

0^{++} 三胶子标胶球与 QCD 求和规则*

陆文韬 刘觉平

(武汉大学物理系 武汉 430072)

1995-08-30 收稿

摘 要

计算了 0^{++} 三胶子标量流的两点函数, 其中计及了直至量纲为 6 的凝聚项的贡献. 在“零宽度共振态加连续谱”的谱函数模型中, 得到了 0^{++} 三胶子标胶球的量子色动力学求和规则, 由此定出了该标胶球的质量.

关键词 量子色动力学, 求和规则, 三胶子标胶球.

1 引 言

量子色动力学(QCD)是描述强相互作用的非阿贝尔规范理论. 该相互作用的传递者——胶子具有色荷, 因而存在由胶子结合而成的束缚态——胶球^[1].

在 QCD 求和规则框架中, 人们已经对 0^{++} 二胶子标胶球进行了大量的研究, 所得到的质量大致分布在 $0.7 \text{ GeV}^{[2]}$ 与 $1.5 \text{ GeV}^{[9]}$ 附近. 但对 0^{++} 三胶子标胶球至今却只在袋模型^[3]内研究过; 作为比较, 在 QCD 求和规则框架内对其进行进一步研究是十分必要的. 本文从 0^{++} 三胶子标量流出发, 计算了该标量流两点函数, 利用 QCD 求和规则, 得到该标胶球的质量; 最后对所得结果进行了讨论.

2 三胶子标胶球的求和规则

由三胶子场所构造的量子数为 $J^{PC}=0^{++}$ 的流取为:

$$j_s = igG_{\nu}^{\mu a} G_{\lambda}^{\nu b} G_{\mu}^{\lambda c} f^{abc}, \quad (1)$$

其中 $G_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + gf^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c$ 是胶子场强张量, 它是 $SU_c(3)$ 规范不变的 Lorentz 标量.

我们感兴趣的是计算由该流所构成的两点函数:

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle T[j_s(x), j_s(0)] \rangle, \quad (2)$$

所考虑的费曼图如图 1 所示.

* 国家自然科学基金资助.

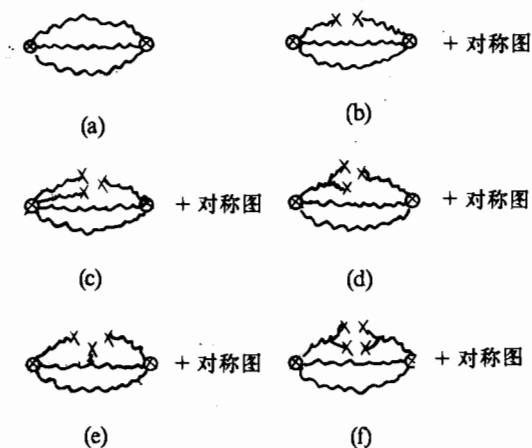


图1 Wilson系数的费曼图

胶子线位置不同的诸对称图仅示出其中一种。

按照标准的算符乘积展开方法, 得到两点函数 $\Pi(q^2)$ 的表达式为:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{192} \left[\frac{33\alpha_s}{140\pi^3} (q^2)^4 - 9 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle (q^2)^2 + \frac{121}{3\pi^2} \langle g^3 f G^3 \rangle (q^2) + \frac{16}{\pi^2} \langle g^4 j^2 \rangle q^2 \right] \ln(-q^2/\mu^2), \quad (3)$$

式中同时考虑了 QCD 微扰和非微扰动力学的贡献. $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle$ 、 $\langle g^3 f G^3 \rangle$ 、 $\langle g^4 j^2 \rangle$ 分别表示

两胶子、三胶子及四夸克凝聚, $j^2 = \left(\sum_{f=u, d, s} \bar{q}_f \gamma^\mu q_f \right)^2$. μ^2 为 QCD 修正的最小减除维数正规化方案中的重整化标度.

值得指出的是, 按照文献[4]中同样的精神, 我们略去了轻夸克质量的贡献, 也就是说对非定域的两胶子凝聚 $\langle G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(0) \rangle$ 作协变展开时, 利用了下述公式^[4]:

$$\frac{x^\rho x^\sigma}{2} \langle G_{\mu\nu}^a (D_\sigma D_\rho G_{\alpha\beta})^a \rangle = \frac{1}{48} x^2 (g_{\mu\sigma} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\sigma}) \langle g f G^3 \rangle$$

$$+ \frac{1}{72} [x^2 (g_{\mu\sigma} g_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} g_{\sigma\mu}) + g_{\mu\sigma} x_\nu x_\beta + g_{\nu\beta} x_\mu x_\sigma - g_{\mu\beta} x_\nu x_\sigma - g_{\nu\sigma} x_\mu x_\beta] \langle g^2 j^2 \rangle,$$

因而略去了凝聚 $\left\langle m_{u,d} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^a}{2} q G^{a,\mu\nu} \right\rangle$ 的贡献.

定义 0^{++} 三胶子标量流 j_s 与最低三胶子束缚态—— 0^{++} 三胶子标胶球 $|G\rangle$ 的耦合常数 f 为:

$$\langle \Omega | j_s | G \rangle = f m^3 R, \quad (4)$$

其中 m , R 分别为 0^{++} 三胶子标胶球的质量与波函数.

由(4)式, 0^{++} 三胶子标量流的两点函数的谱函数可取为:

$$\frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(s) = f^2 m^0 \delta(s - m^2) + \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi_c(s) \theta(s - s_0), \quad s_0 > m^2, \quad (5)$$

这里, 对最低态取零宽度近似, 而 $\frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi_c(s)$ 为连续谱修正, s_0 为连续谱的等效阈值.

按照双关性原理, 连续谱部分可取为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi_c(s) = \frac{1}{192} \left[-\frac{33 \cdot 4!}{140\pi^3} \alpha_s s^4 + 18 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle s^2 \right. \\ \left. - \frac{121}{3\pi^2} \langle g^3 f G^3 \rangle s - \frac{16}{\pi^2} \langle g^4 j^2 \rangle s \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

谱函数 $\Pi(q^2)$ 满足下述色散关系^[5]:

$$\Pi(q^2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (q^2)^k + \frac{(q^2)^n}{\pi} \int \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s^n(s - q^2)} ds, \quad (7)$$

其中 a_k 为一系列未知的常数, 它们可以通过选择对 $\Pi(q^2)$ 一定阶数的导数或用 Borel 变换而消除. 为了得到适合我们所讨论的最低共振态问题的求和规则, 突出最低态的贡献, 有效地压低激发态的贡献, 我们对谱函数进行 Borel 变换^[6]. 经 Borel 变换后得

$$\begin{aligned} B_M \Pi(q^2) = \frac{1}{192} \left[-\frac{33 \cdot 4!}{140\pi^3} \alpha_s (\Lambda, M^2) (M^2)^4 + 18 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle (M^2)^2 \right. \\ \left. - \frac{121}{3\pi^2} \langle g^3 f G^3 \rangle (M^2) - \frac{16}{\pi^2} \langle g^4 j^2 \rangle M^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

而色散关系变为

$$\hat{B}_M \Pi(q^2) = \frac{1}{M^2} \int_0^\infty ds e^{-s/M^2} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi(s), \quad (9)$$

上式中消除了式(7)中的未知常数. 根据(5)、(6)及(9)式, 得到 0^{++} 三胶子标胶球的求和规则为:

$$L(M^2) \doteq R(M^2), \quad (10)$$

其中:

$$L(M^2) \equiv f^2 m^0 e^{-m^2/M^2} / M^2,$$

$$\begin{aligned} R(M^2) \equiv \frac{1}{192} \left\{ -\frac{33 \cdot 4!}{140\pi^3} \alpha_s (\Lambda, M^2) (M^2)^4 \left[1 - e^{-s_0/M^2} \sum_{i=0}^4 \frac{1}{i!} \left(\frac{s_0}{M^2} \right)^i \right] \right. \\ \left. + 18 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle (M^2)^2 \left[1 - e^{-s_0/M^2} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \left(\frac{s_0}{M^2} \right)^i \right] \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{121}{3\pi^2} \langle g^3 f G^3 \rangle M^2 \left[1 - e^{-s_0/M^2} \sum_{i=0}^1 \frac{1}{i!} \left(\frac{s_0}{M^2} \right)^i \right] \\ - \frac{16}{\pi^2} \langle g^4 j^2 \rangle M^2 \left[1 - e^{-s_0/M^2} \sum_{i=0}^1 \frac{1}{i!} \left(\frac{s_0}{M^2} \right)^i \right] \Bigg\}.$$

由上式易知, 0^{++} 三胶子标胶球的质量还满足下述求和规则:

$$m^2 = F(M^2), \quad (11)$$

$$\text{其中 } F(M^2) \equiv \frac{M^2}{R(M^2)} \frac{d}{dM^2} M^2 R(M^2).$$

3 数值计算

对于求和关系中出现的跑动耦合常数 $\alpha_s(\Lambda, M^2)$, 在单圈近似下由下式给出^[7]:

$$\alpha_s(\Lambda, M^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(M^2/\Lambda^2)}, \quad (12)$$

在我们所考虑的低能区, 只有 u, d, s 夸克对 α_s 有贡献, 因此取

$$n_f = 3. \quad (13)$$

胶子的真空凝聚值及 QCD 标度参量 Λ 取为^[6]:

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \approx 0.012 \text{GeV}^4, \\ \langle g^3 f G^3 \rangle \approx 0.045 \text{GeV}^6, \\ \langle g^4 j^2 \rangle \approx -0.065 \text{GeV}^6, \\ \Lambda = 150 \text{MeV}. \quad (14)$$

定义参量 δ_1 和 δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{|L(M^2) - R(M^2)|}{|L(M^2) + R(M^2)|}, \quad (15a)$$

$$\delta_2 = \frac{|m^2 - F(M^2)|}{|m^2 + F(M^2)|}, \quad (15b)$$

给定 δ_1 与 δ_2 的上限, 可以得到求和规则(10)与(11)近似满足的 M^2 值的范围(即求和规则窗口), 结果如表1和表2所示.

从表1和表2可以看出, 考虑三胶子及四夸克凝聚的贡献后求和规则窗口得到了明显的改善, 不仅如此, 还可以由求和规则本身确定连续谱阈值.

表1中不同的 s_0 所对应的求和规则窗口几乎一样宽, 因而导致 s_0 值的选取存在不确定性. 但对表2, 当 s_0 取为 1.4—1.6 GeV 时求和规则窗口最宽. 由于高量纲凝聚的贡献主要在低能端起作用, 因此预期计及该修正后, 求和规则的低能端性状应得到改善. 然而当 $\sqrt{s_0} = 1.4 \text{GeV}$ 时, 求和规则的低能端在加入高量纲凝聚的贡献后反而变差, 其原因在于此时所得到的质量 $m = 1.32 \text{GeV}$, 与 $\sqrt{s_0}$ 太接近. 这意味着 0^{++} 三胶子标胶

表 1 0^{++} 三胶子标胶球求和规则窗口(未计及三胶子及四夸克凝聚的贡献)

s_0	$\delta_1 \leq 0.01$		$\delta_2 \leq 0.02$	
	$M_{\min}^2$	$M_{\max}^2$	$M_{\min}^2$	$M_{\max}^2$
1.4	0.90	3.99	1.04	2.31
1.6	1.04	4.20	1.32	2.66
1.8	1.39	4.90	1.67	3.24
2.0	1.81	6.02	2.17	3.92
2.2	2.34	6.59	2.73	4.48

表 2 0^{++} 三胶子标胶球求和规则窗口(计及三胶子及四夸克凝聚的贡献)

s_0	$\delta_1 \leq 0.01$		$\delta_2 \leq 0.02$	
	$M_{\min}^2$	$M_{\max}^2$	$M_{\min}^2$	$M_{\max}^2$
1.4	1.10	43.4	1.27	9.96
1.6	0.68	9.12	0.72	5.32
1.8	1.39	8.48	1.60	5.04
2.0	1.88	7.36	2.10	4.83
2.2	2.31	7.57	2.80	5.32

球很容易衰变至连续谱, 因而零宽度近似是不适用的. 确切地说, 假定最低共振态具有一定的宽度 Γ , 则 $\Gamma \ll m$, 且当

$$\sqrt{s_0} - m \gg \Gamma$$

时, 该共振态才是比较稳定的, 因而上式可作为零宽度共振态近似是否成立的一个判据条件. 如果取 $\Gamma \sim m \times 0.1 \approx 1.4 \times 0.1 \text{ GeV} = 0.14 \text{ GeV}$, 则 $\sqrt{s_0} = 1.4 \text{ GeV}$ 时, 有 $\sqrt{s_0} - m < \Gamma$, 故不满足上述判据. 而 $\sqrt{s_0} = 1.6 \text{ GeV}$ 时, 上述判据是满足的, 且计及高阶修正后不仅高能端得到了明显改善, 低能端亦如此. 这样便挑出了最佳的 s_0 值. 于是有:

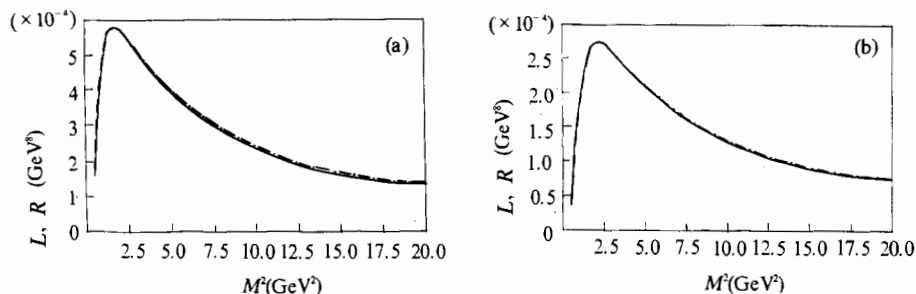


图 2 求和规则(10)式对应的曲线

(a) 不考虑三胶子及四夸克凝聚; (b) 考虑三胶子及四夸克凝聚.

实线为 $L(M^2)$, 点划线为 $R(M^2)$.

$$\sqrt{s_0} = 1.6\text{GeV}, m = 1.45\text{GeV}, f = 0.00619. \quad (16)$$

作曲线 $L(M^2)$ 与 $R(M^2)$, 见图 2. 从图中可以看出, 在极值点 $M^2 = m^2$ 附近, 两曲线符合得很好.

作曲线 $\sqrt{F(M^2)}$, 见图 3, 从图中可以看出, $\sqrt{F(M^2)}$ 有一段平坦部分, 近似与 M^2 无关, 并与由求和规则(10)式决定的 m^2 符合得较好.

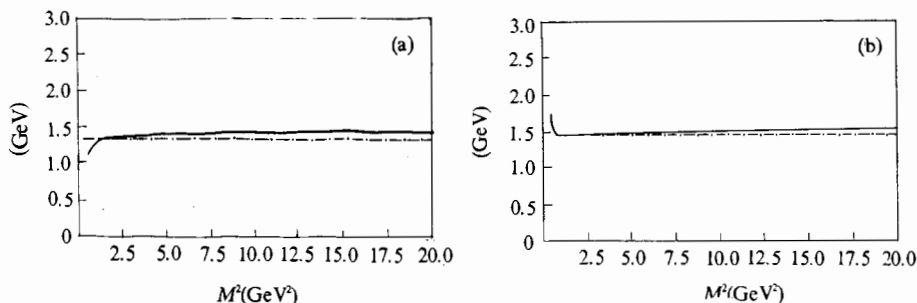


图3 求和规则(11)式对应的曲线

(a) 不考虑三胶子及四夸克凝聚; (b) 考虑三胶子及四夸克凝聚.

实曲线为 $\sqrt{F(M^2)}$, 点划直线为 m .

4 结果与讨论

本文得到的结果是:

(1) 在 QCD 求和规则方法中, 得到 0^{++} 三胶子标胶球的质量为 1.45GeV , 比 0^{++} 两胶子标胶球的质量^[8]:

$$m(0^{++}) = 740 \pm 90\text{MeV} \text{ (格点规范)}$$

$$m(0^{++}) = 1100 - 1200\text{MeV} \text{ (势模型)}$$

要大, 这正是理论所预期的. 然而, 最近格点规范对两胶子标胶球的质量的研究结果^[9]是:

$$m(0^{++}) = 1550 \pm 50\text{GeV},$$

与我们得到的三胶子标胶球的质量相接近, 这是我们现在尚不能理解的. 或许, 这是由于文献[9]在 Quenched QCD 中工作, 因而略去了费米子动力学贡献的结果.

(2) 若只考虑两胶子凝聚, 我们得到的三胶子标胶球的质量标度与考虑高量纲凝聚修正后的值比较接近, 然而此时连续谱等效阈值的选取却具有某种任意性. 当考虑高量纲修正后, s_0 可以以确定的方式定出, 因而减少了 QCD 求和规则中的输入参数.

(3) 考虑高量纲修正后, 使求和规则适用的窗口变大, 即求和规则(10)和(11)所对应的曲线的符合程度得到了提高.

最后, 我们指出, 本文所得到的三胶子标胶球的质量与袋模型给出的结果碰巧一致 (本文计算完成后, 才发现文献[3]).

参 考 文 献

- [1] D. Robson, *Nucl. Phys.*, **B130**(1977) 329.
- [2] C. A. Domingwz, N. Paver, *Z Phys. C: Particle and Fields.*, 31 (1986) 591; Liu Jueping, Liu Dunhuan, *J. Phys G: Nucl. Part. Phys.*, 19(1993): 373.
- [3] J. F. Donoghue *et al.*, *Phys. Lett.*, **B91**(1981) 416.
- [4] S. N. Nikolaev, A. V. Radyushkin, *Nucl. Phys.*, **B213** (1983) 285
- [5] L. J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, *Phys. Rept.*, 127(1985)1.
- [6] M. A. Shifman, A. I. Vainstein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.*, **B147** (1979)385.
- [7] F. Habon, A. D. Martin, *Quarks & Leptons*, 1984, John Wiley & Sons, p171.
- [8] K. Ishikawa, *et al.*, *Z Phys.*, **C21** (1983)167; J. M. Cornwall, A. Soni, *Phys. Lett.*, **B120** (1983) 431.
- [9] G. S. Bali, K. Schilling *et al.*, *Phys. Lett.*, **B309** (1993) 378.

QCD Sum Rules for the 0^{++} Three—Gluon Scalar Glueball

Lu Wentao Liu Jueping

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072)

Received 30 August 1995

Abstract

The two—point function of the 0^{++} three—gluon scalar current is calculated by including not only the perturbative contribution but also the non—perturbative contributions of condensates of dimension up to six. The QCD sum rules for the 0^{++} three—gluon scalar glueball are deduced in the “zero—width resonance plus continuum” model. The mass of this glueball is determined to be 1.45GeV approximately.

Key words quantum chromodynamics, sum rules, three—gluon scalar glueball.