第13卷 第12期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 12
1989年12月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Dec., 1989

二维随机三角点阵上 $O(3)\sigma^*$ 模型 β 函数的研究

陈　天　崙
(南开大学物理系，天津)

摘　　要

用改进的蒙特卡洛重正化群方法讨论了二维随机三角点阵上 $O(3)\sigma$ 模型的 β 函数行为. 在弱耦合区的行为与二圈图微扰论的结果一致, $g>0.8$ 以后, β 函数下降陡度突然增加,反映了高阶微扰项及非微扰项的贡献.

二维非线性 $O(N)\sigma$ 模型和四维 $SU(N)$ 规范理论间存在很多类似及对应[1]. 它们的重正化群方程具有相同的结构，且都是渐近自由的理论. 因而研究 $O(N)\sigma$ 模型对探寻较为复杂的 $SU(N)$ 规范理论的性质是十分有帮助的. 在这些性质中 β 函数性质尤为重要，它描述了裸耦合常数与 cut-off 值之间的关系; β 函数给出逼近渐近标度区的方式,它也联系着用微扰论的数值研究结果. 二维 $O(N)\sigma$ 模型定义为

$$L=\frac{1}{2g}\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}(\partial_\mu\sigma_i)(\partial_\mu\sigma_i), \tag{1}$$

及

$$\sum_i \sigma_i^2=1.$$

该模型的 $O(N)$ 不变的推广即经典的海森堡模型,它的作用量为

$$A=-\frac{1}{g}\sum_n\sum_\mu \boldsymbol{S}_n\cdot\boldsymbol{S}_{n+\mu}. \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是有 N 个分量的单位矢; n 为格点的标号; $\boldsymbol{\mu}$ 是点阵上的单位矢. Hasenfratz 等人[2]用蒙特卡洛重正化群(简称 MCRG)方法研究了在二维的规则正方点阵上 $O(3)\sigma$ 模型及 $O(N)_{N\to\infty}\sigma$ 模型的 $\Delta\beta(\beta)$ 函数; 吴济民等人[3]又据此得出 $O(3)\sigma$ 模型的 β 函数行为及质量隙. 由于随机三角点阵[4]保持了平移不变性及洛仑兹不变性，在研究临界行为及连续极限时比规则点阵更为优越[5],因而在本文中，用改进的 MCRG 方法[2]对二维随机三角点阵上的 $O(3)\sigma$ 模型进行研究,讨论此模型的 $\Delta\beta(\beta)$ 函数及 β 函数的行为.

在二维随机三角点阵的第 i 个格点上放置相应的自旋 $\boldsymbol{S}_i$，且仅考虑近邻相互作用时,其作用量为

---

* 国家自然科学基金资助的课题.
本文 1989 年 4 月 1 日收到.

$$A=-\frac{1}{g}\sum_{\langle ij\rangle}\lambda_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j=-\beta\sum_{\langle ij\rangle}\lambda_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j. \tag{3}$$

其中自旋 $\boldsymbol{S}$ 是三分量的单位矢，即 $\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,S_3)$，且满足

$$s_1^2+s_2^2+s_3^2=1. \tag{4}$$

λ_{ij} 为权因子．本文中取等权的情况，即取 $\lambda_{ij}=1$.

在 MCRG 研究中，为求得模型的 $\Delta\beta(\beta)$ 函数及 β 函数，采用文[6]中描述的标准方法．用到的关联函数有

$$\Gamma_1=\sum_{\substack{\langle ij\rangle\\ \text{近邻对}}}\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j,\qquad \Gamma_2=\sum_{\substack{\langle ij\rangle\\ \text{次近邻对}}}\boldsymbol{s}_i\cdot\boldsymbol{s}_j. \tag{5}$$

做出 k 次块化的大点阵及 $k-1$ 次块化的小点阵上的关联函数随 β 变化的曲线，由匹配条件

$$\Gamma(\beta,L)_{(k)}=\Gamma(\beta-\Delta\beta(\beta),\ L/b)_{(k-1)}. \tag{6}$$

及内插法可得 $\Delta\beta-\beta$ 曲线． 式中 L 为大点阵的尺度，b 为块化的标度因子．用文[3]中的方法，可从 $\Delta\beta(\beta)$ 函数推得 β 函数．

为了减少计算量，希望只经过少数几次块化能尽快达到固定点．为此，采用改进的 MCRG 方法，即在一个渐近自由的理论中采用微扰论的结果来找到改进的块化方法．

在大 β 时，这些块化后的关联函数可用微扰论来估算．在树图近似下得匹配方程为

$$1-\frac{\alpha}{\beta}+O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)=1-\frac{\alpha'}{\beta'}+O\left(\frac{1}{\beta'^2}\right). \tag{7}$$

因此

$$\Delta\beta\equiv\beta'-\beta=\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha}\beta+O(1). \tag{8}$$

极小化 $\dfrac{\alpha-\alpha'}{\alpha}$，使 $\Delta\beta=0$ 这就是树图改进下的匹配条件． 为此采用的块化方法是：第 l 个块的自旋取值为 $\boldsymbol{\mu}_l$ 的几率为

$$\exp(p\boldsymbol{\mu}_l\boldsymbol{s}_{l\text{块}}), \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{s}_{l\text{块}}=\sum_{i\in\text{块}l}\boldsymbol{s}_i\Big/\left|\sum_{i\in\text{块}l}\boldsymbol{s}_i\right|. \tag{10}$$

自旋 $\boldsymbol{\mu}_l$ 也是平面上三分量的单位矢． p 是一个自由参数；显然 $p\to\infty$ 即通常的为主原则．通过微扰论的结果，我们可以找到最优化的 p 值，一般取 $p=c\beta$． c 由关联函数的匹配条件

$$\Gamma(\beta,p,L)_{(k)}=\Gamma(\beta',p,L/b)_{(k-1)}. \tag{11}$$

及大 β 时微扰论的结果[2]共同来决定，我们调试的结果取 $c=3.4$.

在做 MCRG 研究时，为了减少有限大小点阵的影响，我们在二维平面上构造大、小两个随机三角点阵． 先在二维平面上随机地放置 320 个格点，然后按文[4]中的方法构成随机三角点阵，确定格点之间的近邻，次近邻关系．将两个近邻的格点对块化成一个 Block 格点，并用上面所述的改进块化方法可构成经过一次块化的 160 个格点的随机三角点阵及相应的自旋体系．这个点阵就作为一次块化的大点阵，同时也作为未块化的小点阵．重复以上的过程又可依次得 80 个格点的二次块化大点阵及一次块化小点阵…….

这样，我们也就保证了 k 次块化的大点阵与 $k-1$ 次块化的小点阵有完全相同的几何结构．由于经每次块化，Block 格点数减少一半，因而块化后点阵的单形——三角形的面积增加一倍，所以标度因子 $b=\sqrt{2}$．

对大、小点阵，分别都做 1800 次蒙特卡洛迭代，各次迭代之间的自关联函数为[7]

$$\Gamma(l)=\sum_n(\Gamma(l+n)-\bar{\Gamma})(\Gamma(n)-\bar{\Gamma})\Big/\sum_n(\Gamma(n)-\bar{\Gamma})^2, \tag{12}$$

在计算中，独立的组态可通过 8 次迭代产生．去掉 300 次达到热平衡的迭代，测量关联函数的平均值，近邻关联函数 Γ_1 随 β 变化之曲线示于图 1．次近邻关联函数 Γ_2 也有类似的行为．关联函数的测量误差为

$$\Delta\Gamma=\sqrt{(\langle\Gamma^2\rangle-\langle\Gamma\rangle^2)/(N-1)}. \tag{13}$$

其中 N 为独立组态数．在此计算中 $\Delta\Gamma\leqslant 0.009$．由图 1 中的两条曲线，并借助线性内插法可得 $\Delta\beta(\beta)$——β 曲线，示于图 2．β 函数的定义为

$$-a\frac{dg}{da}=\beta(g). \tag{14}$$

对 $O(3)$ σ 模型，考虑到两圈图时有

$$\beta(g)=-\frac{1}{2\pi}g^2-\frac{1}{4\pi^2}g^3. \tag{15}$$

因此在双圈图近似下

$$\Delta\beta=\frac{1}{2\pi}\ln b+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\beta}{\beta-\Delta\beta}\cong 0.061. \tag{16}$$

由图 2 可见，当 $\beta>1.5$ 后，$\Delta\beta\cong 0.061$，这与(16)式相符．为求出该模型的 β 函数，用文[3]中的方法，通过拟合 $\Delta\beta$-β 曲线得出，当 $\beta>1.0$ 后

$$\Delta\beta(\beta)=2.42(\beta-0.91)e^{-11.75(\beta-0.91)}+0.061. \tag{17}$$

再由

$$\beta(g)=-b_0g^2\prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{d\Delta\beta(\beta)}{d\beta}\Big|_{gi}\right),\quad b_0=\frac{1}{2\pi}. \tag{18}$$

得出 β 函数的行为．$\beta(g)\sim g$ 曲线示于图 3．由图 3 可见，当 $g<0.8$ 时，本文计算得出的 $\beta(g)$ 函数行为（图 3 中实线所示）与考虑至双圈图时微扰论的结果（图 3 中虚线所

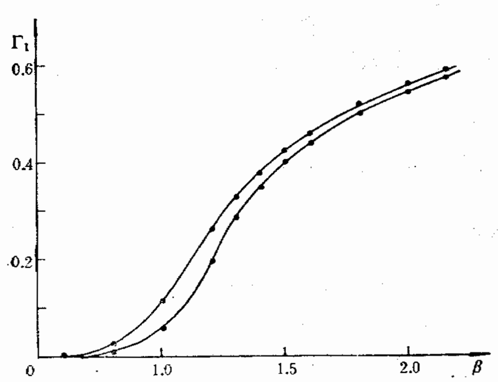

图 1

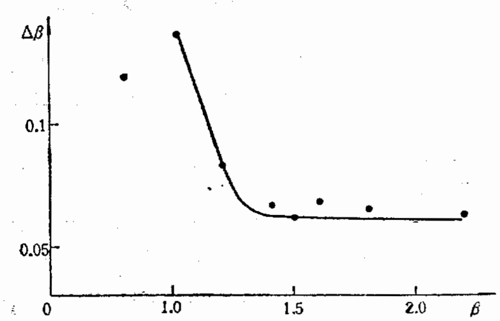

图 2

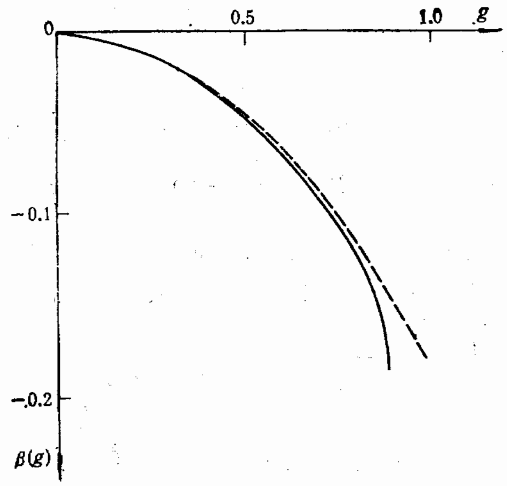

图 3

示)符合很好.当 $g > 0.8$ 以后,该曲线下降陡度突然增加很快,这是由于高阶微扰项及非微扰项的贡献起了重要作用之故.该曲线与规则点阵上所得之 β 函数曲线[3]略有不同.

本文是在 M-340 计算机上完成的.

参 考 文 献

[1] F. Wegner, *J. Math. Phys.*, **V12**(1971), 2259; *A. A. Migdal JETP* **V42**(1976), 413, 743; L. P. Kadanoff, *Rev. Mod. Phys.*, **V49**(1977), 267.

[2] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, U. Heller and F. Karsch, *Phys. Lett.*, **140B**(1984), 76.

[3] C. M. Wu and P. Y. Zhao, *Mod. Phys. Lett.* A, **V2**(1987), 113.

[4] N. H. Christ, R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl. Phys.*, **B202**(1982), 89; **B210**(1982), 310; **B210**(1982), 337. R. Friedberg and H. C. Ren, *Nucl. Phys.*, **B235**(FS11) (1984), 310.

[5] 陈天崙、黄五群、沈琴婉,高能物理与核物理,**12**(1988),573;陈天崙、黄五群、金柯、索存川,高能物理与核物理,**13**(1989),188;黄五群、陈天崙,物理学报,V38(1989),659;黄五群、陈天崙,科学通报,V6(1989),615.

[6] R. H. Swendsen, *Phys. Rev.*, **B20**(1979), 2080.

[7] H. Q. Ding, J. Comp. *Phys.*, **67**(1986), 28.

β FUNCTION FOR $O(3)$ SIGMA MODEL ON 2-DIMENSIONAL RANDOM TRIANGLE LATTICE

CHEN TIANLUN

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

ABSTRACT

The β function behavior for $o(3)$ σ model on 2-dimensional random triangle lattice has been studied with an improved Monte Carlo renormalization group method. It agrees with the one calculated in the weak coupling region under two loop approximation. However, when $g>0.8$, it drops down faster due to the higher-order perturbative and nonperturbative contributions.