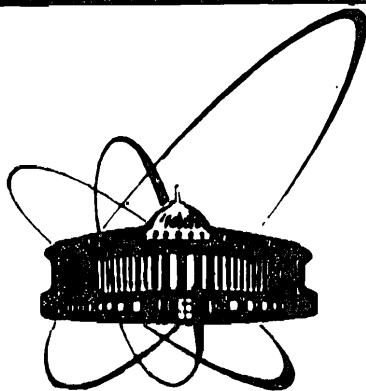




ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б 19

P4-87-616

Д.Д.Бакалов

**ЭФФЕКТЫ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ ЯДЕР
В МЕЗОМОЛЕКУЛАХ**

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1987

I. Введение

Задача о вычислении поправок на электромагнитную структуру ядер к энергии связи мезомолекул возникла в связи с прецизионными расчетами слабосвязанных состояний мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu^{1/}$, необходимыми для описания температурной зависимости скорости их резонансного образования^{/2/}. Энергия, выделяемая в реакции образования мезомолекулы - т.н. энергия связи ϵ - равна разности уровней энергии мезомолекулы E_M^{JV} и основного состояния исходного мезотома E_A^{10}

$$\epsilon = E_M^{JV} - E_A^{10}. \quad (I)$$

Для описания кинетики мюонного катализа энергию связи необходимо вычислить с точностью ~ 1 мэВ^{/3/}; это требует последовательного учета релятивистских эффектов и эффектов, связанных с ядерной электромагнитной структурой (я.э.-м.с.) при вычислении E_M^{JV} и E_A^{10} (I).

Изложенный ниже метод вычисления поправок к кулоновскому значению энергии связи $\epsilon^{(NR)}$ существенно опирается на то обстоятельство, что релятивистские эффекты дают примерно одинаковый вклад в значения E_M^{JV} и E_A^{10} ^{/4/}, и при вычитании в (I) результирующая поправка к $\epsilon^{(NR)}$ оказывается на порядки меньшей. Благодаря этому при вычислении ϵ с точностью ~ 1 мэВ можно пренебречь квантово-электродинамическими эффектами порядка $O(\alpha^5 \ln \alpha)$ и выше и ограничиться лишь эффектами $O(\alpha^4)$, описываемыми диаграммами однофотонного обмена. Также достаточно поляризуемость дейтрона (диаграмма двухфотонного обмена с виртуальным развалом дейтрона на протон и нейтрон) описывать эффективным потенциалом, предложенным в работах^{/5,6/}, в ядре рассмат-

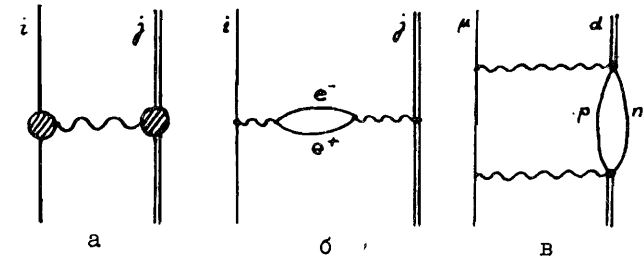
ривать как элементарные частицы с фиксированным распределением заряда, магнитного момента и пр. Таким образом, задача о вычислении уровней энергии мезоатомов и мезомолекул сводится к решению уравнения Шредингера с гамильтонианом, описывающим с точностью $O(1/c^2)$ релятивистскую динамику системы неточечных спиновых частиц с электромагнитным взаимодействием.

2. Гамильтониан системы неточечных спиновых частиц

В мгновенной форме динамики прямого электромагнитного взаимодействия^{4,7,8/} релятивистский гамильтониан H системы $N \geq 2$ частиц имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H^{(0)} + H^{(1)} + O(1/c^2), H^{(n)} = O(1/c^{2n}), n=0, 1; \\ H^{(n)} &= K^{(n)} + U^{(n)}, K^{(n)} = \sum_i K_i^{(n)}, K_i^{(0)} = \vec{P}_i^2 / 2M_i, \\ K^{(1)} &= -\vec{P}^4 / 8M_i^3; \\ U^{(n)} &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}^{(n)}, U_{ij}^{(n)} = U_{ij}^{(n)}(\vec{r}_{ij}, \vec{P}_{ij}, \vec{P}_i, \vec{S}_i, \vec{S}_j) \\ \vec{r}_{ij} &= \vec{R}_j - \vec{R}_i, \vec{P}_{ij} = (M_i \vec{P}_j - M_j \vec{P}_i) / M_{ij}, \vec{P}_i = \vec{P}_i + \vec{P}_j \\ M_{ij} &= M_i + M_j, m_{ij} = M_i M_j / M_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $M_i, \vec{R}_i, \vec{P}_i$ и $\vec{S}_i$ - масса, радиус-вектор, импульс и вектор спина i -той частицы. Для построения операторов парного взаимодействия $U_{ij}^{(0)}$ и $U_{ij}^{(1)}$ из амплитуды рассеяния частиц i и j ^{9/} с требуемой точностью, достаточно учесть вклад диаграмм а) и б) на рисунке (для дейтронов - и диаграммы в)), где заштрихованные кружки обозначают вершинные функции, включающие формфакторы (см. приложение I). С использованием обозначений, введенных в приложении I, выражения для $U_{ij}^{(0)}$ и $U_{ij}^{(1)}$ записываются в следующем виде (индексы i и j в символах $\vec{r}_{ij}, \vec{P}_{ij}$



$m_{ij}, M_{ij}, U_{ij}^{(x)}, g^{(n)}_{ij}$ опущены):

$$U^{(0)} = Z_i Z_j e^2 / r + U^{(FSZ)} + U^{(POL)}, \quad (3)$$

$$U^{(FSZ)} = -Z_i Z_j e^2 g_0 / r, U^{(POL)} = -\frac{\vec{\alpha} e^2}{2r^2(r^2 + r_0^2)} \quad (4)$$

где для дейтрона $\vec{\alpha} = 0,63 \text{ фм}^3 / 10$, а параметр $r_0 = 16 \text{ фм}$ подобран из сравнения с результатом^{10/} для сдвига $\Delta E_{dH}^{(POL)}$ ¹⁰;

$$U = U^{(D)} + U^{(RM)} + U^{(VP)} + U^{(F)} + U^{(SO)} + U^{(T)} + U^{(Q)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U^{(D)} &= \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^2 \left\{ (4\pi d(\vec{r}) + \hat{g}(5)) \frac{S_i}{2S_i+1} \frac{(Z_i - \mu_i / S_i) Z_j}{2M_i^2} \right. \\ &\quad \left. + (4\pi d(\vec{r}) + \hat{g}(5')) \frac{S_j}{2S_j+1} \frac{Z_i (Z_j - \mu_j / S_j)}{2M_j^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} U^{(RM)} &= -\frac{Z_i Z_j e^2}{2M_i M_j c^2} \left\{ \frac{1 - 2g_0 + 2\tilde{g}_0(\vec{P}_i \cdot \vec{P}_j)}{r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + 2g_0 - 6\tilde{g}_0}{r^3} (\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{P}_i) \vec{P}_j) \right\}, \end{aligned} \quad (6б)$$

$$\begin{aligned} U^{(VP)} &= Z_i Z_j e^2 \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right) \frac{\int d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &\quad \cdot F_i(-\vec{k}^2) F_j(-\vec{k}^2) / (\vec{k}^2 + 4x^2 / \lambda_e^2), \lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}, \end{aligned} \quad (6в)$$

$$U^{(F)} = -\frac{1}{6} \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^2 \hat{g}_{(4)} \left(\frac{\mu_i}{M_i S_i} \right) \left(\frac{\mu_j}{M_j S_j} \right) (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j), \quad (6r)$$

$$U^{(SO)} = \frac{e^2 \hbar}{c^2} \left\{ -\frac{Z_i Z_j}{2 M_i^2} \frac{1 - \bar{g}_{(4)}}{r^3} (\vec{r} \times \vec{p}_i) \vec{S}_i + \frac{Z_i Z_j}{2 M_j^2} \frac{1 - \bar{g}_{(4)}}{r^3} (\vec{r} \times \vec{p}_j) \vec{S}_j - \frac{Z_i \mu_j}{2 m M_j S_j} \frac{1 - \bar{g}_{(2)}}{r^3} (\vec{r} \times \vec{p}) \vec{S}_j - \frac{Z_j \mu_i}{2 m M_i S_i} \frac{1 - \bar{g}_{(2)}}{r^3} (\vec{r} \times \vec{p}) \vec{S}_i \right\}, \quad (6d)$$

$$U^{(T)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^2 \left(\frac{\mu_i}{M_i S_i} \right) \left(\frac{\mu_j}{M_j S_j} \right) \frac{1 - \bar{g}_{(4)}}{r^3} \cdot \left(\frac{3(\vec{r} \vec{S}_i)(\vec{r} \vec{S}_j)}{r^2} - (\vec{S}_i \vec{S}_j) \right), \quad (6e)$$

$$U^{(Q)} = \frac{Z_i Q_j e^2}{2} \frac{1 - \bar{g}_{(3)}}{r^3} \left(\frac{3(\vec{r} \vec{S}_i)^2}{r^2} - \vec{S}_i^2 \right) + \frac{Z_j Q_i e^2}{2} \frac{1 - \bar{g}_{(3')}}{r^3} \left(\frac{3(\vec{r} \vec{S}_j)^2}{r^2} - \vec{S}_j^2 \right). \quad (6ж)$$

Здесь через Z_i , μ_i и Q_i обозначены заряд, магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты i -той частицы в единицах e , $\frac{e\hbar}{2M_i c}$ и $\mu m^2 e$ соответственно; $U^{(FSZ)}$ описывает искажение кулоновского потенциала конечными размерами частиц, $U^{(POL)}$ - эффекты поляризуемости, $U^{(F)}$, $U^{(SO)}$, $U^{(T)}$

и $U^{(Q)}$ - фермиевское спин-спиновое, спин-орбитальное тензорное и квадрупольное взаимодействия, $U^{(VP)}$ и $U^{(RM)}$ - поляризацию вакуума и т.н. релятивистскую поправку к массе, а $U^{(D)}$ - члены дарвиновского типа. Эффекты неточности частиц описываются функциями $\hat{g}_{(n)}$, $\hat{g}_{(n)}$ и т.д. (П1.1-2), выражающимися через фурье-преобразования формфакторов частиц; для точечных частиц эти функции тождественно равны нулю.

Данный гамильтониан (2)-(6) отличается от использованных в других работах (см., напр., [11]) функцией $\tilde{g}_{(1)}$ в операторе $U^{(RM)}$.

3. Поправки на электромагнитную структуру ядер к уровням энергии S -состояний μ -мезоатомов изотопов водорода

В качестве первого примера применим изложенный выше формализм к вычислению релятивистских и связанных с я.э.-м.с. поправок к уровням энергии атомов $p\mu$, $d\mu$ и $t\mu$.

Использование гамильтониана (2)-(6) для вычисления энергетических уровней малочастичных систем требует знания электромагнитных формфакторов взаимодействующих частиц. В данной работе для формфакторов протона, дейтрона и тритона использовалась аппроксимация данных по сечениям упругого рассеяния электронов на ядрах [12, 13] функциями типа

$$F_{in}(-k^2) = \sum_s w_{ins} / (1 + k^2 / (\Lambda_{ins})^2)^{\ell_{ins}}, \quad \sum_s w_{ins} = 1, \quad (7)$$

$$n = 1, 2, \dots, 2S_i + 1,$$

приводящими (в пренебрежении внутренней структурой мюона) к простым выражениям для функций $g_{(n)}$ (см. приложение 2).

Найденные нами значения параметров w , Λ , ℓ приведены в таблице I.

Учет конечных размеров ядер приводит к изменению формы релятивистского взаимодействия. (6) на малых расстояниях, сглаживая сингулярность операторов (6a)-(6ж) при $r \rightarrow 0$. В мезоатомах изотопов водорода этот эффект превышает установленный выше порог точности расчетов поправок к уровням энергии 10^{-3} эВ лишь в S -состояниях. Вычисленные в первом порядке теории возмущений с

Таблица I. Параметры W , Λ в мэВ/с и ℓ в аппроксимации (7) электромагнитных формфакторов протона, дейтрона и тритона

Ядро	Форм-фактор	W	Λ	ℓ	Ядро	Форм-фактор	W	Λ	ℓ
p	F_1	0,789	852	2	d	F_1	0,350	374	5
		0,211	2095	3			0,663	707	5
	F_2	0,437	770	3		F_2	-0,013	1980	5
		0,563	1194	3			0,389	381	5
t	F_3	1,645	701	5		F_3	0,611	756	5
		-0,645	848	5			0,561	444	5
	F_4	1,533	522	3		F_4	0,439	798	5
		-0,533	695	3					

учетом я.э.м.с. релятивистские поправки $\Delta E_A^{(x)no}$ отличаются от значений $\Delta \tilde{E}_A^{(x)no}$, соответствующих точечным ядрам, на множителе $\gamma_i^{(x)}$, для которых - благодаря выбору аппроксимации (7) - можно получить выражения через параметры ядерных формфакторов (см. (П2.4)) x ; здесь $e \cdot \hbar = m_j = 1$, $Z_i = -Z_j = 1$:

$$\Delta E_A^{(D)no} = \langle noo | U^{(D)} | noo \rangle = \gamma_i^{(D)} \Delta \tilde{E}_A^{(D)no} = 4\alpha^2 n^{-3} \cdot \begin{cases} \frac{1}{8}(Z_i(M_i^2 + (2\mu_j - 1)M_j^2)(1 - \hat{\delta}_{i1}) + 2(\mu_i - Z_i)M_i^2(1 - \hat{\delta}_{i2})), S_i = 1/2, \\ (Z_i((2\mu_j - 1)/8M_j^2 - 1/6M_i^2)(1 - \hat{\delta}_{i1}) + \frac{\mu_i}{6M_i^2}(1 - \hat{\delta}_{i2})), S_i = 1; \end{cases}$$

$$\Delta \tilde{E}_A^{(D)no} = -\alpha^2 \left(\frac{S_i}{2S_i + 1} \frac{1 - \mu_i/S_i}{2M_i^2} + \frac{1 - 2\mu_j}{8M_j^2} \right) \cdot \frac{4}{n^3}, \quad (8a)$$

$$\Delta E_A^{(RM)no} = \langle noo | U^{(RM)} | noo \rangle = \gamma_i^{(RM)} \Delta \tilde{E}_A^{(RM)no}$$

$$\gamma_i^{(RM)} = 1 - \tilde{\delta}_{i1}^{(RM)}, \quad \Delta \tilde{E}_A^{(RM)no} = -\frac{\alpha^2}{M_i M_j} \left(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} \right). \quad (8b)$$

Аналогично, имеем

$$\Delta E_A^{(VP)no} = \gamma_i^{(VP)} \Delta \tilde{E}_A^{(VP)no}. \quad (8в)$$

^{x)} Здесь индекс $\tilde{i}$ соответствует ядру, а j - мюону.

Замкнутые выражения для $\Delta \tilde{E}_A^{(VP)no}$ и $\gamma_i^{(VP)}$ очень громоздки; их численные значения легче получить по методу, предложенному в работе [14]. Отметим лишь, что

$$\gamma_i^{(VP)} = 1 + \sum_s O(\ln \Lambda_{i1s} / \Lambda_{i1s}^2). \quad (8г)$$

Для сверхтонкого расщепления S -уровней имеем

$$\Delta E_A^{(HFS)no} = \gamma_i^{(F)} \Delta \tilde{E}_A^{(HFS)no}$$

$$\Delta \tilde{E}_A^{(HFS)no} = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2}{M_i M_j} \frac{2S_i + 1}{S_i} \frac{\mu_i \mu_j}{n^3}$$

$$\gamma_i^{(F)} = \begin{cases} 1 - (Z_i \hat{\delta}_{i1} + (\mu_i - Z_i) \hat{\delta}_{i2}) / \mu_i, S_i = 1/2 \\ 1 - \hat{\delta}_{i2}, S_i = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Наконец, нерелятивистская поправка на конечные размеры ядер равна

$$\Delta E_A^{(FSZ)no} = \langle noo | U^{(FSZ)} | noo \rangle = \gamma_i^{(FSZ)} \langle noo | 4\pi \delta(\vec{r}) | noo \rangle$$

$$\gamma_i^{(FSZ)} = \delta_{i1} \quad (10)$$

а поправка на поляризуемость ядра -

$$\Delta E^{(POL)no} = \langle noo | U^{(POL)} | noo \rangle = -\frac{\pi \alpha}{r_0} (1 + O(r_0)). \quad (11)$$

Численные значения величин $\gamma^{(FSZ)}$, $\gamma^{(D)}$, $\gamma^{(F)}$ и поправок для основного состояния мезомонов $p\mu$, $d\mu$ и $t\mu$ приведены в табл. 2.

4. Поправки на э.-м. структуру ядер к энергии связи

мезомолекул $d\mu$ и $t\mu$ в слабосвязанных состояниях с $J=1$, $v=1$

Квантовоэлектродинамические эффекты, описываемые трехчастичным гамильтонианом H (2)-(6), приводят к общему сдвигу

Таблица 2. Эффекты конечных размеров ядра в основном состоянии мезоатомов изотопов водорода (поправки к уровням энергии - в мэВ)

Атом	$\gamma^{(FSZ)}$	$\Delta E_A^{(FSZ)10}$	$\gamma^{(B)}$	$\Delta E_A^{(B)10}$	$\tilde{\Delta E}_A^{(B)10}$	Эффект я.з.- м.с.	$\gamma^{(F)}$	$\Delta E^{(HFS)}$	$\tilde{\Delta E}^{(HFS)}$
$\rho\mu$	I, I09-6	22,4	0,9956	II4,8	II5,4	-0,6	0,9950	I8I,8	I82,7
$d\mu$	I, 007-5	2I4,6	0,9867	I26,1	I27,8	-I,7	0,9870	48,4	49,1
$t\mu$	6,7II-6	I45,6	0,9884	I36,0	I37,6	-I,6	0,9848	236,6	240,2

и к спиновому расщеплению уровней энергии мезомолекул E_M^{JV} , а отсюда - и энергии связи $\varepsilon = E_M^{JV} - E_A^{10}$ (1). При вычислении поправок $\Delta E^{(x)} = \Delta E_M^{(x)JV} - \Delta E_A^{(x)10}$ сначала были получены соотношения (аналогичные (8)-(10)), выражающие $\Delta E_M^{(x)JV}$ через значения $\tilde{\Delta E}_M^{(x)JV}$ для точечных ядер, найденные в адиабатическом представлении задачи трех тел /15/ в первом порядке теории возмущений /4/. Показано, что в слабосвязанных состояниях $d\mu$ и $t\mu$ вклад в $\Delta E^{(x)}$ от не зависящих от спинов релятивистских эффектов $\tilde{\Delta E}_M^{(x)JV}$ и $\tilde{\Delta E}_A^{(x)10}$, $x = D, VP, RM$ взаимно сокращается, что позволяет пренебречь я.з.-м.с. при вычислении релятивистского сдвига энергии связи с точностью I мэВ, и найдены поправки на я.з.-м.с. к кулоновскому значению и к сверхтонкому расщеплению $E^{(NR)}$.

В сдвиг уровня энергии мезомолекулы вклад дают диагональные по спинам взаимодействия $U_{ij}^{(x)}$, $x = FSZ, POL, D, RM, VP$, для всех трех пар (ij) , $i, j = 1, 2, 3$ ($i = 1, 2$ обозначает ядра, а $i = 3$ - мюон):

$$\Delta E_M^{(x)JV} = \sum_{ij} \Delta E_{ij}^{(x)JV}, \quad \Delta E_{ij}^{(x)JV} = \langle JV / U_{ij}^{(x)} / JV \rangle. \quad (12)$$

В адиабатическом представлении задачи трех тел /15/ средние значения от операторов $U_{ij}^{(x)}$ представляются (после усредне-

$$\langle JV / U_{ij}^{(x)} / JV \rangle = \sum_{c't'm'} \sum_{ctm} \int dR \chi_{ctm}^{JV}(R) \langle c't'm' / U_{ij}^{(x)} / ctm \rangle \chi_{ctm}^{JV}(R) \quad (13)$$

$$\langle c't'm' / U_{ij}^{(x)} / ctm \rangle = \frac{R^3}{8} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\eta (\xi^2 - \eta^2) \varphi_{ctm}(\xi, \eta; R) U_{ij}^{(x)} \varphi_{ctm}(\xi, \eta; R),$$

где $R = |\vec{r}_{12}|$, $\xi = (r_{13} + r_{23})/R$, $\eta = (r_{13} - r_{23})/r$,

$\varphi_{ctm}(\xi, \eta; R)$ - кулоновские сфероидальные функции /16/ (t номерует решения задачи двух центров с данными, сосредоточенных вблизи ядра $C = 1, 2$), а $\chi_{ctm}^{JV}(R)$ - амплитуды волновой функции мезомолекулы в адиабатическом представлении /1/.

Основной вклад в суммы (13) дают члены с $t = t' = 1$ и $m = m' = 0$ *, а в интегралы (13) - область

$$R \sim \hbar / (a_\mu \sqrt{2m_{12}\varepsilon}), \quad a_\mu = \hbar^2 / m_{12}e^2.$$

В этой области справедливо асимптотическое разложение φ_{ctm} по функциям водородного μ -атома с центром в ядре с /17/:

$$\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{ctm}(\xi, \eta; R) = \sum_{N \geq 0} R^{-N} \sum_{n, l} C_{nl}^N \langle \vec{r}_{c3} | n l m \rangle,$$

в частности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{c10}(\xi, \eta; R) = \langle \vec{r}_{c3} | 100 \rangle + O(R^{-2}).$$

Поскольку ведущие члены в разложении $\chi_i^{(x)}$, $x = D, RM, VP$ не зависят от квантовых чисел n' и n (см. (П2.1)-(П2.3)), в области $R \gg 1$ имеем

$$\langle c't'o / U_{i3}^{(x)} / cto \rangle = \chi_i^{(x)} \langle i't'o / \tilde{U}_{ij}^{(x)} / i'to \rangle (1 + o(1/\Lambda) + o(1/2M)),$$

где $\tilde{U}_{ij}^{(x)}$ описывают взаимодействие точечного ядра с мюо-

* Вклад от остальных членов не превышает $O(1/2M)$, где $M = m_{12}/m_{13}$.

ном, и таким образом,

$$\Delta E_{i3}^{(x)J_V} = g_i^{(x)} \Delta \tilde{E}_{i3}^{(x)J_V}; \quad i=1,2; \quad x=D, RM, VP,$$

$$\text{и} \quad \Delta E_{i3}^{(FSZ)J_V} = g_i^{(FSZ)} \cdot g_i,$$

где $g_i = \langle J_V / r \delta(\vec{r}_{23}) / J_V \rangle$ - т.н. гамма-фактор мезомолекулы.

Отметим, что эффектами я.э.-м.с. в состояниях с $J > 0$ можно пренебречь

$$|\Delta E_{12}^{(x)J_V} - \Delta \tilde{E}_{12}^{(x)J_V}| < 1 \text{ мэВ}, \quad x=D, RM, VP; \quad |\Delta E_{12}^{(FSZ)J_V}| < 1 \text{ мэВ}.$$

Отсюда, для релятивистского сдвига энергии связи $\Delta E^{(SHIFT)}$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta E^{(SHIFT)} &= \sum_{x=D, RM, VP} \left(\sum_{i < j} \Delta E_{ij}^{(x)J_V} - \Delta E_A^{(x)10} \right) \\ &= \sum_{x=D, RM, VP} \left(\sum_{i=1,2} g_i^{(x)} \Delta \tilde{E}_{i3}^{(x)J_V} + \Delta \tilde{E}_{12}^{(x)J_V} - g_1^{(x)} \Delta \tilde{E}_A^{(x)10} \right). \end{aligned}$$

а для поправки на я.э.-м.с. к релятивистского сдвига

$$\begin{aligned} \Delta E^{(SHIFT)} - \Delta \tilde{E}^{(SHIFT)} &= \sum_{x=D, RM, VP} \left((g_1^{(x)} - 1) (\Delta \tilde{E}_{13}^{(x)J_V} - \Delta \tilde{E}_A^{(x)10}) + (g_2^{(x)} - 1) \Delta \tilde{E}_{23}^{(x)J_V} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}^{(x)J_V} &= \sum_{c't'm'} \sum_{ctm} \int dR \chi_{ct'm'}^{J_V} \cdot \sum_{i < j} \langle c't'm' | \tilde{U}_{ij}^{(x)} | ctm \rangle \chi_{ctm} = \\ &= \langle J_V | \tilde{U}_{12}^{(x)} | J_V \rangle + \sum_{i=1,2} \int dR \chi_{i10}^{J_V} \langle i10 | \tilde{U}_{i3}^{(x)} | i10 \rangle \chi_{i10}^{J_V} (1 + O(1/2M_0)) \\ &= \langle J_V | \tilde{U}_{12}^{(x)} | J_V \rangle + \sum_{i=1,2} \Delta \tilde{E}_{A(i3)}^{(x)10} \int_0^\infty dR (\chi_{i10}^{J_V}(R))^2 + \\ &+ O(1/2M_0) + O(\langle J_V | R^{-2} | J_V \rangle) \end{aligned}$$

(где $\Delta \tilde{E}_{A(i3)}^{(x)10}$ - релятивистская поправка к уровню энергии μ -мезотома с точечным ядром i), так что

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{E}^{(x)}| &= |\Delta \tilde{E}_M^{(x)J_V} - \Delta \tilde{E}_A^{(x)10}| \\ &\leq |\langle J_V | \tilde{U}_{12}^{(x)} | J_V \rangle| \\ &+ |\Delta \tilde{E}_{A(i3)}^{(x)10} - \Delta \tilde{E}_{A(23)}^{(x)10}| \cdot \int dR (\chi_{210}^{J_V}(R))^2 \\ &+ O(\langle J_V | R^{-2} | J_V \rangle) + O(1/2M_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Равенство (14) позволяет оценить эффект компенсации вкладов взаимодействия мюона с ядрами в мезотома и в мезомолекуле - компенсация тем полнее, чем тяжелее ядра (член $O(1/2M_0)$) и чем меньше энергия связи (член $O(\langle J_V | R^{-2} | J_V \rangle)$); кроме того, она значительна в мезомолекулах с идентичными ядрами

$$|\Delta \tilde{E}_{A(i3)}^{(x)10} - \Delta \tilde{E}_{A(23)}^{(x)10}| = 0,$$

а в случае разных ядер проявляется в состояниях с ярко выраженной пространственной асимметрией, где $\int dR (\chi_{210}^{J_V}(R))^2 \ll 1$.

В слабосвязанных состояниях $d\mu(1,1)$ и $dt\mu(1,1)$ численные расчеты, в согласии с оценкой (14), подтверждают подавление вклада в энергию связи (по сравнению с уровнем энергии мезотома): от дарвиновских членов $U^{(D)}$ и "релятивистской массы" $U^{(RM)}$ - в 10^2 раз, а от поляризации вакуума $U^{(VP)}$ - более чем в 10^3 раз. Эффект подавления вклада в диагональных по спинам взаимодействиях позволяет в вычислении релятивистского сдвига энергии связи $d\mu(1,1)$ и $dt\mu(1,1)$ пренебречь эффектами я.э.-м.с.; в более общем плане, на этом основании при построении гамильтониана системы (см. п. 2) не принимались во внимание квантово-электродинамические эффекты порядка $O(\alpha^5 \ln \alpha)$ и выше.

Таким образом, в сдвиг энергии связи самый существенный вклад

дают нерелятивистские члены $U_{i3}^{(FSZ)}$ и $U_{i3}^{(POL)}$, $i=1,2$, описывающие статические и динамические эффекты я.э.-м.с. Значения соответствующих поправок $\Delta E^{(FSZ)}$ и $\Delta E^{(POL)}$ приведены в табл. 3.

Таблица 3. Вклад эффектов электромагнитной структуры ядер в сдвиг энергии связи мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu$ (в мэВ)

Мезомолекула	$\Delta E_M^{(FSZ)}$	$\Delta E_M^{(POL)}$	$\Delta E_A^{(FSZ)}$	$\Delta E_A^{(POL)}$	$\Delta E_{\Lambda}^{(POL)}$	$\Delta E_{\Lambda}^{(POL)}$
$dd\mu$	213,1	214,7	-1,6	-9,0	-9,0	0,0
$dt\mu$	159,4	145,6	13,7	-1,9	0,0	-1,8

Уровни сверхтонкой структуры мезомолекулы находятся как собственные значения эффективного спинового гамильтониана H^{eff}

$$H^{eff} = E_1(\vec{S}_1, \vec{S}_2) + E_2(\vec{S}_1, \vec{S}_3) + E_3(\vec{S}_2, \vec{S}_4) + E_4(\vec{S}_1, \vec{J}) + E_5(\vec{S}_2, \vec{J}) + E_6(\vec{S}_3, \vec{J}) + E_7(\vec{S}_4, \vec{J}) + E_8(\vec{S}_1, \vec{J})(\vec{S}_2, \vec{J}) + E_9(\vec{S}_2, \vec{J})(\vec{S}_3, \vec{J}) + E_{10}(\vec{S}_3, \vec{J})(\vec{S}_4, \vec{J}) + E_{11}(\vec{S}_1, \vec{J})^2 + E_{12}(\vec{S}_2, \vec{J})^2 + E_{13}(\vec{S}_3, \vec{J})^2 + E_{14}(\vec{S}_4, \vec{J})^2$$

являющегося оператором в пространстве прямого произведения представлений $(S_1) \otimes (S_2) \otimes (S_3) \otimes (J)$ алгебры $su(2)$. Коэффициенты E_k , $k=1, \dots, 14$ выражаются через средние значения членов H , обладающих соответствующей спиновой структурой, в частности

$$E_i = \frac{\alpha^2}{3} \frac{\mu_i}{M_i S_i} \frac{\mu_3}{M_3} \langle J_\nu / g_{(i)}(r_{i3}) / J_\nu \rangle, i=1,2.$$

Из-за малости E_k , $k=3,4, \dots, 14$, эффекты я.э.-м.с. следует учитывать лишь в значениях $E_{1,2}$, дающих основной вклад в H^{eff} . Аналогично (9) имеем

$$E_i = \gamma_i^{(F)} \tilde{E}_i, i=1,2,$$

где M_3 и μ_3 - масса и магнитный момент мюона, а $\tilde{E}_i$ соответствует точечным ядрам; $\gamma_i^{(F)}$ определены в (9), и

$$\tilde{E}_i = \frac{4\alpha^2}{3} \frac{\mu_i}{M_i S_i} \frac{\mu_3}{M_3} \delta_i.$$

На будем приводить аналитических выражений для поправок на я.э.-м.с. к уровням сверхтонкой структуры мезомолекул; численные решения приведены в табл. 4. Отметим лишь, что сверхтонковое расщепление уменьшается приблизительно в $1/\gamma_1^{(F)}$ раз, т.е. на 2,4 мэВ в $dt\mu(1,1)$ и на 0,4 мэВ в $dd\mu(1,1)$.

Таблица 4. Эффекты конечных размеров ядер в сверхтонкой структуре мезомолекул $dd\mu(I,I)$ и $dt\mu(I,I)$ (в мэВ)

$dt\mu$				$dd\mu$			
I	S	J	Эф-ф-т	I	S	J	Эф-ф-т
			я.э.-м.с.				я.э.-м.с.
E_2 (мэВ)	190,0	192,4	-2,4	E_2 (мэВ)	16,0	16,3	-0,3
E_1 (мэВ)	6,4	6,5	-0,1	E_1 (мэВ)	16,0	16,3	-0,3
1/2 1 2	-142,7	-144,4	0,7	1 1/2 3/2	-16,1	-16,3	-0,2
1/2 1 0	-142,7	-144,4	1,7	1 1/2 1/2	-15,9	-16,1	-0,2
1/2 0 1	-142,6	-144,3	1,7	1 3/2 1/2	7,7	7,8	0,1
1/2 1 1	41,0	41,5	-0,5	1 3/2 3/2	7,9	8,1	0,1
3/2 1 1	44,0	44,6	-0,6	1 3/2 5/2	8,2	8,3	0,1
1/2 1 2	44,5	45,1	-0,6				
3/2 1 0	44,7	45,2	-0,6				
3/2 2 1	50,2	50,8	-0,6				
3/2 2 3	50,7	51,4	-0,6				
3/2 2 2	51,1	51,7	-0,6				

Заключение

Коротко резюмируем изложенные выше результаты.

1. Эффекты я.э.-м.с. дают существенный вклад в нерелятивистский сдвиг и в сверхтонковое расщепление энергии связи и должны приниматься во внимание при расчетах скорости резонансного обра-

зовения мезомолекул $dd\mu$ и $dd\mu$ и при описании μ -катализа ядерного синтеза. Вклад этих эффектов в величину релятивистского сдвига пренебрежимо мал.

2. В вычислениях поправок на я.э.-м.с. к уровням энергии двухчастичных, и особенно трехчастичных систем, целесообразно применять аппроксимацию формфакторов частиц функциями типа (7), приводящими к простым аналитическим формулам.

3. Гамильтониан (2-б) (без учета членов $U_{ij}^{(pol)}$) задает однозначную функциональную связь между нерелятивистским потенциалом $(1 - g_{00}(r))/r$ и релятивистскими потенциалами $\hat{g}_{(n)}(r)$ и т.д. и может быть использован для эвристических оценок релятивистских эффектов в системах с произвольным нерелятивистским потенциалом.

В заключение автор выражает благодарность А.Квицинскому, Л.И.Меньшикову и Л.И.Пonomареву за многократные и очень полезные обсуждения, В.С.Мележику и М.П.Фейфману - за поддержку в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Ковариантные выражения для матричных элементов электромагнитного тока J_μ (т.н. вершинные функции) имеют следующий вид ($\hbar = c = 1$):

для частицы i со спином $S_i = 1/2$ 1181.

$$\langle p\zeta | J_\mu | q\eta \rangle = e \tilde{u}_\zeta(p) \left\{ \gamma_\mu Z_i F_{i1}(k^2) - [\gamma_\mu \gamma_\nu] k^\nu \frac{A_i}{4M_i} F_{i2}(k^2) \right\} u_\eta(q);$$

Здесь $k = p - q$, использована метрика $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$, F_{i1} и F_{i2} - формфакторы Дирака и Паули, нормированные ус-

ловием $F_{i1}(0) = F_{i2}(0) = 1$, а Z_i и A_i - заряд и аномальный магнитный момент в единицах e и $e\hbar/2M_i c$ соответственно;

для частицы i со спином $S_i = 1$ 1191

$$\langle p\zeta | J_\mu | q\eta \rangle = e (u_\zeta^\dagger(p))_\rho \left\{ [-Z_i F_{i1}(k^2) g^{\rho\sigma} + \frac{M_i^2 Q_i - Z_i + \mu_i}{2M_i^2} F_{i3}(k^2) (k^\rho k^\sigma - \frac{1}{3} k^2 g^{\rho\sigma})] (p+q)_\mu + \mu_i F_{i2}(k^2) (g^{\nu\sigma} \delta_\mu^\rho - g^{\nu\rho} \delta_\mu^\sigma) k_\nu \right\} (u_\eta(q))_\sigma,$$

где $F_{i1}(0) = F_{i2}(0) = F_{i3}(0) = 1$, а μ_i и Q_i - магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты частицы i .

Для компактной записи последующих формул обозначим:

$$F_{i1}' = F_{i1}, F_{i2}' = (Z_i F_{i1} + A_i F_{i2}) / \mu_i \text{ если } S_i = 1/2,$$

и

$$F_{i1}' = F_{i1}, F_{i2}' = F_{i2},$$

$$F_{i3}' = (Z_i F_{i1} - \mu_i F_{i2} + (M_i^2 Q_i + \mu_i - Z_i) F_{i3}) / Q_i M_i^2,$$

если $S_i = 1$.

и определим следующие функции:

$$G_{(1)} = F_{i1}' F_{j2}', G_{(2)} = F_{i2}' F_{j1}', G_{(2')} = F_{i1}' F_{j2}',$$

$$G_{(3)} = F_{i3}' F_{j1}', G_{(3')} = F_{i1}' F_{j3}', G_{(4)} = F_{i2}' F_{j2}'$$

$$G_{(5)} = (Z_i F_{i1}' - \frac{\mu_i}{S_i} F_{i2}') F_{j1}' / (Z_i - \mu_i / S_i),$$

$$G_{(5')} = (Z_j F_{j1}' - \frac{\mu_j}{S_j} F_{j2}') F_{i1}' / (Z_j - \mu_j / S_j)$$

В координатном пространстве зависимость операторов парного

взаимодействия (3)-(6) от формфакторов частиц описывается функциями

$$g_{(n)}(r) = 1 - r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi}{k^2} G_{(n)}(-\vec{k}^2), \quad (\text{П.1})$$

$$n = 1, 2, 2', 3, 3', 4, 5, 5'$$

и также

$$\hat{g}_{(n)}(r) = g_{(n)}''(r)/r - 4\pi(g_{(n)}(r)-1)\delta(\vec{r}),$$

$$\bar{g}_{(n)}(r) = g_{(n)}(r) - r g_{(n)}'(r), \quad (\text{П.2})$$

$$\bar{\bar{g}}_{(n)}(r) = \bar{g}_{(n)}(r) + \frac{r^2}{3} g_{(n)}''(r),$$

$$\tilde{g}_{(n)}(r) = \frac{1}{r^2} \int dx \cdot x \cdot g_{(n)}(x).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим функцию

$$A_\ell(\vec{k}^2, \Lambda) = (1 + \vec{k}^2/\Lambda^2)^{-\ell}.$$

В данной работе электромагнитные формфакторы ℓ -той частицы $F_{i\alpha}(-\vec{k}^2)$, $\alpha = 1, 2, \dots, 2S_i + 1$ аппроксимируются линейной комбинацией компонент типа A_ℓ с подходящими весами

$$F_{i\alpha}(-\vec{k}^2) = \sum_s W_{(i\alpha)s} A_{\ell(i\alpha)s}(\vec{k}^2, \Lambda),$$

$$\sum_s W_{(i\alpha)s} = 1.$$

Определим в координатном пространстве, по аналогии с (П.1),

$$a_\ell(r, \Lambda) = 1 - r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} A_\ell(\vec{k}^2, \Lambda) \frac{4\pi}{k^2},$$

Непосредственные вычисления дают

$$a_\ell(r, \Lambda) = e^{-\Lambda r} \sum_{k=0}^{\ell-1} c_k^\ell (\Lambda r)^{2k},$$

$$c_k^\ell = \frac{2^k}{\Gamma(k)} \sum_{s=k}^{\ell-1} \Gamma(2s-k)/(4^s(s-k)!s!),$$

$$\hat{a}_\ell(r, \Lambda) = a_\ell''(r, \Lambda)/r = \Lambda^2 e^{-\Lambda r} \sum_{k=0}^{\ell-2} \hat{c}_k^\ell (\Lambda r)^k,$$

$$\hat{c}_k^\ell = 2^{k+3-2\ell} (2\ell-k-4)!/(k!(\ell-1)!(\ell-k-2)!),$$

$$\tilde{a}_\ell(r, \Lambda) = (\Lambda r)^{-2} \sum_{k=0}^{\ell-1} (k+1)! c_k^\ell \cdot (1 - \exp(-\Lambda r) \sum_{s=0}^{k+1} (\Lambda r)^s/s!).$$

Отсюда, для матричных элементов между собственными функциями дискретного спектра водородного атома получаем (в единицах $\hbar = e = m = 1$)

$$\langle n'00 | \frac{a_\ell(r, \Lambda)}{r} | n00 \rangle = \delta(\Lambda, \ell) \langle n'00 | 4\pi\delta(\vec{r}) | n00 \rangle$$

$$\langle n'00 | 4\pi\delta(\vec{r}) | n00 \rangle = 4(n'n)^{-3/2},$$

$$\delta(\Lambda, \ell) = \frac{\ell^2}{\Lambda^2} \left(1 - \frac{8}{3\Lambda} \frac{(2\ell+1)!!}{(2\ell)!!} + \frac{\ell+1}{2\Lambda^2} (10 + n'^2 + n'^{-2}) \right) + O(\Lambda^{-3}), \quad (\text{П.2.1})$$

$$\langle n'00 | \hat{a}_\ell(r, \Lambda) | n00 \rangle = (1 - \hat{\delta}(\Lambda, \ell)) \langle n'00 | 4\pi\delta(\vec{r}) | n00 \rangle,$$

$$\hat{\delta}(\Lambda, \ell) = \frac{4}{\Lambda} \frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell-2)!!} - \frac{\ell}{\Lambda^2} (10 + n'^2 + n'^{-2}) + O(\Lambda^{-3}), \quad (\text{П.2.2})$$

$$\langle n00 | -\frac{1}{2r} (\Delta + \frac{1}{r^2} \vec{r}(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r}) + \frac{a_\ell(r, \Lambda)}{r} (\Delta - \frac{1}{r^2} \vec{r}(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r}) - \frac{\tilde{a}_\ell(r, \Lambda)}{r} (\Delta - \frac{3}{r^2} \vec{r}(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r}) | n00 \rangle = (1 - \tilde{\delta}(\Lambda, \ell)).$$

$$\langle n00 | -\frac{1}{2r} (\Delta + \frac{1}{r^2} \vec{r}(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r}) | n00 \rangle = (1 - \tilde{\delta}(\Lambda, \ell)) \left(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} \right)$$

$$\tilde{\delta}(\lambda, \ell) = \frac{4}{\lambda^2} (1 - 1/2n)^{-1} \left\{ \ln \left(1 + \frac{\lambda n}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\ell-1} c_k^{\ell(k+1)} \sum_{s=1}^{k+1} s^{-1} + \ell \sum_{s=1}^n s^{-1} + \frac{\ell}{12} \left(1 + \frac{6}{n} - \frac{5}{n^2} \right) + o(\lambda^{-2}) \right\} \quad (\text{П2.3})$$

Таким образом, эффекты отдельных формфакторов описываются многими

$$\begin{aligned} \delta_{i\alpha} &= \sum_s w_{(i\alpha)s} \delta(\lambda_{(i\alpha)s}, \ell_{(i\alpha)s}), \\ \hat{\delta}_{i\alpha} &= \sum_s w_{(i\alpha)s} \hat{\delta}(\lambda_{(i\alpha)s}, \ell_{(i\alpha)s}), \\ \tilde{\delta}_{i\alpha} &= \sum_s w_{(i\alpha)s} \tilde{\delta}(\lambda_{(i\alpha)s}, \ell_{(i\alpha)s}). \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Oracheva et al. Phys.Lett.B153, p.349, 1985.
2. M.P. Faifman et al. Preprint, JINR E4-86-541, Dubna, 1986.
3. L.I. Ponomarev, G. Fiorentini. Muon-catalysed fusion, 1, p.1, 1987.
4. D. Bakalov et al. Phys.Lett. 161B, p.5, 1985.
5. Д.А. Киржниц, Ф.М. Пельков. ИЭТФ 85, Е7, с.80, 1983.
6. Л.И. Меньшиков. ЯФ 42, с.1442, 1985.
7. P.A.M. Dirac. Rep.Mod.Phys. 21, p.392, 1949.
8. L.I. Foldy, R. Krajsik. Phys.Rev.D12, p.1700, 1975.
9. В.А. Рязов, Н.Т. Тодоров. ЗЧАЯ, 8, с.689, 1975.
10. С.А. Старцев и др. ЯФ 23, Е6, с.1233, 1976.
11. L. Moxhay, A. Rosner. Phys.Rev.D28, p.1132, 1983.
12. Т.Грифф, Л.Шифф. В кн.: Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц, ред.А.М.Вадим. М.: Мир, 1969, с.137.
13. С.И. Виленькая и др. ИЭТФ, 81, с.2225, 1971.
14. L.W. Fullerton, G.A. Rinker. Phys.Rev.A13, p.1283, 1976.
15. С.И. Вилицкий, Л.И. Пonomarev. ЗЧАЯ, 13, с.1336, 1982.
16. И.В. Комаров и др. Сферические и кулоновские сферические функции. М.: Наука, 1976.
17. M.P. Faifman, L.I. Ponomarev, S.I. Vinitzky. J.Phys. B9, p.2255, 1976.
18. Дж. Вьеркер, С.Дрелл. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1977.
19. V. Glaser, B. Jaksic. Nuovo Cim. 5, p.1197, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1987 года.

Бакалов Д.Д.

P4-87-616

Эффекты электромагнитной структуры ядер
в мезомолекулах

Вычислены поправки на электромагнитную структуру ядер к энергии связи мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu$. Показано, что эти эффекты дают существенный вклад в нерелятивистский сдвиг и сверхтонкое расщепление уровней мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu$, который должен приниматься во внимание при расчетах их скоростей резонансного образования. Вклад эффектов электромагнитной структуры ядер в величину релятивистского сдвига пренебрежимо мал.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С. Виноградовой

Bakalov D.D.

P4-87-616

Effects of Electromagnetic Structure
of Nuclei in Mesic Molecules

The corrections to the bound energy of $dd\mu$ and $dt\mu$ mesic molecules owing to the electromagnetic structure of the nuclei have been calculated. It is shown that these effects give the essential contribution to the nonrelativistic shift and hyperfine splitting of $dd\mu$ and $dt\mu$ molecule energy levels, and it should be taken into account in the calculations of the resonant formation rates. The contribution of electromagnetic structure of nuclei to the relativistic shift is negligibly small.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987