

Title	Construction of general symplectic field theory( Abstract_要旨 )
Author(s)	Ishikawa, Suguru
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	2019-03-25
URL	<a href="https://doi.org/10.14989/doctor.k21537">https://doi.org/10.14989/doctor.k21537</a>
Right	学位規則第9条第2項により要約公開
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	none

( 続紙 1 )

京都大学	博 士 ( 理 学 )	氏名	石川 阜
論文題目	Construction of general symplectic field theory (一般の symplectic field theory の構成)		

(論文内容の要旨)

本論文は、接触多様体、および接触多様体間のシンプレクティック同境に付随した symplectic field theory (以下 SFT と略す) という代数構造の構成に関するものである。閉シンプレクティック多様体内の(擬)正則曲線やその変種を用いた Gromov-Witten 理論、Floer 理論は、1990年代に構成され、多くの研究がある。閉シンプレクティック多様体をその接触型超曲面の近傍で引きのばして分解した時の正則曲線の振る舞いを調べることで接触型超曲面の周期的 Reeb 軌道を捉えるメカニズムが知られている。また、正則曲線の理論を用いてあるクラスの 3 次元接触多様体の周期的 Reeb 軌道の存在を示した Hofer の研究がある。これらの研究を背景に、Eliashberg-Hofer-Givental は接触多様体の SFT の代数的枠組みを考察した (2000)。しかし、SFT を(然るべきエネルギー有限の)正則曲線のモデュライを用いて構成することはこれまで出来ていなかった。正則曲線の定義域の種数が 0 である場合に限った理論に、接触ホモロジーがあるが、それさえもここ数年の Pardon, Bao-Honda の研究までは構成されていなかった。本論文の主結果は、20年程の間懸案であった一般的な SFT の構成である。以下、構成の中で特筆に値することをいくつか述べる。

接触構造の法束が向き付け可能な接触多様体  $M$  に対し、そのシンプレクティック化と呼ばれる  $M$  より 1 次元高いシンプレクティック多様体がある。それは多様体としては、 $M \times \mathbb{R}$  と微分同相になる。閉シンプレクティック多様体の中の正則曲線の退化は、定義域にノードを許した安定写像として定式化される。SFT の場合には、 $M \times \mathbb{R}$  がいくつかの  $M \times \mathbb{R}$  に分裂する場合も含める必要があり、定義域の退化と  $M \times \mathbb{R}$  の分裂とを同時に考察しなければならない。これは閉シンプレクティック多様体の Gromov-Witten 理論では現れない困難である。石川氏は、この状況に適切な変形のパラメータ空間を導入し、この困難を克服した。この議論は既存の研究には全くなく新しい。

閉シンプレクティック多様体の Gromov-Witten 理論では、モデュライ空間の横断正則性の問題を扱うために、仮想的基本類の理論が用いられた。深谷-小野の倉西構造と多価摂動の理論はその一つの方法である。それは、Lagrange 部分多様体の Floer 理論の一般論を展開する際に、深谷-Oh-太田-小野によりモデュライ空間の倉西構造のシステムから代数構造を構成する理論に発展した。石川氏は、基本的には倉西構造の理論を用いて SFT の構成をしているが、プレ倉西構造やグループ化された多価摂動という枠組みや essential submersion という概念を導入するなど様々な工夫を加えている。また、倉西チャートの座標変換の滑らかさについても、上の4人のものとは異なる証明を与えている。

本論文には、周期的 Reeb 軌道の空間が、Bott-Morse 的な場合の SFT の構成も含まれている。そのような具体例は Brieskorn 型特異点のリンクなどで現れ、接触ホモロジーの計算に応用されている。これまででは、接触ホモロジーの定義が確立されていなかったが、石川氏の研究により、計算結果の基盤も与えられることになる。

(論文審査の結果の要旨)

接触多様体の SFT の構成に現れる新たな困難、特に接触多様体のシンプレクティック化の中の(エネルギー有限)正則曲線のモデュライのコンパクト化をするためには、正則写像の定義域の退化とシンプレクティック化がいくつかのコピーに分裂する現象を同時に扱う枠組みを作らないとならないことは公開講演でも強調されていた。閉シンプレクティック多様体の場合と何が異なるのか、なぜそれが必要になるのかについての説明も的確なものであった。

モデュライ空間の横断正則性の問題を克服するために、倉西構造の理論が状況に合わせて使いやすい形で展開されている。このことは、石川氏が倉西構造の理論に基づく仮想的基本類・基本鎖の理論に深い理解をもち、この理論の進展にも寄与していることを示している。

石川氏は正則曲線の張り合わせの議論の最初のステップである近似解の構成も流布しているものとは異なる方法で行なっており、それが倉西チャートの座標変換の滑らかさの別証明の計算で活かされている。倉西チャートの座標変換の滑らかさの問題は、専門家の間でも理解している人は多くないのが現状であり、その意味でも石川氏の議論には意義がある。

周期的 Reeb 軌道の空間が Bott-Morse 型の場合の構成では、Morse 型の時と異なり、周期的 Reeb 軌道の空間のチェイン複体を適切に取って、仮想的基本鎖の理論を用いたチェインレベルの SFT の構成をする必要がある。モデュライ空間の向き付けの問題に関わり、適切な局所系係数のチェイン複体が用いられる。また、SFT では input, output がどちらも複数ある場合も扱われるが、Bott-Morse 型の時にそのような代数構造を構成する時にも関連した議論が現れている。このように石川氏の構成は細部まで精密な議論に支えられている。

公開講演後の質疑応答では、相対的 Gromov-Witten 理論との関連を問うものがあった。(正則写像の行き先の空間が分裂する状況を含めて考えないとならないことなど類似した状況はある。法束かその双対束が豊富である滑らかな因子に対する相対的 Gromov-Witten 理論など特別な場合にはこれらは密接に関連するが、一般には直接関係しない。) それについては石川氏はまだ研究していないが、今後の研究対象としての関心を示していた。また、Reeb 流が  $S^1$ -作用を生成している場合の SFT についての質問に対しては、Brieskorn 特異点のリンクの場合などに現れること、SFT の境界作用素について分かることについて的確な返答があった。

本論文は、20年ほど懸案であった SFT の一般的構成を与えたもので、当該分野での重要度は非常に高いと判断された。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成31年1月16日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 即日