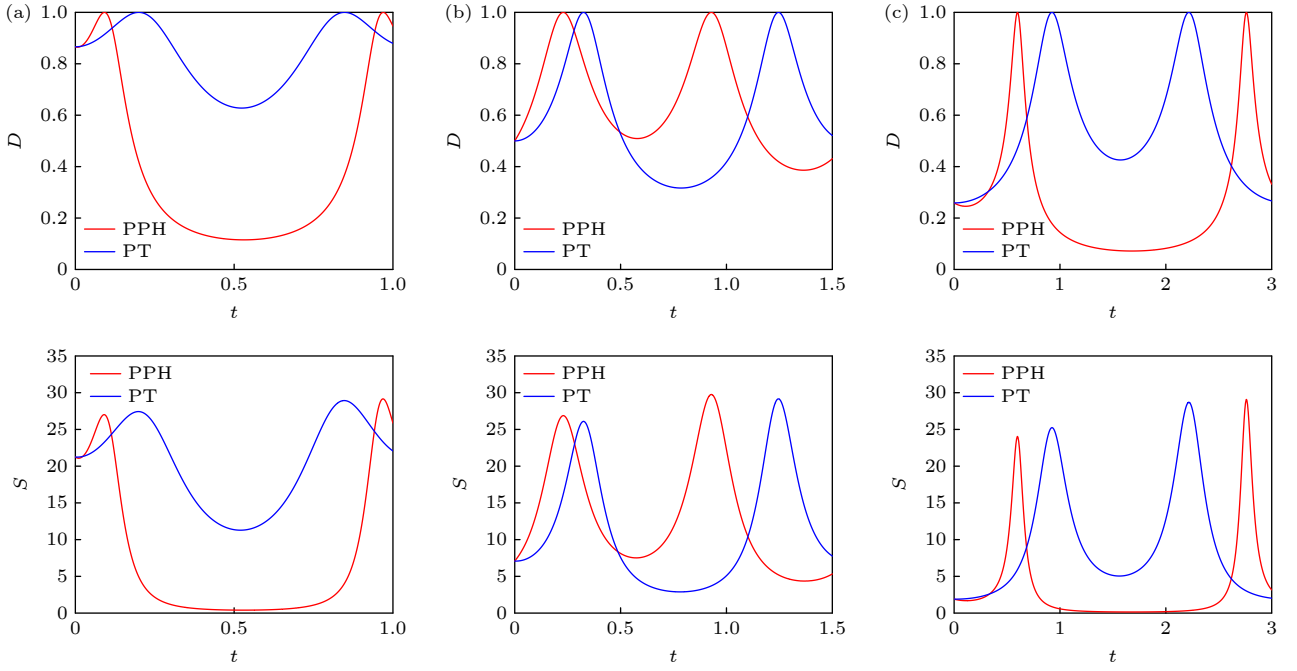


图 12 态 $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$ 、以及态 $U_{\text{PT}}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{\text{PT}}|\psi_2\rangle$ 之间的迹距离 D 与量子相对熵 S (a) $s = 8, u = 9, \omega = 3, k = 4, \varepsilon = \pi/3$; (b) $s = 6, u = 3, \omega = 2, k = 5, \varepsilon = \pi/6$; (c) $s = 7, u = 8, \omega = 1, k = 3, \varepsilon = \pi/12$ [53]
 Fig. 12. The trace distance D and the quantum relative entropy S between the states $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ and $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$, as well as between $U_{\text{PT}}|\psi_1\rangle$ and $U_{\text{PT}}|\psi_2\rangle$: (a) $s = 8, u = 9, \omega = 3, k = 4, \varepsilon = \pi/3$; (b) $s = 6, u = 3, \omega = 2, k = 5, \varepsilon = \pi/6$; (c) $s = 7, u = 8, \omega = 1, k = 3, \varepsilon = \pi/12$ [53].

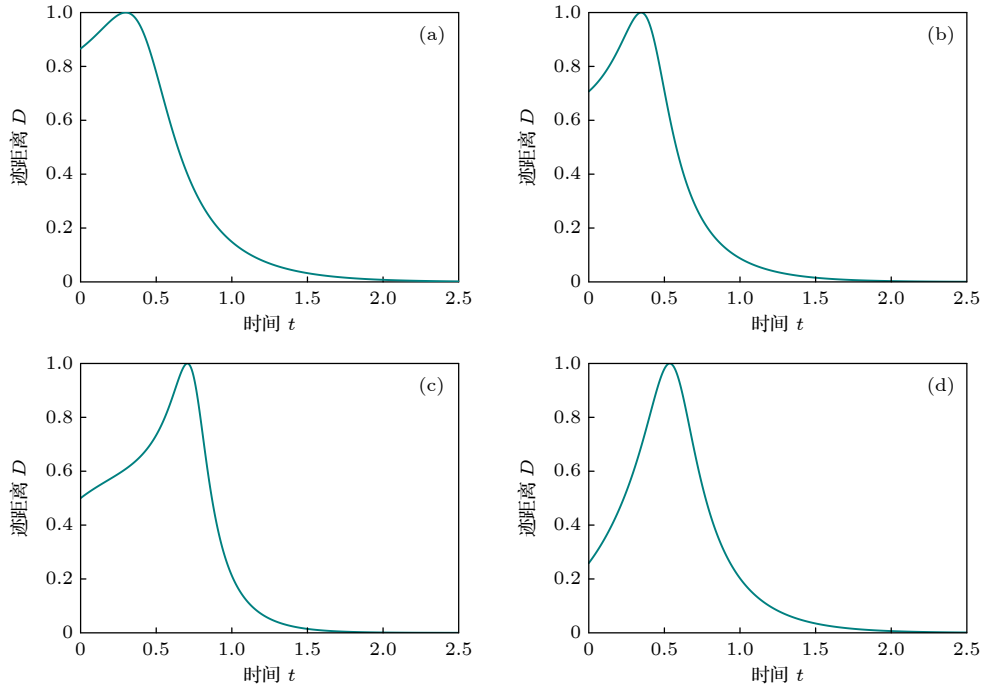


图 13 态 $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ 与 $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$ 之间的迹距离 D 变化曲线 (a) $s = 2, u = 1, r = 4, \theta = \pi/6, \varepsilon = \pi/3$; (b) $s = 3, u = 2, r = 5, \theta = \pi/5, \varepsilon = \pi/4$; (c) $s = 4, u = 3, r = 6, \theta = \pi/4, \varepsilon = \pi/6$; (d) $s = 4, u = 1, r = 3, \theta = \pi/3, \varepsilon = \pi/12$, 保证能级差 ω 为虚数, 可以看出两初始态可以被演化为正交态

Fig. 13. Variation of the trace distance D between the states $U_{\text{PPH}}|\psi_1\rangle$ and $U_{\text{PPH}}|\psi_2\rangle$, the parameters in each subfigure are set as follows: (a) $s = 2, u = 1, r = 4, \theta = \pi/6, \varepsilon = \pi/3$; (b) $s = 3, u = 2, r = 5, \theta = \pi/5, \varepsilon = \pi/4$; (c) $s = 4, u = 3, r = 6, \theta = \pi/4, \varepsilon = \pi/6$; (d) $s = 4, u = 1, r = 3, \theta = \pi/3, \varepsilon = \pi/12$, these parameters ensure that the energy gap ω is imaginary, as shown in the figure, the two initial states can evolve into orthogonal states.

5 结论与展望

在传统的厄米量子力学框架下,对两个已知的非正交量子态进行区分时,受到量子重叠的限制,区分过程不可避免地伴随非零错误率.相比之下,通过选择适当的PT对称与P-赝厄米哈密顿量能够实现任意非正交态的确定性区分. Bender等最早提出利用PT对称哈密顿量所生成的非么正时间演化算符,使两个非正交量子态在有限时间内正交化的思想,为非厄米系统在量子信息处理中的应用奠定了基础.同时,他们通过引入 C 算符建立了CPT内积框架,从数学上恢复了非厄米体系的概率守恒与么正性,使其具备与传统厄米体系等价的物理解释性.实验上,基于光子平台的离散时间PT对称量子模拟器成功再现实验中PT对称系统未破缺与破缺两种相下的动力学行为. Chen等通过线性光学实验首次实现了PT对称系统中两态及三态的非正交态区分,并指出在特定参数条件下该过程可等价于厄米体系中的无歧义区分(USD)方案.进一步的实验利用后选择门和基于损耗的非么正演化,在单光子量子比特层面上实现了PT对称量子态的确定性区分,并从高维嵌入的角度揭示其与厄米USD方案的内在联系.值得一提的是, Zhu等在离子体系中首次在PT对称破缺与未破缺两种区域均实现了非正交量子态区分,并确定了最快正交化对应的最优耗散参数,为非厄米量子控制提供了新的实验依据.另一方面,基于P-赝厄米系统的研究进一步拓展了非厄米态区分的理论边界.相关研究表明,在能极差相等的条件下,P-赝厄米系统通过适当选择哈密顿量参数,能够实现比固定PT对称系统更高效的态区分过程,为发展低资源、高效率的量子态判别与操控方案提供了新的思路与可能.

目前,非厄米量子态区分的研究仍面临若干挑战与发展空间.理论研究主要集中在二能级系统,如PT对称系统破缺区域和未破缺区域、P-赝厄米系统实本征值区域;对于给定的具有复本征值区域P-赝厄米哈密顿量及更一般形式的非厄米哈密顿量能够将哪些非正交态正交化,实现量子态区分仍需深入探讨.实验研究则多聚焦于PT对称体系,对于其他非厄米体系的量子态区分实验仍较为有限.总体而言,非厄米量子态区分方法不仅拓展

了量子态判别的理论体系,也为高效量子信息处理开辟了新的研究方向,是非厄米物理与量子信息科学交叉领域的重要前沿.

参考文献

- [1] Pauli W 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 175
- [2] Dirac P A M 1942 *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **180** 1
- [3] Lee T, Wick G 1969 *Nucl. Phys. B* **9** 209
- [4] Ding P Z, Yi W 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010309
- [5] Gamow G 1928 *Zeitschrift Phys.* **51** 204
- [6] Moiseyev N 2011 *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press)
- [7] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (OUP Oxford)
- [8] Barreiro J T, Müller M, Schindler P, Nigg D, Monz T, Chwalla M, Hennrich M, Roos C F, Zoller P, Blatt R 2011 *Nature* **470** 486
- [9] Del Re L, Rost B, Kemper A, Freericks J 2020 *Phys. Rev. B* **102** 125112
- [10] Hu Z X, Xia R X, Kais S 2020 *Sci. Rep.* **10** 3301
- [11] Viyuela O, Rivas A, Gasparinetti S, Wallraff A, Filipp S, Martín-Delgado M A 2018 *npj Quantum Inf.* **4** 10
- [12] Schlingens A W, Head-Marsden K, Sager L M, Narang P, Mazziotti D A 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 270503
- [13] Zheng C 2021 *Sci. Rep.* **11** 3960
- [14] Mao J W, Chen H T, Gao P L, Qu Y G 2026 *Chin. Sci. Bull.* **71** 661 (in Chinese) [毛佳伟, 陈浩田, 高鹏林, 瞿叶高 2026 *科学通报* **71** 661]
- [15] Barnett S M, Croke S 2009 *Adv. Opt. Phot.* **1** 238
- [16] Chefles A, Barnett S M 1998 *J. Phys. A: Math. General* **31** 10097
- [17] Ježek M, Řeháček J, Fiurášek J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 060301
- [18] D'Ariano G M, Sacchi M F, Kahn J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 032310
- [19] Mosley P J, Croke S, Walmsley I A, Barnett S M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 193601
- [20] Cook R L, Martin P J, Geremia J M 2007 *Nature* **446** 774
- [21] Chefles A 2000 *Contemp. Phys.* **41** 401
- [22] Bergou J A 2010 *J. Mod. Opt.* **57** 160
- [23] Becerra F, Fan J, Baumgartner G, Goldhar J, Kosloski J, Migdall A 2013 *Nat. Photonics* **7** 147
- [24] Dušek M, Jahma M, Lütkenhaus N 2000 *Phys. Rev. A* **62** 022306
- [25] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, Zbinden H 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 145
- [26] Ghoreishi S A, Akhtarshenas S J, Sarbishaei M 2019 *Quantum Inf. Process.* **18** 150
- [27] János A B 2007 *J. Phys. : Conf. Ser.* **84** 012001
- [28] Bae J, Kwek L C 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 083001
- [29] Helstrom C W 1969 *J. Stat. Phys.* **1** 231
- [30] Holevo A S 1973 *J. Multivariate Anal.* **3** 337
- [31] Solís-Prosser M, Fernandes M F, Jiménez O, Delgado A, Neves L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 100501
- [32] Clarke R B, Chefles A, Barnett S M, Riis E 2001 *Phys. Rev. A* **63** 040305
- [33] Mohseni M, Steinberg A M, Bergou J A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 200403
- [34] Agnew M, Bolduc E, Resch K J, Franke-Arnold S, Leach J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 020501

- [35] Dieks D 1988 *Phys. Lett. A* **126** 303
- [36] Ivanovic I D 1987 *Phys. Lett. A* **123** 257
- [37] Peres A 1988 *Phys. Lett. A* **128** 19
- [38] Jaeger G, Shimony A 1995 *Phys. Lett. A* **197** 83
- [39] Yang Y H, Gao F, Tian G J, Cao T Q, Zuo H J, Wen Q Y 2015 *Quantum Inf. Process.* **14** 731
- [40] Rizk D A, Younes A 2021 *Quantum Inf. Process.* **20** 307
- [41] Yu X D, Shang J, Gülhne O 2022 *Adv. Quantum Technol.* **5** 2100126
- [42] Flatt K, Lee H, Carceller C R I, Brask J B, Bae J 2022 *PRX Quantum* **3** 030337
- [43] Mukherjee S, Naonit S, Pan A 2022 *Phys. Rev. A* **106** 012216
- [44] Yang B, Li Y, Ni G Y 2023 *Phys. Rev. A* **108** 052217
- [45] Gómez S, Gómez E S, Jiménez O, Delgado A, Walborn S P, Lima G 2022 *Sci. Rep.* **12** 17312
- [46] Webb J W, Puthoor I V, Ho J, Crickmore J, Blakely E, Fedrizzi A, Andersson E 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 023094
- [47] Zhu G Y, Kálmán O, Wang K K, Xiao L, Qu D K, Zhan X, Bian Z H, Kiss T, Xue P 2019 *Phys. Rev. A* **100** 052307
- [48] Lienhard B, Vepsäläinen A, Govia L C, Hoffer C R, Qiu J Y, Riste D, Ware M, Kim D, Winik R, Melville A 2022 *Phys. Rev. Appl.* **17** 014024
- [49] Solís-Prosser M, Jiménez O, Delgado A, Neves L 2021 *Quantum Sci. Tech.* **7** 015017
- [50] Goel S, Tyler M, Zhu F, Leedumrongwatthanakun S, Malik M, Leach J 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 143602
- [51] Forghieri G, Secchi A, Bertoni A, Bordone P, Troiani F 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 043159
- [52] Clarke R B, Kendon V M, Chefles A, Barnett S M, Riis E, Sasaki M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012303
- [53] Dong Q L, Gao X E, Liu Z H, Li H, Wen J W, Zheng C 2025 *Entropy* **27** 836
- [54] Bender C M, Brody D C, Caldeira J, Günther U, Meister B K, Samsonov B F 2013 *Philos. Trans Royal Soc. A* **371** 20120160
- [55] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [56] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2004 *Phys. Rev. D* **70** 025001
- [57] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [58] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [59] Chen D X, Zhang Y, Zhao J L, Wu Q C, Fang Y L, Yang C P, Nori F 2022 *Phys. Rev. A* **106** 022438
- [60] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [61] Mostafazadeh A 1998 *J. Math. Phys.* **39** 4499
- [62] Mostafazadeh A 2002 *Nucl. Phys. B* **640** 419
- [63] Mostafazadeh A 2004 *J. Math. Phys.* **45** 932
- [64] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 2814
- [65] Rost B, Del Re L, Earnest N, Kemper A F, Jones B, Freericks J K 2025 *npj Quantum Inf.* **11** 10
- [66] Del Re L, Rost B, Foss-Feig M, Kemper A, Freericks J 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 100601
- [67] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
- [68] Hodaei H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
- [69] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nature Phys.* **6** 192
- [70] Wimmer M, Miri M A, Christodoulides D, Peschel U 2015 *Sci. Rep.* **5** 17760
- [71] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nature Mater.* **12** 108
- [72] Xu H T, Mason D, Jiang L Y, Harris J 2016 *Nature* **537** 80
- [73] Yao R, Lee C S, Podolskiy V, Guo W 2019 *Laser Photonics Rev.* **13** 1800154
- [74] Zheng C, Li D L 2022 *Sci. Rep.* **12** 2824
- [75] Li D L, Zheng C 2022 *Entropy* **24** 1563
- [76] Liu Z H, Zheng C 2024 *Symmetry* **16** 584
- [77] Gu Z M, Guo J M, Zhu J 2023 *Chin. Sci. Bull.* **68** 3428 (in Chinese) [顾仲明, 郭佳敏, 祝捷 2023 科学通报 **68** 3428]
- [78] Gao X E, Li D L, Liu Z H, Zheng C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 240303 (in Chinese) [高雪儿, 李代莉, 刘志航, 郑超 2022 物理学报 **71** 240303]
- [79] Zheng C 2022 *Chin. Phys. B* **31** 100301
- [80] Zheng C 2022 *Entropy* **24** 867
- [81] Li X G, Zheng C, Gao J C, Long G L 2022 *Phys. Rev. A* **105** 032405
- [82] Wen J W, Zheng C, Ye Z D, Xin T, Long G L 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013256
- [83] Wang P, Jin L, Song Z 2024 *Phys. Rev. B* **109** 115406
- [84] Zhang S M, He T Y, Jin L 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 027201
- [85] Zhang S M, Jin L, Song Z 2022 *Chin. Phys. B* **31** 010312
- [86] Gao W C, Zheng C, Liu L, Wang T J, Wang C 2020 *Opt. Express* **29** 517
- [87] Pan D, Liu Y C, Niu P, Zhang H, Zhang F, Wang M, Song X T, Chen X, Zheng C, Long G L 2025 *Sci. Adv.* **11** eadt4627
- [88] Li J, Ding H T, Zhang D W 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 200601 (in Chinese) [李竞, 丁海涛, 张丹伟 2023 物理学报 **72** 200601]
- [89] Wang X F, Zheng Y Y, Gu S P, Zhang Q, Zhong W, Du M M, Li X Y, Shen S T, Zhang A L, Zhou L, Sheng Y B 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 210302 (in Chinese) [王兴福, 郑艳艳, 顾世浦, 张琦, 钟伟, 杜明明, 李喜云, 沈淑婷, 张安蕾, 周澜, 盛宇波 2025 物理学报 **74** 210302]
- [90] Cui S H, Du M M, Li X Y, Zhou L, Sheng Y B 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 190302 (in Chinese) [崔诗荷, 杜明明, 李喜云, 周澜, 盛宇波 2025 物理学报 **74** 190302]
- [91] Wang M Y, Wang X D, Ruan D, Long G L 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 190301 (in Chinese) [王明宇, 王馨德, 阮东, 龙桂鲁 2021 物理学报 **70** 190301]
- [92] Kong X Y, Zhu Y Y, Wen J W, Xin T, Li K R, Long G L 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 220301 (in Chinese) [孔祥宇, 朱垣晔, 闻经纬, 辛涛, 李可仁, 龙桂鲁 2018 物理学报 **67** 220301]
- [93] Yang L, Ma H Y, Zheng C, Ding X L, Gao J C, Long G L 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 230303 (in Chinese) [杨璐, 马海洋, 郑超, 丁晓兰, 高健存, 龙桂鲁 2017 物理学报 **66** 230303]
- [94] Wei S J, Wen J W, Li X G, Chang P J, Wang B Z, Nori F, Long G L 2025 arXiv: 2506.10283 (quant-ph)
- [95] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052107
- [96] Tang Y J, Liang C, Liu Y C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 171101 (in Chinese) [唐原江, 梁超, 刘永椿 2022 物理学报 **71** 171101]
- [97] Zhang X Z, Wang P, Zhang K L, Yang X M, Song Z 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 174501 (in Chinese) [张禧征, 王鹏, 张坤亮, 杨学敏, 宋智 2022 物理学报 **71** 174501]
- [98] Kato T 2013 *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer Science & Business Media)
- [99] Heiss W D 2012 *J. Phys. A Math. Theor.* **45** 444016
- [100] Miri M A, Alu A 2019 *Science* **363** eaar7709
- [101] Ding K, Fang C, Ma G C 2022 *Nat. Rev. Phys.* **4** 745
- [102] Mao W B, Fu Z T, Li Y H, Li F, Yang L 2024 *Sci. Adv.* **10** eadl5037
- [103] Zhang J, Peng B, Özdemir Ş K, Pichler K, Krimer D O, Zhao G, Nori F, Liu Y X, Rotter S, Yang L 2018 *Nat.*

- Photonics* **12** 479
- [104] Lai Y H, Lu Y K, Suh M G, Yuan Z, Vahala K 2019 *Nature* **576** 65
- [105] Bender C M, Brody D C, Jones H F, Meister B K 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 040403
- [106] Carlini A, Hosoya A, Koike T, Okudaira Y 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 060503
- [107] Lam M R, Peter N, Groh T, Alt W, Robens C, Meschede D, Negretti A, Montangero S, Calarco T, Alberti A 2021 *Phys. Rev. X* **11** 011035
- [108] Zheng C, Hao L, Long G L 2013 *Philos. Trans. Royal Soc. A* **371** 20120053
- [109] Cannata F, Junker G, Trost J 1998 *Phys. Lett. A* **246** 219
- [110] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035002
- [111] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2003 *Am. J. Phys.* **71** 1095
- [112] Nielsen M A, Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [113] Fuchs C A, Van De Graaf J 2002 *IEEE Trans. Inform. Theory* **45** 1216
- [114] Kawabata K, Ashida Y, Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190401
- [115] Ruskai M B 1994 *Rev. Math. Phys.* **6** 1147
- [116] Gilchrist A, Langford N K, Nielsen M A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 062310
- [117] Xiao L, Wang K K, Zhan X, Bian Z H, Kawabata K, Ueda M, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 230401
- [118] Wang Y T, Li Z P, Yu S, Ke Z J, Liu W, Meng Y, Yang Y Z, Tang J S, Li C F, Guo G C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230402
- [119] Fang Y L, Zhao J L, Zhang Y, Chen D X, Wu Q C, Zhou Y H, Yang C P, Nori F 2021 *Commun. Phys.* **4** 223
- [120] Tang J S, Wang Y T, Yu S, He D Y, Xu J S, Liu B H, Chen G, Sun Y N, Sun K, Han Y J 2016 *Nat. Photonics* **10** 642
- [121] Li Q, Zhang C J, Cheng Z D, Liu W Z, Wang J F, Yan F F, Lin Z H, Xiao Y, Sun K, Wang Y T, Tang J S, Xu J S, Li C F, Guo G C 2019 *Optica* **6** 67
- [122] Bi Y F, Wu X Y, Zhang L F, Wang T J, Yang D Q, Wang C 2024 *Chin. Sci. Bull.* **69** 5028 [毕岩峰, 吴星宇, 张璐矾, 王铁军, 杨大全, 王川 2024 科学通报 **69** 5028]
- [123] Breuer H P, Laine E M, Piilo J, Vacchini B 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021002
- [124] Rivas Á, Huelga S F, Plenio M B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050403
- [125] Chruściński D, Maniscalco S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 120404
- [126] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
- [127] Tischler N, Rockstuhl C, Słowik K 2018 *Phys. Rev. X* **8** 021017
- [128] Simon B N, Chandrashekar C, Simon S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022323
- [129] Balytskyi Y, Raavi M, Pinchuk A, Chang S Y 2020 arXiv: 2012.14897 [quant-ph]
- [130] Wang X W, Zhu G Y, Xiao L, Zhan X, Xue P 2024 *Quantum Inf. Process.* **23** 8
- [131] Sparrow C, Martín-López E, Maraviglia N, Neville A, Harrold C, Carolan J, Joglekar Y N, Hashimoto T, Matsuda N, O'Brien J L 2018 *Nature* **557** 660
- [132] Wang K K, Xiao L, Budich J C, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 026404
- [133] Zhu C H, Shi T T, Ding L Y, Zheng Z Y, Zhang X, Zhang W 2025 *Adv. Sci.* **12** e10384
- [134] Wang W C, Zhou Y L, Zhang H L, Zhang J, Zhang M C, Xie Y, Wu C W, Chen T, Ou B Q, Wu W 2021 *Phys. Rev. A* **103** L020201

SPECIAL TOPIC—Quantum information processing

Recent progress of quantum state discrimination in non-Hermitian systems*

DONG Qinliang¹⁾ ZHENG Chao^{1)2)†}1) (*School of Energy Storage Science and Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China*)2) (*Beijing Key Laboratory of Information Metamaterials, Beijing 100144, China*)

(Received 10 November 2025; revised manuscript received 22 December 2025)

Abstract

Quantum state discrimination (QSD) is a fundamental problem in quantum information science, whose central goal is to optimally distinguish nonorthogonal quantum states under limited resources. Due to the constraints imposed by the fundamental principles of quantum mechanics, nonorthogonal quantum states cannot be perfectly distinguished through a single measurement. However, under non-unitary evolution governed by a non-Hermitian Hamiltonian, initially nonorthogonal states can be evolved into orthogonal ones within a finite time, thereby achieving perfect discrimination and opening new avenues for quantum information processing. Specifically, parity-time (PT)-symmetric systems and P-pseudo-Hermitian (PPH) systems serve as two important platforms for the orthogonalization of nonorthogonal quantum states. By carefully designing Hamiltonians that satisfy the corresponding symmetry conditions, a system can evolve a pair of initially nonorthogonal states into orthogonal ones within a finite time, thereby enabling perfect discrimination through a single measurement. Moreover, under certain conditions, PPH systems can accomplish state discrimination with higher efficiency than PT-symmetric systems. In terms of experiments, the feasibility of non-Hermitian QSD has been verified on various physical platforms. Using linear-optical setups, researchers have realized PT-symmetric systems capable of discriminating two and three nonorthogonal quantum states. In optical systems, researchers have realized controllable non-unitary evolution through polarization control and loss engineering, experimentally observing periodic oscillations in quantum-state distinguishability within the unbroken PT-symmetric phase, as well as monotonic decay behavior in the broken phase. In trapped-ion systems, by precisely introducing dissipation, unambiguous discrimination of nonorthogonal quantum states has been achieved in both the unbroken and the broken PT-symmetric regions, with significant acceleration of quantum evolution observed under specific dissipation conditions. Furthermore, an experimental scheme embedding a two-dimensional non-Hermitian system into a three-dimensional Hermitian system has demonstrated the equivalence between PT-symmetric state discrimination and unambiguous state discrimination (USD) in Hermitian systems. To date, there have been no experimental studies on QSD in P-pseudo-Hermitian systems. In summary, research on non-Hermitian QSD not only deepens our understanding of non-unitary dynamics but also opens new avenues for efficient quantum information processing. Future work may further extend the application of non-Hermitian Hamiltonians in QSD, generalize these strategies to higher-dimensional and more generic non-Hermitian systems, and explore more diverse experimental implementations, thereby laying the foundation for the development of faster and more efficient quantum technologies.

Keywords: quantum state discrimination, parity-time-symmetric systems, P-pseudo-Hermitian systems

DOI: [10.7498/aps.75.20251579](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251579)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251579](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251579)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175002, 11705004, 12381240288) and the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1222020).

† Corresponding author. E-mail: czheng@ncut.edu.cn



非厄米系统量子态区分的新进展

董勤亮 郑超

Recent progress of quantum state discrimination in non-Hermitian systems

DONG Qinliang ZHENG Chao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 050601 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251579

CSTR: 32037.14.aps.75.20251579

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251579>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非厄米系统的量子模拟新进展

Recent progress of quantum simulation of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(24): 240303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221825>

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

物理学报. 2022, 71(7): 074207 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270>

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性

Information retrieval and criticality in high-dimensional parity-time-symmetric systems

物理学报. 2022, 71(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220511>

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems

物理学报. 2022, 71(17): 174501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220914>

二次型玻色系统中非厄米动力学的研究进展

Research progress of non-Hermitian dynamics in quadratic bosonic systems

物理学报. 2026, 75(4): 174501 <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251497>

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842>