





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.008/02

Princípio de Equivalência, Partículas não Massivas com $E = 0$
e Partículas Massivas com $E < mc^2$ em Espaços Curvos e
Aplicações.

Jorge Castiñeiras Rodríguez



Orientador:

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

São Paulo

— Julho 2002 —

Resumo

Este trabalho é motivado pelo caráter relativo da radiação emitida por cargas aceleradas e em especial pela possibilidade da existência dum análogo quântico para o princípio de equivalência. Para tanto, discutimos, primeiramente, a quantização do setor de baixas energias de um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom. Isto nos permite a análise de processos envolvendo partículas escalares de baixas energias (“soft”) presentes no exterior de buracos negros. Em particular, calculamos a resposta de uma fonte escalar estática em interação com a radiação Hawking, considerando tanto o caso em que o campo encontra-se no vácuo de Unruh quanto no de Hartle-Hawking. Esta resposta é comparada com aquela obtida quando a fonte está uniformemente acelerada no vácuo usual no espaço-tempo de Minkowski com a mesma aceleração própria. Mostramos que ambas as respostas são, em geral, diferentes. A igualdade é verificada no limite em que a carga do buraco vai para zero. Ou seja, quando o buraco negro de Reissner-Nordstrom transforma-se num buraco negro de Schwarzschild. A relevância conceitual destes resultados é analisada. Seguidamente analisamos a possibilidade de detectar partículas de baixa energia no caso em que estas possuem massa de repouso m e energia *total* $E < mc^2$ no “Rindler wedge”, fora de buracos negros de Reissner-Nordstrom e nos espaços-tempos de estrelas relativísticas e não relativísticas. Para tanto, usamos detectores do tipo Unruh-DeWitt para calcular a taxa de detecção correspondente em cada caso. A posição média das partículas é identificada com a média espacial da probabilidade de excitação dos detectores, os quais supõem-se distribuídos em todo o espaço. Mostramos que os nossos resultados estão em concordância com as previsões clássicas da Relatividade Geral. No final reconciliamos os nossos resultados com aqueles obtidos nos laboratórios terrestres os quais estão em boa concordância com $E \geq mc^2$.

Palavras chave: Teoria Quântica de Campos , espaços-tempos curvos, buraco negro, campo escalar; radiação Hawking.

Áreas de conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7, 1.05.02.01-7, 1.05.03.01-3.

Abstract

The present work is motivated by the relative character of the radiation emitted by an accelerated charge and in particular by the possibility of the existence of a quantum equivalence principle. For this purpose we discuss the quantization of the low-energy sector of a massless scalar field in the Reissner-Nordstrom spacetime. This allows the analysis of processes involving soft scalar particles occurring outside charged black holes. In particular, we compute the response of a static scalar source interacting with Hawking radiation using the Unruh (and the Hartle-Hawking) vacuum. This response is compared with the one obtained when the source is uniformly accelerated in the usual vacuum of the Minkowski spacetime with the same proper acceleration. We show that both responses are in general different in opposition to the result obtained when the Reissner-Nordstrom black hole is replaced by a Schwarzschild one. The conceptual relevance of this result is commented. Next, we analyze the possibility of detecting *free low energy elementary particles* with rest mass m and total energy $E < mc^2$ in the Rindler wedge, outside Reissner-Nordstrom black holes and in the spacetime of relativistic (and non-relativistic) stars, and use Unruh-DeWitt-like detectors to calculate the associated particle detection rate in each case. The (mean) particle position is identified with the spatial average of the excitation probability of the detectors, which are supposed to cover the whole space. Our results are shown to be in harmony with General Relativity classical predictions. Eventually we reconcile our conclusions with Earth-based experiments which are in good agreement with $E \geq mc^2$.

Keywords: Quantum field theory, curved spacetimes, black hole, scalar field, Hawking radiation.

A Manuela V. Rodríguez Martínez.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. George Matsas pela sua orientação segura e competente, pela sua disponibilidade e preocupação quase paterna com o nosso trabalho e nossa vida.

A Crispino, Vanzella e Matsas pela colaboração e amizade fraterna, por tudo o que aprendi com eles e ainda aprenderei.

À minha família que mesmo distante, esteve sempre presente.

À Ângela e ao Crispino pelo apoio constante e incondicional. Obrigado por terem sido minha família no Brasil.

Aos meus amigos pela força na luta diária.

A todos os professores funcionários e alunos do Instituto de Física Teórica, sempre dispostos a colaborar.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

Ao Brasil pelo apoio incondicional e por fazer-me sentir em casa.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram ou incentivaram a realização deste trabalho.

Índice

I	Introdução	9
II	Partículas sem massa com $E = 0$ e a sua relação com o princípio de equivalência	14
II.1	Observadores uniformemente acelerados e coordenadas de Rindler	16
II.2	Radiação de cargas uniformemente aceleradas em Minkowski.	19
II.2.1	Campo eletromagnético da carga	20
II.2.2	Tensor energia momento do campo	22
II.3	Radiação de cargas uniformemente aceleradas do ponto de vista quântico e partículas com $E = 0$	24
III	Quantização do setor de baixas energias de um campo escalar não massivo fora de um buraco negro de Reissner-Nordstrom e fontes estáticas.	28
III.1	Quantização do campo escalar sem massa fora de um buraco negro carregado	29
III.1.1	Modos de baixas frequências	31
III.1.2	Modos normais perto do horizonte e no infinito	32
III.1.3	Constantes de normalização	34
III.2	Resposta de uma fonte escalar interagindo com a radiação Hawking	37
IV	Partículas massivas com $E < mc^2$ em torno de buracos negros	

e estrelas relativísticas.	43
IV.1 Detecção de partículas massivas no espaço-tempo de um buraco negro bi-dimensional	45
IV.2 Detecção de partículas massivas fora de buracos negros de Reissner-Nordstrom	52
IV.3 Detecção de partículas massivas em Estrelas Relativísticas . .	65
V Conclusões	75
A Programas usados nos cálculo numéricos	80
A.1 Cálculo da taxa de detecção Γ_{ω_0} como função da razão ω_0/m para observadores em diferentes pontos em Reissner-Nordstrom	80
A.2 Cálculo da densidade de probabilidade $d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d$ para diferentes razões ω/m em Reissner-Nordstrom	89
A.3 Cálculo de $\langle\rho_d\rangle$ em Reissner-Nordstrom	96
A.4 Cálculo das auto-freqüências mais baixas $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ na estrela	101
A.5 Cálculo da taxa de detecção $\Gamma_{\omega_{000}}$ para as auto-freqüências $\omega_0/m < 1$ na estrela	108
A.6 Cálculo da densidade de probabilidade $(d\mathcal{P}_{\omega_{00}}/d\lambda_d)/m$ e de $\langle\lambda_d\rangle$ na estrela	115

Capítulo I

Introdução

A gravitação semi-clássica, também conhecida como teoria de campos em espaços curvos, pretende ser mais um passo na construção de uma teoria quântica da gravitação. É uma área de interface entre Relatividade Geral e Teoria de Campos Quânticos. Em síntese, a idéia resume-se em fixar um espaço-tempo de fundo onde se efetua a quantização dos campos. As propriedades geométricas da variedade podem ser artificialmente dadas ou definidas pelas equações de Einstein.

A teoria semi-clássica da gravitação apesar de ser incapaz de descrever fenômenos físicos em regimes extremos, como a escala de Planck, tem se notabilizado por algumas predições surpreendentes como a criação de partículas em universos em expansão, o efeito Fulling-Davies-Unruh e a radiação Hawking. Em 1974, Hawking [1], ao estudar a quantização de campos no espaço externo ao de estrelas colapsando mostrou que buracos negros irradiam e possuem associada uma entropia. Foi com enorme surpresa que este resultado foi recebido, pois ao contrário do que previsto classicamente, buracos negros poderiam eventualmente evaporar até seu possível desaparecimento.

Desde a descoberta do efeito Hawking muitos pontos foram esclarecidos e outros tantos estão atualmente sendo investigados. O assim chamado efeito Fulling-Davies-Unruh [2, 3] desempenhou um papel importante na com-

preensão mais profunda deste fenômeno. Com efeito, um observador acelerado, com aceleração própria a no vácuo de Minkowski detecta um banho térmico de partículas cuja temperatura é dada por

$$T = \frac{a}{2\pi}, \quad (\text{I.1})$$

no sistema natural de unidades, no qual $c = G = \hbar = k_B = 1$, que será adotado ao longo de todo este trabalho. Esta é uma consequência direta do fato de que o conteúdo de partícula de uma teoria de campos depende fortemente do sistema de referência onde se efetua sua quantização [2]–[4].

Ultimamente o conceito de partícula de energia nula mostrou ser de considerável relevância em teoria de campos em espaços curvos para uma melhor compreensão de certos problemas como o que questiona se observadores co-acelerados com cargas elétricas detectam qualquer radiação proveniente da carga [5]–[6] e se cargas inerciais emitem radiação segundo observadores acelerados [7].

Mais recentemente mostrou-se que a probabilidade de emissão de partículas escalares de energia nula a partir de fontes estáticas fora de buracos negros de Schwarzschild assumindo o vácuo de Unruh é exatamente igual à probabilidade de emissão de partículas a partir da mesma fonte quando uniformemente acelerada no vácuo de Minkowski com a mesma aceleração própria [8]. Tal equivalência quântica é bastante surpreendente pois a topologia dos espaços-tempos de Rindler e de Schwarzschild são totalmente diversas.

Com o objetivo de analisar em mais detalhe o quão robusta era tal equivalência iniciou-se um programa de testes que consiste na análise deste problema sob diferentes (i) estados quânticos, (ii) campos envolvidos e (iii) espaços de fundo. Já se verificou na Ref. [8] que a mudança do estado quântico de vácuo de Unruh para o de Hartle–Hawking leva à perda da equivalência quântica descrita acima. Com respeito ao item (ii) demonstrou-se recentemente que a dita equivalência não é preservada em geral para outros campos [9]. Ficava então a questão se a equivalência depende sensivelmente ou não da geometria de fundo.

O nosso trabalho de doutorado começou com o objetivo primordial de responder justamente à pergunta acima. Para tanto [10] começamos substituindo o buraco de Schwarzschild pelo buraco de Reissner-Nordström. Nesta geometria de fundo, quantizamos o setor de baixas energias de um campo escalar sem massa. Isto nos permite a análise de processos envolvendo partículas de baixas energias (“soft”) presentes no exterior de buracos negros. Em particular, calculamos, a nível de árvore, a taxa de emissão e absorção de partículas escalares de energia nula a partir de fontes estáticas em interação com a radiação Hawking, considerando tanto o caso em que o campo encontra-se no vácuo de Unruh quanto o caso em que o campo está no vácuo de Hartle-Hawking. Esta resposta é comparada com aquela obtida quando a fonte está uniformemente acelerada no vácuo usual no espaço-tempo de Minkowski com a mesma aceleração própria. Mostramos que ambas as respostas são, em geral, diferentes. A igualdade é verificada no limite em que a carga do buraco vai para zero. Ou seja, quando o buraco negro de Reissner-Nordstrom transforma-se num buraco negro de Schwarzschild. Tanto a obtenção destes resultados quanto a análise da sua relevância conceitual podem ser encontrados no Capítulo III.

Um aspecto importante em relação aos modos de baixas energias que usamos nestes cálculos é que, tratando-se de espaços-tempos curvos, estes modos de baixas energias não são exclusivos do campo sem massa. Um campo escalar massivo também possui, em geral, modos de baixas energias, em particular, energias $\omega < m$.

Surge assim a questão [11] de qual é a probabilidade de medir um estado massivo $|\omega_0\rangle$, onde

$$\omega_0 < mc^2, \quad (I.2)$$

de acordo com um observador parado em $r = r_0$ fora de um buraco negro ou mesmo numa estrela? Em particular, dado que todas as experiências feitas na Terra acontecem na presença de um campo gravitacional, qual é a probabilidade de detectarmos uma partícula satisfazendo a Eq. (I.2)?

Para tentar responder estas e outras perguntas, no Capítulo IV, anali-

samos *partículas elementares livres* com massa de repouso m e energia total $E < mc^2$ no “Rindler wedge”, fora de buracos negros de Reissner-Nordstrom e no espaços tempos de estrelas relativísticas e não relativísticas, e usamos detectores do tipo Unruh-DeWitt para calcular a taxa de detecção correspondente em cada caso. A posição média das partículas é identificada com a média espacial da probabilidade de excitação dos detectores, os quais supõem-se distribuídos em todo o espaço. Mostramos que os nossos resultados estão em concordância com as previsões clássicas da Relatividade Geral. No final reconciliamos os nossos resultados com aqueles obtidos nos laboratórios terrestres os quais estão em boa concordância com $E \geq mc^2$.

Entretanto, no Capítulo II, começaremos revisando a abordagem clássica do problema da radiação de uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski [12]-[13], tanto do ponto de vista dos observadores inerciais quanto dos observadores co-acelerados com a carga. Mostrando que, embora cargas aceleradas irradiam com relação a observadores inerciais, no referencial dos observadores co-acelerados com ela não é detectada nenhuma radiação.

De acordo com o princípio de equivalência, localmente, um referencial uniformemente acelerado e um outro parado num campo gravitacional estático devem ser indistinguíveis (um observador parado num campo gravitacional deveria, então, observar a carga parada no campo gravitacional como puramente estática e portanto não irradiando). Mas, como entender esta relatividade da radiação no contexto da Teoria Quântica de Campos, onde radiação está associada à presença de “partículas”? Como veremos, a chave está na emissão e absorção de partículas de energia nula (menor que a massa, se o campo for massivo!) a partir da fonte estática no campo gravitacional. E curiosamente, no caso do buraco negro de Schwarzschild, a taxa desta emissão e absorção, como já dissemos, chega até a se igualar numericamente à taxa de emissão de partículas a partir da mesma fonte quando uniformemente acelerada no vácuo de Minkowski com a mesma aceleração própria!

Em todo este trabalho estaremos adotando o sistema natural de unidades,

no qual $c = G = \hbar = k_B = 1$, bem como a assinatura $(+, -, -, -)$.

Capítulo II

Partículas sem massa com $E = 0$ e a sua relação com o princípio de equivalência

O problema da radiação emitida por uma carga acelerada tem sido um tema bastante discutido na Física. Físicos renomados como Born, em 1909 [14], e Pauli, em 1918 [15], já dedicavam especial atenção ao problema. Durante todo o século vinte, vários trabalhos científicos foram dedicados à compreensão do fenômeno da emissão de radiação por cargas aceleradas. Para termos uma idéia do quão controverso era o problema, vale mencionar que, enquanto Pauli [15] e Von Laue [16] concluíam que cargas uniformemente aceleradas não emitem radiação, Bondi e Gold [17], entre outros, afirmavam o contrário. Seguindo esta linha de trabalho no contexto da Teoria Clássica de Campos (TCC), o problema da radiação emitida por cargas uniformemente aceleradas foi analisado cuidadosamente por Rohrlich e Fulton no início dos anos 60 [12]-[19] e depois revisado por Boulware em 1980 [13].

De fato este é um assunto que tem despertado interesse da comunidade científica até tempos bastante recentes, permanecendo um tema de pesquisa até os dias de hoje. O problema ganha ainda mais interesse, se pensar-

mos em analisá-lo do ponto de vista de um observador co-acelerado com a carga, considerando também o princípio de equivalência, que, em uma de suas versões estabelece que um referencial inercial em Minkowski deve ser localmente equivalente a um observador caindo livremente, sem rotação, num campo gravitacional estático. Infelizmente, as experiências de laboratório não são levadas a cabo em elevadores que caem livremente. Elas são realizadas em sistemas de referência não inerciais, que estão parados num campo gravitacional estático. Mas, para fins práticos, assume-se sempre que o comportamento de um sistema físico estudado neste tipo de situação é (a menos de uma simples correção devida à presença do campo gravitacional) idêntico àquele obtido num referencial inercial. O princípio de equivalência prevê também que um referencial uniformemente acelerado em Minkowski deve ser localmente indistinguível de um referencial parado num campo gravitacional uniforme. Porém, uma carga parada num campo gravitacional não irradia do ponto de vista de observadores em repouso com relação a esta carga, uma vez que a mesma (por estar em repouso no campo gravitacional estático) não dispõe de energia para tanto. Sendo assim, classicamente, o princípio de equivalência sugere que cargas uniformemente aceleradas na ausência de campo gravitacional também não devem emitir radiação, do ponto de vista de observadores co-acelerados com as mesmas. No entanto, admitindo-se que cargas uniformemente aceleradas na ausência de campo gravitacional de fato emitem radiação com relação a observadores inerciais (vide [20]), o que acontece com “esta radiação” no sistema de referência de observadores co-acelerados com a carga?

Fulton e Rohrlich [12]-[19] argumentam que um campo gravitacional uniforme (globalmente estático) não é físico, e como a presença de radiação é constatada mediante medições feitas a grandes distâncias da carga, o campo gravitacional uniforme não é apropriado para este tipo de discussão. Em outras palavras, o princípio de equivalência é um princípio local e portanto não pode ser aplicado globalmente. Eles fazem uma discussão cuidadosa da definição de radiação emitida por uma partícula uniformemente acelerada em

Minkowski assim como medida por observadores inerciais e mostram que a energia irradiada é precisamente a predita pela fórmula de Larmor.

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{\dot{u}^2}{c^3} u^0 \quad (\text{II.1})$$

onde $dE/d\tau$ é a energia irradiada por unidade de tempo próprio da partícula e \dot{u}^2 é o quadrado da quadri-aceleração da partícula.

Coleman [21], por outro lado, diz que assumindo-se o princípio de equivalência não só, não haveria radiação como que, deveria haver um campo Coulombiano para uma carga uniformemente acelerada assim como medido por observadores co-acelerados. Ele faz notar que o campo de Fulton e Rohrlich de fato satisfaz esta condição. *A solução do paradoxo, segundo ele, está na aceitação de que o conceito de radiação é diferente nos referenciais acelerados e não acelerados.*

Boulware [13] acrescenta que o ponto mais importante nesta discussão é que um observador uniformemente acelerado possui um horizonte de eventos. Ele afirma que toda a radiação emitida pela carga uniformemente acelerada em Minkowski vai para uma região do espaço-tempo (de Minkowski) totalmente inacessível ao observador co-acelerado com relação a carga, sendo portanto impossível de ser observada por este.

A seguir, pretendemos primeiramente resumir a abordagem clássica (usando TCC) do problema da radiação de uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski [12]-[13], tanto do ponto de vista dos observadores inerciais quanto dos observadores co-acelerados com a carga.

II.1 Observadores uniformemente acelerados e coordenadas de Rindler

A métrica do espaço-tempo de Minkowski $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ na região $z > |t|$ ("Rindler wedge") pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2\alpha\xi}(d\tau^2 - d\xi^2) - dx^2 - dy^2. \quad (\text{II.2})$$

mediante o uso das coordenadas de Rindler (τ, ξ, x, y) , nas quais

$$t = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh a\tau, \quad z = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh a\tau \quad (-\infty < \xi, \tau < \infty) \quad (\text{II.3})$$

Os planos limites $z = \pm t$ ($\xi = -\infty$) constituem o horizonte de Killing, i.e., as hipérfaces nulas ortogonais ao campo de Killing $\partial/\partial\tau$.

Os observadores seguindo linhas de mundo com ξ, x e y constantes possuem uma aceleração própria constante e igual a $ae^{-a\xi}$. O tempo próprio destes observadores é $e^{a\xi}\tau$. Portanto a e τ representam a aceleração própria e o tempo próprio respectivamente do observador situado em $\xi = x = y = 0$. Note que observadores situados em posições diferentes (diferentes ξ) possuem diferentes acelerações. É impossível encontrar um único sistema de coordenadas estático no qual observadores parados em pontos diferentes possuam a mesma aceleração própria diferente de zero [13].

Um observador uniformemente acelerado, não importa quanto tempo ele esperar, nunca receberá nenhuma informação sobre metade do espaço-tempo (regiões II e III da Fig. II.1). Como assintoticamente sua velocidade se aproxima da velocidade da luz, um quarto do espaço-tempo (região III) está causalmente desconectado da linha de mundo do observador e o outro quarto do espaço-tempo (região II) pode receber sinais luminosos vindo dos observadores mas não pode enviar sinais luminosos a eles.

O sistema de coordenadas de Rindler (II.3) com relação ao qual os observadores uniformemente acelerados estão parados, pode cobrir apenas a região I. Este sistema de coordenadas é singular nas fronteiras da região I com as regiões II e IV. A métrica na região I é estática pois $\xi = \partial_\tau$ é um campo de Killing global e portanto os observadores uniformemente acelerados não vêem mudança alguma da geometria ao longo do tempo. De qualquer modo, a coordenada temporal τ mede a posição do observador uniformemente acelerado ao longo da hipérbole

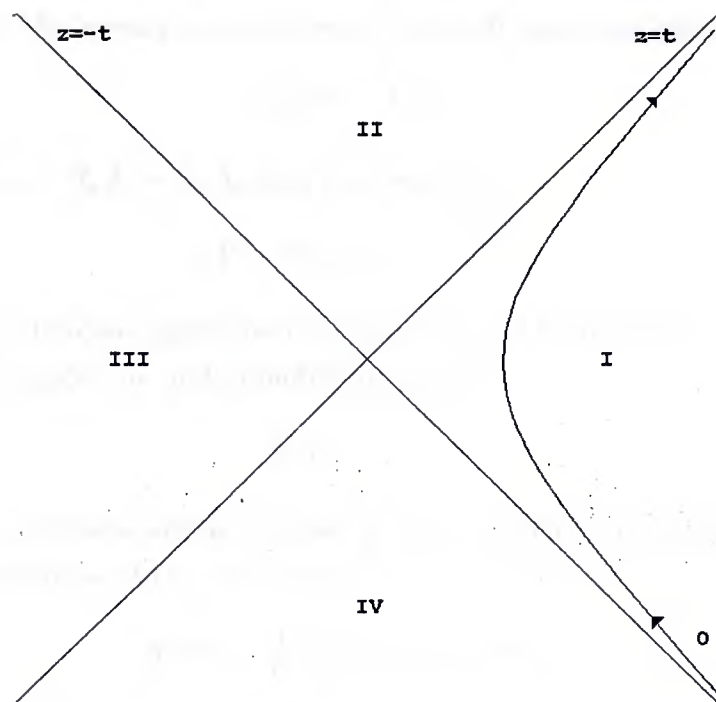


Figure II.1: As linhas retas indicam os planos nulos $z = \pm t$. Os observadores uniformemente acelerados, cujas trajetórias estão indicadas por O, podem receber sinais das regiões I e IV e podem enviar sinais para as regiões I e II. A região III está causalmente desconectada da linha de mundo do observador.

II.2 Radiação de cargas uniformemente aceleradas em Minkowski.

Para determinar se, classicamente, uma carga uniformemente acelerada irradia ou não é preciso determinar o campo eletromagnético a ela associado. O campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ provocado por uma fonte externa $j^\mu(x)$ satisfaz no espaço de Minkowski as equações de Maxwell não-homogêneas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu . \quad (\text{II.4})$$

Definindo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ esta expressão fica

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 4\pi j^\nu . \quad (\text{II.5})$$

Quando os potenciais satisfazem a condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ eles são soluções da equação de onda quadri-dimencional,

$$\square A^\nu = 4\pi j^\nu . \quad (\text{II.6})$$

A solução de radiação desta equação pode ser escrita em termos da função de Green retardada $D_r(x - x')$ como

$$A^\mu(x) = \int d^4x' D_r(x - x') j^\mu(x') \quad (\text{II.7})$$

onde a função de Green retardada tem a forma

$$D_r(x - x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2]. \quad (\text{II.8})$$

No caso de uma partícula carregada que segue uma trajetória $x^\mu(\lambda)$ a corrente é

$$j^\mu(x) = e \int d\lambda' \frac{dx^\mu}{d\lambda'}(\lambda') \delta^{(4)}[x - x(\lambda')] , \quad (\text{II.9})$$

de modo que ficamos com os potenciais de Liénard-Wiechert [20]

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{dx^\mu}{d\lambda'}(\lambda') \theta(t - x^0(\lambda')) \delta[(x - x(\lambda'))^2] \quad (\text{II.10})$$

onde para uma partícula uniformemente acelerada com aceleração própria $a = \text{const.}$, em $\xi = x = y = 0$, a trajetória $x(\lambda)$ é dada por

$$x = y = 0, \quad t = \frac{1}{a} \sinh a\lambda, \quad z = \frac{1}{a} \cosh a\lambda. \quad (\text{II.11})$$

Substituindo a Eq. (II.11) na Eq. (II.10), obtém-se que

$$A^t = (e/4\pi Z^2) \left\{ \left[za \left(a^{-2} + \rho^2 + Z^2 \right) / 2R \right] - t \right\} \theta(t + z), \quad (\text{II.12})$$

$$A^z = (e/4\pi Z^2) \left\{ \left[ta \left(a^{-2} + \rho^2 + Z^2 \right) / 2R \right] - z \right\} \theta(t + z) \quad (\text{II.13})$$

e

$$A^{\vec{\rho}} = 0 \quad (\text{II.14})$$

onde $\vec{\rho} = (x, y)$,

$$Z^2 \equiv z^2 - t^2, \quad (\text{II.15})$$

$$\rho^2 \equiv x^2 + y^2 \quad (\text{II.16})$$

e

$$R \equiv (a/2) \left[\left(a^{-2} + \rho^2 + Z^2 \right)^2 - 4a^{-2}Z^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{II.17})$$

II.2.1 Campo eletromagnético da carga

Uma vez obtido o quadri-vetor potencial, pode-se calcular o campo eletromagnético $\tilde{F}^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{tz} &= E^z = -\frac{\partial A^z}{\partial t} - \frac{\partial A^t}{\partial z} \\ &= \frac{e}{4\pi} \left[a \left(Z^2 - a^{-2} - \rho^2 \right) / 2R^3 \right] \theta(t + z) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{t\vec{\rho}} &= E^{\vec{\rho}} = -\nabla_{\vec{\rho}} A^t \\ &= \frac{e}{4\pi} (\vec{\rho} a z / R^3) \theta(t + z) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{z\vec{\rho}} &= -\hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{B} = -\nabla_{\vec{\rho}} A^z \\ &= \frac{e}{4\pi} (\vec{\rho} a t / R^3) \theta(t + z) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

onde \hat{e}_z é o vetor unitário na direção z . Estes campos satisfazem as equações de Maxwell para $z + t > 0$ e trivialmente para $z + t < 0$, mas eles não satisfazem as equações de Maxwell ao longo da superfície nula $t + z = 0$, onde a Eq. (II.10) para o quadri-vetor potencial é singular. Como a linha de mundo da carga é invariante por “boosts” de Lorentz ao longo do eixo z , o mesmo deve se verificar com o campo resultante. Assim, procurando o único campo $\Delta F^{\mu\nu}$ invariante por transformações de Lorentz ao longo do eixo z , restrito à superfície $z + t = 0$ e que somado à solução $\tilde{F}^{\mu\nu}$ Eqs. (II.18)-(II.20) satisfaça as equações de Maxwell, obtém-se que o campo eletromagnético completo $F^{\mu\nu} = \Delta F^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\mu\nu}$ é

$$F^{tz} = \frac{e}{4\pi} a \left\{ [Z^2 - a^{-2} - \rho^2] / 2R^3 \right\} \theta(z + t) \quad (\text{II.21})$$

$$F^{t\vec{\rho}} = \frac{e}{4\pi} \vec{\rho} \left\{ (az/R^3)\theta(z + t) + (2a^2/[1 + a^2\rho^2])\delta(z + t) \right\} \quad (\text{II.22})$$

$$F^{z\vec{\rho}} = \frac{e}{4\pi} \vec{\rho} \left\{ (at/R^3)\theta(z + t) - (2a^2/[1 + a^2\rho^2])\delta(z + t) \right\} \quad (\text{II.23})$$

O termo $\Delta F^{\mu\nu}$, definido sobre a superfície nula $t + z = 0$, é chamado de *campo de Bondi-Gold* e também pode ser obtido diretamente da Eq. (II.10) se o campo for tratado cuidadosamente como uma distribuição [12].

O campo no ponto $(\vec{\rho}, z, t)$ foi calculado como o campo retardado de algum ponto $x^\mu(\tau_0)$ ao longo da linha de mundo da carga. Fazendo uma transformação de Lorentz para um referencial instantaneamente em repouso com a carga em $x^\mu(\tau_0)$, obtemos que o campo ao longo do cone de luz futuro do ponto $x^\mu(\tau_0)$ é

$$F^{tz} = \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{a}{r} \sin^2 \theta \right\} \quad (\text{II.24})$$

$$F^{t\vec{\rho}} = \frac{e}{4\pi} \hat{\rho} \left\{ \frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \theta \right\} \quad (\text{II.25})$$

$$F^{z\vec{\rho}} = \frac{e}{4\pi} \hat{\rho} \frac{a \sin \theta}{r} \quad (\text{II.26})$$

onde $r = t = R$ é o raio do cone de luz centrado na linha de mundo da carga no instante no qual a carga encontra-se em repouso e θ é o ângulo

entre a aceleração da carga e o vetor que vai até o ponto $(\vec{\rho}, z, t)$ do campo no referencial instantâneo onde a carga está em repouso.

Nas Eqs. (II.24)-(II.26) os termos proporcionais a $1/r^2$ são o campo Coulombiano da carga e os termos proporcionais a $(a \sin \theta/r)$ são o campo de radiação da carga que experimenta uma aceleração a . Na região I a dependência do campo ao longo do cone de luz passado é a mesma, com a única diferença que o campo magnético $F^{z\vec{\rho}}$ tem direção oposta.

II.2.2 Tensor energia momento do campo

Para determinar se observadores uniformemente acelerados detectam ou não radiação calculamos inicialmente, a partir do campo electromagnético [Eqs. (II.21)-(II.23)], o tensor de energia momento

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (\text{II.27})$$

O resultado é

$$\begin{aligned} T^{tt} &= \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a^2}{8R^6} \left[(\rho^2 + a^{-2} - Z^2)^2 + 4\rho^2(t^2 + z^2) \right] \theta(z+t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{16a^2 z \rho^2}{(1 + a^2 \rho^2)^4} \delta(z+t) + \frac{4a^4 \rho^2}{(1 + a^2 \rho^2)^2} \delta(0) \delta(z+t) \right\} \\ T^{tz} &= \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a^2 t z \rho^2}{R^6} \theta(z+t) - \frac{16a^6 \rho^2 z}{(1 + a^2 \rho^2)^4} \delta(z+t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4a^4 \rho^2}{(1 + a^2 \rho^2)^2} \delta(0) \delta(z+t) \right\} \\ T^{t\vec{\rho}} &= \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{\vec{\rho}}{4\pi} \left\{ \frac{a^2 (\rho^2 + a^{-2} - Z^2) t}{2R^6} \theta(z+t) - \frac{4a^4}{(1 + a^2 \rho^2)^3} \delta(z+t) \right\} \\ T^{zz} &= \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a^2}{8R^6} \left[4(t^2 + z^2) \rho^2 - (\rho^2 + a^{-2} - Z^2)^2 \right] \theta(z+t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^6 16 \rho^2 t}{(1 + a^2 \rho^2)^4} \delta(z+t) + \frac{4a^4 \rho^2}{(1 + a^2 \rho^2)^2} \delta(0) \delta(z+t) \right\} \end{aligned}$$

$$T^{z\vec{\rho}} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{\vec{\rho}}{4\pi} \left\{ \frac{a^2}{2R^6} (\rho^2 + a^{-2} - Z^2) z\theta(z+t) + \frac{4a^4}{(1+a^2\rho^2)^3} \delta(z+t) \right\}$$

$$T^{\vec{\rho}\vec{\rho}'} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{-a^2 Z^2(\vec{\rho})(\vec{\rho}')}{R^6} + \frac{\tilde{I}^{\vec{\rho}\vec{\rho}'}}{2R^4} \right\} \theta(z+t)$$

onde $\tilde{I}^{\vec{\rho}\vec{\rho}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e onde lembramos que $\vec{\rho} = \vec{\rho}' = (x, y)$.

Este tensor energia-momento é conservado formalmente em todos os pontos exceto na linha de mundo da carga.

As componentes do tensor de energia momento no sistema de coordenadas dos observadores uniformemente acelerados não contém nenhuma função delta (as superfícies nulas $z = \pm t$ estão fora do sistema de coordenadas de Rindler) e são facilmente obtidos por transformações de coordenadas

$$\begin{aligned} T^{\tau\tau} &= \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{1}{8\pi} \frac{1}{Z^2 a^2 R^4} \\ T^{\tau\xi} &= T^{\tau\vec{\rho}} = 0 \\ T^{\xi\xi} &= -\left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{e^{-2a\xi}}{8\pi} \frac{1}{R^4} \\ T^{\xi\vec{\rho}} &= \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{e^{-a\xi}}{4\pi} \frac{\hat{\rho}}{R^6} \left\{ a^2 Z (\rho^2 + a^{-2} - Z^2) \right\} \\ T^{\vec{\rho}\vec{\rho}'} &= \left(\frac{e^2}{4\pi}\right) \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\tilde{I}}{2R^4} - \frac{a^2 Z^2(\hat{\rho})(\hat{\rho}')}{R^6} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

É bom notar que no referencial acelerado não há fluxo de energia, $T^{\tau\xi} = T^{\tau\rho} = 0$ e portanto não há radiação.

Já no referencial inercial, no cone de luz futuro da carga situada em $z = 1/a$ e $t = 0$, onde ela se encontra parada (ver Fig. II.2), temos que,

$$\begin{aligned} T^{tz} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{a \sin^2 \theta}{r^3} + \frac{a^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} \right\} \\ T^{r\rho} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{\rho}{4\pi} \left\{ \frac{-a \sin \theta \cos \theta}{r^3} + \frac{a^2 \sin^3 \theta}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

e o fluxo de energia através de uma esfera de raio r (no limite $r \rightarrow \infty$) é dado pela equação

$$\int d\mathbf{S} \mathbf{T}^t = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3} a^2. \quad (\text{II.30})$$

Este é exatamente o resultado usual, citado no começo Eq. (II.1). Esta determinação do fluxo de energia emanado pela partícula é não local no sentido de que é preciso construir cuidadosamente uma esfera no cone de luz centrado na linha de mundo da partícula.

De tudo o que foi dito, parece consistente a conclusão de que observadores uniformemente acelerados não detectam nenhuma radiação. Isto é confirmado do ponto de vista energético pois as componentes do tensor energia-momento quando medidas com relação à família de observadores uniformemente acelerados (referencial de repouso da carga) descrevem um fluxo de energia $T^{\tau\xi} = T^{\tau\hat{\rho}} = 0$. Já a família de observadores inerciais observa um fluxo de energia sendo emitido pela carga acelerada e dado, no limite não relativístico, pela conhecida fórmula de Larmor Eq. (II.30). Porém, devido à simetria da solução na região I, o fluxo de energia irradiada que escapa pelo horizonte $z = t, z > 0$ se iguala ao fluxo de energia liberada [pela função delta nas Eqs. (II.21)-(II.23)] ao longo do plano $z = -t, z > 0$ [13]. Desta forma a energia líquida produzida na região I é zero (ver Fig. II.2).

II.3 Radiação de cargas uniformemente aceleradas do ponto de vista quântico e partículas com $E = 0$.

Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos (TQC), onde a radiação pode ser descrita em termos de partículas, o aparente paradoxo do caráter relativo da radiação assume uma nova dimensão e foi recentemente esclarecido por Higuchi, Matsas e Sudarsky [5]. De acordo com a TQC, um detector de partículas escalares não massivas com aceleração própria constante

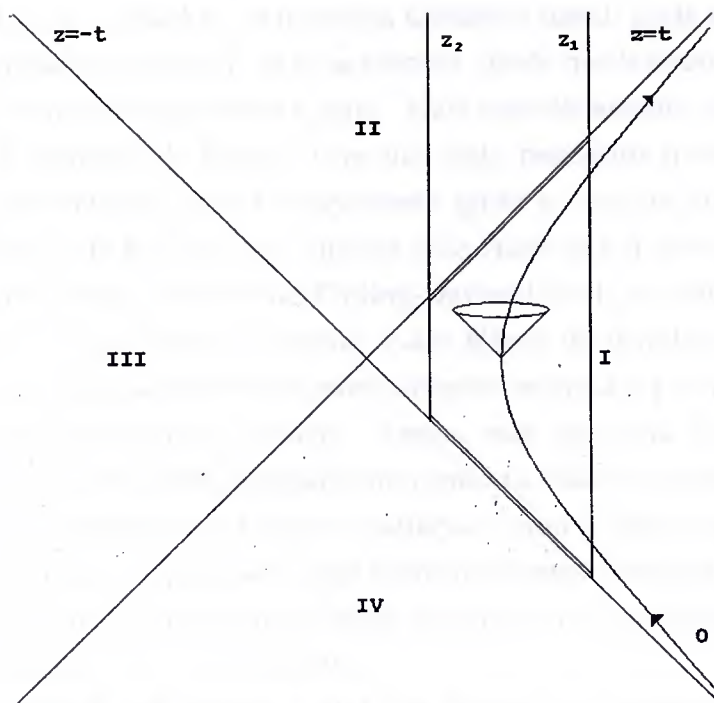


Figure II.2: O fluxo de energia através da esfera centrada na linha de mundo da carga é $(e^2/4\pi)/(2/3)a^2$. O fluxo líquido de energia através das superfícies z_1 e z_2 , $|t| < z$ é zero. Há um fluxo de energia líquido através das superfícies $z_{1,2}$, $t > |z|$; esta energia surge da energia concentrada na superfície, $z+t=0$

α no vácuo de Minkowski (estado quântico no qual observadores inerciais não vêem partículas), comporta-se como se estivesse imerso em um banho térmico de partículas com uma temperatura $\alpha/2\pi$. Este é essencialmente o efeito Fulling-Davies-Unruh [3, 4, 2]. Em seus trabalhos de 1992, Higuchi, Matsas e Sudarsky mostraram que a radiação emitida por uma carga uniformemente acelerada com relação a um observador inercial no espaço-tempo de Minkowski, obtida na Eletrodinâmica Quântica usual, pode ser coerentemente interpretada no referencial co-acelerado, desde que levemos em conta o banho térmico de Fulling-Davies-Unruh. Mais especificamente, foi mostrado que a taxa de emissão de fótons (com um dado momento transversal) calculada no referencial inercial é exatamente igual à taxa de absorção mais emissão de fótons de Rindler com energia nula (mas com o mesmo momento transversal) do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh, calculada no referencial de repouso da carga acelerada. Estes fótons de Rindler com energia nula, como o próprio nome sugere, não carregam energia e portanto não são observáveis por observadores físicos. Assim, este fato está em total concordância com os trabalhos realizados no contexto clássico que afirmam que observadores co-acelerados não vêem radiação e com o princípio de equivalência, de acordo com o qual esta carga uniformemente acelerada é vista pelos observadores co-móveis como uma carga estática num campo gravitacional (e portanto, espera-se que não irradie)

Recentemente [8, 22], usando a TQC em espaços curvos para o caso duma carga escalar (que chamaremos de fonte) estática num verdadeiro campo gravitacional (no espaço-tempo de Schwarzschild, assumindo-se o vácuo de Unruh [2]) foi obtido que a probabilidade de emissão e absorção da dita fonte é igual à probabilidade de emissão e absorção da mesma fonte escalar uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski, assumindo-se o vácuo de Minkowski, desde que a fonte esteja em ambos os casos com a mesma aceleração própria. Ambas as probabilidades são calculadas com relação a observadores co-acelerados com a carga. Esta igualdade era de se esperar nas proximidades do horizonte ($r \rightarrow 2M$) entretanto o fato de que

ambas as taxas coincidam em todos os pontos foi uma surpresa. A escolha do vácuo adotado no espaço-tempo de Schwarzschild, é crucial para que esta igualdade seja válida. Por exemplo, se substituirmos o vácuo de Unruh pelo vácuo de Hartle-Hawking [23], esta igualdade deixa de valer. No entanto, como o vácuo de Unruh corresponde ao estado quântico de um buraco negro formado por um colapso gravitacional, representando portanto a radiação Hawking [1], tal igualdade poderia ser o indício de um princípio de equivalência subjacente de origem quântica.

Com o intuito de averiguar se tal equivalência se mantém no caso em que o buraco negro é provido de carga elétrica, no capítulo seguinte é calculada a probabilidade de emissão e absorção de uma carga escalar estática no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom [10] (o caso em que a fonte clássica é substituída por uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Schwarzschild foi analisado na Ref. [9]), sempre assumindo-se o vácuo de Unruh. No entanto, não foi encontrada equivalência entre estes resultados e aqueles obtidos tanto para a fonte como para a carga elétrica correspondente, uniformemente aceleradas em Minkowski (assumindo-se o vácuo de Minkowski). Vale ressaltar que não há uma razão *a priori* para a existência de um análogo quântico para o princípio de equivalência, uma vez que os estados em Mecânica Quântica são definidos globalmente, enquanto que o princípio de equivalência envolve apenas quantidades locais.

Face ao exposto acima, pode-se ter uma idéia de como a questão da radiação emitida por cargas aceleradas é relevante, complexa e atual, envolvendo questões muito interessantes da física, como o princípio de equivalência. Além disso, fica claro também a importância das diferentes abordagens com que se tem tratado o problema, tanto no contexto da TCC como da TQC, para um melhor entendimento das sutilezas e controvérsias que surgem quando tratamos o problema com mais profundidade.

Capítulo III

Quantização do setor de baixas energias de um campo escalar não massivo fora de um buraco negro de Reissner-Nordstrom e fontes estáticas.

Tendo constatado que: (i) do ponto de vista clássico uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski irradia com relação aos observadores inerciais mas, não irradia com relação aos observadores co-acelerados com a carga, (ii) do ponto de vista quântico, esta radiação emitida no referencial inercial pode ser interpretada no referencial co-acelerado com a carga como a absorção e emissão de partículas de Rindler de *energia nula* do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh, (iii) para um campo escalar, esta taxa de absorção e emissão coincide numericamente com a taxa de absorção e emissão de partículas de *energia nula* da radiação Hawking dum buraco negro de Schwarzschild a partir duma fonte parada fora do buraco (sempre que ambas as fontes possuam a mesma aceleração própria) e (iv)

esta igualdade sugere a existência de um inesperado análogo quântico para o *princípio de equivalência*; seria interessante, então, estudar se esta equivalência é preservada quando o espaço-tempo de Schwarzschild é substituído pelo espaço-tempo de um buraco negro de Reissner-Nordstrom.

Para este fim iremos quantizar um campo escalar sem massa fora de um buraco negro de Reissner-Nordstrom. Esta tarefa é difícil já que, neste caso, a forma explícita dos modos de frequência positiva e negativa é desconhecida em termos das funções especiais usuais. Este fato levou muitos autores a usar métodos numéricos para quantizar os campos nesta e em outras geometrias de fundo (veja, e.g., [24], [25] e as referências nelas citadas)

Aqui seguiremos o procedimento desenvolvido na Ref. [26] para quantizar analiticamente o setor de baixas energias do campo escalar no espaço-tempo de um buraco negro de Reissner-Nordstrom. Isto permite estudar analiticamente processos envolvendo partículas de baixas energias, como por exemplo, a radiação emitida por fontes escalares orbitando buracos negros carregados [27].

Como fontes estáticas (sem estrutura interna) só podem interagir com partículas de *energia nula*, podemos usar a nossa quantização de baixas energias para responder com precisão à nossa questão.

III.1 Quantização do campo escalar sem massa fora de um buraco negro carregado

O elemento de linha de um buraco negro de Reissner-Nordstrom com massa M e carga elétrica $Q \leq M$ pode ser escrito como [28]

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (\text{III.1})$$

onde

$$f(r) \equiv (1 - r_+/r)(1 - r_-/r) \quad (\text{III.2})$$

e $r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Fora do horizonte de eventos externo, i.e. para $r > r_+$ temos uma isometria tipo-tempo global gerada pelo campo de Killing ∂_t .

Consideremos agora, nesta geometria de fundo, um campo escalar sem massa $\Phi(x^\mu)$ descrito pela ação

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi, \quad (\text{III.3})$$

onde $g \equiv \det\{g_{\mu\nu}\}$ que de acordo com as Eqs. (III.1) e (III.2) é igual a $g = -r^4 \sin^2 \theta$, i.e.

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta. \quad (\text{III.4})$$

Para quantizar o campo procuramos por um conjunto completo de soluções de energia positiva da equação de Klein-Gordon, $\square u_{\omega lm} = 0$, i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu u_{\omega lm}) = 0, \quad (\text{III.5})$$

na forma

$$u_{\omega lm} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\psi_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (\text{III.6})$$

onde $\omega \geq 0$, $l \geq 0$ e $m \in [-l, l]$ são os números quânticos de frequência e momento angular respectivamente. O fator $\sqrt{\omega/\pi}$ foi introduzido pois será útil no futuro, e $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos. Lembrando que

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{III.7})$$

e

$$\partial_t^2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 e^{-i\omega t}, \quad (\text{III.8})$$

temos que $\psi_{\omega l}(r)$ deve satisfazer

$$\left[-f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{d}{dr} \right) + V_{\text{eff}}(r) \right] \psi_{\omega l}(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}(r), \quad (\text{III.9})$$

onde o potencial de espalhamento efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ é dado por

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right). \quad (\text{III.10})$$

Note que a Eq. (III.9) admite dois conjuntos independentes de soluções que serão indexados por $\psi_{\omega l}^{\alpha}(r)$ com $\alpha = I, II$. Como resultado, podemos expandir o campo escalar $\Phi(x^{\mu})$ em termos dos operadores de aniquilação $a_{\omega lm}^{\alpha}$ e criação $a_{\omega lm}^{\alpha\dagger}$, como de costume:

$$\Phi(x^{\mu}) = \sum_{\alpha=I,II} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \int_0^{+\infty} d\omega [u_{\omega lm}^{\alpha}(x^{\mu}) a_{\omega lm}^{\alpha} + H.c.] , \quad (\text{III.11})$$

onde $u_{\omega lm}^{\alpha}(x^{\mu})$ são ortonormalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon [29, 30]:

$$i \int_{\Sigma_t} d\Sigma n^{\mu} (u_{\omega lm}^{\alpha} \nabla_{\mu} u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} - \nabla_{\mu} u_{\omega lm}^{\alpha} \cdot u_{\omega' l' m'}^{\alpha'}) = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') , \quad (\text{III.12})$$

$$i \int_{\Sigma_t} d\Sigma n^{\mu} (u_{\omega lm}^{\alpha} \nabla_{\mu} u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} - \nabla_{\mu} u_{\omega lm}^{\alpha} \cdot u_{\omega' l' m'}^{\alpha'}) = 0 . \quad (\text{III.13})$$

Aqui n^{μ} é o vetor unitário que aponta para o futuro e é ortogonal ao elemento de volume da superfície de Cauchy Σ_t . Como consequência, $a_{\omega lm}^{\alpha}$ e $a_{\omega lm}^{\alpha\dagger}$ satisfazem a relação de comutação:

$$[a_{\omega lm}^{\alpha}, a_{\omega' l' m'}^{\alpha'\dagger}] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') . \quad (\text{III.14})$$

O vácuo de Boulware $|0\rangle$ é definido por $a_{\omega lm}^{\alpha}|0\rangle = 0$ para todo α, ω, l e m [31].

III.1.1 Modos de baixas frequências

A solução geral da Eq. (III.9) não pode ser escrita em termos das funções especial usuais, mas, como veremos a seguir, para os modos de baixas frequências, isto sim é possível. Para tanto escrevamos a Eq. (III.9) com $\omega = 0$:

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} [\psi_{\omega l}(y)/y] \right] + l(l+1) [\psi_{\omega l}(y)/y] = 0 , \quad (\text{III.15})$$

onde definimos $y \equiv r/2M$, $y_{\pm} \equiv r_{\pm}/2M$ e

$$z \equiv \frac{2y - 1}{y_+ - y_-} . \quad (\text{III.16})$$

Das equações de Legendre (III.15), obtemos as duas soluções independentes

$$\psi_{\omega l}^I(y) \equiv C_{\omega}^I y Q_l[z(y)] , \quad (\text{III.17})$$

$$\psi_{\omega l}^{II}(y) \equiv C_{\omega}^{II} y P_l[z(y)] , \quad (\text{III.18})$$

onde $Q_l(z)$ e $P_l(z)$ são os polinômios de Legendre, e C_{ω}^I e C_{ω}^{II} são constantes de normalização. Para encontrar o valor destas constantes de normalização é preciso analisar detalhadamente as soluções da Eq. (III.9) *perto do horizonte e no infinito*.

III.1.2 Modos normais perto do horizonte e no infinito

Primeiramente notemos que realizando a mudança de variáveis

$$y \rightarrow x = \int \frac{dr}{f(r)} , \quad (\text{III.19})$$

i.e.,

$$y \rightarrow x = y + \frac{(y_+)^2 \ln |y - y_+| - (y_-)^2 \ln |y - y_-|}{y_+ - y_-} \quad (\text{III.20})$$

(onde escolhemos adequadamente a constante de integração), a Eq. (III.9) toma a seguinte forma,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 V_{\text{eff}}[r(x)] \right] \psi_{\omega l}(x) = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}(x) . \quad (\text{III.21})$$

É conveniente escrever as duas soluções independentes da Eq. (III.21) (que indexaremos com $\alpha = \rightarrow, \leftarrow$) de forma tal que $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ estejam associadas a modos vindo do horizonte do buraco branco passado \mathcal{H}^- e do infinito nulo passado \mathcal{J}^- , respectivamente. Estes modos são perpendiculares entre si com relação ao produto interno de Klein-Gordon (III.12). Isto pode ser visto

escolhendo $\Sigma_t = \mathcal{H}^- \cup \mathcal{J}^-$ na Eq. (III.12) e lembrando que $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ se anulam em \mathcal{J}^- e \mathcal{H}^- , respectivamente. Assim, notando na Eq. (III.10) que perto do horizonte ($x < 0, |x| \gg 1$) e longe dele ($x \gg 1, x \approx y = r/2M$) o potencial de espalhamento fica

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \begin{cases} 0 & (x < 0, |x| \gg 1), \\ l(l+1)/r^2 & (x \gg 1), \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

podemos escrever

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l} (e^{2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x}) & (x < 0, |x| \gg 1), \\ 2i^{l+1} A_{\omega l} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} B_{\omega l} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1), \\ B_{\omega l} \left[2(-i)^{l+1} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x)^* + \right. \\ \left. + 2i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) \right] & (x \gg 1). \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Aqui $h_l^{(1)}(2M\omega x)$ são as funções de Hankel esféricas e $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$, $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ e $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$, $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, satisfazendo as equações usuais de conservação da probabilidade: $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1$ e $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$. Note que $h_l^{(1)} \approx (-i)^{l+1} \exp(ix)/x$ para $|x| \gg 1$. As constantes de normalização $A_{\omega l}$ e $B_{\omega l}$ são obtidas (a menos de uma fase arbitrária) substituindo os modos normais (III.6) no produto interno de Klein-Gordon (III.12), onde

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}, 0, 0, 0 \right), \quad (\text{III.25})$$

$$d\Sigma_t = \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{f(r)}}, \quad (\text{III.26})$$

$$-i \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{III.27})$$

e usando a Eq. (III.21) para transformar a integral em r num termo de superfície:

$$\frac{1}{\omega - \omega'} \left[\psi_{\omega l}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l}^*(x) - \psi_{\omega' l}^*(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}(x) \right] \Bigg|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{2\pi M}{\omega} \delta(\omega - \omega') . \quad (\text{III.28})$$

Usando a solução assintótica (III.23)-(III.24) na Eq. (III.28) e lembrando que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin[(\omega - \omega')x]}{(\omega - \omega')} = \pi \delta(\omega - \omega') , \quad (\text{III.29})$$

obtemos que $A_{\omega l} = B_{\omega l} = (2\omega)^{-1}$.

III.1.3 Constantes de normalização

Agora estamos em condições de determinar as constantes de normalização C_{ω}^I e C_{ω}^{II} mediante a comparação das Eqs. (III.17)-(III.18), tanto perto quanto longe do horizonte, com as funções normalizadas (III.23)-(III.24) no regime de baixas frequências ($|2M\omega x| \ll 1$).

Começemos notando que para $2M\omega x \ll 1$ temos, perto do horizonte [veja Eq. (III.23)]

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx Mx \left[\frac{(1 + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow})}{2M\omega x} + i(1 - \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}) \right] \quad (x < 0, |x| \gg 1). \quad (\text{III.30})$$

Para que a Eq. (III.30) tenha um bom comportamento no regime de baixas frequências concluímos que $\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} \approx -1 + \mathcal{O}(\omega)$. Como consequência, para $2M\omega x \ll 1$ obtemos, da Eq. (III.30), que

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx 2iMx \quad (x < 0, |x| \gg 1). \quad (\text{III.31})$$

Agora, lembramos que no regime de baixas frequências $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ é completamente refletido de volta ao horizonte pelo potencial de espalhamento e por isso $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ não pode ser associado a $\psi_{\omega l}^{II}(x)$ que cresce assintoticamente [veja

Eq. (III.18) e lembre que $P_l(z) \sim z^l$ para $z \gg 1$ ($r \gg r_+$). Já $\psi_{\omega l}^I(x)$ decresce assintoticamente e de fato coincide com $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ perto do horizonte. Isto pode ser provado da seguinte forma. Primeiramente notemos que para $z \approx 1$ ($r \approx r_+$) (veja Eqs. (8.8342) e (8.831.3) da Ref. [33])

$$\begin{aligned} Q_l(z) &\approx \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \\ &\approx \frac{[-x + y_+ + \ln(y_+ - y_-)](y_+ - y_-)}{2y_+^2} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

onde usamos as Eqs. (III.16) e (III.20). Assim, perto do horizonte, obtemos da Eq. (III.17) que

$$\psi_{\omega l}^I(x) \approx -C_{\omega}^I \frac{(y_+ - y_-)}{2y_+} x \quad (x < 0, |x| \gg 1). \quad (\text{III.33})$$

Comparando as Eqs. (III.33) e (III.31) obtemos a constante de normalização

$$C_{\omega}^I = -4iMy_+/(y_+ - y_-). \quad (\text{III.34})$$

Portanto podemos escrever, da Eq. (III.17)

$$\psi_{\omega l}^I(x) = \frac{-4iMy_+yQ_l[z(y)]}{y_+ - y_-} \quad (\text{III.35})$$

e da Eq. (III.6) obtemos os correspondentes modos normalizados de baixas frequências (a menos de uma fase arbitrária):

$$u_{\omega lm}^I(x^\mu) = \frac{2y_+ \omega^{1/2}}{\pi^{1/2} (y_+ - y_-)} Q_l[z(x)] Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (\text{III.36})$$

Agora ajustamos $\psi_{\omega l}^I(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ assintoticamente para determinar o coeficiente de transmissão de baixas frequências $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ [veja Eq. (III.23)]. Para $x \gg 1$, a Eq. (III.35) fica

$$\psi_{\omega l}^I(x) \approx \frac{-2iM(l!)^2 y_+ (y_+ - y_-)^l x^{-l}}{(2l+1)!} \quad (2M\omega x \ll 1), \quad (\text{III.37})$$

onde usamos que nesta região

$$Q_l[2y/(y_+ - y_-)] \approx \frac{(l!)^2(y_+ - y_-)^{l+1}y^{-l-1}}{2(2l+1)!}.$$

Agora, da Eq. (III.23), temos que no regime de baixas frequências e para $x \gg 1$

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \frac{i^l(2l)!}{2^{2l+1}l!M^l\omega^{l+1}} \tau_{\omega l}^{\rightarrow} x^{-l} \quad (2M\omega x \ll 1), \quad (\text{III.38})$$

onde usamos que

$$h_l^{(1)}(2M\omega x) = j_l(2M\omega x) + in_l(2M\omega x) \quad (\text{III.39})$$

e o fato de que as funções de Bessel e Newman esféricas satisfazem (veja Eq. (11.156) da Ref. [32])

$$j_l(2M\omega x) \approx \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (2M\omega x)^l \quad (\text{III.40})$$

e

$$n_l(2M\omega x) \approx -\frac{(2l)!}{2^l l!} (2M\omega x)^{-(l+1)}, \quad (\text{III.41})$$

respectivamente, para $2M\omega x \ll 1$. As Eqs. (III.37) e (III.38) coincidem desde que

$$\tau_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{2^{2l+2}(-i)^{l+1}y_+(y_+ - y_-)^l(l!)^3(M\omega)^{l+1}}{(2l+1)!(2l)!}. \quad (\text{III.42})$$

(No final isto será usado como cheque de consistência para os nossos cálculos.)

Agora, concentremo-nos em $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ que deverá ser ajustada com $\psi_{\omega l}^{II}(x)$. Note que $\psi_{\omega l}^I(x)$ cresce perto do horizonte e portanto não pode ser associado com os modos de baixas frequências que vem do infinito e que devem ser totalmente refletidos de volta pelo potencial de espalhamento (veja Eq. (III.17) e lembre que $Q_l(z) \approx -\log|z-1|^{1/2}$ quando $z \approx 1$).

Para ajustar $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{II}(x)$ assintoticamente, devemos usar as Eqs. (III.39) e (III.40)-(III.41) na Eq. (III.24) para $x \gg 1$. Além do mais, obtém-se que esta compatibilidade é obtida se e somente se $\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \approx (-1)^{l+1}$. Como resultado obtemos

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \frac{2^{2l+1}(-i)^{l+1}l!\omega^l(Mx)^{l+1}}{(2l+1)!} \quad (x \gg 1) \quad (\text{III.43})$$

para $2M\omega x \ll 1$. Agora, notemos que $P_l(z) \approx [(2l)!/2^l(l!)^2] z^l$ para $z \gg 1$ (veja Eqs. (8.837.2) e (8.339.2) da Ref. [33]). Portanto, usando as Eqs. (III.16) e (III.18), obtemos que

$$\psi_{\omega l}^{II}(x) \approx C_{\omega}^{II} \frac{(2l)! y^{l+1}}{(l!)^2 (y_+ - y_-)^l} \quad (x \gg 1). \quad (\text{III.44})$$

Comparando esta equação com a Eq. (III.43) e lembrando que $x \approx y$ no infinito, obtemos a constante de normalização

$$C_{\omega}^{II} = \frac{2^{2l+1} (-i)^{l+1} (l!)^3 M^{l+1} (y_+ - y_-)^l \omega^l}{(2l+1)! (2l)!}. \quad (\text{III.45})$$

Conseqüentemente

$$\psi_{\omega l}^{II}(x) = \frac{2^{2l+1} (-i)^{l+1} (l!)^3 M^{l+1} (y_+ - y_-)^l \omega^l y P_l[z(y)]}{(2l+1)! (2l)!} \quad (\text{III.46})$$

e os correspondentes modos normalizados de baixas frequências são (a menos de uma fase arbitrária)

$$u_{\omega lm}^{II}(x^\mu) = \frac{2^{2l} (l!)^3 M^l (y_+ - y_-)^l \omega^{l+1/2}}{\pi^{1/2} (2l+1)! (2l)!} P_l[z(x)] Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (\text{III.47})$$

Pode ser verificado diretamente que fitando a Eq. (III.46), perto do horizonte, com a Eq. (III.24) para $2M\omega x \ll 1$, obtemos $\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} = \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}$ [veja Eq. (III.42)], como de fato é preciso por consistência. Claramente isto garante que $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}| = |\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|$. Note, porém, que $\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}$ e $\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}$ diferirão, em geral, numa fase (o que não acontece com $\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}$ e $\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}$).

A Eq. (III.11) junto com as Eqs. (III.36) e (III.47) completam a nossa quantização do setor de baixas energias.

III.2 Resposta de uma fonte escalar interagindo com a radiação Hawking

Calculemos agora a resposta de uma fonte estática interagindo com a radiação Hawking no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom. Este cálculo será feito

considerando tanto o vácuo de Unruh quanto o vácuo de Hartle-Hawking. Descrevamos nossa fonte escalar pontual parada em $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ por

$$j(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-h}} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{III.48})$$

onde q é uma pequena constante de acoplamento e $h = -f^{-1}r^4 \sin^2 \theta$ é o determinante da métrica espacial induzida sobre a hipersfície a tempo constante Σ_t . Note que a Eq. (III.48) garante que

$$\int_{\Sigma_t} d\Sigma j = q \quad (\text{III.49})$$

independentemente da posição da fonte. Agora, acoplemos a nossa fonte $j(x^\mu)$ a um campo escalar sem massa $\Phi(x^\mu)$ por meio da ação de interação

$$S_I = \int d^4x \sqrt{-g} j \Phi. \quad (\text{III.50})$$

A resposta total da fonte, ou seja, a probabilidade total de emissão e absorção de partículas por unidade de tempo próprio associada à fonte é dada por

$$R \equiv \sum_{\alpha=I,II} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{+\infty} d\omega R_{\omega lm}^\alpha, \quad (\text{III.51})$$

onde

$$R_{\omega lm}^\alpha \equiv \tau^{-1} \left\{ |\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ em}}|^2 [1 + n^\alpha(\omega)] + |\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ abs}}|^2 n^\alpha(\omega) \right\} \quad (\text{III.52})$$

e τ é o tempo próprio total da fonte. (Este está bem definido já que a nossa fonte é pontual.) Aqui $\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ em}} \equiv \langle \alpha \omega lm | S_I | 0 \rangle$ e $\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ abs}} \equiv \langle 0 | S_I | \alpha \omega lm \rangle$ são as amplitudes de emissão e absorção, respectivamente, de estados de Boulware $|\alpha \omega lm\rangle$, a nível de árvore. Além do mais

$$n_U^\alpha(\omega) \equiv \begin{cases} (e^{\omega\beta} - 1)^{-1} & \text{para } \alpha = I; \\ 0 & \text{para } \alpha = II, \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

e

$$n_{HH}^\alpha(\omega) \equiv \begin{cases} (e^{\omega\beta} - 1)^{-1} & \text{para } \alpha = I, \\ (e^{\omega\beta} - 1)^{-1} & \text{para } \alpha = II, \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

para os vácuos de Unruh e Hartle-Hawking, respectivamente, com

$$\beta^{-1} = \frac{y_+ - y_-}{8\pi M y_+^2} . \quad (\text{III.55})$$

Lembremos que o vácuo de Unruh é caracterizado por um fluxo térmico saindo de \mathcal{H}^- com uma temperatura de Hawking no infinito $\beta^{-1} = K/2\pi$ (K : gravidade superficial) dada neste caso pela Eq. (III.55) enquanto que o vácuo de Hartle-Hawking possui, além deste fluxo, um outro fluxo térmico proveniente de \mathcal{J}^- caracterizado pela mesma temperatura no infinito [1, 2, 23]. Na Eq. (III.52) os três somandos dentro das chaves representam a probabilidade de emissão espontânea, emissão estimulada e a absorção respectivamente.

Notemos que, devido ao fato de que fontes estáticas sem estrutura (III.48) só podem interagir com modos de *energia nula*, a resposta total desta fonte no vácuo de Boulware se anula. Não obstante, isto não acontece na presença de um banho térmico de fundo uma vez que, neste caso, as taxas de absorção e emissão (estimulada) fazem com que a resposta total seja diferente de zero.

Para poder lidar com modos de energia nula se faz necessário o uso de um “regulador” para evitar, com ele, o aparecimento de resultados intermediários divergentes. (Uma discussão mais detalhada da interação de fontes estáticas com modos de energia nula pode ser encontrada na Ref. [5].) Para este propósito façamos com que a constante de acoplamento q oscile suavemente com uma frequência ω_0 , escrevendo a Eq. (III.48) na forma

$$j_{\omega_0}(x^\mu) = \frac{q_{\omega_0}}{\sqrt{-h}} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) , \quad (\text{III.56})$$

onde $q_{\omega_0} \equiv \sqrt{2}q \cos(\omega_0 t)$ e tomando o limite $\omega_0 \rightarrow 0$ no final. O fator $\sqrt{2}$ foi introduzido para garantir que a média temporal $\langle |q_{\omega_0}(t)|^2 \rangle_t = q^2$ uma vez que, a nível de árvore, as taxas de absorção e emissão são funções de q^2 . Usando as Eqs. (III.56) e (III.11) em (III.50) obtemos a seguinte amplitude de absorção

$$\mathcal{A}_{\omega l m}^{\alpha \text{ abs}} = q \sqrt{2\pi\omega_0} (\psi_{\omega_0 l}^\alpha(r_0)/r_0) f^{1/2}(r_0) Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0) \delta(\omega - \omega_0) , \quad (\text{III.57})$$

e lembramos que $|\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ em}}| = |\mathcal{A}_{\omega lm}^{\alpha \text{ abs}}|$. Substituindo a Eq. (III.57) na Eq. (III.52) obtemos

$$R_{\omega lm}^{\alpha} = q^2 \omega_0 (|\psi_{\omega_0 l}^{\alpha}(r_0)|^2 / r_0^2) f^{1/2}(r_0) |Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)|^2 (1 + 2n^{\alpha}(\omega_0)) \delta(\omega - \omega_0), \quad (\text{III.58})$$

onde foi usado que o tempo próprio total da fonte é $\tau = 2\pi f^{1/2}(r_0) \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta(\omega)$ (onde $f^{1/2}(r_0)$ é o fator de “red-shift” gravitacional.)

Consideremos primeiramente o vácuo de Unruh. Usando as Eqs. (III.35), (III.53) e (III.58) na Eq. (III.51) e fazendo $\omega_0 \rightarrow 0$ no final, calculamos a resposta total

$$R_U = \frac{q^2 a (M - Q^2/r_+)}{4\pi^2 (M - Q^2/r_0)} \quad (\text{III.59})$$

(note que os modos $u_{\omega lm}^{II}(x)$ não dão nenhuma contribuição aqui), onde

$$a = \frac{f^{-1/2}(r_0) df(r_0)}{2 dr_0}$$

é a aceleração própria da fonte e foi usado que

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (\text{III.60})$$

e [8]

$$\sum_{l=0}^{\infty} |Q_l(s)|^2 (2l+1) = \frac{1}{s^2 - 1}. \quad (\text{III.61})$$

Em seguida comparamos a Eq. (III.59) com

$$R_M = \frac{q^2 a}{4\pi^2}, \quad (\text{III.62})$$

que é a resposta associada à nossa fonte escalar quando esta é acelerada uniformemente no vácuo usual do espaço-tempo de Minkowski com aceleração própria a . Notemos que embora as Eqs. (III.59) e (III.62) coincidam quando $Q = 0$, como foi encontrado na Ref. [8], elas são diferentes para $Q \neq 0$. Como resultado, a presença da carga elétrica dentro do buraco negro quebra a igualdade entre as respostas.

Note que a igualdade entre as Eqs. (III.59) e (III.62) é recuperada quando $r_0 \approx r_+$. Conseqüentemente perto do horizonte, uma fonte estática no vácuo de Unruh responde como se estivesse estática no “Rindler wedge” (ou seja como se estivesse uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski) com o vácuo inercial usual desde que ambas as fontes possuam a mesma aceleração própria. Além do mais, a Eq. (III.59) pode ser escrita nesta região em termos da temperatura própria [34] $\beta_0^{-1} = \beta^{-1}/\sqrt{f(r_0)}$ do banho térmico de fundo no ponto onde está localizada a fonte como

$$R_U \approx \frac{q^2}{2\pi\beta_0}. \quad (\text{III.63})$$

A Eq. (III.63) coincide com a resposta associada à nossa fonte quando esta está em repouso no espaço-tempo de Minkowski com um banho térmico de fundo caracterizado pela temperatura β_0^{-1} . Este resultado não é surpreendente já que perto do horizonte o potencial de espalhamento se anula e os modos de energia nula que saem de \mathcal{H}^- são totalmente refletidos de volta para o horizonte.

Agora, vejamos o que acontece quando consideramos o vácuo de Hartle-Hawking. Um cálculo análogo ao anterior, onde (III.53) dá lugar a (III.54), nos leva à seguinte resposta da fonte:

$$R_{HH} = \frac{q^2 a (M - Q^2/r_+)}{4\pi^2 (M - Q^2/r_0)} + \frac{q^2 (M - Q^2/r_+) (M - Q^2/r_0)}{4\pi^2 r_+^2 r_0^2 a}, \quad (\text{III.64})$$

onde usamos que $P_0[z(r_0)] = 1$ e $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$. [Note que, neste caso, somente $l = 0$ contribui na Eq. (III.51).] O primeiro termo no lado direito da Eq. (III.64) é idêntico àquele obtido com o vácuo de Unruh e está associado ao fluxo térmico saindo de \mathcal{H}^- . O segundo termo está associado ao fluxo proveniente de \mathcal{J}^- . Como cheque de consistência notamos que para $r_0 \rightarrow r_+$, obtemos que $R_{HH} = R_U$ pois neste caso a aceleração própria a diverge e o segundo termo da Eq. (III.64) se anula. Isto deve ser assim pois perto do horizonte, partículas com energia nula provenientes de \mathcal{J}^- não podem ultrapassar a barreira do potencial de espalhamento. Consequentemente,

neste limite, o segundo termo no lado direito da Eq. (III.64) deve anular-se. Agora, quando a fonte está muito longe do horizonte, apenas o segundo termo do lado direito da Eq. (III.64) contribui, já que as partículas com energia nula saindo de \mathcal{J}^- não são capazes de alcançar a região assintótica. Além disso, nesta região, a Eq. (III.64) pode ser escrita na forma

$$R_{HH} \approx \frac{q^2}{2\pi\beta}. \quad (\text{III.65})$$

Por esta razão, muito longe do buraco, a fonte se comporta como se estivesse no espaço-tempo de Minkowski imersa num banho térmico com temperatura β^{-1} , como era de se esperar.

Assim, podemos concluir que uma fonte parada fora de um buraco negro *carregado* e interagindo com a radiação Hawking irá emitir e absorver apenas partículas de energia nula. Em geral esta não se comporta da mesma forma que fontes uniformemente aceleradas no espaço-tempo de Minkowski (com o vácuo inercial usual) como fora obtido previamente para buracos negros *neutros* [8]. Isto junto ao fato de que esta equivalência tampouco foi encontrada quando o campo escalar e substituído por um campo de Maxwell [9] mostra que a equivalência obtida em [8] não é válida, em geral, para outros espaços-tempos e campos quânticos. Se existe ou não algo mais profundo por trás deste resultado, permanece ainda uma questão em aberto. Verificamos também que tanto perto do horizonte quanto longe dele nossa fonte se comporta como se estivesse no espaço-tempo de Minkowski em repouso num banho térmico cuja temperatura própria está associada aos vácuos de Unruh e Hartle-Hawking, respectivamente. A quantização de baixas energias apresentada aqui pode ser usada para analisar outros processos acontecendo fora de buracos negros.

Capítulo IV

Partículas massivas com $E < mc^2$ em torno de buracos negros e estrelas relativísticas.

Um aspecto importante em relação aos modos de baixas energias que usamos para calcular as taxas de emissão e absorção de partículas escalares de energia nula a partir de fontes estáticas fora de um buraco negro de Reissner-Nordström Ref. [10] é que estes modos de baixas energias não são exclusivos do campo sem massa. Um campo escalar massivo também possui modos de baixas energias, em particular, energias $\omega < m$.

A teoria quântica de campos padrão utiliza o fato de que o espaço-tempo de Minkowski é maximamente simétrico. O tri-momento linear (k^x, k^y, k^z) associado às isometrias translacionais nas hiperfícies tipo-espaço $t = \text{const}$ constituem um conjunto de números quânticos apropriado para descrever as partículas livres, onde estamos assumindo aqui que (t, x, y, z) são as coordenadas de Minkowski usuais. Neste caso simples a relação de dispersão $E \equiv \hbar\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 c^2 + m^2 c^4}$ impõe um vínculo simples entre a massa m , o momento \mathbf{k} e a energia E , e portanto as partículas livres com momento linear bem definido deverão ter energia total $E \geq mc^2$. Como as experiências rea-

lizadas na terra assumem, em geral, a detecção de estados assintoticamente livres no espaço-tempo de Minkowski, a possibilidade de medir partículas com energia

$$E < mc^2 \quad (\text{IV.1})$$

é normalmente desconsiderada. Além do mais, no contexto da Relatividade Geral Clássica a detecção *local* de partículas *pontuais* satisfazendo Eq. (IV.1) é excluída pelo fato de que um observador com quadri-velocidade u^μ interceptando uma partícula com quadri-momento $k^\mu = mv^\mu$ atribui à dita partícula uma energia $E = mv^\mu u_\mu \geq mc^2$. Por outro lado, é bem conhecido que, ao contrário do que acontece na Teoria Quântica de Campos padrão em espaços-tempos planos, a quantização dos campos levada a cabo em espaços-tempos curvos (estacionários) não implica, em geral, em nenhuma relação de dispersão entre a energia e outros números quânticos, evitando assim a restrição $E \geq mc^2$ típica de espaços planos. Isto pode ser entendido lembrando que, o conceito de *partícula pontual* não faz sentido no contexto da Teoria Quântica de Campos. Duas questões fundamentais são levantadas assim pela discussão anterior: Dado um espaço-tempo estacionário.

1. Qual é a energia mínima $E_{\min} \equiv \hbar\omega_{\min}$ permitida para uma partícula?
2. Qual é a densidade de probabilidade associada à detecção de uma partícula com $E \in [E_{\min}, mc^2)$ em diferentes pontos do espaço?

Analisaremos as duas questões anteriores no contexto da Teoria Quântica de Campos Lineares em Espaços Curvos onde os modos normais associados às nossas partículas são vistos como livres.

Para evitar anbigüidades com relação ao significado de “observar uma partícula” usamos detectores de Unruh-DeWitt (dotados de uma estrutura interna definida por uma densidade de estados). Mostramos que os nossos resultados estão em concordância com as predições da Relatividade Geral no que se refere às posições das partículas com energias $E < mc^2$ assim como medidas pelos mesmos observadores fiduciais com relação aos quais

é realizada a quantização dos campos e em concordância também com as experiências realizadas na Terra, onde usualmente assume-se $E \geq mc^2$.

IV.1 Detecção de partículas massivas no espaço-tempo de um buraco negro bi-dimensional

Começemos considerando o elemento de linha de um espaço-tempo de Schwarzschild bi-dimensional:

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2. \quad (\text{IV.2})$$

A Eq. (IV.2) pode ser interpretada como descrevendo um buraco negro de massa M . Perto do horizonte, $r \approx 2M$, a Eq. (IV.2) pode ser escrita como

$$ds^2 = (\rho/4M)^2 dt^2 - d\rho^2, \quad (\text{IV.3})$$

onde $\rho(r) \equiv \sqrt{8M(r - 2M)}$. (Note que nestas coordenadas o horizonte se encontra em $\rho = 0$.) O elemento de linha (IV.3) está associado ao “Rindler wedge” (o qual é um espaço-tempo globalmente hiperbólico) contanto que, $0 < \rho < +\infty$ e $-\infty < t < +\infty$. As vantagens de considerar o espaço-tempo (IV.3) ao invés de (IV.2) é triplo: Em primeiro lugar, este tem as principais propriedades relevantes (para os nossos propósitos) do espaço-tempo de Schwarzschild bi-dimensional (o fato de que eles diferem assintoticamente não será importante neste caso). Em segundo lugar, proporciona um melhor entendimento de alguns fenômenos que aparecem em referenciais uniformemente acelerados, e em terceiro lugar, este permite uma discussão totalmente analítica.

Consideremos agora neste espaço-tempo um campo escalar $\hat{\Phi}(x)$ com massa m . Cujas soluções de frequência positiva $u_\omega(x^\mu)$ satisfazem a equação

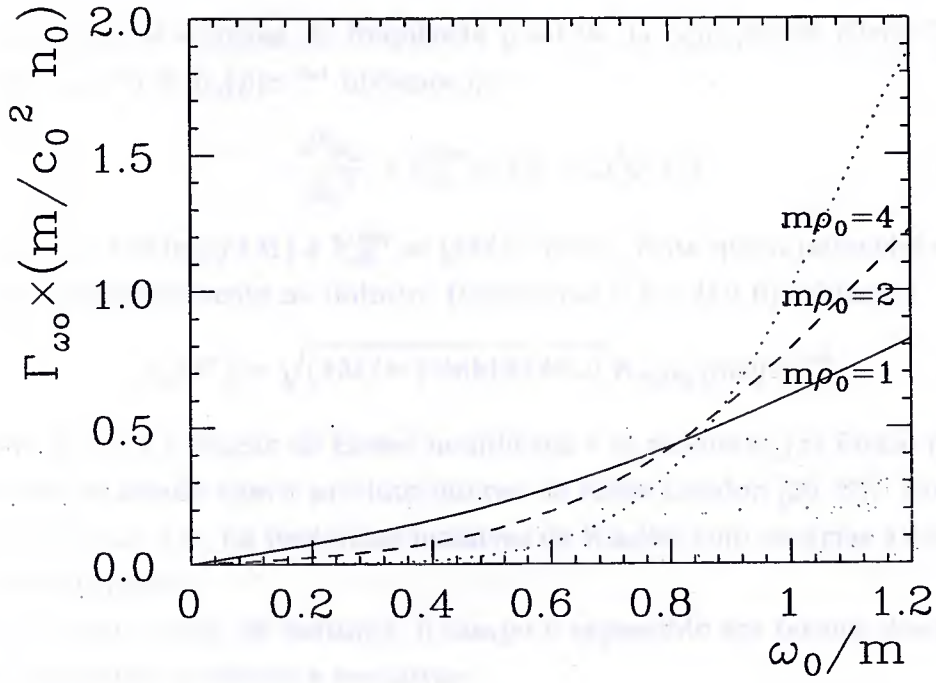


Figure IV.1: Plotamos a taxa de detecção Γ_{ω_0} como função da razão ω_0/m para observadores em diferentes pontos ρ_0 . Para observadores situados muito longe do horizonte há um amortecimento muito forte na taxa de detecção.

de Klein-Gordon $(\square + m^2)u_\omega(x^\mu) = 0$, i.e.,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu u_\omega) + m^2 u_\omega = 0, \quad (\text{IV.4})$$

que para métrica (IV.3) toma a forma

$$\partial_t^2 u_\omega - (4M)^{-2} \rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho u_\omega) + (4M)^{-2} \rho^2 m^2 u_\omega = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Escrevendo as soluções de frequência positiva da equação de Klein-Gordon como $u_\omega(x^\mu) \equiv \psi_\omega(\rho)e^{-i\omega t}$ obtemos que

$$-\frac{d^2 \psi_\omega}{dx^2} + V_{\text{eff}}^{\text{RW}} \psi_\omega(\rho) = \omega^2 \psi_\omega(\rho). \quad (\text{IV.6})$$

Aqui $x = 4M \ln(\rho/4M)$ e $V_{\text{eff}}^{\text{RW}} = (4M)^{-2} \rho^2 m^2$. Note que o potencial efetivo cresce ilimitadamente no infinito. Resolvendo a Eq. (IV.6), obtemos

$$u_\omega(x^\mu) = \sqrt{(4M/\pi^2) \sinh(4\pi M\omega)} K_{4iM\omega}(m\rho) e^{-i\omega t}, \quad (\text{IV.7})$$

onde $K_\nu(x)$ é a função de Bessel modificada e os modos $u_\omega(x)$ foram normalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon [30, 36]. Note que $\omega \in (0, +\infty)$, i.e., há partículas massivas de Rindler com energias arbitrariamente pequenas.

A seguir, como de costume, o campo é expandido em termos dos modos de frequências positivas e negativas:

$$\hat{\Phi}(x) = \int_0^{+\infty} d\omega [\hat{a}_\omega u_\omega(x) + H.c.], \quad (\text{IV.8})$$

onde os operadores de criação e aniquilação satisfazem $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$. Como $\partial_t u_\omega = -i\omega u_\omega$, o *observador fiducial* com relação ao qual a quantização é levada a cabo é aquele situado em $\rho = \rho_0 = 4M$, cujo tempo próprio é t [veja Eq. (IV.3)]. O vácuo de Rindler $|0\rangle$ está definido por $\hat{a}_\omega|0\rangle = 0$.

Agora introduzimos um detector de Unruh-DeWitt [2] descrito por um monopolo pontual $\hat{m}(s)$ com tempo próprio s e linha do mundo $z^\mu = z^\mu(s)$. Seja \hat{H} a Hamiltoniana livre do detector que atua como: $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ sobre

os auto-estados de energia $|E\rangle$, e $\hat{m}(s) = e^{i\hat{H}s}\hat{m}(0)e^{-i\hat{H}s}$. Denotaremos por $|E_G\rangle$ o estado desexcitado do detector e assumiremos $E_G \equiv 0$. O estado excitado estará regido por uma densidade de estados (normalizada) $\beta_{E_0}(E)$ com um máximo acentuado em $E = E_0$ e satisfazendo,

$$\int_0^{+\infty} dE \beta_{E_0}(E) = 1. \quad (\text{IV.9})$$

A escolha mais simples é $\beta_{E_0}(E) = \delta(E - E_0)$ que caracteriza um detector com um único estado excitado. Tal escolha será suficiente no caso do buraco negro mas não no caso da estrela relativística onde teremos que lidar com partículas com um espectro discreto de energia. Neste caso é mais conveniente considerar

$$\begin{aligned} \beta_{E_0}(E) &= (n/E_0) [\Theta(E - E_0 + E_0/2n) \\ &- \Theta(E - E_0 - E_0/2n)], \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

onde $n = \text{const.} \gg 1$ e $\Theta(x)$ é a função degrau. Notemos que a Eq. (IV.10) satisfaz a Eq. (IV.9) e a propriedade $\beta_{cE_0}(cE) = c^{-1}\beta_{E_0}(E)$ para $c \in \mathbb{R}$. Além disso, podemos recuperar o caso do detector com um único estado excitado no limite $n \rightarrow +\infty$, uma vez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_{E_0}(E) = \delta(E - E_0)$.

Uma vez definido o detector, acoplamo-lo a um campo escalar massivo $\hat{\Phi}(x^\mu)$ por meio da ação de interação

$$\hat{S}_I = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \, c_0 \, \hat{m}(s) \, \hat{\Phi}[x^\mu(s)], \quad (\text{IV.11})$$

onde c_0 é uma pequena constante de acoplamento.

Perguntemos agora ao nosso observador fiducial qual é a probabilidade total por tempo próprio $\Gamma_\omega(\rho_d) \equiv P_\omega(\rho_d)/s_d^{\text{tot}}$ do detector detectar uma partícula em algum ponto ρ_d com energia ω . A amplitude de excitação (a nível de árvore) $\mathcal{A}_\omega^{\text{det}} \equiv \langle 0 | \otimes \langle E | \hat{S}_I | E_G \rangle \otimes |\omega \rangle$ associada à detecção de uma partícula é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega^{\text{det}} &= 4 \, c_0 \, \sqrt{M \sinh(4\pi M \omega)} \, K_{4iM\omega}(m\rho_d) \\ &\times \delta(E - 4M\omega/\rho_d), \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

onde a seletividade do detector foi escolhida de tal forma que $\langle E|m(0)|E_G \rangle \equiv 1$. Assim, a taxa de detecção é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega(\rho_d) &= \frac{1}{s_d^{\text{tot}}} \int_0^{+\infty} dE \beta_{E_0}(E) \int_0^{+\infty} d\omega' |\mathcal{A}_{\omega'}^{\text{det}}|^2 F_\omega(\omega') \\ &= \frac{2c_0^2}{\pi} \sinh(\pi E_0 \rho_d) \rho_d K_{iE_0 \rho_d}^2(m \rho_d) F_\omega\left(\frac{E_0 \rho_d}{4M}\right), \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

onde escolhemos a densidade de estados $\beta_{E_0}(E) = \delta(E - E_0)$ e $F_\omega(\omega')$ caracteriza um estado misto cuja distribuição está fortemente centrada em torno da energia da partícula ω , e é tal que $F_\omega(\omega) = n_0 = \text{const.}$ para todo ω . Como mostraremos mas adiante, é possível evitar a introdução de estados mistos se considerarmos a detecção de pacotes de ondas.

A seguir ajustamos cuidadosamente o detector em cada ponto ρ_d para *maximizar* a probabilidade de detecção (IV.13). Isto é conseguido ajustando adequadamente seu hiato de energia: $E_0 = 4M\omega/\rho_d$ (note que E_0 e ω estão relacionados por um fator de “red-shift”, como era de se esperar). Conseqüentemente a Eq. (IV.13) torna-se

$$\Gamma_\omega(\rho_d) = \frac{2c_0^2}{\pi} n_0 \sinh(4\pi M\omega) \rho_d K_{4iM\omega}^2(m \rho_d). \quad (\text{IV.14})$$

Agora, podemos perguntar-nos qual seria a taxa de probabilidade de Γ_{ω_0} de que um estado massivo $|\omega_0\rangle$ seja detectado pelo nosso observador situado em ρ_0 no caso particular em que o detector é carregado pelo próprio experimentador, i.e., $\rho_d = \rho_0$ (é bom lembrar neste ponto que no “Rindler wedge” $M = \rho_0/4$). Na Fig. IV.1 plotamos

$$\Gamma_{\omega_0} = \frac{2c_0^2}{\pi} n_0 \sinh(\pi \rho_0 \omega_0) \rho_0 K_{i\rho_0 \omega_0}^2(m \rho_0), \quad (\text{IV.15})$$

como função de ω_0/m . Podemos notar claramente que quanto mais longe do horizonte está o observador mais abrupto é o amortecimento da detecção.

A seguir, definamos a partir da Eq. (IV.14) a densidade de probabilidade normalizada

$$d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d \equiv \Gamma_\omega(\rho_d) / \int_0^{+\infty} \Gamma_\omega(\rho'_d) d\rho'_d. \quad (\text{IV.16})$$

$(d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d)d\rho_d$ é a probabilidade de que uma partícula com energia ω seja encontrada entre ρ_d e $\rho_d + d\rho_d$. Da Fig. IV.2 podemos perceber que para partículas com ω/m pequeno, observadores longe do horizonte serão capazes de interagir unicamente com a “cauda” da “função de onda” associada às ditas partículas.

O conteúdo físico da Eq. (IV.16) pode ser reproduzido usando pacotes de ondas (ao invés de estados mistos) como mostraremos a seguir. Representemos uma partícula com energia típica ω mediante um pacote de onda definido como

$$|\phi_\omega\rangle \equiv \int_0^{+\infty} d\omega' G_\omega(\omega') \hat{a}_{\omega'}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{IV.17})$$

onde $G_\omega(\omega')$ é uma função concentrada em torno de $\omega' = \omega$ e

$$\int_0^{+\infty} d\omega' |G_\omega(\omega')|^2 = 1$$

de modo que $\langle\phi_\omega|\phi_\omega\rangle = 1$. A probabilidade *total* de detectar $|\phi_\omega\rangle$ (a nível de árvore) em algum ponto ρ_d entre as hiperfícies de tempo *coordenado* constante $t = \text{const} \rightarrow -\infty$ e $t = \text{const} \rightarrow +\infty$ é $\tilde{\mathcal{P}}_\omega^{wp}(\rho_d) = |\langle 0| \otimes \langle E_0 | \hat{S}_I | E_G \rangle \otimes |\phi_\omega\rangle|^2$, onde devemos ajustar o detector como anteriormente, $E_0 = 4M\omega/\rho_d$, para maximizar sua probabilidade de detecção. Para obter a probabilidade entre as hiperfícies de tempo *próprio* constante $s = \text{const} \rightarrow -\infty$ e $s = \text{const} \rightarrow +\infty$, devemos multiplicar ambos os lados pelo fator de “red-shift” $4M/\rho_d$, obtendo

$$\mathcal{P}_\omega^{wp}(\rho_d) = 4c_0^2 |G_\omega(\omega)|^2 \sinh(4\pi M\omega) \rho_d K_{4iM\omega}^2(m\rho_d), \quad (\text{IV.18})$$

onde $G_\omega(\omega) = \text{const.}$ Note que as Eqs. (IV.18) e (IV.14) diferem unicamente num fator constante (dimensional). Deste modo, substituindo $\Gamma_\omega(\rho_d)$ por $\mathcal{P}_\omega^{wp}(\rho_d)$ na Eq. (IV.16), obtemos a mesma densidade de probabilidade $d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d$.

Agora, para interpretar a Eq. (IV.16) no contexto da Relatividade Geral, consideremos primeiramente uma fileira de detectores, cada um deles situado

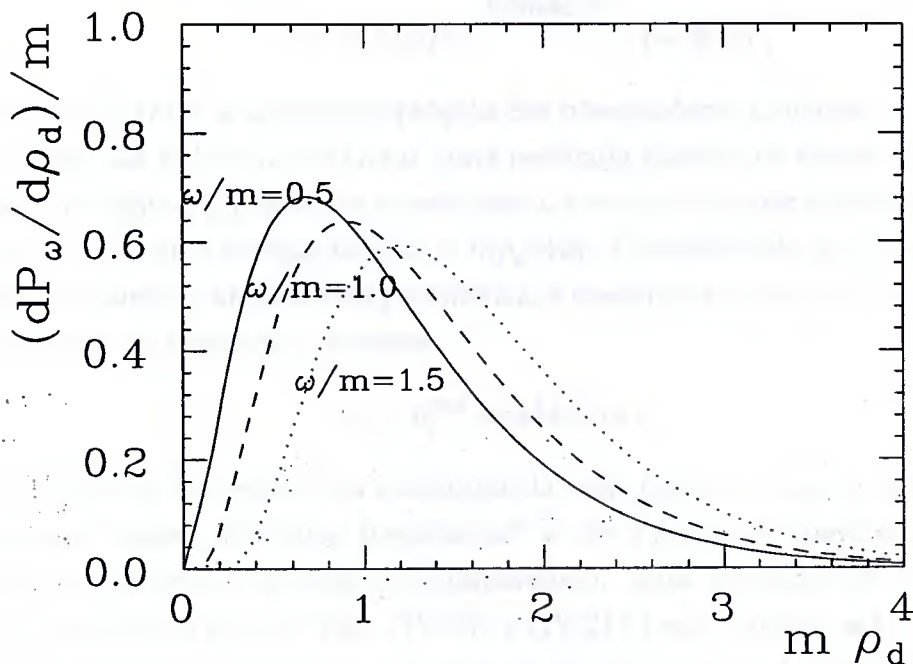


Figure IV.2: Plotamos a densidade de probabilidade $dP_\omega/d\rho_d$ para diferentes razões ω/m , onde assumimos que $Mm = 1/4$. Note-se que quanto menor a razão ω/m , mais perto do horizonte (em média) é encontrada a partícula, precisamente na região onde o “potencial gravitacional” é mais forte.

em diferentes ρ_d e definamos a *posição média de detecção*

$$\langle \rho_d \rangle \equiv \int_0^{+\infty} d\rho_d \rho_d d\mathcal{P}_\omega/d\rho_d . \quad (\text{IV.19})$$

Usando a Eq. (IV.16), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \rho_d \rangle &= \frac{\pi \tanh(4\pi M\omega)(64M^2\omega^2 + 1)}{64mM\omega} \\ &\approx \pi M\omega/m \quad (\omega \gg a) , \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

onde $a \equiv 1/4M$ é a aceleração própria dos observadores fiduciais .

Agora, da Relatividade Geral, uma partícula clássica de massa m em *repouso* em algum ρ_p possui, de acordo com o nosso observador fiducial situado em $\rho_0 = 4M$, uma energia total $\omega = m\rho_p/4M$. Considerando que a partícula possa ter também alguma energia cinética, a energia total seria $\omega \geq m\rho_p/4M$. Invertendo esta equação, obtemos

$$\rho_p \leq \rho_p^{\max} \equiv 4M\omega/m , \quad (\text{IV.21})$$

que, espera-se que esteja em concordância com $\langle \rho_d \rangle$, i.e., $\langle \rho_d \rangle \leq \rho_p^{\max}$, pelo menos no regime de “altas frequências” $\omega \gg a$ (onde os comportamentos clássicos e quânticos podem ser comparados). Esta conclusão de fato está em concordância com as Eqs. (IV.20) e (IV.21) (veja também a Fig. IV.3). Quanto menor é a razão ω/m , mais perto do horizonte será encontrada preferencialmente a partícula, onde o “potencial gravitacional efetivo” decresce sua energia total.

IV.2 Detecção de partículas massivas fora de buracos negros de Reissner-Nordstrom

Consideremos agora o elemento de linha de um espaço-tempo estático, esfericamente simétrico e globalmente hiperbólico

$$ds^2 = f(r)dt^2 - h(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \quad (\text{IV.22})$$

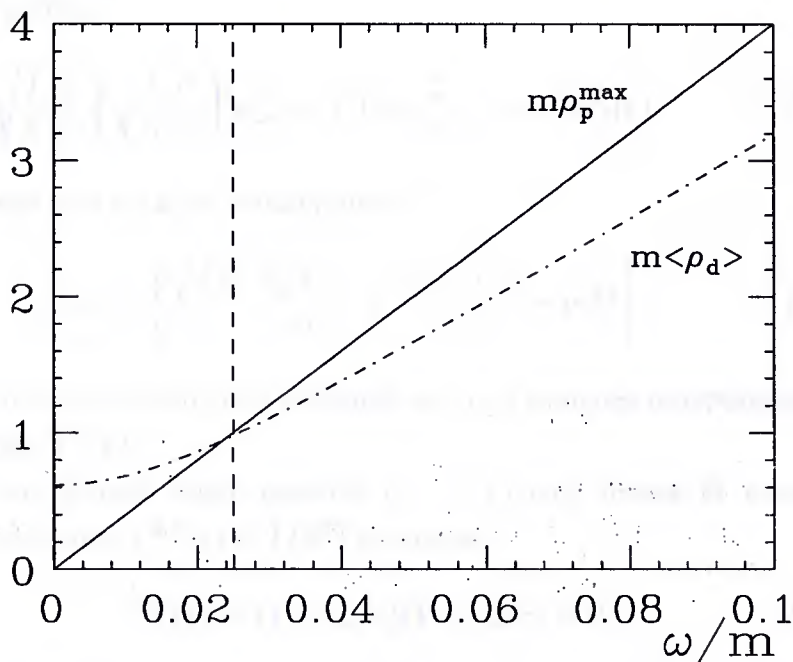


Figure IV.3: Mostramos que $\langle \rho_d \rangle$ é menor que $\rho_p^{\max} \equiv 4M\omega/m$ no regime de “altas frequências” $\omega > (4M)^{-1}$ (i.e., à direita da linha tracejada vertical) como era de se esperar. (Assumimos aqui que $mM = 10$ mas esta concordância é verificada para quaisquer mM .)

onde assumimos que estamos restritos à região ($f(r) > 0$) onde o campo de Killing $(\partial_t)^\mu$ é *tipo-tempo*. Podemos escrever as soluções de frequência positiva da equação de Klein-Gordon $(\square + m^2)u_{\omega lm}^\alpha(x) = 0$ na forma ($l \in \mathbb{N}$, $-l \leq m \leq l$)

$$u_{\omega lm}^\alpha(x) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\psi_{\omega l}^\alpha(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (\text{IV.23})$$

onde $\psi_{\omega l}^\alpha(r)$ satisfaz

$$-\sqrt{\frac{f}{h}} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{\frac{f}{h}} \frac{d}{dr} \right) \psi_{\omega l}^\alpha(r) + V_{\text{eff}} \psi_{\omega l}^\alpha(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}^\alpha(r) \quad (\text{IV.24})$$

com o seguinte potencial de espalhamento:

$$V_{\text{eff}} \equiv \left[\frac{\sqrt{f/h} d\sqrt{f/h}}{r dr} + \frac{l(l+1)f}{r^2} + m^2 f \right]. \quad (\text{IV.25})$$

O índice α foi introduzido para designar as duas soluções independentes da equação radial (IV.24).

Fora de um buraco negro estático ($r > r_+$) com massa M e carga Q ($Q \leq M$), temos que $f^{\text{RN}}(r) = 1/h^{\text{RN}}(r)$, onde

$$f^{\text{RN}}(r) = (1 - r_+/r)(1 - r_-/r) > 0 \quad (\text{IV.26})$$

e $r_\pm \equiv M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. (O rótulo “RN” é uma abreviatura para Reissner-Nordstrom.) Neste caso, o potencial de espalhamento

$$V_{\text{eff}}^{\text{RN}} = \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] \left[\frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right] \quad (\text{IV.27})$$

anula-se no horizonte, $r = r_+$, e tende a m^2 assintoticamente (veja a Fig. IV.4). Portanto, apenas partículas “*saindo*”, $\alpha \equiv \rightarrow$, do horizonte do buraco branco \mathcal{H}^- serão capazes de satisfazer a Eq. (IV.1). (No final estas partículas serão totalmente refletidas para o horizonte do buraco negro \mathcal{H}^+ .) Partículas *vindo* de \mathcal{J}^- , $\alpha \equiv \leftarrow$, terão necessariamente $\omega \geq m$. [O caso $\omega = m$ é um tanto sutil e não será considerado aqui (veja as Refs. [8]-[10] para o caso $\omega = m = 0$).]

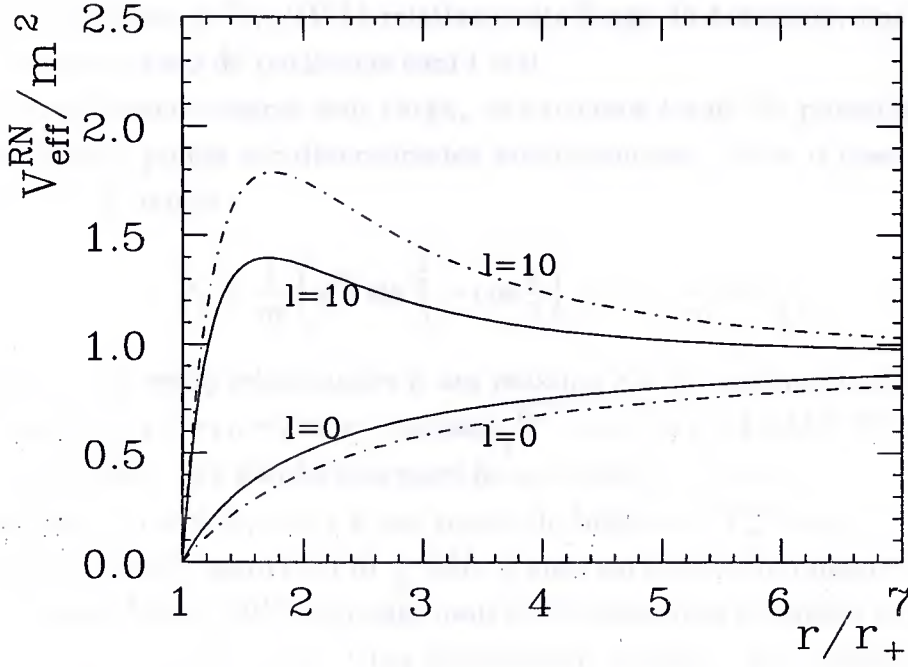


Figure IV.4: O potencial de espalhamento é plotado para $l = 0$ e $l = 10$. As linhas sólidas e as tracejadas estão relacionadas a $Q = 0$ e a $Q = 0.9M$ respectivamente. $V_{\text{eff}}^{\text{RN}}$ anula-se no horizonte e tende assintoticamente a m^2 . Note-se que quanto maior o momento angular, o potencial é maior e assim, maior é a dificuldade para encontrar uma partícula com $\omega/m < 1$ longe do horizonte. (Assumimos aqui $mM = 2$.)

Notemos que quanto maior l , maior é a barreira centrífuga do potencial (veja a Fig. IV.4). Como consequência, partículas com $l \gg 1$ que satisfaçam a Eq. (IV.1) estarão restritas necessariamente a uma vizinhança estreita em torno do horizonte, onde o campo gravitacional é suficientemente forte para compensar o efeito do momento angular. Portanto, para encontrar partículas satisfazendo a Eq. (IV.1) relativamente longe do horizonte, nos concentraremos no caso de partículas com $l = 0$.

Para buracos negros sem carga, os extremos locais do potencial de espalhamento poden ser determinados analiticamente. Para o caso $l = 0$ e $Mm < 1/4$, temos

$$r_1 = \frac{1}{m} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\xi}{3} - \cos \frac{\xi}{3} \right) \text{ e } r_2 = \frac{2}{m} \cos \frac{\xi}{3}, \quad (\text{IV.28})$$

onde r_1 e r_2 estão relacionados a um máximo e a um mínimo locais respectivamente ($r_1 < r_2$), e $\xi \equiv \pi - \arctan[\sqrt{1 - 16(mM)^2}/(4mM)]$. Para o caso $l = 0$ e $Mm > 1/4$ não há extremos locais (veja Fig. IV.5).

Para $Mm = 1/4$, $r_1 = r_2$ é um ponto de inflexão e $V_{\text{eff}}^{\text{RN}}|_{r=r_1, r_2} = 3m^2/4$. Para um buraco negro com $M \geq 3M_\odot$ e uma partícula com massa $m \geq m_{e^-}$, temos que $Mm \geq 10^{16}$. Por este motivo focalizaremos as nossas simulações nos valores $Mm > 1/4$. Uma investigação analítica dos extremos locais quando $Q \neq 0$ não é possível pois neste caso $dV_{\text{eff}}^{\text{RN}}/dr = 0$ dá lugar a uma equação algébrica de quinta ordem mas, pode-se observar numericamente [veja, e.g., Figs. (IV.4) e (IV.5)] que a presença da carga elétrica não muda significativamente a forma do potencial $V_{\text{eff}}^{\text{RN}}(r/r_+)$.

Mediante o uso da transformação de coordenadas (III.20), i.e.,

$$r \rightarrow x = y + \frac{y_-^2 \ln(y - y_-) - y_+^2 \ln(y - y_+)}{y_- - y_+}, \quad (\text{IV.29})$$

onde $y \equiv r/2M$ e $y_\pm \equiv r_\pm/2M$, podemos escrever a Eq. (IV.24) como

$$-\frac{d^2 \psi_{\omega l}^\alpha}{dx^2} + 4M^2 V_{\text{eff}}^{\text{RN}}(x[y(r)]) \psi_{\omega l}^\alpha = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}^\alpha. \quad (\text{IV.30})$$

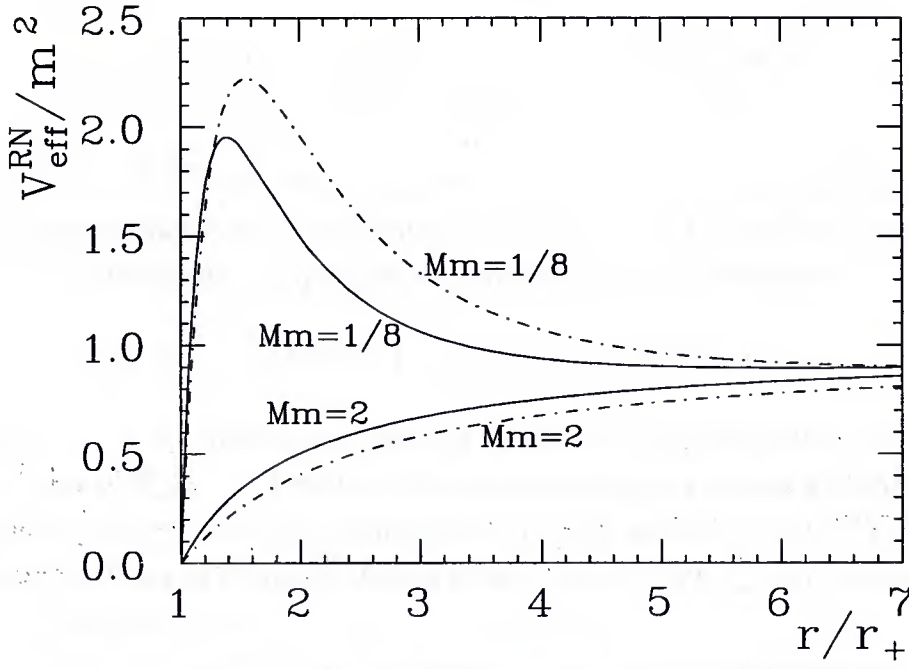


Figure IV.5: O potencial de espalhamento é plotado para $mM = 1/8$ e $mM = 2$. As linhas sólidas e as tracejadas estão relacionadas com $Q = 0$ e $Q = 0.9M$, respectivamente. Note-se que quanto maior mM , mais favorável a detecção de partículas com $\omega/m < 1$. (Assumimos aqui $l = 0$.)

Desta maneira, tanto muito perto quanto muito longe do horizonte, podemos escrever os modos que saem $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}$ como ($\omega \geq 0$, i.e., $\omega_{\min} = 0$)

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx A_{\omega l}^{\rightarrow} \begin{cases} e^{2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{2iM\tilde{\omega}x} & (x \gg 1) \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

e os modos $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}$ ($\omega \geq m$, i.e., $\omega_{\min} = m$) como

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx A_{\omega l}^{\leftarrow} \begin{cases} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ e^{-2iM\tilde{\omega}x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{2iM\tilde{\omega}x} & (x \gg 1), \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

onde $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - m^2}$. Para $\omega \geq m$, $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2, |\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ e $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2, |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ podem ser interpretados como coeficientes de reflexão e de transmissão, respectivamente, satisfazendo as equações de conservação de probabilidade

$$|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + \frac{\tilde{\omega}}{\omega} |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + \frac{\omega}{\tilde{\omega}} |\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1. \quad (\text{IV.33})$$

Para $\omega < m$, os modos que saem extinguem-se exponencialmente longe do horizonte e $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}| = 1$. Um dos testes realizados para garantir a confiabilidade dos nossos programas foi a comprovação de que as Eqs. (IV.31)-(IV.32) eram satisfeitas (com as correspondentes relações para $\mathcal{R}_{\omega l}^{\alpha}$ e $\mathcal{T}_{\omega l}^{\alpha}$) ao longo de todos os cálculos numéricos.

Normalizamos $\psi_{\omega l}^{\alpha}$ de tal forma que $u_{\omega l m}^{\alpha}$ são ortonormalizadas com relação ao produto interno de Klein-Gordon [30, 36]:

$$i \int_{\Sigma_t} d\Sigma n^{\mu} \left(u_{\omega l m}^{\alpha} {}^* \nabla_{\mu} u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} - u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} \nabla_{\mu} u_{\omega l m}^{\alpha} {}^* \right) = \delta_{AA'} \quad (\text{IV.34})$$

$$i \int_{\Sigma_t} d\Sigma n^{\mu} \left(u_{\omega l m}^{\alpha} \nabla_{\mu} u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} - u_{\omega' l' m'}^{\alpha'} \nabla_{\mu} u_{\omega l m}^{\alpha} \right) = 0, \quad (\text{IV.35})$$

onde aqui $\delta_{AA'} \equiv \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega')$ e n^{μ} é o vetor unitário normal ao elemento de volume da superfície de Cauchy Σ_t e que aponta para o futuro. Usando a Eq. (IV.30) para transformar o lado esquerdo da Eq. (IV.34) num termo de superfície, obtemos as constantes de normalização $A_{\omega l}^{\rightarrow} = (2\omega)^{-1}$ e $A_{\omega l}^{\leftarrow} = (2\sqrt{\omega\tilde{\omega}})^{-1}$ (a menos de uma fase arbitrária). Os modos que saem e os

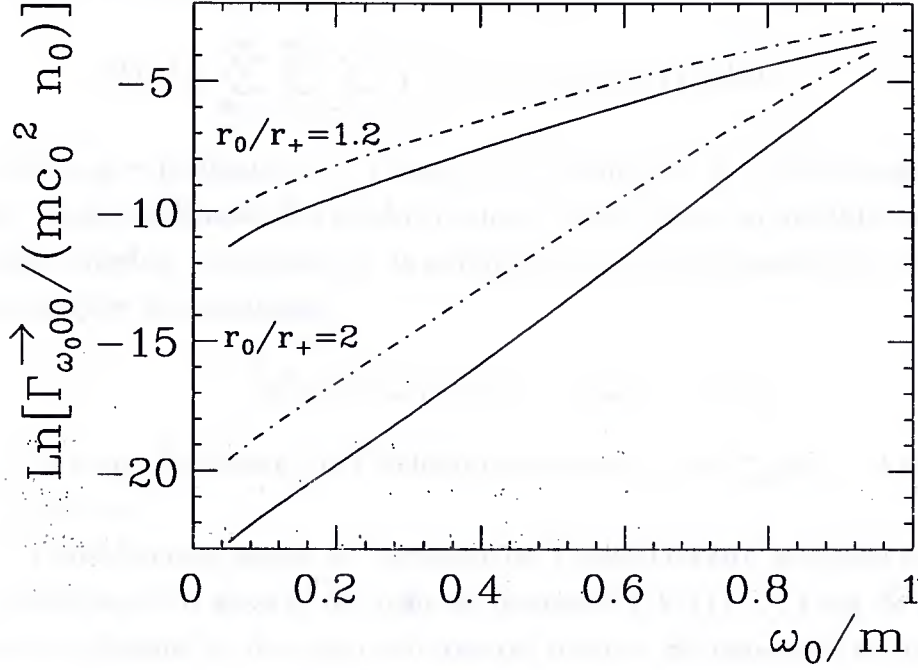


Figure IV.6: Plotamos a taxa de detecção $\Gamma_{\omega_{00}}^{\rightarrow}$ como função da razão ω_0/m para observadores em diferentes pontos r_0 . As linhas sólidas e tracejadas estão relacionadas com $Q = 0$ e $Q = 0.9M$, respectivamente. O amortecimento na taxa de detecção é mais forte para observadores que estão mais longe do horizonte. (Assumimos aqui que $mM = 2$.)

que entram são ortogonais entre si com relação ao produto interno de Klein-Gordon (IV.34)-(IV.35). Isto pode ser visto escolhendo, como no caso não massivo do Cap. III, $\Sigma_t = \mathcal{H}^- \cup \mathcal{J}^-$ na Eq. (IV.34) e lembrando novamente que $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ anulam-se em \mathcal{J}^- e \mathcal{H}^- , respectivamente.

A seguir expandimos um campo escalar massivo $\hat{\Phi}(x)$ em termos dos modos de frequências positivas e negativas:

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_{\alpha=\rightarrow}^{\leftarrow} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{\omega_{\min}}^{+\infty} d\omega [\hat{a}_{\omega lm}^{\alpha} u_{\omega lm}^{\alpha}(x) + \text{H.c.}] , \quad (\text{IV.36})$$

onde $\omega_{\min} = 0$ quando $\alpha = \rightarrow$ e $\omega_{\min} = m$ quando $\alpha = \leftarrow$. Como consequência da ortonormalização dos modos normais com relação ao produto interno de Klein-Gordon, os operadores de aniquilação $\hat{a}_{\omega lm}^{\alpha}$ e de criação $\hat{a}_{\omega lm}^{\alpha\dagger}$ satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{a}_{\omega lm}^{\alpha}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^{\alpha'\dagger}] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') . \quad (\text{IV.37})$$

O vácuo de Boulware $|0\rangle$ é definido novamente por $\hat{a}_{\omega lm}^{\alpha}|0\rangle = 0$ para todo α, ω, l e m .

Consideremos agora um detector de Unruh-DeWitt acoplado ao campo escalar massivo através da ação de interação (IV.11). A taxa de detecção (probabilidade de detecção por tempo próprio do detector) de partículas com números quânticos α, ω, l e m (assim como definidos por observadores fiduciais assintóticos) pode ser calculada (a nível de árvore):

$$\Gamma_{\omega lm}^{\alpha} = 2c_0^2 n_0 \omega \sqrt{f^{\text{RN}}(r_d)} \frac{|\psi_{\omega l}^{\alpha}(r_d)|^2}{r_d^2} |Y_{lm}(\theta_d, \varphi_d)|^2 , \quad (\text{IV.38})$$

onde $n_0 = F_{\omega}(\omega) = \text{const.}$, escolhemos $\beta_{E_0}(E) = \delta(E - E_0)$ e ajustamos novamente o hiato de energia do detector em cada ponto r_d de modo que a probabilidade de detecção seja maximizada, isto é, $E_0 = \omega / \sqrt{f^{\text{RN}}(r_d)}$.

Como no caso do “Rindler wedge”, podemos calcular a taxa de detecção $\Gamma_{\omega_0 lm}^{\alpha}$ no caso particular em que o estado massivo $|\alpha \omega_0 l m\rangle$ é definido por um experimentador situado no mesmo ponto onde encontra-se o detector,

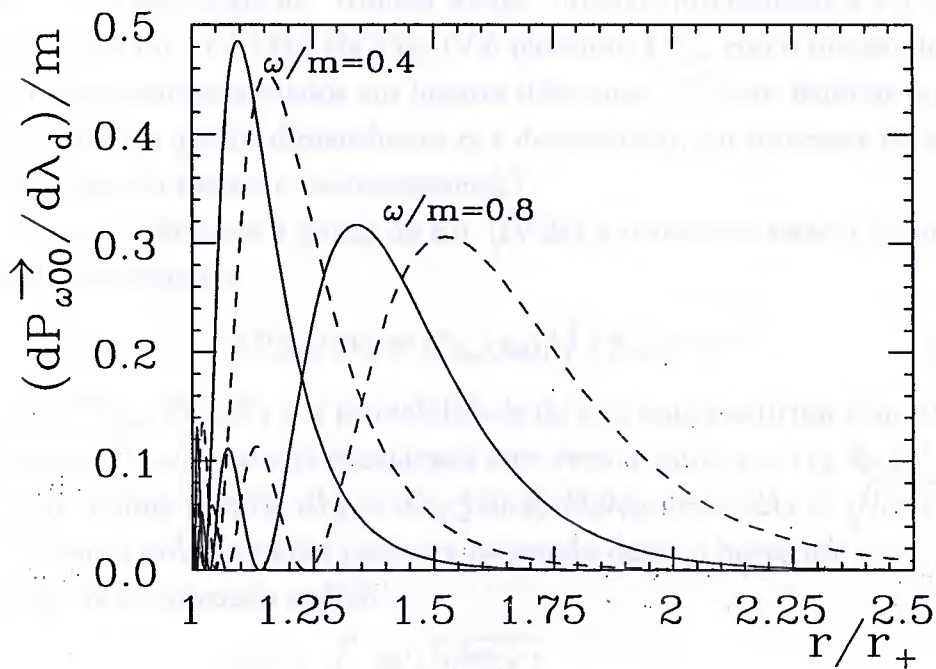


Figure IV.7: A densidade de probabilidade $(d\mathcal{P}_{\omega 00}^{\rightarrow}/d\lambda_d)/m$ é plotada para $\omega/m = 0.4$ e $\omega/m = 0.8$. As linhas sólidas e tracejadas estão relacionadas com $Q = 0$ e $Q = 0.9M$, respectivamente. (Assumimos aqui que $Mm = 2$.) Note-se que quanto menor a razão ω/m , mais perto do horizonte deverá encontrar-se a partícula.

i.e., $r_0 = r_d$. Em princípio, isto exigiria que o campo escalar fosse quantizado com relação a um observador fiducial situado em r_0 (em cujo caso $e^{-i\omega t}$ na Eq. (IV.23) seria substituído por $e^{-i\omega\tau}$ com $\tau = \sqrt{f^{RN}(r_0)}t$). Entretanto, não é difícil ver que $\Gamma_{\omega_0 lm}^\alpha$ pode ser obtida diretamente da Eq. (IV.38) por meio das seguintes substituições: $r_d \rightarrow r_0$ e $\omega \rightarrow \sqrt{f^{RN}(r_0)}\omega_0$. [Podemos checar esta estratégia no “Rindler wedge” obtendo diretamente a Eq. (IV.15) a partir da Eq. (IV.14).] Na Fig. IV.6 plotamos $\Gamma_{\omega_0 00}^\alpha$ como função de ω_0/m para observadores situados em lugares diferentes. (É bom lembrar que num espaço-tempo quadri-dimensionais c_0 é dimensional, em contraste com o caso onde o espaço-tempo é bi-dimensional.)

Agora, definamos a partir da Eq. (IV.38) a densidade escalar de probabilidade normalizada

$$d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha/dV_d \equiv \Gamma_{\omega lm}^\alpha(\mathbf{x}_d)/\int \Gamma_{\omega lm}^\alpha(\mathbf{x}')dV' . \quad (IV.39)$$

Aqui $(d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha/dV_d)dV_d$ é a probabilidade de que uma partícula com números quânticos (α, ω, l, m) seja encontrada num certo ponto $\mathbf{x}_d = (r_d, \theta_d, \phi_d)$ dentro de um volume próprio $dV_d = d\lambda_d r_d^2 \sin \theta_d d\theta_d d\phi_d$, onde $d\lambda_d = \sqrt{h^{RN}(r_d)}dr_d$. A distância própria radial pode ser integrada desde o horizonte $r = r_+$ como função da coordenada radial:

$$\begin{aligned} \lambda(r) &= \int_{r_+}^r dr' \sqrt{h^{RN}(r')} \\ &= r\sqrt{f^{RN}(r)} + M \ln \left[\frac{r + r\sqrt{f^{RN}(r)} - M}{r_+ - M} \right] . \end{aligned} \quad (IV.40)$$

Note-se que $\lambda = \lambda(r)$ é sempre uma função regular exceto no caso de um buraco negro de Reissner-Nordstrom extremo ($Q = M$). Da Eq. (IV.39), obtemos a densidade de probabilidade com relação à distância radial

$$\frac{d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha}{d\lambda_d} \equiv \frac{\sqrt{f^{RN}(r_d)}|\psi_{\omega l}^\alpha(r_d)|^2}{\int_0^{+\infty} d\lambda_d' \sqrt{f^{RN}(r_d')}|\psi_{\omega l}^\alpha(r_d')|^2} . \quad (IV.41)$$

Note-se que aqui $(d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha/d\lambda_d)d\lambda_d$ é a probabilidade de detectar uma partícula com números quânticos (α, ω, l, m) dentro de uma casca entre λ_d e $\lambda_d + d\lambda_d$.

Na Fig. IV.7, usamos a Eq. (IV.41) para plotar $d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha/d\lambda_d$ para partículas com diferentes razões ω/m (e $l = 0$). Vemos que quanto menor o valor de ω/m mais perto do horizonte será encontrada a partícula em média.

A seguir, para determinar a distância média radial da partícula, calculamos numericamente (veja Fig. IV.8)

$$\langle \lambda_d \rangle \equiv \int_0^{+\infty} d\lambda_d \lambda_d d\mathcal{P}_{\omega lm}^\alpha/d\lambda_d. \quad (\text{IV.42})$$

Notemos que os modos com $\omega/m \geq 1$ estendem-se por todo o espaço e portanto $\langle \lambda_d \rangle$ diverge. Isto é qualitativamente diferente do caso do “Rindler wedge” onde o potencial de espalhamento cresce indefinidamente no infinito o que faz com que os modos se anulem assintoticamente. Como consequência, no “Rindler wedge”, $\langle \rho_d \rangle$ é finito mesmo para $\omega/m > 1$ [veja a Eq. (IV.20)].

Agora, repetindo a análise que já fizemos no caso do “Rindler wedge” usando Relatividade Geral, obtemos que, de acordo com nosso observador (fiducial) estático e assintótico, uma partícula com massa m num certo ponto (r_p, θ_p, ϕ_p) com uma certa quadri-velocidade u^μ possui uma energia total $\omega = mu^\mu(\partial_t)_\mu = m\sqrt{f^{\text{RN}}(r_p)}\sqrt{1 + |u^i u_i|} \geq m\sqrt{f^{\text{RN}}(r_p)}$. (A igualdade é obtida quando a partícula está em repouso.) Invertendo esta relação, obtemos que uma partícula clássica com massa m e energia total ω (com $\omega < m$) estará em $r_p \leq r_p^{\text{max}}$, onde

$$r_p^{\text{max}} = \frac{M[1 + \sqrt{1 - (1 - \omega^2/m^2)(Q/M)^2}]}{1 - \omega^2/m^2} \quad (\text{IV.43})$$

(e $r_p = r_p^{\text{max}}$ apenas quando a partícula está em repouso). Como a distância radial própria $\lambda = \lambda(r)$ é uma função que cresce monotonicamente, $\lambda_p \leq \lambda_p^{\text{max}} \equiv \lambda(r_p^{\text{max}})$. No regime de “altas energias”, $\omega \gg r_+^{-1}$, como no caso anterior, esperamos que $\langle \lambda_d \rangle \leq \lambda_p^{\text{max}}$ (veja Sec. IV.1). Isto é, de fato, confirmado na Fig. IV.8.

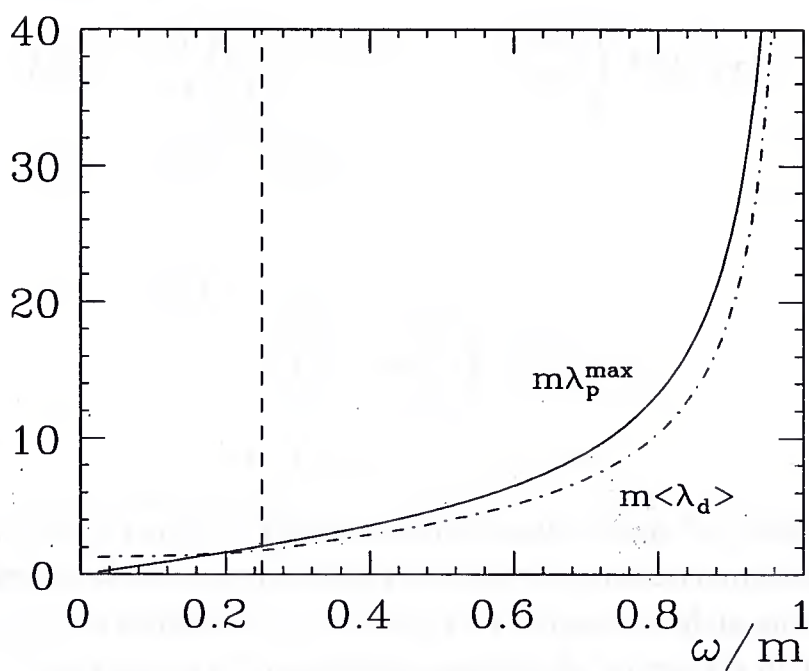


Figure IV.8: $\langle\lambda_d\rangle$ é plotado para $\alpha = \rightarrow$ e $l = 0$ e comparado com λ_p^{\max} . Vemos, de fato, que $\langle\lambda_d\rangle < \lambda_p^{\max}$ no regime de “altas energias” $\omega > r_+^{-1}$ (i.e., à direita da linha tracejada vertical). (Assumimos aqui $mM = 2$ e $Q = 0$.)

IV.3 Detecção de partículas massivas em Estrelas Relativísticas

Consideremos uma estrela relativística com densidade uniforme $\alpha_0 = \text{const.}$ O elemento de linha associado a ela pode ser escrito como na Eq. (IV.22) (veja Ref. [28]) com

$$f^s(r) = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right)^2 \Theta(R - r) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Theta(r - R) \quad (\text{IV.44})$$

e

$$h^s(r) = (1 - 2m(r)/r)^{-1} = \left(1 - 2M \frac{r^2}{R^3} \right)^{-1} \Theta(R - r) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \Theta(r - R), \quad (\text{IV.45})$$

onde $m(r) = 4\pi \int_0^r \alpha_0 r'^2 dr'$. Estamos usando aqui o rótulo “s” para denotar quantidades associadas ao espaço-tempo da *estrela*. Nestas coordenadas, $r = R$ define o raio da estrela e $M = (4\pi/3)\alpha_0 R^3$ é a massa total da mesma (que difere da massa *própria* total devido à contribuição da energia de ligação). Por motivos de estabilidade, $R > R_c \equiv 9M/4$.

As soluções de energia positiva podem ser escritas na mesma forma dada na Eq. (IV.23) onde $\psi_{\omega l}^\alpha$ está definida pela Eq. (IV.24) com $f(r)$ e $h(r)$ dadas nas Eqs. (IV.44) e (IV.45), respectivamente. O potencial de espalhamento pode ser obtido usando as Eqs. (IV.44) e (IV.45) na Eq. (IV.25):

$$V_{\text{eff}}^s(r) = \left[\frac{M}{R^3} \left(\frac{-9F(R)}{2} + \frac{9}{2} \sqrt{\frac{F(R)}{h^s(r)}} - \frac{1}{h^s(r)} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \left(9F(R) + \frac{1}{h^s(r)} - 6 \sqrt{\frac{F(R)}{h^s(r)}} \right) \right]$$

$$\times \Theta(R - r) + f^s(r) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \Theta(r - R) \quad (\text{IV.46})$$

onde $F(R) \equiv 1 - 2M/R$. Na superfície da estrela o potencial possui uma descontinuidade:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R_-} V_{\text{eff}}^s(r) &= F(R) \left(\frac{l(l+1)}{R^2} - \frac{M}{R^3} + m^2 \right), \\ \lim_{r \rightarrow R_+} V_{\text{eff}}^s(r) &= F(R) \left(\frac{l(l+1)}{R^2} + \frac{2M}{R^3} + m^2 \right). \end{aligned}$$

Na Fig. IV.9 plotamos o potencial de espalhamento para diferentes parâmetros da estrela. (Note-se que a descontinuidade de V_{eff}^s em $r/R = 1$ é muito pequena para os parâmetros escolhidos na Fig. IV.9.) É interessante observar que o campo gravitacional da Terra é muito fraco para influenciar de forma significativa o potencial de espalhamento para uma partícula com massa da ordem da massa do elétron ($m = 0.5 \text{ MeV}$). No centro, onde a influência seria máxima, teríamos, para $M = 6 \cdot 10^{27} \text{ g}$ (e $l = 0$) que $V_{\text{eff}}^s(r) = m^2(1 - 10^{-48})$ que deve ser comparado com $V_{\text{eff}}^s(r)|_{M=0} = m^2$ obtido na ausência da gravidade. Entretanto, para estrelas quasi-extremas ($R \approx R_c$) o potencial de espalhamento pode ser afetado consideravelmente pelo campo gravitacional (veja a Fig. IV.9). De fato é possível imaginar situações onde o campo gravitacional de uma estrela desempenha um papel importante em processos da física de partículas [37].

Os modos normais com $\omega < m$ serão estados ligados e $\omega_{\min} \equiv \omega_1$ será o menor autovalor do espectro discreto de frequências. Além disso, existirá um único conjunto de soluções normalizáveis e portanto, de agora em diante, suprimiremos o índice “ α ”. Definindo $d\tilde{r} = (2M)^{-1} \sqrt{h^s(r)/f^s(r)} dr$, podemos escrever a Eq. (IV.24) como

$$-\frac{d^2 \psi_{\omega l}}{d\tilde{r}^2} + 4M^2 V_{\text{eff}}^s[\tilde{r}(r)] \psi_{\omega l} = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}. \quad (\text{IV.47})$$

A função $\tilde{r}(r)$ é uma função monótona crescente. No centro da estrela (escolhendo de forma apropriada a constante de integração) temos que $\tilde{r}|_{r \approx 0} \approx$

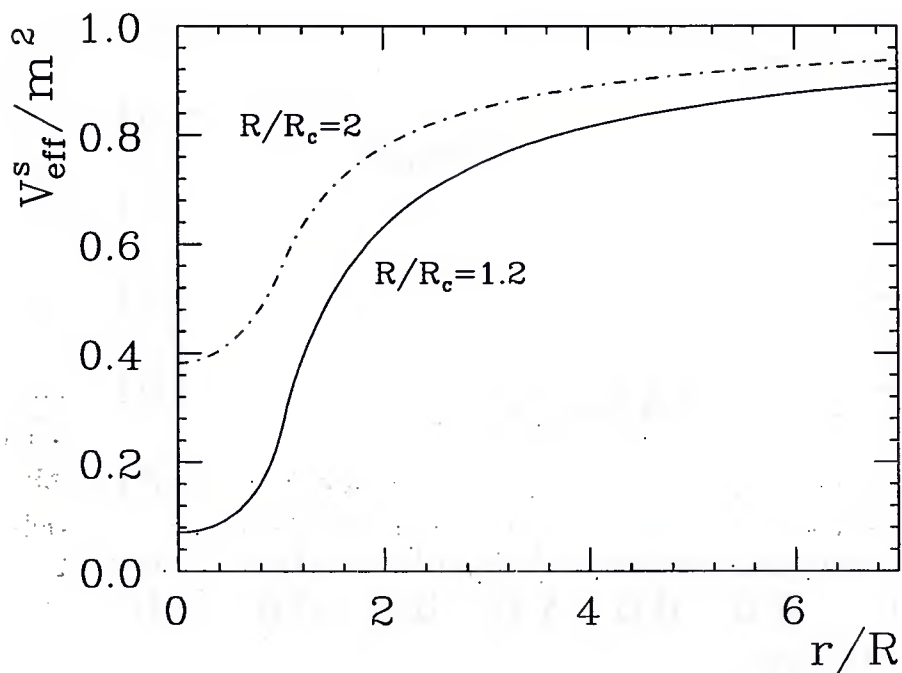


Figure IV.9: O potencial de espalhamento é plotado para diferentes valores de R/R_c . Assumimos aqui que $mM = 2$. Quanto mais densa a estrela, maior a influência do campo gravitacional. Os primeiros autovalores para estes potenciais estão listados na Tab. IV.1.

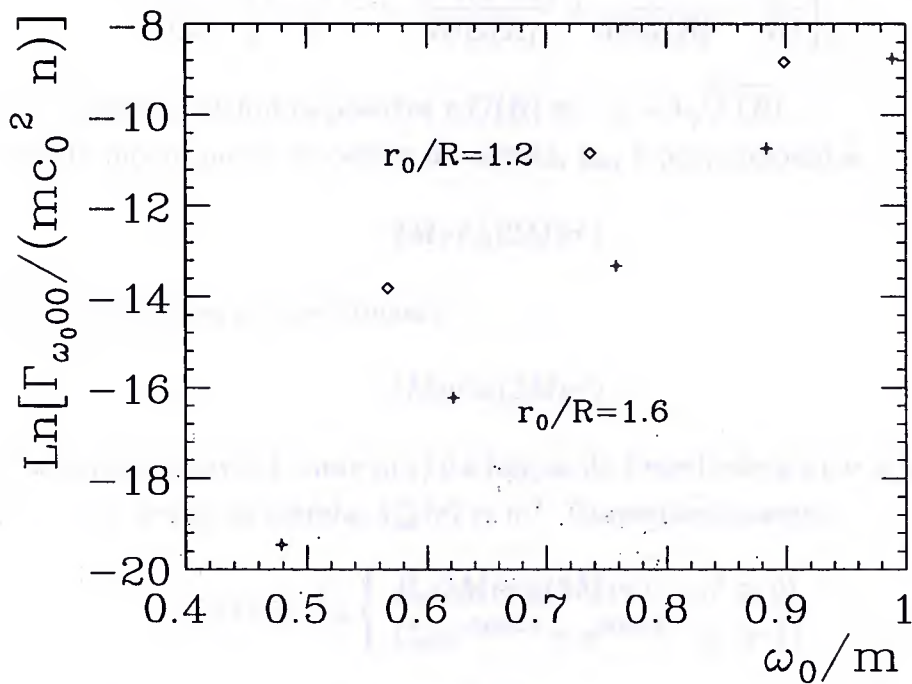


Figure IV.10: Plotamos a taxa de detecção $\Gamma_{\omega_0 00}$ para as auto-freqüências $\omega_0/m < 1$ assumindo observadores em diferentes pontos r_0 . Notemos que o amortecimento na taxa de detecção é mais pronunciado para observadores em potenciais gravitacionais fracos. (Aqui $mM = 2$ e $R/R_c = 1.2$.)

$(r/M)/(3\sqrt{F(R)} - 1)$ e o potencial de espalhamento fica

$$V_{\text{eff}}^s(\tilde{r})|_{\tilde{r} \approx 0} \approx \frac{l(l+1)}{4M^2\tilde{r}^2} + C^2 + \mathcal{O}(\tilde{r}), \quad (\text{IV.48})$$

onde

$$C^2 = \frac{G(R)^2}{2M^2} \left[\frac{(mM)^2}{2} + \frac{M^3 l(l+1)}{R^3 G(R)} + \frac{M^3}{R^3 G(R)} - \frac{M^3}{R^3} \right] \quad (\text{IV.49})$$

é uma constante definida-positiva e $G(R) \equiv -1 + 3\sqrt{F(R)}$.

Deste modo, perto do centro da estrela, $\psi_{\omega l}$ é proporcional a

$$2M\nu\tilde{r}j_l(2M\nu\tilde{r})$$

(já que as soluções proporcionais a

$$2M\nu\tilde{r}n_l(2M\nu\tilde{r})$$

são não-normalizáveis), onde $j_l(x)$ é a função de Bessel esférica e $\nu \equiv \sqrt{\omega^2 - C^2}$. Além disso, longe da estrela, $V_{\text{eff}}^s(r) \approx m^2$. Consequentemente

$$\psi_{\omega l}(\tilde{r}) \approx A_{\omega l} \begin{cases} B_{\omega l} 2M\nu\tilde{r}j_l(2M\nu\tilde{r}) & (\tilde{r} \approx 0) \\ C_{\omega l} e^{-2iM\tilde{\omega}\tilde{r}} + e^{2iM\tilde{\omega}\tilde{r}} & (\tilde{r} \gg 1) \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

onde lembramos que $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - m^2}$.

Para $\omega \geq m$, os modos são assintoticamente livres e podem ser normalizados usando as Eqs. (IV.34)-(IV.35). De fato, encontramos $A_{\omega l} = (2\sqrt{\omega\tilde{\omega}})^{-1}$ e $|C_{\omega l}| = 1$. Para $\omega_i < m$, os modos normais caem exponencialmente e $|C_{\omega_i l}| = 0$, onde estamos usando índices latinos i, j, \dots para indicar as auto-freqüências discretas. Os modos ligados devem ser ortonormalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon usando-se as Eqs. (IV.34)-(IV.35) exceto pelo fato de que neste caso $\delta_{AA'} \equiv \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{\omega_i\omega_j}$. Deste modo, encontramos

$$\int_0^{+\infty} d\tilde{r} |\psi_{\omega_i l}(\tilde{r})|^2 = \frac{\pi}{4M\omega_i^2}. \quad (\text{IV.51})$$

	$\omega_{\min}^{\text{class}}/m$	ω_1/m	ω_2/m	ω_3/m	ω_4/m
$mM = 2, R/R_c = 1.2$	0.264	0.351	0.456	0.556	0.648
$mM = 2, R/R_c = 2.0$	0.618	0.679	0.757	0.826	0.874

Tabela IV.1: Listamos as auto-freqüências mais baixas $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ para diferentes parâmetros da estrela. A auto-freqüência mais baixa ω_1 pode ser comparada com a energia clássica mínima $\omega_{\min}^{\text{class}}$. Vemos que $\omega_{\min}^{\text{class}} \leq \omega_1$, como era de se esperar no regime de “alta-freqüência” $\omega^{\text{class}} \gg M/R^2$. Assumido que $mM = 2$, temos que $M/R^2 = 0.07m$ e $M/R^2 = 0.02m$ para $R/R_c = 1.2$ e $R/R_c = 2$, respectivamente.

O conjunto válido de auto-freqüências ω_i é determinado numericamente [38]. De forma resumida, a estratégia consiste em evoluir numericamente a solução com $\psi_{\omega_i l}(0) = 0$ [veja a Eq. (IV.50)] (e $\psi'_{\omega_i l}(\tilde{r})|_{\tilde{r}=0} = \text{const. arbitrário}$) e procurar pelos ω_i 's de forma tal que suficientemente longe da estrela $\psi_{\omega_i l} \sim e^{-2M\sqrt{m^2 - \omega_i^2}\tilde{r}}$ como é exigido pela Eq. (IV.50) para $\omega_i < m$. Para maiores detalhes veja o Apêndice A. Na Tab. IV.1 apresentamos as auto-freqüências mais baixas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (normalizadas por m) para alguns parâmetros da estrela. Para comparação, mostramos também os valores mínimos da energia $\omega_{\min}^{\text{class}}$ para uma partícula clássica obtidas no contexto da Relatividade Geral que é obtido quando a dita partícula encontra-se em repouso no centro da estrela. Isto é, $\omega_{\min}^{\text{class}} = m\sqrt{f(r)}|_{r=0} = (m/2)(3\sqrt{1 - 2M/R} - 1)$. No regime de “altas freqüências”, $\omega^{\text{class}} \gg M/R^2$, onde o comportamento de partículas clássicas e quânticas pode ser comparado, esperamos que $\omega_i \geq \omega_{\min}^{\text{class}}$ devido à “energia cinética” extra intrínseca de origem quântica (veja a Tab. IV.1).

O campo escalar massivo pode ser escrito como na Eq. (IV.36)

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \oint_{\omega} [\hat{a}_{\omega l m} u_{\omega l m}(x) + \text{H.c.}] , \quad (\text{IV.52})$$

onde o somatório em α foi suprimido, integramos sobre os estados livres ($\omega \geq m$) e somamos sobre as auto-freqüências dos estados ligados ($\omega_i < m$).

Aqui

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger] = \delta_{AA'} , \quad (\text{IV.53})$$

onde $\delta_{AA'} \equiv \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega')$ e $\delta_{AA'} \equiv \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\omega\omega'}$ para estados livres e ligados, respectivamente.

Em seguida, acoplamos [veja a Eq. (IV.11)] o campo escalar massivo a um detector de Unruh-DeWitt caracterizado por uma densidade de estados (IV.10). A amplitude (a nível de árvore) associada à detecção de um estado ligado com números quânticos ω_i, l e m é $\mathcal{A}_{\omega_i lm}^{\text{det}} = \langle 0 | \otimes \langle E | \hat{S}_I | E_G \rangle \otimes | \omega_i lm \rangle$.

A taxa de detecção (probabilidade de detecção por tempo próprio do detector) é, portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega_i lm} &= \frac{1}{s_d^{\text{tot}}} \int_0^{+\infty} dE \beta_{E_0}(E) |\mathcal{A}_{\omega_i lm}^{\text{det}}|^2 \\ &= 2c_0^2 n \sqrt{f^s(r_d)} \frac{|\psi_{\omega_i l}(r_d)|^2}{r_d^2} |Y_{lm}(\theta_d, \varphi_d)|^2 , \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

onde, novamente, a seletividade do detector foi escolhida de forma tal que, $\langle E | m(0) | E_G \rangle \equiv 1$ e sintonizamos o hiato de energia do detector como anteriormente: $E_0 = \omega_i / \sqrt{f^s(r_d)}$. Note-se a semelhança das Eqs. (IV.54) e (IV.38), onde lembramos que $\dim(\psi_{\omega_i l} / \psi_{\omega l}^\alpha) = \dim(\sqrt{\omega})$. A detecção de estados livres procede de forma análoga (veja, e.g., a Eq. (IV.13)). Como no caso de Reissner-Nordstrom, podemos calcular a taxa de detecção $\Gamma_{\omega_0 lm}$ no caso especial onde o estado massivo $|\omega_0 lm\rangle$ é definido por um experimentador situado junto com o detector, como mostrado na Fig. IV.10.

Usando a Eq. (IV.54), podemos definir a densidade de probabilidade normalizada $dP_{\omega_i lm} / dV_d$ análoga à Eq. (IV.39), onde $dV_d = d\lambda_d r_d^2 \sin \theta_d d\phi_d$ e $d\lambda_d = \sqrt{h^s(r_d)} dr_d$. A distância própria radial pode ser integrada desde o centro da estrela como função da coordenada radial levando a

$$\lambda = \frac{\arcsin[\sqrt{2Mr^2/R^3}]}{\sqrt{2M/R^3}} \Theta[R - r] + \left\{ \frac{\arcsin[\sqrt{2M/R}]}{\sqrt{2M/R^3}} \right.$$

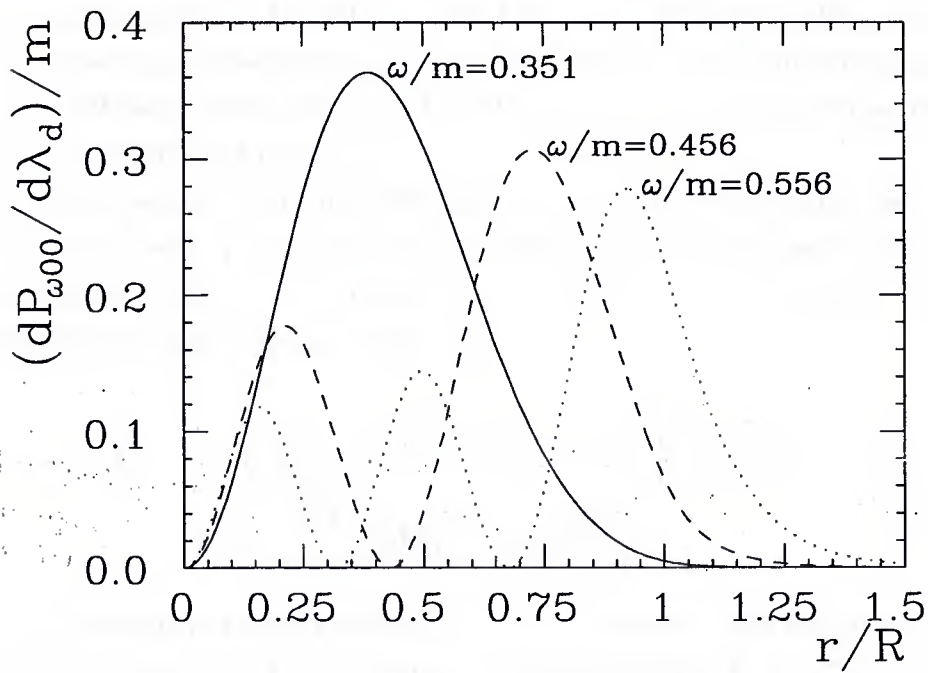


Figure IV.11: A densidade de probabilidade $(d\mathcal{P}_{\omega 00}/d\lambda_d)/m$ é plotada para as três auto-freqüências mais baixas quando $mM = 2$ e $R/R_c = 1.2$. Quanto menor é a razão ω/m , mais perto do centro da estrela encontra-se a partícula.

$$\begin{aligned}
& +M \ln \left[\frac{r + r\sqrt{1 - 2M/r - M}}{R + R\sqrt{1 - 2M/R - M}} \right] + r\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \\
& - R\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \Big\} \Theta[r - R] .
\end{aligned} \tag{IV.55}$$

A densidade de probabilidade por distância radial $d\mathcal{P}_{\omega_{ilm}}/d\lambda_d$ é então calculada analogamente à Eq. (IV.41). Na Fig. IV.11, plotamos $d\mathcal{P}_{\omega_{ilm}}/d\lambda_d$ para partículas com diferentes razões ω_i/m . A distância radial média da partícula $\langle\lambda_d\rangle$ é definida analogamente à Eq. (IV.42) e foi calculada numericamente como mostrada na Fig. IV.12.

Agora, seguindo um procedimento análogo àquele usado no caso do buraco negro [veja a Eq. (IV.43)], encontramos que uma partícula clássica com energia total $\omega < m$ (assim como medida por observadores estáticos assintóticos) estará em $r_p \leq r_p^{\max}$, onde

$$\begin{aligned}
r_p^{\max} &= \sqrt{\frac{R^3}{2M} \left[1 - \left(3\sqrt{F(R)} - 2\frac{\omega}{m} \right)^2 \right]} \Theta \left[\sqrt{F(R)} - \frac{\omega}{m} \right] \\
&+ \frac{2M}{1 - (\omega/m)^2} \Theta \left[\frac{\omega}{m} - \sqrt{F(R)} \right] .
\end{aligned} \tag{IV.56}$$

Como a distância radial própria $\lambda = \lambda(r)$ é, de novo, uma função monótona crescente [veja a Eq. (IV.55)], temos uma vez mais que $\lambda_p \leq \lambda_p^{\max} \equiv \lambda(r_p^{\max})$. Isso é comprovado com $\langle\lambda_d\rangle$ na Fig. IV.8. Vemos que $\langle\lambda_d\rangle < \lambda_p^{\max}$, como era de se esperar no regime de “altas-freqüências, $\omega^{\text{class}} \gg M/R^2$, mostrando que aqui também nossos resultados estão de acordo com a Relatividade Geral.

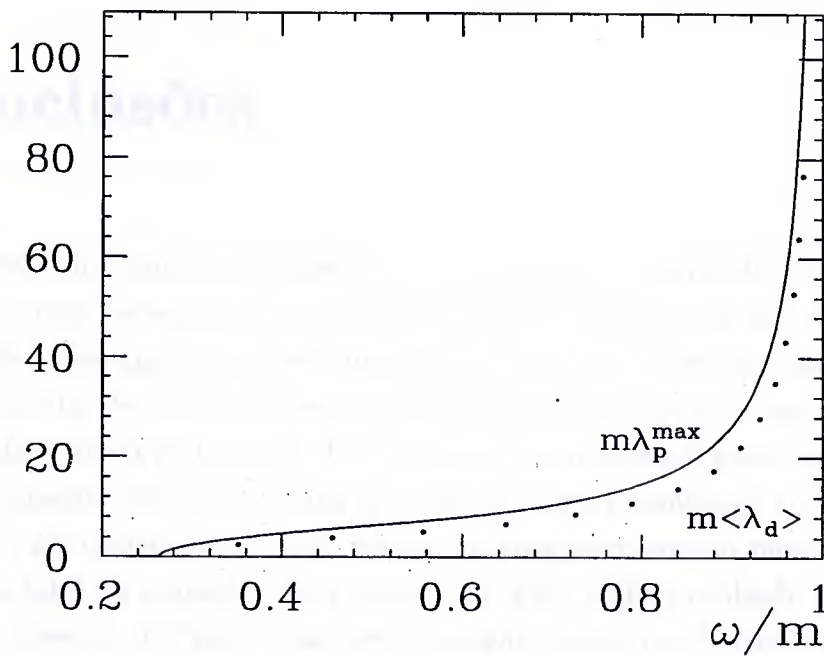


Figure IV.12: $\langle \lambda_d \rangle$ é plotado para várias frequências assumindo $l = 0$, $mM = 2$ e $R/R_c = 1.2$. Note-se que $\langle \lambda_d \rangle < \lambda_p^{\max}$, como era de se esperar, no regime de “altas-frequências” $\omega^{\text{class}}/m \gg (M/R^2)/m$. (Aqui $\omega_{\min}^{\text{class}}/m = 0.264$, $\omega_1/m = 0.351$ e $(M/R^2)/m = 0.07$.)

Capítulo V

Conclusões

Neste trabalho começamos apresentando o cálculo do campo eletromagnético e o seu tensor de energia momento associados a uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski e mostramos que esta, com relação a uma família de observadores inerciais, emite radiação com uma potência dada pela fórmula de Larmor. Já com relação a uma família de observadores uniformemente acelerados, para os quais a carga encontra-se em repouso, o campo eletromagnético e seu tensor de energia-momento mostram uma ausência total de radiação. No contexto da TQC onde a radiação está associada à presença de “partículas” este aparente paradoxo do caráter relativo da radiação é resolvido mostrando-se que a radiação emitida por uma carga uniformemente acelerada com relação a um observador inercial no espaço-tempo de Minkowski, obtida na Eletrodinâmica Quântica usual, pode ser coerentemente interpretada no referencial co-acelerado, desde que levemos em conta o banho térmico de Fulling-Davies-Unruh. A taxa de emissão de fótons (com um dado momento transversal) calculada no referencial inercial é exatamente igual à taxa de absorção mais emissão de fótons de Rindler com energia nula (mas com o mesmo momento transversal) do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh, calculada no referencial de repouso da carga acelerada. Estes fótons de Rindler com energia nula, como o próprio nome sugere, não

carregam energia e portanto não são observáveis por observadores físicos.

De acordo com o princípio de equivalência a física observada por uma família de observadores co-acelerados junto com a carga seria localmente equivalente àquela observada por uma família de observadores estáticos num campo gravitacional. Como este princípio envolve apenas quantidades locais e os estados em Mecânica Quântica são definidos globalmente não há uma razão *a priori* para a existência de um análogo quântico para este princípio. Surpreendentemente usando a TQC em espaços curvos, para o caso duma fonte escalar estática num campo gravitacional (no espaço-tempo de Schwarzschild, assumindo-se o vácuo de Unruh [2] que representa a radiação Hawking [1]) foi obtido que a probabilidade de emissão e absorção da dita carga é igual à probabilidade de emissão e absorção da mesma carga escalar uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski, assumindo-se o vácuo de Minkowski, desde que a carga esteja em ambos os casos com a mesma aceleração própria. Ambas as probabilidades são calculadas com relação a observadores co-acelerados com a carga. Tal igualdade poderia ser o indício de um princípio de equivalência de origem quântica subjacente.

A escolha do vácuo adotado no espaço-tempo de Schwarzschild, é crucial para que esta igualdade seja válida. Por exemplo, se substituirmos o vácuo de Unruh pelo vácuo de Hartle-Hawking [23], esta igualdade deixa de valer.

Com o intuito de averiguar se tal equivalência se mantém no caso em que o buraco negro é provido de carga elétrica, foi calculada, no Capítulo III, a probabilidade de emissão e absorção de uma carga escalar estática no espaço-tempo de Reissner-Norsdstrom [10]. (O caso em que a fonte clássica é substituída por uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Schwarzschild foi analisado na Ref. [9] em cujo caso não foi encontrada equivalência com o resultado obtido para a carga elétrica correspondente, uniformemente aceleradas em Minkowski, assumindo-se o vácuo de Minkowski). Para tanto quantizamos o setor de baixas energias do campo escalar sem massa no espaço-tempo de Reissner-Nordstrom. Embora não foi possível determinar a forma analítica e a normalização dos modos independentes do campo em todo

o espaço-tempo para quaisquer frequências, conseguimos obter, primeiro, a forma assintótica destes modos normalizados nas regiões muito próxima e muito distante do horizonte de eventos para quaisquer frequências e, segundo, a forma analítica dos modos em todo o espaço-tempo no limite de baixas frequências. Estes últimos foram normalizados posteriormente mediante a sua comparação com os primeiros nas regiões pertinentes.

Tendo isto, analisamos então a resposta de uma fonte estática interagindo com a radiação Hawking usando os vácuos de Unruh e de Hartle-Hawking. Fazendo isto constatamos que, fontes estáticas fora de buracos negros interagem unicamente com partículas de energia nula e que esta interação, em geral, (para buracos negros *carregados* [com o vácuo de Unruh]) não se comporta da mesma forma que para fontes uniformemente aceleradas no espaço-tempo de Minkowski (com o vácuo inercial usual) como fora obtido previamente para buracos negros *neutros* [8]. Isto junto ao fato de que esta equivalência tampouco foi encontrada quando o campo escalar é substituído por um campo de Maxwell mostra que a equivalência obtida em [8] não é válida, em geral, para outros espaços-tempos e campos quânticos. Se existe ou não algo mais profundo por trás deste resultado, permanece ainda uma questão em aberto. Verificamos também que tanto perto do horizonte quanto longe dele nossa fonte se comporta como se estivesse no espaço-tempo de Minkowski em repouso num banho térmico cuja temperatura própria está associada aos vácuos de Unruh e Hartle-Hawking, respectivamente. A quantização de baixas energias apresentada aqui pode ser usada para analisar outros processos acontecendo fora de buracos negros.

No capítulo IV mostramos que estes modos de baixas energias, em geral, (quando se trata de espaços curvos) não são exclusivos do campo sem massa. Um campo escalar massivo também possui modos de baixas energias, em particular, energias $\omega < m$. E as partículas correspondentes a estes modos, em princípio, poderiam ser detectadas.

A taxa de detecção destas partículas com energia total $E < mc^2$ foi calculada para os espaços-tempos correspondentes ao “Rindler wedge”, buracos

negros e estrelas relativísticas. As posições médias das partículas foram calculadas e mostrou-se que estão em concordância qualitativa com as predições da Relatividade Geral no regime de “altas-freqüências”. O processo de observação foi levado em conta de forma natural dentro do formalismo por meio do uso de detectores do tipo Unruh-DeWitt. Desta forma, definimos claramente o que queremos dizer por “observar uma partícula”.

Neste caso (campo massivo) não foi possível obter analiticamente os modos em todo o espaço-tempo, nem sequer no limite de baixas freqüências. Analiticamente foi possível obter apenas a forma assintótica dos modos normalizados nas regiões muito próxima e muito distante do horizonte de eventos para quaisquer freqüências. Assim, quantizamos o campo escalar massivo partindo destas formas assintóticas para obter os modos normais numericamente. Para isto foram escritos os programas mostrados em anexo.

Embora seja possível, em princípio, medir partículas satisfazendo a Eq. (IV.1) até mesmo na Terra, estes eventos são tão raros em tais campos gravitacionais fracos que, não devem ser considerados para propósitos práticos. Isto pode ser constatado na análise do potencial de espalhamento [veja a discussão logo abaixo da Eq. (IV.46)].

Entretanto a consideração de partículas massivas com energia total *arbitrariamente baixa* é fundamental para a compreensão de alguns fenômenos que acontecem em espaços-tempos altamente curvos (e.g., buracos negros) e em referenciais acelerados.

Por exemplo, o decaimento fraco de prótons uniformemente acelerados no vácuo de Minkowski que é descrito pelo canal $p \rightarrow n e^+ \nu$ (a nível de árvore) num referencial inercial, pode ser representado pela combinação dos seguintes três canais: $p e^- \rightarrow n \nu$, $p \bar{\nu} \rightarrow n e^+$ e $p e^- \bar{\nu} \rightarrow n$, no referencial co-acelerado com o próton. De acordo com esta descrição, o próton decairia mediante a absorção de um e^- e/ou $\bar{\nu}$ de Rindler provenientes do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh associado ao referencial próprio do próton.

De qualquer modo, para que tanto a descrição do referencial não-inercial quanto a do referencial inercial levem aos mesmos observáveis (e.g. tempo

de vida próprio) é fundamental que o espectro de energia das partículas (massivas) de Rindler e^- 's e e^+ 's seja $\omega \in [0, +\infty)$ (apesar de e^- 's e e^+ 's de Rindler terem massa $m \approx 0.5$ MeV como de costume) [35].

Talvez, um caso ainda mais extremo seja o que diz respeito à importância das partículas com *energia nula* para entender a radiação emitida por cargas uniformemente aceleradas de acordo com observadores co-acelerados. A saber, a emissão de um fóton de Minkowski (usual) com momento transversal \mathbf{k}_\perp por uma carga uniformemente acelerada assim como descrito por observadores inerciais corresponde, de acordo com os observadores co-acelerados, à absorção ou emissão de um fóton de energia nula com o mesmo momento transversal \mathbf{k}_\perp na presença do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh. Por motivos óbvios, na Ref. [5] os fótons considerados não tinham massa mas a mesma conclusão em termos de partículas de energia nula é preservada mesmo quando fótons massivos são considerados.

Apêndice A

Programas usados nos cálculo numéricos

A.1 Cálculo da taxa de detecção Γ_{ω_0} como função da razão ω_0/m para observadores em diferentes pontos em Reissner-Nordstrom

```
(*****)
(* - Para um campo escalar com massa "m" fora de um buraco negro com *)
(* massa "M", e carga "Q" este programa calcula numericamente a taxa de *)
(* deteccao "Gama(w/m)" (quando o detector encontra-se em r = rd) de *)
(* particulas VINDO DO HORIZONTE com energia w < m *)
(* (funciona para w > m tambem) *)
(* * O valor medio de "y" (ymedio) (qando w < m) *)
(* - O ponto "y0" onde o termo "2Mm - 2Mw" e' 20 vezes maior do que o *)
(* restante do potencial e' calculado automaticamente. (m > 0) *)
(* - Em "y0", S[y0] = 1 *)
(*****)

(* Fixacao dos parametros do buraco negro e do campo *)
```

```

M = 2;

m = 1;

(* Q = 0; *)

Q = 0.9*M;

(* Valor de "rd/r+" que sera considerado (rd: pocissao do detector) *)
(* (e r+ horizonte do buraco negro) *)

ydSobreymais = 2;

(* O conjunto de parametros ("M*m", "rd/r+", Q) que serao conciderados sao *)
(* salvos no arquivo : gamaSobremVSw0Sobrem.dat *)

"*****" >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

"yd/y+ =" ydSobreymais >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

"Q = " Q >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

"***** Mm = " M*m >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

"*****" >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

Print["*****",
Subscript["y", "d"],"/",Subscript["y", "+"], "=", ydSobreymais,
"*****"];

QQ = (Q/(2*M))^2;

(* definicao de f(r) e f'(r) *)

```

```

f = 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

ff[y_] := 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

dfy = 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

dffy[y_] := 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

(* Calculo do horizonte da estrela em termos de "y = r/2M" *)

ymais = 1/2 + Sqrt[(1/4) - QQ];

ymenos = 1/2 - Sqrt[(1/4) - QQ];

yd = ydSobreymais*ymais;

(* Inicio do "loop" para calcular Gama_w(rd) para cada energia omega0 *)

Do[

omega0sobrem = i;

omegaSobrem = omega0sobrem*Sqrt[ff[yd]];

pp = (2*M*m)^2; (* pp = (2*M*m)^2 *)

qq = omegaSobrem^2 * pp; (* qq = (2*M*w)^2 *)

(* Definicao das coordenadas de tartaruga *)

x = y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

xx[y_] := y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

(* Definicao do potencial de espalhamento *)

VS = f*(((dfy)/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

```

```

VSS[y_] := ff[y]*(((dfy[y])/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

(* Fixacao do momento angular do modo do campo a ser considerado *)

l = 0;

(* Print["PROBABILIDADE DE DETETAR PARTICULAS VINDO DO HORIZONTE
ENTRE y E y+dy (dP/dy)"]; *)

Print["Carga do Buraco Q = ", Q];

Print["Massa do Buraco M = ", M];

Print["Massa do Campo m = ", m];

Print[" $\omega_0/m$  = ", i];

Print["Energia da partícula no infinito:  $w$  = ", Sqrt[(2*M)^(-2)*qq]];

(***** CALCULO DO VALOR INICIAL NO INFINITO *****)

porcento = NSolve[VSS[y1] == pp - 0.05*(Abs[pp - qq]), y1];

listadevalores1 = y1 /. porcento;

bomsvalores = Cases[listadevalores1, y1_ /; Re[y1] > 0 && Re[y1] > ymais &&
Im[y1] == 0];

y0 = Max[bomsvalores];

Print["y0 = ", y0];

(***** CALCULO VALOR FINAL PERTO DO HORIZONTE *****)

porcento2 = NSolve[VSS[y2] == 0.0001*(qq), y2];

```



```

listadevalores2 = y2 /. porcento2;

bomsvalores2 = Cases[listadevalores2, y2_ /; Re[y2] > 0 && Re[y2] > ymais &&
Im[y2] == 0 ];

yf = Min[bomsvalores2];

Print["yf = ", bomsvalores2];

(***** CALCULO DO MODO *****)

(* fixacao dos valores iniciais no centro da estrela *)

Sy0 = 1;

DSy0 = (1/ff[y0])*(I * (qq - pp)^(1/2));

(* calculo da solucao *)

PSI = NDSolve[{- (f^2)*S''[y] - f*dfy*S'[y] + VS*S[y] - qq * S[y] == 0,
S'[y0] == DSy0, S[y0] == Sy0}, S, {y, y0, yf}, MaxSteps -> 5000 ];

(* Normalizacao da solucao *)

constQuadrada[y_] := (1/4)*((((Abs[(S[y] /. PSI)[[1]])]^2)[[1]]) +
(((ff[y]^2 / qq) * ((Abs[(S'[y] /. PSI)[[1]])]^2)));

mPsiNormQuadrado[y_] := pp*((S[y] /. PSI)[[1]]^2/(4*qq*constQuadrada[yf]));

(* Calculo da taxa de deteccao (Gamma) *)

gamaSobrem[y_] := 2*Sqrt[qq/pp] *Sqrt[ff[y]]* 1/(pp*y^2)*mPsiNormQuadrado[y];

(***** GRAFICOS *****)

```

```
Plot[ {(2*M)^(-2)*VS, (2*M)^(-2)*pp, (2*M)^(-2)*qq}, {y,yf,10},
      AxesLabel ->{"y", "V"}];
```

```
Plot[mPsiNormQuadrado[y], {y, yf,3},
      AxesLabel ->{"y", Superscript["m\[\Psi]", "2"]}];
```

```
Plot[gamaSobrem[y],{y,yf,3},
      AxesLabel ->{"y", "\[CapitalGamma]/m"
                  Superscript[Subscript["c", "0"], "2"]
                  Subscript["n", "0"]}];
```

(***** TESTES DE CONSISTENCIA*****)

```
Print["TESTES DE CONCISTENCIA"]
```

```
Print["Invariancia de  $|\Psi|^2 + 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$  perto do horizonte:"]
```

```
ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], ( (((Abs[(S[Exp[e] + ymais] /. PSI]))^2)[[1]]) +
  (((ff[Exp[e] + ymais])^2 / qq) * ((Abs[(S'[Exp[e] + ymais] /. PSI)))[[1]])^2) ) },
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", " $|\Psi|^2 + 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$ "}];
```

```
Print[" $|\Psi|^2 - 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2 \sim \text{Cos}[4Mwx + \text{Arg}[R]]$  perto do horizonte:"]
```

```
ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], ( (((Abs[(S[Exp[e] + ymais] /. PSI]))^2)[[1]]) -
  (((ff[Exp[e] + ymais])^2 / qq) * ((Abs[(S'[Exp[e] + ymais] /. PSI)))[[1]])^2) ) },
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", " $|\Psi|^2 - 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$ "}];
```

(***** COEFICIENTE DE TRANSMICAO ("T")*****)

```

      
$$\frac{1}{2} \int_{qq}^{xx[b]} dx$$

      T[b_] := -----;
```

```

      ff[b] S'[b]
S[b] + -----
           1
          2
         I qq

*****

T[b_] := (2*Exp[I*Sqrt[qq]*xx[b]])/(((S[b] /. PSI)[[1]]) +
((I*Sqrt[qq])^(-1))*ff[b]*((S'[b] /. PSI)[[1]]))

(***** COEFICIENTE DE REFLECAO ("R") *****)
      2
      ff[b] S'[b] p
T[b] (S[b] - -----)
                1
               2
              I qq
R[b_] := -----
      2 xx[b]
      -----
            1
           2
          I qq
          e

*****

R[b_] := (T[b]*((S[b] /. PSI)[[1]]) -
((I*Sqrt[qq])^(-1))*ff[b]*((S'[b] /. PSI)[[1]]))/
(2*Exp[-I*Sqrt[qq]*xx[b]])

Print["Invariancia do modulo de T longe do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Abs[T[Exp[e] + ymais]]},
{e, Log[yf - ymais], Log[y0 - ymais]},
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"x", "|T|"}];

Print["Invariancia da fase de T longe do horizonte:"];

```

```

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Arg[T[Exp[e] + ymais]]},
  {e, Log[yf - ymais], Log[y0 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "fase de T"}];

Print["Invariancia do modulo de R perto do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Abs[R[Exp[e] + ymais]]},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "|R|"}];

Print["Invariancia da fase de R perto do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Arg[R[Exp[e] + ymais]]},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "fase de R"}];

Print["Relacao entre |T| e |R| :"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais],
  (Abs[R[Exp[e] + ymais]]^2 + (Sqrt[1- pp/qq])*(Abs[T[Exp[e] + ymais]]^2)},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> {0.0, 1.25},
  AxesLabel ->{"x", " $|R|^2 + \text{Sqrt}[1-m^2/w^2] |T|^2$ "}];

(***** Mostrando e salvando os resultados *****)

Print["\[CapitalGamma]"/m", Superscript[Subscript["c", "0"], "2"],
Subscript["n", "0"], "=", gamaSobrem[yd]];

{i,gamaSobrem[yd]} >>> gamaSobremVSw0Sobrem.dat ;

{i,Log[gamaSobrem[yd]]} >>> gamaSobremVSw0SobremLog.dat ;

```

,{i, 0.05, 0.95, 0.05}];

A.2 Cálculo da densidade de probabilidade $dP_\omega/d\rho_d$ para diferentes razões ω/m em Reissner-Nordstrom

```

(*****)
(* - Para um campo escalar com massa "m" fora de um buraco negro com      *)
(* massa "M", e carga "Q" este programa calcula numericamente:            *)
(* * A probabilidade de detectar particulas VINDO DO HORIZONTE com        *)
(* energia w < m entre "y" e "y+dy" . (Funciona para w > m tambem.)      *)
(* * O valor medio de "y" (ymedio) (quando w < m)                        *)
(* - A probabilidade e normalizada com relacao a distancia propria.        *)
(* - O ponto "y0" onde o termo "2Mm - 2Mw" e 20 vezes maior do que o     *)
(* restante do potencial e calculado automaticamente.                    *)
(* - Em "y0", S[y0] = 1                                                    *)
(* - Quando w < m, o par {w/m, ymedio} e adicionado ao arquivo "lista"    *)
(* para futura comparacao com yclassico[w/m]                             *)
(* - "Abs[S[y]]^2" e plotado para testar a consistencia da solucao.       *)
(*****)

(* Fixacao dos parametros do buraco negro e do campo                      *)

M = 1.0;

Q = 0.9*M;

m = 2;

omegaSobrem = 0.6;

pp = (2*M*m)^2;                      (* pp = (2*M*m)^2 *)

qq = (omegaSobrem*Sqrt[pp])^2;        (* qq = (2*M*w)^2 *)

QQ = (Q/(2*M))^2;

(* Definicao de f(r) e sua derivada *)

```



```

f = 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

ff[y_] := 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

dfy = 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

dffy[y_] := 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

(* Calculo do horizonte da estrela em termos de "y = r/2M" *)

ymais = 1/2 + Sqrt[(1/4) - QQ];

ymenos = 1/2 - Sqrt[(1/4) - QQ];

(* Definicao das coordenadas de tartaruga *)

x = y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

xx[y_] := y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

(* Definicao do potencial de espalhamento *)

VS = f*(((dfy)/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

VSS[y_] := ff[y]*(((dffy[y])/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

(* Fixacao do momento angular do modo do campo a ser considerado *)

l = 0;

Print["PROBABILIDADE DE DETETAR PARTICULAS VINDO DO HORIZONTE
ENTRE y E y+dy (dP/dy)"];

Print["Carga do Buraco Q = ", Q];

```

```

Print["Massa do Buraco M = ", M];

Print["Massa do Campo m = ", m];

Print["Energia da partícula w = ", Sqrt[(2*M)^(-2)*qq]];

(***** CALCULO DO VALOR INICIAL NO INFINITO *****)

porcento = NSolve[VSS[y1] == pp - 0.05*(Abs[pp - qq]), y1];

listadevalores1 = y1 /. porcento;

bonsvalores = Cases[listadevalores1, y1_ /; Re[y1] > 0 && Re[y1] > ymais &&
Im[y1] == 0 ];

y0 = Max[bonsvalores];

Print["y0 = ", y0];

(***** CALCULO VALOR FINAL PERTO DO HORIZONTE *****)

porcento2 = NSolve[VSS[y2] == 0.0001*(qq), y2];

listadevalores2 = y2 /. porcento2;

bonsvalores2 = Cases[listadevalores2, y2_ /; Re[y2] > 0 && Re[y2] > ymais &&
Im[y2] == 0 ];

yf = Min[bonsvalores2];

Print["yf = ", yf]

(***** CALCULO DO MODO *****)

Sy0 = 1;

```

```

DSy0 = (1/ff[y0])*(I * (qq - pp)^(1/2));

PSI = NDSolve[{- (f^2)*S''[y]-f*dfy*S'[y]+VS*S[y]- qq * S[y] == 0,
  S'[y0]== DSy0, S[y0]== Sy0}, S , {y, yf, y0}, MaxSteps ->5000];

(* Probabilidade normalizada de detectar a particula entre "y" e "y+dy" *****)

Int = (2*M*m)*N[Integrate[(Abs[(S[y] /. PSI))]^2), {y,yf+ 10^-2,y0}]];

dPdy[y_] := (ff[y])^(1/2)*((Abs[(S[y] /. PSI))]^2)/Int;

(* Calculo do valor medio de "y" *)

ymedio = N[Integrate[y*dPdy[y], {y,yf+ 10^-2,y0}]];

(***** GRAFICOS *****)

Plot[ {(2*M)^(-2)*VS, (2*M)^(-2)*pp, (2*M)^(-2)*qq}, {y,yf,10},
  AxesLabel ->{"y", "V"}];

ParametricPlot[{y/ymais, dPdy[y][[1]]}, {y, yf, 10}, PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{r/Subscript["r", "+"], "m^(-1)*dP/d\["Lambda"]}

Plot[ ((Abs[(S[y] /. PSI))]^2)[[1]], {y, yf, 10}, PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"y", "|Psi|^2"}];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], (2*M)^(-2)*VSS[Exp[e] + ymais]},
  {xx[Exp[e] + ymais], (2*M)^(-2)*pp},
  {xx[Exp[e] + ymais], (2*M)^(-2)*qq},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  AxesLabel ->{"x", "V"}];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], (dPdy[Exp[e] + ymais][[1]] },
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "dP/dy"}];

```

(***** TESTES DE CONSISTENCIA*****)

Print["TESTES DE CONSISTENCIA"];

Print["Invariancia de $|\Psi|^2 + 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$ perto do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], (((Abs[(S[Exp[e] + ymais] /.
PSI]))^2)[[1]]) +
(((ff[Exp[e] + ymais])^2 / qq) * ((Abs[(S'[Exp[e] + ymais] /.
PSI]))[1]))^2) },
{e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
PlotRange -> All,
AxesLabel ->{"x", " $|\Psi|^2 + 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$ "}];

Print[" $|\Psi|^2 - 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2 \sim \cos[4Mwx + \arg[R]]$ perto do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], (((Abs[(S[Exp[e] + ymais] /.
PSI]))^2)[[1]]) -
(((ff[Exp[e] + ymais])^2 / qq) * ((Abs[(S'[Exp[e] + ymais] /.
PSI]))[1]))^2) },
{e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
PlotRange -> All,
AxesLabel ->{"x", " $|\Psi|^2 - 1/(2Mw)^2 |d\Psi/dx|^2$ "}];

(***** COEFICIENTE DE TRANSMICAO ("T")*****)

$$T[b_] := \frac{I_{qq} \, xx[b]}{2e \, \frac{ff[b] \, S'[b]}{S[b] + \frac{1}{2}} I_{qq}};$$

(*****)

T[b_] := (2*Exp[I*Sqrt[qq]*xx[b]])/(((S[b] /. PSI)[[1]]) +

```
((I*Sqrt[qq])^(-1))*ff[b]*((S'[b] /. PSI)[[1]])) ;
```

```
(***** COEFICIENTE DE REFLECAO ("R") *****)
```

$$R[b_] := \frac{T[b] \left(S[b] - \frac{ff[b] S'[b] p}{I \sqrt{qq}} \right)}{2 \sqrt{xx[b]}}$$

```
(*****)
```

```
R[b_] := (T[b]*((S[b] /. PSI)[[1]]) -
((I*Sqrt[qq])^(-1))*ff[b]*((S'[b] /. PSI)[[1]])) /
(2*Exp[-I*Sqrt[qq]*xx[b]]);
```

```
Print["Invariancia do modulo de T longe do horizonte:"];
```

```
ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Abs[T[Exp[e] + ymais]]},
{e, Log[yf - ymais], Log[y0 - ymais]},
PlotRange -> All,
AxesLabel ->{"x", "|T|"}];
```

```
Print["Invariancia da fase de T longe do horizonte:"]; 
```

```
ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Arg[T[Exp[e] + ymais]]},
{e, Log[yf - ymais], Log[y0 - ymais]},
PlotRange -> All,
AxesLabel ->{"x", "fase de T"}];
```

```
Print["Invariancia do modulo de R perto do horizonte:"]; 
```

```

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Abs[R[Exp[e] + ymais]]},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "|R|"}];

Print["Invariancia da fase de R perto do horizonte:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais], Arg[R[Exp[e] + ymais]]},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x", "fase de R"}];

Print["Relacao entre |T| e |R|:"];

ParametricPlot[{xx[Exp[e] + ymais],
  (Abs[R[Exp[e] + ymais]]^2 + (Sqrt[1- pp/qq])*(Abs[T[Exp[e] +
ymais]]^2)},
  {e, Log[yf - ymais], Log[10 - ymais]},
  PlotRange -> {0.0, 1.25},
  AxesLabel ->{"x", " $|R|^2 + \text{Sqrt}[1-m^2/w^2] |T|^2$ "}];

(***** Mostrando e salvando os valores medios *****)

If[qq < pp, Print["ymedio = ", (ymedio)[[1]]], Print["ymedio = infinito " ]];

If[qq < pp, Print["x1medio = ", (xx[ymedio])[[1]]],
  Print["x1medio = infinito"]];

If[qq < pp, {Sqrt[qq/pp], (ymedio)[[1]]} >>> lista ];

```


A.3 Cálculo de $\langle \rho_d \rangle$ em Reissner-Nordstrom

```

(*****)
(* - Para um campo escalar com massa "m" fora de um buraco negro com *)
(* massa "M", e carga "Q" este programa calcula numericamente: *)
(* * A probabilidade de detectar particulas VINDO DO HORIZONTE com *)
(* energias  $0 < w < m$  entre "y" e "y+dy" . (Funciona para  $w > m$  tambem.) *)
(* (A probabilidade e normalizada com relacao a distancia própria). *)
(* * Para cada valor de  $0 < w < m$  calcula-se a o valor medio da distancia *)
(* propria ate o horizonte (LambdaMedio) e o par {w/m, mLambdaMedio} e *)
(* adicionado ao arquivo "lista_de_valores_medios2.dat" *)
(* - 0 ponto "y0" onde o termo "2Mm - 2Mw" e 20 vezes maior do que o *)
(* restante do potencial e calculado automaticamente. *)
(* - Em "y0", S[y0] = 1 *)
(*****)

(* Inicio do "loop" para calcular "mLambdaMedio" para cada energia "w" *)

Do[

(* Fixacao dos parametros do buraco negro e do campo *)

M = 1.0;

Q = 0.9*M;

m = 2;

pp = (2*M*m)^2; (* pp = (2*M*m)^2 *)

qq = (i*(2*M*m))^2; (* qq = (2*M*w)^2 *)

QQ = (Q/(2*M))^2;

(* Definicao de f(r) e sua derivada *)

f = 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

```

```

ff[y_] := 1 - 1/y + QQ/(y^2) ;

dfy = 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

dffy[y_] := 1/(y^2) - 2*QQ/(y^3) ;

(* Calculo do horizonte da estrela em termos de "y = r/2M" *)

ymais = 1/2 + Sqrt[(1/4) - QQ];

ymenos = 1/2 - Sqrt[(1/4) - QQ];

(* Definicao da distancia propria ate o horizonte *)

mDistanciaPropria = (2*M*m)*
  (Sqrt[(y - ymais)*(y - ymenos)] +
   (ymais + ymenos)*Log[Sqrt[y - ymais] + Sqrt[y - ymenos]] -
   (ymais + ymenos)*Log[Sqrt[ymais - ymenos]]);

(* Definicao das coordenadas de tartaruga *)

x = y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

xx[y_] := y + (ymais^2*Log[y-ymais] - ymenos^2*Log[y-ymenos])/(ymais - ymenos);

(* Definicao do potencial de espalhamento *)

VS = f*(((dfy)/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

VSS[y_] := ff[y]*(((dffy[y])/y) + ((1*(1+1))/(y^2)) + pp);

(* Fixacao do momento angular do modo do campo a ser considerado *)

l = 0;

```

```

Print["Carga do Buraco Q = ", Q];

Print["Massa do Buraco M = ", M];

Print["Massa do Campo m = ", m];

Print["Energia da partícula w = ", Sqrt[(2*M)^(-2)*qq]];

(***** CALCULO DO VALOR INICIAL NO INFINITO *****)

porcento = NSolve[VSS[y1] == pp - 0.05*(Abs[pp - qq]), y1];

listadevalores1 = y1 /. porcento;

bonsvalores = Cases[listadevalores1, y1_ /; Re[y1] > 0 && Re[y1] > ymais &&
Im[y1] == 0 ];

y0 = Max[bonsvalores];

Print["y0 = ", y0];

(***** CALCULO VALOR FINAL PERTO DO HORIZONTE *****)

porcento2 = NSolve[VSS[y2] == 0.0001*(qq), y2];

listadevalores2 = y2 /. porcento2;

bonsvalores2 = Cases[listadevalores2, y2_ /; Re[y2] > 0 && Re[y2] > ymais &&
Im[y2] == 0 ];

yf = Min[bonsvalores2];

Print["yf = ", yf]

(***** CALCULO DO MODO *****)

```

```

(* fixacao dos valores iniciais no centro da estrela *)

Sy0 = 1;

DSy0 = (1/ff[y0])*(I * (qq - pp)^(1/2));

(* calculo da solucao *)

PSI = NDSolve[{- (f^2)*S'[y]-f*dfy*S'[y]+VS*S[y]- qq * S[y] == 0,
  S'[y0]== DSy0, S[y0]== Sy0}, S, {y, yf, y0}, MaxSteps ->5000];

(* Calculo do valor medio da distancia propria "LambdaMedio" *)

Int = (2*M*m)*N[Integrate[((Abs[(S[y] /. PSI))]^2), {y,yf+ 10^-2,y0} ]];

dPdy[y_] := (ff[y])^(1/2)*((Abs[(S[y] /. PSI))]^2)/Int;

mLambdaMedio = (2*M*m)*N[Integrate[(f)^(-1/2)mDistanciaPropria*dPdy[y],
{y,yf+ 10^-2,y0} ]];

(***** GRAFICOS *****)

ParametricPlot[{y/ymais, dPdy[y][[1]]}, {y, yf, 15}, PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{r/Subscript["r", "+"], "m"^(1)*dP/d[Lambda]};

(***** Mostrando e salvando os resultados *****)

If[qq < pp, Print["mLambdaMedio = ", (mLambdaMedio)[[1]]],
  Print["ymedio = infinito" ] ];

If[qq < pp, Print["x1medio = ", (xx[ymedio])[[1]]],
  Print["x1medio = infinito" ] ;  *)

If[qq < pp, {Sqrt[qq/pp], (mLambdaMedio)[[1]]} >>>

```

```
doutorado/math/articlefigs/lista_de_valores_medios2.dat ] ;
```

```
, {i, 0.025, 0.975, 0.025}]];
```

A.4 Cálculo das auto-freqüências mais baixas $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ na estrela

```
(*****)
(* Este Programa calcula, para um campo escalar massivo (massa "m") no espaco *)
(* tempo duma estrela relativistica (Massa "M" e raio "R"): *)
(* - O modo ligado Psi (S[y]) de energia "w" e momento angular "l" *)
(* - A sua energia correspondente ("w") *)
(* Sendo que: *)
(* - "w" e' o primeiro autovalor logo acima de Sqrt[qqminimo]/2M *)
(* - A precisao de "w" e' de "Sqrt[qqprecision]/2M" *)
(* Assumindo que: *)
(* - "w > Sqrt[qqminimo + deltaqq]/2M" *)
(* - o primeiro autovalor logo acima de "w" e' maior do que *)
(* "Sqrt[(2*M*w)^2 + deltaqq]/2M" *)
(*****)

(* Lista dos valores de "M*m" que serao considerados *)

listadeMm = {2, 1/8};

(* Lista dos valores de "R/Rc" que serao conciderados *)

listadeRsobbreRc = {1.2, 2.0};

(* Numero de niveis a partir do "ground state" que serao calculados *)

numeroDeNiveis = 15;

Print["PROCURA DOS MODOS LIGADOS (E < m) PARA UM CAMPO ESCALAR MASSIVO NO ESPACO
TEMPO DUMA ESTRELA RELATIVISTICA"];

"Lista de autovaloes (qq = (2Mw)^2)" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

(* Inicio dos "Nested Loops" onde para cada valor de "M*m" mudam-se os *)
```



```

(* valores de "R/Rc" e para cada par de valores ("M*m", "R/Rc") muda-se *)
(* o numero do nivel de energia a ser calculado *)

(* Cada conjunto de ("M*m", "R/Rc") e os correspondentes autovalores de *)
(* energia sao salvos no arquivo : lista_de_autovalores_da_estrela.dat *)

Do[

mM = listadeMm[[j]];

Print["Para Mm = ", mM];

"*****" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

"*****" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

"(*)" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

{"Para Mm = ", mM} >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

"*)" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

Do[

rsobreRc = listadeRsobreRc[[i]];

Print["Para R/Rc = ", rsobreRc];

"*****" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

```

```

"(" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

{"Para R/Rc = ", rsobreRc } >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

"*)" >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

rr = rsobreRc*(9/8);

pp = (2*mM)^2;

l = 0;

(* valor inicial no centro da estrela *)
y0 = 0.0001;

(* valor final fora da estrela *)
yf = 40;

(* definicao de f(r) e h(r) dentro da estrela *)
f1 = (1/4*(3*Sqrt[1 - 1/rr] - Sqrt[1 - y^2/rr^3])^2);
h1 = ((1 - y^2/rr^3)^(-1));

(* definicao de f(r) e h(r) fora da estrela *)
f2 = (1 - 1/y);
h2 = (f2^(-1));

(* definicao do potencial de espalhamento dentro da estrela *)

```

```

v1 = (Sqrt[f1/h1]*(D[Sqrt[f1/h1],y])/y + f1*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento fora da estrela *)

v2 = (Sqrt[f2/h2]*(D[Sqrt[f2/h2],y])/y + f2*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento em todo o espaco *)

v = v1*UnitStep[rr - y] + v2*UnitStep[y - rr];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial dentro da estrela *)

ca1 = -(f1/h1);

cb1 = -Sqrt[f1/h1]*D[Sqrt[f1/h1],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial fora da estrela *)

ca2 = -(f2/h2);

cb2 = -Sqrt[f2/h2]*D[Sqrt[f2/h2],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial em todo o espaco *)

ca = ca1*UnitStep[rr - y] + ca2*UnitStep[y - rr];

cb = cb1*UnitStep[rr - y] + cb2*UnitStep[y - rr];

(* Plotagem do potencial de espalhamento e dos coeficientes da eq. diferencial*)

Plot[{v , pp}, {y, y0, yf},
      PlotRange-> All,
      AxesLabel -> {"y", "(2M)^2V"}];

Plot[ca, {y, y0, yf}, PlotRange-> All, AxesLabel->{"y", "ca"}];

Plot[cb , {y, y0, yf}, PlotRange-> All, AxesLabel->{"y", "cb"}];

```

```

(* Calculo do valor minimo do potencial *)

qqminimo = Min[Table[Re[v], {y, y0, yf, ((yf-y0)/5000)}]];

(* Inicio do algoritmo para calcular o k-esimo autovalor de energia para *)
(* cada conjunto de parametros ("M*m", "R/Rc") *)

Do[

(* Definicao do intervalo inicial entre as energias que serao testadas *)

deltaqq = (pp - qqminimo)/200;

(* Definicao da precisao a ser atingida no calculo do autovalor *)

qqprecision = (pp - qqminimo)/10000000;

Print["Nivel numero: ", k];

lastdiverge = 0;

(* fixando a primeira energia a ser testada *)

qq = qqminimo + deltaqq ;

(* "Loop" para encontrar o k-esimo autovalor com a precisao especificada *)

While[ Abs[deltaqq] > qqprecision, (

Print["Testando qq = ", qq];

(* fixacao dos valores iniciais no centro da estrela *)

Sy0 = 0;

DSy0 = 1;

```

```

(*) calculo da solucao *)

PSI = NDSolve[{ca*S''[y] + cb*S'[y] + v*S[y] - qq*S[y] == 0,
  S'[y0]== DSy0, S[y0]== Sy0}, S , {y, y0, yf} , MaxSteps ->10000 ];

Plot[ (S[y] /. PSI)[[1]], {y, y0, 5.0}, PlotRange -> All];

(*Determinando em qual direcao (mais ou menos inf.) diverge a solucao em yf *)

If[(S[yf] /. PSI)[[1]] > 0, (diverge = 1), (diverge = -1) ];

(* Comparando a direcao de divergencia da solucao com a ultima direcao *)
(* Se a direcao e a mesma mantemos o mesmo incremento na energia a ser *)
(* testada. Se a direcao muda entao diminuimos o incremento pela metade *)
(* e mudamos o seu sinal. *)

If[ diverge*lastdiverge < 0, (deltaqq = - 0.5*deltaqq)];

(* alteramos a energia a ser testada *)

qq = qq + deltaqq ;

(* estabelecemos a direcao de divergencia da solucao para ser comparada *)
(* com a direcao a ser obtida no ciclo seguinte. *)

lastdiverge = diverge;

)];

(* Fin do ciclo (quando e atingida a precisao desejada) *)

(* Mostram-se o autovalor e a autofuncao encontrados *)

Print["O autovalor da energia numero ",k," e  $(2Mw)^2 =$ ", (qq - deltaqq)];

Plot[ {v, pp, (qq - deltaqq)}, {y,y0,yf/2},

```

```

        PlotRange -> All,
        AxesLabel ->{"y", " $((2M)^2V, (2M_m)^2, (2M_w)^2)$ "}}];

Plot[ (S[y] /. PSI)[[1]], {y, y0, yf/10},
      PlotRange -> All,
      AxesLabel ->{"y", "Psi"}];

(* 0 autovalor encontrado e salvo no arquivo: *)
(* lista_de_autovalores_da_estrela.dat *)

{qq - deltaqq} >>>
lista_de_autovalores_da_estrela.dat ;

qqminimo = qq - deltaqq ;

, {k,15}];
, {i,2}];
, {j,2}];

```


A.5 Cálculo da taxa de detecção $\Gamma_{\omega_0 00}$ para as auto-freqüências $\omega_0/m < 1$ na estrela

```

(*****)
(* Este Programa calcula, para um campo escalar massivo (massa "m") no espaco *)
(* tempo duma estrela relativistica (Massa "M" e raio "R"): *)
(* A taxa de deteccao "Gama(w/m)" (quando o detector encontra-se em r = rd) *)
(* de particulas descritas pelos diferentes autoestados do campo *)
(* escalar neste espaco tempo *)
(*****)

Print["TAXA DE DETECCAO ([CapitalGamma]) DE PARTICULAS EM DIFERENTES
AUTOESTADOS DO CAMPO ESCALAR NUMA ESTRELA RELATIVISTICA QUANDO O DETECTOR
ESTA EM r = rd"];

(*Valor de "M*m" que sera considerado *)

mM = 2;

(*Valor de "R/Rc" que sera considerado *)

rsobreRc = 1.2;

(*Valor de "rd/R" que sera considerado (rd: pocissao do detector) *)

rdsobreR = 0.99;

(* Lista dos 15 primeiros autovalores de energia para os parametros *)
(* "M*m" e "R/Rc" dados *)

autovalores = {
1.9690558319944491,
3.3254389542610765,
4.942064362643852,
6.711283445408625,
8.40819629160536,

```

```

9.952996750056847,
11.277134156504085,
12.365238169978289,
13.214770016857573,
13.857460900484448,
14.33585526653202,
14.690150806773914,
14.95347334612406,
15.151049485423737,
15.301197762682248
};

```

```

(* Lista dos valores finais de  $y=r/R$  ate onde os correspondentes autoestados *)
(* sao validos *)

```

```

yfs = {
2.3,
2.7,
3.0,
4.0,
5.0,
6.0,
8.0,
9.0,
11.0,
13.0,
17.0,
21.0,
26.0,
30.0,
36.0
};

```

```

(* Inicio do "loop" para calcular Gama_w(rd) para cada autoestado *)

```

```

Do[

```

```

qq = autovalores[[i]];

Print["Para Mm = ", mM];

Print["Para R/Rc = ", rsobreRc];

Print["Para rd/R = ", rdsobreR];

Print["Para o outovalor Mw= ", Sqrt[qq]/2];

rr = rsobreRc*(9/8);

pp = (2*mM)^2;

l = 0;

y0 = 0.0001;

yf = yfs[[i]];

Print["y0 = ", y0];

Print["yf = ", yf];

(* definicao de f(r) e h(r) dentro da estrela *)

f1 = (1/4*(3*Sqrt[1 - 1/rr] - Sqrt[1 - y^2/rr^3])^2);

h1 = ((1 - y^2/rr^3)^(-1));

(* definicao de f(r) e h(r) fora da estrela *)

f2 = (1 - 1/y);

h2 = (f2^(-1));

(* definicao de Sqrt[f(r)] em todo o espaco *)

```

```

sqrtf[e_] := (Sqrt[(f1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
              Sqrt[(f2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao de Sqrt[h(r)] em todo o espaco *)

sqrth[e_] := (Sqrt[(h1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
              Sqrt[(h2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao de Sqrt[h(r)*f(r)] em todo o espaco *)

sqrthf[e_] := (Sqrt[(h1 /. y->e)]*Sqrt[(f1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
              Sqrt[(h2 /. y->e)]*Sqrt[(f2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao de Sqrt[h(r)/f(r)] em todo o espaco *)

sqrthsobref[e_] := ((Sqrt[(h1 /. y->e)]/Sqrt[(f1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
                    (Sqrt[(h2 /. y->e)]/Sqrt[(f2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]));

(* definicao do potencial de espalhamento dentro da estrela *)

v1 = (Sqrt[f1/h1]*(D[Sqrt[f1/h1],y])/y + f1*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento fora da estrela *)

v2 = (Sqrt[f2/h2]*(D[Sqrt[f2/h2],y])/y + f2*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento em todo o espaco *)

v = (v1*UnitStep[rr - y] + v2*UnitStep[y - rr]);

vv[e_] := ((v1 /. y->e)*UnitStep[rr - e] + (v2 /. y->e)*UnitStep[e - rr]);

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial dentro da estrela *)

ca1 = -(f1/h1);

```

```

cb1 = -Sqrt[f1/h1]*D[Sqrt[f1/h1],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial fora da estrela *)

ca2 = -(f2/h2);

cb2 = -Sqrt[f2/h2]*D[Sqrt[f2/h2],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial em todo o espaco *)

ca = (ca1*UnitStep[rr - y] + ca2*UnitStep[y - rr]);

cb = (cb1*UnitStep[rr - y] + cb2*UnitStep[y - rr]);

(* definicao da distancia propria do centro da estrela ate "y" *)

mDistanciaPropria = (2*mM)*((ArcSin[Sqrt[(y^2)/(rr^3)]]*(rr^(3/2)))*
UnitStep[rr - y] + (ArcSin[Sqrt[1/rr]]*(rr^(3/2))
+ (1/2)*Log[(y+y*Sqrt[1-1/y] -1/2)/(rr+rr*Sqrt[1-1/rr] -1/2)]
+ y*Sqrt[1-1/y] - rr*Sqrt[1-1/rr] )*UnitStep[y - rr] );

(*****)

(* fixacao dos valores iniciais no centro da estrela *)

Sy0 = 0;

DSy0 = 1;

(* calculo da solucao *)

PSI = NDSolve[{ca*S'[y] + cb*S'[y] + v*S[y] - qq*S[y] == 0,
S'[y0]== DSy0, S[y0]== Sy0}, S , {y, y0, yf} (* ,MaxSteps ->10000 *)];

(* Normalizacao da solucao *)

```

```

const = (2*qq)/(Pi*pp)*
      NIntegrate[sqrthsobref[y]*((Abs[(S[y] /. PSI)[[1]])]^2), {y,y0, yf}
      , MaxRecursion -> 40 ];

mPsiNormQuadrado[y_] := ((S[y] /. PSI)[[1]])^2/const;

(* Calculo da taxa de deteccao (Gamma)*)

gama[y_] := 1/(2*Pi)*sqrtf[y]*mPsiNormQuadrado[y]/(pp*y^2);

Print[Subscript["\[Omega]", "0"],"/m = ", Sqrt[qq/pp]/sqrtf[rdsobreR*rr]];

Print["Ln\[CapitalGamma]/",Superscript[Subscript["c", "o"],"2"],"n] = ",
Ln[gama[rdsobreR*rr]]];

(* Plotagem dos resultados *)

Plot[ {v, pp, (qq )}, {y,y0,yf},
      PlotRange -> All,
      AxesLabel ->{"y", "((2M)^2V, (2Mm)^2, (2Mw)^2)"}];

Plot[ (S[y] /. PSI)[[1]], {y, y0, yf},
      PlotRange -> All,
      AxesLabel ->{"y", "Psi"}];

ParametricPlot[{y/rr, (mPsiNormQuadrado[y])}, {y, y0,yf },
      PlotRange -> All,
      AxesLabel ->{"r/R", Superscript["|m\[Psi]|","2"]}
      (* ,PlotStyle ->Dashing[{0.05, 0.005, 0.005, 0.005}]*
];

(* Salvando os resultados no arquivo: LNgamaVSw0Sobrem_na_Estrela2.dat *)

{Sqrt[qq/pp]/sqrtf[rdsobreR*rr], Log[(gama[rdsobreR*rr])]}
>>> LNgamaVSw0Sobrem_na_Estrela2.dat ;

```


{i, 15}

A.6 Cálculo da densidade de probabilidade

$(d\mathcal{P}_{\omega 00}/d\lambda_d)/m$ e de $\langle \lambda_d \rangle$ na estrela

```
(*****)
(* Este programa calcula, para um campo escalar massivo (massa "m") no espaco *)
(* tempo duma estrela relativistica (Massa "M" e raio "R"): os valores medios *)
(* da distancia propria (ate o centro da estrela) de particulas descritas *)
(* pelos diferentes autoestados do campo escalar neste espaco tempo *)
(*****)

(*Valor de "M*m" que sera considerado *)

mM = 2;

(*Valor de "R/Rc" que sera considerado *)

rsobreRc = 1.2;

(* Lista dos 15 primeiros autovalores de energia para os parametros *)
(* "M*m" e "R/Rc" dados *)

autovalores = {
1.9690558319944491,
3.3254389542610765,
4.942064362643852,
6.711283445408625,
8.40819629160536,
9.952996750056847,
11.277134156504085,
12.365238169978289,
13.214770016857573,
13.857460900484448,
14.33585526653202,
14.690150806773914,
14.95347334612406,
15.151049485423737,
```

15.301197762682248

};

(* Lista dos valores finais de $y=r/R$ ate onde os correspondentes autoestados *)
(* sao validos *)

yfs = {

2.3,

2.7,

3.0,

4.0,

5.0,

6.0,

8.0,

9.0,

11.0,

13.0,

17.0,

21.0,

26.0,

30.0,

36.0

};

(* Inicio do "loop" para calcular "LambdaMedio" para cada autoestado *)

Do[

qq = autovalores[[i]];

Print["Para Mm = ", mM];

Print["Para R/Rc = ", rsobreRc];

Print["Para o outovalor Mw= ", Sqrt[qq]/2];

rr = rsobreRc*(9/8);

```

pp = (2*mM)^2;

l = 0;

y0 = 0.0001;

yf = yfs[[i]];

(* definicao de f(r) e h(r) dentro da estrela *)

f1 = (1/4*(3*Sqrt[1 - 1/rr] - Sqrt[1 - y^2/rr^3])^2);

h1 = ((1 - y^2/rr^3)^(-1));

(* definicao de f(r) e h(r) fora da estrela *)

f2 = (1 - 1/y);

h2 = (f2^(-1));

(* definicao de Sqrt[f(r)] em todo o espaco *)

sqrtf[e_] := (Sqrt[(f1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
              Sqrt[(f2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao de Sqrt[h(r)] em todo o espaco *)

sqrth[e_] := (Sqrt[(h1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
              Sqrt[(h2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao de Sqrt[h(r)*f(r)] em todo o espaco *)

sqrthf[e_] := (Sqrt[(h1 /. y->e)]*Sqrt[(f1 /. y->e)]*UnitStep[rr - e] +
               Sqrt[(h2 /. y->e)]*Sqrt[(f2 /. y->e)]*UnitStep[e - rr]);

(* definicao do potencial de espalhamento dentro da estrela *)

```

```

v1 = (Sqrt[f1/h1]*(D[Sqrt[f1/h1],y])/y + f1*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento fora da estrela *)

v2 = (Sqrt[f2/h2]*(D[Sqrt[f2/h2],y])/y + f2*(((1*(1+1))/(y^2)) + pp));

(* definicao do potencial de espalhamento em todo o espaco *)

v = (v1*UnitStep[rr - y] + v2*UnitStep[y - rr]);

vv[e_] := ((v1 /. y->e)*UnitStep[rr - e] + (v2 /. y->e)*UnitStep[e - rr]);

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial dentro da estrela *)

ca1 = -(f1/h1);

cb1 = -Sqrt[f1/h1]*D[Sqrt[f1/h1],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial fora da estrela *)

ca2 = -(f2/h2);

cb2 = -Sqrt[f2/h2]*D[Sqrt[f2/h2],y];

(* definicao dos coeficientes da equacao diferencial em todo o espaco *)

ca = (ca1*UnitStep[rr - y] + ca2*UnitStep[y - rr]);

cb = (cb1*UnitStep[rr - y] + cb2*UnitStep[y - rr]);

(* definicao da distancia propria do centro da estrela ate "y" *)

mDistanciaPropria = (2*mM)*((ArcSin[Sqrt[(y^2)/(rr^3)]]*(rr^(3/2)))*
UnitStep[rr - y] + (ArcSin[Sqrt[1/rr]]*(rr^(3/2))
+ (1/2)*Log[(y+y*Sqrt[1-1/y] - 1/2)/(rr+rr*Sqrt[1-1/rr] - 1/2)]
+ y*Sqrt[1-1/y] - rr*Sqrt[1-1/rr] )*UnitStep[y - rr] );

```

```

(* fixacao dos valores iniciais no centro da estrela *)

Sy0 = 0;

DSy0 = 1;

(* calculo da solucao *)

PSI = NDSolve[{ca*S'[y] + cb*S'[y] + v*S[y] - qq*S[y] == 0,
  S'[y0]== DSy0, S[y0]== Sy0}, S , {y, y0, yf} (* ,MaxSteps ->10000 *)];

(* Calculo do valor medio da distancia propria "LambdaMedio" *)

Int = (2*mM)*N[Integrate[sqrthf[y]*((Abs[(S[y] /. PSI)])^2), {y,y0, yf} ]];

dPdy[y_] := sqrthf[y]*((Abs[(S[y] /. PSI)])^2)/Int;

mLambdaMedio = (2*mM)*N[Integrate[sqrth[y]*mDistanciaPropria*dPdy[y],
  {y,y0,yf} ]];

(***** GRAFICOS *****)

Plot[ {v, pp, (qq) }, {y,y0,yf},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"y", " $((2M)^2V, (2Mm)^2, (2Mw)^2)$ "}];

ParametricPlot[{y/rr, dPdy[y][[1]]}, {y, y0,yf }, PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"r/R", " $m^{(-1)}*dP/d\backslash[Lambda]$ "}
  (* ,PlotStyle ->Dashing[{0.05, 0.005, 0.005, 0.005}]*)
];

(***** Mostrando e salvando os resultados *****)

Print["m<",\[Lambda],"> = ", mLambdaMedio];

```



```

{Sqrt[qq/pp], (mLambdaMedio)[[1]]} >>>
doutorado/math/articlefigs/lista_de_valores_medios_na_ESTRELA3.dat ;

(* qqclassico = (mM*(3* Sqrt[1 - (8/(9*rsobreRc))] - 1))^2; *)

,{i, 15}]

```

Referências

- [1] S.W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974); S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [2] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976); B.S. DeWitt, *General Relativity*, eds. S.W. Hawking e W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [3] P.C.W. Davies, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **8**, 609 (1975).
- [4] S.A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- [5] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **45**, R3308 (1992); *ibid* **46**, 3450 (1992).
- [6] H. Ren e E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **49**, 6526 (1994).
- [7] G.E.A. Matsas, *Gen. Relat. Grav.* **26**, 1165 (1994).
- [8] G.E.A. Matsas, D. Sudarsky e A. Higuchi, *Phys. Rev. D* **56** R6071 (1997).
- [9] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Phys. Rev. D* **58**, 084027 (1998).
- [10] J. Castiñeiras e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D* **62**, 064001 (2000).
- [11] J. Castiñeiras, L. C.B. Crispino, G. E.A. Matsas e D.A.T. Vanzella, *Phys.Rev.D* **65** 104019 (2002).
- [12] T. Fulton e F. Rohrlich, *Ann. Phys.* **9**, 499, (1960).
- [13] D.G. Boulware, *Ann. Phys.* **124** 169, (1980).
- [14] M. Born, *Ann. Physik* **30**, 1 (1909).
- [15] W. Pauli, *em* "Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften", Vol. 5, pág. 539, esp. pág. 647 f. Teubner, Leipzig, 1918. Traduzido para o inglês *em* W. Pauli, "Theory of Relativity", pág. 93, Pergamon Press, 1958.

- [16] M. v. Laue, "Relativitätstheorie", 3^a. ed., Vol. 1. Vieweg, Braunschweig, 1919.
- [17] M. Bondi e T. Gold, Proc. Roy. Soc. **A229**, 416 (1955).
- [18] F. Rohrlich, Nuovo Cim. **21**, 811, (1961).
- [19] F. Rohrlich, Annals of Physics, **22**, 169, (1963).
- [20] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, (Second Edition, John Wiley & Sons New York, (1975).
- [21] S. Coleman, Rand Report RM-2820-RR (1961)
- [22] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, Phys. Rev. D **58**, 084027 (1998).
- [23] J.B. Hartle e S.W. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 2188 (1976).
- [24] B. Wang, C. Molina e E. Abdalla, Phys.Rev.D **63**, 084001 (2001).
- [25] P.R. Anderson W.A. Hiscock e D.A. Samuel, Phys. Rev. D **51**, 4337 (1995).
- [26] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, Phys. Rev. D **58**, 104021 (1998).
- [27] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, Class. Quant. Grav. **17**, 19 (2000).
- [28] R.W. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [29] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
- [30] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [31] D.G. Boulware, Phys. Rev. D **11**, 1404 (1975); **12**, 350 (1975).
- [32] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Method for Physicists* (Academic Press, New York, 1995).
- [33] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table on Integrals, Series e Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [34] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics e Cosmology*, (Claredon, Oxford, 1934).
- [35] G. E. A. Matsas e D.A.T. Vanzella, Phys. Rev. D **59**, 094004 (1999). D. A. T. Vanzella e G. E. A. Matsas Phys. Rev. Lett. **87**, 151301 (2001).
- [36] J. L. Friedman, Commun. Math. Phys. **62**, 247 (1978).
- [37] D. A. T. Vanzella e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **61**, 127303 (2000).
- [38] N. J. Giordano, *Computational Physics*, (Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1997).

