LES THÉORIES RELATIVISTES DE LA GRAVITATION

COLLOQUES INTERNATIONAUX
DU
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

XCI

LES THÉORIES RELATIVISTES DE LA GRAVITATION

ROYAUMONT
(21-27 Juin 1959)

ÉDITIONS DU
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, QUAI ANATOLE-FRANCE — PARIS - VII

1962

Actes du Colloque International,

organisé à Royaumont, du 21 au 27 juin 1959,

dans le cadre des Colloques Internationaux du

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE,

par :

M. A. Lichnerowicz, Professeur au Collège de France

et

Mme M. A. Tonnelat, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

LISTE DES
PARTICIPANTS ET ASSISTANTS AU COLLOQUE

MM. Akbar Zadeh, Institut Henri Poincaré, Paris ;
J. L. Anderson, Stevens Institut of Technology, New-Jersey, U.S.A. ;
R. Arnowitt, Syracuse University, U.S.A. ;
Avez, Institut Henri Poincaré, Paris ;
A. Barut, Syracuse University, U.S.A. ;
S. Bazansky, Institut de Physique de Varsovie ;
O. Costa de Beauregard, Institut Poincaré, Paris ;
L. Bel, Institut Henri Poincaré, Paris ;
F. Belinfante, Purdue University, Lafayette, U.S.A. ;
O. Bergmann, R.I.A.S., Baltimore, U.S.A. ;
P. G. Bergmann, Syracuse University, U.S.A. ;
B. Bertottl, Institute for Advanced Study, Princeton, U.S.A. ;
R. Bkouche, Institut Henri Poincaré, Paris ;
Mme Blanchetœn, Paris ;
MM. J. M. Boardman, Syracuse Université, U.S.A. ;
H. Bondi, King's College, Londres ;
W. B. Bonnor, Queen Elizabeth College, Londres ;
M. Bray, Paris ;
M. Brill, University of Princeton, U.S.A. ;
F. Byrne, Office of Naval Research, Washington, U.S.A. ;
J. Callaway, Queen Mary College, Londres ;
C. Cattaneo, Université de Pise, Italie ;
E. Clauser, Institut Polytechnique de Milan, Italie ;
J. Coleman, Université de Toronto, Canada ;
R. Debever, Université de Bruxelles ;
H. Dehnen, Université de Fribourg, Allemagne ;
Demmig, Université de Hambourg, Allemagne ;
F. Deser, Brandeis University, Waltham, Massachussetts, U.S.A. ;
B. De Witt, University of North Carolina, Chapel-Hll, U.S.A. ;
P. A. M. Dirac, Saint John's College, Cambridge, Grande-Bretagne ;
L. Domergue, Paris ;
Ph. Droz-Vincent, Institut Henri Poincaré, Paris ;
J. Ehlers, Université de Hambourg, Allemagne ;
Mlle C. Fabricius, Université de Fribourg, Allemagne ;
MM. D. Finkelstein, Stevens Institute N. J., U.S.A. ;
J. G. Fletcher, Palmer Physical Laboratory, Princeton, U.S.A. ;

V. Fock, Université de Leningrad, U.R.S.S. ;

Mme Y. Fourès-Bruhat, Institut Henri Poincaré, Paris ;

J. Geheniau, Université de Bruxelles ;

P. Goercke, Institut de Physique de Stuttgart, Allemagne ;

I. Goldberg, Brookhaven National Laboratory, Upton, N. Y., U.S.A.

J. N. Goldberg, Aeron. Research Laboratory, Wright-Patterson, Ohio, U.S.A. ;

Grosjean, Université de Tunis ;

A. L. Harvey, Polytechn. Institute, Brooklyn, U.S.A. ;

P. Havas, University Leihigh, U.S.A. ;

Mme F. Hennequin, Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand ;

MM. P. Higgs, University College, Londres ;

V. Hlavaty, Indiana University, U.S.A. ;

B. Hoffmann, King's College, Londres ;

H. Hônl, Université de Fribourg, Allemagne ;

Husain, Institut Henri Poincaré, Paris ;

D. D. Ivanenko, Université de Moscou ;

M. Janet, Université de Paris ;

A. Janis, University of Pittsburg, U.S.A. ;

K. Just, Université de Berlin ;

J. Keith, University of Detroit, U.S.A. ;

S. Kichenassamy, Institut Henri Poincaré, Paris ;

C. W. Kilmister, King's College, Londres ;

A. Komar, Université de Syracuse, N. Y., U.S.A. ;

W. Kundt, Université de Hambourg, Allemagne ;

D. Kursunoglu, Université de Miami, U.S.A. ;

B. Laurent, Vallingby 61, Ormangs, Suède ;

Lenoir, Institut Henri Poincaré, Paris ;

P. Léonard, Institut Henri Poincaré, Paris ;

Lê Thanh Phong, Paris ;

A. Lichnerowicz, Collège de France, Paris ;

G. C. Mc Vittie, University of Illinois, U.S.A. ;

M. Magnusson, Nordita, Copenhague ;

L. Mariot, Faculté des Sciences de Dijon ;

F. Maurer-Tison, Faculté des Sciences de Bordeaux ;

S. Mavridès, Institut Henri Poincaré, Paris ;

Parviz Merat, Institut Henri Poincaré, Paris ;

A. Mercier, Université de Berne, Suisse ;

C. W. Misner, Institut de Théories Physiques de Copenhague ;

J. W. Moffat, R.I.A.S., Baltimore, U.S.A. ;

C. Møller, Institut de Théories Physiques de Copenhague ;

L. Motz, Columbia University, U.S.A. ;

E. Newman, Université de Pittsburgh, U.S.A. :

Nguyen Phong Chau, Institut Henri Poincaré, Paris ;

Oktem Ferit, Institut Henri Poincaré, Paris ;

A. Papapetrou, Université Humboldt, Berlin ;

Mme Pastori, Université de Milan, Italie ;
Pham mau Quan, Faculté des Sciences de Besançon ;
Pham Tan Hoang, Institut Henri Poincaré, Paris ;
R. Penrose, St John's College, Cambridge, Grande Bretagne ;
A. Petrv, Unive rsité de Kazan, U.R.S.S. ;
F. Pirani, King's College, Londres ;
C. Rayner, Institut Henri Poincaré, Paris ;
J. Renaudie, Faculté des Sciences de Rennes ;
I. Robinson, University of North Carolina, U.S.A. ;
L. Rosen, Institute of Technology, Haïfa, Israël ;
R. Sachs, Université de Hambourg, Allemagne ;
F. Schaer, Université de Washington, U.S.A. ;
E. Schatzman, Faculté des Sciences de Paris ;
J. Schell, Fairborn, Ohio, U.S.A. ;
R. Schiller, Stevens Inst. Hoboken, U.S.A. ;
E. Schucking, Univ. de Hambourg, Allemagne ;
D. W. Sciama, King's College, Londres ;
J. M. Souriau, Faculté des Sciences de Marseille ;
J. Stachel, Stevens Institute, Hoboken, N. J., U.S.A. ;
G. Stephenson, Imperial College, Londres ;
Mme A. Surin, Institut Henri Poincaré, Paris ;
MM. S. Synge, Institute of Adcanced Study, Dublin, Eire ;
A. Taub, Univ. of Illinois, Urbana, U.S.A. ;
G. Tauber, Western Reserv. Univ. Cleveland, Ohio, U.S.A. ;
Y. Thiry, Faculté des Sciences de Besançon ;
Mme M. A. Tonnelat, Faculté des Sciences de Paris ;
MM. A. Trautman, Institut de Physique de Varsovie ;
H. Treder, Akad. der Wiss. Berlin,
H. Trumper, Université de Hambourg, Allemagne ;
W. Tulczyjew, Institut de Physique de Varsovie, Pologne ;
R. Vallée, Institut Henri Poincaré, Paris ;
C. Venini, Université de Pavie, Italie ;
G. Vardalakis, Institut Henri Poincaré, Paris ;
J. P. Vigier, Institut Henri Poincaré, Paris ;
J. Weber, Université de Maryland, Maryland, U.S.A. ;
J. Weyssenhoff, Univ. Jagellon, Cracovie, Pologne ;
J. A. Wheeler, Palmer Phys. Lab. Princeton, N. J., U.S.A. ;
L. Witten, R.I.A.S., Baltimore, U.S.A.

PROGRAMME DES TRAVAUX

Lundi 22 juin : Matin. — *Président :* Professeur V. Fock (U.R.S.S.)

Allocution.

C. Møller : « The energy-momentum complex in general relativity and related problems ».

J. N. Goldberg : « Conservation laws and equations of motion ».

C. W. Kilmister : « The expression of field equations in terms of flux from sources ».

Après-midi. — *Président* : J. Wheeler

J. Weyssenhoff : « Modèles relativistes de particules à spin et lignes d'univers isotropes ».

V. Fock : « Quelques remarques sur les équations du mouvement et les conditions pour les coordonnées ».

J. L. Synge : « Tensorial integral conservation laws in general relativity ».

F. A. E. Pirani : « Gauss's theorem and gravitational energy ».

Mardi 23 juin : Matin. — *Président :* V. Hlavaty

A. Lichnerowicz : « Radiations en relativité générale ».

A. Z. Petrov : « Classification invariante des champs de gravitation ».

A. Trautman : « Sur les lois de conservation dans les espaces de Riemann ».

L. Bel : « La radiation gravitationnelle ».

M. Droz-Vincent : « Quantification de la théorie de Jordan-Thiry ».

Après-midi. — *Président* : J. L. Synge (Dublin)

H. Bondi : « On the physical characteristics of gravitational waves ».

V. Fock : « Sur les ondes de gravitation émises par un système de masses en mouvement ».

W. B. Bonnor : « Spherical gravitational waves ».

D. R. Brill : « Time-symmetric gravitational waves ».

W. Kundt : « Note on the symmetries of plane-fronted gravitational waves ».

Mercredi 24 juin : Matin. — *Président* : P. A. M. Dirac

Y. Fourès-Bruhat : « Les fluides chargés en relativité générale ».

Pham Mau Quan : « Le principe de Fermat en relativité générale ».

A. H. Taub : « Small motions of spherically symmetric distribution of matter ».

A. Papapetrou : « Non-existence of periodically varying non-singular gravitational fields ».

Après-midi. — *Président* : Dr Honl

M. A. Tonnelat : « Etude critique de la représentation de la matière dans la théorie asymétrique du champ unifié ».

G. Stephenson : « Generally convariant variational principles ».

J. Géhéniau : « Remarques sur les « pseudo-tenseurs » et les identités satisfaites par un lagrangien ».

B. Hoffmann : « Static, axially symmetric, gravitational fields in general relativity involving mass singularities of both signs ».

B. Bertotti : « The uniform electromagnetic field in the theory of general relativity ».

Jeudi 25 juin. — *Président* : M. Janet

G. C. Mc Vittie : « Cosmology and the interpretation of astronomical data ».

J. Ehlers : « Transformations of static exterior solutions of einsteins gravitational field equations into different solutions by means of conformal mappings ».

Y. Thiry : « Sur les théories pentadimensionnelles ».

J. M. Souriau : « Relativité multidimensionnelle non stationnaire ».

Mlle Fabricius : « Verallgemeinerter Thirring-Effekt zur Prüfung des Mach'schen Prinzips ».

M. O. Costa de Beauregard : « Quelques remarques d'analyse dimensionnelle pouvant intéresser les futures théories unitaires ».

Vendredi 26 juin : Matin. — *Président* : A. Mercier

P. G. Bergmann : « Observables in general relativity ».

C. De Witt : « Grandeurs relatives à plusieurs points tenseurs généralisés ».

B. S. De Witt : « Freinage dû à la radiation d'une particule dans un champ de gravitation ».

F. J. Belinfante : « Work at Purdue University, on the interaction of gravitation and fermions ».

B. Kursunoglu : « Fields, particles and quantum theory ».

J. L. Anderson : « Generation of coordinate conditions and the construction of invariants in covariant theories ».

Après-midi. — *Président* : J. Géhéniau

P. A. M. Dirac : « The energy of the gravitational field ».

S. Deser : « Dynamical structure and definition of energy in general relativity ».

D. Finkelstein et C. W. Misner : « Further results in topological relativity ».

A. Pérès et N. Rosen : « Some investigations of the gravitational field equations ».

F. L. Scarf : « A soluble quantum field theory in curved space ».

R. Penrose : « General relativity in spinor form ».

Samedi 27 juin : Matin. — *Président* : C. Cattaneo

D. Ivanenko : « On the possible transmutations of ordinary matter in gravitation ».

J. Weber : « On the possibility of detection and generation of gravitational waves ».

Allocution de clôture par P. G. Bergmann.

INTRODUCTION

Dans le discours de clôture de P. G. Bergmann, à la fin du volume, on trouvera un essai de classification des contributions au Colloque de Royaumont. Nous nous contenterons donc ici d'une brève mention des principaux sujets abordés :

Pseudo-tenseur d'impulsion-énergie, problème de l'énergie gravitationnelle, lois de conservation, conditions de coordonnées, équations du mouvement : Anderson, Brill, Deser, Dirac, Fock, Géhéniau, Goldberg, Møller, Pirani, Synge, Trautman.

Questions diverses de formalisme : Géhéniau, Kilmister, Penrose, Stephenson, Synge, C. de Witt.

Recherche de solutions des équations : Ehlers, Hoffmann, Taub, Scarf.

Problèmes divers : Y. Bruhat (fluides chargés), Pham Mau Quan (Principe de Fermat), Taub (petits mouvements isentropiques) Weyssenhoff (particules à spin).

Principe de Mach, Cosmologie : M$^{\text{lle}}$ Fabricius, Mc Vittie.

Radiation gravitationnelle non quantifiée : Bel, Bonnor, Brill, Dirac, Fock, Kundt, Lichnerowicz, Papapetrou, Petrov, Pérès-Rosen.

Quantification du champ gravitationnel, observables : Anderson, Belinfante, Bergmann, Deser, Droz-Vincent, Finkelstein, Misner, Ivanenko.

Phénoménologie de la radiation gravitationnelle : Bondi, Ivanenko, Weber, B. de Witt.

Théories unitaires classiques : Y. Thiry, M. A. Tonnelat, Droz-Vincent.

Suggestions pour de futures théories unitaires : Kursunoglu, Souriau, Costa de Beauregard.

*
**

Quelques communications, on le voit, figurent sous plusieurs rubriques. D'autres classifications eussent certes été possibles. Nous espérons que celle-ci, utilisée conjointement avec la table des exposés figurant en tête, permettra au lecteur de s'orienter utilement.

THE ENERGY-MOMENTUM COMPLEX IN GENERAL RELATIVITY AND RELATED PROBLEMS

by Prof. C. MØLLER

Universitetets Institut for Teoretisk Fysik
and Nordita-Nordisk Institut for Teoretisk Atomfysik, Copenhagen (Denmark)

RÉSUMÉ

Le présent rapport est un compte rendu exact de ma communication au colloque de Royaumont en 1959. Il contient une discussion de la question de la localisation dans un champ de gravitation ainsi que du problème de mettre l'existence du quantum d'action de Planck en harmonie avec les principes de la relativité générale. Au sujet de la première question, de récents développements ont conduit à une révision des vues exprimées dans le présent article. Pour ces derniers développements le lecteur est prié de se rapporter à un mémoire dans les *Annals of Physics*, **12** (1961), p. 118-133, et à un autre mémoire à paraître dans les *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*

Within the framework of EINSTEIN's theory of gravitation it is possible to define a large number of algebraic functions of the field variables and their space-time derivatives which satisfy « conservation laws », and the problem arises how to determine which of these functions represent quantities with a physical meaning. The solution of this problem obviously necessitates criteria other than mere conservation, and one of them may always be the requirement that the quantity in question should define a *useful* integral of the motion [1]. However, for the determination of the correct expression for the energy or the energy density of gravitational fields, this utilitarian criterion in unnecessary. Actually, as has been shown in a number of recent papers [2, 3, 4], the said expression follows uniquely from the requirement that the energy density of gravitational fields should have as many properties as possible in common with the energy density of other physical fields. This is an important point, which — after forty years of uncertainty and discussion — is perhaps not yet generally recognized. I shall therefore give a brief survey of the arguments leading to this result.

Our starting point is the requirement that the experimentally well-founded laws of the special theory of relativity must appear as special cases of, or rather as certain approximations to, the more comprehensive laws of the general theory of relativity. In the special theory the conservation laws of energy and momentum, in any system of inertia where the space-time coordinates may be chosen so as to make the components g_{ik} of the metric tensor constant, are described by the equations (1)

$$(\sqrt{-g}\,T_i^k)_{,k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T_i^k) = 0\,. \tag{1}$$

Here T_i^k is the energy-momentum tensor of matter, and for a closed system it follows from (1) that the quantities

$$P_i = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\,T_i^4\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = \{\vec{P}\,, -E/c\} \tag{2}$$

are constants in time which are transformed as covariant components of a 4-vector in linear coordinate transformations. These properties of the energy-momentum vector P_i embody the famous and now experimentally well-founded law of the equivalence of energy and mass, as is easily seen if we first consider the « rest system », in which the total linear momentum is zero, and then perform a Lorentz transformation to an arbitrary other system of inertia. Consequently we must preserve these properties in the general theory of relativity.

According to [2], the total energy is of the form of an integral over the three-dimensional physical space of the system of reference concerned, i.e.

$$E = -\int \sqrt{-g}\,T_4^4\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,. \tag{3}$$

But also if the integration is restricted to a finite region V of space, the integral E has the physically well-defined meaning of the energy content of the region V. This interpretation is only possible because $\sqrt{-g}\,T_4^4$ is transformed as a scalar density in arbitrary, purely spatial transformations, for it must be allowable to introduced, for instance, polar coordinates for the points in our system of reference without a consequent change of the value of the energy E in V. This is another essential property of the energy density in special relativity, which must be preserved in the general theory if there is to be any sense at all in talking of energy density.

For the P_i of (2) to be a 4-vector in linear transformations it is necessary that $\sqrt{-g}\,T_i^k$ behaves like a tensor density (of the weight one) in such transformations. Further it is essential that the left-hand side of (1) is a sum of partial differentials and that the right-hand side is zero. For a non-closed system, i.e. a system interacting with another system, the right-hand side is not zero and P_i accordingly not

(1) Latin indices are running from 1 to 4, Greek indices from 1 to 3 only.

a 4-vector. We have a special case of a non-closed system if we take into account the gravitational field created by the matter. This is seen at once when equation (1) is written in the generally covariant form of the general theory of relativity. Here, we can expect the above-mentioned properties of closed systems to hold only if we consider the *total* system of matter plus gravitational field. From the arguments presented above we must assume that the conservation laws of energy and momentum for this total system can be written in the form

$$\mathrm{T}_{i\ ,k}^{k} = 0\,, \tag{4}$$

where the energy-momentum complex T_i^k is an *affine* tensor density (of the weight one) consisting of a matter part and a gravitational part

$$\mathrm{T}_i^k = \sqrt{-g}(\mathrm{T}_i^k + t_i^k). \tag{5}$$

For a closed system, where we can introduce quasi-Galilean coordinates for which the g_{ik} tend sufficiently rapidly to become constants at spatial infinity, we then conclude from (4) that the quantities :

$$\mathrm{P}_i = \frac{1}{c}\int \mathrm{T}_4^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{6}$$

are constant in time and are transformed as a 4-vector in linear transformations. The latter property, a consequence of the assumption that T_i^k is an affine tensor density, allows us consistently to interpret P_i as the total energy-momentum vector of the closed system. On the other hand, T_i^k obviously cannot be a tensor density with respect to arbitrary space-time transformations, for in that case equation (4) would be covariant only if T_i^k were indentically zero for arbitrary systems, which would deprive the said conservation law of any physical content.

Another peculiar feature of the gravitational field must be mentioned here. Since the matter part in (5) is the very quantity appearing as the source of the gravitational field in Einstein's field equation

$$\mathrm{R}_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k\,\mathrm{R} = -\varkappa\,\mathrm{T}_i^k \tag{7}$$

we can always eliminate T_i^k entirely and express T_i^k as algebraic functions of the g_i^k and their derivatives. Thus, in order to preserve the above-mentioned properties of the energy and the energy density we must require that

1. T_i^k is an affine tensor density depending algebraically on the g_{ik} and their space-time derivatives and satisfying the relation

$$\mathrm{T}_{i\ ,k}^{k} = 0 \tag{8}$$

identically;

2. T_4^4 is a scalar density with respect to the group of purely spatial transformations

$$\overline{x^\iota} = f^\iota(x^\varkappa)\,, \qquad \overline{x^4} = x^4\ ; \tag{9}$$

3. for a closed system at rest in our system of reference, i.e. a system for which at spatial infinities the g_{ik} are of the form of the Schwarzschild solution, we have

$$E = -\int T_4^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = M_0\, c^2\,, \tag{10}$$

where M_0 is the Newtonian mass which at large distances gives the same scalar gravitational potential as the field described by the Schwarzschild solution.

EINSTEIN's well-known expression for the energy-momentum complex, which may be written

$$\Theta_i^k = h_i^{kl}{}_{,l}$$

$$h_i^{kl} = \frac{g_{in}}{2\varkappa\sqrt{-g}}\,[(-g)\,(g^{kn}\,g^{lm} - g^{ln}\,g^{k}]_{,m}\,, \tag{11}$$

satisfies the conditions *1* and *3*, although the validity of equation (10) is restricted to the case where quasi-Galilean space-time coordinates are used. On the other hand, *2* is not satisfied, i.e. θ_4^4 is not a three-scalar density, and thus it is physically meaningless to interpret θ_4^4 as energy density. This is most strikingly demonstrated by the example considered by BAUER [5], [2], according to which, in a system of inertia, a mere transformation from Cartesian space-coordinates to polar coordinates transforms θ_4^4 from an overall zero value in the former system of coordinates to a non-vanishing value in the latter system. This fact led to the conclusion that no physically well-defined meaning could be attached to the localization of the energy in gravitational fields.

However, in reference [2] it was shown that the following simple expression for the energy-momentum complex satisfies the conditions *1-3* :

$$\left.\begin{aligned} T_i^k &= \chi_i^{kl}{}_{,l} \\ \chi_i^{kl} &= \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\,(g_{in,m} - g_{im,n})\,g^{km}\,g^{ln} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

The use of this expression disposes of all the above difficulties. T_4^4 remains zero in a transition to polar coordinates in the case considered by Bauer. For a closed system the total energy $-\int T_4^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ is given correctly whether we use quasi-Cartesian coordinates or not, and the integral over a finite part of space

$$E_V = -\int_V T_4^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{13}$$

is unaffected by a change of the names of the points in our system of reference.

Moreover it can be shown that the expression (12) for T_i^k is uniquely determined by the conditions *1-3*. This was done in reference [3] under the further assumption that T_i^k does not contain the first-order derivatives of the g_{ik} in powers higher than the second. In a paper by

M. Magnusson [6] it is shown that this restriction is superfluous, so that there is only one expression for T_i^k which preserves all the desirable properties of the energy and energy density mentioned in the introduction to this report.

Finally it appears from a series of papers [4], [7] that the expression (12) for T_i^k may also be derived by application of the « method of infinitesimal space-time transformations » to the curvature scalar density $V = \sqrt{-g}\,R$ entering as integrant in the invariant variational principle of the gravitational field equations. In fact, if we consider an arbitrary infinitesimal space-time transformation

$$\overline{x^i} = x^i + \xi^i(x)\,, \tag{14}$$

the transformation property of the curvature scalar density is expressed by the equation

$$\delta V + (V\xi^i)_{,i} = 0 \tag{15}$$

$$-\,\varepsilon^i\, T_i{}^k{}_{,k} = 0 \tag{16}$$

which for constant $\xi^i = \varepsilon^i$ takes the form

with T_i^k given by (12). Thus, also this method leads uniquely (apart from an arbitrary constant factor) to the expression (12). The energy density and the energy current density must therefore be given by the quantities $-T_4^4$ and $-cT_4^\varkappa$, which are transformed, in the transformations (9), as a scalar density and a vector density respectively. They are connected by the conservation law

$$\frac{\partial}{\partial x^4} T_4^4 + \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} T_4^\varkappa = 0 \tag{17}$$

which is the analogue of Poynting's law in electrodynamics.

It should be noted that the energy density $-T_4^4$, or rather the gravitational part $-\sqrt{-g}\,t_4^4$, is not positive definite. This marks an essential difference between gravitational and other physical fields, connected with the fact that gravitational fields can be locally transformed away by introduction of suitable systems of coordinates. In turn, this characteristic of gravitational fields is intimately connected with the non-tensorial character of T_i^k.

For the determination of the general transformation properties as well as the geometrical interpretation of the energy-momentum complex we have employed a method suggested by investigations of Komar's [8]. Consider an arbitrary 4-vector field $a(x)$ with the contravariant component $a^i(x)$. Form the antisymmetrical tensor-field density :

$$\begin{aligned} T^{hl}\{a\} &= \sqrt{-g}\,(a^{l;k} - a^{k;l}) \\ &= \sqrt{-g}\,(a_{n,m} - a_{m,n})\, g^{km} g^{ln} = \sqrt{-g}\,\mathrm{Curl}^{kl}\{a\} \end{aligned} \tag{18}$$

and the vector density :

$$\mathfrak{F}^k\{a\} = \mathfrak{F}^{kl},{}_l = \sqrt{-g}\,\mathrm{Div}^k\Big(\mathrm{Curl}\;\{a\}\Big) \tag{19}$$

$\mathfrak{F}^k\{a\}$ is a non-linear function of the vector field $a(x)$. Now, a definite system of coordinates S with the coordinates (x^i) and the metric tensor $g_{ik}(x)$ may be characterized by four definite vector fields $e_{(i)}(x)$, viz. the fields of basis vectors. At a given point the contravariant components of the vector $e_{(i)}$ in the system S are :

$$(e_{(i)})^l = \delta_i^l \tag{20}$$

and the covariant components :

$$(e_{(i)})_k = g_{km}\,\delta_i^m = g_{ki} = g_{ik} \tag{21}$$

are equal to the components of the metric tensor. Hence, by (12), (21), (18), and (19) we have :

$$\chi_i^{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}(g_{in,m} - g_{im,n})\,g^{km}\,g^{ln} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{F}^{kl}\{e_{(i)}\} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\,\mathrm{Curl}^{\,kl}\{e_{(i)}\} \tag{22}$$

and

$$\mathrm{T}_i^k = \chi_i^{kl}{}_{;\,l} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{F}^k\{e_{(i)}\} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\,\mathrm{Div}^k\left(\mathrm{Curl}\,\{e_{(i)}\}\right). \tag{23}$$

Thus the energy-momentum complex T_i^k is the vector density field function $\mathfrak{F}^k$ corresponding to the vector field $a = e_{(i)}/\varkappa$.

Now consider a transformation from S to S′ with the coordinates x'^i. Here the basis vectors $e_{(i)}$ and $e'_{(i)}$ in S and S′ are connected by the vector relations

$$e'_{(i)} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\,e_{(k)}\,. \tag{24}$$

Therefore, if $\mathfrak{F}^k\{a\}$ were a linear function of the vector field a, satisfying the relations

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}^k\{a+b\} &= \mathfrak{F}^k\{a\} + \mathfrak{F}^k\{b\} \\ \mathfrak{F}^k\{\lambda\,a\} &= \lambda\,\mathfrak{F}^k\{a\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$\lambda = \lambda(x)$ being an arbitrary function of the coordinates (x^i), then T_i^k would be transformed as a tensor density. However, $\mathfrak{F}^k\{a\}$ is a non-linear function of a since the equations (25) hold only for constant λ; therefore T_i^k is a tensor density only with respect to linear transformations in which the coefficients $\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}$ are constants. For more general space-time transformations only the upper index k has tensor character (in contrast to the case of the complex Θ_i^k, where both indices are transformed in a complicated way). The explicit transformation formula was given in reference [4].

In the same paper it was emphasized that not every geodesic system of coordinates deserves the name of a local system of inertia, since t_i^k depends also on second-order derivatives of the metric tensor and therefore will generally not vanish in an arbitrary geodesic system. However, it was shown that if we use Riemann normal coordinates in the surroundings of a given space-time point where there is no matter, both T_i^k

and its first-order derivatives will vanish at that point. This result was generalized by M. Magnusson [6], who was able to show that T_i^k can be transformed away along an arbitrary geodesic line in empty space. Thus, for a planet like the earth, moving in the field of the sun, it is always possible to introduce a geocentric system of coordinates in which any trace of the gravitational field of the sun has disappeared in a « small » region about the centre of the planet.

In recent years, the old question whether a system of accelerated masses is constantly losing energy through emission of gravitational waves has been taken up anew. While some investigators deny the occurrence of energy-carrying gravitational waves, others take it for granted that such waves, analogous to the electromagnetic waves emitted by accelerated, electrically charged matter, exist. Without expressing any definite opinion on this question I should like to point out that all investigations on the emission of gravitational waves have been based on the linear weak-field approximation to the gravitational-field equations, the use of which approximation may seriously distort the picture. Take for instance the case of empty space, where the first-order wave equation in the said approximation procedure is well known to have a plane-wave solution. As shown in reference [3], the second-order approximation then contains terms that increase quadratically with the phase of the first-order wave. Approximations of higher orders contain even higher powers of the phase. Thus, when employing the weak-field approximation for the calculation of the energy radiated by a system of moving masses, one must make sure that the use of the approximation method is justified. Further, since the motion of the sources is determined by the field equations themselves, it is essential to consider at each step of the approximation procedure the influence of the n' th approximation of the field on the motion of the source determining the $(n+1)$ th approximation. Therefore, at the moment, I still regard the question of the existence of energy-carrying gravitational radiation as undecided.

The last problem I shall touch upon is that of the quantization of gravitational fielsd. During the last ten years, this very difficult question has been treated in a large number of important papers whose aim has been to perform the quantization on the lines of the usual quantum mechanics of fields. To my knowledge, however, no one has as yet succeeded in carrying through this programme consistently for the exact non-linear gravitational-field equations. Only on substitution of the linear approximations for the exact equations has it been possible to perform the quantization in a simple way according to the usual rules of quantum mechanics, and in this way we are led to the notion of gravitons on the analogy of photons and mesons in the case of electromagnetic and nuclear fields. However, as already mentioned above, the linear theory is an entirely different theory in which characteristic features of the general theory of relativity are lost.

On the other hand, we cannot resign ourselves to the situation in the classical theory of relativity with the argument that gravitational quantum effects would anyway be unmeasurably small. Somehow we must account for the simultaneous existence of Planck's quantum of action and gravitational fields in our universe. But on account of the characteristic differences between gravitational fields and other fields mentioned above, PLANCK's quantum may very well have to be introduced here in quite a different way. In this connection it may be useful to call to mind the experimental facts of the interplay of gravitational fields and atomic systems, which facts may be stated in short as follows:

a) Individual atoms are acted upon by external gravitational fields so that the energy levels are changed in accordance with Einstein's red-shift formula.

b) The gravitational field created by a large number of atoms forming a macroscopic body is given by Einstein's gravitational-field equations.

These statements represent necessary demands on the theory, but of course we cannot know at the moment whether they are sufficient. However, the quantization of the linear theory mentioned above shows that, owing to the smallness of the gravitational constant, processes involving gravitons — if at all existing — must be so rare as to hardly ever be observed. To account for the experimental facts *a*) and *b*) it is obviously unnecessary to regard the gravitational-field variables as operators. In view of the peculiar properties of the gravitational field embodied in the principle of equivalence, it even seems natural in principle to treat the components of the metric tensor $g_{ik}(x)$ as c-number functions of the arbitrary space-time variables (x^i), and in the following we propose a formalism on this basis. This means that the g_{ik} are not regarded as dynamical observables in the sense of ordinary quantum mechanics, but rather as geometrical quantities connected with the particular way of assigning names (x^i) to the different events in space-time.

Now let $Q^a(x)$ be a number of field variables labelled with an index a describing the matter field in an arbitrary system of space-time coordinates (x^i). The said field may be an electromagnetic field, a meson field or any other kind of matter field. The Lagrangian density $\mathfrak{L}$ of matter will then be a function of the q-number functions Q^a, their first-order derivatives Q^a, i and the c-number functions $g^{ik}(x)$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(Q^a, Q^a_{,i}\,,\ g^{ik})\,. \tag{26}$$

The matter will be treated in accordance with the usual rules of quantum-field theory, the only difference formally being that the Lagrangian density depends also on the functions g^{ik}. Thus we form the canonically conjugate momenta :

$$\pi_a(x) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^a_{,4}} \tag{27}$$

and the Hamiltonian density :

$$\mathcal{H} = \pi_a Q^a_{,4} - \mathcal{L} = \mathcal{H}(Q^a, Q^a_{,\iota}, \pi_a, g^{ik}) . \tag{28}$$

The total Hamiltonian

$$H = \int \mathcal{H}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{29}$$

is then a definite functional of the canonical variables and the $g^{ik}(x)$.

Further we have the equations of motion

$$\frac{d\,F(x)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,[H, F(x)] , \tag{30}$$

where $F(x)$ is any of the variables Q^a or π_a, or time-independent algebraic functions of these variables, and the commutation relations

$$\left.\begin{aligned} [\pi_a(x^\iota, t), Q^b(x'^\iota, t)] &= \frac{\hbar}{i}\,\delta^b_a\,\delta^{(3)}(x^\iota - x'^\iota) \\ [\pi_a(x^\iota, t), \pi_b(x'^\iota, t)] &= [Q^a(x^\iota, t), Q^b(x'^\iota, t)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Here $\delta^{(3)}(x^\iota - x'^\iota) = \prod_{\iota=1}^{3} \delta(x^i - x'^i)$ is the three-dimensional δ-function and at first sight the relations (31) do not appear to be covariant. A closer investigation shows, however, that these relations hold in any system of space-time coordinates if they are true in one system. Considering a scalar meson field, for instance, one easily sees that the relations (31) in an arbitrary system of coordinates imply the validity of the commutation relations of special relativity in any local system of inertia, true to the principle of equivalence. In this case the equation of motion (30) is simply the Klein-Gordon equation written in curvilinear space-time coordinates, and in a local system of inertia it is reduced to the usual form of the Klein-Gordon equation of special relativity.

Equations (26)-(31) obviously conform to the requirement *a*) above, since the Hamiltonian (29) depends on the g^{ik} so as to give the right dependence of the eigenvalues of H on the field variables g^{ik} of an external gravitational field. The next question is how an individual atomic system will influence the metric, and we make the somewhat drastic assumption that this will depend on the quantal state of the matter. The energy-momentum tensor of the matter

$$T^k_i = T_{il}\, g^{kl} = -2\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{il}}\, g^{kl} \tag{32}$$

is of course a q-number. Now consider a definite state of the matter in the Heisenberg picture and the expectation value $< T_i^k >$ of the matter tensor which is a definite c-number function of the space-time coordinates (x^i). Then we assume that the metric is in its turn determined by EINSTEIN's field equations with the said expectation value as source of the field, i.e. by the equations

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\varkappa < T_i^k > . \tag{33}$$

It is clear that (33) is in accordance with the requirement *b*), for in the case of a system consisting of a large number of atoms, the fluctuations of T_i^k will be negligible; but the idea is that (33) should be valid also for individual atoms. The formalism contained in equations (26)-(33) somewhat resembles the self-consistent way of treating the interaction between charged particles known as the Hartree-Fock method, which is only an approximation to the exact theory of quantum mechanics. It remains to be seen whether equations (26)-(33) are similarly an approximation only or, as suggested above, may be regarded as the exact equations describing the interplay of gravitational fields and atomic systems. The latter point of view, which is supported by the recognized singular role attributed to the gravitational fields through the basic principles of the general theory of relativity, would imply that the ordinary laws of quantum mechanics were only approximately true. However, due to the smallness of the gravitational constant $\varkappa$, it is clear that the deviations from ordinary quantum mechanics following from the proposed formalism will be unmeasurably small for all effects which are finite already in the usual special-relativity treatment of the matter field.

The only problems to which the present formalism might give an entirely different answer are those which in the special-relativity treatment lead to divergences, for only in such cases can we expect an appreciable deviation of the metric from the metric of a system of inertia. In this connection it is worth remembering that the gravitational contribution to the energy is not positive definite, which might have the effect of reducing or even eliminating the divergences of the self-energies obtained in the special-relativity field theories. This has been shown to be the case in special instances.

As an example, consider the static self-energy of a « nucleon » in interaction with a neutral scalar meson field. For simplicity, we treat the nucleon as « infinitely heavy » so that we may consider a static, spherically symmetric state in which the nucleon is at rest at a certain point. The static self-energy is then described by a c-number scalar-field function $\psi(r)$ which is a function of the distance r satisfying the Yukawa equation as written in terms of the metric characteristic of the problem. In the case considered we may use coordinates r, θ, φ, t such that the metric takes the form

$$ds^2 = a(r)\, dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 - b(r)\, c^2\, dt^2 , \tag{34}$$

where $a(r)$ and $b(r)$ are functions determined by the set of equations (33) of which only two are independent in this case. Thus we have three equations which determine the three functions $\psi(r)$, $a(r)$, $b(r)$ subject to the following boundary conditions at large distances :

$$\psi(r) \to \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad a(r) \to 1, \quad b(r) \to 1 \quad \text{for} \quad r \to \infty .$$

The details of the calculation will be given in a forthcoming paper, while we shall here give only the main results. The matter energy

$$-\int \sqrt{-g}\, T_4^4 \; dx^1\, dx^2\, dx^3$$

corresponding to the solution in question turns out to be only logarithmically divergent for small r, in contrast to the special-relativity treatment in which the self-energy is linearly divergent. Now, in the general-relativity treatment the matter energy alone does not give the full self-energy. The quantity which has a physical meaning and determines the mass of the particle is the sum of the matter energy and the gravitational energy, i.e. the quantity

$$-\int T_4{}^4 \; dx^1\, dx^2\, dx^3$$

which turns out to have a finite value in the present case. This result is due to the fact that the gravitational energy is here negative and cancels the logarithmic divergence of the « matter energy ». Thus the theory gives in this case a finite value for the static self-energy without the introduction of an indefinite metric in Hilbert space. It may very well be that this result holds more generally, i.e. that the metric adjusts itself in such a way as to make the self-energies finite; but of course this is not in itself sufficient for a solution of the problems of elementary-particle physics, for in that field we need a « cut off » at distances much larger than those at which we can expect an appreciable deviation of the metric from the special-relativity metric.

REFERENCES

[1] P. A. M. Dirac, Invited talk given at the New York Meeting of the Physical Society on January 30, 1959.
[2] C. Møller, *Ann. of Phys.*, **4**, 347 (1958).
[3] C. Møller, Max-Planck-Festschrift (1958).
[4] C. Møller, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **31**, no. 14 (1959).
[5] H. Bauer, *Phys. Z.*, **19**, 163 (1918).
[6] M.Magnusson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **32**, no. 6 (1960).
[7] J. Géhéniau, Report to Colloque International sur les théories relativistes de la gravitation, Royaumont (1959).
See also : N. V. Mitskiévič, *Ann. Physik*, **1**, 319 (1958).
[8] A. Komar, *Phys. Rev.*, **113**, 934 (1959).

DISCUSSION

Intervention du Prof. Fock

On dit quelquefois que le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas unique même dans la théorie de Relativité restreinte. Que pensez-vous sur ce sujet ?

Réponse du Prof. Möller

Je crois qu'il suffit d'exiger que le tenseur T^{ik} soit symétrique.

Réponse du Prof. Fock

La condition de symétrie n'est pas suffisante. Mais on peut exiger que les composantes du tenseur sont des fonctions de l'état du système, c'est-à-dire, fonctions des variables $\varphi^1, \ldots \varphi_n$, dont les valeurs initiales suffisent pour formuler le problème de CAUCHY. Il va sans dire que les quantités T^{ik} doivent former un tenseur qui est symétrique. Avec ces conditions le tenseur est unique.

Mais je voudrais soulever une autre question. Lorsqu'une expression n'est pas tensorielle, il faut absolument qu'on fixe le système de coordonnées. Dans quel système de coordonnées vos expressions pour le tenseur d'énergie-impulsion sont-elles valables ? Est-ce que ce sont les coordonnées harmoniques ?

Réponse du Prof. Möller

Non, les conditions pour les coordonnées harmoniques ne sont pas utilisées.

Intervention du Prof. Ivanenko

Les résultats de la discussion fort intéressante du Professeur MÖLLER concernant la vieille controverse relative au tenseur d'impulsion-énergie du champ gravitationnel peuvent être obtenus d'une autre manière. Il semble souvent plus satisfaisatn d'obtenir les expressions du tenseur d'impulsion-énergie non seulement par construction à partir de certaines conditions (comme le fait le Prof. MÖLLER), mais aussi à partir d'un principe variationnel et de propriétés d'invariance. Partant du lagrangien invariant $\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\,R$ on établit une forme symétrique bien connue du tenseur $T_\mu{}^\nu$ de LORENTZ et LEVI-CIVITA qui s'annule en vertu des équations d'EINSTEIN. Mais l'on peut aussi former un tenseur canonique $T_\mu{}^\nu$ qui diffère du précédent par un terme décrivant ce qu'on est en droit d'appeler la participation du spin dans l'impulsion-énergie. Ceci fut récemment développé par N. MITSKEVIC (*Annalen der Physik*, **1**, 319, 1958). Avec N. MITSKEVIC, nous avons récemment remarqué que la partie relative au spin du tenseur affine d'impulsion-énergie *gravitationnel* (non *total*) coïncide exactement avec l'expression changée de signe du $\mathfrak{T}_\mu{}^\nu$ de MÖLLER (pour le champ gravitationnel et la matière conjointement). Il paraît très satisfaisant que cette nouvelle expression douée de propriétés physiques intéressantes puisse être obtenue d'une manière très générale à partir d'un lagrangien scalaire.

Réponse du Prof. Möller

J'ai oublié de mentionner que j'ai obtenu aussi l'expression de $\mathfrak{T}_i{}^k$ en considérant la variation de la densité de la courbure scalaire (*Math. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **31**, 14, 1959) et que M. LAURENT, dans un récent article du *Nuovo Cimento*, a obtenu le même résultat par une méthode plus élégante.

Intervention du Prof. John Boardman

Vous avez dit qu'à l'approximation linéaire les ondes gravitationnelles planes ne sont physiquement intéressantes que dans un volume limité de l'espace-temps. Cela vaut-il aussi pour les ondes sphériques, qui n'ont pas un front d'onde indéfiniment étendu ?

Réponse du Prof. Möller

Oui. Du reste, aussi bien pour les ondes sphériques que pour les ondes planes, on a montré que les approximations suivantes conduisent à des conclusions sans signification physique.

Intervention du Docteur Fletcher

Comment pouvez-vous dire que votre expression T_i^k fournit une énergie égale à la masse de Schwarzschild pour l'espace décrit par la métrique de Schwarzschild, étant donné qu'il est bien connu que dans cet espace une métrique ($g_{\mu 4} = -\delta_{\mu 4}$) peut être choisie où la densité d'énergie est partout nulle ?

Réponse du Prof. Möller

$g_{\mu 4}$ ne peut être égalé à $-\delta_{\mu 4}$ que grâce à l'introduction d'un curieux référentiel mobile avec au centre une singularité essentielle. La densité d'énergie n'est alors pas nulle partout, mais indéterminée au point singulier. Dans tout système de coordonnées où la métrique à l'infini spatial a la forme de Schwarzschild, ce qui correspond asymptotiquement à un champ newtonien, $\mathfrak{T}_i^k$ fournit une énergie $M_0 c^2$ où M_0 est la masse newtonienne.

Intervention du Prof. Belinfante

Si

$$-X < T_i^k > = R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R$$

alors une réduction du paquet d'ondes change $< T_i^k >$, en sorte que g_i^k doit aussi dépendre de l'état, et alors ne peut pas être un « nombre c ». Comment pouvez-vous concilier ceci avec votre théorie ?

Réponse du Prof. Möller

Quand je dis que les g_{ik} sont traités comme des nombres c je veux seulement dire qu'ils ne sont pas des opérateurs mais des fonctions ordinaires des coordonnées spatio-temporelles. Si nous considérons un autre état du système matériel ces fonctions seront aussi différentes.

Intervention du Docteur J. L. Anderson

1. L'équation $R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = < T_i^k >$ conduit à un $g_i^k(\Psi)$ où Ψ est une fonctionnelle. L'équation d'évolution, qui dépend de g_{ik}, devient ainsi fortement non-linéaire en Ψ. D'où pas de principe de superposition, etc.

2. Une expression pour le tenseur d'impulsion-énergie est nécessaire seulement pour les approximations. Dans le cas de solutions exactes nous saurions sans elle comment se meuvent les particules, comme en théorie électromagnétique.

Réponse du Prof. Möller à la question 1 :

D'accord, mais étant donnée la petitesse de la constante de gravitation, je pense que la différence avec la théorie quantique covariante au sens restreint n'apparaîtra que dans les domaines où cette théorie donne des résultats divergents.

Intervention du Docteur A. Komar

Dans le cas où il y a réduction du paquet d'ondes, le tenseur métrique, obéissant à une nouvelle équation d'ondes, va changer. Il semble donc que par une mesure purement classique du tenseur métrique on pourra violer les relations d'indétermination (à la Bohr-Rosenfeld).

Réponse du Prof. Möller

Ceci peut être vrai s'il existe réellement des ondes gravitationnelles transportant de l'énergie, question qui reste en suspens. Il se peut aussi que la mécanique quantique usuelle soit seulement une approximation, extrêmement bonne en raison de la petitesse des effets gravitationnels.

Intervention du Docteur O. Costa de Beauregard

Touchant les interventions de MM. BELINFANTE, ANDERSON et KOMAR, je pense que les mots description d'interaction et description à la HEISENBERG devraient être prononcés. Le fait même que l'équation d'Einstein soit écrite avec un second membre prouve que le champ gravitationnel est écrit en représentation à la Heisenberg, ce qui exclut radicalement toute espèce de transition quantique en ce qui le concerne.

Maintenant, il faut aussi considérer les mutuelles interactions des champs autres que le champ gravitationnel. Mais, que celles-ci soient décrites en représentation d'interaction ou à la HEISENBERG, la valeur moyenne du $< T_i^k >$ total est conservative, et il n'y a donc pas non plus de difficultés.

Je voudrais signaler que dans une brève *Note aux Comptes Rendus* (**243**, 939, 1956), M. R. POTIER esquisse très clairement un programme extrêmement voisin de celui du Prof. MÖLLER.

Intervention du Docteur C. Misner

La principale objection à l'expression de MÖLLER pour l'énergie est son manque d'unicité. Elle ne dépend pas seulement du choix de l'hypersurface σ et de l'état du champ sur celle-ci, mais aussi du choix arbitraire d'un e_i sur σ. Pour obtenir une valeur unique de l'énergie totale on doit compléter cette expression par une condition de coordonnées telle que seule subsiste la liberté d'une transformation de LORENTZ.

Intervention du Prof. Belinfante

L'énergie de MISNER est ce que j'appellerais l'opérateur hamiltonien de l'équation de Schrödinger. Je discuterai de ceci dans mon exposé de vendredi. Mais j'aimerais remarquer qu'en vertu d'arguments de covariance la « valeur » de cet opérateur doit être *zéro*. L'expression $M_0 c^2$ de MÖLLER est une jolie expression qu'on *appelle* énergie, mais je ne suis pas tout à fait sûr de son usage véritable.

Intervention du Prof. P. G. Bergmann

1. L'expression de l'énergie du Professeur MÖLLER est un cas particulier de l'expression générale donnée par A. KOMAR, qui est covariante mais dépend de l'introduction d'un champ vectoriel (appelé a par le Prof. MÖLLER), champ qui représente la transformation infinitésimale engendrée par le champ choisi pour la densité vectorielle « d'énergie ». Un tel champ existe notamment si la géométrie contient un champ de KILLING, point que TRAUTMANN va certainement traiter dans sa communication. Si nous avons un système isolé du type envisagé par le Professeur MÖLLER, le mouvement du centre de gravité pourra donner asymptotiquement à l'infini (mais non pas localement) un tel champ de directions; la masse totale au repos sera alors une quantité conservative, bien que la densité de masse locale ne soit pas covariante vis-à-vis des transformations permises des coordonnées locales. Je soupçonne donc qu'une définition complètement satisfaisante de la densité d'énergie n'est possible qu'occasionnellement, suivant la nature physique de la situation considérée.

2. Le schéma de quantification proposé par le Professeur MÖLLER sera probablement sujet aux objections de BOHR et ROSENFELD contre le

mariage entre sources quantifiées et champs de « nombres *c* » dans le cas de l'électromagnétisme. Même si les ondes gravitationnelles ne possèdent pas de densité d'énergie (et ce point dépend du choix de l'expression de la densité d'énergie) elles seront probablement sources de composantes du champ gravitationnel autres que celle en (00). Il s'ensuit que l'argument des non-linéarités mutuellement engrenées devra recevoir sa réponse à un niveau beaucoup plus profond.

CONSERVATION LAWS AND EQUATIONS OF MOTION

by Dr. J. N. GOLDBERG
Aeronautical Research Laboratory

RESUME

On se propose d'analyser l'obtention des équations du mouvement en Relativité générale sans faire appel à une méthode d'approximation.

1. — Introduction

In general relativity, the motion of the field sources cannot be specified arbitrarily. Certain restrictions on the motion are imposed by the field equations themselves. This fact has been recognized for a long time [1, 2], although the explicit determination of two body equations of motion was comparatively recent [3, 4]. This work, however, is based on approximation methods. The purpose of this paper is to examine a particular approach to the equations of motion, the use of surface integral relations, without reference to an approximation method.

Basically there are three different approaches to the equations of motion. One is by explicit use of the matter tensor [4, 5, 6] the second considers certain two-dimensional surface integrals [3, 7, 8] while the third makes explicit use of coordinate conditions [2, 9, 10, 11].

When considering the matter tensor, which we shall denote by $P^{\mu\nu}$, one observes that the gravitational field equations satisfy four differential identities [12]:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0 \,. \tag{1.1}$$

the contracted Bianchi identities. Since in the presence of matter the field equations are

$$G^{\mu\nu} = -8\pi\varkappa\, P^{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

it follows that for consistency $P^{\mu\nu}$ cannot be arbitrary, but must satisfy four differential relations

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \,. \tag{1.3}$$

Note that because the covariant divergence is involved, éq. (1.3) cannot be satisfied unless the metric is known. Therefore (1.2) and (1.3) form a coupled set of equations which must be solved by a self-consistent approximation method. In practice one has either performed a power series expansion [4, 5, 6] thereby obtaining linearized equations which can then be solved in a stepwise fashion, or one has sought equations of motion test particles in a given Riemannian manifold [13, 14]. This method, in principle, does not seem to be applicable without use of an approximation method.

The method of surface integrals also leans heavily on the Bianchi identities. It is well known that eq. (1.1) can be rewritten as an ordinary divergence if we introduce the Einstein pseudo-tensor $t_\mu{}^\nu$ [15]. We define the quantity $T_\mu{}^\nu$ by

$$T_\mu{}^\nu \stackrel{def}{=} t_\mu{}^\nu - 2\,\mathfrak{G}_\mu{}^\nu,$$
$$\mathfrak{G}_\mu{}^\nu = \sqrt{-g}\,G_\mu{}^\nu. \tag{1.4}$$

Then the Bianchi identities become simply

$$T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} \equiv 0\,. \tag{1.5}$$

It follows that $T_\mu{}^\nu$ itself is the divergence of an antisymmetric quantity [16, 17]

$$T_\mu{}^\nu = U_\mu{}^{\underset{\smile}{\nu\sigma}}{}_{,\sigma}\,. \tag{1.6}$$

As a result, the field equations may be written as

$$2\,\mathfrak{G}_\mu{}^\nu = t_\mu{}^\nu - U_\mu{}^{\underset{\smile}{\nu\sigma}}{}_{,\sigma}\,. \tag{1.7}$$

Forming the two-dimensional surface integral over $\mathfrak{G}_\mu{}^s$, we have that [7]

$$\int\,[t_\mu{}^s - U_\mu{}^{\underset{\smile}{s4}}{}_{,4}]\,n_s\,dS = 0\,, \tag{1.8}$$

whenever the free field equations are satisfied on the surface of integration. These surface integrals are to represent the equations of motion for matter enclosed by the surface. In the Einstein, Infeld, and Hoffmann approximation method [3], these surface integrals do indeed lead to the equations of motion. However, it is not clear whether these integrals have any significance without use of an approximation method. Once the field equations have been satisfied, the integrals are empty. The question is whether the integrals have any significance before all of the field equations have been satisfied. The investigation of this question is the major part of this paper and will not be discussed further at this time.

The restrictions on matter result from the fact that the field equations satisfy four differential identities. If we could modify the field equations so that they did not satisfy the identities, the sources of the modified field would no longer be restricted. The coordinate covariance of general relativity allows us to set coordinate conditions which restrict the variety of (physically identical) solutions. This procedure has two advantages : 1) the field equations are modified so that they no longer satisfy differential identities and 2) a proper Cauchy-Kowalewski problem results [18]. In principle it should be possible to find a solution of the modified equations which depends on a number of parameters. The ultimate imposition of the coordinate condition should restrict the parameters and hence yield the equations of motion. This method has been successfully applied to the two body problem in an approximation procedure using the harmonic coordinate conditions $g^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$ [11]. It can be shown, in this case, to be equivalent to the approach using the matter tensor explicitly.

In the following, we shall study further the relationship between the conservation laws (the differential identities satisfied by the field equations) and the surface integral approach to the problem of motion. The possible forms of the conservation laws has grown enormously [19, 22]. The various forms have been related to the generators of the invariant infinitesimal transformations of the theory [20]. Each generator has an associated differential identity and, hence, a surface integral « representing restrictions ». The implication here is that an infinite number of restrictions exist. In order to remove this implication, we formulate a criterion for a « restriction ». We shall find that the criterion is so stringent that a restriction in our sense exists only when the space admits a Killing vector. No alternative approach is considered, but the possibility of being able to characterize the field sources by means of surface integrals is offered.

In the following section, we examine the relationship between invariant transformations and conservation laws; in Section 3, we formulate the surface integrals in a general formalism, maintaining complete covariance at all times; Section 4 relates these results to gravitational theory.

2. — Strong Conservation Laws

We consider a theory whose field equations are derivable from the variation of an invariant action integral. The scaler density lagrangian L is assumed to depend only on the field variables y_A and their first and second derivatives :

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(y_A, y_{A,\rho}, y_{A,\rho\sigma}) . \tag{2.1}$$

With respect to an arbitrary infinitesimal coordinate transformation

$$X^{\mu'} = X^{\mu} + \xi^{\mu} , \tag{2.2}$$

where the descriptors ξ^μ are arbitrary functions of the coordinates, the field variables are assumed to transform according to the linear law

$$\begin{aligned} \overline{\delta}\, y_A &= u_{\mu A}{}^{\nu}\, \xi^{\mu}{}_{,\nu} - y_{A,\mu}\, \xi^{\mu}, \\ u_{\mu A}{}^{\nu} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} F_A{}^B{}_\mu{}^\nu\, y_B . \end{aligned} \tag{2.3}$$

The $F_A{}^B{}_\mu{}^\nu$ are constants which satisfy certain algebraic relations in order to assure the group property of the transformation [23]. Since L is a scalar density constructed out of the field variables and its derivatives alone, it follows that as a function of its arguments it is unchanged by the transformation (2.3). Hence [8, 24]

$$\delta' \mathrm{L} = \overline{\delta}\, \mathrm{L} - \partial^A \mathrm{L}\, \overline{\delta} y_A - \partial^{A\rho} \mathrm{L}\, \overline{\delta} y_{A,\rho} - \partial^{A\rho\sigma} \mathrm{L}\, \overline{\delta} y_{A,\rho\sigma} \equiv 0 . \tag{2.4}$$

For a scalar density we have

$$\bar{\delta} L = -(L\, \xi^{\mu})_{,\mu} \tag{2.5}$$

and (2.4) becomes

$$L^A\, \bar{\delta} y_A - C^{\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$$

$$C^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} t_{\mu}{}^{\nu}\, \xi^{\mu} + U_{\mu}{}^{\nu\sigma}\, \xi^{\mu}{}_{,\sigma} + \left(\frac{1}{3} N_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma}\, \xi^{\mu}{}_{,\sigma} + K_{\mu}{}^{\rho\nu}\, \xi^{\mu}\right)_{,\rho} \tag{2.6}$$

where [19]

$$t_{\mu}{}^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_{\mu}{}^{\nu}\, [L - (\partial^{A\rho\sigma} L\, y_{A,\sigma})_{,\rho}] - (\partial^{A\nu\rho}\, L)_{,\mu}\, y_{A,\rho} + [\partial^{A\nu} L - (\partial^{A\nu\rho} L)_{,\rho}]\, y_{A,\mu}\,,$$

$$U_{\mu}{}^{\nu\rho} \stackrel{\text{def}}{=} u_{\mu A}{}^{\nu}\, \partial^{A\rho} L + 2 u_{\mu A}{}^{\nu}{}_{,\sigma}\, \partial^{A\rho\sigma} L - \partial^{A\rho\nu} L\, y_{A,\mu} - \frac{2}{3}\, N_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma}{}_{,\sigma} + K_{\mu}{}^{\rho\nu}\,,$$

$$N_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} u_{\mu A}{}^{\nu}\, \partial^{A\rho\sigma} L - u_{\mu A}{}^{\rho}\, \partial^{A\nu\sigma} L\,,$$

$$K_{\mu}{}^{\nu\rho} \stackrel{\text{def}}{=} [\delta_{\mu}{}^{\nu}\, \partial^{A\rho\sigma} L - \delta_{\mu}{}^{\rho}\, \partial^{A\nu\sigma} L]\, y_{A,\sigma}\,.$$

By equating to zero the various differential orders of ξ^{μ} in (2.6) we obtain :

$$L^A\, y_{A,\mu} + t_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} \equiv 0 \tag{2.7a}$$

$$t_{\mu}{}^{\nu} - u_{\mu A}{}^{\nu}\, L^A \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mu}{}^{\nu} \equiv U_{\mu}{}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} \tag{2.7b}$$

$$u_{\mu A}{}^{\nu}\, \partial^{A\rho\sigma} L + u_{\mu A}{}^{\rho}\, \partial^{A\sigma\nu} L + u_{\mu A}{}^{\sigma}\, \partial^{A\nu\rho} L \equiv 0. \tag{2.7c}$$

The Bianchi identities result from (2.7*a*, *b*) :

$$(u_{\mu A}{}^{\nu}\, L^A)_{,\nu} + L^A\, y_{A,\mu} \equiv 0. \tag{2.7d}$$

We now make the further assumption that $\partial^{A\rho\sigma} L$ depends only on the y_A. Hence, an equivalent lagrangien (not scalar density, but free of second derivatives) can be defined :

$$\mathcal{L} = L - (\partial^{A\rho\sigma} L\, y_{A,\nu})_{,\rho}\,. \tag{2.8}$$

In terms of this function we find

$$t_{\mu}{}^{\nu} = -\delta_{\mu}{}^{\nu}\, \mathcal{L} + \partial^{A\nu}\, \mathcal{L}\, y_{A,\mu} \tag{2.9}$$

and, hence, is also free of second derivatives as is $U_{\mu}{}^{\nu\sigma}$. Under these conditions, Bergmann and Schiller [8] have shown that :

$$C = \int C^{\rho}\, n_{\rho}\, d\tau_{(3)} \tag{2.10}$$

generates the invariant transformations of the theory provided $C^{\rho}\, n_{\rho}$ does not contain second derivatives in any direction leading off the hypersurface defined by $n_{\rho}\, dx^{\rho} = 0$. We shall refer to derivatives in such directions as « time » derivatives.

C^{ν} can be modified by the addition of a term $Z^{\nu\rho}{}_{,\rho}$ without affecting the identity (2.6). If we choose :

$$Z^{\rho\nu} = -\frac{1}{3}\, N_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma}\, \xi^{\mu}{}_{,\sigma} - K_{\mu}{}^{\rho\nu}\, \xi^{\mu} \tag{2.11}$$

then :

$$\overline{C}^{\nu} = t_{\mu}{}^{\nu}\, \xi^{\mu} + U_{\mu}{}^{\nu\sigma}\, \xi^{\mu}{}_{,\sigma} \tag{2.12}$$

is free of all second derivatives. This choice of generating density is made in BERGMANN and SCHILLER [8] and BERGMANN [20]. From (2.6) it follows that wheenver the field equations are satisfied, $L^A = 0$, C^ν satisfies the weak conservation law :

$$C^\nu{}_{,\nu} = 0. \tag{2.13}$$

Since for $\xi^\mu =$ constant, $\overline{C}^\nu = t_\mu{}^\nu$, the usual canonical pseudotensor, it is clear that the conservation laws (2.13) have something to do with conservation of energy and momentum. Now, however, we have an infinite number of such conservation laws since any choice of ξ^μ leads to (2.13).

Because of the BIANCHI identities, we have :

$$L^A \bar{\delta}\, y_A = (u_{\mu A}{}^\nu\, L^A\, \xi^\mu)_{,\nu} \tag{2.14}$$

Hence, from Eqs. (2.6), 2.7*b*), (2.12), for each weak conservation law (2.13), there exists a corresponding strong law :

$$D^\nu{}_{,\nu} \tag{2.15}$$

with :

$$D^\nu = (U_\mu{}^{\underset{\smile}{\nu\sigma}}\, \xi^\mu)_{,\sigma}\,.$$

The strong conservation laws are derived only from the geometrical structure of the theory. The weak conservation laws result from the strong laws when the dynamics of the theory, the field equations, are employed.

Before attempting to construct the surface integral relations from the strong law, let us discuss briefly the transformation properties of C^ν. In general, C^ν will not be a geometrical object. In· fact, in general relativity it is well known that the canonical pseudo-tensor will lead to reasonable results for the energy of the gravitational field only if quasi-Galilean coordinates are used. We can use the freedom in choice of C^ν to correct this shortcoming [21, 22]. By subtracting D^ν of (2.15) from $\overline{C}^\nu$ (2.12), we obtain :

$$\overline{\overline{C}}{}^\nu = u_{\mu A}{}^\nu\, L^A\, \xi^\mu\,. \tag{2.16}$$

This expression contains second derivatives of the field variables, but from (2.7*b*), it is easy to see that $\overline{\overline{C}}{}^\nu\, \mathfrak{n}_\nu$ does not contain second « time » derivatives and, hence, is suitable as a generating density. This identification for the field conservation law was made by LORENTZ [25].

It has the serious drawback that the energy and momentum associated with the field vanishes wherever the field equations are satisfied. However, suppose that a tensor density of rank four exists which is anti-symmetric in each of its index pairs : $H^{\underset{\smile}{\mu\nu}\,\underset{\smile}{\rho\sigma}}$. Such quantities are easy to construct [19]. Clearly,

$$U^{\underset{\smile}{\mu\nu}} = H^{\underset{\smile}{\mu\nu}\,\underset{\smile}{\rho\sigma}}\, \xi_{\rho,\sigma} \tag{2.17}$$

is an anti-symmetric tensor density of rank two. (We have assumed the existence of a metric tensor so that indices may be raised and lowered.) Again,

$$T^\mu = U^{\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{2.18}$$

will be a vector density satisfying the strong conservation law :

$$T^{\mu}{}_{,\mu} \equiv 0\,. \tag{2.19}$$

$T^{\mu}\,n_{\mu}$ is clearly free of second « time » derivatives if $H^{\underset{\smile}{\mu\nu}\,\underset{\smile}{\rho\sigma}}$ depends only on the y_{A}. Hence,

$$\mathcal{E}^{\mu} \overset{\text{def}}{=} T^{\mu} - u_{\mu A}{}^{\nu}\, L^{A}\, \xi^{\mu} \tag{2.20}$$

is again a suitable generating density.

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{E}^{\mu}\, n_{\mu}\, d\tau_{(3)} \tag{2.21}$$

is now invariant under all three space transformations and, in fact, under all coordinate transformations. The physical significance of $\mathcal{E}$ will determine whether $U^{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ is a useful quantity. In general relativity it is possible to choose $\mathcal{E}^{\mu}$ so that it yields the same result as the canonical pseudo-tensor for the energy in the Schwarzschild field [21, 22].

3. — The Surface Integrals

In this Section we shall write :

$$u_{\mu A}{}^{\nu}\, L^{A}\, \xi^{\mu} \overset{\text{def}}{=} L^{\nu} \equiv U^{\underset{\smile}{\nu\mu}}{}_{,\mu} - \mathcal{E}^{\nu} \tag{3.1}$$

without necessarily implying that we must use the covariant generating density. Any of the generating densities and associated strong conservation laws is suitable for most of what we shall do here.

In order to maintain the covariance of all our expressions, it is convenient to introduce a parametrization of our coordinate system. The parametrization need not cover the entire four-dimensional manifold, but only a region R_4 which contains a portion of a world tube in which the field equations no longer hold. We use the notation of Bergmann and Brunings [26] :

$$X^{\mu} = X^{\mu}(u^{s}, t)\,. \tag{3.2}$$

Within R_4, we assume we can solve (3.2) for the parameters in terms of the coordinates. We take the tangent vector $V^{\mu} = \partial X^{\mu}/\partial t$ to be time-like. The surfaces t = constant are defined by :

$$n_{\rho}\, dX^{\rho} = 0, \qquad n_{\rho} = t_{,\rho}\,. \tag{3.3}$$

Hence,

$$n_{\mu}\, V^{\mu} = 1\,. \tag{3.4}$$

We assume that u^3 = constant defines a hypersurface which completely encloses the sigular tube in R_4. This hypersurface is generated by the paths of V^{μ}. Now we consider a domain D_4 in R_4 bounded by the hypersurfaces :

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 : \; t = 0, \\ &\Sigma_2 : \; t = \Delta t > 0, \\ &\Sigma_3 : \; u^3 = a = \text{constant}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Form the integral over D_4 of the strong conservation law :

$$\int_{D_4} U^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}\, d\tau_{(4)} \equiv 0 \tag{3.6}$$

and apply Stokes' theorem [27] :

$$\int_{\Sigma_2-\Sigma_1} U^{\mu\nu}{}_{,\mu}\, \mathfrak{n}_\nu\, d\tau_{(3)} + \int_{\Sigma_3} U^{\mu\nu}{}_{,\mu}\, \mathfrak{m}_\nu\, d\tau_{(3)} \equiv 0\ ;$$

$$\mathfrak{n}_\nu = \eta\, n_\nu\,, \qquad \mathfrak{m}_\nu = \eta\, m_\nu = \eta\, u^3{}_{,\nu}\ ; \tag{3.7}$$

η is a scalar density of weight — 1 defined so that :

$$d\tau_{(4)} = \eta\, d\tau_{(2)}\, du^3\, dt$$

where $d\tau_{(2)}$ is the intrinsic extension constructed from u^1 and u^2. This statement is still trivial as it contains no dynamical, only geometrical, information. However, the field equations (3.1) are to be satisfied on Σ_3, but not on Σ_1, or Σ_2. Therefore, we can substitute $\mathcal{E}^\nu$ into the integral over Σ_3, but we apply Stokes' theorem once again to the integral over Σ_1 and Σ_2 :

$$\frac{1}{2}\oint_{S_2-S_1} U^{\mu\nu}\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} - \int_{\Sigma_3} \varepsilon^\nu\, \mathfrak{m}_\nu\, d\tau_{(3)} = 0,$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = n_\mu\, \mathfrak{m}_\nu - n_\nu\, \mathfrak{m}_\mu\,. \tag{3.8}$$

One can show that on Σ_3 :

$$\mathfrak{m}_\nu\, d\tau_{(3)} = \Lambda_{\nu\mu}\, V^\mu\, d\tau_{(2)}\, dt \tag{3.9}$$

where the orientation of $d\tau_{(2)}$ is so chosen that it is equal to $d\tau_{(2)}$ on S_1 and S_2 when $t = 0$ and $t = \Delta t$ respectively.

Then (3.9) becoes :

$$\oint_{S_2-S_1} U^{\mu\nu}\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} - \int_0^{\Delta t} dt \oint_{S_3} [\varepsilon^\mu\, V^\nu - \varepsilon^\nu\, V^\mu]\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} = 0. \tag{3.10}$$

If we divide by Δt and pass to the limit $\Delta t \to 0$, we obtain :

$$\frac{d}{dt}\oint_{S_1} U^{\mu\nu}\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} - \oint_{S_1} [\mathcal{E}^\mu\, V^\nu - \mathcal{E}^\nu\, V^\mu]\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} = 0. \tag{3.11}$$

When $X^4 = t$, then $V^\mu = \delta^\mu_4$, $n_\mu = \delta^4_\mu$ and (3.11) reduce precisely to Bergmann's [20] Eq. (3.5).

Carrying out the differentiation explicity, we obtain :

$$\oint [(U^{\mu\nu}_{\smile} V^\rho)_{,\rho} - U^{\mu\rho}_{\smile} V^\nu{}_{,\rho} - U^{\rho\nu}_{\smile} V^\mu{}_{,\rho}]\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)}$$

$$-2\oint \mathcal{E}^\mu\, V^\nu\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} = 0 \tag{3.12}$$

where we have used the fact that the geometrical quantity $\Lambda_{\mu\nu}$ is defined by dragging along over V^μ and hence its Lie derivative [28] vanishes. Since :

$$\oint \Psi^{[\mu\nu\rho]}{}_{,\rho}\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)} = 0\,,$$

we may throw over the derivative on the last two terms in the first integral and finally obtain :

$$\oint [L^\mu V^\nu - L^\nu V^\mu] \Lambda_{\mu\nu} \, d\tau_{(2)} = 0 \tag{3.13}$$

L^μ defined by Eq. (3.1). We could have written this integral down immediately, but then its relationship to the conservation laws would not have been evident.

First of all, it is obvious that these surface integrals are trivially satisfied once the field equations have been solved. Therefore, if they are to yield restrictions on the motion of the sources of the field, it must be possible to satisfy them when some, but not all of the field equations are satisfied. Furthermore, if these integrals are to give us information about the sources alone, then the integrals should be independent of the two-dimensional surface. The condition for surface independence is simply :

$$[L^\mu V^\nu - L^\nu V^\mu]_{,\nu} \, n_\mu = 0 \tag{3.14}$$

outside the world tube. If we allow :

$$L^\mu n_\mu = 0 \, , \tag{3.15}$$

the conditions is :

$$L^\nu{}_{,\nu} = 0 \tag{3.16}$$

since n^μ is integrable. Using the Bianchi identities (2.7*d*), we find that (3.16) reduces to :

$$L^A \bar{\delta} y_A = 0 \, . \tag{3.17}$$

Since this result is to be independent of the detailed structure of the theory, the condition is simply :

$$\bar{\delta} y_A = 0 \, . \tag{3.18}$$

Under these conditions the weak law itself is a strong law and, hence, the surface integrals in the form of (3.13) will be trivially satisfied. However, in the form of (3.11), it may still give us useful information. From Eq. (3.16) it follows that :

$$L^\mu = Z^{\mu\nu}{}_{,\nu} \, . \tag{3.19}$$

Therefore, if in Eq. (3.1) we choose $U^{\mu\nu} = Z^{\mu\nu}$, we have $\mathcal{E}^\mu = 0$. Equation (3.11) then becomes :

$$\frac{dU}{dt} = 0 \, ,$$

$$U = \oint U^{\mu\nu}_{\smile} \Lambda_{\mu\nu} \, d\tau_{(2)} \, . \tag{3.20}$$

Since L^μ is, in general, a vector density, $U^{\mu\nu}_{\smile}$ will be tensor density. Therefore, U is an invariant. Furthermore, it is independent of the two-dimensional surface in Σ_1, if $L^\mu n_\mu = 0$ and, therefore, it describes properties of the field sources alone. This result was first obtained for the gravitational field by Komar [29].

Although this result is interesting, it is also somewhat disappointing. It tells us that unless we have a constant of the motion, we cannot determine anything about the structure of the sources without knowing everything about the field. On the other hand, the result is not suprising if we admit radiation. In the event that radiation can occur, the state of the source cannot be determined by sampling the field on a space-like surface. The entire past history of the field must be known. The particular set of field equations we allow to be satisfied, Eq. (3.15), do not contain second « time » derivatives and, therefore, carry no information about the time development of the field.

4. — General Relativity

All of the previous results are, of course, valid if we consider the gravitational field alone. It is of some interest, however, to see whether the explicit structure of the theory yields further information. In this case :

$$L^{\nu} = 2\, \mathfrak{G}_{\mu}{}^{\nu}\, \xi^{\mu} \tag{4.1}$$

and (3.17) becomes :

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}\, (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) = 0\,. \tag{4.2}$$

This condition is obviously satisfied if ξ^{μ} is a Killing vector, in agreement with (3.18). However, if we satisfy one more equation,

$$\mathfrak{G} = g_{\rho\sigma}\, \mathfrak{G}^{\rho\sigma} = 0\,, \tag{4.3}$$

then we obtain the generators of conformal transformations as possible choices of ξ^{μ} :

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = \alpha\, g_{\mu\nu}\,. \tag{4.4}$$

The requirement that the five field equations, $\mathfrak{G} = 0$ and $\mathfrak{G}^{\mu\nu} n_{\nu} = 0$ be satisfied in order to obtain restrictions appears to be reasonable. In the linearized theory, the problem of motion, without restriction to slow motion, can be formulated in terms of the surface integrals [30] because there exist ten Killings vectors corresponding to the Lorentz transformations. There we find that solving $G^{44} = 0$ allows us to evaluate :

$$\oint G^{4\,S}\, m_S\, dS = 0$$

but $G^{4\,S} = 0$ and $G^{rn} = 0$ must be solved before we can evaluate :

$$\oint G^{rs}\, m_s\, dS$$

The angular momentum integrals were not considered as only spherically symmetric particles were treated. Trautman [31] gives the descriptors for the conformal transformations, but these, too, have not been examined.

From the detailed structure of the gravitational field equations, it may be possible to extract other conditions from (4.2) which do not depend on the details of the solution. However, the complexity of the field equations and our experience with the gauge group of electrodynamics seems to preclude this possibility.

The super-potential defined in Eq. (2.6) is :

$$U_{\mu}{}^{\nu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, g_{\mu\rho}\, [(-g)\,(g^{\rho\nu}\, g^{\tau\sigma} - g^{\rho\sigma}\, g^{\tau\nu})]_{,\tau}\,. \tag{4.5}$$

Clearly, this quantity is not a tensor density, and therefore does not lead to a covariant conservation law. However, from (4.5) it is also clear that there exists a tensor density with the appropriate symmetry properties for the construction of a covariant conservation law in the manner of Eq. (2.17). Let :

$$H^{\mu\nu\,\rho\sigma} = \sqrt{-g}\,(g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\, g^{\nu\rho})\,, \tag{4.6}$$

then :

$$U^{\mu\nu} = 2\, H^{\nu\mu\,\rho\sigma}\, \xi_{\rho,\sigma} = 2\sqrt{-g}\,(\xi^{\mu;\nu} - \xi^{\nu;\mu}) \tag{4.7}$$

satisfies a covariant conservation law. This result was first obtained by Komar [22] who also showed that for $\xi^{\mu} = \delta_4^{\mu}$ this law is the same as that constructed by Møller [21]. Therefore, for the energy in the Schwarzschild field, it gives the same result as (4.5) in quasi-Galilean coordinates.

or a descriptor for a conformal transformation,

It is an easy matter to show [32] that when ξ^{μ} is a Killing vector

$$U^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 2\sqrt{-g}\, R^{\mu\nu}\, \xi_{\nu} \tag{4.8}$$

where α in Eq. (4.4) is a constant. Since we assume $R = 0$, this result is sufficient for $U^{\mu\nu}$ to give us information about the source according to Eqs. (3.19) and (3.20). Indeed, since $\xi^{\mu} = \delta_4^{\mu}$ is the time-like Killing vector for the Schwarzschild solution, we know that it correctly gives the mass, in that case. However, it should be possible to find a super-potential which is suitable for all conformal transformations, although we have not yet succeeded in its construction.

Now, let us consider :

$$U = \oint U^{\mu\nu}\, \Lambda_{\mu\nu}\, d\tau_{(2)}\,. \tag{4.9}$$

Although the surface integrals (3.11) will not, in general, yield information about the sources, we can choose appropriate ξ^{μ} so that (4.9) will characterize the sources. U in (4.9) will be independent of the surface, and hence, characterize the source if :

$$U^{\mu\nu}{}_{,\nu}\, n_{\mu} = 0\,. \tag{4.10}$$

Explicit use of (4.7) yields :

$$(\xi^{\mu;\nu} - \xi^{\nu;\mu})_{;\nu}\, n_{\mu} = 0\,. \tag{4.11}$$

This equation is just the covariant form of Maxwell's equation $\operatorname{div} E = 0$.

The surface integral (4.9) will yield the « charge » associated with the descriptor field. Therefore, the possibility exists for characterizing the various multipoles of the sources in an invariant manner. This result may be seen in another way. Having found a descriptor field which satisfies (4.11), it follows from (3.1) and (4.1) that $\varepsilon^\mu n_\mu = 0$. Therefore, the « energy » associated with the gravitational field, by means of these descriptors, will be zero. The surface integral can give, therefore, only information about the source.

In the linearized theory, the Killing vectors define energy, momentum, and angular momentum of the source and these are constants of the motion, in agreement with SACHS and BERGMANN [33]. Now, however, we also have the possibility of defining the quadrupole moment through

$$\xi^\mu = k^\mu{}_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma, \tag{4.12}$$

and the higher poles in a similar fashion. Of course, the quadrupole moment and the higher multipoles will not be constants of the motion.

In the full theory, however, it is not as easy to identify the various multipole moments. To achieve any understanding, the solutions of Eq. (4.11) must be studied.

5. — Conclusion

We have reviewed the construction of conservation laws in covariant field theories and formulated, in a covariant manner, the two-dimensional surface integrals which lead to the equations of motion in the linearized theory. These surface integrals yield significant information only when a constant of the motion associated with the sources exists. In particular, a constant of the motion exists when the field admits a Killing vector or a conformal transformation. This difficulty we have attributed to the possibility that the sources may radiate energy.

However, there is another possibility. By means of coordinate transformations the form of any solution of the field equations may be altered and, in fact, the physical information carried by the individual field variables may be varied. It follows that not only will the form of the equations of motion be altered by arbitrary coordinate transformations, but also the field components which enter the equations of motion may be altered. Therefore, for a particular choice of coordinate conditions it may be possible to satisfy Eq. (3.16) knowing only $\mathfrak{G}^{\mu\nu} n_\nu = 0$ and $\mathfrak{G} = 0$. For example, in electrodynamics, if one wishes to compute the electric charge by Gauss' law, in general one must know all components of the vector potential. However if one uses the radiation gauge $A^s{}_{,s} = 0$, then knowledge of A^4 alone is sufficient to determine the charge. Indeed, for the linearized gravitational field equations one can formulate « radiation » coordinate conditions. In this case the surface integrals do yield the equations of motion as indicated following Eq. (4.4) [30].

One can go further and say that without imposing coordinate conditions, the equations of motion can not be determined. Since the form of the equations may be altered by means of coordinate transformations, fixing the motion restricts the allowable coordinate transformations. In effect then, fixing the motion in advance is equivalent to the imposition of coordinate conditions. Thus without additional information about the coordinate system, one can not expect the surface integrals to yield significant information.

It is perhaps worth pointing out that second « time » derivatives do not appear in the equation for the descriptors defining the multipoles. Also, we have stressed the fact that our results were obtained when only $\mathfrak{G}^{\mu\nu} n_\nu = 0$ and $\mathfrak{G} = 0$. The latter equation can be removed if a superpotential is found, to replace the Komar one, which satisfies the criterion of Eq. (3.19) for a Killing vector. Then, having formulated initial values for the field variables, on a space-like hypersurface, consistent with the field equations independent of second « time » derivatives, one can find solutions of (4.11) and examine the multipole structure of the field in terms of the initial data alone.

REFERENCES

[1] A. Einstein and I. Grommer, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, **1** (1927).
[2] M. Mathisson, *Zeits. f. Physik*, **67**, 270 (1931); **67**, 826 (1931).
[3] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 66 (1938).
A. Einstein and L. Infeld, *Ann. Math.*, **41**, 455 (1940).
A. Einstein and L. Infeld, *Can. Jour. Math.*, **1**, 209 (1949).
[4] V. Fock, *J. Phys. U.S.S.R.*, **1**, 81 (1939).
[5] A. Pappapetrou, *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 57 (1951).
[6] L. Infeld, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 398 (1957).
[7] J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, **89**, 263 (1953).
[8] R. Schiller and P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **89**, 4 (1953).
[9] M. Mathisson, *Acta Phys. Pol.*, **6**, 163 (1937).
[10] J. Lubanski, *Acta Phys. Pol.*, **6**, 356 (1937).
[11] P. Havas, *Phys. Rev.*, **108**, 1351 (1957). To the writer's knowledge, this paper is the first to obtain a two body equation of motion by use of coordinate conditions.
[12] Greek indices range from 1-4, whereas Latin indices are restricted to 1-3. The comma denotes ordinary differentiation, $\varphi_{,\rho} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\varrho}$, while a semi-colon denotes covariant differentiation,

$$A_{\rho;\sigma} = A_{,\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} A_\mu .$$

[13] W. Tulczyjew, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **5**, 279 (1957).
W. Tulczyjew, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **6**, 645 (1958).
[14] A. Trautman, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **4**, 675 (1956).
[15] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity* (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1947), p. 196.
[16] P. von Freud, *Ann. Math.*, **40**, 417 (1939).
[17] H. Zatzkis, *Phys. Rev.*, **81**, 1023 (1951).
[18] P. G. Bergmann and A. I. Janis, *Phys. Rev.*, **111**, 1191 (1958).
[19] J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, **111**, 315 (1958).
[20] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **112**, 287 (1958).
[21] C. Møller, *Ann. of Phys.*, **4**, 347 (1958).
[22] A. Komar, *Phys. Rev.*, **113**, 934 (1959).

[23] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **75**, 680 (1949).
[24] The following abbreviations have been used :

$$\partial^{A} L = \frac{\partial L}{\partial y_{A}}, \qquad \partial^{A\rho} L = \frac{\partial L}{\partial y_{A,\rho}}, \qquad \partial^{A\rho\sigma} L = \frac{\partial L}{\partial y_{A,\rho\sigma}},$$

$$L^{A} = \partial^{A} L - (\partial^{A\rho} L)_{,\rho} + (\partial^{A\rho\sigma} L)_{,\rho\sigma}$$

[25] H. A. Lorentz, *Collective Papers* (Martinus Nijhoff, The Hague, 1937), vol. 5, p. 246 ff.
[26] P. G. Bergmann and J. H. M. Brunings, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949).
[27] J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus* (University of Toronto Press, Totonto, 1949), chap. VII.
[28] J. A. Schouten, Ricci-Calculus (Springer-Verlag, Berlin, 1954), p. 102-ff.
[29] A. Komar (private communication).
[30] J. N. Goldberg, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **4**, 16 (1959).
[31] A. Trautman, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **4**, 679 (1956).
[32] A. Komar (private communication).
[33] R. Sachs and P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **112**, 674 (1958).

DISCUSSION

Intervention de Mc Vittie

Voudriez-vous nous dire la raison de ce travail ? Est-il conçu comme un exercice d'analyse ou peut-il jeter une lumière sur des problèmes spécifiquement physiques ? Par exemple, rend-il la solution du problème des deux corps plus aisée ? Si c'est trop difficile, pourrait-on de cette manière avoir plus de renseignements sur le mouvement de la planète Mercure, que l'on peut obtenir par une solution directe ?

Intervention de P. G. Bergmann

Le but d'une théorie du mouvement en Relativité générale n'est pas d'obtenir la précession du périhélie plus efficacement, ou avec plus de précision, mais d'explorer jusqu'à quel point la théorie de la Relativité générale contient ces prévisions. Il y a un certain nombre de questions fondamentales dans la théorie du mouvement qui ne sont pas encore entièrement éclaircies. Sûrement, pour rattacher une observation ou une expérience donnée à la théorie, et vice versa, nous devons nous demander, encore et encore, à quel point la théorie prédit le mouvement des corps matériels dans le champ gravitationnel.

Accidentellement je pourrais signaler que l'hypothèse primitive, selon laquelle les corps se meuvent sur les géodésiques, n'est pas suffisante pour établir une théorie satisfaisante des systèmes d'étoiles doubles (qui a été faite par Robertson en se basant sur la théorie d'EIH), ou pour donner une théorie correcte du système Terre-Lune qui tienne compte de façon correcte des effets de marée.

THE EXPRESSION OF FIELD EQUATIONS IN TERMS OF FLUX FROM SOURCES

by C. W. KILMISTER
King's College, London *

RESUME

Une analyse attentive du concept de champ nous permet de donner une nouvelle déduction des équations de la Relativité générale. Celle-ci fournit des termes supplémentaires, qui pourtant n'ont pas présentement de conséquences observables. Ces nouveaux termes pourraient être significatifs et dans la théorie des ondes gravitationnelles, et dans la quantification du champ de gravitation.

1. — Introduction

This paper presents a modified form of the field equations of general relativity, and also a new way of looking at them. These have arisen in the course of a more general investigation [1], [2], [3], [4], [6], [7] of the role of certain algebraic structures in physical theories, but the present paper is independent of the results of this investigation. Instead it is based on a detailed analysis of the idea of a field, and on the problem of formulating the field equations in the form of integral relations between the flux of field over a closed surface and the total source strength within the surface. Such formulations are familiar to us for the Newtonian gravitational field, and for the electrostatic field, and many people (at least in England) find such a formulation very helpful in understanding the properties of the field.

2. — The idea of a field

2.1 Classically a « field » is a derived concept which we introduce to explain the primary experimental result that bits of the physical world affect each other in various ways. Not only would the analysis

* This work was assisted in part by Wright ADC, ARDC, USAF, through its European office.

of a set of n particles, each producing accelerations in all the others, be very complex; it would also be very difficult to write in a Lorentz covariant way. So we analyse the system into particles, which act as sources for fields, which in turn act on other particles. The fields act on the other particles according to the equations of motion; and they are related to their sources by the field equations. Historically the oldest such system is Newtonian gravitation, in which the equation of motion is, in a familiar notation,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,,$$

and the field equations are

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{F} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\ \mathbf{F} = -4\pi\mathcal{G}\rho\,. \tag{1}$$

The first field equation expresses the conservation of energy, and the second is equivalent to the flux theorem :

$$\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi\mathcal{G}\int_V \rho\, d\tau \tag{2}$$

This result enables us to think about the field in terms of tubes of force, etc.

2.2 It is well known that these results can be more conveniently expressed in an algebraic form by using Hamilton's quaternions. If e_1, e_2, e_3 are the quaternion units, so that

$$e_i\, e_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\, e_k\,, \quad (i, j, k = 1, \ldots, 3)\,,$$

we define the field quaternion $\mathrm{F} = \mathrm{F}_i\, e_i$ (summed over i), the surface element

$$\begin{aligned} d\mathrm{S} &= (e_2\, dy\cdot e_3\, dz + e_3\, dz\cdot e_1\, dx + e_1\, dx\cdot e_2\, dy) \\ &= e_3\, dy\, dz + \ldots, \end{aligned}$$

and the volume element

$$d\tau = e_1\, dx\cdot e_2\, dy\cdot e_3\, dz\,.$$

If now we write

$$\nabla = e_1\frac{\partial}{\partial x} + e_2\frac{\partial}{\partial y} + e_3\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

so that

$$\nabla\mathrm{F} = -\operatorname{div}\mathrm{F} + \operatorname{curl}\mathrm{F}\,,$$

the fields equations become simply

$$\nabla\mathrm{F} = 4\pi\mathcal{G}\rho\,, \tag{3}$$

and the flux theorem is

$$\int d\mathrm{S}\,\mathrm{F} = -\int d\tau\,\nabla\mathrm{F} = -4\pi\mathcal{G}\int d\tau\,\rho\,. \tag{4}$$

Although this simple example is not Lorentz invariant it contains two important lessons. The field equation (3) now contains both the original equations, one of which is usually included by the device of introducing a potential. Also the equation (3) suggests a generalisation in which ρ, F are replaced by general quaternions :

$$\rho + \alpha_i e_i, \qquad \varphi + \mathbf{F}.$$

The field equations (3) then state :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = -4\pi \mathcal{G} \rho, \qquad \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{curl}\,\mathbf{F} = 4\pi \mathcal{G} \alpha. \tag{5}$$

2.3. The field at a point is known, via the equations of motion, by the behaviour of test-particles (that is, particles not affecting the field to be measured). Therefore two cases arise :

(i) the change of motion of the test particle is independent both of the nature of the particle and of its motion;

or (ii) this independence does not hold.

In the first case we can by making measurements at one point only find nothing whatever about the field, since all the test-particles are acted on similarly. This is, of course, just the case of the principle of equivalence for the gravitational field. This field only has significance for two points; historically the two points chosen were a source-point and a field-point (as when one discusses the orbits of the planets and uses the sun as origin). An alternative approach, which has the advantage of preserving the analysis into fields and particles existing separately, is to consider two nearby points in the field (the « equation of geodesic variation » method). In any case at least two points must be specified to make a meaningful statement about the field; we call such fields *two-fields*.

In case (ii) it is possible to determine something about the field by using different test-particles at one point. It may not be possible to determine the field completely in this way (e. g. a combined electromagnetic and gravitational field), but we distinguish a « pure case » in which this is so, and call such a field a *one-field*. Although the two-field is in some ways conceptually simpler, our ideas of a classical field have mostly been developed with the electromagnetic field, which is a one-field. It is therefore easiest to begin with the analysis of Lorentz-invariant one-fields. (A typical non-relativistic one-field is simply that described in § 2.2, and there is no more to be said).

3. — The theory of Lorentz-invariant one-fields

3.1. The appropriate algebra to describe the Lorentz-invariant test-particle is well-known to be the direct square of quaternions, that is the algebra of Dirac matrices or of Eddington's E-numbers. If we define 4 generators E_α ($\alpha = 1, ..., 4$) such that :

$$\left.\begin{aligned} E_\alpha E_\beta + E_\beta E_\alpha &= 2\eta_{\alpha\beta}, \\ E_\alpha E_\beta - E_\beta E_\alpha &= 2E_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

the whole basis of 16 elements consists of :

$$1,\ E_\alpha,\ E_5,\ E_{\alpha 5},\ E_{\alpha\beta},$$

where :

$$E_5 = E_1 E_2 E_3 E_4.$$

[Here $\eta_{\alpha\beta}$ is the metric tensor of Minkowski coordinates,

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, -1, 1)].$$

Writing :

$$E^\alpha = \eta^{\alpha\beta} E_\beta,$$

we have also :

$$E^5 = E^1 E^2 E^3 E^4 = -E_5.$$

The velocity of a particle can be written :

$$V = E_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} = E_\alpha V^\alpha,$$

so that $V^2 = 1$, and the equation of motion for a test-particle must be of at least the second order (to allow for starting conditions corresponding to arbitrary position and velocity). Hence we assume it to be of the form :

$$\frac{dV}{ds} = \mathcal{G} = E_\alpha \mathcal{G}^\alpha, \tag{7}$$

where $\mathcal{G}$ depends both on the field and on the particle.

Since $V^2 = 1$ we have at once :

$$V_\alpha \mathcal{G}^\alpha = 0$$

so that $\mathcal{G}$ depends on V. The two forms :

$$\mathcal{G}^\alpha = H^{\alpha\rho} V_\rho, \qquad \mathcal{G}^\alpha = (\delta^\alpha_\mu - V^\alpha V_\mu) H^\mu,$$

where $H^{\alpha\rho} + H^{\rho\alpha} = 0$ are completely equivalent
(e. g. one may write :

$$H_\mu = H_{\mu\nu} V^\nu, \qquad H_{\mu\nu} = H_\mu V_\nu - H_\nu V_\mu)$$

and quite general if H^μ, $H^{\mu\nu}$ are allowed to depend on V.

The two simplest cases to consider are :

(i) Fields of type I, where $\mathcal{G}^\alpha = H^{\alpha\rho} V_\rho$ and $H^{\alpha\rho}$ is independent of V ;

(ii) Fields of type II, where $\mathcal{G}^\alpha = (\delta^\alpha_\mu - V^\alpha V_\mu) H^\mu$ and H^μ is independent of V.

A field which falls into neither class may be called of type III, but we shall not consider these here.

3.2. The quantities $H^{\alpha\rho}$, H^μ are not the field quantities, since they depend on the test-particle (although, in types I & II, not on its velo city). To determine their connexion with the field quantities we need a further assumption about the sources of the field. Since the test-particle is here specified completely by its velocity V we shall suppose that the sources of the field are made up of numbers of such particles.

The source term in the algebra must then be constructed in an invariant manner from a four-vector :

$$J^{\alpha} = \rho\, V^{\alpha},$$

where ρ is a scalar specifying the number of particles in the source. If we limit ourselves to the 16-fold algebra the most general source-term is then :

$$J = \varphi + E_{\alpha} J^{\alpha},$$

where φ is a scalar function of $J_{\alpha} J^{\alpha}$. (For the only invariant functions of J^{α} are its magnitude, and J^{α} itself. More complex invariants, e. g. $J^{\alpha} J^{\beta}$, are not expressible in the 16-fold algebra).

The flux equations is now easily proved to be [6] :

$$\int d^3 x\, F = \int d^4 x\, DF, \tag{8}$$

where :

$$\begin{aligned} d^3 x &= E_2 E_3 E_4\, dx^2\, dx^3\, dx^4 + \ldots.. \\ &= -(E_{15}\, dx^2\, dx^3\, dx^4 + \ldots..), \\ d^4 x &= E_1 E_2 E_3 E_4\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, d^4, \\ &= E_5\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4, \end{aligned}$$

and :

$$D = E^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Hence the field equations are :

$$DF = 4\pi J. \tag{9}$$

Since :

$$D^2 F = \square^2 F = 4\pi DJ,$$

we have a solution [9] (subject to appropriate conditions at infinity)

$$F = A' \int_{N'} DJ'\, d\omega' + (1 - A') \int_{N''} DJ''\, d\omega'' \tag{10}$$

where A' is arbitrary and the integrations are over the past and future null cones. Hence :

$$F = DA, \qquad A = \psi + E_{\alpha} A^{\alpha},$$

since A has the same form as J.

3.3. Now we notice that the field splits up, in a Lorentz invariant fashion, into a true scalar potential ψ, and a vector-potential A^{α}. Similarly F splits into :

$$F_{\mu} = \partial_{\mu} \psi, \tag{11}$$

$$F_0 + \frac{1}{2} F_{\nu\mu} E^{\mu\nu} = -\partial_{\mu} A^{\mu} + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) E^{\mu\nu}.$$

We cannot, in an invariant fashion, derive a field of type I for an (isotropic) particle from the scalar field; neither can we derive a field of type II from the vector field. (The proofs of these statements is immediate).

Let us first consider fields of type I and suppose accordingly that they are to be derived from the vector-potential field alone. In the special Lorentz frame in which the particle is at rest the six-vectors $H_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ form pairs of three-vectors $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. We have a functional dependence :

$$H_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\nu}(F_{\rho\sigma}).$$

First suppose that $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ are not parallel. Then we can certainly write:

$$\mathbf{H}_1 = \alpha_{11}\,\mathbf{F}_1 + \alpha_{12}\,\mathbf{F}_2 + \alpha_{13}\,\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2,$$
$$\mathbf{H}_2 = \alpha_{21}\,\mathbf{F}_1 + \alpha_{22}\,\mathbf{F}_2 + \alpha_{23}\,\mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2,$$

where the α_{ij} may depend on the magnitudes of $\mathbf{F}_1$ & $\mathbf{F}_2$. But, paying attention to the Lorentz invariance, we must have $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, and :

$$H_{\mu\nu} = \alpha\,F_{\mu\nu} + \beta\,F^*_{\mu\nu}, \tag{12}$$

where α, β depend only on the invariants of $F_{\mu\nu}$. In the case when the effects of two fields on a single particle are additive, α, β must be constants. If $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ are parallel then $F_{\alpha\beta} = i\,F^*_{\alpha\beta}$ so that $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ cannot be real; but in any case the same form results for $H_{\mu\nu}$.

We can give these equations several interpretations, according to values of α, β.

(i) If $\alpha = 1$, $\beta = 0$ always we have a model of a special relativistic theory of gravitation (since $\alpha = 1$ implies the principle of equivalence). Such a field is then unobservable at one point, but if we consider the source as well we can solve many problems. For example it is this field which gives the frequently-quoted result of an advance of perihelion of Mercury of 1/6 of the observed value (see e. g. [8]).

(ii) If $\beta = 0$ but α varies for different particles and is independent of $F_{\mu\nu}$, we have a theory almost identical with the usual Maxwell electrodynamics, and α is the charge-mass ratio. The field equations become :

$$\begin{aligned} \partial_\mu\, y^{*\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu\, y^{\mu\nu} + \partial^\nu\, y_0 &= 4\pi\, J^\nu, \end{aligned} \tag{13}$$

where :

$$y_{\mu\nu} = \partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu, \tag{14}$$

and :

$$y_0 = -\,\partial_\mu\, A^\mu.$$

The usual Maxwell theory imposes conservation of sources in the form :

$$\partial_\mu\, J^\mu = 0.$$

This results in the present theory if the Lorentz gauge condition is imposed on A^μ, but not otherwise. In general, we have instead :

$$4\pi\,\partial_\mu\, J^\mu = -\,\Box^2\,(\partial_\mu\, A^\mu),$$

so that :

$$J^\mu + \frac{1}{4\pi}\,\Box^2\, A^\mu \tag{15}$$

is the conserved vector. These equations represent a modification of Maxwell's which allow for creation of charge. Another such modification was suggested recently by LYTTLETON & BONDI [5], but the present one differs from theirs in still allowing the description of the field in terms of flux from sources.

(iii) If $\beta \neq 0$ we have a Maxwell-type theory in which also free poles are allowed.

3.4. For fields of type II we must have :

$$H_\mu = \alpha F_\mu = \alpha \partial_\mu \psi,$$

where α may depend on the magnitude of F_μ but in the simplest case does not. Hence :

$$\frac{dV^\mu}{ds} = \alpha (F^\mu - V^\mu V_\nu F^\nu). \tag{16}$$

This is most easily interpreted by writing :

$$\frac{d}{ds}(m V^\mu) = m \alpha F^\mu \tag{17}$$

where $m = m_0 e^{\alpha\psi}$. The ψ is then visualized as potential energy, which increases the mass m accordingly. The field equations are :

$$\partial_\mu F^\mu = 4\pi \varphi, \qquad \partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu = 0.$$

If $\alpha = 1$ always we have another candidate for a special relativistic theory of gravitation; this one gives about 1/3 of the observed perihelion advance. ([8], p. 71).

3.5. The conclusion of this paragraph, and also of § 2.2, is that once the algebraic structure of the fields has been specified, and if we think of a field in terms of the flux from its sources, there is not much latitude in the choice of field equations. Moreover the structure appropriate to Newtonian (non-relativistic) gravitation is quaternion algebra, and that to electrodynamics is the 16-fold algebra. This algebra is also appropriate to certain Lorentz invariant gravitation theories. Since a two-field is to be observed by using two test-particles, one may guess that the appropriate algebraic structure for its description the direct product of two such algebras.

4. — The theory of two-fields

4.1. Our definition of a two-field implies that at each point there exists a coordinate-system relative to which any particles at the point are unaccelerated. Locally the geometry in such a coordinate-system is Minkowski, and so we can define the same algebraic structure as in § 3.1. But unless the two-field is zero such a coordinate-system is only possible locally; virtually the only possible geometry for the whole domain is the Riemannian one, and the E_μ at each point can be represented as local orthogonal components of functions $\mathscr{E}_\mu$ of position, satisfying :

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\mu \mathscr{E}_\nu + \mathscr{E}_\nu \mathscr{E}_\mu &= 2 g_{\mu\nu}, \\ \mathscr{E}_\mu \mathscr{E}_\nu - \mathscr{E}_\nu \mathscr{E}_\mu &= 2 \mathscr{E}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{18}$$

We can then define the contravariant $\mathscr{E}^\mu$ and the affine connexion by :

$$\mathscr{E}^\mu = g^{\mu\nu} \mathscr{E}_\nu, \qquad \mathscr{E}_{\mu,\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \mathscr{E}_\sigma, \tag{19}$$

with $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. It follows that $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ is the Christoffel bracket connexion. If :

$$\mathbf{A} = \mathscr{E}_\mu \mathrm{A}^\mu,$$

then :

$$\mathbf{A}_{,\sigma} = \mathscr{E}_\mu \mathrm{A}^\mu{}_{;\sigma}\,, \tag{20}$$

where a comma denotes ordinary differentiation, and a semi-colon covariant differentiation.

4.2. In most discussions of relativity on these lines it is usual to assume now the geodesic postulate as a generalisation of Newton's first law. We do not do this yet. Instead consider two nearby orbits of test-particles from a field of such orbits defining everywhere in a domain the unit tangent $\boldsymbol{t} = t^\alpha \mathscr{E}_\alpha$. If $\boldsymbol{y} = y^\alpha \mathscr{E}_\alpha$ is the infinitesimal vector orthogonal to one orbit and intersecting the other, we have as usual :

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{ds} = y^\alpha \Phi_\alpha\,,$$

where :

$$\Phi_\alpha = \boldsymbol{t}_{,\alpha} - \frac{\delta t_\alpha}{\delta s} \boldsymbol{t}\,. \tag{21}$$

We expect an equation of motion of the second order, since we can choose an arbitrary starting point and value of $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{ds}$; and we easily calculate :

$$\frac{d^2\boldsymbol{y}}{ds^2} = - \mathscr{E}^\mu \mathrm{R}_{\mu\nu\sigma\rho}\, t^\nu y^\sigma t^\rho + y^\sigma \Lambda_\sigma, \tag{22}$$

where :

$$\Lambda_\sigma = (v_{\rho;\sigma} - v_{\sigma;\rho})\, t^\rho \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}_{,\sigma} - 2 v_\sigma \boldsymbol{v}\,, \tag{23}$$

and :

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.$$

(Of course if $\boldsymbol{v} = 0$ we get the usual equation of geodesic variation).

4.3. We should expect to get more terms than the usual equation of geodesic variation because if any one-field is present, it is again represented (as its derivative) as a two-field. We can however recognise the part of $\dfrac{d^2\boldsymbol{y}}{ds^2}$ which represents the reducible two-fields produced in this way, since it will depend on the curvature of the original path, and not merely on its direction. This is the part represented by Λ_σ; now we can prove that a necessary and sufficient condition for $\Lambda_\sigma = 0$ is that $\boldsymbol{v} = 0$, which implies that the original orbits are geodesics. Such a condition is obviously sufficient. To prove the necessity take a scalar product with $\boldsymbol{t}$:

$$0 = t^\varrho (v_{\rho;\sigma} - v_{\sigma;\rho}) + t^\alpha v_{\alpha;\sigma},$$

(since $t^\alpha v_\alpha = 0$). Hence, in particular,

$$t^\sigma \frac{\delta v_\sigma}{\delta s} = 0,$$

so that:

$$v_\sigma \frac{\delta t^\sigma}{\delta s} = v_\sigma v^\sigma = 0.$$

But v_σ cannot be null, since it is orthogonal to a timelike vector, which proves the result $\boldsymbol{v} = 0$.

Thus if we can ignore the effect of one-fields we have the usual equation of geodesic variation, and it follows that the appropriate quantities to describe the two-field are the Riemann symbols $R_{\mu\nu\sigma\rho}$.

4.4. In terms of the 256-fold algebra such a field can be written:

$$\mathbf{R} = R_{\mu\nu\sigma\rho}\, \mathcal{E}^{\mu\nu} \times \mathcal{E}^{\sigma\varrho}. \tag{24}$$

It is then possible to write the equation of motion (22) algebraically, but as it is rather complex there is no advantage in doing so. Since $R_{\mu\sigma\nu\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu}$, it does not matter which set of $\mathcal{E}_\mu$ is used to describe the coordinates, columes &c. We accordingly postulate the field equations by equating the flux of R across a closed surface to the total source within it, i. e.:

$$\int d^3x\, \mathbf{R} = \int d^4x\, \mathbf{J}$$
$$= \int d^4x\, \mathrm{D}\mathbf{R}, \tag{25}$$

where:

$$\begin{aligned} d^3x &= (\mathcal{E}_2\, \mathcal{E}_3\, \mathcal{E}_4\, dx^2\, dx^3\, dx^4 \,....) \times 1, \\ d^4x &= (\mathcal{E}_5\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4) \times 1, \\ \mathrm{D} &= (\mathcal{E}^\alpha\, \partial_\alpha) \times 1. \end{aligned}$$

The field equations are then:

$$\mathrm{DR} = \mathrm{J}, \tag{26}$$

which reduce to:

$$R^{\mu\nu\sigma\varrho}{}_{;\rho} = J^{\mu\nu\sigma}, \quad R_{\mu\nu(\sigma\rho;\kappa)} = 0. \tag{27}$$

The second equation is of course an identity, and simply implies that the source J is not in fact so complex as it might be (as in the electromagnetic case, where there are no free poles).

Using the second equation in the first gives at once that

$$R_{\sigma\mu;\nu} - R_{\sigma\nu;\mu} = J_{\mu\nu\sigma},$$

which makes it clear that, in the absence of sources ($J_{\mu\nu\sigma} = 0$), any solution of the field equations of general relativity is also a solution of the present equations. But it also follows, as was shown by LICHNEROWICZ, that any solution of

$$R_{\sigma\mu;\nu} - R_{\sigma\nu;\mu} = 0\,, \tag{28}$$

which satisfies the condition $R_{\mu\nu} = 0$ on some hypersurface, also satisfies $R_{\mu\nu} = 0$ everywhere. It follows that in the source-free case the equations (28) give identical results to the usual equations for all problems in which we assume flatness at infinity; and this includes all the present experimental checks on general relativity. An experimental differentiation between the two theories will only be possible for a solution which is not flat at infinity.

4.5. The nature of the source term $J^{\mu\nu\sigma}$ has not yet been fully investigated. It has 20 independent components, since $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\, J^{\mu\nu\sigma} \equiv 0$, and these are further restricted by 6 « conservation » identities

$$J^{\mu\nu\sigma}{}_{;\sigma} = 0\,. \tag{29}$$

These identities are at first sight severe ones, whereas the corresponding identity in electromagnetic theory was simply the equation of continuity for charge. Thus if we imagined a medium made up of a large number of point-sources, of density ρ, with « charge-current » vector J^{σ}, we would have

$$(\rho\, J_{\mu})_{;\nu} - (\rho\, J_{\nu})_{;\mu} = 0\,.$$

But in fact such sources are not the appropriate ones to consider; and if we write down (e. g.) a Schwarzschild interior solution, the resultant source term must certainly satisfy (29) identically. The investigation of these sources is continuing.

5. — Conclusion

5.1. It has been shown that Newtonian gravitation, various special relativistic « gravitational » theories, Maxwell's electrodynamics (including one possibility of creation of charge) and general relativity (in a suitably modified form) all have field equations of the form

$$\int dS\ F = \int d\tau\, D\, F$$

in a suitable algebra. Moreover fixing the algebra goes a long way to fixing the actual field equations.

In particular the field equations proposed for general relativity are differential equations for the local gravitational field variables, instead of algebraic equations. They have the form used by LICHNEROWICZ for quantising the gravitational field; and they may have important solutions, not flat at infinity, which are not solutions of the usual field equations.

5.2. Some of the work of § 3 and in particular the realisation that an algebraic structure enables us to extend the flux theorem to Maxwell's electrodynamics is due to my colleague D. J. Newman. I wish to express my gratitude to him for a number of helpful discussions.

REFERENCES

[1] E. W. Bastin & C. W. Kilmister, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50**, 1954, 278.
[2] E. W. Bastin & C. W. Kilmister, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 1955, 454.
[3] E. W. Bastin & C. W. Kilmister, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53**, 1957, 462.
[4] E. W. Bastin & C. W. Kilmister, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **55**, 1959, 66.
[5] R. A. Lyttleton & H. Bondi, *Proc. Roy. Soc.* (A) **252**,1959, 313.
[6] D. J. Newman, *Proc. Roy. Irish Acad.* (A) **59**, 1958, 29.
[7] D. J. Newman, *Mathematika*, **5**, 1958, 146.
[8] G. Stephenson & C. W. Kilmister, *Special Relativity for Physicists :* London, 1958.
[9] J. L. Synge, *Relativity : the Special Theory :* North Holland, 1956, p. 408.

DISCUSSION

Intervention de A. J. Coleman

A. J. Coleman. — Vourdiez-vous expliciter, en l'absence des sources, les liens qui existent entre vos équations et celles de la Relativité générale, dans un sens comme dans l'autre ?

C. W. Kilmister. — Les équations qui sont en l'absence des sources :

$$\left.\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho\,;\mu} &= 0 \\ R^{\mu}{}_{\nu\,(\sigma\rho\,;\tau)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

peuvent s'écrire :

$$R_{\mu\nu\,;\rho} - R_{\mu\rho\,;\nu} = 0\,.$$

Aussi : (i) toute solution de la Relativité générale :

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda g_{\mu\nu}$$

vérifiera également (1), mais la réciproque n'est pas vraie. Cependant (ii) Lichnerowicz a montré que si $R_{\mu\nu} = 0$ sur une quelconque hypersurface initiale et si également :

$$R_{\mu\nu\,;\,\sigma} - R_{\mu\sigma\,;\,\nu} = 0$$

alors $R_{\mu\nu} = 0$ partout. Par suite, toute solution de (1) qui est telle qu'il existe une hypersurface sur laquelle $R_{\mu\nu} = 0$ c. à d. toute solution de (1) qui est « plate » à l'infini et à tout instant) est également une solution de la Relativité générale.

MODÈLES RELATIVISTES DE PARTICULES A SPIN ET LIGNES D'UNIVERS ISOTROPES

par Jean WEYSSENHOFF,
Université Jagellon, Kraków (Pologne)

SOMMAIRE

En théorie de l'électron de Dirac la quantité de mouvement de l'électron cesse d'être parallèle à sa vitesse. Le même phénomène apparaît en mécanique relativiste généralisée, mais non-quantique d'Einstein-Mathisson (et successeurs) et conduit à l'apparition dans les équations du mouvement de dérivées d'ordre supérieur au second. Mais pour accentuer la correspondance entre la théorie quantique et les « modèles relativistes » de particules à spin, il faut en outre tenir compte du fait que chez Dirac la vitesse en cause est égale à la vitesse de la lumière; on doit donc considérer des singularités du champ gravitationnel qui sont des lignes d'Univers isotropes et cesser de considérer ces singularités comme représentant des particules matérielles (d'après la conception d'Einstein), mais leur faire jouer en même temps le rôle d'une sorte de mouvement interne de la particule « en son entier ».

L'algorithme tensoriel des lignes isotropes présente quelques différences par rapport à l'algorithme habituel et facilite l'établissement d'une correspondance avec le formalisme de Dirac.

Depuis que Dirac a trouvé l'équation d'ondes de l'électron à spin, on considère généralement le spin comme un phénomène purement quantique. Cependant les travaux de Mathisson et de ses continuateurs ont montré que le traitement correctement relativiste non quantique des particules à spin comme singularités du champ gravifique conduit à d'autres équations de mouvement qu'en théorie primitive d'Einstein, et que sous différents rapports les particules, obéissant à ces équations, ont un comportement curieusement semblable à celui des électrons de Dirac. L'affinité des deux points de vue se manifeste très clairement par exemple dans l'indépendance des notions de vitesse et d'impulsion, conformément à une expression de Schrödinger. Il me semble juste d'attacher de l'importance à ces coïncidences, car elles découlent des principes les plus fondamentaux de la théorie de la relativité avec un minimum d'hypothèses, qui de plus s'imposent tout naturellement comme les plus simples possibles.

Les travaux qu'on pourrait grouper sous le titre de traitement relativiste classique (non-quantique) du phénomène du spin sont déjà très nombreux, mais forment jusqu'à présent un tout très incohérent. J'en ai donné récemment un aperçu incomplet et subjectif, dans un article de la Planck-Festschrift. En particulier l'Ecole de Paris est arrivée à des résultats très intéressants dans une voie fort rapprochée, plus encore peut-être qu'on pourrait le croire à première vue. Mais ici je me propose de parler d'une autre possibilité, qui me paraît la plus rationnelle et la moins arbitraire, pour passer des fondements de la théorie de la relativité jusqu'à quelque chose de très ressemblant à une particule élémentaire à structure interne.

Pour faciliter le language je vais me permettre d'introduire un néologisme, et d'appeler « picophysique » la physique des plus petites dimensions, celle de la structure interne des particules élémentaires ou, ce qui revient presque au même, des phénomènes non localisables; la longueur élémentaire y jouera probablement un rôle décisif, et ne pourra pas être négligée comme en macrophysique (ni en microphysique, domaine de la théorie contemporaine des quanta).

Il me semble que la différence essentielle entre picophysique et macrophysique consiste dans le rôle tout-à-fait différent joué dans les deux domaines par les observateurs. Ceux-ci peuvent être considérés comme « observateurs-points » en macrophysique, et à plus forte raison en cosmophysique, mais non en picophysique où, au contraire, les observateurs deviennent pratiquement infiniment grands, ou peut-être pour mieux dire, où les observateurs se trouvent toujours pratiquement à l'infini. De ce point de vue la plupart des théories actuelles des phénomènes picophysiques apparaissent comme grossièrement macroscopiques. S'il en était vraiment ainsi, le schéma spatio-temporel habituel cesserait de s'appliquer en picophysique et la théorie de la relativité serait confinée à la macrophysique, conformément au caractère clairement macroscopique de ses origines. Alors la question se poserait de savoir comment s'effectue le passage de la picophysique à la macrophysique. Justement les théories — encore strictement relativistes — dont je me propose de parler semblent indiquer une certaine possibilité de résoudre ce problème.

Pour aborder maintenant notre sujet propre, revenons par la pensée à l'année 1927, au courant d'idées bien connu, inauguré par Einstein et Grommer ainsi que par Darmois. Les théories dont je veux vous parler pour commencer peuvent être considérées à juste titre comme le développement logique et inévitable de ce programme. Ensuite, je vais introduire une certaine modification de ces théories qui semble s'imposer. Nous savons tous que les particules de matière y sont considérées comme des singularités quadridimensionnellement filiformes du champ gravifique. Dès le début il était clair que pour obtenir les équations du mouvement habituelles, c'est-à-dire les équations des lignes géodésiques, il fallait associer à la singularité des propriétés spéciales quoique très simples. EINSTEIN s'intéressait spécialement à retrouver les équations des géodésiques, et c'est MATHISSON qui le premier se posa la question de ce que seraient les équations de mouvement de singularités plus complexes que la singularité à symétrie sphérique d'Einstein. Au lieu d'admettre que le champ gravifique propre de la particule dans son voisinage immédiat est statique, et à symétrie sphérique dans chaque hyperplan orthogonal à sa ligne d'Univers, MATHISSON a représenté ce champ par une série de multipoles gravifiques. Il serait arrivé à la solution la plus générale des équations du mouvement d'une particule uni-dipolaire, s'il n'avait pas égalé à zéro un quadrivecteur apparaissant dans ses calculs. Les travaux de MATHISSON démontrent définitivement que pour être strict on ne devrait pas dire, comme on le fait souvent, que les équations de mouvement des particules matérielles découlent des équations différentielles du champ gravifique, mais de ces équations et en même temps des propriétés des singularités considérées.

Je ne peux pas entrer ici dans les détails des théories de MATHISSON et de ses continuateurs. Je voudrais dire seulement que je suis d'avis de prendre le programme d'EINSTEIN et GROMMER tout à fait au sérieux; si par exemple on obtient pour une certaine sorte de singularités des équations de mouvement du troisième ordre, et si l'on soupçonne cette singularité d'avoir un sens physique, la question qui se pose n'est pas d'expliquer son comportement en partant des lois de la mécanique de second degré de Newton-Einstein, mais de tâcher de comprendre comment il se fait qu'en macrophysique nous n'observons pas directement la « pico-particule », comme je me permettrai dès maintenant d'appeler la singularité, mais seulement une sorte de moyenne, une « macroparticule », qui, elle , obéit à des équations différentielles de second degré. De même si une picoparticule se déplace en l'absence d'un champ extérieur, d'après ses propres lois de mouvement, sur un cercle, on ne doit pas se demander ce qui l'attire au centre du cercle, pas plus qu'on ne demande en mécanique de Newton pourquoi une particule libre suit une trajectoire rectiligne avec une vitesse constante.

Dans les dernières phrases, en parlant de picoparticules, j'ai commencé à passer à un autre mode de poser le problème, que je voudrai maintenant reprendre d'une manière plus systématique. Je pense que même la plus simple et la mieux connue des particules de Mathisson, la particule uni-dipolaire (avec la condition II (4) ci-après) ne peut pas représenter une particule véritable, même approximativement. En effet, une telle particule libre se meut (dans un repère inertial approprié) sur un cercle, dont le rayon peut atteindre des dimensions macroscopiques. Rien de pareil ne se passe en réalité : on n'a jamais observé jusqu'à présent de particules à trajectoires courbes dans une chambre de Wilson sans champ magnétique. Il est facile de lever cette difficulté. Il suffit, en se laissant guider par l'analogie avec l'électron de Dirac, de passer au cas où la singularité à spin se déplace à la vitesse de la lumière. Si l'on fait ce passage d'une manière correcte, le rayon du cercle devient constant et de dimensions submacroscopiques. Je propose dès lors, comme je l'ai déjà dit, de nommer la singularité elle-même « picoparticule », et de ne pas la considérer comme représentant l'électron (ou toute autre particule élémentaire). C'est seulement sa position moyenne, son mouvement en entier, qui vient jouer le rôle de la « macroparticule ». Je dois avouer qu'en fin de compte ce n'est qu'une façon de parler, qui revient presqu'au même que d'envisager une « particule non-localisable », mais je vais me permettre de me servir aujourd'hui de cette façon de parler. La distinction entre les deux genres de particules, très nette en l'absence de forces extérieures, perd peu à peu son sens précis pour des macroparticules dans un champ extérieur de plus en plus intense, ce qui fait naître d'ailleurs différents espoirs, encore trop vagues cependant pour qu'on puisse en parler en public.

Revenons donc au passage des particules de Mathisson aux picoparticules qui se déplacent à la vitesse de la lumière. Dans la suite, je vais poser cette vitesse dans le vide comme égale à 1, et je vais distinguer les deux cas envisagés simplement par $v < 1$ et $v = 1$. On peut passer des formules du premier cas à celles du second « par tâtonnement » (on l'a déjà fait). Mais on peut le faire aussi d'une manière tout-à-fait systématique. En tout cas cette sorte de passage à la limite ne peut être exécutée autrement que d'une manière formelle, parce qu'en réalité il est impossible d'accélérer une particule $v < 1$ (à masse propre constante) de manière que sa vitesse devienne strictement égale à la vitesse de la lumière. Il y a, comme nous le savons tous, entre la vitesse de la lumière et toute vitesse inférieure une différence essentielle, une différence de qualité et non de quantité. L'xpression « approximativement égale » à la vitesse de la lumière n'a aucun sens absolu ; tout ce qui se meut à la vitesse de la lumière doit le faire — pareillement à une onde plane monochromatique — depuis toujours et pour toujours. Cette circonstance aussi plaide en faveur de l'hypothèse de picoparticules communes à toutes les particules élémentaires.

Le passage en question s'effectue alors en deux pas : on commence par introduire dans les formules valables pour le cas $v < 1$ un paramètre arbitraire π au lieu du temps propre τ, après quoi on déforme la ligne d'Univers de la particule de façon à la rendre tangente partout aux cônes élémentaires correspondants. Cette ligne devient alors isotrope, en général curviligne, il n'y a plus de repère propre de la particule ; le temps propre de la particule cesse de couler et sa quadrivitesse d'exister. Au lieu de celle-ci on peut définir un « quasivecteur d'espace-temps » $v^\mu = dz^\mu/d\pi$ qui est un « vecteur dépendant de la paramétrisation » et vérifie l'équation :

$$(vv) \equiv v_\mu v^\mu = 0.$$

Le formalisme quadridimensionnel qu'on obtient alors est écrit au moyen 1° de « quasitenseurs d'ordre zéro », c'est-à-dire de tenseurs quadridimensionnels ordinaires, 2° de « quasitenseurs d'ordre 1 », comme v^μ, à composantes proportionnelles aux composantes de tenseurs ordinaires et 3° de « quasitenseurs d'ordres supérieurs », qui en général ne sont pas même proportionnels à des tenseurs ordinaires. D'une façon plus précise, on peut dire que les quasitenseurs de n-eme ordre se transforment comme les dérivées n-emes de tenseurs ordinaires par rapport à un paramètre arbitraire.

J'appellerai « formalisme homogène » le formalisme auquel on aboutit de cette manière. Il s'applique à tout changement régulier, monotone, non nécessairement linéaire du paramètre arbitraire. S'il en est ainsi, nous pouvons convenir d'effectuer une transformation de π avec chaque transformation de Lorentz, de façon à faire $\pi = t$ dans chaque référentiel inertial. C'est dans ce « formalisme homogène restreint » que j'ai écrit une partie des formules ci-dessous. (L'index G se rapporte au référentiel inertial dans lequel $\vec{G} = 0$).

J'arrive maintenant à la remarque principale que je voulais soumettre à votre attention. Il me semble que la correspondance entre l'équation de l'électron de Dirac et les équations relativistes non-quantiques se rapporte justement aux équations du formalisme homogène restreint mieux qu'au formalisme quadridimensionnel habituel. Je vais tâcher de m'expliquer en passant en revue les formules que j'ai rassemblées ici en cinq groupes, les trois derniers se rapportant spécialement au formalisme homogène.

Dans le premier groupe il n'est pas encore question de vitesse ni de ligne d'univers. Le quadrivecteur G^{μ} qui y apparaît est le vecteur d'impulsion-énergie d'un système quelconque, punctiforme où étendu. On peut dire que l'impulsion et l'énergie n'y sont pas encore localisées. D'une manière tout-à-fait formelle on peut introduire une « macrovitesse » $\vec{V}$ et une « macroquadrivitesse » U^{μ}, mais ces vitesses, elles aussi, ne sont pas localisées. Remarquons que c'est l'équation encadrée I (5) de ce groupe que Dirac a linéarisée. Si l'on considère l'impulsion et la vitesse comme deux grandeurs initialement indépendantes, on peut dire que cette linéarisation fait apparaître à la fois la vitesse et le spin, et il n'y a pas de raison pour la vitesse de surgir parallèle à l'impulsion. Ce n'est qu'en posant $s_{\mu\nu} = 0$ qu'on identifie les directions de ces deux grandeurs.

Dans le groupe II ($v < 1$) qui se rapporte à une particule uni-dipolaire de Mathisson, figure l'équation encadrée II (5a) qui, d'après Breit (1928), répond par correspondance à l'équation de Dirac (après linéarisation). La présence de l'expression $\sqrt{1 - v^2}$ y paraît suspecte, puisqu'elle devrait être égale à zéro d'après la théorie de Dirac. Rien ne semble aussi indiquer qu'il faille interpréter le v^2 dans cette équation comme égal à G^2/M^2.

Les équations des groupes III-V concernent le cas $v = 1$; celles du troisième groupe correspondent une à une aux équations du second groupe; celles du quatrième sont spécifiques pour le cas $v = 1$; et le groupe V contient quelques formules du formalisme hamiltonien homogène pour une particule à spin. Evidemment, la picoparticule ne peut pas avoir de masse propre différente de zéro, mais il est aussi incorrect de dire que sa masse propre disparaît. En vérité le scalaire m_0 du cas $v < 1$ se transforme en un « scalaire dépendant de la paramétrisation » $\mathfrak{m}$, et c'est ce quasiscalaire $\mathfrak{m}$ qui figure dans l'équation encadrée III (5*a*), qui semble mieux correspondre à l'équation de Dirac que l'équation II (5*a*). Je n'ai pas écrit $\mathcal{H}$ pour M, car c'est justement une question à discuter, puisqu'en formalisme homogène il n'y a pas, comme on le sait bien, de fonction de Hamilton unique $\mathcal{H}$. C'est seulement l'équation $\mathcal{H} = 0$ qui a un sens précis, et chaque fonction régulière de $\mathcal{H}$ et de nouveau une fonction $\mathcal{H}$.

Il est intéressant que ce soit justement la « quasimasse » $\mathfrak{m}$ de la picoparticule qui joue le rôle de la fonction de Lagrange dans le formalisme d'Ostrogradzky homogénisé (à fonction de Lagrange dépendant de dérivées d'ordre supérieur au premier) (1). Si l'on admet que l'intégrale $\int \mathcal{L}\, d\,\pi$, où $\mathcal{L}$ est fonction des $v^\mu = z'^\mu(\pi)$ et des $a^\mu = v'^\mu$, doit être invariante relativiste et indépendante de la paramétrisation, on démontre sans difficulté que $\mathcal{L}$ doit être proportionnelle à $\mathfrak{m}$. En effet, à partir des deux quasivecteurs susdits, on ne peut construire que trois quasiscalaires (ou invariants relatifs) indépendants (**vv**), (**va**) et (**aa**); mais dans notre cas les deux premiers disparaissent et il ne reste que le troisième. Il faut en tirer la racine quatrième pour obtenir un quasiscalaire de première espèce, qui multiplié par $d\pi$ donne un scalaire. Mais d'après IV (13) $\mathfrak{m}$ est justement proportionnel à $[-(aa)]^{1/4}$.

Sans pouvoir ici discuter les détails, j'ai inscrit au groupe V quelques formules se rapportant au principe de Hamilton et au formalisme canonique généralisé. En terminant, je voudrais encore remarquer que ce principe se distingue de tous ceux qu'on a proposés jusqu'à présent pour déduire les équations du mouvement d'une particule à spin ou d'un fluide à spin, par le fait qu'on n'introduit dans la fonction de Lagrange aucune grandeur spéciale se rapportant au spin, mais que le spin apparait automatiquement.

Ma conférence serait incomplète si je ne pouvais ajouter quelques remarques sur les rapports très intimes qui semblent exister entre les picoparticules et le champ électromagnétique. On peut craindre que le calcul exact du rayonnement émis par une charge animée de la vitesse de la lumière présente de graves difficultés. Mais de simples raisonnements approchés peuvent éclaircir déjà beaucoup la situation. On peut calculer facilement qu'une charge électrique ponctuelle, se déplaçant à la vitesse de la lumière sur un cercle de diamètre $r_G = s_G/M_G$ (où M_G est la masse au repos de l'électron) perdrait par rayonnement la moitié de son énergie en une dizaine de tours. Mais tout change si l'on admet que notre picoparticule porte en plus de sa charge un moment magnétique (perpendiculaire à la direction de son mouvement). Un dipole

(1) J. Weyssenhoff, *Acta Phys. Polon.*, *9*, 49 (1951).

magnétique en mouvement produit, comme on le sait, un dipole électrique perpendiculaire à lui-même et à la direction de son vol. Si ce moment électrique a une valeur juste égale au produit de la charge par le rayon et un signe approprié, la particule cesse de rayonner, car son champ électrique devient par superposition celui d'une charge électrique en repos au centre du cercle. La « condition de non-radiation » donne $er_G = \mu$, où μ est la grandeur du moment magnétique. En y introduisant la valeur du rayon propre de la macroparticule $r_G = s_G/M_G$ on obtient $e\, s_G = \mu\, M_G$, c'est-à-dire $\mu/s_G = e/M_G$. Ainsi la « condition de non-radiation » conduit automatiquement à la valeur correcte du rapport gyromagnétique. En même temps nous obtenons une nouvelle preuve de la supériorité du modèle modifié $v = 1$, car pour le modèle $v < 1$ la condition de non-radiation n'est vérifiée qu'approximativement pour de faibles vitesses v.

Je passe sous silence les interprétations très simples des conditions de non-apparition des états d'énergie négative données par le modèle modifié (déplacement du centre du cercle petit en comparaison de son rayon) et non-production de paires (constance approximative de M_G au passage à travers un champ électromagnétique). Je terminerai ma conférence en rappelant le fait, qui me semble important, qu'on peut prouver pour une particule chargée à spin du genre considéré que, même dans un champ électromagnétique quelconque, le produit $M_G\, s_G$ reste strictement constant.

FORMULAIRE

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \qquad c = 1,$$
$$(a\, b) \equiv a_\mu b^\mu, \qquad \mu, \nu \ldots = 1, 2, 3, 4.$$

I. — *Les quadrivecteurs « impulsion » et « macro-vitesse » d'un système matériel (ponctuel ou étendu).*

$$G^\mu \equiv \{\vec{G}, M\}$$

$$M_G \equiv \sqrt{(G\,G)} \quad (1) \qquad U^\mu \equiv G^\mu/M \quad (2)$$

$$\vec{V} = \vec{G}/M \quad (3) \qquad M = M_G/\sqrt{1 - V^2} \quad (4)$$

$$\boxed{H^2 = M^2 = M_G^2 + G^2} \quad (5)$$

II. — *La particule à spin « mono-dipole » de Mathisson* ($v < 1$).

$$z^\mu \equiv z^\mu(\tau), \qquad \equiv \frac{d}{d\tau}, \qquad \equiv \frac{d}{dt}, \qquad \gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$$

« pico-quadrivitesse » :

$$u^\mu \equiv \dot{z}^\mu = \gamma\,\{\vec{v}, 1\}\ ;$$

$$a^\mu \equiv \dot{u}^\mu = \ddot{z}^\mu = \gamma^2\,\{\vec{a} - \gamma^2\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\,\vec{v},\ \gamma^2\,\vec{v}\cdot\vec{a}\}\ ;$$

$$\vec{s} \equiv \{s^{23}, s^{31}, s^{12}\}\,, \qquad \vec{q} \equiv \{s^{14}, s^{24}, s^{34}\}\,,$$

$$(u\,u) = 1 \qquad (1) \qquad\qquad \dot{G}^\mu = 0 \qquad \begin{cases} \vec{G}' = 0 \\ M' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\dot{s}^{\mu\nu} = G^\mu\,u^\nu - G^\nu\,u^\mu \qquad \begin{cases} \vec{s}\,' = \vec{G}\wedge\vec{u} \\ \vec{q}\,' = \vec{G} - \vec{M}\,v \end{cases} \qquad (3)$$

$$s^{\mu\nu}\,u_\nu = 0 \qquad \begin{cases} \vec{q} = \vec{v}\wedge\vec{s} \\ \vec{q}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$$m_0 \equiv (G\,u)\,, \qquad \{m_0 = \gamma\,(M - \vec{v}\cdot\vec{G}) = \frac{M_G\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}^2)}{\sqrt{(1-v^2)\,(1-V^2)}} \qquad (5)$$

$$\boxed{H = M = \vec{v}\cdot\vec{G} + m_0\sqrt{1 - v^2}} \qquad (5a)$$

de (4) :

$$s^{[\mu\nu}\,s^{\rho\sigma]} = 0\,, \qquad \{\vec{s}\cdot\vec{q} = 0 \qquad (6)$$

de (3) *et* (4) :

$$G_\mu = m_0\,u_\mu + s_{\mu\nu}\,\dot{u}^\nu \qquad \begin{cases} \vec{G} = \gamma\,(m_0\,\vec{v} + \gamma\,\vec{a}\wedge\vec{s}) \\ M = \gamma\,(m_0 - \gamma\,\vec{a}\cdot\vec{q}) \end{cases} \qquad (7)$$

de (4), (2) *et* (7) :

$$m_0 = \text{const.} \qquad (8)$$

de (3) *et* (4) :

$$\frac{1}{2}\,s_{\mu\nu}\,s^{\mu\nu} = \text{const.}, \qquad \{\vec{s}^{\,2} - \vec{q}^{\,2} = \text{const.} \equiv s_0^{\,2} \qquad (9)$$

III. — *Cas* $v = 1$: *formules analogues à celles du cas II.*

$$z^\mu \equiv z^\mu\,(\pi), = z^\mu\,(t)\ ; \qquad {}' \equiv \frac{d}{d\pi}, = \frac{d}{dt}.$$

Quasiquadrivitesse :

$$v^\mu \equiv z'^\mu = \{\vec{v}, 1\} \quad (\vec{v},\ \text{picovitesse})$$

$$a^\mu \equiv v'^\mu = z''^\mu = \{a, 0\}$$

$$\vec{s} \equiv \{s^{23}, s^{31}, s^{12}\}\,, \qquad \vec{q} \equiv \{s^{14}, s^{24}, s^{34}\}\,,$$

$$(v\,v) = 0\,, \qquad \vec{v}^2 = 1 \qquad (1)$$

$$G'^\mu = 0 \qquad \begin{cases} \vec{G}' = 0\,, \\ M' = 0\,. \end{cases} \qquad (2)$$

$$s'^{\mu\nu} = G^\mu v^\nu - G^\nu v^\mu \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{s}' = \vec{G} \wedge \vec{v}\,, \\ \vec{q}' = \vec{G} - M\vec{v}\,. \end{array} \right. \tag{3}$$

$$s^{\mu\nu} v_\nu = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{q} = \vec{v} \wedge \vec{s}\,, \\ \vec{q} \cdot \vec{v} = 0\,. \end{array} \right. \tag{4}$$

Quasiscalaire :

$$\mathfrak{m} \equiv (G\, v)\,, \qquad \{\mathfrak{m} = M - \vec{v}\, \vec{G} = \frac{M_G(1 - \vec{v}\, \vec{V})}{\sqrt{1 - V^2}} \tag{5}$$

$$\boxed{M = \vec{v}\, \vec{G} + \mathfrak{m}} \tag{5 a}$$

$$s^{[\mu\nu} s^{\pi\rho]} = 0\,; \qquad \{\vec{s} \cdot \vec{q} = 0 \tag{6}$$

$$\mathfrak{m}\, v^\mu + s^{\mu\nu} a_\nu = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{m}\, v = \vec{s} \wedge \vec{a} \\ \mathfrak{m} = \vec{a} \cdot \vec{q}\,. \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} = 0\,, \qquad \{s^2 - q^2 = 0\,. \tag{9}$$

IV. — *Cas $v = 1$: formules particulières à ce cas*

$$(v\, a) = 0\,, \qquad \{\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \tag{10}$$

$$v^{[\mu} s^{\nu\rho]} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{s} = 0\,, \\ \vec{s} = -\vec{v} \wedge \vec{q}\,. \end{array} \right. \tag{11}$$

$$M_G\, s_G = \text{const.} \quad \text{pour} \quad (v\, G') = 0 \tag{12}$$

$$\mathfrak{m} = \sqrt{M_G\, s_G}\, \sqrt[4]{-(a\, a)} = \sqrt{M_G\, s_G}\, \sqrt[4]{a^2} \tag{13}$$

$$\left(\frac{\vec{G} \cdot \vec{v} - M}{a^2}\, \vec{v} \wedge \vec{a} \right)' = \vec{G} \wedge \vec{v} \tag{14}$$

V. — *Cas $v = 1$:* *principe de Hamilton et formalisme canonique généralisé*

$$\delta \int \mathcal{L}\, d\pi = 0\,, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}(z', z'') \equiv \mathcal{L}(v, a)$$

$$\mathcal{L} = A\, \sqrt[4]{-(a\, a)} = 2\,(G\, v) = 2\,\mathfrak{m} = 2\,(n\, a) = \frac{A^2}{2\sqrt{-(n\, n)}}\,,$$

$$A = \text{const.} = 2\sqrt{M_G\, s_G}\,, \qquad (v\, n) = 0\,,$$

$$n^\mu = -\frac{1}{2} A(-a a)^{-3/4} a^\mu$$

$$\mathcal{H} \equiv (G\, v) + (n\, a) - \mathcal{L} \equiv 0\,.$$

DISCUSSION

Intervention du Professeur B. Kursunoglou

Il est parfaitement choquant de penser que la Relativité générale en tant que théorie classique ait quoi que ce soit à faire avec le spin. Personne n'a montré que le groupe continu des transformations de coordonnées générales possède une représentation spinorielle comme le groupe de Lorentz. En tous cas vous ne pouvez prétendre tirer de la Relativité générale, et des bosons, et des fermions, même si vous admettez la possibilité de la quantifier. Par ailleurs, écrire l'équation de Dirac en forme covariante riemanienne n'est rien de plus qu'une fantaisie académique et n'a rien à voir avec quelque relation que ce soit entre le spin et la Relativité générale. Ceci est une fausse piste.

Intervention du Prof. Möller

Dans mon vieux papier sur le centre de gravité auquel le Docteur Vigier s'est référé, je considérais un système fermé arbitraire sans passer à la limite d'extensions infiniment petites. Pour des systèmes fermés sans forces extérieures on obtient des équations tout à fait semblables à celles de Weyssenhof. Cependant, dans le cas où il y a des forces extérieures, je rencontrai des difficultés, et je demande si ces difficultés ont été surmontées dans des recherches ultérieures ?

Intervention du Prof. Papepetrou

Les équations du mouvement de la particule mono-dipolaire ont été dérivées par Hönl et moi-même de très bonne heure (*Zeits. f. Phys.*, 1938-39) et les analogies avec l'électron de Dirac ont été signalées. Je ne suis pas certain que la condition $s^{\mu\nu} v_\nu$ de Weyssenhoff conduise à un approfondissement de cette analyse.

Intervention du Prof. Ivanenko

1. Je voudrais demander si la pure et simple application de la méthode d'Einstein-Infeld-Hoffmann ou de celle de Fock (qui sont substantiellement identiques, mis à part le rôle des conditions harmoniques, qui à moi comme à d'autres semble inessentiel, quoique très utile pour beaucoup d'applications) conduit au résultat établi par le Professeur Weyssenhoff, qui diffère de celui de la Relativité générale.

2. Quant à la possibilité de tirer la valeur 1/2 du spin et les fermions de la Relativité générale non quantifiée, puis-je exprimer l'opinion, que je partage avec beaucoup de collègues, que : « les plus belles équations de France et du Monde ne peuvent donner plus que ce qu'elles contiennent ».

Intervention du Prof. Papapetrou

Les équations du mouvement de la particule mono-dipolaire peuvent être déduites en Relativité générale des équations du champ d'Einstein et l'ont été effectivement par la méthode de Fock-Papapetrou (*Proc. Roy. Soc.*, 1951).

QUELQUES REMARQUES SUR LES EQUATIONS DU MOUVEMENT ET LES CONDITIONS POUR LES COORDONNÉES

Professeur V. FOCK
Université de Léningrad

RESUME

On discute de la nécessité des conditions de coordonnées pour l'obtention des équations du mouvement en Relativité générale.

1. Les remarques que je vais faire sont d'une nature tout à fait élémentaire, mais elles me semblent nécessaires, parce que on trouve dans la littérature, surtout dans les travaux d'Einstein et Infeld, un point de vue sur ce sujet qui n'est pas correct.

Les équations du mouvement ne peuvent avoir un sens physique que lorsqu'elles sont liées à un système de coordonnées bien défini. Cela veut dire que le degré d'indétermination du système de coordonnées doit correspondre au groupe de transformations pour les équations. Dans le cas général des équations pour les masses à dimensions finies (Fock) ainsi que dans le cas-limite du mouvement des singularités (Einstein, Infeld) les équations n'admettent que le groupe de Lorentz. La démonstration en est particulièrement simple dans le cas où l'on peut écrire la fonction de Lagrange. On vérifie aisément qu'après une transformation infinitésimale de Lorentz pour les coordonnées des masses comme fonctions du temps, la nouvelle fonction de Lagrange ne diffère de la fonction primitive que par la dérivée totale par rapport au temps d'une certaine expression facile à écrire. Comme les équations du mouvement n'admettent que le groupe de Lorentz, une transformation de Lorentz seulement peut rester arbitraire pour le système de coordonnées.

Dans la méthode de Fock, les conditions pour les coordonnées (harmonicité) sont telles que le système de coordonnées est défini d'une manière unique (à une transformation de Lorentz près), ce qui est en accord avec le groupe admis par les équations du mouvement.

Dans la méthode d'EINSTEIN et INFELD, les équations du mouvement sont les mêmes, mais on prétend quelquefois qu'elles sont valables dans des systèmes de coordonnées arbitraires non-harmoniques, ce qui est une contradiction.

Dans ma communication, je veux montrer comment se lève cette difficulté.

2. Dans le problème considéré on suppose que le système de masses est isolé et que l'espace est euclidien à l'infini. C'est précisément le cas où il existe un système de coordonnées qui est défini à une transformation de LORENTZ près. C'est le système harmonique ou isotherme. Ce système est défini par les équations

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0; \qquad \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \tag{1}$$

et par les conditions aux limites. Avec $x_0 = t$, on trouve, comme dans mon Mémoire de 1939, les expressions suivantes pour les $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{oo} &= \frac{1}{c} + \frac{4\mathrm{U}}{c^3} + \frac{4\mathrm{S}}{c^5} \\ \mathfrak{g}^{oi} &= \frac{4\mathrm{U}_i}{c^3} + \frac{4\mathrm{S}_i}{c^5} \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -c\,\delta_{ik} + \frac{4\mathrm{S}_{ik}}{c^3} \end{aligned} \tag{2}$$

Ici, U est le potentiel newtonien :

$$\mathrm{U} = \gamma \int \frac{\rho}{|r - r'|}\, d\mathrm{V} \tag{3}$$

et U_i est le potentiel-vecteur :

$$\mathrm{U}_i = \gamma \int \frac{\rho v_i}{|r - r'|}\, d\mathrm{V} \tag{4}$$

Les formules (2) montrent que l'on a :

$$\mathfrak{g}^{oo} - \frac{1}{c} = 0\left(\frac{1}{c^3}\right); \ \mathfrak{g}^{oi} = 0\left(\frac{1}{c^3}\right); \ \mathfrak{g}^{ik} + c\delta_{ik} = 0\left(\frac{1}{c^3}\right) \tag{5}$$

Dans la suite, les équations (5) seront nommées *conditions pour les coordonnées d'ordre zéro.*

On peut préciser ces conditions en écrivant :

$$\mathfrak{g}^{oo} - \frac{1}{c} - \frac{4\mathrm{U}}{c^3} = 0\left(\frac{1}{c^5}\right); \ \mathfrak{g}^{oi} - \frac{4\mathrm{U}_i}{c^3} = 0\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

$$\mathfrak{g}^{ik} + c\,\delta_{ik} = 0\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

où les quantités U et U_i sont définies par (3) et (4); elles satisfont à l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \tag{7}$$

Les équations (6) seront nommées dans la suite *conditions de première approximation ou d'ordre un.*

Les conditions d'ordre zéro et un pour les coordonnées harmoniques sont équivalentes à celles utilisées par EINSTEIN et INFELD. Ces auteurs posent $x_0 = ct$ et introduisent les quantités $\gamma_{\mu\nu}$ par les équations :

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{2} e_\alpha \gamma_{\alpha\alpha}\right) + \gamma_{\mu\nu} \tag{8}$$

avec $e_0 = 1$; $e_1 = e_2 = e_3 = -1$. En comparant (2) et (8) on trouve, après quelques calculs purement algébriques :

$$\begin{aligned} \gamma_{oo} &= -\frac{4U}{c^2} - \frac{4S - 6U^2}{c^4} \\ \gamma_{oi} &= \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i - 8UU_i}{c^5} \\ \gamma_{ik} &= \frac{2U^2}{c^4}\delta_{ik} - \frac{4S_{ik}}{c^4} \end{aligned} \tag{9}$$

D'autre part, EINSTEIN et INFELD supposent que les quantités $\gamma_{\mu\nu}$ sont développables en puissance d'un certain paramètre λ (on peut prendre $\lambda = 1/c$). Ces séries sont de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma_{oo} &= \lambda^2 \underset{2}{\gamma_{oo}} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{oo}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{oo}} + \dots \\ \gamma_{oi} &= \lambda^3 \underset{3}{\gamma_{oi}} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma_{oi}} + \dots \\ \gamma_{ik} &= \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{ik}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{ik}} + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

D'après EINSTEIN et INFELD, les séries pour γ_{oo} et γ_{ik} ne contiennent que les puissances paires et les séries pour γ_{oi} ne contiennent que les puissances impaires de λ. Cette supposition est difficilement justifiable, car elle correspond à l'hypothèse qu'un système de masses n'émet pas de radiation gravitationnelle. Cependant, les premiers termes des séries sont certainement de la forme (10) et correspondent justement aux expressions (2). Donc, l'absence des termes en $1/c$ dans $\mathfrak{g}^{oi}$ et $\mathfrak{g}^{ik}$ est algébriquement équivalente à l'absence des termes en λ dans γ_{oi} et en λ^2 dans γ_{ik}. Cela prouve que les conditions pour les coordonnées d'ordre zéro, acceptées par EINSTEIN et INFELD, sont justement les conditions pour les coordonnées harmoniques.

Il en est de même pour les conditions de premier ordre. En effet, pour formuler ces conditions il suffit de fixer les valeurs de U et de U_i. Mais c'est précisément ce que font EINSTEIN et INFELD qui donnent pour les quantités :

$$\underset{2}{\gamma_{oo}} = -4U \; ; \quad \underset{3}{\gamma_{oi}} = 4U_i \tag{11}$$

des expressions explicites (dans un système de coordonnées qui satisfait aux conditions d'ordre zéro). Ces expressions satisfont à l'équation :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\underset{2}{\gamma_{oo}}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\underset{3}{\gamma_{oi}}) = 0 \tag{12}$$

c'est-à-dire, à notre équation (7) pour les potentiels newtoniens.

On voit que, dans les Mémoires d'EINSTEIN et INBELD, les conditions pour les coordonnées d'ordre zéro et de premier ordre sont les mêmes que pour les coordonnées harmoniques. Ces conditions sont d'ailleurs obtenues par le même raisonnement que dans notre Mémoire de 1939, à savoir, en considérant les valeurs approchées des composantes du tenseur énergie-impulsion.

3. Nous allons maintenant trouver le système de coordonnées le plus général compatible avec les conditions d'ordre zéro et de premier ordre.

Pour une transformation infinitésimale :

$$x'_\alpha = x_\alpha + \eta^\alpha (x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \tag{13}$$

on a pour la variation de la forme fonctionnelle de $g_{\mu\nu}$:

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\mu\nu}\,\eta^\alpha) \tag{14}$$

Avec les expressions approches des $g_{\mu\nu}$ qui satisfont aux conditions d'ordre zéro on trouve :

$$\begin{aligned}
\delta g^{oo} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \eta^o}{\partial t} - \frac{\partial \eta^l}{\partial x_l}\right) + 0\left(\frac{\eta}{c^3}\right)\\
\delta g^{oi} &= -c\frac{\partial \eta^o}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \eta^i}{\partial t} + 0\left(\frac{\eta}{c^3}\right)\\
\delta g^{ik} &= -c\left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta^i}{\partial x_k}\right) + c\left(\frac{\partial \eta^o}{\partial t} + \frac{\partial \eta^l}{\partial x_l}\right)\delta_{ik} + 0\left(\frac{\eta}{c^3}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Les conditions d'ordre zéro fixent les valeurs des $g^{\mu\nu}$ jusqu'à l'ordre $1/c^3$. On a donc, à cet ordre, $\delta g^{\mu\nu} = 0$; dans ces équations on peut d'ailleurs négliger les quantités $0\left(\frac{\eta}{c^3}\right)$. Les équations peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{16}$$

avec :

$$\eta^o = \frac{1}{c^2}\eta_o\,; \qquad \eta^i = -\eta_i. \tag{17}$$

La solution de (16) s'écrit :

$$\eta_\mu = (\eta_\mu)_o + \omega_{\mu\alpha}\, x^\alpha \qquad (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0) \tag{18}$$

les $\omega_{\mu\nu}$ étant des constantes antisymétriques par rapport aux indices.

Cette solution correspond à une transformation infinitésimale de Lorentz. La partie non-lorentzienne de la transformation compatible avec les conditions d'ordre zéro est donc de la forme :

$$t' = t + \frac{b^o}{c^4}\ ; \qquad x'_i = x_i + \frac{b^i}{c^2} \tag{19}$$

b^o et b^i étant des fonctions des coordonnées et du temps. Il est évident qu'une transformation de la forme (19) ne peut avoir aucune influence sur les équations de mouvement en approximation newtonienne.

Pour les conditions de premier ordre, on trouve d'une manière tout à fait analogue la transformation :

$$t' = t + \frac{a^o}{c^6}\ ; \qquad x'_i = x_i + \frac{a^i}{c^4} \tag{20}$$

(t, x_i) désignant comme toujours les coordonnées harmoniques. C'est la transformation non-lorentzienne la plus générale compatible avec les conditions de premier ordre. Il est évident qu'une transformation de la forme (20) ne peut avoir aucune influence sur les équations de mouvement en première approximation après-newtonienne (la seule considérée dans la littérature).

Il en résulte que la considération des conditions du deuxième ordre pour les coordonnées devient inutile. Cependant, pour avoir des formules tout à fait explicites, on peut trouver les valeurs des quantités a^o, a^i qui figurent dans (20) pour les différentes conditions de deuxième ordre utilisées par Einstein et Infeld. Avec les conditions :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{oo}}{\partial t} - \frac{\partial\gamma_{oi}}{\partial x_i} = 0\ ; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{oi}}{\partial t} = \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_k} \tag{21}$$

on trouve pour a^o et a^i les équations de Poisson :

$$-\Delta a^o = 6\frac{\partial(\mathrm{U}^2)}{\partial t} + 8\frac{\partial(\mathrm{UU}_i)}{\partial x_i} \tag{22}$$

$$-\Delta a^i = 2\frac{\partial(\mathrm{U}^2)}{\partial x_i} \tag{23}$$

Avec les conditions :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{oo}}{\partial t} - \frac{\partial\gamma_{oi}}{\partial x_i} = 0\ ; \qquad \frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{24}$$

l'équation pour a^o reste la même, tandis que l'équation pour a^i doit être remplacée par :

$$-\Delta a^i = 2\frac{\partial(\mathrm{U}^2)}{\partial x_i} + 4\frac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial t} \tag{25}$$

Il va sans dire que pour les coordonnées harmoniques on a pour la partie non-lorentzienne :

$$a^o = 0\ ; \qquad a^i = 0. \tag{26}$$

Ces raisonnements prouvent incidemment, d'une manière tout à fait rigoureuse, que les coordonnées harmoniques sont uniques (à une transformation de Lorentz près) tant qu'on peut considérer le problème du mouvement des masses comme un problème purement mécanique, c'est-à-dire, tant qu'on peut négliger la radiation gravitationnelle. Dans le cas général, pour prouver l'unicité des coordonnées, on doit tenir compte du caractère hyperbolique des équations d'EINSTEIN; le point de départ est alors le théorème d'unicité pour l'équation de d'ALEMBERT généralisée.

4. Dans plusieurs Mémoires d'EINSTEIN, INFELD et d'autres savants on trouve des affirmations selon lesquelles les conditions d'harmonicité et les conditions pour les coordonnées en général n'auraient rien à faire avec les équations de mouvement. Les raisonnements précédents montrent cependant que ces affirmations sont tout à fait incorrectes.

En effet, nous pouvons faire les constatations suivantes :

a) Les conditions d'ordre zéro d'EINSTEIN sont justement des conditions pour les coordonnées; rien ne change si on les appelle, d'après EINSTEIN, « méthode d'approximation », puisque cette méthode consiste dans l'emploi des coordonnées qui sont à peu près harmoniques.

b) Les conditions de premier ordre d'EINSTEIN sont, elles aussi, des conditions d'harmonicité.

c) Les coordonnées employées par EINSTEIN sont en réalité des coordonnées harmoniques; plus exactement, elles ne diffèrent des coordonnées harmoniques que par des termes de sixième ordre en $1/c$ pour le temps et de quatrième ordre en $1/c$ pour les coordonnées spaciales (équation 20).

d) EINSTEIN et ses disciples ont entrepris des calculs, souvent très compliqués, pour vérifier que les formes différentes des conditions du deuxième ordre ne changent pas les équations du mouvement dans la première approximation après-newtonienne. Or, ces calculs sont inutiles, le résultat étant une conséquence immédiate des formules (20).

Une question se pose d'elle-même. Pourquoi a-t-on prétendu que les équations de mouvement sont valables dans un système de coordonnées arbitraire non-harmonique ? Quelle est la cause de cette erreur ? Il me semble que la réponse est unique. C'est l'emploi illégitime de la notion « relativité générale ». Cette notion, qui n'a pas de sens bien défini, conduit cependant à croire qu'il est impossible d'introduire d'une manière rationnelle des systèmes de coordonnées privilégiés. C'est pourquoi on a tant insisté sur l'indépendance des équations du mouvement des conditions de deuxième ordre pour les coordonnées. Pour la même raison on a voulu éviter, pour l'ordre zéro, le terme même « condition pour les coordonnées » et on l'a remplacé par le terme « méthode d'approximation ». C'est enfin la cause pour laquelle on n'a pas remarqué ni le fait que les équations du mouvement obtenues sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz (et pour ce groupe seulement), ni le fait que le système de coordonnées employé dans les calculs est, avec toute la précision nécessaire, un système harmonique.

Je crois que l'éclaircissement du problème des coordonnées dans le cas considéré peut en même temps éclairer le sens physique de la théorie de gravitation d'Einstein, dite « théorie de relativité générale ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Fock, « Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne », *Journal of Physics of the USSR,* vol. 1, pp. 81-116 (1939).

[2] В. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Москва, 1955. (V. Fock, *Théorie de l'espace-temps et de gravitation,* Moscou, 1955, en russe).

[2′] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation,* Pergamon Press, London, 1959 (édition anglaise).

[2″] Vladimir Fock, *Theorie von Raum, Zeit und Gravitation,* Akademie-Verlag, Berlin, 1960 (édition allemande).

[3] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, *Annals of Mathematics,* vol. 39, pp. 65-100 (1938).

[4] A. Einstein and L. Infeld, *Annals of Mathematics,* vol. 41, pp. 455-464 (1940).

[5] A. Einstein and L. Infeld, *Canadian Journal of Mathematics,* pp. 209-241 (1949).

[6] Л. Инфельд, Бюллетень Польской Академии Наук, Отделение третье, t. II, pp. 161-164 (1954).
(L. Infeld, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences,* Section 3, vol. II, pp. 161-164, 1954, en russe).

[7] L. Infeld, *Reviews of Modern Physics,* vol. 29, pp. 398-411 (1957).

[8] V. Fock, *Reviews of Modern Physics,* vol. 29, pp. 325-333 (1957).

[9] В. Фок, Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, том 38 стр. 108-115, 1960.
(V. Fock, *Journal de Physique Expérimentale et Théorique,* vol. 38, pp. 108-115, 1960, en russe).

DISCUSSION

Intervention du Prof. A. Trautman

Les coordonnées isothermes sont très commodes dans les calculs; elles sont aussi convenables que les potentiels électromagnétiques qui satisfont à la condition de Lorentz.

Néanmoins, les coordonnées isothermes ne constituent pas une bonne généralisation des coordonnées orthonormées qu'on emploie en Relativité restreinte. Le tenseur métrique d'un espace pseudo-euclidien possède une forme très simple dans des coordonnées orthonormées, et cette *forme* est invariante par rapport aux transformations de Lorentz. Autrement dit, le groupe de Lorentz est le groupe d'isométries de l'espace de Minkowski. Les transformations linéaires introduites par Fock ne jouissent pas de cette propriété : la forme du tenseur métrique change d'un système de coordonnées isothermes à l'autre. Il s'ensuit qu'il est difficile d'attacher une signification physique aux coordonnées harmoniques.

Intervention de Mme Hennequin

Est-ce que la question de l'unicité d'un système de coordonnées isothermes, galiléen à l'infini, a été résolu par une méthode n'utilisant pas le procédé d'approximations successives ?

Réponse du Prof. Fock

Je l'ignore.

Intervention de P. G. Bergmann

(Faisant suite aux remarques de Lichnerowicz et de Trautmann) :

1) Même dans les cas où les coordonnées harmoniques existent globalement (et l'on ne sait pas si c'est généralement le cas), les transformations préservant cette condition ne forment pas un groupe, et par suite ne sont pas isomorphes au groupe de Lorentz.

2) Même avec le système de coordonnées restreint par la condition d'harmonicité (De Donder), le mouvement des corps matériels ne sera pas entièrement déterminé à moins que nous ne possédions aussi quelque connaissance concernant leur structure interne, c'est-à-dire les quadrupôles et les moments de masse d'ordre supérieur.

TENSORIAL INTEGRAL CONSERVATION LAWS IN GENERAL RELATIVITY

by J. L. SYNGE
School of Theoretical Physics
Dublin Institute for Advanced Studies

RESUME

On propose de nouvelles lois intégrales de conservation ayant le caractère tensoriel et obtenues grâce à l'emploi : 1) du théorème généralisé de Stokes, 2) de l'invariant d'univers Ω attaché à deux points.

1. — Introduction

The pseudotensor is a mysterious quantity. To obtain integral conservation laws, Einstein (1) abandoned strictly tensorial methods and introduced the pseudotensor $t^i{}_j$ by the formula

$$\varkappa\, t^i{}_j = \frac{1}{2}\,\delta^i{}_j\, g^{ab}\,\Gamma^c_{ad}\,\Gamma^d_{bc} - g^{ab}\,\Gamma^i_{ad}\,\Gamma^d_{bj}\,, \tag{1.1}$$

in order to obtain the equation

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\,(t^i{}_j + \mathrm{T}^i{}_j) = 0\,, \tag{1.2}$$

where $\mathrm{T}^i{}_j$ is the energy tensor; from this one obtains at once a vanishing integral over a closed 3-space, and that is what is required for a conservation law (2).

But $t^i{}_j$ is not a tensor. At any chosen event we can make Γ^i_{jk} vanish by a mere transformation of coordinates, and then $t^i{}_j$ vanishes. We can do this, not at a single event only, but along an arbitrary curve, and

(1) A. Einstein, *Ann. d. Phys.*, **49**, 769 (1916).

(2) For the pseudotensor, see P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity* (New York, Prentice-Hall, 1942), p. 196; C. Møller, *The Theory of Relativity* (Oxford, Clarendon Press, 1952) p. 338; W. Pauli, *Theory of Relativity* (London, Pergamon Press, 1958), pp. 70, 215. For a symmetrical pseudotensor, yielding conservation of angular momentum as well as conservation of linear momentum and energy, see L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Cambridge, Mass., Addison-Wesley, 1951), p. 318.

even, under certain circumstances, on a locus of higher dimensionality (3). It is therefore impossible to attach any pointwise physical meaning to $t^i{}_j$; that is the mystery which surrounds the pseudotensor.

In the present paper I offer integral conservation laws which do not suffer from this defect, because the integrands are tensors. I was led to these formulae through the generalized form of Stokes' theorem (4), but for brevity I shall here use only the more familiar Green's (or Gauss') theorem in space-time.

The essential feature of a tensorial conservation law is that we should have a tensorial integrand which vanishes when we integrate it over a *closed* 3-space in space-time. In Sect. 2 I define such an integrand, involving a tensor W_{ij} which is arbitrary for the time being; this tensor need have no particular symmetry, but only the skew-symmetric part contributes. We have then a source of conservation laws, the particular law depending on our choice of W_{ij}. It appears that the most suitable choice is one which involves a certain 2-point invariant function used by H. S. Ruse, and accordingly Sect. 3 is devoted to developing the essential properties of this invariant function. The tensorial conservation laws of 4-momentum and angular momentum are set out in Sect. 4, and their significance for weak fields is explored in Sect. 6, Sect. 5 having been devoted to an important identity involving the dual of the Riemann tensor.

2. — A tensorial integral which vanishes identically when taken over any closed 3-space in space-time

Let V_3 be a closed 3-space in space-time. Let n^p be the outward unit normal to V_3 and let $\varepsilon(n)$ be the indicator of n^p, chosen equal to ± 1 so as to make $\varepsilon(n)\, n_p n^p = 1$. Let $d_3 v$ be the invariant element of 3-volume of V_3. Let W_{ij} be a tensor field with continuous derivatives in the domain V_4 which consists of V_3 and its interior; the second derivatives of W_{ij} are at least piecewise continuous in V_4. Let

$$\eta^{ijkp} = (-g)^{-\frac{1}{2}}\, \varepsilon_{ijkp}\,, \tag{2.1}$$

where the ε-symbol is the numerical permutation symbol (this η-symbol is a contravariant tensor).

Then (5)

$$\oint_{V_3} W_{ij|k}\, \eta^{ijkp}\, n_p\, \varepsilon(n)\, d_3 v = 0\,. \tag{2.2}$$

(3) E. Fermi, *Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **31**, 21, 52 (1922); L. O. Raifeartaigh, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **59 A**, 15 (1958).

(4) J. A. Schouten, *Ricci Calculus* (2nd Edn., Berlin, Springer, 1954), p. 97; W. Pauli, *op. cit.*, p. 55; J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus* (Toronto University Press, 1956), p. 274.

(5) Latin suffixes have the range 1, 2, 3, 4 with the summation convention, and covariant derivatives are indicated by a vertical stroke.

To prove this, we appeal to Green's theorem, which tells us that this integral is equal to

$$\int_{V_4} W_{ij}|_{kp}\, \eta^{ijkp}\, d_4 v = \frac{1}{2}\int_{V_4} (W_{ij}|_{kp} - W_{ij}|_{pk})\, \eta^{ijkp}\, d_4 v. \tag{2.3}$$

Now by the RICCI identity (6), we have

$$W_{ij}|_{kp} - W_{ij}|_{pk} = W_{aj}\, R^a{}_{ikp} + W_{ia}\, R^a{}_{jkp}\,, \tag{2.4}$$

where the R-symbols are the components of the mixed RIEMANN tensor. From the cyclic identity satisfied by this tensor, combined with the skew-symmetry of the η-symbol, it follows that the integrand in (2.3) vanishes, and so (2.2) is proved.

3. — The world function

Since it contains implicitly in integrated form all the properties of curved space-time, I give the name *world function* to the 2-point invariant distance-function introduced into geometry by H. S. RUSE (7). To within a constant factor, the world function $\Omega(P'P)$ is the square of the geodesic separation between two points P', P in space-time. It is defined by

$$\Omega(P'P) = \frac{1}{2}\,\varepsilon L^2, \tag{3.1}$$

where L is the geodesic separation $P'P$ and ε the indicator (± 1) of $P'P$. The formulae connected with the world function apply to the case where $P'P$ is a null geodesic, but for brevity we shall not refer to that case in this discussion.

It is important to note that Ω is a function of *two* points, and we might use different systems of coordinates for the two points, $x^{i'}$ for P' and x^i for P. The function Ω is an invariant with respect to transformations of either system of coordinates.

In taking covariant derivatives of Ω (we shall denote them by subscripts without any special sign), we can take them with respect to either point. Thus we have to consider such symbols as the following :

$$\Omega_{i'},\ \Omega_i,\ \Omega_{i'j'},\ \Omega_{i'j},\ \Omega_{ij'},\ \Omega_{ij},\ \Omega_{ijk},\ \Omega_{ijk'}. \tag{3.2}$$

Each primed suffix has tensor significance with respect to transformation of the coordinates of P', and similarly for unprimed suffixes and P. As far as P is concerned, a primed suffix has no tensor significance — it is merely a label. Thus, $\Omega_{ij'}$ is a set of four covariant vectors with respect to P'; it is *not* a tensor of the second rank.

(6) Cf. O. VEBLEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Cambridge University Press, 1927), p. 42; there is a difference in sign because the present paper follows the notation of SYNGE and SCHILD, *op. cit.*, p. 83.

(7) H. S. RUSE, *Proc. London Math. Soc.*, **32**, 87 (1931); *Quart. J. Math.*, **2**, 190 (1931). See also J. L. SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, **32**, 241 (1931). This function had been used by J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Dover, New York, 1952).

It is easy to show that it is permissible to interchange primed and unprimed subscripts, provided the order of each set is preserved. Thus

$$\Omega_{ijk'} = \Omega_{ij'} = \Omega_{j'i}, \quad \Omega_{ik'j} = \Omega_{k'ij}. \tag{3.3}$$

We note that
$$\Omega_i = s\lambda_i, \quad \Omega_{i'} = -s\lambda_{i'}, \tag{3.4}$$
where λ^i and $\lambda^{i'}$ are the unit tangent vectors to the joining geodesic at P and P′, respectively, drawn in the sense P′P. Thus, when considered as functions of P for fixed P′, $-\Omega^{i'}$ are the usual normal coordinates (8) of P relative to P′.

Enough has now been said about the world function to explain the meaning of the conservation laws of Sect. 4. However we need something more for the interpretation of those laws in Sect. 6. Accordingly we have to consider the world function in the case of weak fields, i.e. fields in which the Riemann tensor is small.

Let us look first at flat space-time. Then there exist coordinate systems (the same for P and P′) such that

$$\Omega = \frac{1}{2} g_{ij} (x^i - x^{i'}) (x^j - x^{j'}), \quad g_{ij} = \eta_{ij} = \mathrm{diag}\ (1, 1, 1, -1). \tag{3.5}$$

We have
$$\begin{gathered} \Omega_i = g_{ij}(x^j - x^{j'}), \quad \Omega_{i'} = -g_{ij}(x^j - x^{j'}), \\ \Omega_{ij} = g_{ij}, \quad \Omega_{ij'} = \Omega_{ji'} = -g_{ij}, \quad \Omega_{i'j'} = g_{ij}, \end{gathered} \tag{3.6}$$
while all covariant derivatives of Ω of order 3 or higher vanish. The equations
$$\Omega_{ij} = g_{ij}, \quad \Omega_{ijk} = 0, \quad \Omega_{ijk'} = 0 \tag{3.7}$$
are tensor equations in the full sense (i.e. with respect to independent transformations of the coordinates at P′ and P); they hold in flat space-time for all coordinate systems.

The equations (3.7) are not true in curved space-time. But if the curvature is small, they are approximately true, and we can write

$$\Omega_{ij} = g_{ij} + 0_1, \quad \Omega_{ijk} = 0_1, \quad \Omega_{ijk'} = 0_1, \tag{3.8}$$

where 0_1 indicates expressions of the first order in the Riemann tensor. It is possible to evaluate these error terms as integrals involving the Riemann tensor, but that will not be done here.

We note further that, if the curvature is small, then by (3.6) there exists a system of coordinates, covering both P′ and P, such that

$$g_{ij} = \eta_{ij} + 0_1, \quad \Omega_{ij'} = -\eta_{ij} + 0_1, \quad \Omega^{i'}_{j} = -\delta^i{}_j + 0_1. \tag{3.9}$$

4. — The conservation laws

We left the conservation law in suspense in (2.2), awaiting a choice of the tensor W_{ij}. It is best to consider now the integral over an open V_3:

$$I(V_3) = \int_{V_3} W_{pq\,|\,k}\, \eta^{pqks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v. \tag{4.1}$$

Equation (2.2) tells us that this integral vanishes if V_3 is closed.

(8) Cf. Veblen, *op. cit.*, pp. 39, 85.

As a preliminary step, we take :

$$W_{pq} = C^{rm} R_{rmpq}, \tag{4.2}$$

where C^{rm} is an arbitrary tensor. When we substitute this in (4.1), we might expect to find a term involving the covariant derivative of the Riemann tensor. However (and this is important) *this term disappears* by virtue of the Bianchi identity and the skew-symmetry of the η-symbol. Thus we get :

$$I(V_3) = \int_{V_3} C^{rm}{}_{|k}\, R_{rmpq}\, \eta^{pqks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v. \tag{4.3}$$

Let P′ be any selected reference point in space-time, and let Ω be the world function of P′ and the current point P. Consider the expression :

$$C_{a'}^{rm} = \frac{1}{4}\, \varkappa^{-1}\, \eta^{rmij}\, \Omega_{a'i}\, \Omega_j. \tag{4.4}$$

Remembering that the subscript a' is a mere label as far as P is concerned, we may substitute (4.4) for C^{rm} in (4.3) without spoiling tensor character. We get an expression which we may write :

$$M_{a'}(V_3, P') = \frac{1}{4}\, \varkappa^{-1} \int_{V_3} (\Omega_{a'i}\, \Omega_j)_{|k}\, \eta^{rmij}\, R_{rmpq}\, \eta^{pqks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v. \tag{4.5}$$

We now introduce the dual Riemann tensor [9], defined by :

$$\widetilde{R}^{ijks} = \frac{1}{4}\, \eta^{ijrm}\, R_{rmpq}\, \eta^{pqks}, \tag{4.6}$$

and (4.5) reads :

$$M_{a'}(V_3, P') = \varkappa^{-1} \int_{V_3} (\Omega_{a'i}\, \Omega_j)_{|k}\, \widetilde{R}^{ijks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v. \tag{4.7}$$

Here the integrand is an invariant under P-transformations and a covariant vector under P′-transformations; $M_{a'}$ is a covariant vector under P′-transformations.

We shall call $M_{a'}(V_3, P')$ *the flux of 4-momentum across the open 3-space* V_3, *relative to the reference point* P′. Then (2.2) tells us that *the flux of 4-momentum across any closed 3-space is zero*. This is our first conservation law.

To deal with angular momentum, we go back to (4.3) and substitute for C^{rm} the expression :

$$C_{a'b'}^{rm} = \frac{1}{4}\, \varkappa^{-1}\, \eta^{rmij}\, (\Omega_{a'i}\, \Omega_j\, \Omega_{b'} - \Omega_{b'i}\, \Omega_j\, \Omega_{a'} - \Omega\, \Omega_{a'i}\, \Omega_{b'j}), \tag{4.8}$$

which is a skew-symmetric contravariant tensor under P-transformations and a skew-symmetric covariant tensor under P′ transformations. We get the integral :

(9) This is the *double dual* in the terminology of C. Lanczos, *Ann. of Math.*, **39**, 842 (1938); he uses a double asterisk to denote it, instead of a tilde.

$$H_{a'b'}(V_3, P') = \varkappa^{-1}\int_{V_3}(\Omega_{a'i}\,\Omega_j\,\Omega_{b'} - \Omega_{b'i}\,\Omega_j\,\Omega_{a'} - \Omega\,\Omega_{a'i}\,\Omega_{b'j})\,|_k\,\tilde{R}^{ijks}\,n_s\,\varepsilon(n)\,d_3v. \tag{4.9}$$

We call this *the flux of angular momentum across the open 3-space* V_3, *relative to the reference point* P′. It is an invariant under P-transformations and a skew-symmetric covariant tensor under P′-transformations. By (2.2) *the flux of angular momentum across any closed 3-space is zero*. This is our second conservation law.

From the Newtonian analogue, we expect a reference point to be involved in the conservation law for angular momentum; but now a reference point is involved in the conservation of both 4-momentum and angular momentum.

The above expressions for $M_{a'}$ and $H_{a'b'}$ are exact, and so are the conservation laws based on them. In Sect. 6 approximate evaluations for weak fields are given.

5. — Identity connecting the Einstein tensor and the contracted dual Riemann tensor [10]

The expressions (4.7) and (4.9) do not look like the integrals which we would expect to find occurring in conservation laws because the Einstein tensor G_{ij} (or equivalently the energy tensor T_{ij}) does not appear in them. The identity which follows will enable us to establish the connection in the next section.

By lowering and raising suffixes, we may write (4.6) in the form :

$$\tilde{R}^{ij}_{\cdot\cdot ks} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{ijrm}\,R^{pq}_{\cdot\cdot rm}\,\varepsilon_{pqks}\,, \tag{5.1}$$

where the ε′s are numerical permutation symbols. Contracting with $s = i$, we get :

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{ij}_{\cdot\cdot ki} &= \frac{1}{4}\varepsilon^{ijrm}\,\varepsilon_{ikpq}\,R^{pq}_{\cdot\cdot rm}\\ &= \frac{1}{4}\delta^{jrm}_{kpq}\,R^{pq}_{\cdot\cdot rm}\\ &= \frac{1}{2}\delta^j_k\,\delta^r_p\,\delta^m_q R^{pq}_{\cdot\cdot rm} + \frac{1}{2}\delta^j_p\,\delta^r_q\,\delta^m_k\,R^{pq}_{\cdot\cdot rm} + \frac{1}{2}\delta^j_q\,\delta^r_k\,\delta^m_p\,R^{pq}_{\cdot\cdot rm}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

The Ricci tensor, the curvature invariant, and the Einstein tensor are defined by :

$$R^q_r = R^{pq}_{\cdot\cdot rp},\ R = R^q_q,\ G^q_r = R^q_r - \frac{1}{2}\delta^q_r R \tag{5.3}$$

(10) This identity can also be established by using an identity given by Lanczos, *loc. cit.*; he uses a definition of the Ricci tensor which differs in sign from that used here.

(some authors use the opposite sign in defining the Ricci tensor), and (5.2) gives :

$$\tilde{\mathrm{R}}^{ij}_{\cdot\cdot ki} = \mathrm{G}^j_k, \tag{5.4}$$

which is the required result.

6. — Interpretation of the conservation laws for a weak field

We recall that when the curvature of space-time is small (equivalently, when the gravitational field is weak, as it is in all known physical situations), then the covariant derivatives of the characteristic function satisfy (3.8) for arbitrary coordinate systems. Then the integral (4.7) for the flux of 4-momentum is small of the first order, and we have :

$$\begin{aligned} \varkappa\, \mathrm{M}_{a'}(\mathrm{V}_3, \mathrm{P}') &= \int_{\mathrm{V}_3} \Omega_{a'i}\, g_{jk}\, \tilde{\mathrm{R}}^{ijks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2 \\ &= \int_{\mathrm{V}_3} \Omega_{a'i}\, \tilde{\mathrm{R}}^{ji}_{\cdot\cdot sj}\, n^s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

or, by (5.4),

$$\varkappa\, \mathrm{M}_{a'}(\mathrm{V}_3, \mathrm{P}') = \int_{\mathrm{V}_3} \Omega_{a'i}\, \mathrm{G}^i_s\, n^s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2, \tag{6.2}$$

or, in contravariant form,

$$\varkappa\, \mathrm{M}^{a'}(\mathrm{V}_3, \mathrm{P}') = \int_{\mathrm{V}_3} \Omega^{a'}_i\, \mathrm{G}^i_s\, n^s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2. \tag{6.3}$$

This integral is an invariant under P-transformations and a contravariant vector under P′-transformations. To complete the interpretation, we now use those coordinates for which (3.9) hold. This destroys tensor character, but gives :

$$\mathrm{M}^{a'}(\mathrm{V}_3, \mathrm{P}') = -\varkappa^{-1} \int_{\mathrm{V}_3} \mathrm{G}^a_s\, n^s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2, \tag{6.4}$$

in which the integral will be recognized as a flux of 4-momentum as usually understood.

As for angular momentum, (4.9) gives, for a weak field with arbitrary coordinates,

$$\begin{aligned} \varkappa\, \mathrm{H}_{a'b'}(\mathrm{V}_3, \mathrm{P}') = \int_{\mathrm{V}_3} (&\Omega_{a'i}\, \Omega_{jk}\, \Omega_{b'} + \Omega_{a'i}\, \Omega_j\, \Omega_{b'k} \\ &- \Omega_{b'i}\, \Omega_{jk}\, \Omega_{a'} - \Omega_{b'i}\, \Omega_j\, \Omega_{a'k} \\ &- \Omega_k\, \Omega_{a'i}\, \Omega_{b'j})\ \tilde{\mathrm{R}}^{ijks}\, n_s\, \varepsilon(n)\, d_3 v + 0_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

The terms in Ω_j and Ω_k give the expression :

$$\Omega_{a'i}\, \Omega_{b'j}\, \Omega_k\, (\tilde{\mathrm{R}}^{ikjs} - \tilde{\mathrm{R}}^{jkis} - \tilde{\mathrm{R}}^{ijks}) = -\,\Omega_{a'i}\, \Omega_{b'j}\, \Omega_k\, (\tilde{\mathrm{R}}^{ijks} + \tilde{R}^{jkis} + \tilde{\mathrm{R}}^{kijs}), \tag{6.6}$$

and this vanishes since the dual Riemann tensor has the same symmetry properties as the Riemann tensor itself. Thus (6.5) reduces to :

$$\varkappa \, H_{a'b'}(V_3, P') = -\int_{V_3} (\Omega_{a'} \, \Omega_{b'i} - \Omega_{b'} \, \Omega_{a'i}) \, \tilde{R}^{ji}_{\cdot\cdot sj} \, n^s \, \varepsilon(n) \, d_3 v + 0_2$$

$$= -\int_{V_3} (\Omega_{a'} \, \Omega_{b'i} - \Omega_{b'} \, \Omega_{a'i}) \, G^i_s \, n^s \, \varepsilon(n) \, d_3 v + 0_2, \tag{6.7}$$

or, in contravariant form,

$$\varkappa \, H^{a'b'}(V_3, P') = -\int_{V_3} (\Omega^{a'} \, \Omega^{b'}_i - \Omega^{b'} \, \Omega^{a'}_i) \, G^i_s \, n^s \, \varepsilon(n) \, d_3 v + 0_2. \tag{6.8}$$

As already noted,

$$\xi^{a'} = -\Omega^{a'} \tag{6.9}$$

are the usual normal coordinates of P relative to P′; thus we have :

$$\varkappa \, H^{a'b'}(V_3, P') = \int_{V_3} (\xi^{a'} \, \Omega^{b'}_i - \xi^{b'} \, \Omega^{a'}_i) \, G^i_s \, n^s \, \varepsilon(n) \, d_3 v + 0_2. \tag{6.10}$$

Finally, using coordinates for which (3.9) holds, and abandoning tensor form, we get :

$$H^{a'b'}(V_3, P') = -\varkappa^{-1} \int_{V_3} (\xi^{a'} \, G^b_s - \xi^{b'} \, G^a_s) \, n^s \, \varepsilon(n) \, d_3 v + 0_2, \tag{6.11}$$

in which we recognize the expected form for an integral of angular momentum.

It must be emphasized that this section has dealt with the justification for the definitions of flux of 4-momentum and flux of angular momentum by seeing what they reduce to for weak fields. In all accurate discussions we should go back to (4.7) and (4.9).

7. — The localization of 4-momentum and angular momentum

Inspection of (4.7) and (4.9) suggests that we should speak of localized densities of 4-momentum and angular momentum at the point P, given respectively by :

$$M^s_{a'} = \varkappa^{-1} (\Omega_{a'i} \, \Omega_j)_{\,|k} \, \tilde{R}^{ijks} \tag{7.1}$$

and :

$$H^s_{a'b'} = \varkappa^{-1} (\Omega_{a'i} \, \Omega_j \, \Omega_{b'} - \Omega_{b'i} \, \Omega_j \, \Omega_{a'} - \Omega \, \Omega_{a'i} \, \Omega_{b'j})_{\,|k} \, \tilde{R}^{ijks}. \tag{7.2}$$

Actually these are functions of two points, the current point P and the reference point P′. They are both contravariant vectors under P-transformations; under P′-transformations they are respectively a covariant vector and a skew-symmetric covariant tensor.

It follows from Sect. 6 that these densities are of the second order in empty space-time. In order to calculate them to the second order inclusive, it is enough to calculate the Ω-terms to the first order inclusive. The fact that these densities are of the second order shows us how incomplete a linear approximation is.

DISCUSSION

Intervention du Prof. Mc Vittie

Voudriez-vous expliquer quels éclaircissements apporte votre théorème sur le problème de l'énergie dont on a beaucoup parlé ce matin ?

Intervention du Prof. B. De Witt

En réponse à Scarf, je dirais que le choix d'un point est au moins plus simple que, par exemple, le choix d'une famille de lignes de temps. Je suis tout à fait de l'avis du professeur Synge qui insiste sur le fait que ces fonctions de deux points se montreront très importantes dans le futur développement de la théorie de la relativité générale. Mais j'aurais plus à dire sur ce point, vendredi, dans la discussion sur les fonctions de Green covariantes.

J'aimerais demander au professeur Synge, pourquoi il appelle *fonction de Ruse,* la fonction de deux points Ω qui est égale à la moitié du carré de la distance géodésique entre les deux points. Cette fonction a été utilisée pendant plusieurs années par des mathématiciens. En particulier, Hadamard, dans ses conférences de Yale (environ 1923) utilisait cette fonction, ainsi que ses dérivées, dans la discussion du problème de Cauchy, dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, hyperboliques.

GAUSS'S THEOREM AND GRAVITIONAL ENERGY

by Dr. F. A. E. PIRANI **

King's College, London
Institute of Field Physics, University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.

RESUME

L'expression donnée par Komar de la densité de flux d'énergie gravitationnelle est déduite du théorème de Gauss pour une masse gravifique dans un système de référence arbitraire. Une nouvelle condition est obtenue permettant de lever certaines difficultés rencontrées par la méthode de Komar.

1. — Introduction

In general relativity theory, one should always try to work with a generally covariant formalism. However, in some parts of the theory, only fragments of covariant formalism exist, and one is forced to work in a special coordinate system or class of coordinate systems. To interpret results, one usually has to imagine that these coordinate systems correspond somehow to Minkowskian or Newtonian inertial systems. Unfortunately, the physical significance of the coordinate conditions which define the special coordinate systems is seldom clear enough to justify this, and consequently it becomes very difficult to give physical meaning to results obtained in this way.

It is often possible to achieve formal covariance by bringing in the Vierbein formalism, which amounts to introducing a special non-holonomic coordinate system with a straightforward physical interpretation. If one accepts the awkwardness of non-holonomicity, this is sometimes a convenient way to work, but the non-holonomic coordinates can be very troublesome, and it would be better if one could get covariance without resorting to them.

* Supported in part by the National Science Foundation, Contract No. NSF-G-4356, and the Office of Naval Research, Contract No. Nonr-855 (07).

** Present and permanent address : Department of Mathematics, University of London Kings College, Strand, London, W.C. 2.

A common feature of the non-covariant parts of general relativity is that the *time* coordinate is picked out for special treatment. This suggests that one might sometimes be able to write the theory in covariant form without introducing the whole Vierbein field. If one introduces only the timelike vector field of the Vierbein and requires it to be normal (hypersurface-orthogonal), this is equivalent to introducing a preferred (holonomic) time coordinate, without any special choice of space coordinates.

Such a vector field has a natural physical interpretation. It is the tangent field to a congruence (space-filling family) of timelike curves which may be regarded as the world-lines of a selected family of hypothetical *observers*. The vector field is just the 4-velocity field of these observers, and the world-lines constitute a *system of reference* in the sense used in Møller's book (1952) : namely, they define a standard of rest to which other motions may be referred. The 4-velocity field being chosen to be normal, as is usually convenient, the observers move irrotationally, and the orthogonal surfaces provide them with a common time coordinate.

To give further physical significance to these ideas, one attributes to the system of reference some of the properties which in flat space-time are attributed to inertial systems. Of course, the invariance of flat space-time to translations picks out these naturally preferred systems of reference, but in a general space-time the choice involves markedly arbitrary elements. It may for example be intrinsic-local (like Komar's coordinates defined in terms of Riemann scalars), or intrinsic-global (like harmonic coordinates, with adequate boundary conditions), or it may not be intrinsic at all. In space-times with special symmetry properties, such as cosmical models or static space-times, the symmetry properties themselves naturally select a particular system of reference.

The introduction of a system of reference which resembles Minkowskian inertial systems kinematically rather than dynamically amounts to the partial undoing of the geometrization of the gravitational field. The world-lines of such a system will not be geodesics; the observers will regard themselves as « at rest » and describe their 4-accelerations (i.e. departures from geodesic motion) as the effects of the gravitational field. For example, in the usual system of reference used in Schwarzschild space-time, the observers are at rest, relative to one another and to the central body, as measured by optical or radar methods, and have outward 4-accelerations to balance the inward pull of the central body.

2. — Relative gravitational fields and Gauss's theorem

Let us develop the consequences of introducing a system of reference into a given space-time. Let g_{mn} be the metric tensor (1), and let the

(1) Latin letters $m, n, \ldots$ range and sum over 1, 2, 3, 4. The metric tensor has signature $+2$, and $c = 1$.

system of reference be defined by a normal timelike unit vector field u^m, the 4-velocity field of the selected observers (2) :

$$u_m u^m = -1 , \tag{1}$$

$$u_{[m;n} u_{r]} = 0 . \tag{2}$$

If the family of space-like 3-surfaces to which u_m is normal have equations $\varphi(x) = \text{const.}$, then $u_m = \dfrac{\varphi_{,m}}{(g^{rs} \varphi_{,r} \varphi_{,s})^{1/2}}$. These 3-surfaces are the common time surfaces of the selected observers. They will be called *reference surfaces.*

The congruence of world-lines to which u^m is tangent are given by

$$\frac{dx^m}{ds} = u^m, \tag{3}$$

where ds denotes the proper-time element : $ds^2 = - g_{mn}\, dx^m\, dx^n$.

The *4-acceleration* of any observer is given by the absolute derivative of his 4-velocity :

$$\mathring{u}^m = \frac{\delta u^m}{\delta s} ; \tag{4}$$

this is the acceleration which he must maintain to stary at rest in the chosen system of reference (i.e., to move along a u^m-line). This acceleration just cancels the gravitational acceleration relative to this system of reference. Accordingly, the *relative gravitational field strength* may be defined to be

$$\mathrm{E}^m = - \mathring{u}^m. \tag{5}$$

The analogue of Gauss's law may be constructed from this idea of gravitational field strength relative to a system of reference. In a reference surface $\varphi(x) = \text{const.}$, choose any closed 2-surface S bounding a 3-volume σ of the reference surface. Let n_r be the outward unit normal to S, lying in the reference surface. Then the *relative gravitational mass* inside S is defined to be

$$\mathrm{M}(\mathrm{S}) = - (4\pi)^{-1} \int_s \mathrm{E}^r\, n_r\, d^2\, \mathrm{S}. \tag{6}$$

Here d^2 S is the proper area element on S. The minus sign is appropriate because the gravitational force is attractive, and therefore points inwards when the surface contains a positive mass.

This integral may be converted into a 3-volume integral : Substituting for E^r from its definition (5) yields

(2) A semi-colon denotes covariant differentiation, a comma, partial differentiation. Square brackets around indices denote the antisymmetric part :

$$\mathrm{A}_{[mn]} = \frac{1}{2} (\mathrm{A}_{mn} - \mathrm{A}_{nm}), \text{ etc.}$$

$$\mathrm{M(S)} = (4\pi)^{-1} \int_s \mathring{u}^r n_r \, d^2\mathrm{S} = (4\pi)^{-1} \int_s u^{r;m} u_r u_m \, d^2\mathrm{S}$$

$$= (4\pi)^{-1} \int_s (u^{r;m} - u^{m;r}) \, u_m n_r \, d^2\,\mathrm{S}.$$

The added term contributes nothing, because u^m is a unit vector field. Green's theorem in three dimensions may now be applied (cf. Synge 1960) and gives

$$\mathrm{M(S)} = (4\pi)^{-1} \int_\sigma (u^{r;m} - u^{m;r})_{;r} \, u_m \, d^3\,\sigma \tag{7}$$

where $d^3\,\sigma$ is the element of proper 3-volume.

The integrand in the last equation is a multiple of Komar's « generalized energy-flux vector » p^m (Komar, 1959), which will be called here the *relative energy-flux vector* associated with the vector field u^m :

$$\mathrm{P}^m = 2(u^{m;r} - u^{r;m})_{;r} \tag{8}$$

In terms of this relative energy flux vector,

$$\mathrm{M(S)} = -(8\pi)^{-1} \int \mathrm{P}^m u_m \, d^3\,\sigma \tag{9}$$

This result gives an additional significance to Komar's work. Komar, making covariant an idea of Møller's (1958), gave quite other reasons for relating P^m to the distribution ef energy in space-time. In Komar's work, u^m is the generator of an infinitesimal coordinate transformation, but stripped of all elegance it may be regarded simply as an arbitrary vector field. The essential difference between that situation and the present argument is that the physical interpretation of u^m as a 4-velocity vector naturally requires that it be a *unit* vector. In Komar's case, one may always choose u^m to be a gradient vector, which makes $\mathrm{P}^m = 0$ whatever the distribution of matter (Komar clearly recognized this difficulty). However, a unit vector field cannot be a gradient field unless the system of reference is geodesic, in which case the relative gravitational field vanishes. This is physically understandable *a*) in flat space-time, and *b*) in a homogeneous and isotropic cosmological model, where the relative gravitational field vanishes by symmetry.

From the definition (8) of P^m it follows that

$$\mathrm{P}^m{}_{;m} = 0\,, \tag{10}$$

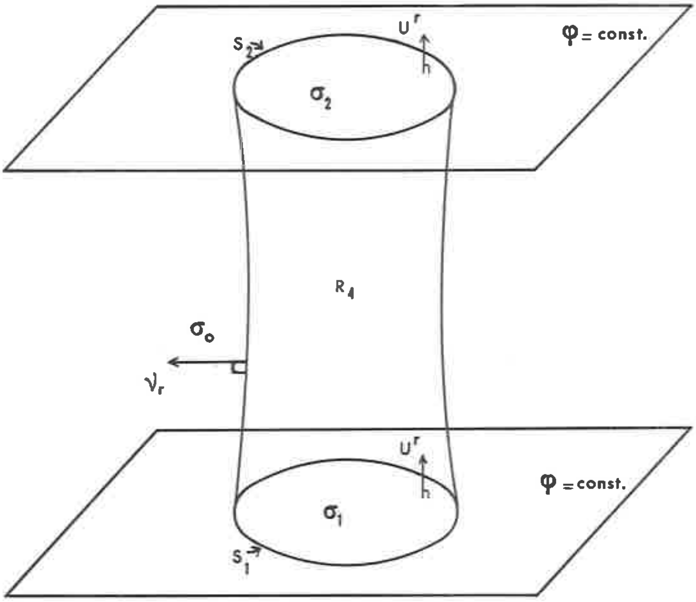
and it is therefore possible to construct a covariant conservation law for the relative energy flux : Consider a space-time region R_4 bounded by spacelike regions σ_1 and σ_2 of two surfaces of reference and by a timelike 3-surface σ_0 with outward normal ν_r. The 2-surfaces bounding σ_1 and σ_2 are denoted S_1 and S_2, and the rest of the notation is as before. Integrating (10) through the region R_4 and applying Green's theorem in four dimensions (Synge 1960) gives

$$0 = \int_{R_4} P^m{}_{;m}\, d^4 V = \int_{\sigma_2} P^m u_m\, d^3\sigma - \int_{\sigma_1} P^m u_m\, d^3\sigma - \int_{\sigma_0} P^m \nu_m\, d^3\sigma$$

Comparing this with (9) gives

$$M(S_2) = M(S_1) - (8\pi)^{-1} \int_{\sigma_0} P^m u_m\, d^3\sigma \qquad (11)$$

This is the law of conservation of gravitational mass. If the relative gravitational field strength vanishes rapidly enough as σ_0 is moved off to infinity, then the relative gravitational mass will be constant. Otherwise, the integral in (11) gives the rate of outflow of gravitational energy. It would be of some interest to connect this integral with the various conditions for the existence of gravitational radiation which have been proposed, but the author has not yet found a satisfactory way of doing this.



3. — The energy density

Changing the order of differentiation in the second term of P^m yields

$$P^m = 2\left[u^{m;r}{}_{;r} - (u^r{}_{;r})^{;m} + R^m{}_r u^r\right]. \qquad (12)$$

Considering for simplicity a distribution of matter momentarily at rest in the system of reference and moving under negligible stress, one finds from Einstein's field equations $G_{rs} = -\varkappa T_{rs}$ ($\varkappa$ is Einstein's gravitational constant) that $2R^m{}_r u^r \sim \varkappa \rho u^m$, where ρ is the density of matter. This is the contribution from this term to P^m. The corresponding contribution to M(S) is $(8\pi)^{-1}\int \varkappa\rho d^3\sigma$. The other terms may be interpreted as the contributions of the gravitational field itself. The second term is just the gradient of the expansion $u^r{}_{;r}$ of the world-lines which define the system of reference. This term vanishes if the surfaces of reference are chosen to be maximal. The first term contributes to the gravitational mass density an amount

$$-(4\pi)^{-1}u_m u^{m;r}{}_{;r} = (4\pi)^{-1}u_{m;r}u^{m;r} = (4\pi)^{-1}[s_{rs}s^{rs} - \mathring{u}_r\mathring{u}^r],$$

where

$$s_{rs} = u_{r;s} + \mathring{u}_r u_s = (\delta_r^m + u_r u^m)(\delta_s^n + u_s u^n)u_{m;n}$$

is the projection of $u_{r;s}$ on the reference surface. Thus $s_{rs}s^{rs}$ is positive semi-definite and $-\mathring{u}_r\mathring{u}^r$ is negative semi-definite. In a static space-time, only $-\mathring{u}_r\mathring{u}^r$ survives in vacuo, representing the fact that the gravitational « Coulomb » energy is negative definite.

4. — Discussion

It is a manifestation of the principle of equivalence that no tensor quantities can be formed from the *first* derivatives of the metric tensor. All the difficulties in the canonical and other formulations, in which the metric tensor is identified as gravitational potential, stem partly from this and partly from the necessarily non-linear character of all tensor quantities formed from first and second derivatives together. The variation on a Vierbein theme played here is intended as a preliminary to the discussion of energy, and whatever other quantities one is accustomed in field theories to form from first derivatives of the potentials, without loss of covariance. It has all the limitations which come with the introduction of additional arbitrary elements into a theory, but there are no more additional elements than are anyhow hidden in a special choice of time coordinate. The present approach is not likely to be very useful unless it can be linked up with other methods of defining energy in the gravitational field.

Acknowledgements

The author is indebted to Dr Komar for showing him his work before publication, and for helpful discussions. He is most grateful to Professor E. D. Palmatier and Professors C. M. and B. S. De Witt for the hospitality of the Physics Department and the Institute of Field Physics, University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.

REFERENCES

Komar, A., *Phys. Rev.*, **113**, 934-936 (1959).
Møller, C., The theory of relativity, Oxford, Clarendon Press (1952).
Møller, C., *Annals of Phys.*, **4**, 347 (1958).

RUSE, H. S., *Proc. Edin. Math. Soc.* (2), 4, 144-158 (1935).
SYNGE, J. L., Relativity; the General Theory, North-Holland, Amsterdam, Ch. (1960).

DISCUSSION

Intervention de Papapetrou

Il est presque trivial de s'échauffer contre des résultats attrayants au sujet de la distribution détaillée de l'énergie gravitationnelle basée trop sérieusement sur l'emploi d'une forme quelconque de loi de conservation. La même remarque peut être faite ici en relation avec le signe négatif de l'énergie gravitationnelle. J'aimerais mentionner que la discussion des champs de gravitation qui dépendent périodiquement du temps conduit directement, sans l'emploi d'une forme quelconque de la loi de conservation, au résultat que dans ce cas l'énergie gravitationnelle est positive.

RADIATIONS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par M. le Professeur André LICHNEROWICZ
Collège de France, Paris

RESUME

Etude parallèle des fronts d'onde et radiations électromagnétiques et gravitationnels en relativité générale. Relations différentielles correspondant à la propriété des rayons. Identités de conservation pour une radiation totale. Tenseur de Bel. Propagateurs et quantification des champs en relativité générale.

Cet exposé sera consacré à un rapport, fait de mon point de vue personnel, sur la question des radiations gravitationnelles pures. Certains des résultats proviennent des travaux de Bondi, Petrov, Pirani, Stellmacher et Trautman, d'autres de mes propres travaux et de ceux de mes élèves Bel, Le et Mariot. Je veux dire ici tout ce que ce rapport doit à ces différents savants.

Le problème de la définition des radiations peut être envisagé soit d'un point de vue local, soit d'un point de vue global. Les considérations globales développées au cours des vingt dernières années ou bien ne peuvent encore être mises sous une forme satisfaisante par les mathématiciens ou bien supposent sur la variété espace-temps l'existence de coordonnées globales privilégiées jouissant relativement à la métrique de propriétés très particulières. En accord avec un point de vue adopté depuis longtemps par Pirani et moi-même, je me limiterai ici à des considérations locales basées essentiellement sur le *tenseur de courbure.* Entre les deux points de vue, il existe bien entendu, comme l'a montré Trautman, des relations intéressantes.

Une théorie satisfaisante des ondes et radiations électromagnétiques a pu être élaborée. Dans une introduction, je rappellerai brièvement l'essentiel de cette théorie dans le cadre de la relativité générale. C'est elle qui nous servira de modèle pour l'étude du cas gravitationnel.

I. — CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

1. — Généralités.

Dans toute théorie relativiste de la gravitation, l'élément primitif est constitué par une variété différentiable de dimension 4, la variété espace-temps V_4. Par hypothèse, sa structure différentiable est (C^2, C^4 par morceaux). V_4 est munie d'une métrique riemanienne de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3)$$

qui est de classe (C^1, C^3 par morceaux). Toute précision supplémentaire de la structure différentiable de la variété et de la métrique est dépourvue de sens physique.

Nous définissons dans V_4 un champ électromagnétique par une 2-forme $F_{\alpha\beta}$ supposée (C^0, C^2 par morceaux) et satisfaisant les équations de Maxwell :

$$S \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\,, \qquad \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha \tag{1-1}$$

où ∇ désigne la dérivation covariante, S la sommation après permutation circulaire sur α, β, γ et J^α le vecteur-courant-électrique. Si u^α est un vecteur unitaire définissant une direction de temps, les vecteurs champ électrique et champ magnétique définis par $F_{\alpha\beta}$ relativement à cette direction de temps sont les vecteurs d'espace (vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$) :

$$E^\beta = F^{\alpha\beta} u_\alpha\,, \qquad H^\beta = - F^{*\alpha\beta} u_\alpha \tag{1.2}$$

où $F^{*\alpha\beta}$ est le 2-tenseur adjoint de $F^{\alpha\beta}$ relativement à V_4 supposée orientée.

2. — Notion de 2-forme singulière.

Sur une variété riemanienne V_n admettant une métrique hyperbolique normale, considérons une 2-forme $F \neq 0$ telle qu'il existe un vecteur $\vec{l}$ par lequel :

$$S\, l_\alpha F_{\beta\gamma} = 0\,, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.1}$$

S'il en est ainsi, F est dite *singulière* et $\vec{l}$ un *vecteur fondamental* de F ; $\vec{l}$ est nécessairement *isotrope* : sinon nous pourrions introduire un repère orthonormé tel que l soit l'un des vecteurs du repère et (2.1) implique alors $F = 0$; il en résulte aussi que $\vec{l}$ est bien défini à un facteur scalaire près.

Supposons maintenant $n = 4$. Soit $\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)}$ deux vecteurs orthogonaux de carrés -1, situés dans le 3-plan tangent au cône isotrope le long de $\vec{l}$. L'espace vectoriel des 2-formes singulières de vecteur fondamental $\vec{l}$ s'écrit :

$$F_{\alpha\beta} = \sum_i a_i \, (l_\alpha \, n^{(i)}_\beta - l_\beta \, n^{(i)}_\alpha) \qquad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

où les a_i sont des scalaires arbitraires ; (2.2) traduit la polarisation de F. Si F et $\vec{l}$ sont donnés, les a_i sont invariants par la transformation $\vec{n}^{(i)} \to \vec{n}^{(i)} + k^{(i)} \vec{l}$ et définissent un vecteur par rapport aux rotations du couple $(\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)})$ dans leur 2-plan.

Pour :

$$b_\alpha = \sum_i a_i \, n^{(i)}_\alpha$$

il existe un vecteur b_α, orthogonal à l_α, tel que :

$$F_{\alpha\beta} = l_\alpha \, b_\beta - l_\beta \, b_\alpha \tag{2.3}$$

Ce vecteur est défini à la transformation $b_\alpha \to b_\alpha + k \, l_\alpha$ près. Le scalaire positif :

$$e_F = - \; b^\alpha \, b_\alpha = \Sigma \, (a_i)^2 \tag{2.4}$$

dépend seulement de F et du choix de $\vec{l}$.

3. — **Discontinuités des dérivées du champ électromagnétique.**

a) Considérons un champ électromagnétique satisfaisant des équations de Maxwell avec *courant électrique continu ;* $F_{\alpha\beta}$ étant supposé (C^0, C^2 par morceaux), étudions les hypersurfaces S à la traversée desquelles les dérivées premières du champ sont discontinues, ainsi que la structure de ces discontinuités. Si $f(x^\alpha) = 0$ est l'équation locale de S, nous posons $l_\alpha = \partial_\alpha f$ ($\partial_\alpha = \partial / \partial x^\alpha$) ; le symbole [...] représente la discontinuité d'une quantité à travers S. Des conditions de Hadamard, il résulte qu'il existe aux points de S un tenseur antisymétrique φ tel que :

$$[\nabla_\gamma \, F_{\alpha\beta}] = \varphi_{\alpha\beta} \, l_\gamma \tag{3.1}$$

Les équations de Maxwell montrent que φ est une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$; $\vec{l}$ étant ainsi nécessairement isotrope, S satisfait :

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha f \, \partial_\beta f = 0.$$

c'est-à-dire est tangente, en chacun de ses points, au cône isotrope en ce point. De plus, de $\nabla_\beta \, l_\alpha - \nabla_\alpha \, l_\beta = 0$, on déduit :

$$l^\beta \, \nabla_\beta \, l_\alpha = l^\beta \, (\nabla_\beta \, l_\alpha - \nabla_\alpha \, l_\beta) = 0.$$

Les trajectoires du champ $\vec{l}$ de S sont des géodésiques isotropes. Nous avons ainsi obtenu dans V_4 les fronts d'onde et rayons électromagnétiques.

b) *Supposons* $J^a = 0$. Sous cette hypothèse, on peut déduire des équations de Maxwell que les discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique et les discontinuités du tenseur de courbure relatives à S satisfont les relations différentielles :

$$2 l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] + (\nabla_\rho l^\rho) [\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] - 2 l^\rho F_\rho{}^\sigma [R_{\sigma\gamma,\alpha\beta}] = 0. \tag{3.2}$$

Si le tenseur de courbure de V_4 est continu à la traversée de S, (3.2) se réduit à :

$$2 l^\rho \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) \varphi_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.3}$$

Ces relations mettent en évidence la propagation des discontinuités le long des géodésiques de S. Si $\varphi_{\alpha\beta} = 0$ en un point x de S, il en est de même en tous les points de la géodésique isotrope de S issue de x. Les relations (3.3) peuvent être traduites de la manière suivante : si b_α est un vecteur orthogonal à l_α tel que $\varphi_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_a$, on a $b_\alpha = \sqrt{e_\Phi} V_\alpha$ ($e_\Phi = - b^a b_\alpha$) où V_α est normé; (3.3) exprime que pour un choix convenable de b_a) :

1°) V_α est transporté par parallélisme le long de la géodésique;

2°) e_Φ satisfait l'identité de conservation :

$$\nabla_\rho (e_\Phi l^\rho) = 0. \tag{3.4}$$

Si F est donné, $\vec{l}$ est défini à un facteur scalaire près λ, constante le long de la géodésique; si $\vec{l} \to \lambda \vec{l}$ alors $e_\Phi \to \lambda^{-4} e_\Phi$; (3.4) exprime que le tenseur symétrique d'ordre 4 ne dépendant que de F :

$$\overset{[\nabla F]}{A}_{\alpha\beta\lambda\mu} = e_\Phi l_\alpha l_\beta l_\lambda l_\mu = \frac{1}{2}\left([\nabla_\alpha F^\rho{}_\lambda] [\nabla_\beta F_{\rho\mu}] + [\nabla_\alpha F^\rho{}_\lambda] [\nabla_\beta F_{\rho\mu}] \right)$$

est *conservatif*.

$$\nabla_\alpha \; A^{[\nabla F]\alpha}_{\beta\lambda p} = 0. \tag{3.6}$$

4. — **Radiation électromagnétique pure :**

a) Si $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Maxwell, le vecteur de Poynting associé à la direction de temps $\vec{u}$ est donné par :

$$P_\rho = (g^\alpha_\rho - u^\alpha u_\rho) \tau_{\alpha\beta} u^\beta$$

Pour que P_ρ soit nul, il faut et il suffit que $\vec{u}$ soit vecteur propre de $\tau_{\alpha\beta}$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$. L'étude algébrique montre que deux cas se présentent : si F est *non singulière,* $\tau_{\alpha\beta}$ admet par rapport à $g_{\alpha\beta}$ des vecteurs propres orientés dans le temps, de valeur propre k telle que $k^2 = A^2 + B^2$, où A et B sont les invariants classiques du champ électromagnétique. Si F est *singulière,* les vecteurs propres sont les vecteurs tangents au cône isotrope le long de $\vec{l}$ et :

$$\tau_{\alpha\beta} = e_F l_\alpha l_\beta \qquad (e_F = - b^a b_\alpha > 0). \tag{4.1}$$

Il n'est pas possible d'annuler P_ρ et l'on peut considérer qu'il y a radiation intrinsèque d'énergie.

Une *radiation électromagnétique pure* peut ainsi être définie en relativité générale comme un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de Maxwell du vide ($J^\alpha = 0$) et jouissant de l'une des proriétés suivantes *toutes équivalentes.*

I. *F est défini par une 2-forme singulière.*

II. *Le vecteur de Poynting n'est nul dans aucune direction temporelle.*

III. *Les invariants (ici A et B) du champ sont nuls.*

Les propriétés analogues pour le cas gravitationnel ne sont plus équivalentes, comme le montre dans son exposé M. Bel.

Des conditions de conservation $\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = 0$, il résulte :

$$\nabla_\alpha (e_F l^\alpha) l_\beta + e_F l^\alpha \nabla_\alpha l_\beta = 0. \tag{4.2}$$

Les trajectoires du champ des vecteurs $\vec{l}$ sont autoparallèles, c'est-à-dire sont des géodésiques isotropes. On peut toujours choisir le champ $\vec{l}$ de façon que :

$$l^\alpha \nabla_\alpha l_\beta = 0. \tag{4.3}$$

Avec ce choix, (4.2) est équivalent à (4.3) et :

$$\nabla_\rho (e_F l^\rho) = 0. \tag{4.4}$$

b) F étant fermée et $\vec{l}$ satisfaisant $l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$, on voit que F est invariant par la transformation infinitésimale définie par le champ des vecteurs $\vec{l}$. Ainsi :

$$l^\rho \nabla_\rho F_{\alpha\beta} - \nabla^\alpha l_\rho F_\beta{}^\rho - \nabla_\beta l_\rho F^\rho{}_\alpha = 0. \tag{4.5}$$

De (4.4) ou (4.5) résulte que si F est nulle en un point x de V_4, il en est de même en tous les points du « rayon » issu de x.

De $S\, l_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$, il suit par dérivation :

$$\nabla_\rho (l^\rho F_{\alpha\beta}) + \nabla_\rho l_\alpha F_\beta{}^\rho + \nabla_\rho l_\beta F^\rho{}_\alpha = 0. \tag{4.6}$$

Par addition on peut obtenir :

$$2 l^\rho \nabla_\rho F_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) F_{\alpha\beta} + C\, \overset{*}{F}_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.7}$$

où C est défini à partir du tenseur antisymétrique l^* adjoint de l par :

$$S\, l_\gamma (\nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\beta l_\alpha) = - C\, \overset{*}{l}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.8}$$

Pour que $C = 0$, il faut et il suffit que la radiation soit *de type intégrable,* c'est-à-dire qu'on puisse adopter pour champ $\vec{l}$ un champ de gradient; une telle radiation jouit d'une propriété de permanence sur laquelle nous n'insisterons pas ici; dans le cas $C = 0$, (4.7) exprime, compte tenu de (4.4), que la direction du vecteur b_α est transportée par parallélisme le long de chaque rayon.

II. — FRONTS D'ONDE GRAVITATIONNELS

5. — Double 2-forme singulière.

J'appellerai *double 2-forme symétrique* un tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\rho}$ admettant les propriétés d'antisymétrie.

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = - H_{\beta\alpha,\lambda\mu} = - H_{\alpha\beta,\mu\lambda}$$

et tel que :

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = H_{\lambda\mu,\alpha\beta}$$

a) Supposons que pour la double 2-forme symétrique $H \neq 0$, il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que

$$S\, l_\gamma H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \quad (\text{S permutation circulaire sur } \alpha, \beta, \gamma) \tag{5.1}$$

et

$$l^\alpha H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \tag{5.2}$$

λ et μ étant fixés, le 2-forme au point x :

$$\Pi_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, dx^\alpha \Lambda\, dx^\beta$$

sont singulières et admettent $\vec{l}$ comme vecteur principal. Ainsi $\vec{l}$ est nécessairement *isotrope*-H est appelé une *double 2-forme symétrique singulière* si (5.1) et (5.2) sont satisfaits.

Par contraction de (5.1) on obtient :

$$l^\alpha H_{\beta\gamma,\alpha\mu} = l_\beta H_{\gamma\mu} - l_\gamma H_{\beta\mu}.$$

De (5.2) il résulte :

$$H_{\alpha\beta} = \tau\, l_\alpha l_\beta\,. \tag{5.3}$$

Inversement (5.1) et (5.3) entraînent (5.2).

b) Si nous introduisons les vecteurs $(\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)})$ associés à $\vec{l}$, nous obtenons pour les 2-formes singulières $\Pi_{\lambda\mu}$ (λ, μ fixés)

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \sum_i a_{(i)\lambda\mu} (l_\alpha n^{(i)}_\beta - l_\beta n^{(i)}_\alpha)\,.$$

Des propriétés de symétrie de H il résulte que $a_{(i)\lambda\mu}$ ($i = 1, 2$) définit une 2-forme singulière de vecteur fondamental l et :

$$a_{(i)\lambda\mu} = \sum_{i,j} a_{ij} (l_\lambda n^{(j)}_\rho - l_\mu\, n^{(j)}_\lambda) \quad (i, j = 1, 2).$$

Nous obtenons ainsi pour une double 2-forme symétrique singulière l'expression :

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \sum_{i,j} a_{ij} (l_\alpha n^{(i)}_\beta - l_\beta n^{(i)}_\alpha)(l_\lambda n^{(j)}_\rho - l_\mu n^{(j)}_\lambda) \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{5.4}$$

Les a_{ij} définissent une forme quadratique la « forme quadratique de polarisation » dont la trace est :

$$a_{11} + a_{22} = - \tau\,.$$

c) Si nous posons :

$$b_{\alpha\lambda} = \sum_{i,j} a_{ij}\, n^{(i)}_{\alpha}\, n^{(j)}_{\lambda}\,, \tag{5.5}$$

nous voyons que :

$$H_{\alpha\beta,\,\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda}\, l_\beta\, l_\mu + b_{\beta\mu}\, l_\alpha\, l_\lambda - b_{\alpha\mu}\, l_\beta\, l_\lambda - b_{\beta\lambda}\, l_\alpha\, l_\mu \tag{5.6}$$

où

$$b_{\alpha\lambda}\, l^\lambda = 0\,. \tag{5.7}$$

Il existe ainsi des quantités $b_{\alpha\lambda}$ symétriques satisfaisant (5.7) et telles que H s'exprime par (5.6). Les quantités sont définies à la transformation près :

$$b_{\alpha\lambda} \to b_{\alpha\lambda} + t_\alpha\, l_\lambda + t_\lambda\, l_\alpha \tag{5.8}$$

où t_α est un vecteur arbitraire orthogonal à l^α. Le scalaire :

$$e_H = b^{\alpha\lambda}\, b_{\alpha\lambda}$$

ne dépend que du tenseur H et du vecteur $\vec{l}$, c'est-à-dire est invariant par (5.8). Pour (5.5) nous avons :

$$e_H = \sum_{i,j} (a_{ij})^2 > 0\,.$$

A toute double 2-forme symétrique H associons le tenseur d'ordre 4 :

$$B^{H}_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(H^{\rho}{}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\lambda}\; H_{\rho\beta,\,\sigma\mu} + H^{\rho}{}_{\alpha,}{}^{\sigma}{}_{\mu}\; H_{\rho\beta\,\sigma\lambda}\right) \tag{5.9}$$

symétrique en α, β en λ, μ et symétrique par rapport aux couples. Si H est singulière :

$$B^{H}_{\alpha\beta\lambda\mu} = e_H\, l_\alpha\, l_\beta\, l_\lambda\, l_\mu\,.$$

6. — Discontinuités du tenseur de courbure.

a) Considérons un champ gravitationnel satisfaisant aux équations d'Einstein avec *tenseur d'impulsion-énergie continu.* La métrique étant (C^1, C^3 par morceaux), étudions les hypersurfaces S pour lesquelles le tenseur de courbure est discontinu, ainsi que la structure de ces discontinuités. Avec des notations semblables à celles du cas électromagnétique, nous avons :

$$[R_{\alpha\beta}] = 0\,. \tag{6.1}$$

Des conditions de Hadamard, il résulte qu'il existe, aux points de S, des quantités $u^{\gamma}_{\mu\beta}$ telles que, en coordonnées locales :

$$[\partial_\alpha\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}] = u^{\lambda}_{\mu\beta}\, l_\alpha \quad (l_\alpha = \partial_\alpha f)\,.$$

Les expressions des composantes du tenseur de courbure donnent :

$$[R_{\alpha\beta,}{}^{\lambda}{}_{\mu}] = u^{\lambda}_{\mu\beta}\, l_\alpha - u^{\lambda}_{\mu\alpha}\, l_\beta\,. \tag{6.2}$$

De (6.2) on déduit :

$$S\, l_\gamma\, [R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}] = 0 \tag{6.3}$$

(6.1) et (6.3) montrent que $[R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}]$ définissent aux points de S une *double*

2-forme symétrique singulière; l est isotrope et nous obtenons ainsi les ondes et les rayons gravitationnels.

Les expressions (5.4) et (5.6) sont valables pour $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ avec :

$$a_{11} + a_{22} = 0 \qquad b_\alpha{}^\alpha = 0 .$$

Ces expressions sont équivalentes à celle indiquée en termes de matrice par PIRANI.

b) Supposons que le champ gravitationnel satisfasse aux équations d'EINSTEIN :

$$R_{\alpha\beta} = 0 .$$

Sous cette hypothèse la discontinuité du tenseur de courbure à travers S satisfait les relations différentielles (LICHNEROWICZ, TRAUTMAN).

$$2 l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] + (\nabla_\rho l^\rho) [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0 . \tag{6.4}$$

Ces relations peuvent être traduites de la manière suivante :

1°) Le scalaire $e_{[R]} = b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} > 0$ satisfait l'identité de conservation:

$$\nabla_\rho (e_{[R]}\, l^\rho) = 0 \tag{6.5}$$

2°) On peut choisir :

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{e_{[R]}}{2}}\, (n^{(1)}_\alpha n^{(1)}_\beta - n^{(2)}_\alpha n^{(2)}_\beta)$$

où les vecteurs $n^{(i)}$ sont *invariants par transport par parallélisme* le long des rayons, trajectoires de $\vec{l}$. La relation (6.5) exprime que le tenseur $\overset{[R]}{B}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ qui ne dépend que du tenseur de courbure est *conservatif* :

$$\nabla_\alpha B^{[R]\,\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = 0 . \tag{6.6}$$

c) Supposons qu'il existe dans V_4 un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de MAXWELL du vide et relié au champ gravitationnel par les équations d'EINSTEIN

$$R_{\alpha\beta} = \chi\, \tau_{\alpha\beta} \qquad (\tau_{\alpha\beta} \text{ tenseur de Maxwell}).$$

A la traversée de S les discontinuités du tenseur de courbure satisfont à:

$$2 l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] + (\nabla_\rho l^\rho) [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = \chi\, l_\lambda [\nabla_\alpha \tau_{\beta\mu} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\mu}] - \chi\, l_\mu [\nabla_\alpha \tau_{\beta\lambda} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}]$$

et celles du tenseur dérivé du champ électromagnétique à (3.2). De ces relations on peut déduire

$$\nabla_\rho \{(e_{[R]} + \chi\, e_\Phi)\, l^\rho\} = 0 .$$

Le tenseur d'ordre 4

$$\overset{[R]}{B}_{\alpha\beta\lambda\mu} + \chi \overset{[\nabla F]}{A}_{\alpha\beta\lambda\mu}$$

est conservatif.

Des résultats de STELLMACHER, il résulte que la déviation par rapport au transport parallèle des directions spatiales associées aux discontinuités du tenseur de courbure est essentiellement régie par le vecteur $l_\rho F^{\rho\sigma}$.

III. — RADIATION GRAVITATIONNELLE PURE

7. — Radiation totale pure.

a) Nous sommes ainsi conduits à envisager les métriques pour lesquelles le tenseur de courbure définit une *double 2-forme singulière.* Il existe un vecteur l tel que :

$$\mathrm{S}\, l_\gamma\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0\,, \qquad l^\alpha\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \tag{7.1}$$

$\vec{l}$ est isotrope et le tenseur de Ricci — ou le tenseur d'Einstein — a la forme :

$$R_{\alpha\beta} = \tau\, l_\alpha\, l_\beta\,. \tag{7.2}$$

Si $\tau \neq 0$, nous dirons que la métrique correspond à un état de *radiation totale pure*; si de plus $R_{\alpha\beta} = 0$ nous dirons que nous avons un état de *radiation gravitationnelle pure.*

b) De l'identité de Bianchi :

$$\nabla_\rho\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + \nabla_\alpha\, R_{\beta\rho,\lambda\mu} + \nabla_\beta\, R_{\rho\alpha,\lambda\mu} = 0$$

il résulte par multiplication par l^ρ que, pour un état de *radiation totale pure.*

$$l^\rho\, \nabla_\rho\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} - \nabla_\alpha\, l_\rho\, R_\beta{}^\rho{}_{,\lambda\mu} - \nabla_\beta\, l_\rho\, R^\rho{}_{\alpha,\lambda\mu} = 0 \tag{7.3}$$

qui est analogue à (4.5).

Dans un domaine où $R_{\alpha\beta}$ est différent de zéro, il est clair que les trajectoires du champ $\vec{l}$ sont des géodésiques isotropes : cela est une conséquence du caractère conservatif du tenseur d'Einstein; de (7.3) on déduit aisément que ce résultat est général. Considérons le tenseur :

$$P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = l^\rho\, \nabla_\rho\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,.$$

Il résulte de (7.3)

$$\underset{\lambda,\mu,\nu}{\mathrm{S}}\ l_\nu\, P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad l^\lambda\, P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0\,.$$

Ainsi $P_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ est une double 2-forme singulière. Si nous posons $l^\rho\, \nabla_\rho\, l_\alpha = m_\alpha$, on déduit de (7.1) par dérivation :

$$\mathrm{S}\, m_\alpha\, R_{\beta\gamma,\lambda\mu} + \mathrm{S}\, l_\alpha\, P_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0\,. \qquad m^\alpha\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + l^\alpha\, P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0\,.$$

$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ est singulier pour le vecteur principal $\vec{m}$ qui est nécessairement colinéaire à $\vec{l}$ et les trajectoires sont des géodésiques. Nous pouvons toujours supposer $\vec{l}$ choisi de façon que :

$$l^\rho\, \nabla_\rho\, l_\alpha = 0\,. \tag{7.4}$$

8. — Exemple de radiation.

Il est aisé de construire des exemples de radiation. Considérons l'espace numérique R^4 avec les coordonnées :

$$t = x^0 \qquad x = x^1 \qquad y = x^2 \qquad z = x^3$$

et posons $u = t - x$, $v = t + x$. La métrique

$$ds^2 = e^{2\psi}(dt^2 - dx^2) - (\eta^2\, dy^2 + \zeta^2\, dz^2) = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

où ψ, $\eta > 0$, $\zeta > 0$ sont des fonctions de la seule variable u, représente une radiation totale pure. Avec cette métrique considérons le potentiel-vecteur φ_α défini par :

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi(u)\,.$$

Le champ électromagnétique correspondant définit une radiation électromagnétique pure.

Si nous écrivons que τ correspond à l'énergie du champ électromagnétique, nous obtenons une relation entre ψ, φ et η, ζ. En effectuant un changement de coordonnées dû à Bondi, on obtient par exemple la métrique :

$$ds^2 = du\, dv - (dy^2 + dz^2) - 2\,\beta'(u)\left(y\, dy - z\, dz - \frac{y^2 - z^2}{u}\, du\right) du$$
$$- \beta'^2(u)\, u\, v\, du^2 - \left(v - \frac{y^2 + z^2}{u}\right) \frac{1}{4u}\, e^{-2\beta(u)}\, \varphi'^2(u)\, du^2$$

où $\beta(u)$ et $\varphi(u)$ sont des fonctions arbitraires de classe C^2 au moins, telles que β' et φ' ne soient différents de zéro que pour $u \geqslant u_0 > 0$. Nous obtenons ainsi un exemple de radiation pure « unitaire ». Pour $\varphi' \equiv 0$, nous avons une radiation gravitationnelle pure (Bondi) qui est non triviale par $u \geqslant u_0$.

9. — **Identités de conservation.**

Considérons une *radiation totale pure*; on a :

$$R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda}\, l_\beta\, l_\mu + b_{\beta\mu}\, l_\alpha\, l_\lambda - b_{\alpha\mu}\, l_\beta\, l_\lambda - b_{\beta\lambda}\, l_\alpha\, l_\mu \quad (b_{\alpha\lambda}\, l^\lambda = 0) \tag{9.1}$$

et

$$R_{\alpha\beta} = \tau\, l_\alpha\, l_\beta \qquad (\tau = b_\alpha{}^\alpha) \tag{9.2}$$

où le champ $\vec{l}$ est supposé satisfaire (7.4). De (7.4) et du caractère conservatif du tenseur d'Einstein résulte :

$$\nabla_\rho(\tau\, l^\rho) = 0\,. \tag{9.3}$$

En reportant (9.1) dans (7.3) et en utilisant les identités de Bianchi on peut établir :

$$\nabla_\rho\, (e_R\, l^\rho) = \tau\, l^\rho\, \partial_\rho\, \tau$$

Or d'après (9.3) :

$$\nabla_\rho\, (\tau^2\, l^\rho) = \tau\, l^\rho\, \partial_\rho\, \tau + \tau\, \nabla_\rho\, (\tau\, l^\rho) = \tau l^\rho\, \partial_\rho\, \tau$$

Ainsi :

$$\nabla_\rho\, \{(e_R - \tau^2)\, l^\rho\} = 0. \tag{9.4}$$

$$\tau = -(a_{11} + a_{22}) \qquad e_R - \tau^2 = 2\,\{(a_{12})^2 - a_{11}\, a_{22}\}$$

Ainsi, *pour une radiation totale pure, les deux invariants de la forme de polarisation satisfont relativement au champ* $\vec{l}$ *à des équations* *de continuité;* (9.4) exprime que le tenseur d'ordre 4 qui ne dépend que de la métrique :

$$B^{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} - R_{\alpha\beta}\, R_{\lambda\mu}$$

est *conservatif.* Dans le cas d'une radiation gravitationnelle pure $\tau = 0$,

$$\nabla_\rho\, (e_R\, l^\rho) = 0 \tag{9.5}$$

et le tenseur $B_{\alpha\beta\lambda\mu}$ est conservatif.

10. — Formules relatives à une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein du vide.

Considérons une métrique arbitraire satisfaisant *aux équations d'Einstein du vide :*

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad (\text{ou } R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}) \tag{10.1}$$

Au tenseur de courbure associons le tenseur :

$$R^{*}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\, R^{\rho\sigma}{}_{\gamma\delta} \tag{10.2}$$

Sous l'hypothèse (10.1), ce tenseur définit une double 2-forme *symétrique* ($R^{*}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = R^{*}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}$) et l'on a la relation :

$$R^{\alpha\beta,\,\gamma\lambda}\, R_{\alpha\beta\,\gamma\mu} = \frac{1}{4}\, \delta^{\lambda}_{\mu}\, R^{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} \tag{10.3}$$

Etant donné un vecteur *unitaire* $\vec{u}$ associons au tenseur de courbure les deux tenseurs symétriques :

$$E_{\alpha\beta}\, (\vec{u}) = R_{\alpha\beta,\,\rho\sigma}\, u^\rho\, u^\sigma \qquad\qquad H_{\alpha\beta}\, (\vec{u}) = - R^{\alpha}_{\alpha\beta,\,\rho\sigma}\, u^\rho\, u^\sigma$$

qui satisfont manifestement à :

$$E_{\alpha\beta}\, u^\beta = 0 \qquad\qquad H_{\alpha\beta}\, u^\beta = 0.$$

La donnée de ces deux tenseurs détermine complètement le tenseur de courbure, exactement comme les vecteurs d'espace champ électrique et champ magnétique déterminent le tenseur champ électromagnétique. Dans un repère orthonormé tel que $\vec{e}_o = \vec{u}$, $R_{ro,so} = E_{rs}$ $(r, s, \ldots = 1, 2, 3)$, les composantes $R_{rs,to}$ sont fournies par H et les composantes $R_{rs,tu}$ par E. En particulier :

$$A = \frac{1}{8}\, R^{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = E^{rs}\, E_{rs} - H^{rs}\, H_{rs} \tag{10.4}$$

Nous nous servirons dans un instant de ces différentes formules.

11. — Relation différentielle relative à une radiation gravitationnelle pure.

Etant donnée une *radiation gravitationnelle pure* ($R_{\alpha\beta} = 0$), on déduit de $S\, l_\gamma\, R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu} = 0$ par dérivation contractée la relation :

$$\nabla_\rho\, (l^\rho\, R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}) + \nabla_\rho\, l_\alpha\, R_{\beta}{}^{\rho}{}_{,\lambda\mu} + \nabla_\rho\, l_\beta\, R^{\rho}{}_{\alpha,\,\lambda\mu} = 0. \tag{11.1}$$

qui joue ici le rôle de (4.6) En ajoutant membre à membre avec (7.3) on peut établir la relation différentielle :

$$2l^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + (\nabla_\rho l^\rho) R_{\alpha\beta,\lambda\mu} + C \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0. \tag{11.2}$$

où C est toujours fourni par (4.8). Si $C = 0$, c'est-à-dire si la radiation est *de type intégrable,* (11.2) exprime que l'on peut prendre :

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{e_R}{2}}\,(n^{(1)}_\alpha n^{(1)}_\beta - n^{(2)}_\alpha n^{(2)}_\beta)$$

où les $n^{(i)}$ *sont invariants* par transport par parallélisme le long des rayons et où e_R satisfait (9.5).

12. — Le tenseur de superénergie.

Pour une métrique arbitraire satisfaisant aux équations d'Einstein du vide (10.1), le tenseur $B^R_{\alpha\beta,\gamma\mu}$ satisfait, en vertu des identités de Bianchi, à la relation :

$$4\,\nabla_\alpha B^{R\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = \nabla_\beta (R^{\rho\sigma,\tau}{}_\lambda R_{\rho\sigma,\tau\mu}). \tag{12.1}$$

Nous appellerons *tenseur de superénergie* le tenseur ayant les mêmes symétries que B^R :

$$T_{\alpha\beta,\lambda\mu} = B^R_{\alpha\beta,\lambda\mu} - \frac{1}{2} A\, g_{\alpha\beta}\, g_{\lambda\mu}$$

où A est défini par (10.4). Il résulte de (10.3) et (12.1) que T satisfait aux identités de conservation :

$$\nabla_\alpha T^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} = 0.$$

Il en est de même pour le tenseur U complètement symétrique déduit de T. Pour une radiation gravitationnelle pure, T et U se réduisent bien entendu à B^R. Ce tenseur de superénergie que je crois intéressant a été étudié par Bel qui reviendra sur lui. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, le scalaire :

$$T(\vec{u}) = T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\alpha u^\beta u^\lambda u^\mu$$

s'exprime à partir des tenseurs E et H correspondant à $\vec{u}$ par :

$$T(\vec{u}) = \frac{1}{2}(E^{rs} E_{rs} + H^{rs} H_{rs}) > 0$$

$T(\vec{u})$ est *strictement positif et n'est nul que si le tenseur de courbure est nul;* T semble ainsi généraliser le tenseur de Maxwell. Il lui correspond un « vecteur de Poynting » ne dépendant que de U :

$$P_\rho(\vec{u}) = (g^\alpha_\rho - u^\alpha u_\rho)\, T_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\lambda u^\mu .$$

Le Than Phong a établi que ce vecteur *coïncidait avec le vecteur de Poynting correspondant au tenseur* $\bar{t}_{\alpha\beta}$ *de Pirani* déduit du pseudo-tenseur d'impulsion-énergie.

13. — Remarques sur la quantification.

a) Supposons le champ électromagnétique satisfaisant, dans l'espace-temps de la relativité restreinte, aux équations de Maxwell du vide :

$$(dF)_{\alpha\beta\gamma} = S\, \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \qquad (\delta F)_\beta = - \nabla_\alpha F^\alpha{}_\beta = 0.$$

J'ai montré qu'en coordonnées curvilignes arbitraires les conditions de crochet du champ quantifié peuvent s'écrire :

$$[F_{\alpha\beta}(x), F_{\lambda'\mu'}(x')] = \frac{\hbar}{i}\,(t_{\alpha\lambda'}\, \partial_\beta\, \partial_{\mu'} + t_{\beta\mu'}\, \partial_\alpha\, \partial_{\lambda'}$$
$$- t_{\alpha\mu'}\, \partial_\beta\, \partial_{\lambda'} - t_{\beta\lambda'}\, \partial_\alpha\, \partial_{\mu'})\, D(x, x') \qquad (13.1)$$

où x et x' sont deux points de l'espace temps, $D(x, x')$ le propagateur de Jordan-Pauli et où $t_{\alpha\lambda'}$ est le bi-1-tenseur (vecteur en x et vecteur en x') :

$$t_{\alpha\lambda'} = \pm \frac{1}{2}\, \partial_\alpha\, \partial_{\lambda'}, s^2.$$

Plus généralement, B. de Witt et moi-même avons montré par des méthodes différentes l'existence locale, sur l'espace-temps de la relativité générale, de propagateurs $G^{(0)}(x, x')$, $G^{(1)}_{\alpha\lambda'}(x, x')$ antisymétriques en x et x' satisfaisant :

$$\Delta\, G^{(0)} = 0\,, \qquad \Delta\, G^{(1)} = 0\,,$$

où Δ est le laplacien $(d\delta + \delta d)$ et reliés par la relation :

$$\delta_{x'}\, G^{(1)} = d_x\, G^{(0)}.$$

Avec le propagateur $G^{(1)}$ dont le support est dans ou sur le conoïde caractéristique, on peut quantifier le champ électromagnétique dans un espace-temps donné par :

$$[F(x), F(x')] = \frac{\hbar}{i}\, d_x\, d_{x'}\, G^{(1)} \qquad (13.1')$$

qui se réduit à (13.1) si l'espace-temps est plat.

b) J'ai été aussi conduit à considérer comme « vrai champ de gravitation » en relativité générale le champ décrit par un tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ jouissant des mêmes propriétés algébriques que le tenseur de courbure, les équations de champ envisagées étant :

$$S\, \nabla_\alpha\, H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0\,, \qquad \nabla_\alpha\, H^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad (13.2)$$

où les premières correspondent aux identités de Bianchi et les secondes sont des conséquences des équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$. Inversement les équations $H_{\alpha\beta} = 0$ sont pour une solution de (13.2) de simples conditions initiales.

On est ainsi conduit à adopter un point de vue « semi-classique » et à chercher à quantifier pour une métrique donnée, les équations (13.2).

Cette quantification a pu être effectuée *pour un espace-temps à courbure constante* grâce à l'introduction d'un *nouveau propagateur tensoriel* (tenseur d'ordre 2 symétrique en x et tenseur d'ordre 2 symétrique en x').

DISCUSSION

Intervention du Prof. A. Papapetrou

Le cas considéré par le Prof. Lichnerowicz correspond physiquement à une onde élémentaire, du fait qu'elle a un vecteur de propagation l_α bien défini. Il faut s'attendre à ce que des ondes plus compliquées existent également; mais il y a de bonnes raisons d'espérer qu'il sera plus facile de déterminer un exemple concret d'onde élémentaire.

Intervention du Prof. G. C. Mc Vittie

L'introduction des ondes électromagnétiques est-elle nécessaire à votre étude ? N'ai-je pas raison de supposer qu'elle aurait pu être faite d'une manière tout à fait indépendante dans le cas gravitationnel ?

Quelle est la vitesse de propagation de vos ondes ? Ne pourrait-on pas voir apparaître des ondes gravitationelles avec des vitesses absolument arbitraires ?

Intervention de M. Droz-Vincent

La condition $R_{\alpha\beta} = 0$, qui s'impose lorsque $R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}$ est le tenseur de courbure, est-elle compatible avec les relations de commutation postulées lors de la quantification ? Il est possible, à l'approximation linéaire, de remplacer $R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}$ par un autre tenseur du quatrième ordre qui n'est pas la partie principale du tenseur de courbure, qui jouit de propriétés analogues commodes pour effectuer la quantification, mais ne vérifie pas la condition supplémentaire.

CLASSIFICATION INVARIANTE DES CHAMPS DE GRAVITATION

par le Prof. A. Z. PETROV,
Université de Kazan (U.R.S.S.)

RESUME

On propose une classification des champs de gravitation, fondée sur l'étude algébrique du tenseur de courbure dans les cas où *a*) $R_{\alpha\beta} = K\, g_{\alpha\beta}$; *b*) $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$ et on indique une formulation des conditions aux limites.

Lorsque nous essayons d'étudier la théorie de la gravitation d'EINSTEIN ou n'importe quelle théorie des champs unie dans toutes les théories de ce genre se pose le problème de la classification des champs dans la théorie donnée.

Nous pouvons faire une telle classification par différents moyens et elle doit être liée à l'étude de tenseur des champs donnés.

1. Il nous semble essentiel d'étudier d'abord la classification des champs de gravitation dont les équations sont celles

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R}\, g_{\alpha\beta} = \lambda\, T_{\alpha\beta} ,$$

étant donné que toute théorie unitaire des champs est construite comme généralisation de la théorie de la gravitation. $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$- est le tenseur de RICCI, $\mathcal{R}$ est la courbure d'espace scalaire, $T_{\alpha\beta}$- est le tenseur d'énergie-impulsion, λ une constante. Pour que la classification puisse avoir un sens physique elle doit être invariante, c'est-à-dire, qu'elle ne doit pas dépendre du système de coordinnée choisi. A part cela ce problème doit être considéré comme un problème local — c'est-à-dire un problème en un point de l'espace-temps. Dans ce cas la classification des champs de gravitation peut être reliée à l'étude de la structure algébrique des tenseurs déterminant le champ de gravitation.

2. Avant d'étudier le cas général des équations de champs de gravitation (1) il est utile d'observer le cas particulier, si

$$T_{\alpha\beta} = \nu \, g_{\alpha\beta} \tag{2}$$

où ν — est un champ scalaire, $g_{\alpha\beta}$ — le tenseur métrique d'espace-temps, Dans ce cas les équations de champs deviennent

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{K} \, g_{\alpha\beta}$$

où $\mathcal{K}$ — est une constante. L'étude de ce cas spécial est intéressant en lui-même et en outre la résolution du problème général se réduit à celle de ce cas particulier.

Pour les équations (2) les tenseurs à partir desquels on construit les équations du champ, sont le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ et le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Par conséquent, la classification revient à l'étude de la structure algébrique de ces deux tenseurs. Le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ a les particularités suivantes :

1) le nombre des index est pair ;

2) les index sont partagés en paires antisymétriques.

Nous appellerons bitenseurs tous les tenseurs présentant cette particularité.

Remplaçant chaque paire antisymétrique par un seul index, nous utiliserons la numération :

14-1, 24-2, 34-3, 23-4, 31-55, 12-6.

On peut en chaque point donné de l'espace-temps rapporter l'espace à six dimensions (variété centro-affine). Cette représentation définit l'isomorphisme pour l'addition la soustraction et la multiplication (sans contraction) des bitenseurs. Dans l'espace E_6 ($a, b = 1, ..., 6$) les tenseurs symétriques correspondant au tenseur de courbure et au tenseur :

$$g_{\alpha\gamma} \, g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} \, g_{\beta\gamma}.$$

Si on prend g_{ab} pour tenseur métrique E_6 nous aurons donné une métrique à l'espace à 6 dimensions ($|g_{ab}| \neq 0$). Considérons alors, la matrice :

$$(R_{ab} - \lambda \, g_{ab}) \tag{3}$$

$$(a, b = 1, ..., 6).$$

Mettons cette matrice sous forme canonique à l'aide de transformations réelles nous aurons une classification des champs de gravitation.

Il faut remarquer que dans E nous pourrons utiliser seulement les transformations réelles linéaires de coordonnées obtenues à partir de transformations de Lorentz au point donné de l'espace-temps. Nous pouvons mettre cette matrice sous forme canonique par différents moyens. Par exemple, il est possible de représenter E dans un espace complexe à trois dimensions. Donnons le résultat sans nous arrêter à la demonstration mathématique.

D'où le théorème : **du point de vue de la structure algébrique du tenseur de courbure, il existe trois et seulement trois types de champs de gravitation** ($R_{\alpha\beta} = \kappa g_{\alpha\beta}$) avec la signature $(---+)$; **pour chacun de ces trois types de champs possibles nous pouvons déterminer univoquement un repère orthonormé dans lequel les composantes du tenseur de courbures seront déterminées par la matrice** $(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & -N \\ N & -M \end{pmatrix}$ **où M et N auront l'aspect suivant pour chacun des types possibles :**

$$T_1 \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \Sigma\, \alpha_i = \kappa \\ \Sigma\, \beta_i = 0 \end{matrix}$$

$$T_2 \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \kappa \\ \beta_1 + 2\beta_2 = 0 \end{matrix}$$

$$T_3 \quad M = \begin{pmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \frac{\kappa}{3} \tag{4}$$

où $\lambda_s = \alpha_s \pm i\,\beta_s$ sont les bases des diviseurs élémentaires (3) et par conséquent elles sont invariantes pour n'importe quelle transformation affine au point considéré de l'espace-temps.

D'où, en supposant que dans (4) $\kappa = 0$ nous aurons la forme canonique — des composantes du tenseur de courbure dans le cas de l'espace **libre.**

J'ai démontré ce théorème en 1949 [1]. En 1954 j'ai donne une deuxième démonstration de ce théorème [2], il a été aussi démontré par A. Norden [3]. En 1957, une quatrième variante de la démonstration a été prouvée par le professeur Geheniau [4] (par $\kappa = 0$).

Ce résultat a trouvé peu à peu des applications physiques. Ainsi, il faut remarquer la théorie élégante de la radiation gravitationnelle du professeur Pirani [5], ainsi que la théorie de Bel [6, 7] puis l'idée très intéressante de Joseph [8] et d'autres travaux.

3. Considérons maintenant le cas général lorsque nous avons l'équation du champ (1). Notons tout d'abord que les formes canoniques (4) sont obtenues en utilisant uniquement les conditions :

$$R_{\alpha\beta\,(\gamma\delta)} = R_{(\alpha\beta)\,\gamma\delta} = R_{\alpha\,[\beta\gamma\delta]} = 0\,, \quad R_{\alpha\beta} = \kappa\, g_{\alpha\beta} \tag{5}$$

remarquons encore que la condition κ = constant n'a pas été utilisée. Par conséquent, pour n'importe quel tenseur quadrivalent vérifiant les conditions (5) on peut trouver de façon univoque un tel repère canonique orthonormé dans lequel nous aurons des formules analogues à (4).

Dans le cas général, lorsque $T_{\alpha\beta} \neq \kappa g_{\alpha\beta}$ il est impossible de baser la classification sur l'étude de la structure algébrique du seul tenseur de courbure de l'espace. Il faut construire un tenseur tel que pour $T_{\alpha\beta} \to \sigma g_{\alpha\beta}$ on aie la formule (4) et en outre il doit dépendre du tenseur d'énergie - impulsion $T_{\alpha\beta}$.

Nous appellerons ce nouvel objet géométrique *tenseur d'espace-temps-matière,* notons le $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et nous le définirons à l'aide de :

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\delta\gamma} + \lambda\,(g_{\alpha[\delta}T_{\gamma]\beta} + g_{\beta[\gamma}T_{\delta]\alpha}) + \sigma g_{\alpha[\delta}g_{\gamma]\beta}. \tag{6}$$

Ce tenseur a les particularités suivantes :

1°) il résulte directement de (6) et de (1) que :

$$P_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = P_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = P_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \quad P_{\alpha\beta} \equiv P^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta} = \omega g_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

c'est-à-dire qu'il a toutes les propriétés de (5).

2°) si l'on se donne la répartition et le mouvement de la matière, c'est-à-dire, le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ et le tenseur $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, nous aurons alors la courbure de l'espace.

3°) Si l'on se donne le tenseur métrique et tenseur $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nous pourrons obtenir univoquement le tenseur d'énergie-impulsion.

4°) Si le tenseur $T_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma = 0$, il définit la courbure de l'espace-temps libre. Il est nécessaire de fixer la définition du scalaire ω exprimé linéairement à l'aide de R et du scalaire σ. Grâce à (7) et à la remarque faite ci-dessus nous obtenons automatiquement le théorème suivant qui résoud le problème de la classification des champs de gravitations dans le cas général : **il existe du point de vue de la structure algébrique du tenseur d'espace-temps-matériel, trois et seulement trois types de champs de gravitation; pour chacun des trois types de champs possibles on peut définir univoquement un repère orthonormé tel que** (P_{ab}) $(a, b = 1, ..., 6)$ est défini par la formule (4) si l'on effectue la substitution :

$$R_{ab} \rightarrow P_{ab}, \quad \kappa \rightarrow \omega.$$

Si nous supposons que $T_{\alpha\beta} = \nu g_{\alpha\beta}$, nous arriverons au cas particulier dont nous avons déjà parlé (4). Notamment, si $T_{\alpha\beta} = 0$, nous aurons alors la classification des champs de gravitations dans l'espace libre.

On peut, bien sûr effectuer une classification plus détaillée par exemple en étudiant le cas de racines multiples ou le cas de racines réelles. Le choix du scalaire σ doit être relié à des considérations physiques.

4. La classification générale des champs de gravitations trouvée, nous pouvons obtenir quelques conséquences physiques :

a) il résulte directement de la construction du tenseur $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et de (4) que le cas de l'espace libre est obtenu dans le cas où $T_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ et représente le cas limite lorsque l'effet de la répartition dans l'espace-temps-matière commence à faiblir ;

b) la plupart des espaces d'Einstein connus dans la littérature appartiennent à l'espace du premier type (T_1). Le plus simple exemple d'espace T_1 sera l'espace de Minkovski, le premier exemple connu de champ T_2 et la solution d'Einstein et Rosen avec ondes cylindriques. On peut faire montrer que toute solution d'Einstein et Rosen sera soit le champ T_1, soit le champ T_2.

Einstein et Rosen n'ont pas intégré les équations du champ dans le cas des ondes cylindriques. On peut indiquer autant de solutions que l'on veut dépendant de fonctions arbitraires. Le cas le plus simple de solutions du deuxième type sera celui qui définira la métrique :

$$dS^2 = 2dx^1\, dx^4 - \mathrm{Sin}^2\, x^4\, dx^{22} - \mathrm{S}h^2\, x^4\, dx^{32} \qquad (8)$$

C'est l'espace T_2 qui admet un groupe de mouvement G_6 d'ordre maxima pour les champs de gravitation T_2.

b) pour calculer l'intégrale des équations du champ et rechercher les équations de mouvement on suppose très souvent que dans l'infini spécial, à mesure que l'on s'éloigne de la source de gravitation, les potentiels du champ $g_{\alpha\beta}(x)$ seront aussi près que l'on veut des potentiels $g_{\alpha\beta}(x)$ qui déterminent l'espace de Minkovski.

Par exemple, dans la solution bien connue de Schwartzchild qui détermine le champ statique, à symétrie centrale, en coordonnées sphériques, lorsque l'on s'éloigne du point singulier, le long du rayon ($r \rightarrow \infty$) la métrique tend vers la métrique de l'espace de Minkovski.

Cependant, on peut montrer rigoureusement que si nous excluons les points où la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^d\, dx^\beta$ dégénère, c'est-à-dire si l'on exige que $|g_{\alpha\beta}(x)| \neq 0$ alors dans ce cas quel que soit x^α la **métrique du champ de gravitation T_2 et T_3 ne peut tendre vers la métrique de Minkovski.** Nous pouvons facilement nous en convaincre à l'aide de l'exemple du champ défini par la métrique (8). Ce fait est fort intéressant car il nous conduit aux alternatives : 1) ou bien pour T_2 et T_3 il est indispensable de donner d'autres conditions limitées que pour T_1 ou bien 2) les champs de gravitation T_2 et T_3 ne pourront avoir lieu que pour des régions refermées sur elles-mêmes; alors les conditions aux limites deviennent inutiles. Ce problème des conditions à l'infini ou plus exactement de *conditions aux limites* (là où l'action de matière devient plus faible) qui avait déjà troublé Einstein doit être résolu naturellement en partant de l'hypothèse (1). Dans ce cas, il semble que le principe d'application de conditions aux limites le plus naturel est le suivant. **Soit le champ de gravitation** T_i $(i = 1, 2, 3)$ **donné; alors dans les régions où l'action de la matière devient plus faible, la métrique diffère aussi peu que l'on veut de la métrique de l'espace déterminé par des conditions** : (α), c'est un espace du même type T_i et (β) permet le groupe de mouvement d'ordre maxima possible pour T_i $(i = 1, 2, 3)$. Et alors pour T_1 l'espace de mouvement maxima sera l'espace de Minkovski avec pour groupe de mouvement G_{10}, pour T_2 ce sera l'espace de métrique (8) admettant le groupe G_6.

Il est évident que ces considérations demandent que l'on poursuive les recherches et exigent une interprétation physique des champs de gravitation T_2 et T_3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Z. Petrov, *D.A.N.*, **81**, 2 (1951).
[2] A. Z. Petrov, *Sc. Not. Kazan. St. Univ.*, **114** (1959), p. 55.
[3] A. Norden, *Sc. Not. Kazan. St. Nniv.*, **119** (1959), p. 127.
[4] J. Geheniau, *C. R. Acad. Sci.*, **299**, 6 (1957).
[5] F. A. Pirani, *Phys. Rev.*, **105** (1957).
[6] L. Bel, *C. R. Acad. Sci.*, **297**, 15 (1958).
[7] V. Joseph, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53**, 9 (1957).

DISCUSSION

Intervention de J. Géhéniau

Il me semble que dans sa classification des espaces de la Relativité dans le cas général, M. Petrov utilise essentiellement le tenseur de Weyl. Celui-ci est égal au tenseur de Riemann pour les espaces d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$. On comprend ainsi que la classification de M. Petrov des espaces d'Einstein (et aussi de ceux pour lesquels $R_{\alpha\beta} = \lambda\, g_{\alpha\beta}$) est également valable dans le cas général.

Cette classification peut être précisée par celle des tenseurs $R_{\alpha\beta}$ ou $S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\dfrac{R}{4}$, c'est-à-dire des quadriques $R_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0$ ou $S_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0$ dans l'espace Cayléyen réel dont la quadrique fondamentale a pour équation $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$.

Intervention de G. C. Mc Vittie

Quelle est la signification physique de l'asymétrie dans les deux directions perpendiculaires à la direction de propagation dans le cas de l'onde plane ? Une pareille perturbation a-t-elle jamais été observée dans la nature ?

SUR LES LOIS DE CONSERVATION DANS LES ESPACES DE RIEMANN

par Dr. A. TRAUTMAN

Institut de Physique de l'Université de Varsovie (Pologne)

RESUME

A chaque groupe d'isométries correspondent une loi de conservation et une intégrale première des équations du mouvement. L'absence de symétries de l'espace-temps exclut l'existence de lois de conservation analogues à celles de la relativité restreinte. En particulier, en théorie einsteinienne de la gravitation, aucune entité à deux indices ne peut être considérée comme décrivant la densité d'impulsion-énergie.

La notion de l'énergie et les lois de conservation en Relativité Générale ont été récemment le sujet de nombreux travaux. Le but de cette communication est de rappeler un point important qui se rattache à la notion de l'énergie. L'idée essentielle dont il s'agit peut être résumée en une seule phrase : ce sont les symétries de l'espace-temps qui assurent l'existence des lois de conservation de l'énergie-impulsion et du moment angulaire. Plus précisément, les lois de conservation correspondent aux isométries de l'espace-temps. Dans les théories habituelles des champs, à chaque solution de l'équation de KILLING on peut associer une densité vectorielle dont la divergence est nulle. Malheureusement un espace de RIEMANN en général n'admet pas de groupes d'isométries. Ceci est l'origine des difficultés avec les lois de conservation en Relativité Générale.

La liaison des lois de conservation aux symétries est connue depuis longtemps grâce aux travaux du groupe de Göttingen (F. ENGEL, F. KLEIN, E. NOËTHER, E. BESSEL-HAGEN; *cf.* HILL [1] pour la bibliographie). SCHWINGER [2], FOCK [3] et PIRANI ont attiré l'attention sur le rôle que joue l'équation de KILLING dans la construction des quantités qui se conservent. Ces idées ont été développées par l'auteur de cette communication [4], [5].

Nous présenterons les idées essentielles dans la notation de BERGMANN [6]. Soient $y_A(x)$ $(A = 1 \dots N)$ les fonctions décrivant les champs, y compris le champ métrique. Ces fonctions satisfont aux équations des champs

$$L^A = 0 \qquad (1)$$

qu'on obtient d'un principe variationnel

$$\delta W = 0$$

où

$$W = \int L(y_A, y_{A,\rho})\, dx .$$

Le lagrangien L est la même fonction de ses variables y_A et $y_{A,\rho}$ dans tous les systèmes de coordonnées. Soit $\xi^\alpha(x)$ un champ de vecteurs; on peut y associer une transformation de coordonnées infinitésimale, définie par

$$x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon\, \xi^\alpha(x) .$$

Introduisons la « variation totale » (ou « substantielle ») du champ y_A

$$\bar{\delta}\, y_A = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\, [y'_A(x) - y_A(x)]$$

En mathématiques on appelle $-\bar{\delta}\, y_A$ la dérivée de Lie de y_A par rapport à ξ. Une condition suffisante pour que les équations de champ $L^A = 0$ écrites dans des systèmes de coordonnées différents soient compatibles est qu'il existe des fonctions L^ρ telles que

$$\bar{\delta}\, L \equiv - L^\rho{}_{,\rho} . \tag{2}$$

Cette condition est évidemment satisfaite si L est une densité scalaire ($L^\rho = L\xi^\rho$). Elle est aussi satisfaite dans le cas de la Relativité Générale, quand on prend pour L le lagrangien gravitationnel quadratique dans les symboles de Christoffel. Si les équations de champ (1) sont satisfaites l'équation (2) devient

$$\left(L^\rho + \frac{\partial L}{\partial y_{A,\rho}}\, \bar{\delta}\, y_A \right)_{,\rho} = 0 . \tag{3}$$

Ce sont des lois de conservation faibles; le champ ξ étant arbitraire il en existe une infinité. Pour obtenir une loi bien définie il faut choisir un champ ξ. On peut le faire d'une façon satisfaisante seulement en spécifiant le caractère géométrique (physique) du ξ. Autrement dit, le vecteur ξ doit être lié aux propriétés géométriques ou physiques de l'espace-temps. Par exemple, s'il y a des observateurs privilégiés dans la théorie on peut prendre pour ξ leur vitesse. Le choix pour ξ d'un vecteur qui n'a pas de signification intrinsèque semble contredire les principes de la Relativité Générale.

Un choix évident consiste à prendre pour ξ un champ de Killing. C'est ainsi qu'on arrive en Relativité Restreinte aux lois canoniques pour l'énergie, l'impulsion et le moment angulaire.

Dans le cas où il existe un groupe d'isométries on peut obtenir une quantité qui se conserve et qui se rapporte à la matière seule, c'est-à-dire qui s'annule en l'absence de matière. Pour étudier ce cas dénotons par ψ_a les variables décrivant la matière (champ électromagnétique, fluides, etc.). On a alors $y_A = (g_{\mu\nu}, \psi_a)$, $(a = 1, ..., N - 10)$. Soit

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\psi_a, \psi_{a,\rho}, g_{\mu\nu})$$

le lagrangien de la matière. Supposons que $\mathcal{L}$ est une densité scalaire, il vient alors

$$0 \equiv \bar{\delta}\mathcal{L} + (\mathcal{L}\,\xi^\rho)_{,\rho} \equiv \mathcal{L}^a\,\bar{\delta}\,\psi_a + \frac{1}{2}\,T^{\alpha\beta}\,\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \left(\mathcal{L}\,\xi^\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{a,\rho}}\,\bar{\delta}\psi_a\right)_{,\rho} \tag{4}$$

où $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique d'énergie-impulsion du champ ψ. Si ξ engendre une isométrie,

$$\bar{\delta}\,g_{\alpha\beta} = 0 \tag{5}$$

et si les équations du mouvement de ψ

$$\mathcal{L}^a = 0$$

sont satisfaites, on obtient une loi « canonique » de conservation

$$I^\rho{}_{,\rho} = \left(\mathcal{L}\,\xi^\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{a,\rho}}\,\bar{\delta}\,\psi_a\right)_{,\rho} = 0 \tag{6}$$

I^ρ est une densité vectorielle et l'intégrale

$$I = \int I^\rho\, n_\rho\, d\sigma$$

calculée sur une hypersurface σ orientée dans l'espace est un scalaire qui se conserve. Si ξ est partout orienté dans le temps (V_4 stationnaire) on peut interpréter I comme représentant l'énergie.

Des considérations analogues peuvent être appliquées au cas des particules ponctuelles [5].

Dans le cas où $T^\alpha_\alpha = 0$ on peut affaiblir l'équation (5) en la remplaçant par l'équation de transformations conformes

$$\bar{\delta}\,g_{\alpha\beta} = \chi\, g_{\alpha\beta} \qquad (\chi \text{ : scalaire}) \tag{7}$$

C'est ainsi qu'on obtient quinze lois de conservation pour le champ électromagnétique en Relativité Restreinte. Le pseudotenseur d'énergie-impulsion introduit par Einstein peut aussi être obtenu à partir de (3), avec le lagrangien gravitationnel pour L. Ce pseudotenseur a des propriétés de transformation bizarres et il est douteux qu'il puisse décrire dans le cas général quelque chose qu'on pourrait nommer l'énergie. La même remarque s'applique aux nombreuses modifications du pseudotenseur d'Einstein, notamment à celle de Møller [7]. A l'aide du pseudotenseur on peut définir l'énergie totale d'un système qui produit un champ gravitationnel à comportement asymptotique euclidien [8], [9]. Il est aussi possible de formuler des lois de conservation approximatives, par exemple dans le cadre de la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann.

Pour montrer que le pseudotenseur ne peut pas être appliqué dans le cas général d'un champ gravitationnel prenons la métrique de Robinson [10]

$$ds^2 = 2dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - 2H\,(dx^0)^2, \quad H = H(x^0, x^1, x^2). \tag{8}$$

Cette forme métrique comprend comme un cas particulier les ondes planes gravitationnelles. Par un choix approprié de la fonction H on peut obtenir de (8) les ondes planes gravitationnelles et éléctromagnétiques. Il est intéressant de noter que (8) satisfait aux conditions d'harmonicité définissant les coordonnées isothermiques $(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$. Le pseudotenseur d'EINSTEIN $t_\mu{}^\nu$ calculé à partir de (8) est simplement égal à zéro. Il en est de même pour l'objet $\mathfrak{T}_\mu{}^\nu$ introduit par MØLLER. Cela montre aussi que l'emploi des coordonnées harmoniques n'est pas suffisant pour résoudre les difficultés liées à la notion de l'énergie en Relativité Générale. Etant donnée l'analogie très poussée qui existe entre les ondes planes gravitationnelles et les ondes en théorie de Maxwell on serait surpris s'il fallait attribuer aux ondes gravitationnelles une densité d'énergie nulle.

Les notions de l'énergie, de l'impulsion et du moment angulaire total sont liées au caractère euclidien de l'espace-temps. On peut les appliquer en Relativité Générale seulement dans les cas où l'espace riemannien en question ne diffère pas trop de l'espace plan.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. L. HILL, *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 253 (1951).
[2] J. SCHWINGER, *Phys. Rev.*, **91**, 713 (1953).
[3] V. A. FOCK, *Théorie de l'espace-temps et de la gravitation* (en russe). Moscou, 1955.
[4] A. TRAUTMAN, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **4**, 679 (1956).
[5] A. TRAUTMAN, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **5**, 721 (1957).
[6] P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, **75**, 680 (1949).
[7] C. MØLLER (Communication au Colloque).
[8] A. EINSTEIN, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch.*, **448** (1918).
[9] F. KLEIN, *Nachr. Ges. Göttingen*, **394** (1918).
[10] I. ROBINSON (en cours de publication).

DISCUSSION

Intervention du Prof. Möller

In connection with the statement that the energy momentum complex $\mathfrak{T}_i^k$ vanishes in the case of the metric considered by Trautman I want first of all to ask if the system of coordinates corresponds to a physically allowed system of reference. By a physically allowed system of reference I understand a system in which the velorities of the reference points with respect to a local system of inertia are always *smaller* then c. Although other systems of coordinates where $g_{44} \geqslant 0$ are mathematically conceivable they have no physical meaning and therefore also the physical quantity $\mathfrak{T}_4^k$ has no meaning in such a system. On the other hand I do not want to exclude any of the physically acceptable systems of coordinates since this would be against the spirit of the general theory of relativity. In particular I would not like to forbid the use of systems where $g_{ik} = \delta_{ik}$. It is true that in such systems $\mathfrak{T}_i^k = 0$, in particular the energy density $\mathfrak{T}_4^4$ and therefore also the total energy of the system is zero. This is however just what one should expect physically, for the system of reference in question is one in which all the reference points are falling freely under the influence of the gravitational field. Therefore a test particle originally at rest in the frame of reference will remain at rest at the same reference point. By introducing such a system of reference we have thus transformed away all the dynamical properties of the gravitational field; an observer which makes experiments only with test particles will therefore not be able to discover the matter present. It is therefore also quite natural that the total energy which is a dynamical quantity should vanish in this particular type of systems of reference. As regards dynamics an observer in such systems will have the impression that he is in a system of inertia where the energy density $\mathfrak{T}_4^4$ (in contrast to Einstein's θ_4^4) is always zero. Of course if he has made geometrical measurements with standard measuring rods in the system of reference he will discover that he is *not* in a system of inertia since the metric is not Euclidean. In general the spatial metric is even time dependent.

The above remarks apply only to the case where the introduction of time-orthogonal coordinates with $g_{44} = \text{const.}$ does not introduce any singularities in the metric. If singularities are introduced the energy density is simply not defined in the singular points and we cannot say anything about the value of the total energy. Then the expression for the energy momentum complex can be applied to those regions of space only where the metric is regular. For instance if we start with the usual static Schwarzschild solution and, following Lemaître and Synge, introduce a system of coordinates the energy density is then only well-defined and zero outside this point for which $g_{44} = - \delta_{44}$ the metric tensor has a singularity at the origin and where $\mathfrak{T}_4^4$ becomes of the form ∞ times 0, i.e. indeterminate.

It should also be emphasised that the energy of a physical system also in the special theory of relativity is a *relative* quantity which changes when one passes over from one system of coordinates to another. This is naturally even more so in the general theory where we have a much larger group of transformations at our disposal. Clearly we must expect that familiar features will turn up in strangely moving frames of references but in principle I think we should allow the use of all physically acceptable systems of reference.

Intervention du docteur Fletcher

En ce qui concerne l'emploi dans les espaces à comportement asymptotique euclidien, je voudrais faire la remarque suivante : Je pense avoir démontré que si dans un tel espace, l'impulsion-énergie totale évaluée sur une hypersurface est unique, i. e., indépendante des transformations de coordonnées, alors cette impulsion-énergie est nécessairement conservée. C'est le théorème réciproque de celui cité de Landau et Lifschitz.

C'est un résultat qui n'est pas modifié par l'imposition des conditions de coordonnées. Ce résultat ne contredit en rien le travail du docteur Trautman, puisque j'ai supposé que le calcul de l'impulsion-énergie peut être effectué sur une hypersurface quelconque et non, comme c'est le cas dans le travail du docteur Trautman, seulement sur une hypersurface appartenant à un ensemble restreint.

LA RADIATION GRAVITATIONNELLE

par M. BEL

Attaché de Recherches au C.N.R.S.
Service de Théories Physiques du Collège de France

RESUME

Introduction d'un tenseur T du quatrième ordre qui joue pour le champ de gravitation le même rôle que le tenseur de Maxwell pour le champ électromagnétique, le premier étant décrit par le tenseur de courbure.

Etude des trois définitions possibles d'un état de radiation gravitationnelle intrinsèque; justification de ces définitions et étude des rayons gravitationnels.

1. — Définitions et propriétés générales

a) Soit $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) la métrique de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs, définie sur l'Espace-Temps V_4 de la Relativité Générale. Au tenseur de courbure R, on peut associer le tenseur :

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\; R^{\gamma\delta}{}_{,\lambda\mu}$$

où η est le tenseur élément de volume. Pour que l'on ait

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\lambda\mu} = \overset{*}{R}_{\lambda\mu,\,\alpha\beta}$$

il faut et il suffit que le tenseur de Ricci soit proportionnel au tenseur métrique : $R_{\alpha\beta} = \lambda\, g_{\alpha\beta}$. Je supposerai dans tout cet exposé que

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

$\overset{*}{R}$ sera donc symétrique par rapport aux couples d'indices.

b) Je me servirai aussi des quatre scalaires

$$A = \frac{1}{8}\, R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\, R^{\lambda\mu}{}_{,\alpha\beta} \qquad D = \frac{1}{16}\, R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\, R^{\lambda\mu}{}_{,\rho\sigma}\, R^{\rho\sigma}{}_{,\alpha\beta}$$

$$B = \frac{1}{8}\, R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\, \overset{*}{R}{}^{\lambda\mu}{}_{,\alpha\beta} \qquad E = \frac{1}{16}\, R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\, R^{\lambda\mu}{}_{,\rho\sigma}\, \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma}{}_{,\alpha\beta}$$

Tous les autres scalaires du même type qu'on peut former coïncident soit exactement, soit au signe près avec les quatre écrits ci-dessus. J'appellerai ces quatre scalaires, les scalaires fondamentaux.

c) Du tenseur de courbure et de tout vecteur $\vec{u}$ unitaire et orienté dans le temps, c'est-à-dire de carré $+1$, on déduit les deux tenseurs manifestement symétriques

$$\mathcal{Y}(\vec{u}) : \mathcal{Y}_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u^\mu \qquad \mathcal{Z}(\vec{u}) : \mathcal{Z}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, u^\beta u_\mu$$

Ces deux tenseurs sont des tenseurs d'espace dans ce sens qu'ils admettent tous les deux le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur propre correspondant à la valeur propre zéro. Il en résulte que le carré spatio-temporel de chacun d'eux n'est nul que si le tenseur correspondant est nul et dans le cas contraire il est strictement positif.

Quel que soit $\vec{u}$, on peut exprimer les quatre scalaires fondamentaux en termes de $\mathcal{Y}(\vec{u})$ et $\mathcal{Z}(\vec{u})$ sous la forme que voici :

$$A = \mathcal{Y}^\alpha_\beta \mathcal{Y}^\beta_\alpha - \mathcal{Z}^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta_\alpha \qquad D = \mathcal{Y}^\alpha_\beta \mathcal{Y}^\beta_\gamma \mathcal{Y}^\gamma_\alpha - 3\, \mathcal{Y}^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta_\gamma \mathcal{Z}^\gamma_\alpha$$

$$B = -2\, \mathcal{Y}^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta_\alpha \qquad E = \mathcal{Z}^\alpha_\beta \mathcal{Z}^\beta_\gamma \mathcal{Z}^\gamma_\alpha - 3\, \mathcal{Z}^\alpha_\beta \mathcal{Y}^\beta_\gamma \mathcal{Y}^\gamma_\alpha$$

d) Le tenseur de courbure peut être considéré comme un tenseur d'ordre 2 de l'espace des tenseurs antisymétriques $T^{A(2)}_x$. Soit $H = (H^I_J)$ $(I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ la matrice des composantes mixtes de ce tenseur. $T^{A(2)}_x$ étant rapporté à la base

$$E_1| = \vec{e}_2| \wedge \vec{e}_3| \qquad E_2| = \vec{e}_3| \wedge \vec{e}_1| \qquad E_3| = \vec{e}_1| \wedge \vec{e}_2|$$

$$E_4| = \vec{e}_1| \wedge \vec{e}_0| \qquad E_5| = \vec{e}_2| \wedge \vec{e}_0| \qquad E_6| = \vec{e}_3| \wedge \vec{e}_0|$$

où $\vec{e}_\alpha|$ est une base de l'espace vectoriel tangent au point x, on a pour tout repère orthonormé tel que $\vec{e}_0| = \vec{u}$:

$$H = \begin{pmatrix} Y^i_j & Z^i_j \\ Z^i_j & Y^i_j \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

D'après ce résultat, il est évident que si Y et Z sont nuls, le tenseur de courbure lui-même est nul.

2. — Le tenseur $T^{\alpha\beta,\lambda\mu}$

a) Considérons les identités de Bianchi :

$$\underset{\alpha,\lambda,\mu}{S}\ \nabla_\alpha R_{\gamma\beta,\lambda\mu} = 0$$

où $\underset{\alpha,\lambda,\mu}{S}$ indique sommation des termes obtenus par permutation circulaire sur les trois indices α, λ et μ et ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemanienne. Puisque $R_{\alpha\beta} = 0$, de ces identités il vient :

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} = 0$$

D'autre part η étant à dérivée covariante nulle on a aussi :

$$\underset{\alpha,\lambda,\mu}{S} \nabla_\alpha \overset{*}{R}_{\gamma\beta,\lambda\mu} = 0 \qquad\qquad \nabla_\alpha \overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta,\lambda\mu} = 0$$

b) Le tenseur T :

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R^{\alpha\rho,\lambda\sigma} R^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma} + \overset{*}{R}{}^{\alpha\rho,\lambda\sigma} \overset{*}{R}{}^{\beta}{}_{\rho,}{}^{\mu}{}_{\sigma})$$

qui possèderait les propriétés de symétrie :

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = T^{\beta\alpha\lambda\mu} = T^{\alpha\beta\mu\lambda} = T^{\lambda\mu\alpha\beta}$$

pour des équations du vide avec constante cosmologique $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$, devient complètement symétrique dès que $\lambda = 0$. Nous devons cette remarque sur la complète symétrie à M. Robinson.

Le tenseur $T^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\lambda\mu}$ obtenu par contraction est nul. En outre le tenseur T est conservatif :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta\lambda\mu} = 0.$$

La démonstration qui est très simple fait intervenir essentiellement les relations rappelées dans *a*, ainsi que les deux formules :

$$R^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} R_{\alpha\beta,}{}^{\lambda\nu} = 2A g^{\nu}_{\mu} \qquad\qquad \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu} \overset{*}{R}_{\alpha\beta,}{}^{\lambda\nu} = -2A g^{\nu}_{\mu}$$

3. — Le scalaire $V(\vec{u})$

Soit $\vec{u}$ un vecteur de carré $+1$ et considérons le scalaire :

$$V(\vec{u}) \;:\; V = T^{\alpha\beta\lambda\mu} u_\alpha u_\beta u_\lambda u_\mu$$

Des relations de définition des tenseurs, Y, Z et T il vient :

$$V = \frac{1}{2}(Y^{\rho\sigma} Y_{\rho\sigma} + Z^{\rho\sigma} Z_{\rho\sigma})$$

Ainsi, puisque le carré spatio-temporel de Y et Z est positif ou nul et n'est nul que si le tenseur correspondant est nul, on a :

$$V(\vec{u}) \geqslant 0$$

l'égalité ne se produisant que si $Y = Z = 0$, c'est-à-dire que si $R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$. Ce scalaire possède donc les propriétés mathématiques d'une densité d'énergie. Néanmoins, je l'appellerai super-énergie gravitationnelle associée à la direction de temps $\vec{u}$.

4. — Le vecteur $P(\vec{u})$

a) Soit encore $\vec{u}$ un vecteur de carré $+1$. A ce vecteur et au tenseur T nous pouvons associer le vecteur :

$$P(\vec{u}) \;:\; P^{\alpha} = (g^{\rho\alpha} - u^{\rho} u^{\alpha})\, T_{\rho\beta\lambda\mu} u^{\beta} u^{\lambda} u^{\mu}.$$

Manifestement $P^{\alpha} u_{\alpha} = 0$ et par conséquent $P(\vec{u})$ est orienté dans l'espace.

b) Supposons que les potentiels de gravitation, $g_{\alpha\beta}$, puissent être mis sous la forme :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon\, \psi_{\alpha\beta} + 0(\varepsilon^2)$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ sont les valeurs galiléennes de la métrique de Minkowski et ε est un infiniment petit principal. $\vec{e}_{0|}$ étant le vecteur unitaire tangent aux lignes de temps. On a alors, modulo des termes de l'ordre de ε^3 :

$$V(\vec{e}_{0|}) \sim \varepsilon^2 \underset{p}{V} \qquad P^{o}(\vec{e}_{0|}) \sim 0 \qquad P^{i}(\vec{e}_{0|}) \sim \varepsilon^2 \underset{p}{P^{i}}$$

et de la relation $\nabla_{\alpha} T^{\alpha}{}_{000} = 0$, il vient :

$$\partial_0 \underset{p}{V} = - \partial_i \underset{p}{P^{i}}$$

Ainsi la partie principale du flux de super-énergie gravitationnelle est décrite par la partie principale du vecteur $\vec{P}(\vec{e}_{0|})$.

Il est intéressant de remarquer que tout changement de coordonnées de la forme $x^{\varrho'} = x^{\varrho} + \varepsilon\, \Phi^{\varrho}(x^{\alpha})$, qui comme on sait conserve la forme des $g_{\alpha\beta}$, laisse invariants $\underset{p}{V}$ et $\underset{p}{\vec{P}}$.

5. — Etude algébrique du tenseur de courbure

a) Un calcul un peu long montre que trois des racines de l'équation :

$$\text{dét}\,(H - \rho I) = 0$$

(I est la matrice unité 6×6), c'est-à-dire trois des valeurs propres de H sont aussi les racines de l'équation :

$$\rho^3 - \frac{1}{2}\rho\,(A + i\,B) - \frac{1}{3}(D + i\,E) = 0$$

les trois autres étant les valeurs imaginaires conjuguées. Soient : ρ_j $(j = 1, 2, 3)$ les trois racines de l'équation précédente. Des considérations élémentaires montrent que :

$$\Sigma\, \rho_j = 0 \qquad \Sigma\, \rho_j^2 = A + iB \qquad \Sigma\, \rho_j^3 = D + iE$$

b) La première de ces relations fournit un principe de classification, car au point de la multiplicité des valeurs propres on peut distinguer trois cas :

(1^er^ cas) : $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \neq$. Les trois racines sont différentes.

(2^e^ cas) : $\rho = \rho_2 = \rho_3$, $\rho_1 = -2\rho$. Une des racines est double.

(3^e^ cas) : $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$. Les trois racines sont confondues. Elles sont, donc, nécessairement nulles.

Ces trois cas peuvent être caractérisés en termes des scalaires fondamentaux grâce aux relations données dans *a*). Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait un cas 2 est que :

$$(A + iB)^3 = 6\,(D + iE)^2$$

et pour que l'on ait un cas 3 il faut et il suffit que :

$$A = B = D = E = 0.$$

Je dirai de ce troisième cas qu'il est le cas singulier au sens large.

c) Des considérations sur les vecteurs propres, c'est-à-dire sur les solutions de :

$$(H^I_J - \rho\delta^I_J)\,F^J = 0$$

conduisent à subdiviser chacun des cas 2 et 3 en deux cas différents. Je donne ci-après les formes réduites que peut prendre la matrice :

$$\mathcal{H} = (Y^k_j - i\,Z^k_j)$$

pour des repères orthonormés convenables dans les cinq cas que je viens de distinguer.

Cas 1 :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\,\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\,\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 + i\,\beta_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \sum_j (\alpha_j + i\,\beta_j) = 0 \\ \alpha_1 + i\,\beta_1,\ \alpha_2 + i\,\beta_2,\ \alpha_3 + i\,\beta_3 \neq \end{array}$$

Cas 2a :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2\,(\alpha + i\,\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + i\,\beta \end{pmatrix}$$

Cas 2b :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2\,(\alpha + i\,\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\,\beta - \sigma + i\,\rho & \rho + i\,\sigma \\ 0 & \rho + i\,\sigma & \alpha + i\,\beta + \sigma - i\,\rho \end{pmatrix}$$

On démontre dans ce cas qu'il existe un vecteur isotrope $\vec{l}$ et un seul satisfaisant aux relations :

$$R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^\alpha l^\lambda = 2\alpha\, l_\beta l_\mu \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^\alpha l^\lambda = 2\beta\, l_\beta l_\mu$$

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu}\, l^\beta l^\lambda l^\mu = 0\,.$$

Cas 3a :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma + i\rho & \rho + i\sigma \\ -\sigma + i\rho & 0 & 0 \\ \rho + i\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe un vecteur $\vec{l}$ isotrope, et un seul, satisfaisant aux relations :

$$R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^\alpha l^\lambda = 0 \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^\alpha l^\lambda = 0$$

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu}\, l^\lambda l^\mu = 0\,.$$

Cas 3b :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma + i\rho & \rho + i\sigma \\ 0 & \rho + i\sigma & \sigma - i\rho \end{pmatrix}$$

Le tenseur de courbure est singulier au sens de Lichnerowicz. Autrement dit, il existe un vecteur $\vec{l}$ isotrope, et un seul, satisfaisant aux relations

$$R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^{\alpha} = 0 \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}\, l^{\alpha} = 0$$
$$T_{\alpha\beta\lambda\mu}\, l^{\alpha} = 0\,.$$

Je dirai de ce cas qu'il est le cas singulier au sens restreint.

J'appellerai le vecteur $\vec{l}$ mis en évidence dans les cas $2b$ et 3, le vecteur fondamental de R.

Ces formes réduites de la matrice $\mathcal{H}$ sont dues à Petrov mais ici elles ont été établies sous un principe de classification différent.

6. — Définition d'un état de radiation gravitationnelle intrinsèque

Nous sommes maintenant en mesure de passer en revue et comparer entre elles trois définitions possibles pour un état de radiation gravitationnelle intrinsèque.

1re définition. — Tout d'abord les résultats du paragraphe 4 nous amènent, par un raisonnement qui est classique en électromagnétisme, à caractériser un tel état par une métrique telle que $P(\vec{u}) \neq 0$ quel que soit $\vec{u}$ de carré $+1$. Ceci entraîne que R doit appartenir aux cas $2b$ ou 3, car la condition nécessaire et suffisante pour que $P(\vec{u}) = 0$ est qu'il existe un repère orthonormé relatif auquel les deux matrices (Y^i_j) et (Z^i_j) soient simultanément diagonales, et c'est ce qui arrive pour les cas 1 et $2a$.

Pirani est parvenu à une définition équivalente mais par des considérations inspirées d'un tout autre esprit.

2e définition. — D'autre part, par analogie avec ce qui se passe pour le champ électromagnétique, on pourrait être amené à décrire un état de radiation gravitationnelle intrinsèque par une métrique telle que le tenseur de courbure soit singulier au sens large, c'est-à-dire qu'il ait les quatre scalaires fondamentaux A, B, D et E nuls. Cette définition est plus restrictive que la définition précédente dans ce sens que R devrait être nécessairement un cas 3.

3e définition. — Enfin, Lichnerowicz a proposé de caractériser un état de radiation gravitationnelle intrinsèque et pure par une métrique dont le tenseur de courbure est singulier au sens restreint. R est donc nécessairement un cas $3b$. Je rappelle que cette définition a son origine et trouve sa justification dans l'étude des discontinuités du tenseur de courbure. C'est pour cette définition que l'analogie entre le phénomène de la radiation gravitationnelle et celui de la radiation électromagnétique peut être poussée plus loin.

7. — Les rayons gravitationnels

J'ai mis en évidence dans les trois cas qui peuvent être interprétés comme décrivant un état de radiation gravitationnelle intrinsèque, c'est-à-dire les cas *2b* et 3, l'existence d'un vecteur $\vec{l}$ isotrope qui satisfait à des relations qui caractérisent le cas envisagé. Pour le repère orthonormé relatif auquel la matrice $\mathcal{H}$ prend les formes réduites indiquées ci-dessus la projection d'espace du vecteur $\vec{l}$ est colinéaire à $\vec{P}(\vec{e}_{0|})$ et par conséquent les trajectoires de $\vec{l}$ doivent être interprétées comme étant les rayons gravitationnels. Il est donc naturel de se demander ce qu'on peut dire de ces trajectoires. Lichnerowicz a démontré que si $\mathcal{H}$ appartient en chaque point d'un domaine $\mathcal{D}$ de V_4 au cas *3b*, ces trajectoires sont des géodésiques isotropes de la métrique. Ce résultat reste vrai aussi pour le cas *2b* et *3a* et je voudrais pour terminer esquisser la démonstration pour le cas *2b*.

Le tenseur de courbure admet dans ce cas la réduction

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \alpha\,(g_{\alpha\lambda}\,g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}\,g_{\beta\lambda}) - \beta\,\eta_{\alpha\beta\lambda\mu} + K_{\alpha\beta,\lambda\mu}$$

$$- 3\,\alpha(F_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu} - \overset{*}{F}_{\alpha\beta}\,\overset{*}{F}_{\lambda\mu}) + 3\,\beta(F_{\alpha\beta}\,\overset{*}{F}_{\lambda\mu} + \overset{*}{F}_{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu})$$

où K est tel que

$$K_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,l^\alpha = 0 \qquad \overset{*}{K}_{\alpha\beta,\lambda\mu}\,l^\alpha = 0$$

et

$$F = \vec{e}_{2|} \wedge \vec{e}_{3|} \qquad \overset{*}{F} = \vec{e}_{1|} \wedge \vec{e}_{0|}$$

$\vec{e}_{\alpha|}$ étant quatre vecteurs normés $(\vec{e}_{0|}^{\,2} = +1)$ orthogonaux deux à deux. En outre

$$h\,\vec{l} = \vec{e}_{0|} + \vec{e}_{1|}$$

Par dérivation contractée de

$$R_\alpha{}^\beta{}_{,\lambda\mu}\,l^\alpha l^\lambda = 2\,\alpha\,l^\beta l_\mu$$

on obtient, puisque la divergence de R est nulle

$$R_\alpha{}^\beta{}_{,\lambda\mu}\,(l^\alpha\,\nabla_\beta\,l^\lambda + l^\lambda\,\nabla_\beta\,l^\alpha) = 2\,\alpha\,t_\mu + l_\mu\,\nabla_\beta\,(2\,\alpha\,l^\beta)$$

où $\vec{t}$ est le vecteur orthogonal à $\vec{l}$ de composantes $t_\mu = l^\beta\,\nabla_\beta\,l_\mu$. En multipliant successivement la relation précédente par $e^\mu_{2|}$ et $e^\mu_{3|}$ on obtient, compte tenu de la réduction de R, le système d'équations

$$\alpha\,\vec{e}_{3|}\cdot\vec{t} - \beta\,\vec{e}_{2|}\cdot\vec{t} = 0$$

$$\beta\,\vec{e}_{3|}\cdot\vec{t} + \alpha\,\vec{e}_{2|}\cdot\vec{t} = 0$$

Or, puisque $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, car dans le cas contraire $\mathcal{H}$ ne serait pas un cas *2b* mais un cas *3b*, ce système n'admet que la solution

$$\vec{e}_{3|}\cdot\vec{t} = 0 \qquad \vec{e}_{2|}\cdot\vec{t} = 0$$

Ainsi $\vec{t}$ est sur le 2-plan orthogonal au 2-plan $(\vec{e}_2| - \vec{e}_3|)$. Mais tout vecteur de ce 2-plan orthogonal à $\vec{l}$ est nécessairement colinéaire à $\vec{l}$. Donc

$$l^\beta \nabla_\beta l_\mu = a\, l_\mu$$

Les trajectoires de $\vec{l}$, c'est-à-dire les rayons gravitationnels, sont des autoparallèles de longueur nulle, autrement dit, des géodésiques isotropes de la métrique.

DISCUSSION

Intervention de M. R. Debever

La classification des tenseurs de Weyl d'un espace riemannien se ramène à celles des coniques dans un plan cayléen complexe.

[Cf. R. Debever : Etude géométrique du tenseur de Riemann-Christoffel. *Bull. Acad. r. de Belgique, Cl. des Sc.*, t. 42, 1956, pp. 313-27; 608-621, voir pg. 610. — J. Géhénian : Une classification des espaces einsteiniens. *C. R. Paris*, t. 224, 1957, pp. 723-24].

Selon que l'on fixe son attention soit sur les sommets du triangle autoconjugué à la conique fondamentale et à la conique associée au tenseur de Weyl, soit sur leurs quatre points d'intersection, on est conduit à distinguer 3 cas (A. Z. Petrov) ou 5 cas (L. Bel, R. Penrose), abstraction faite du cas où le tenseur de Weyl est identiquement nul.

QUANTIFICATION DE LA THÉORIE DE JORDAN-THIRY

par M. DROZ-VINCENT
Stagiaire de Recherches au C.N.R.S.

RESUME

La première approximation de la théorie de Jordan-Thiry constitue une théorie linéaire unitaire dans le cadre de laquelle on quantifie à la fois les champs électromagnétique et gravitationnel.

Le formalisme de la théorie unitaire pentadimensionnelle de Thiry peut être linéarisé de la façon suivante :

Si la métrique riemannienne est $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ et si $\gamma = \text{Det.}\ \gamma_{\mu\nu}$ on pose, dans un système de coordonnées isothermes :

$$\Gamma^{\mu\nu} = \sqrt{|\gamma|}\,\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \mathrm{K}\,\alpha^{\mu\nu}$$

où $\eta^{\mu\nu}$ prend les valeurs minkowskiennes et K est un infiniment petit principal.

La condition d'isothermie pour les coordonnées s'écrit :

$$\partial_\mu\, \alpha^{\mu\nu} = 0$$

et joue un rôle analogue à la condition de Lorentz. L'équation d'Einsteu

$$\mathrm{S}_{\mu\nu} = 0$$

conduirait à :

$$\square\, \alpha^{\mu\nu} = 0.$$

Mais en supposant que la masse ε du graviton n'est pas rigoureusement nulle nous devons prendre :

$$(\square + \varepsilon^2)\, \alpha^{\mu\nu} = 0.$$

On peut alors quantifier, de façon compatible avec la condition d'isothermie, par une méthode calquée sur la méthode de Lichnerowicz.

La théorie étant cylindrique par rapport à x^0, les 15 variables de champ $\alpha_{\mu\nu}$ se séparent en 3 groupes régis par 3 groupes indépendants d'équations :

Les α_{ij} dont la nature gravitationnelle est mise en évidence par le développement :

$$\sqrt{|g|}\, g^{ij} = \eta^{ij} - \mathrm{K}\, \alpha^{ij} + \dots$$

sont associés à un mélange de particules de masse ε et de spins 2 et 0.

Les α_{oi} pour lesquels la théorie de Thiry permet d'écrire :

$$\beta\, \varphi_i = - \mathrm{K}\, \alpha_{oi} + \dots$$

décrivent le photon, de masse ε et de spin 1. La quantité α_{oo}, scalaire dans l'espace-temps quadridimensionnel, représente une particule de masse ε et de spin 0.

En quantifiant l'on aboutit à la relation de commutation :

$$[\alpha_{\alpha\beta}(x), \alpha_{\lambda\mu}(x')] = \beta^2 (\mathrm{P}_{\alpha\lambda}\, \mathrm{P}_{\beta\mu} + \mathrm{P}_{\alpha\mu}\, \mathrm{P}_{\beta\lambda})\, \mathrm{D}_{(\vec{x} - \vec{x}')}$$

où :

$$\mathrm{P}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{\varepsilon^2}\, \partial_{\alpha\beta}$$

$\mathrm{D}_{(\vec{x})}$ est la distribution de Jordan-Pauli,

β est lié au facteur de gravitation χ par :

$$\chi = \frac{\beta^2}{2}$$

La séparation des variables de champ en 3 groupes α_{ij}, α_{oi}, α_{oo} subsiste : toute variable d'un des 3 groupes (prise en x) commute avec les variables des 2 autres groupes (prises en x').

La relation de commutation permet d'obtenir :

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(x')] = - \mathrm{K}^2\, \mathrm{P}_{ij}\, \mathrm{D}_{(\vec{x} - \vec{x}')} + \dots$$

en accord avec la théorie du photon de L. de Broglie.

Enfin, de la relation de commutation se déduit l'algèbre selon laquelle est quantifié le tenseur du 4e ordre :

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta\lambda\mu} = - (\partial_{\alpha\lambda}\, \alpha_{\beta\mu} - \partial_{\alpha\mu}\, \alpha_{\beta\lambda} + \partial_{\beta\mu}\, \alpha_{\alpha\lambda} - \partial_{\beta\lambda}\, \alpha_{\alpha\mu})$$

dont certaines composantes sont de nature électromagnétique, ainsi l'on a :

$$\beta\, \partial_\alpha\, \mathrm{F}_{ij} = \mathrm{K}\, \mathrm{H}_{\alpha o ij} + \dots$$

tandis que les composante H_{ijkl} peuvent être identifiées à celles d'un tenseur $\Phi_{([ij])([kl])}$ introduit par M.-A. TONNELAT en 1941 dans la théorie du graviton.

On doit alors identifier les α_{ij} aux potentiels symétriques $\Phi_{(ij)}$ de M.-A. TONNELAT.

La quantification de H_{ijkl} est équivalente à celle qu'obtient A. LICHNEROWICZ pour un tenseur de courbure.

Ainsi la théorie de Thiry conduit à une théorie unitaire du photon-graviton.

ON THE PHYSICAL CHARACTERISTICS OF GRAVITATIONAL WAVES

By

Professor H. BONDI, F. R. S.

University of London, King's College, Londres

RESUME

Le transfert d'énergie par les champs de gravitation Newtoniens est discuté et illustré sur un exemple. Nous indiquons le rôle de l'énergie dans les théories Newtoniennes et relativistes. Seuls les systèmes dont l'équation d'état dépend explicitement du temps peuvent, à notre avis, rayonner des ondes de gravitation.

The central problem of the theory of gravitational waves is the question of energy transfer. What can be said about energy transfer by gravitation in Newtonian theory ? Recently, W. H. McCrea and I decided to investigate this problem. It is clear that in Newtonian theory there can be no wave transfer of energy since there is no wave equation. But there may well be a near-field transfer which can be studied by means of the Newtonian equations. A familiar example is the orbit of the moon which is being altered through the effects of tidal friction on the earth. However, it seemed to us that this was not a very clear-cut example of energy transport across empty space. For not only is the energy gained by the moon useless energy, as the engineer would call it, but in addition a large part of the energy of the system is always in the form of potential energy. This is not localized and therefore no clear statements can be made about whether energy has actually travelled. In these circumstances, it seemed to us desirable to produce an example of Newtonian energy transport that was beyond any doubt whatever.

Consider, then, two axially symmetrical bodies, symmetrical also about their common equatorial plane in which they describe orbits about each other. Each of these two bodies contains machinery that can change its shape from an oblate spheroid through that of a sphere to a prolate spheroid. It is, of course, well known that the attraction of an oblate spheroid on a mass in its equatorial plane is greater than that of a sphere of the same mass and the same centre of mass; and, similarly, the attraction of a prolate spheroid is less than that of a sphere. Labelling our two bodies T and R we suppose now T to adjust its shape by the simple rule that whenever R becomes oblate, T becomes prolate and vice versa; in such a way that the attraction between the two bodies is always the same as if they were both spheres. Therefore the two bodies describe simple Keplerian orbits about each other which we shall suppose to be ellipses of high eccentricity. Accordingly during each period of revolution the distance between the two bodies varies markedly. Each body exerts on the other a tidal force tending to make it oblate. It is clear that this force will be much greater when the two bodies are close to each other than when they are far apart. If, now, the machinery in R is used to change the shape of R so that it becomes oblate when the two bodies are near to each other and prolate again when they are far apart, then in each revolution the machinery in R will gain energy, for much more energy is yielded by becoming oblate when the bodies are in proximity than is needed to make R prolate when they are far apart. This energy can be used, for example, to charge a storage battery in R. The body T has to go through the opposite motions; becoming oblate when the bodies are near to each other, requiring a great deal of energy to do so; and becoming prolate when they are far apart, when little energy is gained in the process. If the energy is drawn from a storage battery, then in the course of each such revolution the storage battery will be discharged more and more. If we suppose the two bodies to have been spheres before a certain instant, then to have gone through the motions just described for a number of revolutions, and then to become spheres again, then in the final stage the system will be in the same state as initially in all respects except one : There will be less energy in the battery of T and more in the battery of R. In other words, energy has been transferred from T to R without any other changes having been made. Clearly, this is near-field transfer of energy by Newtonian gravitation. The question then arises of the mathematical description of this transfer. For this purpose I constructed the following mathematical argument. Consider the closed surface S located entirely in empty space but so that there is moving matter both within S and outside. The rate at which the gravitational forces are doing work within the surface S is given by :

$$W = -\int \rho \, \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad} V \, d\tau$$

where ρ is the density of matter, $\mathbf{U}$ its velocity, and V the gravitational potential. The volume integral is extended throughout the interior of S. Using the fact that ρ vanishes on S, the expression for W can be transformed by the divergence theorem :

$$W = -\int \rho\, \mathbf{U}\cdot \operatorname{grad} V\, d\tau = -\oint V \rho\, \mathbf{U}\cdot d\mathbf{S} + \int V \operatorname{div} (\rho\, \mathbf{U})\, d\tau = -\int V \dot{\rho}\, d\tau$$

by the equation of continuity (A dot denotes differentiation with respect to the time). Next

$$W = -\int V \dot{\rho}\, d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int V \rho\, d\tau + \frac{1}{2}\int (\dot{V} \rho - V \dot{\rho})\, d\tau = -\dot{U} + \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\dot{V}\, \nabla^2 V - V\, \nabla^2 \dot{V})\, d\tau\,,$$

where U denotes the total gravitational potential energy within S, γ is the constant of gravitation, and Poisson's equation has been used. The final integral hence denotes the rate of flow of energy through S into its interior and is readily transformed into $-\oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}$, where $\mathbf{P}$ which is thus the Poynting vector of the Newtonian gravitational field, is given by

$$\mathbf{P} = \frac{1}{8\pi\gamma} (V \operatorname{grad} \dot{V} - \dot{V} \operatorname{grad} V)\,.$$

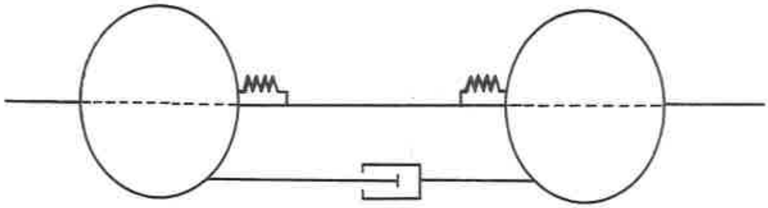
This result is of importance for our relativistic considerations. For we know that Newtonian gravitation is a very good approximation to relativistic gravitational theory if all changes occur sufficiently slowly. In particular, we know that relativity must give the same result for the experiment described earlier of the two bodies of variable shape. Accordingly, whatever expression is eventually found to represent the relativistic Poynting vector, we know now that if all changes occur sufficiently slowly it must go over into the expression derived here. There are several pecularities in this expression which are worth discussing. One, the expression is quadratic in the gravitational potential. This clearly must be so for near-field transfer; for, in contrast to the radiation case, the loss of the transmitter is entirely due to the existence and location and function of the receiver. In the experiment described earlier, T loses no energy whatever if R is absent. Accordingly, only square or higher terms will give a non-vanishing integral since Newtonian gravitational theory is linear and so the terms due to transmitter and receiver just add. Secondly, the expression for the Poynting vector is only meaningful when integrated over a closed surfaces. Accordingly, any vector of vanishing divergence can be added to this expression without changing the result. Note, for example, that if a constant is added to the gravitational potential, the resulting additional term makes no contribution because the amount of matter within the surface cannot change, the surface itself being in empty space.

While there are many indications that relativistic energy transport is governed by the curvature tensor, a curious little point emerges : in the usual approximation the Newtonian potential is represented by g_{00}, but time derivatives of g_{00} do not occur in the curvature tensor, although time derivatives of the Newtonian potential are fundamental in our expression.

Now, to come to more general considerations. I am going to discuss the role of energy in Newtonian and relativistic theories. The concept of energy in classical physics is important because it is the sole measure of exchange value between the different forms energy can take. There is, however, a remarkable distinction in Newtonion theory between gravitational energy and all other forms of energy. Whereas kinetic energy and the energy of the electromagnetic field or the energy of, say elastic stresses is necessarily positive and vanishes only if the field or motion or strain vanishes, gravitational energy is negative. Although the absolute value of energy has little significance, the important point here is that all other energies are bounded from below, but gravitational energy can become arbitrarily negative. By allowing a sphere to contract arbitrarily much, an arbitrary amount of energy could be gained. It is only because gravitation is such a weak force, and the forces preventing arbitrarily large compression like rigidity and gas pressure are relatively large, that this is not a feasible way of gaining energy. However, in principle the unbounded nature of gravitational energy wrecks the classical energy concept just as much as the significance of money would be destroyed if everybody could get arbitrarily large credits just for the asking. It is, therefore, most satisfactory that relativity treats gravitational energy on an entirely different footing from all other energies, and makes it a far more elusive concept. Nor should we be surprised if a suitable formulation of the gravitational energy concept in relativity turns out not to be positive definite. It is clear from many of the papers given at this Conference that there is a great deal of interest in a formulation of the concept of gravitational energy in general relativity. However, as Synge has pointed out, there is a large number of quantities satisfying conservation laws. Which of them, if any, can be identified with energy in the true, physical sense ? I feel strongly that we must make a connection with the laboratory concept of energy, in fact with the engineer's concept of energy. *Good physics is potential engineering.* How would we build a power station working on the energy of gravitational waves ? We are clearly interested in energy that can be captured and put into tangible form such as the charge on a battery, something that we can use for purposes of lighting and electric power. We must not be satisfied with an energy concept that always requires us to integrate through a region of space. It must be possible to get the energy into a bottle, into something that we can measure.

A design of a receiver for gravitational waves was given in my

Note to « Nature » two years ago and the diagram now shows it in slightly elaborated form. Two massive spheres are free to slide on a stick to which they are attached by means of two springs that keep them a certain distance apart when there is no incident field. A piston is attached to one of the spheres and moves loosely in the cylinder which is attached to the other sphere and is filled with viscous oil.



If there is any relative motion of the two spheres, the piston will move relative to the cylinder, the oil will be forced pass it, and so its temperature will rise. A thermometer attached to the cylinder will, therefore, give clear and unmistakeable evidence of the capture of gravitational energy. Naturally, we suppose the entire receiver to be falling freely in a gravitational field, since otherwise the energy might be derived from its supports. If the two spheres were test particles, their relative motion would be fully described by the equation of geodesic deviation and thus by the curvature tensor. Looked at locally the curvature tensor-supplies a quasi-Newtonian force which can be combined with the forces on the spheres due to the springs and the piston to calculate the motion of the spheres. It is thus clear that if a gravitational wave of suitable polarization is incident on the receiver, relative motion of the two spheres will result if they are test particles. It seems to me impossible to deny that such motion will also result if the two spheres have finite mass. For otherwise we would have to suppose that the geodesic postulate has no significance for finite masses, which is not only absurd but has been proved to be wrong by the E.I.H. method. Thus, a gravitational wave will lead to relative motion of the two spheres and thus to heating of the oil in the cylinder, proving the presence of available energy in the gravitational wave. It is true that we do not know how much energy is available in the wave; we have only ascertained that there is energy there. For, in order to find the available energy, we would have to evaluate the reaction of the motion of the spheres on the wave which at present seems to be unduly complicated. Clearly, there must be an impedance of the wave as energy source, just as there is an impedance of free space when energy is being taken out of electro-magnetic radiation. The example also shows that the energy of gravitational waves must be positive, for it is positive energy that has been taken out of the wave. The energy of the gravitational field is, therefore, neither positive definite nor negative definite, but is negative for static fields, and positive for wave fields, as has been demonstrated particularly clearly in the recent work of van der BURG. This shows that a transmitter of gravitational waves loses energy, that is, it loses mass. What constitutes a suitable transmitter of gravitational waves ? It is clear that a monopole will not do because of the law of conservation of mass. Neither is a dipole of significance because of the law of conservation of momentum. The lowest symmetry is thus that of a quadrupole, as in the solutions just referred to. Next, the essential character of hyperbolpic equations is only shown when we consider non-analytic solutions. For, in the case of an analytic function, its entire future is determined by an arbitrarily short portion of its present. All this has been beautifully demonstrated in the work of LICHNEROWICZ. The full character of a hyperbolic equation is only shown when it leads to waves that convey news. The transmitter should, therefore, indicate something that is new. An example of such a transmitter is a sphere containing a time bomb that makes it go temporarily into spheroidal shape at an unknown moment through the action of a fuse controlled by a random device, such as a noise diode. Such a system, which shows the full flavour of the hyperbolic system, differs very greatly from a double star which is so often considered as the prototype of a transmitter of gravitational waves. In the case of the double star, the entire future is indeed know from the present. Following Infeld I am somewhat doubtful whether such a system will radiate at all, but I prefer to work with extended bodies rather than with singularities which, to my mind, introduce all sorts of difficulties. When, then, we consider the double star, we have two bodies each with its own equation of state. How does such a system differ from the single star with the time bomb that I described earlier ? I suggest that here we have a difference that runs through the whole of physics. In electricity we refer to passive and to active networks. In lagrangian dynamics we refer to systems in which the equations of condition contain the time explicity, and those which do not contain the time explicitly. My supposition is that *only systems with an equation of state containing the time explicitly radiate gravitational waves.*

Finally, I should like to refer to the problem of why one chooses the retarded solution. If the linear approximation is any guide, then in relativity, just as in electro-magnetic theory, one has the choice between a retarded solution, an advanced solution and a one-parameter family of solutions in between these two. The equations themselves being symmetric in the time, it must be considerations beyond them that force us to adopt the retarded solution. What we want for gravitational waves is, therefore, a WHEELER-FEYNMAN absorber theory that bases the retarded solution on cosmological considerations. However, all this is far in the future.

DISCUSSION

Intervention du Prof. Mac Vittie

Est-ce que votre vecteur de Poyinting contient un facteur qu'on pourrait interpréter comme la vitesse de propagation de la « gravitation newtonienne » ? Si oui, quelle est la valeur de cette vitesse ?

Intervention du Prof. Weyssenhoff

D'après une de vos dernières remarques un système gravifique ne rayonne que lorsque quelque chose de nouveau y survient, mais il est presque généralement admis que pour un système électromagnétique les choses se passent autrement. Comment est-ce que vous expliquez cette différence ?

Intervention de Ivanenko

Puis-je remarquer que l'on doit être très prudent en disant que la théorie newtonienne de la gravitation est un cas limite de la théorie einsteinienne, parce que les professeurs Petrov, Géhéniau, Pirani et d'autres ont montré que seulement les champs métriques du type I de Petrov peuvent être associés avec la théorie newtonienne, mais non les types II et III de Petrov. Il se peut que la théorie einsteinienne contienne non seulement une très grande généralisation de la théorie de Newton (passage à 10 composantes, passage aux champs non statiques, etc...) mais encore quelques éléments non newtoniens, extra-newtoniens. Ne peut-on essayer, pour ainsi dire, de retrancher du champ d'Einstein les champs II et III de Petrov ? Et ces champs représentent-ils aussi quelque chose de réel qui n'est pas encore découvert ?

SUR LES ONDES DE GRAVITATION ÉMISES PAR UN SYSTÈME DE MASSES EN MOUVEMENT

Professeur V. FOCK,
Université de Léningrad

RESUME

Solutions retardées des équations d'Einstein dans un espace-temps plat à l'infini spatial. Usage essentiel des coordonnées harmoniques.

Dans l'étude des ondes de gravitation émises par un système de masses en mouvement, il faut, tout d'abord, séparer les ondes réelles des ondes fictives qui peuvent provenir des oscillations du système de coordonnées. Cela impose une attention toute spéciale au choix des coordonnées. Dans le problème considéré, l'espace-temps est supposé galiléen à l'infini, la seule source des déviations du caractère galiléen étant les masses qui constituent le système. On peut alors introduire le système de coordonnées harmonique qui est défini à une transformation de Lorentz près. Cette propriété du système harmonique permet de considérer comme réelles les ondes de gravitation dans ce système, dont nous nous servirons exclusivement dans la suite.

Pour étudier la propagation des ondes, il faut prendre comme approximation initiale non pas l'espace-temps galiléen, mais l'espace-temps statique qui correspond à une masse centrale égale à la masse totale M du système. En coordonnées harmoniques, on aura alors pour l'opérateur de d'Alembert l'expression approchée :

$$\Box^0 \psi = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{r}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi \tag{1}$$

L'expression asymptotique pour une onde divergente sera de la forme :

$$\psi = \frac{1}{r} f(\tau, n) \tag{2}$$

avec :

$$\tau = t - r^*/c \; ; \qquad r^* = r + 2\alpha \lg (r/r_0) \tag{3}$$

Ici $\alpha = \gamma\, M/c^2$ est le rayon gravifique de la masse totale, r_o est une constante et n un vecteur de longueur 1 aux composantes $n_i = x_i/r$. Les valeurs asymptotiques des dérivées de ψ se calculent en considérant ψ comme fonction d'une seule variable τ. Pour les dérivées de τ on peut prendre les valeurs :

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = k_o = 1 \; ; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial x_i} = k_i = -\frac{n_i}{c} \tag{4}$$

et on aura :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} = k_\alpha\, \dot{\psi} \tag{5}$$

Nous écrirons aussi dans la suite

$$k^o = 1/c^2 \; ; \qquad k^i = +\frac{n_i}{c} \tag{6}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{oo} &= \frac{1}{c} + \frac{4\,\alpha}{c\,r} + \mathfrak{b}^{oo} \\ \mathfrak{g}^{oi} &= \mathfrak{b}^{oi} \\ \mathfrak{g}^{ik} &= -\, c\, \delta_{ik} + \mathfrak{b}^{ik} \end{aligned} \tag{7}$$

où $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ est la partie ondulatoire des $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, la condition d'harmonicité donne

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \cong \frac{\partial \mathfrak{b}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \cong k_\mu\, \dot{\mathfrak{b}}^{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

et, en intégrant

$$k_\mu\, \mathfrak{b}^{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

(la constante d'intégration qui appartient à la partie statique peut être suposée nulle).

Pour l'opérateur de d'Alembert $\Box\psi$ en coordonnées harmoniques nous avons l'expression

$$\sqrt{-g}\,\Box\psi = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} \tag{10}$$

En introduisant les valeurs des $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, on peut écrire

$$\sqrt{-g}\,\Box\psi = c\,\Box^o\psi + \mathfrak{b}^{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} \tag{11}$$

Mais si la fonction ψ est du caractère asymptotique (2), la somme disparait en vertu de (5) et (9). Cette remarque s'applique aussi au cas où ψ est une des quantités $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$ elles-mêmes.

Dans les équations d'Einstein

$$\left((-g)\, R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, R\right) = -\frac{1}{2}\, \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + c^2\, N^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\, g\, T^{\mu\nu} \tag{12}$$

figure l'expression $\sqrt{-g}\,\Box\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ qui est non-linéaire en $\mathfrak{b}^{\mu\nu}$. D'après la remarque précédente, cette expression se réduit à une expression linéaire.

Avec les valeurs (7) des $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ on a approximativement

$$c^2\, \mathrm{N}^{\mu\nu} = 8\pi\gamma\, \sigma_g\, k^\mu\, k^\nu \tag{13}$$

où σ_g est l'expression

$$\sigma_g = \frac{1}{32\pi\gamma}\left(\dot{b}^{\alpha\beta}\, \dot{b}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \dot{b}^{\alpha}_{\alpha}\, \dot{b}^{\beta}_{\beta}\right) \tag{14}$$

qui peut être interprétée comme densité d'énergie de radiation gravitationnelle. Les équations (12) prennent la forme

$$\frac{1}{2c}\,\Box\,\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\,\sigma\, k^\mu\, k^\nu \tag{15}$$

Si l'on ne considère que la radiation purement gravitationnelle, on doit poser $\sigma = \sigma_g$. Mais en réalité la radiation électromagnétique est beaucoup plus intense, et on devrait prendre pour σ la somme $\sigma = \sigma_g + \sigma_{em}$ avec

$$\sigma_{em} = \frac{1}{8\pi}(\mathscr{E}^2 + \mathscr{H}^2) \tag{16}$$

Les équations non-linéaires (15) se réduisent à des équations linéaires. En effet, si l'on pose

$$b^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + h\, k^\mu\, k^\nu \tag{17}$$

l'expression (14) pour σ_g ne contiendra par la quantité h. Donc, on peut obtenir la solution des équations non-linéaires (15) en résolvant successivement les équations linéaires

$$\Box^o h^{\mu\nu} = 0\ ; \qquad \Box^o h = \frac{16\pi\gamma}{c}\,\sigma \tag{18}$$

Pour rattacher la solution obtenue aux valeurs asymptotiques des $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ valables pour les distances modérées du système (c'est-à-dire, pour les distances qui sont grandes par rapport aux dimensions du système, mais petites par rapport à la longueur d'onde émise par le système) on peut poser

$$\mathrm{D}_{ik}(t) = \int \rho\, x_i\, x_k (dx)^3 \tag{19}$$

et remplacer dans cette expression t par τ. On aura alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{oo} &= \frac{1}{c} + \frac{4\gamma\,\mathrm{M}}{c^3\, r} + \frac{2\gamma}{c^3}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\mathrm{D}_{ik}(\tau)}{r}\\
\mathfrak{g}^{oi} &= -\frac{2\gamma}{c^3}\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial t}\,\frac{\mathrm{D}_{ik}(\tau)}{r}\\
\mathfrak{g}^{ik} &= -c\,\delta_{ik} + \frac{2\gamma}{c^3}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\mathrm{D}_{ik}(\tau)}{r}
\end{aligned} \tag{20}$$

On vérifie que la condition d'harmonicité est satisfaite identiquement.

Pour conclure, nous voudrions attirer l'attention sur un point dont nous avons déjà parlé au commencement de notre communication. Dans la théorie des ondes de gravitation, l'emploi des coordonnées harmoniques est non seulement un procédé pour faciliter les calculs, mais aussi une question de principe, car c'est le seul moyen de définir les ondes de gravitation d'une manière unique.

BIBLIOGRAPHIE

В. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Москва, 1955. (V. Fock, « Théorie de l'espace-temps et de la gravitation », Moscou, 1955, en russe.)

V. Fock, The Theory of Space, Time and Gravitation, Pergamon Press, London, 1959 (édition anglaise).

V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin, 1960 (édition allemande).

DISCUSSION

Intervention du Docteur A. Trautman

Une difficulté se présente quand on étudie la solution de l'équation donnant h. Cette solution contient un terme qui se comporte comme $\dfrac{\log r}{r}$ pour $r \to \infty$. Il n'est pas tout à fait clair si le tenseur métrique se comporte vraiment de cette façon à l'infini. Il est possible que les termes en $\dfrac{\log r}{r}$ apparaissent en conséquence de la méthode d'approximation utilisée. Par exemple, la fonction $\dfrac{a(t - r - k \log r)}{r} \to 0$ comme $\dfrac{1}{r}$, mais si on la développe par rapport à k, on obtient un terme proportionnel à $\dfrac{\log r}{r}$. Cette question exige une étude plus détaillée.

Intervention du Prof. Papapetrou

L'apparition d'un terme en $\log r$ ne constitue pas une difficulté essentielle. Il provient de ce que dans ce problème il n'est pas aisé de prendre en considération d'une manière raisonnable la variation de la masse propre des corps en mouvement consécutive à la perte d'énergie par radiation gravitationnelle; pourtant cette déperdition d'énergie deviendra nécessairement notable, comme on le voit en considérant le cas où le mouvement se poursuit indéfiniment.

SPHERICAL GRAVITATIONAL WAVES

by Prof. W. B. BONNOR

Queen Elizabeth College, London, W. 8

RÉSUMÉ

On étudie le champ gravitationnel de deux particules identiques se déplaçant symétriquement suivant une ligne droite à partir de leur centre de masse. Le mouvement est supposé engendré par une machine et le cas du mouvement gravitationnel libre n'est pas envisagé.

A l'approximation linéaire, je choisis une solution des équations du champ en termes de potentiels retardés. Ceci correspond à l'émission des ondes gravitationnelles et, ainsi qu'il est bien connu, ceci implique la perte par le système d'un certain flux d'énergie. Je considère ensuite la seconde approximation et trouve que le système perd une quantité de masse gravitationnelle égale à l'énergie emportée par les ondes à l'approximation linéaire.

§ 1. — Introduction

The question whether gravitational radiation is emitted in purely gravitational motion, such as that of the planets round the sun, has led to a number of conflicting answers, and there is at present no agreed solution to this problem [2], [3], [7]. Indeed, the work of Infeld and his collaborators [4], [5] in this field has cast doubt on the physical reality of gravitational waves.

In the work described here I attack a rather different question, namely, whether gravitational radiation is emitted in the motion of two particles which are subject to non-gravitational forces as well as to their own gravitation. The answer is that such radiation *is* emitted, and its physical reality is established by the fact that the emission is accompanied by an equivalent loss of gravitational mass of the system generating the waves. The correctness of this answer is, of course, subject to the assumed validity of the approximation method which I am forced to use.

§ 2. — Statement of the problem

I consider a system consisting of two equal particles A and B, each of mass m, moving symmetrically in a straight line AB about the mid-point O of AB, which remains fixed. One may think of the motion as consisting of oscillations caused by an ideal elastic spring between A and B. The system then has a variable quadrupole moment.

Let us take O as the origin of spherical polar coordinates, with axis along AB. The space coordinates of a field-point are then (r, θ, φ), and owing to the axial symmetry of the system we may suppose that the field does not depend on the azimuthal angle φ. The particles themselves remain on the polar axis at distances $\pm a f(t)$ from the origin, where a is a constant with the dimensions of a length, and $f(t)$ is a function of the time, for the moment arbitrary but independent of the parameters m and a.

As field equations I shall take

$$R_{ik} = 0 \tag{2.1}$$

so that the particles and spring are represented by singularities. It can be shown [1] that owing to the symmetry, a sufficiently general form of the metric is

$$ds^2 = -Adr^2 - Br^2\, d\theta^2 - Cr^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + Ddt^2\,, \tag{2.2}$$

where A, B, C, D are functions of r, θ and t.

The usual method of approximation in solving equations (2.1) is to expand the metric tensor g_{ik} in terms of one parameter. In the problem considered here the field depends on two independent parameters m and a^2. (a always occurs squared because of the symmetry about the plane $\theta = \frac{1}{2}\pi$). Strictly therefore the g_{ik} should be expanded in a doubly infinite power series :

$$g_{ik} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} m^p (a^2)^s \overset{(ps)}{g_{ik}}\,.$$

However it turns out [1] that, of the lower terms, the interesting ones as far as the quadrupole radiation is concerned, are those involving powers of ma^2. In this work I therefore retain only these, and write $\lambda = ma^2$; then we have

$$g_{ik} = \overset{(0)}{g_{ik}} + \lambda \overset{(1)}{g_{ik}} + \lambda^2 \overset{(2)}{g_{ik}} + \ldots, \tag{2.3}$$

where $\overset{(0)}{g_{ik}}$ is the metric of flat space-time in spherical polar coordinates. These are sufficient to obtain the results of this paper, but it should be remembered that for a more refined result it would be necessary to consider the the others as well.

§ 3. — The linear approximation

Il we substitute expansions of the form (2.3) into the metric (2.2), and then equate to zero the coefficients of powers of λ in the field equations (2.1), we obtain a series of sets of equations of the form

$$\Phi_{em}(\overset{(n)}{g}_{ik}) = \Psi_{em}(\overset{(n-1)}{g}_{ik}, \dots \overset{(1)}{g}_{ik}) . \tag{3.1}$$

At every stage in the approximation procedure the left-hand side of (3.1) has the same form, and the right-hand side is known from the previous approximations. The left-hand side is linear in the $\overset{(n)}{g}_{ik}$ and their derivatives.

In the linear approximation ($n = 1$) the right-hands side of (3.1) terms at $t = \pm\infty$, that is to say, before the wave is emitted, and a long time after it has been emitted. We are thus interested in the field for

$$0 \ll r \ll |t| .$$

In solving the equations at the second approximation we may therefore ignore terms *except* those which

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{are of order } r^{-1} \text{ for large } |t|, \text{ and} \\ \text{(ii)} & \text{are different at } t = \pm\infty . \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

In the second approximation the right-hand side of (3.1) consists of terms which are known from the first approximation. One can achieve a formal solution in this approximation, as in the linear one. The solution depends on the inhomogeneous wave-equation

$$\square \overset{(2)}{g}_{11} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z} . \tag{4.2}$$

Here Y depends on the $\overset{(1)}{g}_{ik}$ and Z consists of functions of integration. In this case one has to make use of one of these functions otherwise the solution for $\overset{(2)}{g}_{11}$ is singular along the axis of symmetry.

The right-hand side of (4.2) is very complicated and one has to pick out from it expressions which will yield in the $\overset{(2)}{g}_{ik}$ terms of type (4.1). A careful investigation is needed to ensure that none of these terms is missed. The result is obtained in the form of the four functions $\overset{(2)}{g}_{11}$, $\overset{(2)}{g}_{22}$, $\overset{(2)}{g}_{33}$, $\overset{(2)}{g}_{44}$ which depend on $h(t - r)$ given by (3.4).

Even at this stage the difficulties are not over. The $\overset{(2)}{g}_{ik}$ so obtained contain a singularity at $t = +\infty$. (Of course, they are also singular at $r = 0$, but this is expected). This singularity can be removed by a coordinate transformation which brings the metric into a non-diagonal form. One then finds that the only terms in $\overset{(2)}{g}_{ik}$ which are of type (4.1) are the folloving :

$$\overset{(2)}{g}_{11} = \overset{(2)}{g}_{44} = -\frac{4}{15} r^{-1} \int_{-\infty}^{t-r} \mathrm{X}(\xi)\, d\xi, \tag{4.3}$$

where :

$$X(\xi) = \frac{1}{4}[h'(\xi)]^2 + \frac{1}{2}h(\xi)\,h''(\xi).$$

The second approximation therefore has the character of a Schwarzschild solution in which the gravitational mass varies with time. Many terms have been neglected in reaching this result, but these are either of order r^{-2}, or are such that their values are the same at $t = \pm\infty$.

If in (4.3) we allow t to tend to $+\infty$, we have for the change in gravitational mass due to the emission of waves :
vanish and the equations become homogeneous in the sense that every term contains one of the $\overset{(1)}{g}_{ik}$ or one of their derivatives. From the set one can obtain a wave equation for $\overset{(1)}{g}_{11}$:

$$\Box\,\overset{(1)}{g}_{11} = 0\,, \tag{3.2}$$

where $\Box$ is the d'Alembertian operator in spherical polar coordinates. The remaining $\overset{(1)}{g}_{ik}$ are obtained in terms of the $\overset{(1)}{g}_{11}$ by means of the other field equations of the linear approximation. In the course of the solution certain arbitrary functions of integration appear and these are put equal to zero.

As solution of (3.2) we choose the retarded potential for the oscillating quadrupole represented by the two particles. To achieve the ultimate result it is not necessary to use the complete solution for a quadrupole, and it is sufficient to take the terms of order r^{-1} for large r. The solution of (2.1) for the linear approximation then turns out to be :

$$\left.\begin{aligned} \overset{(1)}{g}_{11} &= -\overset{(1)}{g}_{44} = -r^{-1}\,h(t-r)\cos^2\theta\,, \\ \overset{(1)}{g}_{22} &= -\overset{(1)}{g}_{33}\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{2}r^{-1}\,h(t-r)\sin^2\theta\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

where r is OP, the distance of the field-point from the origin, and where

$$h = -4\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{[f(t-r)]^2\}\,. \tag{3.4}$$

§ 4. — The second approximation

To proceed further it is necessary to place some general restrictions on the function $f(t)$ which defines the separation of the particles. The precise restrictions are given in [1], but, roughly, they are that $f(t)$ shall be a bounded function which possesses derivatives of all orders in $-\infty \leqslant t \leqslant +\infty$, and that these derivatives shall tend to zero fairly rapidly as $t \to \pm\infty$. As an example, one may think of

$$f(t) = (1+t^2)^{-1}\sin t\,,$$

but it is possible also to consider motions which take place in a finite interval $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ provided that the transitions from and to rest at t_1 and t_2 occur smoothly enough.

The main purpose of the work is to show that the outgoing wave (3.3) inserted in the linear approximation is accompanied by a permanent loss of gravitational mass of the system. This will appear in the second aproximation through a time dependent, spherically-symmetric term in the metric of order r^{-1} for large r. We therefore need to compare such

$$\Delta M = -\frac{1}{30} m^2 a^4 \int_{-\infty}^{\infty} [h'(t)]^2 \, dt, \tag{4.4}$$

which is negative, so that *there is a permanent loss of mass.* Moreover, one can calculate, by means of the energy pseudotensor, the energy carried away by the waves in the linear approximation [6]. One finds that *this radiated energy is precisely equal to the loss of gravitational mass* (4.4).

We may therefore conclude that the emission of gravitational radiation by a system of this type represents a real physical phenomenon. It should be emphasised again that this work does not establish this result for free gravitational motion. For a discussion of this and other points, the reader should refer to [1].

REFERENCES

[1] Bonnor, W. B., *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A **251**, 233 (1959).
[2] Goldberg, J. N., *Physical Review*, **99**, 1873 (1955).
[3] Hu, N., *Proceedings of the Royal Irish Academy*, A **51**, 87 (1947).
[4] Infeld, L., « Equations of Motion and Gravitational Radiation », (cyclostyled prepint).
[5] Infeld, L., and Scheidegger, A. E., *Canadian Journal of Mathematics*, **3**, 195 (1951).
[6] Landau, L., and Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields*, Cambridge, Mass. Addison-Wesley Press Inc.
[7] Peres, A., *Nuovo Cimento*, **11**, 617 (1959); **11**, 644 (1959).

DISCUSSION

Intervention de N. Rosen

Comme nous avons travaillé sur ce problème et l'avons trouvé difficile, j'aimerais complimenter le Professeur Bonnor sur le calcul très joli qu'il a effectué. Cependant je suis tourmenté au sujet d'une ou deux matières à propos desquelles je voudrais poser des questions. Si l'on considère des points près de l'origine, la solution du premier ordre se comporte comme $\frac{1}{r^3}$ et l'inhomogénéité du second membre de l'équation du second ordre se comporte comme $\frac{1}{r^8}$. Si cette dernière est considérée comme la densité de source pour la solution du second ordre, elle engendrera une onde qui aux grandes distances décroîtra comme $\frac{1}{r}$. Cependant, puisque l'intégrale de cette densité de source dans l'intérieur de toute sphère entourant l'origine est infinie, la source de cette onde est infinie, et l'amplitude de l'onde sera infinie. Cela ne crée-t-il pas une difficulté ? De plus comment sait-on quelles sont les solutions de l'équation d'onde homogène qu'il faut ajouter à la solution du second ordre ?

Intervention de P. Havas

1) Comme le Dr. Bonnor l'a signalé à la fin de sa conférence, il n'a pas résolu le problème du mouvement *libre*, mais du mouvement *forcé*. Cependant, d'après mon opinion le problème de la réalité de la radiation gravitationnelle est intimément lié à celui du mouvement libre. C'est une différence essentielle entre l'électrodynamique et la Relativité générale, qu'en électrodynamique on peut permettre le mouvement arbitraire des sources et obtenir encore des résultats ayant une signification physique, alors qu'en Relativité générale ce n'est pas le cas, parce que le mouvement des sources n'est pas indépendant des équations du champ.

2) Réponse à la remarque du Dr. Weber après la conférence de Bonnor (remarque selon laquelle les choses iraient bien, si l'on tenait compte des forces électriques, etc.) :

Oui, mais il n'en a *pas* tenu compte. C'est précisément le point.

Intervention de Papapetrou

Nous avons considéré un problème semblable (Geissler-Papapetrou, *Ann. d. Physik* (7), *2*, 344 (1959)), et nous sommes arrivés essentiellement aux mêmes résultats. La méthode utilisée dans notre discusison est différente de celle suivie par Bonnor; elle est basée sur l'emploi du théorème de Weyl sur la formulation de la loi intégrale de conservation de l'impulsion-énergie. Il est encore de première importance, pour la possibilité d'obtenir un calcul cohérent, de permettre seulement un processus de radiation de durée finie.

TIME-SYMMETRIC GRAVITIONAL WAVES

Dieter R. BRILL,
Palmer Physical Laboratory, Princeton University

RÉSUMÉ

Pour essayer d'avoir une idée des propriétés générales des solutions de l'équation d'Einstein pour l'espace vide, on étudie les conditions initiales dans le cas temporellement symétrique. Ces solutions sont considérées comme des « vues instantanées » (snapshots) d'ondes gravitationnelles. Deux classes de solutions sont étudiées : 1) solutions pour lesquelles l'espace à grande distance a un comportement à la Schwanzschild; on montre que la masse totale de Schwarzschild pour ces solutions est *définie positive*; 2) solutions pour des espaces clos (univers emplis de radiation gravitationnelle); des solutions de topologies diverses sont considérées.

1. — The Time-symmetric Initial Value Problem

The purpose of this work is to explore some physical consequences of the initial value conditions in General Relativity, and to show that they imply the existence of a class of *source-free* gravitational waves for which the mass-energy can be proven to be positive definite.

If one thinks of solutions of the free-space (« exterior ») Einstein equations as continuations in time of so-called « initial data » on the space-like hypersurface $x^0 = 0$, then these initial data must satisfy the « initial value equations » of LICHNEROWICZ and FOURÈS [1] in order that a solution of the Einstein equations can be formed from them. The initial value equations themselves imply physical consequences for the solutions of Einstein's equations, and particularly for those quantities which are preserved in time. We consider here the specially simple case of solutions $g_{\mu\nu}$ of the Einstein equations which are time-symmetric about the space-like surface $x^0 = 0$. Such solutions describe space-times which admit an isometry of the space $x^0 < 0$ onto the space $x^0 > 0$, and of the space $x^0 > 0$ onto the space $x^0 < 0$, which is identity on $x^0 = 0$. In suitable coordinates x^μ, a time-symmetric metric satisfies :

(1) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson (1955); Y. FOURÈS-BRUHAT, *J. Rational Mech. Anal.*, **5**, 951 (1956).

$$g_{ij}(x^o, x^k) = g_{ij}(-x^o, x^k) \qquad i, j, = 1, 2, 3.$$
$$g_{oo}(x^o, x^k) = g_{oo}(-x^o, x^k),$$
$$g_{io}(0, x^k) = g_{oi}(0, x^k) = 0,$$
$$g_{ij,o}(0, x^k) = g_{oo,o}(0, x^k) = 0\,. \tag{1}$$

The initial value equations for such a metric reduce to the single equation [2] (analogous to the initial equation in electromagnetism for the time-symmetric case, div E = 0 or div H = 0) :

$$\mathrm{R} = 0 \tag{2}$$

Here R denotes the scalar curvature formed from the *3-dimensional* metric g_{ij} on the initial surface.

To solve this equation, consider a « base » metric $d\sigma^2$ which is conformally related to the solutions ds^2 by :

$$ds^2 = \psi^4\, d\sigma^2 \tag{3}$$

In terms of ψ and quantities formed from $d\sigma^2$, Eq. (1) takes the form [3]

$$\nabla_\sigma^2\, \psi + \frac{1}{8}\,\mathrm{R}_\sigma\, \psi = 0\,. \tag{4}$$

Our method of solving the initial value equation (2) will consist of assuming an arbitrary base metric $d\sigma^2$, and solving Eq. (4) for ψ. If an acceptable solution of Eq. (4) exists, Eq. (3) furnishes a solution of the initial value problem, which can then be continued in time to give a solution of the free-space Einstein equations.

If Dirichlet boundary conditions are imposed on ψ, the solution is unique up to a constant [4], since the quotient of two solutions must satisfy the Laplace equation in the metric $d\sigma^2$; by the maximum principle it must therefore be a constant. From the theory of elliptic operators [5] one can show that if $d\sigma^2$ describes a compact manifold, solutions ψ of Eq. (4) always exist which are either everywhere regular $\left(\text{« harmonic function » of operator } \nabla_\sigma^2 + \frac{1}{8}\mathrm{R}_\sigma\right)$, or which have a single pole of first order $\left(\text{« Green's function » for operator } \nabla_\sigma^2 + \frac{1}{8}\mathrm{R}_\sigma\right)$. A neighborhood of such a pole would correspond to a neighborhood of infinity in the asymptotically flat manifold described by ds^2. Therefore, regular solutions as well as those with poles may be physically meaningful. However, any zero of ψ makes the solution unacceptable, because the

(2) For details, see D. Brill, *Annals of Physics*, **7**, 466 (1959). The definition of $\psi_{\mu\nu}$ given in Eq. (9) of this reference is incorrect and should be replaced by $\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,0}$.

(3) See, for example, L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton (1926) page 91 f.

(4) See also H. Araki, *Annals of Physics*, **7**, 456 (1959).

(5) See, for example, G. DeRham, *Variétés différentiables*, Hermann and Cie, Paris (1955).

corresponding line-element ds^2 would describe a manifold with a singularity [6]. We exclude such solutions.

A study of the special case of axial symmetry will illustrate the types of acceptable solutions which can be obtained.

2. — Positive Definite Energy

Everywhere regular solutions of the free-space Einstein equations may be called « gravitational waves » in the same sense that everywhere regular solutions of the free-space Maxwell equations are called electromagnetic waves. A solution of the time-symmetric initial value problem for gravitation, Eq. (2), therefore represents a « snapshot » of a gravitational wave at the moment of time-symmetry. Such source-free gravitational waves make sense in the same way that the analogous electromagnetic waves make sense. A typical time-symmetric pulse of electromagnetic radiation which implodes at the focus of a lens and then reexpands has ordinarily come from regions of space where there *are* sources. However, the exact disposition of the sources will not be discovered by examining how the pulse implodes on the focus, builds up to a peak there, and then reexplodes. For this reason it is reasonable to abstract out of a great variety of such conceivable physical arrangements of sources that feature which they have in common — the pulse itself. This idealization forces us to consider the limiting case of a pulse in completely source-free space. Similarly, one may consider the gravitational waves that we are discussing as idealized representations of the waves generated by remote « real » sources suitably placed and timed. However, it is not *necessary* to assume that all imploding gravitational waves are so generated. We can also discuss pure gravitational waves which have *nowhere* any source. Our results can therefore be used in either context [2]. The total energy of such a gravitational wave is a well-defined quantity if the wave has an asymptotically Schwarzschildian behavior. We are here not concerned with definitions of *local* gravitational energy density; we are asking, does a gravitational wave possess a positive definite *total* mass-energy. To give this question sense we must obviously limit attention to cases where this mass is experimentally observable, i. e. to solutions of Eq. (2) which behave asymptotically like a Schwarzschild solution. Since the initial value data determine uniquely the *geometry* of the solution at later times — the only arbitrariness stemming from the coordinates used to describe the geometry — a solution which initially shows asymptotically Schwarzschildian behavior will represent an asymptotically Schwarzschildian geometry when continued in time. The motion of test particles or light rays [7] in the asymptotic region will therefore measure the Schwarz-

(6) D. R. Brill, Dissertation, Princeton, 1959.
(7) See I. Plebanski, *Phys. Rev.*, **118**, 1396 (1960).

schild mass, or total energy, of the wave, and this quantity is uniquely determined by the initial data.

Consider, in particular, waves which are axially symmetric. The most general axially symmetric metric can always be given the form of Weyl and Bondi [8]

$$ds^2 = \psi^4 \left[e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 \, d\theta^2\right] \tag{5}$$

For this metric, Eq. (4) can be simplified and split into two well-known equations :

$$\nabla^2 \psi + \varphi\psi = 0 \text{ (3-dimensional Schrödinger equation)} \tag{6}$$

$$4\varphi = \frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \qquad \text{(2-dimensional Poisson equation)} \tag{7}$$

To solve the initial value equation, choose a function q, compute from it the « Schrödinger potential » φ, and solve the zero-energy Schrödinger equation (6) with this potential for the « wave function » ψ.

In general, the factor determining the asymptotic Schwarzschildian behavior of the solution may be distributed at will among the base metric and the factor ψ^4. Here we want to find out if the solution is *forced* to have an asymptotic behavior, corresponding to positive energy, by the initial value equation. Therefore we assume that the base metric does not contain a factor contributing to the mass, i.e.

$$q = 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad \varphi = 0\left(\frac{1}{r^4}\right); \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

asymptotically and that the entire mass is therefore given by the asymptotic behavior of ψ,

$$\psi = 1 + \left(\frac{m^*}{2r}\right) + 0\left(\frac{1}{r^2}\right); \qquad m^* = \frac{\mathrm{GM}}{c^2} = \text{mass in units of cm.} \tag{8}$$

If Eq. (6) is divided by ψ and integrated over a large volume, the term containing φ vanishes due to the boundary conditions on q. By partial integration one obtains a surface integral which can be written in terms of m^* (2) :

$$m^* = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{\text{all space}} \frac{(\nabla\psi)^2}{\psi^2} \, dV \tag{9}$$

It is easy to see that m^* only vanishes if ψ and q are constants, i.e. if the space is flat. Therefore the mass-energy of any nonsingular gravitational wave constructed in this way is *positive definite,* as shown by Eq. (9).

Not all choices q_0 of the function q lead to acceptable solutions ψ. If the « Schrödinger potential » φ_0 derived from q_0 contains a bound state, the « wave function » ψ will have a node, corresponding to an

(8) H. Weyl, *Annalen der Physik,* **54**, 117 (1917). H. Bondi first used this form of the metric in his discussion of weak gravitational waves.

unacceptable singularity in the metric [6]. In general, consider the family of functions derived from q_0 by multiplication,

$$q = \lambda q_0 \qquad -\infty < \lambda < +\infty \tag{10}$$

The corresponding potential $\varphi = \lambda\varphi_0$ is also multiplied by the parameter λ. It can be shown [2] that, as λ is increased from zero, all solutions will be acceptable, until λ reaches a « critical » value λ_c; at that value the « potential » φ in Eq. (6) is just strong enough to have a zero-energy resonance. For values of λ exceeding λ_c, all solutions ψ have singularities and are unacceptable. As λ varies between 0 and λ_c, the total mass-energy varies between zero and infinity.

In summary, we have seen that solutions of the time-symmetric initial value equations exist, representing a snapshot of a pulse of gravitational radiation, typically at the moment of maximum concentration; that their mass-energy is always positive definite; and that families of solutions with energy ranging continuously between zero and infinity can be constructed.

3. — Closed Universes

Although the function ψ shows a singularity for any value of λ exceeding λ_c, at the value $\lambda = \lambda_c$ there is no such singularity; asymptotically, ψ behaves like a zero-energy eigenfunction,

$$\psi \to \left(\frac{\text{const.}}{r}\right) + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{11}$$

The metric therefore has the asymptotic form

$$ds^2 \to \left(\frac{\text{const.}}{r^4}\right)(dr^2 + r^2\,d\Omega^2) \quad \text{at} \quad r \to \infty \tag{12}$$

In terms of the new coordinate $r' = \dfrac{1}{r}$, the metric has the flat-space form

$$ds^2 \to (\text{const.})\,(dr'^2 + r'^2\,d\Omega^2) \quad \text{at} \quad r' \to 0 \tag{13}$$

This shows that by addition of the « point at infinity », $r' = 0$, the space described by the solution can be completed smoothly to a closed universe with the topology of a 3-sphere. Thus we see that the restriction $\lambda < \lambda_c$ for asymptotically flat solutions is physically reasonable : as λ approaches λ_c, the wave becomes strong enough to curl up space into a closed universe.

By an analogous procedure one can construct solutions of the initial value equation (2) which represent closed universes with other topologies. We illustrate the method for the case of a universe with a single « wormhole » [9], the topological product of a two-sphere and a one-sphere [10]. We shall consider base metrics which are direct sums of

(9) See C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Annals of Physics*, **2**, 525 (1957).

the metrics on the one-sphere (coordinate μ with period 2π) and the two-sphere (coordinates η and φ with the usual periodicity). The solution of the initial value equation is therefore assumed to be of the form

$$ds^2 = \psi^4 \left[d\mu^2 + e^{2q(\eta,\varphi)} \left(d\eta^2 + \sin^2 \eta \, d\varphi^2\right)\right] \tag{14}$$

In this case, Eq. (4) can again be split into two equations,

$$\nabla_0^2 \psi + \Phi\psi = 0 \tag{15}$$

$$\Phi = \frac{1}{4} \left(\nabla_0^2 q - 1\right) \tag{16}$$

where

$$\nabla_0^2 \psi = \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \tag{17}$$

Since the manifold described by the base metric is already closed, we only have to require that the solution $\psi(\eta, \varphi)$ be everywhere regular on the two-sphere. If we consider again the family of functions $q = \lambda q_0$, then amongst the corresponding family of « potentials »,

$$\Phi = \frac{1}{4} \left[\lambda \left(\nabla_0^2 q_0\right) - 1\right] \tag{18}$$

there is exactly one, with eigenvalue $\lambda = \lambda_c$, for which Eq. (15) has a solution without singularities. Thus, as in the case considered above, not all choices of base metrics lead to a closed universe, but only those which give rise to a « potential » Φ of the right strength to have a zero-energy eigenfunction.

An estimate of λ_c in terms of q_0 can be given in this case as well as in the axially symmetric universe considered above [11]. Consider the simplest choice for q_0

$$q = \lambda q_0 = -\lambda \cos^2 \eta$$

with

$$-\Phi = \frac{\lambda}{2} \left(3 \cos^2 \eta - 1\right) + 1 \tag{19}$$

This « potential » $-\Phi$ has a minimum at $\eta = \frac{\pi}{2}$. Expand Φ to quadratic terms near the minimum, and use the well-known expression for the zero-point energy of a simple harmonic oscillator to estimate the energy of the lowest bound state of this potential :

$$E_{bd\,st} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{3\lambda} \tag{20}$$

(10) Solutions of the initial value equations and their time development for the wormhole topology have recently been investigated in detail by R. Lindquist, Dissertation, Princeton, 1961.

(11) For the axially symmetric universe, an estimate of λ_c is found as follows : Let $\varphi_m(r) = \max_\theta \varphi_0(r, \vartheta)$, Then $\lambda_c < 1 / \int_0^\infty r \, \varphi_m(r) \, dr$. For details, see D. Brill, *Annals of Physics*, **7**, 466 (1959).

The condition that this energy be zero gives an estimate of the « strength » necessary to form a closed wormhole universe :

$$\lambda_c \simeq (7+\sqrt{33})/2 \simeq 6.4$$

These two special cases of closed universes illustrate the general situation : The condition that a solution of the initial value equations represent a closed universe is much more restrictive than the condition that it be asymptotically flat. The closed universes satisfy a kind of generalized eigenvalue condition, and therefore form a very small subclass of all the solutions of the initial value equations. They can be viewed as a limiting case of asymptotically flat spaces, containing gravitational waves of increasing strength.

NOTE ON THE SYMMETRIES OF PLANE-FRONTED GRAVITATIONAL WAVES

par le Dr. Wolfgang KUNDT
Université de Hambourg (Allemagne Fédérale)

RESUME

L'existence d'une base d'invariants scalaires est discutée pour les champs du vide à vecteur constant.

Plane-fronted gravitational waves are defined by the existence of a covariantly constant vector field, the wave vector field (1). Robinson (2) was able to prove that the following class of solutions of Einstein's vacuum field equations is the most general class of this kind :

$$ds^2 = 2\,du\,dv + dy^2 + dz^2 + 2\mathrm{H}(u, y, z)\,du^2 \tag{1}$$

with $\mathrm{H}_{yy} + \mathrm{H}_{zz} = 0$. With respect to this coordinate system the Riemann tensor reads :

$$\mathrm{R}_{hijk} = \mathrm{H}_{pq}\,\delta^{1p}_{hi}\,\delta^{1q}_{jk}\,,\ \text{where 1 refers to } u,$$

and it is easy to check that we deal with the exceptional case in which all the integer scalar invariants of the metrical tensor, the Riemann tensor and his covariant derivatives vanish. On the other hand the maximal group of motions of (1) is in general of dimension one (3), hence, according to the theorem of complementarity (4), there must exist three functionally independent scalars which are (unique) functions of the metric (so-called « intrinsic » scalars). We intend to present three such scalars.

The strategy is the following : we determine the maximal class K of coordinate transformations which leave the shape of (1) unchanged (but change the functional form of H). This can be done without difficulty by regarding the eigen directions of the Riemann tensor. It is

(1) This vector field is necessarily lightlike.
(2) I am thankful for private communication.
(3) The wave vector is a Killing vector, hence there exists a G_1. That G_1 in general is maximal will be a consequence of the results below.
(4) The restricted theorem says : the sum of the number of functionally independent intrinsic scalars and the dimension of the orbits of the maximal group of motions equals the dimension of the space.

then easy to find differential expressions in H which do not change their functional form under K and hence are scalars(and, by construction, uniquely determined by the metric). Here are the results :

$$\mathrm{K}: \begin{cases} \bar{u} = c^{-1}(u - u_0), & c, u_0, \alpha = \text{const.}, c \neq 0, \\ \bar{y} = y \cos\alpha + z \sin\alpha + g, & f, g, h = \text{functions of } u \\ \bar{z} = -y \sin\alpha + z \cos\alpha + h, & \\ \bar{v} = c\,[v + y(-g' \cos\alpha + h' \sin\alpha) - z(g' \sin\alpha + h' \cos\alpha) - f] & \end{cases}$$

with

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{H}}(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}) = c^2\,[\mathrm{H}(u, y, z) &+ y(g'' \cos\alpha - h'' \sin\alpha) \\ &+ z(g'' \sin\alpha + h'' \cos\alpha) \\ &+ f' - \frac{1}{2}(g'^2 + h'^2)]. \end{aligned}$$

Defining the « intensity » I with respect to (1) by

$$\mathrm{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}_{yy}^2 + \mathrm{H}_{yz}^2 \tag{4}$$

it follows that :

$$\bar{\mathrm{I}}(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}) = c^4\,\mathrm{I}(u, y, z)\,. \tag{5}$$

It is now a consequence that the following three functions, defined with respect to (1), are intrinsic scalars :

$$\mathrm{I}^{-2}(\mathrm{I}_y^2 + \mathrm{I}_z^2)\,, \qquad \mathrm{I}^{-5}\,\mathrm{I}_u^4\,, \qquad \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{I}_{yy} + \mathrm{I}_{zz})\,. \tag{6}$$

In general the scalars (6) are functionally independent. Regarding the possibilities of their functional dependence all special cases of plane-fronted waves with higher symmetries can be obtained. A more detailed discussion of this subject will shortly appear in the « Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz »[1].

(1) Note added in proof : a better presentation has been prepared for the book « The Theory of Gravitation » to be edited by L. Witten at Wiley, New York.

LES FLUIDES CHARGÉS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par M^me^ Y. FOURES-BRUHAT

Introduction

J'établirai tout d'abord, pour des fluides chargés de conductivité nulle munis d'une équation d'état liant la densité et la pression, des équations généralisant les équations d'HILMLOTZ de la mécanique classique donnant l'évolution des tourbillons, puis des relations entre les tourbillons et les vitesses dont les caractéristiques donnent les fronts d'onde hydrodynamiques. Je montrerai ensuite que le système des équations obtenu pour l'ensemble des inconnues est un système hyperbolique au sens de J. LERAY (1), pour lequel le problème de Cauchy a une solution et une seule dépendant continuement des données initiales. Les caractéristiques sont tangentes au cône lumineux (qui est aussi le cône d'ondes électromagnétiques) ou au cône d'ondes hydrodynamiques qui lui est intérieur. La solution du système en un point ne dépend donc que des données initiales intérieures au demi conoïde engendré par les rayons lumineux aboutissant en ce point, c'est-à-dire du passé relativiste de ce point.

Pour les fluides chargés de conductivité non nulle les caractéristiques — qui sont les mêmes que précédemment — apparaissent comme multiples et les théorèmes de J. LERAY sur les systèmes hyperboliques ne semblent pas s'appliquer. L'ensemble du champ ne serait alors pas régi par les lois de propagation liées au cône lumineux.

Dans une deuxième partie j'étudie les fluides chargés de conductivité infinie, on obtient de nouvelles formes de caractéristiques, auxquelles correspondent des vitesses de propagation qui se réduisent, quand la vitesse de la lumière tend vers l'infini, à la vitesse des ondes d'Alfven et aux deux vitesses de propagation hydrodynamiques de la mécanique newtonienne. Je donne l'expression de ces vitesses, qui diffèrent notablement des vitesses classiques quand le champ magnétique est intense, ainsi que les équations des chocs, qui sont différentes selon que le cosinus de la normale à l'onde de choc avec le champ magnétique est supérieur ou non au rapport de la vitesse de propagation de cette onde à la vitesse de la lumière (2).

(1) Cf. J. LERAY [3].

(2) Le deuxième cas seul est envisagé dans le travail de HOFFMANN et TELLER, *Phys. review.*, 4, 1950.

I. — Fluides parfaits de conductivité nulle

1) *Tourbillons, équations d'Helmholtz*

Considérons un fluide parfait muni d'une équation d'état $\rho = \rho(p)$ reliant la densité et la pression. Définissons, suivant LICHNEROWICZ (3), l'indice f du fluide par :

$$f = \exp. \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p} \tag{1.1}$$

et appelons pseudo-vitesse le vecteur C_α, défini à partir de la vitesse unitaire u_α du fluide par :

$$C_\alpha = f\, u_\alpha, \qquad C^\alpha C_\alpha = f^2 \tag{1.2}$$

et tourbillon le tenseur $\Pi_{\alpha\beta}$:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + k\, F_{\alpha\beta}, \qquad \Omega = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha \tag{1.3}$$

$F_{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique champ électromagnétique, k un scalaire :

$$k = \frac{\gamma f}{\rho + p} \tag{1.4}$$

où γ est la densité de charge électrique.

Nous écrirons les équations de MAXWELL en utilisant les opérateurs d et δ de de RHAM sur la forme du deuxième ordre F, champ électromagnétique :

$$dF = 0 \qquad \delta F = J \tag{1.5}$$

où J est la forme du premier ordre courant électrique, qui, dans un milieu de conductivité nulle est proportionnel au vecteur vitesse :

$$J^\alpha = \gamma u^\alpha \tag{1.6}$$

Les équations du mouvement, déduites des conditions de conservation, s'écrivent ici :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial_\alpha p}{\rho + p} + \frac{\gamma}{\rho + p} F_{\alpha\rho} u^\rho \right) \tag{1.7}$$

c'est-à-dire :

$$C^\alpha \Pi_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{1.8}$$

La conservation de l'électricité se traduit par ailleurs par :

$$\nabla_\alpha (\gamma u^\alpha) = 0 \tag{1.9}$$

et l'équation de continuité du fluide :

$$\nabla_\alpha [(\rho + p)\, u^\alpha] = u^\alpha \partial_\alpha p \tag{1.10}$$

On déduit de (1.9) et (1.10) :

$$u^\alpha \partial_\alpha k = C^{te}. \tag{1.11}$$

(3) Cf. LICHNEROWICZ [2], SYNGE [8].

k est donc constant le long d'une ligne de courant. Nous considérerons des fluides chargés de manière homogène, donc :

$$k = C^{te}. \tag{1.12}$$

La deuxième forme tourbillon Π est alors fermée comme les formes Ω et F :

$$d\Pi = d\Omega + k\, d\mathrm{F} = 0\,. \tag{1.13}$$

On déduit de (1.8) et (1.13) les équations d'Helmhotz donnant l'évolution des tourbillons :

$$C^\alpha \nabla_\alpha \Pi_{\beta\gamma} = \Pi_{\alpha\beta} \nabla_\gamma C^\alpha + \Pi_{\gamma\alpha} \nabla_\beta C^\alpha. \tag{1.14}$$

On déduit de ces équations que tout mouvement irrotationnel à un instant donné le reste au cours du temps.

2) *Relations entre les tourbillons et les vitesses.*

Les relations entre $\Pi_{\alpha\beta}$ et C_α sont données par :

$$d\omega = \Omega = \Pi - k\mathrm{F} \tag{2.1}$$

où ω est la forme du premier ordre définie par la pseudo vitesse :

$$\omega = C_\alpha\, dx^\alpha$$

et par l'équation de continuité quo'n peut écrire :

$$\delta\omega = C^\alpha \partial_\alpha \log (f^{-2} r), \quad r = \rho + p \tag{2.2}$$

d'où, en posant $\Box = d\delta + \delta d$ et :

$$\log (f^{-2} r) = \Phi(f^2) = \Phi\,(C^\alpha C_\alpha) \tag{2.3}$$

Les relations suivantes :

$$\{g^{\alpha\beta} + 2C^\alpha C^\beta \Phi'\}\ \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\gamma + 2C^\alpha \Phi' (\nabla_\beta C_\gamma \nabla_\alpha C^\beta + \nabla_\gamma C^\beta \nabla_\beta C_\alpha)$$

$$+ 4\Phi'' C^\alpha C^\beta \nabla_\gamma C_\beta C^\lambda\ \nabla_\alpha C_\lambda + R^\alpha_\gamma C_\alpha - \nabla_\alpha \Pi^\alpha_\gamma + k \frac{r}{f^2} C_\gamma\ = 0$$

avec :

$$\Phi' = \frac{d\,[\Phi(f^2)]}{d\,f^2} = \frac{\rho'(p) - 1}{2f^2}$$

Les coefficients des termes du second ordre en C_γ sont donc :

$$g^{\alpha\beta} + \frac{C^\alpha C^\beta\,[\rho'(p) - 1]}{f^2} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta\,[\rho'(p) - 1]$$

On reconnaît la métrique hyperbolique donnant la propagation des ondes hydrodynamiques, orientées dans le temps, pour $\rho'(p) \geqslant 1$.

3) *Problème de Caudry.*

L'ensemble des équations de la mécanique des fluides parfaits en relativité générale se composera, d'une part des équations d'Einstein :

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, \tau_{\alpha\beta}\,,$$

où :

$$T_{\alpha\beta} = r\, u_\alpha\, u_\beta - p\, g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}, \qquad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}\, F^{\lambda\mu}\, F_{\lambda\mu} - F^{\rho}_{\alpha}\, F_{\beta\rho}$$

et des équations de MAXWELL que nous écrirons :

$$\square \quad = J$$

où φ est le potentiel vecteur électromagnétique satisfaisant à :

$$F = d\varphi$$

d'autre part des équations d'HELMHOLTZ (1.14) et des relations (2.4).

On montre [4], en affectant les inconnues $g_{\alpha\beta}$, φ, C_α, $\Pi_{\alpha\beta}$ d'indices convenables, après avoir dérivé les équations (2.4) le long des lignes de courant, choisi les coordonnées isothermes et normalisé φ, que le système obtenu est un système hyperbolique au sens de J. LERAY. Il résulte alors des théorèmes de LERAY que le problème de CAUCHY, pour ce système, a une solution et une seule, dont le domaine de dépendance est déterminé par le plus grand des cônes caractéristiques, ici le cône lumineux.

4) *Mouvement permanent.*

Le mouvement du fluide est permanent si le champ des vitesses C_α admet un groupe d'isométries dont les trajectoires sont orientées dans le temps. Prenons pour lignes de temps ces trajectoires. Les termes du second ordre des équations (2.4) s'écrivent :

$$\{g^{ij} + u^i\, u^j (\rho' - 1)\}\, \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}$$

On montre que les équations correspondantes sont elliptiques si la vitesse du fluide, pour les coordonnées choisies, est inférieure à la vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques, hyperbolique dans le cas contraire.

5) *Fluide incompressible*

Si $\rho'(p) = 1$ la vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques est égale à la vitesse de la lumière, le fluide est dit incompressible. L'équation de continuité (2.2) se réduit alors à :

$$\delta\omega = -\nabla_\alpha C^\alpha = 0.$$

L'équation reliant les vitesses aux tourbillons prend la forme simple :

$$\square\omega = \delta\Omega = \delta\Pi - k\gamma\omega.$$

6) *Cas irrotationnel.*

Le mouvement du fluide sera dit irrotationnel si le tourbillon Π est nul. On a alors :

$$d\omega = \Omega - k\, F = \Omega - k\, d\varphi,$$

(4) Cf. Y. FOURÈ-BRUHAT [4].

la forme $\omega - k\varphi$ est donc, localement, la différentielle d'une fonction θ :

$$\omega = k\varphi + d\theta.$$

On déduit alors de l'équation de continuité (2.2), pour un potentiel vecteur φ normalisé par la condition usuelle :

$$\delta\varphi = -\nabla_\alpha \varphi^\alpha = \sigma$$

$$\delta\omega = \delta d\theta = \Box\theta = C^\alpha \partial_\alpha \Phi$$

c'est-à-dire :

$$\{g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta (\rho' - 1)\} \nabla_\beta \partial_\alpha \theta + \Phi' k\, C^\alpha C^\beta \nabla_\beta \varphi_\alpha = 0\,.$$

Pour les fluides non chargés θ est le potentiel des vitesses.

II. — Fluides parfaits de conductivité infinie

1) *Représentation du tenseur de Maxwell en fonction des champs.*

Soient $\vec{e}$ et $\vec{h}$ les vecteurs à quatre dimensions champ électrique et champ magnétique (5) définis en fonction du tenseur champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ par :

$$e_\beta = F_{\alpha\beta}\, u^\alpha\,, \qquad h_\beta = F^*_{\alpha\beta}\, u^\alpha$$

où $F^*_{\alpha\beta}$ est l'adjoint de $F_{\alpha\beta}$ pour la métrique d'espace temps et u^α la vitesse unitaire du fluide.

Le tenseur de Maxwell s'exprime en fonction des vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{h}$ par la formule :

$$\tau_{\alpha\beta} = \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right)(|e|^2 + |h|^2) - h_\alpha h_\beta - e_\alpha e_\beta + P_{\alpha\beta}$$

où l'on a posé :

$$|e|^2 = -e^\lambda e_\lambda\,, \qquad |h|^2 = -h^\lambda h_\lambda$$

$$P_{\alpha\beta} = v_\alpha u_\beta + v_\beta u_\alpha\,, \qquad v_\lambda = \eta_{\lambda\mu\nu\rho}\, h^\mu e^\nu u^\rho$$

où $\eta_{\lambda\mu\nu\rho}$ est le tenseur antisymétrique définissant la forme élément de volume; v_λ est le vecteur de Poynting.

2) *Equations de Maxwell.*

Si γ est la densité de charge et σ la conductivité du fluide, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\nabla_\alpha F^{*\alpha\beta} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \gamma u^\beta + \sigma e^\beta. \qquad (2.2)$$

Quand la conductivité σ est infinie les équations (2.2) sont à remplacer par $e^\beta = 0$, les équations (2.1) s'écrivent alors :

$$\nabla_\alpha (h^\beta u^\alpha - h^\alpha u^\beta) = 0.$$

(5) Cf. Pham Mau Quan [5].

3) *Equations des chocs.*

Désignant par A_+ et A_- les valeurs d'une grandeur A de part et d'autre d'une hypersurface de normale $\vec{n}$ les équations des chocs d'un fluide parfait de conductivité infinie sont [6] :

$$n_\alpha \, [h^\beta \, u^\alpha - h^\alpha \, u^\beta] = 0. \tag{3.1}$$

$$n_\alpha \, [T_{\alpha\beta}] = 0 \tag{3.2}$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion énergie de ce fluide; c'est-à-dire si μ est sa perméabilité magnétique :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) \, u_\alpha \, u_\beta - p \, g_{\alpha\beta} + \left(u_\alpha \, u_\beta - \frac{1}{2} \, g_{\alpha\beta} \right) \mu \, |h|^2 - \mu h_\alpha \, h_\beta.$$

Un choix d'axes particuliers permet de discuter ces équations [7].

4) *Caractéristiques et vitesses de propagation des ondes.*

Les chocs infiniment faibles, ou l'équation de continuité qui s'écrit ici :

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - u^\alpha \, \partial_\alpha \, p = 0$$

et les équations du mouvement qui sont :

$$(\rho + p) \, u^\alpha \, \nabla_\alpha \, u^\beta + (u^\alpha \, u^\beta - g^{\alpha\beta}) \, \partial_\alpha \, p$$
$$+ \nabla_\alpha \left[\left(u^\alpha \, u^\beta - \frac{1}{2} \, g^{\alpha\beta} \right) \mu \, |h|^2 - \mu h_\alpha \, h_\beta \right] = 0$$

déterminent les fronts d'onde qui sont les hypersurfaces $f = C^{te}$ solutions des équations :

$$(\rho'(p) - 1) \, (\rho + p) \, (u^\alpha \, \partial_\alpha \, f)^4 + (\rho + p + \mu \, |h|^2 \rho'(p)) \, (u^\alpha \partial_\alpha \, f)^2 \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \, f \, \partial_\beta \, f$$
$$- h \, (h^\alpha \, \partial_\alpha \, f)^2 \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \, f \, \partial_\beta \, f = 0$$

et, correspondant aux ondes d'Alfven :

$$(\rho + p + \mu \, |h|^2) \, (u^\alpha \, \partial_\alpha \, f)^2 - \mu \, (h^\alpha \, \partial_\alpha \, f)^2 = 0.$$

Les vitesses de propagation de ces ondes par rapport au repère propre, inférieures à la vitesse de la lumière prise pour unité, sont:

$$(v)^2 = \frac{\rho + p + \mu \, |h|^2 \, \rho' + \mu \, |h_n|^2 \pm \{(\rho + p + \mu \, |h|^2 \, \rho')^2 - 4\mu \, |h_n|^2 \, \rho'(\rho + p + \mu \, |h|^2)\}^{\frac{1}{2}}}{2\rho' \, (\rho + p + \mu \, |h|^2)}$$

et :

$$(v)^2 = \frac{\mu \, |h_n|^2}{\rho + p + \mu \, |h|^2}$$

où h_n est la composante de $\vec{h}$ suivant la direction de propagation.

(6) Cf. pour l'équation 3.2 Taub [6].
(7) Cf. Y. Fourès-Bruhat [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Darmois, « Les équations de la gravitation einsténienne », *Meur. Sc. Math.*, 1927.

[2] A. Lichnerowicz, « Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », Masson 1955.

[3] J. Leray, « Hyperbolic differential equations », Minerographed Institute for Advanced Study Princeton, 1951-52.

[4] Y. Fourès-Bruhat, *Bull. Soc. Math.*, p. 155-175, t. 86 (1958).

[5] Pham Man Quan, *Journ. of Rat. Mech.*,, 5, n° 3 (1956).

[6] A. H. Taub, *Illinois Journ. of Math*, vol. 1, n° 3 (1957).

[7] Y. Fourès-Bruhat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, p. 2558 (1959).

LE PRINCIPE DE FERMAT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par PHAM MAU QUAN

Faculté des Sciences, Besançon

RESUME

Dans un milieu de pouvoir diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ, les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne V_4 définie par la variété espace-temps munie de la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \left[g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta \right] dx^\alpha dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique de l'espace-temps V_4 et u_α le vecteur vitesse unitaire.

Si l'espace-temps V_4 admet un groupe connexe d'isométries globales à trajectoires orientées dans le temps et ne laissant invariant aucun point de V_4 et si le mouvement du milieu est permanent, la variété riemannienne associée $\overline{V}_4$ admet aussi un groupe d'isométries induit par celui de V_4. En projetant les géodésiques isotropes de $\overline{V}_4$ sur la variété quotient $\overline{V}_3$ de $\overline{V}_4$ par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries, on obtient un théorème qui généralise le principe de Fermat en relativité générale.

Dans le cas d'un espace-temps de Minkowski, ce théorème entraîne comme corrollaire la formule relativiste de la composition des vitesses.

Le principe de Fermat dit que dans un milieu transparent isotrope d'indice n, les rayons lumineux sont les extrémales de l'intégrale $\int n d\sigma$ où $d\sigma$ est l'élément linéaire de l'espace. Sous la forme énoncée, il constitue un cas particulier du principe de Maupertuis ou de moindre action, et se prête à une grande généralisation. Déjà Balazs [1] a signalé son extension au cas d'un milieu en mouvement en utilisant un résultat dû à Gordon [2]. En réalité, le principe de Fermat doit son origine d'une part à la théorie électromagnétique de Maxwell et d'autre part à la solution d'un problème du calcul des variations lié à la théorie des invariants intégraux.

Avant d'entrer dans le sujet, je voudrais citer Weyl, Møller, Gordon qui les premiers ont posé les équations relativistes de l'induction électromagnétique, Eisenhart, Lichnerowicz, Thiry qui ont résolu le problème du calcul des variations correspondant. Ailleurs les importants travaux de LICHNEROWICZ [3] sur l'intégration des équations de la Relativité générale m'ont servi directement dans mes recherches. Je tiens à l'en remercier.

1. Si on recherche comment se présente l'énoncé du principe de FERMAT dans la théorie de la Relativité, on obtient une démonstration de ce principe et la signification qu'il convient de lui donner. Pour cela je considère un domaine D de l'espace-temps meublé par de la matière chargée siège des phénomènes d'inductions électromagnétiques.

Je suppose données sur D une forme métrique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{1.1}$$

définissant la métrique d'univers et deux formes extérieures d'ordre 2 définissant les inductions électromagnétiques

$$H = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \wedge dx^\beta \qquad\qquad G_\alpha = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

telles que si u_α désigne le vecteur vitesse unitaire

$$G_{\alpha\beta}\, u^\alpha = \varepsilon\, H_{\alpha\beta}\, u^\alpha \qquad \mu\, \overset{*}{G}_{\alpha\beta}\, u^\alpha = \overset{*}{H}_{\alpha\beta}\, u^\alpha \tag{1.2}$$

où $\overset{*}{H}$ et $\overset{*}{G}$ sont les formes adjointes de H et G relativement à la métrique ds^2 et les scalaires ε, μ les coefficients diélectrique et magnétique. Les relations (1.2) généralisent les équations de liaisons classiques : elles conduisent à

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}\left(g^{\alpha\rho} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\alpha u^\rho\right)\left(g^{\beta\sigma} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\beta u^\sigma\right) H_{\rho\sigma}\,.$$

Les équations du champ sont constituées par l'ensemble des équations d'EINSTEIN et de MAXWELL qui s'écrivent ici

$$S_{\alpha\beta} = \chi\left[\rho\, u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\rho}\left(g^\rho_\beta - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\rho u_\beta\right)\right] \tag{1.3}$$

$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0 \qquad\qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \delta u^\beta + \sigma u_\alpha H^{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

où $\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha} H^\rho{}_\beta$ et δ, σ désignent la densité propre de charge et la conductivité électrique du milieu.

On peut se poser le problème de l'intégration pour les équations du champ [4]. Les ε, μ, σ étant des fonctions données de x^α, les variables du champ sont les ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, δ, u^α). On peut au moyen d'une analyse du problème de CAUCHY montrer que ces équations admettent une solution déterminée unique si les données de CAUCHY ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$) sont portées par une hypersurface non caractéristique et si elles vérifient un ensemble de conditions provenant des équations du champ. Les variétés caractéristiques nous intéressent particulièrement dans notre étude. Elles sont de deux sortes : les variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN et les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Les variétés caractéristiques V_3^E des équations d'EINSTEIN sont définies par

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

Elles sont tangentes aux cônes caractéristiques $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$ qui coïncident avec les cônes élémentaires C_x de l'espace-temps. Les variétés caractéristiques V_3^M des équations de MAXWELL sont définies par

$$\overline{\Delta}_1 f \equiv \overline{g}^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 \qquad \overline{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\alpha\, u^\beta\,.$$

Elles sont tangentes aux cônes caractéristiques $\overline{C_x}$ d'équation

$$\overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0 \qquad \overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha\, u_\beta$$

qui sont en général distinctes des cônes élémentaires C_x (ils leur sont intérieurs si $\varepsilon\mu > 1$ et coïncident avec eux si $\varepsilon\mu = 1$).

2. Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^E et V_3^M représentent les surfaces d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques; les rayons associés définis par les bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN et de MAXWELL, sont les caractéristiques des équations (1.5) et (1.6). Leurs études étant symétriques, considérons par exemple les ondes électromagnétiques.

Si nous introduisons la variété riemannienne $\overline{V}_4$ définie par la variété différentiable portant l'espace-temps et munie de la métrique dite associée

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,, \tag{2.1}$$

les cônes caractéristiques des équations de MAXWELL sont cônes élémentaires $\overline{C}_x$ de $\overline{V}_4$ et les variétés caractéristiques V_3^M sont les variétés tangentes en chaque point au cône élémentaire de $\overline{V}_4$. Une variété caractéristique V_3^M c'est-à-dire une solution de (1.6) peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques qui sont des bandes de $\overline{V}_4$ constituées par l'ensemble d'une courbe $\overline{L}_o$ et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes qui par définition sont les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Considérons maintenant le vecteur $l_\alpha = \partial_\alpha f$ qui est isotrope dans $\overline{V}_4$ d'après (1.6). Sa direction est la direction commune au cône élémentaire $\overline{C}_x$ et au 3-plan tangent en x à la variété caractéristique V_3^M. Par suite, l_α est tangent à la bicaractéristique $\overline{L}_c$ passant au point x considéré et les bicaractéristiques $\overline{L}_o$ sont les trajectoires du champ de vecteurs $\overline{l}_\alpha$. Or $\overline{l}_\alpha$ est un champ de gradient, on a

$$\overline{l}^\alpha \cdot \overline{\nabla}_\alpha\, \overline{l}_\beta = \overline{l}^\alpha\, (\overline{\nabla}_\alpha\, \overline{l}_\beta - \overline{\nabla}_\beta\, \overline{l}_\alpha) = 0.$$

Cette propriété caractérise les géodésiques. Il en résulte que les bicaractéristiques des équations de MAXWELL sont les géodésiques isotropes de $\overline{V}_4$.

Un résultat symétrique est valable pour les bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — Les rayons gravitationnels sont géodésiques isotropes de la variété espace-temps munie de la métrique d'univers ds^2 et les rayons électromagnétiques sont géodésiques isotropes de la variété riemannienne $\overline{V}_4$ munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$ (*).

3. L'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL-EINSTEIN a permis d'établir la loi de la propagation des ondes électromagnétiques et gravitationnelles dans l'espace-temps. L'étude des rayons gravitationnels et électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions fournira l'énoncé du principe de FERMAT dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaires.

Un espace-temps est dit stationnaire dans un domaine D si la variété riemannienne V_4 définie par D muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point et à trajectoires z orientées dans le temps. Les lignes z appelées lignes de temps étant supposées homéomorphes à la droite réelle, on appelle l'espace la variété quotient V_3 définie par la relation d'équivalence du groupe. Si l'on rapporte V_4 à des systèmes de coordonnées locales (x^o, x^i) adaptés au groupe d'isométries, telles que les x^i soient un système de coordonnées locales arbitraires de V_3, les lignes x^o sont les lignes de temps, l'espace V_3 sera muni de la métrique définie négative

$$\widehat{ds^2} = \widehat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad \text{où} \qquad \widehat{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{oi}\, g_{oj}}{g_{oo}} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

qui est invariante par tout changement de système de sections d'espace défini par

$$x^{o'} = x^o + \psi(x^i) \qquad x^{i'} = x^i\,.$$

Si l'espace-temps est stationnaire dans D et si le groupe d'isométries laisse invariants les $H_{\alpha\beta}$, ε, μ, σ, on peut démontrer que le mouvement du milieu est permanent et que les quantités $g_{\overline{\alpha\beta}}$ restent constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\overline{V}_4$ admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point, induit par celui de l'espace-temps et pour lequel les (x^o, x^i) constituent un système de coordonnées adapté. On désignera par $\overline{V}_3$ la variété quotient correspondante.

4. Notre problème consiste alors en la recherche des équations des rayons gravitationnels ou électromagnétiques dans l'espace. Il nous suffit de trouver les projections des géodésiques isotropes de V_4 ou $\overline{V}_4$ sur la variété quotient V_3 ou $\overline{V}_3$. Un tel problème a été résolu dans le cas plus général d'une variété différentiable munie d'une structure de

(*) La première propriété concernant les rayons gravitationnels est classiquement connue, mais la seconde propriété concernant les rayons électromagnétiques en présence d'inductions est nouvelle.

variété finslérienne c'est-à-dire sur laquelle est donnée une fonction $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ positivement homogène de degré 1 en $\dot{x}^\beta$. On sait que le système différentiel aux extrémales correspondant à la fonction $\mathcal{L}$ envisagée admet l'invariant intégral relatif $\omega = \partial_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}\, dx^\alpha \left(\partial_{\dot{\alpha}} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} \right)$. Si la fonction $\mathcal{L}$ ne dépend pas de x^o, $\partial_o \mathcal{L} = 0$, il existe l'intégrale première

$$\partial_{\dot{o}} \mathcal{L} = h$$

de sorte que $\partial_{\dot{o}} \mathcal{L}\, dx^o = h dx^o$ constitue un invariant intégral pour la famille (E_h) des extrémales correspondant à la valeur h considérée. $\omega = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\, dx^k$ est donc invariant intégral relatif pour cette famille (E_h). Or il est aisé de voir que la quantité $\dot{x}^h \partial_{\dot{h}} \mathcal{L}$ s'exprime au moyen d'une fonction $L(x^h, \dot{x}^l, h)$ également positivement homogène de degré 1 en $\dot{x}^l$, telle que $\partial_{\dot{k}} L = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$. Il en résulte que le système différentiel définissant les projections des extrémales (E_h) admet l'invariant intégral relatif $\omega = \partial_{\dot{k}} L dx^k$, c'est-à-dire que ces projections sont extrémales correspondant à la fonction L ou la fonction $\wedge = \dfrac{l}{h} L$.

Dans notre problème $\mathcal{L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$, les extrémales correspondantes sont des géodésiques de $\overline{V}_4$. L'application de la méthode précédente aux géodésiques isotropes considérées comme limites des géodésiques orientées $ds^2 > 0$ conduit à la fonction :

$$\wedge_\infty = \lim_{h \to \infty} \frac{l}{h} L(x^k, \dot{x}^l, h) = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{l}{\bar{g}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{oi}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{oo}}$$

où $\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \dfrac{\bar{g}_{oi}\, \bar{g}_{oj}}{\bar{g}_{oo}}$ et ε est le signe de $\bar{g}_{oo}$ et ε' le signe de $\bar{g}_{o\alpha}\, \dot{x}^\alpha$. Il vient le résultat suivant :

THÉORÈME. — Si l'espace-temps est stationnaire et si le mouvement du milieu est permanent, les rayons électromagnétiques dans l'espace sont les extrêmales de l'intégrale :

$$\int \wedge_\infty du = \int \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1}{\bar{g}_{oo}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{oi}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{oo}} \right) du$$

pour des variations à extrémités fixes. Le temps mis par un rayon pour aller d'un point z_0 à un point z_1 est donné par :

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^o = \int_{z_0}^{z_1} \left(\sqrt{\frac{1}{\bar{g}_{oo}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{oi}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{oo}} \right) du.$$

Ce temps est extrêmum.

Dans le cas où $\bar{g}_{oo} = 0$, on remplacera la fonction $\wedge_\infty$ par :

$$\wedge'_\infty = - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{oi}\, \dot{x}^i}$$

Pour les rayons gravitationnels, g_{oo} étant essentiellement positif, il existe un seul cas avec :

$$\wedge_\infty = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{g_{oo}} \widehat{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{g_{oi} \dot{x}^i}{g_{oo}}$$

En particulier si l'univers est statique au sens de Levi Civita, c'est-à-dire si les lignes de temps coïncident avec les trajectoires du champ de vecteurs u^α, l'espace-temps est orthogonal et a pour métrique :

$$ds^2 = \mathrm{U}\,(dx^o)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

Les u^i étant nuls, la métrique associée est :

$$d\bar{s}^2 = \frac{\mathrm{U}}{n^2}\,(dx^o)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

où $n^2 = \varepsilon\mu$. On peut mettre le théorème sous la forme :

$$\int dx^o = \int \frac{n d\sigma}{\sqrt{\mathrm{U}}}$$

où $d\sigma^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de Minkowski, $\mathrm{U} = 1$, nous retrouvons le principe de Fermat en optique classique. Le théorème précédent constitue donc l'énoncé généralisé de ce principe de relativité. Il donne la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement et en présence du champ de gravitation.

5. Le résultat précédent est susceptible de plusieurs applications.

a) L'existence de l'invariant intégral relatif $\omega = \partial_{\dot{k}} \wedge_\infty dx^k$ permet la généralisation de certaines propriétés classiques de l'optique géométrique, en particulier le théorème de Malus d'après lequel les rayons d'une congruence normaux à une surface sont normaux à une infinité de surfaces. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $d\omega = 0$.

b) Dans le cas d'un espace-temps de Minkowski, le théorème de Fermat permet d'obtenir la formule relativiste de la composition des vitesses :

$$v = \frac{1}{1 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}} \left[\left(1 + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right) \vec{\beta} + \sqrt{1 - \beta^2} \left(\vec{\alpha} - \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} \right) \right]$$

où $\vec{\alpha}$ est la vitesse relative et $\vec{\beta}$ la vitesse d'entraînement.

c) Du fait de la présence du potentiel principal g_{oo} de gravitation, le théorème de Fermat permet d'envisager une étude de l'interaction du champ gravitationnel sur la lumière. Dans le cas d'un ds^2 de Schwarzschild intérieur ou extérieur, cette étude se fait immédiatement.

d) Enfin le théorème de Fermat se généralise sans difficulté à la théorie de Jordan Thiry où l'élément primitif est une variété différentielle V_5 à cinq dimensions munie d'une métrique riemanniente du type hyperbolique normal, admettant un groupe d'isométries globales ne laissant invariant aucun point et où les rayons unitaires sont les géodésiques isotropes de cette variété.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nandor L. BALAZS, « The propagation of light rays in moving media », *Jour. Optical Soc. Amer.*, **45**, 1 (1955).

[2] W. GORDON, « Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie », *Ann. Physik*, **72**, 421-456 (1923).

[3] A. LICHNEROWICZ, « Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ». Masson (1955).

[4] PHAM MAU QUAN, « Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat », *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **1**, 1 (1957).

SMALL MOTIONS OF A SPHERICALLY SYMMETRIC DISTRIBUTION OF MATTER

by A. H. TAUB
Digital Computer Laboratory
University of Illinois

This work was supported in part by the National Science Fundation

RESUME

Cet article étudie les mouvements isentropiques infiniment petits d'un fluide parfait ayant une distribution à symétrie sphérique. Les équations du champ einsteiniennes conduiront à des approximations du potentiel de gravitation ainsi que des variables définissant le fluide. Ces quantités différeront de celles associées à la solution exacte des équations du champ einsteiniennes par des termes de premier ordre contenant un paramètre β assez petit. Les approximations ainsi que les solutions exactes seront considérées comme ayant une symétrie sphérique et comme soumises à des mouvements isentropiques correspondant à la même entropie spécifique. On montrera que pour la limite classique les mouvements sont ceux prévus par l'équation de Rosseland pour le champ de vitesse d'un gaz à distribution sphérique soumis à des oscillations adiabatiques. La stabilité de la distribution initiale peut être déterminée de la généralisation de cette équation en relativité généralisée.

1. — Introduction

It is the purpose of this paper to discuss small isentropic motions of a spherically symmetric distribution of a perfect fluid in the general theory of relativity. That is, we shall determine from the Einstein field equations approximate expressions for the gravitational potentials and the fluid variables. The approximate quantities will differ from those associated with a particular exact solution of the Einstein field equations by terms of first order in a small parameter called β. Both the exact and the approximate quantities will be taken to be spherically symmetric and to correspond to isentropic motions with the same specific entropy.

For such motion it may be shown [cf. 1] that four velocity vector satisfies

$$u_\mu = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{c^2}\right)} \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu} \tag{1.1}$$

where θ is an arbitrary scalar function and i is the enthalpy and is given by

$$i = \varepsilon\,(p, \rho) + \frac{p}{\rho} \tag{1.2}$$

where ρ is the rest density, p is the pressure and ε is the rest internal energy which is assumed to be prescribed as a function of p and ρ. For isentropic motions

$$di = \frac{dp}{\rho}\,. \tag{1.3}$$

It is a consequence of the field equations that for isentropic motions mass is conserved. That is, the equation

$$(\rho\, u^\mu)_{;\mu} = 0 \tag{1.4}$$

holds. In view of equation (1.1) we have

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\sqrt{-g}\,\rho\, g^{\mu\nu}}{1+\frac{i}{c^2}} \frac{\partial\theta}{\partial x^\nu}\right) = 0 \tag{1.5}$$

Equations (1.5) and (1.1) and the normalization condition

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = 1 = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{c^2}\right)^2} \frac{\partial\theta}{\partial x^\mu} \frac{\partial\theta}{\partial x^\nu}\, g^{\mu\nu} \tag{1.6}$$

imply the conservation equations

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{1.7}$$

where

$$T^{\mu\nu} = \rho\left(1+\frac{i}{c^2}\right) u^\mu\, u^\nu - \frac{p}{c^2}\, g^{\mu\nu}\,. \tag{1.8}$$

Thus the solution of the Einstein field equations for the gravitational potentials and the fluid variables in the case of irrotational and isentropic motion involves finding functions θ, ρ, (and hence p and i) and $g_{\mu\nu}$ satisfying equations (1.5), (1.6) and the field equations.

The system of equations seems to be a « coupled » system in the sense that each equation involves all the unknown quantities. However as will be shown below we may use the freedom of choice of coordinate system to uncouple the equations. Thus in the spherically symmetric case we may make a transformation of coordinates so that

$$x^{4*} = t^* = \theta\,(r, t) \tag{1.9}$$
$$x^{1*} = r^* = r^*\,(r, t)$$

where the function r^* is chosen so that $g^*_{14} = 0$.

2. — Small Motions

We shall be interested in spherically symmetric distributions of matter which are such that ρ vanishes outside a hypersurface in space-time. A very convenient coordinate system to use for such distributions is the Schwarzschild one in which the line element takes the form

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - \frac{1}{c^2}\, e^{\lambda}\, dr^2 - \frac{r^2}{c^2}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\,\chi^2)\,. \tag{2.1}$$

Outside and on the boundary the distribution of matter we have

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = \left(1 - \frac{2\,\mathrm{GM}}{rc^2}\right) \tag{2.2}$$

where M is a constant and is interpreted physically as the gravitational mass of the distribution of matter.

If in this coordinate system

$$\theta = \theta_0\, t$$

with θ_0 a constant, then

$$u_1 = u^1 = 0$$

and the matter inside the hypersurface is at rest. The functions ν and λ may be taken to be independent of t and the solution of the Einstein field equations reduces to the solution of a system of ordinary differential equations in the independent variable r. This system will be given explicitly below. Equations (1.21) will be satisfied by the requirement that all functions involved other than θ are independent of t and equation (1.22) becomes

$$e^{-2\nu}\,\theta_0^2 = \left(1 + \frac{i}{c^2}\right)^2 .$$

If on the boundary of the distribution of matter we have $i = 0$ and ν given by equation (2.2) we may satisfy equation (1.21) by taking

$$\theta_0 = e^{\nu\,(r_0)} = \left(1 - \frac{2\,\mathrm{GM}}{r_0\, c^2}\right)$$

If in the Schwarzchild coordinate system the function θ which must satisfy equations (1.21) and (1.22) is of the form

$$\theta = \theta_0\, t + \beta\theta_1(r, t)\,, \tag{2.3}$$

$$u_4 = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{i}{c^2}\right)}\,(\theta_0 + \beta\theta_{1t})$$

$$u_1 = \frac{\beta}{\left(1 + \dfrac{i}{c^2}\right)}\,\theta_{1r}\,,$$

where the subscripts denote partial differentiation with respect to the variables involved. We assume that the parameter β is such that its square may be neglected compared to itself and define those solutions of the field equations obtained when equation (2.3) holds as solutions corresponding to small motions.

We write :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0(r) + \beta\lambda_1(r, t) \\ \nu &= \nu_0(r) + \beta\nu_1(r, t) \\ \rho &= \rho_0(r) + \beta\rho_1(r, t) \\ p &= p_0(r) + \beta p_1(r, t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) = \left(1 + \frac{i_0}{c^2}\right) + \frac{\beta i_1}{c^2}.$$

The quantities entering these equations which have the subscript zero are those obtained from the solution of the static problem.

As was stated earlier we shall assume that the fluid is a state of constant specific entropy when it indergoes the small motions and moreover it is in the state of the same entropy as when the fluid is at rest. This assumption enables us to relate p_1, ρ_1 and i_1. These quantities may be defined as :

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\beta}\right)_{\beta=0}, \quad \rho_1 = \left(\frac{d\rho}{d\beta}\right)_{\beta=0} \text{ and } i_1 = \left(\frac{di}{d\beta}\right)_{\beta=0},$$

respectively. Now since the entropy is assumed to be independent of β we have :

$$T\frac{dS}{d\beta} = \frac{di}{d\beta} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\beta} = 0.$$

Hence :

$$i_1 = \frac{1}{\rho_0} p_1. \tag{2.5}$$

Further, in view of the isentropy assumption we may consider ρ as a function of $1 + i/c^2$. Then :

$$\rho_1 = \left(\frac{d\rho}{d\left(1 + \frac{i}{c^2}\right)}\right)_0 \frac{i_1}{c^2}.$$

Now we have shown previously [2] that the ratio of the velocity of sound to the special theory of relativity velocity of light, c, is given by

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{1 + \frac{i}{c^2}} \frac{d}{d\rho}\left(1 + \frac{i}{c^2}\right). \tag{2.6}$$

Hence :

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{i_0}{c^2}\right)} \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{i_1}{c^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{i_0}{c^2}\right)\alpha_0^2} \frac{p_1}{c^2} \tag{2.7}$$

The Lagrangian coordinates r^*, t^* associated with a small motion are given by the equations :

$$\begin{aligned} t^* &= \theta_0 t + \beta\theta_1(r, t) \\ r^* &= r + \beta P_1(r, t) . \end{aligned} \tag{2.8}$$

In the starred coordinate system the line element may be written as

$$ds^2 = e^{2\varphi} dt^{*2} - \frac{e^{2\psi}}{c^2} dr^{*2} - \frac{e^{2\mu}}{c^2} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2) , \tag{2.9}$$

where φ, ψ and μ are functions of r^* and t^*, provided the function r^* is chosen as follows :

$$g^{14*} = g^{\sigma\tau} \frac{\partial t^*}{\partial x^\sigma} \frac{\partial r^*}{\partial x^\tau} = 0 .$$

The functions φ, ψ and μ may be written as

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \beta\varphi_1 \\ \psi &= \psi_0 + \beta\psi_1 \\ \mu &= \mu_0 + \beta\mu_1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

and the quantities φ_1, ψ_1 and μ_1 may be determined from λ_1, ν_1 and θ_1 and P_1.

3. — The Einstein Field Equations

In this and subsequent sections of this paper we shall work in a coordinate system simply related to the Lagrangian coordinate system defined in general by equations (1.9) and in particular, for small motions by equations (2.8). Note that in the definition as given of small motions a Schwarzschild coordinate system is involved. However, we shall drop the asterisks and simply denote the coordinate variables as r and t. We write the line element given by equation (2.9) as

$$ds^2 = e^{2\varphi} dt^2 - \frac{1}{c^2} e^{2\psi} dr^2 - \frac{1}{c^2} e^{2\mu} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2) \tag{3.1}$$

In this coordinate system we take as the scalar function entering into equations (1.1) the simple function

$$\theta = \alpha t$$

where α is a constant. Note that in the Lagrangian coordinate system $\theta = t$. Hence our coordinate system differs from a Lagrangian one by a scale transformation in the unit of time. It then follows from equations (1.1) and (1.6) that :

$$\alpha e^{-\varphi} = \left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \tag{3.2}$$

$$u_\mu = e^\varphi \delta^4_\mu \tag{3.3}$$

It may be verified that :

$$-\left(R_4^4-\frac{R}{2}\right)=e^{-2\varphi}(\mu_t^2+2\mu_t\,\psi_t)-c^2\,e^{2\psi}(2\mu_{rr}+3\mu_r^2-2\mu_r\,\psi_r)+c^2\,e^{-2\mu}$$

$$-\left(R_1^1-\frac{R}{2}\right)=e^{-2\varphi}(2\mu_{tt}+3\mu_t^2-2\mu_t\,\varphi_t)-c^2\,e^{-2\psi}\,\mu_r(\mu_r+2\varphi_r)+c^2\,e^{-2\mu}$$

$$-\left(R_2^2-\frac{R}{2}\right)=e^{-2\varphi}\,[\psi_{tt}+\mu_{tt}+\mu_t^2+\psi_t^2-\psi_t\,\varphi_t+\mu_t(\psi_t-\varphi_t)]$$

$$-c^2\,e^{-2\varphi}\,[\varphi_{rr}+\mu_{rr}+\mu_r^2+\varphi_r^2-\varphi_r\,\psi_r+\mu_r(\varphi_r-\psi_r)]=-\left(R_3^3-\frac{R}{2}\right)$$

$$R_1^4=2e^{-2\varphi}\,[\mu_{rt}-\mu_t\,\varphi_r-\mu_r\,\psi_t+\mu_t\,\mu_r]$$

$$R_4^1=-2c^2\,e^{-2\psi}\,[\mu_{rt}-\mu_t\,\varphi_r-\mu_r\,\psi_t+\mu_t\,\mu_r]\,, \qquad (3.4)$$

where the subscripts r and t denote derivatives with respect to these variables, and that all other component of $R_\nu^\mu-\frac{1}{2}\,\delta_\nu^\mu\,R$ vanish.

The Einstein field equations, equations (1.8), may be written as :

$$K_4^4\equiv\left(R_4^4-\frac{1}{2}\,R\right)+8\pi\,GT_4^4=\left(R_4^4-\frac{1}{2}\,R\right)+8\pi\,G\rho\left(1+\frac{\varepsilon}{c^2}\right)=0$$

$$K_1^1\equiv\left(R_1^1-\frac{1}{2}\,R\right)+8\pi\,GT_1^1=\left(R_1^1-\frac{1}{2}\,R\right)-\frac{8\pi\,Gp}{c^2}=0$$

$$K_2^2\equiv\left(R_2^2-\frac{1}{2}\,R\right)\ +8\,GT_2^2=\left(R_2^2-\frac{1}{2}\,R\right)-\frac{8\pi\,Gp}{c^2}=0$$

$$K_4^1\equiv R_4^1=0 \qquad (3.5)$$

where the $R_\nu^\mu-\frac{1}{2}\,\delta_\nu^\mu R$ are given explicity above. We reiterate, that in these equations, p, ρ, and ε are *known* functions of φ since w are assuming that entropy is a constant and the caloric equation of state of the fluid is known. Hence pressure, density and internal energy may be expressed as functions of the enthalpy, that is of φ in view of equation (3.2).

The four equations (3.5) are not all independent as follows from the Bianchi identities and equations (1.7). It may be shown that in solving equations (3.5) it is sufficient to solve the equations $K_4^4=0$ for $t=0$ and $K_1^1=K_4^1=0$ for a range of values of t in the neighborhood of $t=0$.

4. — Boundary Conditions

We wish to consider the determination of the metric tensor throughout space-time when the matter occupies only limited region. By this we mean that there exists a hypersurface in space-time inside of which $T^{\mu\nu}$ is of the form given by equation (1.8) and outside of which

$$T^{\mu\nu}=0\,. \qquad (4.1)$$

Let us denote the equation of this hypersurface in the coordinate system in which equations (3.1) hold by :

$$F(r, t) = 0 .$$

Then the covariant components of the normal to this hypersurface are:

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^{\sigma\tau}\frac{\partial F}{\partial x^\sigma}\frac{\partial F}{\partial x^\tau}}}\frac{\partial F}{\quad}. \tag{4.2}$$

The conditions that must hold across this hypersurface have been given by TAUB [3].

In the coordinate system in which equations (3.2) and (3.1) hold, the conservation of mass and conservation of energy-momentum reduce to :

$$F_t = 0$$

$$p = 0$$

on the hypersurface $F = 0$. That is the hypersurface is given by the equation :

$$x^1 \equiv r = r_0^* \tag{4.3}$$

with r_0 a constant and :

$$p(r_0^*, t) = 0 , \tag{4.8}$$

that is, the pressure vanishes on the hypersurface $r = r_0^*$.

In this case it has been shown [cf. 3] that conditions on the metric tensor reduce to the equations given by O'BRIEN and SYNGE [5], mamely

$$[g_{\mu\nu}] = 0$$

$$\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\right] = 0 \qquad i = 2, 3,4 \tag{4.5}$$

$$\left[\frac{\partial g_{rn}}{\partial x^1}\right] = 0 \qquad r, n = 2, 3, 4 .$$

That is, the $g_{\mu\nu}$ must be continuous across the hypersurface $r = r_0^*$ as must be the first derivatives with respect to x^2, x^3 and x^4. The only discontinuity in te derivative with respect to x^1 $(= r)$ which may occur is in the quantities $\frac{\partial g_{1\mu}}{\partial x^1}$. In case the line element is given by equation (3.1) these conditions imply that φ and μ together with their first derivatives are continuous across $r = r_0^*$ and that ψ is also continuous across this hypersurface but that ψ_r need not be.

It follows from equations (4.4) and (3.2) that :

$$\alpha e^{-\varphi(r^*_0, t)} = \left(1 + \frac{i(0, \rho)}{c^2}\right)$$

and hence :

$$e^{\varphi(r^*_0, t)} = \alpha \tag{4.6}$$

a constant if the enthalpy vanishes with vanishing pressure. Thus g_{44} is a constant on the hypersurface $r = r_0$.

We shall conclude this section with a statement of the approximate form that the boundary conditions take when the boundary is given by :

$$r = r_0^* = r_0 + \beta r_1 \tag{4.1}$$

and the line element is given by equation (3.1) with :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0(r) + \beta\varphi_1(r, t) \\ \psi &= \psi_0(r) + \beta\psi_1(r, t) \\ \mu &= \mu_0(r) + \beta\mu_1(r, t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

where $\varphi_0(r)$, $\psi_0(r)$ and $\mu_0(r)$ represent a static solution of the field equations associated with matter confined to a region $r \leqq r_0$. The constant r_0 entering into equation (4.7) will be said to represent the undisturbed boundary and the constant r_0^* will be said to represent the perturbed one.

The condition on the pressure may be written as :

$$p\,(r_0^*, t) = p_0\,(r_0^*) + \beta p_1\,(r_0^*, t) = 0\,.$$

This in turn may be written as :

$$p(r_0^*, t) = p_0(r_0) + \beta r_1\, p_{0r}(r_0^*) + \beta p_1(r_0, t) = 0 \tag{4.9}$$

where p_{0r} represents the derivative of the function $p_0(r)$ with respect to r. If $r_1 > 0$ then p_{0r} must be taken to be equal to zero; if $r_1 < 0$ then p_{0r} is determined from the interior static field equations given in section 6. In general $p_{0r}(r_0)$ will also vanish if $\rho\,(r_0)$ vanishes.

Since equation (4.9) must hold for all values of β we have as previously noted :

$$p_0(r_0) = 0$$

and :

$$p_1(r_0, t) = \delta_1 \tag{4.10}$$

where :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0 \qquad \text{if } r_1 > 0 \\ \delta_1 &= - r_1\, p_{0r}(r_0) \quad \text{if } r_1 < 0\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

It follows from equations (2.5) and (3.2) that :

$$p_1(r_0, t) = \rho_0(r_0)\, i_1(r_0, t) = \frac{-\, c^2\, \varphi_1(r_0, t)}{1 + \dfrac{i_0\,(r_0, t)}{c^2}} = \delta_1\,. \tag{4.12}$$

The conditions on ψ, φ and μ may be similarly derived. Let the superscript e denote the external function, the function defined outside the matter, and the superscript i the internal one, the function defined inside the matter.

It can be shown that the conditions (4.5) imply that :

$$\varphi_1^i(r_0, t) = \varphi_1^e(r_0, t) \tag{4.13}$$

$$\mu_1^i(r_0, t) = \mu_1^e(r_0, t) \tag{4.14}$$

and :

$$\psi_1^i(r_0, t) = \psi_1^e(r_0, t) \tag{4.15}$$

Further we must have :

$$\varphi_{1r}^i(r_0, t) = \varphi_{1r}^e(r_0, t) \tag{4.16}$$

$$\mu_{1r}^i(r_0, t) = \mu_{1r}^e(r_0, t) \tag{4.17}$$

5. — The Exterior Solution

The region for which :

$$0 < r < r_0^* \tag{5.1}$$

will be said to be the interior region and the region for which :

$$r > r_0^* \tag{5.2}$$

will be said to be the exterior one. The boundary is given by $r = r_0^*$.

For the interior region where r satisfies (5.1), the metric tensor, that is the functions, φ, ψ and μ, must be such that for all t in the neighborhood of $t = 0$

$$e^{-2\varphi}(2\mu_{tt} + 3\mu_t^2 - 2\mu_t\,\varphi_t - c^2\,e^{-2\psi}\,\mu_1(\mu_r + 2\varphi_r) + c^2\,e^{-2\mu} = \frac{-8\pi\,Gp}{c^2} \tag{5.3}$$

$$\mu_{rt} - \mu_t\,\varphi_r - \mu_r\,\psi_t + \mu_t\,\mu_r = 0 \tag{5.4}$$

$$e^{-2\varphi}(\mu_t + 2\mu_t\,\psi_t) - c^2\,e^{-2\psi}(2\mu_{rr} + 3\mu_r^2 - 2\mu_r\,\psi_r) + c^2\,e^{-2\mu} = \\ = 8\pi\,G\rho\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right)$$

In the exterior region, where r satisfies equation (5.2), the functions φ, ψ and μ must satisfy equations (5.3) to (5.5) with all the right-hand sides set equal to zero. On the hypersurface $r = r_0^*$, we must have equations (4.4) and (4.5) satisfied. These equations will be used in the form of (4.10) to (4.8). The exterior solution will be also written in terms of the parameter β. The equations that the functions φ_0, ψ_0, μ_0 and φ_1, ψ_1, μ_1 must satisfy are obtained from equations (5.3) to (5.5) with all the right-hand sides set equal to zero by setting $\beta = 0$, and by differentiating these equations with respect to β and setting $\beta = 0$ respectively.

Thus we must have in the neighborhood of $t = 0$:

$$A_0 = e^{-2\varphi_0}(2\mu_{0tt} + 3\mu_{0t}^2 - 2\mu_{0t}\,\varphi_{0t}) - c^2\,e^{-2\psi_0}\mu_{0r}(\mu_{0r} + 2\psi_{0r}) + c^2\,e^{-2\mu_0} = 0$$

$$B_0 = \mu_{0rt} - \mu_{0t}\,\varphi_{0r} - \mu_{0r}\,\psi_{0t} + \mu_{0t}\,\mu_{0r} = 0 \tag{5.6}$$

and for $t = 0$:

$$C_0 = e^{-2\varphi_0}(\mu_{0t}^2 + 2\mu_{0t}\,\varphi_{0t}) \\ - c^2\,e^{-2\psi_0}(2\mu_{0rr} + 3\mu_{0r}^2 + 3\mu_{0r}^2 - 2\mu_{0r}\,\psi_{0r}) + c^2\,e^{-2\mu_0} = 0.$$

The functions φ_1, ψ_1 and μ_1 must satisfy the linear equations

$$A_1 = e^{-2\varphi_0}(\mu_{1tt} + 3\mu_{0t}\,\mu_{1t} - \mu_{0t}\,\varphi_{1t} - \mu_{1t}\,\varphi_{0t}) \\ - \varphi_1\,e^{-2\varphi_0}(2\mu_{0tt} + 3\mu_{0t}^2 - 2\mu_{0t}\,\varphi_{0t}) - c^2\,e^{-2\psi_0}(\mu_{1r}\,\mu_{0r} + \mu_{0r}\,\varphi_{1r} + \mu_{1r}\,\varphi_{0r}) \\ + c^2\,e^{-2\psi_0}\,\psi_1(\mu_{0r}^2 + 2\mu_{0r}\,\varphi_{0r}) - c^2\,\mu_1\,e^{-2\mu_0} = 0 \tag{5.7}$$

$$B_1 = \mu_{1rt} - \mu_{1t}\,\varphi_{0r} - \mu_{0t}\,\varphi_{1r} - \mu_{1r}\,\psi_{0t} - \mu_{0r}\,\psi_{1t} + \mu_{0t}\,\mu_{1r} + \mu_{1t}\,\mu_{0r} = 0.$$

$$\begin{aligned} C_1 = {} & e^{-2\varphi_0}(\mu_{0t}\,\mu_{1t} + \mu_{0t}\,\psi_{1t} + \mu_{1t}\,\psi_{0t}) - e^{-2\varphi_0}\,\varphi_1(\mu_{0t}^2 + 2\mu_{0t}\,\psi_{0t}) \\ & - c^2\,e^{-2\psi_0}(\mu_{1rr} + 3\mu_{0r}\,\mu_{1r} - \mu_{0r}\,\psi_{1r} - \mu_{1r}\,\psi_{0r}) \\ & + c^2\,e^{-2\psi_0}\,\psi_1(2\mu_{0rr} + 3\mu_{0r}^2 - 2\mu_{0r}\,\psi_{0r}) - c^2\,\mu_1\,e^{-2\mu_0} = 0\,. \end{aligned}$$

The first two of these equations hold for all t in the neighborhood of $t = 0$ and the third holds for $t = 0$.

We are interested in solutions of these equations which may be obtained from the Schwarzschild exterior solution (cf. equations (2.1) and (2.2)) by a transformation of the form of equations (2.11) and (2.12). It may be verified that a solution of equations (5.6) is given by

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \log r \\ \varphi_0 &= -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2GM_0}{rc^2}\right) \\ \psi_0 &= -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2GM_0}{rc^2}\right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

where G is the Newtonian constant of gravitation and M_0 is a constant. A solution of equations (5.7) is given by

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\theta_{1t} - \frac{1}{c^2 r\left(1 - \dfrac{2GM_0}{rc^2}\right)}(G'\,M_0 + GM_1 - \mu_1\,GM_0) \\ \psi_1 &= e^{\varphi_0}(e^{-\varphi_0}\,r\mu_1)_r + \frac{G'\,M_0 + GM_1}{rc^2\left(1 - \dfrac{2GM_0}{rc^2}\right)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

where $\mu_1(r, t)$ is an arbitrary function of r and t, θ_1 is defined by the equation

$$\theta_{1r} = -\frac{1}{c^2}\,e^{-2\varphi_0 + \psi_0}\,r\mu_{1t}\,. \tag{5.10}$$

M_1 is a constant and G' is the derivative of G with respect to β evaluated at $\beta = 0$. This quantity would arise if the expansion parameter β involved the constant of gravitation G.

It may be further verified that the solution described by the equations (5.8) and (5.9) arises from the Schwarzschild exterior solution given in section 2 by the transformation (2.11) and (2.12). The constants G and M which occur in equations (2.2) were allowed to depend on β in the derivation of equations (5.8) and (5.9).

For the exterior solution as for the interior one (cf. section 2) we may assume that

$$r\mu_1(r, 0) = 0, \tag{5.11}$$

for if this condition is not satisfied we may perform a transformation of the form of (2.11) with $\theta_1 = 0$ to insure that it is satisfied.

The function of t defined by the equation

$$r_0^* \mu_1(r_0^*, t) \equiv R_1(t) - r_1 \tag{5.12}$$

(cf. equation 2.14) determines the boundary of the material in the Schwarzschild coordinates.

Thus with any function $\mu_1(r, t)$ satisfying equations (5.11) and (5.12) we may by means of equations (5.9) and (5.12) obtain a solution of equations (5.7). Thus we obtain approximate exterior solutions to the Einstein field equations. Although these solutions are time dependent, it is apparent from their derivation that they do not represent gravitational radiation.

6. — Approximate Interior Solutions

The interior solutions in which we are interested will be characterized by three functions of r and t for $r < r_0^* = r_0 + \beta r_1$, φ, ψ and μ which will be assumed to be of the form given by equations (4.8) and which approximately satisfy equations (5.3) to (5.5). We further assume that they arise from the Schwarzschild interior solution by the transformation (2.11) and (2.12).

The last requirement implies that the functions φ_0, ψ_0 and μ_0 are static solutions of the fields equations, that is, are independet of t. In that case we may assume that

$$\mu_0(r) = \log r. \tag{6.2}$$

The equations satisfied by φ_0 and ψ_0 are

$$A_0 = -\frac{8\pi G}{c^2} p_0 \tag{6.2}$$

$$C_0 = 8\pi G \rho_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\right) \tag{6.3}$$

where A_0 and C_0 are defined by the first and third of equations (5.6). The second of equations (5.6) is satisfied as a consequence of equation (6.1). In view of equation (6.1), equations (6.2) and (6.3) reduce to

$$c^2 e^{-2\varphi_0} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + 2\varphi_{0r}\right) - \frac{c^2}{r^2} = + \frac{8\pi G p_0}{c^2} \tag{6.4}$$

$$c^2 e^{-2\psi_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\psi_{0r}\right) - \frac{c^2}{r^2} = -8\pi G \rho_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\right). \tag{6.5}$$

If we now set

$$e^{-2\psi_0} = \left(1 - \frac{2G\, m_0(r)}{r c^2}\right) \tag{6.6}$$

equation (6.5) becomes

$$m_{0r} = 4\pi\rho\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) r^2, \tag{6.7}$$

and equation (6.4) reduces to

$$\varphi_{0r} = \frac{G}{r^2 c^2} \frac{\left(m_0 + \dfrac{4\pi p_0 r^3}{c^2}\right)}{1 - \dfrac{2G m_0}{r c^2}} \tag{6.8}$$

The pair of equations (6.7) and (6.8) constitute a closed system since p, ρ, and ε are functions of φ. In fact it follows from equations (3.2) and (4.6) that

$$\varphi_0(r) - \log \alpha = -\log\left(1 + \frac{i}{c^2}\right) \tag{6.9}$$

and hence because of the isentropy assumption

$$\varphi_{0r} = -\frac{i_{0r}}{c^2\left(1 + \dfrac{i_0}{c^2}\right)} = -\frac{p_{0r}}{c^2 \rho_0 \left(1 + \dfrac{i_0}{c^2}\right)}. \tag{6.10}$$

From equations (6.8) and (6.10) we may define an expression for p_{0r} in terms of m_0, i_0 and p_0.

The solution of equations (6.4) to (6.6) for a relativistic gas has been discussed elsewhere [5]. In this paper we shall discuss approximate solutions to the field equations, equations (5.3) to (5.5) of the form of equations (2.10) in which the μ_0, φ_0 and ψ_0 are defined as follows :

$$\mu_0(r) = \log r. \tag{6.11}$$

The constant α in equation (6.9) is taken to be

$$\alpha = \left(1 - \frac{2GM_0}{r_0 c^2}\right)^{1/2}. \tag{6.12}$$

The functions $\varphi_0(r)$, $\psi_0(r)$ are given for $r < r_0$ by the solution of equations (6.1), (6.6), (6.7), (6.8) and (6.10) subject to the conditions that equations (6.11) and (6.12) hold,

$$p(r_0) = 0, \tag{6.13}$$

$$m_0(r_0) = 4\pi \int_0^{r_0} \rho_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\right) r^2 \, dr = M_0. \tag{6.14}$$

For $r > r_0$ the functions $\varphi_0(r)$ and ψ_0 are given by equations (5.8).

It may be verified that the boundary conditions discussed in section 4 are satisfied by the functions μ_0, ψ_0 and φ_0 described above.

The functions φ_1, ψ_1 and μ_1 must satisfy the equations

$$A_1 = -\frac{4\pi G'}{c^2} p_0 - \frac{4\pi G}{c^2} \rho_0 i_1, \tag{6.15}$$

$$B_1 = 0 \tag{6.16}$$

$$C_1 = 4\pi G' \rho_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\right) + 4\pi G \left(1 + \frac{i_0}{c^2}\right) \rho_1 \tag{6.17}$$

where A_1, B_1 and C_1 are defined by (5.7). The first two equations hold for all t in the neighborhood of $t = 0$ and the last holds for $t = 0$. These equations are obtained from equations (5.3) to (5.5) by differentiating with respect to β and setting $\beta = 0$ and using equation (2.5).

7. — Equation (6.16)

In view of the fact that μ_0, φ_0 and ψ_0 are independent of t, this reduces to

$$\mu_{1rt} - \mu_{1t}\,\varphi_{0r} - \frac{1}{r}\,\psi_{1t} + \frac{1}{r}\,\mu_{1t} = 0\,. \tag{7.1}$$

We may integrate this with respect to t and obtain

$$\mu_{1r} - \mu_1\,\varphi_{0r} - \frac{1}{r}\,\psi_1 + \frac{1}{r}\,\mu_1 = h(r)\,. \tag{7.2}$$

As was mentioned in the case of the exterior solution we may assume that

$$\mu_1(r, 0) \equiv 0\,; \tag{7.3}$$

for, if this condition is not satisfied we can make it satisfied by a transformation of coordinates involving r (and β) but not the variable t. Equation (7.2) may then be written as

$$\overline{\psi}_1(r, t) = \psi_1(r, t) - \psi_1(r, 0) = r\mu_{1r} - r\mu_1\,\varphi_{0r} + \mu_1 = e^{\varphi_0}(e^{-\varphi_0}\,r\mu_1)_r. \tag{7.4}$$

If we write

$$e^{-2\psi} = 1 - \frac{2\mathrm{G}}{r\,c^2}\,(m_0(r) + \beta\,m_1(r, \mathrm{t})) \tag{7.5}$$

then

$$e^{-2\psi_0}\,\psi_1 = \frac{\mathrm{G}}{r\,c^2}\,m_1(r, t) + \frac{\mathrm{G}'}{r\,c^2}\,m_0(r) \tag{7.6}$$

and

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_1 &= e^{2\psi_0}\,\frac{\mathrm{G}}{r\,c^2}\,[m_1(r, t) - m_1(r, 0)]\\ &= \left(1 - \frac{2\mathrm{G}\,m_0(r)}{r\,c^2}\right)^{-1}\frac{\mathrm{G}}{r\,c^2}\,[m_1(r, t) - m_1(r, 0)].\end{aligned} \tag{7.7}$$

Hence

$$\frac{\mathrm{G}}{r\,c^2}\,[m_1(r, t) - m_1(r, 0)] = \left(1 - \frac{2\mathrm{G}\,m_0(r)}{r\,c^2}\right) e^{\varphi_0}(e^{-\varphi_0}\,r\mu_1)_r \tag{7.8}$$

8. — Equation (6.18)

This equation holds on the hypersurface $t = 0$. In view of the static nature of φ_0, ψ_0 and μ_0 and in view of condition (7.3) equation (6.17) reduces to

$$c^2\,e^{-2\psi_0}\left[\frac{1}{r}\,\psi_{1r} + \psi_1\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\,\psi_{0r}\right) = 4\,\pi\,\mathrm{G}'\,\rho_0\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\right) + 4\,\pi\,\mathrm{G}\left(1 + \frac{i_0}{c^2}\right)\rho_1\,.\right.$$

This may be written as

$$\frac{c^2}{r^2}(re^{-2\psi_0}\psi_1)_r = \frac{G' m_{0r}}{r_0^2} + \frac{4\pi G \rho_0}{\alpha^2}\frac{i_1}{c^2}$$

at $t = 0$, in view of equations (6.7) and (2.7). It follows from equation (7.6) that the above equation may be written as :

$$[m_1(r, 0)]_r \equiv \delta m_r = 4\pi r^2 \frac{\rho_0}{\alpha_0^2}\frac{i_1}{c^2}(r, 0) \tag{8.1}$$

where we have written :

$$\delta m(r) = m_1(r, 0)\,. \tag{8.2}$$

Thus $i_1(r, 0)$ and hence $\varphi_1(r, 0)$ is determined in terms of the static solution and $\delta m(r)$, the initial change in the interior « mass distribution ». $i_1(r, t)$ and hence $\varphi_1(r, t)$ may be determined from this result and the conservation of mass equation, equation (1.4) as follows. In view of equations (3.2) and (3.3) the conservation of mass equation may be written as :

$$\rho(r, t)\, e^{\psi(r,t) + 2\mu(r,t)} = \rho(r, 0)\, e^{\psi(r,0) + 2\mu(r,0)}\,.$$

Differentiating this equation with respect to β and setting $\beta = 0$ gives

$$e^{\psi_0(r,t) + 2\mu_0(r,t)}\,[\rho_1(r, t) + \rho_0(r, t)\,(\psi_1(r, t) + 2\mu_1(r, t)]$$
$$= e^{\psi_0(r,0)} + 2\mu_0(r, 0)\,[\rho_1(r, 0) + \rho_0(r, 0)\,(\psi_1(r, 0) + 2\alpha_1(r, 0)]\,.$$

Since ρ_0, ψ_0 and μ_0 are independent of t this equation may be written as

$$\frac{1}{\rho_0}[\rho_1(r, t) - \rho_1(r, 0)] = -2\mu_1(r, t) - \bar{\psi}_1(r, t)\,.$$

It follow from equations (2.7) and (7.4) that this equation may be written

$$\frac{1}{\alpha_0^2\left(1 + \dfrac{i_0}{c^2}\right)c^2}[i_1(r, t) - i_1(r, o)] = -\frac{e^{\varphi_0}}{r^2}(e^{-\varphi_0} r^3 \mu_1)_r \tag{8.3}$$

From equation (3.2) it follows that :

$$\varphi_1 = \frac{i_1/c^2}{1 + \dfrac{i_0}{c^2}} = -\,e^{\varphi_0 - \varphi_0(r_0)}\frac{i_1}{c^2}\,. \tag{8.4}$$

Hence equation (8.1) may be written as :

$$\varphi_1(r, 0) = -\,e^{\varphi_0 - \varphi_0(r,0)}\frac{i_1(r, 0)}{c^2} = \frac{-\,\alpha_0^2\, e^{\varphi_0 - \varphi_0(r,0)}}{4\pi r^2 \rho_0}\delta m_r \tag{8.5}$$

and equation (8.3) becomes :

$$\bar{\varphi}_1 \equiv \varphi_1(r, t) - \varphi_1(r, 0) = \alpha_0^2\frac{e^{\varphi_0}}{r^2}(e^{-\varphi_0} r^3 \mu_1)_r\,. \tag{8.6}$$

It may also be written as :

$$\varphi_1(r, t) = \frac{-\,\alpha_0^2\, e^{\varphi_0}}{4\pi r^2}\left(e^{-\varphi_0(r,0)}\frac{(\delta m)_r}{\rho_0} - 4\pi\,(e^{-\varphi_0} r^3 \mu_1)_r\right) \tag{8.7}$$

9. — Equation (6.15)

This equation which holds for all values of r and t reduces to :

$$e^{-2\varphi_0}\mu_{1tt} - c^2 e^{-2\psi_0}\left[\frac{\mu_{1r}}{r} + \frac{1}{r}\varphi_{1r} + \mu_{1r}\varphi_{0r} - \psi_1\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}\varphi_{0r}\right)\right] - c^2\frac{\mu_1}{r}$$
$$= -4\pi\frac{G'p_0}{c^2} - \frac{4\pi G\rho_0}{c^2}\dot{i}_1$$

in virtue of the fact that $\mu_0 = \log r$ and φ_0 and ψ_0 are independent of t. It is our purpose to use the results of the preceeding sections to write this as an equation for the function :

$$\zeta = r\mu_1 \tag{9.2}$$

Equation (9.1) may be written as :

$$e^{-2\varphi_0}\mu_{1tt} - c^2 e^{-2\psi_0}\left[\frac{\mu_{1r}}{r} + \frac{1}{r}\bar{\varphi}_{1r} + \mu_{1r}\varphi_{0r} - \bar{\psi}_1\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}\varphi_{0r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}(\psi_{0r} + \varphi_{0r})\bar{\varphi}_1\right] - \frac{c^2\mu_1}{r} = c^2 e^{-2\psi_0}\left[\frac{1}{r}\varphi_1(r,0)_r - \psi_1(r,0)_r\left(\frac{1}{r} + 2\varphi_{0r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}(\varphi_{0r} + \psi_{0r})\varphi_1(r,0) - \frac{G'}{2G}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + 2\varphi_{0r}\right)\right] + \frac{G'}{2G}\frac{c^2}{r^2} \tag{9.3}$$

where we have used equations (8.4), (6.4) and (6.5).

If we now multiply equation (9.3) by r and substitute from equation (7.4) we obtain :

$$e^{-2\varphi_0}\zeta_{tt} - c^2 e^{-2\psi_0}\left[\bar{\varphi}_{1r} + (\varphi_{0r} + \psi_{0r})\bar{\varphi}_1 - \varphi_{0r}e^{-2\varphi_0}(e^{-2\varphi_0}\zeta)_r\right] +$$
$$+ c^2(e^{-2\psi_0} - 1)\frac{\zeta}{r^2} = K(r) \tag{9.4}$$

where :

$$K(r) = c^2 e^{-2\psi_0}\left[e^{-\varphi_0 - \psi_0}(\varphi_1(r,0)\,e^{\varphi_0+\psi_0})_r\right] - \frac{G}{r}\delta m\left(\frac{1}{r} + 2\varphi_{0r}\right) - \frac{G'}{G}c^2\varphi_{0r} \tag{9.5}$$

and $\bar{\varphi}_1$ is given by equation (8.6) wich may be written as :

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\alpha_0^2 e^{\varphi_0}}{r^2}(e^{-\varphi_0}r^2\zeta)_r\,. \tag{9.6}$$

Equation (9.4) may be written as :

$$e^{-2\varphi_0}\zeta_{tt} - c^2 e^{-2\psi_0}\left[\bar{\varphi}_{1r} + (\varphi_{0r} + \psi_{0r})\bar{\varphi}_1 - \varphi_{0r}\frac{e^{\varphi}}{r^2}(e^{-\varphi}r^2\zeta)_r\right]$$
$$+ c^2\left[e^{-2\psi_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\varphi_{0r}}{r} - \varphi_{0r}^2\right) - \frac{1}{r^2}\right]\zeta = K(r)\,.$$

It follow from equations (3.2) and (2.7) that :

$$\varphi_{0r} = -\alpha_0^2\frac{\rho_{0r}}{\rho_0}\,.$$

Hence equation (9.7) may be written as :

$$e^{-2\varphi_0}\zeta_{tt}-\frac{c^2\,e^{-2\psi_0}}{\rho_0}\;[e^{-(\varphi_0+\psi_0)}\,(e^{\varphi_0+\psi_0}\,\rho_0\;\overline{\rho_0}\,\varphi_1)_r]$$
$$+\,c^2\left[e^{-2\psi_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2\varphi_{0r}}{r}-\varphi_{0r}^2\right)-\frac{1}{r^2}\right]\zeta=\mathrm{K}(r) \tag{9.8}$$

where $\overline{\varphi}_1$ is given in terms of ζ by equation (9.6).

Equation (9.8) is the general relativistic analogue of the classical wave equation for small adiabatic radial oscillations of a spherical distribution of a gas. In order to examine the relation between equation (9.8) and that occurring in the classical theory we differentiate the former equation with respect to t and obtain :

$$e^{-2\varphi_0}\zeta_{ttt}-\frac{c^2\,e^{-2\psi_0}}{\rho_0}\;[e^{-(\varphi_0+\psi_0)}\,(e^{\varphi_0+\psi_0}\,\rho_0\;\overline{\rho_0}\,\varphi_1)_r]$$
$$+\,c^2\left[e^{-2\psi_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2\varphi_{0r}}{r}-\varphi_{0r}^2\right)-\frac{1}{r^2}\right]\zeta_t=0\,. \tag{9.9}$$

We now write :

$$\varphi_0=\frac{\mathrm{V}}{c^2}.$$

For weak gravitational fields V is the Newtonian gravitational potential and in general we have :

$$e^{-2\psi_0}\,\mathrm{V}_r=\frac{\mathrm{G}}{r^2}\left(m_0+\frac{4\pi\,pr^3}{c^2}\right)$$

as follows from equations (6.4) and (6.6).

Equation (9.9) may then be written as :

$$e^{-2\varphi_0}\zeta_{ttt}-\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{2\mathrm{G}m_0}{rc^2}\right)\left[\frac{\alpha_0^2\,c^2}{r^2}\,\rho_0\,e^{\varphi_0}\,(e^{-\varphi_0}\,r^2\,\zeta_t)_r\right]_r$$
$$-\,4\pi\,\mathrm{G}\left(1+\frac{i_0}{c^2}\right)\frac{\alpha_0^2}{r}\,e^{\varphi_0}\,(e^{-\varphi_0}\,r^2\,\zeta_t)_r-\frac{4\,\mathrm{G}m_0}{r^3}+\frac{\mathrm{V}_r^2}{c^2}+\frac{8\pi\,p_0\,\mathrm{G}}{c^2}\Big(\,\zeta_t=0\,.\Big) \tag{9.10}$$

Neglecting terms of order $1/c^2$ in this expression we obtain :

$$\zeta_{ttt}-\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\alpha_0^2\,c^2}{r^2}\,\rho_0\,(r^2\,\zeta_t)_r\right]_r-\frac{4\,\mathrm{G}m_0}{r^3}\,\zeta_t=0\,. \tag{9.11}$$

This is the classical equation giben by Rosseland [6] for the velocity field of a spherical distribution of a gas undergoing small adiabatic oscillations.

The solutions of equations (9.9) and (9.10) and hence of (9.8) may be determined by the method of separation of variables. Thus on substituting :

$$\zeta_t=e^{i\sigma t}\,\zeta(r)$$

equation (9.10) becomes :

$$\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{2Gm_0}{rc^2}\right)\left[\frac{\alpha_0^2 c^2 \rho_0}{r^2} e^{\varphi_0}(e^{-\varphi_0} r^2 \xi)_r\right]_r + 4\pi G\left(1+\frac{i_0}{c^2}\right)\frac{\alpha_0^2}{r} e^{\varphi}(e^{-\varphi_0} r^2 \xi)_r$$
$$+\left(\sigma^2 e^{-2\varphi_0}+\frac{4Gm_0}{r^3}+\frac{V_r^2}{c^2}+\frac{8\pi Cp_0}{c^2}\right)\xi = 0\,. \tag{9.12}$$

The solution $\xi(r)$ of this equation must vanish at the origin and be regular in the interval $0 < r < r_0$. The requirement that it be finite at $r = r_0$ will determine σ^2, the square of the frequency of the oscillation. If the σ^2 so determined is positive the configuration is stable and if not it will be unstable. The detailed discussion of equation (9.12) obviously depends on the functions φ_0 and ψ_0 and will not be given in this paper. We shall content ourselves with an outline of the procedure necessary to complete the approximate interior solution given a solution of equation (9.12).

If $\xi(r)$ is determined we may then write :

$$\zeta = A(\cos\sigma t - 1)\,\xi(r) + B\sin\sigma t\,\xi(r) = r\mu(r,t)\,. \tag{9.13}$$

This is obtained from the expression for ζ_t by integrating with respect to t and taking account of the fact that we must have equation (5.11) satisfied, that is that we require that $r\mu_1(r, 0) = 0$. On substituting equation (9.13) into equation (9.8) and making use of the fact ξ satisfies equation (9.12) we obtain :

$$K(r) = e^{-2\varphi_0}\sigma^2\,\xi(r)\,. \tag{9.14}$$

This equation may be regarded as an equation for the determination of the function $\delta m(r)$ which represents the perturbation of the mass distribution at time $t = 0$, « causing » the oscillation of frequency σ. In case $\sigma = 0$, ζ is independent of t and hence vanishes identically since it vanishes at $t = 0$. Thus we must have $K(r) = 0$ as also follows from equation (9.14).

When δm is determined and ζ is determined the function ψ_1 is determined from equations (7.6) and (7.8). Similarly φ_1 may be determined in terms of δm and ζ from equations (8.5) and (8.6). Thus the approximate interior solution to the field equations may be determined. This solution may be joined to the approximate exterior solution given by equations (5.9) and (5.10) by using the approximate form of the boundary conditions given at the end of section 4.

REFERENCES

[1] A. H. Taub, « On Circulation in Relativistic Hydrodynamics ». To appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis.

[2] A. H. Taub, « Relativistic Rankine-Hugoniot Equations », *Phys. Rev.*, 74, pp. 328-334 (1948).

[3] A. H. Taub, « Singular Hypersurfaces in General Relativity », *Ill. Jour. Math.*, 1, pp. 370-388 (1957).

[4] Stephen O'BRIEN and John L. SYNGE, « Jump Conditions at des Continuities in General Relativity », Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Sr. A, n° 9 (1953).

[5] A. H. TAUB, « Static Sperically Symmetric Space-times Containing a Relativistic Gas ». To be published.

[6] S. ROSSELAND, *The Pulsation Theory of Variable Stars,* Oxford Press (1949).

DISCUSSION

Intervention du professeur J. A. Wheeler

Your linear equations for small departures from a state of equilibrium presumably have an eigenvalue character such that you can be assured that the equilibrium is locally stable if all the eigenvalues are positive. Have you investigated what conditions must be fulfulled by a state of equilibrium in order that the lowest eigenvalue shall just vanish — in other words, in order that the system shall just lie at the boundary between stable configurations and unstable configurations ? I ask this question because Harrison, Wakano and I integrated the equation for the general relativistic hydrostatic equilibrium of a mass of substance catalyzed to the endpoint of thermonuclear evolution and subject to its own gravitational squeeze (1).

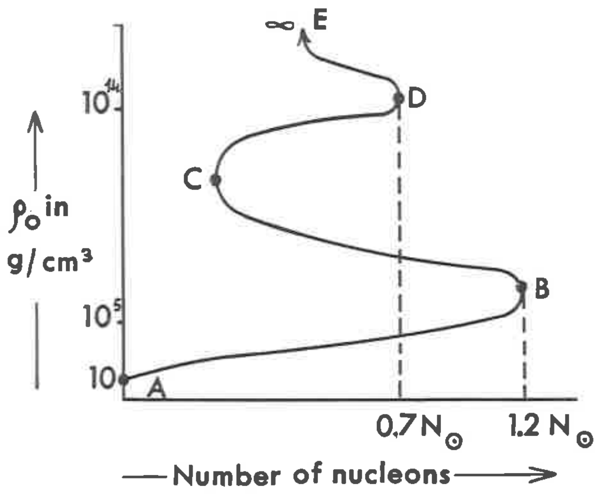


FIGURE. — The equations of hydrostatic equilibrium were integrated outward from $r = 0$, starting with a specified density ρ° at the center. At a certain point in the integration the pressure fell to zero, thus defining the boundary of the configuration. The number of nucleons inside this boundary is called N and is referred to the number of nucleons in the sun as standard of reference, $N_\odot$.

We found two maxima in the curve for the number of nucleons as a function of central pressure : B, which we call « the Chandrasekhar-Landau crushing point », where electrons are squeezed onto nuclei; and D, which we call

(1) Reported in Onzième Conseil de Physique Solvay, « La structure et l'évolution de l'univers », Editions Stoops, 79, Coudenberg, Brussels, 1958.

« the Landau-Serber-Oppenheimer-Volkoff crushing point », where the pull of gravitation wins over the pressure of nuclear matter. We call these maxima « crushing points » because it seems to us obvious from the kind of argument that goes back to Poincaré that of two configurations with the same number N of nucleons, just short of N_{max}, at most one can be stable. However, Schatzman (2) in a different kind of analysis did not get exact agreement between the position of the first maximum and the position of the first crushing point. Therefore it would seem very worthwile to test definitively in terms of an equation such as yours whether the two points must not always agree. Since the problem is one of principle, it should be possible to use your equation to give a quite general answer to this question without entering into any details.

Réponse d'A. H. Taub (d'après J. A. Wheeler)

I have not yet answered the kind of question you raise, but the desire to do so was the motive that impelled my investigation in the first place.

(2) E. Schatzman, *Acad. Nauk SSSR,* **33,** 800 (1956).

NON-EXISTENCE OF PERIODICALLY VARYING NON-SINGULAR GRAVITATIONAL FIELDS

Professeur-Docteur A. PAPAPETROU,
Institut für Reine Mathematik,
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin

RESUME

Il a été discuté de l'existence de champs gravitationnels $g_{\mu\nu}$ non singuliers qui seraient fonctions périodiques du temps et satisferaient aux conditions usuelles à l'infini spatial ($g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, métrique minkowskienne, pour $r \to \infty$). Il suit de précédents résultats que de tels champs devraient être indépendants du temps dans la région (infinie) de l'espace tridimensionnel où ils sont faibles. Ils ne pourraient donc être périodiques que dans une région centrale, où ils devraient être forts. L'hypersurface séparant les deux régions 4-dimensionnelles en question serait alors isotrope. On montre qu'une telle surface ne peut pas exister sous les conditions du présent problème. Par conséquent il n'existe pas de champs gravitationnels périodiques non singuliers en relativité générale. La même conclusion vaut dans la théorie « Maxwell-Einstein » des champs électromagnétiques et gravitationnel couplés.

It has been remarked by EINSTEIN immediately after the formulation of general relativity that the tensor $T_{\mu\nu}$ appearing in his field equations,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

can give only what we call a phenomenological description of matter : The structure of $T_{\mu\nu}$ has to be chosen more or less empirically from the known properties of the (macroscopic) bodies we are considering. It follows that this tensor can be used for macrophysical problems only. From this EINSTEIN concluded that in microphysics only the vacuum field equations,

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

ought to be used. In other words only gravitational fields which satisfy equ. (2) *everywhere* could be of importance for microphysical problems. By this we mean solutions which are entirely free of singularities, as any (physical) singularity — e.g. the Schwarzschild singularity — is always equivalent to a distribution of $T_{\mu\nu}$ represented by δ-functions. In the opinion of EINSTEIN such *non-singular* solutions might eventually be the suitable means for the discussion of the problem of the structure of elementary particles.

The simplest form of the problem of non-singular solutions has been put forward by EINSTEIN (1). This is the problem of the existence of non-singular solutions which are (in certain coordinate systems) time-independent. In order to have a well defined problem it is necessary to specify the boundary condition satisfied by the solutions. EINSTEIN introduced the following condition :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \text{ for } r \to \infty \tag{3}$$

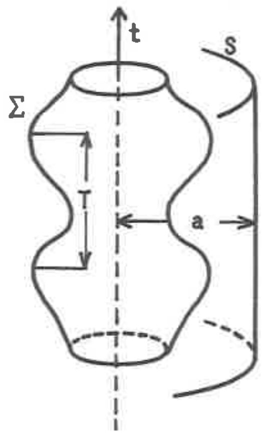
($\eta_{\mu\nu}$ Minkowski metric), which is the only one that might lead to non-singular solutions representing models of particles. A discussion of the problem thus formulated by EINSTEIN and PAULI (2) led to a first negative result : Any time-independent non-singular solution of (2) fulfilling the condition (3) would necessarily represent a field of vanishing total energy and would therefore be unsuitable for the description of a particle with non-vanishing restmass. LICHNEROWICZ (3) then could prove that there is only one trivial solution of this kind and this is the Minkowski metric.

For the purpose of describing a permanent particle one might also think of using a non-singular solution which depends on time periodically, and of course again fulfils the boundary condition (3). We have recently discussed the question of the existence of non-singular solutions of this kind and arrived again at the same negative result as for the time-independent fields, i.e. that also periodic non-singular fields cannot exist. We shall give in the following a brief description of the main steps and arguments by means of which this result has been reached (4).

Let us assume that a periodic non-singular field exists. Because of the boundary condition (3) the field will necessarily be weak at large distances from a certain « central » region of the 3-dimensional space (i.e. outside a certain finite region of the 3-dimensional space). Periodic fields of this kind have been discussed in detail (5) and it has been found that in the infinite region of the 3-dimensional space in which they are weak they can be only apparently time dependent : A coordinate transformation can be found which will bring the field to a time-independent form. A truly periodic non-singular solution would therefore, after the performance of this coordinate transformation, have the following

(1) A. EINSTEIN, *Revista* (Univ. Nac. de Tucuman) A 2, 11 (1941).
(2) A. EINSTEIN and W. PAULI, *Ann. of Math.*, 44, 131 (1943).
(3) A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sci.* (Paris) 222, 432 (1946).
(4) A detailed paper by PAPAPETROU and TREDER is under press in *Ann. d. Physik*.
(5) A. PAPAPETROU, *Ann. d. Physik* (6) 20, 399 (1957); (7) 1, 186 (1958).

general structure : It would be periodically depending on time in a certain finite region of the 3-dimensional space (in which it could not be weak) and time-independent (and weak) outside this region.



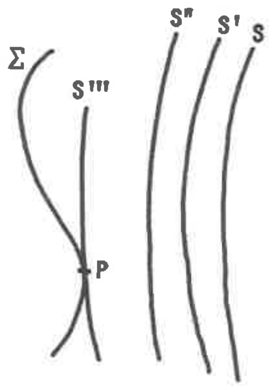
The corresponding two regions of the 4-dimensional space will be separated by a hypersurface Σ (fig. 1). The characteristic property of Σ is that on it derivatives of a certain order of the $g_{\mu\nu}$ will be discontinuous. These discontinuities will have to be of the type which cannot be transformed away, as otherwise we should be able to find a coordinate transformation bringing the whole field to a time independent form. It follows then from the results of Stellmacher (6) that the hypersurface Σ will have to be a null-surface of the Riemann space, i.e. a surface whose normal vector is everywhere a null-vector. Another property of Σ follows from the periodicity of the field as a whole : The surface Σ will have the same periodicity, as shown schematically in fig. 1. One sees on this figure at once what we implicitly stated above, i.e. that the surface Σ will be contained in a finite region of the 3-dimensional space.

The rest of the proof of our theorem consists in showing that in a Riemann space with non-singular metric no null-surface of the kind of Σ can exist. In the special case of the Minkowski space this result would follow at once : The null-surfaces contain null-geodesics of the space; the latter are in the Minkowski space straight lines and therefore cannot be confined in a finite region of the 3-dimensional space. This reasonning is not applicable to the case of a general Riemann

(6) K. Stellmacher, *Math. Annalen*, 115, 740 (1938). In this paper Stellmacher discusses the case in which discontinuities occur in the second (or higher) derivatives of the $g_{\mu\nu}$. The case of discontinuities in the first derivatives of $g_{\mu\nu}$ has also been discussed in a paper by Papapetrou and Treder which is under press in Mathem. Nachrichten; Stellmacher's results are valid in this case too.

space, as there can then be null-geodesics contained in a finite region of the 3-dimensional space. But the non-existence of the null-surface Σ still holds, as can be shown in the following way.

In fig. 1 let us consider the hypersurface S with the equation $r = a = \text{const}$. If we take the value of a sufficiently large, the field $g_{\mu\nu}$ will be weak (i.e. nearly Minkowskian) on S and consequently this surface will be a time-like one. Moreover the surface S will contain entirely the null-surface Σ and have non common points with it. But this last demand leads to a contradiction : Starting from S we can construct a system of non-intersecting time-like surfaces S, S′, S″ ... [7], one of which will then be necessarily tangent to Σ at some point P (fig. 2). But this is obviously impossible, as the normal vector common



to these two surfaces at P would then have to be at the same time a space-like as well as a null-vector. It follows that a null-surface of the form of Σ in fig. 1 cannot exist and therefore a periodic non-singular solution of the equations (2) also cannot exist.

The same negative results are valid for the EINSTEIN-MAXWELL theory of the combined gravitational and electromagnetic field (with the additive combination of the Lagrange functions of the two fields). The case of the time-independent non-singular solutions in this theory has been discussed by THIRY [8]. The proof for the periodic solutions follows on exactly the same lines as the one given above for the pure gravitational field. This is possible because a periodic gravitational and electromegnetic field will also necessarily reduce to a time-independent one in the (infinite) region in which the gravitational field has become weak [9].

It follows from this last remark that a necessary condition for the existence of periodic non-singular solutions in any field theory

(7) See eg. L. P. EISENHART, *Riemannian geometry,* Princeton, 1949, p. 57-59.
(8) Y. THIRY, *Journ. Math. pures appl.* (9) 30, 275 (1951).
(9) A. PAPAPETROU, *Ann. d. Physik* (7) 1, 186 (1958).

(unified or not) is the existence of truly periodic solutions in the region of the weak gravitational field, which in its turn might be possible only if the energy density of the total field is not positive definite. The results of a calculation which will be published in a subsequent paper show that truly periodic weak fields can exist in the unified theory with non-symmetric $g_{\mu\nu}$. It is therefore probable that periodic non-singular solutions will exist in this theory, in contrast with the already known fact that the theory does not contain any physically interesting time-independent non-singular solutions [10].

DISCUSSION

Intervention de A. Trautmann

La démonstration de Papapetrou qu'il n'existe pas de champs périodiques qui soient euclidiens et non-stationnaires à l'infini n'est pas convaincante. Cette démonstration s'appuie sur l'hypothèse qu'on peut développer $g_{\mu\nu}$ en série et que *chaque terme* $\underset{n}{g_{\mu\nu}}$ de cette série satisfait à la condition $\lim\limits_{r\to\infty} \underset{n}{g_{\nu\mu}} = 0$ $(n > 0)$. Il est connu, d'autre part, qu'il existe des fonctions régulières à l'infini dont les termes du développement en série ne jouissent pas de cette propriété $\left(\text{par exemple } \sin\dfrac{kr}{r}\right)$. Ce problème est lié à celui de la convergence uniforme des séries en question.

Intervention du Prof. J. A. Wheeler

It is interesting to note that gravitational geons, even gravitational geons of very long lifetime, in no way involve any violation of the valuable theorem established by Professor Papapetrou [1]. Gravitational wave energy continually leaks out of such a geon at a rate which is inversely proportional to e raised to a power proportional to the ratio between radius and wave length [2]. This rate can be made as slow as desired by making the ratio of radius to wave length very large. Consequently it might at first sight appear that the geon serves as everlasting source of monochromatic outgoing gravitational waves, in violation of the theorem of Professor Papapetrou. However, two circumstances show that no violation is involved. First, the decay of the source, though slow, occurs at a finite rate. Consequently the circulation of energy around the interior of the geon cannot be truly periodic. Second, the mathematical analysis of the gravitational geon is most conveniently expressed in terms of the time symmetric initial value problem of Fourès and Lichnerowicz, Weber and this conference member, and Brill. Thus at time $T = 0$ the 3-space metric ${}^{(3)}g_{ik}$ satisfies the equation ${}^{(3)}R = 0$; and at that moment $\dfrac{\partial^{(2)} g^{ik}}{\partial T} = 0$. In other words, the outward leakage of the gravitational waves begins only of the order of a period or os after the time $T = 0$. Before the time $T = 0$ one has to do with an *incoming* gravitational wave — the gravitational analogue of an

(10) A. Papapetrou, *Phys. Rev.*, 73, 1106 (1948).
(1) See also A. Trautman, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **5**, 115 (1957).
(2) J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **97**, 511 (1955).

electromagnetic wave train approaching the focal point of an optical system. This therefore treats the gravitational geon as *built up* over a very long time prior to $T = 0$ by the input of a very weak but properly phased wave train. This circumstance again shows that the disturbance is not truly periodic.

The kind of considerations that are encountered here about in — and outgoing waves and about time reversibility are very familiar from the theory of alpha decay and need no further discussion. The main point of these remarks is only to note the caution about how we go to the limit which is imposed on us by Professor Papapetrou's important theorem. For a gravitational geon with any specified internal wave length λ we can make the rate of decay as small as we please — but not zero — by going to a sufficiently large radius a. In this sense one can achieve an approximation as close as he pleases to an infinite monochromatic wave train, in apparent contradiction to the theorem. However, for any fixed λ and *fixed a* — no matter how large — one can always find a time T so great that the decay of the geon has taken away by that time any specified fraction of its mass energy. In this sense the wave train is *not* monochromatic and Professor Papapetrou's theorem is not violated.

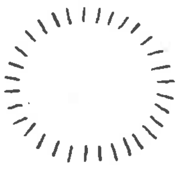


FIG. 3. — Schematic representation of a gravitational geon. Gravitational waves of wave length short compared to the radius are guided around a circular path by the static gravitational field that they themselves establish.

Intervention de J. L. Synge

Bien que les conditions $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ à l'infini apparaissent simples et naturelles à première vue, il semble que les vraies conditions à l'infini consistent dans l'annulation du tenseur de Riemann. Laissez-moi proposer une simple analogie, qui peut être significative dans l'espace-temps. Considérons, dans l'espace ordinaire, une surface conique ordinaire. Elle est intrinsèquement plate, avec une singularité au sommet, que l'on peut cependant faire disparaître en enlevant le sommet. Alors nous avons un espace à deux dimensions qui est intrinsèquement plat excepté près du sommet, mais pour lequel il n'existe pas de système de coordonnées unique (x, y) pour lequel $ds^2 = dx^2 + dy^2$ à l'infini.

ÉTUDE CRITIQUE
DE LA REPRÉSENTATION DE LA MATIÈRE
DANS LA
THÉORIE ASYMÉTRIQUE DU CHAMP UNIFIÉ

par M.-A. TONNELAT

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

RESUME

Après avoir rappelé les lois du mouvement des particules neutres et chargées en Relativité Générale, le principe de la théorie unitaire asymétrique d'Einstein-Schrödinger et les résultats des travaux dans lesquels L. Infeld, J. Callaway, W. B. Bonnor, J. Treder et E. Clauser ont appliqué à cette théorie la méthode des singularités, l'Auteur expose le principe d'une méthode du tenseur d'énergie qui s'harmonise avec les axiomes de la théorie unitaire.

La discussion des équations du mouvement déduites des identités de conservation conduit ensuite au développement d'une théorie asymétrique très générale dans laquelle la variété fondamentale quadridimensionnelle est munie d'une connexion affine quelconque $\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu$. La fonction d'action dépend linéairement, avec des coefficients constants, du tenseur de Ricci et du tenseur de courbure d'homothétie de la connexion, des tenseurs analogues formés avec $\tilde{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu = \Gamma_\mu{}^\nu{}_\lambda$ et du tenseur $\Gamma_\lambda \cdot \Gamma_\mu$ obtenu à l'aide du vecteur de torsion Γ_λ de $\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu$; un principe variationnel donne les équations du champ. La discussion des équations du mouvement obtenues par la méthode du tenseur d'énergie montre qu'il est possible, par un choix convenable de la fonction d'action, et sans introduire de terme phénoménologique, d'établir les équations du mouvement d'une particule chargée.

L'obtention de ces équations dynamiques, qui font intervenir un terme d'accélération, une force de Lorentz et des termes supplémentaires, exige la suppression des équations antisymétriques du champ, ce qui impose une renonciation partielle à l'application d'un principe variationnel.

La théorie asymétrique du champ unifié a été introduite par EINSTEIN en 1945 [1]. Il s'agissait, en fait, d'une dernière version issue de plusieurs tentatives antérieures. L'une des plus connues date de 1923 et utilise déjà un tenseur fondamental asymétrique [2].

L'originalité de la théorie asymétrique était de vouloir constituer une théorie géométrique du champ pur, c'est-à-dire de chercher à englober dans un schéma géométrique unique la description des phénomènes de gravitation et aussi les apports électromagnétiques, matériels, etc., auxquels on attribuait, en général, une origine phénoménologique.

Cette synthèse totale réalisée sous l'égide de la géométrie empruntait des voies d'une trompeuse simplicité. EINSTEIN semblait proposer en effet la généralisation la plus simple, la plus « naturelle » et, partant, la plus attrayante de la Relativité Générale.

Il n'est donc pas étonnant que la nouvelle théorie ait suscité un certain enthousiasme et un grand nombre de publications. Toutefois, parmi ses partisans les plus qualifiés, cet enthousiasme a connu assez vite d'importantes fluctuations : une des difficultés les plus grandes concerne l'obtention du mouvement des particules chargées, mouvement que la théorie n'a pu prévoir sans renoncer à une part importante de ses propres principes.

En effet cette tentative qui se propose d'être totalement unitaire veut être en même temps une théorie du champ pur. La représentation de la matière doit donc se réduire à celle du champ et les équations de la théorie relèvent toujours d'un cas unitaire « extérieur ». C'est dire que le concept de « singularité » au sens usuel est banni et que la notion de mouvement des singularités dans un champ n'est plus immédiate.

Toutefois, les résultats décourageants obtenus dans diverses directions n'ont jamais compromis définitivement la théorie car l'ambiguïté des interprétations possibles (choix de la métrique, interprétation des champs antisymétriques, etc.) a toujours ménagé des issues pour des unitaristes totalitaires et impénitents.

Ces espoirs peuvent-ils et doivent-ils se prolonger ? Telle est la question que nous voudrions poser aujourd'hui.

I. — Les lois du mouvement des particules neutres et chargées en Relativité Générale

La Relativité Générale admet l'existence d'une variété à connexion métrique — que l'on suppose *a priori* riemannienne —. Le lien entre la connexion $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ de la variété et la métrique $a_{\mu\nu}$ (équations de liaison), les conditions imposées à la structure de la variété (équations du champ) sont ainsi

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} a^{\rho\sigma} (\partial_\mu a_{\nu\sigma} + \partial_\nu a_{\mu\sigma} - \partial_\sigma a_{\mu\nu}) \qquad (\mathrm{I})_0$$

$$\overset{\circ}{S}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a_{\mu\nu} G = \chi T_{\mu\nu} \qquad (G = a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}). \qquad (\mathrm{II})_0$$

$\overset{\circ}{S}_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, $G_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci riemannien écrit avec les symboles $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$. Le tenseur $T_{\mu\nu}$ symétrique et du second rang, représente la somme de tous les apports énergétiques autres que celui du champ de gravitation. Il comprend en particulier l'impulsion-énergie matérielle $M_{\mu\nu}$ et électromagnétique $\tau_{\mu\nu}$. Si l'on désigne par $\varphi_{\mu\nu}$ le champ électromagnétique, par p et u^μ la pression et la quadrivitesse d'univers dans un schéma fluide parfait, on aura

$$T_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} + \ldots \tag{1}$$

avec

$$M_{\mu\nu} \equiv (\mu\, c^2 + p)\, u_\mu\, u_\nu - p\, a_{\mu\nu} \tag*{(1)$_1$}$$

$$\tau_{\mu\nu} = -\, \varphi_{\mu\rho}\, \varphi_\nu{}^\rho + \frac{1}{4}\, a_{\mu\nu}\, \varphi_{\rho\sigma}\, \varphi^{\rho\sigma}\, . \tag*{(1)$_2$}$$

Si $T_{\mu\nu} \neq 0$, on obtient des théories dites « naïves » en raison du caractère non géométrique de ce tenseur qui est indépendant de la connexion. En dépit de cette « naïveté », ces théories permettent la prévision du mouvement des particules neutres ou chargées. Ce mouvement se déduit de $(\mathrm{II})_0$ soit par la méthode des singularités [3] [4], soit par la méthode du tenseur d'énergie [5] [6].

a) Dans le premier cas (singularités), le tenseur matériel $M_{\mu\nu}$ n'intervient pas au second membre. S'il s'agit de particules neutres, les équations du champ sont donc relatives à un cas purement extérieur. De toute façon, l'introduction d'un potentiel harmonique $U = \dfrac{k}{r}$ conduit aux lois classiques du mouvement (lois de Newton et de Coulomb) et aux approximations d'ordre supérieur.

b) Dans le second cas (tenseur d'énergie), le tenseur matériel $M_{\mu\nu}$ figure toujours au second membre de $(\mathrm{II})_0$. Les quatre identités

$$\nabla_\rho\, S_\mu{}^\rho \equiv 0 \tag{2}$$

entraînent, avec $(\mathrm{II})_0$, les quatre équations

$$\nabla_\rho\, T_\mu{}^\rho = 0 \tag{3}$$

que doit satisfaire un $T_\mu{}^\rho$ donné *a priori*.

Ces conditions écrites pour $\mu = 1, 2, 3$ constituent, à l'ordre p, les équations du mouvement des particules neutres et chargées. Dans *a*) comme dans *b*) s'il s'agit de particules chargées, la force de Lorentz s'introduit par l'intermédiaire du tenseur de Maxwell qui figure au second membre dans $T_{\mu\nu}$.

2. — Les équations de la théorie asymétrique du champ unifié déduites d'un principe variationnel

A) Pour préciser les notations que nous utilisons, nous avons rappelé des principes semi-populaires. Nous devons continuer dans cette voie.

La théorie asymétrique du champ unifié est souvent présentée comme l'extension la plus « naturelle » de la Relativité Générale. Pour en juger, il est opportun de déduire les équations $(\mathrm{I})_0$ et $(\mathrm{II})_0$ d'un principe variationnel mixte appliqué à une densité invariante $\mathfrak{L}$. La connexion $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et la métrique $a_{\mu\nu}$ forment deux séries de variables indépendantes.

Sans apporter de restriction *a priori* à la structure d'une variété affine — qui comportera donc en général une courbure $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ et une torsion $\Gamma^{\rho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$, considérons les densités invariantes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ telles que

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-a}\, a^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial a^{\mu\nu}} = -\chi \sqrt{-a}\, \theta_{\mu\nu} \tag{4}$$

Seul $R_{\mu\nu}$, contraction de première espèce de la courbure, dépend de la connexion $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$. Un principe variationnel

$$\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')\, d\tau = 0 \tag{5}$$

conduit, pour des variations $\delta\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et $\delta\, (\sqrt{-a}\, a^{\mu\nu})$ nulles aux limites du domaine d'intégration, aux équations de liaison et aux équations du champ :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \tfrac{2}{3}\, \delta^{\rho}_{\mu}\, \Gamma_{\nu} \tag*{(I)$'_0$}$$

$$S_{\mu\nu}(\Gamma) \equiv \overset{\circ}{S}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, a_{\mu\nu}\, G = \chi\, T_{\mu\nu} \tag*{(II)$'_0$}$$

$$T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, a_{\mu\nu}\, a^{\alpha\beta}\, \theta_{\alpha\beta}\,.$$

L'introduction du quadrivecteur Γ_{ρ} qui reste indéterminé constitue seulement un « embellissement gratuit » selon l'expression même de E. Schrödinger.

B) La théorie du champ unifié d'Einstein est basée sur la généralisation de (5) obtenue en substituant dans $\mathfrak{L}$ un tenseur fondamental asymétrique $g^{\mu\nu}$ au tenseur symétrique $a^{\mu\nu}$ et en supprimant la contribution de $\mathfrak{L}'$. A partir de

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu} \qquad\qquad \theta_{\mu\nu} = 0 \tag{6}$$

on obtient par variation $\delta\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et $\delta\, \mathfrak{g}^{\mu\nu}$ des équations formellement identiques à (I)$'_0$ et à (II)$'_0$ mais exprimées en fonction d'un tenseur fondamental asymétrique et dépourvues évidemment de $\theta_{\mu\nu}$ (1)

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & \partial_{\rho}\, \mathfrak{g}^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\, \mathfrak{g}^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\, \mathfrak{g}^{\mu\sigma} - \mathfrak{g}^{\mu\nu}\, \Gamma^{\lambda}_{\underline{\rho\lambda}} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}\, \Gamma_{\rho} - \dfrac{2}{3}\, \delta^{\nu}_{\rho}\, \mathfrak{g}^{\mu\lambda}\, \Gamma_{\lambda} \\ (b) & \partial_{\rho}\, \mathfrak{g}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} = 0 \end{array}\right\} \tag{I}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad (R = g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu}) \tag{II}$$

(1) Nous postulerons toujours ici le système « *faible* » c'est-à-dire le système déductible du principe variationnel, ce qui implique $\Gamma_{\rho} \neq 0$. La forme $R_{\mu\nu} = 0$ ne doit pas faire illusion. On sait qu'elle implique

$$W_{\underline{\mu\nu}} = 0,\ W_{[\underset{\smile}{\mu\nu},\rho]} = 0,$$

$W_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci formé avec les nouvelles variables

$$L^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\, \delta^{\rho}_{\mu}\, \Gamma_{\nu}$$

Dans ces conditions, l'expression de $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ en fonction de $g_{\mu\nu}$ est sensiblement plus compliquée que la solution riemannienne $(\mathrm{I})'_0$ ([7] [8] [9]).

Quoi qu'il en soit, il semble naturel d'appliquer à la théorie le test même qui doit caractériser une théorie unitaire c'est-à-dire la prévision du mouvement des particules chargées.

3. — Les lois du mouvement des particules neutres et chargées considérées comme des singularités du champ

Le principe initial de la théorie conduit à des équations du champ dépourvues de second membre. On a donc essayé d'appliquer à ce cas essentiellement extérieur une méthode des singularités.

L. Infeld a tout d'abord cherché une solution du système (II) dans le cas $\Gamma_\rho = 0$ (système « fort »). Une première approximation des équations (I) conduit à définir un champ électromagnétique. Celui-ci doit alors, d'après (II) satisfaire

$$\varphi_{\mu\nu} = \underset{\smile}{g_{\mu\nu}} \simeq \frac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial^\rho \varphi^\sigma - \partial^\sigma \varphi^\rho)\,. \tag{7}$$

D'après (II), le potentiel φ^ρ doit vérifier

$$\Delta\, \partial_\lambda\, \varphi = 0 \qquad \left(\Delta = \sum_p \frac{\partial^2}{(\partial x^p)^2}\,, \qquad p = 1, 2, 3\right) \tag{8}$$

dans le cas purement statique ($\varphi^\sigma = 0, 0, 0, \varphi$). La solution la plus générale de cette équation

$$\varphi = \frac{a}{r} + b + dr^2 \tag{9}$$

se réduit à la solution harmonique $\varphi = \dfrac{a}{r}$ en raison des conditions aux limites. Le potentiel électrostatique ainsi défini conduit à une contribution nulle dans le calcul des intégrales du mouvement par la méthode d'Einstein-Infeld-Hoffmann. (L. Infeld [11]).

J. Callaway a repris le même calcul dans le cas $\Gamma_\rho \neq 0$ (système faible) [12]. On sait que la partie antisymétrique des équations (II) s'écrit alors

$$\underset{\smile}{R_{\mu\nu}} = \underset{\smile}{W_{\mu\nu}} - \frac{2}{3}(\partial_\mu\, \Gamma_\nu - \partial_\nu\, \Gamma_\mu) = 0 \qquad \text{ou} \qquad W_{[\underset{\smile}{\mu\nu},\,\rho]} = 0 \tag{10}$$

$W_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci formé avec une connexion

$$L^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\, \delta^{\rho}_{\mu}\, \Gamma_\nu$$

à vecteur de torsion nul. Les équations (8) doivent alors, dans le cas purement statique, être remplacées par

$$\Delta\, \Delta\, \varphi = 0\,. \tag{11}$$

Elles admettent la solution générale

$$\varphi = \frac{a}{r} + b + cr + dr^2. \tag{12}$$

qui se réduit à

$$\varphi = \frac{a}{r} + cr \tag{13}$$

pour les mêmes conditions aux limites. En gardant seulement la solution

$$\varphi = \frac{a}{r} \tag{14}$$

Callaway aboutit, dans le cas du système faible, à une conclusion identique à celle obtenue par Infeld pour le système fort : les termes électromagnétiques n'apportent aucune contribution spécifique aux intégrales du mouvement.

Si l'on veut maintenir le potentiel électrostatique habituel, c'est-à-dire la solution harmonique, il est nécessaire, pour obtenir le mouvement des particules chargées, d'ajouter à la fonction d'action $\mathcal{L}$ un terme supplémentaire. En choisissant par exemple la fonction d'action

$$\mathcal{L} + p^2 \underset{\smile}{\mathcal{G}}^{\mu\nu} \underset{\smile}{g_{\mu\nu}} \tag{15}$$

et en appliquant la méthode d'Einstein-Infeld-Hoffmann pour un potentiel électrostatique $\varphi = \frac{a}{r}$, W. B. Bonnor [13] obtient les équations classiques du mouvement sous l'influence des forces newtoniennes et strictement coulombiennes.

Toutefois J. Treder, en utilisant la solution complète $\varphi = \frac{a}{r} + cr$ du système faible, est parvenu à obtenir une contribution non nulle du champ électromagnétique [14] (cf. aussi A. Papapetrou [15]). S'il s'agit de deux corps distants de $\vec{r}_{12}$, la force électrostatique qui s'exerce entre eux est

$$f^p = 2(a_1 c_2 + a_2 c_1) \frac{\overset{(1)}{x^p} - \overset{(2)}{x^p}}{|r_{12}|^3} - 2 c_1 c_2 \frac{\overset{(1)}{x^p} - \overset{(2)}{x^p}}{|r_{12}|} \tag{16}$$

et suppose donc essentiellement $c \neq 0$ pour se manifester. Malheureusement le second terme extracoulombien n'est pas forcément petit devant le premier.

Des résultats analogues ont été obtenus dans cette voie et par des procédés un peu différents par E. Clauser [16] [17]. Le calcul des intégrales du mouvement $\int \mathcal{C}_\rho^r \, n_r \, d\sigma = 0$ est alors réalisé à partir d'expressions initialement différentes (cf. note (2)) qui permettent l'application des identités proposées par E. Schrödinger [20]. L'introduction d'un potentiel de la forme (14) conduit bien entendu E. Clauser à la définition d'une force électrostatique du type (16) comportant des termes extracoulombiens. Les équations globales du mouvement du corps (1), c'est-à-dire l'expression des forces tant newtoniennes que coulombiennes et extra-coulombiennes, sont ainsi

$$\overset{(1)}{m}\overset{(1)}{\ddot{x}}{}^p = G_N \overset{(1)}{m}\overset{(2)}{m} \frac{\overset{(2)}{x}{}^p - \overset{(1)}{x}{}^p}{|r_{12}|^3}$$

$$+ \frac{1}{2}(A_1 C_2 + A_2 C_1)\, \beta^4 k^2 \frac{\overset{(1)}{x}{}^p - \overset{(2)}{x}{}^p}{|r_{12}|^3}$$

$$- \frac{1}{2} C_1 C_2 \beta^4 \; k^2 \frac{\overset{(1)}{x}{}^p - \overset{(2)}{x}{}^p}{|r_{12}|}. \tag{17}$$

La parenté des formules (16) et (17), réductibles l'une à l'autre par un réajustement des constantes A, C, D, k, est évidente.

4. — Principe d'une méthode du tenseur d'énergie sans recours à l'hypothèse de singularités

La méthode précédente a l'inconvénient de contrevenir aux principes essentiels de la théorie. Il peut en effet sembler paradoxal d'utiliser une méthode des singularités dans une théorie qui bannit le concept même de singularité.

Toutefois, l'application d'une méthode du tenseur d'énergie requiert la présence d'un terme phénoménologique formé par un tenseur matériel et, éventuellement, par le tenseur maxwellien d'impulsion-énergie. Dans une théorie unitaire, même d'un type restreint (c'est-à-dire groupant seulement électromagnétisme et gravitation dans un schéma géométrique), ce tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique (et par conséquent sa divergence qui constitue la force de Lorentz) découle de la donnée du tenseur de Ricci. Tel est le cas réalisé, par exemple, dans les théories pentadimensionnelles.

Pour chercher à mettre en évidence les possibilités de la théorie asymétrique, nous devons en donner une retranscription riemannienne. Pour cela, nous mettrons en évidence dans la partie symétrique $R_{\underline{\mu\nu}}$ du tenseur de Ricci généralisé, une partie strictement riemannienne $G_{\mu\nu}$ relative à une métrique $a_{\mu\nu}$. Le complément du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a_{\mu\nu}\, G$ ainsi isolé à partir de $R_{\underline{\mu\nu}}$ représente l'impulsion-énergie des apports phénoménologiques dans une version riemannienne de la théorie. Cette version est naturellement arbitraire puisqu'elle est relative au choix d'une métrique $a_{\mu\nu}$.

Décomposons ainsi le tenseur $R_{\underline{\mu\nu}}$ en une partie riemannienne $\overset{(a)}{G}_{\mu\nu}$ relative à la connexion $\{{}^{\rho}_{\mu\nu}\}_{(a)}$ et en une partie complémentaire $\overset{(a)}{R'}_{\underline{\mu\nu}}$ qui constituera tout ou partie du second membre. Posons :

$$\overset{(a)}{R}_{\underline{\mu\nu}} = \overset{(a)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(a)}{R'}_{\underline{\mu\nu}} \tag{18}$$

Ecrivons maintenant les équations du champ en introduisant provisoirement un terme phénoménologique $\theta_{\mu\nu}$ dont nous ne préciserons pas la forme : si ce terme est nécessaire pour définir une force de Lorentz, la théorie asymétrique n'échappe pas aux critiques que l'on peut faire aux théories naïves. S'il n'intervient que dans la définition du tenseur matériel, la théorie est unitaire au sens usuel. Enfin, une authentique théorie du champ pur devrait pouvoir se dispenser de toute intervention phénoménologique.

En utilisant un formalisme non riemannien, nous écrirons les équations du champ

$$\omega_{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

$\omega_{\mu\nu}$ étant défini par la différence entre le tenseur de Ricci généralisé $R_{\mu\nu}$ et un éventuel apport phénoménologique $\theta_{\mu\nu}$ (par phénoménologique nous entendons simplement que le tenseur $\theta_{\mu\nu}$ est indépendant de la connexion)

$$\omega_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu} . \tag{20}$$

En portant (18) dans (20) nous pouvons former l'expression qui met en évidence le tenseur d'Einstein riemannien $S_{\mu\nu}$ relatif à une métrique $a_{\mu\nu}$. Nous avons en effet

$$\underline{\Omega_{\mu\nu}} \equiv \underline{\omega_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} a_{\mu\nu}\, a^{\alpha\beta}\, \underline{\omega_{\alpha\beta}} \equiv \overset{(a)}{S}_{\mu\nu} - \chi\, \overset{(a)}{\underline{T_{\mu\nu}}} \tag{21}$$

en posant

$$\overset{(a)}{S}_{\mu\nu} \equiv \overset{(a)}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a_{\mu\nu}\, a^{\alpha\beta}\, \overset{(a)}{G}_{\alpha\beta} \tag{22}$$

$$\chi\, \overset{(a)}{\underline{T_{\mu\nu}}} \equiv \overset{(a)}{t}{}'_{\underline{\mu\nu}} + \underline{\Theta_{\mu\nu}} \tag{23}$$

avec

$$-\overset{(a)}{T}{}'_{\underline{\mu\nu}} \equiv \overset{(a)}{R}{}'_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \underline{a_{\mu\nu}}\, a^{\alpha\beta}\, \overset{(a)}{R}{}'_{\underline{\alpha\beta}} \tag{24}$$

$$\underline{\Theta_{\mu\nu}} \equiv \underline{\theta_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \underline{a_{\mu\nu}}\, a^{\alpha\beta}\, \underline{\theta_{\alpha\beta}} \tag{25}$$

Les équations du champ relatives au groupe symétrique s'écrivent alors

$$\underline{\Omega_{\mu\nu}} = 0 \tag{26}$$

le terme $\Theta_{\mu\nu}$ n'intervenant pas, bien entendu, dans la théorie initiale d'Einstein.

Rappelons le caractère non univoque de la retranscription riemannienne (21). Elle est relative — comme la décomposition (18) — au choix *arbitraire* d'une métrique $a_{\mu\nu}$. A partir d'un schéma unitaire (19), on peut tirer une infinité de représentations du type (21) selon la définition adoptée pour la métrique.

Considérons maintenant l'expression

$$\overset{(a)}{\underline{\Omega_{\mu}{}^{\rho}}} \equiv a^{\rho\nu}\, \overset{(a)}{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\rho}_{\mu}\, a^{\alpha\beta}\, \overset{(a)}{G}_{\alpha\beta} - \chi\, \overset{(a)}{T}_{\mu}{}^{\rho} \tag{27}$$

formée à partir de (21). Appliquons à (27) la dérivation covariante $\overset{(a)}{\nabla}_\rho$, cette dérivation s'exprimant à l'aide des symboles $\{^{\rho}_{\mu\nu}\}_{(a)}$. On obtient

$$E_\mu \equiv \overset{(a)}{\nabla}_\rho \overset{(a)}{\Omega}_{\underline{\mu}}{}^\rho \equiv - \overset{(a)}{\nabla}_\rho (\chi \overset{(a)}{T}_{\underline{\mu}}{}^\rho) , \tag{28}$$

en tenant compte des identités riemanniennes classiques

$$\overset{(a)}{\nabla}_\rho \overset{(a)}{S}{}^\rho_\mu \equiv 0 . \tag{29}$$

Si les équations relatives au groupe symétrique doivent être réalisées, c'est-à-dire si

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} = 0 \qquad\qquad \overset{(a)}{\Omega}_{\underline{\mu}}{}^\rho = a^{\rho\sigma} \overset{(a)}{\Omega}_{\underline{\mu\sigma}} = 0 \tag{30}$$

il est nécessaire que $\overset{(a)}{T}_\mu{}^\rho$ satisfasse les conditions

$$E_\mu \equiv - \overset{(a)}{\nabla}_\rho (\chi \overset{(a)}{T}_\mu{}^\rho) = 0 . \tag{31}$$

En posant

$$\overset{(a)}{\mathfrak{T}}{}^\rho_\mu = \sqrt{-a}\, \overset{(a)}{T}{}^\rho_\mu \qquad\qquad \overset{(a)}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta} = \sqrt{-a}\, \overset{(a)}{T}{}^{\alpha\beta} , \tag{32}$$

l'intégration de (31) sur l'élément de volume dont on étudie le mouvement conduit en principe aux équations dynamiques

$$\int_V E_p \sqrt{-a}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0 \tag{33}$$

c'est-à-dire

$$\partial_\rho \overset{(a)}{\mathfrak{T}}{}^\rho_p \, dV = \frac{1}{2} \int \partial_p (a_{\alpha\beta} \overset{(a)}{\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta}) \, dV \tag{34}$$

D'après (23), $\overset{(a)}{\mathfrak{T}}{}^\rho_p$, comprend en principe une contribution géométrique ($\overset{(a)}{t'}_p{}^\rho$) et une contribution phénoménologique (Θ^ρ_p). Bien entendu cette dernière disparaît si l'on adopte le principe initial de la théorie d'Einstein.

Insistons sur le fait que les équations du champ antisymétrique

$$\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \equiv R_{\underset{\smile}{\mu\nu}} - \theta_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = 0 \qquad\qquad \omega_{[\underset{\smile}{\mu\nu},\rho]} = W_{[\underset{\smile}{\mu\nu},\rho]} - \theta_{[\underset{\smile}{\mu\nu},\rho]} \tag{35}$$

interviendront dans la détermination de $\overset{(a)}{t'}_p{}^\rho$ mais sont sans influence sur la formation des équations dynamiques (31)

5. — Les identités de conservation

Si les équations de liaison sont satisfaites, la théorie asymétrique admet des identités fondamentales que différents auteurs ont présenté sous des formes variées. Nous les écrirons

soit (cf. E. Schrödinger [20] (4, 1))

$$\partial_\rho (\mathcal{G}^{\mu\rho} W_{\mu\nu} + \mathcal{G}^{\rho\mu} W_{\nu\mu}) - \mathcal{G}^{\mu\rho} \partial_\nu W_{\mu\rho} \equiv 0 \tag{36}$$

$W_{\mu\nu}$ étant toujours le tenseur de Ricci formé avec la connexion $L^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{2}{3} \delta^{\rho}_{\mu} \Gamma_{\nu}$ à vecteur de torsion nul.

soit (A. LICHNEROWICZ [21])

$$\partial_{\rho} (\mathfrak{G}^{\mu\rho} S_{\mu\nu} + \mathfrak{G}^{\rho\mu} S_{\nu\mu}) + W_{\mu\rho} \partial_{\nu} \mathfrak{G}^{\mu\rho} \equiv 0 \tag{37}$$

avec

$$S_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \tag{38}$$

soit (A. EINSTEIN [22])

$$\partial_{\rho} (\mathfrak{G}^{\underline{\mu\rho}} W_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{\underline{\mu\rho}} \partial_{\nu} W_{\underline{\mu\rho}} \equiv \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} (\partial_{\nu} W_{\underset{\smile}{\mu\rho}} + \partial_{\rho} W_{\underset{\smile}{\nu\mu}} + \partial_{\mu} W_{\underset{\smile}{\rho\nu}}) \tag{39}$$

Bien entendu (36) peut aisément se mettre sous la forme d'une divergence faisant intervenir les dérivations + et —. On la déduit alors directement des identités de Bianchi généralisées (S. MAVRIDES [23]).

Enfin, il est commode de présenter aussi les identités comme une divergence ordinaire (E. SCHRÖDINGER [20] éq. (4.6), (4.8))

$$\partial_{\rho} \Sigma^{\rho}_{\nu} \equiv 0 \ ^{(2)} \qquad \Sigma^{\rho}_{\nu} = \mathfrak{S}^{\rho}_{\nu} + \sigma^{\rho}_{\nu} \tag{40}$$

avec

$$\mathfrak{S}^{\rho}_{\nu} = \mathfrak{G}^{\mu\rho} S_{\mu\nu} + \mathfrak{G}^{\rho\mu} S_{\nu\mu} . \tag{41}$$

$$\sigma^{\rho}_{\nu} = \Lambda^{\rho}_{\lambda\tau} \partial_{\nu} \mathfrak{G}^{\lambda\tau} - \delta^{\sigma}_{\nu} \Lambda \tag{42}$$

en posant

$$\Lambda^{\rho}_{\lambda\tau} = L^{\rho}_{\lambda\tau} - \delta^{\rho}_{\tau} L^{\sigma}_{\lambda\sigma} \tag{43}$$

$$\Lambda_{\lambda\tau} = L^{\sigma}_{\lambda\tau} L^{\alpha}_{\sigma\alpha} - L^{\sigma}_{\lambda\alpha} L^{\alpha}_{\sigma\tau} \qquad \Lambda = \mathfrak{G}^{\lambda\tau} \Lambda_{\lambda\tau} . \tag{44}$$

En effet, on peut montrer ([18], éq. (4.9))

$$\Sigma^{\rho}_{\nu} = \partial_{\lambda} U^{\lambda\rho}_{\nu} = \partial_{\lambda} (\Lambda^{\lambda}_{\nu\tau} \mathfrak{G}^{\tau\rho} + \Lambda^{\lambda}_{\tau\nu} \mathfrak{G}^{\rho\tau} - \delta^{\rho}_{\nu} \mathfrak{G}^{\sigma\tau} \Lambda^{\lambda}_{\sigma\tau}) \tag{45}$$

ce qui conduit à faire jouer à σ^{ρ}_{ν} le rôle du « pseudo-tenseur » fréquemment introduit en Relativité Générale.

6. — Identités de conservation et équations du mouvement

C'est la condition (31) qui, par intégration sur une région dV, permet de déterminer les lois du mouvement. Nous n'avons pas jusqu'ici tenu compte des identités générales de la théorie. A partir de la forme

(2) C'est à partir de Σ^{ρ}_{ν} $\left(-\frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\rho}_{\nu} \text{ dans ses notations} \right)$ que E. CLAUSER écrit les intégrales du mouvement par la méthode des singularités. Si $\bar{\sigma}^{\rho}_{\nu}$ est l'expression de Σ^{ρ}_{ν} quand les équations du champ (II) sont satisfaites la condition $\int (\Sigma^{p}_{\nu} - \bar{\sigma}^{p}_{\nu}) \, n_p \, d\sigma = 0$ se réduit à $\int (\partial_{o} U^{op}_{\nu} - \bar{\sigma}_{\nu}{}^{p}) \, n_p \, d\sigma = 0$ en raison de (45) et du théorème de Stokes (cf. [16]).

(39) de ces identités, des transformations indiquées par différents auteurs ([24], [25]) conduisent à l'expression

$$\overset{(m)}{\nabla}_\rho (\overset{(m)}{t}{}'^{\rho}_{\mu}) \equiv -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} + \partial_\beta W_{\underset{\smile}{\mu\alpha}} + \partial_\alpha W_{\underset{\smile}{\beta\mu}}) \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}. \tag{46}$$

La dérivation covariante est relative à la connexion $\{\ \}_{(m)}$ et implique le choix d'une métrique bien déterminée

$$m^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, g^{\underline{\mu\nu}}, \qquad (\gamma = \det g_{\underline{\mu\nu}} = g^2 \det g^{\underline{\mu\nu}})$$

C'est en fonction de cette métrique qu'on a effectué la séparation

$$R_{\mu\nu} \equiv \overset{(m)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(m)}{R'}_{\underline{\mu\nu}} \tag{48}$$

et défini le tenseur $\overset{(m)}{t'}{}^{\rho}_{\mu}$ en posant comme en (24)

$$-\overset{(m)}{t'}{}^{\rho}_{\mu} \equiv m^{\rho\nu} \overset{(m)}{R'}_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \delta^{\rho}_{\nu}\, m^{\alpha\beta} \overset{(m)}{R'}_{\underline{\alpha\beta}}\,. \tag{49}$$

Revenons maintenant à la définition (28) de l'expression E_μ qui intervient dans les équations du mouvement (31). Si nous supposons que la métrique $a_{\mu\nu}$ (jusque-là arbitraire) qui figure dans ces équations est identique à $m^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, g^{\mu\nu}$, E_μ s'écrit encore d'après (28), (23) et (46)

$$-E_\mu \equiv \overset{(m)}{\nabla}_\rho (\chi \overset{(m)}{T}{}^{\rho}_{\mu}) \equiv \overset{(m)}{\nabla}_\rho \overset{(m)}{t'}{}^{\rho}_{\mu} + \overset{(m)}{\nabla}_\rho \Theta^{\rho}_{\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, \partial_{[\mu} W_{\underset{\smile}{\alpha\beta]}} + \overset{(m)}{\nabla}_\rho \Theta_\mu{}^{\rho}. \tag{50}$$

En définissant d'après (20) et (48)

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} \equiv \overset{(m)}{R}_{\underline{\mu\nu}} - \theta_{\underline{\mu\nu}} \equiv \overset{(m)}{G}_{\mu\nu} + R'_{\underline{\mu\nu}} - \theta_{\underline{\mu\nu}} \tag{51}$$

il vient, selon (49), (21), (22) et (25)

$$-t'_\mu{}^\rho \equiv \Omega_{\underline{\mu}}{}^\rho - \overset{(m)}{S}_\mu{}^\rho + \Theta_{\underline{\mu}}{}^\rho$$

et les identités (46) s'écriront

$$\overset{(m)}{\nabla}_\rho \Omega_{\underline{\mu}}{}^\rho + \overset{(m)}{\nabla}_\rho \Theta_{\underline{\mu}}{}^\rho \equiv -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, [\partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta]}} + \partial_{[\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta]}}] \tag{52}$$

7. — Discussion des résultats précédents

A) Si les équations du champ relatives au groupe symétrique ($\omega_{\underline{\mu\nu}} = 0$) et antisymétrique ($\partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta]}} = 0$) sont satisfaites, les équations dynamiques représentent, comme en théorie naïve, des conditions entre les termes phénoménologiques $\Theta_{\underline{\mu}}{}^\rho$ et $\partial_{[\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta]}}$.

On pourrait, bien entendu, donner à ces termes une forme analogue à celle qui intervient en théorie d'Einstein-Maxwell, le tenseur $\Theta_{\underline{\mu}}{}^\rho$ représentant une énergie matérielle et le tenseur $\Theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$ un champ du type maxwellien.

On peut aussi se borner à introduire des termes phénoménologiques, c'est-à-dire indépendants de la connexion tels que

$$\theta_{\mu\nu} = \lambda\, g_{\underline{\mu\nu}} + \lambda'\, g_{\underset{\smile}{\mu\nu}}\,.$$

a) Si $\lambda = \lambda'$ l'équation dynamique résultant de (52) pour $\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho} = 0$, $\partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} = 0$ se réduit à une identité : c'est le résultat obtenu autrefois par E. Schrödinger ([19], [20]) qui fut le premier à essayer de définir un tenseur d'énergie par une retranscription approchée de la théorie dans un formalisme riemannien. On sait que la méthode de Schrödinger introduit toujours un terme cosmologique en $\lambda\, g_{\mu\nu}$: on constate alors que les termes en force de Lorentz sont introduits par λ dans $\nabla_{\rho}\, \Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho}$ et dans $g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}\, \partial_{[\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]}$ et, d'autre part, que leur somme est identiquement nulle.

b) Si $\lambda = 0$, $\lambda' \neq 0$ (d'où $\theta_{\underline{\mu\nu}} = 0$, $\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho} = 0$) la force de Lorentz est introduite par le dernier terme de (52). Celui-ci résulterait, par exemple, de l'intervention dans la fonction d'action d'un terme supplémentaire de la forme

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{G}^{\underset{\smile}{\mu\nu}}\, \theta_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = \lambda'\, \mathfrak{G}^{\underset{\smile}{\mu\nu}}\, g_{\underset{\smile}{\mu\nu}}\,. \tag{54}$$

C'est le terme $p^2\, \mathfrak{G}^{\underset{\smile}{\mu\nu}}\, g_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ introduit par W. B. Bonnor dans une extension de la théorie. Bien entendu la disparition du terme phénoménologique $\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho}$ empêche néanmoins d'appliquer une méthode du tenseur d'énergie. Mais un retour à la méthode des singularités qui supplée à la déficience des termes matériels permet, comme nous l'avons vu, d'obtenir les équations du mouvement puisqu'une force de Lorentz déduite du terme en λ' peut intervenir.

B) Supposons, au contraire, que les équations du champ relatives au groupe antisymétrique ne soient pas partout vérifiées. Dans ce cas, le comportement du champ de gravitation continuera à être déterminé par $\omega_{\underline{\mu\nu}} = 0$ tandis que le champ antisymétrique sera assujetti aux seules restrictions $\partial_{\rho}\, \mathfrak{G}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} = 0$. On posera donc

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} = 0, \qquad\qquad \partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} \neq 0\,. \tag{55}$$

Les identités (cf. (50)) conduisent ainsi aux conditions

$$\overset{(m)}{\nabla}_{\rho}\, \Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho} = -\frac{1}{2}\, g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, \partial_{[\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]}\,. \tag{56}$$

(3) D'une façon équivalente on peut poser

$$\theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \equiv W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \neq 0 \tag{1}$$

comme des identités de définition de $\theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$. Le champ antisymétrique $W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$ définit alors

$$\partial_{\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \equiv \partial_{\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \neq 0 \qquad \text{d'où} \qquad \partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} \equiv \partial_{[\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} - \partial_{[\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} = 0\,.$$

Il revient évidemment au même de postuler (57) ou (1) pour s'affranchir des restrictions habituelles $\partial_{[\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} = \partial_{[\mu}\, \theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]}$, valables pour un $\theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$ déterminé *a priori.*

Les termes phénoménologiques relatifs au champ antisymétrique n'interviennent pas, ce qui permet de postuler des conditions

$$\theta_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0 , \qquad \partial_{[\mu}\, \omega_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} \equiv \partial_{[\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} \neq 0 \text{ [3]} . \tag{57}$$

Le courant

$$j^{\sigma} = \sqrt{-\frac{m}{6}}\, \varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\, \partial_{[\mu}\, W_{\nu\rho]} \tag{58}$$

n'est pas nul. On peut ainsi définir une force de Lorentz

$$f_{\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, \partial_{[\mu}\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}]} \neq 0 . \tag{59}$$

a) Si l'apport phénoménologique matériel $\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho}$ n'est pas nul

$$\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho} \neq 0 \tag{60}$$

l'intégration sur dV des conditions (56) conduit aux équations du mouvement des particules chargées.

Les résultats déduits par cette méthode coïncident, dans le cas statique, avec ceux qu'introduit l'emploi de la solution harmonique complète (12), solution de $\Delta\,\Delta\,\varphi = 0$. L'utilisation de la méthode des singularités dispense évidemment de l'intervention explicite d'un terme matériel phénoménologique $\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho}$, intervention que requiert au contraire la méthode du tenseur d'énergie.

b) Si l'on suppose en effet

$$\Theta_{\underline{\mu}}{}^{\rho} = 0 \tag{61}$$

la théorie d'Einstein, sous sa forme primitive, ne réussit pas à tirer de données purement géométriques la définition d'un terme d'accélération. Portée dans (56), la condition (61) annulerait purement et simplement la force de Lorentz f_{μ} péniblement acquise par l'hypothèse $\partial_{[\mu}\, W_{\alpha\beta]} \neq 0$. Toutefois, il est essentiel de noter que ce qui précède suppose toujours les conditions

$$\partial_{\rho}\, \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} = 0 . \tag{62}$$

Or celles-ci — Einstein l'avait déjà remarqué — ne sont pas inhérentes à une théorie de ce type. On peut donc se demander si une théorie élargie qui autoriserait

$$\partial_{\mu}\, \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} \neq 0 \tag{63}$$

permettrait, par le fait même, l'une ou l'autre des possibilités suivantes :

α) L'introduction d'un terme matériel à partir d'une vitesse d'univers liée au courant de convection (63).

β) La détermination moins restrictive d'un champ électromagnétique qui laisserait alors subsister une force de Lorentz même si des équations du champ élargies étaient réalisées.

Nous verrons que α) mais non β) semble résulter d'un élargissement de la théorie.

Remarque. — Dans ce qui précède, nous avons utilisé la métrique particulière $m^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, g^{\underline{\mu\nu}}$, métrique privilégiée en raison de la forme des identités. Au contraire, les équations du mouvement peuvent être établies pour une métrique quelconque. Dans ce cas il conviendrait donc de retranscrire les identités dans la métrique $a_{\mu\nu}$ choisie.

Les résultats ne sont pas modifiés dans leur principe. En effet, quelle que soit la métrique adoptée, un double jeu d'identités (identités (39) et identités riemanniennes relatives à la métrique choisie) intervient toujours dans la théorie. Toutefois, la divergence $\overset{(a)}{\nabla}_\rho\, t'^{\rho}_{\mu}$ n'est pas identique au second membre de (46) si la métrique est quelconque. En choisissant par exemple la métrique

$$a_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}} = \gamma_{\mu\nu} \tag{64}$$

on introduit le terme supplémentaire

$$\overset{(\gamma)}{G}_{\lambda\nu}\, \overset{(\gamma)}{\nabla}{}^{\mu}\, \tau^{\lambda}_{\mu} - (\overset{(\gamma)}{\nabla}_{\sigma}\, \overset{(\gamma)}{G}_{\lambda\nu} - \overset{(\gamma)}{\nabla}_{\nu}\, \overset{(\gamma)}{G}_{\lambda\sigma})\, \tau^{\sigma\lambda} \tag{65}$$

en posant comme en $(1)_2$

$$\tau^{\lambda}_{\mu} = -\varphi_{\mu\sigma}\,\varphi^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\varphi_{\sigma\tau}\,\varphi^{\sigma\tau}\,. \tag{66}$$

Ce terme est négligeable par rapport au reste du second membre dès qu'on introduit les approximations usuelles sur la métrique.

8. — Généralisation de la théorie asymétrique

Nous allons maintenant développer une théorie plus générale — et comme nous le verrons trop générale — permettant d'abandonner l'introduction des termes phénoménologiques matériels (60).

Nous supposerons que la fonction d'action $\mathfrak{L}$ dépend de la connexion affine $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et de ses dérivées du premier ordre par l'intermédiaire des trois tenseurs qui décrivent la structure d'une variété à connexion affine quelconque.

a) La contraction de première espèce du tenseur de courbure c'est-à-dire le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho\,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu\,\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \tag{67}$$

b) Une contraction de seconde espèce du tenseur de courbure, contraction « segmentaire » ou courbure d'homothétie.

$$P_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\rho\mu\nu} = \partial_\nu\,\Gamma^{\rho}_{\rho\mu} - \partial_\mu\,\Gamma^{\rho}_{\rho\nu} \tag{68}$$

c) Une contraction du tenseur de torsion $\Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ qui définit le « vecteur de torsion »

$$\Gamma_\mu = \Gamma^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}\,. \tag{69}$$

Bien entendu (68) et (69) sont identiquement nuls dans une variété supposée *a priori* riemannienne. Nous pouvons donc aussi adopter comme extension « naturelle » du tenseur de Ricci riemannien, la fonction $K_{\mu\nu}$ formée à partir d'une combinaison linéaire de $R_{\mu\nu}$, $P_{\mu\nu}$, $\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu$. Posons

$$K_{\mu\nu} = a\,R_{\mu\nu} + b\,\tilde{R}_{\nu\mu} + c\,P_{\mu\nu} + d\,\tilde{P}_{\mu\nu} + e\,\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu \tag{70}$$

a, b, c, d, e sont des coefficients constants et la notation $\sim$ se rapporte au tenseur transposé c'est-à-dire formé avec $\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$. (Une discussion que nous ne reproduirons pas ici amène à supprimer les termes $a' R_{\nu\mu} + b' R_{\mu\nu}$ que l'on pourrait introduire dans (70)).

On peut, bien entendu, effectuer les variations $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et $\delta\mathcal{G}^{\mu\nu}$ et opérer ensuite, dans les équations ainsi obtenues, le changement de variables :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = L^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\,(\delta^{\rho}_{\mu}\,\Gamma_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\,\Gamma_{\mu}) + m\,(\delta^{\rho}_{\mu}\,\Gamma_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}\,\Gamma_{\mu}) \rightarrow L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0 \tag{71}$$

(m étant un facteur quelconque) qui nous ramènerait à une connexion à vecteur de torsion nul ([26]).

En fait, il est préférable pour la facilité des calculs — bien qu'en principe équivalent — de partir a priori d'une telle connexion en introduisant bien entendu les multiplicateurs de Lagrange correspondants. On posera donc :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{72}$$

avec :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{G}^{\mu\nu}\,K_{\mu\nu} \qquad \mathcal{L}_1 = \mathcal{A}^{\mu}\,L_{\mu} \qquad \mathcal{L}_2 = \sigma\,(\mathcal{G}^{\mu\nu}\,\Gamma_{\mu}\,\Gamma_{\nu} - 2\,\varkappa^2\sqrt{-g}) \tag{73}$$

$\mathcal{L}_1$ s'introduit en raison des hypothèses a priori (71) sur $L_{\mu} = L^{\rho}_{\mu\rho} = 0$; $\mathcal{L}_2$ traduit (par variation $\delta\sigma$) une condition de normalisation imposée à priori à Γ_{μ}. Ces conditions sont introduites jusqu'ici à titre d'hypothèses.

On constate aisément que $K_{\mu\nu}$ a l'expression suivante (en posant $a + b = 1$) :

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} &+ \alpha\,(\partial_{\mu}\,L^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} - \partial_{\nu}\,L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}) + q\,(\partial_{\mu}\,\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\,\Gamma_{\mu}) + p\,\Gamma_{\mu}\,\Gamma_{\nu} \\ &+ \beta\,(\partial_{\mu}\,\Gamma_{\nu} + \partial_{\nu}\,\Gamma_{\mu} - 2\,L^{\rho}_{\mu\nu}\,\Gamma_{\rho}) \end{aligned} \tag{74}$$

$W_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci formé à partir de la connexion $L^{\rho}_{\mu\nu}$ à vecteur de torsion nul :

$$W_{\mu\nu} \equiv \partial_{\rho}\,L^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\,L^{\rho}_{\mu\rho} + L^{\lambda}_{\mu\nu}\,L^{\rho}_{\lambda\rho} - L^{\lambda}_{\mu\rho}\,L^{\rho}_{\lambda\nu}\,, \tag{75}$$

et α, β, q, p des constantes qui s'expriment aisément en fonction de a, b, c, d, e de (70).

Les équations de la théorie se déduisent ainsi de :

$$\delta \int \mathcal{L}\,d\tau = 0 \tag{76}$$

$\mathcal{L}$ étant défini par (72) et (73).

9. — Equations du champ

a) Les équations de liaison s'obtiennent en considérant séparément les deux variations $\delta L^{\rho}_{\mu\nu}$ et $\delta\Gamma_{\rho}$. Elles conduisent aux expressions :

$$\Pi^{\mu\nu}_{\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L^{\rho}_{\mu\nu}} - \partial_{\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_{\sigma}\,L^{\rho}_{\mu\nu})}\right) = 0 \tag{77}$$

$$\Sigma^{\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Gamma_{\rho}} - \partial_{\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_{\sigma}\,\Gamma_{\rho})}\right) = 0 \tag{78}$$

Elles sont équivalentes à :

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}_{+-}\,;_{\rho} = -\frac{2}{3}\,\delta^{\mu}_{\rho}\,\partial_\sigma\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\nu\sigma}} - \frac{2\alpha}{3}\,(\delta^{\mu}_{\rho}\,\partial_\sigma\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\nu\sigma}} + \delta^{\nu}_{\rho}\,\partial_\sigma\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\mu\sigma}}) \tag{79}$$

$$-2\,\beta\,\mathcal{G}^{\mu\nu}\,\Gamma_\rho + \frac{2\beta}{3}(\delta^{\mu}_{\rho}\,\mathcal{G}^{\sigma\nu} + \delta^{\nu}_{\rho}\,\mathcal{G}^{\mu\sigma})\,\Gamma_\sigma$$

et à :

$$\left[q + \frac{5\beta}{3}(1+2a)\right]\partial_\sigma\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}} = \left(\frac{4\beta^2}{3} - p - \sigma\right)\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\sigma\rho}}\,\Gamma_\sigma \tag{80}$$

b) D'autre part, les équations du champ qu'on obtient par variations s'écrivent alors :

$$\omega_{\mu\nu} = 0 \tag{81}$$

avec :

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \mathrm{K}_{\mu\nu} + \sigma\,(\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu - \varkappa^2\,g_{\mu\nu}) \tag{82}$$

c'est-à-dire en scindant et en explicitant $\mathrm{K}_{\mu\nu}$ d'après (74) :

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} \equiv \mathrm{W}_{\underline{\mu\nu}} + \mathrm{W}''_{\underline{\mu\nu}} = 0 \tag{83}$$

$$\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \equiv \mathrm{W}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \mathrm{W}''_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = 0 \tag{84}$$

en posant :

$$\mathrm{W}''_{\underline{\mu\nu}} \equiv (p+\sigma)\,\Gamma_\mu\,\Gamma_\nu + \beta\,(\partial_\mu\,\Gamma_\nu + \partial_\nu\,\Gamma_\mu - 2\mathrm{L}^{\rho}_{\underline{\mu\nu}}\,\Gamma_\rho) - \sigma\,\varkappa^2\,g_{\underline{\mu\nu}} \tag{85}$$

$$\mathrm{W}''_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \equiv \alpha(\partial_\mu\,\mathrm{L}^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} - \partial_\nu\,\mathrm{L}^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}) + q\,(\partial_\mu\,\Gamma_\nu - \partial_\nu\,\Gamma_\mu) - 2\beta\,\mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}\,\Gamma_\rho - \sigma\,\varkappa^2\,g_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \tag{86}$$

10. — Les possibilités offertes par une extension de la théorie

La théorie unitaire d'Einstein s'obtient immédiatement en posant dans (73) et (74) :

$$\alpha = \beta = p = \sigma = 0\,, \qquad q = -\frac{1}{3}\,, \tag{87}$$

ce qui entraîne d'après (80) :

$$\partial_\sigma\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}} = 0\,. \tag{62}$$

a) D'une façon plus générale la conclusion (62) résultera d'un principe variationnel si :

$$q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha) \neq 0\,, \qquad p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3} = 0 \tag{88$_1$}$$

b) Par contre si

$$q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha) \neq 0\,, \qquad p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3} \neq 0 \tag{88$_2$}$$

il existe une relation (80) qui permet de déterminer le quadrivecteur Γ_ρ (que les équations (79) laissent complètement arbitraire) en fonction du champ asymétrique $g_{\mu\nu}$ par l'intermédiaire d'un courant $\partial_\rho\,\mathcal{G}^{\underset{\smile}{\mu\rho}} \neq 0$.

c) Au contraire, si

$$q + \frac{5\beta}{3}(1 + 2\alpha) = 0\,, \qquad p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3} \neq 0 \qquad (88)_3$$

le vecteur Γ_ρ est nul. On déduit ainsi d'un principe variationnel les équations du « système fort ».

d) Enfin si

$$q + \frac{5\beta}{3}(1 + 2\alpha) = 0\,, \qquad p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3} = 0 \qquad (88)_4$$

les deux vecteurs $\partial_\sigma \mathcal{G}^{\rho\sigma} \neq 0$ et $\Gamma_\rho \neq 0$ sont indépendants l'un de l'autre.

Dans ce qui suit nous postulerons toujours :

$$p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3} \neq 0 \qquad (88)$$

ce qui entraîne au contraire de la théorie d'Einstein :

$$\partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}} \neq 0 \qquad (63)$$

Suivant les hypothèses faites sur $q + \dfrac{5\beta}{3}(1 + 2\alpha)$, $\partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}$ sera lié au vecteur Γ_ρ ou en sera, au contraire, indépendant.

11. — Identités

En tenant compte des seules équations de liaison généralisées (équations (79) et (80), on peut établir ([30], [31]) les identités suivantes qui généralisent (38) :

$$\begin{aligned}
&\partial_\lambda (\mathcal{G}^{\alpha\lambda} W_{\alpha\sigma} + \mathcal{G}^{\lambda\alpha} W_{\sigma\alpha}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\sigma W_{\alpha\beta} + 2\alpha (\partial_\tau \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\alpha\tau}}) (\partial_\alpha L^{\rho}_{\underline{\sigma\rho}} - \partial_\sigma L^{\rho}_{\underline{\alpha\rho}}) \\
&\quad - 2\beta\, [\partial_\lambda (\mathcal{G}^{\alpha\lambda} L^{\tau}_{\alpha\sigma} + \mathcal{G}^{\lambda\alpha} L^{\tau}_{\sigma\alpha})\, \Gamma_\tau - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \Gamma_\tau\, \partial_\sigma L^{\tau}_{\alpha\beta}] \\
&\quad + 2\beta\, [\partial_\tau \mathcal{G}^{\alpha\tau} - \frac{5}{3}(1 + 2\alpha)\, \partial_\tau \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\alpha\tau}} + \frac{4\beta}{3} \mathcal{G}^{\underline{\alpha\tau}} \Gamma_\tau]\, \partial_\alpha \Gamma_\sigma \equiv 0\,.
\end{aligned} \qquad (89)$$

Nous définirons comme précédemment une métrique $m_{\mu\nu}$ telle que :

$$\mathcal{G}^{\underline{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\, g^{\underline{\mu\nu}} = \sqrt{-m}\, m^{\mu\nu} = \mathfrak{M}^{\underline{\mu\nu}} \qquad (90)$$

Elle s'écrira encore :

$$m^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, g^{\underline{\mu\nu}} = \sqrt{\frac{h}{g}}\, h^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, h^{\mu\nu}\,, \qquad m_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\, h_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{h}}\, h_{\mu\nu} \qquad (91)$$

avec :

$$g^{\underline{\mu\nu}} = h^{\mu\nu}\,,\ g_{\underline{\mu\nu}} = \gamma_{\mu\nu}, \frac{1}{h} = \det h^{\mu\nu}\,,\ \gamma = \det \gamma_{\mu\nu}\,,\ (\gamma h = g^2)\,. \qquad (92)$$

On constate alors que les identités (89) se mettent sous la forme suivante :

$$\sqrt{-m}\, \overset{(m)}{\nabla}_\lambda S_\sigma{}^\lambda \equiv \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\alpha\lambda}} [W_{[\underset{\smile}{\alpha\sigma}, \lambda]} - 2\beta\, \partial_{[\lambda} (L^{\rho}_{\underset{\smile}{\alpha\sigma}]} \Gamma_\rho)]$$

$$+ 2\beta \overset{(m)}{\nabla}_\lambda \left(m^{\alpha\lambda} L^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} \Gamma_\tau - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma m^{\alpha\beta} L^{\tau}_{\underline{\alpha\beta}}\right)$$

$$- (\partial^\lambda \mathcal{G}^{\alpha\lambda}_{\smile}) \left[W_{\underset{\smile}{\alpha\sigma}} + \alpha (\partial_\alpha L^{\rho}_{\underline{\sigma\rho}} - \partial_\sigma L^{\rho}_{\underline{\alpha\rho}}) - 2\beta L^{\tau}_{\underset{\smile}{\alpha\sigma}} \Gamma_\tau\right.$$

$$\left. + \frac{5\beta}{3} (1 + 2\alpha) (\partial_\sigma \Gamma_\alpha - \partial_\alpha \Gamma_\sigma)\right] - \beta (\partial_\tau \mathcal{G}^{\underline{\alpha\tau}}) (\partial_\alpha \Gamma_\sigma + \partial_\sigma \Gamma_\alpha)$$

$$- \frac{4\beta^2}{3} \mathcal{G}^{\underline{\alpha\tau}} \Gamma_\tau (\partial_\alpha \Gamma_\sigma - \partial_\sigma \Gamma_\alpha) - \beta \mathcal{G}^{\underline{\alpha\beta}} \partial_\alpha \partial_\beta \Gamma_\sigma \equiv K_\sigma \tag{93}$$

en posant :

$$S_\sigma{}^\lambda \equiv m^{\lambda\alpha} W_{\underline{\alpha\sigma}} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma m^{\alpha\beta} W_{\underline{\alpha\beta}} \tag{94}$$

et en désignant par $\overset{(m)}{\nabla}_\lambda$ la dérivation covariante par rapport à la connexion riemannienne $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{(m)}$

Posons comme précédemment :

$$W_{\underline{\alpha\beta}} = \overset{(m)}{G}_{\alpha\beta} + \overset{(m)}{W'}_{\underline{\alpha\beta}} \tag{95}$$

et

$$\overset{(m)}{S}_\sigma{}^\lambda = m^{\lambda\alpha} \overset{(m)}{G}_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma m^{\alpha\beta} \overset{(m)}{G}_{\alpha\beta} - t'^\lambda_\sigma = m^{\lambda\alpha} \overset{(m)}{W'}_{\underline{\alpha\sigma}} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma m^{\alpha\beta} \overset{(m)}{W'}_{\underline{\alpha\beta}} \tag{96}$$

$\overset{(m)}{G}_{\alpha\beta}$ désignant le tenseur de Ricci formé avec les symboles $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{(m)}$ et $W'_{\underline{\alpha\beta}}$ le reste du tenseur $W_{\underline{\alpha\beta}}$.

En tenant compte des identités riemanniennes :

$$\overset{(m)}{\nabla}_\lambda \overset{(m)}{S}_\sigma{}^\lambda \equiv 0 \tag{97}$$

(93) s'écrit donc :

$$\sqrt{-m}\; \overset{(m)}{\nabla}_\lambda \overset{(m)}{t'}_\sigma{}^\lambda \equiv - K_\sigma . \tag{98}$$

12. — Equations du mouvement

Nous supposerons toujours :

$$\partial_\rho \mathcal{G}^{\mu\rho}_{\smile} \neq 0 . \tag{63}$$

Considérons alors les définitions (83) et (84) de la quantité $\omega_{\mu\nu}$ dont la disparition ($\omega_{\mu\nu} = 0$) constitue les équations du champ.

En posant comme précédemment :

$$W_{\underline{\mu\nu}} = \overset{(a)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(a)}{W'}_{\underline{\mu\nu}} \tag{99}$$

$\overset{(a)}{G}_{\mu\nu}$ désignant le tenseur de Ricci formé avec les symboles $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}_{(a)}$ relatifs à la métrique quelconque $a_{\mu\nu}$ et $\overset{(a)}{W'}_{\underline{\mu\nu}}$ représentant le reste du tenseur $W_{\underline{\mu\nu}}$, on obtient d'après (83) et (99) :

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} \equiv \overset{(a)}{G}_{\mu\nu} + \overset{(a)}{W'}_{\underline{\mu\nu}} + W''_{\underline{\mu\nu}} \tag{100}$$

c'est-à-dire :

$$\Omega_{\underline{\mu}}{}^{\rho} \equiv a^{\rho\nu}\,\omega_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu}{}^{\rho}\;a^{\alpha\beta}\,\omega_{\underline{\alpha\beta}} \equiv \overset{(a)}{S}_{\mu}{}^{\rho} - \overset{(a)}{t'}_{\mu}{}^{\rho} - t''{}_{\mu}{}^{\rho}\,. \qquad (101)$$

On a posé :

$$\overset{(a)}{S}_{\mu\nu} \equiv \overset{(a)}{G}_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}\,a_{\mu\nu}\,a^{\alpha\beta}\,\overset{(a)}{G}_{\alpha\beta} \qquad (102)$$

$$-\,t'{}_{\mu\nu} \equiv \overset{(a)}{W'}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,a_{\mu\nu}\,a^{\alpha\beta}\,\overset{(a)}{W'}_{\underline{\alpha\beta}} \qquad t''_{\mu\nu} = W''_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\,a_{\mu\nu}\,a^{\alpha\beta}\,W''_{\underline{\alpha\beta}} \quad (103)$$

Les équations du champ relatives au groupe symétrique :

$$\omega_{\underline{\mu\nu}} = 0 \qquad \text{d'où } \Omega_{\underline{\mu}}{}^{\rho} = 0 \qquad (104)$$

exigent alors d'après (101) les conditions :

$$\overset{(a)}{\nabla}_{\rho}\;\overset{(a)}{t'}_{\mu}{}^{\rho} + \overset{(a)}{\nabla}_{\rho}\,t''{}_{\mu}{}^{\rho} = 0 \qquad (105)$$

compte tenu de l'identité riemanienne : $\overset{(a)}{\nabla}_{\rho}\,\overset{(a)}{S}_{\mu}{}^{\rho} \equiv 0$.

Si nous supposons maintenant que la métrique $a_{\mu\nu}$ jusque là arbitraire est la métrique telle que $m^{\mu\nu} = \sqrt{\dfrac{h}{g}}\,g^{\underline{\mu\nu}}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{h} = \det g^{\underline{\mu\nu}}\right)$

a) La divergence $\overset{(m)}{\nabla}_{\rho}\,\overset{(m)}{t'}_{\mu}{}^{\rho}$ est donnée immédiatement par les identités (98).

b) La divergence $\overset{(m)}{\nabla}_{\rho}\,\overset{(m)}{t''}_{\mu}{}^{\rho}$ se calcule à partir des identités de définition (103) et (85). Après quelques transformations on trouve en portant ces résultats dans (105) écrite pour une métrique $m_{\mu\nu}$:

$$-\overset{(m)}{\nabla}_{\rho}\,t'{}_{\nu}{}^{\rho} - \overset{(m)}{\nabla}_{\rho}t''{}_{\nu}{}^{\rho} \equiv -\frac{1}{2}\,g^{\underset{\smile}{\mu\rho}}\,[W_{\underset{\smile}{[\mu\nu,\rho]}} - 2\beta\,\partial_{\lambda}\,(L^{\lambda}_{[\underset{\smile}{\mu\nu}}\,\Gamma_{\rho]})]$$

$$-\left(\overset{(m)}{\nabla}_{\lambda}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,g^{\underset{\smile}{\mu\nu}}\right)[W_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \alpha\,(\partial_{\mu}\,t^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} - \partial_{\nu}\,L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}) + q\,(\partial_{\mu}\,\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\,\Gamma_{\mu}) - 2\beta\,L^{\rho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}\,\Gamma_{\rho}]$$

$$-\overset{(m)}{\nabla}_{\lambda}\left[\sigma\,\varkappa^{2}\left(m^{\lambda\tau}\,g_{\underline{\nu\tau}} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\nu}\,m^{\alpha\beta}\,g_{\underline{\alpha\beta}}\right) + \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\left(\mathcal{G}^{\underline{\alpha\lambda}}\,\Gamma_{\nu}\,\Gamma_{\alpha} - \frac{1}{2}\,\delta^{\lambda}_{\nu}\,\mathcal{G}^{\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha}\,\Gamma_{\beta}\right)\partial_{\lambda}\,\sigma\,. \right. \qquad (106)$$

Les expressions qui interviennent dans les crochets se calculent aisément en fonction de $g_{\mu\nu}$ et de Γ_{ρ} en utilisant les équations de liaison (79) et (80). On vérifie auparavant le résultat suivant : en écrivant, d'après (74) et (84) :

$$K_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \equiv W_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \alpha\,(\partial_{\mu}\,L^{\rho}_{\underline{\nu\rho}} - \partial_{\nu}\,L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}) + q\,(\partial_{\mu}\,\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\,\Gamma_{\mu}) - 2\beta\,L^{\rho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}\,\Gamma_{\rho}$$

$$\equiv \omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \sigma\,\varkappa^{2}\,g_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \qquad (107)$$

on constate que les équations (106) s'écrivent encore :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,g^{\underset{\smile}{\nu\rho}}\,\omega_{\underset{\smile}{[\mu\nu,\rho]}} + \left(\overset{(m)}{\nabla}_{\lambda}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,g^{\underset{\smile}{\nu\lambda}}\right)\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = 0 \qquad (108)$$

en négligeant les termes en $\partial_{\nu}\,(\sigma\,\varkappa^{2})$.

Ainsi dans la version élargie de la théorie asymétrique comme dans la version initiale, les équations du mouvement ne peuvent avoir un sens que si l'on suppose que l'une au moins des expressions $\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ ou $\theta_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ n'est pas nulle.

a) Si l'on suppose la réalisation des équations antisymétriques du champ ($\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = 0$), il est nécessaire pour définir une force de Lorentz d'introduire un terme phénoménologique supplémentaire. Le plus simple serait par exemple $\theta_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = \lambda' g_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ comme dans la théorie de W. B. Bonnor.

Toutefois, la solution qui résulterait de cette théorie pourrait être évidemment très différente de celle que propose W. B. Bonnor car nous disposons ici des équations de liaison :

$$[q + \frac{5\beta}{3}(1 + 2\alpha)]\, \partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}} = \left(\frac{4\beta^2}{3} - p - \sigma\right) \mathcal{G}^{\underline{\sigma\rho}}\, \Gamma_\sigma . \tag{80}$$

qui permettent de considérer les deux vecteurs $\partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}$ et Γ_ρ comme des grandeurs différentes l'une et l'autre de zéro.

b) Si l'on postule au contraire que les équations antisymétriques du champ ne sont pas réalisées partout mais qu'il est possible de définir des régions telles que :

$$\omega_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \neq 0 \tag{109}$$

les équations dynamiques seront (108) (aux termes en $\partial_\nu \sigma$ près), le dernier terme étant un terme supplémentaire propre à cette version élargie.

Explicitons le second membre de (107) en fonction de $g_{\mu\nu}$ et de Γ_ρ. Pour cela, il est commode de définir à partir de $L^\rho_{\mu\nu}$ ($L^\rho_{\underset{\smile}{\mu\rho}} \equiv 0$) et de $\partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}$ une connexion auxiliaire $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ telle que les équations de liaison (79) s'écriront :

$$D_\rho(\Delta)\, \mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}} = 0 \tag{110}$$

en fonction de $\Delta^\rho_{\mu\nu}$.

Le changement de connexion permet d'exprimer $W^\rho_{\mu\nu}(L)$ en fonction de $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ de Γ_ρ et de $\partial_\rho \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\sigma\rho}}$ et, par conséquent, de calculer $K_{\mu\nu}(L)$ donné par (74) en fonction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}(\Delta)$, de Γ_ρ et de $\partial_\sigma \mathcal{G}^{\underset{\smile}{\rho\sigma}}$. Or on connaît la solution générale de (110) et par conséquent l'expression de $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ en fonction de la métrique $g_{\underline{\mu\nu}}$.

Introduisons les approximations usuelles sur le champ $g_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = \varphi_{\mu\nu}$, c'est-à-dire supposons que ce champ et ses dérivées des deux premiers ordres sont des infiniment petits ($\sim \varepsilon$). En posant ainsi :

$$\varphi_{\mu\nu} = \varepsilon \underset{1}{\varphi}_{\mu\nu} + 0(\varepsilon^2) \tag{111}$$

et en négligeant les termes en ε^3 devant l'unité, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} K_{\underset{\smile}{\mu\nu}} &\equiv W_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \alpha(\partial_\mu L^\rho_{\underset{\smile}{\nu\rho}} - \partial_\nu L^\rho_{\underset{\smile}{\mu\rho}}) + q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) - 2\beta L^\rho_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \Gamma_\rho \\ &\equiv \nabla_\rho \Delta^\rho_{\underset{\smile}{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4\alpha}{3}(1+\alpha)\right)(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) \\ &\quad + \left[q + \frac{5\beta}{3}(1 + 2\alpha)\right](\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) \end{aligned} \tag{112}$$

c'est-à-dire en utilisant la solution générale de (110)

$$\underset{\smile}{K_{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{2} \Box \varphi_{\mu\nu} + \frac{2\alpha}{3}(1+\alpha)(\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu)$$
$$+ \left[q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha)\right](\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) . \tag{113}$$

Dans ces expressions, $f_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\underline{\mu\rho}} \partial_\lambda \mathfrak{G}^{\rho\lambda}$ s'exprime en fonction de Γ_ρ au moyen des équations de liaison (80) qui s'écrivent encore avec l'approximation (111)

$$\left[q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha)\right] \partial_\sigma \varphi^{\rho\sigma} = -\left(p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3}\right)\Gamma^\rho \tag{114}$$

c'est-à-dire

$$f_\mu = -k\,\Gamma_\mu \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{p + \sigma - \frac{4\beta^2}{3}}{q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha)} \neq 0 \tag{115}$$

En tenant compte de ces équations de liaison et en remplaçant $K_{\mu\nu}$ par son expression approchée (113) dans les équations dynamiques (106), il vient alors, aux termes en $\partial_\nu \sigma$ près :

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, \underset{\smile}{g^{\alpha\beta}} \Box \varphi_{\alpha\beta\rho} + \frac{k}{2}\Gamma^\alpha \Box \varphi_{\rho\alpha}$$
$$+ \frac{k}{2}\left[q + \frac{5\beta}{3}(1+2\alpha) - 2\alpha k(1+\alpha)\right]\Gamma^\alpha(\partial_\rho \Gamma_\alpha - \partial_\alpha \Gamma_\rho) = 0 \tag{116}$$

avec

$$\varphi_{\rho\alpha} = \underset{\smile}{g_{\rho\alpha}} . \qquad \varphi_{\alpha\beta\rho} = \partial_{[\rho}\, \varphi_{\alpha\beta]} .$$

Le premier terme intervient dans la théorie initiale d'Einstein, les autres supposent $k \neq 0$ c'est-à-dire $\partial_\rho \underset{\smile}{\mathfrak{G}^{\mu\rho}} \neq 0$ et sont propres à cette généralisation.

D'après les équations de liaison, Γ_α représente les composantes d'un quadrivecteur normé proportionnel au courant de convection c'est-à-dire à la quadrivitesse u_α. Le terme $\Gamma^\alpha \partial_\alpha \Gamma_\nu$ est donc un terme d'accélération.

Les équations (116) (aux termes en $\partial_\nu \sigma$ près) auront donc la forme suivante :

$$u^\alpha \partial_\alpha u_\rho \simeq K_1 \underset{\smile}{g^{\alpha\beta}} \Box \varphi_{\alpha\beta\rho} + K_2 u^\alpha \Box \varphi_{\rho\alpha} \tag{117}$$

K_1 et K_2 étant deux scalaires que nous n'expliciterons pas. Bien entendu ces résultats supposent essentiellement

$$\underset{\smile}{\omega_{\mu\nu}} \neq 0 \tag{109}$$

c'est-à-dire une application incomplète du principe variationnel. Ils se réduiraient à l'intervention d'une force de Lorentz (terme en K_1) dans la théorie non élargie, force qui devrait disparaître d'après les conditions (117).

13. — Le champ antisymétrique et les équations du mouvement

Cherchons maintenant une solution des équations de liaison

$$\left[q+\frac{5\beta}{3}(1+2\alpha)\right]\partial_\sigma \mathfrak{G}^{\underset{\vee}{\sigma\rho}}=\left(p+\sigma-\frac{4\beta^2}{3}\right)\mathfrak{G}^{\underline{\sigma\rho}}\,\Gamma_\sigma . \tag{118}$$

En adoptant la métrique

$$m^{\mu\nu}=\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,g^{\underline{\mu\nu}}$$

ou a donc encore

$$f_\rho=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,m_{\rho\lambda}\,\partial_\sigma\,\mathfrak{G}^{\lambda\sigma}=-k\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\,\Gamma_\rho\,,\qquad k=\frac{p+\sigma-\dfrac{4\beta^2}{3}}{q+\dfrac{5\beta}{3}(1+2\alpha)}. \tag{120}$$

Posons

$$g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}=\varphi_{\mu\nu}=\partial_\mu\,\varphi_\nu-\partial_\nu\,\varphi_\mu+\nabla^\rho\,\chi_{\mu\nu\rho}\,, \tag{121}$$

le terme $\nabla^\rho\,\chi_{\mu\nu\rho}=\dfrac{\sqrt{-m}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,(\partial^\rho\,\chi^\sigma-\partial^\sigma\,\chi^\rho)$ correspondant au potentiel introduit par J. Treder et E. Clauser.

En tenant compte de l'approximation (111) admise sur les $\varphi_{\mu\nu}$, une solution du type précédent doit satisfaire

$$\nabla^\sigma\left(\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\,\varphi_{\rho\sigma}\right)=-k\,\Gamma_\rho \tag{122}$$

c'est-à-dire

$$\Box\,\varphi_\rho\simeq k\,\Gamma_\rho\,,\qquad\qquad \Box=\nabla^\rho\,\nabla_\rho \tag{123}$$

ceci en admettant que φ_ρ est assujetti à une condition de Lorentz

$$\nabla_\rho\,\varphi^\rho=0 \tag{124}$$

et en faisant sur la métrique les approximations qui permettent de négliger les termes introduits par la permutation $\nabla_\rho\,\nabla_\sigma-\nabla_\sigma\,\nabla_\rho$ des dérivations covariantes.

On obtient alors à partir de (121)

$$\Box\,\varphi_{\mu\nu}=k\,(\partial_\mu\,\Gamma_\nu-\partial_\nu\,\Gamma_\mu)+\nabla^\rho\,\Box\,\chi_{\mu\nu\rho} \tag{125}$$

et

$$\varphi_{\mu\nu\rho}\equiv\partial_\mu\,\varphi_{\nu\rho}+\partial_\rho\,\varphi_{\mu\nu}+\partial_\nu\,\varphi_{\rho\mu}=\nabla^\lambda\,\chi_{\rho\mu\nu\lambda}-\Box\,\chi_{\mu\nu\rho} \tag{126}$$

avec

$$\chi_{\rho\mu\nu\lambda}=\partial_\rho\,\chi_{\mu\nu\lambda}-\partial_\lambda\,\chi_{\mu\nu\rho}-\partial_\mu\,\chi_{\rho\nu\lambda}-\partial_\nu\,\chi_{\mu\rho\lambda}\,. \tag{127}$$

D'autre part, quel que soit $\varphi_{\mu\nu}$ on a toujours l'identité suivante

$$\Box\,\varphi_{\mu\nu}\equiv\nabla^\lambda\,\varphi_{\mu\nu\lambda}+k\,(\partial_\mu\,\Gamma_\nu-\partial_\nu\,\Gamma_\mu)\,. \tag{128}$$

La comparaison de (125), (126) et (128) conduit donc à poser :

$$\square\, \chi_{\mu\nu\rho} = \varphi_{\mu\nu\rho} + \chi'_{\mu\nu\rho} \tag{129}$$

$$\nabla^\lambda \chi_{\rho\mu\nu\lambda} = -\chi'_{\mu\nu\rho}\,. \tag{130}$$

Les grandeurs de la théorie se déduisent donc de deux potentiels : l'un vectoriel φ_ρ satisfaisant (123), l'autre pseudo-vectoriel $\chi_{\mu\nu\rho}$. En substituant (126) et (128) dans les équations du mouvement (117) on obtient avec les approximations usuelles

$$u^\alpha \partial_\alpha u_p \simeq K'_1 g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \square\,\square\, \chi_{\alpha\beta p} - K'_1 g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \square\, \chi'_{\alpha\beta p} + K'_2 u^\alpha \nabla^\lambda \square\, \chi_{\alpha\lambda\rho} \tag{131}$$

en désignant par K'_1 et K'_2 deux nouveaux scalaires et en négligeant les termes en $\partial_p \sigma$ et en $\partial_p(\varkappa^2)$ dont nous n'avons pas tenu compte dans les équations du mouvement.

Les résultats obtenus permettent ainsi de simplifier la version élargie en posant dans (115)

$$\alpha = p = \beta = 0\,, \qquad k = \frac{\sigma}{q} \neq 0\,. \tag{132}$$

Ces hypothèses ont été étudiées par divers auteurs ([27] [28] [30]). Elles permettent de partir de la fonction d'action plus simple

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + \mathcal{A}^\mu L^\rho_{\underset{\smile}{\mu\rho}} + \sigma\, \mathcal{G}^{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \varkappa^2 g_{\mu\nu}) \tag{133}$$

avec

$$K_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} + q\,(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) \tag{134}$$

Mais, quelle que soit la version élargie, elle ne peut aboutir à des équations dynamiques significatives en l'absence de termes phénoménologiques qu'en supposant $K_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \neq 0$. Cette conclusion exige une renonciation à l'application stricte d'un principe variationnel.

Cas statique. — Le potentiel-vecteur se réduit alors à sa composante $\varphi = \varphi_0$, le potentiel pseudo-vectoriel à $\chi_{123} = \chi$. Une solution

$$\chi = \chi_{123} = \frac{a}{r} + cr \tag{135}$$

satisferait à l'extérieur les conditions

$$\Delta\Delta\chi = 0\,, \qquad \Delta\chi = \frac{2c}{r}\,. \tag{136}$$

D'autre part, la relation (123) écrite dans le cas statique

$$\Delta\varphi = k\,\Gamma \qquad (\Gamma = \Gamma_0) \tag{137}$$

conduit à l'expression usuelle

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{k}{r} \Gamma\, dV\,. \tag{138}$$

Pour préciser les ressources de la théorie il serait indispensable de discuter ce qu'on peut entendre par symétrie sphérique, les prévisions qui s'attachent à ce cas particulier, et les possibilités de représenter les charges par des intégrales finies étendues à tout l'espace.

Conclusion

Nous pouvons résumer ainsi les résultats obtenus :

1) En partant d'une fonction d'action convenablement choisie, il est possible, *sans introduire aucun terme phénoménologique,* d'établir des équations du mouvement d'une particule chargée.

2) L'extension de la théorie entraîne

$$\partial_\rho \underset{\smile}{\mathcal{G}}^{\mu\rho} = k\, \underline{\mathcal{G}}^{\mu\rho}\, \Gamma_\rho \qquad \text{avec} \qquad k \neq 0\,.$$

(En théorie d'Einstein $\partial_\rho \underset{\smile}{\mathcal{G}}^{\mu\rho} = 0$, $k = 0$).

3) Le vecteur normé de composantes Γ_ρ est assimilé à un courant de convection. Il est, par conséquent, proportionnel à la quadrivitesse u^ρ. Géométriquement, il peut représenter le vecteur de torsion de la variété.

4) Les équations du mouvement font intervenir :
— un terme matériel en $\Gamma^\alpha\, \partial_\alpha\, \Gamma_\rho$;
— une force de Lorentz formée à partir du courant Γ_ρ et d'un champ déduit d'un potentiel pseudo-vectoriel $\chi_{\mu\nu\rho}$;
— des termes supplémentaires caractérisant d'autres champs.

5) L'obtention d'équations dynamiques est conditionnée par la suppression des conditions imposées au tenseur $\underset{\smile}{W}_{\mu\nu}$. Cette suppression suppose une renonciation au moins partielle à l'application systématique d'un principe variationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Einstein, *Ann. of math.*, **46**, 578 (1945); **47**, 731 (1946); *Rev. Mod. Physics*, **20**, 35 (1948); **21**, 343 (1949). The Meaning of Relativity-Appendix II, 1950, 1953.

[2] A. Einstein, Berlin Sitzungberichte, p. 32, 76, 137 (1923). Cf. aussi : A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity.

[3] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 65 (1938).

[4] A. Einstein et L. Infeld, *Ann. Math.*, **41**, 455 (1940); *J. Math.*, **1**, 209 (1949).

[5] V. Fock, *J. Phys. Acad. Sc. U.R.S.S.*, **1**, 81 (1939).

[6] A. Papapetrou, *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 57, 302 (1951); *Proc. Roy. Soc.*, **209**, 248 (1951).

[7] M. A. Tonnelat, *J. Phys. Rad.*, **12**, 81 (1951); 177 (1952); **16**, 21 (1955).

[8] M. A. Tonnelat, *C. R. Ac. Sc.*, **246**, 2277 (1958).

[9] G. Dautcourt, *C. R. Ac. Sc.*, **249**, 2159 (1959).

[10] L. Infeld, *Acta Physica Polonica*, **10**, 284 (1950).

[11] L. Infeld, *Can. Journ. Math.*, **5**, 17 (1953).

[12] J. Callaway, *Phys. Rev.*, **92**, 1567 (1953).

[13] W. B. Bonnor, *Proc. Roy. Soc.*, **226**, 366 (1954).

[14] J. Treder, *Ann. der Phys.*, **19**, 369 (1957).

[15] A. Papapetrou, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **15**, 173 (1957).

[16] E. Clauser, *Rend. Acad. Naz. Lincei VIII*, **21**, 408 (1956).

[17] E. Clauser, *Nuovo Cimento VII*, **6**, 764 (1958).
[18] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Ir. Acad.*, **49 A 3**, 43 (1943).
[19] E. Schrödinger, Communic. of the Dublin Inst., Série A, n° 6 (1951).
[20] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Ir. Acad.*, **52 A**, 1 (1948); **54 A**, 79 (1951).
[21] A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Masson, 1955).
[22] A. Einstein, *Can. Journ. Math II*, 120 (1950).
[23] S. Mavridès, *C. R. Ac. Sc.*, **244**, 2482 (1957).
[24] J. Hely, *C. R. Ac. Sc.*, **239**, 385, 747 (1954).
[25] Pham Tan Hoang, *C. R. Ac. Sc.*, **243**, 1600 (1956).
[26] M. A. Tonnelat, La théorie d'Einstein-Schrödinger et quelques-un-s de ses développements (Gauthier-Villars, 1955) (cf. note II).
[27] J. Lévy, *J. Phys. Rad.*, **20**, 747 (1959).
[28] L. Bouche, *C. R. Ac. Sc.*, **247**, 2302 (1958).
[29] D. Sciama, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, 72 (1958).
[30] Nguyen Phong Chau, *C. R. Ac. Sc.*, **250**, 3579 (1960).
[31] S. Kichenassamy, *C. R. Ac. Sc.*, **251**, 1349 (1960).

DISCUSSION

Intervention du professeur J. Wheeler

Ce fut un si grand exploit de la part d'Einstein, Infeld, Hoffmann et de chercheurs subséquents d'avoir obtenu à partir des équations du champ elles-mêmes, les équations du mouvement des concentrations d'énergie massique électriquement neutres que nous tous, j'en suis sûr, avons admis le critère qu'une théorie plus large doit donner de la même manière l'équation du mouvement de Lorentz pour une particule chargée électriquement. Il a été établi par Chase (1) que la simple adjonction aux équations du champ d'Einstein des équations du champ électromagnétique de Maxwell répond à cette exigence. Lorsque les équations de Maxwell et d'Einstein sont jointes sous la forme purement géométrique et « déjà unifiée » de Rainich (2), il résulte du travail de Chase que les équations du mouvement de Lorentz doivent apparaître comme conséquences des équations du champ. D'autre part, les équations exactes du mouvement d'une particule d'épreuve chargée ne résultent pas de la théorie du champ unifié développée par Einstein durant ces dernières années (3). Dans cette théorie, et comme conséquence des équations du champ, une particule se comporte toujours dans son mouvement comme si elle était neutre, quelle que soit la valeur de la charge qu'elle porte. Selon ce principe aucun cyclotron ne peut jamais fonctionner. Cette question des équations du mouvement des particules chargées est tellement importante que je voudrais vous demander, Madame Tonnelat, si la théorie du champ unifié que vous avez décrite conduit aux équations du mouvement de Lorentz.

(1) D. M. Chase, *Phys. Rev.*, **95**, 243 (1954).
(2) C. W. Misner et J. A. Wheeler, *Ann. Phys.*, **2**, 525 (1957).
(3) L. Infeld, *Acta Phys. Pol.*, **10**, 284 (1950).
J. Callaway, *Phys. Rev.*, **92**, 1567 (1953).

GENERALLY COVARIANT VARIATIONAL PRINCIPLES

by G. STEPHENSON

Department of Mathematics. Imperial College, London

RESUME

On applique la méthode de Palatini à divers lagrangiens, fonctions des invariants quadratiques formés avec le tenseur de courbure et ceux qui s'en déduisent pas contraction. On examine ensuite les rapports des équations du champ ainsi obtenues avec celles de la Relativité générale.

1. — Quadratic Lagrangians

In a recent paper (see STEPHENSON [1]) field equations have been obtained by applying the Palatini method (independent variation of the metric tensor g_{ik} and the affine connection Γ^s_{ik}) to three action integrals with Lagrangians quadratic in the Riemann-Christoffel tensor and its contractions in a four-dimensional space.

The three variational principles and their associated field equations are as follows; (both g_{ik} and Γ^s_{ik} are assumed to be symmetric):

Case (A)
$$\delta \int R^2 \sqrt{-g}\, d\tau = 0$$

$$R\left(R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R\right) = 0, \tag{1}$$

$$(R\, g^{ik} \sqrt{-g})_{;n} = 0 . \tag{2}$$

Case (B)
$$\delta \int R_{ik} R^{ik} \sqrt{-g}\, d\tau = 0$$

$$R_{is} R_k{}^s + R_{si} R^s{}_k - \frac{1}{2} g_{ik} R_{sm} R^{sm} = 0 , \tag{3}$$

$$(R^{\underline{ik}} \sqrt{-g})_{;n} = 0 . \tag{4}$$

Case (C)
$$\delta \int R^i{}_{jkl} R_i{}^{jkl} \sqrt{-g}\, d\tau = 0$$

$$- R_{ismn} R_k{}^{smn} + R^s{}_{imn} R_{sk}{}^{mn} + 2R^s{}_{min} R_s{}^m{}_k{}^n$$
$$- \frac{1}{2} g_{ik} R^s{}_{mnp} R_s{}^{mnp} = 0, \tag{5}$$

$$(R_i{}^{\underline{kmn}}\sqrt{-g})_{;n} = 0\,. \tag{6}$$

In all these equations :

$$R^i{}_{kmn} = -\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial \Gamma^i_{kn}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{sm}\,\Gamma^s_{kn} - \Gamma^i_{sn}\,\Gamma^s_{km},$$

$R_{ik} = R^s{}_{iks}$, $R = g^{ik} R_{ik}$ and ; means covariant differentiation with respect to Γ^s_{ik}. A bar denotes symmetry with respect to the indices under which it occurs.

These three variational principles and their resulting field equations are not only invariant under the general group of coordinate transformations (see Stephenson [3]), but also under the group of Weyl gauge transformations

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &\to \varphi(x^k)\, g_{ik} \\ \Gamma^s_{ik} &\to \Gamma^s_{ik} \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

where $\varphi(x^k)$ is an arbitrary scalar function of the coordinates. We can easily demonstrate this invariance by considering, as an example, Case (B). The Lagrangian density $R_{ik}\, R^{ik}\sqrt{-g}$ transforms under (7) as follows

$$R_{ik}\, R^{ik}\sqrt{-g} = R_{ik}\, R_{sm}\, g^{si}\, g^{mk}\sqrt{-g} \to$$
$$R_{ik}\, R_{sm}\frac{g^{si}}{\varphi}\frac{g^{mk}}{\varphi}\sqrt{-g}\,\varphi^2 = R_{ik}\, R^{ik}\sqrt{-g}$$

and is consequently unchanged by the gauge transformation. A direct consequence of this gauge invariance is the vanishing of the trace of one set of equations (namely (1), (3) and (5)) in each case, thus leading to nine equations for the nine ratios of the g_{ik}. The remaining equations ((2), (4) and (6)) are forty equations for the forty components of the symmetric connection Γ^s_{ik} . These equations are difficult to solve directly, and do not admit the solution

$$\Gamma^s_{ik} = \frac{1}{2}\, g^{sm}(g_{mi,k} + g_{mk,i} - g_{ik,m}) = \left\{ {s \atop ik} \right\},$$

which is not invariant under the gauge transformation (7).

Recently, however, Higgs [2] has shown that in Cases (A) and (B) one set of equations may be transformed into field equations of the Einstein type with an arbitrary non-zero cosmological constant in terms of a new gauge-invariant metric. The other set provides algebraic relations between the old metric and the new. However, this technique is only possible because equations (2) and (4) have the form

$$(T^{ik}\sqrt{-g})\,;_i = 0\,,$$

which allows a new metric a_{ik} to be defined in terms of the second rank tensor T_{ik}. In Case (C) the corresponding equation (equation (6)) is not of this type, and it seems therefore that (5) and (6) cannot be transformed into the Einstein form. This is perhaps the most interesting case, although the equations are probably too restrictive to allow many solutions common to $R_{ik} = 0$.

2. — General Lagrangian

We have seen that the particular choice of Lagrangians that are quadratic in RIEMANN-CHRISTOFFEL tensor leads to the additional invariance under the gauge transformations (7). This invariance does not arise with other types of Lagrangians. Consider the Lagrangian F(R), where F is an arbitrary function, and the scalar curvature R is made non-dimensional by introducing some unit of scalar curvature. The variation (in the Palatini manner)

$$\delta \int \mathrm{F}(\mathrm{R}) \sqrt{-g}\, d\tau = 0$$

gives

$$\int \left\{ (\mathrm{F}'(\mathrm{R})\, g^{ik} \sqrt{-g})\, \delta \mathrm{R}_{ik} + \left(\mathrm{F}'(\mathrm{R})\, \mathrm{R}_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\, \mathrm{F}(\mathrm{R}) \right) \sqrt{-g}\, \delta g^{ik} \right\} d\tau = 0$$

from which we have

$$\mathrm{F}'(\mathrm{R})\, \mathrm{R}_{\underline{ik}} - \frac{1}{2} g_{ik}\, \mathrm{F}(\mathrm{R}) = 0 \tag{8}$$

and

$$(\mathrm{F}'(\mathrm{R})\, g^{ik} \sqrt{-g})_{;l} = 0, \tag{9}$$

where F′(R) is the derivative of F(R) with respect to R, and ; means covariant differentiation with respect to Γ^s_{ik}.

Contracting (8) leads to

$$\mathrm{R}\, \mathrm{F}'(\mathrm{R}) = 2\, \mathrm{F}(\mathrm{R}). \tag{10}$$

Substituting (10) into (8) gives

$$\mathrm{F}'(\mathrm{R}) \left(\mathrm{R}_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik}\, \mathrm{R} \right) = 0. \tag{11}$$

If F(R) is now assumed to be given prior to the variation, then (10) can in general only be satisfied by certain values of R.
As an example, we take F(R) = sin R.

The equation for R becomes, from (10),

$$\tan \mathrm{R} = \frac{\mathrm{R}}{2}, \tag{12}$$

whilst the field equations (9) are

$$(\cos \mathrm{R}\, g^{ik} \sqrt{-g})_{;l} = 0. \tag{13}$$

Since R is constant, however, the solution of (13) is just the CHRISTOFFEL connection of the g_{ik}, and the field equations (11) reduce to the EINSTEIN field equations with a cosmological constant $\lambda \left(= \frac{\mathrm{R}}{4} \right)$ whose value is determined by the roots of (12).

With F(R) = R, (10) gives R = 0, and (9) and (11) reduce to the empty space field equations of general relativity without a cosmological constant.

With $F(R) = R^2$, equation (10) places no restriction on R and (9) and (11) give the gauge-invariant equations of Case (A) (i.e. equations (1) and (2)). The quadratic Lagrangian has a special position in the theory since R^2 is the unique solution of the differential equation (10) valid for all R.

However, not all forms of F(R) enable g_{ik} and Γ^s_{ik} to be determined. For example, if $F(R) = R^n$ $(n > 2)$, then (10) gives $R = 0$, and in virtue of this (9) and (11) are satisfied identically. In general, this happens if $F'(R) = 0$ when R is a root of (10).

Other forms of the Lagrangian must be excluded if they lead, from (10), to complex or imaginary roots for R, as, for example, $F(R) = \dfrac{1}{1 + R^2}$.

3. — The Invariant $S = R^i{}_{kmn} R_i{}^{kmn}$

We now consider a Lagrangian which is an arbitrary function of the invariant $S = R^i{}_{kmn} R_i{}^{kmn}$.
Then

$$\delta \int F(S) \sqrt{-g}\, d\tau = 0$$

gives

$$F'(S)\left(- R_{ismn} R_k{}^{smn} + R_{simn} R^s{}_k{}^{mn} + 2 R_{smin} R^{sm}{}_k{}^n\right) - \frac{1}{2} g_{ik} F(S) = 0 \qquad (14)$$

and

$$\left(F'(S)\, R_{\underline{i}}{}^{\underline{kmn}} \sqrt{-g}\right)_{;\,n} = 0\,. \qquad (15)$$

Contracting (14) we have

$$S\, F'(S) = F(S), \qquad (16)$$

which determines the possible values of S for a given F(S).

With $F(S) = S$ we regain the gauge-invariant equations of Case (C) which do not impose any restriction on the value of the invariant S. For any other F(S), provided $F'(S) \neq 0$, the equations become

$$- R_{ismn} R_k{}^{smn} + R_{simn} R^s{}_k{}^{mn} + 2 R_{smin} R^{sm}{}_k{}^n = \frac{1}{2} g_{ik} \lambda, \qquad (17)$$

and

$$\left(R_{\underline{i}}{}^{\underline{jkl}} \sqrt{-g}\right)_{;\,n} = 0\,. \qquad (18)$$

where λ is a root of (16).

4. — Conclusion

Lagrangians formed from functions of the invariants R and $R_{ik} R^{ik}$ lead, in general (using the Palatini method of variation) to field equations which can be transformed into the EINSTEIN equations with a cosmological constant λ. The value of λ is determined by the form of the Lagrangian except in the case of the quadratic Lagrangians where λ is arbitrary but non-zero. The field equations obtained from Lagrangians formed from a function of the invariant $R^{i}{}_{jkl} R_{i}{}^{jkl}$ do not appear to be reducible to the EINSTEIN equations. Further work on this subject has been carried out by STEPHENSON (4) and BUCHDAHL (5).

REFERENCES

[1] G. STEPHENSON, *Nuovo Cimento*, **9**, 263 (1958).
[2] P. HIGGS, *Nuovo Cimento*, **11**, 816 (1959).
[3] G. STEPHENSON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **55**, 375 (1959).
[4] G. STEPHENSON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **56**, 247 (1960).
[5] H. BUCHDAHL, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **56**, 396 (1960).

DISCUSSION

Intervention du Docteur Fletcher

Puisque la méthode de Palatini est utilisée,

$$R_{ik} = R^{l}{}_{ikl} \quad \text{et} \quad R'_{ik} = g_{im}\, g^{rs}\, R^{m}{}_{rsk}$$

doivent être considérés comme différents. Donc, il y a plus d'un Lagrangien inclus dans le cas B. Les équations résultant de ces différents Lagrangiens peuvent avoir différents contenus physiques. Des remarques semblables s'appliquent au cas C.

REMARQUES SUR LES « PSEUDO-TENSEURS » ET LES IDENTITÉS SATISFAITES PAR UN LAGRANGIEN

par J. GEHENIAU

Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

RESUME

Certaines des identités vérifiées par une densité $\mathfrak{F}$ qui dépend de fonctions y_α et de leurs dérivées premières et secondes sont mises sous des formes nouvelles. L'étude des variances des grandeurs montre qu'on obtient ainsi pour tout $\mathfrak{F}$ un « pseudo-tenseur » d'impulsion-énergie qui est un tenseur pour les changements quelconques des coordonnées spatiales. Celui-ci est le « pseudo-tenseur » de Møller lorsque $\mathfrak{F}$ est la densité de courbure habituelle.

Le thème de cet exposé est de montrer comment on peut utiliser certaines identités pour simplifier ou généraliser des travaux récents de Relativité générale.

1. *Identités.* — Soit $\mathfrak{F}$ une densité fonction de tenseurs de composantes y^A, de leurs dérivés premières et secondes y^A_μ, $y^A_{\mu\nu}$ par rapport aux variables indépendantes x^μ, x^ν.

A la transformation infinitésimale (t. i.) des x

$$\delta x^\mu = X^\mu(x) \tag{1}$$

correspond la t. i. des y

$$\delta y^A = C^{A\nu}_\mu X^\mu_\nu \tag{2}$$

X^μ_ν est la dérivée de X^μ par rapport à x^ν. Les $C^{A\nu}_\mu$ sont les composantes d'un tenseur cogrédient au produit de y^A par un vecteur covariant et un vecteur contravariant.

Par hypothèse

$$\delta \mathfrak{F} + \mathfrak{F} X^\nu_\nu = 0$$

quels que soient les x, leurs dérivées premières, secondes et troisièmes. En égalant à zéro les coefficients de ces fonctions arbitraires on obtient les identités, [1 (1942)] et [2],

$$\mathfrak{F}^\mu_{\lambda.\,\mu} + \mathfrak{F}_A\, y^A_\lambda = 0 \tag{3}$$

$$-\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda}+f^{\mu}_{\lambda}=r^{\mu\nu}_{\lambda,\nu} \tag{4}$$

$$r^{\mu\nu}_{\lambda}+r^{\nu\mu}_{\lambda}=-(\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}+\mathfrak{F}^{\nu\mu\rho}_{\lambda})_{,\rho} \tag{5}$$

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}+\mathfrak{F}^{\nu\rho\mu}_{\lambda}+\mathfrak{F}^{\rho\mu\nu}_{\lambda}=0 \tag{6}$$

avec les notations

$$\mathfrak{F}_{A}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y^{A}}-\mathfrak{F}^{\mu}_{A,\mu} \tag{7}$$

$$\mathfrak{F}^{\mu}_{A}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y^{A}_{\mu}}-\mathfrak{F}^{\mu\nu}_{A,\nu} \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu}_{A}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y^{A}_{\mu\nu}} \qquad \mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}=C^{A\mu}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\nu\rho}_{A} \tag{9}$$

$$\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda}=C^{A\mu}_{\lambda}\,\mathfrak{F}_{A} \tag{10}$$

$$f^{\mu}_{\lambda}=y^{A}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\mu}_{A}+y^{A}_{\lambda\nu}\,\mathfrak{F}^{\mu\nu}_{A}-\mathfrak{F}\,\delta^{\mu}_{\lambda} \tag{11}$$

$$r^{\mu\nu}_{\lambda}=C^{A\mu}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\nu}_{A}+C^{A\mu}_{\lambda,\rho}\,\mathfrak{F}^{\nu\rho}_{A}-y^{A}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\mu\nu}_{A} \tag{12}$$

et, μ désigne la dérivée par rapport à x^{μ}.

Dans (3), $\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda}$ peut être remplacé par f^{μ}_{λ} ou par toute autre expression τ^{μ}_{λ} telle que

$$\tau^{\mu}_{\lambda,\mu}=\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda,\mu}$$

en vertu des identités.

M. Goldberg [3] a obtenu les identités (4) sous la forme

$$-\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda}+t^{\mu}_{\lambda}=U^{\mu\nu}_{\lambda,\nu} \tag{13}$$

où, dans nos notations,

$$t^{\mu}_{\lambda}=f^{\mu}_{\lambda}+K^{\mu\nu}_{\lambda,\nu}$$

$$K^{\mu\nu}_{\lambda}=(\delta^{\mu}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\nu\rho}_{A}-\delta^{\nu}_{\lambda}\,\mathfrak{F}^{\mu\rho}_{A})\,y^{A}_{\rho}$$

$$U^{\mu\nu}_{\lambda}=L^{\mu\nu}_{\lambda}-\frac{2}{3}(\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}-\mathfrak{F}^{\nu\mu\rho}_{\lambda})_{,\rho}+K^{\mu\nu}_{\lambda}$$

$$L^{\mu\nu}_{\lambda}=r^{\mu\nu}_{\lambda}+\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda,\rho}$$

Les identités (5) expriment que $L^{\mu\nu}_{\lambda}$ est antisymétrique en $\mu\nu$, il en est donc de même de $U^{\mu\nu}_{\lambda}$. Pour passer de (4) à (13), remarquer qu'en vertu de (6)

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}=\frac{2}{3}(\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}-\mathfrak{F}^{\nu\mu\rho}_{\lambda})+\frac{1}{3}(\mathfrak{F}^{\nu\rho\mu}_{\lambda}-\mathfrak{F}^{\rho\nu\mu}_{\lambda})$$

Les identités (4) peuvent aussi décrire, [1 (1959)], et [4],

$$-\mathfrak{F}^{\mu}_{\lambda}+f^{\mu}_{\lambda}=\chi^{\mu\nu}_{\lambda,\nu} \tag{14}$$

où

$$\chi^{\mu\nu}_{\lambda}=L^{\mu\nu}_{\lambda}-\frac{2}{3}(\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}-\mathfrak{F}^{\nu\mu\rho}_{\lambda})_{,\rho} \tag{15}$$

$$=\frac{1}{2}(r^{\mu\nu}_{\lambda}-r^{\nu\mu}_{\lambda})-\frac{1}{6}(\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda}-\mathfrak{F}^{\nu\mu\rho}_{\lambda})_{,\rho} \tag{15'}$$

2. *Variances.* — *a*) Les grandeurs définies en (7), (8), (9), (10) sont des tenseurs pour les changements de coordonnées (1). Leur variance est bien connue. Les grandeurs définies en (11), (12), (15) ne sont pas des tenseurs pour les transformations (1). Cependant

$$\delta f^{\mu}_{\lambda} = - f^{\mu}_{\lambda} X^{\nu}_{\nu} - f^{\mu}_{\nu} X^{\nu}_{\lambda} + f^{\nu}_{\lambda} X^{\mu}_{\nu} + X^{\nu}{}_{\varrho\lambda} r^{\varrho\mu}_{\lambda} + X^{\nu}{}_{\varrho\sigma\lambda} \mathcal{F}^{\varrho\sigma\mu}_{\nu} \tag{16}$$

$$\delta \chi^{\mu\nu}_{\lambda} = - \chi^{\mu\nu}_{\lambda} X^{\varrho}_{\varrho} - \chi^{\mu\nu}_{\varrho} X^{\varrho}_{\lambda} + \chi^{\varrho\nu}_{\lambda} X^{\mu}_{\varrho} + \chi^{\mu\varrho}_{\lambda} X^{\nu}_{\varrho} - \frac{1}{3} \chi^{\varrho}_{\sigma\lambda} (\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma}_{\varrho} - \mathcal{F}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}) \tag{17}$$

Donnons, aux indices grecs les valeurs 0, 1, 2, ... N. De (16) et (17) résulte notamment que pour les transformations

$$\delta x^{\mu} = X^{\mu}(x^1, x^2, \ldots x^N)$$

où les X^{μ} ne dépendent pas de la variable « temporelle » x^o, les f^{μ}_{o} et $\chi^{\mu\nu}_{o}$ sont des tenseurs. Il est donc bien naturel que cette étude conduise au complexe obtenu par Møller

$$\chi^{\mu\nu}_{\lambda} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} (g_{\lambda\sigma\rho} - g_{\lambda\rho\sigma}) \tag{18}$$

lorsque $\mathcal{F}$ est la densité de courbure gaussienne, [1 (1959)] et [4].

b) Les tenseurs y peuvent figurer dans $\mathcal{F}$ sous des formes diverses. Par exemple, les composantes indépendantes du tenseur métrique sont, soit ses composantes covariantes $g_{\mu\nu}$, soit ses composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ ou encore $\gamma^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}$, etc.

Considérons deux systèmes de composantes y^A, $\bar{y}^A$ liées par

$$\bar{y}^A = \bar{y}^A(y) \qquad\qquad y^A = y^A(\bar{y}) \tag{19}$$

D'où

$$\delta\, \bar{y}^A = \frac{\partial \bar{y}^A}{\partial y^B}\, \delta\, y^B$$

et puisque comme en (2)

$$\delta\, \bar{y}^A = \bar{C}^{A\nu}_{\mu} X^{\mu}_{\nu}$$

on a

$$\bar{C}^{A\nu}_{\mu} = \frac{\partial \bar{y}^A}{\partial y^B}\, C^{B\nu}_{\mu}$$

c'est-à-dire que les $C^{A\nu}_{\mu}$ sont cogrédients aux $\delta\, y^A$ pour les transformations (19). Il en est de même des y^A_{μ}.

La variance des expressions rencontrées plus haut se tire immédiatement de la manière dont les identités ont été obtenues. Ainsi, (10), (11), (12), (15) sont des invariants et (7) a la variance opposée à $\delta\, y^A$.

3. *Cas où*

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}\,(y^A, y^A_{\mu}) + C^{\nu}_{,\nu} \tag{20}$$

où :

$$C^{\nu} = C^{\nu}\,(y^A, y^A_{\mu}).$$

On a évidemment les identités (3) où $\mathcal{F}$ est remplacé par $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}^{\mu}_{\lambda,\mu} + \mathcal{L}_A\, y^A_{\lambda} = 0 \tag{21}$$

et si $\mathfrak{L}$ est une densité pour les transformations linéaires homogènes,

$$-\mathfrak{L}^{\mu}_{\lambda} + l^{\mu}_{\lambda} = s^{\mu\nu}_{\lambda,\nu} \tag{22}$$

où :

$$l^{\mu}_{\lambda} = y^{A}_{\lambda}\,\mathfrak{L}^{\mu}_{A} - \mathfrak{L}\,\delta^{\mu}_{\lambda} \tag{23}$$

$$s^{\mu\nu}_{\lambda} = C^{A\mu}_{\lambda}\,\mathfrak{L}^{\nu}_{A} \tag{24}$$

Ces grandeurs sont également invariantes pour les transformations (19).

Notons les relations, utiles pour la suite,

$$f^{\mu}_{\lambda} = l^{\mu}_{\lambda} + Y^{\mu\nu}_{\lambda,\nu} \tag{25}$$

avec :

$$Y^{\mu\nu}_{\lambda} = C^{\mu}\,\delta^{\nu}_{\lambda} - C^{\nu}\,\delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{1}{2}\,y^{A}_{\lambda}\left(\frac{\partial C^{\nu}}{\partial y^{A}_{\mu}} - \frac{\partial C^{\mu}}{\partial y^{A}_{\nu}}\right)$$

4. Les formules des paragraphes 1 et 2 sont valables pour une densité quelconque $\mathfrak{F}\,(y^{A}, y^{A}_{\mu}, y^{A}_{\mu\nu})$. La décomposition (20) se présente en particulier lorsque $\mathfrak{F}$ est la densité de courbure gaussienne :

$$\mathfrak{F} = \eta R \qquad (\eta = \sqrt{-g})$$

Rappelons que :

$$\mathfrak{L} = \eta\, g^{\mu\nu}\,(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma})$$

$$C^{\nu} = \gamma^{\nu\rho}_{\rho} + g^{\nu\rho}\,\eta_{\rho} \qquad (\gamma^{\nu\rho} = \eta\, g^{\nu\rho})$$

Les indices inférieurs qui affectent $\gamma^{\nu\rho}$ et η désignent des dérivées partielles par rapport aux x.

On trouve aisément :

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu\rho}_{\lambda} = -2\delta^{\mu}_{\lambda}\,\gamma^{\nu\rho} + \delta^{\nu}_{\lambda}\,\gamma^{\rho\mu} + \delta^{\rho}_{\lambda}\,\gamma^{\nu\mu} \tag{26}$$

$$s^{\mu\nu}_{\lambda} = \chi^{\mu\nu}_{\lambda} - Y^{\mu\nu}_{\lambda} + (\delta^{\nu}_{\lambda}\,\gamma^{\rho\nu} - \delta^{\rho}_{\lambda}\,\gamma^{\nu\mu})_{\rho} \tag{27}$$

$$r^{\mu\nu}_{\lambda} = s^{\mu\nu}_{\lambda} + Y^{\mu\nu}_{\lambda}. \tag{28}$$

Indiquons l'expression de :

$$p^{\mu}_{\lambda} = s^{\mu o}_{\lambda},$$

$$p^{\mu}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}\,\gamma^{o\rho}_{\rho} - \gamma^{o\mu}_{\lambda} + g_{\lambda\sigma}\,(g^{o\rho}\,\gamma^{\mu\sigma}_{\rho} - g^{\mu\rho}\,\gamma^{o\sigma}_{\rho}) \tag{29}$$

5. *Contraintes.* — *a*) CONTRAINTES PRIMAIRES. — BERGMANN a montré [5] qu'en vertu des identités (21), les p^{o}_{λ} sont indépendants des y^{A}_{o}. Lorsque $\mathfrak{F}$ est la densité de courbure gaussienne, l'expression des p^{o}_{λ} se tire immédiatement de (5) en remarquant que dans ce cas :

$$r^{oo}_{\lambda} = s^{oo}_{\lambda}$$

D'où (*) :

$$p^{o}_{\lambda} = -\mathfrak{F}^{oor}_{\lambda,r} \tag{30}$$

Ces relations sont naturellement équivalentes à celles données par ANDERSON, BERGMANN et PENFIELD [6]. Notons que ces p^{o}_{λ} sont des combinaisons linéaires :

$$p^{o}_{\lambda} = C^{Ao}_{\lambda}\,\pi_{A}$$

(*) Dans ce qui suit, les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3 et les indices latins les valeurs 1, 2, 3.

des moments

$$\pi_A = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y^A_0}$$

conjugués aux y^A. Conformément à une remarque faite plus haut ces p^o_λ sont indépendants des composantes utilisées pour représenter le tenseur métrique. La forme de ces contraintes primaires obtenue par PIRANI, SCHILD et SKINNER [7], correspond au choix des $g_{\mu\nu}$ comme variables du champ gravifique. BELINFANTE, CAPLAN et KENNEDY [8] ont pris comme variables du champ les composantes des vecteurs unités des tétrapodes; dans le cas du champ gravifique pur, leur formule (3.13) n'est autre que (30).

Afin d'annuler les moments conjugués aux $g_{\nu o}$, DIRAC [9] a introduit le Lagrangien :

$$\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} - f \tag{31}$$

où f est une divergence qui peut s'écrire :

$$f = \frac{1}{\gamma^{oo}} (\gamma^{oo}_o \gamma^{or}_r - \gamma^{ro}_o \gamma^{oo}_r) \tag{32}$$

On vérifie aisément que les seconds membres de (30) sont égaux à :

$$C^{Ao}_\lambda \frac{\partial f}{\partial y^A_o}$$

d'où il résulte que :

$$\bar{p}^o_\lambda \equiv C^{Ao}_\lambda \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial y^A_o} = 0 \tag{33}$$

b) CONTRAINTES SECONDAIRES. — PIRANI, SCHILD et SKINNER ainsi que BELINFANTE, CAPLAN et KENNEDY en ont donné des expressions explicites. Notre but est seulement ici de les rattacher aux identités (14). Bornons-nous au cas où les équations d'évolution du champ sont :

$$\mathfrak{L}_A = 0.$$

Alors, en vertu de (14), (25), (27),

$$l^o_\lambda = - p^r_{\lambda,r} + (\delta^o_\lambda \gamma^{rs} - \delta^r_\lambda \gamma^{os})_{rs} \tag{34}$$

D'où, pour $\lambda = s$, les trois contraintes secondaires :

$$y^A_s \ \pi_A + p^r_{s,r} + \gamma^{or}_{rs} \ = 0. \tag{35}$$

Avec le Lagrangien (31) elles prennent la forme [9] :

$$\mathcal{H}_s \equiv \bar{\pi}^{ab} \ g_{abs} + \bar{p}^r_{s,r} = 0. \tag{36}$$

Pour $\lambda = 0$, (34) s'écrit :

$$\mathcal{H} + p^r_{0,r} - \gamma^{rs}{}_{rs} = 0 \tag{37}$$

où :

$$\mathcal{H} \equiv y^A_o \ \pi_A - \mathfrak{L}$$

est la fonction hamiltonienne.

REFERENCES

[1] J. Géhéniau, *Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sc.*, **28**, 118 (1942) et 447 (1959).
[2] N. Mizkjewitsch, *Ann. d. Phys.*, 7 Folge B., 319 (1958).
[3] J. N. Goldberg, *Phys. Rev.*, **111**, 315 (1958).
[4] C. Møller, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **31**, n° 14 (1959).
[5] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **75**, 680 (1949).
[6] J. L. Anderson, P. G. Bergmann, R. Penfield, *Phys. Rev.*, **83**, 1018 (1951).
[7] F. A. E. Pirani, A. Schild, R. Skinner, *Phys. Rev.*, **79**, 986 (1950).
[8] F. J. Belifante, D. I. Caplan, W. L. Kennedy, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 518 (1957).
[9] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Math. Phys.*, **246**, 333 (1958).

DISCUSSION

Intervention de C. Møller

Je voudrais attirer votre attention sur un article récent de M. Laurent dans le *Nuovo Cimento,* dans lequel il déduit l'expression $\mathfrak{F}^k_i$ de l'invariance de la densité de courbure scalaire $\sqrt{-g}\,R$ regardée comme fonction du tenseur métrique et des symboles de Christoffel, en accord avec la méthode de Palatini. L'emploi de cette méthode simplifie considérablement la déduction, puisque $\sqrt{-g}\,R$ ne dépend pas ici des dérivées secondes des quantités à faire varier.

STATIC, AXIALLY SYMMETRIC GRAVITATIONAL FIELDS IN GENERAL RELATIVITY INVOLVING MASS SINGULARITIES OF BOTH SIGNS

by Banesh HOFFMANN

*Queens College, Flushing, N. Y. (U.S.A.)**

RESUME

On montre que des masses newtoniennes ponctuelles peuvent être placées en ligne droite de manière telle qu'elles soient en équilibre gravitationnel, pourvu qu'elles ne soient pas toutes d'un même signe. A ces configurations d'équilibre newtoniennes correspondent des solutions statiques rigoureuses à symétrie axiale des équations de la gravitation d'Einstein dans lesquelles, contrairement aux précédentes solutions impliquant des masses d'un seul signe, l'espace-temps est partout régulier sauf aux points massifs, de sorte qu'il n'y a pas entre ceux-ci de tensions représentées par des lignes de singularité.

1. The axially symmetric gravitational field in the general theory of relativity has been studied in some detail, but the solutions here obtained do not seem to have been given before.

Take canonical cylindrical coordinates ρ, θ, z in space and denote derivatives with respect to ρ, z by suffixes ρ, z respectively.

For the static, axially symmetric line element

$$ds^2 = e^{\mu}\, dt^2 - e^{\nu-\mu}\,(d\rho^2 + dz^2) - e^{-\mu}\, \rho^2\, d\theta^2 \tag{1}$$

where μ, ν are functions of ρ, z, only, it is well known [1], [2], [3], that the field equations for empty space

$$\mathrm{R}_{ab} - \frac{1}{2}\, g_{ab}\, \mathrm{R} = 0, \tag{2}$$

yield the following conditions on the functions μ, ν :

$$\nabla \mu^2 \equiv \mu_{\rho\rho} + \frac{\mu_\rho}{\rho} + \mu_{zz} = 0 \tag{3}$$

(*) This work was done while the author was on leave at the University of London, King's College, and was assisted by Wright ADC, ARDC. USAF through its European office.

$$\nu_\rho = \frac{\rho}{2}(\mu_\rho^2 - \mu_z^2) \tag{4}$$

$$\nu_z = \rho\,\mu_\rho\,\mu_z. \tag{5}$$

Equation (3) has the form of an axially symmetric Laplace equation for μ in terms of cylindrical coordinates ρ, θ, z, in a flat 3-space, μ being independent of θ. And since this equation is linear it has superposable solutions.

Let μ be a solution of (3) that is regular everywhere except at isolated points on the z-axis. At the regular points we shall have $\mu_{\rho z} = \mu_{z\rho}$. With μ given, equations (4), (5) give expressions for ν_ρ and ν_z as specific functions of ρ and z, and for integrability these expressions must be such that $\nu_{\rho z} = \nu_{z\rho}$. As is well known, and is easily seen from (4) and (5), this conditions is satisfied, by virtue of (3), wherever μ is regular. But because of the presence of singularities of μ on the z-axis, a further condition has to be fulfilled [4] [5]. This condition turns out to be a stringent one akin to a condition of equilibrium and can in fact be regarded as representing the « equations of motion » for the case in which there is no motion. Mathematically it is related to the conditions of regularity on the z-axis.

Silberstein [6] gave a solution of the static axially symmetric case in which μ had singularities only at two points on the z-axis, and he believed he had thereby demonstrated that Einstein's theory admitted unphysical solutions corresponding to the presence of two free gravitating bodies that remained at relative rest with the line joining them not rotating. However it was pointed out that Silberstein had made an error.
His function corresponding to the ν used here was not zero on the z-axis between the two point singularities of μ. But at a place on the z-axis where $\nu \neq 0$ the ratio of the circumference to the radius of a small circle having that point as centre will not be 2π and so the infinitesimal neighbourhood of the point will not be Minkowsian in the limit. Consequently there will be a singularity at the point. Silberstein's solution was singular in this way at all points on the portion of the z-axis lying between his two particles. This meant that there were stresses between the particles and these could account for the particles remaining at relative rest. Actually it is impossible to have a solution for the purely gravitational two-particle case without stresses between the particles.

Rosen [8] showed that for a spherically symmetric particle to be at rest in a static, axially symmetric gravitational field according to the general theory of relativity, the force, suitably defined, on the particle must vanish; he showed too that this result generalizes to the case of any static gravitational field.

Bondi [9] showed that, at least for the case in which μ is not singular (matter being represented by the non-vanishing of the Einstein tensor in certain regions), then, at least approximately, there is a flat Newtonian analogue in which the matter is in Newtonian equilibrium, with a suitable definition of the Newtonian mass density.

While these results are suggestive, they are not directly applicable to the case we wish to consider, in which μ has isolated point singularities on the z-axis and is regular everywhere else. For example, Rosen initially worked with approximately spherically symmetric particles, and these, in cylindrical coordinates, are represented by rod-like singularities along the z-axis [1]. The present paper is concerned with point singularities on the z-axis in cylindrical coordinates which, precisely because they « look » spherically symmetric in these coordinates, are actually not spherically symmetric. Moreover, in the second part of his paper, where he considers the case of an arbitrary static gravitational field, Rosen, still using spherically symmetric particles, argues in terms of the gravitational stress-energy pseudo-tensor, the physical significance of which is open to question.

In Bergmann's book [5] the case is considered of two isolated point singularities on the z-axis and it is shown that at the location of each singularity the derivative with respect to z of the regular part of μ must vanish. This means that the Newtonian force on each particle due to the other particle must be zero. The work extends easily to the case of several point singularities on the z-axis, and it is concluded that there can be no solutions having more than one point singularity and no line singularities.

While this conclusion is correct when we contemplate masses that are all of the same sign, it is no longer valid if we admit masses of both signs. We show here that if masses of both signs are permitted there exist Newtonian equilibrium configurations for point masses lying on a straight line; and that to each of these Newtonian equilibrium configurations there corresponds an exact static solution of the Einstein field equations that is regular everywhere except for isolated point singularities on the z-axis.

2. Consider n mass points on a line in ordinary Newtonian theory in a flat space. Let r, s, have the range 1, 2, ...n. Denote the position of the r^{th} particle by the coordinate z_r on the line, and the mass of the r^{th} particle by m_r, which can be positive or negative. Furthermore, let the particles be so arranged that

$$z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_n \tag{6}$$

Consider the Newtonian gravitational forces exerted on the r^{th} particle by all the other particles. A positive gravitational mass attracts all other masses, whether their masses are positive or negative. A negative gravitational mass repels all other masses of whatever sign. So the force exerted on the r^{th} particle by the s^{th} particle is by (6),

$$-\frac{m_r\, m_s}{(z_r - z_s)^2}\; if\; s < r \tag{7}$$

and

$$+\frac{m_r\, m_s}{(z_r - z_s)^2}\; if\; s > r \tag{8}$$

So, for equilibrium of the r^{th} particle we must have

$$-\sum_{S=1}^{r-1} \frac{m_s}{(z_r - z_s)^2} + \sum_{S=r+1}^{n} \frac{m_s}{(z_r - z_s)^2} = 0 \tag{9}$$

and for equilibrium of the whole system of particles this must hold for all r.

Introduce the antisymmetric quantity α_{rs} by the definition

$$\alpha_{rs} = -\alpha_{sr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(z_r - z_s)^2}\; if\; s < r \\ +\dfrac{1}{(z_r - z_s)^2}\; if\; s > r \end{cases} \tag{10}$$

Then (9) may be written

$$\sum_s \alpha_{rs}\, m_s = 0 \tag{11}$$

This is a set of n homogeneous equations for the n quantities m_s considered as functions of z_r. For it to have non-trivial solutions (i. e. solutions for which not all the $m's$ are zero) we must have

$$\det\; \alpha_{rs} = 0 \tag{1}$$

It is well known that the determinant of an antisymmetric quantity vanishes if the determinant is of odd order. Hence the condition (12) is automatically fulfilled when the number of particles is odd. This suggests that, given an odd number, n, of particles among which occur masses of both signs, one can always line them up at finite distances apart in Newtonian equilibrium; however such a conclusion is not justified since some of the $m's$ obtained from (11) might turn out to be zero no matter what their relative finite positions.

For the case of an even number of particles the condition (12) is not automatically fulfilled. When n is even the antisymmetric determinant in (12) can be written as the square of the Pfaffian

$$P = \varepsilon^{rs \dots tu}\, \alpha_{rs} \dots \alpha_{tu} \tag{13}$$

where there are n indices on the ε. But while this expression is less complicated than the determinant itself, it is still quite difficult to work with when $n > 4$.

Because of the homogeneity of (11) if a particular equilibrium configuration exist and we multiply all the masses by the same positive or negative constant the resulting system will also be in equilibrium. Also, if, keeping the values of the masses unaltered, we make a uniform dilation of their spatial configuration, the resulting system will again be in equilibrium.

For two particles no equilibrium configuration is possible. One can see this from (9). Or from the fact that if both masses are positive they will attract each other; if they are both negative they will repel each other; and if they are of opposite signs they both accelerate in the same direction, the negative mass chasing the positive one.

For three particles it is easy to show that infinitely many equilibrium configurations exist. One finds from (9), after a simple calculation, that the masses and their separations must be related as follows :

$$m_1 : -m_2 : m_3 = (z_2 - z_3)^{-2} : (z_3 - z_1)^{-2} : (z_1 - z_2)^{-2} \qquad (14)$$

Thus the outer masses must have the same sign and the inner mass the opposite one. For a symmetrical configuration of three particles the respective masses must be 4M, — M, 4M, where M is any positive or negative quantity.

There is no equilibrium system of three particles for which the sum of the masses is zero. For, by (14) if such a system existed, we should have to have :

$$(z_2 - z_3)^{-2} - (z_3 - z_1)^{-2} + (z_1 - z_2)^{-2} = 0 \qquad (15)$$

write $(z_3 - z_2)/(z_2 - z_1) = x$ and note that

$$z_2 - z_1 = (z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)$$

Then from (15) we obtain

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

which, by Descartes'rule of sign, or, indeed, by simple inspection, has no positive roots. A negative root would upset the order of the particles, and this would make the signs of the outer masses unequal so that, as we have seen, equilibrium would be impossible. Hence there is no equilibrium configuration of three particle when the sum of their masses is zero. The significance of the result is the following. There is some interest in the behaviour of the solutions in limiting cases where the particles are brought very close together while remaining in equilibrium. We might at first think that bringing them close together would change the energy of the system by an amount tending to infinity. But actually, since all during the spatial contraction, if this is uniform as it may be without loss of generality, the work done will be zero, we see there will be no change in the energy content of the system. Thus even if, in this Newtonian discussion, we introduce the relativistic idea of the equivalence of mass and energy, there will be no change in the total mass of the system. When we bring the three particles together we form a multiple structure which, unlike more usual ones, has zero binding energy; and such a gravitational structure and its relativistic analogue would seem to be worth studying. But the multipole moments will tend to zero unless we let the masses tend to infinite values as their distances apart decrease. By letting the masses tend to infinite values we can obtain finite, non-zero multipole moments; but then we shall be in danger of having the total mass infinite so that the un-interesting monopole contribution will overwhelm the multipole contribution. If the total mass could be zero, however, we could avoid this situation and thus obtain interesting limiting cases. For the case of three particles we have just seen that this is impossible. And it is likely that the same is true for any number of particles.

For four particles (at finite distances apart, and with none of the masses zero) the condition that the Pfaffian (13) vanish takes the form :

$$\alpha_{12}\,\alpha_{34} - \alpha_{13}\,\alpha_{24} + \alpha_{14}\,\alpha_{23} = 0 \tag{16}$$

however, by (10) and (6) we have :

$$\alpha_{12} = (z_1 - z_2)^{-2} > (z_1 - z_3)^{-2} = \alpha_{13}$$

and

$$\alpha_{34} = (z_3 - z_4)^{-2} > (z_2 - z_4)^{-2} = \alpha_{24}$$

So

$$\alpha_{12}\,\alpha_{34} > \alpha_{13}\,\alpha_{24} \tag{17}$$

and since all the α's in (16) are positive, we see that (16) can not be satisfied. Hence we have the unexpected result that no equilibrium position is possible with just four particles.

When there are more than four particles the mathematics becomes complicated. I have found that *symmetrical* equilibrium configurations of five particles are possible, but I have not been able to obtain significant existence theorems for the general case of n particles. For six particles, even in the special case of a symmetrical configuration, I have been unable to demonstrate either the existence or non-existence of non-trivial equilibrium configurations, though it is easy to show that an evenly spaced distribution does not exist.

When the number of particles is odd, the central particle in a symmetric configuration is always in equilibrium because of the symmetry, and this shows why, at least for symmetrical distributions, the equilibrium conditions turn out to be less stringent for an odd number of particles than for an even number of particles. This, coupled with the non-existence of equilibrium configurations for the cases of two and four particles, suggests that there may be no equilibrium configurations for any even number of particles. It would be interesting to know whether this conjecture is correct. Perhaps the mathematicians will find the problem worthy of their attention.

III. We now obtain the gravitational field for the static axially symmetric field with line element of the form (1) when the solution of (3) is taken to be of the form :

$$\mu = \sum_{r=1}^{n} \frac{m_r}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{1/2}} \tag{18}$$

where m_r, z_r *are constants.*

With μ biven by (18), we may write equations (4) and (5) in the form :

$$\nu_\rho = \frac{\rho}{2} \sum_{r=1}^{n} m_r^2 \left[\frac{\rho^2 - (z - z_r)^2}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^3} \right]$$

$$+ \frac{\rho}{2} \sum_{r, s=1}^{n} m_r m_s \left[\frac{\rho^2 - (z - z_r)(z - z_s)}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{3/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{3/2}} \right] \tag{19}$$

$$\nu_z = \rho^2 \sum_{r=1}^{n} m_r^2 \left[\frac{z - z_r}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^3} \right]$$

$$+ \rho^2 \sum_{\substack{r, s=1 \\ r \neq s}}^{n} m_r m_s \left[\frac{(z - z_s)}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{3/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{3/2}} \right]$$

$$= \rho^2 \sum_{r=1}^{n} m_r^2 \left[\frac{z - z_r}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^3} \right]$$

$$+ \frac{\rho^2}{2} \sum_{\substack{r, s=1 \\ r \neq s}}^{n} m_r m_s \left[\frac{(z - z_r) + (z - z_s)}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{3/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{3/2}} \right] \tag{20}$$

We integrate (20) with respect to z. As a preliminary we consider two integrals that we shall denote by I_r and I_{rs} respectively. We have :

$$I_r \equiv \int \frac{(z - z_r)\, dz}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^3} = - \frac{1}{4\, [\rho^2 + (z - z_r)^2]^2} \tag{21}$$

Also ifa we define I_{rs} by

$$I_{rs} \equiv \int \frac{(z - z_r) + (z - z_s)}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{3/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{3/2}}\, dz \tag{22}$$

and write

$$(z - z_r) + (z - z_s) = 2u \qquad z_s - z_r = 2a \tag{23}$$

we find that

$$I_{rs} = \int \frac{2\, u du}{[\rho^2 + (u + a)^2]^{3/2} [\rho^2 + (u - a)^2]^{3/2}} = \int \frac{2\, u du}{[u^2 + \rho^2 - a^2]^2 + 4a^2 \rho^2]^{3/2}}$$

and the substitution :

$$u^2 + \rho^2 - a^2 = 2 a \rho \tan \theta \tag{24}$$

reduces this to

$$I_{rs} = \int \frac{1}{4a^2 \rho^2} \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{4a^2 \rho^2} \sin \theta$$

which in the original variables has the form

$$\mathrm{I}_{rs} = \frac{1}{\rho^2 (z_r - z_s)^2} \left\{ \frac{(z - z_r)(z - z_s) + \rho^2}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{1/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}} \right\} \tag{25}$$

Thus the result of integrating (20) with respect to z is

$$\nu = \rho^2 \sum_{r=1}^{n} m_r^2 \mathrm{I}_r + \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{n} m_r m_s \mathrm{I}_{rs} + f(\rho) \tag{26}$$

To determine the function $f(\rho)$ we differentiate (26) with respect to ρ and compare the result with (19). A straightforward calculation shows that $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$ must be zero, so that f is a constant.

The value of the constant f is determined by the boundary condition that the space-time be flat at infinity. This condition require that ν shall tend to zero for large $\rho^2 + z^2$ for all ratios of ρ and z. It turns out that the condition can be satisfied by a suitable choice of just the one constant f, namely

$$f = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{n} \frac{m_r^2 m_s}{(z_r - z_s)^2}, \tag{27}$$

so that we have

$$\nu = -\frac{\rho^2}{4} \sum_{r=1}^{n} \frac{m_r}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{r,s=1 \\ (r \neq s)}}^{n} \left[\frac{m_r m_s}{(z_r - z_s)^2} \right] \left\{ \frac{(z - z_r)(z - z_s) + \rho^2}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{1/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}} - 1 \right\} \tag{28}$$

We must now satisfy the regularity condition that ν shall be zero on the z-axis whenever $z \neq z_r$, $r = 1, \dots n$. The first term in (28) presents no problem since the factor $\dfrac{\rho^2}{4}$ makes it vanish on the z-axis. The second term needs careful attention because the quantity

$$\frac{(z - z_r)(z - z_s) + \rho^2}{[\rho^2 + (z - z_r)^2]^{1/2} [\rho^2 + (z - z_s)^2]^{1/2}}$$

becomes, when $\rho = 0$,

$$\mathrm{Q}_{rs} \equiv \frac{(z - z_r)(z - z_s)}{|z - z_r| \, |z - z_s|} \tag{29}$$

and this is discontinuous, since it has the value -1 when z lies between z_r and z_s but the value $+1$ when z does not lie between those points. Thus the function ν given in (28) will in general have abrupt changes in value as one crosses the various singularities of μ at the points $z = z_r$ on the axis. We have already ensured that ν shall be zero at all infinite distances, and therefore it will be zero at infinite distances on the z-axis. To have it zero at all points on the z-axis except the points $z = z_r$, we must require that, despite the jumps in the values of the quantities Q_{rs} in (29), the net effect of all these jumps in value will be zero.

Consider the change in the value of ν on the z axis as we let z go from $z_p - \varepsilon$ to $z_p + \varepsilon$ where z_p is a particular one of the n quantities z_r.

The only terms in the second summation in (28) that will be affected will be those having one suffix equal to p. For, in view of (6), if $r < p$, then z was formerly not between z_r and z_p but now is; but for a term not having a suffix p there will be no change. We have, for the present case :

$$Q_{rp} = \begin{cases} +2 & \text{if} \quad r < p \\ -2 & \text{if} \quad r > p \end{cases} \tag{30}$$

Hence :

$$\Delta\nu = 2\, m_p \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} \frac{m_r}{(z_r - z_p)^2} - \sum_{r=p+1}^{n} \frac{m_r}{(z_r - z_p)^2} \right\} \tag{31}$$

We want this to vanish for all p. Since we are assuming that $m_p \neq 0$, we must have, for all p,

$$\sum_{r=1}^{p-1} \frac{m_r}{(z_r - z_p)^2} - \sum_{r=p+1}^{n} \frac{m_r}{(z_r - z_p)^2} = 0 \tag{32}$$

and these are just the Newtonian equilibrium conditions (9) which we have shown certainly have solutions for the cases $n = 3$ and $n = 5$.

Therefore, whenever the constants m_r, z_r in (18) satisfy the conditions (32), which are the same as (9), there exist corresponding rigorous static solutions of the Einstein field equations that are everywhere regular except at the isolated points $z = z_r$, $\rho = 0$ on the z-axis, these solutions being given by (1), (18) and (28).

4. In the Newtonian equilibrium configurations it is possible to multiply each m_r by the same factor $f(t)$ without disturbing the equilibrium. If one does this to the quantities m_r in the relativistic solutions here given, however, one finds that the field equations are no longer satisfied. This is analogous to the situation in the spherically symmetric case, where one finds that the mass may not vary in time.

Again, in the Newtonian equilibrium configurations, since each particle is in equilibrium and remains in equilibrium if all distances are altered by a common factor, it is possible to have a non-static situation in which the configuration undergoes a uniform dilation of scale, the particles thus moving with constant velocity with no resultant forces acting on them. However, when one tries to incorporate such motions into the relativistic solutions here obtained one finds that the field equations are no longer satisfied. This is presumably related to the fact that in the Newtonian theory the gravitational influence is propagated instantly while in the general theory of relativity this is not the case. Another way of saying this is that in Newtonian theory the geometry is not related to the gravitational field, but in the general theory of relativity when we let the « distances » between the singularities at z_r vary uniformly we cause the g_{ab} to become functions of time and thus cause the invariant distances to vary in a complicated way with respect to the time.

The paper of Bondi cited in reference [9] was criticized [10] because it was said to have assumed without justification that the gravitational constant was the same for negative as for positive masses. The justification for the criticism is not entirely clear. However, in this connection it is worth remarking that the present paper represents matter by singularities and exhibits a family of solutions of the field equations of the general theory of relativity in which both positive and negative masses occur and in which the gravitational constant is automatically the same for the two kinds of masses, in the sense that the coefficients of the field-producing terms involving a given mass are independent of the sign of that mass.

It is a pleasure to thank Professor H. Bondi for inviting me to work with him and the stimulating group that he has gathered around him at the University of London, King's College. I am particularly indebted to Dr. M.G.J. van der Burg for many interesting discussions of the topic of this paper, and to Professor H. D. Ursell of the University of Leeds for saving me from making a serious blunder. I am grateful, too, to the USAF for their financial support which enabled me to be in London.

Professor H. D. Ursell informs me, in a private communication, that he has proved that no solution exists for the case of six particles, a result that lends support to the conjecture that no solution exists when the number of particles is even. He has proved his result not just for the inverse square case but for any power of the distance.

REFERENCES

[1] H. Weyl, *Annalen. d. Phys.*, **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919).
[2] T. Levi-Civita, Rend. Ac. Lincei (1918-1919).
[3] P. G. Bergmann, *Introduction to the theory of relativity*, New York, 1942, p. 206 (There is a misprint in Bergmann's equation (13, 36) : the exponential $e^{-\nu}$ in the expression for g_{rr} should be e^{ν}).
[4] R. Bach and H. Weyl, *Math Zeits*, **13**, 139 (1921). The relevant part is that due to Weyl, beginning on p. 142.
[5] Reference [3], p. 208-10.
[6] L. Silberstein, *Phys. Rev.*, **49**, 268 (1936). Essentially the same solution had previously been given by H. E. J. Curzon, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **23**, 477 (1924).

[7] A. Einstein and N. Rosen, *Phys. Rev.*, **49**, 404 (1936).
[8] N. Rosen, *Revs. Mod. Phys.*, **21**, 503 (1949).
[9] H. Bondi, *Revs. Mod. Phys.*, **29**, 423 (1957).
[10] G. C. Mc Vittie, *Math. Reviews*, **19**, 814 (1958).

DISCUSSION

Intervention du professeur N. Rosen

Je voudrais remarquer qu'en ce qui concerne l'étude du cas d'une particule au repos dans un champ statique à symétrie axiale, je la dois à Albert Einstein.

Intervention du professeur C. Møller

En ce qui concerne l'hypothèse faite par le professeur Hoffmann sur l'identité de signe des masses grave et inerte, je voudrais insister sur le fait que si l'on admet la Relativité générale, l'on n'a pas besoin de faire cette hypothèse, conséquence de la Relativité générale qui donne comme cas limite la théorie newtonienne de la gravitation, la masse grave totale et la masse inerte totale de tout système clos étant rigoureusement égales. Il est en effet clair qu'en vertu du principe d'équivalence, la masse inerte et la masse grave positive (dans la terminologie de Bondi) doivent être égales. On établit aussi l'égalité pour tout système de la masse inerte et de la masse grave active, telle qu'elle est déterminée par l'action de ce système sur une particule d'épreuve à grande distance de celui-ci, à *partir* des propriétés de transformation des P_i définis par les équations (6) de mon rapport. Cette question a été discutée à l'occasion du 60ᵉ anniversaire du professeur Hylleràs dans *Kgl. Norske Videnskab. Selsk. Forh.*, 31 (1958).

THE UNIFORM ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE THEORY OF GENERAL RELATIVITY

Dr B. BERTOTTI

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey (*)

RESUME

Structure topologique de l'espace-temps dans le cas considéré.

The topological structure of a solution of the field equations of general relativity seems to be known only in two cases, the Schwarzschild solution and the cosmological models. We would like to present a third example, which corresponds physically to a *uniform electromagnetic field.* This solution of the Einstein-Maxwell's equations features a *constant* « complexion » [1] of the electromagnetic field : thereby the two « blades », which at any event are determined by any antisymmetric tensor, are *integrable* and form two familes of orthogonal surfaces [2]. From the properties of decomposable riemannian spaces [3] it can then be proved that if their radius of curvature does not depend on the coordinates, we have a solution of the source-free Maxwell's equation and

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

$R_{\mu\nu}$ being the constructed curvature tensor and $T_{\mu\nu}$ the energy-momentum tensor of the electromagnetic field $f_{\mu\nu}$; moreover, $f_{\mu\nu}$ has vanishing covariant derivatives. In terms of the cosmological constant Λ and the (constant) invariant

$$\rho = + \left[(\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{e}\cdot\mathbf{h})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

their constant gaussian curvatures read

$$\begin{aligned} K_+ &= \Lambda - \rho \\ K_- &= \Lambda + \rho \end{aligned} \tag{3}$$

The two surfaces Σ_+ and Σ_- in which space-time is decomposed are therefore spheres or pseudo-spheres and can each be embedded in a three-dimensional auxiliary flat space. The requirement that Σ_+ and Σ_-

(*) Presently at the Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, N.J.

should have the right signature narrows down our choice to two alternative for each of them. The case in which $\Lambda = 0$, in which the positivity of ρ demands that one take $\Sigma_+^{(2)}$ and $\Sigma_-^{(2)}$, has the remarkable property of being closed in time. The metric ds corresponding to this solution can be written down at once when the line elements ds_+ and ds_- of Σ_+ and Σ_- are given :

$$ds^2 = ds_+^2 + ds_-^2 \,. \tag{4}$$

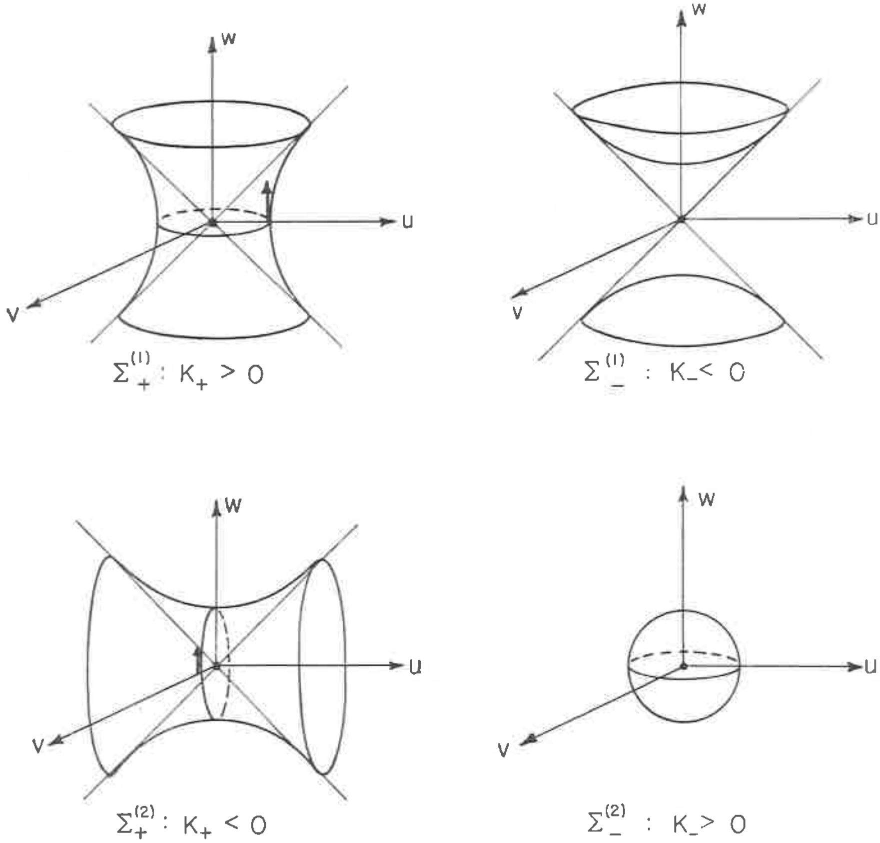


Figure Caption : The surfaces of constant curvature allowed for Σ_+ andΣ_-. The arrow on Σ_+ marks a time direction.

The main local physical feature of the solution is the *anisotropy* of space : on any space-like hypersurface a privileged congruence of lines is defined as the intersections with Σ_+ ; they are the lines of force of the electric field for an observer whose time coordinate is orthogonal to the hypersurface. The magnetic field can also be taken in the same direction. The world-lines of charged test-particles have a very simple geometrical meaning : the pairs of lines they determine on Σ_+ and Σ_- are just *plane sections*.

A full account of this work can be found in *Phys. Rev.*, *116*, 1331 (1959).

REFERENCES

[1] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Ann. of Phys.*, **2**, 525 (1957).
[2] B. Bertotti, *Phys. Rev.*, **115**, 742 (1959).
[3] See e. g., F. A. Ficken, *Ann. of Math.*, **60**, 892 (1939).

COSMOLOGY AND THE INTERPRETATION OF ASTRONOMICAL DATA

by Prof. G. C. McVITTIE
University of Illinois Observatory, Urbana (Ill.)

RESUME

On discute trois problèmes cosmologiques, l'applicabilité de modèles d'univers uniformes à l'univers observé, l'actuel état du problème de l'expansion, et la distribution spatiale des radio-sources extragalactiques de la classe II. On discute à la fois l'application de la relativité générale, de la théorie dite « du régime permanent », et, dans une moindre mesure, de la « relativité cinématique ». Les formules à comparer aux observations sont en fait extrêmement semblables; elles sont rappelées en appendice.

1. — Introduction

This paper deals with three problems in cosmology, namely, the applicability of uniform model universes to the observed universe, the present status of the expansion question, and the distribution in space of extragalactic Class II radio sources. For reasons of space, the mathematical formalism which is to be found in the textbook will not be re-expounded here : the relevant formulae are given in the appendix. The presentation is unified as far as possible : general relativity, the steady-state theory and, to a lesser extent, kinematical relativity, being discussed simultaneously. The formulae through which a comparison of theory and observation is made are indeed for the most part so nearly identical in form that all three theories can be treated together.

2. — Uniformity

It is necessary to distinguish between the observed universe populated by galaxies and the model universe filled with a continuous perfect fluid. In the observed universe, the notion that the distribution of galaxies is statistically uniform still finds its basis in the work of HUBBLE done in the 1930's [1]. He believed that he had established, by counting galaxies to successive limits of brightness — or apparent magnitude as astronomers say — that the number N of galaxies counted down to limiting magnitude m followed very closely the rule :

$$\log N = 0.6\, m + \text{Constant}. \tag{1}$$

This is the formula between N and m that would be found if all galaxies were of equal intrinsic brightness and were distributed uniformly and at rest in an Euclidean space. This conclusion has been severely criticised since Hubble did his work on the grounds that his limiting magnitudes are highly uncertain. It has also been shown that the distribution of galaxies on a photographic plate is not really a random one and that these bodies tend to form clusters more often than chance would lead us to expect [2]. One expert has gone so far as to assert that conclusions based on the alleged validity of (1) in the observed universe should be disregarded [3]. Whilst this is probably an extreme position, it must be confessed that uniformity of distribution in space in the observed universe exists only if the unit of volume is taken to be large, say, 3.5×10^8 parsecs in diameter [4]. Smaller volumes will have very disparate material content according as they do or do not contain clusters of galaxies. Still smaller volumes, of the order of those occupied by single galaxies may be entirely empty of matter. In short, to quote J. H. Oort [4], « one of the most striking aspects of the (observed) universe is its inhomogeneity. »

In contrast, the material content of a uniform model universe (A1) is strictly uniform in the following sense : at a given instant t, the density and pressure of the material are the same in *all* volumes however large or small these may be. Thus the material can hardly nowadays be regarded as a fluid, the individual « particles » of which are galaxies. Indeed, such a notion would contradict the hypothesis on which the theory of the red-shift is based. It is only particles with special world-lines (see appendix) that are there reckoned as sources of radiation, the particles with world-lines of other kinds being regarded as « invisible ». But this would be nonsensical if every « particle » of the material in the model universe was supposed to represent a galaxy. I would therefore argue that the material of a uniform model universe is to be thought of as a representative gas. This gas is the result of an imagined instantaneous disintegration of the contents of all galaxies into their individual atoms, the resulting stuff being imagined as spread out, also instantaneously, uniformly in space. One important physical characteristic of galaxies that is lost in this dissolution process is the angular momentum each possesses *. On this view, the density that occurs in equations (A 16) or (A 18) is that of the representative gas and the pressure found in (A 17) or (A 19) must then represent that part of the energy-content of the observed universe which is not in the form of

* In this connection the question arises : Can the absolute rotation in the non-isotropic model universes of K. Gödel [5], A. L. Zelmanov [6] and O. Heckmann and E. Schücking [7], be connected with this angular momentum ?

mass. The density equivalent, p/c^2, of this pressure would give a measure of the internal energies of stars and interstellar gas clouds; of the rotational, kinetic and potential energies of galaxies and their contents, apart, of course, from the kinetic energy of the general expansion; the density-equivalent of the pressure of radiation, etc. All this energy must be supposed to be evenly divided at each instant amongst the individual particles of the representative gas. The representative gas is in motion, each part moving relative to all others in a way that depends on the particular dependance of the scale-factor R on the time t. Uniformity in space of such a moving system can be defined by saying that, at each instant t, all properties of the gas are the same in all volumes of space. Clearly this is true of the density and pressure whether (A16) and (A17) or (A18) and (A19) are accepted. But we shall extend this notion to the properties of sources of radiation as well, i. e. to their intrinsic luminosities (absolute magnitudes) or to their radio flux-densities and to their number-density [see appendix]. This is a generalization of the notion introduced by the steady-state theory. In this theory the parameter α in (A13) to (A15) is assumed to be proportional to R^3 in order to make the number-density of sources constant. But α need not vary in this particular way nor need we tie up the variation with any creation process. Sources might form and disappear merely as a result of ordinary physical processes e. g. in the observed universe, a collision between galaxies might produce a radio-source which disappears when the collision is over.

If then U is one of these physical properties of the sources of radiation, the over-all postulate of uniformity suggests that U must be the same function of t for all sources. This idea is inspired by the formulae for the density and pressure of the representative gas which involve the single function $R(t)$. Physical characteristics that vary with t alone, and do so in the same way for all objects, will be said to possess the « U-property ». Now the observer O cannot view the whole universe instantaneously, he must wait for radiation to travel to him bearing with it the information about the state of affairs at its place of emission. In Figure 1 are shown the cross-sections of two shells of different (fixed) radii r_s and r. The emission times of radiation from sources in the two shells being t_s and t, respectively, these two times must be unequal if radiation from these (and all other) shells is to reach O simultaneously at time t_o. Thus the property U is recorded as $U(t_s)$ and $U(t)$ for sources in the two shells and in general these values of U will be unequal. The observer therefore registers a composite and non-uniform picture of the state of affairs in the model universe, the contribution from each shell furnishing an extract, so to speak, from the state of affairs at some particular past moment in the history of the universe. An important consequence of these ideas is that $U(t)$ can be regarded as $U(\delta)$ where δ is the red-shift observed by O in the radiation from the sources in Shell r. This follows from equation (A5) which provides a link between the time of emission t and the observed red-shift δ.

3. — The expansion problem

The observational determination of the HUBBLE and acceleration parameters, h_1 and h_2 of (A7), may be briefly described. Attention is focused on clusters of galaxies, and red-shifts for member-galaxies in 18 clusters have been measured photographically down to $\delta = .2$ [8]. With much less accuracy, the apparent magnitudes of the brightest galaxies in clusters have also been measured. It is then assumed (a) that the brightest galaxies of all clusters have the same intrinsic luminosity, and (b) that the spectral-energy curves of these galaxies are identical.

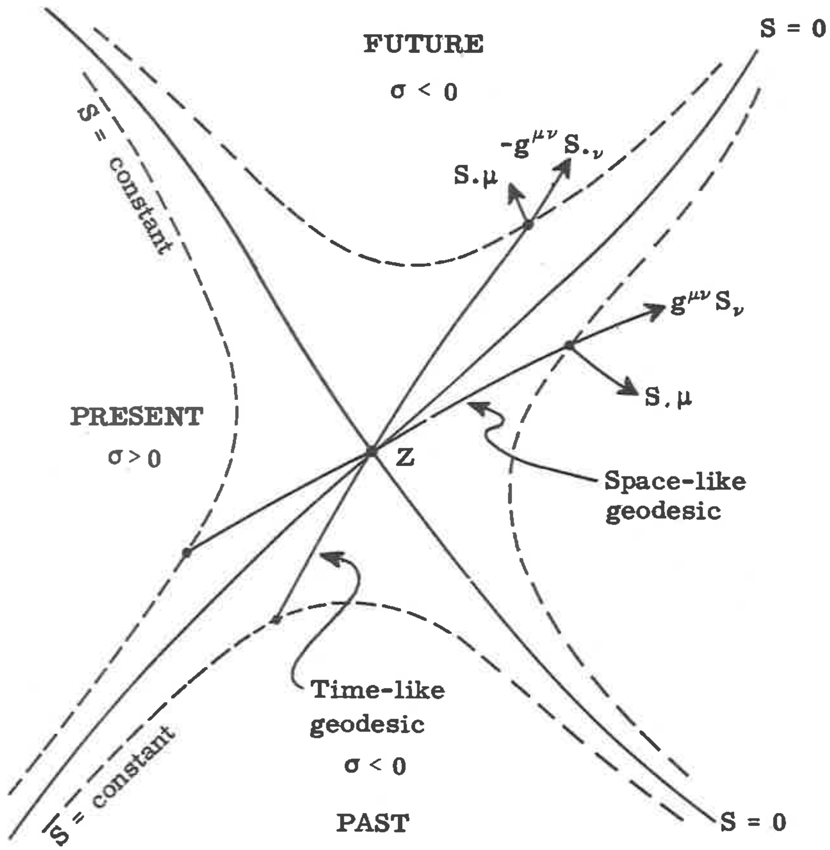


FIG. 1

A refinement of the theory allows these properties to vary with t and thus makes them « U-properties ». The luminosity-distance D is eliminated from equations (A11) and (A12) and a relationship between the observables δ and m is set up, correct to the order δ^2. A least-squares fit of the data shows that h_2 is negative though its precise value is uncertain. The data give :

$$h_2 = - q_0 h_1^2, \tag{2}$$

where q_0 is probably greater than 1.5 and may be as large as 5 [8, 9]. This negativeness of h_2 is confirmed by a photoelectric observation of a cluster for which δ is determined as .4 [10]. By this method $q_0 = 1.0 \pm 0.5$ and this really amounts to saying that the relationship between luminosity-distance D and the velocity $c\delta$ is linear to the second order in δ (see (A11)), an interesting confirmation of Hubble's original conjecture. A negative acceleration parameter implies that the expansion of the universe is proceeding at present subject to a retardation.

The numerical value of the HUBBLE parameter h_1 itself, which would give the present rate of expansion, cannot be found from the red-shift versus apparent magnitude data alone. A calibration process has to enter also, by which the luminosity-distance corresponding to some particular value of the red-shift is found independently. Rapid changes of opinion on this matter have occurred during the last seven years. The value of h_1 has been changed from $17.8 \times 10^{-18}\,\text{sec}^{-1}$ (= 540 km/sec/mpc) in 1952 to $2.43 \times 10^{-18}\,\text{sec}^{-1}$ (= 75 km/sec/mpc) in 1959 [11]. The change of distance-scale implied in these alterations is in the sense that an increase of all distances corresponds to a reduction in the value of h_1.

Objections to these results have been raised, particularly to the negative value of h_2. Since h_2 is zero in Milne's model and positive in the steady-state model, the observational conclusion is naturally distasteful to the supporters of these theories. It is objected that the data are uncertain, which is true. Most astronomical data are inaccurate to a greater or lesser degree ! But until the critics can provide more accurate data, I do not see how the conclusions drawn from the observations we now have can be disregarded. It is also objected that the negative value of h_2 disappears if it is assumed that the intrinsic luminosity of the brightest members of clusters of galaxies increases systematically as we proceed to greater and greater red-shifts and therefore further and further back in time. This statement amounts to saying that a suitably chosen negative value of W_1 in (A12) would make h_2 zero or positive, which is true. But again no detailed observational evidence for the amount of such secular changes has been furnished. An ingenious alternative is to suppose that the effect is one of selection — faint clusters with large red-shifts are selected for measurement simply because their brightest members are unusually luminous [12]. Here again observational evidence must be provided that this has in fact happened.

The Einstein field equations (A16) and (A17) and the foregoing determinations of h_2 and h_1 throw light on the value of the cosmical constant and the space-curvature. We assume, as is usually done, that

p/c^2 at the present time is negligibly small compared with the present density ρ_0. The latter can be identified with the present average density of matter in the observed universe. With the distance-scale corresponding to $h_1 = 2.43 \times 10^{-18}\,\mathrm{sec}^{-1}$, J. H. OORT's most recent estimate of ρ_0 is 3.1×10^{-31} gr/cm³ [4]. Thus $4\pi G \rho_0 = 4.4 \times 10^{-2}\, h_1^2$ and if R_0 is the present value of the scale-factor, equations (A16) and (A17) give :

$$\Lambda = 3h_2 + 4\pi\,G\,\rho_0 = (-3q_0 + 4.4 \times 10^{-2})\, h_1^2, \tag{3}$$

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = h_2 - h_1^2 + 4\pi\,G\,\rho_0 = (-q_0 - 1 + 4.4 \times 10^{-2})\, h_1^2. \tag{4}$$

Now q_0 is probably about 3 and therefore the cosmical constant and k are both negative. It is also clear that to make Λ zero and to have a space of zero or of positive curvature the present value of the density would have to be multiplied by a factor of 200 or more. Oort regards it as possible that his density might perhaps be multiplied by a factor « of ten or more ». This seems to be a long way off a factor of 200. I conclude that, until further observational evidence is forthcoming by which to revise the value of ρ_0, a negative cosmical constant and an open hyperbolic space best fit the data.

A negative value of Λ means that there exists a universal force [18 *j*] in the universe which tends to prevent the galaxies from flying apart. This force is additional to the mutual gravitational attractions between galaxies. These two forces between them account for the retardation of the expansion. But if the Λ — force is abolished by asserting on aesthetic a priori grounds that the cosmical constant is zero, all the responsibility for the retardation is thrown onto gravitation. To have a sufficiently large gravitational attraction it is then necessary to increase the average density of matter by the factor of 200 mentioned above and this is indeed done by those who believe that Λ must be zero *.

A discrepancy between the observed and the calculated values of ρ_0 is inescapable on the steady-state theory. By (A18) with $k = 0$ we obtain $4\pi G \rho_0 = 1.5\, h_1^2$ instead of $4.4 \times 10^{-2}\, h_1^2$. This gap has to be filled by asserting that the observed value of the density must be multiplied by a factor of over thirty. We have here a difficulty additional to the predicted positive value of the acceleration parameter.

4. — Distribution of Class II Radio Sources

The next problem to be discussed is that of the distribution of faint radio-sources, those called Class II sources by the Australian workers [13]. Briefly, the facts of observation are these: over the area of the sky surveyed, 1003 Class II sources have been detected and of these only a small fraction have been identified optically. When such sources are

* Thus HOYLE and SANDAGE [9] find that $4\pi G \rho_0 = 3\, q_0 h_1^2$ by taking $\Lambda = 0$.

identified, they are found to be galaxies, often of peculiar kinds. The amount of energy received from a radio-source per unit time, per unit area at the point of observation and per unit frequency is called its flux-density and is expressed in watts per meter square per cycle per second. The cumulative totals of numbers of Class II sources, N, to successive limits of flux-density, S, are as follows :

$S \times 10^{26}\,Wm^{-2}\,(c/s)^{-1}$	7	10	20	40	80	160
N	982	754	218	63	19	4 .

It is easy to show that the empirical relation between N and S is

$$N = (\text{constant})\ S^{-\frac{(3+\mu)}{2}} \tag{5}$$

where μ is equal to about 0.3 [14]. When $\mu = 0$, this relation is called the « $-3/2$ law ». By studying a number of nearby Class II sources it has been found that the emission of energy at radio-frequencies varies as $(\text{frequency})^x$ in each frequency interval. Here x is a constant, called the spectral index, whose value lies between -0.6 and -1.2 [15].

When attempting an interpretation of these data by means of uniform model universes, whether of general relativity or of the steady-state theory, it will be assumed that the Class II sources are indeed galaxies and so share in the general expansion. Further, it will be asserted that every Class II source has a special world-line. The lack of optical identification suggests that the sources are, for the most part, so remote as to escape optical identification. They are presumably strong sources, possibly comparable with pairs of colliding galaxies such as NGC 1275 or Cygnus A. With these assumptions we proceed to calculate the number of sources having special world-lines in the model universe (A 1) and to relate this number to the sequence of limiting flux-densities by means of formula (A 15). The parameter α for Class II radio sources will be regarded as possessing the U-property. It is therefore a function of t and, as far as the observer is concerned, it is thus a function of the red-shift appropriate to the shell in which the sources lie. The number-density of sources given by (A 14) does not therefore vary merely because of the change in the scale-factor, or equivalently, of the red-shift, as we go from shell to shell; the number-density has a variation of its own due to the change of α.

The sources in the typical Shell r of Figure 1 are assumed to be all alike and to follow the $(\text{frequency})^x$ emission-law. The spectral index will also be assumed to be the same for sources in all shells. However, it may be that the sources in Shell r are subject to a uniform secular variation in their output of radiation. This can be allowed for by supposing that the emission from a source in Shell r is

$$C(t)\, f_e^x\, df_e = C(\delta)\, f_e^x\, df_e \tag{6}$$

in the (emission) frequency range f_e to $f_e + df_e$. Here the power-factor C is regarded as possessing the U-property and it can be thought of as a power series in δ. This radiation will reach the observer in the frequency range f to $f + df$ where $f_e = f(1 + \delta)$ and $df_e = (1 + \delta)\, df$ and the intensity will be reduced by the factor $1/D^2$. Thus the observer will register a flux-density proportional to

$$C(\delta)\,\frac{(1+\delta)^{1+x}}{D^2}\,f^x\,df\,. \tag{7}$$

But f and df are fixed by the nature of the observer's apparatus and so are the same for sources in all shells. Thus proportionality constants can be eliminated by regarding the sources in the nearby Shell r_s as « standard ». If then S, S_s are the flux-densities of sources in Shells r and r_s, respectively, it follows that [16]

$$\frac{S}{S_s} = \frac{C(\delta)}{C(\delta_s)}\,\frac{(1+\delta)^{1+x}}{(1+\delta_s)^{1+x}}\,\frac{D_s^2}{D^2}\,. \tag{8}$$

Before proceeding to obtain the (N, S) formula by combining (A 15) and (8) it is useful to look at the model universe used by the observers [13, 17]. All Class II sources are assumed to be of equal power $P(W\,m^{-2}\,(c/s)^{-1})$ and the sources are regarded as being at rest and as being scattered at random with constant number-density in the Euclidean space of classical mechanics. If S, S_s are the flux-densities measured by the observer for sources at Euclidean distances l and l_s respectively, then

$$S = \frac{P}{l^2}\,, \qquad\qquad S_s = \frac{P}{l_s^2}\,.$$

If n_0 is the number-density of the sources, then the number within a sphere of radius l centered at the observer is

$$N = \frac{4\pi\,n_0}{3}\,l^3\,.$$

Therefore the relation between limiting flux-density S and the number N can be expressed in the two alternative forms

$$N = \left(\frac{4\pi\,n_0}{3Q}\,P^{3/2}\right) S^{-3/2} = \left(\frac{4\pi\,n_0}{3Q}\,l_s^3\right)\left(\frac{S}{S_s}\right)^{-3/2}. \tag{9}$$

Either of these alternatives may then be compared with the empirical formula (5) and the effect of a non-zero value of μ allowed for by suitable variations in, say, the factor $\frac{1}{3}\,n_0\,P^{3/2}$. The objections to this static Newtonian Universe are as follows : — The distribution must come to an end at a finite distance from the observer otherwise the sky would be uniformly illuminated, which it is not. Moreover, if each source is a galaxy, such a finite arrangement of sources would immediately collapse inwards under the mutual gravitational attraction of its constituents. All spectral shifts would be toward the violet instead of toward the red. Another important objection is that this theory deflects attention onto a complication, namely, the departure from the « —3/2 law » represented by a non-zero value of μ. It is in fact the existence of an (N, S) relation which approximates so closely to a « —3/2 law » which is the central puzzle to be explained in the first instance.

Abandoning this line of attack, we return to the uniform model universes in which the Class II sources take part in the general expansion. The sources in Shells r and r_s have number-density n, n_s respectively. Since Shell r_s is nearby, the number-density at all points in the volume enclosed by this Shell can be regarded as being n_s. Thus by (A 14)

$$n = \frac{\alpha(\delta)\,(1+\delta)^3}{R_0^3}, \tag{10a}$$

$$n_s = \frac{\alpha_0 (1+\delta_s)^3}{R_0^3}, \tag{10b}$$

where α_0 may be taken to be the value of α for zero red-shift. When α is a constant the variation of n with δ is due solely to the expansion of the universe and is given by

$$\frac{n}{n_s} = \left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^3. \tag{10c}$$

To reproduce the empirical law (5) we assume that the number of sources given by (A 15) in the volume whose outer boundary is Shell r is proportional to the flux-density ratio given by (8). We write

$$N = \frac{4\pi\, n_s\, D_s^3}{(3+\mu)\,Q}\, A \left(\frac{S}{S_s}\right)^{-\frac{3+\mu}{2}}, \tag{11}$$

where A is a numerical constant to be determined. Now differentiate (11) with respect to r and make use of (A 15), (A 10) and (8) also. We then find

$$\frac{n}{n_s} = \frac{\alpha}{\alpha_0}\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^3 = \frac{F}{F_s}\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{9-3x+\mu(1-x)}{2}} \left(\frac{C(\delta_s)}{C(\delta)}\right)^{\frac{3+\mu}{2}} \left(\frac{\dfrac{r}{1+\dfrac{kr^2}{4}}}{\dfrac{1+\dfrac{kr_s^2}{4}}{r_s}}\right)^{\mu}, \tag{12}$$

where

$$F = \left(\frac{1-x}{1+\delta} - \frac{1}{C}\frac{dC}{d\delta}\right)\frac{r}{2}\frac{d\delta}{dr} + \frac{1-\dfrac{kr^2}{4}}{1+\dfrac{kr^2}{4}}, \tag{13}$$

F_s is the value of F for $\delta = \delta_s$ and A has been adjusted so as to make $n = n_s$ at $\delta = \delta_s$. Formula (12) applies only, of course, for $r \geqslant r_s$ or $\delta \geqslant \delta_s$. The equation shows how n and α must vary with δ if the empirical law (5) is to be recovered. If this is the « —3/2 law », then $\mu = 0$ in (12).

To show how n varies with δ it is necessary to employ some specific model in order that the integrations in (A 4) can be performed. The simplest such model is Milne's (A 2) which, if it does not have a negative acceleration parameter, does at least have a zero one. Let us assume for simplicity that the power-factor C is constant. Then (12) becomes

$$\frac{n}{n_s} = \left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{7-3x-\mu(1+x)}{2}} \left(\frac{2+\delta}{2+\delta_s}\right)^{\mu} \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^{\mu} \frac{1+x+(3-x)(1+\delta)^2}{1+x+(3-x)(1+\delta_s)^2} \tag{14}$$

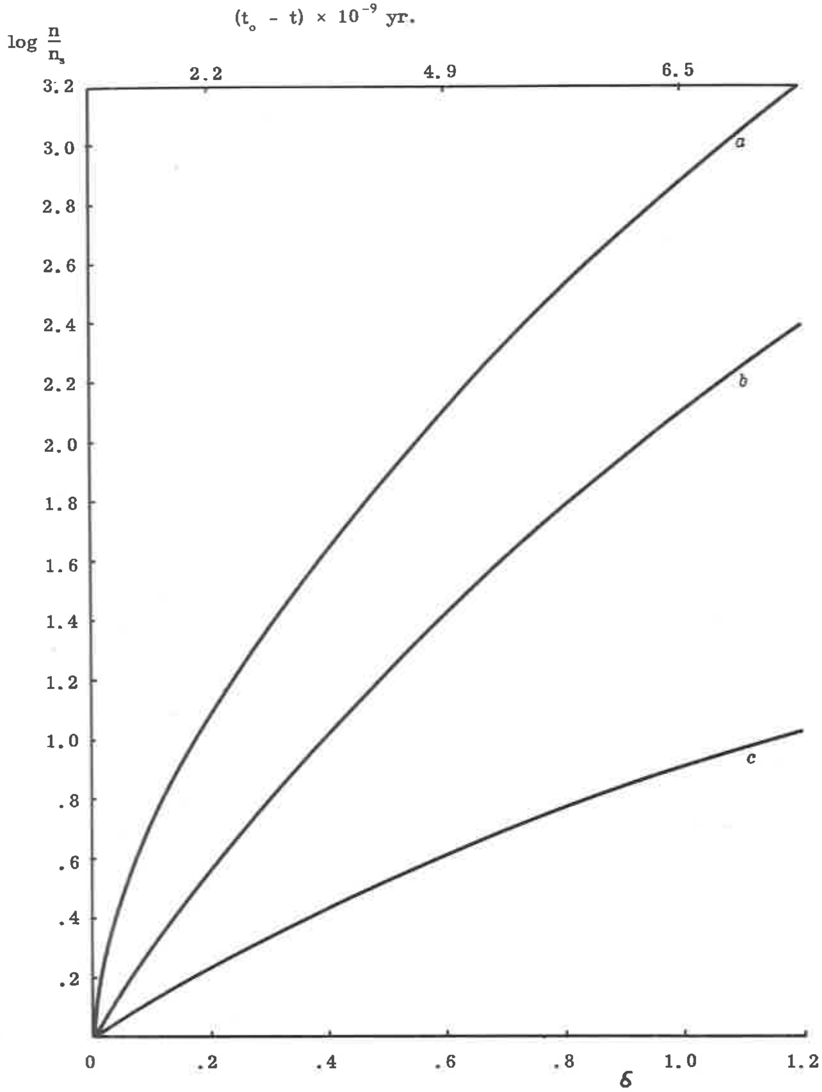


FIG. 2

In this model, $x = -1$ happens to give a relatively simple formula and this value of x is adopted in Figure 2. Curve (a) shows the march of $\log (n/n_s)$ against δ for the empirical law (5) with $\mu = 3$; curve (b) refers to the « —3/2 law » with $\mu = 0$; and curve (c) to the case (10c) in which n varies only because of the expansion. In all three cases $\delta_s = \cdot 004$. Comparison of curves (b) and (c) shows that the existence of a « —3/2 law » for the distribution in space of Class II radio sources implies that they were intrinsically more numerous in the past than they are now. A positive value of μ merely makes the intrinsic increase more pronounced. Thus a « statistical deficiency of stronger sources in our neighbourhood », to quote the observers [13], would be anticipated in either case. The date in the past to which any particular value of n refers is calculable from the corresponding δ and the time of travel, $t_0 - t$, of the radiation from the source. Using (A 2), (A 5) and (A 7), the time is $\delta \{h_1(1 + \delta)\}^{-1}$ in Milne's model. Some of these dates are shown on Figure 2 for $h_1 = 2.43 \times 10^{-18}$ sec^{-1}. Thus 2.2×10^9 years ago ($\delta = \cdot 2$), the number-densities predicted by curves (a), (b), (c) are in the ratios 12 : 3.5 : 1.7.

The equation (12) also shows that the number-density varies as a result of the expansion alone ($\alpha = \alpha_0$) under special circumstances. One such set of circumstances is $x = 1$, $\mu = 0$, $k = 0$ and $C =$ constant. Though it is known that Class II radio sources do not have spectral indices equal to unity, this result is nevertheless interesting because it shows how an appropriately chosen emission-law for sources of radiation could reproduce the « —3/2 law » even if the sources were very far from being at rest in a static Newtonian universe. It can also be proved that, when x is not equal to unity, the condition $\alpha = \alpha_0$ can be secured only at the price of making $R(t)$ depend on x and C. In other words the expansion of the universe would depend on the emission-law of Class II radio-sources which is hardly admissible.

The effect of a variable power-output can be illustrated as follows : Suppose that the Class II sources are relatively close to the observer and that equation (12) is worked out to the first power of δ only. If $\mu = 0$, $C = 1 + C_1 \delta$ and $\delta_s \simeq 0$, then

$$\frac{n}{n_s} = 1 + (5 - 2x - 2C_1)\,\delta + \ldots, \qquad\qquad (15)$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + 2(1 - x - C_1)\,\delta + \ldots,$$

whatever R and the curvature constant may be. The number-density will vary because of the expansion alone, to this order of approximation in δ, if * $C_1 = 1 - x$. Since x is negative, C_1 is a positive number and the power-factor increases with δ. Therefore all the sources were radiating

* This result was found in a different way by McVittie in [16] where it corresponds to the case $p =$ constant and $b_1 = -1$.

more powerfully in the past than they are now. The alternative is to suppose that Class II radio-sources are so close to the observer that their red-shifts are effectively zero. But the paucity of optical identifications then becomes altogether unintelligible.

The approximate formulae (15) also show why PRIESTER [25] was able to deduce that, if n varies like $(1+\delta)^6$ and C is constant, then the « — 3/2 law » is almost, but not quite, reproduced. With $C_1 = 0$ and $x = -\cdot 8$, we have

$$\frac{n}{n_s} \simeq (1 + 6.6\,\delta) \simeq (1+\delta)^{6.6}\,. \tag{16}$$

Priester's hypothesis is that all Class II radio-sources are colliding galaxies, an interpretation that is losing ground as more of the sources are identified with multiple-centered elliptical galaxies.

The conclusion is this : if the scale-factor and the curvature are arbitrary, and the Class II sources are galaxies not in the observer's immediate neighbourhood, then there must be a dependance of α on δ if the sources are to have a « — 3/2 law » of distribution in space and this is also true when μ is non-zero. Thus the number-density of sources in the past differs from its value now in the observer's neighbourhood, a difference that cannot be accounted for simply by the expansion of the universe.

It is a cardinal assumption of the steady-state theory that the ratio of number-densities, $\frac{n}{n_s}$, is always unity. Moreover no overall secular effects are permitted by the theory and therefore the power-factor C must be constant. But now the ratio $\frac{n}{n_s}$ can be calculated for the steady-state model (A 3) from (12) and (13), the result being

$$\frac{n}{n_s} = \left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{7-3x+\mu(1-x)}{2}} \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^{\mu} \frac{2+(3-x)\,\delta}{2+(3-x)\,\delta_s}\,. \tag{17}$$

Comparison with (14) shows, incidentally, how much a change of model alters the number-density formula. If the right hand side were to be equal to unity, it would certainly have to be independent of δ. But this cannot be achieved for any combination of values of μ and x. Thus we conclude that the empirical rule (5) cannot be reproduced by the steady-state theory.

5. — Conclusions

As usual when theory is confronted with the hard facts of experiment or observation, as many questions are raised as are answered. If uniformity in the observed universe is a large-scale phenomenon only, the theoreticians should now turn to the construction of model universes which are uniform in the large but non-uniform when the volume element falls below a certain minimum value. But if uniform models are meanwhile to be employed, then attention should be concentrated on those having hyperbolic space and a negative cosmical constant. Relativistic model universes of this kind exist [28] and a sub-class of them satisfy the condition of having zero pressure. In so far as this condition can be extrapolated into the remote past and also projected into the remote future — two very doubtful extrapolations — these models have scale-factors R which are elliptic functions of t. R increases from zero to a maximum value and then decreases to zero again. Thus these models are of the oscillating, or cyclically repetitive, type. But I think it is illusory to claim, as is done in the steady-state theory and in kinematical relativity, that one single highly specialized model universe can be chosen to represent the observed universe. Our survey has also raised physical problems, for example, can the general force of attraction represented by a negative cosmical constant be interpreted in other terms ? Can a physical process for the emission of radio waves by Class II sources be proposed which would predict that there should be more of them in the past than at present ? Presumably this early proliferation would be connected with the fact that galaxies were closer together in the past. In this sense, PRIESTER [25] may be said to have answered our question if his hypothesis that most of the Class II sources are colliding galaxies could be accepted.

Supporters of the steady-state theory suggest that new kinds of observations are needed [26] in order to « test » their theory as against general relativity. The observers [17, 27] also appear to believe that the question is still open. In fact, it has been known since 1956 that the steady-state theory predicts the wrong sign for the acceleration parameter. We have also pointed out that the predicted average density of matter is rather too high. And lastly, one result of the present paper has been to show that the steady-state theory fails to reproduce the empirical law of distribution of Class II radio sources. In view of these considerations, it is not clear how further « tests » could validate the steady-state theory. Its model universe simply does not agree with observation whereas, as we have seen, certain general relativity model universes do.

APPENDIX

I. — Formulae and definitions valid in general relativity, the steady-state theory and in kinematical relativity.

Metric of a uniform model universe [18*a*, 19]

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \frac{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2}{\left(1 + \dfrac{kr^2}{4}\right)^2} \tag{A 1}$$

Kinematical relativity (Milne's model) [20, 21] :

$$R = ct\,, \qquad k = -1\,. \tag{A 2}$$

Steady-state Model [22] :

$$R = R_0\, e^{(t-T)/T}, \qquad k = 0 \tag{A 3}$$

where R_0, T are constants.

Special world-line : a geodesic for which (r, θ, φ) are constants [18*h*].

Sources of radiation are assumed to have special world-lines.

Observer at $r = 0$, has special world-line and makes all his observations at instant t_0.

Equation of motion of radiation from source located at (r, θ, φ) in typical Shell r (fig. 1) is [18*b*]

$$c\int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = -\int_r^0 \frac{dr}{1+\dfrac{kr^2}{4}} \tag{A 4}$$

Radiation leaves source at time t, reaches observer at time t_0.

Red-shift of radiation from source measured by observer is [18*c*]

$$\delta = \frac{R(t_0)}{R(t)} - 1 = \frac{R_0}{R} - 1\,, \tag{A 5}$$

if R is an increasing function of t.

Hubble parameter (Hubble « constant ») and acceleration parameter : if R is expanded as a power series in the time of travel, $t_0 - t$, of the radiation from the source, then (A 5) becomes [18*d*]

$$\delta = h_1(t_0 - t) + \frac{2h_1^2 - h_2}{2}(t_0 - t)^2 + \ldots \tag{A 6}$$

where the Hubble and acceleration parameters are, respectively,

$$h_1 = \frac{R_0'}{R_0}\,, \qquad h_2 = \frac{R_0''}{R_0}\,, \tag{A 7}$$

and a prime denotes a derivative with respect to t.

Milne's model :

$$h_1 = \frac{1}{t_0}\,, \qquad h_2 = 0 \tag{A 8}$$

Steady-state model :

$$h_1 = \frac{1}{T}\,, \qquad h_2 = \frac{1}{T^2} = +\,h_1^2 \tag{A 9}$$

Luminosity-distance of source [18*e*]. Operation defining its measurement is the measurement of apparent magnitude. Intensity of source falls off as $\frac{1}{D^2}$ where

$$D = R_0(1+\delta)\frac{r}{1+\frac{kr^2}{4}}, \tag{A 10}$$

$$= \frac{c\delta}{h_1}\left\{1+\frac{h_1^2+h_2}{2h_1^2}\delta+\dots\right\} \tag{A 11}$$

In terms of observed apparent magnitude m of source and its estimated absolute magnitude M_0 [18*f*, 23] :

$$\log D = 0.2\,\{m - K_1\,\delta - (M_0 + W_1\,\delta)\} + 1 \tag{A 12}$$

where $K_1\,\delta$ is the K-correction and $W_1\,\delta$ the correction to M_0 if secular changes of intrinsic luminosity are occurring.

Number of sources of radiation in Shell r [18*g*] :

$$dN = \alpha\frac{r^2\,dr}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^3}. \tag{A 13}$$

Number-density of sources (number per unit volume) in Shell r is

$$n = \frac{\alpha}{R^3} = \frac{(1+\delta)^3}{R_0^3}\alpha, \tag{A 14}$$

where α is the number-density at instant when $R=1$. If α varies with time, then total number of sources within volume enclosed by Shell r, counted in fraction $\frac{4\pi}{Q}$ of observer's celestial sphere, is

$$N = \frac{4\pi}{Q}\int_0^r \frac{\alpha\,r^2\,dr}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^3} \tag{A 15}$$

II. — Formulae that differ between theories.

Einstein's equations of general relativity for the density ρ and pressure p of the representative gas are [18*a*] :

$$8\pi\,G\,\rho = \frac{3(kc^2+R'^2)}{R^2} - \Lambda, \tag{A 16}$$

$$8\pi\,G\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} + \Lambda, \tag{A 17}$$

where G is the constant of gravitation and Λ the cosmical constant.

Milne's model interpreted by these equations makes

$$8\pi\,G\,\rho,\ 8\pi\,G\left(\frac{p}{c^2}\right),\ \Lambda \text{ all zero.}$$

The steady-state model makes $8\pi\,G\,\rho$ and $8\pi\,G\left(\frac{p}{c^2}\right)$ zero but $\Lambda = \frac{3}{T^2}\ (>0)$.

Steady-state field equations give [24]

$$8\pi\, G\, \rho = \frac{3(kc^2 + R'^2)}{R^2}, \tag{A 18}$$

$$8\pi\, G \left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} + 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{R'}{R}\right) \tag{A 19}$$

where $\frac{3c}{a}$ is a universal constant brought in by the time-like « creation of matter » vector $3\left(\frac{c}{a}\right)$ (1, 0, 0, 0). The accepted solution (A 3) of these equations is the one that makes ρ constant and $\frac{p}{c^2} = 0$.

REFERENCES

[1] E. P. HUBBLE, *Astrophys. J.*, **79**, 8 (1934).

[2] C. D. SHANE and C. A. WIRTANEN, *Astrophys. J.*, **59**, 285 (1954).
C. D. SHANE, *Astrophys. J.*, **61**, 292 (1956).
J. NEYMAN, E. L. SCOTT and C. D. SHANE, *Astrophys. J.*, **117**, 92 (1953).

[3] F. ZWICKY, « Morphological Astronomy », Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1957). Sec. 20(e).

[4] J. H. OORT, « Distribution of Galaxies and the Density in the Universe » (Solvay Conf., 1958). Stoops, Brussels (1959).

[5] K. GÖDEL, *Proc. Int. Congress of Math.*, 1950, **7**, 175 (1952).

[6] A. L. ZELMANOV, *Trans. I.A.U.* (Moscow 1958) **10** (in press). Report of Commission 28.

[7] O. HECKMANN, *Trans. I.A.U.* (Moscow 1958) **10** (in press). Report of Commission 28.

[8] M. L. HUMASON, N. U. MAYALL and A. R. SANDAGE, *Astron. J.*, **61**, 97 (1956).

[9] F. HOYLE and A. R. SANDAGE, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **68**, 301 (1956).
G. C. MCVITTIE, *Hd. der Physik*, **53**, 445. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1959).

[10] W. A. BAUM, *Astron. J.*, **62**, 6 (1957).
W. A. BAUM, *Trans. I.A.U.* (Moscow 1958) **10** (in press). Report of Commission 28.

[11] A. R. SANDAGE, *Astrophys. J.*, **127**, 513 (1958).

[12] E. L. SCOTT, *Astronom. J.*, **61**, 190 (1956).
G. C. MCVITTIE, *loc. cit.*, p. 481.

[13] B. Y. MILLS, O. B. SLEE and E. R. HILL, *Austr. J. Phys.*, **11**, 360 (1958).

[14] The Cambridge workers suggest that μ may be 1.4 or even 2.4. D. O. EDGE, P. A. G. SCHEUER and J. R. SHAKESHAFT, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **118**, 183 (1958).

[15] G. R. WHITFIELD, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **117**, 680 (1957).

[16] G. C. Mc VITTIE, *Austr. J. Phys.*, **10**, 331 (1957). Equns. (3.05) and (3.06) with $p\,(= -x - 1)$ treated as a constant.

[17] M. RYLE, *Proc. Roy. Soc. A.*, **248**, 289 (1958).

[18*a-j*] G. C. MCVITTIE « General Relativity and Cosmology », Chapman and Hall, London (1956).
(18*a*) : Sec. 8.2; (18*b*) : p. 145; (18*c*) : p. 146; (18*d*) : Equ. (9.201); (18*e*) : Sec. 8.5 (ii) and equ. (9.210); (18*f*) : Sec. 8.6 and p. 164; (18*g*) : Sec. 8.7; (18*h*) : Sec. 8.4; (18*j*) : Sec. 6.5.

[19] H. P. ROBERTSON, *Helv. Phys. Acta,* suppl. IV, p. 128 (1956).
[20] W. O. KERMACK and W. H. MCCREA, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,* **93,** 519 (1933).
[21] G. C. MCVITTIE, *Astron. J.,* **60,** 105 (1955).
[22] H. BONDI and T. GOLD, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,* **108,** 252 (1948).
[23] W. DAVIDSON, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,* **119,** 54 (1959).
[24] F. HOYLE, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.,* **108,** 372 (1948).
[25] W. PRIESTER, *Zs. f. Astrophysik,* **46,** 179 (1958).
[26] F. HOYLE, « Paris Symp. on Radio Astronomy », p. 529. University Press, Stanford (1959).
[27] J. L. PAWSEY, Trans. I.A.U. (Moscow 1958), **10** (in press). Report of Commission 40.
[28] H. BONDI « Cosmology » Sec. 9.4. Case 1 (iii). Cambridge University Press (1952).

DISCUSSION

Intervention de Wheeler

Professor McVittie's report contains a very vital point that I may be excused for restating in somewhat different terms and making still more explicit. He has recalled Oort's latest figure for the density of matter agglomerated into galaxies, 3×10^{-31} g/cm^3; with a factor of uncertainty of perhaps 3. In contrast, a density of 10^{-28} or 10^{-29} g/cm^3 is required to hold together a closed spherical universe with an age of the order of 7×10^9 years and time linearly extrapolated back to the start of expansion of the order of 13×10^9 years (inverse Hubble constant). Professor McVittie therefore concludes that a closed spherical universe is incompatible with the observations. I should like to emphasize that an important assumption is involved in this conclusion — the assumption that we have information today on all the potentially significant sources of mass-energy. Actually one can name today several sources of mass-energy which have been so little investigated that *we cannot exclude the possibility that any one of them by* itself can and does supply 10^{-29} or 10^{-28} g/cm^3 : atomic hydrogen (George Field); molecular hydrogen; matter agglomerated into lumps ranging in mass from grams to tons (Henry Norris Russell); neutrinos; and gravitational radiation. Some of these sources are already under investigation today and we can hope to know much more about the subject ten years from now.

In the meantine it would appear premature to suggest the conclusion, as Professor McVittie does, that we are driven to an open and forever expanding universe. Exactly the opposite possibility seems to deserve very serious consideration : that the universe is closed; that it will reach a maximum size and start recontracting, and that the density required to hold it together comes from one or other of the forms of mass-energy about which we are now so poorly informed.

The arguments against an infinite universe and for a finite closed universe, based on Mach's principle, have been clearly summarized by Einstein (1), among others. If we take these arguments seriously, we are driven to look closely at all potential sources of mass-energy. It would not be appropriate to enter here into the details of this most interesting ques-

(1) A. EINSTEIN, « The Meaning of Physics », Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 5th edition; 1955, pp. 107ff; see also J. A. WHEELER, article on Mach's principle in preparation for Australian Journal of Physics.

tion (2). However during these days when gravitational radiation has received so much attention, it is timely to ask if one can ever hope to test whether a major part of the sought-for 10^{-29} or 10^{-28} g/cm^3 comes from gravitational radiation filling all space.

If it does, we will be confronted with the gravitational analog of Tolman's photon filled universe (Table I). We know that the density of electromagnetic radiation in space is too low to justify Tolman's picture of a universe filled with *electromagnetic* radiation. However, here we are considering a universe of the same type filled with *gravitational* radiation.

TABLE I

Properties of radiation-filled universe compared and contrasted with those of dust filled universe.
The effective equation of state of the real universe will be expected to lie between the two extremes.

Descriptive name	FRIEDMANN	TOLMAN
Medium that provides the mass-energy required to hold the universe together	Dust	Radiation
Its equation of state	$p = 0$	$p = \rho c^2/3$
Variation of density of mass-energy with radius a of the universe	$\dfrac{const}{a^3}$	$\dfrac{const}{a^4}$
Nature of parametric relation connecting radius a with cotime $T = ct$ since start of expansion.	Cycloid $a = (a_0/2)(1 - \cos\eta)$ $T = (a_0/2)(\eta - \sin\eta)$	Circle $a = a_0 \sin\eta$ $T = a_0(1 - \cos\eta)$

In order to supply an *effective* density of mass-energy of the order of 10^{-29} or 10^{-28} g/cm^3, or in order to bend space time into a radius of curvature of the order of 10^{10} light years, gravitational waves of wave length $\lambda = 2\pi(\lambda/2\pi) = 2\pi\bar{\lambda}$ must have an amplitude δg of the order

$$\delta g \sim \bar{\lambda}/10^{10} \text{ light years.}$$

What order of magnitude is reasonable fort the wave length (3) ? If gravitational radiation weighs more now than the galaxies, then the mass discrepancy was even greater when the radius of the universe was smaller (Table I). Therefore the gravitational radiation bulked so large in the past that the major part of it can hardly be considered to have been emitted by the galaxies. It would seem more reasonable to consider the source to consist of inhomogeneities in the metric itself in the initial phases of the expansion of the universe — the same inhomogeneities that set off the agglomeration of matter into galaxies. In other words, it is natural to think of gravita-

(2) For a discussion of this question see for example the section on general relativity by B. ADAMS, B.K. HARRISON, L. KLAUDER, R. MJOLSNESS, M. WAKANO, J.A. WHEELER and R. WILLEY in the report of the Onzième Conseil de Physique Solvay, « La structure et l'évolution de l'univers », Edition Stoops, 89, Coudenberg, Brussels, 1958.

(3) This question arose in a discussion in May 1951 with Professor Martin SCHWARZSCHILD, whose stimulus and contributions to the discussion are here gratefully acknowledged.

tional waves as having had initial wave lengths comparable to the initial separation between galaxies. On this view it follows that both dimensions will increase in proportion to the radius of the universe. In other words, it seems not out of place to think of a wave length today of the same order as todays' spacing between galaxies, of the order of 10^6 light years ($\bar{\lambda} \sim 10^5$ light years). With this wave length one deduces a wave amplitude only of the order

$$\delta g \sim 10^{-5}\,.$$

Measurements of the red shift of light from other galaxies seems not the right way to detect such long period fluctuations in the metric. The shift from this cause will vary only in a fluctuating way with distance. The effect will be submerged by the normal red shift due to expansion, an effect also of the order $\delta g \sim 10^{-5}$ for a nearby galaxy, but almost linearly proportional to distance for more remote galaxies.

The assumed variations of the order $\delta g \sim 10^{-5}$ over distances of the order of 10^6 light years will however cause light rays from distant galaxies to travel as if through a medium of irregularly varying refractive index. By way of analogy, consider two points, A and B, on the surface of a potato. When the « receptor » B is close to the « source » A, there is only one natural way to draw the short geodesic connecting the two. However, when the separation is increased, there will typically develop at a certain moment three ways to draw the geodesic, then five ways, etc., due to the lumpy character of the surface of the potato. Such effects are well known in the twinkling of stars due to atmospheric irregularities. Such effects are also evidenced by the unpredictable number of bangs that come from a distant lightning stroke or a distant explosion.

Obviously one will not want to look at one distant galaxy for 10^6 years, but rather at 10^6 or more galaxies for one year, to see if any evidence appears for a single image dividing into three, or for three spots of light recombining to give one image. Through observations of this sort and associated theory (4) it should ultimately be possible to set at least one limit on the intensity of gravitational waves.

Not the least evidence has been offered in what has been said here for a mass-energy contribution from gravitational waves of the order of 10^{-29} or 10^{-28} g/cm^3. Instead, these comments only stress that one cannot exclude such a contribution until he has carried out the appropriate observations and analysis.

Intervention du professeur Wheeler

As a statement of principle Professor Møller's remarks are incontrovertible, and certainly receive wholehearted agreement from everyone. However, we also know from the work of Gupta (5) that the equations of general relativity can be rearranged, so that one has on the right hand side an *effective* source of mass-energy due to the gravitational field itself. This rearrangement makes particular sense when a smoothly varying « background metric » has been modified by disturbances of small amplitude, δg, and also of small wave length, $\lambda = 2\pi\bar{\lambda}$. Then the *effective* source term on the right hand side of the equations — *after rearrangement* — is of the order $(\delta g/\bar{\lambda})^2$. (Note added 23rd September : Since the conference, John G. Fletcher has shown how to formulate the concept « curvature relative to a background metric » in a well defined way, as follows :

$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ (true curvature calculated from true metric)

(4) Now being analysed in collaboration with Dr. Bruno Bertotti.
(5) S. N. Gupta, *Phys. Rev.*, **96**, 1683 (1954).

$= \widehat{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ (the background curvature; that is, the curvature that would obtain if the true metric $g_{\mu\nu}$ were replaced by the background metric $\widehat{g}_{\mu\nu}$ in *every stage* of the standard calculation of the Riemann tensor from a given metric);

$+ R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ (g relative to $\widehat{g}$) (« the curvature of metric g relative to $\widehat{g}$ »). Fletcher shows that this relative curvature tensor is expressible in a simple way in terms of what might be called the « relative acceleration » $a_{\mu\nu}{}^{\rho}$ of the two metrics. The quantity with the indicated mixture of indices is a *tensor* in both reference systems and has the value :

$$a_{\mu\nu}{}^{\rho}\,(g \text{ relative to } \widehat{g}) = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} - \widehat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\,(g_{\sigma\mu;\nu} + g_{\sigma\nu;\mu} - g_{\mu\nu;\sigma}).$$

This last expression is computed like the Christoffel symbol itself *except* that semicolons appear instead of the usual commas. They denote covariant derivatives with respect to the background metric. In terms of these same semicolons and the $a_{\mu\nu}{}^{\rho}$, the relative curvature has the value :

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\,(g \text{ relative to } \widehat{g}) = a^{\alpha}{}_{\beta\delta;\gamma} - a^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta} + a^{\alpha}{}_{\gamma\sigma}\, a^{\sigma}{}_{\beta\delta} - a^{\alpha}{}_{\delta\sigma}\, a^{\sigma}{}_{\beta\gamma}$$

Expressed in terms of components with the indicated mixture of indices, Fletcher's « relative curvature » satisfies two identities of just the character that one would wish :

$$R^{\cdot}{}_{\dots}\,(g \text{ relative to } \widehat{g}) + R^{\cdot}{}_{\dots}\,(g \text{ relative to } \widehat{g}) = 0\,;$$

and

$$R^{\cdot}{}_{\dots}\,(g_1 \text{ relative to } g_2) + R^{\cdot}{}_{\dots}\,(g_2 \text{ relative to } g_3) + R^{\cdot}{}_{\dots}\,(g_3 \text{ relative to } g_1) = 0\,.$$

The practical consequence of Fletcher's analysis is this, that in a universe filled with a homogeneous isotropic mixture of gravitational radiation, the Einstein field equations :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

can be rewritten in the form :

$$\widehat{R}_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}\,(g \text{ relative to } \widehat{g}).$$

Here $\widehat{g}$ refers to a uniformly curved space, and g refers to a metric which is full of variations of the order δg and of wave length λ. The value of the right hand side of this last equation, *averaged over a region appreciably larger than* λ, constitutes the effective source of mass-energy which holds together this nearly spherical closed universe.)

Of primary interest in connection with cosmological questions is an idealized universe with an effectively uniform curvature, for reasons which Professor McVittie has so clearly explained. If we are going to assume that the curvature is *effectively* uniform, why not be consistent and say that the curvature is *exactly* uniform ? In other words, why not *exclude gravitational radiation ?* The answer to this question is no different in principle in the idealized case of a universe filled with a homogeneous isotropic distribution of *gravitational* radiation from what it is in the case of a universe filled with a homogeneous isotropic distribution of *electromagnetic* radiation (Tolman universe) or filled to a uniform density with dust (Friedmann universe). The last two models are familiar to every student of cosmology as extremely important limiting cases. Any equation of state intermediate between the two extremes, $p = 0$ and $p = \varrho\, c^2/3$, gives a law of expansion and recontraction as a function of time for a uniformly curved closed universe with zero cosmological constant which is intermediate between the Tolman and Friedmann results. However, no one who applies either model thinks of the curvature as being *truly* uniform on a small scale. Each particle of dust in the Friedmann universe is the seat of a Schwarzschildian perturbation in the metric. Only the statistical resultant of these many irregularities adds up to the effectively uniform curvature of the model (6). This curvature can of course be calculated alternatively by idealizing the matter as a continuous distribution, even though no such continuously distributed matter exists in nature. Similarly in the Tolman universe, at a scale of distances comparable with or smaller than the wave length, the stress-energy tensor and the curvature of space vary rapidly from point to point. Yet it is perfectly legitimate for cosmological purposes to replace this irregularly varying curvature by a uniform curvature, and to calculate this uniform curvature from an averaged-out stress-energy tensor — even though the local stress-energy tensor for a radiation field *cannot* have everywhere the same value. In precisely the same way a universe filled with gravitational radiation is described by a background metric with uniform curvature, plus a rapidly varying δg; but this situation is again more conveniently described by speaking only of the background metric, and treating the effect of the fluctuations *as if* they were uniformly spread. Obviously the kind of analysis would be inappropriate if the departures from sphericity were great in magnitude and large in scale — but then one would not be dealing with the subject under discussion : « a homogeneous isotropic distribution of gravitational radiation ».

Intervention du Prof. J. L. Synge

Les cosmologues devraient se rappeler que la seule partie de l'univers qu'ils peuvent explorer est constituée par le mince cône isotrope dont le sommet est situé sur la ligne d'univers du système solaire. En ce qui concerne le décalage vers le rouge, Lanczos a montré que cela peut être discuté très simplement en termes de transport parallèle : si la 4-vitesse d'une étoile est transportée jusqu'à nous par parallélisme le long d'une géodésique isotrope (rayon lumineux), il n'y a pas de décalage vers le rouge lorsque le vecteur transporté coïncide avec notre 4-vitesse; et lorsque ces deux vecteurs ne coïncident pas, ce décalage est donné par le produit scalaire de ces deux 4-vitesses. Si l'on se rappelle que les observations sont limitées au cône isotrope, comme je l'ai dit, la construction du reste de l'univers est un problème de métaphysique; et là, nous sommes naturellement guidés par des raisons de simplicité. La théorie de « l'état stationnaire » rend équivalents tous les observateurs; et ceci est une hypothèse plus simple que celle qui, étant donné le 3-espace de courbure constante orthogonal à notre ligne d'univers, considère comme équivalents uniquement les 4-vecteurs orthogonaux à ce 3-espace.

Intervention du Prof. C. Møller

A l'opposé du Prof. Wheeler et du Prof. Ivanenko je ne pense pas que les ondes gravitationnelles aient un rôle à jouer dans les raisonnements du Prof. Mc Vittie. La densité que Mc Vittie considère est la densité de matière du tenseur matériel d'impulsion-énergie figurant au deuxième membre des équations du champ d'Einstein. Or, par définition, les ondes gravitationnelles sont solutions des équations du champ avec second membre nul; par suite, elles ne peuvent donner aucune contribution à la densité en question. En principe, c'est évidemment différent du cas des neutrinos qui contribueront par une certaine quantité au tenseur d'impulsion-énergie.

(6) R. W. Lindquist and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 432 (1957).

Intervention du Dr K. Just

Les ondes gravitationnelles détruiront l'homogénéité spatiale du modèle cosmologique, apportant ainsi une modification au membre de gauche des équations d'Einstein. Ceci, en tout cas, peut être approximativement équivalent à une augmentation d'énergie de la matière.

Intervention du Prof A.H. Taub

Le Prof. Mc Vittie a exposé les conséquences des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie. Celles-ci entraînent que la densité et la pression soient celles d'un fluide parfait. Si cette densité est supposée égale à celle donnée par Oort, la constante cosmologique et la courbure sont négatives. Un facteur 200 est nécessaire pour les transformer en quantités non-négatives. La conclusion serait donc à changer si ce facteur peut être fourni par une observation quelconque. Il est évidemment possible que l'élément linéaire soit faux, auquel cas d'autres déductions sont possibles à partir des observations. Il est également possible que la valeur de Oort ne tienne pas compte des diverses formes d'énergie. Leur considération pourrait modifier sa valeur et par suite les conclusions.

Intervention du Prof. E. Schatzmann

Il est utile d'attirer l'attention sur le problème de la détermination de la densité de matière dans l'espace. Le rapport $\frac{m}{\mathcal{L}}$ est pris par Oort (en unités solaires) de l'ordre de 20. Mais la détermination de $\frac{m}{\mathcal{L}}$ dans les galaxies multiples et les amas conduit à des valeurs beaucoup plus grandes (5 000 dans les amas). En réalité, si on abandonne l'hypothèse de la stationnarité, on est conduit à l'idée (cf. Ambarzoumian) que les systèmes ont été formés récemment (1 à $2 \cdot 10^9$ ans). Il y aurait donc des systèmes de galaxies en formation à l'heure actuelle.

Réponse du Prof. Mc Vittie

En tout cas, ces considérations supplémentaires modifieraient seulement la densité par un facteur bien inférieur à celui d'Oort, soit 10. Ainsi, un tel changement ne modifierait pas le signe négatif des valeurs de la constante cosmologique Λ et de la constante k de courbure d'espace.

Intervention du Dr. Schücking

La question de savoir si l'univers est fermé ou non n'a rien à voir avec le signe de la courbure de l'espace 3-dimensionnel. Il existe par exemple un modèle d'univers fermé constitué par un 3-espace de courbure constante négative.

Réponse du Prof. Mc Vittie

Rigoureusement parlant, je prenais le signe de la constante k dans la forme habituelle de la métrique. Ceci, je l'admets, détermine simplement la courbure des espaces 3-dimensionnels définis à $t = \text{const.}$ lorsque la métrique est exprimée par rapport au système de coordonnées utilisé dans la formule (A.1).

TRANSFORMATIONS OF STATIC EXTERIOR SOLUTIONS OF EINSTEINS GRAVITATIONAL FIELD EQUATIONS INTO DIFFERENT SOLUTIONS BY MEANS OF CONFORMAL MAPPINGS

by JÜRGEN EHLERS,
Université de Hambourg

RÉSUMÉ

Je me propose de montrer que l'emploi des transformations conformes permet des simplifications considérables dans le calcul par ailleurs souvent compliqué et pénible du tenseur de Ricci correspondant à une métrique donnée. Presque tous les cas connus de solutions exactes des équations du champ peuvent être traités par cette méthode qui donne bien des formules utiles.

In this report we want to show how it is possible to construct new static exterior solutions, stationary exterior solutions and stationary interior solutions of the field equations of general relativity from static exterior solutions by applying certain conformal transformations to auxiliary metrics defined on three-dimensional manifolds of distinguished paths in space-time. All theorems we shall consider are purely local. Perhaps the most interesting result is that the determination of all interior solutions in which incoherent matter moves rigidly is equivalenet to the construction of all static exterior solutions and, in fact, equivalent to the determination of all three dimensional Riemannian spaces with positive definite metrics the contracted curvature tensors of which admit a representation (6) *.

* Applications of the theorems developed in this report will be described in a series of papers by P. JORDAN and his collaborators which will appear soon in the « Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften und der Literatur » in Mainz; there a systematic treatment of the known and of new rigorous solutions will be given.

§ 1. — Auxiliary Formulae. Notation

The following considerations make use of two well-known formulae which are given here for the convenience of the reader and in order to fix the notation.

To a first fundamental form of the type

$$G = H - V^2 (dx^o - u)^2 , \tag{1}$$

in which

$$H = h_{ik} dx^i dx^k \tag{1'}$$

is a quadratic differential form in the three variables $x^i (i, j, ... = 1, 2, 3$ here and throughout this paper),

$$u = u_i dx^i \tag{1''}$$

a linear differential form, and V a function (both u_i and V also depend on the x^i only), belongs a Ricci-tensor with components. *

$$\begin{aligned} R^o_o &= V^{-1}(V^{,i} + V^2 u_j u^{[j;i]})_{;i} , \\ R^i_o &= V^{-1}(V^3 u^{[i;j]})_{;j} , \\ R^i_j &= P^i_j + V^{-1} V^{,i}{}_{;j} + 2V^2 u^{[i;l]} u_{[l;j]} - u_j R^i_o . \end{aligned} \tag{2}$$

Here the metric operations on the right side — shifting of indices, $V^{,i} = h^{ij} V_{,j}$; covariant differentiation, $u_{i;j}$ — refer to the metric (1′), and P^i_k denotes the Riccitensor of this metric. A derivation of (2) is given in [1].

If two non-singular symmetric tensor fields on an n-dimensional manifold are related by

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = e^{2U} g_{\lambda\mu} \tag{3}$$

where U is a scalar, the corresponding Ricci-tensors satisfy

$$e^{2U} \bar{R}^\lambda_\mu = R^\lambda_\mu + (n-2)(U_{,\mu}{}^{;\lambda} - U_{,\mu} U^{,\lambda}) + \delta^\lambda_\mu (U^{,\nu}{}_{;\nu} + (n-2) U_{,\nu} U^{,\nu}) . \tag{4}$$

Here $\bar{R}^\lambda_\mu = \bar{g}^{\lambda\nu} \bar{R}_{\nu\mu}$, and all metric operations on the right side refer to $g_{\lambda\mu}$. A proof of (4) is given in [2].

§ 2. — Reduction of static exterior fields to certain three-dimensional Riemannian spaces

Exterior fields (source-free gravitational fields) are four dimensional normal hyperbolic ** Riemannian spaces with vanishing Riccitensor. A field or « space-time » is called stationary, if it admits a one dimensional Lie-group of isometric correspondences with time-like trajectories; it is called static, if the trajectories form a normal congruence [1].

* Square brackets denote anti-symmetrization.
** We choose the signature +++—.

Let W be a static exterior field, G its first fundamental form, and $\vec{\xi}$ a Killing vector field generating the corresponding group. Then the coordinates $x^\lambda (\lambda, \mu, ... = 1, 2, 3, 0$ here and in the following) can be chosen such that

$$G = e^{-2U} H - e^{2U} (dx^o)^2 , \qquad \xi^\nu = \delta^\nu_o \tag{5}$$

with H as in (1′) and $U = U(x^i)$. H defines a positive-definite Riemannian metric on the three-dimensional manifold S formed by the trajectories of the group.

Applying first (1) and (2) to (5) (regarding e^{-2U} H as the metric of S), then using (3) and (4) (taking H as the new metric of S) one can prove the remarkable theorem that (5) satisfies $R_{\lambda\mu} = 0$ if and only if

$$P_{ik} + 2U_{,i} U_{,k} = 0 \tag{6}$$

is valid in (S, H); P_{ik} again denotes the contracted curvature tensor of H [2]. Therefore the determination of all static exterior fields is mathematically equivalent to the construction of those Riemannian 3-spaces the Ricci-tensors of which have the form (6).

Because of the contracted Bianchi-identity for P_{ik}

$$U^{,i}{}_{;i} = 0 . \tag{7}$$

By (5), (6) and (7) the scalar $U = \dfrac{1}{2} \log (- \xi_\lambda \xi^\lambda)$ is seen to satisfy in W with respect to G

$$U^{,\lambda}{}_{;\lambda} = 0 , \qquad \xi^\lambda U_{,\lambda} = 0 . \tag{8}$$

§ 3. — A theorem of Buchdahl

As a simple application of the theorem stated in § 2 we describe now a result found by Buchdahl in 1954 [3]. We reformulate his theorem here because our proof is much simpler than the original one and because it is similar to the statements of the following two sections.

Obviously with (H. U) also (H, — U) solves (6). This can be expressed without reference to special coordinate :

If G is the fundamental form of a static exterior space-time W whose time-like, hypersurface-normal Killing vector field is $\vec{\xi}$, then the new fundamental form

$$\bar{G} = e^{4U} G + (e^{2U} - e^{-6U}) (\vec{\xi} \cdot \vec{dx})^2, \tag{9}$$

where

$$e^{2U} = |\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}|,$$

defines again a static exterior field with the same Killing vector field $\vec{\xi}$; in fact (9) reduces to the transformation if one uses coordinates according to (5).

For this theorem and the proof given here it is not essential that $\vec{\xi}$ is timelike; they remain valid if « time-like » is replaced by « space-like ».

§ 4. — Special stationary exterior fields

If one sets up, by means of the formulae of § 1, the field equations $R_{\lambda\mu} = 0$ for a metric of the type

$$G = a \cos h(2U)\, H - (a \cos h(2U))^{-1} (dx^o - u)^2 \tag{10}$$

with

$$a = \text{const.} > 0\,, \quad U = U(x^k)\,,$$

and H and u as in (1′), (1″) resp. (in the way described in § 2 in connection with (5)), one obtains again the relation (6) for H and U. Moreover,

$$-\, a\, \eta_{jkl}\, U^{,l} = u_{[j,k]} \tag{11}$$

which is to be understood with respect to H. η_{jkl} denotes the usual totally skew-symmetric tensor * with components 0, $\pm h^{1/2}$; $h = |h_{ik}|$.

The condition of integrability of (11) regarded as a system of differential equations for the unknowns u_i is (7); it is fulfilled therefore in consequence of (6). The integration of (11) is a well-known elementary procedure; it is the determination of a vector-potential for a given integrable ($F_{[ij,k]} = 0$) skew-symmetric tensor-field. If we combine this result with § 2, we get the following theorem :

If (5) describes a static exterior space time, then (10) is the metric of a stationary exterior space-time provided the u_i satisfy (11). The field given by (10) is in general non-static.

The translation of this theorem into generally covariant form reads :

If G is the fundamental form of a static exterior field W with time-like hypersurface-normal Killing vector field $\vec{\xi}$, then the equations

$$a\, \eta_{\kappa\lambda\mu\nu}\, U^{\cdot\mu}\, \xi^\nu = u_{[\kappa,\lambda]}\,, \quad u_\lambda\, \xi^\lambda = -1 \tag{12}$$

(which refer to G) are integrable, (8) being the conditions of integrability. If $\vec{u}$ is a solution of equ. (12),

$$\overline{G} = a \cos h(2U)\ (e^{2U}\, G + (\vec{\xi} \cdot \vec{dx})^2) - (a \cos h(2U))^{-1} (\vec{u} \cdot \vec{dx})^2 \tag{13}$$

is the metric of a stationary exterior field $\overline{W}$.

We remark without proof, that the $\overline{W}$'s that can be constructed in this way out of W's are characterised by the existence of a time-like Killing vector field $\vec{\xi}$ which satisfies (with respect to $\overline{G}$)

$$\xi^\varrho\, \xi^{[\iota}{}_{;\rho}\, \eta^{\varkappa]\,\lambda\mu\nu}\, \xi_\lambda\, \xi_{\mu,\nu} = 0\,. \tag{14}$$

If one chooses for G in (13) in particular the static axially symmetric solution of Weyl (4), one obtains stationary axially symmetric fields which, by complex transformations of coordinates, can be changed similar to, but not equivalent to the Einstein-Rosen waves **.

* We omit the difference between tensors and pseudotensors, because our considerations are purely local; we may assume that we have oriented the manifold locally.

** This application of the theorem has been described in my lecture given at the coloque about the theory of relativity held at Brussels on 19. and 20. 6. 1959.

§ 5. — Rigid motions of incoherent matter

The equation

$$\bar{R}_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\lambda\nu}\bar{R} + \rho\, u_\lambda u_\mu = 0 \tag{15}$$

describes a metric field $\bar{G}$ interacting with incoherent matter which has four-velocity $\vec{u}$ and proper density ρ *.

(15) implies that the streamlines are geodesics, a fact which is used tacitly throughout this section.

The scalar

$$\theta = u^\lambda{}_{;\lambda} \tag{16}$$

represents the velocity of expansion, the vector

$$\omega^\varkappa = \frac{1}{2}\bar{\eta}^{\varkappa\lambda\mu\nu}\, u_\lambda\, u_{\mu;\nu} \tag{17}$$

measures the velocity of rotation [5], and the symmetric tensor **

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} - \frac{1}{3}\theta\,(\bar{g}_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \tag{18}$$

with vanishing trace describes the velocity of shear [6]. We put

$$\omega = (\omega_\lambda\,\omega^\lambda)^{1/2}, \quad \sigma = \left(\frac{1}{2}\sigma_{\lambda\mu}\,\sigma^{\lambda\mu}\right)^{1/2} \tag{19}$$

(17) can be transformed into

$$u_{[\kappa,\lambda]} = \bar{\eta}_{\kappa\lambda\mu\nu}\,\omega^\mu u^\nu; \tag{20}$$

consequently we have

$$(\omega^{[\mu}u^{\nu]})_{;\nu} = 0\,, \quad \omega^\nu{}_{;\nu} = 0. \tag{21}$$

Therefore

$$\omega^\mu u^\nu{}_{;\mu} - u^\mu\,\omega^\nu{}_{;\mu} = \theta\,\omega^\nu\,. \tag{22}$$

These formulae can be used to derive the theorems of the vorticity-theory (directly in the case of geodesic streamlines, with a slight modification also in the more general case of isentropic motions of ideal fluids) developed by Synge [5], Lichnerowicz [1], M^me^ Foures [7] and Gödel [8].

The equation

$$u^\lambda\,\theta_{,\lambda} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2}\rho = 0 \tag{23}$$

is a consequence of (15) as has been shown by Raychandhuri [9].

* The metric tensor is denoted $\bar{g}_{\lambda\mu}$ because we shall use a second metric $g_{\lambda\mu}$ below. Nevertheless covariant differentiation; and index-shifting refer to $\bar{G}$ unless otherwise stated.

** Round brackets denote symmetrization.

We propose now to study those solutions of (15) in which matter moves without changing its form (locally); that means we postulate $\theta = 0$ and $\sigma = 0$ or, equivalenty by (16) and (18),

$$u_{(\mu;\nu)} = 0\,. \tag{24}$$

Rigid motions have been treated by several authors [10], [11], [12], [13]; but rigorous solutions of (15), (24) have been given only by van STOCKUM [10] in 1937. We shall specify below how van STOCKUM's results are contained in our general theorem.

RAYNER studies instead of (15), (24) the equation

$$\overline{R}^{\lambda}_{\mu}\, u^{\mu} = \frac{1}{2}\,\rho\, u^{\lambda} \tag{25}$$

together with $\theta = 0$, $\sigma = 0$ and does not put any restrictions on the tensions inside matter. As (25) follows from (15) our considerations are, as far as only (25) is concerned, similar to those of RAYNER; but as we have the additional condition $u^{\lambda}\, u^{\nu}{}_{;\lambda} = 0$ even in this part of the treatment we get some more specific results, namely (26), (27), (29).

With (24) RAYCHANDHURI's equation (23) simplifies to

$$\rho = 4\,\omega^2.\,^* \tag{26}$$

(We use — see (15) — natural relativistic units, namely $c = 1$, $f = \dfrac{1}{8\pi}$. In cgs-units (26) reads $\omega^2 = 2\pi f \rho$ with f as Newton's constant of gravitation.)

By (20), (24), and (22) we have

$$\omega^{\mu}\, u^{\nu}{}_{;\mu} = u^{\mu}\, \omega^{\nu}{}_{;\mu} = 0\,, \tag{27}$$

thus in a rigid, geodesic motion the four-velocity is parallel propagated along the vorticity-lines, and the vorticity-vector is parallel propagated along the streamlines.

By (24) and the Ricci-identity we have $u^{[\lambda;\mu]}{}_{;\mu} = \overline{R}^{\lambda}_{\mu}\, u^{\mu}$, therefore, by (25), $(\delta^{\nu}_{\lambda} + u^{\nu}\, u_{\lambda})\, u^{[\lambda;\mu]}{}_{;\mu} = 0$ which, by (20), can be reformulated as

$$u_{[\lambda}\, \omega_{\mu,\nu]} = 0\,. \tag{28}$$

Contraction with u^{λ} gives $\omega_{[\mu,\nu]} = (u_{\mu}\, \omega_{[\nu,\lambda]} + u_{\nu}\, \omega_{[\lambda,\mu]})\, u^{\lambda}$ which equals, because of (27), $u^{\lambda}\, \omega_{\lambda\,[;\mu}\, u_{\nu]}$ and, by $u_{\lambda}\, \omega^{\lambda} = 0$, equals $\omega^{\lambda}\, u_{\lambda\,[;\nu}\, u_{\mu]}$ which vanishes because of (20) and (24) :

$$\omega_{[\mu,\nu]} = 0\,. \tag{29}$$

(21) and (29) show that in a rigidly moving fluid without pressure $\vec{\omega}$ is a harmonic vector field; therefore a scalar U exists with

$$\omega_{\nu} = U_{,\nu}\,, \quad U^{,\nu}{}_{;\nu} = 0\,. \tag{30}$$

Because of (20) and (24)

$$\bar{\eta}_{\kappa\lambda\mu\nu}\, U^{,\mu}\, u^{\nu} = u_{\kappa;\lambda}\ : \tag{31}$$

* (26) shows that $\rho \geqslant 0$ need not be postulated; it follows from (15), (24).

because of (26)

$$\rho = 4 U_{,\nu} U^{,\nu}. \tag{32}$$

It is easy to show that, conversely, (31) and (32) imply (24) and (25); so we may state : The system of equations (25), (24) is equivalent to the system (31), (32).

We wish now to consider the complète system (15), (24). Suppose we are given a solution $(g_{\lambda\mu}, u_\lambda, \rho)$; then we can determine U by (30) so that (31), (32) hold. We take an arbitrary scalar t satisfying

$$u^\lambda t_{,\lambda} = 1 \tag{33}$$

and construct the quadratic differential form

$$G = e^{-2U}(\overline{G} + (\vec{u} \cdot \vec{dx})^2) - e^{2U} dt^2. \tag{34}$$

We assert that G is normal-hyperbolic and that the corresponding Ricci-tensor $R_{\lambda\mu}$ vanishes; this statement is the main result of this section.

To prove this statement we introduce « comoving coordinates » with

$$u^\lambda = \delta^\lambda_0, \qquad t = x^o, \tag{35}$$

which is possible because of (33). Then

$$\overline{G} = H - (dx^0 - u)^2, \tag{36}$$

and by (34)

$$G = e^{-2U} H - e^{2U}(dx^0)^2, \tag{37}$$

with H and u as in (1′), (1″). U is independent of x^0 because of (30), (35) and $u^\lambda \omega_\lambda = 0$. (31) and (32) reduce to the equations

$$-\eta_{ijk} U^{,k} = u_{[i,j]}, \ \rho = 4 h_{ik} U^{,i} U^{,k} \tag{38}$$

with respect to the metric H.

If we now work out the space-components $\overline{R}^i_k + \frac{1}{2}\rho\,\delta^i_k = 0$ of (15) for the metric (36), using the last line of (2) and taking into account (38) as well as $\overline{R}^i_o = 0$ (which follows from (15) and (35)) we find that H and U satisfy (6). But this means that (37) is an exterior metric according to § 2. Moreover (35) and (37) show that G is static and that $\vec{u}$ is a Killing vector also with respect to G.

With help of (33) and (34) we get :

$$\xi_\lambda \equiv g_{\lambda\mu} u^\mu = - e^{2U} t_{,\lambda}, \ e^{2U} = - g_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu, \tag{39}$$

(notice that by definition $u_\lambda = \overline{g}_{\lambda\mu} u^\mu$) therefore (34) can be solved for $\overline{G}$:

$$\overline{G} = e^{2U} G + (\xi_\lambda dx^\lambda)^2 - (u_\lambda dx^\lambda)^2. \tag{40}$$

It is also easy, by using the coordinates with (35), to reformulate (31) in four-dimensional form with respect to G :

$$\eta_{\kappa\lambda\mu\nu} U^{,\mu} u^\nu = u_{[\kappa,\lambda]}. \tag{41}$$

Again we can obtain a conserve. We can start with a static exterior field with metric G and Killing-field $\vec{u} = (u^\lambda)$, solve (41) simultaneously with $u^\lambda u_\lambda = -1$ to obtain u_λ, construct $\overline{G}$ by (40), and calculate ρ by (32). Then (25) is satisfied because of (41) and (32), and the space-components of (15) with respect to a coordinate system with (35) are fulfilled in consequence of $R_{\lambda\mu} = 0$.

Now our proof of the equivalence of (15), (24) to the equations $\{R_{\lambda\mu} = 0, \quad \xi_{(\lambda;\mu)} = 0, \quad \xi_{[\lambda}\,\xi_{\mu,\nu]} = 0, \quad \xi_\lambda\,\xi^\lambda < 0\}$ is accomplished; the transformation $(\bar{g}_{\lambda\mu}, u_\lambda, \rho) \rightarrow (g_{\lambda\mu}, \xi_\lambda)$ is given by (34) where U and t are determined by (30) resp. (33), and $(g_{\lambda\mu}, \xi_\lambda) \rightarrow (\bar{g}_{\lambda\lambda}, \rho)$ is given by $e^{2U} = -\xi_\lambda\,\xi^\lambda$, (41), (40), and (32).

Van Stockum's general solution is obtained from our theorem by specialising G to Weyl's axially symmetric static vacuum metric (4); van Stockum's special solution with a rotating fluid cylinder corresponds to that Weyl-solution the « potential » $\frac{1}{2}\log|g_{oo}|$ of which is independent of Weyl's « canonical » radial coordinate.

Finally I mention that solutions of (15), (24) with constant density do not exist [15] and that, because of Bochner's lemma [16] and (7), solutions in which the space-time manifold W is (globally) a topological product of the real line R and a three-dimensional compact orientable manifold S such that the points of S correspond to the streamlines also do not exist.

The most interesting questions in the further investigation of these solutions are : Are there everywhere regular, complete solutions of (15), (24) with a finite total mass ? Is it possible to connect smoothly such matter fields with exterior solutions in other cases than the one that has been treated by van STOCKUM ?

Acknowledgements

The author would like to thank Professor P. JORDAN for giving him the opportunity of delivering this report, the content of which was derived with the help of many stimulating discussions in the Hamburg-seminar on general relativity. He also wishes to express his gratitude to Mme Professeur A. TONNELAT and M. Professeur A. LICHNEROWICZ for allowing him to represent Professor P. JORDAN.

REFERENCES

[1] LICHNEROWICZ, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Paris, 1955.
[2] JORDAN, P., *Schwerkraft und Weltall,* 2. Aufl. Braunschweig, 1955.
[3] BUCHDAHL, *Quart. Journ. of Math.,* (Oxford) **5**, 1161 (1954).
[4] WEYL, H., *Ann. Phys.,* **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919).
[5] SYNGE, J. L., *Proc. Lond. Math. Soc.,* **43** (1937).
[6] ECKART, C., *Phys. Rev.,* **58**, 919 (1940).
[7] FOURES-BRUHAT, Mme Y., *Compt. rend.,* **246**, 3319 (1958).
[8] GÖDEL, K., *Proc. Internat. Congr. Math.,* **1**, 175 (1952).
[9] RAYCHAUDHURI, A., *Phys. Rev.,* **98**, 1123 (1955).

[10] van STOCKUM, W. J., *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **57**, 135 (1937).
[11] ROSEN, N., *Phys. Rev.*, **71**, 54 (1947).
[12] SALZMANN, G. and TAUB, A. H., *Phys. Rev.*, **95**, 1659 (1954).
[13] RAYNER, C. B., *Compt. rend.*, **248**, 929; 2725 (1959).
[14] LEVI-CIVITA, T., *Reale Accad. dei Lincei*, **27**, 240 (1918).
[15] EHLERS, J., *Dissertation Univ. Hambourg*, Hamburg, 1957.
[16] BOCHNER, S., *Bull. Am. Math. Soc.*, **52**, 776 (1946).

Remarque faite après la conférence du Docteur Ehlers (Royaumont, 1959)

C. B. RAYNER

Je voudrais indiquer brièvement quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie du mouvement rigide en relativité générale, puisque je les crois être pertinents au sujet traité par le Docteur EHLERS.

Le mouvement rigide, au sens de BORN, a été étudié par lui, par HERGLOTZ, ROSEN, SALTZMANN et d'autres. ROSEN a été le premier à donner les équations :

$$\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha} = 0 \; ; \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \lambda_\alpha + \varkappa_\alpha \lambda_\beta \; ; \qquad \varkappa_\alpha = \lambda^\gamma \nabla_\gamma \lambda_\alpha \tag{1}$$

auxquelles doivent satisfaire le vecteur unitaire λ^α, $(\lambda^\gamma \lambda_\gamma = -1)$, tangent aux lignes d'univers du mouvement rigide. On peut considérer le mouvement rigide en relativité générale en identifiant λ^α avec le vecteur propre orienté dans le temps du tenseur d'Einstein $G_{\alpha\beta}$. On a :

$$G_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} = -\rho \lambda_\alpha \lambda_\beta - S_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

où ρ est la densité propre, et $S_{\alpha\beta}$ le tenseur de pression. On peut éliminer $S_{\alpha\beta}$ de (2) en multipliant par λ^β :

$$f^\alpha \equiv G^\alpha_\beta \lambda^\beta - \rho\lambda^\alpha = 0; \qquad \rho = -G_{\gamma\delta} \lambda^\gamma \lambda^\delta. \tag{3}$$

Si on peut satisfaire à (1), (3) avec un système $(g_{\alpha\beta}, \lambda_\gamma)$, les tensions internes qui résultent du mouvement sont données par (2).

J'ai étudié (1) le système (1), (3) et montré que lorsque (1) est satisfaite, le vecteur f^α défini par (3) peut se présenter sous la forme :

$$f^\alpha \equiv \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \varkappa_\beta - 2\sigma\lambda^\alpha ; \; 2\sigma = \sigma^{\beta\gamma} \sigma_{\beta\gamma}. \tag{4}$$

Une conséquence de (4) est que :

$$\nabla_\alpha f^\alpha + \varkappa_\alpha f^\alpha \equiv -\lambda^\alpha \partial_\alpha \rho = -3\lambda^\alpha \partial_\alpha \sigma. \tag{5}$$

Si $\theta^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_\beta \partial_\delta \lambda_\gamma$ ($\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant le tenseur élément de volume) est le vecteur moment-angulaire, on montre aisément que :

$$\sigma^{\alpha\beta} = -(1/2)\, \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_\gamma \theta_\delta, \qquad \sigma = (1/4)\, g_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta. \tag{6}$$

Ainsi, par (5), la densité propre et la grandeur du vecteur moment-angulaire sont constantes le long des lignes d'univers d'un mouvement rigide.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. *248* (1959) 929.

On voit que (1) se réduit aux équations de Killing si $\varkappa_\alpha$ est un gradient. (Si $\varkappa_\alpha = v^{-1} \partial_\alpha v$, $v\lambda^\alpha$ est le vecteur de Killing). J'ai obtenu (2) une solution générale du système $f^\alpha = 0$, $\nabla_\gamma \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\gamma = 0$. Me servant de celle-ci, j'ai montré (3) que le problème de la résolution des équations extérieures d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$ dans le cas stationnaire est réductible à celui de trouver un tenseur défini-positif $\tilde{g}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ et deux scalaires α, β pour satisfaire au problème en trois dimensions :

$$\tilde{R}_{ij} + (1/2)\, \omega_{ij} = 0 \ ; \qquad \omega_{ij} = \alpha^{-2}(\partial_i \alpha \partial_j \alpha + \partial_i \beta \partial_j \beta). \tag{7}$$

Ici $\tilde{R}_{ij}$ est le tenseur de Ricci déterminé par $\tilde{g}_{ij}$. Il est intéressant de remarquer que la forme différentielle $\omega_{ij}\, dx^i\, dx^i \equiv \alpha^{-2}(d\alpha^2 + d\beta^2)$ est la métrique d'un espace V_2 à courbure constante négative.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. *248* (1959) 1725.
(3) Dans trois notes qui paraîtront bientôt dans les *Comptes Rendus*.

SUR LES THÉORIES PENTADIMENSIONNELLES

par Yves THIRY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon

1. — Construction des théories pentadimensionnelles

Nous considérons une variété différentiable V_5, de classe [C^2,C^4 par morceaux], munie d'une métrique riemanienne de type hyperbolique normal :

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, ... = 0, 1, 2, 3, 4)$$

à un carré positif et quatre carrés négatifs.

V_5 est supposée admettre un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées $d\sigma^2 < 0$, homéomorphes à un cercle T^1. On peut alors considérer la variété-quotient V_4 de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries; V_4 est l'espace dont les éléments sont les trajectoires z. En repères orthonormés adaptés, les variétés $x^0 =$ cste sont homéomorphes à V_4, les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont indépendants de x^0 et le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries a pour composantes :

$$\xi^i = 0,\ \xi^o = 1 \qquad (i, ... = 1, 2, 3, 4)$$

et a pour carré $\gamma_{oo} < 0$.

On peut alors définir sur V_4 :

— un tenseur symétrique $g_{ij} = \gamma_{ij} - \dfrac{\gamma_{oi}\,\gamma_{oj}}{\gamma_{oo}}$;

— un tenseur antisymétrique :

$$F_{ij} = \partial_i\, \varphi_j - \partial_j\, \varphi_i \left(\varphi_i = \frac{\gamma_{oi}}{\beta\gamma_{oo}},\ \beta = \text{cste},\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right);$$

— un scalaire $\xi = \sqrt{-\gamma_{oo}}$.

V_4 sera identifié à l'espace-temps de la Relativité Générale et F_{ij} au tenseur champ électromagnétique.

En utilisant la structure de l'espace-quotient, on peut exprimer en termes de V_4 les composantes $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, $R_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$ des tenseurs de courbure, de Ricci et d'Einstein de V_5. En repères orthonormés adaptés, les composantes $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ du tenseur de courbure de V_5 s'expriment par :

$$R_{ij,kl} = \overset{*}{R}_{ij,kl} + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} (F_{ik} F_{jl} - F_{il} F_{jk}) + \frac{\beta^2 \xi^2}{2} F_{ij} F_{kl}$$

$$R_{ij,ko} = \frac{\beta}{2} (\xi \overset{*}{\nabla}_k F_{ij} + 2 \partial_k \xi F_{ij} - \partial_i \xi F_{jk} + \partial_j \xi F_{ik})$$

$$R_{io,ko} = \overset{-1}{\xi} \overset{*}{\nabla}_k (\partial_i \xi) + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ir} F_k{}^r .$$

Les éléments munis d'une * sont relatifs à la métrique-quotient $ds^{*2} = g_{ij} dx^i dx^j$ induite sur V_4 par la métrique $d\sigma^2$ de V_5. Nous ne donnons quant au reste que l'expression des composantes S_{io} du tenseur d'Enstein :

$$S_{io} = \frac{\beta}{2} \overset{-2}{\xi} \overset{*}{\nabla}_r (\xi^3 F^r{}_i).$$

Les équations de champ des théories pentadimensionnelles sont alors les suivantes :

— la théorie à 15 variables de champ, dite de Jordan-Thiry, a pour équations la généralisation formelle des équations de champ de la théorie de la Relativité Générale :

$$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta},$$

le tenseur du second membre $\Theta_{\alpha\beta}$ décrivant les sources de champ ;

— les équations de la théorie de Kaluza-Klein s'écrivent, après avoir donné à ξ la valeur 1 dans les expressions des $S_{\alpha\beta}$:

$$S_{ik} = \Theta_{ik}$$

$$S_{io} = \Theta_{io}$$

les 14 quantités Θ_{ik}, Θ_{io} décrivant les sources de champ.

2. — Etudes en théories pentadimensionnelles; l'interprétation.

Signalons les études suivantes effectuées dans le cadre de ces théories pentadimensionnelles :

A — Les problèmes de Cauchy ;

B — Les conditions de raccordement de Schwarzschild et le principe des géodésiques ;

C — Cohérence globale de ces théories ;

D — Les équations du mouvement d'un corps d'épreuve et les coordonnées isothermes.

Nous n'envisagerons ici que la première et la dernière de ces questions, en commençant par la dernière.

L'étude des équations du mouvement et des conditions d'isothermie ont en effet donné des indications précieuses sur l'interprétation de la théorie à 15 variables de champ. Madame Hennequin a utilisé la méthode du tenseur d'impulsion-énergie, qui envisage les équations du mouvement comme interprétant les conditions de conservation du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$. Elle a montré l'équivalence de ces équations et des conditions d'isothermie dans un sens que nous allons préciser.

La généralisation formelle dans V_5 de la définition des coordonnées isothermes utilisées en Relativité générale conduit aux conditions d'isothermie :

$$\Phi^\rho \equiv -\gamma^{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\partial_\alpha(\gamma^{\alpha\rho}\sqrt{-\gamma}) = 0.$$

Ces conditions se traduisent dans V_4 par :

$$\Phi^i \equiv \frac{1}{\xi\sqrt{-g}}\,\partial_j(g^{ji}\,\xi\sqrt{-g}) = 0$$

$$\Phi^o \equiv \frac{1}{\xi\sqrt{-g}}\,\partial_i(\beta\,\varphi^i\,\xi\sqrt{-g}) = 0\,.$$

Les quatre conditions $\Phi^i = 0$ traduisent les conditions d'isothermie pour V_4 munie de la métrique $\widehat{ds^2} = \xi\, ds^{*2}$ conforme à la métrique-quotient ds^{*2} (la dernière $\Phi^o = 0$ se traduit par une fixation de la transformation de jauge).

L'étude par approximation d'une solution du problème du mouvement d'un corps d'épreuve précise sous la forme suivante l'équivalence entre équations du mouvement et conditions d'isothermie : la vérification des équations du mouvement approchées d'ordre p entraîne la vérification des conditions d'isothermie approchées d'ordre p. Le calcul de la première approximation montre que ce n'est que dans V_4 muni de la métrique conforme $\widehat{ds^2}$ que les potentiels relatifs à un schéma non chargé sont identiques à ceux du cas matière pure de la Relativité générale.

Dans la variété V_4 munie de la métrique conforme $\widehat{ds^2}$ on est de plus amené, par la forme des expressions ci-dessus de S_{io} en particulier, à envisager des inductions distinctes des champs, c'est-à-dire à considérer F_{ij} comme tenseur induction magnétique-champ électrique et à introduire le tenseur champ magnétique-induction électrique

$$H_{ij} = \xi^3\, F_{ij}\,,$$

où ξ^3 représente le pouvoir diélectrique.

Les expressions de S_{ij} rétablissent le tenseur

$$\widehat{\tau}_{ij} = \frac{1}{4}\,\widehat{g}_{ij}\,\widehat{H}_{kl}\,\widehat{F}^{kl} - \frac{1}{2}\,(\widehat{H}_i{}^k\,\widehat{F}_{jk} + \widehat{H}_{jk}\,\widehat{F}_i{}^k)\quad (\widehat{g}_{ij} = \xi\, g_{ij},\ \widehat{F}_{ij} = F_{ij})$$

(tenseur d'impulsion-énergie du schéma champ électromagnétique) et les équations de la théorie pour le cas unitaire extérieur ($\Theta_{\alpha\beta} = 0$) s'écrivent, en coordonnées locales adaptées :

$$\widehat{S}_{ij} + \frac{3}{2}\,\widehat{K}_{ij} - \chi\,\widehat{\tau}_{ij} = 0$$

$$\widehat{\nabla}_j\,\widehat{H}^j{}_i = 0$$

$$\widehat{\Delta}_2\sigma + \chi\,\widehat{H}_{ij}\,\widehat{F}^{ij} = 0$$

avec $\widehat{K}_{ij} = \dfrac{1}{2}\,\widehat{g}_{ij}\,\widehat{\Delta}_1\sigma - \partial_i\sigma\,\partial_j\sigma$

$$\sigma = \log \xi, \quad \chi = \frac{\beta^2}{2} = \text{cste (facteur de gravitation).}$$

On remarquera que dans la première équation les dérivées secondes des potentiels sont localisées dans le terme $\widehat{S}_{ij}$.

Ainsi, dans l'importante question de l'interprétation, c'est la métrique conforme $\widehat{ds}^2$ qu'il convient d'attribuer à V_4 pour interpréter l'espace-temps. Il n'en demeure pas moins que la structure de l'espace-quotient et la considération de la métrique-quotient reste un fait fondamental des théories pentadimensionnelles. C'est dans ce cadre qu'ont été étudiés les points A, B, C signalés ci-dessus et également dans ce cadre que LICHNEROWICZ a étudié les radiations unitaires en théories pentadimensionnelles. Pour présenter ces études, revenons au point A, le problème de CAUCHY et l'étude des discontinuités.

En théorie pentadimensionnelle à 15 variables de champ, dans le cas unitaire extérieur, l'énoncé du problème de CAUCHY est le suivant : on se donne sur une hypersurface Σ de V_5 engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières; déterminer en dehors de Σ les valeurs de ces potentiels supposés satisfaire aux équations $S_{\alpha\beta} = 0$. Les variétés caractéristiques Σ_c de V_5 des équations de la théorie sont tangentes aux cônes élémentaires de V_5; ce sont les surfaces d'onde du champ unitaire, à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées secondes des potentiels.

Or, placée dans le cadre de la représentation pentadimensionnelle, l'étude des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, qui est à la base de la théorie classique des ondes et radiations électromagnétiques, est équivalente à l'étude des discontinuités d'une partie du tenseur de courbure de V_5, le reste de ce tenseur correspondant à la courbure de V_4. C'est ainsi que LICHNEROWICZ a été amené à étudier les ondes et les radiations gravitationnelles par les discontinuités du tenseur de courbure de l'espace-temps et les phénomènes de radiation unitaire dans le cadre pentadimensionnel par les discontinuités du tenseur de courbure de V_5.

3. — Radiation en théories pentadimensionnelles

Dans un domaine de V_5 où les seconds membres $\Theta_{\alpha\beta}$ des équations de champ sont continus, nous étudions les discontinuités du tenseur de courbure de V_5 à la traversée d'une hypersurface Σ engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries. L'équation de Σ en coordonnées locales adaptées étant $f(x^i) = 0$, nous considérons le vecteur $\vec{l} = \overrightarrow{\text{grad}\, f}$; on a $l_0 = 0$. La métrique de V_5 et le générateur infinitésimal ξ du groupe d'isométries étant supposés de classes [C^1, C^3 par morceaux], on a à la traversée de Σ :

$$[R_{\alpha\beta}] = 0,$$

le crochet indiquant qu'il s'agit de la discontinuité à la traversée de Σ de la quantité incluse.

On en déduit que $\vec{l}$ est de longueur nulle et que le tenseur $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ satisfait en un point x de Σ à :

$$\underset{\alpha\beta\gamma}{S}\ l_\alpha [R_{\beta\gamma,\lambda\mu}] = 0; \qquad l^\alpha [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0,$$

c'est-à-dire que $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ définit une double 2-forme singulière de vecteur fondamental isotrope $\vec{l}$.

On peut alors définir au point x un repère $(\vec{e}_\alpha)$ orthonormé adapté dans lequel $\vec{e}_0$ est colinéaire à $\vec{\xi}$ et où, la composante l_o de $\vec{l}$ étant nulle, les l_i définissent au point correspondant de la variété-quotient un vecteur de longueur nulle. C'est dans un tel repère que nous opérons par la suite.

Un tenseur $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ satisfaisant aux propriétés de symétrie du tenseur de courbure et définissant une double 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$ orthogonal à $\vec{e}_0$ peut être considéré comme un tenseur symétrique sur l'espace des bivecteurs de V_5 et représenté par une matrice 10×10 dont la diagonale principale est

$$\cdot\ a_{22}\ a_{11}\ \cdot\ a_{11}\ a_{22}\ a_{00}\ \cdot\ \cdot\ a_{00}\ ,$$

les lignes et colonnes de numéros 7 à 10 correspondant aux bivecteurs $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_0$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_0$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_0$, $\vec{e}_4 \wedge \vec{e}_0$, et l'on a nécessairement :

$$H_{\alpha\beta} = \tau\, l_\alpha\, l_\beta \quad [\tau = -(a_{00} + a_{11} + a_{22})]$$

Des hypothèses faites sur $\gamma_{\alpha\beta}$ et ξ, il résulte que les g_{ij} et le scalaire ξ sont de classe $[C^1, C^3$ par morceaux$]$ et que les F_{ij} sont continus et à dérivées premières discontinues.

En théorie de Kaluza-Klein, on a toujours

$$[R_{\alpha\beta}] = 0;$$

mais on a en outre

$$[R_{io,ko}] = 0;$$

d'où il résulte que

$$a_{00} = a_{11} + a_{22} = 0.$$

Supposons alors que la métrique-quotient de V_4 corresponde à un état de radiation totale pure et que le champ électromagnétique représente un état de radiation électromagnétique de même vecteur fondamental isotrope :

$$\underset{hij}{S}\ l_h \overset{*}{R}_{ij,kl} = 0; \qquad l^i \overset{*}{R}_{ij,kl} = 0 \tag{3.1}$$

$$\underset{hij}{S}\ l_h F_{ij} = 0; \qquad l^i F_{ij} = 0\,. \tag{3.2}$$

Si l'on introduit le vecteur isotrope de V_5 orthogonal à $\vec{\xi}$ qui se projette sur V_4 suivant le vecteur fondamental commun aux deux radiations et le tenseur $P_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ défini relativement aux repères orthonormés adaptés par

$$P_{ij,kl} = R_{ij,kl}\,; \quad P_{ij,ko} = 0\,; \quad P_{io,ko} = -R_{io,ko}\,,$$

les relations ci-dessus entraînent :

$$\underset{\alpha\beta\gamma}{S}\; l_\alpha P_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0\,; \quad l^\alpha P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0\,. \tag{3.3}$$

Réciproquement, si le tenseur $P_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ défini ci-dessus satisfait à (3.3) avec un vecteur $\vec{l}$ orthogonal à $\vec{\xi}$, on démontre que les relations (3.1) et (3.2) sont satisfaites.

Il y a ainsi équivalence entre le fait que $P_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ définit dans V_5 une double 2-forme singulière et l'ensemble des états de radiation totale pure et de radiation électromagnétique définis dans V_4. Le résultat de cette étude est donc satisfaisant, comme on pouvait l'espérer dans une théorie qui ne fournit qu'un cadre pentadimensionnel à la théorie naïve de l'électromagnétisme et qui est d'ailleurs comme nous l'avons dit à l'origine de l'étude, à côté des ondes et radiations électromagnétiques, ds ondes et radiations gravitationnelles.

Les choses se passent de façon plus complexe lorsque les champs sont unifiés à l'aide des variations de la quinzième variable ξ :

En théorie pentadimensionnelle à 15 variables de champ, considérons dans V_4 munie de la métrique-quotient ds^{*2} le champ scalaire ξ et supposons qu'il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que :

$$l_i \overset{*}{\nabla}_k(\partial_j \xi) - l_j \overset{*}{\nabla}_k(\partial_i \xi) = 0\,; \quad l^i \overset{*}{\nabla}_k(\partial_i \xi) = 0\,; \tag{3.4}$$

on en déduit, si $\overset{*}{\nabla}_k(\partial_i \xi) \neq 0$, que

$$\overset{*}{\nabla}_k(\partial_i \xi) = \tau\, l_i\, l_k \text{ et que } \vec{l} \text{ est isotrope.} \tag{3.5}$$

Il y a équivalence entre les relations (3.4) et (3.5), que nous dirons définir un état de radiation pure du champ scalaire ξ.

Supposons que la métrique-quotient, la forme F et le scalaire ξ représentent des états de radiations avec le même vecteur fondamental isotrope de V_4, c'est-à-dire que nous ayons (3.1), (3.2) et (3.5). Alors ces relations entraînent les relations (3.3), le tenseur P et le vecteur $\vec{l}$ de V_5 étant définis comme précédemment.

Mais ici la réciproque ne peut être vraie et l'on est amené dans cette étude à compléter (3.3) par une hypothèse supplémentaire. C'est ainsi que l'on peut démontrer que les relations (3.3) et (3.5) etnraînent les relations (3.1) et (3.2).

La remarque finale suivante éclaire d'ailleurs cette circonstance d'hypothèse supplémentaire : dans la théorie pentadimensionnelle à 15 variables de champ, si le tenseur de courbure de V_5 est nul, les équations $R_{io,ko} = 0$ fournissent un champ électromagnétique non nul lié aux variations de ξ; les expressions de $R_{ij,kl}$ du premier paragraphe donnent alors des $R_{ij,kl}$ non nuls, donc un espace-temps non euclidien rendant compte d'un champ gravitationnel.

DISCUSSION

Intervention du Docteur K. Just

Que pouvez-vous dire sur les prévisions observationnelles de votre théorie, concernant notamment le mouvement de Mercure ?

Réponse de M. Yves Thiry

A mon avis aucune observation ne peut à ce jour infirmer ou confirmer la théorie que je viens d'exposer. En ce qui concerne les équations du mouvement, la théorie est construite pour rendre compte du mouvement des masses chargées, et pour venir coïncider en l'absence de champ électromagnétique avec la théorie relativiste purement gravitationnelle. Il me semble donc *a priori* que la théorie pentadimensionnelle doit fournir pour l'avance du périhélie de Mercure la même valeur que la théorie purement gravitationnelle, ou une valeur très voisine.

(*) K. Just, *Z. Physik*, **144**, 411-427 (1956);
K. Just, *Z. Naturforschg.*, **14a**, 751 (1959)

RELATIVITÉ MULTIDIMENSIONNELLE NON STATIONNAIRE

par Jean-Marie SOURIAU
Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille

1. — Principes

Les lois de conservation découvertes expérimentalement (impulsion, énergie, électricité, charge nucléonique, étrangeté, etc.) ont été successivement rattachées à des propriétés d'invariance, par l'intermédiaire de principes variationnels (théorème de Noether [1]).

Or il existe deux sortes de transformations mises en jeu :

1°) les transformations géométriques d'espace-temps;

2°) les transformations « internes », qui agissent non sur les points, mais sur les valeurs des champs en chaque point. (Exemple : transformations de jauge).

L'invariance dans les transformations du premier type résulte du principe même de relativité : les lois de la physique sont invariantes par certaines transformations d'espace-temps, qui agissent sur chaque champ selon sa variance.

Or l'expérience permet d'énoncer un principe remarquablement analogue pour les transformations du second type : les transformations internes forment un groupe I; chaque champ est pourvu d'une *variance interne* (définie par une représentation de I opérant sur les valeurs possibles du champ en chaque point); les lois de la physique sont invariantes par I.

Il est souhaitable d'unifier ces deux principes; on peut dans ce but essayer de remplacer l'espace-temps V_4 par une variété V_n ayant plus de quatre dimensions; les transformations géométriques de V_n — que nous désignerons par le mot « glissement » — devront rendre compte à la fois des transformations géométriques de la Relativité classique et des transformations internes. Pour rendre compte de l'existence et du rôle privilégié de la variété V_4, on admet généralement un principe de stationnarité; on postule l'existence d'un groupe $\mathcal{G}$ de glissements qui laisse tous les champs invariants; V_4 apparaît comme le quotient de V_n par $\mathcal{G}$; moyennant quelques hypothèses, on arrive à faire passer au quotient les champs stationnaires de V_n, qui deviennent des champs définis sur V_4.

Ce principe de stationnarité est peu satisfaisant, pour diverses raisons : il fait disparaître le caractère unitaire de la théorie, puisque la physique n'est plus invariante que par les glissements qui commutent avec $\mathcal{G}$; il ne peut coexister avec un principe variationnel que comme *règle de sélection,* mais non comme *liaison* ; et surtout, il ne permet pas d'interpréter les transformations internes, puisqu'il suppose l'invariance de tous les champs par $\mathcal{G}$.

Nous proposons donc de le remplacer par le suivant :

> La variété V_n est homéomorphe au produit direct de R^4 par une *variété compacte* W (de dimension $n-4$).

Une fois déterminée la structure topologique de W, qui constitue l'aspect *global* de la physique, on en cherchera l'aspect *local,* sous la forme d'un énoncé variationnel.

On disposera ainsi d'une théorie strictement unitaire, au sens de Lichnerowicz ([2] p. 152); la réduction apparente de V_n à V_4 sera due au caractère *microscopique* de W.

2. — Théorie pentadimensionnelle

1) En attribuant à W la structure topologique d'un *cercle* S_1, on obtient une théorie unitaire à cinq dimensions [3, 4]; la variété V_5 est homéomorphe à un « tube » $R^4 \times S_1$; on peut lui donner des *cartes périodiques,* applications de R^5 sur V_5 telles que la variable x^5 admette par exemple la période 2π.

2) Nous dirons que l'univers est *stationnaire* s'il existe une carte périodique où les glissements $x^5 \rightarrow x^5 + C^{te}$ laissent tous les champs invariants; ce cas équivaut substantiellement à la théorie de Jordan-Thiry [5, 6, 7]; on achève l'identification en supposant définie sur V_5 une métrique hyperbolique normale $g_{\alpha\beta}$ (les courbes fermées obtenues en faisant varier x^5 seul étant du genre espace) et en écrivant les équations d'Einstein.

Le cas stationnaire s'interprète quadridimensionnellement au moyen d'un champ de tenseur g^*_{jk} (lettres latines $= 1, 2, 3, 4$), qu'on identifie avec les *potentiels de gravitation,* un champ de formes linéaires A_k qu'on identifie avec les *potentiels électromagnétiques* et qui admet l'invariance de jauge, et un champ scalaire d'interprétation plus difficile; ce scalaire est d'ailleurs égal au « rayon du tube univers », soit $\xi = \sqrt{-g_{55}}$; s'il est suposé constant, on retrouve la théorie de Kaluza-Klein [7, 8], équivalente à la théorie provisoire de l'électromagnétisme en Relativité générale.

3) Nous traiterons le cas *quasi-stationnaire* en écrivant des équations de champ, en les linéarisant au voisinage d'une solution stationnaire, et en faisant un développement de Fourier suivant la variable x^5

$$\Phi = \sum_n \Psi_n e^{inx^5}$$

On constate que les « fonctions d'onde » Ψ_n ainsi introduites vérifient des équations quadridimensionnelles distinctes; ainsi, à un champ scalaire réel vérifiant l'équation (1) :

$$⬠\, \varphi + a\varphi = 0$$

correspondent des fonctions d'onde complexes ψ_n vérifiant

$$\Box\, \psi_n - \frac{4\, in \sqrt{G}}{c\xi} A^j \partial_j \psi_n + \left[a + \frac{n^2}{\xi^2} - \frac{4G}{c^2\, \xi^2} n^2 A^j A_j \right] \psi_n = 0$$

(on a supposé ξ constant et désigné par G la constante de gravitation de Newton); on reconnait l'*équation de Klein-Gordon, en présence d'un champ électromagnétique,* pour une particule de charge électrique $\frac{2n\hbar\sqrt{G}}{c\xi}$, de masse $\frac{\hbar}{c}\sqrt{a + \frac{n^2}{\xi^2}}$; ainsi, dans cette théorie :

— les interactions électromagnétiques (au moins sous la forme usuelle en Mécanique ondulatoire) ont un caractère purement géométrique, de même que les interactions gravitationnelles en Relativité générale;

— toutes les charges électriques sont multiples d'une charge élémentaire ($n = 1$), indépendante de la masse des particules.

En identifiant cette charge élémentaire avec la charge e de l'électron, on trouve la valeur du rayon du tube-univers :

$$\xi = \frac{2\hbar\sqrt{G}}{ec} = 3{,}77 \cdot 10^{-32} \text{ cm}$$

Cette longueur, qui joue le rôle de « longueur élémentaire », est beaucoup plus petite que les rayons des noyaux atomiques ($\# \ 10^{-13}$ cm) (2).

4) Bien que la théorie prévoie des *états de charge multiple* pour toutes les particules (l'indice n des fonctions d'onde Ψ_n peut prendre toutes les valeurs entières), la petitesse de ξ entraîne l'impossibilité pratique de les créer : on constate qu'il faudrait une énergie de l'ordre de $c\frac{\hbar}{\xi} \# \ 5 \cdot 10^{20}$ MeV.

(1) Nous désignons par ⬠ l'opérateur ∇^2 sur la variété V_5; cette équation est la seule équation linéaire invariante par les transformations de Lorentz *pentadimensionnelles.*

(2) Il n'est pas exclus que. dans une particule, ξ subisse une variation, de l'ordre de ξ^2/r (r = rayon de la particule); il en résulterait une différence de charge entre proton et électron de l'ordre de $3 \cdot 10^{-19}\, e$.

5) Dans la présente théorie, l'approximation de la Relativité restreinte consiste à supposer l'existence d'une carte périodique où les $g_{\alpha\beta}$ sont constants; les glissements qui laissent ce champ invariant forment un groupe, dont on peut montrer qu'il est le produit direct du groupe de Lorentz non homogène usuel L par le groupe O_2 des matrices orthogonales réelles d'ordre 2; on interprétera les éléments de O_2 comme des *transformations de jauge* (si leur déterminant est $+1$) ou des *conjugaisons de charge* (s'il vaut -1); le groupe O_2 a d'ailleurs déjà été proposé à cet effet par L. MICHEL [10].

L'étude des représentations unitaires irréductibles du groupe $L \times O_2$ conduit à associer à la masse et au spin des particules élémentaires, un entier *n,* qui s'interprétera comme leur charge électrique; s'il est nul (particules neutres), les conjugaisons de charge multiplient la fonction d'onde par ± 1; on trouve notamment -1 pour le photon, conformément à l'expérience (*cf.* L. MICHEL [10]), et $+1$ pour le graviton.

6) Il est loisible (puisqu'il s'agit d'une condition *locale*) de supposer V_5 *orientée,* ce qui signifie que les glissements doivent tous avoir un jacobien positif (voir [11]); dans ce cas, on démontre que le groupe $L \times O_2$ doit être remplacé par le sous-groupe obtenu en donnant le même signe au jacobien de la transformation de Lorentz et au déterminant de la matrice orthogonale; en d'autres termes, *un retournement d'espace ou de temps doit nécessairement être accompagné d'une conjugaison de charge :* on voit comment une théorie multidimensionnelle est capable d'interpréter les relations — constatées expérimentalement — entre les transformations de parité et de charge.

3. — Dimensions plus élevées

Bien que la théorie ci-dessus à cinq dimensions ait des aspects satisfaisants, elle ne parvient pas à rendre compte de toutes les invariances internes que l'on observe. On est donc amené à penser que la structure topologique de W est plus compliquée que celle d'un cercle.

Il ne semble pas que l'on soit actuellement d'accord sur la structure du groupe I des transformations internes; mais les différentes hypothèses semblent compatibles avec l'interprétation géométrique que nous proposons : il s'agit du groupe O_3 dans la théorie de PAIS [12], du groupe O_4 dans celle de SCHWINGER [9]; elles s'interprétent en prenant respectivement pour W les sphères S_2 et S_3. On peut aussi proposer — pour expliquer le rôle privilégié des interactions électromagnétiques et pour conserver, à titre d'approximation, les résultats de la théorie pentadimensionnelle — de prendre pour W la topologie de $S_1 \times S_2$, ou encore de $S_1 \times S_3$. On obtient donc des théories concurrentes ayant respectivement 6, 7, et 8 dimensions. La discussion et l'étude détaillée d'une telle théorie feront l'objet d'une publication ultérieure.

REFERENCES

[1] E. Noether, *Nach. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 235 (1918).
[2] A. Lichnerowicz, « Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », Masson, Paris, 1955.
[3] J. M. Souriau, « Une axiomatique relativiste pour la microphysique », *C.R.A.S.*, **247**, 1559 (1958).
[4] J. M. Souriau, « Conséquences physiques d'une théorie unitaire », *C.R.A.S.*, **248**, 1478 (1959).
[5] P. Jordan, *Ann. Physik*, 219 (1947).
[6] Y. Thiry, « Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ » (thèse), Gauthiers-Villars (1951).
[7] Kaluza, « Zum Unitäts Problem der Physik », *S. Preuss. Akad. Wiss.*, 966 (1921).
[8] O. Klein, *Z. Physik*, **73**, 895 (1926).
[9] J. Schwinger, « Théorie des particules élémentaires » (conférences en Sorbonne, juin 1957).
[10] L. Michel, « Selection Rules Imposed by Charge Conjugation », *Nuovo Cimento*, **10**, 319 (1953).
[11] J. M. Souriau, « La Relativité variationnelle », *Alger-Mathématiques* **V**, 2 (1958).
[12] A. Pais, « Isotopic Spin and Mass Quantization », *Physica*, **19**, 869 (1953).

DISCUSSION

Intervention du Prof. Ivanenko.

Des idées analogues à celles exprimées dans le rapport intéressant de M. Souriau sont développées dans les travaux de J. Raisky (Cracovie), du Professeur Zaycoff (Sofia, Bulgarie), de même que dans des recherches de notre groupe (voir les articles de H. Sokolik, d'A. Brodsky et de moi-même publiés dans le *Journal de Physique Théorique et Expérimentale* (russe), de même que dans le *Nuovo Cimento*, 1958). Nous avons essayé de permettre les transitions entre sous-espace ordinaire et sous-espace de spin isotopique.

VERALLGEMEINERTER THIRRING-EFFEKT ZUR PRÜFUNG DES MACH'SCHEN PRINZIPS

par CHARLOTTE FABRICIUS
Institut für theoretische Physik, Freiburg

RESUME

Dans le modèle cosmologique d'Einstein, la variation du champ gravitationnel produite par une distribution matérielle en rotation rigide est trouvée dans l'approximation linéaire. Nous discutons les équations du mouvement d'une masse d'épreuve dans ce champ et retrouvons exactement les forces que le principe de Mach faisait prévoir.

H. THIRRING hat zur Prüfung des Mach'schen Prinzips das Gravitationsfeld einer rotierenden Hohlkugel berechnet (vgl. [1] [4] und [2]). In der Nähe ihres Mittelpunktes treten Coriolis und Zentrifugalkräfte auf, und zwar mit den Koëffizienten $\frac{8}{3}\frac{P}{R}$ und $\frac{2}{15}\frac{P}{R}$, wo P der Gravitationsradius und R der geometrische Radius der Hohlkugel ist.

Das Modell van THIRRING ist nicht konsequent im Sinne des Mach'schen Prinzips, weil das Gravitationsfeld als lineare Näherung zur pseudoeuklidischen Metrik berechnet wird. Die Hohlkugel rotiert so gegen den « absoluten Raum ». Ferne Massen werden nicht explizit einge eingeführt.

Nach einem Vorschlag von Prof. HÖNL soll die *Problemstellung* daher in folgender Weise abgeändert werden : Im Einsteinkosmos bei Benutzung von Koordinaten, in denen alle Materie ruht, sondere man überall einen kleinen Bruchteil der Materie ab und lasse diesen mit einer festen Winkelgeschwindigkeit um eine zuvor gewählte räumliche Geodätische starr rotieren. Man berechne das Gravitationsfeld in linearer Näherung zum Einsteinkosmos. Nun diskutiere man die Bewegung eines Probekörpers daraufhin, ob sich der Einfluss der kosmischen Rotation durch Coriolis- und Zentrifulgalkräfte beschreiben lässt und wie diese Zusatzkräfte zustande kommen.

Bei dieser Problemstellung wird der kosmologische Gehalt des Mach'schen Prinzips miterfasst, alle Bewegung als Bewegung von Materie gegen Materie beschrieben, und das Näherungsverfahren ist sinnvoll, weil die Energie-Impuls-Verteilung des Einsteinkosmos nur geringfügig verändert wird.

Der Energie-Impuls-Tensor setzt sich folgendermassen zusammen :

$$T_i^k = (\rho - \delta\rho + p)\, u_i\, u^k - p\,\delta_i^k + \delta\rho\, \bar{u}_i\, \bar{u}^k + \sigma_i^k - \varepsilon\delta_i^o\, \delta_o^k$$

Bei den Rechnungen werden Polarkoordinaten benutzt. Die beiden ersten Terme in T_i^k berücksichtigen die ruhende Materie ($u^\mu = 0$ für $\mu = 1, 2, 3$) und den ursprünglich etwa vorhandenen Druck p, der dritte die rotierende Materie

$$\left(\bar{u}^1 = \bar{u}^2 = 0, \qquad \bar{u}^3 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + g_{33}\,\omega^2}}\right),$$

bezeichnet die notwendig auftretenden Spannungen (keine der angenommenen Bewegungen ist geodätisch) und der fünfte Term stellt eine frei wählbare kleine Zusatzenergie dar, etwa eine den Spannungen entsprechende elastische Energie ($\varepsilon = A\,\sigma_1{}^1 + B\,\delta\rho\, R^2\,\omega^2$). Höhere als zweite Potenzen in ω sollen vernachlässigt werden.

$$(\varepsilon = A\,\sigma_1{}^1 + B\cdot\delta\rho\, R^2\,\omega^2)\,.$$

Höhere als zweite Potenzen in ω sollen vernachlässigt werden.

Für die *Metrik* machen wir den Ansatz :

$$g_{ik} = \mathring{g}_{ik} + \gamma_{ik} \qquad \gamma_{ik} \ll \mathring{g}_{ik}$$

$$\mathring{g}_{ik} = \text{Metrik des Einsteinkosmos.}$$

Aus den Einsteinschen Feldgleichungen (mit kosmologischem Glied) und dem angegebenen Ausdruck für T_i^k lassen sich die γ_{ik} in linearer Näherung bei Benutzung harmonischer isothermer Polarkoordinaten leicht berechnen :

$$\gamma_{ik} = \left\{\begin{array}{cccc} \gamma_{00} & 0 & 0 & \gamma_{03} \\ 0 & -\mathring{g}_{11}\,\gamma_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathring{g}_{22}\,\gamma_{00} & 0 \\ \gamma_{03} & 0 & 0 & -\mathring{g}_{33}\,\gamma_{00} \end{array}\right\}$$

mit

$$\gamma_{00} = -\frac{2}{5 - A}\,\frac{\delta\rho}{\rho + p}\,\omega^2\, R^2 \sin^2\frac{r}{R} + \beta \qquad (\beta = 0 \text{ für } B = -2)$$

$$\gamma_{03} = \frac{\delta\rho}{\rho + p}\,\omega\, R^2 \sin^2\frac{r}{R}\,.$$

Dabei ist r *der* geodätische Abstand von der Drehachse und R der Krümmungsradius des Kosmos.

Die Bewegungsgesetze eines Probekörpers leitet man hier am bequemsten direkt aus dem Variationsprinzip $\delta \int ds = 0$ ab.

Die Variation von $x^0 = t$ gibt den *Energiesatz* :

$$m_0 \left(1 + \gamma_{00} + \gamma_{03} \frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{dt}{ds} = \text{const.}$$

(m_0 ist eine Massenkonstante).

Rotiert das Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit $\dfrac{\omega\delta\rho}{(\rho + p)}$ — das Impulsmoment der gesamten Materie verschwindet dann, falls $p = 0$ war — so nimmt der Energiesatz die aus der speziellen Relativitätstheorie vertraute Form an

$$m_0\, c^2 \frac{dt}{ds} = \text{const.}$$

Die Lichtgeschwindigkeit $c = \sqrt{g_{00}}$ ist ortsabhängig. Da sie auch in $\dfrac{dt}{ds}$ auftritt, kann man diese Gleichung benutzen, um eine orts- und geschwindigkeitsabhängige Masse $m_0 \dfrac{dt}{ds}$ zu definieren.

Die Variation des Drehwinkels $x^3 = \varphi$ gibt den *Drehimpulssatz* :

$$g_{33} \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\delta\rho}{\rho + p}\, \omega\right) m_0 \frac{dt}{ds} = \text{const.}$$

Für $p = 0$ entspricht er genau der Erwartung des Mach'schen Prinzips, soweit es die Corioliskräfte betrifft. Der störende Zahlenfaktor 8/3 tritt nicht mehr auf.

Die Variation des geodätischen Abstandes r von der Drehachse muss die *Zentrifugalkräfte* liefern. Wenn der Probekörper ruht, bekommt man in der Nähe der Drehachse :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2}{5 - \mathrm{A}} \frac{\delta\rho}{\rho + p}\, \omega^2 r\, .$$

Für $p = 0$ und $\mathrm{A} = 3$ treten die Zentrifugalkräfte auf, die nach dem Mach'schen Prinzip zu erwarten sind.

Der Grund für diese speziellen Bedingungen $p = 0$ und $\mathrm{A} = 3$ mag ihr Einfluss auf den Krümmungsradius sein. Hönl fordert in [3] eine grössenordnungsmässige Ubereinstimmung von dem Krümmungsradius der Welt und dem Gravitationsradius der gesamten Materie als Bedingung für die Gültigkeit des Mach'schen Prinzips. Wenn man diese Forderung in der Weise qualitativ verschärft, dass ausserdem der Krümmungsradius nur vom Masseninhalt der Welt abhängen soll, so führt das genau auf die Bedingungen $p = 0$ und $\mathrm{A} = 3$ für das hier behandelte Problem.

REFERENCES

[1] H. THIRRING, *Phys. Z.*, **19**, 33, (1918), **22**, 29 (1921).
[2] H. HÖNL und A. W. MAUE, *Phys. Z.*, **114**, 152 (1956).
[3] H. HÖNL, *Z. Naturf.*, **8a**, 2 (1953).
[4] L. BASS u. F. A. E. PIRANI, *Phil. Mag.*, **46**, 850 (1955).

QUELQUES REMARQUES D'ANALYSE DIMENSIONNELLE POUVANT INTÉRESSER LES FUTURES THÉORIES UNITAIRES

O. COSTA DE BEAUREGARD

(Institut Henri Poincaré, Paris)

RESUME

Remarques sur la théorie de l'inertie de SCIAMA [1]-PARK [2]. La constante hc comme carré de la « charge gravitationnelle ». Les trois quanta de masse : proton, $\frac{2}{3}$ muon, électron, et leur relation possible aux champs pionique, gravitationnel, photonique par l'intermédiaire d'une même longueur fondamentale égale au rayon classique de l'électron.

1. Interprétant le principe de MACH, D. W. SCIAMA [1] et D. PARK [2] ont indépendamment suggéré que la constante universelle I figurant dans la formule de GALILÉE-NEWTON $\mathrm{F} = I\, m\, \gamma$, qui se trouve égalée à 1 par définition classique des unités de force et d'énergie, représente en réalité la valeur du fond constant $\mathrm{G\,M}/c^2\,\mathrm{L}$ du potentiel de gravitation universel : G, constante de Newton, M, « masse totale » et $\alpha\mathrm{L}$, « rayon de l'univers; α, un certain facteur numérique. De fait, il est remarquable que la formule :

$$\mathrm{G\,M} = c^2\,\mathrm{L} \tag{1}$$

résulte de la plupart des modèles cosmologiques. Si l'on décide de reprendre le degré de liberté I, il faut partout remplacer G par G/I dans les équations de la gravitation, et il vient, en plein accord avec les idées de SCIAMA et de PARK,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{G\,M}}{c^2\,\mathrm{L}}. \tag{2}$$

L'on peut aussi remarquer [9] que l'équivalent en énergie de la masse inerte, $\mathrm{W} = c^2\, m$, se récrit dans cette perspective $\mathrm{G\,M}\, m/\mathrm{L}$, et s'interprète donc comme l'énergie potentielle changée de signe de la masse grave m dans le champ universel. Par ailleurs, le potentiel réduit

G $m/c^2\, l$ à la distance l d'une source m se récrit $m\, L/l\, M$, et ceci correspond bien à la forme du terme d'ordre 1 dans un développement en série dont le terme constant serait normé à 1 par définition.

2. Comme il est bien connu, le Lagrangien pour un champ quantifié à spin ψ interagissant avec le champ gravitationnel quantifié γ^{ij} s'écrit, à l'approximation minkowskienne,

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2} \{\bar{\psi}\, [\partial^i]\, a^j\, \psi\, (\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + 2\varkappa\, \bar{\psi}\, \psi\, (1 + \gamma)\} - \chi^{-1}\, \partial^i\, \gamma^{jk}\, \partial_i\, \gamma_{jk}\,,$$

$$\gamma = \gamma^i{}_i\,; \tag{3}$$

$$\chi = 8\pi\, c^{-2}\, G,\ \hbar = \frac{h}{2\pi};\ [\partial^i] = \underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i};\ i, j, k, l = 1, 2, 3, 4;\ x_4 = ict;$$

a^i matrices de spin et $\varkappa$, fréquence propre du champ ψ; la fréquence propre du graviton est provisoirement prise nulle, et la convention de sommation est utilisée.

Les équations dynamiques déduites de ce Lagrangien sont, pour le graviton γ^{jk},

$$\Box\, \gamma^{jk} = \chi\, (T^{\underline{jk}} - \frac{\rho}{2}\, \delta^{jk}) \tag{4}$$

avec

$$2 T^{\underline{jk}} \equiv T^{jk} + T^{kj}$$

et

$$T^{jk} = \frac{\hbar c}{2}\, \bar{\psi}\, [\partial^j]\, a^k\, \psi\,, \qquad \rho = -\hbar\, c\, \varkappa\, \bar{\psi}\, \psi\,; \tag{5}$$

et, pour le « spinion » ψ,

$$\{a^i (\partial_i + \gamma_{\underline{ij}}\, \partial^j) + \varkappa (1 + \gamma)\}\, \psi = 0\,, \tag{6}$$

d'où il suit

$$(1 + \gamma)\, \rho = T^{jk} (\delta_{jk} + \gamma_{jk})\,. \tag{7}$$

Comme il est bien connu, l'interaction à la Yukawa $\varkappa\, \bar{\psi}\, \psi\, \gamma$ ajoute une contribution variable $\varkappa\, \gamma$ à la masse propre $\varkappa$ du « spinion »; dans le cas gravitationnel, cet effet est identique à celui postulé par Einstein [3] dans sa première version de « l'effet Doppler de gravitation ».

Les équations (3) et (6) montrent que le *potentiel inertial* γ du type Yukawa s'ajoute au *potentiel inertial de fond* 1 de Sciama-Park exactement comme le *potentiel gravitationnel* γ^{jk} s'ajoute au *potentiel gravitationnel de fond* δ^{jk} de Minkowski; le *principe d'équivalence* se trouve ainsi respecté *à l'approximation Minkowskienne de la mécanique ondulatoire,* grâce essentiellement à l'intervention des deux valeurs maxima 2 et 0 du spin du graviton; la valeur 2 se trouve attachée à la gravitation et la valeur 0 à l'inertie.

3. En comparant le Lagrangien gravitationnel (3) au Lagrangien bien connu de l'électromagnétisme

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2}\, \bar{\psi} ([\partial^i]\, a_i + \varkappa)\, \psi - ie\, A^i\, \bar{\psi}\, a_i\, \psi + \frac{1}{2}\, \partial^i\, A^j\, \partial_i\, A_j \tag{8}$$

l'on voit que $\hbar c$ apparaît, en un sens qu'on va préciser, comme l'homologue gravitationnel du quantum de charge électrique.

Le fait que la comparaison de (8) à (3) semble établir la correspondance $e \leftrightarrow \hbar c$, au lieu de la correspondance $e^2 \leftrightarrow \hbar c$ que fait attendre l'analyse dimensionnelle, résulte manifestement des définitions adoptées. L'anomalie disparaît si l'on redéfinit le potentiel électromagnétique suivant $A^i = e\,\mathfrak{A}^i$; $\mathfrak{A}^i$ est homogène à une quadrifréquence, comme la combinaison $\gamma_{ij}\,\partial^j$ figurant dans (3).

L'on sait qu'en ajoutant et retranchant l'équation de Dirac et son adjointe relativiste, après multiplication par l'une des cinq matrices-tenseurs a^A, l'on obtient les 2×5 relations de Franz [4] - Kofink [5] qui, en l'absence de potentiel extérieur, se scindent en deux familles indépendantes de cinq, l'une à interprétation purement électromagnétique et l'autre à interprétation purement mécanique [6]; de la sorte, les 2×5 tenseurs du type Dirac : $\bar{\psi}\, a^A \psi$, et du type Schrödinger : $\bar{\psi}\, [\partial^i]\, \gamma^A \psi$ se répartissent en cinq tenseurs électromagnétiques et cinq tenseurs mécaniques. *Le fait remarquable est que le coefficient physique est toujours proportionnel à* $\frac{e}{c}$ *dans le premier cas et à* $\hbar$ *dans le second.*

Le produit $\hbar c$ est homogène à $G\,\mu^2$, où μ désigne une masse; convenons de poser

$$G\,\mu^2 = \hbar c. \tag{9}$$

Il est bien connu [7] que les trois constantes universelles $G, c, \hbar$ sont dimensionnellement indépendantes, en sorte que leur ensemble équivaut à celui de trois étalons naturels de longueur, temps, masse; le μ précédent est ce quantum naturel de masse.

Il suit de l'ensemble de ce qui précède que la constante universelle $\hbar c$ est proportionnelle au carré de la « charge gravitationnelle » μ, véritable homologue de la charge de l'électron e, ayant comme elle une signification universelle.

La valeur du μ précédent est *très grande* lorsqu'on la compare aux masses des particules élémentaires; en fait, $\mu \cong 1{,}27 \cdot 10^{19}$ masses du proton. Mais le spectre des masses des particules élémentaires résulte certainement de certains phénomènes de quantification, et il n'y a aucune raison de penser que la masse de l'une ou l'autre de ces particules représente le quantum naturel de « charge gravitationnelle ». Nous verrons plus loin, au § 4, une nouvelle raison très forte de penser que le μ ci-dessus défini est la véritable « charge gravitationnelle universelle ». Etant donnée la valeur très élevée de μ (comparée aux masses propres des particules élémentaires) nous arrivons à l'énoncé à première vue très paradoxal que *l'interaction gravitationnelle est intrinsèquement forte;* c'est uniquement du fait du couplage en $\partial^i \psi$ (faisant apparaître un facteur de l'ordre de la masse propre de la particule) que l'interaction gravitationnelle est numériquement faible.

Bien entendu, rien n'empêche de poser des définitions telles que la constante G de la gravitation universelle soit égalée à 1, avec la dimension 0, comme il est d'usage de le faire pour les constantes de Coulomb de l'électromagnétisme. Une première possibilité serait de reprendre le degré de liberté I de la formule de Galilée et de définir l'unité de force en faisant $G = 1$, avec la dimension 0, dans la formule de Newton; il suivrait de là un profond bouleversement dans les formules aux dimensions des grandeurs physiques. Chose plus grave, la formule simple (1) devrait être remplacée par (2), et le « potentiel inertial » de SCIAMA-PARK n'aurait plus la valeur simple 1; la formule (3), par exemple, se compliquerait d'autant.

Il convient donc de faire $G = 1$ sans abandonner la convention classique $I = 1$. Bien entendu (ne serait-ce que pour éviter le « conflit des u.e.s. et des u.e.m. ») il convient aussi de faire $c = 1$. Il ne reste plus alors qu'une alternative : soit de faire $h = 1$, ce qui ramène au système L, T, M de PLANCK [7], soit au contraire de disposer du quantum naturel de longueur l_0 dont nous allons faire apparaître l'existence.

4. Considérons maintenant le spectre expérimental des masses des particules élémentaires aujourd'hui connues [8]; il est remarquable que ces masses soient bien reproduites par une formule linéaire

$$m = n_b\, m_b + n_o\, m_o + n_l\, m_l + \textit{petite correction} \times m_l \tag{10}$$

impliquant *trois quanta de masse :* m_b masse du proton ou « masse baryonique », $m_o = 2/3$ de la masse du muon ou « masse mésonique », m_l masse de l'électron ou « masse leptonique »; les n sont des nombres entiers ou demi-entiers dont on reparlera.

Le fait frappant est bien entendu que les rapports $\dfrac{m_l}{m_o}$ et $\dfrac{m_b}{m_o}$ reproduisent la constante de structure fine $\dfrac{e^2}{\hbar c} \cong \dfrac{1}{137}$ et une valeur $\dfrac{g^2}{\hbar c} \cong 13{,}4$ étonnamment voisine de la constante des couplages forts; en bref on peut écrire

$$\frac{g^2}{m_b} = \frac{\hbar c}{m_o} = \frac{e^2}{m_l} = c^2\, l_0\,, \tag{11}$$

où l_0 n'est autre que le « rayon classique de l'électron », soit environ $2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Il semble donc bien qu'*un même* rayon de coupure l_0 devrait permettre de rendre compte de la « masse leptonique » m_l comme étant d'origine électromagnétique ou photonique (comme en théorie classique), de la « masse baryonique » m_b comme étant d'origine pionique, enfin, d'après ce qui précède, de la « masse mésonique » m_o comme étant d'origine gravitationnelle.

Le quantum de masse m_o apparaît aussi d'une autre façon comme étant spécialement fondamental. Si les théoriciens ont raison de rechercher une « longueur fondamentale » l_0 valant environ 10^{-13} cm, alors l'argument de YUKAWA donnant l'ordre de grandeur de la masse du pion par la formule (incorporée dans (11))

$$c\, l_o\, m_o = \hbar \tag{12}$$

montre que le quantum de masse m_o est « fondamental » au même titre que l_o.

Le nombre n_b figurant dans la formule (10) vaut 1 ou 0 suivant que la particule considérée est couplée ou non avec le champ pionique, et c'est bien ce qu'on devait attendre *a priori*. Pour n_l on ne peut pas avoir un résultat aussi net à cause de la présence du terme correctif; il est cependant frappant que n_l vaille 0 pour le neutrino et le photon, + 1 pour l'électron et le muon; nous proposons danc de *postuler* que n_l vaut 1 ou 0 suivant que la particule considérée est couplée ou non avec le champ photonique.

Le cas du nombre n_o est plus compliqué : il est entier positif ou nul pour les bosons, demi-entier positif, ou bien nul, pour les fermions.

Voici comment se présente finalement le tableau des masses propres des particules élémentaires :

DÉSIGNATION	NOMBRE de masse baryonique n_b	NOMBRE de masse mésonique n_o	NOMBRE de masse leptonique n_l	TERME correctif
Neutrino	0	0	0	0
Photon	0	0	0	0
Electron $e_\pm$	0	0	1	0
Muon $\mu_\pm$	0	3/2	1	+ 0,3
Pion π_0	0	2	0	— 9,7
$\pi_\pm$	0	2	1	— 1,8
Kaon $K_\pm$		7	1	+ 17,1
K_0		7	0	+ 5,3
Nucléon $P_\pm$	1	0	1	0
N	1	0	0	+ 3,6
Hypéron Λ_0	1	5/2	0	+ 4,9
Σ_+	1	7/2	1	+ 11,9
Σ_0	1	7/2	0	+ 15,5
Σ_-	1	7/2	1	+ 25,8
Ξ_-	1	11/2	1	— 4,5
Ξ_0	1	11/2	0	+ 6,5

Nous pensons à présent que la longueur fondamentale l_o est du genre temps, et non du genre espace (Comptes Rendus 252, 1276 (1961).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. W. Sciama, *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, **113**, 34 (1953).
[2] D. Park, *Journ. Phys. Rad.*, **18**, 16 (1957).
[3] A. Einstein, *Jahrb. Radioakt. u. Elekr.*, **4**, 411 (1907).
[4] W. Franz, *Sitz. Ber. Bayer Akad. Wiss.*, **3**, 379 (1935).
[5] W. Kofink, *Ann. der Phys.*, **38**, 565 (1940).
[6] O. Costa de Beauregard, *Journ. Phys. Rad.*, **22**, 151 (1943).
[7] M. Planck.
[8] P. Roman, *Theory of elementary particles*, North Holland publishing Company, 4-5 (1960).
[9] J. A. Bastin, *Proc. Comb. Phil. Soc.*, **56**, 401 (1960).

Note ajoutée à la correction des épreuves

Le lagrangien (3) est construit de manière à entraîner les équations (4) et (5), qui sont imposées. Il entraîne alors aussi l'équation (6).

Mais nous avons omis de préciser que les matrices de spin a^i ne peuvent pas être les mêmes que les a_o^i valables en l'absence de potentiel gravitationnel γ_{ij}. En effet, les formules de non-commutation des a^i qui, en l'absence de γ_{ij}, impliquent le symbole de Kronecker δ_{ij}, impliqueront automatiquement les expressions $\delta_{ij} + \gamma_{ij}$ si, en géométrie riemannienne, les a^i et a_i doivent se comporter comme les composantes d'un vecteur. Il faut donc poser $a^i = a_o^i + \delta a_o^i$.

La substitution de a_o^i pour a^i dans (4) et (5) n'est pas significative; par contre, dans (6), elle change appréciablement l'équation.

OBSERVABLES AND COMMUTATION RELATIONS *
OBSERVABLES ET REGLES DE COMMUTATION

PETER G. BERGMANN and ARTHUR B. KOMAR
Syracuse University, Syracuse 10, N. Y., U.S.A.

(Presented by PETER G. BERGMANN)

RÉSUMÉ

On discute d'abord de la notion d'*observables* en relativité générale, indépendamment de tout formalisme particulier. L'on entreprend alors la construction d'observables avec l'aide des coordonnées intrinsèques proposées initialement par GÉHÉNIAU et DEBEVER. Dans le cadre d'un formalisme lagrangien l'on construit des commutateurs entre observables, en utilisant les observables pour engendrer des transformations invariantes des variables de la théorie. Les calculs n'ont pas été achevés, mais ils semblent être sans pièges, quoiqu'extrêmement laborieux. En conclusion, l'on discute brièvement les perspectives de la quantification du champ gravitationnel.

Introduction

In this talk I shall not attempt to give a general status report on quantization of general relativity, as other participants will speak on their own efforts. I shall attempt to remind you of the general background of the programm of quantization, and then give a report on the approaches that Professor Arthur KOMAR and myself have been following, and on the results we have achieved so far. I shall refer to work by others not with the idea of giving a « balanced » picture, — for such a review the time does not yet appear to me ripe, — but only in order to comment on what appear to me similarities, or dissimilarities, in approach or methodology.

Why should we be concerned with quantization of general relativity at all ? It is generally agreed that quantum theory deals primarily with phenomena in the microcosmos, that is to say with atomic and nuclear physics and with the relations between elementary particles, whereas the general theory of relativity, being as it is a theory of gravitation, finds its principal applications in celestial mechanics and cosmology, certainly in the macrocosmos. I believe that we are impelled toward a program of desegregation (to use a modern phrase of American politics) for two reasons : One is that both general relativity and quantum theory have affected deeply our conceptual framework in which we do physics; general relativity profoundly modifies our ideas of space and time and prevents us from assuming quantitative relations (such as distance) between two given world points *ab initio,* that is to say before we infuse a physical field into the space-time framework. As a result of general relativity we cannot define a given world point merely by (four-dimensional) triangulation, that is by stating its distance from a set of four base points; we can define it only in terms of physical events associated with the world point in question and its surroundings. Thus the notion of space-time as a scaffolding or background against which the drama of the physical process is played out becomes somewhat vague, though it does not lose its significance entirely.

Quantum theory, on the other hand, profoundly affects our notions of what constitutes physical reality. As you know, quantum theory has for this reason become a hotly contested area between diverse philosophical schools; the classical discussions between Bohr and Einstein [1] are perhaps as illuminating in this respect as any other material. Here in France Professor Louis de Broglie and J.-P. Vigier have contributed to this exploration, which I do not consider in any sense concluded. Whatever the examination of the philosophical implications may eventually reveal, quantum theory as a working tool of the theoretical physicist is well established. Accordingly, unless we believe in a compartmentalization to our approach to the physical universe, we must investigate to what extent the contributions of general relativity and quantum theory may be brought together. Practically this means quantization of general relativity or, perhaps more cautiously worded, the formulation of a general-relativistic quantum field theory which bears some correspondence with recently established physical theories.

That we embark on a program to synthetize general relativity and quantum field theory does not imply, of course, that we consider these two theories as *permanently* established; they are the best we theoretical physicists have to offer at the moment. An attempt to amalgamate them may in itself lead to recognition that these theories need modification. And this rather trite observation brings me to a second motivation for engaging in the program of quantization. That is that the so-called renormalization procedure in quantum field theory, in spite of its great and undeniable successes, has still left a number of questions unanswered. That renormalization involves a two-layer construction of the theory may be temporary; perhaps eventually renormalization can take place in the theory's foundation. But renormalization does not settle the question of convergence of the interaction approach, either in quantum electrodynamics or in a nucleon-meson theory with strong interactions; and we have as yet no theory of elementary articles. Accordingly, one may hope that some of these questions will be answered by the general-relativistic quantum field theory of the future. In particular W. PAULI, and subsequently S. DESER [2], have called attention to the possibility that the singularity on the light cone, typical for Lorentz-covariant propagators, may be ameliorated in general-relativistic theories, in which the metric tensor components, and with them presumably the location of the light cone, are subject to uncertainty relations. We dot not yet know whether this hope is justified.

After these preliminary remarks I shall now turn to our present approach to the problem of quantization. During my early efforts I have used two techniques which at present I do not consider of major promise, though I also feel that neither of them is objectionable if it should turn out to give results; one is the technique of parameters, the other the Hamiltonian formalism. Both of these techniques were proposed by DIRAC [3] and by BERGMANN and BRUNINGS [4] and utilized successfully by PIRANI and SCHILD [5]. The two techniques complement each other. A Hamiltonian formalism tends to single out one direction in space-time and, thus, lends itself admirably to the discussion of Cauchy-type questions concerned with the propagation of initial-value data. But this emphasis on one particular direction, which after all has been chosen arbitrarily, destroys the manifestly covariant character of the theory. By introducing two coordinate systems (one of which is called a system of parameters, just for the sake of distinction), we can separate the role of the coordinate system which is to exhibit general-relativistic invariance from that of the coordinate system that distinguishes the three-dimensional hypersurfaces of constant « time » from the « time axis ».

The purpose of the Hamiltonian formalism is to guarantee from the outset a « complete » set of commutation relations. By the term complete we mean a sufficient number of commutation relations between dynamical variables so that the commutation relations between any dynamical variables can be derived, at least in the classical (c-number) theory. The « canonical commutation relations » form such a set : If we know the commutators between any two canonical variables of the problem, that is their Poisson brackets, then we can obtain the commutators between any other two variables directly. Unfortunately, in the case of the theories we have to deal with, the canonical commutators may lead to self-contradictory results if we attempt to transfer them to quantum theory. This is because in the Hamiltonian version of any general-relativistic field theory there appear constraints [3, 6], relations between the canonical field variables that do not involve their time derivatives and which, accordingly, must be satisfied at one time before the Hamiltonian equations of motion (also called canonical field equations) can be even considered. In the presence of such constraints the naive Poisson bracket expressions, if transferred mechanically to the quantum theory, will give rise to such results as that the expectation value of the commutator of two dynamical variables one of which at least is required to vanish (or at least to have the eigenvalue zero with any permissible state vector in Hilbert space) is bounded away from zero.

To prevent the occurrence of such results, Dirac modified the Poisson brackets [3] in a procedure which was subsequently generalized and given a group-theoretical interpretation by Bergmann and Goldberg [7]. With the commutators thus modified, a canonical theory can at least formally be transferred to Hilbert space. The only fly in that ointment is that in order to accomplish this transfer, we must possess a complete set of *observables,* quantities which in the Hamiltonian formalism I shall define as dynamical variables (field variables or functionals of the field variables) whose unmodified Poisson brackets with all the constraints of the theory vanish. To construct such observables in general relativity in sufficient numbers to form a complete set remained an unsolved problem for several years [8].

Observables as a concept

In what follows, we shall require the concept of observable outside the context of the Hamiltonian formalism. That is why I shall not restrict myself to the narrow definition just given.

In general-relativistic theories the coordinate system may be subjected to transformations that preserve the coordinate system in any desired four-dimensional domain unchanged but change it outside that domain, with the first n derivatives of the new coordinates with respect to the old coordinates existing every-where, n being arbitrary but finite. Accordingly, no matter what information is being made available on a given space-like three-dimensional hypersurface, one cannot predict the values of ordinary field variables off the hypersurface. By the same token, the value of a given field variable at one world point (identified by the values of its coordinates), or the value of a derivative of a field variable, has no intrinsic significance. Accordingly, we cannot require the quantum theory of general relativity to furnish us with the expectation values of field variables, or of their derivatives. Hence, the raw field variables should not possess corresponding Hilbert operators in the quantum field theory to be constructed.

In the Hamiltonian formalism the constraints are the generating densities of infinitesimal coordinate transformations. Our definition of observables, that they be dynamical variables whose Poisson brackets with all constraints vanish, amounts to the requirement that the observables be invariant with respect to (infinitesimal) coordinate transformations. In order to avoid misunderstandings, permit me to explain my terminology. A *scalar* is to be a quantity whose value at a fixed world point remains unchanged under coordinate transformations. An *invariant,* on the contrary, is a quantity so defined that its value in every coordinate system is the same; that is to say, it may be an invariant integral, or it may even be a function of the coordinates or of some other parameters, but defined so that whenever we calculate its value, it comes out the same regardless of the coordinate system in which we perform the calculation. Let me give a couple of examples of invariants : The individual components of the (mixed) Kronecker tensor are invariants. The three-dimensional integral :

$$\Delta \equiv \int \mathfrak{D}^0 \, d^3 x \tag{1}$$

extended over a three-dimensional space-like hypersurface extending to infinity will be invariant with respect to arbitrary curvilinear coordinate transformations provided $\mathfrak{D}^0$ is a component of a contravariant vector density field that satisfies the condition

$$\mathfrak{D}^\rho{}_{,\rho} = 0 \tag{2}$$

everywhere and drops off at spatial infinity sufficiently rapidly so that the product of the closed surface integral

$$\oint \mathfrak{D}^k \, dS_k \qquad k = 1,2,3 \tag{3}$$

and the geodetic diameter tends to vanish with increasing size of the surface. If these conditions are satisfied, the integral (1) will always take the same value if evaluated at $x^0 =$ constant, regardless of the choice of coordinate system. Incidentally, this invariant is also a constant of the motion.

In principle, invariant quantities represent intrinsic properties of a physical situation, properties that are independent of the (equivalent) modes of description. If our theory deals of physically meaningful qualities, invariants should be observable ; in quantum theory they should possess expectation values; and to the extent that in our theory observable quantities can be predicted, invariants should be predictable from sufficiently complete data given on one space-like hypersurface. This, then, is the motivation for talking of observables and for proposing to formulate the whole physical theory as far as possible in terms of observables only.

Observables as constants of the motion

In general relativity many observables are constants of the motion outright. From any that are not we can construct constants of the motion, by expressing the value of an observable at the coordinate time $x^0{}_0$. in terms of observables at another (variable) coordinate time x^0. Such constants of the motion might be explicitly time-dependent. For certain purposes we shall replace our search for observables by a search for constants of the motion. According to a simple argument [4], any constant of the motion is *a fortiori* an observable.

The Lagrangian formalism

For an essentially four-dimensional theory such as general relativity, the Lagrangian formalism, which treats space and time derivatives on the same footing, appears to be most appropriate, though many initial-value problems, which single out a time-like direction anyway, are treated most conveniently in the Hamiltonian formalism. At any rate, it is certainly worthwhile to explore the possibilities inherent in the Lagrangian formalism. Our definition of observables as invariants is already independent of the choice of formalism; but the Hamiltonian formalism makes one major contribution to any program of quantization : It leads directly to commutation relations.

The commutation relations of the c-number theory are the Poisson brackets; the Poisson brackets may be interpreted variously, either as the commutation relations between infinitesimal canonical transformations, or the transformation law of one field variable under the infinitesimal canonical transformation generated by the other. The latter definition is equivalent to the former, because the commutator of two infinitesimal transformations may also be interpreted as the similarity transformation of one under the other; of course, the similarity transformation of a canonical transformation must correspond to a transformation of its generator; hence the equivalence of the two definitions.

We shall now construct the analog of Poisson brackets in the Lagrangian formalism. First we must define again the canonical transformation and its generator. We shall call an infinitesimal transformation of field variables canonical if the δy_A, the infinitesimal changes in the field variables, are functions of the field variables, of their derivatives and of the coordinates explicitly such that the resulting change in the Lagrangian density as a function of its arguments does not give rise to the appearance of higher derivatives than those already present. This definition is deficient in that the transformations thus defined do not form a group. However, we can restrict the canonical transformations and at the same time obtain a transformation group, by defining as invariant infinitesimal canonical transformations those in which the Lagrangian density changes at most by a divergence or, better yet, if we supply the necessary divergence, in which the Lagrangian does not change at all. [9, 10].

Such an invariant change of field variables satisfies the identity

$$\frac{\delta L}{\delta y_A}\,\delta y_A + C^{\rho}{}_{,\rho} \equiv 0\,. \tag{4}$$

We call C^{ρ} the generating field, and the integral $\int C^{\rho}\, d\,\Sigma_{\rho}$, extended over a three-dimensional hypersurface, the generator of the infinitesimal transformation of field variables δy_A. In general relativity Eq. (4) takes the form

$$C^{\rho}{}_{,\rho} \equiv \sqrt{-g}\; G^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \tag{5}$$

The generating field of infinitesimal coordinate transformations vanishes in general relativity if the field equations are satisfied. It is

$$C^{\rho} = -2\sqrt{-g}\; G^{\rho}{}_{\sigma}\,\delta x^{\sigma} \tag{6}$$

Because generating fields are determined by Eq. (4) only up to an arbitrary curl field, one can replace the expression (6) by one which does not vanish and which contains the so-called energy-stress tensor as a factor in one of its two terms [11], [12].

The generators of invariant transformations are evidently constants of the motion, hence observables. We shall obtain the commutators between constants of the motion in the Lagrangian formalism by exploring the invariant transformations generated by them. We now return to the problem of constructing observables.

Construction of observables

In general relativity a coordinate system is simply a convention to identify world points with quadruplets of numbers in such a manner that local topology is appropriately represented. Coordinates are not an adequate means of identifying world points physically. A physically meaningful statement about events is necessarily a statement about coincidences; that is, the prototype statement should be : « Events A, B, C, ... took place at the same world point. » Géhéniau and Debever [13] constructed four scalar fields whose numerical values might serve as such « events », the four independent eigenvalues of the Weyl tensor. If we define, as usual, the Weyl tensor as

$$C_{\iota\kappa\lambda\mu} = R_{\iota\kappa\lambda\mu} + \frac{1}{2}(g_{\iota\lambda} R_{\kappa\mu} + g_{\kappa\mu} R_{\iota\lambda} - g_{\kappa\lambda} R_{\iota\mu} - g_{\iota\mu} R_{\kappa\lambda}) + \\ + \frac{1}{6}(g_{\kappa\lambda} g_{\iota\mu} - g_{\iota\lambda} g_{\kappa\mu}) R \tag{7}$$

then the covariant eigenvalue problem.

$$[C_{\iota\kappa\lambda\mu} - \Lambda (g_{\iota\lambda} g_{\kappa\mu} - g_{\kappa\lambda} g_{\iota\mu})] V^{\lambda\mu} = 0 , \quad V^{\iota\kappa} = - V^{\kappa\iota} \tag{8}$$

possesses six different complex eigenvalues Λ, which are pair-wise conjugate complex. Moreover, the sum of each of these two triplets vanishes, so that there remain two independent complex eigenvalues, or four independent real numbers.

Alternatively, one may obtain four real and independent numbers as the coefficients of the secular equation associated with the eigenvalue problem (8). The four independent expressions are quadratic and cubic in the components of Weyl's tensor. At any rate, there are four, and only four, scalars that are algebraic functions of those components of the Riemann-Christoffel curvature tensor not required to vanish (or to equal the matter tensor) by Einstein's field equations. In passing we should perhaps mention that in spaces possessing Killing fields or other special symmetries even these four scalars may not be independent of each other. In what follows we shall exclude spaces with such symmetries. We shall adopt the four Géhéniau-Debever scalars, or some suitable functions of them, as a new coordinate system. Because these coordinates describe intrinsic local properties of the space-time continuum, we shall call them intrinsic coordinates [14].

We now proceed to transform the metric tensor field from conventional to intrinsic coordinates. Employing the usual transformation equations and denoting the intrinsic coordinates by A^ρ we find

$$g^{\alpha\beta}(A^\rho) = A^\alpha{}_{,\mu}\, A^\beta{}_{,\nu}\, g^{\mu\nu} \tag{9}$$

These new components of the metric tensor as functions of the intrinsic coordinates are observables. Given an arbitrary Riemannian manifold in an arbitrary coordinate system, the question : « What is the numerical value of the component $g^{\alpha\beta}$ of the intrinsic metric at the world point characterized by given numerical values of the four intrinsic coordinates A^ρ ? » calls for an answer that depends on the geometric properties of the chosen or given manifold, but not on the choice of the original (conventional) coordinate system.

As shown by Eq. (9), the observables $g^{\alpha\beta}(A^\rho)$ depend on the first derivatives of the intrinsic coordinates with respect to the conventional coordinates, and hence on the third derivatives of the original metric tensor. A statement concerning these observables is a statement of the coincidence of certain numerical values of second-order and third-order covariants of the metric.

Our new set of observables (9) is *complete*. That is to say, if we should know the numerical values of all ten components of the metric tensor for every quadruplet of numerical values of the intrinsic coordinates, we should have complete information about the underlying Riemannian manifold. If observables in general relativity should be constructed by some different approach [15], [18], then they must be functionals of ours; if these other observables form a complete set, the converse must hold as well.

Before we set to work with the help of our set of observables, two adverse comments should be made : Our set, though complete, is redundant, that is to say, there are many restrictive relations between our observables. These are the field equations and the coordinate conditions. The field equations obviously relate the observables to each other, and four of them relate to each other the observables and their *first* normal derivatives on a three-dimensional hypersurface witout involving the second normal derivatives. Furthermore there are coordinate conditions : If we form in an intrinsic coordiante system the four scalars of the Weyl tensor, these must equal the four intrinsic coordinates (or their chosen functions). When all these conditions are taken into account, one gets the impression that the total number of independent observables equals four at every point of a three-dimensional hypersurface. This result agrees with every other investigation of the Cauchy problem of general relativity. We have been unable to exhibit these four in closed form. For obtaining commutators, however, by our method, detailed knowledge of the independent observables is fortunately unnecessary, though we require (and have) the observables themselves.

The other comment is that the intrinsic coordinates of our choice are not physically intuitive. More precisely, our coordinates do not *ab initio* correspond to a Lorentz frame at spatial infinity. This objection is, however, not serious, either; the very fact that our observables are local in nature relieves us of the need to discuss the global nature of solutions of essentially nonlinear differential equations. Provided (in the c-number theory) that we are given a Riemannian manifold that satisfies the customary boundary conditions at spatial infinity, we can always define a new set of intrinsic coordinates, functions of the originally chosen set, which gives the metric an asymptotically Minkowskian form. A necessary though not sufficient property of this second-generation intrinsic coordinate system is that the point at which the Géhéniau-Debever scalars all vanish should be transformed into spatial infinity. To give one, and rather naive, example : In the Schwarzschild solution only one of the four scalars differs from zero. In a quasi-Lorentz frame, the $\left(-\frac{1}{3}\right)$ rd power of that scalar would have to be the radius $[(x^2)^{\frac{1}{2}}]$, with the remaining three coordinate directions to be chosen parallel to the three independent Killing fields.

The first commutators

Our observables (9) are of the third differential order in the original metric field. To apply our basic method for relating to each other observables and infinitesimal transformations of the variables, Eq. (5), we shall construct an observable that involves only second-order derivatives of the metric. Our observable (and generator) will be a three-dimensional integral Γ,

$$\Gamma \equiv \int \mathfrak{L}^{\rho}\, d\Sigma_{\rho}\,,$$
$$d\Sigma_{\rho} \equiv \delta_{\rho\alpha\beta\gamma} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial U^{1}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial U^{2}} \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial U^{3}}\, d^{3}\, U \tag{10}$$

where the three-dimensional hypersurface element $d\Sigma_{\rho}$ does not involve the field variables. The vector density field $\mathfrak{L}^{\rho}$ must obey an equation of continuity of the type (2) if Γ is to be a constant of the motion (and hence an observable). We construct this field as a linear combination of the components of the Weyl tensor (7), with coefficients that must be chosen so that the equation of continuity is satisfied. We set :

$$\mathfrak{L}^{\rho} = \sqrt{-g}\, C^{\rho}\,, \qquad C^{\rho} = r_{\iota\varkappa\lambda}\, C^{\iota\varkappa\lambda\rho}\,. \tag{11}$$

Without loss of generality we require that the coefficients $r_{\iota\varkappa\lambda}$ satisfy the symmetry conditions

$$r_{\iota\varkappa\lambda} + r_{\iota\varkappa\lambda} = 0\,, \qquad \delta^{\alpha\iota\varkappa\lambda}\, r_{\iota\varkappa\lambda} = 0\,. \tag{12}$$

The number of independent components of $r_{\iota\varkappa\lambda}$ that remain after Eqs. (12) have been satisfied is 20. On the other hand, the total number of independent components of the Weyl tensor is only 10. Hence we can subject the coefficients to 10 additional conditions without limiting the manner in which the components of the Weyl tensor enter into our observable (10). These remaining ten conditions should be chosen so that they correspond to symmetry properties of the Weyl tensor. Those symmetry properties not yet used involve, however, both the metric tensor and the orientation of our surface of integration. As for symmetry that involves the metric, we know tat all traces of the Weyl tensor vanish; accordingly we require of $r_{\iota\kappa\lambda}$ that

$$g^{\mu\nu}\, r_{\iota\mu\nu} = 0\,. \tag{13}$$

And because the Weyl tensor is antisymmetric in its last index pair, clearly that combination of values of the subscript λ that is parallel to the surface normal n_ρ,

$$n_\rho \,||\, d\Sigma_\rho\,, \qquad\qquad g^{\rho\sigma}\, n_\rho\, n_\sigma = 1 \tag{14}$$

will not contribute in Eq. (11). Hence we require finally that

$$n^\rho\, r_{\iota\kappa\rho} = 0\,. \tag{15}$$

The conditions (12), (13), and (15) together reduce the number of independent components of the tensor $r_{\iota\kappa\lambda}$ to 10.

Incidentally, we worried for some time about the fact that the restrictions (13) and (15) involved the field variables, so that the coefficients $r_{\iota\kappa\lambda}$ would not be pure numerics even on our chosen hypersurface. Eventually we found that these conditions (13) and (15) are actually not needed to obtain our results. However, without setting up these requirements one obtains a number of commutation relations that are redundant, and the redundance can be removed by, e.g., subtracting out the empty traces from the final results. For convenience, I shall assume that all the conditions (12), (13), and (15) are to be met to begin with.

The coefficients $r_{\iota\kappa\lambda}$ must satisfy a number of differential conditions so that the equation of continuity,

$$\mathfrak{C}^\rho{}_{,\rho} = 0 \qquad \text{or} \qquad C^\rho{}_{;\rho} = 0 \tag{16}$$

will hold. These differential conditions are found as follows. From the divergence of the defining equation (11),

$$C^\rho{}_{;\rho} \equiv r_{\iota\kappa\lambda\,;\,\mu}\, C^{\iota\kappa\lambda\mu} + r_{\iota\kappa\lambda}\, C^{\iota\kappa\lambda\rho}{}_{;\rho} \tag{17}$$

the divergence of the Weyl tensor vanishes provided the field equations are satisfied. (This is a « weak » property of the Weyl tensor). For the first term to vanish, we can obviously have no recourse to the field equations. Rather we must require that the coefficients of the Weyl tensor assure that the first term vanishes identically (« strongly »). Accordingly, we require of $r_{\iota\kappa\lambda}$ that they satisfy the following set of differential equations :

$$\tilde{\sigma}_{\iota\kappa\lambda\mu} = 0$$

where

$$\tilde{\sigma}_{\iota\kappa\lambda\mu} \equiv \sigma_{\iota\kappa\lambda\mu} + \frac{1}{2}\left(g_{\iota\lambda}\,\sigma_{\kappa\mu} + g_{\kappa\mu}\,\sigma_{\iota\lambda} - g_{\kappa\lambda}\,\sigma_{\iota\mu} - g_{\iota\mu}\,\sigma_{\kappa\lambda}\right)$$

$$\sigma_{\iota\kappa\lambda\mu} \equiv r_{\iota\kappa\lambda;\mu} - r_{\iota\kappa\mu;\lambda} + r_{\lambda\mu\iota;\kappa} - r_{\lambda\mu\kappa;\iota}$$

$$\sigma_{\kappa\lambda} \equiv g^{\iota\mu}\,\sigma_{\iota\kappa\lambda\mu}\,, \qquad g^{\varkappa\lambda}\,\sigma_{\kappa\lambda} \equiv 0\,, \qquad g^{\iota\mu}\,\tilde{\sigma}_{\iota\kappa\lambda\mu} \equiv 0\,. \tag{18}$$

The total number of these differential equations is 10, the same as the number of independent components of $r_{\iota\kappa\lambda}$. Moreover, these differential equations may be solved algebraically with respect to the normal derivatives of the 10 independent $r_{\iota\kappa\lambda}$. It follows that our differential equations (18) impose no additional differential restrictions on the coefficients of the Weyl tensor within the hypersurface of integration (10), but that they determine uniquely the normal continuation of these coefficients. Hence, once we have chosen the particular values of the independent coefficients $r_{\iota\kappa\lambda}$ on one (space-like) three-dimensional hypersurface, then conditions (12)-(15), along with the differential equations (18), determine the tensor field $r_{\iota\kappa\lambda}$ throughout space-time. In what follows we shall assume that these algebraic conditions and differential equations are satisfied.

We now return to Eq. (17). By a simple calculation we find

$$C^{\rho}{}_{;\rho} \equiv r_{\iota\kappa\lambda}\; C^{\iota\varkappa\lambda\rho}{}_{;\rho} \equiv (r^{\rho}{}_{\kappa\lambda}\,G_{\kappa\lambda})_{;\rho} - \frac{1}{2}\,(r^{\rho\varkappa\lambda} + r^{\rho\lambda\varkappa})_{;\rho}\,G_{\kappa\lambda} \tag{19}$$

If we move the first term on the right to the left and define

$$\overline{C}^{\rho} \equiv C^{\rho} - r^{\rho\varkappa\lambda}\,G_{\kappa\lambda} = C^{\rho} \tag{20}$$

then we conclude that the observable Γ, Eq. (10), generates the infinitesimal transformation of variables,

$$\delta g_{\kappa\lambda} = -\frac{1}{2}\,(r^{\rho}{}_{\kappa\lambda} + r^{\rho}{}_{\lambda\kappa})_{;\rho} \tag{21}$$

Eq. (21) does not yet represent a commutation relation because we have not worked in an intrinsic coordinate system; hence $g_{\kappa\lambda}$ is not an observable. In order to obtain commutation relations, we must now go into an intrinsic coordinate system, and we must further modify the infinitesimal transformation of variables (21) so that the transformation does not lead away from the intrinsic coordinate system. In order to accomplish these objectives, we add to the expression (21) the terms corresponding to an infinitesimal coordinate transformation,

$$\overline{\delta}\, g_{\kappa\lambda} = -\frac{1}{2}\,(r^{\rho}{}_{\kappa\lambda} + r^{\rho}{}_{\kappa\lambda})_{;\rho} - (\xi_{\kappa;\lambda} + \xi_{\kappa;\lambda}) \tag{22}$$

and determine the ξ^{ρ} so that the coordinate conditions that define an intrinsic coordinate system remain satisfied under the total transformation (22). The intrinsic coordinates are some algebraic functions of the components of the Weyl tensor and of the components of the metric. They are, moreover, scalars. Under the transformation (21) the scalar A^{ρ} changes as follows :

$$\delta A^{\rho} = \frac{\partial A^{\rho}}{\partial g_{\kappa\lambda}}\,\delta g_{\kappa\lambda} + \frac{\partial A^{\rho}}{\partial C^{\iota\varkappa\lambda\mu}}\,\delta C^{\iota\varkappa\lambda\mu} \tag{23}$$

where the change of the Weyl tensor depends on the changes of the metric tensor and of their second (covariant) derivatives. If we now calculate the change in A^ρ under the transformation (22), where the bar above the δ-symbol indicates that the infinitesimal change is to be calculated at the world point with the same coordinate values (not at the same world point), then we have

$$\bar{\delta} A^\rho = \delta A^\rho - \xi^\rho \tag{24}$$

and this expression must vanish, because the A^ρ are to be our (intrinsic) coordinates, both before and after the transformation of variables (22). We thus obtain for ξ^ρ the expression

$$\begin{gathered} \xi^\rho = \gamma^{\rho,\varkappa\lambda}\, \delta g_{\kappa\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\iota\kappa\lambda\mu}\, \delta C^{\iota\varkappa\lambda\mu} \\ \gamma^{\rho,\varkappa\lambda} \equiv \frac{\partial A^\rho}{\partial g_{\kappa\lambda}}, \qquad \Gamma^\rho{}_{\iota\kappa\lambda\mu} \equiv \frac{\partial A^\rho}{\partial C^{\iota\varkappa\lambda\mu}} \end{gathered} \tag{25}$$

which is of the third differential order with respect to $r_{\iota\kappa\lambda}$. If we resubstitute the expressions into Eq. (22), we get for $\bar{\delta}\, g_{\kappa\lambda}$ an expression containing up to fourth derivatives of the $r_{\iota\kappa\lambda}$. This expression, finally, is the commutator between $g_{\kappa\lambda}$ and the generator (10),

$$\{g_{\kappa\lambda}(A^\rho), \Gamma\} = -\frac{1}{2}\,(r^\rho{}_{\kappa\lambda} + r^\rho{}_{\lambda\kappa})_{;\rho} - (\xi_{\kappa;\lambda} + \xi_{\lambda;\kappa}) \tag{26}$$

where the ξ^ρ are the expressions (25).

The coefficients $r_{\iota\kappa\lambda}$ appear on both sides of the equation (26), on the left integrated over the whole hypersurface Σ, on the right only at the one world point A^ρ. If this world point is chosen so that it lies on Σ, then, because the choice of the 10 algebraically independent components of $r_{\iota\kappa\lambda}$ is not restricted by differential equations, we may set $r_{\iota\kappa\lambda}$ in particular equal to Dirac delta functions. The very high derivatives of the $r_{\iota\kappa\lambda}$ on the right must be separated into normal derivatives and derivatives in Σ; the normal derivatives must be substituted from Eqs. (18), a very laborious process which has as yet not been completed. There are, however, no real difficulties to be overcome, in view of the fact that the resolution of Eqs. (18) with respect to the normal derivatives is quite straight-forward and leads to closed, though lengthy expressions.

Once this task has been accomplished, we shall have obtained the commutator between a component of the intrinsic metric tensor and a component of the intrinsic Weyl tensor at any two points of an arbitrarily chosen space-like hypersurface. The commutator will involve three-dimensional delta functions and, perhaps, up to fourth derivatives of delta functions within the three-dimensional hypersurface. We have some reason for hoping that in the course of the calculation the highest derivatives will cancel out, leaving only second derivatives of the delta function in the final expressions; we do not consider our own arguments in this respect conclusive, and I shall, therefore, not present them here.

Additional commutators

By differentiating Eq. (26) with respect to A^ρ in a direction normal to Σ we can obtain the commutators of the individual components of the Weyl tensor and normal derivatives of the metric to any order. It is understood that the normal derivatives of $r_{\iota\kappa\lambda}$ appearing on the right are always to be eliminated with the help of Eqs. (18).

Both this and the original result (26) may be extended in another direction. The right hand side of (26) may be interpreted not only as the infinitesimal change of $g_{\kappa\lambda}$ generated by Γ, but alternatively as the (negative) infinitesimal change in Γ generated by the observable $g_{\kappa\lambda}(A^\rho)$. By manipulating the coefficients $r_{\iota\kappa\lambda}$ appropriately, we may convert the change in Γ into a local change in the components of the Weyl tensor. But changes in the Weyl tensor are related to changes in the metric tensor, because of the special symmetry characteristics of the Weyl tensor. Because the trace of the Weyl tensor is required to vanish, we have

$$C^{\iota\varkappa\lambda\mu}\,\bar{\delta} g_{\iota\mu} + g_{\iota\mu}\,\bar{\delta}\,C^{\iota\varkappa\lambda\mu} \equiv 0\,. \tag{27}$$

These are 10 relations for the 10 quantities $\bar{\delta} g_{\iota\mu}$ if the $\bar{\delta} C^{\iota\varkappa\lambda\mu}$ have been obtained from Eq. (26). Except for special symmetries (e.g. Pirani's case of a « pure » gravitational wave [19]) the rank of the matrix of coefficients of $\bar{\delta} g_{\iota\mu}$ is 9. The rank cannot be 10, because the first term must vanish identically if $\delta g_{\iota\mu}$ is proportional to $g_{\iota\mu}$; that it is in fact 9 can be verified without much difficulty. It follows, then, that Eqs. (27) determine $\bar{\delta} g_{\kappa\lambda}$ except for a single unknown, say λ,

$$\bar{\delta} g_{\kappa\lambda} = \bar{\delta}_0\, g_{\kappa\lambda} + \lambda g_{\kappa\lambda}\,. \tag{28}$$

This remaining parameter can be determined, for instance, from the coordinate conditions, which require that

$$\gamma^{\rho,\,\iota\varkappa}\,\bar{\delta} g_{\iota\kappa} + \Gamma^\rho{}_{\iota\kappa\lambda\mu}\,\bar{\delta}\,C^{\iota\varkappa\lambda\mu} = 0\,. \tag{29}$$

Once the solution of this system of linear algebraic equations has been obtained, we shall have the Poisson brackets between arbitrary components of the intrinsic metric tensor at any two points of a space-like hypersurface. By a very slight modification of this procedure we may also obtain the commutators between the metric and its normal derivative, or between two such normal derivatives.

In principle, the task of obtaining a complete set of commutators between a complete set of observables in general relativity appears solved. I must admit that I have had too many disappointing experiences in this field to be unaware of the possibility that, in the course of carrying out the tedious calculations sketched out right now, we may discover a few stumbling blocks of which we are at present unaware. Nevertheless, I believe that we can be justly pleased with the results obtained to date : For the first time we have a complete set of observables in closed form, which are essentially local in character; and for the first time we have obtained actual commutation relations between some observables, and we are on the threshhold of obtaining all.

Prospects for quantization

If we possess a c-number theory completely in terms of observables, then that theory obeys all the requirements of general covariance *ab initio,* because the quantities we have introduced are individually invariant with respect to coordinate transformations. Hence any relationship between them is invariant, too. If we can formulate a quantum theory which goes over into that c-number theory in the short-wave limit, then that quantum theory will also be general-relativistic to begin with.

In one sense this result is gratifying, but on the other hand, it may lead to an *embarras de richesse.* It has been suggested that an approach based on the Schwinger variational principle, or on the Feynman integral, will avoid the multiplicity of possible quantum theories. Personally, I have my doubts, for two reasons : First, these proposed approaches have not been developed far enough to permit an evaluation of the claims advanced for them; second, I think that in these theories there are also ambiguities of their own : In the Feynman integrals one operates with mathematical operations that converge at best conditionally; hence the result would depend on the ordering of terms, and on the sequence in which various limiting processes are carried out. In the Schwinger formalism, one starts with a variational principle in which the q-numbers appearing are not Hilbert operators; properly speaking they should be defined on a linear vector space of which the Hilbert space of physically admissible states forms but a small subspace. Besides, we know that there are more than one possible factor sequences with which one can set up a general-relativistic Lagrangian density of the Schwinger-Palatini type; we do not know whether they will lead to equivalent quantum theories, even assuming that the whole program can be carried out.

All in all, I suspect that right now these questions, hopes, and doubts cannot be resolved and that we shall need more conferences in the years to come to clarify the problem of quantization.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Niels Bohr, *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics. In* P. A. Schilpp, ed., *Albert Einstein, Philosopher-Scientist.* Evanston, 1949, pp. 199-241. See also other materials in the same volume.

[2] S. Deser, *Revs. Mod. Phys.*, **29**, 417 (1957).

[3] P. A. M. Dirac, Vancouver lectures (1949), mimegraphed) and *Can. J. Math.*, **2**, 129 (1950); **3**, 1 (1951).

[4] P. G. BERGMANN and J. H. M. BRUNINGS, *Revs. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949).
[5] F. A. E. PIRANI and A. SCHILD, *Phys. Rev.*, **79**, 986 (1950);
P. G. BERGMANN, R. PENFIELD, R. SCHILLER, and H. ZATZKIS, *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950).
[6] J. L. ANDERSON and P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, **83**, 1018 (1951).
[7] P. G. BERGMANN and I. GOLDBERG, *Phys. Rev.*, **98**, 531, 544 (1955).
[8] P. G. BERGMANN, *Helvetica Physica Acta Suppl.*, **IV**, 79 (1956).
[9] P. G. BERGMANN and R. SCHILLER, *Phys. Rev.*, **89**, 4 (1953).
[10] P. G. BERGMANN, I. GOLDBERG, A. JANIS, and E. NEWMAN, *Phys. Rev.*, **103**, 807 (1956).
[11] P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, **112**, 287 (1958).
[12] A. B. KOMAR, *Phys. Rev.*, **113**, 934 (1959).
[13] J. GEHENIAU and R. DEBEVER, *Helv. Phys. Acta Suppl.*, **IV**, 101 (1956).
[14] A. KOMAR, *Phys. Rev.*, **111**, 1182 (1958).
[15] E. NEWMAN and P. G. BERGMANN, *Revs. Mod. Phys.*, **29**, 443 (1959).
[16] P. G. BERGMANN and A. JANIS, *Phys. Rev.*, **111**, 1191 (1958).
[17] R. ARNOWITT and S. DESER, **113**, 745 (1959).
[18] P. A. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.* (London), **A 246**, 333 (1958); *Phys. Rev. Letters*, **2**, 368 (1959); *Phys. Rev.* (in press).
[19] F. A. E. PIRANI, *Phys. Rev.*, **105**, 1089 (1957).

DISCUSSION

Intervention du Prof. G. C. Mc Vittie

Je trouve absolument convenable de considérer les observables comme essentiels en Relativité générale. Un exemple est fourni par la détermination de la distance au moyen de la grandeur apparente d'une source lumineuse étendue, auquel cas une prescription opérationnelle de la mesure peut être donnée. M. Bergmann pourrait-il nous donner un exemple d'observable : *a*) qui soit le résultat naturel de l'association de la Relativité générale et des théories quantiques; *b*) et pour lequel il pourrait indiquer un processus opérationnel de mesure.

Intervention du Dr. Sachs

a) *Réponse à la question du Dr. Mc Vittie.* — L'observateur prend place sur l'onde plane périodique de Robinson--Bondi, mesure les accélérations relatives, les élève au carré, multiplie par ρ^{-4} et obtient ainsi les vrais observables.

b) Les vrais observables de Bergmann-Komar sont importants du point de vue conceptuel en ce qu'ils montrent que le problème est localement bien défini. La recherche de vrais observables plus faciles à manier demeure importante.

c) Les vrais observables de Bergmann-Komar sont absolument uniques; les vrais observables de l'électrodynamique admettent un groupe de transformations à six paramètres. Cette différence est-elle souhaitable ou non ?

Intervention du Prof. P.A.M. Dirac

Dans l'application de la méthode hamiltonienne à ce problème, de la manière que j'ai envisagée, une difficulté fondamentale apparaît lors de la quantification. Si l'on part d'un état défini sur une surface du genre espace, il existe une certaine probabilité de passage vers une surface qui n'est plus du genre espace. Cette difficulté est quelque peu semblable à celle, ancienne, due au passage des états d'énergie positive aux états d'énergie négative, mais il ne semble pas exister une manière simple de la surmonter.

Je voudrais demander à Bergmann si sa méthode fournit un moyen de surmonter cette difficulté.

Intervention du Dr. Anderson

En raison de la surabondance de vrais observables dans votre formulation, il est très possible que dans une version de cette théorie en « nombres q », une convention quelconque d'ordonnancement des facteurs conduise à des contradictions. Ainsi, en raison du problème de l'ordonnancement des facteurs, ceux des observables qui ne sont pas indépendants les uns des autres n'ont pas nécessairement des relations de commutation compatibles, même s'ils les ont dans la version de la théorie en « nombres c ». J'ai examiné le problème sous la forme hamiltonienne de la théorie et j'ai trouvé qu'en ce qui concerne les contraintes, un ordonnancement satisfaisant des facteurs semble n'exister qu'en raison de leur forme plutôt simple. Pour s'assurer de la compatibilité depuis le commencement, il faudrait partir d'un ensemble non surabondant d'observables.

Je voudrais mettre en question la nécessité de l'emploi des coordonnées intrinsèques dans la construction des observables. Tout ensemble de conditions de coordonnées qui fixe complètement le système de coordonnées entraîne par voie de conséquence que les variables de champ exprimées dans ce système de coordonnées sont des invariants, i. e., de vrais observables.

Enfin, je voudrais mettre en question le procédé qui consiste à imposer des relations de commutation aux variables du champ de gravitation sans s'appuyer sur quelque chose comme l'argument de Bohr-Rosenfeld. Bien que de tels arguments laissent très probablement trop à désirer du point de vue de la rigueur, ils peuvent indiquer des voies raisonnables d'attaque, et apporter quelque éclaircissement d'ordre physique dans un procédé par ailleurs formel. J'ajouterai que Wigner et Salecker, et moi-même, nous avons effectué des recherches préliminaires dans cette direction, et nous avons tous abouti à des conclusions qui semblent jeter un doute sur la méthode de quantification directe.

Intervention du Dr. P. W. Higgs

Je voudrais adresser une autre critique à ces coordonnées intrinsèques. M. Robinson en a déjà exprimé une partie, à savoir que de telles coordonnées ne sont pas satisfaisantes dans le cas limite d'un espace plat. Je voudrais formuler une exigence à laquelle l'on souhaite que les coordonnées satisfassent, notamment lorsque l'on cherche à quantifier la gravitation. L'exigence est que l'on ait un repère galiléen asymptotique auquel l'on puisse rapporter l'énergie, l'impulsion, et le moment angulaire. Ces coordonnées intrinsèques ne satisfont pas à cette exigence. Il me semble que les relations de commutation du Prof. Bergmann peuvent parfaitement convenir; mais comment se propose-t-il d'envisager l'énergie, l'impulsion et le moment angulaire ?

Intervention du Professeur N. Rosen

Je vois que le but de cette théorie en « nombres c » est de fournir un fondement à une théorie en « nombres q ». Dans le cas d'une théorie linéaire, il est raisonnable d'effectuer le passage d'une théorie classique à une théorie quantique en introduisant les relations de commutation, puisque les équations linéaires vérifiées par les valeurs moyennes des variables ont la même forme que les équations vérifiées par les variables elles-mêmes, de telle sorte que la limite classique de la théorie quantique coincide avec la théorie classique qui a servi de point de départ. Cependant, dans le cas d'une théorie non-linéaire, l'on ne peut s'attendre à une telle connexion. Comment peut-on alors justifier, dans le cas non-linéaire, la méthode qui consiste à partir d'une théorie classique et à la quantifier ensuite ?

Intervention du Dr. J. Callaway

Il semble nécessaire, afin d'avoir une théorie quantique significative de la gravitation, de pouvoir mesurer, du moins en principe, les champs de gravitation des particules atomiques. Cependant, il est fortement suggéré par le travail de Wigner [*Rev. Mod. Phys.*, **29**, 255 (1957)] que tous les dispositifs de mesure du champ de gravitation sont nécessairement macroscopiques — que les effets de l'appareil de mesure sur la structure de l'espace-temps sont de beaucoup supérieurs à ceux de la particule considérée.

Intervention des Drs. Arnowitt, Deser et Misner

We should like to raise some objections to Prof. Bergmann's talk. First, on the classical level, the Komar coordinates are quite singular in nature. If for example one has a periodic or « quasi-periodic » wave type solution, all points for which the curvature has the same value will possess the same coordinates. This difficulty is purely local in nature and does not require global considerations. Further, it seems difficult to see how to recover the linearized theory. Thus the description becomes physically obscure.

There seem to be grave doubts as whether it is possible to extend an analysis of the Bergmann-Komar type to quantum theory for the following reasons. In quantum theory the set of allowed coordinate transformations is much smaller than in the classical theory. This is because q-number transformations in general do not leave the theory invariant. (A similar situation holds even in electrodynamics where q-number gauge transformations are forbidden).

This leads some serious conceptual difficulties. If two theoreticians impose two different coordinate conditions, these will in general be connected by a q-number coordinate transformation (i.e. one involving the canonical variables). Thus at most one of the two frames can be a c-number frame. Since q-number frames are physically unacceptable, the question arises as to what criterion's to decide which frames are c-number. In electrodynamics the corresponding problem arises, and on physical and consistency grounds one requires that the radiation gauge be a c-number gauge. We should like to propose a condition to decide this in relativity : i. e. in the canonical formalism one chooses the basic c-number frame as the one in which the Hamiltonian density does not depend *explicity* on the coordinates (after elimination of the constraint variables). This condition insures in the quantum theory that a closed system be conservative.

Since the Komar coordinates are not set up with this criterion in mind it would appear doubtful that they satisfy it.

GRANDEURS RELATIVES A PLUSIEURS POINTS. TENSEURS GÉNÉRALISÉS

CÉCILE DE WITT

Department of Physics, University of North Carolina, Chapel Hill (North Carolina), U.S.A.

« Une droite est un être compliqué dans l'espace », disait un de mes professeurs. L'insuffisance des formalismes actuels pour donner une représentation simple, compacte et utile des êtres géométriques définis en fonction de deux ou plusieurs points se manifeste dans des problèmes élémentaires de géométrie analytique. Elle est rédhibitoire lorsque l'on cherche à maintenir la covariance générale dans des calculs où se présentent des grandeurs non-localisées. Il est alors nécessaire d'introduire des grandeurs que, faute d'imagination, j'appellerai des « tenseurs généralisés ». La formulation et l'étude des tenseurs généralisés ou n-tenseurs a été mise au point par Bryce DE WITT (1); il en fera une application importante dans l'exposé suivant.

Je me contenterai d'exposer ici le formalisme des bi-tenseurs, c'est-à-dire des tenseurs généralisés définis en fonction de deux points (2). Après un bref exposé des propriétés générales des bi-tenseurs et l'étude de quelques bi-tenseurs décrivant des grandeurs bien connues, j'appliquerai ce formalisme à l'étude des fonctions de Green covariantes des équations d'ondes scalaires et vectorielles.

Bi-Tenseurs

Un bi-tenseur est un tenseur défini en fonction de deux points. Par exemple le produit de deux tenseurs $A^{\mu}(x)$ et $B_{\alpha}(z)$ considérés respectivement aux deux points d'espace-temps x et z est un bi-tenseur $C^{\mu}{}_{\alpha}(x, z)$. Par convention, les indices $\alpha \ldots \varkappa$ se rapportent à z et les indices $\lambda \ldots \omega$ à x. Quelques précautions évidentes, mais faciles à oublier sont à prendre : Ne contracter que des indices se rapportant au même point, calculer les dérivées covariantes par rapport à une variable en ignorant les indices se rapportant à l'autre variable !..

(1) B. S. De WITT and R. W. BREHME, Radiation Damping in a Gravitational Field. Institute of Field Physics. monograph series No. 3.

(2) Cette terminologie ne doit pas être confondue avec la terminologie utilisée dans l'étude des tenseurs antisymétriques. [Cf. J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Springer, Berlin (1954)].

Exemples

Notation. — Un point indique une dérivée covariante, la signature de g est $-+++$, le tenseur de Riemann est choisi tel que $A_{\mu.\nu\sigma} - A_{\mu.\sigma\nu} = R_{\nu\sigma\mu}{}^{\tau} A_{\tau}$.

1. La distribution $\delta^{(4)}(x, z)$ est une densité bi-scalaire qui peut être considérée comme une densité scalaire de poids w à l'un des points et de poids $1 - w$ à l'autre. Nous adopterons la convention $w = 1/2$.

2. La distance géodésique $s(x, z)$ mesurant la distance entre x et z, le long d'une géodésique, est un bi-scalaire défini par les équations suivantes :

$$g^{\mu\nu} s_{.\mu} s_{.\nu} = g^{\alpha\beta} s_{.\alpha} s_{.\beta} = \begin{cases} +1 & \text{intervalle du genre espace,} \\ -1 & \text{intervalle du genre temps,} \\ \;\;0 & \text{cône de lumière.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to z} s = 0$$

s' est positif ou nul.

Pour éviter la présence de racines carrées, nous considérons la grandeur :

$$\sigma \equiv \pm \frac{1}{2} s^2 .$$

Cette grandeur est la fonction d'univers Ω de Synge (3) :

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sigma_{.\mu} \sigma_{.\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \sigma_{.\alpha} \sigma_{.\beta} = \sigma$$

$$\lim_{x \to z} \sigma = 0$$

$\sigma > 0$ intervalle du genre espace,
$\sigma < 0$ intervalle du genre temps.

3. Le bi-vecteur de transport parallèle le long d'une géodésique $\bar{g}_{\mu\alpha}(x, z)$ réalise le transport parallèle d'un vecteur $A_{\alpha}(z)$ de z à x le long d'une géodésique :

$$\bar{A}_{\mu}(x) = \bar{g}_{\mu}{}^{\alpha}(x, z) A_{\alpha}(z)$$

Les composantes, le long des géodésiques, des dérivées covariantes des $\bar{g}_{\mu\alpha}$ doivent donc être nulles et

$\bar{g}_{\mu\alpha}$ est défini par les équations :

$$\bar{g}_{\mu\alpha.\nu} g^{\nu\sigma} \sigma_{.\sigma} = 0, \qquad \bar{g}_{\mu\alpha.\beta} g^{\beta\gamma} \sigma_{.\gamma} = 0,$$

$$\lim_{x \to z} \bar{g}_{\mu}{}^{\alpha} = \delta_{\mu}{}^{\alpha}.$$

(3) J. L. Synge, Tensorial Integral Conservation Laws in General Relativity. Colloque International sur les Théories Relativistes de la Gravitation.

Des équations de définition de $\bar{g}_{\mu\alpha}$ on déduit les propriétés suivantes :

$$\bar{g}_\mu{}^\alpha g_\nu{}^\beta g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$$
$$\bar{g}_\mu{}^\alpha \sigma_{\cdot\alpha} \quad = -\sigma_{\cdot\mu}\,.$$

On peut généraliser cette étude au transport parallèle des pseudotenseurs. Soit par exemple A_α une densité vectorielle de poids w

$$\bar{A}_\mu = \bar{\delta}^w \bar{g}_\mu{}^\alpha A_\alpha \qquad \text{où} \qquad \bar{\delta} = |\bar{g}_\mu{}^\alpha|\,.$$

4. Un déterminant important dans l'étude des géodésiques est la densité bi-scalaire en x et en z introduite par Hadamard et van Vleck :

$$D = -|D_{\mu\alpha}| \qquad \text{où} \qquad D_{\mu\alpha} = -\sigma_{\cdot\mu\alpha}\,.$$

D ne s'annule pas lorsque x et z sont suffisemment voisins l'un de l'autre car, comme on peut le prouver à partir de l'équation de définition de σ

$$\lim_{x\to z} D_{\mu\alpha}(x, z) = g_{\mu\alpha}(z)\,.$$

Le bi-vecteur $D_{\mu\alpha}$ a donc un inverse $D^{-1\mu\alpha}$ lorsque x et z sont suffisemment voisins l'un de l'autre.

D peut être considéré comme le jacobien permettant de passer de la description d'une géodésique en termes du point initial et final à la description en termes du point initial et de la direction initiale.

D est le déterminant correspondant au changement de variable $\sigma_{\cdot\alpha}, z^\alpha \to x_\mu, z^\alpha$

$$-\left|-\frac{\partial\sigma_{\cdot\alpha}}{\partial x_\mu}\right| = -|-\sigma_{\cdot\mu\alpha}| = D\,.$$

Lorsqu'on peut aller de z à x le long de différentes géodésiques, D est infini. En effet :

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma_{\cdot\alpha}}\delta\sigma_{\cdot\alpha}\,.$$

Pour qu'une variation finie $\delta\sigma_{\cdot\alpha}$ engendre une variation nulle δx^μ il faut que le déterminant $\left|\dfrac{\partial x^\mu}{\partial\sigma_{\cdot\alpha}}\right|$ soit nul, c'est-à-dire que $D = \infty$.

Le déterminant D permet de généraliser aux espaces de Riemann l'équation $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ de l'espace plan à 3 dimensions et donne une mesure du rapprochement ou de l'éloignement des géodésiques crée par la courbure de l'espace :

$$D^{-1}(D\sigma^{\cdot\mu})_{\cdot\mu} = 4$$

ou, en termes du bi-scalaire $\Delta = \bar{g}^{-1} D$ avec $\bar{g} = -|\bar{g}_{\mu\alpha}|$

$$\Delta^{-1}(\Delta\sigma^{\cdot\mu})_{\cdot\mu} = 4\,.$$

Sous la forme $\sigma^{\cdot\mu}{}_\mu + s\dfrac{d(\log\Delta)}{ds} = 4$ cette équation s'interprète immédiatement de la façon suivante :

Dans un espace plan

$$\sigma_{\cdot}{}^{\mu}{}_{\mu} = 4 .$$

Dans un espace courbe

$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\cdot}{}^{\mu}{}_{\mu} < 4 , \\ \Delta \text{ croissant}\end{array}\right\}$ les géodésiques se rapprochent,

$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\cdot}{}^{\mu}{}_{\mu} > 4 \\ \Delta \text{ décroissant}\end{array}\right\}$ les géodésiques s'écartent,

$\Delta = \infty$ les géodésiques se coupent.

Développement en série de Taylor

De tels développements sont nécessaires, par exemple, pour le calcul classique du freinage par radiation qui sera fait dans l'exposé suivant.

Développement du bi-tenseur $T_{\alpha\beta}$ dont les indices se rapportent au même point :

$$T_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \sigma_{\cdot\gamma} + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\, \sigma_{\cdot\gamma}\, \sigma_{\cdot\delta} + o(s^3)$$

compte tenu des limites

$$\lim_{x \to z} \sigma_{\cdot\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$\lim_{x \to z} \sigma_{\cdot\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$\lim_{x \to z} \sigma_{\cdot\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{3}(R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma})$$

on obtient les relations

$$A_{\alpha\beta} = \lim_{x \to z} T_{\alpha\beta}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \lim_{x \to z} T_{\alpha\beta\cdot\gamma} - A_{\alpha\beta\cdot\gamma}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lim_{x \to z} T_{\alpha\beta\cdot\gamma\delta} - A_{\alpha\beta\cdot\gamma\delta} - A_{\alpha\beta\gamma\cdot\delta} - A_{\alpha\beta\delta\cdot\gamma} \quad \text{etc.}$$

Développement du bi-tenseur $T_{\mu\beta}$ dont les indices se rapportent à deux points différents.

Il suffit d'effectuer un transport parallèle le long d'une géodésique de l'un à l'autre point; on peut alors utiliser le développement précédent puis à l'aide d'un transport parallèle inverse on exprime les coefficients du développement en fonction du tenseur primitif.

A titre d'exemple, nous donnons le développement de Taylor de Δ

$$\Delta = 1 - \frac{1}{6} R^{\alpha\beta}\, \sigma_{\cdot\alpha}\, \sigma_{\cdot\beta} + o(s^3).$$

On retrouve le terme introduit par la courbure de l'espace dans l'intégrale de Feynman [4].

(4) Cf. B. S. De Witt, *Rev. Mod. Phys.*, 29, 395 (1957).

Fonctions de Green

Nous allons étudier les solutions des équations d'ondes covariantes scalaires et vectorielles.

$$g^{\mu\nu}\,\varphi_{\cdot\mu\nu} = 0$$

et

$$g^{\nu\sigma}\,A_{\mu\cdot\nu\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu}\,A_{\nu} = 0\,.$$

Equation d'onde scalaire.

La « solution élémentaire » [5] de l'équation scalaire est

$$G^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{u}{\sigma} + v\log|\sigma| + w\right)$$

où u, v, w sont des bi-scalaires sans singularité et

$$\lim_{x\to z} u = 1.$$

En substituant $G^{(1)}$ dans l'équation d'onde on obtient une solution unique pour u :

$$u = \Delta^{1/2}$$

et on obtient v et w sous forme de développements en série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n\,\sigma^n\,.$$

v_n s'obtient, par recurrence, en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires le long des géodésiques originaires de z; ces équations ne font pas intervenir w et déterminent v de façon unique.

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\,\sigma^n$$

w_o est arbitraire w_n est donné par une formule de récurrence qui fait intervenir w_o et v· Hadamard a prouvé que les développements en série de v et w convergent uniformément dans la région où σ est univoque et lorsque le tenseur métrique est analytique. Marcel Riesz a étendu la démonstration à des cas où le tenseur métrique n'est pas analytique.

L'existence des fonctions de Green a été démontré par A. Lichnerowicz, il les a utilisées dans son étude sur les ondes et radiations gravitationnelles [6].

On les obtient par le procédé bien connu en théorie des champs qui consiste à remplacer la variable réelle σ par la variable complexe $\sigma + io$:

$$G^F = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\Delta^{1/2}}{\sigma + io} + v\log(\sigma + io) + w\right)$$

$$G^F = G^{(1)} - 2i\,\overline{G}.$$

(5) J. Hadamard, *Lecture on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven (1923).
(6) L. Lichnerowicz, Ondes et radiations gravitationnelles. Colloque International sur les Théories Relativistes de la Gravitation.

Ce qui donne pour la fonction de Green symmétrique :

$$\overline{G} = \frac{1}{8\pi}\,[\Delta^{1/2}\,\delta(\sigma) - v\,\theta(-\sigma)]$$

$\overline{G}$, étant indépendant de w, est déterminé de façon unique,

$$\overline{G} = 0 \text{ lorsque } \sigma > 0,$$

$$\overline{G} \neq 0 \text{ lorsque } \sigma < 0,$$

le bi-scalaire v représente la « queue » de la fonction de Green qui joue un rôle essentiel dans les applications. En comparant, à la limite $x \to z$, grâce à l'introduction des coordonnées géodésiques normales, la fonction $\overline{G}$ avec la fonction correspondante de l'espace plan, on démontre que

$$g^{\mu\nu}\,\overline{G}_{\cdot\mu\nu} = \bar{g}^{-1/2}\,\delta^{(4)}.$$

Comme dans l'espace plan, $\overline{G}$ peut être séparé en G^{ret} et G^{adv}. Il est à remarquer que les fonctions de Green avancées et retardées sont définies en fonction du passé et du futur et non pas en fonction des grandeurs spatiales d'onde entrante et sortante. En effet, en raison de la diffusion due à la courbure de l'espace, une onde sortante peut, par exemple, contribuer partiellement à l'onde entrante comme le montre le terme v de la fonction de Green.

Les fonctions de Green interviennent de la même façon que dans l'espace plan dans la solution des équations d'onde non homogènes. La fonction G permet de généraliser aux espaces courbes le principe de Huyghens :

$$\varphi(z) = \int_z g^{1/2}(x)\,[\varphi(x)\,G_{\cdot\mu}(x,z) - \varphi_{\cdot\mu}(x)\,G(x,z)]\,g^{\mu\nu}(x)\,d\Sigma_\nu$$

d'où l'on peut déduire, en particulier, par les méthodes habituelles :

$$G(x,z) = -G(z,x)\,.$$

Equation d'onde vectorielle

La solution élémentaire s'écrit :

$$G^{(1)}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{u_{\mu\alpha}}{\sigma} + v_{\mu\alpha}\log|\sigma| + w_{\mu\alpha}\right]$$

où $u_{\mu\alpha}$, $v_{\mu\alpha}$ et $w_{\mu\alpha}$ sont des bi-vecteurs sans singularité et

$$\lim_{x \to z} u_{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha}\,.$$

Par substitution dans l'équation d'onde on obtient :

$$g^{\nu\sigma}(2u_{\mu\alpha\cdot\nu} - u_{\mu\alpha}\,\Delta^{-1}\,\Delta_{\cdot\nu})\,\sigma_{\cdot\sigma} = 0\,\cdot$$

D'où, compte tenu de la normalisation de $u_{\mu\alpha}$, on tire la solution unique :

$$u_{\mu\alpha} = \Delta^{1/2}\,\overline{g}_{\mu\alpha}\,.$$

On obtient $v_{\mu\alpha}$ et $w_{\mu\alpha}$ sous forme de développements en série qui déterminent $v_{\mu\alpha}$ de façon unique et laisse le premier terme de la série $w_{o\mu\alpha}$ arbitraire.

On définit les mêmes fonctions de Green que dans le cas scalaire.

$$\overline{G}_{\mu\alpha} = (8\pi)^{-1} [\Delta^{1/2} \bar{g}_{\mu\alpha} \delta(\sigma) - v_{\mu\alpha} \theta(-\sigma)] .$$

La présence du bi-vecteur de transport parallèle $\bar{g}_{\mu\alpha}$ assure le transport parallèle du vecteur de polarisation du front d'onde le long des géodésiques de longueur nulle. La torsion du vecteur de polarisation produite par la présence du tenseur de Ricci dans l'équation d'ondes et par les effets de diffusion dûs à la courbure de l'espace n'apparaît que *derrière* le front d'onde, ainsi que le montre le terme dit de « queue » $v_{\mu\alpha}$; le terme $v_{\mu\alpha}$ qui décrit cette torsion est donc plus compliqué que le terme scalaire correspondant. La limite pour $x \to z$ de $v_{\mu\alpha}$ est :

$$\lim_{x \to z} v_{\mu\alpha} = \lim_{x \to z} v_{o\mu\alpha} = -\frac{1}{2} \bar{g}_{\mu}{}^{\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} g_{\alpha\beta} R \right) .$$

Cette relation montre que $v_{\mu\alpha}$ ne s'annule généralement pas. On peut établir la relation suivante entre les fonctions de Green bi-scalaire et bi-vectorielle :

$$\overline{G}^{\mu}{}_{\alpha \cdot \mu} = - \overline{G}_{\cdot \alpha}$$

d'où l'on déduit des relations similaires pour les fonctions de Green G^{ret}, G^{adv}, G.

Il est utile d'établir également les relations de réciprocité suivantes :

$$G_{\mu\alpha}(x, z) = - G_{\alpha\mu}(z, x)$$
$$G^{ret}_{\mu\alpha}(x, z) = G^{adv}_{\alpha\mu}(z, x)$$
$$\overline{G}_{\mu\alpha}(x, z) = \overline{G}_{\alpha\mu}(z, x) .$$

FREINAGE DU A LA RADIATION D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP DE GRAVITATION

par le Professeur Bryce S. De WITT

Department of Physics, University of North Carolina, Chapel Hill North Carolina (U.S.A.)

Je voudrais, tout d'abord, exprimer ma reconnaissance aux Professeurs Lichnerowicz et Tonnelat et au Centre National de la Recherche Scientifique pour l'organisation remarquable de ce colloque. Bien que parlant en mon nom personnel, je suis sûr que j'exprime les sentiments de mes collègues américains et de bien d'autres lorsque je dis combien nous sommes heureux d'être à nouveau assemblés dans une réunion internationale, réunion où l'on voit beaucoup de nouveaux visages (nouveaux pour moi, tout au moins) ; et où l'on peut apprécier, de première main, la diversité croissante des intérêts dans le domaine de la Relativité générale. Il est déjà évident que des progrès considérables ont été faits dans de nombreuses directions depuis le congrès de Chapel Hill, il y a deux ans et demi. Le colloque de Royaumont vient donc au bon moment.

Le problème que je désire discuter avec vous aujourd'hui, bien que prenant la forme d'un rapport d'un travail personnel que j'ai récemment terminé avec un de mes étudiants, M. Robert Brehme, est, je crois, d'un intérêt général, car nous nous sommes tous, à un moment ou à un autre, penchés sur ce problème. Le problème est le suivant : *Dans quelle mesure ou dans quel sens le principe d'équivalence s'applique-t-il à la matière chargée ?*

Posons ce problème en termes physiques : imaginons une particule chargée dans le vide à grande distance de toute autre masse. Si l'on applique une force à la particule elle est accélérée, et nous savons par les lois d'électrodynamique classique dans le cadre de la Relativité restreinte — valide dans ces circonstances — que la particule émet une radiation, qui produit, par réaction, un freinage qui s'ajoute à la force d'inertie mécanique. Amenons maintenant la particule au voisinage d'une distribution statique de matière et maintenons-là au repos à un point où le champ statique de gravitation exerce sur la particule une force égale à la force à laquelle la particule était soumise auparavant dans le vide. Bien que la particule subisse la même force dans les deux cas, il serait absurde — n'est-ce pas — de supposer qu'elle émettra une radiation dans le deuxième cas ?

Je suis sûr qu'en ce moment un critique dans l'assemblée s'apprête à dire : « Mais nous savons qu'une charge en mouvement uniformément accéléré n'émet pas de radiation, puisqu'elle ne subit pas de force de freinage tant que son accélération est uniforme. Il n'y a donc pas de contradiction avec le principe d'équivalence ». Donc, pour l'instant, au lieu de continuer dans cette direction, je vais exécuter une manœuvre de flanc, retourner le problème, et imaginer la particule dans un état *sans* accélération.

Si la particule est loin de toute matière, elle se trouve dans un état de mouvement uniforme, dans lequel, évidemment, elle n'émet pas de radiation. Par contre, si la particule s'approche d'un champ de gravitation, la notion de « mouvement non accéléré » se transforme en notion de « mouvement en chute libre ». Est-ce qu'un changement de concept sera responsable pour une émission de radiation ? Si une particule chargée n'émet pas de radiation quand elle est au repos dans un champ de gravitation, est-ce qu'elle s'empêche d'émettre une radiation lorsqu'elle est en chute libre ? Ou bien, est-ce qu'une particule chargée peut être utilisée, en principe tout au moins, comme un être localisé pour distinguer entre les forces d'inertie et les forces de gravitation ?

Intuitivement, il serait raisonable de supposer que la particule chargée émet effectivement une radiation quand elle est diffusée par un champ de gravitation, c'est-à-dire, que le *bremsstrahlung* peut être produit par des forces de gravitation aussi bien que par des forces électromagnétiques. Tel est le problème que M. Brehme et moi-même avons attaqué. Avant de décrire le procédé employé il me faut signaler que l'on triche lorsque l'on propose l'emploi d'une particule chargée pour distinguer localement entre un champ de gravitation et un champ d'inertie. « Particule chargée » veut dire « champ électromagnétique », grandeur qui, pour le moins qu'on puisse dire, n'est pas localisée. Or on sait qu'un champ de gravitation peut être facilement distingué d'un champ d'inertie par des expériences portant sur une région étendue de l'espace, c'est-à-dire, par des expérienecs mesurants des gradients du champ. Dans la théorie de la Relativité générale, les gradients du champ sont exprimés sans équivoque, de manière covariante, par les composantes du tenseur de Riemann. Il ne faut donc pas s'étonner si, quand on tient compte de la réaction due à la radiation, on trouve, dans les équations dynamiques d'une particule chargée en mouvement dans un champ de gravitation, une expression faisant apparaître explicitement le tenseur de Riemann.

Or, le tenseur de Riemann n'apparaît pas. Ceci ne veut pas dire toutefois que le bremsstrahlung n'apparaît pas. Il apparaît. Mais avant de montrer comment il intervient, je vais poser le problème considéré, avec plus de précision.

Nous avons considéré un champ de gravitation sans propriétés dynamiques; la structure géométrique de l'espace-temps a été considérée comme fixe. On n'a pas supposé que les équations d'Einstein dans le vide étaient satisfaites; les résultats sont valables pour une métrique complétement arbitraire. Les calculs ont été conduits d'après le modèle du fameux article de Dirac sur la radiation de l'électron classique. En particulier, de même que les calculs de Dirac ont préservé l'invariance de Lorentz à toutes les étapes, de même nos calculs ont préservé la covariance générale à toutes les étapes. Bien qu'aucun système de coordonnées particulier n'ait été introduit, l'usage des techniques de développements en séries covariantes a permis de réduire au minimum la complexité des calculs. De plus, comme ces méthodes covariantes offrent la possibilité de séparer, et de garder séparés, les différents aspects physiques du problème, il est vraisemblable qu'elles auront une valeur considérable dans d'autres calculs où, par exemple, le champ de gravitation intervient lui-même dynamiquement.

Afin de garder présent à l'esprit les idées physiques conventionnelles, nous sommes partis du lagrangien habituel d'une particule et d'un champ en interaction, qui conduit aux équations dynamiques familières :

$$m_0 \ddot{z}^\alpha = \frac{e}{c} F^\alpha{}_\beta \dot{z}^\beta , \tag{1}$$

$$g^{1/2} F^{\mu\nu}{}_{\cdot\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu . \tag{2}$$

m_0 est la masse « nue » de la particule, z^α ses coordonnées d'espace-temps, et j^μ son quadrivecteur densité de courant. Les points dans l'équation (1) indiquent les dérivées covariantes absolues par rapport au temps propre, et le point dans l'équation (2) la dérivée covariante par rapport à x^ν. g est le négatif du déterminant du tenseur métrique.

Bien que l'équation (1) soit l'équation correcte pour le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique donné sans propriétés dynamiques, et bien que l'équation (2) soit l'équation correcte pour la production d'un champ électromagnétique par une densité de courant donné sans propriétés dynamiques, ensemble, ces deux équations conduisent aux difficultés bien connues que le membre de droite de l'équation (1) n'est pas défini en raison des termes infinis qui apparaissent dans $F^\alpha{}_\beta$ lorsqu'il est calculé à partir de l'équation (2).

Afin d'analyser ces difficultés et, plus généralement, afin d'étudier, de manière covariante, les problèmes intrinséquement non locaux, que pose la présence d'un champ électromagnétique, il est indispensable de faire usage des bi-tenseurs dont M^me^ De Witt nous a donné une excellente introduction. Ainsi, à l'aide des fonctions bi-vectorielles de Green qu'elle a décrite, nous pouvons écrire les potentiels avancés et retardés engendrés par la particule :

$$A^{\pm}_{\mu}(x) = \frac{4\pi}{c} \int G^{\pm}_{\mu\nu'}(x, x')\, j^{\nu'}(x')\, d^4 x' \tag{3}$$

En substituant dans cette équation la densité de courant :

$$j^{\mu} = e\, c \int \bar{\delta}^{\frac{1}{2}}\, \bar{g}^{\mu}{}_{\alpha}\, z^{\alpha}\, \delta^{(4)}(x, z)\, d\mathrm{T} \tag{4}$$

dans laquelle le bi-vecteur de transport parallèle et la bi-densité $\bar{\delta}$ ont été introduits afin de donner à j^{μ} les propriétés correctes de transformation au point x, et en se servant de la forme explicite de la fonction de Green que Madame De Witt nous a donnée, on obtient immédiatement les potentiels covariant de Liénard Wiechert :

$$\mathrm{A}_{\mu}^{\pm} = \mp\, e \left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}\, \bar{g}_{\mu\alpha}\, \dot{z}^{\alpha}}{\sigma_{.\beta}\, \dot{z}^{\beta}} \right)_{\tau=\tau_{\mp}} \mp\, e \int_{\tau_{\pm}}^{\pm\infty} \mathrm{v}_{\mu\alpha}\, \dot{z}^{\alpha}\, d\tau \tag{5}$$

Le premier terme, calculé au temps propre avancé ou retardé, $\tau_{\pm}$, est l'analogue covariant de l'expression familière dans l'espace-temps plan. Le deuxième terme, que j'appelerai le terme de « queue », vient du fait que, contrairement au cas de l'espace-temps plan, les fonctions de Green dans l'espace-temps courbe ne s'annullent généralement pas à l'intérieur du cône de lumière, mais possède une « queue ». C'est le terme de « queue » qui rend la vie intéressante dans un espace-temps courbe et qui, en fin de compte, est responsable pour le *bremsstrahlung.*

Le terme de « queue » est partout fini. Le premier terme, toutefois, devient infini lorsque x s'approche de la ligne d'univers de la particule et rend ambigu le membre de droite de l'équation (1).

Essentiellement la même expression ambigue apparaît aussi dans les membres de droite des équations qui expriment la conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\mathrm{T_P}^{\mu\nu}{}_{.\nu} = \frac{1}{c}\, \mathrm{F}^{\mu}{}_{\nu}\, j^{\nu}\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{T_F}^{\mu\nu}{}_{.\nu} = -\frac{1}{c}\, \mathrm{F}^{\mu}{}_{\nu}\, j^{\nu}\,. \tag{7}$$

$\mathrm{T_P}^{\mu\nu}$ et $\mathrm{T_F}^{\mu\nu}$ sont respectivement les densités d'énergie-impulsion de la particule et du champ :

$$\mathrm{T_P}^{\mu\nu} = m_0\, c \int \bar{\delta}^{\frac{1}{2}}\, \bar{g}^{\mu}{}_{\alpha}\, \bar{g}^{\nu}{}_{\beta}\, \dot{z}^{\alpha}\, \dot{z}^{\beta}\, \delta^{(4)}(x, z)\; d\tau\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{T_F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\, g^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{F}^{\mu}{}_{\sigma}\, \mathrm{F}^{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu}\, \mathrm{F}_{\sigma\tau}\, \mathrm{F}^{\sigma\tau} \right)$$

On voit facilement que les équations (6 et (7) sont obtenues directement par application formelle des équations (1) et (2).

Bien que la loi de conservation de l'énergie-impulsion totale :

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{.\nu} = 0\,, \qquad \mathrm{T}^{\mu\nu} = \mathrm{T_P}^{\mu\nu} + \mathrm{T_F}^{\mu\nu}\,, \tag{10}$$

n'ait donc qu'une valeur formelle, c'est néanmoins cette loi qu'a invoqué Dirac, dans le cas de l'espace-temps plan, pour déduire les équations pondéromotrices corrigées d'une particule chargée, comprenant les termes de réactions dûs à la radiation. Un tel procédé est bien connu des auditeurs de cette assemblée, qui savent la relation intime entre les équations du mouvement et la loi de conservation de l'énergie-impulsion.

L'utilité de la loi de conservation de l'énergie-impulsion réside dans le fait que, grâce à elle, on peut déterminer l'effet, sur la particule, de la réaction dûe à la radiation, en tenant compte de l'échange d'énergie-impulsion entre la particule et le champ. Etant donné que les équations pondéromotrices décrivent le comportement local de la particule, on ne peut les obtenir que si l'on tient à chaque instant compte dans le voisinage immédiat de la particule. Pour ce faire on construit un hypertube de rayon très petit autour de la ligne d'univers de la particule. Puis, afin de pouvoir appliquer la loi de conservation de l'énergie-impulsion, il faut remplacer sa forme différentielle (10) par une forme intégrale.

Dans le cas de l'espace-temps plan, il est bien connu que l'on intègre la divergence dans un volume d'espace-temps, puis que l'on utilise le théorème de Gauss pour remplacer l'intégrale de volume par une intégrale d'hypersurface. Mais, dans le cas présent, nous ne pouvons pas procéder de cette façon, car l'intégrale de volume de $T^{\mu\nu}{}_{.\nu}$ n'est pas un invariant, ni même un vecteur.

Il existe, néanmoins, un procédé pour surmonter cette difficulté qui se présente naturellement, à savoir, la considération de l'intégrale de volume de $\bar{g}_{\mu}{}^{\alpha}\, T^{\mu\nu}{}_{.\nu}$, dans laquelle le bivecteur de transport parallèle est introduit afin de rapporter les contributions du point variable x à l'intégrale à un point fixe z. Cette intégrale est, elle, vecteur local contrevariant en z, et le théorème de Gauss peut être utilisé. Si, maintenant, le point z est pris sur la ligne d'univers de la particule à un temps propre τ, si les temps propres τ_1 et τ_2 des points extrémaux de l'hypertube tendent vers τ, respectivement d'en haut et d'en bas, et si, finalement, le rayon ε de l'hypertube tend vers zéro, on trouve que l'équation

$$\int \bar{g}_{\mu}{}^{\alpha}\, T^{\mu\nu}{}_{.\nu}\, d^4 x = 0\,, \tag{11}$$

où l'intégrale est prise sur l'intérieur de l'hypertube, prend, après application du théorème de Gauss, la forme :

$$m_0\, \dot{z}^{\alpha}\, d\tau + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{c} \int_{4\pi} \bar{g}_{\mu}{}^{\alpha}\, T_F{}^{\mu\nu}\, d\Sigma_{\nu} = 0\,. \tag{12}$$

Le premier terme du membre gauche représente la contribution de la densité d'énergie-impulsion de la particule, et le second terme a son origine exclusivement dans le champ électromagnétique.

Tout le labeur du problème est contenu dans le calcul du deuxième terme. Le domaine d'intégration « 4π » signifie que l'intégrale sur l'élément d'hypersurface $d\Sigma_{\nu}$ ne doit être étendue qu'à l'angle solide. Le problème qui consiste à définir cet élément de surface en fonction du temps propre, des cosinus directeurs, et du rayon de l'hypertube — variables qui permettent d'évaluer analytiquement l'intégrale — est un problème amusant que je n'ai malheureusement pas le temps de présenter ici. La densité d'énergie-impulsion du champ, $T_F^{\mu\nu}$, peut être calculée sur la surface de l'hypertube, au moyen des techniques d'expansion covariantes présentées par Madame De Witt, après que le champ lui-même a été calculé par les potentiels de Liénard-Wiechert. Finalement, nous devons mentionner que le second terme de l'équation (12) est infini à la limite $\varepsilon = 0$. Toutefois, comme tous les calculs ont été conduits de manière covariante, on peut isoler la partie infinie de façon invariante. Il s'avère, bien entendu, que cette partie peut être absorbée par la renormalistion classique familière de la masse,

$$m = m_0 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^2}{2\varepsilon c^2} . \tag{13}$$

La partie vraiment remarquable du calcul consiste en ceci : Dans le développement covariant du terme sous l'intégrale de l'équation (12) on trouve, en plus des termes qui sont présents dans le cas de l'espace-temps plan, de nombreux termes faisant apparaître le tenseur de Riemann, sous sa forme développée aussi bien que contractée. Toutefois, ces termes sont tous de degré impair dans les cosinus directeurs et ne contribuent donc *pas* à l'intégrale étendue à l'angle solide. Les équations pondéromotrices que l'on obtient finalement sont donc les suivantes :

$$m \ddot{z}^\alpha = \frac{e}{c} F^{in\,\alpha}{}_\beta \dot{z}^\beta + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\dddot{z}^\alpha - \frac{1}{c^2} \dot{z}^\alpha \ddot{z}^2 \right)$$
$$+ \frac{e^2}{c} \dot{z}^\beta \int_{-\infty}^{T} f^\alpha{}_{\beta\gamma'} \dot{z}^{\gamma'} (\tau') \, d\tau' , \tag{14}$$

$$f_{\alpha\beta\gamma'} = v_{\alpha\gamma'\cdot\beta} - v_{\beta\gamma'\cdot\alpha} . \tag{15}$$

Le seul trait nouveau et non-familier de cette équation est l'intégrale sur tout le passé de la particule, qui a pour origine la « queue » de la fonction de Green. Mais c'est précisément ce terme qui empêche $\ddot{z}^\alpha = 0$ d'être une solution des équations pondéromotrices lorsque $F^{in\,\alpha}{}_\beta = 0$. Par conséquent, une particule chargée ne se déplacera pas en général le long d'une géodésique même lorsqu'il n'y a pas d'onde électromagnétique entrante.

Vous pouvez maintenant objecter que je n'ai pas vraiment *prouvé* cette dernière proposition. Je n'ai en fait que mis en évidence un terme de « queue ». Je n'ai pas montré qu'il peut en fait être différent de zéro même lorsque $\ddot{z}^\alpha = 0$. Je ne peux que répondre « Vous avez raison ».

Toutefois, je peux présenter des raisons plausibles pour mon affirmation. Tout d'abord, on sait que la fonction de « queue » $f^{\alpha}{}_{\beta\gamma'}$ elle-même en général ne s'annulle pas. En fait, Hadamard a posé comme un problème important la découverte des conditions dans lesquelles cette fonction de « queue » s'annulle. Un certain travail a été fait sur ce problème, mais il ne semble pas exister de classification simple des espaces de Riemann qui donne la réponse. Qu'il suffise de dire que $f^\alpha{}_{\beta\gamma'} \neq 0$ dans la plupart des espaces de Riemann.

Quant au calcul, même approché, de l'*intégrale* où apparaît $f^{\alpha}{}_{\beta\gamma'}$, il demande des moyens plus puissants. A mon avis, une des conditions les plus urgentes pour régler la question est la mise au point d'une méthode pour obtenir une valeur asymptotique approchée de $f^{\alpha}{}_{\beta\gamma'}$ le long d'une géodésique donnée. En attendant, il faut me contenter du fait que je n'ai trouvé, jusqu'ici, aucune évidence dans toutes les équations que j'ai regardée, que l'intégrale s'annulle dans un mouvement géodésique.

Nous avons donc l'image physique suivante : La particule chargée fait de son mieux pour respecter, malgré sa charge, le principe d'équivalence, et localement, le respecte. En l'absence d'un champ électromagnétique entrant, le mouvement de la particule ne dévie d'un mouvement géodésique qu'en raison de l'inévitable intégrale de « queue » étendue à tout le passé de la particule. Physiquement, cette « queue » peut être décrite comme le résultat d'une diffusion, où les bosses de l'espace-temps jouent le rôle de centres diffuseurs, ce qui permet au champ propre de la particule, qui normalement court au devant de la particule, de revenir par derrière la particule d'une façon anormale. Le bremsstrahlung résultant, qui doit être calculé séparément après que l'équation (14) a été résolue, et qui est certainement très faible en raison de la façon détournée dont il apparaît, vient alors de deux sources : 1) directement de la particule elle-même à cause de la déviation de son mouvement par rapport à une géodésique, et 2) du champ de Coulomb statique de la particule, qui peut perdre des plumes lorsqu'il balaye les bosses de l'espace-temps.

Ayant ainsi éclairé le problème d'une particule chargée en mouvement, nous pouvons maintenant retourner à la considération du problème d'une particule chargée au repos dans un champ statique de gravitation. Tout d'abord, il est évident que dans ce cas il n'y a pas de radiation puisque tout est au repos. Cependant, on peut imaginer que le terme de « queue » donne lieu à une masse anormale qui pourrait être observée en comparant, sur une balance à bras égaux, une particule chargée avec une particule neutre dont le paramètre m a la même valeur. Cette masse anormale serait finie et tout à fait distincte de l'énergie propre classique infinie. Toutefois, elle n'apparaîtrait sous forme de masse que dans le cas statique car elle n'aurait pas les propriétés cinématiques d'une vraie masse. C'est-à-dire qu'elle ne se transformerait pas comme une vraie masse en passant de l'état statique à l'état en mouvement.

Ce problème a été étudié également par M. Brehme. En introduisant un champ électrique statique pour maintenir la particule au repos contre la gravité, et, en reprennant le problème, utilisant un potentiel scalaire et la fonction de Green à trois dimensions, il a pu montrer qu'il n'y a *pas* d'anomalie dans la masse et, en fait, que l'intégrale de « queue » est nulle dans ce cas. Remarquons qu'il s'agit ici d'un mouvement non géodésique.

Le principe d'équivalence est donc rigoureusement valide lorsqu'on compare la situation présente avec celle d'une accélération uniforme dans l'espace-temps plan. Ce résultat nous incite à considérer plus profondément la dernière situation. Tout d'abord, remarquons qu'il n'est *pas* correct de dire qu'une particule en mouvement uniformément accéléré n'émet pas de radiation. La formule correcte du champ retardé d'une particule qui a été uniformément accélérée depuis l'origine du temps est vraisemblablement celle donnée par Bondi et Gold. Si l'on entoure la ligne d'univers de la particule par un hypertube et calcule, pour ce champ, le flux d'énergie à travers le tube, on obtient un résultat positif, essentiellement proportionnel au carré de l'accélération. Il convient de remarquer, toutefois, que *cette radiation, loin d'être paradoxale, est, en fait, nécessaire si cette particule doit subir une force qui n'est pas différente de la force subie par une particule neutre ayant le même paramètre de masse m.* Il suffit, en effet, de se rappeler l'origine de la masse d'une particule chargée : elle est le résultat de la superposition de la masse « nue » m_0, masse mécanique infinie et négative, et de la masse de Coulomb $\dfrac{e^2}{2\,\varepsilon\,c^2}$ infinie et positive. Les énergies dues à ces masses se transforment de la même façon dans une transition entre mouvements uniformes, mais lorsque la particule est accélérée, les lignes de force électriques se courbent, et le champ de Coulomb prend de plus en plus de retard. Cette absence de rigidité dans le champ produirait une réduction dans la force avec laquelle la particule réagit contre l'accélération, si ce n'était qu'un champ magnétique est produit simultanément et qu'une radiation est émise par la particule. Le seul problème qui reste est d'expliquer pourquoi un mouvement uniformément accéléré est précisément celui pour lequel une radiation est produite en quantité juste suffisante pour compenser la réduction dans la force de réaction produite par le retard dans le champ. La seule réponse que l'on puisse donner est de renvoyer aux équations elles-mêmes et de voir ce qu'elles disent. Mais il est intéressant de noter que dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, et dans ce cas seulement, le champ de la particule semble toujours être le même dans le système de référence instantanément au repos de la particule. Une situation analogue existe évidemment pour la particule au repos dans un champ statique de gravitation et la correspondance est donc complète.

Les résultats présentés ici, étant entièrement classiques, ne touchent évidemment pas au problème de l'influence que les phénomènes quantiques peuvent avoir sur la possibilité de vérifier le principe d'équivalence. De plus, il n'a été fait aucune considération du problème du freinage dû à la radiation *gravitationnelle* qui apparaît lorsqu'on étudie la situation plus conforme à la réalité où l'on considère les propriétés dynamiques du champ de gravitation au même titre que celles du champ électromagnétique et où l'on tient compte de ce que la métrique est en fait singulière au point où est la particule. En terminant, je voudrais signaler que ces deux problèmes sont à l'étude et que les fonctions de Green covariantes y jouent un rôle important. Nous projetons aussi d'étudier des problèmes dans lesquels ces fonctions serviront à calculer la densité d'énergie-impulsion induite dans le vide d'un champ de matière quantifié par une métrique donnée. A mon avis, à l'avenir, nous utiliserons ces fonctions de plus en plus souvent.

DISCUSSION

Intervention du Dr. P. Havas

1) The mathematical apparatus presented is very beautiful and of great importance. It is, however, an entirely different question if the example presented is a proper application of this apparatus. Even though Dr. De Witt did not use the word, his calculation is intended to apply to a test particle, as he considers a fixed background metric. But a charged test particle must be considered as the limit of vanishing charge and mass and for such a limit it is certainly not consistent to keep the « tail term ». At present, especially after some discussions with Dr. Tulczyjew, I am inclined to believe that even the ordinary radiation terms should not be included.

Furthermore, it seems to me that a calculation of this type can not be consistent, if the field equations are not taken into account; only the energy equation was used, but not the field equations. And how can one expect to be able to conclude anything about the principle of equivalence, if one does not satisfy the field equations ?

I believe that *any* consistent calculation of a *local* problem (including the form of the equations of motion) will necessarily show that the principle of equivalence is satisfied. For *global* questions (including radiation, on a consideration of the entire motion) the principle of equivalence has no meaning.

2) First, let me clarify : I am certain that in the equations of motion for *comparable* masses there *will* be « tail terms ». As a matter of fact, in the equations of motion developed with the « fast » approximation method it has been found by Dr. Goldberg and myself, and by Drs. Plebańiski and Bertotti, that such terms appear in the third order equations.

Concerning the question of gravitational radiation of test particles. I had one time did a calculation which led to the appearance of gravitational radiation damping terms in the equations of motion of test particles. However, I am convinced that these terms are entirely spurious.

WORK AT PURDUE UNIVERSITY ON THE INTERACTION OF GRAVITATION AND FERMIONS *

by Prof. Dr. F. J. BELINFANTE

Dept. of Physics, Purdue University, Lafayette, Indiana (U.S.A.)

RÉSUMÉ

Nous supposons une description de Heisenberg avec des vecteurs d'état indépendants du système de coordonnées ou de la position de l'origine. Des transformations unitaires U conduisent de cette description à la description d'interaction ou à celle de Schrödinger. U peut dépendre d'une surface du genre espace σ et peut-être du système de coordonnées utilisé sur celle-ci, et satisfera une certaine équation de Schrödinger généralisée. De la forme et de l'interprétation de cette équation de Schrödinger résulte la « condition d'intégrabilité » que doit satisfaire le tenseur hamiltonien $\mathcal{H}_\mu{}^\nu$ qui y figure, pour que U ne dépende pas des surfaces σ intermédiaires ou du système de coordonnées sur celles-ci. Pour l'équation de Schrödinger de la description d'interaction, la validité d'une condition d'intégrabilité possible et la non-validité d'une autre indiquent dans le cas des théories covariantes lorentziennes la plausibilité ou l'impossibilité de l'interprétation concevable de l'équation de Schrödinger. Nous concluons que le vecteur d'état de la description d'interaction devrait être invariant dans une « translation » spatiale du système de coordonnées sur σ.

The ultimate goal of our work at Purdue University is an investigation to what extent it is possible in the general theory of relativity to construct the analogue of what in Lorentz-covariant quantum field theory is the interaction picture. The importance of the interaction picture is that it allows us to differentiate between the absence of negative electrons and the presence of positive electrons.

So far, our work has been of a preliminary nature. In the theory we have in mind, a number of problems must be solved. One is, of course, the influence of the constraints on the quatization. To a great extent one can avoid this problem by the procedure which in the Chapel Hill conference I called « muddification » : In the manner published in the relativity issue of the *Reviews of Modern Physics* [vol. 29, No. 3, pp. 518-546, July, 1957], one adds terms to the Lagrangian, so-called « mud »

(*) Supported in part by the National Science Foundation.

terms, which are covariant only under a restricted group of transformations which leave certain coordinate conditions and conditions on the Vierbein field and a gauge condition invariant. The gauge condition is essentially the Lorentz condition. This procedure in general relativity theory does to the theory of gravitation, what FERMI's treatment did to quantum electrodynamics : it eliminates the constraints and it makes conventional quantization possible. However, the problem of finding « true variables » would remain. This is the problem of finding what functionals of the variables have a physical meaning.

DIRAC not so long ago made some progress in this direction [P. A. M. DIRAC, *Proceed. Roy. Soc. A,* **246,** 333 (1958), and *Physical Review Letters,* **2,** 368 (1959)] and pointed out that by adding a certain divergence to the Lagrangian one can make the primary coordinate constraint functions directly equal to the canonical momenta conjugated to the field components $g_{\mu 0}$ with subscripts. In our previous work, we have used the 16-component Vierbein field as our independent variables, and we have considered the $g_{\mu\nu}$ field as functions of this Vierbein field. We used in that work a Vierbein field with a superscript world coordinate index. We find now that in the Vierbein formalism similar simplifications are possible as in the metric formalism, if one uses a Vierbein field with the world coordinate index as a subscript. In this case, addition to the Lagrangian of the same divergence as used by DIRAC (and also by DE WITT) will make the canonical conjugates of the Vierbein components with subscript world coordinate index zero equal to the primary coordinate constraint functions. Also, before the so-called « canonization », three of the Vierbein constraints (due to invariance under Vierbein rotations) now take the simple form

$$p^{(\alpha)n}\, h^0_{(\alpha)} = 0, \quad \text{where} \quad n = 1, 2, 3, \quad p^{(\alpha)n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{(\alpha)n,0}}, \quad \text{and tacit} \quad \sum_{\alpha=0}^{3} .$$

(The other three Vierbein constraints still contain matter terms.)

The « canonization » is desirable because the introduction of the DIRAC electron matter terms in the Lagrangian gives rise to second-class constraints as a consequence of the relations between ψ^* and the canonical conjugate of ψ. DIRAC deals with such second-class constraints by introducing Modified Poisson Brackets. It is then convenient to introduce new pairs of canonical conjugates so that ordinary POISSON brackets with respect to the new variables equal the modified POISSON brackets with respect to the old variables. The new variables then can be quantized conventionally. The procedure of finding the new variables we have called « canonization » of the theory in our paper in the *Reviews of Modern Physics,* in which we solved this problem for the DIRAC electron field. The canonization, however, affects some of the momenta canonically conjugated to the Vierbein components. Luckily, the canonical momenta which represented the *coordinate* constraints are *not* affected, so that *these* constraints keep their simple form. On the other hand, after canonization *all six* of the *Vierbein* constraints contain matter terms.

DIRAC has also pointed out (*loc. cit.*) that the Hamiltonian operator for displacement in the time direction should take the standard form

$$\mathrm{H} = \int d^3 x \left(\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{L}}}{\sqrt{-g^{00}}} + g_{r0}\, e^{rs}\, \mathcal{H}_s \right),$$

where $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}$ and $\mathcal{H}_s$ are independent of the $g_{\mu 0}$. The italic indices run from 1 to 3; the e^{rs} is the inverse of the 3×3 matrix g_{rs}. The integral is over the surface $x^0 = \text{constant}$. DIRAC goes on to derive explicit formulas for $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}$ and for $\mathcal{H}_s$, starting from the canonical definition of the Hamiltonian density derived from his new Lagrangian. His results, however, are not entirely complete. Besides not giving explicit expressions for the matter terms, he also loses a surface term in the course of his derivation. Consequently, the integrand in the standard-form expression for H differs by a 3-divergence from the original canonical hamiltonian density. An explicit calculation shows that the standard-form integrand with which he ends up is really not the canonical energy density that follows from his Lagrangian, but it is the Lorentz energy density. As you may remember, Lorentz proposed to use for total energy density tensor the expression

$$\mathrm{L}_\mu^{\ \nu} = \tau_\mu^{\nu} + 2\mathrm{C}\left(\mathfrak{R}_\mu^{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^{\nu}\,\mathfrak{R} \right), \qquad \left(\mathrm{C} = \frac{c^4}{16\pi\,\mathrm{G}} \right),$$

where $\tau^{\mu\nu}$ is the symmetric matter tensor. This $\mathrm{L}_\mu^{\ \nu}$ is, at least weakly, conserved, for the simple reason that it weakly vanishes on account of the field equations. The importance of the Lorentz energy density is not only that its integral over space gives DIRAC's standard-form hamiltonian; in addition to that, the equations $\mathrm{L}_\mu^{\ 0} = 0$ are not only linear combinations of the field equations $\mathrm{L}^{\lambda 0} = 0$ which are obtained by varying $g_{\lambda 0}$ in the Lagrangian, but at the same time these equations, with $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,0}}$ in the proper places replaced by p, are the secondary coordinate constraints (*). This is true including all matter terms and not neglecting any terms of the form of a 3-divergence or of a curl in 4-space.

The many other expressions for an energy density (quasi) tensor that are found in the literature differ from the LORENTZ tensor $\mathrm{L}_\mu^{\ \nu}$ by simple curls of 3-index quantities sometimes called « superpotentials. » So, if $\mathrm{X}_\mu^{\ \nu}$ is one of those suggested energy density quasi tensors, then

$$\mathrm{X}_{\mu}^{\cdot\nu} - \mathrm{L}_{\mu}^{\cdot\nu} \equiv \Delta_\mu^{\cdot\nu} = \mathrm{A}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda}{}_{,\lambda},$$

where the superpotential A is antisymmetric according to $\mathrm{A}_\mu^{\cdot\nu\lambda} = -\mathrm{A}_\mu^{\cdot\lambda\nu}$. Consequently, $\Delta_{\mu}^{\cdot\nu}{}_{,\nu} = 0$. This strong equation represents the mathematical triviality that the divergence of a curl vanishes. Some people like to call this triviality a « strong conservation law », as if $\Delta_\mu^{\cdot\nu}$ were an

* In the notation of *Revs. Mod. Physics*, **29**, 518 (1957) one finds

$$\mathrm{L}_0^{\ 0} = -\chi_0 - \sum_k \mathrm{B}_k \Phi^k + \mathrm{O}_2\,; \qquad \mathrm{L}_s^{\ 0} = -\chi_s\,.$$

energy density tensor itself, rather than the difference between two candidates for being the energy density tensor. The reason for this point of view is that the LORENTZ tensor L_μ^ν weakly vanishes, so that, at Least weakly, $X_\mu^{\cdot\nu} = \Delta_\mu^{\cdot\nu}$. For the same reason, the total energy-momentum four-vector is weakly equal to a 2-dimensional surface integral,

$$P_\mu = \int d^3 x \, X_\mu^{\cdot 0} = \int d^3 x \, A_\mu^{\cdot 0n}{}_{,n} = \iint d^2 S_n \, A_\mu^{\cdot 0n},$$

which for a finite static universe in absence of gravitational radiation can easily be evaluated using at spacelike infinity the static exterior SCHWARZSCHILD solution. The result depends on the choice of $X_\mu^{\cdot\nu}$, that is, on the rather arbitrary choice of the antisymmetric quantity $A_\mu^{\cdot\nu\lambda}$. Many people in the past have disliked considering LORENTZ's expression $L_\mu^{\cdot\nu}$ an energy density tensor because it would always make $P_\nu = 0$, and they claim that an energy or momentum that is *always* zero is a physically rather useless quantity.

Nevertheless, the expression L_μ^{ν} might still be useful as a hamiltonian density. Remember that in Dirac's sense, it is only weakly zero. The usefulness of a Hamiltonian which weakly vanishes is well known from special-relativistic point mechanics. Though the hamiltonian may have a zero value, it need not vanish as a function of the *q's* and *p's* considered as independent variables, and therefore it may have non vanishing Poisson brackets or commutators with non-conserved (non-« true ») quantities, thus helping to single out the latter.

Here is a list of various energy density quasi tensors which have been proposed in the past. I add the calculated values of the corresponding total energy for the case of a finite universe at rest without radiation, using the conventional relation between the constant in the exterior SCHWARZSCHILD solution and the « mass » M at the center.

LORENTZ :

$$L_\mu^\nu = \tau_\mu^\nu + r_\mu^\nu \; ; \quad r_\mu^\nu = 2Cj\left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R\right) ; \quad [j = \sqrt{-g}].$$

EINSTEIN :

$E_\mu^{\cdot\nu} = \tau_\mu^\nu + t_\mu^{\cdot\nu}$; $t_\mu^{\cdot\nu}$ is canonically derived from

$$\mathcal{L}_g = C\,\{\Gamma^\beta|^\alpha_\sigma \, \Gamma_\alpha|^\sigma_\beta - \Gamma^\beta|^\sigma_\sigma \, \Gamma_\alpha|^\alpha_\beta\}$$

BERGMANN :

$B_\mu^{\cdot\nu} = \mathfrak{C}_\mu^{\cdot\nu} + t_\mu^{\cdot\nu}$; $\mathfrak{C}_\mu^{\cdot\nu}$ is canonically derived from the matter Lagrangian $\mathcal{L}_m$ using ordinary (non-covariant) derivatives, of matter variables as well as of gravitational variables.

PALATINI :

$P_\mu^{\cdot\nu} = \tau_\mu^\nu + \mathfrak{p}_\mu^{\cdot\nu}$; $\mathfrak{p}_\mu^{\cdot\nu}$ is derived canonically from the first-order Lagrangian

$$\mathcal{L}_p = C\,\mathfrak{g}^{\rho\sigma}\,[\Gamma^\alpha_{\rho\sigma,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\rho\alpha,\sigma} + \Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} - \Gamma^\beta_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}].$$

MØLLER :

$M_{\mu}^{\cdot\nu} = \tau_{\mu}^{\nu} + \mathfrak{m}_{\mu}^{\cdot\nu}$; $\mathfrak{m}_{\mu}^{\cdot\nu}$ defined below by giving its difference from one of the other quasi tensors.

DIRAC :

$D_{\mu}^{\cdot\nu} = \mathfrak{C}_{\mu}^{\cdot\nu} + \mathfrak{t}_{\mu}^{*\cdot\nu}$; $\mathfrak{t}_{\mu}^{*\cdot\nu}$ is canonically derived from

$$\mathfrak{L}_g^* = \mathfrak{L}_g + C\left(\frac{\mathfrak{g}^{00}_{,0}\, g^{r0}}{g^{00}}\right)_{,r} - C\left(\frac{\mathfrak{g}^{00}_{,r}\, g^{r0}}{g^{00}}\right)_{,0}.$$

Notice that $\mathfrak{t}_0^{*\mu} = \mathfrak{t}_0^{\cdot\mu}$, and notice that DIRAC's standard-form hamiltonian is not $-\int d^3x\, D_0^{\cdot 0} (= Mc^2)$, but is $-\int d^3x\, L_0^{\cdot 0} (= 0)$.

The corresponding energy values are :

$$-\int L_0^{\,0}\, d^3x = 0\ ;$$

$$-\int E_0^{\cdot 0}\, d^3x = -\int B_0^{\cdot 0}\, d^3x = -\int M_0^{\cdot 0}\, d^3x = Mc^2\ ;$$

$$-\int P_0^{\cdot 0}\, d^3x = \frac{1}{2} Mc^2\ ;\quad -\int D_0^{\cdot 0}\, d^3x = Mc^2.$$

The differences of these quasi density tensors are the following curls :

$$E_{\mu}^{\cdot\nu} - B_{\mu}^{\cdot\nu} = \tau_{\mu}^{\nu} - \mathfrak{C}_{\mu}^{\cdot\nu} = F^{\rho\cdot\nu}_{\cdot\mu,\rho}\,,$$

where $F^{\rho\cdot\nu}_{\cdot\mu}$ is the tensor introduced by BELINFANTE (*Physica,* 1939-1940) and used by him for putting $\tau_{\mu}^{\cdot\nu} = \mathfrak{u}_{\mu}^{\cdot\nu} + \nabla_{\rho} F^{\rho\cdot\nu}_{\cdot\mu}$, where $\mathfrak{u}_{\mu}^{\cdot\nu}$ is canonically derived from the matter Lagrangian using *covariant* derivatives.

$$E_{\mu}^{\cdot\nu} - L_{\mu}^{\cdot\nu} = \mathfrak{t}_{\mu}^{\cdot\nu} - \mathfrak{r}_{\mu}^{\nu} = h_{\mu}^{\cdot\nu\lambda}{}_{,\lambda}\,,$$

$$P_{\mu}^{\cdot\nu} - L_{\mu}^{\nu} = \mathfrak{p}_{\mu}^{\cdot\nu} - \mathfrak{r}_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2}\mathcal{B}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda}{}_{,\lambda}\,,$$

$$M_{\mu}^{\cdot\nu} - L_{\mu}^{\cdot\nu} = \mathfrak{m}_{\mu}^{\cdot\nu} - \mathfrak{r}_{\mu}^{\nu} = \mathcal{B}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda}{}_{,\lambda}\,.$$

The superpotentials are here given by :

$h_{\mu}^{\cdot\nu\lambda} = C\, j^{-1} g_{\mu\alpha}\, H^{[\alpha\beta][\nu\lambda]}{}_{,\beta}$ with $H^{[\alpha\beta][\nu\lambda]} = \mathfrak{g}^{\alpha\nu}\mathfrak{g}^{\lambda\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\lambda}\mathfrak{g}^{\nu\beta}$;

$\mathcal{B}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda} = 2\,C\, j\, (\Gamma^{\lambda}|_{\mu}^{\nu} - \Gamma^{\nu}|_{\mu}^{\lambda})$.

They are interrelated by $h_{\mu}^{\cdot\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,[\mathcal{B}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda}\mathcal{B}_{\alpha}^{\cdot\alpha\nu} - \delta_{\mu}^{\nu}\mathcal{B}_{\alpha}^{\cdot\alpha\lambda}]$.

Before we can hope to understand the interaction picture in general relativity theory, we should first understand the simpler Schrödinger picture. In the Heisenberg picture, the state vector supposedly is an invariant constant, if we ignore the reduction of the state vector following the realization of new experimental knowledge. The reason why we want to consider the Heisenberg state vector a constant invariant is because we want to make the q-numbers in the Heisenberg picture satisfy the same transformation laws and the same equations of motion as do their expectation values which we observe.

When we say that the Heisenberg state vector is invariant, we do not mean that the wave function of a two-electron state in the Heisenberg picture would not change if one transforms from the configuration space representation to the momentum space representation, or if we apply a trivial gauge transformation by a constant phase factor $e^{i\alpha}$, or if in the configuration space representation we translate the origin by a constant amount, or if we perform some more complicated transformation of our frame of reference. Also, if the Heisenberg picture is identified with the Schrödinger picture at a chosen fixed time, then for one and the same representation in the Schrödinger picture we still could identify the Heisenberg representation with it at *any* chosen constant time, or we could have identified it with a Schrödinger representation in a different (possibly moving) frame of reference. The Heisenberg state vector would not be invariant at all under all such transformations from one representation to another.

What we meant by saying that the Heisenberg state vector is a constant invariant was simply the following. Each of the transformations just mentioned is a unitary transformation applied to the state vector. We will always couple such unitary transformations with corresponding transformations of all q-numbers in such a way that matrix elements and expectation values remain invariant. Thus having neutralized the effect of these transformations of the state vector, we need no longer keep mentioning explicitly these now harmless transformations. This is all we meant when we said that the Heisenberg state vector is an invariant constant.

The Schrödinger state vector is different. Imagine a set of spacelike surfaces σ labeled by a time coordinate t which we often like to identify with the world time coordinate x^0. The Schrödinger state vector is to depend explicitly on t, that is, on σ. It is related to the Heisenberg state vector by a unitary transformation,

$$\Psi[\sigma] = \mathrm{U}[\sigma]\,\Psi_{\mathrm{H}}\,, \qquad \text{or} \qquad \Psi(t) = \mathrm{U}(t)\,\Psi_{\mathrm{H}}.$$

This $\mathrm{U}[\sigma]$ is to be regarded as a q-number, supposedly expressible in terms of field variables on σ. It satisfies a Schrödinger equation :

$$i\hbar c\,\delta\,\mathrm{U}[\sigma] \doteq \mathrm{E_S}\,\mathrm{U}[\sigma] = \mathrm{U}[\sigma]\,\mathrm{E_H}\,,$$

where E should be the operator generating the timelike translation from $\sigma(t)$ to $\sigma(t + \delta t)$, and where the subscripts S and H refer to the picture in which E as a q-number is taken. The problem is to find E.

Here enters at once the question whether $\mathrm{U}[\sigma]$ really should be a function of t only, or whether it also should depend on the spatial parametrization on this surface σ. A study of this question forces us to distinguish between at least two types of Schrödinger pictures in general relativity theory, which I will distinguish as the coordinate type and the surface type. In the former, the q-numbers are made to satisfy the equation of motion $\partial_0 q_{cs} = 0$, where the subscripts cs denote the coordinate Schrödinger picture. Obviously a picture with this property must depend on the direction of the time axis, t, that is, the direction of the world lines connecting on the successive surfaces points with equal spatial parameters, u^1, u^2, u^3. We can write the Schrödinger operator E_c

for the coordinate Schrödinger picture in a covariant form by keeping the world coordinates independent of the parameters t and u, by writing

$$\mathrm{E}_c = -\int d\sigma_\nu \, \xi^\mu \, \mathcal{H}_\mu^{;\nu} ,$$

where the ξ^μ is the field, on σ, of infinitesimal four-vectors pointing in the direction ($\mathbf{u} =$ constant) from $\sigma(t)$ to $\sigma(t + \delta t)$. In a frame of reference with $x^0 = t$, $x^r = u^r$, this equation simplifies by $d\sigma_\nu = \delta_\nu^0 \, d^3 x$ and $\xi^\mu = \delta_0^\mu \delta t$ to $\mathrm{E}_c = -\delta t \int \mathcal{H}_0^{;0} \, d^3 x$. In order to make $\partial_t q_{cs} = \partial_0 q_{cs} = 0$ in this frame of reference, it suffices to take $-\int \mathcal{H}_0 \, d^3 x$ equal to any of the expressions for the total energy; but for the sake of the invariance of the general formula for E_c it is preferable to take for $\mathcal{H}_\mu^{;\nu}$ the LORENTZ density $\mathrm{L}_\mu^{;\nu}$, as with any of the quasi tensors it would be necessary to specify that the formula for E_c could not be believed in world frames different from the parametrization frame.

In the case of a surface Schrödinger picture, our first concern is to keep the transformation $\mathrm{U}[\sigma]$ from Ψ_{H} to $\Psi_{\mathrm{S}}[\sigma]$ a function merely of the surfaces chosen, and independent of their parametrization. The only dependence on this parametrization thus left in $\Psi_{\mathrm{S}}[\sigma]$ is whatever dependence on it was already hiding in Ψ_{H}. If the Schrödinger displacement operator E_s for this case is to have a similar form as E_c, it is obvious that we cannot allow an identification of the ξ^μ field with four-vectors $\mathbf{u} =$ constant. We have to choose then for ξ^μ something that depends merely on the surfaces chosen. This may be achieved by taking for the ξ^μ the four-vectors which point from $\sigma(t)$ to $\sigma(t + \delta t)$ along the orthogonal trajectories of the set of surfaces σ. So, if n^μ is the normal on σ (normalized by $n_\mu n^\mu = -1$ with $n^0 > 0$, so that the surface elements $d\sigma_\nu$ may be given in terms of an invariant surface element $d\mathrm{S}$ by $d\sigma_\nu \sqrt{-g} = -n_\nu \, d\mathrm{S}$), and if ξ is the (variable) absolute length $[-dx_\mu \, dx^\mu]^{1/2}$ measured between consecutive surfaces along the n^μ direction, then we may choose $\xi^\mu = n^\mu \xi$, and the Schrödinger displacement operator for the surface Schrödinger picture becomes :

$$\mathrm{E}_s = -\int \mathcal{H}_\mu^{;\nu} \, \xi \, n^\mu \, d\sigma_\nu = \int \mathrm{H}_{\mu\nu} \, n^\mu n^\nu \xi \, d\mathrm{S} ,$$

where for the sake of invariance $\mathrm{H}_{\mu\nu} + \mathrm{H}_{\nu\mu}$ should be really a tensor and not just a quasi tensor. This may suggest taking for $\mathcal{H}_\mu^{;\nu}$ again the Lorentz density $\mathrm{L}_\mu^{;\nu}$, in particular because it makes the coordinate and the surface picture coincide for the special case of time axes perpendicular to the $t =$ constant surfaces as in Lorentz-covariant theories. A disadvantage of this choice is that for variable ξ this E_s does not generate merely a displacement along $\xi^\mu = n^\mu \xi$, so in general $n^\mu \partial_\mu q_{\mathrm{S}}$ will not vanish with this choice of E_s.(1) One could therefore think of

(1) One finds, for arbitrary $\mathrm{F}(q, p)$:

$$[\mathrm{F} \, ; \, -\int d^3 x \, \xi^\mu \, \mathrm{L}_\mu{}^0] = \xi^\mu \, \mathrm{F}_{,\mu} - \delta\mathrm{F} + \int d^3 x \, \xi^\mu{}_{,0} \, [\mathrm{F} \, ; \varphi_\mu] ,$$

$$\text{with} \quad \varphi_\mu = p_\mu^{(\alpha)} \, h^0_{(\alpha)} - \mathrm{P}^0 \, \mathrm{A}_\mu + C \, (g^{0s} \delta_\mu^0 - {}^{00} \delta_\mu^s)_{,s} .$$

Here, $[\, ;]$ are modified P. B., and $\delta\mathrm{F}$ is the infinitesimal coordinate transformation of F and is linear and homogeneous in $\xi^\alpha{}_{,\beta}$.

another surface-type Schrödinger picture in which E_s is chosen in such a way as to make $n_\mu (q_S)_{,\mu} = 0$. I have not had time yet to figure out what choice of E_s would do *this* job (2); it may have to depend on derivatives of ξ along the surface σ.

If we choose the initial surface σ as a surface $x^0 =$ constant, we get $n^\mu = - f g^{0\mu}$ with $f = 1/\sqrt{-g^{00}}$, and $E_s = + \int f \mathcal{H}^{00} d^3 x$. If also the next surface is $x^0 =$ constant, so that $\xi = f \delta t$, our Schrödinger operators $E/\delta t$ for $\mathcal{H}_\mu^{;\nu} = L_\mu^{\nu}$ become:

$$\left(\frac{E_c}{\delta x^0}\right) = - \int L_0^{;0} d^3 x = \int d^3 x \, (f \mathcal{H}_L + g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_s) ,$$

$$\left(\frac{E_s}{\delta x^0}\right) = \int \frac{L^{00}}{(-g^{00})} d^3 x = \int d^3 x \, f \mathcal{H}_L .$$

Having written down the operators for the two Schrödinger equations, we may ask now about integrability of these equations. By integrability we mean that the state vector $\Psi[\sigma]$ in either case shall depend only on σ and possibly its own parametrization, but not on the intermediate surfaces (or their parametrization) by which σ is reached from some earlier surface σ_0.

In the coordinate Schrödinger picture, we should obtain the same final $\Psi[\sigma]$ if we end up on σ with the same parametrization (on which $\Psi_c[\sigma]$ would depend). In the surface Schrödinger picture, we do not care about the parametrization on σ.

The two integrability conditions are the following:

(1) For the coordinate Schrödinger picture:

$$\int d^3 x \, (s \, t_{,r} - t \, s_{,r}) \, \mathcal{H}_0^{;r} = \int d^3 x \int d^3 x' \, s(x) \, t(x') \, [\mathcal{H}_0^{;0}(x) ; \; \mathcal{H}_0^{;0}(x')] .$$

(2) For the surface Schrödinger picture:

$$\int d^3 x \, (s \, t_{,r} - t \, s_{,r}) \, T^r = \int d^3 x \int d^3 x' \, s(x) \, t(x') \, [W(x) \; ; \; W(x')] ,$$

$$\text{with } T^r = 2 \mathcal{H}^{00} g^{r0}/g^{00} - \mathcal{H}^{0r} - \mathcal{H}^{r0} \text{ and } W = f \mathcal{H}^{00} .$$

Here, [;] denotes $(i \hbar c)^{-1} \times$ the commutator, for which we assumedly may write the modified Poisson bracket instead. The integrations are all over the initial surface $x^0 =$ constant, on which s and t are two arbitrarily chosen functions.

If we choose $\mathcal{H}_\mu^{;\nu} = L_\mu^{\nu}$, then $\mathcal{H}_0^{;\mu}$, $\mathcal{H}^{0\mu}$, T^r, and W all weakly vanish because of the constraints, and since KENNEDY has shown [*Reviews of Modern Physics,* **29**, 528-529 (1957)] that also their modified Poisson bracket are linear combinations of constraint functions, it follows that both integrability conditions are satisfied at least weakly. This is not very surprising, because, weakly speaking, our two Schrödinger equations both make the state vector change with time by amounts that vanish weakly.

(2) One needs an operator E_s such that, for arbitrary F,

$$[F ; E_s] = \xi^\mu F_{,\mu} \equiv n^\mu F_{,\mu} \xi .$$

It might be thought that the interaction picture is obtained from the Heisenberg picture by a similar kind of a Schrödinger equation but changing $\mathcal{H}_{\mu}^{;\nu}$ from $L_{\mu}^{;\nu}$ into its properly defined « interaction part », possibly using the first-order Palatini formalism (ARNOWITT & DESER, *Physical Review*, **113**, 745 (1959)] for separating free-field effects from interaction effects. As the interaction operator will not vanish weakly, the integrability conditions will be less trivial.

In the limit of flat space, our theory of gravity interacting with matter should go over into the conventional formalism of Lorentz-covariant field theory of matter alone. Now it is important to note that the two integrability conditions given above will differ in this limit by a factor 2 in the left-hand member, where the coordinate picture has $\mathcal{H}_{0}^{;\nu}$, while the surface picture in the flat-space limit has in $-\mathcal{H}^{0r}-\mathcal{H}^{r0}$ twice as much, because these tensors are symmetric.

Therefore one will want to know *which* of these two integrability conditions has been satisfied in the existing Lorentz-covariant theories *of the interaction picture* for fields with a non-scalar interaction operator. In all cases known to me, this always has been the condition (2) of the *surface* picture *.

The cases which I have in mind are the one of the Proca field [*Phys. Rev.*, **76**, 66 (1949)], of gauge-independent quantum electrodynamics [*Phys. Rev.*, **84**, 541 (1951)], and of the self-consistent linear theory of gravitation [J. S. SWIHART, Ph. D. thesis, Purdue University, (1954)]. In all of these cases, it was assumed that the same final state vector would be obtained if for the interaction operator density one would use the $\mathcal{H}^{0'0'}$ component of an interaction tensor $\mathcal{H}^{\mu\nu}=\mathcal{H}^{\nu\mu}$, in a frame of reference with the $x^{0'}$ axis normal to the surface σ, and that this equality of final state vector existed notwithstanding the fact that, in the case considered proceeding from σ to σ'^* via σ' with these normal time displacements would yield equality of spatia parameters (correspondence of spatial origins) between the points 0 on σ and $0'^*$ on σ'^*, but via σ^* it would yield a similar correspondence between 0 and $0^{*\prime}$. As $0'^*$ and $0^{*\prime}$ are spatially separated by a second-order infinitesimal distance of the kind not neglected in the approximation considered, this means that in these papers the independence of $\Psi[\sigma'^*]=\Psi[\sigma^{*\prime}]$ with respect to the location of the spatial origin was tacitly assumed. This corresponds to our present surface picture. If we had wanted to find a coordinate picture, we should have used as Schrödinger operator not the $\mathcal{H}^{0'0'}$ component of the interaction tensor, but its $-\mathcal{H}_{0}^{\;0'}$ component, with the unprimed x^0 axis in the world time direction and only one index $0'$ referring to the normal direction.

In order to satisfy the integrability condition (1) of the coordinate picture, however, one is forced to use a different interaction tensor. For

* P. S. — We have later found that, in these same theories, the Schrödinger equation of the *Schrödinger* picture satisfies the integrability condition (1) of the *coordinate* picture !

instance, in the two cases of the Proca field and of gauge-independent quantum electrodynamics, for compensating the missing factor 2 in the left-hand member of the integrability condition, one must double the term in the interaction operator corresponding to the interaction of the charge field upon itself. In the quantum electrodynamical case, this is the Coulomb interaction term. For the surface interaction picture, the correct interaction operator of the Lorentz-covariant theory was

$$\mathbf{W}_s = \mathbf{E}_{||}^2/8\pi + \mathbf{E}_{||} \cdot \epsilon_\perp /4\pi - \alpha_\perp \cdot \mathbf{j}\,,$$

with

$$\alpha_\perp \equiv \mathrm{curl} \int d^3x'\, \mathbf{B}(x')/4\pi r$$

and

$$\mathbf{E}_{||} \equiv - \nabla \int d^3 x'\, \rho(x')/r\,.$$

This operator satisfied the integrability condition (2) for the surface picture, and it properly transformed away the interaction from the field equations in the interaction picture. For satisfying the integrability condition (1) for the coordinate picture, with origin-dependent state vector, obtained by a Schrödinger equation with $\xi^\mu = \delta_0^\mu\, \delta t$, we would have to double the part of $\mathcal{H}_\mu^{\;\nu}$ that gives rise to the left-hand member of the integrability condition. This turns out to be the Coulomb term, so that for integrability we are in that case forced into using

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{E}_{||}^2/4\pi + \mathbf{E}_{||} \cdot \epsilon_\perp /4\pi - \alpha_\perp \cdot \mathbf{j}\,.$$

However, because this operator contains twice too much Coulomb interaction, the unitary transformations $\mathrm{U}[\sigma]$ which solve the Schrödinger equation with the interaction operator $\mathbf{W}_c$ will not transform away the Coulomb interaction terms from the Dirac equation for the electron! Similar troubles arise in the Proca case.

Thus we see that, if we want to define interaction pictures in which the q-number field equations become independent of interactions, then we must in some way avoid making the $\mathrm{U}[\sigma]$ origin-dependent, so that in their Schrödinger equation in general-relativistic notation we should use $\xi^\mu = n^\mu\, \xi$ rather than vectors ξ^μ connecting points with equal space parametrization. To some extent, the parametrization-independent surface picture is more satisfactory than the coordinate picture, as there is something nice in having $\Psi[\sigma]$ describe a state on σ without fussing about the parametrization on σ. I must say, though, that I have some trouble myself in trying to envisage how such a description should be given explicitly. It means describing by $\Psi[\sigma]$ only relative positions of particles and fields among each other, but not positions with respect to the classical machinery which is customarily represented by a coordinate system.

Anyhow, we are kind of forced into this surface-pictorial point of view. Some satisfaction about the resulting independence of $\Psi[\sigma]$ as to the location of the spatial origin may also be drawn from the fact that, if we use a representation which does not diagonalize configuration space, but instead we use a representation diagonalizing, say, some set of bare-particle occupation numbers, any dependence on the origin of the coordinate system would have gone into hiding in phase factors which nobody ever takes into account anyhow. One then might as well avoid such dependence altogether.

Finally, there is, of course, one special case in which there is no distinction between the two points of view in the Schrödinger equation. This is the case in which, for any set of surfaces σ, one confines oneself to a spatial parametrization such that the time directions $\mathbf{u} =$ constant are given by the orthogonal trajectories of the surfaces $t =$ constant. If we call such coordinate systems « time-normal », we may say that if coordinate transformations are restricted to the time-normal subgroup, there is no distinction between the coordinate picture and the surface picture.

We remarked before that we were forced to use the Lorentz density tensor L^{ν}_{μ} as the tensor $\mathcal{H}^{\nu}_{\mu}$ appearing in the Schrödinger operator, for reasons of covariance. That this tensor weakly vanished cannot be helped; this was a consequence of this quantity combining covariance as a density tensor, with satisfying (weakly) a continuity equation. For defining a free momentum-energy four-vector, of course, this second property of the density is more important than the first one. Thence for defining a non-vanishing energy one has in the past always used the device of a quasi tensor.

Komar [*Phys. Rev.*, **113,** 934 (1959)] has recently proposed a method by which one can combine in one single formalism on the one hand a non-vanishing energy which may have the expectation value Mc^2 in the approximation of an exterior Schwarzschild solution at spacelike infinity, and on the other hand a covariant Schrödinger operator depending essentially on the weakly vanishing Lorentz density tensor L^{ν}_{μ}. His idea is first to define an operator ε^{ν} which is rigorously a four-vector density and which depends linearly on an arbitrary displacement field ξ^{μ} and its covariant derivatives. With a slight modification of Komar's original equation we write

$$\varepsilon^{\nu}[\xi^{\mu}] \equiv -\mathfrak{R}^{\nu} - L_{\mu}^{\cdot\nu}\,\xi^{\mu},$$

where

$$\mathfrak{R}^{\nu} = 2C\,j\,\nabla_{\lambda}(\nabla^{\nu}\xi^{\lambda} - \nabla^{\lambda}\xi^{\nu}) = [2C\,j\,(\nabla^{\nu}\xi^{\lambda} - \nabla^{\lambda}\xi^{\nu})]_{,\lambda}.$$

Then, Komar has shown that

$$\varepsilon^{\nu}[\xi^{\mu}] = [2C\,j\,(g^{\lambda\alpha}\xi^{\nu}_{,\alpha} - g^{\nu\alpha}\xi^{\lambda}_{,\alpha})]_{,\lambda} - \mathcal{B}_{\mu}^{\cdot\nu\lambda}\,\xi^{\mu}_{,\lambda} - M_{\mu}^{\cdot\nu}\,\xi^{\mu},$$

where the Møller quasi tensor and the corresponding superpotentials appear in the last two terms. This ε^{ν} now is to find use in the following two ways :

(A) For calculating the energy-momentum density (quasi) tensor, we define

$$\Theta^{\nu}_{\lambda} = -\varepsilon^{\nu}[\xi_{\mu} = \delta^{\mu}_{\lambda}].$$

Obviously this gives $\Theta_{\lambda}^{\cdot\nu} = M_{\lambda}^{\cdot\nu}$, the Møller density, of which the energy density component $- M_{0}^{\cdot 0}$ had the same space integral Mc^2 as the

EINSTEIN tensor, in the case with the Schwarzschild solution at infinity.

(B) For defining a new SCHRÖDINGER equation by

$$i\hbar c\,\delta\,\mathrm{U}[\sigma] = \mathrm{U}[\sigma] \int d\sigma_\nu\, \varepsilon^\nu [\xi^\mu]$$

in the Heisenberg picture, with ξ^μ reaching from $\sigma(t)$ to $\sigma(t + \delta t)$, either along $\mathbf{u} =$ constant (in the coordinate picture), or with $\xi^\mu = n^\mu \xi$ (in the surface picture). In the coordinate picture, using the parametrization as world coordinates, by $\xi^\mu = \delta^\mu_0\, \delta t$ we find the SCHRÖDINGER operator to be equal to the energy, as it is customary in Lorentz-covariant field theory. For the surface picture, however, where $\xi^\mu = n^\mu \xi$ is not a constant on σ, we find a somewhat different result.

At first sight, the above expression for $\varepsilon^\nu [\xi^\mu]$ seems to contain time derivatives of the ξ^μ, as if it would depend not only on the vectors ξ^μ from $\sigma(\mathrm{t})$ to $\sigma(t + \delta t)$, but also on the time variation of ξ^μ as we go on from $\sigma(t + \delta t)$ to $\sigma(t + \delta t + \delta[t + \delta t])$. This would seem to make ε^0 useless as a SCHRÖDINGER operator. It can, however, be verified that, for $\xi^\mu = n^\mu \xi$, the time derivatives of the absolute spacing ξ of the surfaces cancel out, and that the time derivatives of n^μ, which are a consequence of the tilting of $\sigma(t + \delta t)$ caused by spatial gradients of ξ, can be expressed in terms of these spatial gradients.

In order to understand the meaning of the KOMAR Hamiltonian for the surface picture, consider its definition,

$$\mathrm{E(K)} \equiv \int d\sigma_\nu\, \varepsilon^\nu [\xi^\mu] = -\int d\sigma_\nu\, \xi^\mu\, \mathrm{L}^{\,\nu}_{\mu} - \int d\sigma_\nu\, \mathfrak{T}^\nu .$$

The first term on the right always weakly vanishes, and is identical with the SCHRÖDINGER operators considered before, for which we did already derive and verify the weak validity of the integrability conditions. The new element in the KOMAR expression is the last term on the right. Since it is a scalar, it may be calculated in some special frame of reference, for which we choose one in which σ is a surface $x^0 =$ constant. We then find

$$-\int d\sigma_\nu\, \mathfrak{T}^\nu = -\int d^3 x\, \mathfrak{T}^0 =$$
$$\int 2\mathrm{C}\, [j(\nabla^n \xi^0 - \nabla^0 \xi^n)]_{,n}\, d^3 x = 2\mathrm{C} \iint d^2 \mathrm{S}_n\, j\, \mathrm{F}^n,$$

a two-dimensional surface integral in which

$$\mathrm{F}^n = (\nabla^n \xi^0 - \nabla^0 \xi^n) = g^{n\alpha}\, \xi^0_{,\alpha} - g^{0\alpha}\, \xi^n_{,\alpha} + (\Gamma^0|^n_\lambda - \Gamma^n|^0_\lambda)\, \xi^\lambda.$$

Again, if at this stage we would insert $\xi^\mu = \delta^\mu_0$ as under (A) above, then for an exterior Schwarzschild solution at infinity one would find $\mathrm{M}c^2$ as the contribution to the energy from the term $-\int d\sigma_\nu\, \mathfrak{T}^\nu$. For $\xi^\mu = n^\mu \xi$, however, we find in our special coordinate system $\xi^\lambda = -f\, g^{0\lambda}\, \xi$ with $f = \dfrac{1}{\sqrt{-g^{00}}}$ as long as we stay on σ. As to the terms with $\alpha = 0$ in our formula for F^n, we mentioned already that the terms with $\xi_{,0}$ here cancel, while for those with $n_{,0}$ we may use

$$n^\lambda_{,0} = f^2\, g^{a0}\, n^\lambda_{,a} - f^3\, \Gamma^\lambda\big|^{00} + f\, e^{\lambda a} \frac{\xi_{,a}}{\xi},$$

which expresses that the tilting of the normals is due to the spatial gradients of the lift ξ of the surface. Thence we find this time

$$F^n = 2\sqrt{-g^{00}} \cdot e^{mn}\, \xi_{,m},$$

where e^{mn} is the inverse of the 3×3 matrix g_{mn}.

Assuming that space (but for the tail of the Schwarzschild solution) flattens out at spatial infinity, we will want to use the Lorentz-covariant flat-space theory in the outer regions. Therefore, we are in these outer regions interested in only two types of ξ fields :

(1) A constant ξ field, as used for finding the time dependence of the SCHRÖDINGER state vector in flat space. This gives $\xi_{,m} = 0$ and therefore $F^n = 0$ in $\iint d^2 S_n\, j\, F^n$, and therefore the KOMAR operator becomes identical in this case with the SCHRÖDINGER operator for the surface picture which we have considered before.

(2) A field $\xi = \beta_r (x^r - x_0^r)$, corresponding to an infinitesimal Lorentz transformation in the flat outer regions. (The field, again, may have any desired different form in the interior of the universe, as long as it has the form given as its limit at spacelike infinity.) In this case we find $\xi_{,m} =$ constant. With a Schwarzschild solution for e^{mn}, we thus find for F^n on a big sphere an expression even in $\frac{x^m}{r}$, of which the integral over the closed sphere vanishes. Thus again the KOMAR expression gives the same result as the SCHRÖDINGER operator considered before.

Therefore, in all cases of practical importance, for a surface Schrödinger picture the Komar operator would yield results identical with those which we obtained using our own weakly vanishing Schrödinger operator.

May 29, 1959.

DISCUSSION

Réponses de Belinfante aux questions dont le texte n'est pas parvenu

1. On me demande pourquoi je rends mes opérateurs de SCHRÖDINGER non physiques en me limitant à des ξ^M qui s'anulent à l'infini. Je réponds que je ne fais aucune restriction sur ξ^M : j'admets que pour $r \to \infty$, $\xi^M \to 0$, mais pas que $\xi^M \to 0$.

Mais alors, me dit-on, votre $\int \mathcal{H}^\nu_\mu\, \xi_\mu\, d\sigma_\nu$ n'est pas invariant. Je ne suis pas d'accord : il *est* invariant *sous le changement des coordonnées d'univers que j'ai considéré* (je rappelle que σ est fixe).

Quoi qu'il en soit le problème essentiel n'est pas encore résolu : c'est celui de trouvel E tel que $[F, E] = \xi^\mu F_{,\mu}$ pour tout champ ξ sur σ (avec $\xi^M = n^\mu \theta$), également pour $\xi \to 0$ et $r \to \infty$. Voir le rappel *) du rapport.

2. GEHENIAU me demande comment j'ai obtenu le facteur typique $(-g^{00})^{-1/2}$ dans mon $\mathcal{H}_D$? Je réponds : $\mathcal{H}_D$ a été obtenu par Dirac, et je n'ai pas à répéter son argumentation. J'ai simplement dit que le $\mathcal{H}_D$ de Dirac n'est pas l'intégrale de la densité hamiltonienne canonique, mais qu'il en diffère par un terme de surface. Il est égal à mon $\int L^\nu_\mu\, \xi^\mu\, d\sigma_\nu$ pour $\xi^\mu = \delta_0{}^\mu$.

FIELDS, PARTICLES AND QUANTUM THEORY

by Dr. Behram KURSUNOGLU

Department of Physics, University of Miami
Coral Gables, Florida, U.S.A.

RESUME

Cet article contient quelques développements de la version de la théorie unitaire non symétrique proposée par l'Auteur en 1952.

Le Lagrangien et les équations du champ de cette théorie sont d'abord rappelés. Puis, afin de mettre en lumière les traits saillants de la nouvelle théorie de la matière qui sera proposée, on étudie les fonctions d'action et les propagateurs dans le cas d'une particule libre de Dirac. L'intégrale d'action de la théorie unitaire est ensuite linéarisée à l'aide des matrices de Dirac. Les résultats obtenus permettent d'étudier dans le dernier paragraphe les fonctions d'onde des particules de spin 0, 1, et 1/2. Dans ce dernier cas, une relation entre l'opérateur γ_5 et la masse des champs de fermions
cas, une relation entre l'opérateur j_5 et la masse des champs de fermions est établie d'une manière invariante et permet de préciser l'existence de deux classes de fermions.

I. — Introduction

The following is a summary of a paper on « Fields, particles and quantum theory », presented to Colloque International sur « Les Théories relativistes de la gravitation ».

The interaction of quantized electromagnetic field with gravitational field is an example of weakest coupling of fields in nature. A clever generalization of electromagnetic and gravitational interactions may lead to other types of interactions.

The best motivation for trying to bring about a unified picture of symmetric (gravitational) and antisymmetric (electromagnetic) fields can be found in the history of photon and Einstein's general theory of relativity. Photon, first introduced by Einstein in connection with photoelectric phenomenon and later described by quantized electromagnetic field, has played the most important role in the sequence of new discoveries in physics. In particular, de Broglie's theory matter waves was suggested by the wave and particle behaviour of light. However, electromagnetic waves do not carry mass and charge and they are described by a special type of an anti-symmetric field (a gauge invariant field or a field that is derivable from a vector potential). We may envisage a more general anti-symmetric field, one that is not derivable from a vector potential.

From a philosophical point of view (the unity of natural phenomena) one is inclined to believe that the concept of generalized anti-symmetric field ought to play a basic role in describing both massless and mass fields. Broadly speaking a complete description of nature could be based on a certain geometrical union of symmetric and anti-symmetric fields. EINSTEIN's general relativity is a partial realization of this idea.

The contents of the above remarks on the role of antisymmetric field cannot fully be appreciated without pointing out the place of the spinors in this theory. The formulation of this theory does not start with spinors. We formulate the theory in terms of a 16 component tensor and (luckily) we end up with vector and spinor fields which comprise scalar fields as a special case.

The contents of this paper consist of some further developments of author's version of EINSTEIN's Generalized Theory of Gravitation [(1)].

II. — Generalized theory of gravitation

A purely geometrical derivation of the Lagrangian of the generalized theory of gravitation was given in Reference 1. A detailed method for another derivation will be published elswhere; here we shall, merely, sketch the result.

The action function of our theory is given by

$$S(r_0) = \frac{q^2\, p^{-2}}{8\pi\, c} \int L(r_0)\, d^4x, \tag{II.1}$$

where

$$L(r_0) = \mathcal{G}^{\rho\sigma}(R_{\rho\sigma} - p^2\, q^{-1}\, F_{\rho\sigma}) + 2p^2\,(\sqrt{-g} - \sqrt{-a}), \tag{II.2}$$

where p and q are constants. Of the two constants p and q, only p appears as a new constant since it is related to the constant q by

$$p^2\, q^{-2} = \frac{2G}{c^4} \tag{II.3}$$

where, now

$p^{-1} = r_0 =$ a constant of the dimension of a length,

$q^2 =$ a constant of the dimension of energy density.

If we wished we could, by using (II.3), eliminate the constant q from the Lagrangian. The essential role of q lies in treating the fundamental field tensor $g_{\alpha\beta}$ as a dimensionless geometrical entity. The latter is achieved by writing

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + q^{-1}\, \varphi_{\alpha\beta} \tag{II.4}$$

(1) B. KURSUNOGLU, *Phys. Rev.*, **88**, 1369-1379 (1952).

where $a_{\alpha\beta}$ and $\varphi_{\alpha\beta}$ are symmetric and anti-symmetric parts of the field, respectively. The symbols g and a refer to the determinants of $g_{\alpha\beta}$ and $a_{\alpha\beta}$, respectively. The auxiliary field $F_{\alpha\beta}$ satisfies free field MAXWELL equations. The meanings of other symbols can be found in Reference 1.

The field equations resulting from the variations of the action (II.1) are

$$R_{\underline{\alpha\beta}} = -p^2 (a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \tag{II.5}$$

$$R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = -p^2 (\varphi_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}) \tag{II.6}$$

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\vee},_{\beta} = 0 \tag{II.7}$$

where

$$b_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} + q^{-2}\, \varphi_{\alpha\mu}\, \varphi^{\mu}_{\beta}}{(1 + q^{-2}\,\Omega - q^{-4}\,\Lambda^2)^{1/2}}, \tag{II.8}$$

is the metric of the field. The tensor indices are raised and lowered by the use of the tensor $a_{\alpha\beta}$. The invariants Ω and Λ are defined by

$$\Omega = \frac{1}{2}\, \varphi^{\alpha\beta}\, \varphi_{\alpha\beta} \tag{II.9}$$

$$\Lambda = \frac{1}{4} f^{\alpha\beta}\, \varphi_{\alpha\beta} = \text{pseudo-scalar} \tag{11.10}$$

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\, \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\, \varphi_{\mu\nu} \tag{II.10}$$

The determinant of the fundamental tensor $g_{\alpha\beta}$ is given by

$$g = \mathrm{Det}(g_{\alpha\beta}) = a(1 + q^{-2}\,\Omega - q^{-4}\,\Lambda^2) \tag{II.12}$$

The introduction of the constant r_0 is the main idea of this paper and it is the only deviation from Einstein's unified field theory [2]. A novel aspect of our theory lies in the existance of a correspondance limit. If the length r_0 is set equal to zero the generalized theory reduces to EINSTEIN MAXWELL field equations for gravitational and electromagnetic fields. Thus, general relativity is an integral part of the theory $r_0 = 0$ value of the constant r_0. Actually, the constant r_0 differentiates between massless and mass fields; it is the eigen-value of the field. The photon and neutrino fields are « zero length » gauge invariant fields. It is quite natural to expect that various values (eigen-values) of the length r_0 as defined by the field will represent various mass fields.

The requirement :

$$(1 + q^{-2}\,\Omega - q^{-4}\,\Lambda^2) > 0, \tag{II.13}$$

will put a limit to possible values of r_0 and finite values of r_0 can be expected to provide an upper limit for the maximum possible values of the field.

The square root $(1 + q^{-2}\,\Omega - q^{-4}\,\Lambda^2)$ is an invariant of the theory with very interesting properties. It will be found convenient to cast it

(2) A. EINSTEIN, *The Meaning of relativity*, Princeton University Press, 1953.

in a more suggestive form. Expansion of the square-root in powers of q^{-2} leads to :

$$\sqrt{(1+q^{-2}\,\Omega-q^{-4}\,\Lambda^2)}=1+\frac{1}{2}\,q^{-2}\,\Omega-\frac{1}{2}\,q^{-4}\left(\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2\right)$$
$$+\frac{1}{4}\,q^{-6}\,\Omega\left(\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2\right)-\frac{1}{8}\,q^{-8}\left(\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2\right)^2$$
$$-\frac{1}{8}\,q^{-8}\,\Omega^2\left(\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2\right)+\ldots\ldots.$$

It can easily be seen that the above expansion of the square root enables us to write the square-root in the form :

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\,q^{-2}\,\Omega\right)^2-q^{-4}\,c^2\,p^\alpha\,p_\alpha} \tag{II.14}$$

where :

$$c^2\,p^\alpha\,p_\alpha=\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2 \tag{II.15}$$

By using the relations :

$$T^\alpha_\mu\,T^\mu_\beta=\delta^\alpha_\beta\left(\frac{1}{4}\,\Omega^2+\Lambda^2\right)$$

we can write :

$$c\,p_\alpha=T_{\alpha\mu}\,V^\mu \tag{II.16}$$

where :

$$V^\mu\,V_\mu=1 \tag{II.17}$$

is an arbitrary unit vector and :

$$T^\alpha_\beta=\frac{1}{4}\,\delta^\alpha_\beta\,\varphi^{\mu\nu}\,\varphi_{\mu\nu}-\varphi^{\alpha\mu}\,\varphi_{\beta\mu} \tag{II.18}$$

so that p_α defined by (II.16) with the arbitrary unit vector V_α satisfies (II.15). Hence the square root is invariant with respect to the introduction of an arbitrary unit vector by (II.16).

III. — Extremum action and free particles in quantum theory

In order to bring out the salient features of the proposals to be made and motivations in making these proposals for a new theory of matter we first discuss a few examples from classical and quantum mechanics.

(A) The action function of a free non-relativistic particle in the time interval $(t_0,\,t)$ is given by :

$$S=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,m\,v^2\,dt\,, \tag{III.1}$$

The equations of motion are :

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

The classical path of the particle is described by :

$$r = r_o + v_o (t - t_o) \qquad \text{(III.2)}$$
$$v = v_o$$

so that :

$$v = v_o \frac{r - r_o}{t - t_o}$$

We use the path equations in (III.1) to calculate the extemum value of the action in the time interval (t, t_o) as :

$$S = \frac{1}{2} m v_o^2 (t - t_o) = \frac{m (r - r_o)^2}{2 (t - t_o)} \qquad \text{(III.3)}$$

along the path of the particle.

The action function S obtained in this way is a solution of the Hamilton-Jacobi equation :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 = 0 \,, \qquad \text{(III.4)}$$

The extremum action S is the generator of a canonical transformation along the actual path of the particle. The corresponding situation in quantum mechanics is a canonical transformation along the « quantum paths » described by a transformation function defined by :

$$<r, t \mid r_o, t_o> = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_o)}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{im (r - r_o)^2}{2\hbar (t - t_o)}\right) \qquad \text{(III.5)}$$

It satisfies the boundary condition :

$$\operatorname*{Lim}_{t = t_o} <r, t \mid r_o, t_o> = = \delta (r - r_o)$$

and the equation :

$$\left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_o\right) <r, t \mid r_o, t_o> = \delta(r - r_o)\, \delta(t - t_o), \qquad \text{(III.6)}$$

where :

$$H_o = - \frac{h^2}{2m} \nabla^2$$

and :

$$\int <r, t \mid r_o, t_o> d^3 r = 1$$

$$\psi (r, t) = \int <r, t \mid r', t'> \psi(r', t')\, d^3 r'$$

In this case quantum propagator of the free particle is not a function of the classical S alone but an additional phase factor is involved.

(B) Relativistic free particle :

The classical action function S is given by :

$$S = -mc^2 \int_{t_o}^{t} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\, dt\,, \qquad \text{(III.7)}$$

The extremum value of the action in this case is :

$$S = -\, mc\, R$$

where :

$$R^2 = c^2 (t - t_o)^2 - (r - r_o)^2$$

and it satisfies relativistic Hamilton-Jacobi equation :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \qquad \text{(III.8)}$$

The corresponding quantum propagator of a free relativistic system satisfies the equation :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2\right) \Delta_F (x - x') = \delta (x - x') \qquad \text{(III.9)}$$

where Δ_F is the usual quantum propagator of a mass particle.

(C) Free Dirac Particle :

In accordance with two-valued representation of the LORENTZ group we consider relativistic extremum action function S defined by (III.7). The linearized form of S is given by :

$$S = -\, mc\, \gamma^\rho X_\rho, \qquad \text{(III.10)}$$

where :

$$X = x - x'$$

The propagator of a free Dirac particle can, now, be written as : where :

$$S_F (X) = \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc\, \gamma^\rho X_\rho\right)\right]_{R=0} \Delta_F (X)\,, \qquad \text{(III.11)}$$

where :

$$\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc\, \gamma^\rho X_\rho\right)\right]_{R=0} = \gamma^\rho p_\rho - k$$

$$p_\rho = -\, i\, \hbar \frac{\partial}{\partial x_\rho}.$$

We thus see that in the last two examples (B and C) the classical extremum action function plays a basic role in the construction of free particle quantum propagators. The properties of the action function discussed for the above three cases can be extended to action functions for fields. The next section is only a brief discussion of the extremum field actions

IV. — Extremum field action and particles

The discussion of the previous section is not directly applicable to interacting systems. We do not know what particular role, if any, can the extremum action of an interacting classical system can play in the construction of propagators for interacting quantum mechanical systems. However, in unified theory it is not possible to speak of a free part and an interacting part. For the unified theory the definition of extremum field action can be given as the value of the action function obtained from the substitution of the field equations in the expression of S from which the field equations were obtained via Hamilton's principle.

The substitution of the field equations (II.5) and (II.6) in the action (II.1) gives for the extremum value of the field action the result :

$$S(r_o) = -\frac{q^2}{4\pi c}\int (\sqrt{-g} - \sqrt{-a})\, d^4 x\,, \tag{IV.1}$$

By using (II.14) we can write the extremum action of the unified field as :

$$S(r_o) = -\frac{q^2}{4\pi c}\int \sqrt{-a}\left\{\sqrt{\left[\left(1+\frac{1}{2}q^{-2}\,\Omega\right)^2 - c^2\, q^{-4}\, p^\rho\, p_\rho\right]} - 1\right\}, \; d^4 x, \tag{IV.2}$$

For $r_o = 0$ it reduces to the action function of charge free electromagnetic field. The action (IV.2) is subject to the 4 conditions imposed by the field equations (II.7).

Now, in an infinitesimal region of space and time all points of the region can be connected by means of Lorentz transformations, regardless of the gravitational field. A two-valued representation of the Lorentz group can be extended to a two-valued representation of the continuous group of coordinate transformations by means of gravitational potential dependent Dirac matrices. Our action (IV.2) is a nonlinear function of the 16 field variables $g_{\alpha\beta}$ and therefore its rationalization requires the use of 16 Dirac matrices that constitute a complete (irreducible) matrix algebra in 4 dimensions. Let us assume the existance of an operator X defined by :

$$X = F + B\,\gamma_5 + D_\alpha\,\gamma^\alpha + L_\alpha\,\gamma_5\,\gamma^\alpha + M_{\alpha\beta}\,\gamma^\alpha\,\gamma^\beta$$

such that its square is an invariant given by :

$$q^4\left[\left(1+\frac{1}{2}q^{-2}\,\Omega\right)^2 - c^2\, q^{-4}\, p^\alpha\, p_\alpha\right]$$

where F and B are scalars, D_α and L_α vectors and $M_{\alpha\beta}$ an antisymmetric tensor. The scalars F and B or the vectors D_α and L_α are linearly independent because of the tensor property of our field variable $g_{\alpha\beta}$. The γ-matrices are defined in the usual representation by :

$$\gamma = i\beta\,\alpha,\ \gamma_5{}^2 = -1$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\,\frac{1}{\sqrt{-a}}\,\mathcal{E}^{\alpha\beta\mu\nu}\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu$$

$$\gamma_5\,\gamma_\mu + \gamma_\mu\,\gamma_5 = 0$$

$$\gamma_\mu\,\gamma_\nu + \gamma_\nu\,\gamma_\mu = -2\,a_{\mu\nu}\,I_4.$$

From taking the square of the operator X it can easily be seen that there exist two possible operators whose square fullfill the required condition. The corresponding two action functions are given by :

$$S_{f1}(r_o) = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[q^2\,(i\,\gamma_5 - 1) + \frac{1}{2}\,i\,\gamma_5\,\Omega + c\,\gamma^\alpha\,p_\alpha\right]d^4\,x\,, \tag{IV.3}$$

and :

$$S_{f2}(r_o) = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[q^2\,(i\,\gamma_5 - 1) + \frac{1}{2}\,i\,\gamma_5\,\Omega + c\,\gamma_5\,\gamma^\alpha\,p_\alpha\right]d^4\,x\,, \tag{IV.4}$$

These action operators have resulted from (IV.2) by taking in the expression of the operator X the values $F = 0$, $M_{\alpha\beta} = 0$, $L_\alpha = 0$, $B = i\left(1 + \frac{1}{2}\,q^{-2}\,\Omega\right)$, $D_\alpha = c\,p_\alpha$ for the action S_{f1} and $F = 0$, $M_{\alpha\beta} = 0$, $D_\alpha = 0$, $B = i\left(1 + \frac{1}{2}\,q^{-2}\,\Omega\right)$, $L_\alpha = c\,p_\alpha$ for the action S_{f2}, respectively.

The expressions S_{f1} and S_{f2} constitute an irreducible representation of the linearization process, since (i) there exists no canonical transformation to transform the γ_5 operator into a unit operator (the matrix γ_5 is a member of the complete algebra of 16 Dirac matrices in 4 dimensions), (ii) because of the tensor property of $g_{\alpha\beta}$ it is not possible to take a linear combination of the vectors D_α and L_α where $D_\alpha = L_\alpha$. But D_α and L_α can be taken equal as long as they occur in different expressions as in (IV.3) and (IV.4). Thus the two action operators are not reducible into one another.

We conclude this section by recording the expressions of the determinants corresponding to the first terms of the action operators as :

$$\mathrm{Det}\left(iq^2\,\gamma_5 + \frac{1}{2}\,i\gamma_5\,\Omega + c\gamma^\alpha\,p_\alpha\right) = \mathrm{Det}\left(iq^2\,\gamma_5 + \frac{1}{2}\,i\gamma_5\,\Omega + c\gamma_5\,\gamma^\alpha\,p_\alpha\right)$$
$$= q^8\,(1 + q^{-2}\,\Omega - q^{-4}\,\Lambda^2)^2, \tag{IV.5}$$

and :

$$\mathrm{Det}\,(T^\alpha_\beta) = (c^2\,p_\mu\,p^\mu)^2\,, \tag{IV.6}$$

V. — Wave functions of boson and fermion fields

We introduce the complex quantities $\chi_{\mu\nu}$ by :

$$\chi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + i\, f_{\mu\nu} \tag{V.1}$$

where $f_{\mu\nu}$ are defined by (II.11). In an infinitesimal region of field with a special choice of co-ordinates the space and time components of $\chi_{\mu\nu}$ are just complex conjugates of one another. In the particular region of the field we need to use only three components χ_i of $\chi_{\mu\nu}$ defined by :

$$\chi_i = \chi_{i4} = \varphi_{i4} + \frac{1}{2}\, i \sqrt{-a}\, \mathcal{E}_{ijk}\, \varphi^{jk} \tag{V.2}$$

It is known that χ is a spinor of rank two. With the introduction of the momentum density of field p_α defined by (II.16) can be witten as :

$$c\, p_\alpha = \langle \chi \,|\, \mathrm{O}_{\alpha\beta}\, \mathrm{V}^\beta \,|\, \chi \rangle \tag{V.3}$$

where the operator $\mathrm{O}_{\alpha\beta}$ is expressed in terms of the generators of infinitesimal rotations by :

$$\mathrm{O}^{rs}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\, [(\mathrm{K}_\alpha\, \mathrm{K}_\beta + \mathrm{K}_\beta\, \mathrm{K}_\alpha)^{rs} - (\delta^r_\alpha\, \delta^s_\beta + \delta^r_\beta\, \delta^s_\alpha)]\;, \tag{V.4}$$

The trace of the operator $\mathrm{O}_{\alpha\beta}$ is zero and the superscrips r, s, ($r, s, = 1, 2, 3$) refer to the matrix elements of the matrices K_α (charge co-ordinate):

$$\mathrm{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{K}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfy the commutation relations :

$$\mathrm{K}_i\, \mathrm{K}_j - \mathrm{K}_j\, \mathrm{K}_i = i\, \mathcal{E}_{ijs}\, \mathrm{K}_s \tag{V.5}$$

The 4 K-matrices transform like the components of a four-vector. The (rs) elements of any K-matrix form an axial vector in charge space.

Any one of the Hermitian K-matrices have eigen-values $+1$, -1 and 0; the corresponding eigen vectors $|+1\rangle$, $|-1\rangle$, $|0\rangle$ can span the charge space. The ket vector :

$$|\chi\rangle = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

will be related to the wave function of a photon. In the following we shall give a brief discussion of three special cases.

(A) Spin 1 particle : In the limit $r_o = 0$ the antisymmetric part of the field reduces to $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ satisfying free field Maxwell's equations :

$$i\hbar \frac{\partial\, |\chi\rangle}{\partial\, t} = \mathrm{H}\, |\chi\rangle \tag{V.6}$$

where we took :

$$\mathrm{H} = c\underline{\mathrm{K}} \cdot \underline{\mathrm{P}} \tag{V.7}$$

$$\mathrm{P} = -i\hbar \underline{\nabla} \tag{V.8}$$

$$|\psi> = \mathrm{H}^{-1/2}|\chi> = \text{Wave function of photon} \tag{V.9}$$

$$c\, p_\alpha = \frac{1}{2} <\chi|\mathrm{K}_\alpha|\chi> \tag{V.10}$$

The 4-vector p_α represents the energy density $1/2\,(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$ and Poynting vector $(\underline{\mathcal{E}} \times \underline{\mathcal{H}})$ of the electromagnetic field. The velocity of the photon can be obtained from the Hamilton's equations of motion as :

$$\underline{v} = \frac{\partial \mathrm{H}}{d\underline{\varrho}} = c\,\underline{\mathrm{K}} \tag{V.11}$$

Although the orbital angular momentum of a photon does not (because of its speed c) have a direct physical meaning we can use it to calculate spin a photon. Thus from the commutation relations :

$$[\mathrm{H}, \underline{\mathrm{L}} + \hbar\,\underline{\mathrm{K}}] = 0$$

we conclude that $\mathrm{K}'s$ are spin matrices of spin 1 particles and that the paralelism of the spin and the velocity of a photon is an invariant statement. The K-matrices satisfy also the usual angular momentum equation :

$$\mathrm{K}_1^2 + \mathrm{K}_2^2 + \mathrm{K}_3^2 = \mathrm{S}(\mathrm{S}+1)$$

where $\mathrm{S} = 1$. Somewhat different but a detailed discussion of the above form of electromagnetic field has already been given by Good [(3)].

(B) Spin 0 particles : We have discussed the case $r_o = 0$ for the action function (IV.2) and we have seen that it correspondes to massless spin 1 particles. The case $r_o \neq 0$ can, therefore, be expected to represent integral spin particles with mass. The action (IV.2) for $r_o \neq 0$ is an invariant function of :

$$|<\chi^*|\chi>|^2 = |(\underline{\mathcal{E}} + i\underline{\mathcal{H}}) \cdot (\underline{\mathcal{E}} + i\underline{\mathcal{H}})|^2 = \Omega^2 + 4\Lambda^2$$

which suggests that the wave function for mass fields with integral spin can be taken to be proportional to :

$$\sqrt{(\Omega + 2i\Lambda)}.$$

It is a combination of a scalar Ω and a pseudo-scalar Λ so that it can represent zero spin fields. A detailed discussion of spin zero fields will be given in another paper.

(C) Spin 1/2 Fields : By eliminating q with the help of (II.3) the action S_{f1} and S_{f2} can be written as :

$$\mathrm{S}_{f1}(r_o) = -\frac{1}{4\pi c}\int \sqrt{-a}\left[c\,\gamma^\alpha p_\alpha + \frac{1}{2}\Omega - \mathfrak{M}_-\left(\Omega + \frac{c^4}{\mathrm{G}\,r_o^2}\right)\right] d^4 x, \tag{V.12}$$

(3) R. H. Good, *Phys. Rev.*, **105**, 1914 (1957).

$$S_{f2}(r_o) = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[c\,\gamma_5\,\gamma^\alpha\,p_\alpha + \frac{1}{2}\,\Omega - \mathcal{M}_-\left(\Omega + \frac{c^4}{G r_o^{\,2}}\right)\right] d^4\,x\,, \tag{V.13}$$

The association of the projection operator :

$$\mathcal{M}_\mp = \frac{1}{2}\,(1 \mp i\,\gamma_5)$$

with the mass term (i.e. r_o term) clearly shows the existance of massless and mass fermion fields in an invariant way (4).

The existance of two different action operators for fermion fields may be interpreted as referring to two distinct classes of fermion fields. The symmetry properties of these two classes of fermions will not be discussed in this paper.

We have seen that for Boson fields the limit $r_o = 0$ leads to massless electromagnetic field in the presence of gravitational field. For fermion fields the limit $r_o = 0$ does not exist since the term q^2 in the action operators becomes infinite in the limit $r_o = 0$. Thus there exist no limiting fermion fields with mass. However we can use the identity :

$$\mathcal{M}_+ + \mathcal{M}_- = 1$$

and separate any one of the fermion action functions into two terms as :

$$S_{f1}(r_o) = S^+ - S^-$$

where :

$$S^- = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[c\,\mathcal{M}_-\,\gamma^\alpha\,p_\alpha + \frac{1}{2}\,\mathcal{M}_-\,\Omega - \mathcal{M}_-\right]\left(\Omega + \frac{c^4}{G r_o^{\,2}}\right) d^4\,x, \tag{V.14}$$

$$S^+ = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[c\,\mathcal{M}_+\,\gamma^\alpha\,p_\alpha + \frac{1}{2}\,\mathcal{M}_+\,\Omega\right] \mathrm{d}^4\,\mathrm{x}, \tag{V.15}$$

The eigen vectors $|1>$ and $|0>$ corresponding to the eigenvalues 1 and 0, respectively, of any one of the projection operators $\mathcal{M}_+$ or $\mathcal{M}_-$ can span a two dimensional space which be called « mass space ». The limit $r_o = 0$ for the action S^+ exists and is given by

$$S^+(0) = -\frac{1}{4\pi c}\int\sqrt{-a}\left[c\,\mathcal{M}_+\,\gamma^\alpha\,p^o_\alpha + \frac{1}{2}\,\mathcal{M}_+\,\Omega^o\right] d^4\,x, \tag{V.16}$$

where p^o_α is defined by (V.10) and Ω^o is now the invariant $\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2$ of the charge free electromagnetic field. The first term of (V.16) is of the form

$$\mathcal{M}_+\,K^{ij}_\mu\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\chi^*_i\,\chi_j$$

which because of the projection operator $\mathcal{M}_+$ is effectively expressible in terms of Pauli matrices. This result can be used to derive a wave

(4) This new result of the theory is highly satisfactory. The relation between γ_5 operator and the mass of fermion fields appears as a unified and invariant statement.

equation for the massless fermion fields. We shall consider a single plane electromagnetic wave and find the corresponding spinor wave. We define the mixt quantities $\overset{i}{u}_{\alpha\beta}$ which transform like a second rank spinor in spin space an das an axial vector in charge space,

$$\overset{i}{u}_{\alpha\beta} = -i\, K^{ij}_{\mu}\, \sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \chi_j \tag{V.17}$$

We thus have three second rank spinors corresponding to $i = 1, 2, 3$. As a first orientation let us consider the spinor $\overset{2}{u}_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$. Now, for a plane electromagnetic wave the two invariant $\Omega^o = \mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2$ and $\Lambda^o = \mathcal{E}\cdot\mathcal{H}$ vanish so that the spinor $\psi_{\alpha\beta}$ is to be defined by four independent numbers alone. The latter is possible only if $\psi_{\alpha\beta}$ is of the form

$$\psi_{\alpha\beta} = u_\alpha\, u_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{V.18}$$

where u_α is a two-component spinor. From (V.17) and (V.18) for $i = 2$ we obtain

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2), \qquad \chi_2 = \frac{1}{2}\, i\,(u_1^2 + u_2^2), \qquad \chi_3 = -u_1\, u_2 \tag{V.19}$$

Substition of (V.19) in (V.10) leads to

$$cp_1 = \frac{1}{2}\sqrt{cp_4}\,(u_1^*\, u_2 + u_2^*\, u_1), \quad cp_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{cp_4}\, i\,(u_1^*\, u_2 - u_2^*\, u_1),$$

$$cp_3 = \frac{1}{2}\sqrt{cp_4}\,(u_1^*\, u_1 - u_2^*\, u_2), \quad cp_4 = \frac{1}{4}(u_1^*\, u_1 + u_2^*\, u_2)^2, \tag{V.20}$$

which are equivalent to

$$cp_\mu = \frac{1}{2} < u_{\mathrm{I}} \,|\, \sigma_\mu \,|\, u_{\mathrm{I}} > \tag{V.21}$$

where

$$|\, u_{\mathrm{I}} > = (cp_4)^{1/4}\, |\, u >, \tag{V.22}$$

The momentum p_μ defined in (V.10), because of MAXWELL's equations (V.6), is conserved. In the same way the momentum density defined by (V.21) is conserved because of the neutrino equation

$$i\hbar\, \frac{\partial\, |\, u_{\mathrm{I}} >}{\partial t} = H_\nu\, |\, u_{\mathrm{I}} > \tag{V.23}$$

where

$$H_\nu = c\, \underline{\sigma}\cdot\underline{\mathbf{P}}, \qquad \underline{\mathbf{P}} = -i\hbar\, \underline{\nabla}$$

The polarization of the neutrinos corresponding to the polarization of the photon expressed by

$$< \mathrm{P} \,|\, \chi > = 0$$

is contained in the equation

$$< u_{\mathrm{I}} \,|\, i\, \sigma_2\, \sigma\cdot \mathrm{P} \,|\, u_{\mathrm{I}} > \tag{V.24}$$

The wave function of fermion fields with mass is given by

$$\overset{i}{\psi}_{\alpha\beta} = -i\, K^{ij}_{\mu}\, \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, \chi_j \tag{V.25}$$

The superscript $i (= 1, 2, 3)$ refers to charge co-ordinates. The remaining 16 spinor indices may refer to (*a*) particle, antiparticle states, (*b*) 2 spin states, (*c*) lepton or baryon state, (*d*) 2 possible symmetry states.

VI. — Conclusion

The basic role of the field equations in this theory is to provide an eigen value problem to obtain r_o and the corresponding eigen-states of the field. Every other information on a dynamical system can be obtained from the wave function that is already in the theory.

The discussion of massless fermion fields could be carried throuh in the same way with the action function S_{f2}. The latter would imply the existance of another pair of massless neutrinos with different symmetry properties. A detailed discussion of these and other results will appear in author's forthcoming papers.

DISCUSSION

Intervention du Prof. Ivanenko

Touchant l'usage du déterminant ou « volume » d'une quantité tensorielle en tant qu'invariant fondamental, je pense que c'est la méthode utilisée notamment par BORN et INFELD, et aussi par EDDINGTON dans son livre fameux.

Quant à la question plus importante de la possibilité d'une théorie unitaire, on a discuté aujourd'hui quelques tentatives pour tirer les équations du mouvement des particules (incluant le spin dans les versions les plus optimistes) des équations du champ de la Relativité générale. Je suis heureux de pouvoir attirer l'attention sur de très intéressants essais de construire toute la matière ordinaire à partir d'un certain champ spinoriel primordial. L'idée a son origine dans la « méthode de fusion » de Louis de BROGLIE. Avec MM. A. BRODSKY, MIRIANASHVILI et D. KUSDGEBIDZE, nous avons cherché à généraliser en forme non-linéaire l'équation de DIRAC et quelques autres; mais ce sont surtout HEISENBERG et ses collaborateurs qui ont obtenu les résultats les plus convaincants et intéressants en construisant des particules élémentaires à partir d'équations spinorielles « prématérielles ». Les gravitons, particules de spin 2, peuvent manifestement être produits ainsi. Si alors on admet la possibilité de mutuelles transformations des gravitons négatons-positons, etc., on aboutit nécessairement à des termes non-linéaires dans les champs gravitationnels faibles. Bien sûr il ne s'agit pas encore de Relativité générale, mais peut-être de quelques pas vers elle.

On peut donc se demander si la plus plausible des théories unitaires d'aujourd'hui serait soit purement spinorielle et non-linéaire, soit purement géométrique comme le préférerait peut-être le Prof. J. A. WHEELER, soit peut-être une combinaison des deux formes ?

Intervention du Prof. L. Motz

En 1953 je suis parti de la vieille théorie de WEYL sur l'invariance de jauge et j'ai obtenu une densité lagrangienne de la même structure que celle du Prof. KURSUNOGLU. Je l'ai linéarisée au moyen des fonctions γ de DIRAC, et, en variant le lagrangien par rapport aux potentiels électromagnétiques, j'ai obtenu les équations de MAXWELL-LORENTZ, dans lesquelles les densités de courant et de charge apparaissent comme fonctions des potentiels.

J'ai généralisé ce travail, et obtenu l'équation du second ordre de Feynman et Gell-Mann à condition d'interpréter l'électron comme une région de l'espace-temps où la courbure égale la longueur d'onde de Compton.

GENERATION OF COORDINATE CONDITIONS AND THE CONSTRUCTION OF INVARIANTS IN COVARIANT THEORIES

by James L. ANDERSON

Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey

RESUME

On examine le problème de la construction d'un ensemble complet de conditions de coordonnées pour une théorie covariante générale. Un tel ensemble fixe complètement le système de coordonnées et il s'ensuit que toutes les fonctionnelles des variables fondamentales de champ sont des invariants physiquement observables. En général, nous ne pouvons pas choisir ces conditions d'une manière arbitraire; elles doivent être compatibles avec les équations du champ. Nous avons, à cet effet, développé une méthode qui fournisse un ensemble complet de ces conditions pour tout choix de variables fondamentales indépendantes de champ. La méthode exige que l'on soit en mesure de résoudre, en fonction des variables fondamentales, les équations aux contraintes secondaires de la théorie par rapport aux variables supplémentaires. Nous avons appliqué cette méthode au cas du champ électromagnétique et à celui du champ mésique scalaire en interaction avec le champ gravitationnel. Dans ce dernier cas, nous avons eu à utiliser pour le champ gravitationnel le développement en série adapté aux champs faibles.

1. — Introduction

As a consequence of the invariance properties of covariant theories such as electrodynamics and general relativity, the basic field variables are in general not physical observables. To obtain observables from these variables one can proceed directly by attempting to construct from them manifestly invariant functionals, e. g., $A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ in electrodynamics. Alternately, one can impose a sufficient number of coordinate (gauge) conditions on the basic variables so as to reduce the invariance group to the identity element, thus in effect « freezing » the coordinate system. In this frozen coordinate system then, all functionals of the

* This research was supported by the United States Air Force under Contract AF 33 (616) 5556, monitored by the Aeronautical Research Laboratory, Wright Air Development Center.

field variables are invariants and hence are physically observable. In particular one could use the coordinate conditions plus constraint equations to eliminate from consideration as many variables as conditions plus constraints. The remaining variables, while not manifestly invariant, are, nevertheless, true invariant and hence physically observable. Furthermore they constitute a minimal set of observables in the sense that they are independent of each other and at the same time constitute a complete description of the physical state of the field.

In order that a set of coordinate conditions lead to a minimal set of observables it must satisfy two conditions. Firstly, it must be complete; there being one and only one coordinate system in which the field variables satisfy all of the conditions. Secondly, it must be compatible with the field equations. Having satisfied the set initially, the field variables must continue to satisfy it automatically throughout the evolution of the system. It is this latter requirement which gives the greatest difficulty in constructing a suitable set of conditions. Thus, while we can, more or less arbitrarily, impose what appears to be a complete set of conditions on an initial space-like hypersurface there is no assurance that they will remain satisfied as the system evolves in time.

We can investigate this above difficulty more closely by inquiring of the number of conditions needed to obtain a complete set. Let us assume that the transformation law for our theory contains N arbitrary space-time functions, the so-called descriptors. Then we can require that the field variables satisfy N conditions throughout the space-time region of interest. In what follows we will call such conditions, which are to hold over a finite region of our manifold, primary conditions. Thus the Lorentz condition and the De Donder conditions are examples of primary conditions. In general, however, these N primary conditions are not sufficient to fix completely the coordinate system; there still remains a restricted group of transformations which maintain the covariance properties of the theory. This remaining freedom of transformation is a consequence of the arbitrariness in the solution of the equations for the descriptors which generate the transformation leading from the original coordinate system to the one in which the primary conditions are satisfied. It can be eliminated by the imposition of N further subsidiary conditions. However, unlike the primary conditions, these additional conditions can in general be imposed only on a non-null hypersurface in the space-time manifold. Conditions of this type will be refered to in what follows as secondary conditions. Thus we need 2 N conditions to completely fix the coordinate system. However, since the secondary conditions can not, in general, be taken to hold throughout our space-time manifold, they will be incompatible with the field equations and hence do not readily lead to invariants.

If one could find a non-invariant constant of the motion it could be taken as one of the secondary conditions with the property that, once imposed on a initial hypersurface, it would remain satisfied throughout the temporal evolution of the system and hence satisty our second requirement. In electrodynamics such a quantity can be found : if one imposes the primary condition $\nabla^2 \varphi = \rho$, then, as a consequence of the equations of motion one finds that $\frac{d(\nabla \cdot \mathbf{A})}{dt} = 0$. Since our primary condition allows us to require initially that $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, we see that it will remain satisfied for all times. Thus, as taken, our two conditions allow us to eliminate the scalar and longitudinal potentials from the theory leaving the two transverse components as invariant quantities.

The form of the primary conditions which will lead to conserved secondary conditions can, in simple cases such as electrodynamics, be infered from the form of the field equations which are free of second time derivatives. In the more complicated case of general relativity such inferences cannot be as readily drawn. However, we shall show that, in the canonical formalism, the setting of satisfactory primary conditions follows automatically from a choice of those field variables or functionals thereof which we ultimately wish to constitute our minimal set of observables. Since there is no *a priori* reason, other than simplicity, why we should choose any particular functionals of our basic variables to constitute our minimal set we are led to a whole class of conditions which satisfy our two requirements, thus insuring the continuing covariance of the theory as a whole. Finally, we should mention that, while our procedure can be applied to the electrodynamic case in closed form, it appears that some form of approximation procedure is necessary in the gravitational case.

2. — Description of the method

Our method of generating conditions on the field variables is based on an observation of Dirac [1] concerning the structure of the Hamiltonian of general relativity. He was able to show that the primary and secondary constraints of the theory appear linearly in the Hamiltonian with coefficients which are functionals of a subset of the field variables, the constraint variables, and that the constraints themsleves do not depend upon these constraint variables. The same situation also pertains in electromagnetic theory. Thus in the latter case we have

$$\mathrm{H} = \int \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_0} \pi^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \pi + \rho) \varphi + \psi \varphi \right\} d^3 x \tag{1}$$

where π is the momentum density conjugate to the vector potential $\mathbf{A}$ and ψ is conjugate to the scalar potential φ. Here φ is the only constraint variable and it is the coefficient of the secondary constraint while its time derivative is the coefficient of the primary constraint. In the gravitational case we have *

$$H = \int \{ g^{00-1/2}\, \mathcal{H}_L + g_{or}\, \mathcal{H}^r + 2\, g_{o\mu}\, \pi^{o\mu} \}\, d^3 x \tag{2}$$

where

$$\mathcal{H}_L = K^{-1}\left(\pi^{rs}\, \pi_{rs} - \frac{1}{2}\, \pi^r_r\, \pi^s_s \right) + \frac{1}{2}\, K\, g_{rs,u}\, g_{ab,v}\ \{ (e^{ra}\, e^{sb} - e^{rs}\, e^{ab})\, e^{uv}$$
$$+ 2 (e^{ru}\, e^{ab} - e^{ra}\, e^{bu})\, e^{sv} \} + \{ K^{-1} (K^2\, e^{rs})_{,r} \}_{,s} + \mathcal{H}_{ML} \tag{3}$$

is one of the secondary constraints to be referred to as the Hamiltonian constraint and

$$\mathcal{H}^r = e^{rs}\, g_{ab,s}\, \pi^{ab} - 2 e^{rs} (\pi^{ab}\, g_{as})_{,b} + \mathcal{H}^r_M \tag{4}$$

are the other three secondary constraints and will be referred to as the longitudinal constraints. Here the constraint variables are just the $g_{\mu o}$. The primary constraints are the coefficients of the $\dot{g}_{\mu o}$. The quantities $\mathcal{H}_{ML}$ and $\mathcal{H}^r_M$ arise from right hand sides of the field equations and represent contributions from the non-gravitational part of the system.

We proceed by solving the N constraint equations for N canonical variables. These variables will, in general, be functionals of the other canonical variables and the constraints. When substituted into the Hamiltonian there will result a new Hamiltonian which is free of these solved variables but which now contains additional terms depending on the constraints. If the variables which we have solved for have been chosen appropriately, these additional terms will not contain the constraints in such a manner that they will diverge when we set the constraints equal to zero. With this restriction in mind, we can then say that only those additional terms which are linear in the constraints can contribute to the equations of a dynamical variable since the constraints are considered to vanish weakly in the sense of Dirac, i.e., we can make use of their vanishing after we have computed a Poisson bracket. However, we can eliminate the terms in the Hamiltonian which are linear in the constraint by requiring that their coefficients vanish.

Because of the special form of the Hamiltonian mentioned above, these coefficients will in general each contain two terms, one independent of the constraint variables and the other depending only on these variables. Thus the coefficients can be made to vanish by an appropriate choice of the constriant variables. These expressions for the constraint variables will then be taken as our primary conditions.

With the imposition of the above mentioned primary constraints we arrive at a new Hamiltonian which is free of constraints and also does not depend upon the « solved for » variables. The variables which

* In our equations we make use of the Einstein summation convention with Greek indicies running from 0 to 3, Latin from 1 to 3. The signature of our metric will be (1, — 1, — 1, —1) and we use units in wich $c = 1$. The quantities e^{rs} are the components of the inverse to g_{rs} and $K = \det g_{ab}$. On the surface $x^0 = \text{const.}$ we raise and lover indicies with e^{rs} and g_{rs} respectively.

are conjugate to these solved variables are now constants of the motion and hence, if we initially impose additional conditions (our secondary conditions) which depend only on these latter variables they will retain their form throughout the evolution of the system.

By following the above procedure we thus arrive at a sufficiently large numer (2 N) of conditions on the variables of the theory to allow us to completely fix the coordinate system. Further, the variables of the theory divide up into three classes : the constraint variables and their canonical conjugates, the « solved for » variables and their canonical conjugates and finally the remaining variables. These latter variables then form a minimal set of true observables and as such constitute the basis for a complete description of the irreducible physics of the system. In the next two sections we shall apply the procedure outlined above to both the electromagnetic and gravitational case. In both instances there will appear a « natural » set of variables to « solve for ». Once we have decided upon them, the form of the primary and secondary conditions follows directly. We should emphasize that, while the choice which we shall make is the most natural, almost any choice would do as well and hence there is nothing special about the conditions of which we shall make use.

3. — Electromagnetic theory

We see from the form of the Hamiltonian (1) that the primary constraint of the theory is just

$$\psi \approx 0 \tag{5}$$

while the secondary constraint has the form

$$g \equiv \nabla \cdot \pi + \rho \approx 0 \, . \tag{6}$$

In order to solve this secondary constraint let us write π as

$$\pi = \pi_{tr} + \pi_{lo} \tag{7}$$

where π_{tr} and π_{lo} are defined in the usual manner to satisfy

$$\nabla \cdot \pi_{tr} \equiv 0 \tag{8a}$$

and

$$\nabla \times \pi_{lo} \equiv 0 \, . \tag{8b}$$

As a consequence of eq. (8*b*) we can set

$$\pi_{lo} = \nabla \cdot \theta \, . \tag{9}$$

Eq. (6) can now be written as

$$g \equiv \nabla^2 \theta + \rho \approx 0 \tag{10}$$

which we can solve in the form

$$\theta(x) = \int \mathrm{G}(x, x') \, \{g(x') - \rho(x')\} \, d^3 x' \tag{11}$$

where $\mathrm{G}(x, x')$ is the Green's function for the Laplacian operator, and is thus given by

$$\mathrm{G}(x, x') = -(4\pi \, |x - x'|)^{-1} . \tag{12}$$

If we now substitute our expression for θ into the expression (1) for the Hamiltonian we obtain

$$\mathrm{H} = \int \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_0} \pi_{tr}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}_{tr})^2 - \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} + \varphi g + \dot{\varphi}\psi \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\varepsilon_0} \int \mathrm{G}(x, x') \left[\rho(x) - g(x)\right] \left[\rho(x') - g(x')\right] d^3 x' \right\} d^3 x. \tag{13}$$

As we mentioned above, we can disregard the term which is quadratic in $g(x)$ since it will not contribute to the equations of motion. The terms which are linear in $g(x)$ can then be eliminated by requiring, as our primary condition, that

$$\varphi(x) - \int \mathrm{G}(x, x') \rho(x') d^3 x' = 0 \tag{14}$$

or equivalently, that

$$\nabla^2 \varphi(x) - \rho(x) = 0\,. \tag{15}$$

Since our Hamiltonian is now independent of π_{lo}, we can impose the secondary condition

$$\mathbf{A}_{lo}(x) = 0\,. \tag{16}$$

Our final Hamiltonian thus takes the form

$$\mathrm{H} = \int \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_0} \pi_{tr}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j}_{tr}\cdot\mathbf{A}_{tr} \right\} d^3 x$$
$$+ \frac{1}{2\varepsilon_0} \iint \rho(x)\, \mathrm{G}(x, x')\, \rho(x')\, d^3x\, d^3x' \tag{17}$$

where we notice that the appearance of the Coulomb interaction term is a direct consequence of our procedure. Again it should be emphasized that there is nothing unique about the conditions (15) and (16). If we had solved eq. (6) for π_x we could have carried through our entire procedure as before. We would replace eq. (15) by the condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \pi_y}{\partial y} - \frac{\partial \pi_z}{\partial z} = \rho \tag{15$'$}$$

and eq. (16) by the condition

$$\mathrm{A}_x(x) = 0\,. \tag{16$'$}$$

Our final Hamiltonian would have essentially the same form as that given in eq. (17), including the Coulomb interaction term.

4. — Gravitational theory

In attempting to apply our procedure to general relativity we are faced with two difficulties not encountered in the electromagnetic case. For one, the constraints (3) and (4) are more complicated in form than the corresponding electromagnetic constraint (6), thus making more difficult their solution. Perhaps more serious, at least from the conceptual point of view, is the fact that the gravitational Hamiltonian [2] does not contain a constraint free part. This has as a consequence that, among other things, all invariants of the theory are at the same time constants of the motion. Since neither of these difficulties has been resolved to date we shall only be able to indicate possible lines of approach in this section.

As to the solution of the constraint equations, the best that one can hope for, of course, is closed form, exact solutions. If such is possible it will almost certainly depend on choosing the « right » variables to solve for. In the electromagnetic case it was most natural to solve for π_{10} (although with greater difficulty we could solve for π_x). At present, no analogous variables suggest themselves for the rigorous form of the constraints (3) and (4). Because the longitudinal constraints (4) can be written as

$$\mathcal{H} = \pi^{rs}|_s \tag{18}$$

where $|_s$ indicates covariant differentiation on the surface $x^0 =$ constant, one is led to seek a decomposition of π^{rs} into longitudinal and transverse parts. Thus one might write

$$\pi_{rs} = \mathrm{P}_{rs} + q_{r|s} + q_{s|r} + \psi_{|rs} \tag{19}$$

where

$$\mathrm{P}^{rs}|_s \equiv 0 \tag{20a}$$

$$e^{rs}(q_r|_s + \varphi|_{rs}) = 0\,. \tag{20b}$$

Unfortunately, because of the non-commutativity of covariant differentiation, it is general not possible to carry through the procedures available to one in flat space for the determination of the various components of π_{rs} in terms of this quantity. Alternately, one could hope to solve (18) directly for three components of π^{rs}, say π^{12}, π^{23}, π^{31}. Calling the variables π^3, π^1, π^2, respectively we might write

$$\pi^r(x) = \int \mathrm{G}^s(x, x')\, \Gamma^s(x')\, d^s x' \tag{21}$$

where $\mathrm{G}^r_s(x, x')$ is a kernal and is independent of π^{rs} while the Γ^s are linear functionals of π^{11}, π^{22}, π^{33}. Indeed, one can obtain formally a Liouville-Neuman type expansion for $\mathrm{G}^r_s(x, x')$. However, there appears to be no closed form expression for the $\mathrm{G}^r_s(x, x')$ nor has any convergence criteria been evolved as yet. An exact solution of the Hamiltonian constraint (3) appears to be even more difficult than the longitudinal constraints. While the latter are essentially linear equations for the π' s, there does not seem to existe any quantity which appears linearly in the expression for $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}$ and for which we might conveniently solve.

An alternate approach to the solution of the constraint equations is to make use of a weak field expansion of the field variables. We expand g_{rs} and π^{rs} according to :

$$g_{rs} = \overset{0}{g}_{rs} + k\, \overset{1}{g}_{rs} + k^2\, \overset{2}{g}_{rs} + \ldots \tag{22a}$$

and

$$\pi^{rs} = k\, \overset{1}{\pi}{}^{rs} + k^2\, \overset{2}{\pi}{}^{rs} + \ldots \tag{22b}$$

where $\overset{\circ}{g}_{rs} = -\delta_{rs}$, the Kronecher delta. We can then decompose each term of the expansion into transverse and longitudinal parts. Accordingly, we set

$$\overset{n}{\pi}_{rs} = \overset{n}{p}_{rs} + \frac{1}{2}\left(\delta_{rs}\overset{n}{p} - \frac{1}{\nabla^2}\overset{n}{p}_{,rs}\right) + \overset{n}{q}_{r,s} + \overset{n}{q}_{s,r} + \overset{n}{\psi}_{,rs} \tag{23a}$$

and

$$\overset{n}{g}_{rs} = \overset{n}{h}_{rs} + \frac{1}{2}\left(h_{rs}\overset{n}{p} - \frac{1}{\nabla^2}\overset{n}{h}_{rs}\right) + \overset{n}{\gamma}_{r,s} + \overset{n}{\gamma}_{s,r} + \overset{n}{\varphi}_{,rs} \tag{23b}$$

where

$$\overset{n}{p}_{r,ss} = 0\,, \qquad \overset{n}{p}_{rr} = 0\,, \qquad \overset{n}{q}_{r,r} + \psi_{,rs} = 0\,. \tag{24a}$$

$$\overset{n}{h}_{r,ss} = 0\,, \qquad \overset{n}{h}_{rr} = 0\,, \qquad \overset{n}{\gamma}_{r,r} + \overset{n}{\varphi}_{,rs} = 0\,. \tag{24b}$$

At any stage of the approximation the longitudinal constraints take the form :

$$\mathcal{H}^r = 2\overset{n}{q}^r{}_{,ss} + \overset{n}{g}^r \tag{25}$$

while the Hamiltonian constraint takes the form :

$$\overset{n}{\mathcal{H}}_\mathrm{L} = -\overset{n}{h}_{,ss} + \overset{n}{g}_\mathrm{L} \tag{26}$$

where $\overset{n}{g}^r$ and $\overset{n}{g}_\mathrm{L}$ depend only upon variables of order $n-1$ and lower. Thus we can solve for $\overset{n}{q}^r$ and $\overset{n}{h}$ directly in terms of the Greens fuction (12).

As an example of our technique, we have investigated the case of the gravitational field in interaction with a scalar meson field. The Lagrangian density for this system is given by :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{grav} + \mathcal{L}_\mathrm{meson}$$

where $\mathcal{L}_\mathrm{grav}$ is the modified Lagrangian density for the gravitational field as given by DIRAC[1] while :

$$\mathcal{L}_\mathrm{meson} = k\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}m\varphi^2\right) \tag{27}$$

A short calculation then leads to the following expression for $\mathcal{H}_\mathrm{ML}$ and $\mathcal{H}^r{}_\mathrm{M}$:

$$\mathcal{H}_\mathrm{ML} = k\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}^{-1}\pi^2 - \frac{1}{2}\mathrm{K}\,e^{rs}\varphi_{,r}\varphi_{,s} + \frac{1}{2}\mathrm{K}\,m\,\varphi^2\right) \tag{28}$$

$$\mathcal{H}^r{}_\mathrm{M} = k\,e^{rs}\varphi_{,s}\pi \tag{29}$$

We will not go into the details of the calculation but merely state the results for the first approximation. Since we solve the constraint equations for h and q^r we can take, as our secondary conditions, the equations

$$\overset{1}{p} = 0 \tag{30}$$

and

$$\overset{1}{\gamma}_r = 0 \tag{31}$$

If we make use of these conditions we obtain, as our approximate Hamiltonian the expression

$$\mathrm{H} = k \int \frac{1}{2} (\pi^2 + \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} + m\, \varphi^2)\, d_3 x + k^2 \int \Big\{ \overset{1}{p}_{rs} \overset{1}{p}_{rs} + 2 \overset{1}{q}_{r,s} \overset{1}{q}_{r,s}$$
$$- \frac{1}{2} \overset{1}{q}_{r,r} \overset{1}{q}_{s,s} + \frac{1}{2} \overset{1}{h}_{rs}\, \varphi_{,r}\, \varphi_{,s} + \frac{1}{4} \overset{1}{h}_{rs,u} \overset{1}{h}_{rs,u} - \frac{1}{8} \overset{1}{h}_{,u} \overset{1}{h}_{,\mathrm{u}}$$
$$+ \frac{1}{4} \overset{1}{h} (\pi^2 - \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} - m\, \varphi^2 + \frac{1}{4} \left(\delta_{rs} \overset{1}{h} - \frac{1}{\nabla^2} \overset{1}{h}_{,rs} \right) \varphi_{,r}\, \varphi_{,s}$$
$$+ \overset{1}{g}_{or} \overset{1}{\mathcal{H}}{}^r - \frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^{oo} \overset{1}{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}} \Big\}\, d^3 x \tag{32}$$

where, in this approximation, the Hamiltonian constraint appears as

$$\overset{1}{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}} \equiv - \overset{1}{h}_{,ss} + \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} + \frac{1}{2} m\, \varphi \tag{33}$$

and the longitudinal constraints take the form :

$$\overset{1}{\mathcal{H}}{}^{\mathrm{r}} \equiv - 2 \overset{1}{q}_{r,ss} + \varphi_{,r}\, \pi \tag{34}$$

We can solve the constraint equations (32) and (33) for h and q_r respectively to obtain :

$$\overset{1}{h} = \int \mathrm{G} (x - x') \left\{ \frac{1}{2} \pi'^2 + \frac{1}{2} \varphi'_{,r}\, \varphi'_{,r} + \frac{1}{2} m\, \varphi'^2 - \mathcal{H}'_{\mathrm{L}} \right\} \tag{35}$$

and

$$\overset{1}{\mathrm{q}}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{G} (x - x') \, \{ \varphi'_{,r}\, \pi' - \overset{1}{\mathcal{H}}{}'^r \}\, d^3 x' \tag{36}$$

where $\mathrm{G}\,(x - x')$ is given by the expression (12). When we insert the above expressions for $\overset{1}{h}$ and $\overset{1}{q}_r$ into our Hamiltonian we obtain the rather lengthy expression :

$$\mathrm{H} = k \int \frac{1}{2} (\pi^2 + \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} + m\, \varphi^2)\, d^3 x + k^2 \int \Big\{ \overset{1}{p}_{rs} \overset{1}{p}_{rs} + \frac{1}{4} \overset{1}{h}_{rs,u} \overset{1}{h}_{rs,u}$$
$$+ \frac{1}{2} \mathrm{h}_{rs}\, \varphi_{,r}\, \varphi_{,s} \Big\}\, d^3 x - \frac{1}{2} \iint \mathrm{G} (x - x') \Big\{ \varphi_{,r}\, \pi\, \varphi'_{,r}\, \pi'$$
$$+ \frac{1}{8} \left(\pi^2 + \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} + \frac{1}{2} m\, \varphi^2 \right) \left(\frac{5}{4} \pi'^2 + \frac{1}{4} \varphi'_{,s}\, \varphi'_{,s} - \frac{3}{4} m\, \varphi'^2 \right) \Big\{\, d^3 x\, d^3 x'$$
$$- \frac{1}{8} \iiint \mathrm{G}_{,r} (x - x')\, \mathrm{G}_{,s} (x - x'') \, \{ 3\, \varphi'_{,r}\, \pi'\, \varphi''_{,s}\, \pi$$
$$- (\pi'^2 + \varphi'_{,u}\, \varphi'_{,u} + m\, \varphi'^2) \}\, \varphi''_{,r}\, \varphi''_{,s}\, d^3 x\, d^3 x'\, d^{3\prime\prime} \tag{37}$$

provided we take, as our primary conditions, the equations :

$$\overset{1}{g}{}^{oo}{}_{,rr} + \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,r}\, \varphi_{,r} + 3\, m\, \varphi^2 \right) - \int \mathrm{G}_{,rs} (x - x')\, \varphi'_{,r}\, \varphi'_{,s}\, d^3 x' = 0 \tag{38}$$

and :

$$\overset{1}{g}_{or,ss} + \varphi_{,r}\,\pi - \frac{3}{4}\int G_{,rs}(x - x')\,\varphi'_{,s}\,\pi'\,d^3x' = 0\,. \tag{39}$$

In the above equations primed and double primed quantities are to be considered as functions of x' and x'' respectively while unprimed quantities are taken as functions of x. We note that the Hamiltonian is composed of four parts : a free field meson term, a free field gravitational term, an interaction term and a « Coulomb » interaction term. While the first two terms are positive definite, nothing can be said concerning the sign of the last two terms. This uncertainty in sign is a reflection of the fact that all gravitating bodies tend to attract each other.

It is clear from the form which the constraint equations (25) and (26) take that we can carry through the above procedure for each order of the expansion. It is also clear that beyond the first approximation the labor involved becomes prohibitive. Furthermore, if it is reasonable to expand the metric according to (22) then it would be pointless, from the point of view of physical observation to carry the expansion beyond the first order. To this order of approximation our procedure can equally well be applied to any type of field interacting with the gravitational field. However, if gravitation is ever to play an important role in the elementary particle domain then the weak field approximation must break down in this domain. Such a situation would arise, for instance, if the space-time manifold no longer had the topology of the Euclidean manifold in sub-atomic regions. If this were the case, then it becomes necessary to pursue methods for the rigorous solution of the constraints.

In concluding this section we should like to comment briefly on the second difficulty mentioned in the beginning, namely that the rigorous Hamiltonian (2) does not contain a constraint free part. Since only invariants are physically observable and invariants must commute with each of the constrainte we are led, somewhat reluctantly, to the conclusion, first reached by Zeno in the fifth century B. C., that all change is illusory and is but a consequence of the particular mode of description employed. As an example of an invariant we could take the maximum (or minimum) value obtained on the space-time manifold by one of the four non-vanishing scalars formed from the Riemann-Christoffel tensor. This quantity is obviously an invariant since it makes no reference to the particular coordinatization of the manifold and, of course, is completely independent of the temporal evolution of the system.

Fortunately we can temper the above conclusions somewhat by noting that only manifestly invariant quantities will have vanishing commutators (Poisson brackets) with the constraints. The invariant discussed above is of this type. As we pointed out earlier, we can also construct invariants by freezing the coordinate system. Invariants formed in this manner will not, in general commute with the constraints. Thus in our example of section III, by imposing the conditions (15′)

and (16′), we convert A_2 and A_3 into invariants and yet these quantities obviously have a non-vanishing commutator with the secondary constraint (6). Thus there is no *a priori* reason why invariants formed by freezing the coordinate system should be constants of the motion. But if this is so we must then be able to apply our method to the Hamiltonian (2). Clearly we cannot set $g^{oo} = g_{or} = 0$. Furthermore, it would appear at first sight that even if we could solve the constraint equation (3) and (4) exactly for four of the field variables, upon substitution into the Hamiltonian (2) we would get identically zero ,in the absence of a matter field). Following a suggestion by DIRAC [3] for obtaining a non-vanishing expression for the energy of the gravitational field we rewrite equation (2) as :

$$\mathrm{H} = \int \{\mathcal{H}_{\mathrm{L}} + \left(1 - g^{os} - \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_{\mathrm{L}} + 2 g_{or} \mathcal{H}^{r} + 2 g_{o\mu} \pi^{o\mu}\} \, d^3 x \quad (40)$$

The quantity $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}$ contains the complete divergence $(k^{-1} (k^2 e^{rs})_{,r})_{,s}$ and hence this term may be dropped from the first term of the expression for H. Now it will no longer be true that when solutions of the constraint equations are substituted into this modified Hamiltonian without the divergence term that we will obtain an identically vanishing result. One can hope that our procedure will be applicable to this modified Hamiltonian and indeed, if one re-examines the linear approximation, it will be seen that there the modified Hamiltonian was a natural result of the approximation procedure. Of course, there still remains the problem of solving the Hamiltonian constraint exactly before one can be sure that the suggested solution of our difficulty is in fact a solution.

5. — Conclusions

A program for dealing with the difficulties which arise in general relativity as a consequence of the constraint equations as been set forth in the above work. Its success rests on our ability to solve these equations for four of the field variables. Since there appears to be little which restricts which four variables we solve for, there is some reason to believe that a judicious choice might lead to solutions. However, at present we must point out that these solutions are still a problem for the future and the best we can do at present is to work with a weak field approximation. Nevertheless we have been able to gain some additional insight into the nature of invariants and their construction. In particular we saw that, while all manifestly invariant quanties must *a fortiori* be constants of the motion, no such restrictions apply to invariants obtained by freezing the coordinate system.

Although the above-mentioned solutions of the constraint equations would be adequate for the classical version of the theory in that they would allow us to construct a minimal set of observables, there are additional difficulties attendant on the quantized version of the theory.

Since our procedure involves the imposition of coordinate conditions we must be sure, if the theory is to be completely covariant, that the irreducible physics of the field remains unchanged when we go over to another set of conditions. When we are dealing with operators for our basic variables this implies that our coordinate transformations are no longer c-number transformations. Thus, although we might start out with c-number coordinates, such a transformation would result in q-number coordinates. Furthermore, while the Lagrangian of general relativity is manifestly invariant in the face of c-number transformations, it is not obvious that it retains this property under q-number transformations. An adequate understanding of these difficulties will probably only come with a better understanding of the measurement process in general relativity.

Acknowledgments

The author would like to express his thanks to Professors P. A. M. Dirac and David Finkelstein for many stimulating and helpful discussions dealing with the above work.

REFERENCES

[1] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, ***A 246***, 333 (1958).
[2] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner (private communication).
[3] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.*, **114**, 924 (1959).

THE ENERGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD

by P. A. M. DIRAC,

Professor — Cambridge (England)

RESUME

Quand on met la théorie de la gravitation sous forme hamiltonienne, il y a des équations de champ qui deviennent des contraintes, tandis que les autres équations de champ deviennent des équations de mouvement. On devrait définir l'énergie d'une telle façon qu'elle nous donne une intégrale utile des équations de mouvement, qui est indépendante des contraintes. Avec la définition usuelle de l'énergie, qui emploie la composante t_0^0 d'un pseudotenseur, l'utilité de la conservation de l'énergie est démontrée pour quelques exemples typiques. Mais cette énergie dépend du système des coordonnées.

Les variables $g_{\mu 0}$ ne sont pas nécessaires pour la description d'un état, ainsi elles ne devraient pas entrer dans l'expression pour la densité de l'énergie. Mais elles entrent dans t_0^0. On peut améliorer l'expression pour la densité de l'énergie d'une telle façon qu'elle ne dépende plus des $g_{\mu 0}$. L'énergie améliorée ne dépend pas autant du système des coordonnées, et il y a un cas important pour lequel elle ne dépend plus du système des coordonnées. C'est le cas d'un champ gravitationnel faible, quand les ondes gravitationnelles ont toutes la même direction de mouvement.

The Stress Pseudo-Tensor and the Hamiltonian

We shall consider the gravitational field interacting with a distribution of matter or with other fields. We have the field variable $g_{\mu\nu}$ to describe the gravitational field and other field variables to describe the other things. Let us call all the field variables q_N for various N.

We assume an action density $\mathcal{L}$ which is a function only of the q_N and their first derivatives $q_{N,\mu}$. The field equations are thus :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{N,\mu}}\right)_{,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_N} = 0 \qquad (1)$$

for all N.

The stress pseudo-tensor density $t_\mu{}^\nu$ is defined by :

$$t_\mu{}^\nu = q_{N,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{N,\mu}} - g_\mu{}^\nu \mathcal{L} . \qquad (2)$$

It is invariant under transformations which replace the q's by functions of the q's. So one could take the $g^{\mu\nu}$ as the basic gravitational field variables instead of the $g_{\mu\nu}$ and one would get the same $t_\mu{}^\nu$. However if one makes a transformation of the coordinates x^μ, $t_\mu{}^\nu$ does not transform like a tensor density, so any physical significance that we may attach to $t_\mu{}^\nu$ is associated with one particular system of coordinates.

The conservation law

$$t_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0 \tag{3}$$

follows directly from the field equations (1).

Let us adopt a system of coordinates such that the three-dimensional surfaces x^0 = constant are all space-like. We can then look upon x^0 as the time variable, and the physical conditions for all x^1, x^2, x^3 for a given x^0 fix the state at a certain time. The field equations become the Lagrangian equations of motion that follow from the Lagrangian

$$\mathrm{L} = \int \mathfrak{L}\, d^3x.$$

The usual rule for passing from the Lagrangian to the Hamiltonian gives

$$\mathrm{H} = \int \left(q_{\mathrm{N},0} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{\mathrm{N},0}} - \mathfrak{L} \right) d^3 x. \tag{4}$$

The Lagrangian equations of motion become some of them Hamiltonian equations of motion and some of them constraints on the Hamiltonian variables that describe the state at a certain time.

From (2) and (4) we see that

$$\mathrm{H} = \int t_o{}^o\, d^3 x\,. \tag{5}$$

It is usual to assume the Hamiltonian to be the total energy. This assumption would be consistent with the view that $t_o{}^o$ is the energy density. However, it would be equally consistent with the energy density being $t_o{}^o + v^r{}_{,r} (r = 1, 2, 3)$ for any localized 3-vector v^r, because the Hamiltonian $\int (t_o{}^o + v^r{}_{,r})\, d^3x$ leads to the same Hamiltonian equations of motion as (5). Also the conservation of energy would not be affected. It would not matter if the extra term $v^r{}_{,r}$ does not transform correctly under transformations of the coordinates x^μ, because $t_o{}^o$ itself does not transform correctly. The modified energy density might lead to a different value for the total energy.

It has been shown by Bergmann and Schiller [1] that, with the help of the field equations, $t_o{}^o$ equals a three-dimensional divergence,

$$t_0{}^0 + \mathrm{U}^r{}_{,r} = 0 \tag{6}$$

The quantity U^r is called a superpotential. If we take $v^r = \mathrm{U}^r$, we get an expression for the energy density that vanishes everywhere by virtue of the field equations. It is clear that some further requirement must be introduced to make the energy concept definite.

The Utility of the Energy Concept.

In elementary dynamics the energy appears as a useful integral of the equations of motion. We can impose a similar requirement on the energy in relativistic field theory. The conservation of energy must provide information that is helpful when one is trying to obtain a solution of the equations of motion starting from a given initial state.

Equation (6) does not involve any second time derivatives, i.e. any accelerations, since both $t_o{}^o$ and U^r involve only field quantities and their first derivatives. So it provides constraints on the Hamiltonian variables that describe the state at a certain time. There is one of these constraints for each point of three-dimensional space. In fixing the initial state we must choose values for the dynamical variables so as to satisfy these constraints. The Hamiltonian equations of motion will ensure that the constraints remain satisfied if they are initially satisfied. For the energy concept to be useful in the solution of the Hamiltonian equations of motion, the conservation of energy must provide information additional to equation (6).

With the energy density defined as $t_o{}^o$, equation (6) provides a formula for the total energy in a region R in terms of a surface integral over the boundary of R,

$$\int_R t_o{}^o\, d^3 x = -\int U^r\, dS_r. \tag{7}$$

The conservation of energy tells us that $\left(\int_R t_o{}^o\, d^3 x\right)_{,0}$ must be expressible as a surface integral over the boundary of R, the integrand being interpreted as the energy flux. This information follows immediately from (7) with $U^r{}_{,o}$ taken as the energy flux, and is then not additional to (6). From (3) we get

$$\left(\int t_o{}^o\, d^3 x\right) = -\int t_o{}^r\, dS_r. \tag{8}$$

In some important examples we can infer that $U^r{}_{,o}$ is of the wrong order of magnitude to be the energy flux, and by using (8) with $t_o{}^r$ as the energy flux we can get information that is additional to (7) or (6).

Example (*i*). — Let us suppose the gravitational field is weak, of order γ say, and let us use a system of coordinates which is approximately Cartesian, so that

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0(\gamma), \qquad g_{\mu\nu,\rho} = 0(\gamma), \tag{9}$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is the metric for special relativity. The superpotential U^r is linear in $g_{\mu\nu,\rho}$, so it is of order γ. The stress pseudo-tensor density $t_\mu{}^\nu$ is quadratic in $g_{\mu\nu,\rho}$, so it is of order γ^2.

If we consider the solution of the field equations to the first order in γ, the constraints (6) become

$$U^r{}_{,r} = 0. \tag{10}$$

We must now put zero for the left-hand side of (7) and we no longer have a formula expressing the energy in a region as a surface integral. But equation (8) holds unchanged, with both sides defined to the order γ^2. So we still have a formula for the time rate of change of the energy in a region, expressing conservation of energy. It gives information about the first-order solution of the field equations, which information is, of course, independent of (10).

The situation is essentially the same if we consider the solution of the field equations to a higher order, say the Mth order. This solution fixes U^r to the Mth order, say $U_M{}^r$, and $t_\mu{}^\nu$ to the $(M+1)$th order, say $t_{(M+1)\,\mu}{}^\nu$. The constraints (6) become

$$t_{Mo}{}^o + U_M{}^r{}_{,r} = 0,$$

and the conservation law (8) becomes

$$\left(\int t_{(M+1)o}{}^o\, d^3x\right)_{,o} = -\int t_{(M+1)o}{}^r\, dS_r,$$

which is independent of these constraints.

Example (*ii*). — Suppose we have some distribution of matter confined to a limited space and we consider the total energy in a large region surrounding that space, say a large sphere of radius R. Suppose further that, for large distances r,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0(r^{-1}), \qquad g_{\mu\nu,\rho} = 0(r^{-2}). \tag{11}$$

Then at large distances $t_o{}^o$ is of order r^{-4}, so $\int t_o{}^o\, d^3x$ converges when taken over the whole of space, giving a finite total energy. We now have U^r of order r^{-2}, so the right-hand side of (7) tends to a finite limit as $R \to \infty$. Thus (7) provides a formula for the total energy, which can be applied when one knows the solution of the field equations for large r to the first order in r^{-1} for $g_{\mu\nu}$.

Since $t_\mu{}^\nu$ is of order r^{-4}, the conservation law (8) gives

$$\left(\int t_o{}^o\, d^3x\right)_{,o} = 0.$$

Thus the total energy is constant. This result is independent of the formula (7) and of the constraints (6).

Example (*iii*). — As before, we suppose a distribution of matter confined to a limited space and we consider the energy in a large sphere of radius R surrounding that space. We now suppose that for large r

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0(r^{-1}), \qquad g_{\mu\nu,\rho} = 0(r^{-1}). \tag{12}$$

This case occurs when there is continuous emission of gravitational waves.

We now have $t_o{}^o$ of order r^{-2}, so

$$\int_R t_o{}^o\, d^3x = 0(R).$$

This result means physically that the total energy of the gravitational waves within the sphere is proportional to R for large R. We have also that U^r is of order r^{-1}, making the right-hand side of (7) of order R. Thus again (7) provides a formula for the energy within the large sphere R, which can be applied when one knows the solution of the field equations for large r to the first order in r^{-1}.

The right-hand side of (8) is now independent of R for large R. Thus the energy within the sphere R changes at a rate that is independent of R. This result again goes beyond what can be inferred from (7).

In each of the above examples the conservation law (8) gives information additional to that which is given by the constraints (6) or (7). This shows the utility of the energy concept with t_o^o defined as the energy density. In each case we must take t_o^r as the energy flux to get a useful result.

Elimination of the $g_{\mu o}$.

With the energy density defined as t_o^o, the energy in a region depends on the system of coordinates. This is a difficulty that does not affect the value of the energy concept as an aid to getting solutions of the equations of motion, but it restricts the physical meaning that can be attached to the energy. The Hamiltonian theory has provided some help with this difficulty by showing up the special rôle of the variables $g_{\mu o}$.

To describe the state at a certain time t one needs the variables $g_{rs}\,(r, s = 1, 2, 3)$ for all x^1, x^2, x^3 to fix the metric of the hypersurface $x^0 = t$. One does not need the variables $g_{\mu o}$. These serve only to fix the neighbouring hypersurface $x^0 = t + \varepsilon$, and can be varied arbitrarily without affecting the state at time t.

To complete the description of the state at time t we may use, besides the variables g_{rs}, only certain suitably chosen variables that are independent of the $g_{\mu o}$, more precisely, variables that are unaffected by a transformation of the coordinates x^μ which leaves the hypersurface $x^0 = t$ and the coordinate system x^1, x^2, x^3 on this hypersurface invariant. For example, if we are dealing with a vector field A^μ, the four variables independent of the $g_{\mu o}$ are the three covariant components A_r and the normal component $A^\mu l_\mu$, l_μ being the unit normal to the hypersurface,

$$l_\mu = \frac{g_\mu{}^0}{(-g^{oo})^{1/2}} \tag{13}$$

(We are taking g_{oo} negative.) Similarly for a tensor $B_{\mu\nu}$, which may be the covariant derivative $A_{\mu;\nu}$ of A_μ, the quantities independent of the $g_{\mu o}$ are B_{rs}, $B_{r\mu}\,l^\mu$, $B_{\mu s}\,l^\mu$, $B_{\mu\nu}\,l^\mu\,l^\nu$.

It should be noted that, for a vector A_μ, the ordinary and covariant derivatives $A_{r,s}$ and $A_{r;s}$ are both independent of the $g_{\mu o}$. Their difference, namely $\Gamma_{rs}{}^{\mu} A_{\mu}$, is thus independent of the $g_{\mu o}$. We may take A_{μ} here to be the unit normal (13) and we find that the quantity

$$\frac{\Gamma_{rs}{}^{o}}{(-g^{oo})^{1/2}} \tag{14}$$

is independent of the $g_{\mu o}$. This quantity may be called the invariant velocity of g_{rs}, as it consists of the ordinary velocity $g_{rs,o}$ with some modifications that are necessary to produce a quantity independent of the choice of coordinate system outside the hypersurface $x^0 = t$.

The complete set of variables needed to describe the state at time t comprises the g_{rs}, the invariant velocities (14), and non-gravitational variables chosen as above to be independent of the $g_{\mu o}$. In the Hamiltonian formalism one has momentum variables p^{rs} conjugate to the g_{rs}. These momenta are merely linear combinations of the invariant velocities (14) and take the place of them.

The energy density at a certain place and time should not depend on variables that are irrelevant for the description of the state at that time, so it should not depend on the $g_{\mu o}$. Now $t_o{}^o$ does depend on the $g_{\mu o}$. We can eliminate the $g_{\mu o}$ from it by expressing it explicitly as a function of the $g_{\mu o}$, g_{rs}, p^{rs}, and non-gravitational variables chosen as above to be independent of the $g_{\mu o}$, and then substituting

$$g_{\mu o} = -\delta_{\mu o} \tag{15}$$

in it. The result, w say, gives an improved expression for the energy density, independent of the $g_{\mu o}$. It equals $t_o{}^o$ for a coordinate system satisfying (15), but is different for a general coordinate system.

We can apply the same process of eliminating $g_{\mu o}$ to the superpotential U^r. We get an improved superpotential, u^r say, independent of the $g_{\mu o}$ and connected with w a similar equation to (6),

$$w + u^r{}_{,r} = 0 \,. \tag{16}$$

This equation enables one to express the total of the improved energy in a region as a surface integral over the boundary of the region.

There are two objections to taking w as the energy density.

(1) w still makes the energy in a region depend on the system of coordinates, although not to the same extent as $t_o{}^o$ does. The energy is affected by a change in the coordinates x^r of the hypersurface $x^0 = t$. Also, in the weak field approximation, a small deformation of the hypersurface of order γ changes w by a quantity of order γ^2, which is the same order as w itself. This is too large to be physically permissible.

(2) The energy defined in terms of w is conserved for a coordinate system satisfying (15), when $w = t_o{}^o$, but is not conserved for a general coordinate system.

Objection (2) does not apply to the original energy density $t_o{}^o$, so one might think that one has made things worse by passing from $t_o{}^o$ to w. However, when one looks into it, one sees that objection (1) is the important one, and (2) is just a consequence of (1) and not an independent objection.

Let us take a given initial state on the hypersurface $x^0 = t$. We get the slightly later state on the hypersurface $x^0 = t + \varepsilon$ by applying a certain displacement in space-time to each point of the original hypersurface. The main part of the displacement consists in shifting each point through a constant distance ε normal to the surface. This main part is the total displacement in the case when (15) is satisfied, so it conserves the energy. The remainder of the displacement is a small correction, of order $\varepsilon\gamma$ with weak fields, and leads to a change in the energy of a region in accordance with objection (1). It is this change of energy, arising from objection (1), that is responsible for the final energy not being conserved.

We see in this way that objection (1) is the only fundamental one. It has the effect that energy is well-defined only with respect to a system of coordinates, otherwise there is an indeterminacy in it.

The total of the improved energy is finite provided

$$\left.\begin{aligned} & g_{rs} = \delta_{rs} + 0(r^{-1}) \\ & g_{rs,u} = 0(r^{-2}), \qquad p^{rs} = 0(r^{-2}). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

These conditions are somewhat less stringent than the conditions (11) for the total unimproved energy to be finite, as they do not involve the conditions for $g_{\mu o}$ contained in (11), namely

$$g_{\mu o} = \eta_{\mu o} + 0(r^{-1}), \qquad g_{\mu o, \nu} = 0(r^{-2}). \tag{18}$$

The difference of the total unimproved and the total improved energy is

$$\int (U^r - u^r)\, dS_r \tag{19}$$

taken over the surface of a large region R. Provided (17) and (18) hold, U^r is of order r^{-2} and $U^r - u^r$ is of order r^{-3}, so (19) vanishes in the limit $R \to \infty$. The conditions (18) are natural ones to take for $g_{\mu 0}$ when (17) hold, so with such « natural coordinates » the totals of the unimproved and improved energies are the same.

If the system of coordinates is changed so as to preserve (17), the total of the improved energy remains invariant. One can see this by making the change in the system of coordinates in two stages. In the first stage the coordinates get changed to an intermediate system of coordinates also satisfying (17) and differing from the initial coordinate system only for large values of r. The energy density then gets changed only for large values of r, which give a negligible contribution to the total energy. In the second stage no change is made in the coordinates for large values of r. There is then no change in the total energy, since $\int u^r\, dS_r$ taken over the surface of a large region is not affected.

With objection (1) not applying to the total energy, objection (2) also will not apply, and we see that the total improved energy will be constant in time provided the conditions (17) hold at all times.

The indeterminacy in the energy concept thus does not affect the total energy, but affects only the localization of energy .

The Energy Density for Unidirectional Waves

The work on the Hamiltonian form of the theory of gravitation [2] shows that the gravitational part of the energy density w consists of two parts, a kinetic energy part having the value

$$w_{\mathrm{K}} = \mathrm{K}^{-1}\left(p^{rs}\, p_{rs} - \frac{1}{2}\, p_r{}^r\, p_s{}^s\right) \tag{20}$$

and a potential energy part having the value

$$w_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{K}^{-1}\,(\mathrm{K}^2\, e^{rs})_{,u}\,\Gamma_{rsv}\, e^{uv}. \tag{21}$$

(K is the square root of the determinant of the g_{rs} and e^{rs} is the reciprocal matrix to g_{rs}.) We shall consider how these expressions are affected by a change in the coordinate system in the case of weak fields.

If we make a change of order γ in the hypersurface $x^0 = t$ by shifting each point of it through a normal distance a, a being a function of x^1, x^2, x^3 of order γ, the change in w_{K} is [3]

$$\delta w_{\mathrm{K}} = -2\,p^{rs}\, a_{,rs}\,. \tag{22}$$

This is of order γ^2, the same as w_{K} itself. The change in w_{P} is of a higher order.

If we make a change of order γ in the coordinate system x^1, x^2, x^3 in the hypersurface, by shifting each point x^r to $x^r + b^r$, the b^r being functions of x^1, x^2, x^3 of order γ, there is no change in w_{K}, as is evident from its tensor character in three dimensions, p^{rs} being a tensor density. The change in w_{P} is [3]

$$\delta w_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\, g_{rr,u}\,(b_{u,ss} - b_{s,us}) + g_{rs,r}\, b_{u,us} - g_{rs,u}\, b_{u,rs}\,. \tag{23}$$

Let us now suppose the gravitational field consists only of waves moving in one direction, say the direction x^3. Then the derivatives $g_{rs,u}$ will vanish unless $u = 3$. If we make a change in the coordinate system so as to preserve the condition that the gravitational field consists only of waves moving in the direction x^3, we can introduce only coordinate waves moving in the direction x^3. This requires that the derivatives $b_{r,u}$ and $a_{,u}$ shall also vanish unless $u = 3$. Equation (23) now gives $\delta w_{\mathrm{P}} = 0$, and equation (22) gives $\delta w_{\mathrm{K}} = -2\,p^{33}\, a_{,33}$.

In space where there is no matter some of the constraints are, for weak fields,

$$p^{rs}{}_{,s} = 0\,.$$

Applied to waves moving only in the direction x^3, they give $p^{r3} = 0$. Hence $\delta w_{\mathrm{K}} = 0$.

We can conclude that the energy density w of weak gravitational waves moving in a single direction is well-defined, independent of the coordinate system. It is only the interference energy density of waves moving in different directions that is subject to indeterminacy.

For examining the question whether accelerating masses emit energy in the form of gravitational waves, we need some localization of the energy concept. It appears that the above conclusion supplies just what is wanted. We take a solution of the field equations in terms of retarded potentials with no ingoing waves. Then for large values of r, the main part of the gravitational field, of order r^{-1}, consists of waves moving in only one direction at each point, namely radially outward. The energy density w at large distances r is now well-defined, independent of any transformation of coordinates that preserves the character of the solution of being expressible in terms of retarded potentials and does not introduce any ingoing coordinate waves.

Such a transformation of coordinates also leaves invariant the total energy within a large region, say the region $r < R$. One can see this by making the transformation in two stages, corresponding to the two stages used in the preceding section in connection with a finite total energy. The first stage changes the coordinates only for large values of r, comparable with R. Provided the intermediate system of coordinates also gives a solution expressible in terms of retarded potentials with no ingoing waves, the energy density will be nowhere altered by the change. The second stage does not change the coordinates for large values of r, of the order R. This makes no change in the total energy within the region.

REFERENCES

[1] P. G. Bergmann and R. Schiller, *Phys. Rev.*, 89, 4 (1953).
[2] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A, 246, 333 (1958).
[3] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev., Letters*, **2**, 368 (1959).

DISCUSSION

Prof. J. Géhéniau. — Remarquez que les g_{rs} sont les mineurs normés des $e^{rs} = g^{rs} - g^{or} g^{os}/g^{oo}$. Du point de vue géométrique, on peut donc dire que M. Dirac utilise l'aspect dual de celui que vient d'exposer M. Lichnerowicz.

Intervention de M. le Professeur C. Möller.

J'aimerais poser deux questions au professeur Dirac :

1) Avez-vous introduit en même temps que la densité d'énergie améliorée, une densité de courant d'énergie améliorée, et est-ce que ces deux quantités sont reliées par une équation de continuité ?

2) Autant que j'ai pu comprendre, la densité d'énergie améliorée et par suite l'énergie contenue dans une région finie de l'espace n'est pas invariante par rapport aux transformations purement spatiales i. e. l'énergie varie quand l'on donne d'autres noms aux points de l'espace physique. Considérez-vous cela comme satisfaisant ?

Réponse à M. Möller.

1) Il y a une difficulté pour la densité de courant d'énergie, qui est reliée à la difficulté de la dépendance de la densité d'énergie du système des coordonnées.

2) Naturellement ce n'est pas satisfaisant que l'énergie varie quand l'on donne d'autres noms aux points de l'espace. On ne peut pas éviter cette difficulté entièrement, mais on l'évite partiellement, parce que l'incertitude de l'énergie se rapporte seulement à l'interférence d'ondes avec des directions de mouvement différentes.

DYNAMICAL STUCTURE AND DEFINITION OF ENERGY IN GENERAL RELATIVITY *

S. DESER

Brandeis University

RESUME

Une formulation « hamiltonienne » des équations de la relativité générale. On fait apparaître des combinaisons de termes conduisant à une formulation du type « 3 + 1 », impliquant une famille d'hypersurfaces orientées dans l'espace, des « équations de contrainte » et des « équations d'évolution ». Discussion du problème de l'impulsion énergie gravitationnelle.

1. — Introduction

In the program of the quantization of the general theory of relativity (1) stress has been laid on the necessity of treating the gravitational field as a dynamical system expressed in canonical form. Only when a theory has been expressed in the standard Hamiltonian form arising in Lorentz covariant theories can the possibility of consistent quantization (by way of the Schwinger Action Principle) be examined. That this is as feasible for the gravitational field as for the more usual fields is masked by the general coordinate invariance of the theory. In I, a beginning was made by separating out the gauges from the dynamical properties for the linearized approximation; we shall here examine this point for the full classical theory, and indicate formally how the canonical structure is to be reached there. In a subsequent paper, its explicit form will be discussed.

In I, the formulation of the general theory in terms of the Action Principle was given. In accordance with the basic requirements of the

* A fuller version of this work has since been published in *Phys. Rev.*, **116**, 1322 (1959).

(1) R. Arnowitt and S. Deser, *Phys. Rev.* **113**, 745 (1959). This paper will be referred to as I. We use, as in I, natural units : $c=1$, $\varkappa = 16\pi\gamma c^{-4} = 1$ (γ is the Newtonian gravitational constant). Greek indices run from 0 to 3, Latin indices from 1 to 3 and $x^0 = t$. Ordinary differentiation is denoted by a comma in a subscript or the symbol ∂_μ.

principle, the Lagrangian was stated in first order form with the metric tensor and affinity treated as independent variables. The action principle yields in general three items : the first order Lagrange equations of motion, and two generating functions. One generating function gives rise to canonical commutation relations, while the second, generating space-time translations, yields the Heisenberg equations of motion. The requirement that the Heisenberg and Lagrange equations be equivalent verifies the consistency of the quantization procedure.

In general relativity the difficulty in carrying out the above program resides in the invariance under the function group of coordinate transformations. In I, this difficulty was overcome for the linearized theory. It was seen there that the process of obtaining the correct canonical variables involved making a « gauge » (i. e., linearized coordinate) transformation from an arbitrary gauge to a « radiation » gauge. We now extend the analysis to consider the full theory in this light. Of the two types of constraints mentioned in I, the algebraic constraint variables can be handled quite simply in this formalism, and their explicit elimination carried out. In the process certain combinations of the remaining variables appear in the equations of motion. These combinations remain redundant until the differential constraints are utilized. However, they are physically significant in that the specification of the fields on a given space-like surface can be given in terms of these combinations. From these considerations it is suggestive to restate the theory in terms of variables that possess the geometrical properties of decomposing the four dimensional characterizations of the space into $3+1$ dimensional aspects. Upon doing this, both the equations of motion and the Lagrangian greatly simplify.

The simplified form of the Lagrangian yields a corresponding set of generating functions. The « energy-momentum » vector so obtained vanishes identically in virtue of the differential constraint equations. Physically, the origin of this phenomenon is related to the general covariance of the theory. This does *not* mean that the physical energy and momentum of the gravitational field is zero. Further, a stress tensor and hence the energy-momentum vector have meaning only when defined in terms of a specific frame (where definite coordinate conditions have been chosen). This will be seen in detail below.

2. — Structure of the Equations of Motion

In the linearized approximation of the full theory, it was found that the proper dynamical variables were certain combinations of the original variables, $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ and $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, the contravariant metric tensor density and the affinity, respectively. The first step in finding the dynamical variables consisted in the linear theory of eliminating the algebraic constraint variables; the non-linearity of the full theory does not intrinsically complicate this part of the analysis. We begin with the first order form of the Lagrangian, as stated in I,

$$I = \int d^4 x \, g^{\mu\nu} \cdot R_{\mu\nu}(\Gamma)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\nu,\mu}) + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} \cdot \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} \cdot \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} \qquad (1)$$

and $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ embodies a symmetrization needed for the quantum case. In this paper we will deal only with the classical problem and hence commutation questions do not enter. The field equations which stem from the independent variation of $g^{\mu\nu}$ and $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ can be cast in the form

$$g_{\mu\nu;\alpha} \equiv g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} = 0 \qquad (2a)$$

$$R_{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\sigma}) = 0 \qquad (2b)$$

The algebraic constraints are contained in eq. (2*a*) while eq. (2*b*) contains the differential constraints. Of the forty equations in (2*a*), thirty are independent of time derivatives. Thus thirty components of the affinity, i. e. $\Gamma^{j}{}_{ik}$, $\Gamma^{k}{}_{io}$ and $\Gamma^{o}{}_{ok}$ can be eliminated in terms of $\Gamma^{o}{}_{ij}$, $\Gamma^{\mu}{}_{oo}$, and the metric. The remaining ten equations involve time derivatives and represent dynamical equations for the six g_{ij}, i. e. the space-like components of the metric tensor, as well as apparently dynamical equations for the four $g_{\mu o}$. However, as in the linearized theory, eq. (2*b*) do not not yield equations canonically conjugate to the latter and hence are really defining equations for $\Gamma^{\mu}{}_{oo}$. Thus, the four missing canonically conjugate equations are replaced by the four differential constraint equations implicit in (2*b*). The four constraint equations, when solved, allow one, in principle, to express four variables from among the twelve quantities $\Gamma^{o}{}_{ij}$, g_{ij} in terms of the remaining eight. This may be symbolized by

$$h_\alpha = h_\alpha(h_\beta) \qquad \beta = 1, 2 \ldots 8 \qquad \alpha = 9, 10, 11, 12. \qquad (3)$$

In the above notation we have for the time-derivative equations :

$$\partial_o h_\alpha = f_\alpha \qquad (4a)$$

$$\partial_o h_\beta = f_\beta \qquad (4b)$$

In eq. (4) the f_α and f_β are functions not only of h_α and h_β but also of the four extra variables $g_{o\mu}$. Note that no time derivatives appear in f_α or f_β. Eqs. (4*a*) actually entail no dynamics. Thus if one inserts (3) into (4*a*) and eliminates the time derivatives of h_β by (4*b*), then eqs. (4*a*) reduce to identities. This is an expression of the Bianchi identities whose effect it is to guarante that the constraint solutions eq. (3) are valid at all times [2]. The remaining eight equations (4*b*), involve the twelve variables h_β and $g_{o\mu}$. Since no time derivatives of $g_{o\mu}$ appear, four of these eight equations can be solved to express $g_{o\mu}$ as a function of

(2) Analogously electromagnetic theory possesses one « Bianchi identity » since it involves only one gauge function. Thus defining $R^{\mu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ ($F^{\mu\nu}$ are the electromagnetic field strengths) then $R^{\mu}{}_{,\mu} \equiv 0$. This guarantees that the $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ constraint equation is preserved in time.

h_β and $\partial_o h_\beta$. As will be seen below, the remaining four equations then allow one to express the time derivatives of four particular combinations of the h_β, say $u_\rho (\rho = 1, \ldots 4)$ in terms of u_ρ, v_ρ and $\partial_o u_\rho$ and $\partial_o v_\rho$ where v_ρ represents the other four independent combinations of h_β. Thus eq. (4*b*) decomposes to read

$$g_{o\mu} = g_{o\mu}(u_\rho, v_\rho, \partial_o v_\rho) \tag{5a}$$

$$\partial_o u_\rho = f_\rho(u_\rho, v_\rho) \tag{5b}$$

Viewing (5*a*) as the equation that determines $g_{o\mu}$ we see that there exist four quantities, the v_ρ in the above notation, which are not determined dynamically. These four quantities are thus the four gauges of the theory and can be chosen as arbitrary functions of the coordinates x^μ. Every such choice then represents a coordinate condition and hence determines a coordinate frame. With a particular choice of $v_\rho = v_\rho(x^\mu)$, the $g_{o\mu}$ are then uniquely determined and one can obtain the four remaining components of the affinity, $\Gamma^\mu{}_{oo}$. Eq. (5*b*) now represents first order dynamical equations for the four dynamical quantities u_ρ. The analysis of the structure of the dynamics up to this point is identical with the linearized approximation treated in I. There exists, however, one rather striking dissimilarity between the full theory's dynamical equations of motion and the linearized ones. This lies in the fact that gauge transformations of the full theory represent general coordinate transformations. Thus we have that a « dynamical » motion in time can be simulated by a coordinate transformation. This is mirrored in the appearance of the arbitrary gauge functions v_ρ in eq. (5*b*). These equations for the time development of u_ρ are only meaningful once one has settled on some specific choice of v_ρ, i. e., chosen a particular coordinate frame. Once this has been done one has a unique set of equations that describe the development of the dynamical variables in time in this frame.

Thus, while the gauge functions cancel out in the linearized theory (as in electrodynamics), in the full theory they must be explicitly chosen to define the coordinate frame. The first order gauges are also coordinate transformations but infinitesimal ones which turn out to be determined only in second order theory.

Assuming that a choice has been made for the functions v_ρ, the four first order equations (5*b*) are not necessarily in canonical Hamiltonian form for two pairs of canonical coordinates. In order to put the equations into canonical form one must choose particular combinations of the u_ρ to form two canonical coordinates and their conjugate momenta. The Hamiltonian H governing this system will then depend parametrically on $v_\rho(x)$. Thus H will be different in different coordinate systems.

However, subsequent [3] work shows that the values of the energy as defined in a wide class of asymptotically flat frames agree for the

(3) See : *J. Math. Phys.*, **1**, 434 (1960).

same physical situation, and are furthermore conserved, i. e., do not depend explicitly on the coordinates. This is what is to be expected physically, as the « preferred » class of frames is just the equivalent of the « Heisenberg » representation in usual physics. That is, unlike in frames which correspond to, say, the Hamilton-Jacobi (Schrödinger) or interaction pictures, the numerical value of the Hamiltonian is the system's energy. This question is separate from that of the coordinate transformation properties of any *given* expression for energy which has been obtained in any one such frame [4].

3. — Geometrical Formulation

Due to the purely quadratic nature of the Lagrangian in the linearized theory, the appropriate dynamical variables were simple combinations of the original variables $g^{\mu\nu}$ and $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ appearing in the curvature scalar. In the full theory this is not the case; the fundamental equations simplify greatly and acquire a natural geometrical meaning if combinations of the variables suggested by the elimination of the algebraic constraints are taken.

The Hamiltonian formulation to be reached treats the time development of the dynamical variables referring to a three dimensional space-like surface which we here choose to be $x^o =$ constant. Thus we adopt the g_{ij} as a preliminary set of dynamical coordinates. The inverse to the three dimensional metric, γ^{ij}, then obeys the equation

$$\gamma^{ij} g_{kj} = \delta^i_k \tag{6}$$

It is clear that the « canonically conjugate » variables to g_{ij} are related to the Γ^o_{ij}. Instead of using these quantities directly, it is analytically convenient and geometrically more significant to replace them by an equivalent set of variables [5]. Thus we define

$$K_{ij} = -N\,\Gamma^o_{ij}, \qquad N = (-g^{oo})^{-1/2} \tag{7}$$

and

$$\zeta^i = N\,g^{oi} \tag{8}$$

The other components of the four dimensional metric tensor can then be expressed in terms of these variables. Latin indices here and below are raised and lowered by means of the three dimensional metric tensors, g_{ij} and γ^{ij}. Note also that

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{^3g} \tag{9}$$

where g is the determinant of the four dimensional metric and $\sqrt{^3g}$ the determinant of the corresponding three dimensional metric g_{ij}. K_{ij} and ζ_i are tensors under three dimensional coordinate transformations.

(4) An investigation of this point is to be found in a forthcoming paper in *Phys. Rev.*, **122** (1961).

(5) In reaching canonical form for the full theory, the closely related variables $\pi^{ij} \equiv -\sqrt{^3g}\,(K^{ij} - g^{ij}K)$ are actually most convenient.

In terms of these quantities, eq. (4) become

$$\partial_o g_{ij} = -2\,N\,K_{ij} + (N\,\zeta_i)_{|j} + (N\,\zeta_j)_{|i} \tag{10a}$$

$$\frac{1}{N}\,\partial_o K_{ij} = {}^3R_{ij} + K\,K_{ij} - 2K_{im}\,K^m{}_j$$

$$-\frac{1}{N}\,[N_{|ij} - N_{|i}\,K_{jm}\,\zeta^m - N_{|j}\,K_{im}\,\zeta^m] + K_{im}\,\zeta^m{}_{|j} + K_{jm}\,\zeta^m{}_{|i} + K_{ij|m}\,\zeta^m \tag{10b}$$

In eq. (10b) ${}^3R_{ij}$ is the three dimensional contracted curvature formed from g_{ij} and γ^{ij}. Similarly the symbol « $_{|i}$ » represents covariant differentiation with respect to the three dimensional metric. Eq. (10) are the dynamical equations for g_{ij} and K_{ij}. The differential constraint variables have yet to be eliminated, however.

The differential constraint equations read

$$R_{nn} - \frac{1}{2}\,g_{nn}\,R \equiv \frac{1}{2}\,({}^3R + K^2 - K_{ij}\,K^{ij}) = 0 \tag{11a}$$

$$R_{ni} - \frac{1}{2}\,g_{ni}\,R \equiv -\,(K^j{}_i - \delta^j{}_i\,K)_{|j} = 0 \tag{11b}$$

In eq. (11) the subscript n refers to the direction normal to the spacelike surface x^o = constant while i represents the three directions within the surface. Also $K \equiv \gamma^{ij}\,K_{ij}$ is the trace of the tensor K_{ij}.

The formulation of the theory in the above notation has a direct geometrical significance in terms of the properties of a three dimensional surface imbedded in a four-space. The K_{ij} arise in differential geometry as the components of the so-called second fundamental form [6]. Thus the K_{ij} represent a measure of the « bending » of the surface with respect to the four dimensional Riemannian space in the sense that they are a measure of the deviation of the surface from the four dimensional geodesics connecting two points. The K_{ij} involve information concerning the continuation of the metric off the surface. This can be seen explicitly in eq. (10a) which states that K_{ij} is essentially proportional to the time derivative of g_{ij}, as expected for a canonical momentum. Eqs. (11) represent the Gauss-Codazzi equations [7] in a geometry restricted by the Einstein equations. These equations clearly involve no time derivatives.

(6) See, for example L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1949).

(7) The twelve eqns. (10) thus divided into the four dynamical equations discussed in the text, four Bianchi identities whose role is to maintain the constraint equations in time and four equations that determine N and ζ_i as functions of g_i^T, g^L, and K^L. This decomposition is identical to the one discussed earlier.

4. — Definition of Energy and Reduction of Number of Variables

We shall now turn to the examination of the meaning of energy in general relativity and to the closely related subject of the nature of the independent dgrees of freedom. While in principle this can be analysed in terms of the equations of motion, it is much easier to deal with these questions from the action integral itself. In the new notation the action integral becomes, by direct substitution into eq. (I).

$$I = \int d^4 x\, R = \int d^4 x \sqrt{{}^3g}\, [-\gamma^{ij}\, \partial_o K_{ij} - \partial_o K + N\, ({}^3R + K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 2\zeta^l (K^j{}_l - \delta^j{}_l K)_{|j} - 2(N_{,i} - N K_{ij} \zeta^j)^{|i}] \tag{12}$$

In obtaining (12) we have explicitly eliminated the algebraic constraint variables. Due to this elimination, the action integral yields the differential equations of motion obeyed by the dynamical variables, i. e., eq. (10) upon varying with respect to g_{ij} and K_{ij}, and the constraint equations (11) upon varying with respect to N and ζ^i. These variations simultaneously lead to the generators of canonical transformations G_χ and G_x. These quantities are

$$G_x = -\int d^3 r\, [\sqrt{{}^3g}\, \gamma^{ij}\, \delta K_{ij} + \sqrt{{}^3g}\, \delta K] \tag{13}$$

$$G_x = \int T^{o\mu\prime}\, \delta\chi_\mu \sqrt{{}^3g}\, d^3 r \tag{14}$$

where $T^{\mu\nu\prime}$ can be obtained by techniques analogous to those of paper I. We do not record it as we will see shortly that it vanishes.

In this form, it is clear that the variables N and η^i are gauge functions and not dynamical quantities as they do not appear in the « kinematic » part of the Lagrangian (the part containing time derivatives) nor in the generator G_χ. Their only role is that of Lagrange multipliers in the action. Thus the Lagrangian now has the form (to within a divergence)

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{6} \pi_a\, \varphi_a - \mathcal{H}'(\pi, \varphi) \tag{15}$$

where $\pi_a \equiv K_{ij}$, $\varphi_a \equiv g_{ij}$ and $\mathcal{H}'$, the « Hamiltonian » density in the action principle is given by :

$$-\mathcal{H}' = N({}^3R + K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 2\zeta^i (K^j{}_i - \delta^j{}_i K)_{|j} \tag{16}$$

From eqn. (14) it follows by direct calculation that $P^{0\prime} = \int d^3 r\, \mathcal{H}'$ and thus $\mathcal{H}'$ represents the « energy » density. As can be seen from eqns. (11), the function $\mathcal{H}'$ is identically zero since it is a linear combination of the differential constraints. Thus $P^{0\prime}$ does not generate true time translations in the theory and hence is not the true Hamiltonian. More generally, the complete generator G_χ vanishes identically for the same reason. In order to see the meaning of this result let us insert the differential constraints into the Lagrangian of eqn. (12). Leaving aside the irrelevant divergence term, the action reduces down to the simple form :

$$I = \int d^4x \sqrt{{}^3g}\, [-\gamma^{ij}\, \partial_0 K_{ij} - \partial_0 K] \tag{17}$$

Care must be taken in obtaining the equations of motion from varying (17). Thus not all the γ^{ij} and K_{ij} are independent since we have assumed at this point that the differential constraint variables have been eliminated. In the linearized theory the constraint equations eliminated the four quantities g^T, K_i^T, and K^T where these variables are related to g_{ij} and K_{ij} according to the general orthogonal decomposition of a symmetric tensor $f_{ij} = f_{ji}$:

$$f_{ij} = f_{ij}^{TT} + f_{ij}^{T} + \frac{1}{2}(f_i^T{}_{,j} + f_i^T{}_{,j}) + f^L{}_{,ij} \tag{18}$$

In eqn. (18) f_{ij}^T is defined by :

$$f_{ij}^T = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} f^T - \frac{1}{\nabla^2} f^T{}_{,ij}\right), \qquad f_{ij}^T{}_{,j} = 0, \qquad f_{ii}^T = f^T \tag{19}$$

f^T is thus the trace of the transverse part of f_{ij}. f_i^T is a transverse vector ($f_i^T{}_{,i} = 0$) and f^L is a scalar. (Each of the six independent quantities, f_{ij}^{TT}, f^T, f_i^T, and f^L, is uniquely obtainable from f_{ij}). Hence in the linearized case, the dynamical variable are g_{ij}^{TT} and K_{ij}^{TT} while the four quantities g_i^T, g^L, K^L, are arbitrary gauge functions not determined by the theory. It is easy to see that this result is general and holds in the full theory. Thus the constraint equations again determine g^T, K_i^T, and K^T in terms of the remaining variables. A simple proof of this is supplied by making a general perturbation expansion in eqns. (11). For example in (11*a*), the linearized part of ${}^3R$, $g_{ii,jj} - g_{ij,ij}$, determines the highest order g^T in terms of lower order structures appearing in the non-linear terms and thus to each order, the problem is identical to that of linearized theory. A corresponding result holds for the other three constraints. Similarly eqns. (10) determine the dynamical motion of g_{ij}^{TT} and K_{ij}^{TT} and so these are dynamical variables as again the non-linear terms in these equations always involve lower order quantities in any given order of perturbation theory. The four quantities, g_i^T, g^L, and K^L are arbitrary and in fact are examples of the v_ρ variables (7). Thus a specification of these functions represents a statement of the coordinate conditions.

Returning to the question of obtaining the equations of motion from (17), γ^{ij} and K_{ij} are now to be viewed as functionals of only the eight variables g_{ij}^{TT}, K_{ij}^{TT}, g_i^T, g^L and K^L. Variation with respect to the dynamical variable produces the four dynamical equations of motion; variation of the remaining (arbitrary) variables gives rise then to the four Bianchi identities. The remaining four equations of course no longer appear, as they are just defining equations for the « Lagrange multipliers » N and η^i in terms of the remaining variables as in eqn. (5*a*). The N and η^i, being Lagrange multipliers, of course also disappear when the constraints have been eliminated.

Turning next to the generating function, it would appear that there remains no contribution analogous to G_x of conventional field theories and hence no generator of space-time translations. Again, it must be remembered that not all the variables are independent and the insertion of the constraints which must again be done leaves one with only eight variables. Thus the general form of G is :

$$G = \int d^3r \, [f^1{}_{ij} \, \delta g_{ij}{}^{TT} + f^2{}_{ij} \, \delta K_{ij}{}^{TT} + f^3 \, \delta K^L + f^4{}_i \, \delta g^L{}_{,i} + f^5{}_i \, \delta g^T{}_i] \quad (20)$$

where the f^a are functions of the eight variables. The first terms involving δg^{TT} and δK^{TT} are of the type that appears in the generating function G_X. However, they are not yet in the canonical form of $p\delta q - q\delta p$. The remaining four terms still do not have a definite physical meaning. The reason for this lies in that we have not yet chosen a definite coordinate condition; that is, we have not stated what functions of x^μ the K^L, g^L, $g_i{}^T$ are. Thus, if we define four functions y^μ : $y^o = -K^L$, $y^i = 1/2 \, g^L{}_{,i} + g_i{}^T$ then the coordinate conditions amount to specifying y^μ as given functions of x^ν, $y^\mu(x)$. The variations in the last four terms can then be replaced by (8).

$$\delta y^\mu = y^\mu{}_{,\nu} \, \delta x^\nu \,, \quad (21)$$

which gives these four terms the structure $F_\mu(g^{TT}, K^{TT}, x) \, \delta x^\mu$. This result is thus of the form $T^o{}_\mu \, \delta x_\mu$, i.e., that associated with the generator of space-time translations G_X. We see then that a Hamiltonian, or more generally a stress-energy tensor arises only after a set of coordinate conditions have been imposed, although any set of coordinate conditions will do at this stage.

As was mentioned above, though the first part of the generator depends upon dynamical variables, it is not in canonical form. The variables in terms of which G is canonical will in general be functions of $g_{ij}{}^{TT}$, $K_{ij}{}^{TT}$ and $y^\mu(x)$. It can be show that such a transformation to canonical form can always be made . In terms of the canonical variables, G will be of the form :

$$G = \int d^3r \, [g^c{}_\alpha \, \delta K^c{}_\alpha + T^{o\mu} \, \delta x_\mu] \quad (22)$$

where $g^c{}_\alpha$, $K^c{}_\alpha \, (\alpha = 1{,}2)$ are the two canonical pairs replacing the four $g_{ij}{}^{TT}$, $K_{ij}{}^{TT}$. In general, $T^{o\mu}$ does not represent the physical stress-energy tensor since for an arbitrary choice of the functions $y^\mu(x)$, $T^{o\mu}$ will in general be an explicit function of x^μ. However as discussed above in the class of « Heisenberg » frames, it is true that :

$$P^\mu = \int T^{o\mu} \, d^3r \quad (23)$$

represents the physical non-vanishing energy and momentum of the gravitational field.

The situation discussed above in general relativity is formally very similar to the parametric formulation of the Hamilton principle for classical mechanics (9). There, one introduces an extra coordinate q_{n+1}

(8) More generally, the coordinate conditions may read $y^\mu = y^\mu(x, g^{TT}, K^{TT})$. This just means that four other functions than the y^μ above are being used to specify the frame, which is just as good.

(9) C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics,* Toronto Univ. Press, Toronto (1949).

to represent the time and a canonical momentum $p_{n+1} = -\mathrm{H}$ where H is the Hamiltonian of the original system. The action then reads :

$$\mathrm{I} = \int d\tau \sum_{i=1}^{n+1} p_i \frac{dq_i}{d\tau}$$

where τ is an auxiliary parameter and may be arbitrarily chosen. The variation is subject to the constraint :

$$\mathrm{R} \equiv p_{n+1} + \mathrm{H} = 0 \,. \tag{25}$$

More generally R can be any function of all the q_i and p_i such that the equation $\mathrm{R} = 0$ yields as its solution $p_{n+1} = -\mathrm{H}$. This solution may be regarded as the defining expression for the Hamiltonian. Introducing a Lagrange multiplier, $\mathrm{N}(\tau)$, the action becomes :

$$\mathrm{I} = \int d\tau \left[\sum_{i=1}^{n+1} p_i \frac{dq_i}{d\tau} - \mathrm{N}(\tau)\, \mathrm{R}(q_i, p_i) \right] \tag{26}$$

where now all the p_i, q_i and N may be varied independently. Eqn. (26) is analogous to eqn. (12), τ playing the role of the coordinates x^μ. The generator associated with this action is :

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i\, \delta q_i - \mathrm{N}(\tau)\, \mathrm{R}\, \delta\tau \tag{27}$$

As in eqn. (16) the « Hamiltonian » NR vanishes modulo the constraints (which are derived by varying I with respect to N). Inserting the constraints into (27) reduces the generator to :

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta q_i - \mathrm{H}\, \delta q_{n+1} \,. \tag{28}$$

Thus the true Hamiltonian only arises when the constraints are utilized. The analogue of the coordinate conditions of general relativity consists in specifying $q_{n+1} = q_{n+1}(\tau)$. Then $\delta q_{n+1} = \dfrac{dq_{n+1}}{d\tau} d\tau$. This is possible since the canonical equations do not determine q_{n+1} (just as they do not specify the y^μ defined in the relativity case). Thus, for an arbitrary choice of the function $q_{n+1}(\tau)$, the Hamiltonian generating the translations in the chosen τ frame has the form :

$$\mathrm{H} \frac{dq_{n+1}(\tau)}{d\tau} \tag{29}$$

and is in general τ dependent even for an initially conservative system. Only with the special choice $q_{n+1} = \tau$ does τ become the physical time parameter t with a conservative Hamiltonian. Of course other choices are logically consistent (including making q_{n+1} depend on the remaining dynamical variables) but would lead to time parameters which would not be in accord with those usually defined in physics.

General relativity differs from the simple classical particle problem as follows : in the classical case, one knows the physical parameter t, *ab initio,* while in general relativity the coordinates are arbitrary to begin with, i.e., we are given a structure of the type (26) without any initially given Hamilton's Principle type of action. The choice of the class of coordinate condition we have discussed leads to a coordinate independent $T^{o\mu}$ and hence to conservation laws for a conservative system. This makes our Heisenberg frames agree with the coordinates used in the rest of physics and thus our coordinates correctly match on to the ones at infinity where flat space classical results hold.

It is interesting to formulate the central results of I for the linearized theory in terms of the above analysis. To zero'th order, which is the background flat space without dynamics, $g_{ij}{}^{TT}$ and g^T vanish. Thus if we write $g_{ij} = \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i}) \equiv \delta_{ij}$ we see that $h_i = x^i$ in the zero'th approximation. Similarly, it is easy to see that the zero'th order $K_{ij}{}^{TT}$, K^T, and $K_i{}^T$ vanish while $K^L = -x^o$ (10). The last follows from an identity that may be obtained from eqn. (10), i.e. :

$$\partial_0 K = -N_{|i}{}^{|i} + N(K_{ij} K^{ij} + K_{|i}\zeta^i) \tag{30}$$

In zero'th space limit K^L must reduce to $-x^o$. We thus can write $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ where h_{ij} is a first order quantity. Expanding the action of eqn. (17) (in which the constraints have already been substituted) one obtains as the only non-vanishing terms to quadratic order :

$$I = \int d^4x \, [h_{ij}{}^{TT} \partial_0 K_{ij}{}^{TT} - h^T{}_{,ii} \partial_0 K^L] \tag{31}$$

$h^T{}_{,ii}$ is to be obtained by solution of the constraint equation (3.8*a*); there the linear terms cancel and $h^T{}_{,ii}$ is found to be quadratic in $K_{ij}{}^{TT}$ and $h_{ij}{}^{TT}$. Thus K^L in eq. (31) can only be zero'th order, i. e. $\partial_0 K^{oL} = -1$. Substituting in the quadratic results for $h^T{}_{,i}$, one obtains:

$$I = \int d^4x \left[h_{ij}{}^{TT} \partial_0 K_{ij}{}^{TT} - \left(\frac{1}{4}(h_{mn}{}^{TT}{}_{,i})^2 + (K_{ij}{}^{TT})^2 \right) \right] \tag{32}$$

This is, of course, the action for the linearized theory in terms of the canonical variables (11). It should perhaps be noted that even though the « Hamiltonian » density $\mathcal{H}'$ of eqn. (16) vanishes rigorously due to the differential constraints, one can still obtain the correct linearized Hamiltonian from $\mathcal{H}'$ by taking its quadratic parts and then inserting the linearized differential constraints. Thus the processes of inserting constraints and linearizing can be performed in either order, and there is no qualitative difference in the structure of the full theory and its perturbation approximations even though the latter do not possess the full coordinate invariance.

(10) Of course, $K^L{}_{,ij}$, which is what enters in the affinity, correctly vanishes in the flat space limit.

(11) In general, the gauge functions disappear from I upon fixing Heisenberg coordinate conditions, such as those used above. In electrodynamics, on the other hand, the gauge function cancels out rigorously and need not be specified to discuss motion, since coordinates and gauge are independent.

5. — Discussion and Conclusions

A general discussion of the structure of gravitational dynamics and the nature of gravitational energy has been given. The initial statement of the theory was expressed in terms of a Lagrangian that depended upon the sixteen variables remaining after the elimination of the algebraic constraints. The stress-energy tensor derived from this Lagrangian vanishes as a consequence of the differential constraint equations and correspondingly the original « Hamiltonian » in the Lagrangian also vanishes. If the constraint variables are then eliminated from the Lagrangian as a whole (by means of the constraint equations) there results a new structure depending upon four dynamical variables and four quantities which remain undetermined. The specification of these arbitrary quantities as functions of the coördinates corresponds to the definition of a coordinate frame. In this form a new non-vanishing Hamiltonian density arises in the Lagrangian. This Hamiltonian density, however, will represent the physical energy density of the system provided it has no explicit dependence on the coordinates. This physical criterion is necessary in order that the usual conservation laws for a closed system apply here. Thus the above physical requirement determines a special choice of the four arbitrary quantities and hence implies that one may physically use only a special class of coordinate frames to describe the theory, although mathematically, any frame is still allowed, so that general covariance *is* maintained.

In this formal analysis of the structure of the dynamics of relativity, we have assumed thoughout that the non-linear constraint equations can be solved for the appropriate variables. While this of course can be done in a perturbation expansion, it is not possible to find closed form solutions. In electrodynamics, techniques are available within the framework of the action principle which allow a complete discussion of the theory without the explicit elimination of the constraint variables. In subsequent work, we will discuss similar procedures for general relativity.

POSTCRIPT TO CONTRIBUTION OF S. DESER

Since the Conference, the remaining parts of the program described above have been completed. Two pairs of independent, unconstrained canonical variables which satisfy ordinary Poisson bracket relations have been obtained explicitly. The resulting Hamiltonian (which depends only on these two canonical pairs) satisfies the conservation requirements imposed in the program (using simple coordinate conditions). From it, a simple expression for the total energy-momentum vector of the gravitational field results; it can be computed in any asymptotically flat coordinate frame from the initial Cauchy data (g_{ij} and K_{ij}) only and does not depend on the $g_{0\mu}$, for example. The criteria for existence of gravitational radiation follow from the formalism in a fashion identical to the corresponding criteria for electromagnetic radiation (e. g. Poynting vector, non-vanishing of the two independent canonical modes). The extension to coupling with matter is easily made, and one can then show that the gravitational field makes the self-energy of a classical point charge finite. Details of the results and various applications of the program may be found in a series of recent papers in the *Physical Review*, vols. **117** to **122**, *J. Math. Phys.*, **1**, *Ann. Phys.*, **11**, and *Nuovo* Cimento (1961).

DISCUSSION

Intervention du Dr. P. W. Higgs

Le Dr. Deser a donné une définition des variables dynamiques gravitationnelles transverses dans laquelle il impose les conditions $g^{TT}_{rs,s} = 0$ en même temps que ia nullité de la trace. Je voudrais indiquer une autre définition. Soit $\mathfrak{G}^{rs}(x)$ la densité tensorielle formée avec la métrique g_{rs}. Soit $y^a(x)$ la solution partout régulière et tendant asymptotiquement vers x^a de l'équation de Laplace généralisée $(\mathfrak{G}^{rs}\, y_{,r})_{,s} = 0$. Nous supposons que les coordonnées sont asymptotiquement cartésiennes. Dans ce cas, y^a est une fonctionnelle unique de $g_{rs}(x)$. Choisissons y^1, y^2, y^3 comme nouvelles coordonnées. Alors, les variables transformées définies par :

$$\mathfrak{G}^{TT\,ab}(y) = (\det y^c{}_{,t})^{-1}\, y^a{}_{,r}\, y^b{}_{,s}\, \mathfrak{G}^{rs}(x)$$

satisfont aux conditions de transversalité $\mathfrak{G}^{TT\,ab}{}_{,b} = 0$ (conditions de coordonnées harmoniques). L'on doit en outre imposer une condition pour enlever le dernier degré de liberté.

FURTHER RESULTS IN TOPOLOGICAL RELATIVITY

by DAVID FINKELSTEIN

Associate Professor Stevens Institute of Technology, Hoboken. N. J.

and

CHARLES W. MISNER *

Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, N. J.

RESUME

On examine la possibilité d'introduire le spin demi-entier dans une structure topologique purement gravitationnelle.

The basic question that has stimulated these researches into topological questions is, can a purely gravitic structure conceivably have half-integer spin ? This is a progress report on results obtained since the publication of Reference 1. It includes further properties of an interesting by-product of the program, the « M geon », which is redescribed for the sake of unity.

The Basic Geons of General Relativity

The conceptual starting point for the formulation of general relativity is, as it were, a blank sheet : a locally Euclidean topological space, as yet devoid of metric structure. But already certain global things can be distinguished and counted : EINSTEIN-ROSEN « bridges ». Wheeler « wormholes », singular points or lines (for those who permit them), and crosscaps, to mention some. For brevity let us call them O geons, since they are defined in terms of the open set structure of the space. A systematic classification is not yet possible for the *O* geons of 4 dimensions.

Next a field of tangent light-cones is laid over the manifold. We assume asymptotic flatness. Such a field has a peculiarity that most field theories lack : not that there are unusually many configurations

* On leave of absence to the Nordic Institute of Theoretical Physics, Copenhagen.

it can be given, but rather that even when two field configurations are counted as one when they can be continuously deformed one into the other, there are still infinitely many possibilities, and a discrete infinity in fact. In other field theories, all configurations can be continuously deformed into one, say the identically zero field, and thence into each other. The integers which label these infinitely many possibilities we call metricity M; in the absence of O geons one integer suffines. The structures of unit metricity from which all others are assembled we call M geons (fig. 1).

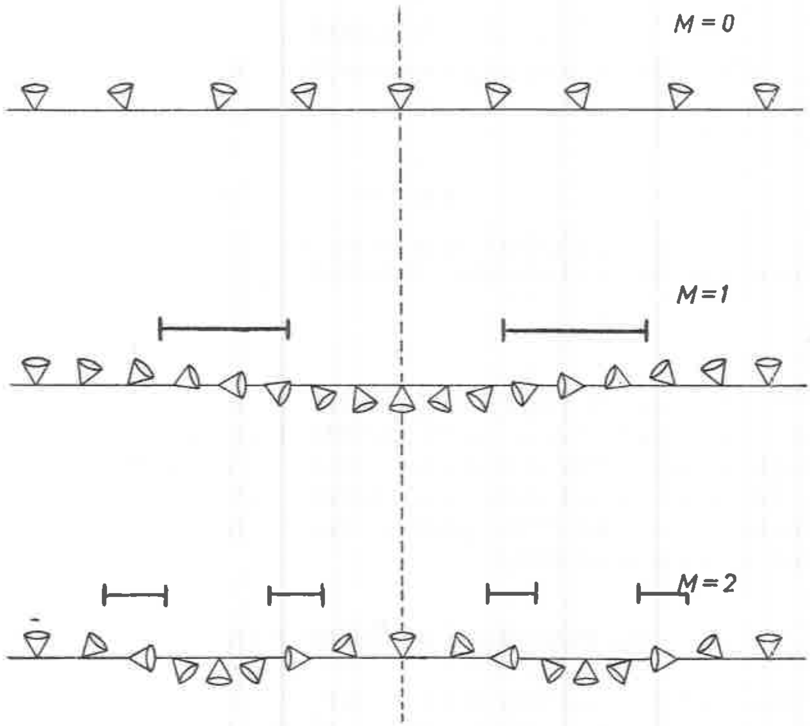


FIG. 1. — Schematic cross-sections of metricity 0, 1, and 2. Regions of the 3-dimensional cross-section that are not space-like are marked by adjacent segments. For M = 0, the entire cross-section can be space-like. For M = 1, a « hollow ball » — region between two concentric spheres — may be non-space-like. For M = 2, there may be two such hollow balls, concentric or side by side.

In the present state of affairs, a presentation in which rigor and clarity are sacrificed to brevity and suggestiveness has seemed most appropriate to us, but the actual proofs are sharp.

Gravitic Half-Spin

First let us only admit histories of the metric which are made up serially of topologically Euclidean asymptotically flat 3-spaces. Then we already know that it is possible to construct a continuous Ψ—functional that transforms in a double-valued way under some group of transformations on the metric (Reference 1). This is only because of the intrinsically non-linear signature requirement on the metric tensor, and for example linearization, which yields the massless spin-two field theory, eliminates this possibility. Now we have explicitly constructed a wave-functional of the metric field that displays this double-valuedness. It turns out that it is not a spatial rotation that changes the sign of the wavefunction, but another sort of global transformation. We can further state that this is then the case for all Ψ-functionals of such histories, with or without *M* geons. Thus : without *O* geons there is no half-spin.

We then consider histories that are made of 3-spaces with the topological structure of Einstein-Rosen bridges joining two asymptotically flat « sheets ». For example, the Kruskal completion of the Schwarzschild solution is of this form for most of its lifetime. But the result is the same. Thus : with one *O* geon of this kind, there is still no half-spin.

It remains to consider next an arbitrary number of *O* geons of the one- and two-sheeted variety, appearing and disappearing; but there is no reason to believe the result will change. This, however, comprises the most general 3-space cross-sections without *torsion,* according to Papakyriokopoulos. Thus the *conjecture* : without torsion, there is no half-spin. Finally it will remain to consider the manifolds with torsion. This includes, but is more general than, the class of non-orientable manifolds; the classification of these 3-manifolds has not yet been executed. Work here is in its early stages.

Metricity

Again for topologically Euclidean asymptotically flat manifolds, a certain integer is constant from one cross-sections to another. This integer *M* is the number of structures of the type shown in fig. 1 present in the cross-section; time-reflections of this structure are counted negatively. One symptom of the presence of an *M* geon in the cross-section is a 3-dimensional region which is not space-like but contains a time-like direction. This time-like region is indicated in fig. 1 by heavy segments. Now for manifolds with one *O* geon of the Einstein-Rosen type we have found two such conserved integers M_0, M_1; M_0 counts the number of *M* geons which can be completely separated from the *O* geon, while M_1 can really be thought of as a metricity carried by the *O* geon, for it counts « twists » which are permanently tangled within the bridge. The associated time-like regions are shown in fig. 2. As long as the topology is held fixed, both M_0 and M_1 are separately conserved.

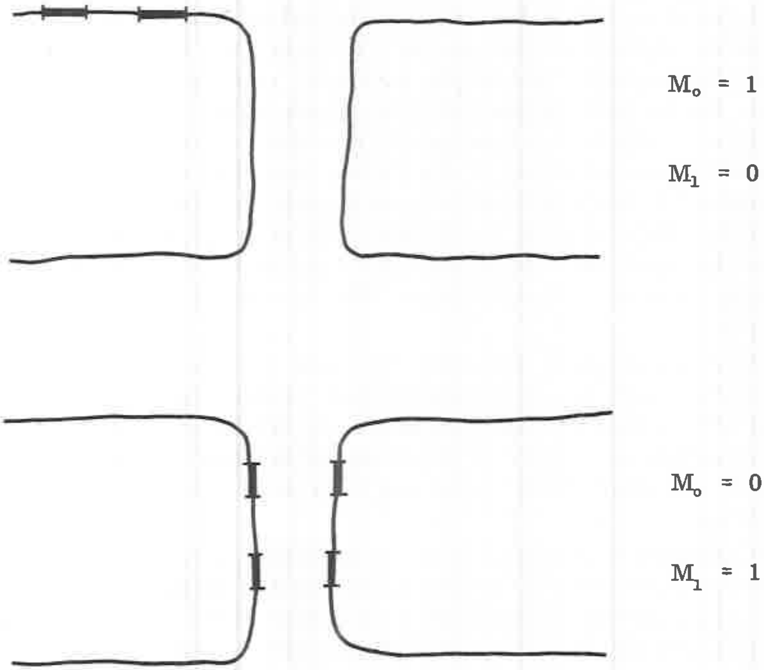


FIG. 2. — Schematic cross-sections of a « bridge » with two types of metricity. Regions of the 3-dimensional cross-section that are not space-like are marked. For $M_0 = 1$, $M_1 = 0$ a hollow ball outside the bridge may be non-space-like. For $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ the hollow ball that is not space-like may envelope the entrance to the bridge.

REFERENCE

[1] D. FINKELSTEIN and C. W. MISNER, *Annals of Physics*, 6, 230 (1959).

DISCUSSION

Remarque de B. Bertotti

Le programme de quantification de Feynman en Relativité générale ne peut pas être porté très loin avant que nous ayons une saine théorie mathématique de l'intégration dans l'espace fonctionnel des métriques. Pour indiquer une manière possible de le faire, considérons une « variété » consistant en un nombre fini (N) de points x_i et l'espace S à 10 N dimensions dont les coordonnées sont les coefficients de la « métrique » $g_{\mu\nu}(x_i)$. Sans passer de manière indirecte par le théorème de Haar, comme l'a suggéré Misner, on peut définir une mesure invariante unique dans cet espace en utilisant un résultat de I. E. Segal (*Jour. Math. Soc.*, **13**, 105 (1949)); tout comme, par exemple la mesure de Lebesgue ordinaire définie comme *la* mesure invariante par les translations, un groupe *transitif équicontinu* opérant sur s détermine la mesure. Il semble correct de prendre le groupe des permutations des points x_i et les transformations linéaires

$$g_{\mu\nu}(x_i) \to g_{\rho\sigma}(x_i)\, \pi_{\mu}{}^{\rho}(x_i)\, \pi_{\nu}{}^{\sigma}(x_i)\,.$$

Ce groupe est équicontinu si la nouvelle variable

$$\omega(x_i) = \ln \det \|g_{\mu\nu}(x_i)\|$$

est introduite.

Le pas le plus difficile, et jusqu'à maintenant non exploré, est, naturellement, la transition N $\to \infty$, qui dépend de l'introduction d'une structure dimensionnelle; on devrait aussi pouvoir montrer que la mesure ainsi définie est invariante par les transformations de coordonnées.

SOME INVESTIGATIONS OF THE GRAVITATIONAL FIELD EQUATIONS *

by Dr. A. PERES and Prof. N. ROSEN **

Department of Physics, Israel Institute of Technology, Haifa (Israel)

RESUME

On démontre qu'en général les effets cumulatifs des termes non linéaires des équations du champ excluent la possibilité de petites oscillations stables du champ autour d'un état d'équilibre, si ce dernier est Minkowskien à l'infini. Ceci peut entraîner des difficultés dans le calcul du champ d'un système rayonnant, par des méthodes d'approximation. On rencontre une difficulté apparamment correlée quand on étudie le problème de Cauchy en relativité générale : si l'on spécifie, à un moment donné, toutes les quantités nécessaires, de façon raisonnable, certaines des variables de champ restantes peuvent avoir des valeurs élevées. En fait, ces valeurs élevées peuvent n'être qu'un effet de coordonnées, sauf au voisinage des singularités, lesquelles peuvent être interprétées comme des corpuscules.

The purpose of this talk is to present the results of some investigations on the properties of solutions of the EINSTEIN equations for the gravitational field.

For this purpose it is convenient to make use of a three-dimensional formalism. We shall use Greek letters to denote the values 0, 1, 2, 3 and Latin letters the values 1, 2, 3. Beginning with the fundamental tensor $g_{\mu\nu}$ (taking $g_{00} > 0$), we define the three-dimensional contravariant metric tensor by the relation

$$e^{kl}\, g_{lm} \equiv \delta^k{}_m \, , \tag{1}$$

so that

$$e^{kl} \equiv g^{kl} - \frac{g^{ok}\, g^{ol}}{g^{oo}} \, . \tag{2}$$

We then introduce the corresponding CHRISTOFFEL three-index symbols,

$$\gamma^m_{kl} \equiv \frac{1}{2}\, e^{mn}\,(g_{nk,l} + g_{nl,k} - g_{kl,n}) \, , \tag{3}$$

(*) Partly supported by the Air Research and Development Command of the U. S. Air Force.

(**) Presented by N. ROSEN.

and denote the corresponding covariant differentiation by a dot :

$$A_{k\cdot l} \equiv A_{k,l} - A_m \gamma^m_{kl} \,. \tag{4}$$

Now let us write

$$\varphi_k \equiv g_{ok} \,, \qquad \varphi^k \equiv e^{kl} \varphi_l \,, \tag{5}$$

and let us define Ω by the relation

$$\Omega^2 \equiv \frac{1}{g^{oo}} \equiv g_{oo} - \varphi_k \varphi^k \,. \tag{6}$$

Finally, let us introduce

$$Z^k_l \equiv \frac{1}{2\,\Omega}\, e^{km} (\varphi_{m,l} + \varphi_{l,m} - g_{lm,o}) \,, \tag{7}$$

and

$$Z \equiv Z^k_k \,. \tag{8}$$

If one writes down the field equations in the general case of an energy-momentum density tensor $T_{\mu\nu}$, one finds that, by taking a suitable linear combination of the equations, one obtains the following relation

$$- e^{kl}\,\Omega_{\cdot kl} = \varphi^k Z_{,k} - Z_{,o} + \Omega\, Z^k_l Z^l_k + \frac{\varkappa}{2}\,\Omega (T^o_o - T^k_k - 2\varphi^k T^o_k) \,, \tag{9}$$

where $\varkappa$ is the relativity gravitational constant.

Let us now consider the field at a large distance from the material sources, so that $T_{\mu\nu} = 0$. This relation can then be written

$$- e^{kl}\,\Omega_{\cdot kl} = (\varphi^k Z)_{,k} - Z\,\varphi^k{}_{,k} - Z_{,o} + \Omega\, Z^k_l Z^l_k \,. \tag{10}$$

If we assume that the field is weak, so that the components of $g_{\mu\nu}$ are nearly equal to their Galilean values, then

$$- e^{kl}\,\Omega_{\cdot kl} \approx \nabla^2 \Omega \,. \tag{11}$$

Let us now suppose that the field, in addition to a static part, contains a part representing a periodic or nearly periodic wave. From the linear approximation calculation one finds that the deviation of each component from its Galilean value falls off at large distances as $\frac{1}{r}$, where r is the distance from the origin, near which the material sources are located. Furthermore, the derivatives of these components with respect to all of the coordinates also fall off as $\frac{1}{r}$ at large distances.

Let us now take the time average of eq. (10), either over a complete cycle if the wave is periodic or over a long time if it is nearly periodic. Denoting the time average by brackets, we have

$$\nabla^2 < \Omega > \approx < (\varphi^k Z)_{,k} > - < Z\,\varphi^k{}_{,k} > - < Z_{,o} > + < \Omega\, Z^k_l Z^l_k > \,. \tag{12}$$

From the form of this equation one can regard the right-member as proportional to the « source density » of $< \Omega >$. One readily sees that the first term of the right-hand member corresponds to a finite source, since its volume integral over a large sphere can be expressed as a surface integral having a finite limit as r tends to infinity. In the second term both Z and $\varphi^k{}_{,k}$ fall off as $\frac{1}{r}$ (unless the field is static). However, one can show that, by means of an infinitesimal coordinate transformation, it is possible to make $\varphi^k{}_{,k}$ fall off like $\frac{1}{r^2}$, so that the second term falls off like $\frac{1}{r^3}$, corresponding to a logarithmically divergent source. The third term vanishes since it is the average of a time derivative. The last term is positive definite and falls off like $\frac{1}{r^2}$ (unless the field is static). This then is the dominant term, and we see that, when r goes to infinity, it represents an infinite source of $< \Omega >$. It follows therefore that $< \Omega >$ cannot approach unity as r increases, but rather tends to infinity. We have thus arrived at a contradiction with the original assumption that the components of the metric tensor tend to their Galilean values at infinity.

One can describe the situation by saying that in general the cumulative effects of the non-linear terms in the field equations rule out the possibility of stable small oscillations about an equilibrium state if the latter is MINKOWSKI at infinity. From the physical standpoint this result is not difficult to understand. Not only the energy of the matter creates a gravitational field, but also the energy of the gravitational field itself, and, with a reasonable definition, the latter is infinite in the case under discussion and leads to an infinite field at infinity. This result raises questions concerning the validity of calculations of the field of a radiating system by approximation methods.

An apparently related difficulty is encountered when one deals with the CAUCHY problem in the general relativity theory. We assume that at a certain time, say $x^0 = 0$, the components $g_{\mu\nu}$ and their time derivatives $g_{\mu\nu,o}$ are given as functions of (x^1, x^2, x^3). If one writes down the field equations, one finds, as is well known, that six of them give $g_{kl,oo}$ in terms of the $g_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu,o}$, while the others impose certain restrictions on the $g_{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu,o}$. The latter equations can be expressed in the following form :

$$2\varkappa\, \Omega^4\, T^{oo} = \Omega^2\, P + \Omega^2\, (Z^2 - Z^k_l\, Z^l_k\,)\,, \tag{13}$$

$$\varkappa\, \Omega\, T^o_k = Z_{,k} - Z^l_{k\cdot l}\,, \tag{14}$$

where P is the scalar curvature of the metric g_{kl}, and where we take for empty space, T^{oo} and T^o_k to vanish.

Consider first eq. (13). From the definition of Z^k_l one readily verifies that the second term on the right-hand side is independent of g_{oo}. Since Ω^2 is linear in g_{oo}, we see that this equation enables one to express g_{oo} as an algebraic function of the other $g_{\mu\nu}$ and their derivatives.

Now consider eqs. (14). One readily finds that these are three *spatial* second-order partial differential equations for the g_{ok} and that they are linear in the second derivatives. If one eliminates g_{oo} in (14) by the use of (13), one can first determine the g_{ok} by solving three spatial second-order differential equations and then determine g_{oo} by means of (13). The first (and higher) time derivatives of $g_{o\mu}$ remain completely undetermined by the field equations and can be chosen arbitrarily, corresponding to the possibility of arbitrary coordinate transformations.

We now come to the question of boundary conditions. The three spatial differential equations are of the elliptic type, since none of the three space coordinates has a privileged role. The appropriate boundary conditions, from the mathematical standpoint, are therefore of the Dirichlet or Neumann type. If one is dealing with an infinite region, and one tries to use boundary conditions of the Cauchy type on a finite surface, one can expect that, in general, the solutions for g_{ok} will become infinite at infinity (as was the case in the first part of this discussion) or will have singularities elsewhere. If one has found a well behaved solution, a small change in the boundary conditions may result in a large change in the solution at large distances — the elliptic equations involve an inherent instability.

What may make matters even worse is the fact that g_{oo} is determined from the other $g_{\mu\nu}$ and their derivatives by an algebraic relation without the possibility of specifying any boundary conditions, and there is no assurance that it will be well behaved, e.g., that it will be everywhere close to unity if the other $g_{\mu\nu}$ are close to their Galilean values. The conclusion to be drawn is that, if in the Cauchy problem the g_{kl} and $g_{kl,o}$ are chosen to be nearly Galilean everywhere at $x^0 = 0$, it will be rather exceptional for the $g_{o\mu}$ to have this property.

On the other hand, an investigation of the physical components of the curvature tensor shows that nevertheless they are, in general, small. This means that the choice of quasi-Galilean g_{kl} is sufficient in order to make the space-time locally nearly flat. Hence the large discrepancies between $g_{o\mu}$ and their Galilean values can be transformed away locally, although it is in general impossible that in the whole of space-time all the $g_{\mu\nu}$ be quasi-Galilean. The physical components of the curvature tensor may, however, become large in the neighborhood of a surface on which $|g_{\mu\nu}|$ is zero. If such a surface is shrunk to a point by a degenerate coordinate transformation, it can be interpreted as a particle.

DISCUSSION

Intervention du Professeur Brill

Je suis très intéressé par votre analyse du problème des valeurs initiales, en particulier parce qu'elle semble concorder avec les résultats que j'ai obtenus dans le cas particulier de la symétrie par rapport au sens du temps. Comme vous le dites, seulement dans des cas très particuliers, on peut trouver des solutions qui ne se prolongent pas à l'intérieur des singularités, pour les conditions aux limites que vous considérez. Dans le cas considéré par moi, ce fait à une bonne interprétation physique, à savoir pour une solution non singulière l'onde gravitionnelle représentée par la solution doit avoir la force exacte pour courber l'espace dans un univers fermé.

Intervention du Professeur Papapetrou

J'ai débattu le problème des champs gravitationnels variant périodiquement avec le temps (*Ann. d. Physik* (6) 20, 1957, 399 et (7) 1, 1958, 186) et je suis arrivé aux mêmes résultats que le professeur Rosen, c'est-à-dire que les champs gravitationnels périodiques satisfaisant à la condition $g_{\mu\nu} \to \mu_{\mu\nu}$ quand $r \to \alpha$, ne peuvent pas exister. De façon à arriver à une interprétation physique de ce résultat, j'ai aussi étudié les champs gravitationnel et électromagnétique réunis, sous la forme de la théorie d'Einstein-Maxwell et j'ai considéré, en premier lieu, le champ gravitationnel produit par un champ électromagnétique périodique. La divergence logarithmique de g_{oo} quand $r \to \infty$ apparaît dans ce cas aussi. Le sens physique de ce dernier résultat est très simple : la densité d'énergie du champ électromagnétique tends vers zéro comme $\frac{1}{r^2}$ quand $r \to \infty$ et, par conséquent, introduit une divergence logarithmique du potentiel même dans la théorie de la gravitation de Newton. Il me semble qu'on est obligé de tirer de cette analogie la conclusion que le champ gravitationnel possède aussi une distribution d'énergie, ayant une signification physique, avec une densité qui tend vers zéro à l'infini comme $\frac{1}{r^2}$. Dans le cas général des champs gravitationnel et électromagnétique réunis, on trouve qu'il y a des termes électromagnétiques aussi bien que gravitationnels conduisant à une divergence logarithmique de g_{oo} et que ces termes ne peuvent pas s'éliminer parce qu'ils ont tous le même signe. Ceci montre que dans le cas de champs périodiques la densité d'énergie du champ gravitationnel a le même signe que celle du champ électromagnétique, c'est-à-dire est définie-positive.

A SOLUBLE QUANTUM FIELD THEORY IN CURVED SPACE

Docteur Frederick L. SCARF *
C.E.R.N., Geneva (Switzerland)

RESUME

Le modèle bidimensionnel de Thirring [7] est résolu dans un espace courbe arbitraire non-quantifié (« *c*-number curved space »). Postulant seulement que les anticommutateurs des champs ψ avancés (in-fields) sont des fonctions algébriques (« *c*-number functions ») d'un caractère *local,* et que $\psi_a^2 = 0$, l'on montre que la procédure de quantification est unique. Pour beaucoup de métriques on trouve que la matrice S est non-diagonale en description « nombre de particules ». Avec quatre dimensions une autre cause de génération de particules est trouvée.

1. — Introduction

The determination of whether or not quantum mechanics and general relativity are compatible is a problem of fundamental importance to both theories. However, the actual problem deals with a quantized space-time manifold and presents many conceptual and mathematical difficulties. In place of a complete treatment, some investigators have discussed quantum limitations on measurements [1], quantization of linear approximations [2] and quantum mechanics in c-number gravitational fields [3], [4].

It is clear, however, that investigation of single particle equations must be regarded as preliminary, and that a more significant problem involves quantization of a classical field in curved space. Deser [5] has used Feynman quantization to speculate on the general form of the results for a complete theory. He has also proposed [6] that it may be meaningful first to quantize the matter and radiation fields and then to apply quantization to the gravitational field. Even if this were not so, it would be desirable to have an unambiguous method of quantization for the matter field in curved space which would determine to

* U. S. National Science Foundation Fellow on leave from the University of Washington, Seattle (Washington).

what extent the FEYNMAN and SCHWINGER schemes have meaning. Finally, we note that space-time curvatures associated with an expanding universe should be regarded as external c-numbers, and the study of field quantization with these metrics has cosmological implications.

In this note we examine a two-dimensional field equation for which quantization can be effected by expressing all operators, state vectors, etc., as functionals of flat-space quantities. The equation is the generalization of Thirring's model [7] $[i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + 2\lambda(\bar\psi\psi)\psi = 0]$ which is completely soluble in flat-space. Two main results are illustrated : *a*) The definition of a state vector contains quantities which have meaning in all coordinate systems, but which must be evaluated in particular frames of reference (R-systems); *b*) For a large class of $g_{\mu\nu}$, matter is created by the metric. This production occurs because the time scale in the R-system does not go from $-\infty$ to ∞.

Whenever the interaction contains dimensional quantities an additional source of matter creation is present. The effect is illustrated by considering the self-coupled spinor field in four dimensional conformally-flat spaces. Then, the equations of motion for the flat-space fields contain eff $= \lambda f(g_{\mu\nu})$.

2. — The Field Equations

In a Riemannian two space, the equations of motion,

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + 2\lambda(\bar\psi\psi)\psi = 0, \tag{1}$$

and its Hermitian conjugate, follow from :

$$\delta\int\sqrt{-g}\,d^2x\,\mathcal{L} = 0,\quad \mathcal{L} = \frac{i}{2}\,[\bar\psi\gamma^\mu(\nabla_\mu\psi) - (\nabla_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi] + \lambda(\bar\psi\psi)^2, \tag{2}$$

where $g = \det g_{\mu\nu}$ and $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. The covariant spinor derivative is defined by requiring that $\mathcal{L}$ be invariant and that $\nabla_\mu\gamma_\nu = 0$. It is convenient to use the following formalism to specify the above quantities : a) ψ is invariant with respect to coordinate transformations and $\psi \to S^{-1}\psi$ under a spin transformation; *b*) An ordinary vector, A_μ, is invariant under spin transformations; *c*) γ^μ, which is a vector with respect to coordinate transformations, goes to $S^{-1}\gamma_\mu S$ under a spin transformation. The adjoint, $\bar\psi$, may be defined using the flat-space spin metric so that $\bar\psi^j\psi_j = -i(\psi_2^*\psi_1 - \psi_1^*\psi_2)$.

For a diagonal metric, a set of γ-matrices satisfying the correct commutation relations can be constructed.

$$\gamma^0 = \sqrt{g^{00}}\,\tilde\gamma^0,\ \gamma^1 = \sqrt{-g^{11}}\,\tilde\gamma^1,\ \{\tilde\gamma^\mu, \tilde\gamma^\nu\} = 2\tilde g^{\mu\nu}, \tag{3}$$

with $\tilde g^{00} = 1 = -\tilde g^{11}$, $\tilde g^{10} = \tilde g^{01} = 0$, $g_{kk}\,g^{kk} = 1$. When the covariant derivative is written as $\nabla_\mu\psi_i = \partial_\mu\psi_i - (\Gamma_\mu\psi)_i$ the condition $\nabla_\mu\gamma_\nu = 0$ leads to $4\,\Gamma_\mu = (\gamma^\nu\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma_\alpha - \gamma^\nu\partial_\mu\gamma_\nu)$, where $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ is a Christoffel symbol. [$Re(Tr\,\Gamma_\mu) = 0$ if the above spin-space metric is used; $I_m(Tr\,\Gamma_\mu)$ has been arbitrarily set equal to zero]. This definition yields :

$$\gamma^0\,\Gamma_0 = -\gamma^1(\partial g_{00}/\partial x)/4g_{00},\ \gamma^1\,\Gamma_1 = -\gamma^0(\partial g_{11}/\partial t)/4g_{11}.$$

At this point we note that every two-dimensional Riemannian space is conformally flat so that it is always possible to choose a coordinate system (R-system) for which $g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}\, h(x, t)$. In an R-system, Eq. (1) takes the simple form :

$$i\,\tilde{\gamma}^{\mu}\,\partial_{\mu}(h^{1/4}\,\psi)/h^{3/4} + 2\lambda(\bar{\psi}\psi)\,\psi = 0. \tag{4}$$

If $\tilde{\gamma}^0 = \beta = \sigma_2$, $\tilde{\gamma}^1 = -i\sigma_1$, $u = t + x$, $v = t - x$, the general solutions are :

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= [\varphi_1(v)\,h^{-1/4}(x, t)]\ \exp\ \{i\lambda \int_{-\infty}^{u} du'\,\varphi_2^*(u')\,\varphi_2(u')\},\\ \psi_2(x, t) &= [\varphi_2(u)\,h^{-1/4}(x, t)]\ \exp\ \{i\lambda \int_{-\infty}^{v} dv'\,\varphi_1^*(v')\,\varphi_1(v')\},\end{aligned} \tag{5}$$

where φ_1, φ_2 are completely arbitrary functions. It has been assumed that $[\psi_\alpha(x, t)]^2 = 0$. The equations of motion also yield two conservation laws, $\nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\,[1 \pm \gamma^5]\,\psi) = 0$, $\gamma^5 = \gamma^0\,\gamma_1 = \tilde{\gamma}^0\,\tilde{\gamma}_1$. Since $[\Gamma_\mu, \gamma^5] = 0$, these lead to two constants of motion in R-systems :

$$\mathrm{N}_{1,2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\,dx\ \bar{\psi}\gamma^0\,[1 \pm \gamma^5]\,\psi = \int dx\,\varphi_{1,2}^*\,\varphi_{1,2}\,. \tag{6}$$

The stress tensor, $\mathrm{T}^\mu_\nu = \dfrac{i}{2}\,[\bar{\psi}\gamma^\mu(\nabla_\nu\,\psi) - (\nabla_\nu\,\bar{\psi})\,\gamma^\mu] - g^\mu_\nu\mathcal{L}$, satisfies $\mathrm{T}^\mu_{\nu;\mu} = 0$, and the tensor density, $\mathfrak{J}^\mu_\nu = \sqrt{-g}\,\mathrm{T}^\mu_\nu$, obeys

$$\partial_\mu\,\mathfrak{J}^\mu_\nu = \frac{1}{2}\,\mathfrak{J}^{\alpha\beta}\,(\partial\,g_{\alpha\beta}/\partial x^\nu)\,.$$

In R-systems,

$$\partial_\mu\,\mathfrak{J}^\mu_\nu = \frac{1}{2}\,h\,(\mathrm{T}^{00} - \mathrm{T}^{11})\,(\partial h/\partial x^\nu) = 0,$$

so that :

$$\mathrm{P}_\nu = \int \sqrt{-g}\,dx\,\mathrm{T}^0_\nu \tag{7}$$

is a constant of motion. However, P^ν, which is defined by Eq. (7) with $\mathrm{T}^{0\nu}$ ($\mathrm{P}^\nu \not\equiv g^{\nu\mu}\,\mathrm{P}_\mu$), is not constant. The concept of energy in curved space is meaningful and well defined only for coordinates with $g'_{00} = 1$, $g'_{ok} = 0$. Thus, when $ds^2 = dt'^2 - \mathrm{R}^2(t')\,dx'^2$, one finds $\mathrm{P}^{o\prime} = \mathrm{P}'_o = \mathrm{P}_o/\mathrm{R}$; the expansion is adiabatic and the decrease in energy represents a Doppler shift of de Broglies waves.

3. — Quantization

As $t \to -\infty$, all λ, $\psi \to \psi^{in}(x, -\infty) = [\varphi/h^{1/4}]_{t=-\infty}$. We do not require that space be flat as $t \to -\infty$. Even if $h(x, -\infty)$ is constant, it is necessary to identify ψ^{in} with $h^{-1/4}\,\varphi$, and not with φ. For the latter choice, ψ^{in} is not a solution of $\gamma^\mu\,\nabla_\mu\,\psi = 0$ for finite times, and the U-matrix ($\psi = \mathrm{U}^*\,\psi^{in}\,\mathrm{U}$) is not unitary. Furthermore, ψ should tend to

ψ^{in}, as $t \to -\infty$, because of the time dependence of a retarded Green's function, not as a consequence of the time dependence of the fields; however, it is impossible to write a solution of $\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = 0$ as :

$$\psi = \psi_{\mathrm{FLAT}} + \int dv\, \mathrm{G}^{\mathrm{RET}} f(\psi_{\mathrm{FLAT}}). \tag{8}$$

Thus, if the metric is treated as a dynamical variable, the meaning of ψ^{in} is obscure, but for an external c-number $g_{\mu\nu}$ there is no difficulty. It should be noted, however, that the general solutions [Eq. (5)] *cannot* be expressed in terms of $\psi(x, -\infty)$, $h(x, -\infty)$ alone.

In order to quantize the theory, we observe that the spinor with components φ_1, φ_2 satisfies $\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \varphi = 0$. This suggests that φ should be treated as a free, flat-space, spinor field with customary commutation relations. The underlying assumptions can be stated explicity : if $[\psi_a]^2 = 0$, then the definition of ψ^{in} gives, for instance,

$$\mathrm{S}_{12}(x, t \,|\, x'\, t') = i\,\{\psi_1^{in}(x, t), \psi_1^{*in}(x', t')\} = f_{12}(v, v')\, h^{-1/4}(u, v), h^{-1/4}(u', v'). \tag{9}$$

We postulate : *a*) S_{12} is a c-number. *b*) S_{12} must tend to $\widetilde{\mathrm{S}}_{12}$ (flat-space) as $h \to 1$. *c*) S_{12} is a local function of the coordinates (that is, f does not contain

$$\int_{-\infty}^{\infty} du'\, h\,(u', v), \text{ etc. }).$$

Then, since f_{12} is independent of u, it is independent of h, and f_{12} *must* be the same as in flat-space [$f_{12} = i\delta\,(v - v')$]. In this two-dimensional model the commutation relations are uniquely determined if *a*) - *c*) are satisfied. Any general method used to obtain anti-commutators in curved space must lead to these results or show that *a*), *b*) or *c*) is violated.

Since φ is the same as in the ordinary Thirring model, its Fourier transform has the properties :

$$\varphi_{1,2} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, c_{1,2}(p) \exp ip\,(v, u),$$

$$\{c_a(p), c_b(q)\} = 0, \qquad \{c_a(p), c_b^*(q)\} = \delta_{ab}\, \delta(p - q), \tag{10}$$

and particle (a) and anti-particle (b) operators are defined by

$$c_{1,2}(p) = [\theta(\pm p)\, a(p) + \theta(\mp p)\, b^*(-p)].$$

As in the usual theory, $\varphi^* \varphi$ in Eqs. (5), (6), (7) is replaced by $:\varphi^* \varphi:$, where Wick's ordered product is defined in an R-system. Eq. (6) becomes

$$\mathrm{N}_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \theta(\pm p)\, [a^*(p)\, a(p) - b^*(p)\, b(p)], \tag{11}$$

and P_ν is given by :

$$\mathrm{P}_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} p\, dp : (c_1^*\, c_1 \mp c_2^*\, c_2) : . \tag{12}$$

Since $[N_\mu, P_\nu] = 0$, the state vectors are simultaneous eigenstates of the four operators (P^ν does not commute with P_ν or N_μ, in general) and are given by $a \mid 0 > = b \mid 0 > = 0$, $\mid \alpha, \beta > = (a^*)^\alpha\, (b^*)^\beta \mid 0 >$. These relations are the same as in the flat-space model, and the ordering and renormalization of the bare particle operators is carried out in the same way. Thus, after renormalization, R is given by Glaser's expression [8]
$\psi_1^R(x, t) = \varphi_1(v)\, h^{-3/4}(x, t) \times$

$$: \left\{ \exp \frac{[e^{-i\lambda} - 1]}{2\pi i} \int dp \int dq \left(\frac{p_+}{q_-}\right)^{\lambda'/2\pi} \frac{e^{i(q-p)u}}{(p_+ - q_-)}\, c_2^*(p)\, c_2(q) \right\} : \quad (13)$$

where

$$p \pm = p \pm i\varepsilon\,, \qquad \lambda' = \lambda + 2\pi n\,, \qquad |\lambda'/2\pi| < 1\,.$$

In terms of configuration space quantities, the equation a $\mid 0 > = 0$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \exp(-ipv)\, \varphi^{(+)}(v) \mid 0 > = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-ipu)\, \varphi^{(-)}(u) \mid 0 > = 0 \qquad (14)$$

where $\varphi^{(\pm)}$ are positive and negative frequency parts of φ. The vacuum is defined in a particular coordinate system using two concepts which are not manifestly covariant; the separation into $\varphi^{(\pm)}$ is obviously tied to the frame of reference, and $h^{1/4}\, \psi^{in} = \varphi$, which obeys $\tilde{\gamma}^\mu\, \partial_\mu\, \varphi = 0$, is clearly not a meaningful entity under general coordinate transformations. However, under Lorentz transformations from the original R-system, the definition gives no trouble. Furthermore, when one goes to another R-system, the equation merely becomes $a'(p') \mid 0' > = 0$. Finally, if the new metric has $g'_{00}(x', t') \neq - g'_{11}(x', t')$, then $\varphi^{(+)}(x', t')$ is defined as a functional of $x(x', t')$, $t(x', t')$, where x and t are again coordinates in an R-system.

The same results are found for all the state vectors; $\mid \alpha, \beta >$ is defined in terms of quantities which have meaning in all frames of reference, but which must be evaluated in specific ones. These equations resemble the definition of the potential of a moving charge in special relativity ($A^i = e\, U^i / r_0$, r_0 is the distance in the proper frame). We have found no way to rewrite the equations for $\mid \alpha, \beta >$ so that they have direct meaning in all coordinate systems in terms of quantities measured in these systems.

4. — Particle Production

The space-time curvature causes a distinction between physical particle operators, φ, and the bare particle in-fields, $\psi^{in} = h^{-1/4}\, \varphi$. A second effect is the production of physical particles. The relations $\psi_a(x, t) = U^*(t)\, \psi_a^{in}(x, t)\, U(t)$, $U^* U = 1$, define a unitary matrix which yields eq. (4) if

$$U(t) = \exp \left\{ - i \lambda \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' : \varphi_1^*\, \varphi_1\, \varphi_2^*\, \varphi_2 : \right\}, \qquad (15)$$

and the S-matrix $[S = U(t^{out})]$ equals $\exp(-i\lambda N_1 N_2)$ if $t^{out} = \infty$. Therefore $|out> (= S|in>)$ equals $|in>$ to within a phase factor and no particles are created, as in the flat-space problem. However, t^{out} may be finite. As an example, consider a fundamental observer in a frame with $ds^2 = dT^2 - R^2(T)\,dX^2$ (we imagine that $\lambda = \lambda_0 \exp[-\varepsilon F(X, T)]$, ε arbitrarily small; this variation in λ introduces a length and fixes the coordinate system). The transformation $x = X$, $t = \int_0^T dT'/R(T')$ gives $ds^2 = h(dt^2 - dx^2)$ with $h(t) = R^2(T)$. As T varies from $-\infty$ to ∞, t does not span the same interval, in general (for $R(T) = 1 + \exp(T/\tau)$, $t = -2\,ln\,[1/2(1 + \exp - T/\tau)]$, and $t^{max} = \tau\,ln\,2$). Thus, the S-matrix is not diagonal in the physical particle representation, and real pairs of physical particles are created by the metric. (It is also possible to have $t^{in} \neq -\infty$, $|x^{max}|, |x^{min}| \neq \infty$; these situations are analogous to the one considered here).

If t^{max} is finite, $(h^{1/4}\psi)^{out} = \lim_{t \to t^{max}} U^*(t)\, h^{1/4}\psi^{in}(x, t)\, U(t)$ is the same as if space were flat and the interaction were $\lambda_{EFF} = \lambda\theta(t^{max} - t)$; the virtual cloud of physical particles which is normally present only for finite times is now present in the out-state. As in the flat-space problem with discontinuous λ, $(h^{1/4}\psi)^{out}$ is not a solution of $\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = 0$. Matrix elements such as $< 0|\psi|3 >$ can be used to study the matter production.

One finds $\dfrac{< 0|\psi_1^R|3 >^{in}}{< 0|\psi_1^R|1 >^{in}} = 0$, but

$$\frac{< 0|\psi_1^R|3 >^{out}}{< 0|\psi_1^R|1 >^{out}} = \theta(-k)\,\theta(q)\,\frac{\sin(\lambda/2)}{\pi}\left(\frac{k}{q}\right)^{\lambda'/2\pi} \frac{\exp[-i(k+q)(t^{out}+x)]}{(k+q)} \tag{16}$$

and this gives the energy distribution of the real, physical particle pairs [9].

The production process for the Thirring model is a very simple one. Matter is created only if $g_{\mu\nu}$ is such that x, t do not have the same range in an R-system. The reason for this is that λ is dimensionless and $m_0 = 0$. There is no unit of length in the problem which can sense changes in the metric. If a length is present, matter is created more directly. Consider eq. (1) in a four-dimensional system with $ds^2 = h\,(dt^2 - d\sigma^2)$ (here $[\lambda] = L^2$). When the Γ_μ are evaluated, the equation of motion may be written as

$$i\,h^{-5/4}\,\tilde{\gamma}^\mu\,\partial_\mu(h^{3/4}\psi) + 2\lambda(\bar{\psi}\psi)\,\psi = 0\,, \tag{17}$$

and the substitution $\psi = h^{-3/4}\chi$ gives the equivalent flat-space problem with $\lambda_{EFF} = \lambda\,h(x, t)$. If $\chi^{in} = \varphi$, then

$$\psi = h^{-3/4}\,[\varphi + 2i\lambda \int d^4x'\,\tilde{S}^{RET}(x_i, x'_i)\,h(x'_i)\,(\bar{\chi}\chi)\,\chi] \tag{18}$$

($\tilde{S}$ is flat) and ψ contains the metric for all past times directly in the interaction. Neither $\partial_\mu \mathfrak{J}^\mu_\nu$ nor $\partial_\mu \mathfrak{J}^{\mu\nu}$ are zero, and the only constants of motion are

$$N_{1,2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}\, d^3 x\, \bar{\psi} \gamma^0 [1 \pm \gamma^3]\, \psi = \frac{1}{2} \int d^3 x\, \chi^* [1 \pm \gamma^5]\, \chi\,. \tag{19}$$

The state vectors are eigenstates of these operators. Once again, the commutation relations are expressed in terms of flat-space quantities, $\{\psi_a(1), \psi_b^*(2)\}^{\text{in}} = h^{-3/4}(1)\, h^{-3/4}(2)\, \tilde{S}_{ab}(1,2)$, and the problem can be solved by standard techniques (perturbation theory, etc.). In the equivalent flat-space problem, the metric acts as an external field which feeds energy and momentum into the system and creates matter directly. One also finds that the renormalization « constants » vary with x, t. Although it is impossible to give the complete solution in four dimensions since χ is not expressed in terms of φ alone, it seems definite that any series expansion such as $h = [1 + ...]$ will not converge.

5. — Conclusions

It has been shown that massless spinor fields may be quantized in conformally-flat spaces by mapping the field operators onto flat-space quantities. In two dimensions, quantization is unique if some very general postulates are satisfied, and the results indicate that the flat-space operators obey conventional commutation relations. When the fields have mass, the mapping can again be carried out but $m_{\text{EFF}} = m h^{1/2}(x, t)$ appears in the equations of motion. For these problems, the Green's functions derived by GUTZWILLER [10] may be used to construct the anti-commutators.

It is found that the state vectors are defined in terms of quantities which must be evaluated in specific coordinate systems. The result suggests that quantization violates the spirit of general covariance. However, the Schrödinger equation, $N\,|n'\rangle = n'\,|n'\rangle$, is independent of coordinates, and it may, in fact, be possible to rewrite the explicit expressions for $|n'\rangle$ in a manifestly covariant form.

For many curved spaces, the metric tensor is responsible for production of real, physical particles, even if the equations contain no quantities with dimensions of length. Matter is created when $t^{\max}$, in an R-system, is finite. Then $S = U(t^{\max}, -\infty)$ is the same as the U-matrix for a flat-space problem and the virtual cloud for the latter system is the final state of the former. This has been illustrated with the Thirring model.

When the coupling constant is not dimensionless, the equivalent flat-space equations contain $\lambda_{\text{EFF}} = \lambda f(g_{\mu\nu})$. Physical particles are created locally by the metric, just as in a system with $\lambda = \lambda(x, t)$. For instance, the expanding universe resembles an external field and *causes* creation of real pairs when the four-dimensional interaction is $\mathcal{L}^{\text{INT}} = \lambda(\bar{\psi}\psi)^2$, In general, the results cannot be expressed in terms of asymptotic fields and metrics, and the final expressions cannot be expanded about a flat-space $g_{\mu\nu}$.

REFERENCES

[1] H. SALECKER and E. P. WIGNER, *Phys. Rev.*, **109**, 571 (1958); E. P. WIGNER, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 255 (1957).
[2] T. KIMURA, *Prog. Theor. Phys.*, **16**, 57 (1956); **16**, 555 (1956); R. ARNOWITT and S. DESER, *Phys. Rev.*, **113**, 745 (1959); W. THIRRING, *Fortschritte der Physik*, **7**, 79 (1959).
[3] D. R. BRILL and J. A. WHEELER, *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 465 (1957).
[4] B. S. de WITT, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 377 (1957).
[5] S. DESER, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 717 (1957).
[6] P. BERGMANN, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 352 (1957).
[7] W. E. THIRRING, *Ann. Phys.*, **9**, 91 (1958).
[8] V. GLASER, *Nuovo Cimento*, **9**, 1007 (1958).
[9] A more complete discussion of pair production for this model with $\lambda = \lambda(x, t)$ appears in *Phys. Rev.*, 117 (1960).
[10] M. GUTZWILLER, *Helv. Phys. Acta*, **29**, 313 (1956).

GENERAL RELATIVITY IN SPINOR FORM

by Dr R. PENROSE
St John's College, Cambridge

RESUME

Le calcul spinoriel démontre d'une manière frappante plusieurs analogies entre le champ- électromagnétique et le champ du tenseur de Riemann de l'espace-temps vide. Le tenseur de Riemann est représenté par un spineur complètement symétrique à quatre indices, Ψ_{ABCD}. Le produit de ce spineur avec son conjugué complexe donne le tenseur de Robinson-Bel, dont les propriétés ressortent directement de cette formulation. Ψ_{ABCD} est le produit symétrisé de quatre spineurs à un indice. Ainsi il définit quatre vecteurs isotropes. Les différentes manières de coïncidence de ces vecteurs donnent la classification naturelle du tenseur Riemannien. Les dérivées symétrisées de Ψ_{ABCD} sont algébriquement indépendantes et donnent une base algébrique pour toutes les dérivées du tenseur Riemannien.

I propose to show that if a spinor calculus is used in general relativity, instead of the usual tensor calculus, many of the important expressions of the theory take on a surprisingly simple form.

We know from Dirac's theory of the electron that spinors have a fundamental importance to physics in the small, perhaps more so than vectors. I hope to indicate that this may also betrue for the large scale phenomena of gravitation.

Any tensor expression can be translated into a spinor form, each four-dimensional tensor index being replaced by a pair of two-dimensional spinor indices, one undotted and one dotted. This is done by means of a quantity $\sigma_\mu^{A\dot{B}}$ defined at each point of space-time satisfying

$$g^{\mu\nu}\,\sigma_\mu^{A\dot{B}}\,\sigma_\nu^{C\dot{D}} = \varepsilon^{AC}\,\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}},$$

where $\sigma_0^{A\dot{B}}, \sigma_1^{A\dot{B}}, \sigma_2^{A\dot{B}}, \sigma_3^{A\dot{B}}$ are 2×2 hermitian matrices. The spinors ε^{AC}, $\varepsilon^{\dot{B}\dot{D}}$ (and ε_{AC}, $\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}$) are the two-dimensional alternating expressions with components 0,1,—1,0 and they determine the skew « metric » of the two spaces (« undotted » and « dotted »). They are used for raising and lowering spinor indices, e.g.

$$\xi^A = \varepsilon^{AB}\,\xi_B, \qquad \xi_B = \xi^A\,\varepsilon_{AB}\,.$$

The correspondence between tensors and spinors is given by

$$X_\lambda^{\mu\nu} \leftrightarrow X_{A\dot{B}}^{C\dot{D}E\dot{F}} = \sigma_{A\dot{B}}^{\lambda}\,X_\lambda^{\mu\nu}\,\sigma_\mu^{C\dot{D}}\,\sigma_\nu^{E\dot{F}}\,.$$

When the complex conjugate of a spinor is formed, undotted indices become dotted and dotted indices become undotted. Thus

$$\overline{X}{}^{\mu\nu}_{\lambda} \leftrightarrow \overline{X}{}^{\dot{C}D\dot{E}F}_{\dot{A}B}$$

so that reality of tensors is expressed as a hermitian property of the corresponding spinors. Using the symbol ∂_μ(or ∂_{AB}) to denote *covariant* derivative we have

$$\partial_\mu\, g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \partial_\mu\, \sigma_\nu^{A\dot{B}} = 0, \qquad \partial_\mu\, \varepsilon^{AC} = 0, \qquad \partial_\mu\, \varepsilon^{\dot{B}\dot{D}} = 0\,.$$

The last two of these equation are often not imposed as they preclude the use of phase transformations to generate the electromagnetic field.

Apart from the general correspondence between tensors and spinors given above, there is also a correspondence between the real skew-symmetric tensors $F_{\mu\nu}$ and the symmetric spinors Φ_{AB} :

$$F_{\mu\nu} \leftrightarrow F_{A\dot{B}C\dot{D}} = \frac{1}{2}\,\{\Phi_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} + \varepsilon_{AC}\,\overline{\Phi}_{\dot{B}\dot{D}}\}.$$

The first term on the right is the part of $F_{A\dot{B}C\dot{D}}$ which is symmetric in A, C and therefore skew in $\dot{B}\dot{D}$. The second term is the part skew in A, C and therefore symmetric in $\dot{B}\dot{D}$. Any skew pair of spinor indices can be split of as an ε-spinor.

Now let us use a similar procedure for the Riemann tensor, where for simplicity EINSTEIN's free space equation $R^{\varrho}_{\nu\rho\sigma} = 0$ will be imposed. In this case it turns on that we obtain

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \leftrightarrow R_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}D\dot{H}} = \frac{1}{2}\,\{\Psi_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}}\,\varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} + \varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\,\overline{\Psi}_{\dot{E}\dot{G}\dot{F}\dot{H}}\}.$$

where spinor Ψ_{ABCD} is completely symmetric in all four indices. This correspondence between such spinors Ψ_{ABCD} and such tensors $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ is one to one. It was first obtained by WITTEN.

The analogies between the MAXWELL and EINSTEIN fields are brought out in a striking way by the spinor formalism. The source-free MAXWELL equations and the Bianchi identities become, respectively,

$$\partial^{A\dot{C}}\,\Phi_{AB} = 0 \quad \text{and} \quad \partial^{A\dot{E}}\,\Psi_{ABCD} = 0\,.$$

The MAXWELL stress-energy tensor and the ROBINSON-BEL « gravitational density » tensor have the respective spinor forms

$$T_{\mu\nu} \leftrightarrow \frac{1}{2}\,\Phi_{AB}\,\overline{\Phi}_{\dot{C}\dot{D}}, \qquad \frac{1}{2}\,T_{\mu\nu\rho\sigma} \leftrightarrow \Psi_{ABCD}\,\overline{\Psi}_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}}\,.$$

The fact that $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ is totally symmetric in its tensor indices is immediate from the symmetry of Ψ_{ABCD}. The trace-free nature of $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ also follows at once from the symmetry in the individual spinor indices. The fact that $T_{\mu\nu}$ is invariant under duality rotations of the electromagnetic field and that $T_{\mu\nu}$ determines this field up to a duality rotation is obvious in the spinor formalism. A duality rotation of the field tensor $F_{\mu\nu}$ corresponds to a phase transformation $\Phi_{AB} \rightarrow e^{i\theta}\,\Phi_{AB}$ of the corresponding spinor. Similarly, the curvature tensor (at a point) also admits duality rotations corresponding to phase transformation of Ψ_{ABCD}. It is again clear from the spinor formalism that $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ determines the curvature tensor up to a duality rotation. It is also not hard to show this way that $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ is essentially the only four-index tensor which is quadratic in the curvature tensor and which is invariant under these duality rotations.

Symmetric spinors can be decomposed in the following way :

$$\Phi_{AB} = \eta_{(A}\zeta_{B)}, \qquad \Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)} .$$

This is unique apart from scale factors. Now any one index spinor ξ_A determines a null vector $x_\mu \leftrightarrow \xi_A \bar{\xi}_{\dot{B}}$. Thus, the electromagnetic field tensor determines two null directions (as is well known) and the curvature tensor determines four null directions. This last fact leads to a natural characterization of curvature tensors (for empty space) in terms of the various ways in which these null directions can coincide. The diagram

$$\begin{array}{lccc}
 & & & (1111) \\
 & & & \swarrow \\
 & & (211) \rightarrow & (22) \\
 & & \swarrow \qquad\quad & \swarrow \\
 & (31) \rightarrow & (4) \rightarrow & (—) \\
\text{Petrov type :} & \text{III} & \text{II} & \text{I}
\end{array}$$

shows how the various cases of coincidences can arise from one another as special cases. The symbol (—) denotes the case when the curvature tensor vanishes. All the symbols in any one column correspond to the same Petrov type and those in any one row correspond of the same conditions imposed on the invariants of the curvature tensor. (This classification is, I believe, similar to one obtained by GÉHÉNIAU based on some work of Ruse.)

A formula of interest is

$$\Box\, \Psi_{ABCD} = 3\, \Psi_{(AB}{}^{EF}\Psi_{CD)EF} .$$

The non-linear term on the right acts as a kind of « source » term for the Ψ-field. If, instead of empty space we have an electromagnetic field present, the BIANCHI identities become

$$\partial^{A}{}_{\dot{E}}\, \Psi_{ABCD} = \frac{k}{2}\, \bar{\Phi}_{\dot{E}\dot{F}}\, \partial_B{}^{\dot{F}}\, \Phi_{CD}$$

where Ψ_{ABCD} is defined from the Weyl tensor. Thus, the Φ-field here acts as a kind of source for the Ψ-field in the first order equation.

Another place in which the spinor formalism leads to a simplification is in picking out a set of algebraically independent expressions from which the curvature tensor and all its derivatives may be obtained algebraically. Such a set is given by

$$\Psi_{AB\cdots G}{}^{\dot{P}\cdots\dot{R}} = \partial_{(E}{}^{(\dot{P}} \cdots \partial_{G}^{\dot{R})}\, \Psi_{ABCD)} .$$

Thus, for an analytic manifold, these $\Psi_{\cdots\cdots}{}^{\cdots}$ can be specified arbitrarily at a point and the curvature at any other point can be calculated from them. As a simple example,

$$\Psi_{AB\cdot\cdot G}{}^{\dot{P}\cdot\cdot\dot{R}} = a_r\, \Pi_A\, \Pi_B \,..\, \Pi_G\, \overline{\Pi}^{\dot{P}} \,..\, \overline{\Pi}^{\dot{R}}$$

gives plane waves.

DISCUSSION

Intervention du professeur J. Wheeler

Vous avez montré combien de simplifications résultaient de l'emploi du formalisme spinoriel dans l'écriture séparée des équations d'Einstein et de celles de Maxwell. Que se passe-t-il lorsque ces deux groupes d'équations du deuxième ordre sont réunis (Rainich) de manière à donner une théorie du champ purement géométrique et « déjà unifié » (1). Avez-vous essayé d'expliciter les équations du 4ᵉ ordre de cette théorie en cette notation spinorielle que vous avez magnifiquement décrite ?

Réponse du docteur Penrose

Je pense que L. Witten a effectué quelques recherches dans cette voie.

(1) C. W. Misner et J. A. Wheeler, *Ann. Phys.*, **2**, 525 (1957).

Intervention du professeur Belinfante

Comment représentez-vous les transformations *générales* des tenseurs par vos transformations spinorielles ? D'habitude on déduit des spineurs uniquement des tenseurs soumis simplement aux transformations de Lorentz.

Réponse

Puisque les $\sigma^{\mu}{}_{A\mathring{B}}$ ne sont pas les matrices habituelles de Pauli et que les $g_{A\mathring{B}C\mathring{D}}$ sont ici fonctions des coordonnées, les relations entre les spineurs et les tenseurs ne sont pas celles habituellement considérées dans une théorie covariante par rapport au groupe de Lorentz.

Réponse de Penrose à quelques questions :

Au Professeur Wheeler, qui s'est enquis de la possibilité de traduire le travail de Rainich en termes de spineurs : Je pense que Witten a fait quelque chose dans cette direction.

Au Professeur Robinson à propos des rotations de dualité : Il est peut être bon de remarquer que, tandis qu'une rotation de dualité conduit à une nouvelle solution des équations dans le cas du champ de Maxwell, il n'en va pas de même avec le champ ψ, à cause des relations non-linéaires auxquelles ce champ satisfait.

ON THE POSSIBLE TRANSMUTATIONS OF ORDINARY MATTER IN GRAVITATION

by D. IVANENKO
(*Moscow University, Physical Faculty, Moscow* -234)

SOMMAIRE

1. La seconde quantification du champ gravitationel en interaction avec d'autres champs entraîne nécessairement la possibilité des transmutations des électrons-positrons, des photons, etc. en gravitons, et *vice versa.*

Nous avons traité cet effet par des méthodes diverses, en considérant le terme de couplage entre le champ donné et la gravitation comme l'énergie potentielle, en appliquant la méthode de quantification de Gupta et le formalisme de la matrice S, ou en appliquant la méthode de Schwinger de la théorie de la polarisation de vide.

2. Nous attirons l'attention sur l'équivalence entre le tenseur d'énergie de Chr. Möller et celui de N. Mitskevic, qui interprète la différence des tenseurs canonique et symétrique comme relative aux effets de spin.

Nous ajoutons quelques remarques sur les points de vue divers dans le problème de la théorie unitaire des champs :

1) Géométrisation complète renouvelée par l'école du Prof. J. A. Wheeler; 2) Essai de reconstruction de la gravitation en partant de spineurs et spécialement de l'équation non linéaire avec un terme en ψ^3; 3) Point de vue dualiste.

Let us leave aside all questions of more formal nature and concentrate ourselves on the physical side of the problem.

I. Starling from the Lagrangian

$$\mathfrak{L} = \mathrm{G} = \frac{c^4}{16\,\pi\,\varkappa}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,[\{\alpha\beta,\rho\}\,\{\rho\sigma,\sigma\} - \{\sigma\rho,\sigma\}\,\{\beta\sigma,\rho\}] \tag{1}$$

and going to the linear approximation

$$g_{\mu\nu} = g^{0}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2}$$

one gets as the transversal- transversal part (propagation along x-axis)

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{L}\\ \mathrm{T}\end{matrix}\right\} = \frac{c^4}{16\,\pi\,\varkappa}\sum_{1,2}\left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}\right)^2 \mp \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\} \tag{3}$$

(upper (—) signe for $\mathcal{L}$, lower (+) sign for the energy density). This can be quantized in the usual way by means of the relations

$$[h_{ns}, h_{n's'}]_{-} = \frac{16\,\pi\,\varkappa\,h}{ic^3}\left(\nabla_{nn'}\cdot\nabla_{ss'} + \nabla_{ns'}\,\nabla_{sn'} - \nabla_{ns}\,\nabla_{n's'}\right)\mathcal{D}' \quad (4)$$

$\left(\mathcal{D}' = \frac{\mathcal{D}}{(\nabla^2)^2}\right.$; $\left.\nabla_{nn'} = \delta_{nn'}\,\nabla^2 - \nabla_n\,\nabla_{n'}\right)$; and be compared with the Pauli-Fierz commutation relations established for the total $h_{\mu\nu}$ whithout separation of the transversal-transversal part. For the Fourier coefficients one gets

$$[q_{ns}, q^{+}_{n's'}] = \omega_{nn'}\,\omega_{ss'} + \omega_{ns'}\,\omega_{sn'} - \omega_{ns}\,\omega_{n's'} \quad (4a)$$

$\left(\omega_{nn'} = \delta_{nn'} - \frac{l_n\,l_{n'}}{l^2}\right.$, l_n -corresponding cosine).

To calculate the interaction of Dirac particles with gravitation one must take the expressions of the theory of V. Fock and mine of parallel displacement of spinors (1929). For the case of weak field the coefficient of parallel displacement, i.e. the analogue of the Christoffel symbol

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_l} - C_l\right)\psi\right]$$

reads

$$C_l = \frac{1}{4}\sum_{1}^{4} \alpha_i\,\alpha_k\,e_k\,\gamma_{ikl} = -\frac{1}{8}\,e_l\,\frac{\partial h_{44}}{c^2\,\partial x_l} \quad (5)$$

(γ_{ikl} -Ricci's rotation coefficient, e_l -Eisenhart's symbols).

But for simplicity we prefer to take here the case of the Klein-Gordon equation describing the bosonic scalar or pseudoscalar particles; then we get :

$$S\varphi = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\,\frac{g^{\alpha\beta}\,\partial\varphi}{\partial x^\beta} - m^2\psi \rightarrow (\Box - m^2)\,\varphi - \mathfrak{U}\varphi = 0 \quad (6a)$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 + U_2 = \left[-h_{ns}\,\frac{\partial}{\partial x_n}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\right] + \left[\left(-\frac{\partial}{\partial x_s}\,h_{ns}\,h_{nk}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\,e_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,h^2_{ns}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right] \quad (6b)$$

For small velocities we have as the potential energy of a boson in a weak gravitational field

$$V = \frac{c\,h}{2m}\,\mathfrak{U} = -\frac{c\,h}{2m}\left(h_{ns}\,\frac{\partial}{\partial x_n}\,\frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{i\,m}{4c}\,\frac{\partial h^2_{ns}}{\partial t}\right) \quad (6c)$$

For illustration we compute with this simplest version of quantization the energy radiated by some distribution of matter possessing quadrupole moment $Q_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)\,(dx)$. One gets

$$W = \frac{8\varkappa\, \nu^2}{5c^5\, m^4} \left(p_{ns}^2 - \frac{1}{4}\, p_{nn} \right) \tag{7}$$

which goes over to the classical formula of Einstein

$$W = \frac{\varkappa}{5c^5}\, \dddot{Q}^2$$

(p_{ns} -matrix element of p_n, p_s).

Let us remark that qualitatively the structure of this formula is made quite clear after substitution of the gravitational charge $(\sqrt{\varkappa}\cdot m)$ instead of the electric charge in the well known expression for the electromagnetic radiation rate, and, which is quite essential, after passing from dipole to quadrupole radiation. Clearly for ordinary positive masses the dipole radiation of gravitational waves vanishes. For the most interesting case of transmutation of 2 scalar particles into 2 gravitons we obtain

$$\sigma_{gr} = 24\pi \cdot r_g^2\, \frac{c}{v} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \tag{8}$$

(Taking into account other terms does not change the order of magnitude).

It is instructive to compare this with the cross-section for annihilation of electrons-positrons into 2 photons, where a new electromagnetic radius must be replaced by the gravitational one $\left(r_g = \frac{\varkappa m}{c^2} \right)$ and the quadrupole character of radiation taken into account, which leads to such steep increase ($\div E^2$). When extrapolated to very high energies (where the weak field approximation will be invalid), one may qualitatively expect that gravitational and electro-magnetic modes of transmutation would be somehow equivalent at energies of the order $\sim 10^{20}$ eV, which is greater but not enormously greater that the energy of the biggest Auger cosmic ray showers.

Recently Prof. Wheeler and Dr. Brill have estimated the probability of transmutation into gravitons of 2 neutrinos and have obtained a quite similar result (cf. [8]), which reads

$$\sigma_{g-\nu} \approx \frac{\varkappa^2 E^2}{c^8}\,. \tag{8a}$$

I. Piir has calculated the probability of transmutation into gravitons of 2 photons. I. Piir has also calculated the scattering of photons by a Schwarzschild field (which leads to the Einstein formula, which has the well known Rutherfordian type) and an interesting non-linear effect of scattering of photons by photons by means of gravitons (and not via electrons-positrons as in the Euler-Kockel-Heisenberg case, or not via π-mesons as in the Kurdgelaidze case). I. Piir has used the more refined

Gupta method of quantization with some change in description of the Hilbert-Lorentz supplementary condition. The Lagrangian of the theory of interacting gravitational and electro-magnetic fields

$$\mathcal{L} = \Sigma\, \varkappa^n (\mathcal{L}_{gr}^{(n)} + \mathcal{L}_{\epsilon-\mathrm{mag}}^{(n)})$$

leads to the interaction Hamiltonian $\mathcal{H}_j = -\mathcal{L}_i$ and to a well known expression for collision operators. For the description of transmutations of photons into gravitons one must use the 2nd order term

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-i\varkappa}{hc}\right)^2 \iint [\mathcal{T}(\mathcal{L}_{\epsilon-m}^{(1)} \cdot \mathcal{L}_{\epsilon-m}^{(1)} + \mathcal{T}(\mathcal{L}_{\epsilon-m}\, \mathcal{L}_{gr} \cdot d^4x\, dx^4\, x^1) + \ldots$$

$$(\mathcal{L}_{\epsilon-m} = -\frac{1}{4}[2\gamma_{\alpha\beta}\, \mathcal{F}_{\alpha\rho}\, \mathcal{F}_{\beta\rho} + \ldots] \qquad (\mathcal{Y}^{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} - \varkappa\gamma_{\mu\nu})$$

$$(\varkappa = (16\pi\, \varkappa_{\mathrm{Newt.}})^{1/2}) \tag{9}$$

Then one gets

$$\sigma_{\gamma-gr} \sim \varkappa^4 (hc\, f_0)^2 \tag{10}$$

(f_0 -wave number).

One may prefer to put the whole problem even on a more firm basis using e.g. Schwinger's formalism for the description of vacuum effects. Writing with A. Brodsky the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\{\varphi(x), \mathrm{S}\,\varphi(x)\} \qquad \text{(cf. 6)} \tag{10a}$$

and taking into account the vacuum value

$$\mathcal{L}_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\mathrm{G}(xx')_{x-x'}$$

(G-Greenian) we get for the vacuum value of the action function

$$\mathrm{W}_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{2}\mathrm{T}_{\mathrm{vac}}\; ln\sqrt{-g}\,\mathrm{S} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\; ln\,\mathrm{G} + \mathrm{const} \tag{11}$$

and

$$\mathrm{W}_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \tau^{-1}\, d\tau \int e^{-i(kx)}\, e^{i\sqrt{-g}\mathrm{S}\tau}\, e^{i(kx)}\,(dx)\,(dk) \tag{12}$$

For the case of weak fields one gets a complicated formula for which we write here only a single typical term

$$\mathrm{W}_{\mathrm{vac}} = -\frac{m^2c^2}{3\cdot 2^9\,\pi h}\int_0^\infty s^{-2}\, e^{-s}\, ds \int (dx)\left[2\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x\,\nu}\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial x\,\rho}\, e_{\alpha\gamma}\, e_{\delta\nu} - \ldots\right] \tag{13}$$

This can be renormalized by putting

$$x_\nu \to \left(1 + \frac{\varkappa\, m^2}{2\pi\, c\, h}\frac{1}{6}\int_0^\infty s^{-2}\, e^{-s}\, ds\right)^{1/2} x_\nu$$

$$m \to \left(\frac{1}{1 + \frac{\varkappa\, m^2}{2\pi\, h\, c}\frac{1}{6}\int s^{-2}\, e^{-s}\, ds}\right)^{1/2} m \tag{14}$$

(which points on the small difference of inertial and gravitational masses). One can also use (13) for new computations of various effects connected with vacuum polarization of particles by the gravitational field; the imaginary part of the action function will yield as usually the desired expression for the transmutation probability, in agreement with the previous result (8).

2. We dont enter here in a detailed discussion of the expression for the energy of the gravitational field but may point only the satisfactory coincidence of Prof. MÖLLER's result with the formula of N. MITSKEVIČ, which was obtained independently by quite an other method. We have taken with MITSKEVIČ the true scalar expression for the Lagrangian : $\mathcal{L} = \mathrm{R}\,(\mathcal{L} \neq \mathrm{G}\,!)$ and derived first the known symmetrical tensor

$$\mathrm{T}^{\mathrm{total}}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\mathrm{tot.\,sym.}}_{\alpha\beta}$$

(which vanishes due to Einstein eqs)

$$(\mathrm{T}^{\mathrm{tot}}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\mathrm{gravit}}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{\mathrm{matter}}_{\alpha\beta}) \tag{14}$$

Afterwards we derive the canonical non-symmetrical tensor

$$\mathrm{T}^{\mathrm{can}}_{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\mathrm{can\,(gr)}}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}^{\mathrm{can\,(matter)}}_{\alpha\beta} \tag{15}$$

The difference $\mathrm{T}^{\mathrm{sym}} - \mathrm{T}^{\mathrm{can}} = \mathrm{T}^{\mathrm{spin}}$ may be associated with the spin part of the energy-density tensor. Seperating the pure gravitational and matter part of $\mathrm{T}^{\mathrm{spin}}_{\alpha\beta}$ one gets just the interesting relation between MITSKEVIČ's and MÖLLER's tensors

$$\mathrm{T}^{\mathrm{spin\,(gravit)}} = - \mathcal{T}_{(\mathrm{gravit\,+\,matter})\ (\mathrm{Moller})} \tag{16}$$

which formula seems to be approved also by Prof. Chr. MÖLLER.
As was pointed by Prof. P. BERGMANN this M.-M. affine tensor proves to be after investigation of Dr. KOMAR a special case of a certain covariant expression (cf. also the investigation of Dr. GOLDBERG). So perhaps the hope is not exagerated that in the next future the old controversies about the definition of gravitational energy will find a satisfactory solution due to all theese investigations.

At the end we may point that in our views the most plausible line of attack in the problem of the unitary description of matter lies in the investigation of the correlated system of equations of Einstein gravitational (metric) field

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \mathrm{R} = - \varkappa\, \mathrm{T}_{\alpha\beta}(\psi) \tag{17a}$$

where we may put on the right hand side the tensor constructed from ψ satisfying the non-linear spinor equation, representing some kind of generalization of the Dirac equation

$$\gamma_\nu \nabla_\nu \psi + \lambda f(\psi^3) = 0 \tag{17b}$$

where γ_ν are functions of 4-coordinates, ∇_ν the coefficient of parallel displacement (cf. 5), and $f(\psi^3)$ some non-linear term of the type investigated by A. BRODSKY and myself, from which Heisenberg and Pauli preferred on known grounds to choose pseudo-vectorial type term. Then we may hope to come nearer the solution of the very essential problem, whether a primordial spinor field ψ or rather some kind of metrical gravitational field ($g_{\alpha\beta}$ or γ_α) must be taken as the fundamental unitary basis of description of reality, or if one must preserve the dual description of the known physical reality.

REFERENCES

D. Ivanenko, A. Sokolov, Classical theory of fields (russian ed. 1951, german ed. 1952).

D. Ivanenko, A. Sokolov, Quantum theory of fields (russ. ed. 1952) (2d part).

D. Ivanenko, A. Sokolov, *Transact. Moscow University*, n° 8, 1947.

A. Sokolov, *ibid.*, n° 9, 1952.

D. Ivanenko, A. Brodsky, *C. R. Acad. Sci. USSR*, **92**, n° 4, 731 (1953).

I. Piir, *Transact. Inst. of Physics*, Ac. Sci. Esthonian SSR, Tartu, n° 5 (1957) (USSR).

J. A. Wheeler, D. Brill, *Rev. Mod. Phys.*, **29** (1957).

D. Ivanenko, *Nuov. Cim.*, Suppl. al. vol. 16, n° 1, **349** (1957).

D. Ivanenko, « Max Planck Festschrift », Berlin (1958).

M. Mitskević, *Annalen d. Phys.*, Bd. 1, **319** (1958).

D. Ivanenko, N. Mitskević, *Journ. Exp. Theor. Phys.* (russ.) (in print, september issue, 1959).

Chr. Möller, « Max Planck Festschrift », Berlin, DDR, (1958).

H. Kita, *Prog. Th. Phys* (1959).

COMMUNICATION D. IVANENKO

Intervention de J. Callaway

Cross sections for physical processes which, like the one discussed by Professor Ivanenko, depend on the square of the gravitational constant, are small. There is, however, at least one process for which the cross section involves the gravitational constant (G) to the first power or, in other words, the product of the gravitational radius and the electromagnetic radius (e^2/mc^2): the scattering of light by the gravitational field of a point charge. This effect may be estimated from the known exact solution of the combined Einstein-Maxwell field equations for the gravitational and electromagnetic fields of a point charge by the same techniques as are used to calculate the deflection of light by a massive body. One finds in this way an approximate differential cross section

$$\sigma(\phi) = \frac{3\pi\, Ge^2}{8c^4\, \phi^3}$$

where ϕ is the angle of deflection.

Question posée par Pierre Léonard, sur la communication du Pr Ivanenko :

Pensez-vous que le processus que vous avez décrit joue le rôle principal dans la formation de matière, dans une théorie de l'état stationnaire ?

Réponse du Pr. D. Ivanenko :

Oui, je pense que les processus de transmutations gravitationnelles proposés par nous et Wheeler doivent jouer ce rôle à l'échelle cosmologique, si on tient compte que leur probabilité croît avec l'énergie comme E^2.

1) Le Professeur J. A. WHEELER insiste sur l'importance des transmutations de neutrinos en gravitons et attire l'attention sur l'étude du Professeur Eunema sur l'opacité des étoiles pour ces processus. A ce propos, le Professeur Wheeler remarque que des formules analogues à celle du Dr Brill et aux siennes sur le taux de transmutation avaient déjà été discutées auparavant (voir par exemple le livre d'Ivanenko et Sokolov sur la théorie classique des champs). D. Ivanenko exprime sa satisfaction de cette concordance de vues au sujet de phénomènes si inhabituels.

2) Le Professeur M. A. TONNELAT fait remarquer que d'après la théorie de la fusion de L. de Broglie un graviton peut être construit à partir de spineurs et que ceci aussi suggère la possibilité de transmutations.

Intervention du Prof. J. Géhéniau

Comme vient de l'indiquer Mme TONNELAT, la théorie linéaire de la gravitation basée sur les équations d'Einstein a beaucoup de points communs avec la Mécanique ondulatoire du corpuscule de spin maximum deux. Je pense qu'on a déjà étudié par cette théorie du corpuscule de spin maximum deux certains phénomènes d'interaction entre la matière et les ondes de gravitation. En particulier la loi de Newton a été obtenue par une méthode parallèle à celle qui donne la loi de Coulomb en théorie quantique du champ électromagnétique. Mais n'est-ce pas Mme TONNELAT qui a traité ces problèmes ?

ON THE POSSIBILITY OF DETECTION AND GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVES

J. WEBER,

University of Maryland, College Park (Maryland)

RESUME

On propose deux méthodes de mesure du tenseur de Riemann et de détection des ondes gravitationnelles. L'une repose sur le fait que les dérivées secondes des champs dûs aux ondes engendrent des mouvements relatifs d'un système de masses. La résonance mécanique ou l'excitation de vibrations acoustiques permet alors la détection. La seconde méthode met directement en jeu les tensions produites au sein d'un cristal par le tenseur de Riemann; celles-ci peuvent engendrer une polarisation électrique grâce à l'effet piézo-électrique; un effet de résonance sera recherché. Discussion des possibilités pratiques et de la précision.

On propose une méthode de génération d'ondes gravitationnelles utilisant des cristaux. Des tensions variables dans le temps seront engendrées électriquement. Pour des dimensions comparables à celles d'une tige en rotation rapide, cette nouvelle méthode multiplie par 10^{17} l'intensité rayonnée. A fréquence donnée, si le cristal peut avoir des dimensions de l'ordre de grandeur d'une longueur d'onde gravitationnelle, le gain sera même de l'ordre de 10^{39}.

Introduction

Two avenues of approach to the problem of experiments with gravitational waves will be discussed. First if any radiation originates on the sun, from outside the solar system, or within the earth we might be able to detect it. Detectors utilizing the Riemann tensor will be described. Secondly we should like to be able to generate (and detect) gravitational waves in the laboratory. A new method is suggested for generation which utilizes the electrically induced stresses in a crystal. Under suitable conditions such a crystal may yield gravitational radiation which is many orders more intense than that due to the rotating rods considered by Einstein and by Eddington.

* Supported by the National Science Foundation of the United States.

PART I

Detection of Gravitational Waves

Suppose we have two masses m_1 and m_2, separated by [1] a spring (Figure 1). Then, if a time dependent acceleration field is applied which is uniform over the apparatus, every particle will have the same acceleration at any given time. There is no relative motion of m_1 and m_2. The situation is different if a gravitational wave is incident. The wave intensity is not uniform. Relative motion of m_2 is now possible with respect to m_1. Therefore energy may now be abstracted from the wave.

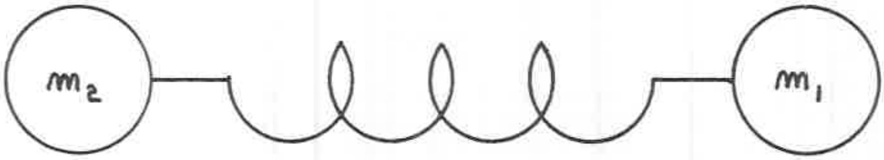


FIG. 1

Consider one of the masses m, its equation of motion may be derived from an action principle as :

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{F^i}{2mc^2} \tag{1}$$

$\frac{r^i}{2} F^i$ is an internal force of non gravitational origin, associated with the relative motion of the two masses. Let the coordinate system be fixed in the center of mass of the two bodies. Let the position vector of the first mass be $\frac{r^i}{2}$ that of the second mass is $-\frac{r^i}{2}$. r^i gives the position of one mass relative to the other, and is assumed to be very small. We write r^i as the sum of the two vectors :

$$r^i = r^i_{(0)} + \xi^i \tag{2}$$

$r^i_{(0)}$ is defined by the conditions :

$$\frac{\delta r^i_{(0)}}{\delta s} = 0\,, \qquad \text{for all } s\,;$$

$$r^i_{(0)} \rightarrow r^i \tag{3}$$

in the limit of large damping and flat space. The symbol $\frac{\delta}{\delta s}$ means covariant differentiation with respect to s. The masses move along world

(1) The methods discussed here were described in the author's Gravity Research Fondation prize essays, April 1958, and April 1959, New Boston, New Hampshire. A device somewhat similar to that of Figure 1 was suggested independently by H. Bondi at the Royaumont Conference, June 1959.

lines which are not geodesics because of the internal forces. However one can proceed in a manner somewhat similar to the deduction of the equation of geodesic deviation [2] and employing (1), (2), and (3) leads to :

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta s^2} + R^i_{jkl}\, \rho^j \rho^l \left[r^k_{(0)} + \xi^k\right] = \frac{F^i}{mc^2} \tag{4}$$

In (4) R^i_{jkl} is the Riemann tensor, ρ^l is a unit vector tangent to the world lines. For the internal force F^i we may take a term proportional to the displacement and a term proportional to the velocity. In such a case (4) becomes simply the equation of a forced harmonic oscillator, with the Riemann tensor as the driving term. Measurement [3] of the amplitude of oscillation or the absorbed power enables us to calculate the component R^i_{oio} of the Riemann tensor.

First the absorption cross section S_A is calculated, assuming sinusoidal gravitational waves are incident and that the antenna is only damped by its own reradiation of gravitational waves. This cross section is the maximum possible and is, in terms of the wavelength λ :

$$S_{A\ (\text{maximum})} = \frac{15\lambda^2}{16\pi} \tag{5}$$

In (5) the gravitational constant G does not appear. Unfortunately other irreversible processes within the antenna give damping many orders greater than the radiation damping. In practice the cross section is much less than (5) and is given by :

$$S_A = \frac{15\pi G (\beta \, |r_{(0)}|)^2 \, \tau m}{8\, c} \tag{6}$$

In (6) β is the gravitational wave phase constant, $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, and τ is a relaxation time associated with the irreversible processes within the antenna. Analysis also shows that S_A is a maximum in (6), for a given τ, when r is a half *acoustic* wavelength in the spring, at the driving frequency.

This is a most important limitation because the acoustic velocity is five orders smaller than the velocity of light. The acoustic wavelength enters the discussion because the elastic forces of the spring are transmitted by acoustic waves.

For a continuous spectrum of gravitational radiation the absorbed power is :

$$P_A \approx \frac{\pi^2 G\, m (\beta \, |r_{(0)}|)^2}{c}\, t_{or}(\omega_o) \tag{7}$$

In (7) $t_{or}(\omega_o)$ is the power spectrum of the incident gravitational wave power flow per unit area.

(2) Synge and Schild, *Tensor Calculus*, p. 93, University of Toronto Press 1952.

(3) Measurement of the Riemann tensor has been considered by F. A. E. Pirani, « Proceedings of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics », p. 61, *Astia Document*, n° AD 118180.

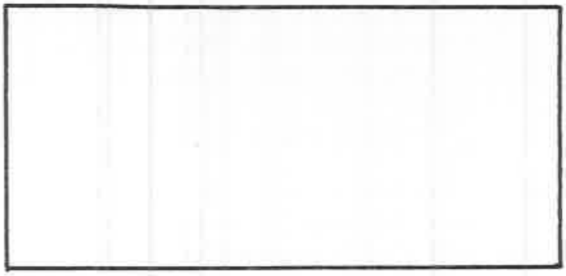


Fig. 2

Consider now a crystal (Figure 2) which interacts with a gravitational wave. In this case an equation similar to (4) is obtained which has the form :

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_{ij}}{\delta s^2} + \mathrm{D} \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\delta s} + \mathrm{Y}^{mn} \frac{\delta^2 \varepsilon_{ij}}{\delta x^m \, \delta x^n} - \mathrm{R}_{imnk} \, \rho^m \, \rho^n \, [\delta^k_j + \varepsilon^k_j] = 0 \tag{8}$$

In (8) ε_{ij} is the strain tensor, D and Y^{mn} are determined by the physical properties of the crystal. Ordinarily we deal with situations where the acoustic wavelength is five orders smaller than the gravitational wavelength. It is therefore appropriate to employ a Lorentz metric over the entire region occupied by the crystal. The last term of (8) is much smaller than the others. We therefore write, for one dimensional compressional acoustic waves

$$\mathrm{Y} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \mathrm{D} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c^2 \, \mathrm{R}_{0101} \tag{9}$$

This states that the strain tensor is being driven by the Riemann tensor. Analysis based on (9) again indicates that best performance results when the length is a half acoustic wavelength. Improvement can be obtained by using restoring forces transmitted with the speed of light. This can be accomplished in part by use of the piezo-electric effect.

In a piezo electric crystal a strain results in an electric polarization P_i given by :

$$\mathrm{P}_i = \varepsilon_{kl} \, \mathrm{E}^{kl}_i \tag{10}$$

In (10) E^{kl}_i is the piezo electric stress tensor. The electric polarization in (10) gives rise to an electric field over the crystal. Measurement of the second time derivatives of this field measures components of the Riemann tensor. There is a terminal voltage which can transmit power to an amplifier of weak signals. For simplicity we assume that the crystal is polarized in one direction only. Let V be the volume of the block of crystalline material. Let Q_e be the electrical circuit Q defined by :

$$\mathrm{Q}_e = \frac{\omega \text{ (Stored Energy}}{\text{Power Dissipated}} \tag{11}$$

The power which the detector can deliver to an associated electric circuit is readily calculated, assuming now that sinusoidal gravitational waves from a linear mass quadrupole oscillator are incident on the crystal. We assume that the piezo electric material is perfect crystalline quartz. In this case the absorbed power P_A is given by :

$$P_A = 10^{-22}\,\omega^{-1}\,V\,Q_e\,t_{or},\ \text{ergs/second} \tag{12}$$

In (12) ω is again the angular frequency and t_{or} is the incident gravitational flux in ergs per square centimeter per second. A cubic meter of quartz crystal at $\omega \sim 10^3$ gives a cross section $\sim 10^{-10}$ cm^2. For a continuous spectrum of gravitational radiation with power spectrum function $t_{or}(\omega)$ the power absorbed by an electric circuit of resonant ferquency ω_o may be calculated and is (for perfect quartz) :

$$P_A = 10^{-22}\,V\,t_{or}(\omega_o) \tag{13}$$

In order to detect the absorbed power, amplification by electrical means is necessary and the electrical fluctuation noise in the antenna and amplifier must be considered. This assumes that all extraneous effects other than random noise can be recognized. Such an assumption has been found valid in microwave spectroscopy. For synchronous detection of the sinusoidal waves the power output of the detector must exceed the noise power P_{N1} given by [4]

$$P_{N1} = \frac{N\hbar\omega}{8\,\tau_A\,[e^{\hbar\omega/kT} - 1]} \tag{14}$$

In (14) $\hbar$ is Planck's constant divided by 2π, k is Boltzmann's constant, T is the gravitational antenna temperature and N is the noise factor of the receiver which is expected to be less than 25, and more than 1. τ_A is the averaging time. For a continuous spectrum of gravitational radiation the power delivered by the detector must exceed the noise power P_{N2} given by [4] :

$$P_{N2} = \frac{\pi^{3/2}}{8}\left(\frac{\omega}{\tau_A\,Q_e}\right)^{1/2}\left[\frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right] \tag{15}$$

We are planning experiments to search for interstellar gravitational radiation[5] using both methods described here. For the first method we use the earth itself as the block of material constituting the antenna. The earth's normal modes (about 1 cycle per hour) are excited by incident gravitational waves. This procedure is limited by the relatively low Q of the earth and the large tidal and seismic background noise. The apparatus of Figure 3 is employed in the second method, in which acoustic oscilations of the crystal block are employed. Search at

(4) R. H. Dicke, *Rev. Sci. Inst.*, **17**, 268 (1946).

(5) J. A. Wheeler has noted (Onzième Conseil de l'Institut International de Physique Solvay, *La Structure et l'Evolution de l'Univers*, éd. Stoops, Brussels, 1958 (p. 112) that the density of gravitational radiation could be as high as 10^{-29} to 10^{-28} grams/cm^3 ($\sim 10^3$ ergs/cm^2 second) and still be consistent with present information about the rate of expansion of the Universe. He and Professor M. Schwarzchild (private communication) have subsequently noted that if this radiation were set free by the same process which caused the inhomogeneous collection of matter into galaxies, it would be characterized at that time, and there-

frequencies $\sim 10^3$ cycles per second is planned. The earth rotates the apparatus. If radiation is incident from a particular direction it may be observed from the diurnal change in amplifier noise output; operation at liquid helium temperatures may be necessary. The arrangement of Figure 4 will be used to search for isotropic gravitational radiation. Low noise amplifiers such as masers [6] may be employed.

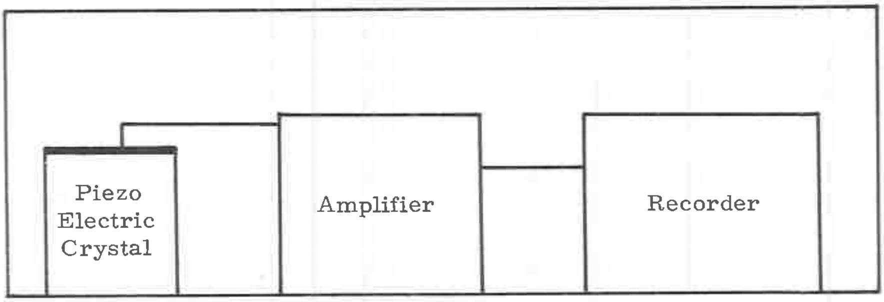


FIG. 3

Dirac has suggested that astronomical anomalies might be correlated with effects of gravitational radiation. We have analyzed this possibility. If a gravitational wave is incident on the earth the Riemann tensor effects give rise to torques. For a continuous spectrum of gravitational radiation this will cause an irregular flutter of the earth's rotation period. Detailed mathematical analysis gives the formula (for a body rotating with angular velocity ω) :

$$\frac{\overline{\mathrm{I}^2}}{\mathrm{I}_0^2} = \frac{25\pi \mathrm{G}}{\omega^2 c^3} t_{or} \tag{16}$$

fore also now by the same scale of lengths, of the order of 10^{24} cms today (10^0 years vibration period).

$$\left(\frac{\partial g_{\text{typical}}}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{\varrho \mathrm{G}}{c^2} \sim 0.2 \times 10^{-56}\ \mathrm{cm}^{-2}$$

$$\delta g_{\text{typical}} \sim \cdot 5 \times 10^{-28}\ \mathrm{CM}^{-1} \times 10^{24}\ \mathrm{CMS} \sim 10^{-4}$$

This would appear to be not too small, but too slow to measure, by these methods.

(6) The word maser is an acronym for « microwave amplification by the stimulated emission of radiation ». Research on these devices started independently at the University of Maryland, Columbia University, and the Lebedev Institute in Moscow. The principle was proposed in 1953 (J. WEBER, Transactions of the Institute of Radio Engineers Professional Group on Electron Devices, PGED 3, June 1953), and in 1954 (BASOV and PROKHOROV, *J. Exper. Theor. Phys.*, U.S.S.R., **27**, 431, 1954). The work at Columbia University resulted in a useful molecular frequency standard operating on this principle (GORDON, ZEIGER, and TOWNES, *Phys. Rev.*, **95**, 282, 1954). Low Noise practical amplifiers utilizing this principles employ paramagnetic ions, following methods suggested by N. BLOEMBERGEN (*Phys. Rev.*, **104**, 324, 1956). It appears possible to utilize these devices in the radiofrequency part of the spectrum, for the purposes outlined in this paper. A review article summarizing the work on the maser will appear in the July 1959 *Reviews of Modern Physics*.

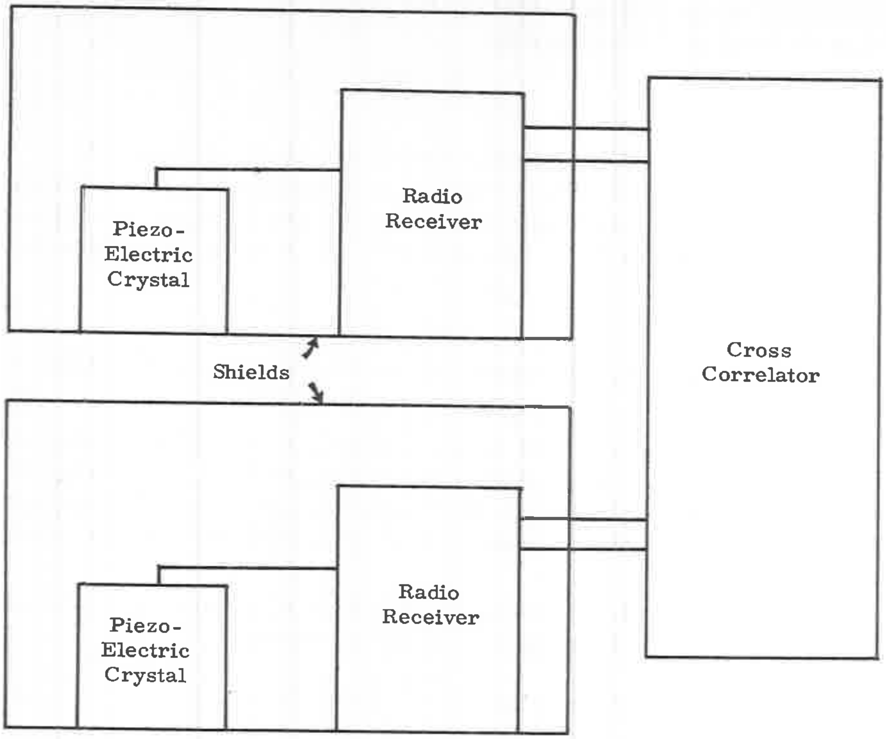


FIG. 4

In (16) I^2 is the mean square fluctuation in the angular momentum, I_0 is the angular momentum of rotation, t_{or} is the total gravitational wave flux in ergs per square centimeter per second. If we arbitrarily assume that all the earth's rotational anomalies are due to gravitational waves, t_{or} is calculated to be 5×10^8 ergs per square centimeter per second. It is clear from this that the earth's rotation is not a useful detector unless the size of the anomaly can be reduced. The other astronomical anomalies lead to larger figures.

Generation of Gravitational Waves

It would of course be very desirable if gravitational waves could be generated in the laboratory. For a spinning rod EINSTEIN calculated the rate of radiation to be

$$P_R = 1.73 \times 10^{-59}\, I_m^2\, \omega^6 \text{ ergs/second} \tag{17}$$

Here I_m is the moment of inertia and ω is the angular frequency. If we make ω so large that the rod is about to break up we find that the length of the rod is related to the wavelength of sound λ_s at the angular frequency of rupture by

$$l = \frac{\lambda_s \sqrt{2\delta}}{\pi} \tag{18}$$

In (18) δ is the maximum allowed strain for the given material.

The implication of (18) is that at a given frequency the maximum power which can be radiated is fixed by the the breaking strength of the rod, which in turn limits the moment [7] of inertia to values less than

$$\frac{10^{-3}\,\rho\,\lambda_s^5\,\delta^{5/2}}{12\pi^5} \tag{19}$$

In (19) ρ is the density. Employing (18) in (17) gives, for sound velocity v_s

$$P < 4 \times 10^{-63}\,\rho^2\,\lambda_s^{10}\,\delta^5\,\omega^{-4} \tag{20}$$

(20) shows that, contrary to the appearance of (17), low frequency operation with large rods gives more radiation than high frequency spinning of small rods. About 10^{-30} ergs per second can be radiated by a one meter rod. The wavelength is at least 1000000 times the length of the rod.

In the linear approximation the solutions of EINSTEIN's field equations are (at a point r centimeters from the radiator).

$$\Psi_i^{\,j} = h_i^j - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\,h = \frac{4G}{c^4}\int r^{-1}\,(T_i^j)_{\text{retarded}}\,d^3x \tag{21}$$

In (21) T_i is the stress energy tensor. (21) suggests that an oscillating stress tensor is one way to generate a gravitational wave. This can be accomplished by electrically driving a piezo electric crystal. Again we have a choice of either making use of acoustic resonance or suppressing it. If acoustic resonance is employed we must insert in (21) expressions for the stress energy associated with the acoustic wave.

For quartz the radiated power for a resonator is given by

$$P < \left[\frac{16\,G\,\rho^2\,A_s^2\,\lambda_s}{15}\left(\frac{\lambda_s}{c}\right)^5 \times 10^{-6}\right]_{\omega} + \left[\frac{G\,\rho^2\,A_s^2\,n^2\,\pi\,\lambda_s}{15}\left(\frac{\lambda_s}{c}\right)^5 \times 10^{-12}\right]^{2\omega} \tag{22}$$

In (22) A_s is the cross sectional area, the first term gives the power radiated at the fundamental frequency, the second term gives the power radiated at twice the fundamental frequency. The resonator must be a multiple n of a half acoustic wavelength long. The first term of (22) is seen to be independent of n. If a large number of resonators are located within a region less than a gravitational wave half wavelength the radiated power will be proportional to the square of the total number

(7) We are considering a fairly slender rod, following Eddington. A thick rod may be several orders better, we have not studied it.

of crystals. (22) appears to be independent of frequency. Actually the frequency determines the mass of each resonator from the requirement that it be a multiple of a half wavelength long. In order to radiate 10^{-15} ergs per second at the fundamental frequency 10^6 crystals would be needed, each one half acoustic wavelength thick and with a cross sectional area of 50 cm^2. A complex phasing arrangement would be needed in order to properly drive the array. It appears better to suppress the resonance vibrations and create, by the the piezo electric effect, mechanical stress components which do not reverse sign every acoustic half wavelength. Single large crystals may then be used. These stresses can be made to oscillate harmonically with time if the crystal is driven by a powerful vacuum tube radiofrequency oscillator. Analysis shows that the optimum crystal size is a cube each side of which is a half gravitational wavelength long. The amplitude of the induced stresses is limited by the tensile strength of the crystal. Expression (21) enables us to calculate the gravitational field radiated by the oscillating electric field induced stresses. The stress energy pseudo tensor may then be employed to directly calculate the radiated power P_R given by (for one crystal)

$$P_R = \frac{G\, P_{\max}^2\, \lambda^4\, \pi^2}{120\, c^3} \tag{23}$$

In (23) $P_{\max}$ is the tensile strength in dynes per square centimeter, again λ is the gravitational wave wavelength and c is the speed of light.

For example waves one meter long could be radiated by a crystal fifty centimeters on a side. If driven just below the breaking point each crystal would radiate 10^{-13} ergs each second. This is about 10^5 gravitons per second (at $\omega = 2\pi \times 10^8$). Single detectors of the type considered earlier can detect a power of about 10^{-3} ergs per second at this frequency. It is apparent that a substantial gap still exists between what can be generated and what can be detected in a small laboratory. Large numbers of radiating elements and a complex detection array can narrow this gap. The electrical power required to drive each crystal might approach 10^8 watts. This might be reduced if low temperature operation can somehow be maintained. Also one might hope that high frequency and low temperature operation might raise the effective tensile strengths. All of these issues need careful experimental investigations. If the numbers used earlier cannot be improved upon, it would require a single crystal 100 meters on a side, driven to the fracture point, and a correspondingly large detector, in order to generate and detect the gravitational radiation. The practical difficulties would be enormous. We are not proposing that this be done. We are suggesting some modest investigations of crystals, in order to make further improvements. Wave zone experiments are difficult. Near zone fields are readily detectable by these techniques and their exploration might lead to interesting results.

Conclusion

The detectors which have been proposed are sufficiently good to search for interstellar gravitational radiation. Further advances are necessary in order to generate and detect gravitational waves in the laboratory. If we compare a crystal driven as described above with a slender one meter spinning rod, we find that the crystal is about seventeen orders better. At a given frequency, without regard for size, the crystal is about thirty-nine orders better. We acknowledge, with thanks, the helpful criticism of F. A. E. PIRANI, P. G. BERGMANN, and J. A. WHEELER.

DISCUSSION

Réponses de Weber aux questions dont les textes ne sont pas parvenus

Le Professeur PIRANI a demandé quels mécanismes dans le Soleil ou dans l'espace extérieur pourraient engendrer des radiations gravitationnelles. Je réponds que peut-être les protubérances et la turbulence dans l'atmosphère solaire pourraient engendrer une telle radiation. En outre, si l'on calcule le coefficient d'absorption d'une étoile pour les gravitons, on trouve que le plasma intérieur à haute température peut contribuer à rendre l'étoile légèrement « grise »; la loi de Stefan-Boltzmann peut alors être appliquée au calcul de la radiation.

M. Boardman a demandé si l'absence de radiation gravitationnelle pourrait servir de test aux théories cosmologiques. Je réponds que le maximum de la décomposition spectrale d'une telle radiation se situerait vers la fréquence de un cycle par 10^6 années; il faut alors espérer que la « queue » du spectre reste assez intense pour être détectée dans la bande de fréquences de l'appareillage.

Le Professeur WHEELER a remarqué que l'existence même des marées prouve la justesse des idées ici exposées.

Le Professeur Mac VITTIE a demandé comment l'on peut être certain que les coordonnées utilisées pour interpréter l'expérience sont bien les bonnes. Je réponds que tout l'appareillage est en chute libre en interaction avec les ondes gravitationnelles. Le repère quasi-LORENTZIEN employé est donc celui qui convient.

ALLOCUTION DE CLOTURE

par Peter G. BERGMANN,
Syracuse University, New York

En voulant résumer un colloque aussi riche d'idées diverses que celui-ci l'on court un double risque. Des suggestions ont surgi jusqu'à la toute dernière minute, et l'on n'a pas eu le temps de les assimiler convenablement, de les laisser mûrir en l'esprit, de sorte qu'il est difficile d'exposer une évaluation dûment pesée de ce qui est venu au jour. Mais si on laissait passer quelques jours, sans le secours d'un tirage complet de tous les mémoires présentés et des discussions qui ont suivi, alors on aurait de bonnes chances d'oublier quelques résultats ou remarques importants. Et de fait je crains qu'à présent déjà nous ne souffrions d'une illusion de perspective, et que les sujets discutés les tout derniers jours ne soient plus vivants en nous que ceux dont il fut question au début de la conférence.

J'aimerais ajouter une autre remarque préalable. La Relativité est aujourd'hui (celà se trouve abondamment prouvé) dans une phase de développement rapide, et beaucoup de nos idées sont en cours d'évolution. Inévitablement, certains sujets ici traités sont à présent matière à controverse. Comme chacun d'entre nous j'ai mes propres opinions sur un certain nombre de points, qui ne seraient pas partagées par tous ceux qui m'écoutent. Si donc j'exprime à présent mes opinions personnelles, ce n'est certes pas avec l'intention de les présenter comme la position officielle du colloque; il y aurait là fatuité et vanité.

Pour essayer de résumer devant vous les sujets que nous venons de discuter j'aimerais les répartir en quatre larges catégories : théories unitaires du champ, programmes de quantification, progrès dans la théorique « classique », travaux expérimentaux ou observationnels.

Théories unitaires du champ

Le but final de toutes les théories unitaires du champ est d'obtenir une unification organique du champ gravitationnel et de tous les autres champs dynamiques, et de produire du même coup une théorie des particules élémentaires. Il me semble que la caractéristique de la plupart des théories unitaires est de rechercher ces objectifs en enrichissant d'une manière ou d'une autre la structure géométrique de la variété originelle de Riemann-Einstein. L'on a discuté ici trois thèmes principaux de théories unitaires : la « géométrodynamique », les théories pentadimensionnelles, et les « théories asymétriques ».

La géométrodynamique représente un programme d'unification associant à des considérations topologiques un adoucissement des équations du champ (le tenseur de Ricci, au lieu de s'annuler identiquement, satisfait certaines conditions d'intégrabilité). Le champ de Maxwell se trouve déterminé, de manière quasi unique, par la métrique riemannienne, et il ne joue aucun rôle indépendant, pas même celui de prendre sa part de composantes d'un tenseur unitaire du champ (comme c'est le cas en théorie pentadimensionnelle). L'on peut donc à bon droit parler d'électromagnétisme sans électromagnétisme ! Le but initial dans la prise en considération de variétés à connexion multiple fut de rendre possible la construction des particules élémentaires. Aujourd'hui l'on a l'impression que les « trous de vers » ne représentent pas des particules élémentaires, mais plutôt quelque chose de « l'écume » d'une variété dont la métrique subit des fluctuations quantiques, en sorte que même un électron unique peut contenir un nombre astronomique de « trous de vers ».

Quel que doive être le succès final de la *géométrodynamique,* je pense que la considération de variétés à connexion multiple pourra bien être nécessaire pour assurer l'existence de solutions non-singulières des équations du champ qui ne soient pas physiquement triviales. Nous n'avons en tous cas, ni à petite ni à grande échelle, de raisons contraignantes pour nous limiter à des variétés qui soient topologiquement euclidiennes. Au chapitre de la connectivité Finkelstein et Misner ont récemment ajouté ce qui me semble être une importante possibilité nouvelle : sur une variété simplement connexe on peut définir une métrique partout non-singulière, satisfaisant aux conditions usuelles à l'infini spatial, mais qui ne puisse pas être ramenée à être partout « plate » par des déformations continues non-singulières. Un tel champ métrique présentera un ou plusieurs « retournements ». Nous ne savons pas encore ce qui peut arriver si l'on combine les « retournements » de Finkelstein et Misner avec l'idée d'une connexion multiple; celle-ci a, me semble-t-il, été avancée par Einstein et Rosen dans les années 1930, mais développée bien plus complètement ces temps derniers par Wheeler et ses élèves, ainsi que par Belinfante.

Les théories pentadimensionnelles dérivent de celle proposée en 1921 par Kaluza. Mise à part la réinterprétation projective de ce programme, deux modifications effectives ont été développées par la suite. Dans le travail originel de Kaluza il y avait un champ vectoriel de Killing dans la cinquième (et probablement inobservable) dimension, qui était supposé représenté par un vecteur unité. Jordan et Thiry conservent le champ de Killing, mais abandonnent l'exigence de la longueur unité. O. Klein et Einstein ont remplacé le groupe de déplacements associé au champ de Killing par l'hypothèse d'une périodicité, ce qui est une exigence globale, et donc moins stricte. Nous avons eu à ce colloque une contribution du Professeur Thiry, où il fut question et de l'interprétation du champ scalaire propre à la théorie de Jordan-Thiry, et de la propagation de diverses discontinuités.

Dans la *théorie asymétrique* je pense que la principale question non résolue reste celle de l'interprétation physique. Grâce aux travaux du groupe français nous avons à présent une bonne idée du degré de détermination des équations du champ des diverses théories asymétriques, comparable à celle qu'on possède en Relativité générale proprement dite. Beaucoup de travail a été fait sur la théorie du mouvement des singularités. Pourtant, j'ai tout au moins le sentiment inconfortable que nous n'avons pas acquis cette sorte de perception intuitive qui nous dirait, en théorie asymétrique, quelles situations physiques peuvent correspondre aux diverses classes de solutions connues ou conjecturées. Il faut espérer que les prochaines années nous apporteront ici quelque clarification.

Pour des raisons historiques, la plupart des théories unitaires commencent par essayer d'unifier le champ gravitationnel et le champ électromagnétique. Tous les autres champs de forces, c'est-à-dire celui des interactions « fortes » entre baryons impliquant les mésons π et K, et celui des interactions « faibles » associées aux transitions entre leptons, sont initialement laissés de côté, avec l'espoir que d'une manière ou d'une autre la théorie complètement élaborée produira une case vacante pour ces autres interactions. Il y a peut-être un argument en faveur d'une telle discrimination, c'est que le champ gravitationnel et le champ électromagnétique sont les seuls champs de spin entier à long rayon d'action, et que cette association de propriétés n'est partagée par aucun des autres champs connus. Je ne puis pourtant m'empêcher de penser qu'une théorie unitaire vraiment sérieuse sera tenue de prendre en considération tous les champs connus dès son point de départ. Il est probablement trop tôt pour faire dès à présent une tentative aussi compréhensive; ces prochaines années nous apprendront vraisemblablement beaucoup sur les hypérons et les relations entre particules dites élémentaires, nous permettant ainsi de perfectionner les classifications semi-empiriques qui couvrent de larges domaines des faits expérimentaux. Ces structures semi-empiriques pourraient bien contenir en elles-mêmes les clés dont nous avons besoin pour la véritable unification de tous les champs physiques.

A l'intérieur des présents schèmes de théories unitaires j'aimerais présenter une autre observation. Pour qu'une théorie soit vraiment unitaire il ne suffit pas que l'unification y résulte d'une broderie verbale. Nous devons certainement juger du degré de succès de « l'unification » en termes des propriétés formelles effectives des champs introduits. A cette fin je voudrais établir deux critères, l'un et l'autre indépendants des mots choisis pour décrire une théorie. Le premier critère sera que les objets géométriques introduits dans notre variété devront être irréductibles sous l'action de transformations du groupe d'invariance. Par exemple, dans la théorie asymétrique, les parties symétrique et antisymétrique du « tenseur métrique » se transforment indépendamment l'une de l'autre sous l'effet des changements de coordonnées, de sorte que le « tenseur métrique » n'est pas irréductible de ce point de vue. Cependant, dans la version révisée de sa théorie, Einstein a introduit la « λ-transformation » de la connexion affine, qui mélange les parties symétrique et antisymétrique de la connexion; la λ-transformation rétablit ainsi dans une certaine mesure l'irréductibilité.

Mon second critère, plus sévère encore, sera que le groupe d'invariance lui-même devra être simple, c'est-à-dire ne pas contenir de sous-groupes naturels. En d'autres termes, j'aimerais exclure les sous-groupes naturel $\mathcal{R}$ du groupe d'invariance complet, tels que le groupe des transformations de jauge, dont le groupe quotient est celui des transformations de coordonnées. Ma proposition serait de déposséder les transformations de coordonnées de toute espèce de statut spécial, et par exemple de celui que leur confère la théorie pentadimensionnelle avec un champ de Killing. Dans la forme de Klein-Einstein de la théorie pentadimensionnelle, le groupe des changements de coordonnées tétradimensionnel n'est qu'approximativement un sous-groupe invariant; strictement parlant, le groupe des transformations pentadimensionnelles est simple. En conséquence, la décomposition du champ métrique en potentiels gravitationnel et électromagnétique n'est qu'approximative, tout au moins dans la version de Klein.

Programmes de Quantification

La motivation de ces programmes provient et d'un souhait de philosophie générale (exactement comme à propos de la théorie unitaire), celui d'exclure tout compartimentage dans le mode d'approche aux théories de la Physique, et aussi du sentiment plus spécifique qu'un champ dont les sources sont quantifiées doit être également quantifié. Ce sentiment se traduirait en un argument précis si le genre de discussions que conduisirent Bohr et Rosenfeld à propos du champ électromagnétique et de ses sources avait aussi été fait pour le champ gravitationnel; pour le moment nous n'avons de ceci que des rudiments, principalement dans l'étude des horloges quantifiées par Wigner et Salecker.

L'on aimerait disposer d'une étude plus exhaustive et définitive pour mieux évaluer des propositions telles que celle du Professeur Möller tout au début de notre colloque : il a suggéré que le champ métrique devrait rester numérique (non superquantifié) avec comme sources les valeurs moyennes du tenseur matériel. Comme les composantes du tenseur métrique apparaissent dans les équations de la description de Schrödinger (ou de Heisenberg) des autres champs quantifiés, et comme les équations d'Einstein contiendraient le vecteur d'état et son conjugué quadratiquement au second membre, le système d'ensemble des équations serait non-linéaire en le vecteur d'état; une aussi forte déviation d'avec la théorie quantique orthodoxe (abandonnant notamment le principe de superposition linéaire d'états) devrait certainement être discutée de manière approfondie tant sous son aspect mathématique que dans ses implications physiques. On a malheureusement manqué de temps à la suite de l'exposé du Professeur Möller pour rendre justice à sa proposition en quelque manière que ce soit. Il y aurait certainement lieu de voir si l'analyse du type Bohr-Rosenfeld ne peut pas être étendue à la Relativité générale plus complètement qu'on ne l'a fait jusqu'à présent.

La plupart des autres approches à la quantification en Relativité générale admettant que le champ tensoriel métrique est un champ physique analogue en quelque manière aux autres champs, et qu'il devrait donc être quantifié. Il y a beaucoup de techniques différentes pour aborder ce programme, et de chaudes discussions à leur propos ont eu lieu ici-même. Les différences entre ces voies d'attaque sont plus techniques que fondamentales, et je ne pense pas qu'une vue d'ensemble doive entrer dans leur examen détaillé. Toutes ces approches ont en commun qu'elles ne confèrent le rôle d'observables qu'aux grandeurs de champ qui seront les opérateurs de l'espace hilbertien, et qu'elles visent à établir entre observables des relations de non-commutation se ramenant par correspondance à des crochets de Poisson (éventuellement modifiés) de la théorie non-superquantifiée.

Dans plusieurs de ces approches on se trouve confronté au problème de ranger les facteurs de la théorie non superquantifiée dans le bon ordre. Cette triade de problèmes — construction des observables, construction des formules de commutation, détermination de l'ordre des facteurs, — apparaît sous des formes différentes suivant la méthode d'attaque. Je pense qu'une énonciation juste du présent état de choses est que personne n'a réussi à résoudre tous ces problèmes, et qu'ainsi, par aucune voie d'approche, nous n'avons encore une formulation complète de la théorie quantifiée de la gravitation.

Aujourd'hui, aucune des approches variées au problème de la quantification sous sa forme rigoureuse ne fournit de nouveaux degrés de liberté, ou caractères quantiques, qui ne seraient obtenus par la quantification directe d'une théorie essentiellement non-linéaire d'une particule de masse propre nulle et de spin 2. Pauli et bien d'autres sont fait remarquer qu'un programme trop conservateur peut se révéler tristement déficient, que la théorie complètement quantifiée du champ gravitationnel pourra recéler des notions qui n'ont pas leur place aujourd'hui. Je serais personnellement incliné à admettre la valeur de ce pronostic; ce que nous pouvons espérer est que, dans le cours de nos démarches faites pas à pas, où de quelque autre manière, nous découvrirons des indices montrant la voie; pour le moment nous n'en avons aucun que nous ayons su utiliser. Il se pourrait bien que les diverses lois de conservation découvertes à propos des interactions entre particules élémentaires, les unes apparemment rigoureuses, les autres certainement approximatives, (conservation des baryons, des leptons, du spin isotopique, de l'étrangeté) auraient quelque chose d'important à nous dire. Jusqu'à présent l'on n'a pas dépassé le stade de l'empirisme d'un côté, de la spéculation de l'autre.

Je n'ai parlé jusqu'ici que des programmes de quantification de la théorie rigoureuse, non-linéaire. Entre temps, plusieurs auteurs, et notamment Dirac et Ivanenko, ont considéré l'effet de la gravitation sur le restant de la physique des hautes énergies, en supposant la gravitation suffisamment faible pour qu'on puisse la traiter par une méthode de perturbations. Personne ne sait si cette dernière hypothèse peut être justifiée; mais je pense qu'il est de la nature de la physique théorique en tant que partie intégrante des sciences naturelles (plutôt que des mathématiques pures) que nous devions poursuivre notre enquête au sein des secrets de la Nature sur plusieurs niveaux à la fois. Je pense donc que ces calculs d'approximations, bien que conceptuellement contradictoires aux programmes non-linéaires, se justifient pleinement tant que nous ne savons pas où l'un et l'autre de ces types d'investigation nous conduiront. En conclusion de ces calculs d'approximation, nous savons déjà qu'on peut s'attendre à de sérieux effets résultant de la création et de la diffusion de gravitons à suffisamment haute énergie, ceci en dépit de la petitesse du paramètre de couplage, parce que l'interaction avec un champ quadripolaire dépend de l'énergie par une puissance plus élevée que celle d'un champ dipolaire. Il faut aussi considérer, bien entendu, que les interactions quadripolaires avec le champ électrique sont également possibles, et qu'elles aussi s'accroissent avec une puissance plus élevée de l'énergie.

Relativité générale non quantifiée

J'en viens maintenant au troisième, et peut-être au plus vaste, des sujets de notre colloque, le progrès en divers aspects de la Relativité générale orthodoxe. Laissez-moi d'abord discuter brièvement des problèmes, parents entre eux, de la théorie du mouvement et du concept du tenseur d'impulsion-énergie. L'on sait que la *théorie du mouvement* de corps matériels procède des travaux contemporains d'Einstein-Infeld-Hoffmann et de Fock. Tandis que les premiers traitaient les particules comme des singularités du champ et montraient que de telles singularités doivent se mouvoir de manière déterminée si les équations du champ dans le vide sont partout satisfaites au voisinage des régions singulières, Fock partait de la loi (covariante) de conservation du tenseur matériel, imposée par les identités de Bianchi, et trouvait que le mouvement d'une distribution de matière étendue mais finie est en partie indépendant de sa structure interne. Nous savons aujourd'hui que les deux théories sont équivalentes, et que tous les résultats de l'une sont traduisibles dans le langage de l'autre.

La théorie originelle d'Einstein-Infeld-Hoffmann était exprimée comme un développement à la fois suivant les écarts de la métrique à partir du cas minkowskien, et suivant la dépendance temporelle des grandeurs de champ. L'on trouvait alors qu'à la première approximation non-triviale le mouvement des singularités ne dépendait pas du choix des coordonnées, mais que la nature des coordonnées déterminait les approximations suivantes (non-newtoniennes) du calcul. Il faut donc admettre, d'un point de vue plus « sophistiqué », que l'hypothèse même d'un écart petit par rapport à la métrique minkowskienne restreint le choix des systèmes de coordonnées même aux premiers degrés d'approximation, d'une manière qui n'apparaît pas en termes d'équations différentielles. Nous possédons aujourd'hui une formulation finie des équations du mouvement, en fait un système de relations impliquant des intégrales doubles étendues à toute surface fermée entourant l'une des singularités. Ces formules sont rigoureuses; si l'on fait les hypothèses appropriées sur la dépendance analytique des grandeurs de champ vis-à-vis de certains paramètres *ad hoc,* l'on trouve soit le développement d'Einstein-Infeld-Hoffmann, soit quelque autre développement. L'examen des relations finies montre que dans la théorie complète le mouvement des singularités, c'est-à-dire l'expression de leurs trois coordonnées spatiales en fonction du temps, dépend certainement du choix du système de coordonnées.

Pourtant le choix du système de coordonnées n'est pas tout. Grâce en partie aux travaux de Havas, qui sont basés à leur tour sur d'anciens papiers de Lubanski, nous savons que le mouvement d'une particule est intrinsèquement affecté par sa structure interne. Einstein-Infeld-Hoffmann admettaient explicitement dans leurs papiers classiques que chaque particule était, aussi parfaitement que possible, un monopole, et qu'à chaque étape du développement tous les multipoles appartenant à la solution de l'équation homogène devaient être égalés à zéro. Malheureusement, nous n'avons pour le moment aucune théorie nous disant comment formuler cette prescription de manière invariante. Bien sûr, s'il n'y avait qu'une particule dans l'univers, on serait en droit de dire que la solution de Schwarzschild, à symétrie sphérique, possède une symétrie plus élevée que les solutions admettant des composantes dipolaire, quadripolaire, etc. Mais dans un état à multiples particules, les symétries ne valent tout au plus qu'au voisinage immédiat des particules. Peut-être la technique dont nous avons besoin proviendra-t-elle de la description de la situation physique en termes des seules observables. En attendant, force est bien de considérer la théorie du mouvement comme à un stade partiellement inachevé.

Touchant la *notion d'énergie* je me rallierai au sentiment de M. Trautman. Si je le comprends bien, il pense qu'aucune des définitions ou des expressions de l'énergie proposées ici ou ailleurs ne possède une validité générale, mais qu'il y a des situations particulières où telle conception de l'énergie prend un sens. S'il existe un champ de Killing, alors on peut construire autour de chaque tube d'univers singulier une intégrale de surface bidimensionnelle fermée dont la valeur est indépendante du système des coordonnées, indépendante de la forme particulière de la surface, et constante dans le temps. Lorsque la métrique est quasi-minkowskienne il est semblablement possible de construire des expressions significatives pour l'énergie, sans avoir à considérer les conditions à l'infini spatial. Finalement, les situations physiques où les grandeurs de champ (les symboles de Christoffel) décroissent en r^{-2} à l'infini spatial permettent la construction d'une intégrale de surface dont la valeur asymptotique représente la masse relativiste totale du système; naturellement, l'impulsion totale est, elle aussi, bien définie dans ce cas. Plus généralement, une densité d'énergie peut toujours être définie si la situation physique implique l'existence d'un champ de vecteurs du genre temps; et si un tel champ existe asymptotiquement à l'infini spatial, une énergie totale peut être définie. La densité d'énergie du Professeur Möller, par exemple, est invariante par les transformations conservant en tout instant-point la direction de l'axe de temps et la longueur propre de la différentielle dt. Dans certaines situations ce sous-groupe de transformations de coordonnées est celui qui préserve quelque caractère intrinsèque de la variété, et alors la densité d'énergie de Möller possède une signification invariante. Si je ne me trompe l'expression de l'énergie proposée par le Professeur Dirac a aussi son groupe d'invariance.

Une très curieuse découverte est celle du tenseur de rang 4 obéissant à une loi de conservation covariante. Dans ces récentes années ce tenseur a été rencontré par nombre d'auteurs, mais je pense que c'est L. Bel qui a la priorité. Robinson, à ce qu'il me semble, a baptisé cette expression « superénergie », ce qui est assez bien trouvé, car la forme même de ce tenseur en exclut l'interprétation comme celle d'une énergie gravitationnelle, bien qu'il partage avec celui de l'énergie des autres champs la propriété d'être conservatif. A première vue ce nouveau tenseur ne se prête pas à la définition d'une intégrale triple qui serait une constante du mouvement. Quoiqu'il en soit, il existe, et quelque interprétation physique intuitive serait la bienvenue.

J'abandonnerai maintenant le terrain des lois de conservation pour me tourner brièvement vers la question des *ondes gravitationnelles*. C'est peut-être ici que l'absence de Léopold Infeld nous est la plus cruelle, car il est pour ainsi dire le seul auteur à tenir qu'il n'y a pas d'ondes gravitationnelles du tout. En son absence il serait quelque peu ridicule de décider par un « vote majoritaire » que des ondes gravitationnelles sont émises par les systèmes composites. J'espère que M. Infeld sera des nôtres au prochain colloque, et qu'alors nous pourrons avoir une bonne discussion sur le sujet.

A Petrov, Pirani et Lichnerowicz nous devons de bonnes définitions de ce qu'on peut entendre par un état de radiation gravitationnelle « pure ». La présence d'une radiation « impure » au sein d'un système complexe reste douteuse. Les conditions radiatives à l'infini spatial de Trautman seraient utiles si nous avions de bonnes raisons de penser qu'un train d'ondes infiniment long peut exciter, conjointement à des conditions aux limites habituelles à l'infini spatial. En fait je pense que cette association est à peu près certainement exclue par les approximations d'ordre supérieur de la solution des équations du champ faible : nous devrions donc nous restreindre à la considération de pulsations radiatives dans des univers asymptotiquement plats, et peut-être à de longs trains d'ondes dans des univers non-plats à l'infini spatial. Même dans ces conditions je ne pense pas que nous sachions tout à fait poser les bonnes questions; si nous le savions, la réponse serait peut-être trop évidente.

Laissez-moi mentionner brièvement, à la fin de cette rubrique, trois questions distinctes. Nous avons vu tout d'abord que les groupes de travail français ont encore fait progresser l'étude du *problème de Cauchy* et de la propagation des discontinuités (théorie des caractéristiques), tant en Relativité générale que dans diverses théories unitaires. et aussi non seulement dans le vide, mais également en présence de divers types de distributions matérielles. L'on n'est pas trop surpris de voir apparaître là plusieurs zônes caractéristiques en un même instant-point, correspondant semble-t-il à la propagation des ondes gravitationnelles, à celle d'ondes électromagnétiques (en présence de diélectriques) ou élastiques (en présence de fluides compressibles par exemple).

Le groupe du Professeur Jordan à Hambourg a fait d'impressionnants progrès dans la construction de *solutions exactes* des équations du champ. Je dois confesser qu'à la première connaissance que j'ai prise de ce programme j'était plutôt sceptique touchant le secours de solutions hautement symétriques pour l'interprétation de l'ensemble de la théorie, considérant que la symétrie des solutions qu'on connaît reflète bien plus notre impuissance mathématique à construire des types de solution plus généraux que des propriétés des équations du champ elles-mêmes. Mais depuis ce temps le nombre des solutions non équivalentes qu'on connaît a beaucoup augmenté et, ce qui est peut-être plus important, les symétries exigées ont beaucoup décru. Peut-être sera-t-il bientôt possible de choisir parmi ces classes quelques solutions qui pourront nous dire beaucoup plus que nous n'en savons à présent sur la théorie exempte d'approximations.

En terminant je voudrais dire quelques mots sur ce qu'on peut penser de la non-existence de *solutions des équations du champ du type particule*. Ceci aussi est un domaine où nous ne savons trop comment poser les questions. Dans l'immédiat, je pense qu'on ne s'avance pas trop en disant que les recherches futures devraient prendre en considération la topologie. Il pourrait bien arriver qu'on trouve qu'il n'existe de solutions non-triviales des équations du champ, avec ou sans électromagnétisme, que si l'on accepte des variétés à connexion multiple, ou des variétés « avec retournements » de Finkelstein et Misner. Que de telles solutions puissent avoir quelque chose à faire avec les particules élémentaires, voilà ce qu'on ne saurait dire avant de les voir écrites.

Travaux expérimentaux

Ma dernière, et malheureusement aussi ma plus schématique rubrique, sera consacrée aux observations astronomiques et aux expériences de laboratoire. Nous avons eu très peu de communications sur des recherches relatives aux *problèmes cosmologiques*. L'intérêt de tels travaux me fait croire que les prochaines années verront de grands développements dans cette direction, liés à l'entrée en service de nouveaux instruments d'observation. Ces nouveaux instruments sont caractérisés les uns par le genre d'information que nous pouvons recevoir de l'espace extérieur à la surface de notre planète, les autres par la possibilité d'envoyer un appareillage d'observation au dehors de l'atmosphère. La radioastronomie a tout juste effleuré la surface de ses possibilités, et déjà ainsi nous arrivons à « voir » beaucoup plus profondément dans l'espace avec un radiotélescope qu'avec un télescope optique. Par ailleurs, il n'est pas déraisonnable de penser que dans les prochaines années nous obtiendrons beaucoup plus d'informations de caractère cosmologique par le moyen des rayons cosmiques que nous ne l'avons fait jusqu'à présent. Enfin peut-être pourrons-nous améliorer nos appareillages détecteurs de neutrinos jusqu'au point d'espérer observer le fleuve de neutrinos qui nous arrive de l'espace. Si l'un des dispositifs imaginés par Weber pour observer la radiation gravitationnelle devait devenir opérationnel, cela aussi nous doterait d'un canal d'observation entièrement nouveau.

Différents des précédents par leur motivation, il y a aussi les travaux concernant les preuves expérimentales de la théorie de la gravitation. Quoique prises individuellement ces expériences ne soient pas nécessairement « cruciales » pour la Relativité générale, il est à mon avis hors de doute que toute expérience capable de nous dire quelque chose à propos du champ gravitationnel vaudrait la peine d'être effectuée. Parmi celles qui ont été proposées ou qui sont actuellement en préparation, il y a des répétitions ou des extensions de l'expérience d'Eötvös; des expériences chronométriques conçues pour tester l'effet Einstein, ou effet Doppler de gravitation, au moyen d'horloges soit basées à terre soit montées sur un satellite; des expériences pour tester la précession d'un axe lié à un satellite de la Terre; enfin la conception d'émetteurs ou de récepteurs de radiation gravitationnelle. Beaucoup de ces expériences seront basées sur les nouvelles ressources technologiques, en matière de satellites, de chronomètres atomiques, de dispositifs utilisant la physique du solide.

Il serait vain de ma part d'essayer de deviner devant vous quels seront les principaux sujets d'intérêt de notre prochain colloque, d'ici deux ans peut-être. Mais j'espère beaucoup que le travail expérimental et observationnel dans le domaine de la Relativité générale et de la gravitation sera l'un d'entre eux.

*
* *

En conclusion, je voudrais exprimer à nos hôtes, de la part de tous ceux qui sont venus, combien nous avons apprécié le privilège de participer au Colloque de Royaumont. Ceux d'entre nous seulement qui ont eu à préparer un colloque dans leur propre pays peuvent saisir ce que dût être l'effort de préparation de celui-ci. Nous voudrions remercier non seulement les Professeurs Lichnerowicz et Tonnelat, qui ont eu l'initiative de ce colloque et en ont arrêté le programme, mais aussi leurs collaborateurs plus jeunes de l'Institut Henri-Poincaré, du Collège de France, et d'ailleurs, qui ont généreusement prodigué de leur temps pour rendre notre séjour agréable, et le mécanisme interne du colloque efficace et discret. Nous quittons Royaumont avec une profonde reconnaissance envers eux tous.

SUMMARY OF THE COLLOQUE INTERNATIONAL DE ROYAUMONT

by Peter G. BERGMANN
Syracuse University, Syracuse 10, N. Y.

To undertake a summary of a conference as full of a variety of ideas as ours is to expose yourself to a double handicap. Things have been happening almost up to the last minute, and you have not had the time to digest them properly, to permit them to mature within your mind, so that you can give a well-thought-out evaluation of what transpired. But if you were to wait a few days, without the benefit of a complete transcript of all the papers that were presented, and of the discussions that took place, then chances are that you would have forgotten some important results or remarks. As a matter of fact, I am afraid, we all suffer even now from a sort of foreshortening error, and the topics that were discussed in the last couple of days are more vivid in our minds than those that were dealt with at the beginning of the conference.

I should like to add another introductory comment. Relativity is, — that has become abundantly clear, — right now in a stage of rapid development, and many of our ideas are in a state of flux. Unavoidably, some of the topics of this conference are now in a state of controversy. Like everybody else I have my own opinions on a number of subjects, which are not shared by everyone in this room. If I express my personal opinions in this summary, it is, of course, with no intention of making them anything like the official opinion of the conference; to do so would be both arrogant and futile.

In attempting to summarize for you the subjects we have been discussing, I should like to divide them into four large areas : unitary field theories, quantization programs, developments in the « classical » (c-number) theory, and experimental and observational work.

Unitary Field Theories

The object of all unitary field theories is to achieve an organic unity between the gravitational and all other known dynamic fields, and to achieve a theory of elementary particles as well. I think that it is characteristic of most unitary field theories that they seek to achieve these objectives by enriching in some manner the geometric structure of the original Riemann-Einstein manifold. At our conference we have had discussions of three main types of unitary field theory, geometrodynamics, five-dimensional theories, and asymmetric theories.

Geometrodynamics represents a program of unification that combines a softening of the field equations (the Ricci tensor, instead of vanishing, satisfies certain integrability conditions) with the introduction of topological considerations. The Maxwell field is determined, almost uniquely, by the Riemannian metric and plays no independent role, not even to the extent of forming part of the components of an all-embracing field tensor (as it does in the five-dimensional theory). Thus one can truly speak of an electromagnetic field without electromagnetic field! The original purpose of considering multiply connected manifolds was to make possible the construction of elementary particles. Today the impression appears to be rather that « wormholes » do not represent elementary particles but represent part of the « froth » of a manifold whose metric is subject to quantum fluctuations, and that even a single electron may contain an astronomical number of wormholes.

Whatever the ultimate success of geometrodynamics, I believe that the consideration of multiply connected manifolds may be needed in order to assure at all the existence of non-singular solutions of the equations that are not physically trivial. At any rate, neither in the small nor in the large do we have any compelling reasons for restricting ourselves to manifolds that are topologically Euclidean. To the considerations of connectedness Finkelstein and Misner have recently added what I believe is an important additional possibility; a manifold may be simply connected but have defined on it a metric that is everywhere non-singular, satisfies the usual boundary conditions at spatial infinity, but cannot be deformed by non-singular continuous deformations so as to be flat everywhere. Such a metric field will have one or several « twists ». We do not yet know what will happen if we combine the Finkelstein-Misner « twists » with the idea of multiple connectedness, which I believe was first proposed in the Thirties by Einstein and Rosen but developed much more fully recently by Wheeler and his students and by Belinfante.

Five-dimensional theories go back to Kaluza's original proposal of 1921. Aside from the projective re-interpretations of this proposal, two actual modifications have been developed in the course of the years. In Kaluza's original work there had been a Killing vector field in the fifth (and presumably unobservable) direction, which moreover was assumed to be a unit vector field. Jordan and Thiry retained the Killing field but dropped the requirement of its being a unit vector field. O. Klein and Einstein replaced the group of motions corresponding to the Killing field by an assumption of periodicity, which is a requirement in the large, and hence less stringent. At our conference we have had a contribution by Professor Thiry, which dealt both with the interpretation of the scalar field peculiar to the Jordan-Thiry theory and with the propagation of discontinuities of all kinds.

In the *asymmetric theory* I believe the outstanding unsolved question remains that of physical interpretation. Thanks to the work of the French group we have now a good idea of the degree of determinacy of the field equations of the several asymmetric theories, which is similar to that of the conventional theory of relativity. Quite a bit of work has been done on the theory of motion of singularities. Still, I at least have the uncomfortable feeling that we do not have developed the sort of intuitive feeling about the asymmetric theory that would tell us what physical situations might correspond to the various classes of solutions known or conjectured. It is to be hoped that the next few years will bring about further clarification.

For historical reasons most unitary field theories start out with an attempt to unify, first of all, the gravitational with the electromagnetic field. All other known force fields, that is to say the « strong » forces between baryons, which involve the pions and K-mesons, and the « weak » forces associated with the creation and transformation of leptons, are disregarded at first, in the hope that somehow the fully worked-out theory will have a niche for these latter interactions as well. There is, perhaps, one argument in favor of this discrimination, and that is that the gravitational and the electromagnetic field are long-range fields with integral spin, a combination of properties not possessed by any other known field. Nevertheless, I cannot help feeling that a really serious unitary field theory will have to give consideration to all the known fields from the very outset. Probably it is too early to make such a comprehensive attempt now; it seems likely that in the next few yars we shall learn a great deal about hyperons and about the relationships between so-called elementary particles that will enable us to perfect semi-empirical classifications covering large areas of experimentally established facts. Such semi-empirical structures may contain within them the clues we require for true unification of all physical fields.

Within the present pattern of unitary field theories I should like to make one other observation. For a theory to be truly unitary it is not sufficient that unification is brought about by verbal embroidery. We must certainly judge the degree of success of « unification » in terms of the actual formal properties of the fields introduced. I should like to set up two criteria to this end, both independent of the words we choose to describe a theory. One is that the geometric objects introduced into our manifold be irreducible under the invariance group of transformations. In the asymmetric theory, for instance, the symmetric and the skewsymmetric parts of the metric tensor transform under coordinate transformations independently of each other, so that the metric tensor is not irreducible in this sense. However, in this revised asymmetric theory Einstein introduced the so-called lambda transformation for the affine connection, which mixes symmetric and skewsymmetric components of the affine connection. In this sense the lambda transformation restores to some extent the irreducibility.

My other proposed criterion, which is even tougher, is that the transformation group itself should be simple, i.e. that it should not contain normal subgroups. In other words, I should like to exclude such normal subgroups of the full invariance group of a theory as the group of gauge transformations, whose factor group is the group of coordinate transformations. My proposal would rob the coordinate transformations of any special status, which they passess, for instance, in five-dimensional theories with a Killing field. In the Klein-Einstein type of five-dimensional theory the group of four-dimensional coordinate transformations is an invariant subgroup only approximately; strictly speaking the five-dimensional group is simple. As a result, the decomposition of the metric field into gravitational and electromagnetic potentials is also only approximate in that theory, at least in Klein's version of it.

Programs of Quantization

Programs of quantization derive their motivation both from a general philosophical desire (just as the unitary field theories) not to permit a compartmental approach to the theories of physics, and from the more specific « feeling » that quantized sources of a field require also a quantized field. This feeling would be translated into hard argument if the kind of discussion that Bohr and Rosenfeld carried out for the electromagnetic field and its sources had also been completed for the gravitational field; actually we have only the rudiments for such a discussion, foremost among them Wigner's and Salecker's study of quantum clocks.

One would wish that a more comprehensive and definitive study were available in order to assess better such proposals for quantization as the one that Professor Møller made quite early in our conference; he suggested that the metric field should remain a c-number field, whose sources would be the expectation values of the matter tensor. In view of the fact that the components of the metric tensor appear in the Schrödinger (or Heisenberg) equation for the remaining quantized fields, and because the Einstein equations would contain the state vector and its Hermitian conjugate bilinearly on the right-hand sides, the equation system as a whole would be non-linear as regards the appearance of the state vector; such a serious deviation from conventional quantum theory (which e.g. does away with the principle of linear superposition of states) should, of course, be discussed thoroughly both in its mathematical aspects and in its physical implications. Unfortunately, there was not enough time at the conference to do Professor Møller's proposal justice in any sense. Certainly, one should see whether the Bohr-Rosenfeld type of analysis cannot be extended to general relativity more completely than has been done so far.

Most other approaches to quantization in general relativity assume that the metric tensor field is a physical field like (or somewhat like) all the others and should be quantized. There are many different technical approaches to this program, and we have had heated discussions about them. But the differences between these approaches are technical rather than fundamental, and I do not believe that it is appropriate in this summary to get involved in them. All of these approaches have in common that they accept the role of the observables as those field quantities that will be the basic Hilbert space operators, and that they aim at constructing between the observables commutation relations that correspondence-wise go over into Poisson brackets (or modified Poisson brackets) in the c-number theory.

Also, in some of these approaches we are confronted with the problem of arranging in the q-number theory the proper factor sequences. This trinity of problems, — construction of the observables, construction of the commutation relations, and determination of the factor sequences, — arises in the different approaches in different ways. I believe it is a correct assessment of the present status that no one has succeeded in solving all of these problems, and thus we have not yet, by any one approach, a completed formal quantum field theory of gravitation.

At the present time, none of the various approaches to the problem of quantizing the full theory of gravitation provides for any extra degrees of freedom, or quantum characteristics, that would not be obtained by the most direct quantization of an essentially non-linear theory of a field of zero rest mass and spin 2. Pauli and many others have pointed out that a program that is too conservative may turn out to be sadly deficient, that the fully quantized theory of gravitation may contain in itself features that we are not allowing for now. Personally, I am inclined to admit the validity of this prognosis; we can only hope that in the course of our pedestrian studies, or in some other way, we shall obtain clues pointing the way; right now we do not have any that we have been able to utilize. Very possibly the various conservation laws, some of them apparently rigorous, others known to hold only approximately, which have been discovered in elementary particle interactions, i.e. the conservation of baryons, of leptons, of I-spin, and of strangeness, ought to tell us something of great value. So far, we have not got beyond the stage of empiricism on the one side, speculation on the other.

So far I have mentioned only what might be called programs of quantization aiming at the full, non-linear theory. In the meantime, a number of workers, among them Dirac and Ivanenko, have considered the effect of gravitation on the remainder of high-energy physics on the assumption that gravitation is sufficiently weak that it may be dealt with by perturbation theory. No one knows whether this assumption can be justified; but I believe that it lies in the nature of theoretical physics as an integral part of the natural sciences (rather than of pure mathematics) that we must pursue our quest into the secrets of nature at several different levels at once. Thus I believe that the weak-field calculations, though conceptually contradictory to the non-linear programs, are fully justified, as long as we do not know where either of these types of investigation will lead us. As a result of these weak-field investigations, we know now that we might expect serious effects from the creation and scattering of gravitons at sufficiently high energies, in spite of the small coupling parameter, because the interaction with a quadrupole field goes with a higher power of the energy than the interaction with a dipole field. It is, of course, to be considered that quadrupole interactions with the electromagnetic field are also possible, and that they also increase with a high power of the energy.

Non-Quantum General Relativity

I am now coming to the third, and perhaps largest, topic of our conference, progress in various aspects of the conventional general theory of relativity. First let me discuss briefly the related problems of the theory of motion and of the energy-momentum-stress concept. As we all know, the *theory of motion* of material bodies goes back to the twin works of EINSTEIN, INFELD, and HOFFMANN, and of FOCK. Whereas the first group treated particles as singularities of the field and proceeded to show that singularities are constrained to move in a particular manner if the vacuum field equations are to be satisfied everywhere in the vicinity of the singular regions, Fock started out from the (covariant) conservation of the matter tensor, required by the contracted Bianchi identities of the Einstein tensor, and found that to determine the motion of an extended but finite accumulation of matter he did not require complete knowledge of all the internal structure. Today we know that the two theories are equivalent, and that all results of one may be translated into the language of the other.

The original E-I-H theory was formulated in terms of an expansion, both with respect to deviation of the metric from the Minkowski values and with respect to the time dependence of all the field variables. Within the terms of this expansion it was found that in the lowest non-trivial approximation the motion of singularities was independent of the choice of coordinate system but that the coordinate conditions determined the higher (post-Newtonian) stages of the calculation. From a more sophisticated point of view we must admit that by the very assumption that the deviation from the Minkowski metric is small we have in fact restricted the choice of coordinate system in even the lowest approximation, though admittedly not in terms of differential equations.

Today we possess a closed form for the equations of motion, that is to say a set of surface integral relations that are to be formulated on any two-dimensional closed surface surrounding one of the field's singularities. These surface integral relations are rigorous; they turn into the E-I-H expansion, or into some other expansion, if we make the appropriate assumption concerning the analytic dependence of all the field variables on certain *ad hoc* parameters. Examination of the closed-form relations shows that in the full theory the motion of the singularities, i.e. the dependence of their three space coordinates on the time coordinate, certainly depends on the choice of coordinate system.

However, the choice of coordinate system is not everything. Partly through the work of Havas, which in turn is based on some very old papers by Lubanski, we know that the motion of a particle is intrinsically affected by its internal structure. E-I-H in their classical papers assumed explicitly that each particle was, as nearly as possible, a monopole, and that at each stage of the approximation procedure all multipoles belonging to the homogeneous part of the solution should be set zero. Unfortunately, we do not have at present a definitive theory that tells us how to formulate such a requirement invariantly. True, if there be only one particle in the universe, a Schwarzschild solution, then the spherically symmetric solution possesses a higher symmetry than a solution that has an admixture of dipole, quadrupole, or higher multipole moment. But in a many-particle situation symmetries can at best hold approximately, in the immediate vicinity of each particle. Perhaps the description of a physical situation solely in terms of observables will give us the desired technology. In the meantime, we must consider the theory of motion still as an only partly finished structure.

As for the *energy concept,* I should like to accept Dr. Trautman's evaluation. If I understand him right, he feels that none of the energy concepts and expressions proposed at this conference and elsewhere has universal validity, but that there are a number of special situations in which the concept of energy is meaningful. If there exists a Killing field, then it is possible to construct about each isolated singular world tube a two-dimensional closed surface integral whose value is independent of the coordinate system chosen, independent of the detailed shape of the enclosing surface, and constant in time. Likewise, it is possible to construct meaningful energy expressions when the metric is almost flat, regardless of boundary conditions at spatial infinity; finally, physical situations in which the field intensities (Christoffel symbols) at spatial infinity drop off as r^{-2} permit the construction of a surface integral whose asymptotic value represents the total relativistic mass of the system. Naturally, in this last case the total linear momentum is also well defined. More generally, an energy density can always be defined if the physical situation is endowed with some intrinsically defined time-like vector field; a total energy can be defined if such a vector field exists at least asymptotically at spatial infinity. Professor Møller's energy density, for instance, is invariant with respect to transformations that preserve at each world point the direction of the time axis and the proper length of the coordinate differential *dt*. In some situations this group of coordinate y transformations is the one that preserves some intrinsic characteristic of the given manifold, and then Møller's energy density expression possesses an invariant significance. Similarly, Professor Dirac's proposed expression for the energy has its own invariance group, if I am not mistaken.

A very curious discovery is the fully symmetric tensor of rank four which satisfies a covariant divergence relationship. This tensor was discovered independently by a number of workers within the past couple of years, but I believe that the priority belongs to L. Bel. Robinson, I believe, has called this expression « superenergy », which is not a bad name, as it implies that the structure of this tensor precludes its interpretation as representing the energy of the gravitational field, though it shares with the energy the property of being (covariantly) conserved. Apparently this new tensor does not lend itself to the construction of a three-dimensional integral that is a constant of the motion. Nevertheless, it exists, and some physically intuitive interpretation would be most welcome.

I shall now leave the area of conservation laws and turn briefly to the issue of *gravitational waves*. Perhaps at no point to we feel the absence of Leopold Infeld as keenly as we do in the discussion of waves, where he is almost the only worker who insists that there are not any. In his absence, it appears slightly ridiculous to decide « by majority vote » that waves are emitted by many-body systems; I hope that he will be with us at the next international conference, and that we shall then have a good discussion of that question.

To Petrov, Pirani, and Lichnerowicz we owe good definitions of what we might mean by a state of « pure » gravitational radiation. The presence of « impure » radiation in a complicated physical system remains a dubious issue. Trautman's radiation conditions at spatial infinity would be useful if we had good reason to believe that a wave train of infinite length can exist along with standard boundary conditions at spatial infinity. Actually, I believe that this combination is almost certainly ruled out by the higher approximations of the weak-field equations; hence we must restrict our considerations to radiation pulses in asymptotically flat universes, and perhaps to long wave trains in universes that are not flat at spatial infinity. Under these circumstances I think that we still do not quite know how to ask the right questions; if we did, perhaps the answer would be obvious.

At the end of this section, let me quickly mention three separate topics. First, we have seen that the several French groups have made further progress on the examination of the problem of *Cauchy data* and the propagation of discontinuities (theory of characteristics), both in general relativity and in several unitary field theories, and also not only in vacuum situations but in the presence of several kinds of matter. Not too surprisingly, it has been found that in these cases there are several distinct cones of characteristics at any one world point, corresponding, as it were, to the propagation of gravitational waves, electromagnetic waves (in the presence of dielectrics), and elastic waves (in the presence of compressible fluids, for instance).

The group under Professor Jordan at Hamburg has made very impressive progress in the construction of *rigorous solutions* of the field equations. I must admit that when I first became acquainted with this program, I was somewhat skeptical about the value of highly symmetric rigorous solutions for the interpretation of the theory as a whole, considering that the symmetry of the known solutions does not reflect special properties of the field equations but merely our mathematical inability to construct more general types of solutions. In the meantime, however, the number of known inequivalent solutions has greatly increased and, what is perhaps more important, the requirements on the degree of symmetry have considerably decreased. Perhaps very soon it will be possible to pick among these classes of solutions a few that will be really capable of telling us a great deal more about the non-approximate theory than we know at present.

Finally, I should like to comment very briefly on the purported non-existence of *particle-like solutions* of the equations. This is also a field in which we do not yet quite know how to formulate our questions. In the meantime, I believe that it is safe to say that further investigations in this direction will be more valuable it they take into account topological questions. It may well turn out that we shall find that there are in fact non-trivial solutions of the field equations, with or without electromagnetic field, if we admit multiply connected manifolds or manifolds with « twists ». Whether such solutions have anything to do with elementary particles, that is not for us to say now before we know them.

Experimental Work

My last, and unfortunately sketchiest section will be concerned with astronomical observations and laboratory experiments. We have had a very small number of reports on investigations that bear on *cosmological questions*. Interesting as this work is, I believe that the next few years will see a great expansion along these lines, as new tools of observation become available. These new tools lie both in the type of information that we can receive from outer space on the surface of our planet, and in the possibility of sending observational equipment outside the atmosphere. Radio astronomy has barely scratched the surface of its potentialities, and even so we can now « see » much farther into space with a radio telescope than with an optical telescope. Also, it is not unlikely that in the next few years we shall get much more detailed information of a cosmological nature from the observation of cosmic rays than we have received so far. And finally, we may perfect our neutrino-sensitive devices to the extent where we can hope to observe the stream of neutrinos reaching us from the outside. If one of Weber's schemes to observe gravitational radiation should become realistic, that, too, would provide us with a completely new channel of information.

Different in motivation from the work on cosmological problems is work concerned with *experimental tests* of the theory of gravitation. Though individually these tests may not be « crucial » experiments for general relativity, there is no question in my mind that any experiment likely to tell us something about the gravitational field is well worth doing. Among such experiments that have been proposed, or are actually in progress, are a repetition and extension of Eötvös's experiment, clock experiments designed to test Einstein's gravitational red shift either by ground-based or satellite-mounted atomic clocks, experiments to test the precession of a fixed axis in a satellite orbiting about the earth, and finally the proposal to design emitters and detectors of gravitational radiation. Many of these experiments will be based on our new technology, comprising satellites, atomic clocks, solid-state devices.

It would be futile for me to guess in public which will be the most important topics at our next conference, a couple of years hence. But I hope very much that experimental and observational work in the general realm of general relativity and gravitation will be one of them.

In conclusion, I should like to express to our hosts the very deep appreciation of all of us from abroad who have had the privilege of participating in the Royaumont conference. Only those among us who have ever prepared for a conference on their own homegrounds can realize the amount of effort that must have gone into the preparation for this one. We should thank not only Professors Lichnerowicz and Tonnelat, who conceived this conference and prepared its program, but also their younger collaborators at the Institut Henri Poincaré, the Collège de France, and elsewhere, who gave generously of their time to make our stay enjoyable and the mechanics of the conference unobtrusive. We leave Royaumont with deep gratitude to all of them.

TABLE DES MATIÈRES

IMP. LOUIS-JEAN — GAP

Dépôt légal n° 113 — 1962