

Modelos del universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura

Tamé Gonzalez Cruz

República de Cuba - Universidad Central Marta Abreu de Las Villas



Modelos del universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en
Ciencias Pedagógicas

Tamé Gonzalez Cruz

UNIVERSIDAD CENTRAL “MARTA ABREU” DE LAS
VILLAS
FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

**MODELOS DEL UNIVERSO CON INCLUSIÓN DE
CAMPOS ESCALARES E INTERACCIÓN NO
GRAVITATORIA ENTRE LA MATERIA OSCURA
Y LA ENERGÍA OSCURA**

Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en
Ciencias Físicas

Autor: Lic. Tamé González Cruz
Tutor: Dr. Israel Quiros Rodríguez

Villa Clara, Cuba
2006

530.4-Gon-M

Modelos del universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura / Tamé Gonzalez Cruz; Israel Quiros Rodríguez, tutor. -- Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2008. -- ISBN 978-959-16-0803-1. -- 93 pág. -- Universidad Central Marta Abreu de Las Villas. -- Tesis (Doctor en Ciencias Físicas).

1. Gonzalez Cruz, Tamé
2. Quiros Rodríguez, Israel, tutor
3. Ciencias Físicas

Edición: Luz María Rodríguez Cabral

Corrección: Dr. C. Raúl G. Torricella Morales

Diseño de cubierta: Elisa Torricella Ramirez



Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba, 2008

La ***Editorial Universitaria*** publica bajo licencia Creative Commons de tipo Reconocimiento No Comercial Sin Obra Derivada, se permite su copia y distribución por cualquier medio siempre que mantenga el reconocimiento de sus autores, no haga uso comercial de las obras y no realice ninguna modificación de ellas. La licencia completa puede consultarse en:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/ar/legalcode>

Editorial Universitaria

Calle 23 entre F y G, No. 564,

El Vedado, Ciudad de La Habana, CP 10400, Cuba.

e-mail: torri@reduniv.edu.cu

Sitio Web: <http://revistas.mes.edu.cu>

Agradecimientos

A mi Tutor el Dr. Israel Quiros y al Dr. Rolando Cardenas por siempre creer en mi.

A mis padres y hermanas por el apoyo que me brindaron.

A los miembros del Grupo de Cosmología y Gravitación de la UCLV por su ayuda en todo momento.

Índice General

Introducción	1
1 TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD Y EXPANSIÓN DEL UNIVERSO.	6
1.1 Teoría General de la Relatividad	7
1.2 El modelo del Big-Bang.	9
1.3 La Historia Térmica del Universo.	13
1.4 El Modelo de Espacio-Tiempo para el Universo.	14
1.5 Modelos de la Expansión: Modelo LCDM.	15
1.6 El Destino Final de Nuestro Universo.	17
2 TEORÍAS ESCALAR-TENSORIALES DE GRAVITACIÓN.	19
2.1 Transformaciones Conformes de la Métrica: Marcos de Jordan y Einstein. .	22
3 MODELOS DE QUINTAESENCIA.	24
3.1 Soluciones: Modelos con Acoplamiento Mínimo.	26
3.2 Soluciones: Modelos con Acoplamiento No Mínimo.	31
3.2.1 Solución con un Potencial Simple Exponencial.	35
3.2.2 Solución con un Potencial Doble Exponencial.	38
3.2.3 Solución para la Teoría de Brans-Dicke.	42
3.3 Conclusiones Parciales	48
4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES.	50
4.1 Análisis de la estabilidad por la primera aproximación.	51
4.2 Espacio de fase y puntos críticos.	53

4.2.1	Modelos con Acoplamiento Mínimo.	55
4.2.2	Modelos con Acoplamiento No Mínimo.	57
4.3	Problema de la Coincidencia	61
4.4	Conclusiones Parciales	62
5	MODELOS DE ENERGÍA FANTASMA.	64
5.1	Modelos Libres del Problema de Coincidencia.	68
5.1.1	Modelo con el Parámetro de Estado Constante.	69
5.1.2	Modelo con el Parámetro de Estado Dinámico.	71
5.2	Conclusiones Parciales.	74
	CONCLUSIONES	78
	RECOMENDACIONES	80

RESUMEN

En este trabajo se estudian modelos del Universo con inclusión de la energía oscura, tanto del tipo quintaesencia como energía fantasma, en donde se considera interacción adicional (no gravitatoria) entre la energía oscura y el fluido de fondo (básicamente materia oscura). Estos modelos son basados en una Teoría Escalar-Tensorial de gravitación.

En los modelos de quintaesencia se derivan familias de soluciones exactas a las ecuaciones del campo al elegir adecuadamente la dinámica de la expansión del Universo, además se estudia la estabilidad y existencia de las mismas. Se hallan soluciones tanto para acoplamiento mínimo como no mínimo entre la Materia Oscura y la Energía Oscura. Los parámetros libres de los cuales dependen las soluciones halladas se pueden ajustar para que dichas soluciones reproduzcan la data observacional. A pesar que en este caso se derivan soluciones exactas a las ecuaciones del campo cosmológicas con relativa facilidad, no se puede resolver el Problema de la Coincidencia.

En los Modelos con Energía Fantasma se investiga como una posible interacción adicional no gravitatoria entre la Materia Oscura y la Energía Oscura, modifica el Problema de la Coincidencia y, además, permite evadir el evento del Big-Rip, evento catastrófico típico de cosmologías fantasmas.

Todas las universidades de Cuba en una:

EDUNIV
Editorial Universitaria



Introducción

La Cosmología es la ciencia que tiene por objeto el estudio del Universo como un todo. Este conocimiento implica la respuesta a algunas preguntas fundamentales, que se incorporan a su campo: ¿Tuvo el Universo un comienzo, o existió desde siempre? ¿Tendrá fin? ¿Es infinito el espacio? ¿Evoluciona o es estático, inmutable?

Esta ciencia en estos momentos se encuentra en un período excitante de descubrimientos que podría extenderse en los próximos años. En la actualidad gracias a los satélites artificiales dedicados a la observación del cosmos, como el COBE (por su nombre en inglés: Cosmic Background Explorer), el telescopio espacial Hubble y el WMAP (por su nombre en inglés: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), es posible obtener datos precisos para entender el Universo.

En 1998 dos grupos de investigadores, uno dirigido por Saul Perlmutter (Supernova Cosmology Project Collaboration) y el otro por Brian Schmidt (Supernova Search Team Collaboration), de forma independiente descubrieron que nuestro Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada[1].

Los datos de las observaciones han permitido establecer un nuevo paradigma cosmológico. En este nuevo paradigma se ha establecido el contenido material del Universo que observamos hoy.

Es conveniente medir la densidad de energía de los distintos componentes en términos de la densidad de energía crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$, donde $H_0 = (\dot{a}/a)_0$ es la razón de expansión del Universo en el presente. El parámetro adimensional de la densidad de energía $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ nos permite conocer la contribución de los diferentes componentes que tiene nuestro Universo (donde i se utiliza para representar el i -ésimo componente, como por ejemplo materia oscura, radiación, etc.).

Las observaciones conducen a los siguientes resultados:

- Nuestro Universo tiene $0.98 \lesssim \Omega_{total} \lesssim 1.08$. El valor de Ω_{total} puede ser determinado por el espectro angular de anisotropía de la radiación cósmica de fondo [2].
- Las observaciones del deuterio primordial, que se origina en la nucleosíntesis del Big Bang (el cual tuvo lugar cuando el Universo tenía un minuto de vida) así como las observaciones de la radiación cósmica de fondo muestran que la cantidad total de

bariones en nuestro Universo contribuyen como $\Omega_{Bariones} \cong 0.04 - 0.06$ [3]. Estas observaciones toman en consideración todos los bariones, sean luminosos o no, que existen en el presente. De aquí se puede concluir que vivimos en un Universo cuyo contenido material fundamental no es bariónico.

- Las observaciones relacionadas con las estructuras a gran escala así como con su dinámica (curvas de rotación de las galaxias, estimado de la masa de los clusters de galaxias, lentes gravitacionales) sugieren [4] que el universo presenta un componente de materia que no es luminoso (conocido como materia oscura) compuesto por partículas masivas de débil interacción. Este componente contribuye como $\Omega_{MO} \cong 0.20 - 0.35$.
- De todas las observaciones anteriores se puede concluir que existe un componente de densidad de energía que contribuye cerca de un 70% de la densidad crítica. Un análisis de algunas observaciones [5] indican que dicho componente (denominado energía oscura) no se agrupa, tiene presión negativa y contribuye al contenido del Universo como $\Omega_{EO} \cong 0.60 - 0.75$.
- El Universo también contiene radiación ($\Omega_{Rad} \cong 5 \times 10^{-5}$) debido a los fotones de la radiación cósmica de fondo.

Existen muchos modelos los cuales permiten describir la fase actual de expansión acelerada del Universo. Algunos de estos modelos incluyen la energía oscura[6], como causante de la expansión acelerada, y otros modelos no incluyen a la energía oscura. En esta tesis solo se verán algunos de los modelos que incluyen la energía oscura.

Una gran variedad de modelos del Universo que contienen únicamente dos componentes (energía oscura y materia oscura) han sido sugeridos. El más simple de todos es un modelo que contenga Constante Cosmológica o Energía del Vacío cuántico, para representar la energía oscura.

Para este modelo en particular, al considerar la energía oscura como un fluido la expresión del parámetro de estado queda prefijada: $\omega = p/\rho = -1$, donde p y ρ son la presión y la densidad de energía.

A pesar de ser sencillo, este modelo reproduce bien la data observacional [2, 3, 4, 5], pero presenta serios problemas como los que enumeramos a continuación:

- **El Problema de la Constante Cosmológica:** Este problema surge cuando se compara el valor teórico calculado para la constante cosmológica y el valor que se observa. De dicha comparación resulta que existe una diferencia de 123 órdenes de magnitud entre ambos[7].
- **El Problema del Ajuste Fino:** Para poder describir el Universo que observamos hoy la constante cosmológica debe ajustarse en un rango comprendido entre $-10^{-47} < \Lambda < 10^{-47}$.

- **El Problema de la Coincidencia:** Este problema se puede expresar mediante la siguiente pregunta. ¿Por qué las densidades de materia oscura fría y energía oscura se hacen comparables precisamente en la presente etapa de la evolución del universo y no mucho antes o después? [8]

Para tratar de resolver los problemas que presenta el Modelo con Constante Cosmológica en la referencia [9] se propone que la energía oscura no es constante, sino que evoluciona con el tiempo. Para describir la energía oscura los autores proponen un campo de naturaleza escalar. A estos modelos con campos escalares, que representan una constante cosmológica dinámica, se les denomina Modelos de Quintaesencia. Una gran variedad de modelos de quintaesencia han sido estudiados[9, 10].

Al ser la constante cosmológica dinámica, en estos modelos se suaviza y hasta se puede evadir el problema de la constante cosmológica.

En los modelos de Quintaesencia la densidad de energía se define como $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$, donde ϕ representa el campo escalar, $\dot{\phi}^2/2$ es la energía cinética del campo escalar, $V(\phi)$ es el potencial de auto interacción y el punto significa la derivada respecto al tiempo cosmológico.

La presión se define como $p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$, por lo que es conveniente introducir el parametro de estado para la quintaesencia:

$$\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}. \quad (1)$$

De la definición anterior se puede notar que para la quintaesencia el parámetro de estado siempre va a ser mayor o igual que menos uno ($\omega_\phi \geq -1$). Cuando $\omega_\phi = -1$ se recupera la energía de vacío o constante cosmológica.

Si se emplean potenciales atractores, o sea; potenciales para los cuales las condiciones iniciales sobre el campo escalar y sus derivadas no influyen mucho en la evolución actual del universo, el problema del ajuste fino se puede suavizar. Estos modelos de forma general preservan el Problema de la coincidencia[11].

La data observacional reporta que: $-1.62 < \omega_\phi < -0.76$, por lo que se puede apreciar que esta favorece valores del parámetro de estado ω_ϕ menores que -1 [12, 13], región donde los modelos de quintaesencia no son capaces de describir la evolución cósmica. Utilizando campos escalares, si admitimos el signo “errado” de la energía cinética del campo escalar, o sea admitimos campos escalares con energía cinética negativa, entonces el parámetro de estado (1) quedaría de la siguiente forma ($\dot{\phi}^2 \rightarrow -\dot{\phi}^2$):

$$\omega_\phi = \frac{-\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{-\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}, \quad (2)$$

por lo que, como se nota, este es siempre menor que -1 ($\omega_\phi < -1$).

Los campos escalares con energía cinética negativa carecen de significado físico, por lo que a estos modelos se les llamo Modelos con Energía Fantasma. Algunos de estos modelos se pueden encontrar en [14].

El problema mas serio de los modelos con energía fantasma es que si se le asocian partículas a estos campos, o sea, cuando tratamos de formular una teoría cuántica del campo fantasma, el signo errado de la energía cinética provoca que no exista un estado de mínima energía y por tanto esta teoría no tiene un estado básico, por lo que las partículas fantasmas serian muy inestables. El argumento que salva esta situación se basa en considerar a los campos fantasmas como una teoría efectiva, o sea, el limite de bajas energías de una teoría fundamental, por ejemplo, la teoría de cuerdas, que si puede ser cuantizada.

Debido a estos problemas se pudiera cuestionar la utilidad de los modelos con energía fantasma, pero existen razones para no abandonarlos. El primer y principal motivo esta relacionado con la evidencia observacional. Esta favorece valores del parámetro de estado menores que -1 . Por otra parte, en la teoría de cuerdas aparecen de forma natural campos moduli con termino de energía cinética con el signo “errado”, como por ejemplo, los campos de taquiones.

La propiedad mas inusual, desde el punto de vista cosmológico, de los modelos con energía fantasma, es que en un tiempo finito en el futuro, en un universo que se expande, la densidad de energía crece ilimitadamente y junto con ella crece infinitamente el parámetro de Hubble, lo que conduce a una singularidad en el futuro de la expansión cósmica, conocida como singularidad de Big-Rip. Esta singularidad, físicamente, puede interpretarse como que en un tiempo finito en el futuro, la densidad de energía oscura va ser tan intensa que va a ser capaz de destruir todas las estructuras enlazadas que conocemos, desde los cúmulos de galaxias, hasta los átomos y partículas mas pequeñas, en un evento final catastrófico: el gran desgarramiento final del espacio-tiempo (Big Rip).

Los modelos de energía fantasma aun presentan el problema de la coincidencia [11] que es el mas persistente de todos a través de los distintos modelos de energía oscura existentes.

Como este es el problema en común de la mayoría de los modelos de energía oscura; **el motivo de esta investigación** es estudiar este problema desde la perspectiva de modelos con interacción entre la materia oscura y la energía oscura.

El **objetivo** del presente trabajo es:

- Investigar como una posible Interacción adicional no gravitatoria entre la Materia Oscura y la Energía Oscura puede modificar el Problema de la Coincidencia.
- Derivar familias de soluciones exactas a las ecuaciones del campo en los modelos que se proponen y estudiar la estabilidad y existencia de las mismas.
- En los Modelos con Energía Fantasma investigar como una posible Interacción adicional no gravitatoria entre la Materia Oscura y Energía Oscura modifica el evento del Big-Rip.

Las **hipótesis** de las que partimos son las siguientes:

- Si se selecciona un adecuado término de interacción entre la materia oscura y la energía oscura se puede resolver el Problema de la Coincidencia y además se puede evitar el Big-Rip en modelos con energía fantasma.
- Si se elije adecuadamente la dinámica de la expansión se pueden encontrar familias de soluciones exactas a las ecuaciones del campo con relativa facilidad.

La novedad de esta investigación radica en el estudio de modelos del universo con inclusión de energía oscura (quintaesencia, energía fantasma), en donde es posible interacción adicional no gravitatoria entre la energía oscura y el fluido de fondo (básicamente materia oscura). Estos modelos son basados en una teoría escalar- tensorial de gravitación.

Todo modelo cosmológico debe ajustarse al principio de Copernico, o principio cosmológico: “El universo en la gran escala es homogéneo e isotrópico”. Por ese motivo, como en la mayoría de las investigaciones sobre la evolución del universo en la gran escala, que son basadas en teorías métricas de gravitación, se eligen espacio-tiempos tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que reflejan estas simetrías. En coordenadas esféricas el elemento de línea se puede expresar como:¹

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3)$$

donde t es el tiempo cosmológico, $a(t)$ es el factor de escala (magnitud que permite dar una medida de la evolución de las distancias entre dos puntos fijos en una sección espacial dada), k es la curvatura de la sección espacial, r la coordenada radial, θ la coordenada angular azimutal y φ la coordenada angular polar. Utilizamos el sistema de unidades donde $8\pi G = c = 1$.

La Tesis esta estructurada de la siguiente forma: En los capítulos (1) y (2) se hace una breve revisión acerca de la Relatividad General, la Cosmología y los Campos Escalares, en el capítulo (3) se derivan soluciones exactas a modelos con quintaesencia, en el capítulo (4) se hace un estudio de la estabilidad y existencia de las soluciones halladas y además se hace un estudio dinámico que da la posibilidad de encontrar modelos en donde se pueda explicar el Problema de la Coincidencia. Finalmente en el capítulo (5), se proponen modelos con energía fantasma, los cuales están libres del problema de la coincidencia y, además, no manifiestan la singularidad de Big-Rip.

¹Ver capítulo I para más detalles.

Capítulo 1

TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD Y EXPANSIÓN DEL UNIVERSO.

La observación del cielo nocturno ha sido uno de los mayores estímulos intelectuales de todos los tiempos. Este maravilloso espectáculo ha cautivado la mirada de muchos y ha suscitado preguntas acerca de nuestro universo, su origen y su evolución futura. No es sorprendente que al pasar de los años las distintas civilizaciones y culturas que han habitado en nuestro planeta hayan propuesto sus propias cosmologías.

La cosmología es una ciencia que depende de la observación. El desarrollo que ha alcanzado la ciencia y la tecnología en la actualidad ha facilitado la construcción de grandes telescopios y satélites que permiten estudiar los objetos más remotos de nuestro espacio. Estos adelantos han permitido que en los últimos 80 años esta ciencia haya evolucionado grandemente, tanto en la parte observacional como en la teórica[15].

Un ejemplo de efectos físicos que se observan en el laboratorio que pueden ser usados para estudiar objetos astronómicos es el del espectro de la luz. La frecuencia de la luz que es emitida por una estrella en movimiento aparece aumentada o disminuida ante el observador, según si la estrella se acerca o se aleja, respectivamente. El corrimiento de la frecuencia, o efecto Doppler, es proporcional a la velocidad relativa entre el emisor y la fuente, por lo tanto puede ser usado para medir la velocidad de un objeto remoto. Este principio fue utilizado por el astrónomo norteamericano Vesto Slipher a partir de 1912 y más tarde por Hubble, para medir la velocidad de galaxias lejanas. Las observaciones de Edwin Hubble en el 1935 señalaron que casi todas las galaxias muestran un fenómeno que fue designado con la expresión “corrimiento hacia el rojo”. Esto significa que el color de la luz que recibimos de ellas es más rojizo que cuando salió de su fuente. Este descubrimiento mostro, por primera vez, que nuestro universo esta en un estado de continua expansion.

1.1 Teoría General de la Relatividad

En 1905 Albert Einstein publica su conocida “Teoría Especial de la Relatividad” donde esclarecía la interconexión entre el espacio y el tiempo y deducía las consecuencias físicas que se derivaban de ello.

Sin embargo no fue hasta 1907 (dos años después) que el matemático alemán Hermann Minkowski demostró que las ideas de Einstein podían ser expresadas geométricamente sólo si se consideraba que el espacio físico poseía cuatro dimensiones: una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales.

La idea matemática fue posteriormente utilizada por Einstein quien, a través de su amigo y compañero de la Universidad Marcell Grossmann, ya conocía sobre la existencia de la geometría de Riemann. Considerando geometría de Riemann en espacios de cuatro dimensiones, Einstein derivó, en 1915, las leyes que rigen la gravitación y que generalizan la ley de Newton para campos gravitatorios intensos. La idea básica es que la gravitación debe entenderse como curvatura del espacio-tiempo de cuatro dimensiones avizorado por Minkowski.

La relatividad general está basada en un conjunto de principios fundamentales:

- El principio general de la relatividad: Las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores (inerciales o no).
- El principio general de covariancia: Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
- El movimiento inercial se realiza a través de trayectorias geodésicas.
- El principio de invariancia local de Lorentz: Las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales.
- Curvatura del espacio tiempo. Esto permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales en un espacio tiempo curvado.
- La curvatura del espacio-tiempo está creada por la interacción entre la masa y la energía con en el espacio tiempo. La curvatura del espacio tiempo puede calcularse a partir de la densidad de la materia y energía al igual que de las ecuaciones de campo de Einstein.

El principio de equivalencia que había guiado el desarrollo inicial de la teoría es una consecuencia del principio general de la relatividad y del principio del movimiento inercial sobre trayectorias geodésicas.

Una de las principales consecuencias de la gravedad es su manifestación a través de la geometría local del espacio-tiempo. Las bases matemáticas de la teoría se remontan

a los axiomas de la geometría euclídea y los muchos intentos de probar, a lo largo de los siglos, el quinto postulado de Euclides, que dice que las líneas paralelas permanecen siempre equidistantes, y que culminaron con la constatación por Bolyai y Gauss de que este axioma no es necesariamente cierto. Las matemáticas generales de la geometría no euclidiana fueron desarrolladas por el discípulo de Gauss, Riemann, pero no fue hasta después de que Einstein desarrolló la teoría de la Relatividad especial que la geometría no euclidiana del espacio y el tiempo fue conocida.

Gauss demostró que no hay razón para que la geometría del espacio deba ser euclidiana, lo que significa que si un físico pone un patrón, y un cartógrafo permanece a una cierta distancia y se mide su longitud por triangulación basada en la geometría euclidiana, entonces no está garantizado que sea dada la misma respuesta si el físico porta el patrón consigo y mide su longitud directamente. Existen medidas equivalentes que deben detectar la geometría no euclidiana del espacio-tiempo directamente, por ejemplo el experimento de Pound-Rebka (1959) detectó el cambio en la longitud de onda de la luz de una fuente de cobalto surgiendo por 22.5 metros contra la gravedad en un local del Laboratorio de Física Jefferson en la Universidad de Harvard.

Matemáticamente, Einstein utilizó como modelo del espacio-tiempo, una variedad pseudo-Riemanniana, y sus ecuaciones de campo establecen que la curvatura de la variedad en un punto está relacionada directamente con el tensor de energía en dicho punto; dicho tensor es una medida de la densidad de materia y energía. La ecuación de campo posible no es única, habiendo posibilidad de otros modelos sin contradecir la observación.

Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g_{ab}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ab}, \quad (1.1)$$

donde R_{ab} es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de curvatura de Ricci, g_{ab} es el tensor métrico, Λ es la constante cosmológica, T_{ab} es el tensor de energía, c es la velocidad de la luz y G es la constante gravitatoria universal, de forma similar a lo que ocurre en la gravedad newtoniana. El tensor métrico describe la métrica de la variedad y es un tensor simétrico 4 x 4, por lo que tiene 10 componentes independientes. Dada la libertad de elección de las cuatro coordenadas espaciotemporales, las ecuaciones independientes se reducen a seis.

Las ecuaciones de Einstein (1.1) relacionan la curvatura del espacio (parte izquierda de la ecuación) con la masa-energía (parte derecha). Una masa cualquiera curva el espacio y esta curvatura modula la trayectoria de cualquier partícula en el espacio curvado alrededor de la masa.

1.2 El modelo del Big-Bang.

En la segunda década del siglo XX, la teoría de Albert Einstein sobre la relatividad general no admitía soluciones estáticas (es decir, el universo debe estar en expansión o en reducción) un resultado que él mismo consideró equivocado, por lo que trató de corregirlo agregando la constante cosmológica. El primero en aplicar formalmente la relatividad a la cosmología sin la constante cosmológica fue Alexander Friedman cuyas ecuaciones describen el universo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, que puede expandirse o contraerse. Entre 1927 y 1930, Georges Lemaître obtuvo independientemente las mismas ecuaciones y propuso, sobre la base de la recesión de las nebulosas espirales, que el universo se inició con la explosión de un átomo primordial, lo que más tarde fue llamado el Big Bang.

Las observaciones realizadas por Edwin Hubble sirvieron de base para comprobar la teoría de Lemaître. Hubble probó que las nebulosas espirales eran galaxias y midió sus distancias observando las estrellas variables cefeidas que se encontraban en galaxias distantes. Descubrió que las galaxias se alejan entre ellas a velocidades (relativas a la tierra) directamente proporcionales a su distancia. Este hecho se conoce ahora como la Ley de Hubble. El mismo Hubble no estaba muy seguro de cómo interpretar sus observaciones y, poco dispuesto al principio a arribar a la conclusión de un universo en expansión, llamó al fenómeno del “corrimiento hacia el rojo” como “aparentes desplazamientos de velocidad”. Poco después, Hubble abandonó parcialmente sus reservas y concluyó que la mayoría de las galaxias se estaban alejando de nosotros. Es así que se acuñó la expresión “el universo en expansión”.

Si hoy el universo está en expansión, entonces, en el pasado, el universo debe haber sido más pequeño. Retrocediendo lo suficiente en el pasado, el universo tiene que haber tenido un tamaño mínimo del que se expandió. Parecía una conclusión lógica decir que el universo tuvo un principio en el tiempo. Pero la respuesta a la pregunta acerca de cuánto tiempo hace que ocurrió este principio no se dio tan fácilmente. No sólo era necesario medir la velocidad de expansión actual sino también su variación por la distancia.

El año 1948 George Gamow (1904-1968), planteó que el Universo se creó a partir de una gran explosión (Big Bang). Aun cuando surgieron con los años otras teorías acerca de la historia temprana del universo, el mundo científico en general adoptó la teoría del Big Bang, después del descubrimiento de cierta evidencia importante en 1965.

El modelo del Big Bang, teoría hoy ampliamente aceptada, sostiene que el universo comenzó a existir bruscamente, hace unos 15.000 millones de años, en una gigantesca explosión. La expansión que hoy observemos no es sino un vestigio o rastro de la explosión primordial. Se piensa que en sus fases tempranas, este modelo consistía en un gas muy caliente y muy denso de partículas elementales primero y después de hidrógeno y helio. En dicho gas la luz emitida por una partícula no podía viajar lejos sin que se encontrara con otra partícula, la que la afectaría de tal manera que cambiaran su frecuencia y dirección. De manera que si hubiera sido posible mirar el universo primitivo desde afuera,

uno habría podido ver solamente sus capas exteriores; el universo no era transparente. Este modelo se sustenta en la teoría de la relatividad general que, como sabemos, es uno de los pilares del modelo: las ecuaciones predicen una expansión del universo desacelerada por la gravedad. Las evidencias empíricas o los datos de las observaciones que sustentan este modelo son: En primer lugar, la observación de la expansión del universo expresada en la ley de Hubble; y en segundo lugar, dos predicciones hoy comprobadas, la radiación cósmica de fondo y la abundancia relativa de elementos primordiales como por ejemplo el helio.

Como resultado de la continua expansión del universo, eventualmente su densidad disminuyó lo suficiente como para permitir que la radiación emitida por una partícula viajara a través de casi todo el universo antes de encontrarse con otra partícula. En ese momento, el universo llegó a ser transparente. Esta situación había sido predicha por Gamow. El y sus colaboradores habían calculado que la radiación emitida en esa época debería ser capaz de llegar a nosotros hoy sin modificaciones y de esa manera informarnos acerca de la condición del universo en ese tiempo.

Entonces, en 1965, dos ingenieros en electrónica que trabajaban para la compañía telefónica Bell descubrieron algo inesperado. Percibieron cierto ruido extraño que llegaba a la antena de su radio y, después de analizarlo, concluyeron que provenía de una fuente de radiación que era uniforme en todo el cielo y que tenía una temperatura de sólo 3K. Pronto se supuso que esta era la radiación emitida en la época cuando el universo se tornó transparente. Este descubrimiento le dio un fundamento fuerte a la teoría del Big Bang y convenció a la mayoría de los cosmólogos acerca de su validez.

Esta radiación CMB (en inglés, Cosmic Microwave Radiation, o sea radiación de micro-onda cósmica de fondo) parecía tener la misma intensidad en todas las direcciones. Esto significaba que se originó de distintos lugares a la misma temperatura y densidad, lo cual era un problema. ¿Cómo se pudieron formar las actuales estructuras del universo (estrellas, galaxias, súper grupos de galaxias) en semejante medio uniforme? Esta estructura representa heterogeneidades que deberían haber estado presentes desde una fecha temprana ya que una vez que un medio es completamente homogéneo es imposible introducir heterogeneidades en él sin recurrir a una influencia exterior.

Como existían todas estas conclusiones tempranas en base a observaciones terrestres, con todas sus incertidumbres introducidas por el paso de la radiación a través de la atmósfera terrestre, se hicieron planes para lanzar un satélite que pudiera observar desde el espacio y llegar a una exactitud mayor. En 1990 se lanzó el COBE (Cosmic Background Explorer Satellite, o satélite explorador del fondo cósmico). En 1992 se analizaron los resultados y se detectaron pequeñas diferencias de temperatura mirando en distintas direcciones. Estas pequeñas fluctuaciones de temperatura, y por lo tanto de densidad, parecieron ser suficientes para explicar la formación de galaxias y otras estructuras. Como resultado, la gran mayoría de los cosmólogos aceptó la teoría del Big Bang en sus lineamientos generales y, con la ayuda de los medios de comunicación, mucha otra gente también.

Algunos de los problemas y enigmas que presenta este modelo son:

a) El problema del horizonte

El problema del horizonte, también llamado problema de la causalidad, resulta del hecho de que la información no puede viajar más rápido que la luz, de manera que dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que la velocidad de la luz multiplicada por la edad del universo no pueden estar causalmente conectadas. La isotropía observada de la radiación de fondo de microondas (CMB) es en este aspecto problemática debido a que el tamaño del horizonte de partículas en ese tiempo corresponde a un tamaño de cerca de dos grados en el cielo. Si el universo hubiera tenido la misma historia de expansión desde la época de Planck, no habría mecanismo que pudiera hacer que estas regiones tuvieran la misma temperatura.

Esta aparente inconsistencia se resuelve con la teoría inflacionista, propuesta por Alan H. Guth a principios de los años 80, en la cual un campo de energía escalar isotrópico domina el universo. Durante la inflación, el universo sufre una expansión exponencial, y regiones que se afectan entre ellas se expanden más allá de sus respectivos horizontes. El principio de incertidumbre de Heisenberg predice que durante la fase inflacionista habrá fluctuaciones primordiales, que serán amplificadas hasta la escala cósmica. Estas fluctuaciones sirven de semilla para toda la estructura actual del universo. Al pasar la inflación, el universo se expande siguiendo la ley de Hubble y las regiones que estaban demasiado lejos para afectarse entre ellas vuelven al horizonte. Esto explica la isotropía observada de la CMB. La inflación predice que las fluctuaciones primordiales son casi invariantes según la escala y que tienen una distribución normal o gaussiana, lo cual ha sido confirmado con precisión por medidas de la CMB.

b) El problema de la planitud.

El problema de la planitud (flatness en inglés) es un problema observacional que resulta de las consecuencias que la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker tiene para con la geometría del universo. En general, se considera que existen tres tipos de geometrías posibles para nuestro universo según su curvatura: geometría hiperbólica, geometría euclidiana o plana y geometría elíptica. Dicha geometría viene determinada por la cantidad total de densidad de energía del universo (medida mediante el tensor de energía momento).

Siendo ρ la densidad de energía medida observacionalmente y ρ_c la densidad crítica se tiene que para las diferentes geometrías las relaciones entre ambos parámetros han de ser las que siguen:

- Hiperbólico: Si se cumple que $\rho < \rho_c$.
- Plano: Si se cumple que $\rho = \rho_c$.
- Elítico: Si se cumple que $\rho > \rho_c$.

Se ha medido que en los primeros momentos del universo su densidad tuvo que ser 10^{-15} veces (una milbillonésima parte) de la densidad crítica. Cualquier desviación mayor hu-

biese conducido a una muerte térmica o un Big Crunch y el universo no sería como ahora. La solución a este problema viene de nuevo de la teoría inflacionaria. Durante el periodo inflacionario el espacio-tiempo se expandió tan rápido que provocó una especie de estiramiento del universo acabando con cualquier curvatura residual que pudiese haber. Así la inflación pudo lograr que nuestro universo fuese plano, de ahí el nombre de “planitud”.

c) Edad de los cúmulos globulares.

A mediados de los 90, las observaciones realizadas de los cúmulos globulares parecían no concordar con la Teoría del Big Bang. Las simulaciones realizadas por un ordenador, de acuerdo con las observaciones de las poblaciones estelares de cúmulos de galaxias, sugirieron una edad de cerca de 15.000 millones de años, lo que entraba en conflicto con la edad del universo, estimada en 13.700 millones de años. El problema quedó resuelto a finales de esa década, cuando las nuevas simulaciones realizadas, que incluían los efectos de la pérdida de masa debida a los vientos estelares, indicaron que los cúmulos globulares eran mucho más jóvenes. Quedan aún en el aire algunas preguntas en cuanto a con qué exactitud se miden las edades de los cúmulos, pero está claro que éstos son algunos de los objetos más antiguos del universo.

d) Monopolos magnéticos.

La objeción de los monopolos magnéticos fue propuesta a finales de la década de 1970. Las teorías de la gran unificación predicen defectos topológicos en el espacio que se manifestarían como monopolos magnéticos encontrándose en el espacio con una densidad mucho mayor a la observada. De hecho, hasta ahora, no se ha dado con ningún monopolo. Este problema también queda resuelto mediante la inflación cósmica, dado que ésta elimina todos los puntos defectuosos del universo observable de la misma forma que conduce la geometría hacia su forma plana. Es posible que aun así pueda haber monopolos pero se ha calculado que apenas habría uno por cada universo visible. Una cantidad ínfima.

e) Materia oscura (MO).

En las diversas observaciones realizadas durante las décadas de los 70 y 80 (sobre todo las de las curvas de rotación de las galaxias) se mostró que no había suficiente materia visible en el universo para explicar la intensidad aparente de las fuerzas gravitacionales que se dan en y entre las galaxias. Esto condujo a la idea de que hasta un 90% de la materia en el universo no es materia común o bariónica sino materia oscura. Además, la consideración de que el universo estuviera compuesto en su mayor parte por materia común llevó a predicciones que eran fuertemente inconsistentes con las observaciones. En particular, el universo es mucho menos “inhomogéneo” y contiene mucho menos deuterio de lo que se puede considerar sin la presencia de materia oscura. Mientras que la existencia de la materia oscura era inicialmente polémica, ahora es una parte aceptada de la cosmología estándar, debido a las observaciones de las anisotropías en el CMB, la dispersión de las velocidades en los cúmulos de galaxias y en las estructuras a gran escala, los estudios de las lentes gravitacionales y a las medidas por medio de rayos x de los cúmulos de galaxias. La materia oscura se ha detectado únicamente a través de su huella gravitacional; no se ha

observado en el laboratorio ninguna partícula que se le pueda corresponder. Sin embargo, hay muchos candidatos a materia oscura en física de partículas (como, por ejemplo, las partículas pesadas y neutras de interacción débil o WIMPS (Wikly interactive massive particles)), y se están llevando a cabo diversos proyectos para detectarla. Existen varios tipos de materia oscura: la fría, que es la materia que al desprenderse de su interacción con el resto de la materia es lo suficientemente fría para moverse en esos momentos a velocidades lejanas de la luz, y la caliente, que es la materia que al desprenderse viaja a velocidades cercanas a la de la luz.

f) Energía oscura (EO).

En los años 90, medidas detalladas de la densidad de masa de la energía del universo revelaron que ésta sumaba en torno al 30% de la densidad crítica. Puesto que el universo es plano, como indican las medidas del fondo cósmico de microondas, quedaba un 70% de densidad de energía sin contar. Este misterio aparece ahora conectado con otro: las mediciones independientes de las Supernovas del Tipo Ia han revelado que la expansión del universo experimenta una aceleración de tipo no lineal, en vez de seguir estrictamente la Ley de Hubble. Para explicar esta aceleración, la relatividad general necesita que gran parte del universo consista en un componente energético con gran presión negativa. Se cree que esta energía oscura constituye ese 70% restante. Su naturaleza sigue siendo uno de los grandes misterios del Big Bang. Entre los candidatos posibles se incluyen: una constante cosmológica, un campo escalar (quintaesencia), un campo fantasma, defectos topológicos, etc. Actualmente se están realizando observaciones que podrían ayudar a aclarar este punto.

1.3 La Historia Térmica del Universo.

Poco después del Big-Bang, la materia se encontraba en forma de un gas muy caliente. Esta gran explosión calentó toda la materia hasta temperaturas de millones de millones de grados. La temperatura de este gas era tan alta, el gas era tan caliente, que todas las partículas elementales estaban separadas en sus partes fundamentales. La energía cinética del gas era tan alta que no permitía que estas partículas se unieran para formar algún tipo de partícula compuesta. Pero al mismo tiempo esta explosión causó que toda la materia saliera fluyendo en todas direcciones. Esto es lo que se conoce como expansión del Universo.

Al terminar este periodo inflacionario cósmico, una oleada de energía permitió que partículas y antipartículas pudieran tener una existencia independiente. Fue prácticamente la inflación cósmica la que creó toda la estructura másica actual del universo. En esta sopa primordial se fue enfriando conforme continuaba la expansión. En principio todas las partículas se movían a velocidades cercanas a las de la luz, incluso las más pesadas, lo que provocaba que las partículas no pudieran unirse con otras para formar compuestos.

Cuando la temperatura descendió unos mil millones de grados, los protones y neutrones

comenzaron a combinarse para producir hidrógeno pesado, que contiene un protón y un neutrón. Estos núcleos se combinaron con más protones y neutrones para formar núcleos de helio, que contienen dos protones y dos neutrones, y también pequeñas cantidades de elementos más pesados, litio y berilio. Los restantes neutrones se habrían desintegrado en protones, que son los núcleos de los átomos de hidrógeno ordinario. Esta es la época de la Nucleosíntesis Primordial donde la cantidad de núcleos que se forman son aproximadamente de 74% de Hidrógeno y de un 24% de Helio.

Al continuar la expansión la temperatura fue disminuyendo aún más, conforme a esto también disminuía la temperatura de los fotones, hasta que estos fueron capaces de solo alterar la trayectoria de las partículas más ligeras, es decir, los electrones. Pero al bajar aun más la temperatura, la energía de los fotones ya no fue capaz de alterar nada, es decir ellos ya no interactuaban directamente con la materia por lo que comenzaron a viajar libremente por el Universo. Este momento es conocido como la época de Recombinación. Después, durante el siguiente millón de años, el universo habría continuado expandiéndose, sin que ocurriese mucho más. Finalmente, una vez que la temperatura hubiese descendido a unos pocos miles de grados, los electrones y núcleos habrían comenzado a combinarse para formar átomos. El Universo seguía expandiéndose y enfriándose, pero en regiones más densas, la expansión habría sido retardada por la atracción gravitatoria, hasta detenerla y estas regiones habrían empezado a colapsar nuevamente, el tirón gravitatorio debido a la materia de afuera de estas regiones, provocó que estas comenzasen a girar lentamente. A medida que la región colapsante se hiciese más pequeña, daría vueltas más rápido, de este modo habrían nacido las galaxias giratorias en forma de disco.

Con el tiempo, el gas de hidrógeno y helio de las galaxias se separó en nubes más pequeñas que comenzaron a colapsarse debido a su propia gravedad, la temperatura aumentaría y se iniciaron las fusiones nucleares. Las reacciones convertían el hidrógeno en helio y se desprendía calor, así se formaron estrellas como nuestro Sol, constituyendo centros de sistemas planetarios solares. La mayor parte del gas de la nube forma el Sol y otra cantidad más pequeña junto con elementos mas pesados se acumularon juntos para formar los cuerpos que ahora giran alrededor del Sol, como los planetas.

1.4 El Modelo de Espacio-Tiempo para el Universo.

Acorde con la Teoría General de la Relatividad (TGR) el espacio y el tiempo son ahora entidades indistinguibles. Por lo que podemos definir la distancia entre dos puntos cercanos en 4d a través del elemento de línea:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.2)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\vartheta^2$. Visto de esta manera, el espacio-tiempo admite ser “rebanado” en cortes espaciales perpendiculares a la dirección del tiempo cosmológico t , por

lo que k representa la curvatura de cada corte espacial, homogéneo e isotrópico.

En el elemento de línea (1.2) es escogido de esta forma debido al principio cosmológico, el Universo visto por un observador es Homogéneo e Isótropo, y al hecho de que ya se rompió la simetría entre las coordenadas espaciales y la temporal.

Las derivadas parciales de la métrica respecto a las coordenadas permiten determinar los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{an}(g_{bn,c} + g_{cn,b} - g_{cb,n}) \quad (1.3)$$

donde $g_{bn,c} = \partial g_{bn}/\partial x^c$. Con ayuda de estos símbolos se puede expresar la derivada covariante de un vector arbitrario V_b , como $\nabla_a V_b = \partial V_b/\partial x^a - \Gamma_{ab}^n V_n$. La derivada covariante del tensor métrico es nula: $\nabla_a g_{bc} = 0$. Esta es la propiedad fundamental de la geometría de Riemann sobre la cual se sienta la TGR. A partir de la métrica y sus derivadas se pueden construir otros objetos covariantes de la geometría de Riemann como, por ejemplo, el tensor de Ricci: $R_{ab} = \Gamma_{ab,n}^n - \Gamma_{nb,a}^n + \Gamma_{nm}^n \Gamma_{ab}^m - \Gamma_{am}^n \Gamma_{nb}^m$, que define las propiedades de curvatura del espacio-tiempo conjuntamente con el escalar de curvatura: $R = g^{ab} R_{ab}$.

La generalización de la ley de conservación de los momentos y la energía, en forma covariante se puede escribir como:

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (1.4)$$

1.5 Modelos de la Expansión: Modelo LCDM.

Acorde con la cosmología moderna nuestro Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada y además casi todo el contenido material del Universo esta formado básicamente por una tercera parte de Materia Oscura Fría (MOF), en forma de polvo, y dos terceras partes en forma de un fluido con presión negativa y semejante en magnitud a su densidad de energía, la denominada Energía Oscura (EO).

Uno de los modelos más aceptados en la actualidad es el modelo LMOF (Lambda Materia Oscura Fría). Este es un modelo donde se considera que el termino Lambda (Λ , constante cosmológica), representa la energía oscura.

Consideraremos un modelo de Universo FRW, homogéneo e isótropo y además, por sencillez y porque la data observacional así lo señala, consideraremos solo el caso plano ($k = 0$ en la ecuación 1.2). Bajo estas condiciones, la métrica del espacio-tiempo puede escribirse:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ik}dx^i dx^k, \quad (1.5)$$

donde los índices latinos $i, k = 1, 2, 3$ son los índices espaciales y δ_{ik} es la delta de Kronecker. El Universo esta lleno de MOF en forma de polvo y de un fluido de vacío (constante cosmológica). Para este modelo la ecuación de Friedmann (componente 0,0 de la ecuación 1.1) se puede escribir como:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{8 \pi G}{3} \rho_{mof} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.6)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo cosmológico, ρ_{mof} es la densidad de energía de la MOF y la constante cosmológica se relaciona con la densidad de energía del vacío como: $\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

La componente i,k de la ecuación 1.1 se denomina ecuación de Raychaudhuri:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4 \pi G}{3} \rho_{mof} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.7)$$

Se nota que la constante cosmológica da lugar a una fuerza repulsiva que puede contrarrestar la fuerza atractiva de la gravedad generada por la MOF. La ecuación de continuidad (componente 0 de la ecuación 1.4) se escribe como:

$$\dot{\rho}_{mof} + H(\rho_{mof} + P_{mof}) = 0. \quad (1.8)$$

Las ecuaciones 1.6 y 1.7 no son independientes. En realidad aquí tenemos dos ecuaciones independientes, por ejemplo, 1.6 y la ecuación de continuidad (1.8), y tres incógnitas: a , ρ_{mof} y P_{mof} , por lo que es necesario, además, proponer una ecuación de estado que relacione a ρ_{mof} y P_{mof} .

El fluido de vacío viola la conocida condición fuerte de energía ($\rho + 3P \geq 0$), toda vez que $\rho_{vac} + 3P_{vac} = -2\rho_{vac} < 0$.

Esta es la propiedad del modelo que permite a la constante cosmológica describir a la energía oscura, como un fluido de vacío con presión negativa igual en magnitud a su densidad de energía.

La idea física de este modelo esta basada en el hecho que después del desacople materia-radiación, la densidad de MOF domina la composición del universo y la expansión es desacelerada. En la medida que la expansión avanza la densidad de MOF decae como $\rho_{mof} \propto a^{-3}(t)$, mientras que la densidad de vacío, que es muy pequeña, permanece constante. Llegando el momento a partir del cual $\rho_{mof} < 2\rho_{vac} = \Lambda/4\pi G$, la expansión se torna acelerada. Esto esta de acuerdo con las observaciones que plantean que la expansión fue desacelerada hasta recientemente (para corrimientos al rojo de aproximadamente 0.5) cuando ocurre una transición a una fase acelerada.

Al resolver las ecuaciones del campo se obtiene la siguiente expresión para el factor de escala:

$$a(t) \propto \sinh^{2/3} \left[\sqrt{\frac{3\Lambda}{4}} t \right] \quad (1.9)$$

Esta expresión se interpola perfectamente entre un universo dominado por materia en el pasado ($a(t) \propto t^{2/3}$) y uno dominado por EO en el futuro.

A pesar de ser uno de los modelos que mejor se ajusta a la data observacional este modelo presenta algunas deficiencias:

a) El problema de la constante cosmológica

Existe una notable discrepancia de 123 ordenes de magnitud entre el valor calculado de la energía de vacío ($\langle \rho_{vacio} \rangle \propto 10^{76} \text{ GeV}^4$) con el valor observado ($\rho_{vacio} \propto 10^{-46} \text{ GeV}^4$).

b) El problema del ajuste fino.

La constante cosmológica debe ser ajustada de tal forma que su valor este en el intervalo ($-10^{-47} < \Lambda < 10^{-47}$). Si su valor inicial se sale de ese pequeño intervalo el universo no será como lo observamos hoy. Valores de Λ menores que el límite inferior implicaría que el Universo recolapse 1.6 GigaAños después del Big-Bang, un período muy corto para que se formen las galaxias. Valores mayores que el límite superior implican que el Universo comenzó a acelerarse mucho antes de la época actual, inhibiendo de esta forma la formación de estructura.

c) El problema de la coincidencia.

Muy asociado al problema anterior y consiste básicamente en la siguiente pregunta ¿Será una coincidencia que la equipartición entre la densidad de MOF y de EO ocurrió en una época reciente?

1.6 El Destino Final de Nuestro Universo.

El modelo del Bin Bang predice que el destino del Universo tomará uno de dos caminos: volverá a colapsar en un Big Crunch (el Universo se expandiría hasta alcanzar un tamaño máximo a un tiempo finito en el futuro y luego se contraería hasta acabar de nuevo en un punto), o se expandirá por siempre hacia un estado infinitamente diluido.

Una tercera posibilidad ha sido estudiada últimamente: la expansión del universo ocurre a un ritmo súper acelerado, de tal forma que en un tiempo finito en el futuro, todas las estructuras enlazadas se separan y el universo literalmente se “despedaza” en un evento catastrófico denominado Big Rip.

Las galaxias, estrellas, planetas, poco a poco al principio y después muy rápidamente, se separan unas de otras, empezando por los objetos más lejanos, unos tras otros se vayan perdiendo más allá de nuestro horizonte.

Cerca ya del Big Rip, los mismos átomos y partículas elementales se convertirían en objetos cosmológicos y sufrirían la gran separación. Finalmente, en el momento del Big Rip, nada quedaría: sería el fin del universo y de todo lo que contiene.

La historia que condujo finalmente a esta descripción catastrófica del fin del mundo comenzó con el descubrimiento de que la expansión de nuestro Universo se estaba acelerando. Este descubrimiento no implicaba necesariamente nada parecido al Big Rip, sino que podía perfectamente dar lugar a una expansión acelerada eterna o incluso limitada a un

cierto periodo, como ya ocurrió con la inflación.

De hecho, la primera interpretación del fenómeno observado consistió en recurrir a la llamada constante cosmológica, la energía de vacío: debido a las peculiaridades de la teoría cuántica, lo que tradicionalmente se entendía como vacío está lleno de objetos submicroscópicos en continua creación y aniquilación, que existen durante un tiempo lo suficientemente corto como para no poder ser observados. Pues bien, la energía de vacío, ya considerada por Einstein, puede generar efectivamente una expansión acelerada eterna.

Sin embargo, esta interpretación no es sino un caso particular de otra más general en la que el vacío posee una densidad de energía (energía por unidad de volumen) y una presión que están mutuamente relacionadas a través de un parámetro constante, por lo que se denomina ecuación de estado.

La constante cosmológica de Einstein corresponde al caso particular en el que el parámetro vale -1 . No obstante, dicho parámetro puede tomar otros valores. En realidad, los últimos datos de las observaciones permiten valores entre -1.62 y -0.74 para este parámetro. Si este parámetro resultara ser mayor o igual que -1 (si es mayor que -1 la energía oscura sería quintaesencia y si fuera -1 sería constante cosmológica) estaríamos en presencia de un Universo que se expande de forma acelerada eternamente.

El problema aparece para aquellos valores del parámetro menores que -1 no excluidos por las observaciones. Para cualquiera de tales valores, por muy próximo a -1 que sea, deberemos enfrentarnos con el fenómeno Big Rip y con la llamada “energía fantasma” (es decir, una energía de vacío para la que la suma de la densidad de energía más la presión da un valor negativo y, por ello, permite la existencia de objetos patológicos en el Universo, tales como agujeros de gusano).

En tal caso, y dependiendo de cuanto menor que -1 fuera el parámetro de estado y del tamaño del Universo al iniciarse la expansión acelerada, tendrían nuestros descendientes en un futuro más o menos lejano, pero siempre finito, que enfrentarse al Big Rip.

Las observaciones actuales han predicho que la constante cosmológica de Einstein es la que más se adapta a estos datos de todas las teorías sobre el fin del universo. Se ha encontrado una semipermanente forma de energía oscura. Si está cambiando, lo hace muy lentamente.

A pesar de que los nuevos resultados apoyan la predicción de Einstein, es bueno tener en cuenta alguna de las teorías alternativas sobre el fin del universo. La información específicamente deja abierta la posibilidad de que la fuerza antigravitatoria eventualmente se vuelva más fuerte y destruya los planetas, las estrellas e incluso los átomos en un Big Rip.

Capítulo 2

TEORÍAS ESCALAR-TENSORIALES DE GRAVITACIÓN.

La Teoría General de la Relatividad (TGR) de Einstein es una teoría geométrica del espacio-tiempo. Se basa fundamentalmente en el tensor métrico del campo. Por lo que es conocida como una Teoría Tensorial. La TGR tiene muchas teorías alternativas por diferentes razones y una de estas es la Teoría Escalar-Tensorial (TET). En esta teoría no solo se combinan dos tipos de campo, el campo escalar y el tensor métrico, sino que se construye a partir de fundamentos sólidos de la TGR en donde el campo escalar juega un papel importante, específicamente debido a que esta acoplado de forma no mínima.

El origen de estas teorías se debe al esfuerzo de varios científicos por unificar el campo gravitatorio con los demás campos fundamentales. Los principales intentos para lograr esta unificación fueron incorporando a estos otros campos un marco geométrico adicional al que ya tenían, apareciendo múltiples dimensiones del espacio tiempo. Esta geometría adicional reside en una o más dimensiones extra que están compactadas dentro el espacio de cuatro dimensiones. Los trabajos más conocidos en la bibliografía son los de Kaluza y Klein y los de Applequist y colaboradores [16].

Muchos de estos trabajos de unificación, especialmente los desarrollados por Kaluza y Klein, Jordan y otros, asumían la incorporación de más dimensiones espaciales y además, en algunos modelos, comenzó a aparecer la posibilidad de que la constante gravitatoria introducida en la teoría de Newton no fuera precisamente una constante, sino que pudiese depender de las variables espacio temporales.

En la teoría de Kaluza-Klein, construida en 5 dimensiones (una dimensión temporal y cuatro dimensiones espaciales), la dimensión espacial adicional está enrollada en un círculo de radio muy pequeño (del orden de la longitud de Planck), por lo que esta dimensión compactificada no puede ser observada ya que se requieren energías colosales para penetrarla, las cuales están fuera del alcance experimental. Producto del proceso de compactificación

de la dimensión extra (necesario para poder recobrar la teoría de Newton de gravitación en el límite de bajas energías y campos de gravitación débiles), aparece un campo escalar o moduli que da una medida del volumen del espacio compacto.

Jordan y su grupo realizó numerosas investigaciones en teorías alternativas de la teoría estándar de Einstein en la cual la “constante” de gravitación estaba acoplada con un campo escalar.

Dicke tomando las ideas de Sciama [17] notó que algunas de las cantidades dimensionales que aparecían no tenían significado físico y eran constantes. Por lo que para poder incorporar el principio de Mach a estas teorías se le hacen algunas modificaciones a la relatividad general estándar cuando se reescribe la acción de la forma

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} (R + k L_m) = 0 \quad (2.1)$$

donde $k \equiv 8\pi G$ y L_m es el lagrangeano de materia. Aquí se puede ver que si la constante de gravitación se considera variable puede traer consigo dificultades en la teoría, ya que las leyes de conservación para la materia usual podrían no ser validas. Dicke [18] distinguió del Principio de Equivalencia Fuerte (PEF - localmente todos los efectos gravitatorios pueden ser eliminados por una transformación) del Principio de Equivalencia Débil (PED-el efecto de aceleración de la gravedad puede ser eliminado por una transformación apropiada, o, dicho de otra manera: todas las partículas de prueba caen localmente con la misma aceleración de gravedad independientemente de su estructura química y composición). Si no es constante en 2.1 las partículas materiales no siguen las geodésicas, lo que implicaría una violación del PED, el cuál ha sido comprobado con suficiente exactitud con experimentos en el sistema solar. Una manera natural de aislar k de la materia en 2.1 sería dividiendo por ella.

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + L_m) = 0 \quad (2.2)$$

donde $k \equiv 1/\phi$. al considerar k como función escalar variable, se puede apreciar que la teoría que se deriva de 2.2 no viola el PED (aunque si viola el PEF que no está tan detalladamente comprobado). Al tomar en cuenta este nuevo campo escalar ϕ , la forma más sencilla para generalizar la teoría de Einstein y preservar el PED es proponer una nueva acción [19]:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + L_m + L_\phi) = 0 \quad (2.3)$$

donde

$$L_\phi = -\omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} / \phi, \quad (2.4)$$

en el cual ϕ tiene dimensiones del inverso de la constante gravitacional

$$[\phi] = [k]^{-1}. \quad (2.5)$$

La expresión 2.5 conduce a una acción la cual es referida como “Jordan-Brans-Dicke” en marco de Jordan (MJ):

$$S_{JBD}^{MJ} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R + L_m - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} \right). \quad (2.6)$$

Esta teoría significa la generalización más simple de la Teoría General de Gravitación de Einstein y es el prototipo de Teoría Escalar-Tensorial. Con ayuda del principio variacional y con la topología estándar, resultan las siguientes ecuaciones del campo:

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} L_m = 0 \quad (2.7)$$

$$\phi \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = T_{\alpha\beta}^{(materia)} + \phi_{;\alpha;\beta} - g_{\alpha\beta} \square \phi + \frac{\omega}{\phi} \left(\phi_{;\alpha;\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \phi_{;\lambda}^{\cdot\lambda} \right) \quad (2.8)$$

$$\omega \left(\frac{2}{\phi} \square \phi - \frac{\phi_{;\lambda} \phi^{\cdot\lambda}}{\phi^2} \right) \quad (2.9)$$

La ecuación 2.7 es el principio variacional estándar para la materia la cual cumple con el PED. Para las partículas de pruebas 2.7 resulta en la ecuación de la geodésica. Es bueno aclarar que, en realidad, la interacción de segundo orden de la materia mediante el acoplamiento entre el campo escalar y la métrica conlleva una muy débil violación del PED. Debido a que no está acoplada al campo escalar en 2.6 (se dice que el acoplamiento es mínimo entre el campo escalar y la materia ordinaria) el tensor de energía-momento de la materia todavía se conserva.

$$T_{\alpha;\beta}^{(m)\beta} = 0 \quad (2.10)$$

Con ayuda de una transformación conforme de la métrica del espacio tiempo, la teoría de Jordan-Brans-Dicke puede ser reformulada en el marco de Einstein (ME), donde el

acoplamiento entre el campo escalar y la curvatura desaparece (esto conlleva mayor sencillez de las ecuaciones del campo), pero, en su lugar, el acoplamiento entre el campo escalar y la materia es no mínimo (esto conlleva violación del PED) y las partículas no siguen las geodésicas de la métrica. La acción para la teoría de Brans-Dicke en el marco de Einstein se escribe de la siguiente manera:

$$S_{JBD}^{ME} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + e^{-2\phi} L_m (g e^{-\phi}) \right\} \quad (2.11)$$

La teoría JBD puede ser generalizada si se considera una función de acoplamiento arbitraria $\omega(\phi)$ en lugar de una constante. La teoría JBD se recupera cuando $\omega(\phi) = cte = \omega$.

2.1 Transformaciones Conformes de la Métrica: Marcos de Jordan y Einstein.

Con la ayuda de transformaciones conforme se puede colocar el acoplamiento no mínimo en otro término, por ejemplo en 2.6 existe un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el escalar de curvatura y mediante una transformación conforme de la métrica se puede eliminar este acoplamiento pero aparecerá el acoplamiento en otro término en la acción 2.6, el campo material.

Al aplicar una transformación conforme se dice que uno se mueve de un marco conforme a otro, pero esto no es así realmente. Primeramente esto es un cambio de la métrica y por tanto un cambio físico real. En segundo lugar, las ecuaciones de movimiento de la materia son distintas en los dos marcos. Por ejemplo, si la materia es polvo que sigue las geodésicas en un marco, este no seguirá la geodésica en el marco conforme. Así, para la materia masiva, existen limitaciones físicas relacionadas con la elección del marco. No es simplemente una cuestión de formalismo [20]. Este problema ha sido extensamente discutido en la literatura [21],[22],[23] pero aún no existe un punto de vista prevaleciente [24]. En esta sección mostraremos como varias magnitudes geométricas y físicas se transforman ante transformaciones conformes de la métrica, de la forma:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

donde Ω^2 es el factor conforme (este debe ser positivo para preservar la signatura de la métrica), la barra sobre una magnitud denota la expresión de dicha magnitud en la métrica conforme. Ante esta transformación el elemento de línea se transforma según:

$$d\bar{s}^2 = \Omega^2 ds^2. \quad (2.13)$$

El determinante de la métrica, para cuatro dimensiones (que es el caso que nos interesa), se transforma como:

$$\sqrt{|\bar{g}|} = \Omega^4 \sqrt{|g|} \quad (2.14)$$

Los símbolos de Christoffel se transforman de la siguiente forma:

$$\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + (f_{\nu}\delta_{\lambda}^{\mu} + f_{\lambda}\delta_{\nu}^{\mu} - \bar{f}^{\nu}\bar{g}_{\nu\lambda}) \quad (2.15)$$

donde

$$f \equiv \ln(\Omega)$$

$$f_{\nu} \equiv \frac{\partial_{\nu}\Omega}{\Omega} = \partial_{\nu}f$$

$$\bar{f}^{\mu} \equiv \bar{g}^{\mu\nu} f_{\nu}$$

Mientras que el escalar de curvatura lo hace de la siguiente manera:

$$\bar{R} = \Omega^{-2} [R - 6\nabla_n \nabla^n \ln(\Omega) - 6\nabla^n (\ln(\Omega)) \nabla_n (\ln(\Omega))] \quad (2.16)$$

Ante 2.12 con $\Omega^2 = e^{-\phi}$, la acción general para una teoría Escalar-Tensorial en Marco de Jordan (o Marco de Cuerda en Teoría de Cuerdas):

$$S = \int_{M_4} d^4x \sqrt{|g|} e^{-\phi} (R - \omega(\nabla\phi)^2) + \int_{M_4} d^4x \sqrt{|g|} L_{materia}, \quad (2.17)$$

se transforma en la acción en Marco de Einstein:

$$S = \int_{M_4} d^4x \sqrt{|\bar{g}|} (\bar{R} - (\omega + 3/2)(\nabla\phi)^2) + \int_{M_4} d^4x \sqrt{|g|} \Omega^{-4} L_{materia}, \quad (2.18)$$

En la ecuación 2.17 el campo escalar esta acoplado de forma no mínima a la curvatura pero esta acoplado de manera mínima a la lagrangeana de materia. En (2.18), por el contrario, el campo escalar esta acoplado de forma mínima a la curvatura y de forma no mínima a los grados de libertad materiales.

Capítulo 3

MODELOS DE QUINTA ESENCIA.

Como el contenido de energía oscura en el Universo es de un 70% aproximadamente, ella determina el estado actual y el futuro del Universo en que vivimos. Por eso es muy natural que se propongan modelos donde aparezca dicho componente de energía.

Los modelos del universo con energía oscura más estudiados en la bibliografía se basan en la teoría de gravitación de Einstein con inclusión de un campo escalar con auto interacción como fuente de materia conjuntamente con la materia ordinaria.

En estos modelos se postula un acoplamiento mínimo entre el campo escalar (energía oscura) y la materia ordinaria, esto implica que no existe intercambio de energía entre ambas componentes del contenido material del Universo. Estos modelos del universo no pueden resolver, en general, el problema de coincidencia y el del ajuste fino [25, 26].

En este capítulo se proponen modelos utilizando las teorías escalar-tensoriales de gravitación, que representan la generalización más simple de la teoría de Einstein. En el (Capítulo 2) aparece una breve introducción a estas.

Una generalización natural de estos modelos es considerar un campo escalar que no está acoplado de forma mínima con la materia, o sea, la energía oscura (modelada por el campo escalar) y la materia oscura fría intercambian energía entre ellas. La acción para la Teoría Escalar-Tensorial con acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y los grados de libertad materiales en el marco de Einstein tiene la forma:

$$S = \int_{M_4} d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{\nabla \phi^2}{2} - V(\phi) + C^2(\phi) L_m \right\}, \quad (3.1)$$

donde R es el escalar de curvatura de Ricci, $\sqrt{|g|}d^4x$ es el elemento de volumen 4-dimensional, M_4 es una variedad 4-dimensional Pseudo Riemann, ϕ es el campo escalar, $V(\phi)$ es el potencial de auto interacción, $C(\phi)$ la función de acoplamiento entre el campo escalar y L_m la lagrangeana de los grados de libertad de la materia ordinaria.

Las ecuaciones del campo que se derivan de esta acción son:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}^{materia} + \phi_{,a}\phi_{,b} - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla\phi)^2 - g_{ab}V(\phi), \quad (3.2)$$

$$\square\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}[\ln C(\phi)]T^{materia}, \quad (3.3)$$

donde,

$$T_{ab}^{materia} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \left\{ \sqrt{|g|} C^2(\phi) L_m \right\}}{\delta g^{ab}}$$

es el tensor de energía-momento de la materia ordinaria. Además también se obtiene la siguiente “ecuación de conservación”:

$$\nabla^n T_{na}^{materia} = \frac{1}{2}[\ln C(\phi)]\phi_{,a}T^{materia}. \quad (3.5)$$

El acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y los grados de libertad materiales conduce a que las partículas no siguen las geodésicas de la geometría de M_4 ¹, por lo que se viola el principio débil de equivalencia, el cual está bien comprobado con observaciones en el sistema solar. Este tipo de acoplamiento solo tiene sentido si se considera que la materia ordinaria es materia oscura fría, ya que esta no se observa directamente y por tanto no se detectarán violaciones del principio de equivalencia.

En [26] se plantea que un campo escalar de energía oscura gobernado por una ley exponencial, linealmente acoplado a la materia oscura en una cierta región del espacio de parámetros, produce una expansión acelerada con una razón constante Ω_c/Ω_ϕ (donde Ω_i es el parámetro adimensional de densidad de energía del componente i -ésimo de materia del Universo ($\Omega_i \equiv \rho_i/(3H^2)$)) y un parámetro de estado ω_ϕ constante a lo que se refiere como “era estacionaria acelerándose”. Se considera el acoplamiento a la energía oscura como una nueva interacción que se suma a la gravedad. Como el acoplamiento a la materia bariónica está fuertemente constreñido por la gravedad local entonces, por simplicidad, no se considera explícitamente acoplado a la energía oscura (campo escalar).

En [27] se demuestra que un acoplamiento adecuado entre el campo de quintaesencia y el fluido de materia oscura sin presión conduce a una razón constante de las densidades de energía de ambas componentes lo cual es compatible con una expansión acelerada del universo. En este trabajo los autores no especifican el tipo de acoplamiento desde un inicio, sino que lo determinan a partir del requerimiento de que se obtengan soluciones escalantes (soluciones en donde existe una razón entre la densidad de energía de la materia oscura y la densidad de energía de la quintaesencia (energía oscura)).

¹Esto se puede ver de forma clara en la ecuación de “conservación” (3.5), donde se observa que cuando la función de acoplamiento no es constante la energía de la materia ordinaria no se conserva por separado de la energía del campo escalar.

En [28] se propone que la mejor explicación para la coincidencia, de la expansión acelerada, está asociada con nuestra proximidad a la transición cosmológica de la radiación a la dominación del polvo.

La acción (3.1) (y las ecuaciones del campo) también se pueden escribir en el Marco de Jordan donde existe acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el escalar de curvatura R , pero no existe acoplamiento entre el campo escalar y los grados de libertad de la materia (ver Capítulo 2).

Un caso particular de (3.1) es cuando se hace $C(\phi) = cte = 1$. En este caso se obtiene una teoría con acoplamiento mínimo que incluye a la teoría de gravitación de Einstein. Cuando se escoge $C(\phi) = \exp(-\omega\phi)$, se recupera la Teoría de Brans-Dicke en el Marco de Jordan (ver Capítulo 2).

3.1 Soluciones: Modelos con Acoplamiento Mínimo.

Los modelos del Universo con energía oscura son muy usados en la actualidad. En los más sencillos la energía oscura está acoplada de forma mínima con el fluido de fondo.

En este epígrafe se propone un modelo del Universo donde el campo escalar está acoplado de forma mínima con el fluido de fondo, compuesto básicamente de materia oscura fría. Para obtener la familia de soluciones a las ecuaciones del campo se impone la dinámica del Universo y se observa que tipo de potencial se ajusta a esta dinámica.

Este modelo no puede ser usado desde el mismo inicio de la expansión del Universo, es decir en la vecindad del Big Bang donde las correcciones cuánticas son de peso y los modelos clásicos como este, dejan de operar correctamente. Solamente es válido a partir del desacople entre la materia y la radiación.

De manera general las ecuaciones del campo son muy complicadas de resolver, además existen más variables de campo incógnitas que ecuaciones por lo que, para obtener soluciones exactas, es necesario realizar algunas consideraciones. Estas consideraciones se pueden concebir de varias formas, pero las más usadas son las siguientes: 1) se elije la forma del potencial de auto interacción y se obtienen soluciones y 2) se impone una dinámica de evolución del universo y a partir de aquí se obtiene la forma del potencial que cumple con esa dinámica.

En este epígrafe, para obtener las soluciones a las ecuaciones del campo se impone una relación lineal entre el parámetro de Hubble y la primera derivada del campo escalar, es decir se fija la dinámica de la evolución. La primera motivación para elegir esta dinámica del Universo es de carácter matemático: las ecuaciones del campo muestran una simetría aparente bajo esta elección y, además, ella permite derivar soluciones exactas en cuadraturas. Estos argumentos de carácter matemático son reforzados por el estudio de estabilidad de las soluciones presentado en [30]. Se puede apreciar que al imponer esta relación, se decantan las soluciones que son inestables, por lo que dicha relación funciona como un

selector de soluciones estables o atractoras[30].

Es bueno puntualizar que los campos escalares, que se utilizan para representar la energía oscura, son campos que ruedan suavemente sobre su potencial de auto interacción. Esto conduce a que la constante de proporcionalidad entre la primera derivada del campo escalar y el parámetro de Hubble tiene que ser de tal forma que se pueda cumplir con la condición de rodamiento suave (la energía cinética del campo escalar debe ser pequeña).

En esta sección se analiza un modelo que tiene solamente dos componentes cosmológicos: materia “ordinaria” (materia oscura fría) y energía oscura modelada por un campo escalar o quintaesencia. Como ya hemos señalado, la forma del potencial de auto interacción no es asumida desde el inicio, sino que producto del procedimiento usado para obtener las soluciones de las ecuaciones del campo, se obtiene como “salida” la forma del potencial.

Las ecuaciones del campo (3.2-3.5), asumiendo la métrica FRW (1.5) del (Capítulo 1), son las siguientes

$$3H^2 = \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.6)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = (1 - \gamma)\rho_m - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.8)$$

donde γ es el índice barotrópico del fluido de fondo, ρ_m es la densidad de materia oscura y $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble.

La densidad de energía de la materia (materia oscura fría) está relacionada con el factor de escala a través de la ecuación de conservación que tiene la forma:

$$\dot{\rho}_m + 3\gamma H \rho_m = 0. \quad (3.9)$$

Al integrar esta expresión se obtiene que la expresión para la densidad de materia es:

$$\rho_m = \rho_{0,\gamma} a^{-3\gamma}, \quad (3.10)$$

donde $\rho_{0,\gamma}$ es una constante de integración.

Al sumar las dos primeras ecuaciones del campo se obtiene que:

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{2 - \gamma}{2}\rho_m + V(\phi). \quad (3.11)$$

Si se considera ahora una relación lineal entre el parámetro de Hubble y la primera derivada del campo escalar:

$$H = k\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad a = \exp(k\phi), \quad (3.12)$$

donde k es un parámetro constante, entonces la ecuación de Klein-Gordon, o ecuación de evolución del campo escalar (tercera ecuación del campo), se puede escribir como:

$$\dot{H} + 3H^2 = -kV'(\phi). \quad (3.13)$$

Se puede apreciar que existe una simetría aparente entre las partes izquierdas de las ecuaciones (3.11) y (3.13). Comparando estas dos ecuaciones podemos reducir nuestro sistema de ecuaciones de campo a una sola ecuación diferencial para el potencial de autointeracción:

$$V'(\phi) + \frac{1}{k}V(\phi) = \frac{\gamma - 2}{2k}\rho_{0,\gamma}\exp(-3k\gamma\phi). \quad (3.14)$$

Integrando esta ecuación diferencial podemos obtener la forma del potencial, que satisface la relación escogida entre el parámetro de Hubble y la primera derivada del campo escalar. El potencial obtenido es una combinación de dos exponenciales de la forma:

$$V(\phi) = \xi_0 \exp(-\frac{\phi}{k}) + \frac{2 - \gamma}{6k^2\gamma - 2}\rho_{0,\gamma}\exp(-3k\phi), \quad (3.15)$$

donde ξ_0 es una constante de integración. Este potencial es un caso particular del potencial $V(\phi) = M^4 [\exp(\alpha\phi) + \exp(\beta\phi)]$ que aparece en [14], donde $\alpha = 1/k$. $\beta = 3k\gamma$ y $\xi_0 = (2 - \gamma)\rho_{0,\gamma}/(6k^2\gamma - 2) = M^4$.

El potencial obtenido se puede expresar en términos del factor de escala de la forma

$$V(a) = \xi_0 a^{-\phi/k} + \frac{2 - \gamma}{6k^2\gamma - 2}\rho_{0,\gamma} a^{-3k\phi}. \quad (3.16)$$

Un rasgo característico de este potencial es que depende del índice barotrópico de la materia.

Si se introduce el tiempo conforme $dt = a^{1/2k^2}d\tau$ y se sustituye, conjuntamente con el potencial obtenido, en la primera ecuación del campo (3.6) o ecuación de Friedmann, se obtiene la siguiente relación:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2k^2\gamma}{6k^2 - 2}\rho_{0,\gamma}a^{-3\gamma+1/k^2} + \frac{2k^2\xi_0}{6k^2 - 1}, \quad (3.17)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo conforme. Esta ecuación puede ser integrada en cuadraturas de la forma

$$\int \frac{a^{3\gamma/2+1/2k^2-1}da}{\sqrt{A + Ba^{3\gamma+1/k^2}}} = \tau + \tau_0, \quad (3.18)$$

donde $A = (2k^2\gamma\rho_{0,\gamma})/(6k^2-2)$, $B = (2k^2\xi_0)/(6k^2-1)$ y τ_0 es una constante de integración. Integrando la ecuación anterior obtenemos la expresión para el factor de escala:

$$a(\tau) = a_0 \{\sinh [\mu(\tau + \tau_0)]\}^{2k^2/(3k^2\gamma-1)}, \quad (3.19)$$

donde $a_0 = (A/B)^{k^2/(3k^2\gamma-1)}$ y $\mu = (3k^2\gamma - 1)\sqrt{B}/k^2$. Como el factor de escala está relacionado con el campo escalar (ver ecuación (3.12)), podemos obtener, consecuentemente, una expresión para el campo escalar

$$\phi(\tau) = \frac{1}{k} \ln(a_0) + \frac{2k^2}{3k^2\gamma - 1} \ln \{\sinh [\mu(\tau + \tau_0)]\}, \quad (3.20)$$

A partir de la ecuación (3.19) se pueden obtener el parámetro de Hubble

$$H(\tau) = \sqrt{\frac{2k^2}{6k^2-1}} \xi_0 a^{-1/(2k^2)}(\tau) \coth [\mu(\tau + \tau_0)]. \quad (3.21)$$

El parámetro adimensional de densidad de energía de la materia se puede escribir de la forma:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2} = \frac{3k^2\gamma - 1}{3k^2\gamma} \{\cosh [\mu(\tau + \tau_0)]\}^{-2}. \quad (3.22)$$

El parámetro de estado para la energía oscura tiene la siguiente expresión:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = -1 + \frac{1}{3k^2(1 - \Omega_m)}. \quad (3.23)$$

El parámetro de desaceleración es

$$q = -1 + \frac{1}{2k^2} + \frac{3\gamma}{2}\Omega_m. \quad (3.24)$$

En este punto es adecuado introducir la variable de corrimiento al rojo ($z = a_0/a - 1$), debido a que la data observacional se reporta usando precisamente esta variable. Utilizando la ecuación de Friedmann el parámetro de Hubble se puede escribir en función del corrimiento al rojo como:

$$H(z) = \sqrt{A} \sqrt{(1+z)^{3\gamma} + (B/A)(1+z)^{1/k^2}}, \quad (3.25)$$

donde la densidad de energía de la materia es $\rho_m = \rho_{0,\gamma}(z+1)^{3\gamma}$ y el parámetro adimensional de densidad de energía de la materia es

$$\Omega_m(z) = \left(\frac{\rho_{0,\gamma}}{3A}\right) \frac{(z+1)^{3\gamma-1/k^2}}{(z+1)^{3\gamma-1/k^2} + B/A}. \quad (3.26)$$

Si se considera que acorde con la data observacional $\Omega_m(z=0) \approx 1/3$ se puede obtener que $A + B = \rho_{0,\gamma}$ y además si se asume que en el inicio de la evolución del Universo, para nuestro modelo, (cuando $z \rightarrow \infty$) existe una pequeña cantidad de energía oscura (representada por la variable adimensional ε), es decir que la materia oscura no domina completamente, entonces se tiene que $(\Omega_m(z \rightarrow \infty) \approx (1 - \varepsilon))$, donde ε es muy pequeña pero diferente de cero). Estas consideraciones nos permite reescribir la expresión para el parámetro adimensional de densidad de energía de la materia como:

$$\Omega_m(z) = (1 - \varepsilon) \frac{(z+1)^{3\gamma-1/k^2}}{(z+1)^{3\gamma-1/k^2} + 2 - 3\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Este modelo posee tres parámetros libres: (γ, k, ε) , donde γ es el índice barotrópico, k es la constante de proporcionalidad entre el parámetro de Hubble y la primera derivada respecto al tiempo del campo escalar y ε es una constante que físicamente da una medida de la densidad de quintaesencia en el inicio del Universo².

La gráfica (3.1) muestra la evolución del parámetro de estado del campo escalar, para tres valores diferentes del parámetro libre k . Se puede observar que para valores de $k \sim 1$ en una época en el pasado, el parámetro de estado fue positivo. Esto significa que hubo una época en el pasado donde la gravedad de la energía oscura fue atractiva, lo que es consistente con la desaceleración y con el incremento del parámetro de desaceleración para altos corrimientos al rojo, hechos más o menos bien establecidos dentro del paradigma cosmológico moderno. Además de la gráfica podemos decir que solamente para valores de $k > 5$ nuestro modelo cumple con los requerimientos de la datos observacionales, los cuales favorecen que el valor de hoy en día del parámetro de estado del campo escalar sea $\omega_\phi \sim -1$. Esto implica que la energía oscura se comporta aproximadamente como una constante cosmológica o energía de vacío cuántica y por tanto el modelo estudiado no se diferencia mucho, en el presente, del modelo Lambda Materia Oscura Fría (LCDM).

La evolución del parámetro de desaceleración se muestra en la figura (3.2). Para valores $k > 5$ se puede apreciar que la fase actual de aceleración es un fenómeno reciente, teniendo una transición de una fase desacelerada en el pasado a otra acelerada en el presente para un corrimiento cercano a $(z \sim 0.55)$, de acuerdo con [35].

En la figura (3.3) se puede apreciar la evolución de la densidad de materia y de la densidad del campo de quintaesencia. Los valores de los parámetros libres tomados son $\varepsilon = 0.01$ y $k = 5$. Se puede apreciar que la igualdad de ambas densidades ocurre aproximadamente para un corrimiento al rojo de $(z \approx 0.3-0.4)$ de acuerdo con las conjeturas observacionales más aceptadas [35]. Podemos notar también que en el pasado la materia dominaba sobre el campo escalar que representa la energía oscura, en el presente ambas densidades son comparables (aunque predomina la densidad de energía oscura) y en el futuro domina la energía oscura, que es quien determina el destino de la evolución cósmica³

²Debemos puntualizar que este modelo clásico no se puede usar para modelar los mismos inicios de evolución del universo, solamente se puede usar para modelar el universo a partir del desacople entre

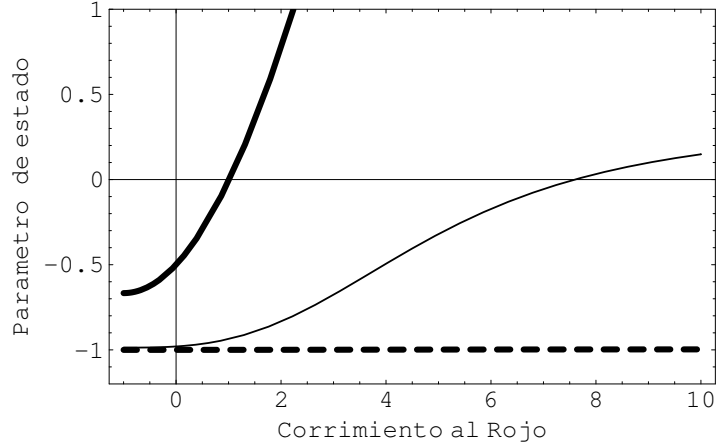


Figura 3.1: Gráfica de la evolución del parámetro de estado contra el corrimiento al rojo para tres valores del parámetro, $k = 1$ (línea continua más oscura), $k = 5$ (línea continua más clara) y $k = 100$ (línea discontinua). En todos los casos se fija el parámetro libre ε ($\varepsilon = 0.01$). Para la solución del modelo con acoplamiento mínimo

De las gráficas mostradas se puede concluir que para que el modelo este acorde con el paradigma cosmológico actual los valores del parámetro libre k deben ser mayores que cinco.

Nosotros hemos obtenidos otras familias de soluciones a las ecuaciones del campo cosmológicas, en caso de acoplamiento mínimo, en donde se ha utilizado un método diferente de trabajo. En estos trabajos para obtener las soluciones se fija la forma del potencial de auto interacción (ver [31, 32]).

3.2 Soluciones: Modelos con Acoplamiento No Mínimo.

En esta sección se analizará un modelo del Universo constituido por un fluido de fondo que es la materia oscura y el campo escalar que representa la energía oscura. En este modelo el campo escalar se acopla de forma no mínima con el fluido de fondo, compuesto básicamente de materia oscura fría. Esto significa que ambas componentes del fluido cósmico intercambian energía.

La acción (3.1) de este modelo difiere de la que aparece en [28]; en este caso no consideramos la contribución del sector de materia visible (el cual es despreciable respecto a la componente de materia oscura). Esta simplificación permite obtener un modelo simple y

materia y radiación.

³Hoy en día se puede ver que el parámetro de densidad de quintaesencia tiene un valor cerca de 0.7 y el parámetro de densidad de materia tiene un valor aproximado de 0.3 lo que está acorde con la data observacional

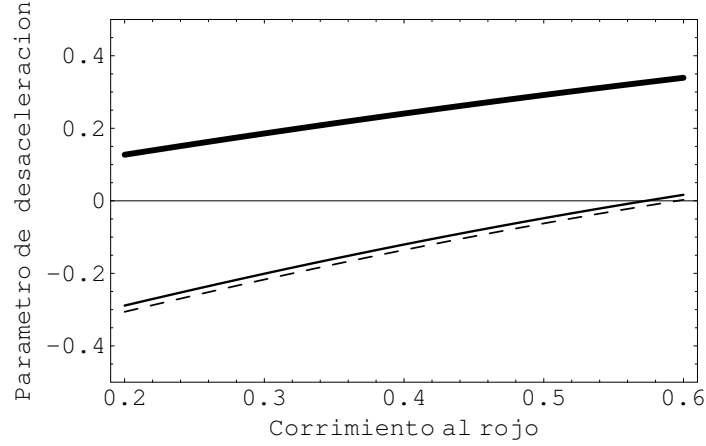


Figura 3.2: Gráfica de la evolución del parámetro de desaceleración respecto al corrimiento al rojo para tres valores del parámetro, $k = 1$ (línea continua más oscura), $k = 5$ (línea continua más clara) y $k = 100$ (línea discontinua). En todos los casos el parámetro libre ε es $\varepsilon = 0.01$. Para la solución del modelo con acoplamiento mínimo.

soluble en cuadraturas. A diferencia de los que aparecen en [26, 27, 28], no se especifica el tipo de potencial de auto-interacción desde un inicio, en su lugar, como en el epígrafe anterior, se asume una relación lineal entre la derivada del campo escalar respecto al tiempo y el parámetro de Hubble. Esto es sugerido por una simetría aparente entre las ecuaciones del campo. Esta relación ha sido formalmente utilizada en [30] y ella garantiza que se puedan derivar soluciones escalantes (tipo atractor).

Al revisar algunos modelos que se proponen en la bibliografía podemos notar que en [26] aparece un factor multiplicando la traza del tensor de energía-momento y la ecuación de conservación, y el gradiente del campo escalar es tomado como una constante. En [26] los autores utilizan C para la constante (que no debemos confundir con la función de acoplamiento $C(\phi)$ en el presente trabajo), por lo que es un caso particular del aquí propuesto, cuando elegimos la función de acoplamiento $C(\phi) = C_0 \exp(2k\phi)$. Para $C = cte.$ recuperamos el modelo estándar de quintaesencia mínimamente acoplada a la materia ordinaria.

Si en el modelo que se propone se selecciona $C = \chi^{-1}(\phi)$ y $\phi = \int \chi^{-1} d\chi \sqrt{\omega + 3/2}$ donde ω es el parámetro de acoplamiento de Brans-Dicke, se recupera la teoría estándar de Jordan-Brans-Dicke formulada en el marco de Einstein [34].

Cuando se hace $C(a)^{(3\gamma-4)/4} = C_0 a^{3(1-\gamma_\phi)/(r+1)}$ se recupera el modelo propuesto en [27]. Aquí γ_ϕ es el índice barotrópico para el campo escalar y $r = \rho_m/\rho_\phi = cte.$

Para derivar soluciones a las ecuaciones del campo, usamos el mismo método de solución propuesto en la sección (3.1), en donde se impone la dinámica de evolución del Universo (se emplea una relación lineal entre la primera derivada del campo escalar y el parámetro de Hubble).

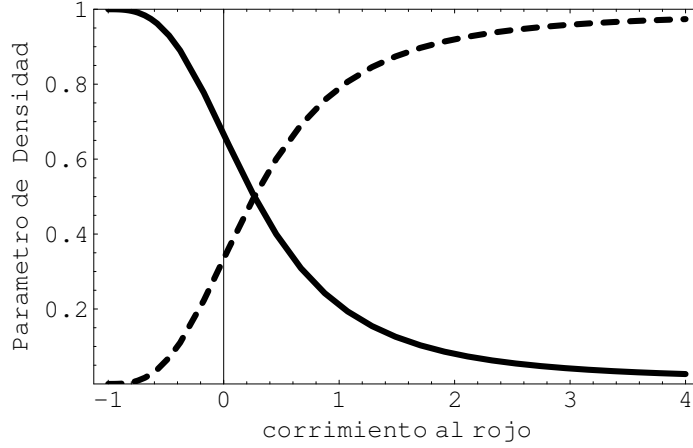


Figura 3.3: Se muestra la evolución de Ω_m (línea continua) y Ω_ϕ (línea discontinua) vs corrimiento al rojo. Los valores de los parámetros libres son $\varepsilon = 0.01$ y $k = 5$. La igualdad de la densidad de energía de materia y de quintaesencia ocurre aproximadamente a $z \approx 0.3 - 0.4$. Para la solución del modelo con acoplamiento mínimo.

En este epígrafe se estudian tres posibles soluciones a las ecuaciones del campo, las cuales (como se verá mas adelante) permiten describir adecuadamente la dinámica de evolución del Universo. Estas soluciones fueron publicadas en [30, 33]

Las ecuaciones del campo son:

$$3H^2 = \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.28)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = (1 - \gamma)\rho_m - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.29)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi) - (\ln[X(\phi)])'\rho_m \quad (3.30)$$

y la ecuación de “conservación”

$$\dot{\rho}_m + 3\gamma H\rho_m = -(\ln[X(\phi)])'\dot{\phi}\rho_m \quad (3.31)$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$\rho_m = Ma^{-3\gamma}X^{-1}(\phi) \quad (3.32)$$

donde M es una constante de integración.

En las ecuaciones anteriores el punto significa derivada respecto al tiempo, la coma derivada respecto al campo escalar y $X(\phi)$ es una función que se relaciona con la función de

acoplamiento por la expresión $X(\phi) = C(\phi)^{(3\gamma-4)/2}$. A partir de este momento, indistintamente, tanto a $C(\phi)$ como a $X(\phi)$ las llamaremos función de acoplamiento.

Considerando una relación lineal entre la primera derivada del campo escalar y el parámetro de Hubble

$$\dot{\phi} = \lambda H \quad \Rightarrow \quad a = \exp(\phi/\lambda). \quad (3.33)$$

Utilizando esta expresión en la ecuación (3.30) se obtiene

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{-V'(\phi) - [\ln X(\phi)]' \rho_m}{\lambda}. \quad (3.34)$$

Por otra parte, sumando las ecuaciones (3.28) y (3.29) se tiene

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{2-\gamma}{2} \rho_m + V(\phi). \quad (3.35)$$

Se puede apreciar que los miembros izquierdos de ambas ecuaciones coinciden. Al igualarlas se obtiene una ecuación diferencial para el potencial de auto interacción donde aparece además la función de acoplamiento:

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} + \lambda V(\phi) = \rho_m \left[\frac{d \ln X(\phi)}{d\phi} - \frac{\lambda(\gamma-2)}{2} \right]. \quad (3.36)$$

Considerando que $d\phi = \lambda d(\ln a)$ y utilizando el cambio de variable, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$V'(\phi) + \lambda^2 V(\phi) = \left[\frac{X'(\phi)}{X(\phi)} - \frac{\lambda(\gamma-2)}{2} \right] \frac{M}{a^{3\gamma}} X^{-1}(\phi). \quad (3.37)$$

Esta expresión relaciona el potencial de auto interacción con la función de acoplamiento $X(\phi)$. Por tanto, elegida una función de acoplamiento dada, el potencial se obtiene como solución de (3.37).

Sustituyendo (3.32) y (3.33) en (3.28) se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{6-\lambda^2}} \left[M \exp\left(-\frac{3\gamma}{\lambda}\phi\right) X^{-1} + V(\phi) \right]^{1/2}. \quad (3.38)$$

Esta ecuación se puede integrar en cuadraturas:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{[M \exp(-\frac{3\gamma}{\lambda}\phi) X^{-1} + V(\phi)]}} = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{6-\lambda^2}} (t + t_0). \quad (3.39)$$

Si se introduce el tiempo conforme $d\tau = \exp(-\lambda\phi/2)dt = a^{-\lambda^2/2}dt$, estas últimas ecuaciones se pueden reescribir de la forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{6-\lambda^2}} \left[M \exp(\lambda\phi - \frac{3\gamma}{\lambda}\phi) X^{-1} + V(\phi) \right]^{1/2} \quad (3.40)$$

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{[M \exp(\lambda\phi - \frac{3\gamma}{\lambda}\phi) X^{-1} + V(\phi) \exp(\lambda\phi)]}} = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{6-\lambda^2}} (\tau + \tau_0), \quad (3.41)$$

respectivamente. Una vez elegida la función de acoplamiento y determinada la forma del potencial de auto-interacción, utilizando las últimas ecuaciones presentadas, se puede obtener la expresión del campo escalar y, tomando en cuenta (3.33), se obtiene la expresión para el factor de escala.

3.2.1 Solución con un Potencial Simple Exponencial.

Los potenciales con simple exponencial presentan algunas dificultades en los modelos con acoplamiento mínimo. La mayoría de estos potenciales no son atractores y esto conlleva a que necesiten un ajuste fino de sus condiciones iniciales para que puedan reproducir las observaciones. Otro de los problemas que presentan es que ellos no son capaces de generar soluciones escalantes, es decir, que en la evolución del parámetro de densidad no se observa una transición de una época dominada en el pasado por materia a una época actual dominada por el campo escalar. Además, ellos al igual que los potenciales de doble exponencial no resuelven el problema de la coincidencia. Por este motivo se estudia este tipo de potencial, para ver cómo ellos influyen en los modelos donde el acoplamiento es de forma no mínima.

Para poder obtener este tipo de potencial de auto-interacción se hace la siguiente consideración

$$\frac{dX(\phi)}{d\phi} = \left[\frac{\lambda(\gamma-2)}{2} \right] X(\phi), \Rightarrow X(\phi) = X_0 \exp\left(\frac{\lambda(\gamma-2)}{2}\phi\right). \quad (3.42)$$

Al sustituir esta consideración en la ecuación (3.37) se puede obtener la forma de nuestro potencial de auto interacción

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} + \lambda V(\phi) = 0 \Rightarrow V(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\phi). \quad (3.43)$$

Utilizando este potencial y la función de acoplamiento obtenida (ecuación (3.42)) en la ecuación (3.40), se puede integrar en cuadraturas

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + A^2}} = \mu(\tau + \tau_0), \quad (3.44)$$

donde $z = \exp \left[-\frac{\gamma(6-\lambda^2)}{4\lambda} \phi \right]$, $A^2 = V_0 X_0 / M$ y $\mu = \gamma \sqrt{M(\lambda^2 - 6)}/8$.

Integrando en cuadraturas esta ecuación se puede obtener la expresión para el campo escalar y por inversión la expresión para el factor de escala

$$\phi(\tau) = \phi_0 + \ln \{ \sinh [\mu(\tau + \tau_0)] \}^{4\lambda/(\gamma(6-\lambda^2))}, \quad (3.45)$$

$$a(\tau) = a_0 \{ \sinh [\mu(\tau + \tau_0)] \}^{4/(\gamma(6-\lambda^2))}. \quad (3.46)$$

Al igual que en la sección anterior si usamos la ecuación de Friedmann y colocamos el valor de nuestro potencial, se puede obtener la expresión del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo de la forma

$$H(z) = \left\{ \frac{2V_0}{6-\lambda^2} \left[\frac{1}{A^2} (1+z)^{3\gamma+\lambda^2(2-\gamma)/2} + (1+z)^{\lambda^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.47)$$

La densidad de materia escrita en función del corrimiento al rojo es

$$\rho_m(z) = \frac{M}{X_0} (1+z)^{3\gamma+\lambda^2(2-\gamma)/2} = \rho_0 (1+z)^{3\gamma+\lambda^2(2-\gamma)/2}. \quad (3.48)$$

Con estas expresiones se puede obtener la expresión para la densidad de materia

$$\Omega_m(z) = \frac{(6-\lambda^2)\rho_0 A^2}{6V_0} \frac{(1+z)^{3\gamma+\gamma\lambda^2/2}}{(1+z)^{3\gamma+\gamma\lambda^2/2} + A^2}. \quad (3.49)$$

Considerando que en el inicio de la evolución del universo⁴, cuando $z \rightarrow \infty$, la densidad de la materia no domina completamente y por tanto que en esa época también existe una pequeña densidad de quintaesencia, se puede considerar que $\Omega_m(\infty) = (1-\varepsilon)$, donde ε es un número pequeño. Al considerar esto se puede obtener que $1/A^2 = [\rho_0(6-\lambda^2)]/[6V_0(1-\varepsilon)]$. Acorde con las observaciones se tiene que $\Omega_m(0) \approx 1/3$. Al combinar estos resultados se puede obtener que $A^2 = 2 - 3\varepsilon$. En consecuencia con esto se pueden rescribir los parámetros de densidad de materia y de Hubble como

$$\Omega_m(z) = (1-\varepsilon) \frac{(1+z)^{3\gamma+\gamma\lambda^2/2}}{(1+z)^{3\gamma+\gamma\lambda^2/2} + 2 - 3\varepsilon}, \quad (3.50)$$

Otras magnitudes físicas importantes son:

⁴Este modelo del Universo solamente es válido después del desacople de la materia y radiación.

Densidad de quintaesencia:

$$\Omega_\phi = 1 - \Omega_m. \quad (3.51)$$

Parámetro de estado de la quintaesencia:

$$\omega_\phi(z) = -1 + \frac{\lambda^2}{3(1 - \Omega_m(z))}. \quad (3.52)$$

Parámetro de desaceleración del Universo:

$$q(z) = -1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\gamma}{2}\Omega_m(z). \quad (3.53)$$

Al igual que la solución anterior esta solución depende de tres parámetros libres $(\gamma, \varepsilon, \lambda)$, donde γ es el índice barotrópico, λ es la constante de proporcionalidad entre el parámetro de Hubble y la primera derivada respecto al tiempo del campo escalar y ε es una constante que físicamente da una medida de la densidad de quintaesencia en el inicio del Universo. Al considerar que la materia oscura es polvo fijamos el valor de γ a uno. De esta forma solamente se tienen dos parámetros libres (ε, λ) .

De la evolución del parámetro de densidad de energía de materia oscura y del campo de quintaesencia que se observa en la Figura (3.4) se puede ver que estos parámetros tienen un comportamiento como el que se plantea en el paradigma cosmológico actual, es decir se puede ver una transición de una época donde dominó la materia en el pasado a una época donde domina el campo escalar. La dominación del campo escalar es en el presente y en el futuro. De estos resultados se puede concluir que cuando el acoplamiento es no mínimo esta clase de potencial además de reproducir las observaciones también permite que en la evolución cosmológica exista una transición desde una época dominada por materia oscura, en el pasado, hacia una época donde domina la energía oscura, en el presente, a diferencia de los modelos donde el acoplamiento es mínimo en donde los potenciales simples exponenciales reproducen la data observacional pero no permiten la transición entre dominio de la materia oscura y dominio de la energía oscura, o sea, en ellos siempre domina la energía oscura. Los valores de los parámetros libres tomados son $\varepsilon = 0.01$ y $\lambda = 0.3$. Se puede apreciar que la igualdad de ambas densidades se encuentra aproximadamente para un corrimiento al rojo de $z \approx 0.3 - 0.4$.

La evolución del parámetro de estado del campo escalar para tres valores diferentes de λ ($\lambda = 0.3$ (línea continua más oscura), $\lambda = 1.41$ (línea continua) y $\lambda = 2.24$ (línea discontinua)) se muestra en la Figura (3.5). Para los dos valores más pequeños de λ podemos apreciar que existió una época donde el parámetro de estado fue positivo, esto quiere decir que hubo una época en el pasado donde la gravedad de la energía oscura fue atractiva, lo que es consistente con la desaceleración y con el incremento del parámetro de desaceleración para altos corrimientos al rojo, y otra época, que es la presente, en donde

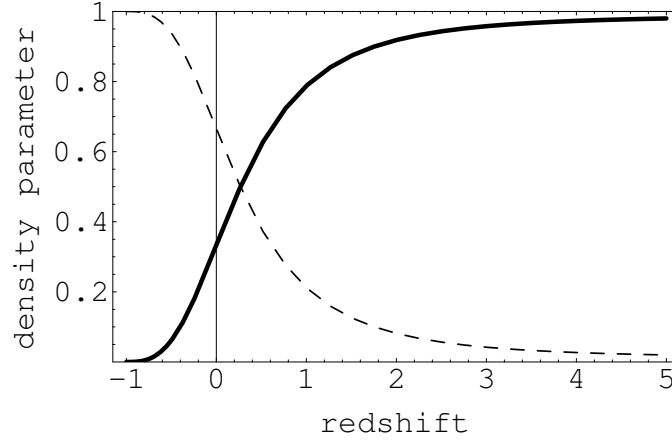


Figura 3.4: En esta figura se puede ver la evolución del parámetro de densidad respecto al corrimiento al rojo. Los valores de los parámetros libres tomados son $\varepsilon = 0.01$ y $\lambda = 0.3$. Solución obtenida en 3.2.1.

este parámetro tiene valor negativo, en donde la energía oscura es repulsiva. Mientras que para el valor mayor de λ la energía oscura siempre se comporta como atractiva, estando esto en contra del paradigma cosmológico actual. Además se puede apreciar que para el menor valor de λ el parámetro de estado se ajusta al valor que se reporta producto de las observaciones ($\omega_\phi \sim -1$).

La evolución del parámetro de desaceleración para los mismos valores de los parámetros libres de la figura anterior se puede ver perfectamente en la figura (3.6). De acuerdo con [35] en la figura se puede ver que cuando $\lambda = 0.3$ la fase actual de aceleración es un fenómeno reciente, teniendo una transición de una fase desacelerada a otra acelerada.

De las gráficas presentadas se puede concluir que para que esta solución pueda reproducir los valores reportados por las observaciones λ debe tomar valores menores que uno ($0 \leq \lambda < 1$).

3.2.2 Solución con un Potencial Doble Exponencial.

Los potenciales dobles exponenciales reproducen muy bien la data observacional y además ayudan a suavizar el problema de ajuste fino al producir, la mayoría de ellos, soluciones atractoras. En esto radica la utilidad práctica de trabajar con esta clase de potenciales. Precisamente, este tipo de potencial se obtiene si se elige la función de acoplamiento de la forma:

$$\frac{d}{d\phi} [\ln X(\phi)] = cte = \alpha \Rightarrow X(\phi) = X_0 \exp(\alpha\phi). \quad (3.54)$$

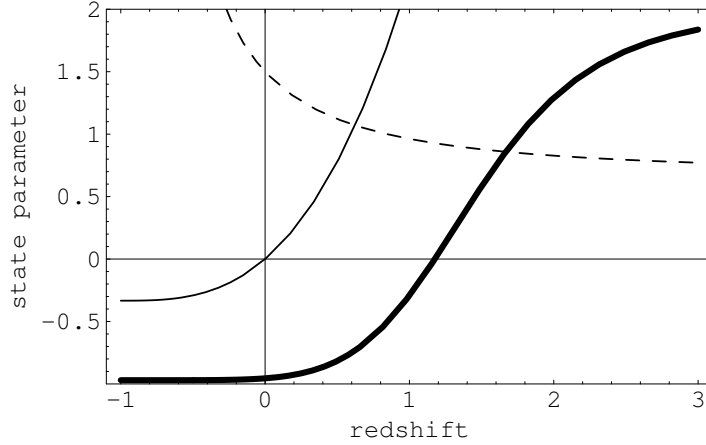


Figura 3.5: En esta figura se aprecia la evolución del parámetro de densidad respecto al corrimiento al rojo. Los valores de los parámetros libres tomados son $\varepsilon = 0.01$ y $\lambda = 0.3$. Solución obtenida en 3.2.1.

Efectivamente, sustituyendo (3.69) en (3.64) e integrando, se obtiene el siguiente potencial de auto interacción:

$$V(\phi) = V_0 \exp(-\lambda\phi) + W_0 \exp[-(\alpha + 3\gamma/\lambda)\phi], \quad (3.55)$$

donde $W_0 = -\frac{2M}{X_0} \left[\frac{2\alpha - \lambda(2-\gamma)}{\alpha + 3\gamma/\lambda - \lambda} \right]$.

Sustituyendo la forma del potencial de auto-interacción obtenida en la expresión (3.40) se puede escribir de la forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2\lambda^2}{6 - \lambda^2}} \left\{ \left[\frac{M}{X_0} + W_0 \right] \exp[\lambda\phi - 3\gamma\phi/\lambda - \alpha\phi] + V_0 \right\}^{1/2}, \quad (3.56)$$

Esta última ecuación se puede escribir en cuadraturas de la siguiente forma

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + b^2}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{2\lambda^2 V_0}{6 - \lambda^2}} (\tau + \tau_0), \quad (3.57)$$

donde $z = \exp(l\phi/2)$, $l = \alpha - \lambda + 3\gamma/\lambda$ y $b^2 = (W_0 + M/X_0)/V_0$.

Integrando en cuadraturas se obtiene la expresión para el campo escalar y como el factor de escala depende del campo escalar (ecuación (3.33)), también se puede obtener la expresión de éste.

$$\phi(\tau) = \phi_0 + \ln \{ \sinh [\mu(\tau + \tau_0)] \}^{2/l}, \quad (3.58)$$

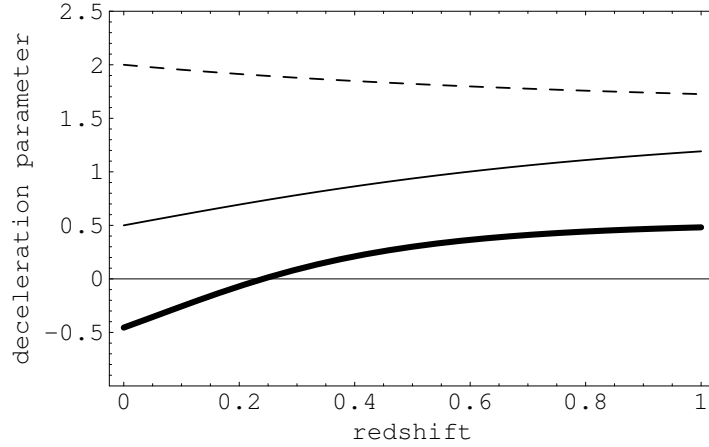


Figura 3.6: En esta figura se puede ver la evolución del parámetro de densidad respecto al corrimiento al rojo. Los valores de los parámetros libres tomados son $\varepsilon = 0.01$ y $\lambda = 0.3$. Solución obtenida en 3.2.1.

$$a(\tau) = a_0 \{ \sinh [\mu(\tau + \tau_0)] \}^{2/\lambda l}, \quad (3.59)$$

donde $\mu = l\sqrt{2\lambda^2 V_0 / (6 - \lambda^2)} / 2$.

Por otro lado si se toma la ecuación (3.55) y sustituimos el potencial de auto interacción que se obtuvo en ella, se obtiene

$$H^2 = \frac{2V_0}{6 - \lambda^2} \{ b^2 \exp [-(\alpha + 3\gamma/\lambda)\phi] + \exp(-\lambda\phi) \}. \quad (3.60)$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$H^2 = \frac{2V_0}{6 - \lambda^2} \{ b^2 a^{-(\lambda\alpha + 3\gamma)} + a^{-\lambda^2} \}. \quad (3.61)$$

El factor de escala se puede escribir en función del corrimiento al rojo de la forma $a = a_0/(1 + z)$, normalizando de tal forma que $a_0 = 1$ y sustituyendo en la ecuación (3.61), se obtiene

$$H^2 = \frac{2V_0}{6 - \lambda^2} \{ b^2 (1 + z)^{-(\lambda\alpha + 3\gamma)} + (1 + z)^{-\lambda^2} \}. \quad (3.62)$$

En esta expresión se puede apreciar la dependencia del parámetro de Hubble del corrimiento al rojo.

Sustituyendo la función de acoplamiento elegida (ecuación (3.55)) en la ecuación que determina la evolución de la densidad de materia (ecuación (3.32)) se obtiene

$$\rho_m = \frac{M}{X_0}(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma} = \rho_0(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma}, \quad (3.63)$$

entonces el parámetro de densidad de materia es

$$\Omega_m(z) = \frac{(6-\lambda^2)\rho_0}{2V_0b^2} \frac{(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma-\lambda^2}}{(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma-\lambda^2} + 1/b^2}. \quad (3.64)$$

Al igual que como explicamos en la solución anterior cuando $z \rightarrow \infty$, el parámetro de densidad de materia no puede ser completamente igual a la unidad por lo que consideramos que $\Omega_m(\infty) = (1-\varepsilon)$, donde ε es un número pequeño. Utilizando esta suposición se puede obtener que $b^2 = \rho_0(6-\lambda^2)/[2V_0(1-\varepsilon)]$. Acorde con las observaciones se tiene que $\Omega_m(0) \approx 1/3$. Combinando estos resultados se puede obtener que $1/b^2 = 2-3\varepsilon$. En consecuencia, con esto se puede escribir el parámetro de densidad de materia y el parámetro de Hubble como:

$$\Omega_m(z) = (1-\varepsilon) \frac{(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma-\lambda^2}}{(1+z)^{\alpha\lambda+3\gamma-\lambda^2} + 2-3\varepsilon}. \quad (3.65)$$

Conociendo las expresiones anteriores se pueden determinar las expresiones para otras magnitudes físicas importantes, como:

Parámetro de densidad de energía de quintaesencia:

$$\Omega_\phi(z) = 1 - \Omega_m(z), \quad (3.66)$$

Parámetro de estado de la quintaesencia:

$$\omega_\phi = -1 + \frac{\lambda^2}{3(1-\Omega_m(z))} \quad (3.67)$$

Parámetro de desaceleración del Universo:

$$q(z) = -1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\gamma}{2}\Omega_m(z). \quad (3.68)$$

Esta solución tiene cuatro parámetros libres $(\gamma, \varepsilon, \lambda, \alpha)$. Los parámetros $\gamma, \varepsilon, \lambda$ tienen el mismo significado que en la solución anterior. El parámetro α es una constante de integración. Para analizar el comportamiento de las magnitudes cosmológicas primeramente fijamos los valores de $\gamma, \varepsilon, \lambda$ y estudiamos el comportamiento de dichas magnitudes para varios valores de α . Consideramos $\gamma = 1$ y al seleccionar los valores de ε y λ tomamos en cuenta su significado físico (explicado en la solución anterior).

La dependencia del parámetro de estado del campo escalar respecto al corrimiento al rojo se puede ver en la figura (3.7). En ésta gráfica se muestra como evoluciona este parámetro para tres valores diferentes del parámetro libre α , ($\alpha = 0.1$ (línea continua más oscura), $\alpha = 1$ (línea continua) y $\alpha = 5$ (línea discontinua)). En todos los casos se dejaron fijos los valores de ε ($\varepsilon = 0.01$) y λ ($\lambda = 0.3$). Podemos apreciar que en una época el parámetro de estado fue positivo, esto quiere decir que hubo una época en el pasado donde la gravedad de la energía oscura fue atractiva, lo que es consistente con la desaceleración y con el incremento del parámetro de desaceleración para altos corrimientos al rojo. Además podemos ver que para pequeños valores del corrimiento al rojo el valor del parámetro de estado para hoy en día ($\omega_\phi(z=0)$) es poco sensible del valor del parámetro α .

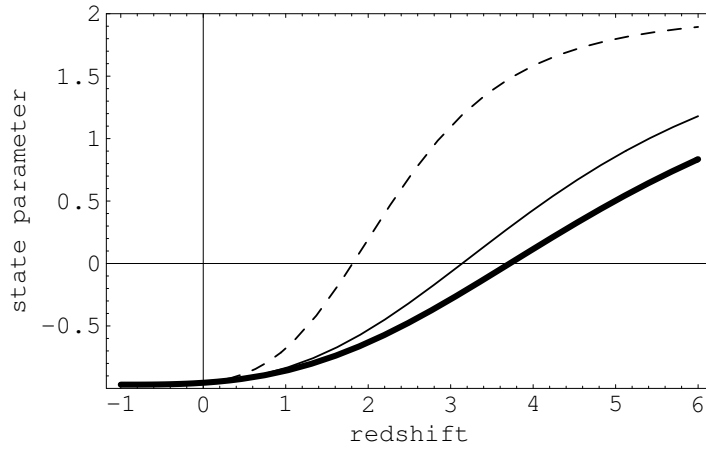


Figura 3.7: Gráfica de la evolución del parámetro de estado respecto al corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro libre α , ($\alpha = 0.1$ (línea continua más oscura), $\alpha = 1$ (línea continua) y $\alpha = 5$ (línea discontinua)). En todos los casos se dejaron fijos los valores de ε ($\varepsilon = 0.01$) y λ ($\lambda = 0.3$). Solución obtenida en 3.2.2.

En la figura (3.8) se puede apreciar la evolución del parámetro de desaceleración para los mismos valores de los parámetros libres de la figura (3.7). De acuerdo con [35] la fase actual de aceleración es un fenómeno reciente, teniendo una transición de una fase desacelerada a otra acelerada para un corrimiento al rojo cercano a $z \approx 0.55$ por lo que de la figura se puede apreciar que $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 1$ son los valores que más se acercan a las observaciones, o sea, los valores del parámetro libre $\alpha \leq 1$.

3.2.3 Solución para la Teoría de Brans-Dicke.

La teoría de Brans-Dicke es una de las teorías más sencillas que se conocen dentro de las complejas teorías de gravitación, siendo un límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. Cumple de forma satisfactoria todas las pruebas observacionales a escalas del Sistema Solar, al igual que la teoría de Einstein. De aquí la importancia de elegir la función

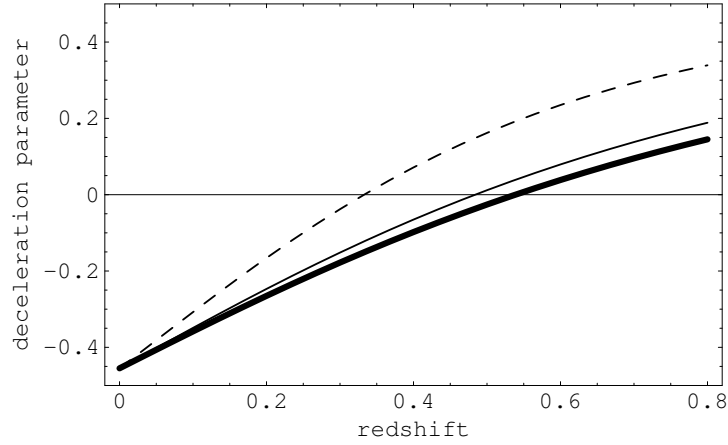


Figura 3.8: Evolución del parámetro de desaceleración respecto al corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro libre λ , ($\alpha = 0.1$ (línea continua más oscura), $\alpha = 1$ (línea continua) y $\alpha = 5$ (línea discontinua)). En todos los casos se dejaron fijos los valores de ε ($\varepsilon = 0.01$) y λ ($\lambda = 0.3$). Solución obtenida en 3.2.2.

de acoplamiento de tal forma que se pueda obtener potenciales de auto interacción que reproduzcan la teoría de Brans-Dicke.

Al considerar en la ecuación (3.1) que la función de acoplamiento tiene la forma $C(\phi) = \exp(-\omega\phi)$ se obtiene la teoría de Brans-Dicke en el marco de Jordan.

Las ecuaciones de Brans-Dicke con campo escalar auto interactuante, son:

$$3H^2 + 3H\dot{\phi} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 = \exp(-\varphi)(\rho_m V), \quad (3.69)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 + 2H\dot{\phi} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 = \exp(-\varphi) [(1 - \gamma)\rho_m + V], \quad (3.70)$$

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 + 3H\dot{\phi} = \frac{\exp(-\varphi)}{2\omega + 3} [(4 - 3\gamma)\rho_m + 4V - 2V'], \quad (3.71)$$

donde se ha introducido un nuevo campo escalar φ que se relaciona con el original de la forma $\phi = \exp(\varphi)$. En estas ecuaciones ω es el parámetro de acoplamiento de Brans-Dicke, γ es el índice barotrópico del fluido de la materia ordinaria, V es el potencial de auto interacción y $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de expansión de Hubble. El punto significa derivada respecto al tiempo cosmológico mientras que la coma significa derivada respecto al campo escalar φ . La expresión para la densidad de energía de la materia ordinaria es $\rho_m = \rho_{0,\gamma} a^{-3\gamma}$, donde $\rho_{0,\gamma}$ es una constante de integración obtenida cuando se integra la ecuación de conservación.

Para resolver las ecuaciones matemáticamente es conveniente realizar una transformación

conforme de la métrica $\bar{g}_{ab} = \exp(\psi/\sqrt{\xi})g_{ab}$, donde $\xi = \omega + 3/2$ y por conveniencia se define el campo escalar como $\varphi = \psi/\sqrt{\xi}$. El elemento de línea transformado es ahora $d\bar{s}^2 = -d\bar{t}^2 + \bar{a}^2\delta_{ij}dx^i dx^j$, donde el tiempo conforme y el factor de escala están relacionados con el original (el cual está en el Marco de Jordan, MJ) a través de las expresiones $d\bar{t} = \exp(-\psi/(2\sqrt{\xi}))dt$ y $\bar{a} = \exp(-\psi/(2\sqrt{\xi}))a$, respectivamente. Con estos cambios se pueden reescribir las ecuaciones del campo en el Marco de Einstein (ME) de la siguiente forma (ver Capítulo 2):

$$3\bar{H}^2 = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_\psi, \quad (3.72)$$

$$2\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2 = (1 - \gamma)\bar{\rho}_m - \bar{P}_\psi, \quad (3.73)$$

$$\ddot{\psi} + 3\bar{H}\dot{\psi} = \frac{4 - 3\gamma}{2\sqrt{\xi}}\bar{\rho}_m - \bar{V}', \quad (3.74)$$

donde la densidad de energía del campo escalar en el ME es $\bar{\rho}_\psi = \dot{\psi}^2/2 + \bar{V}$ y su presión correspondiente $\bar{P}_\psi = \dot{\psi}^2/2 - \bar{V}$. La ecuación de conservación después de la transformación es

$$\dot{\bar{\rho}}_m + \left(3\gamma\bar{H} + \sqrt{\frac{2}{3}}W\dot{\psi}\right)\bar{\rho}_m = 0, \quad (3.75)$$

donde $W = \sqrt{3/2}(4 - 3\gamma)/2\sqrt{\xi}$ fue introducida en [36]. Después de la integración de la ecuación de conservación se obtiene la siguiente expresión $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_{0,m}\bar{a}^{-3\gamma}\exp(-\sqrt{2/3}W\psi)$.

En el proceso de obtener las soluciones de las ecuaciones del campo se realiza el mismo método propuesto en el epígrafe (3.1).

En esta metodología de solución se suman las dos primeras ecuaciones del campo (3.72,3.73) escritas en el ME y se obtiene

$$\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2 = \frac{2 - \gamma}{2}\bar{\rho}_m + \bar{V}. \quad (3.76)$$

Utilizando el mismo procedimiento para obtener las soluciones empleado en los anteriores epígrafes se propone una relación lineal entre la primera derivada del campo escalar y el parámetro de Hubble

$$\dot{\psi} = \lambda\bar{H} \Rightarrow \bar{a}^\lambda = \exp(\psi). \quad (3.77)$$

Utilizando este cambio de variable en la ecuación (3.74) se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{\bar{H}} + 3\bar{H}^2 = \frac{4 - 3\gamma}{2\lambda\sqrt{\xi}}\bar{\rho}_m - \frac{\bar{V}'}{\lambda}. \quad (3.78)$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación (3.76) se puede apreciar que los miembros izquierdos de ambas ecuaciones son iguales. Igualando estas ecuaciones se obtiene

$$\bar{V}' + \lambda \bar{V} = \left[2\sqrt{\frac{2}{3}}W - (2 - \gamma)\lambda \right] \frac{\bar{\rho}_m}{2}. \quad (3.79)$$

Integrando esta ecuación se obtiene la siguiente expresión para el potencial

$$\bar{V}(\psi) = \bar{V}_0 \exp(-\lambda\psi) + \bar{W}_0 \exp(-\delta\psi), \quad (3.80)$$

donde $\delta = 3\gamma/2 + \sqrt{2/3}W$, \bar{V}_0 es una constante de integración y $\bar{W}_0 = [\sqrt{2/3}W - (2 - \gamma)\lambda/2]\bar{\rho}_{0,\gamma}/(\lambda - \delta)$.

En términos del factor de escala el potencial se puede escribir de la siguiente forma

$$\bar{V}(a) = \bar{V}_0 \bar{a}^{-\lambda^2} + \bar{W}_0 \bar{a}^{-\delta\lambda}. \quad (3.81)$$

Este potencial tiene un rasgo interesante y es que dependen del tipo de fluido ordinario del cual está lleno el Universo.

Sustituyendo la expresión del potencial obtenida, (3.81) en la ecuación (3.72), se obtiene

$$\bar{H}^2 = A\bar{a}^{-\delta\lambda} + B\bar{a}^{-\lambda^2}, \quad (3.82)$$

donde $A = \gamma(\lambda^2 - 6)/(\lambda^2 - \sqrt{2/3}W\lambda - 3\gamma)$ y $B = 2\bar{V}_0/(6 - \lambda^2)$. Además considerando que $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_{0,\gamma}\bar{a}^{-\delta\lambda}$.

Para poder resolver la ecuación obtenida para el parámetro de Hubble se debe considerar el siguiente tiempo conforme $dr = \bar{a}^{-\lambda^2/2}d\bar{t}$ y de esta forma se puede integrar la ecuación en cuadraturas

$$\int \frac{\bar{a}^{\lambda(\delta-\lambda)/2-1}d\bar{a}}{\sqrt{\frac{A}{B} + \bar{a}^{\lambda(\delta-\lambda)}}} = \sqrt{B}(r + r_0), \quad (3.83)$$

donde r_0 es otra constante de integración.

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\bar{a}^{\lambda(\delta-\lambda)/2} = \sqrt{\frac{A}{B}} \sinh [\mu(r + r_0)], \quad (3.84)$$

donde $\mu = \sqrt{B/\xi}\lambda(\delta - \lambda)/2$. Para el campo escalar reescalado de Brans Dicke se obtiene

$$\exp(\psi) = \left\{ \sqrt{\frac{A}{B}} \sinh [\mu(r + r_0)] \right\}^{2/(\delta-\lambda)}. \quad (3.85)$$

En consecuencia con esto la densidad de materia es

$$\bar{\Omega}_m = \frac{\bar{\rho}_{0,\gamma}}{3A} \frac{\bar{a}^{\lambda(\lambda-\delta)}}{\bar{a}^{\lambda(\lambda-\delta)} + A/B}. \quad (3.86)$$

La densidad del campo escalar es

$$\bar{\Omega}_\psi = 1 - \bar{\Omega}_m. \quad (3.87)$$

Es de interés observacional poder reescribir estas ecuaciones en función del corrimiento al rojo. En el MJ se tiene $a(z) = a(0)/(z+1)$. Si escogemos la normalización $a(0) = 1 \rightarrow \bar{a}(0) = 1$ entonces $a = \exp(-\psi/(2\sqrt{\xi}))\bar{a} = \bar{a}^n$ lo que implica que $\bar{a} = (1+z)^{-1/n}$, donde n se define como $n = (2\sqrt{\xi} - \lambda)/(2\sqrt{\xi})$.

Después de realizar estas consideraciones se puede obtener la siguiente expresión para la densidad de materia

$$\bar{\Omega}_m = \frac{\bar{\rho}_{0,\gamma}}{3A} \frac{(1+z)^{-\lambda(\lambda-\delta)/n}}{(1+z)^{\lambda(\lambda-\delta)/n} + B/A}. \quad (3.88)$$

La expresión para el parámetro de Hubble es

$$\bar{H}(z) = \sqrt{A} \sqrt{(1+z)^{\lambda\delta/n} + \frac{B}{A}(1+z)^{\lambda^2/n}}. \quad (3.89)$$

Otras magnitudes de interés observacional son el parámetro de estado del campo escalar y el parámetro de desaceleración del Universo

$$\bar{\omega}_\psi = -1 + \frac{\lambda^2}{3(1-\bar{\Omega}_m)} \quad y \quad \bar{q} = -1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\gamma}{2}\bar{\Omega}_m. \quad (3.90)$$

Es útil dar las principales magnitudes físicas de interés observacional en el Marco de Jordan (MJ), estas magnitudes deben relacionarse con las ya obtenidas en el Marco de Einstein (ME). Para esto se debe recordar que $dt = \exp(-\psi/(2\sqrt{\xi}))d\bar{t} = \bar{a}^{-\lambda/(2\sqrt{\xi})}d\bar{t}$, $a = \exp(-\psi/(2\sqrt{\xi}))\bar{a}$ y $\rho_m = \exp(-2\psi/\sqrt{\xi})\bar{\rho}_m = \bar{a}^{2\lambda/\sqrt{\xi}}\bar{\rho}_m$. Otra importante relación es $H = n \exp(\psi/(2\sqrt{\xi}))\bar{H} = n\bar{a}^{\lambda/(2\sqrt{\xi})}\bar{H}$.

Utilizando estas relaciones podemos obtener que los parámetros de densidad de materia se relacionan de la siguiente forma

$$\Omega_m = \frac{1}{n^2}\bar{\Omega}_m, \quad (3.91)$$

También se puede obtener como se relacionan otras magnitudes de interés astrofísico con el parámetro de densidad de materia en el ME:

La densidad del campo escalar

$$\Omega_\psi = 1 - \frac{1}{n^2} \bar{\Omega}_m. \quad (3.92)$$

El parámetro de estado para el campo escalar

$$\omega_\psi = -1 + \lambda \frac{(n/3)(\lambda - 1/\sqrt{\xi}) - \gamma \bar{\Omega}_m / (2\sqrt{\xi})}{n^2 - \bar{\Omega}_m}. \quad (3.93)$$

La relación entre el parámetro de desaceleración en el ME y el del MJ se puede escribir de la siguiente forma

$$q = \frac{1}{n} \left[\bar{q} + (1 - n)(1 - \lambda^2/2) - n\lambda/(2\sqrt{\xi}) \right]. \quad (3.94)$$

Como las soluciones dependen (en principio) de cinco parámetros $(\lambda, \xi, \bar{\rho}_0, \bar{V}_0, \gamma)$ debemos reducir el espacio de parámetros seleccionando una normalización del parámetro de Hubble y algunos hechos observacionales. En las ecuaciones de Friedmann del ME y del MJ se puede apreciar que la densidad de materia siempre es menor que uno, en el caso de que sea igual a uno la solución no es estable. Empleando la misma consideración que los epígrafes anteriores cuando $z \rightarrow \infty$, la densidad de materia cumple con $\Omega_m(\infty) = (1 - \varepsilon)$, donde ε es un número pequeño. Esto equivale a decir que $\bar{\Omega}_m(\infty) = (1 - \varepsilon)n^2$. Al considerar esto se puede obtener $\bar{\rho}_{0,\gamma} = 3n^2 A(1 - \varepsilon)$. Acorde con las observaciones se tiene que $\Omega_m(0) = (1/n^2)\bar{\Omega}_m(0) \approx 1/3$. Esta última igualdad implica que $\bar{\rho}_{0,\gamma} = n^2(A + B)$. Combinando lo dicho en este párrafo se puede obtener que $B/A = 2 - 3\varepsilon$. En consecuencia con esto se puede reescribir la densidad de materia y el parámetro de Hubble como

$$\bar{\Omega}_m(z) = n^2(1 - \varepsilon) \frac{(1 + z)^{-\lambda(\lambda - \delta)/n}}{(1 + z)^{-\lambda(\lambda - \delta)/n} + 2 - 3\varepsilon}, \quad (3.95)$$

$$\bar{H}(z) = \frac{\sqrt{\bar{\rho}_{0,\gamma}}}{n} \sqrt{\frac{(1 + z)^{\lambda\delta/n} + (2 - 3\varepsilon)(z + 1)^{\lambda^2/n}}{3(1 - \varepsilon)}}. \quad (3.96)$$

Los parámetros libres de las soluciones se pueden reducir si seleccionamos la normalización en la cual $H(0) = 1 \Rightarrow \bar{H}(0) = 1/n$ y $\bar{\rho}_{0,\gamma} = 1$. En este caso nuestras soluciones sólo dependen de tres parámetros $(\gamma, \varepsilon, \lambda)$.

La evolución de las distintas magnitudes físicas en ambos marcos es muy similar, por lo que solamente en este trabajo se muestran las gráficas en el Marco de Einstein.

La gráfica (3.9) muestra la evolución del parámetro de estado del campo escalar con respecto al corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro libre λ , ($\lambda = 0.3$ (línea continúa más oscura), $\lambda = 1.41$ (línea continúa) y $\lambda = 2.24$ (línea discontinua))

y el mismo valor de ε ($\varepsilon = 0.01$). Al igual que para soluciones anteriores aquí se puede apreciar que solamente el valor pequeño de λ se ajusta al paradigma cosmológico actual.

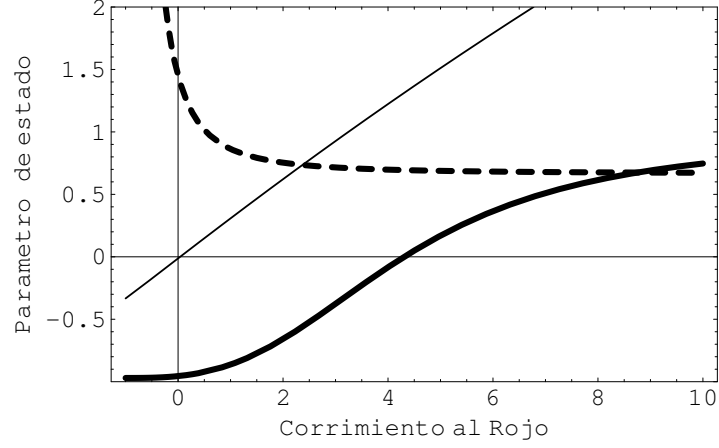


Figura 3.9: Grafica de la evolución del parámetro de estado respecto al corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro libre λ , ($\lambda = 0.3$ (línea continua más oscura), $\lambda = 1.41$ (línea continua) y $\lambda = 2.24$ (línea discontinua)). En todos los casos se escogió ($\varepsilon = 0.01$).

En la Figura (3.10) en donde se gráfica la evolución del parámetro de desaceleración respecto al corrimiento al rojo se puede apreciar que al igual que en la figura anterior, solamente cuando el valor de λ es 0.3 se puede reproducir los datos observacionales que se tienen hoy en día [35].

3.3 Conclusiones Parciales

En este capítulo se han obtenido soluciones exactas en modelos con acoplamiento mínimo y no mínimo entre el campo escalar y el fluido de fondo al imponer una dinámica de evolución del Universo. En las soluciones encontradas las magnitudes de mayor interés astrofísico dependen de algunos parámetros libres. Seleccionando adecuadamente el valor de estos parámetros se puede apreciar que las familias de soluciones que se obtuvieron a las ecuaciones del campo describen la evolución del Universo acorde con la data observacional.

En todos los casos estudiados los potenciales utilizados son simple exponencial o doble exponencial y nuestros resultados estuvieron de acuerdo con el paradigma cosmológico actual. Cuando se emplean estos potenciales se puede apreciar que la mayoría de los modelos que lo utilizan ajustan bastante bien con la data observacional especialmente los de doble exponencial que además son potenciales atractores que ayudan a suavizar el problema del ajuste fino. Además se pudo ver que en modelos con acoplamiento no mínimo los potenciales simples exponenciales permiten que en la evolución cósmica exista

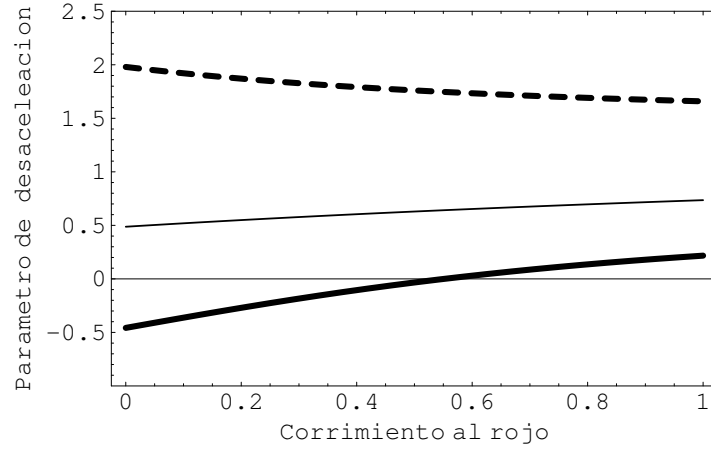


Figura 3.10: Evolución del parámetro de desaceleración respecto al corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro libre λ , ($\lambda = 0.3$ (línea continua más oscura), $\lambda = 1.41$ (línea continua) y $\lambda = 2.24$ (línea discontinua)). En todos los casos se escogió ($\varepsilon = 0.01$).

una transición entre una época de dominio de materia oscura, en el pasado, y una época de dominio de energía oscura, en el presente.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES.

Los sistemas de ecuaciones que se analizan en el capítulo precedente conducen a leyes dinámicas que, generalmente, se agrupan bajo el nombre de ecuaciones diferenciales no lineales.

La no linealidad de las ecuaciones diferenciales es la responsable de que, por regla general, la búsqueda de soluciones explícitas para dichas ecuaciones sea más bien un deseo y no una realidad. En estos casos el uso de métodos analíticos mediante los cuales se pueden inferir propiedades cualitativas de las soluciones (análisis cualitativo) es especialmente útil.

Un concepto de gran importancia en la teoría cualitativa de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es el concepto de la estabilidad de las soluciones. A finales del siglo XIX, el matemático Alexander Mijailovich Lyapunov en su tesis doctoral “El Problema General de la Estabilidad del Movimiento” presentada en 1892, ofreció el primer intento de una teoría completa de la estabilidad.

Actualmente se cuenta con un método que permite estudiar la estabilidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de las propiedades de una cierta función llamada Función de Lyapunov. El problema de estabilidad queda completamente resuelto cuando se encuentra una de tales funciones de Lyapunov. Desafortunadamente, no existe un procedimiento general para encontrar funciones de Lyapunov.

Después de los trabajos de Lyapunov vino una etapa de modificaciones, extensiones, reformulaciones y generalizaciones de sus teoremas de estabilidad e inestabilidad. También se realizaron investigaciones sobre los correspondientes teoremas inversos y las cuestiones relativas a la obtención de funciones de Lyapunov, donde matemáticos como N. A. Chetaev, V. I. Subov, A. Barbashin, N. N. Krasovskii, W. Hahn, L. S. Pontriaguin, G. D. Birkhoff y R. Belman han hecho aportes a esta teoría de la que Liapunov es considerado el iniciador.

En la cosmología la técnica de sistemas dinámicos es utilizada para realizar análisis cuali-

tativos, especialmente en modelos cosmológicos que sean espacialmente homogéneos cuya evolución este gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias [37]. Esta técnica es una poderosa herramienta para estudiar los comportamientos intermedios en diferentes épocas en la evolución del Universo, la época inflacionaria, la de dominio de la radiación, la de dominio de la materia y en la presente.

4.1 Análisis de la estabilidad por la primera aproximación.

Para sistemas no lineales y/o sistemas variantes en el tiempo, el análisis de estabilidad puede ser extremadamente difícil o imposible [35]. El análisis de estabilidad de Lyapunov es uno de los métodos que puede ser aplicado para solucionar cuestiones de estabilidad para sistemas no lineales.

Aunque el análisis de estabilidad según Lyapunov es muy útil y poderoso para tratar problemas que involucran sistemas no lineales, determinar la estabilidad de muchos de estos sistemas no es nada trivial. Ingenio y experiencia en la solución de problemas no lineales son muy importantes.

Para el análisis de la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

donde f_i es una función derivable en un entorno del origen de coordenadas, se aplica con frecuencia el siguiente método: como la función $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es derivable, el sistema (4.1) en un entorno del origen de coordenadas $x_i \equiv 0$ puede representarse en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2)$$

donde los R_i son infinitesimos de orden mayor que uno con respecto a $\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$; luego de esto, en lugar de investigar la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ del sistema (4.2), se analiza la estabilidad de este mismo punto del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

llamado sistema de ecuaciones de primera aproximación respecto al sistema (4.2). Las condiciones de aplicabilidad de este método, utilizado durante mucho tiempo sin ninguna base, fueron analizadas detalladamente por A. M. Lyapunov, y posteriormente generalizadas por muchos otros matemáticos.

El análisis de estabilidad del sistema de ecuaciones de primera aproximación, claro esta, es un problema mucho más fácil que el estudio del sistema original, en general no lineal, sin embargo, aún la investigación del sistema lineal (4.3) con coeficientes $a_{ij}(t)$ variables es un problema muy complejo. Si, en cambio, todas las $a_{ij}(t)$ son constantes, es decir, si el sistema es estacionario en primera aproximación, la investigación de la estabilidad del sistema lineal (4.3) no posee dificultades principales.

Teorema: Si el sistema de ecuaciones (4.2) es estacionario en primera aproximación, si en todos los términos R_i , en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, cuando $t_0 \leq T \leq t$, satisfacen las desigualdades $|R_i| \leq N (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2+\alpha}$, donde N y α son constantes y $\alpha > 0$ (o sea, si las R_i no dependen de t , entonces su orden es mayor que uno con respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$) y si todas las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

tienen partes reales negativas, entonces las soluciones triviales $x_i \equiv 0$ del sistema (4.2) y del sistema (4.3) son asintóticamente estables; por lo tanto, en este caso es posible el análisis de la estabilidad por la primera aproximación.

Teorema: Si el sistema de ecuaciones (4.2) es estacionario en primera aproximación, si todas las funciones R_i satisfacen las condiciones del teorema anterior y si por lo menos una raíz de la ecuación característica (4.4) tiene parte real positiva, entonces los puntos de reposo $x_i \equiv 0$ del sistema (4.2) son inestables. En consecuencia, en este caso también es posible investigar la estabilidad en primera aproximación.

Los teoremas anteriores desde el punto de vista de las limitaciones que imponen a las raíces de la ecuación característica, no abarcan solamente el llamado caso crítico, o sea, cuando todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica no son positivas, y además la parte real de por lo menos una raíz es igual a cero.

En el caso crítico los términos no lineales R_i comienzan a influir sobre la estabilidad de la solución trivial del sistema (4.2) y la investigación de la estabilidad por la primera aproximación, en general, no es posible.

4.2 Espacio de fase y puntos críticos.

En la cosmología los modelos del universo son una sucesión de diferentes épocas las cuales se caracterizan por el término fuente del fluido dominante. Una típica secuencia de épocas es la siguiente

1. Inflación, en donde domina el campo escalar.
2. Dominación de la Radiación ($p = \rho/3$).
3. Dominación de la Materia ($p = 0$).
4. Época donde el universo se encuentra en una fase de expansión acelerada, dominado por energía oscura.

Cada uno de estos términos fuentes tiene asociados un parámetro de densidad de energía normalizada con el parámetro de Hubble ($\Omega_\phi, \Omega_r, \Omega_m$). Cada época es definida de forma tal que durante ese periodo de tiempo domina determinado parámetro de densidad de energía. De forma general en los modelos del universo se asume la presencia de uno o dos términos fuentes y se investiga los regimenes asintóticos (están definidos por los límites $t \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow \infty$), los cuales matemáticamente se describen por un pasado atractor y un futuro atractor del sistema dinámico. Por ejemplo, el pasado el régimen asintótico de la era en que domina la radiación pudiera coincidir con el final de la época inflacionaria y el futuro asintótico pudiese coincidir con el comienzo de la era en que domina la materia.

En las ecuaciones del campo de Einstein se debe normalizar las variables debido a que cerca de la singularidad física inicial las variables típicamente divergen y los tiempos futuros tienden a cero. Una de las razones para normalizar con el parámetro de Hubble es que se puede describir la evolución del modelo cosmológico cerca de una singularidad inicial donde hay un atractor en el pasado y aparece otro en el futuro. Al realizar esta normalización en presencia de un Universo que se expande ($k = 0$) se logra que el espacio de fase sea compacto, es decir que todos los puntos de la frontera estén dentro del espacio. De esta forma se garantiza que aparezcan dos conjuntos límites, uno en el pasado y otro en el futuro, donde las trayectorias dentro del espacio de fase convergen hacia estos conjuntos, es decir siempre hay un punto del cual se salga y otro al cual se llegue.

Con el objetivo de realizar un estudio cualitativo sobre la estabilidad de las soluciones alrededor de estos puntos críticos, es necesario obtener una aproximación lineal al sistema bajo consideración [38] lo que tiene sentido hacerse porque la configuración de un sistema no lineal en la cercanía de un punto de equilibrio, es, en general, la misma que en el sistema lineal propuesto en [39].

Para esta tarea se buscan los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema después de ser evaluada en el punto crítico bajo estudio y se analiza el comportamiento del signo de las partes reales de los vectores propios de dicha matriz.

Para realizar el estudio de estabilidad de la forma más general posible, en este epígrafe no se especifica un determinado modelo de energía oscura, solamente se exige que el parámetro de estado de la energía oscura sea menor que $-1/3$, de esta forma se garantiza la expansión acelerada del universo.

Las ecuaciones cosmológicas son, la ecuación de Friedmann (se incluye la situación más general en donde se considera curvatura ($k \neq 0$))

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = \rho_m + \rho_\phi, \quad (4.5)$$

la ecuación de Raychaudhuri

$$2\dot{H} - 2\frac{k}{a^2} = -(p_m + \rho_m + p_\phi + \rho_\phi). \quad (4.6)$$

donde el sufijo (ϕ) lo utilizamos para representar la energía oscura y el sufijo (m) para indicar materia oscura.

Las ecuaciones de continuidad para la materia oscura y la energía oscura son:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = Q, \quad (4.7)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -Q, \quad (4.8)$$

donde el punto es la derivada respecto al tiempo cósmico y Q es el termino de interacción entre la materia oscura y la energía oscura.

Para el estudio de estabilidad se introducen las siguientes variables adimensionales

$$x \equiv \Omega_\phi, \quad y \equiv \Omega_\phi + \Omega_m, \quad (4.9)$$

Al introducir estas variables la ecuación de Friedmann se rescribe de la forma

$$y = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (4.10)$$

Si consideramos que el fluido de fondo es polvo ($\gamma = 1$) el sistema que conforman las ecuaciones (4.5-4.8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{Q}{3H^3} + x[y - 1 + 3\omega_\phi(x - 1)] \\ y' &= (y - 1)(y + 3\omega_\phi x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La prima en este capítulo representa la derivada respecto a la nueva variable $N = \ln a$, que esta relacionada con el tiempo cósmico por la relación $dN = Hdt$. Este sistema de dos ecuaciones representa un sistema autonomo si Q y ω_ϕ no dependen de forma explicita de N .

Al considerar que el Universo es plano ($k = 0$) el sistema (4.11) se complementa con una condición que permite restringir el espacio de fase. Esta ecuación es

$$0 \leq y - x \leq 1. \quad (4.12)$$

que es obtenida al requerir que el parámetro de densidad de energía de la materia sea positivo y menor que uno.

El primer paso para estudiar la dinámica del sistema (4.11) es encontrar los puntos críticos $(x', y') = (0, 0)$.

Posteriormente uno puede investigar la estabilidad al expandir el sistema (4.11) en una vecindad de los puntos críticos ($x = x_c + u$ y $y = y_c + v$). Al considerar que u y v son perturbaciones lineales se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

donde Λ es la matriz de los coeficientes en la expansión. La solución general para la evolución de las perturbaciones lineales puede ser escrita como

$$\begin{aligned} u &= u_1 \exp(\lambda_1 N) + u_2 \exp(\lambda_2 N) \\ v &= v_1 \exp(\lambda_1 N) + v_2 \exp(\lambda_2 N) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz Λ . En dependencia de como sean los autovalores, correspondientes a cada punto crítico, se puede estudiar la estabilidad de dicho punto crítico.

4.2.1 Modelos con Acoplamiento Mínimo.

Cuando estamos en presencia de acoplamiento mínimo el término de interacción es cero $Q = 0$. El modelo que analizaremos en este caso es el estudiado en el epígrafe (3.1).

x	y	Existencia	Estabilidad
1	1	Siempre	nodo estable si $k > 1/\sqrt{2}$, inestable si $0 < k < 1/\sqrt{3}$; de lo contrario es una silla
$\frac{1}{3k^2}$	1	$k \geq 1/\sqrt{3}$	nodo inestable
$\frac{1}{2k^2}$	$\frac{1}{2k^2}$	siempre	nodo estable si $0 < k < 1/\sqrt{2}$; de lo contrario es una silla

Tabla 4.1: Propiedades de los puntos críticos para la solución determinada en el epígrafe (3.1).

Punto	λ_1	λ_2
(1, 1)	$1/k^2 - 3$	$1/k^2 - 2$
$(\frac{1}{3k^2}, 1)$	1	$3 - 1/k^2$
$(\frac{1}{2k^2}, \frac{1}{2k^2})$	-1	$2 - 1/k^2$

Tabla 4.2: Autovalores para la solución determinada en el epígrafe (3.1).

En este caso el sistema de ecuaciones (4.11) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x' &= x[y - 1 + 3\omega_\phi(x - 1)] \\ y' &= (y - 1)(y + 3\omega_\phi x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para analizar la existencia y la estabilidad de cada uno de los puntos críticos del sistema anterior, es decir los puntos que satisfacen que $(x', y') = (0, 0)$, se analiza lo siguiente:

- Para que los puntos existan debe cumplir con $0 \leq y - x \leq 1$
- En el estudio de estabilidad se determinan los autovalores de cada punto crítico y se ve que condiciones debe cumplir estos autovalores para que todos sean reales menores que cero (nodo estable), reales mayores que cero (nodo inestable) y reales y que uno sea mayor que cero y el otro menor que cero y viceversa (punto silla).

En las tablas (4.1 y 4.2) se puede ver la estabilidad y existencia de los puntos críticos y los autovalores correspondientes.

El primer punto crítico (1, 1) es un nodo estable para $k > 1/\sqrt{2}$, valores que son favorecidos por la data observacional (como se explicó en el capítulo anterior). El segundo punto crítico siempre es inestable, mientras que el tercer punto crítico, para los valores del parámetro libre k que favorece la data observacional, es un punto silla. El Universo en este caso se encuentra evolucionando hacia una solución que es dominada por energía oscura completamente (primer punto crítico). Debido a que el segundo punto crítico (solución

x	y	Existencia	Estabilidad
1	1	siempre	nodo estable si $0 < \lambda < \sqrt{2}$ y $0 < \alpha < \frac{3-\lambda^2}{\lambda}$; punto silla si $(0 < \lambda < \sqrt{2}$ y $\alpha < \frac{3-\lambda^2}{\lambda})$ ó $(\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{3}$ y $0 < \alpha < \frac{3-\lambda^2}{\lambda})$; nodo inestable en otro caso
$\frac{\lambda}{3}(\lambda + \alpha)$	1	$0 < \lambda < \sqrt{3}$ y $0 < \alpha \leq \frac{3-\lambda^2}{\lambda}$	punto silla si $0 < \lambda < \sqrt{2}$ y $\frac{1}{\lambda} < \alpha < \frac{3-\lambda^2}{\lambda}$; nodo inestable en otro caso
$\frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{\lambda^2}{2}$	siempre	nodo estable si $\lambda > \sqrt{2}$ y $0 < \alpha < \frac{1}{\lambda}$; nodo inestable si $0 < \lambda < \sqrt{2}$ y $\alpha > \frac{1}{\lambda}$; punto silla en otro caso

Tabla 4.5: Propiedades de los puntos críticos para la solución determinada en el epígrafe (3.2.2).

Punto (x, y)	λ_1	λ_2
$(1, 1)$	$\lambda^2 - 2$	$\lambda^2 + \lambda\alpha - 3$
$(\lambda(\lambda + \alpha)/3, 1)$	$3 - \lambda^2 - \lambda\alpha$	$1 - \lambda\alpha$
$(\frac{\lambda^2}{2}, \frac{\lambda^2}{2})$	$\lambda\alpha - 1$	$2 - \lambda^2$

Tabla 4.6: Autovalores para la solución determinada en el epígrafe (3.2.2).

En la tabla (4.3) se muestran las propiedades de los puntos críticos (incluyendo existencia y estabilidad) para la solución determinada en el epígrafe (3.2.1), mientras que en la tabla (4.4) se presentan los correspondientes autovalores. En este caso $\chi = \chi_0 \exp(-\lambda\phi/2)$. El primer punto crítico $(1, 1)$ es un atractor estable dominado por energía oscura ($\Omega_{de} = 1$), mientras que la solución escalante ($\Omega_m/\Omega_\phi = 6/\lambda^2 - 1$) que se obtiene para el segundo punto crítico $(\lambda^2/6, 1)$ es siempre inestable. En la figura (4.1) el espacio de fase es mostrado. En esta gráfica todas las trayectorias en el plano de fase (x, y) , divergen desde un punto inestable (solución escalante dominada por materia) hasta converger hacia una solución atractor dominada por energía oscura. Las propiedades de los puntos críticos y su correspondientes autovalores para la solución que se obtuvo en el epígrafe (3.2.2), donde $\chi = \chi_0 \exp(\alpha\phi)$, son presentadas en las tablas (4.5) y (4.6) respectivamente. Se puede apreciar que cuando los parámetros libres se encuentran en el rango $(0 \leq \lambda < 1)$ y $(0 < \alpha < 3/\lambda - \lambda)$, la solución dominada por la energía oscura (primer punto crítico $(1, 1)$) es siempre un nodo estable. La solución escalante (segundo punto crítico $(\lambda(\lambda + \alpha)/3, 1)$) pudiera ser una silla si $(1/\lambda < \alpha < 3/\lambda - \lambda)$ de lo contrario sería un nodo inestable. En el diagrama de fase para este caso es mostrado en la figura (4.2) para los valores de $(\lambda = 0.3 \text{ y } \alpha = 5.7)$. Aquí se aprecia que todas las trayectorias en esta diagrama de fase divergen desde un nodo inestable (tercer punto crítico $(\lambda^2/2, \lambda^2/2)$ el cual es una solución dominada por energía oscura con curvatura) y convergen hacia una solución

x	y	Existencia	Estabilidad
1	1	Siempre	nodo estable si $0 < \lambda < \sqrt{2}$; silla si $\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{6}$; de lo contrario nodo inestable
$\frac{\lambda^2}{6}$	1	$0 < \lambda \leq \sqrt{6}$	nodo inestable
$\frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{\lambda^2}{2}$	siempre	punto silla si $0 < \lambda < \sqrt{2}$; nodo estable si $\lambda > \sqrt{2}$

Tabla 4.3: Propiedades de los puntos críticos para la solución determinada en el epígrafe (3.2.1).

Punto (x, y)	λ_1	λ_2
$(1, 1)$	$\frac{\lambda^2-6}{2}$	$\lambda^2 - 2$
$(\frac{\lambda^2}{6}, 1)$	$3 - \frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{\lambda^2+2}{2}$
$(\frac{\lambda^2}{2}, \frac{\lambda^2}{2})$	$-\frac{\lambda^2+2}{2}$	$2 - \lambda^2$

Tabla 4.4: Autovalores para la solución determinada en el epígrafe (3.2.1).

escalante dominada por energía oscura) es un punto silla, en la época actual nuestro Universo solo estará un determinado tiempo en la evolución cósmica, por lo que el problema de la coincidencia solamente se logra suavizar.

4.2.2 Modelos con Acoplamiento No Mínimo.

En los Modelos en donde existe acoplamiento no mínimo entre la materia oscura y la energía oscura el término de interacción entre estos componentes es diferente de cero ($Q \neq 0$).

En los Modelos con Quintaesencia se estudiaron las soluciones para tres formas diferentes del término de interacción (Q).

Modelos con Quintaesencia. Simple y Doble Potencial Exponencial.

En esta sección se considera que el sistema es autónomo, para esto seleccionamos el término de interacción como $Q = -(\ln \chi)' \rho_m$. Esta selección del término de interacción contempla muchas situaciones, entre ellas las soluciones que se encontraron en los epígrafes (3.2.1 y 3.2.2) y además permite reescribir el sistema de ecuaciones (4.11) como

$$\begin{aligned} x' &= (y - x)(\ln \chi)' + x[y - 1 + 3\omega_\phi(x - 1)] \\ y' &= (y - 1)(y + 3\omega_\phi x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

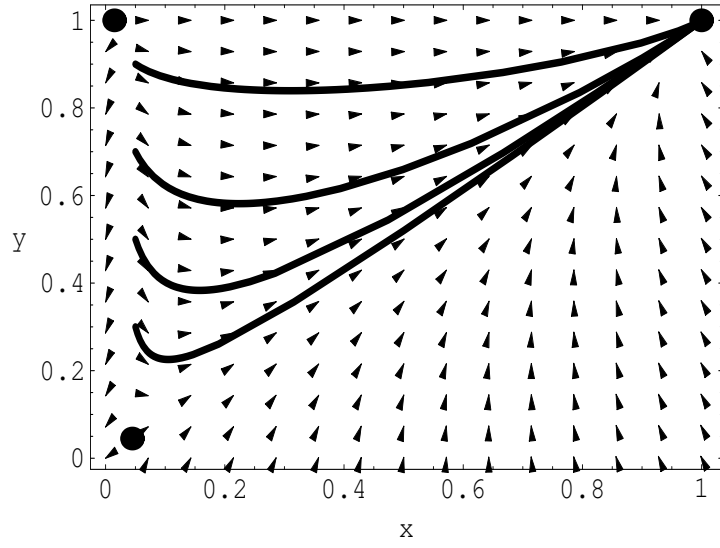


Figura 4.1: Diagrama de fase para la solución determinada en el epígrafe (3.2.1) ($\gamma = 1$, $\lambda = 0.3$). El punto crítico $(1, 1)$ es estable. El régimen escalante (punto $(0.015, 1)$) es un nodo inestable. El punto silla está localizado en $(0.045, 0.045)$.

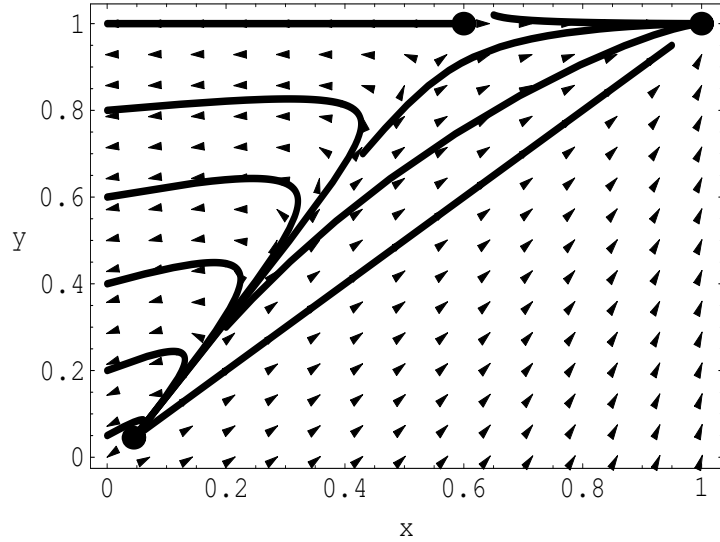


Figura 4.2: Diagrama de fase para la solución determinada en el epígrafe $(\gamma = 1, \lambda = 0.3)$. Diagrama de fase para la solución determinada en el epígrafe (3.2.2) ($\gamma = 1$, $\lambda = 0.3$ y $\alpha = 5.7$). El punto crítico $(1, 1)$ es estable. El régimen escalante (punto $(0.6, 1)$) es una silla, mientras que el punto $(0.045, 0.045)$ es un nodo inestable.

estable atractora dominada por energía oscura (primer punto crítico) y son repelidas por un punto silla (segundo punto crítico, solución escalante dominada por materia).

x	y	Existencia	Estabilidad
1	1	siempre	nodo estable si $0 < \lambda < \sqrt{2}$ y $W > (3 + \lambda^2)/(\sqrt{6}\lambda)$; nodo inestable si $\lambda > \sqrt{2}$ y $W < (3 + \lambda^2)/(\sqrt{6}\lambda)$ punto silla en otro caso
$\frac{\lambda}{9}(3\lambda - \sqrt{6}W)$	1	si se cumple que $\frac{3\lambda^2-9}{\sqrt{6}\lambda} \leq W \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda$	nodo inestable
$\frac{\lambda^2}{2}$	$\frac{\lambda^2}{2}$	siempre	nodo estable si $\lambda > \sqrt{2}$ y $W > -\sqrt{\frac{3}{2}}/\lambda$; punto silla en otro caso

Tabla 4.7: Propiedades de los puntos críticos para la solución determinada en el epígrafe (3.2.3).

Punto (x, y)	λ_1	λ_2
(1, 1)	$\lambda^2 - 2$	$\lambda^2 + \lambda W \sqrt{\frac{2}{3}} - 3$
$(\frac{\lambda}{9}(3\lambda - \sqrt{6}W), 1)$	$3 - \lambda^2 + \lambda W \sqrt{\frac{2}{3}}$	$1 + \lambda W \sqrt{\frac{2}{3}}$
$(\frac{\lambda^2}{2}, \frac{\lambda^2}{2})$	$\lambda W \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$	$2 - \lambda^2$

Tabla 4.8: Autovalores para la solución determinada en el epígrafe (3.2.3).

Estos resultados, que es de forma genérica para ambas soluciones, muestran como la solución escalante (dominada por energía oscura) con $0 < \Omega_m/\Omega_\phi \leq 1$ no siempre es un punto crítico del sistema autónomo (4.11), por lo que el problema de la coincidencia no se puede eliminar.

Modelos con Quintaesencia. Solución para la Teoría de Brans-Dicke.

En el epígrafe 3.2.3 se estudio esta solución. En este caso se tiene que $Q/(3H^3) = \sqrt{2/3}W\lambda$.

Un estudio de existencia y estabilidad se puede apreciar en las Tabla (4.7), mientras que los autovalores se presentan en la Tabla (4.8). De el estudio presentado en estas tablas se puede apreciar que al igual que en los soluciones anteriores la solución escalante dominada por energía oscura (segundo punto crítico $(\frac{\lambda}{9}[3\lambda - \sqrt{6}W], 1)$) es un nodo inestable por lo que tampoco se puede eliminar el Problema de la Coincidencia.

4.3 Problema de la Coincidencia

El problema de la Coincidencia se puede resumir en la siguiente pregunta ¿Por qué las densidades de energía de la materia oscura y de la energía oscura son del mismo orden precisamente en el presente? Para poder resolver este problema es recomendable estudiar la dinámica de la siguiente variable[25]

$$r = \frac{\rho_m}{\rho_\phi} = \frac{\Omega_m}{\Omega_\phi}, \quad (4.17)$$

respecto al tiempo conforme $N \equiv \ln a$, que como se dijo antes esta relacionado con el tiempo cósmico t a través de $dN = Hdt$.

La ecuación general que da la evolución para la variable adimensional r se puede escribir como

$$r' = f(r), \quad (4.18)$$

donde la prima es derivada respecto a la variable N y f es una función arbitraria (al menos de clase \mathcal{C}^1) de r .

La función $f(r)$ de forma general, utilizando las ecuaciones (4.5-4.8) se puede escribbr como

$$r' = \frac{Q}{\rho_\phi H}(r+1) + 3r(\omega_\phi - \omega_m). \quad (4.19)$$

Para estudiar los puntos de equilibrio de 4.18 ($f(r_{eq}) = 0$) se debe expandir $f(r)$ en la vecindad de cada uno de estos puntos; ($r = r_{eq} + \epsilon_i$), tal que si consideramos los términos lineales de la perturbación ϵ_i se tiene que $f(r) = (df/dr)_{r_{eq}}\epsilon_i + \mathcal{O}(\epsilon_i)$ y esto implica que $\epsilon'_i = (df/dr)_{r_{eq}}\epsilon_i$. Esta última ecuación puede ser integrada y obtener como evoluciona la perturbación

$$\epsilon_i = \epsilon_{0i} \exp \left[(df/dr)_{r_{eq}} N \right], \quad (4.20)$$

donde ϵ_{0i} es una constante de integración arbitraria. De la expresión anterior (4.20) se puede apreciar que solamente las perturbaciones que cumplen con

$$(df/dr)_{r_{eq}} < 0, \quad (4.21)$$

decrecen respecto a N y por tanto el correspondiente punto de equilibrio es estable. El problema de coincidencia se puede evitar si se logra que el punto de equilibrio que cumpla

con $\rho_m/\rho_\phi = r_{eq} \leq 1$ (punto de equilibrio que representa una solución escalante dominada por energía oscura) es estable.

Para el modelo donde existe un mínimo acoplamiento entre la materia oscura y la energía fría (solución obtenida en el epígrafe 3.1) la función f tiene la forma

$$r' = 3r\omega_\phi. \quad (4.22)$$

En este caso se obtiene que solamente existe un punto crítico que es para $r = 0$ y siempre va a ser estable ya que el parámetro de estado para la energía oscura siempre es negativo. En este modelo no se obtiene una solución escalante dominada por energía oscura, es decir el Problema de Coincidencia no se puede evitar.

En las soluciones que se obtuvieron en el epígrafe (3.2.1) y (3.2.2) el parámetro de estado de la energía oscura se puede escribir en función de la variable r de la forma $\omega_\phi = -1 + \lambda^2(r+1)/3$ y con este y la forma del término de interacción se puede obtener que la función f tiene la siguiente forma

$$f(r) = r[(\lambda^2 - \delta)(r+1) - 3], \quad (4.23)$$

donde $\delta = (\ln X)' = n\lambda$. Para el caso de la solución del epígrafe (3.2.1) $\delta = -\lambda^2/2$, mientras que para la solución del epígrafe (3.2.2) $\delta = \lambda\alpha$. Es fácil obtener, que en ambos casos solamente el punto de equilibrio estable es $r_{eq0} = 0$, por lo que la solución que es dominada por energía oscura no va a ser estable. Esto quiere decir que en ambos casos el problema de la coincidencia no se puede evitar.

En la solución obtenida en la Teoría de Brans-Dicke (epígrafe 3.2.3) la función f toma la forma

$$f(r) = r \left[\sqrt{2/3}W\lambda(r+1) - 3 + \lambda^2(r+1) \right]. \quad (4.24)$$

En este modelo se obtiene los mismos resultados que para los casos explicados anteriormente, es decir el punto estable no es la solución escalante dominada por energía oscura, esta solución es inestable por lo que tampoco se puede resolver el Problema de la Coincidencia.

4.4 Conclusiones Parciales

El modelo que se propone del Universo en donde existe un acoplamiento mínimo entre la energía oscura y la materia oscura no resuelve el Problema de la Coincidencia, lo que está acorde con lo planteado en la bibliografía [25, 26].

El estudio de estabilidad de los modelos que se presentan con acoplamiento no mínimo dio como resultado que no se pueda resolver el Problema de Coincidencia.

Sin embargo, para el caso de aquellos modelos que tenga una forma adecuada la función de acoplamiento entre los componentes de energía oscura y de materia oscura, es posible resolver dicho problema. La función de acoplamiento debe permitir que la función $f(r)$ tenga un punto de equilibrio $r_{eq} = \rho_m/\rho_\phi \leq 1$ (el cual representa la solución escalante dominada por energía oscura) el cual sea un punto estable. Los modelos del Universo que cumplan con dicha condición esatarán libres del Porblema de la Coincidencia, debido a que al sistema dinámico, que representan las ecuaciones del campo cosmológicas, siempre evoluciona hacia la solución estable y permanecera en está un largo período de tiempo en la evolución cósmica.

Capítulo 5

MODELOS DE ENERGÍA FANTASMA.

En los estudios recientes donde se combinan las observaciones astrofísicas (de las Supernovas tipo Ia y el fluido de fondo cósmico de microonda) se ha favorecido la existencia de un componente de energía oscura con un parámetro de estado supernegativo, $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi < -1$ [12, 13]. Las fuentes de energía que tienen esta característica violan la condición de energía nula dominante (CEND). Esta bien establecido que las fuentes de energía que violan la CEND tienen el parámetro de estado menor que menos uno [40]. Estas fuentes de energía están siendo investigadas como posibles candidatos de la energía oscura y son llamadas componentes “fantasmas” [41, 42]¹. Debido a que la CEND presupone inestabilidades en el vacío los modelos fantasmas son intrínsecamente inestables². Sin embargo, si consideramos a los campos fantasmas como una teoría efectiva, o sea, el límite de bajas energías de una teoría fundamental, por ejemplo, la teoría de cuerdas, estos modelos podría ser fenológicamente viables [40].

El argumento más usado para considerar la materia fantasma a un nivel clásico es unirla con la idea de que ha grandes distancias la teoría del campo de la partículas fantasmas es una teoría efectiva[45].

Algunos autores han encontrado que las bajas energías efectivas fantasmas pudieran originarse desde una nueva física más allá de la escala de TeV³. Una posibilidad, también vista en [45], es que las excitaciones masivas de los campos fantasma pudieran venir de un sector de poca energía que esta oculto totalmente del modelo estándar de las partículas, a excepción de un acoplamiento gravitacional. En nuestra opinión los mundos branas, en particular los escenarios de Randall-Sundrum tipo 2, pudiera ser la fuente

¹Que las fuentes que violan la CEND puedan existir se ha discutido décadas atrás, por ejemplo ver en la referencia [43].

²Otra característica muy extraña de los universos con energía fantasmas es que su entropía es negativa[44].

³La teoría de cuerda, en particular, no es recomendable como una fuente posible para los fantasmas[45].

de las energías fantasmas que se requieren para llevar a cabo la hipótesis de la energía fantasma. Además, la naturaleza fantasma de la energía oscura se puede reinterpretar como que sale del apantallamiento dinámico de la constante cosmológica de las branas en los modelos de mundos branas de Dvali-Gabadadze-Porrati en donde se considera una constante cosmológica estándar en la brana[46]. Sin embargo, como no existe ningún consenso sobre este tema, en este capítulo, como en la mayoría de los trabajos sobre campos fantasmas, la motivación para investigar un modelo con fluido fantasma como energía oscura es debida, básicamente, por la data observacional.

Al número de características indeseadas de un componente fantasma, como el parámetro de estado “supernegativo”, se agrega el hecho de que su densidad de la energía aumenta hasta el infinito en un tiempo finito en el futuro en un universo que se expande⁴. Esta característica conduce a una singularidad catastrófica en el futuro, denominada Big Rip[48], la cual esta caracterizada por divergencias del factor de escala, el parámetro de Hubble y la derivada respecto del tiempo del parámetro de Hubble[49]. Aunque otros tipos de singularidad pueden ocurrir en escenarios con energía fantasma, en este capítulo estamos interesados solamente en la singularidad del tipo Big Rip⁵. Esta singularidad está determinada porque en un tiempo finito en el futuro, es decir un tiempo el cual se alcanza, la energía fantasma separara todas las estructuras existentes, incluyendo las moléculas, los átomos y los núcleos. Para evitar este acontecimiento catastrófico se han propuestos algunos modelos. En [51], por ejemplo, se ha demostrado que esta singularidad en el futuro de la evolución cósmica puede ser evitada o, por lo menos, ser hecha más suave si los efectos cuánticos se toman en consideración.

Otra manera de evitar la singularidad de Big Rip es tener en cuenta una interacción conveniente entre la energía fantasma y el fluido de fondo[55, 56]. Si existe transferencia de la energía del componente fantasma al fluido de fondo, es posible acomodar los parámetros libres del modelo, de una manera tal que las densidades de la energía de ambos componentes disminuyan con el tiempo y de esta forma se pueda evitar el Big-Rip[55]. Modelos con interacción entre el componente fantasma y el componente de materia del fluido de fondo también tienen presente el problema de la coincidencia[55, 56, 58].

Aunque las pruebas experimentales en el Sistema Solar han impuesto severas restricciones ante la posibilidad de un acoplamiento no mínimo entre la energía oscura y los fluidos de materia ordinaria [59], debido a la naturaleza desconocida de la materia oscura, la cual forma parte mayoritaria del fluido de fondo, es posible tener interacciones (no gravitacionales) adicionales entre el componente de energía oscura y la materia oscura, sin conflicto con los datos experimentales. Sin embargo, la idea de fijar una interacción no mínima entre el materia oscura y la energía oscura se debe tomar con precaución.

En este capítulo se estudian modelos con interacción entre energía fantasma, como compo-

⁴Varios modelos alternativos con energía fantasmas para explicar este parámetro de estado supernegativo se han considerado también. Vea, por ejemplo, las referencias[47].

⁵Un estudio detallado de los tipos de singularidad que pueden ocurrir en escenarios con energía fantasma ha sido estudiado en la referencia[50].

nente de la energía oscura, y los componentes del fluido de fondo, en este caso se considera materia oscura fría. Diferente al acercamiento fenomenológico que se sigue en otros casos para especificar el término de la interacción (véase las referencias [55, 56]), nosotros comenzaremos con una forma general para la interacción, la cual es inspirada en la Teoría Escalar-Tensorial de la gravedad.

Se considera el elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker (ver 1.2) y un Universo que contiene una mezcla de dos fluidos que interactúan entre sí: el fluido de fondo (principalmente materia oscura) con una ecuación lineal para el parámetro de estado $p_m = \omega_m \rho_m$ (ω_m constante) y el fluido fantasma con una ecuación para el parámetro de estado $\omega_\phi = p_\phi / \rho_\phi < -1$.

Adicionalmente en este capítulo se utiliza la variable adimensional r que se define como la razón entre las densidades de energía de la materia oscura y la energía oscura

$$r = \rho_m / \rho_\phi = \Omega_m / \Omega_\phi. \quad (5.1)$$

Esto es una parametrización útil y además se asume que r se puede escribir en función del factor de escala.

La acción escogida en este capítulo, basada en la Teoría Escala-Tensorial, tiene la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \chi^{-2}(\phi) \mathcal{L}_m(\mu, \nabla\mu, \chi^{-1}g_{ab}) \right\} \quad (5.2)$$

donde $\chi^{-2}(\phi)$ es la función de acoplamiento, \mathcal{L}_m es el lagrangeano de la materia y μ es un nombre colectivo para los grados de libertad materiales. De esta acción y utilizando el elemento de línea se pueden derivar la ecuación de Friedmann:

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = \rho_m + \rho_\phi, \quad (5.3)$$

y la ecuación de Raychaudhuri:

$$2\dot{H} - 2\frac{k}{a^2} = -(\rho_m + \rho_\phi + p_m + p_\phi). \quad (5.4)$$

Debido a que existe un intercambio de energía entre la energía fantasma y el fluido de fondo, la energía no se conserva por separado para cada uno de estos componentes. Esto se aprecia en las ecuaciones de continuidad para cada uno de estos componentes:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = Q, \quad (5.5)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -Q, \quad (5.6)$$

donde el punto representa la derivada respecto al tiempo cósmico y Q es el término de interacción. Note que la densidad total de energía $\rho_T = \rho_m + \rho_\phi$ ($p_T = p_m + p_\phi$) se

conserva: $\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0$. La forma general del término de interacción puede ser escrita en la siguiente forma

$$Q = \rho_m H \left[a \frac{d(\ln \bar{\chi})}{da} \right], \quad (5.7)$$

aquí hemos introducido la siguiente notación $\bar{\chi}(a) \equiv \chi(a)^{(3\omega_m-1)/2}$ y se asume que el acoplamiento se puede escribir como función del factor de escala⁶.

Si comparamos este término de interacción con otros que aparecen en la bibliografía, uno puede obtener la forma funcional de la función de acoplamiento $\bar{\chi}$ en cada caso. En [55], por ejemplo, $Q = 3Hc^2(\rho_m + \rho_\phi) = 3c^2 H \rho_m (r+1)/r$, donde c^2 es la velocidad de transferencia. Si se compara esta expresión con 5.7 se obtiene la siguiente función de acoplamiento:

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0 \exp \left[3 \int \frac{da}{a} \left(\frac{r+1}{r} \right) c^2 \right], \quad (5.8)$$

donde $\bar{\chi}_0$ es una constante de integración. Si $c^2 = c_0^2 = cte.$ y $r = r_0 = cte.$ entonces $\bar{\chi} = \bar{\chi}_0 a^{3c_0^2(r_0+1)/r_0}$.

Otro ejemplo que se encuentra en la bibliografía del término de interacción es el empleado en [56]: $Q = \delta H \rho_m$, donde δ es una función de acoplamiento adimensional. Este término de interacción se relaciona con la función de acoplamiento (5.7) de la siguiente forma:

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0 \exp \left[\int \frac{da}{a} \delta \right], \quad (5.9)$$

y para $\delta = \delta_0 = cte.$ se tiene que $\bar{\chi} = \bar{\chi}_0 a^{\delta_0}$.

Al sustituir la ecuación (5.7) en (5.5) entonces esta última ecuación puede ser integrada y se obtiene:

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3(\omega_m+1)} \bar{\chi}, \quad (5.10)$$

donde $\rho_{m,0}$ es una constante de integración.

Si se considera la expresión (5.1) entonces la ecuación (5.6) se puede reescribir como $\dot{\rho}_\phi/\rho_\phi + 3(\omega_\phi - 1)H = (3\omega_m - 1)rH [a d(\ln \chi^{-1/2})/da]$ y al integrarla se obtiene que:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi,0} \exp \left\{ - \int \frac{da}{a} \left[1 + 3\omega_\phi + ra \frac{d(\ln \bar{\chi})}{da} \right] \right\}, \quad (5.11)$$

donde $\rho_{\phi,0}$ es otra constate de integración. Usando las ecuaciones (5.10), (5.1) y (5.11) se obtiene una ecuación que relaciona la función de acoplamiento $\bar{\chi}$, el parámetro de estado para la energía fantasma ω_ϕ y la variable r :

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0 \left(\frac{r}{r+1} \right) \exp \left[-3 \int \frac{da}{a} \left(\frac{\omega_\phi - \omega_m}{r+1} \right) \right], \quad (5.12)$$

⁶Para campos escalares fantasma ha sido estudiada en [68]

donde, como antes, $\bar{\chi}_0$ es una constante de integración.

Debido a que las ecuaciones anteriores (5.11) y (5.12) dependen de $\omega_\phi = \omega_\phi(a)$ y $r = r(a)$, si se conocen la forma que poseen dichos parámetros entonces se puede describir la dinámica del modelo en estudio. Es decir que conociendo estas magnitudes se puede, mediante integración, obtener de la ecuación (5.12), la función de acoplamiento $\bar{\chi}(a)$ y seguidamente la densidad de energía de la materia (ρ_m) de la ecuación (5.10). La densidad de energía del campo fantasma se puede obtener a partir de las ecuaciones (5.1) y (5.11).

La ecuación de Friedmann (5.3) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$3H^2 = \rho_\phi(1 + r) = \rho_m \left(\frac{r + 1}{r} \right), \quad (5.13)$$

por lo que el parámetro de Hubble ($H = H(a)$) también se puede determinar.

De la ecuación (5.13) se obtiene que el parámetro adimensional de densidad de energía $\Omega_i = \rho_i/3H^2$ se puede escribir solamente en función de r

$$\Omega_\phi = \frac{1}{1 + r}, \quad \Omega_m = \frac{r}{1 + r}. \quad (5.14)$$

Es útil reescribir la ecuación (5.12) en términos de Ω_ϕ y de ω_ϕ :

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0(1 - \Omega_\phi) \exp \left[-3 \int \frac{da}{a} (\omega_\phi - \omega_m) \Omega_\phi \right], \quad (5.15)$$

Otro parámetro cosmológico importante es el parámetro de desaceleración ($q = -(1 + \dot{H}/H^2)$) el cual se está dado por la expresión:

$$q = -1 + \frac{3}{2} \left[\frac{\omega_\phi + 1 + (\omega_m + 1)r}{1 + r} \right], \quad (5.16)$$

ó en términos de Ω_ϕ y de ω_ϕ :

$$q = \frac{1}{2} [1 + 3\omega_m + (\omega_\phi - \omega_m)\Omega_\phi]. \quad (5.17)$$

5.1 Modelos Libres del Problema de Coincidencia.

En esta sección se estudiarán modelos con una apropiada función de acoplamiento $\bar{\chi}$ que hacen posible resolver el Problema de la Coincidencia. Se estudiarán separadamente dos casos: En uno el parámetro de estado es constante y en el otro el parámetro de estado es dinámico. Estos modelos fueron publicados en [57]

Como se explico en el capítulo anterior para resolver el Problema de Coincidencia debemos determinar la función $f(r)$ y lograr que el punto de equilibrio ($r_{equilibrio}$) (menor o próximo

a uno, es decir que represente una solución escalante, o sea, que exista una razón entre las densidades de energía de la materia oscura y la energía oscura) sea un punto estable.

Esta función $f(r)$ para los modelos con energía fantasma que se proponen en este capítulo, tiene la forma:

$$f(r) = r [(\ln \chi)' (r + 1) + 3 (\omega_\phi - \omega_m)]. \quad (5.18)$$

5.1.1 Modelo con el Parámetro de Estado Constante.

En este modelo se considera que la ecuación del parámetro de estado tiene la forma $\omega_\phi = \omega_{\phi,0} = -(1 + \xi^2)$, donde ξ^2 pertenece a los reales positivo.

En aras de tener un modelo donde los parámetros adimensionales de densidad de energía de materia (Ω_m) y de energía fantasma (Ω_ϕ) no se anulen durante un largo período de tiempo cosmológico (no existe el problema de la coincidencia) y que al mismo tiempo sea consistente con la evidencia observacional, donde en un pasado reciente hubo una época dominada por materia oscura con expansión desacelerada (corrimientos al rojo $z \sim 0.39$ [13]), se selecciona el siguiente parámetro adimensional de densidad de energía de la energía fantasma:

$$\Omega_\phi = \frac{m}{B} \left(\frac{a^m}{a^m + C} \right), \quad (5.19)$$

donde m , B y C son parámetros constantes arbitrarios.

El parámetro adimensional de la densidad de energía de la energía fantasma puede ser ajustado a la data observacional debido a una selección adecuada de los parámetros m , B y C . El parámetro m controla la curvatura de la curva de $\Omega_\phi(z)$, mientras que el parámetro C controla el punto en el cual $\Omega_\phi(z_{eq}) = \Omega_m(z_{eq})$. En este sentido este modelo pudiera ser un modelo que reproduce bien la data observacional si se seleccionan adecuadamente los parámetros libres.

Si la expresión (5.19) se sustituye en (5.15) se tiene que:

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0 \frac{\left(1 - \frac{m}{B}\right) a^m + C}{(a^m + C)^{1-3(\omega_m - \omega_{\phi,0})/B}}. \quad (5.20)$$

En términos de r la función $(\ln \bar{\chi})'$ se puede escribir como

$$(\ln \bar{\chi})' = \frac{B - m}{r} - \frac{nB}{r + 1}, \quad (5.21)$$

está expresión es útil cuando estudiamos el Problema de la Coincidencia.

Con las ecuaciones (5.1) y (5.10) se pueden determinar las expresiones para las densidades de energía de la materia oscura y la energía fantasma, respectivamente:

$$\rho_m = \bar{\rho}_{m,0} a^{-3} \frac{\left(1 - \frac{m}{B}\right) a^m + C}{(a^m + C)^{1-3(\omega_m - \omega_{\phi,0})/B}}, \quad (5.22)$$

donde $\bar{\rho}_{m,0} \equiv \rho_{m,0}\bar{\chi}_0/B$ y

$$\rho_\phi = \bar{\rho}_{\phi,0} a^{m-3} (a^m + C)^{1-3(\omega_m - \omega_{\phi,0})/B}, \quad (5.23)$$

donde $\bar{\rho}_{\phi,0} \equiv m\rho_{\phi,0}\bar{\chi}_0/B$.

Al analizar las expresiones para la densidades de energía de materia oscura y de energía fantasma se puede ver que si se cumple que: $\omega_m - B/m \leq \omega_{\phi,0} < -1$, no existe la singularidad del Big Rip en el futuro de la evolución cósmica. Para grandes valores del factor de escala, en un Universo que se expande ($a \gg 1$), se tiene lo siguiente

$$\rho_\phi \propto r \rho_m \propto a^{-3(1-m(\omega_m - \omega_{\phi,0})/B)}, \quad (5.24)$$

es decir que la densidad de energía del componente fantasma esta acotada hacia el futuro. En particular la densidad de energía de la energía fantasma es una función decreciente del factor de escala. Notemos que el valor del parámetro $r = \omega_m/\omega_\phi$ se acerca a un valor constante $(B/m) - 1$, tal que ω_m y ω_ϕ son simultaneamente no despreciables.

Para mostrar que una solución con $r = r_0 = (B/m) - 1 \lesssim 1$ es estable, es útil escribir explícitamente la función $f(r)$ (ver ecuación 5.18) para este caso. La función $f(r)$ en este modelo es:

$$f(r) = m \left(\frac{B-m}{m} - r \right). \quad (5.25)$$

La ecuación (4.18) tiene solamente un punto de equilibrio: $r_{eq} = (B/m) - 1$. La derivada de $f(r)$ respecto a r , evaluada en el punto de equilibrio r_{eq} , es igual a $-m$. Siempre que el parámetro libre m sea positivo (como se requiere por la evidencia observacional) este punto de equilibrio es estable y nuestro modelo esta libre del Problema de Coincidencia (como se explico en el Capítulo anterior).

En la Figura (5.1) se muestra el comportamiento del parámetro adimensional de densidad de energía de la materia oscura y la energía fantasma así como la función r como función del corrimiento al rojo. Se emplearon los siguientes valores de los parámetros libres: $m = 12$, $\omega_{\phi,0} = -1.1$, $C = 0.02$ y para que el parámetro adimensional de densidad de energía de la energía fantasma en el presente tenga el valor de $\Omega_\phi(z=0) = 0.7$ se selecciono una expresión para el parámetro libre B , tal que $B = 1.25[m/(1+C)]$. En consecuencia para los valores seleccionados de m , B y C , tal que $B/m = 1.22$, los valores del parámetro de estado que sean mayores que -1.22 (como $\omega_{\phi,0} = -1.1$) implicaran que el modelo esta libre de la singularidad del Big Rip (ver la condición obtenida anteriormente de $-B/m \leq \omega_{\phi,0}$ en la ecuación 5.24).

En la Figura (5.2) se plotea el parámetro de desaceleración q contra el corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro de estado ($\omega_{\phi,0} = -1.1, -1.5, -3$ respectivamente). Un resultado interesante es que la solución sin Big Rip (línea continua gruesa) es preferida por la evidencia observacional, debido a que un análisis de la data proveniente de las Supernovas Tipo Ia [69] que es independiente del modelo, el valor medio del presente valor del parámetro de desaceleración es $\langle q(z=0) \rangle \approx -0.76$.

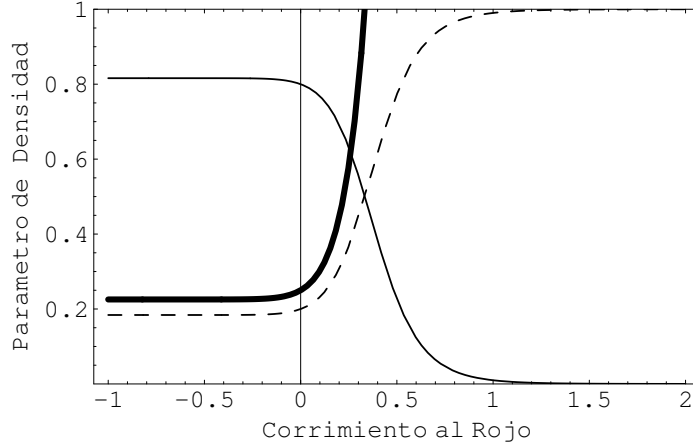


Figura 5.1: Gráfica del parámetro adimensional de densidad de energía de la materia oscura (línea discontinua) y de energía fantasma (línea continua fina) y la variable r (línea continua gruesa) respecto al corrimiento al rojo. Los valores de los parámetros libres seleccionados son $m = 12$, $\omega_{\phi,0} = -1.1$, $C = 0.02$ y $B = 14.07$. Se puede ver como la variable r se acerca a un valor constante para valores negativos de z (tiempo futuro), lo que significa que el sistema se encuentra en un estado escalante un largo período de tiempo. Para $z \sim 0.33$ los dos parámetros adimensionales de densidades se igualan y desde entonces domina el componente de energía fantasma.

La forma de como evitar el Problema de la Coincidencia también se puede ver en la Figura (5.1). La razón entre el parámetro adimensional de energía de la materia oscura y la energía fantasma se acerca a un valor constante ($r_0 = 0.23$) para valores negativos del corrimiento al rojo.

5.1.2 Modelo con el Parámetro de Estado Dinámico.

En esta sección se considerará un parámetro de estado dinámico ($\omega_\phi = \omega_\phi(a)$) y además se escogen las funciones de entrada (Ω_ϕ y ω_ϕ). En este caso se sigue el mismo procedimiento que se explico en el epigrafe anterior para obtener la dinámica del modelo, es decir obtener las distintas magnitudes cosmológicas. Para garantizar que se evite el problema de la coincidencia se escoge que el parámetro adimensional de densidad de energía de la energía fantasma sea de la forma:

$$\Omega_\phi(a) = \frac{\alpha a^m}{a^m + \beta}, \quad (5.26)$$

donde m , α y β son parámetros libres no negativos. Para seleccionar la función $\omega_\phi(a)$ se toma en consideración los siguientes aspectos: 1) para altos corrimientos al rojo y hasta recientemente ($z \simeq 0.39 \pm 0.03$ [13]) la expansión del Universo fue desacelerada (el parámetro q es positivo) y desde entonces la expansión es acelerada (q tiene valores negativos), 2) para corrimientos al rojo negativos el parámetro de estado se acerca a un

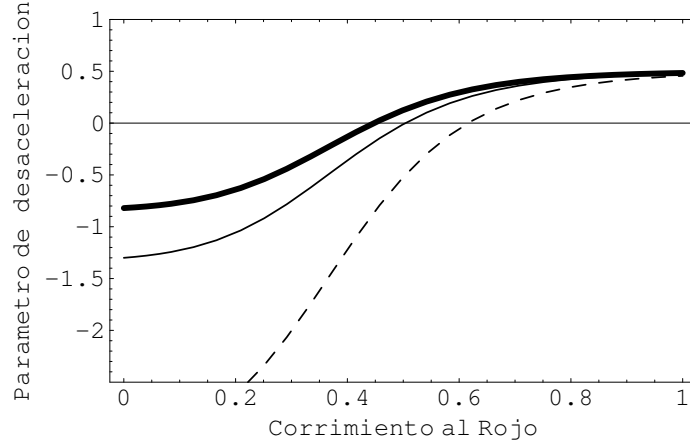


Figura 5.2: El parámetro de desaceleración es plotado como función del corrimiento al rojo para tres valores diferentes del parámetro de estado ($\omega_{\phi,0} = -1.1$ (línea continua gruesa), $\omega_{\phi,0} = -1.5$ (línea continua fina), $\omega_{\phi,0} = -3$ (línea discontinua)).

valor constante menor que menos uno ($\omega_{\phi,0} = -(1 + \xi^2)$, donde ξ^2 pertenece a los reales positivos). Se considera adicionalmente que el producto $(\omega_{\phi} - \omega_m)\Omega_{\phi}$ no debe ser una función compleja para que la integral en la ecuación (5.15) pueda ser obtenida de forma analítica. Una función que cumpla con estos requisitos tiene la forma:

$$\omega_{\phi}(a) = \omega_m + \omega_{\phi,0} \frac{(a^m + \beta)(a^m - \delta)}{a^{2m} + \delta}, \quad (5.27)$$

donde δ es otro parámetro libre. El parámetro m controla la curvatura de la función del parámetro adimensional de densidad de energía ($\Omega_{\phi}(z)$), mientras que δ controla el punto donde se igualan los parámetros adimensionales de densidad de energía de los dos componentes que tenemos en nuestro modelo.

Al seleccionar estas funciones y repitiendo el mismo procedimiento que se explico en la sección anterior se puede obtener que la función de acoplamiento tiene la forma:

$$\bar{\chi}(a) = \bar{\chi}_0(1 - \Omega_{\phi}) (a^{2m} + \delta)^{-3\alpha\omega_{\phi,0}/(2m)} \exp \left[\frac{3\alpha\sqrt{\delta}}{m} \arctan \left(\frac{a^m}{\sqrt{\delta}} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Las densidades de energía para los componentes de materia oscura y de energía fantasma son:

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} \left[\frac{(1 - \alpha)a^m + \beta}{(a^m + \beta)a^{3(\omega_m+1)}} \right] (a^{2m} + \delta)^{-\frac{3\alpha\omega_{\phi,0}}{2m}} \exp \left[\frac{3\alpha\sqrt{\delta}}{m} \arctan \left(\frac{a^m}{\sqrt{\delta}} \right) \right], \quad (5.29)$$

$$\rho_{\phi}(a) = \rho_{\phi,0} \left[\frac{a^{m-3(\omega_m+1)}}{a^m + \beta} \right] (a^{2m} + \delta)^{-\frac{3\alpha\omega_{\phi,0}}{2m}} \exp \left[\frac{3\alpha\sqrt{\delta}}{m} \arctan \left(\frac{a^m}{\sqrt{\delta}} \right) \right], \quad (5.30)$$

donde $\rho_{\phi,0} = \alpha\rho_{m,0}$.

En un Universo que se expande cuando el factor de escala es mucho mayor que uno la densidad de energía de la energía fantasma es proporcional al término $a^{-3(\omega_m+1+\alpha\omega_{\phi,0})}$. Esto significa que siempre que se cumpla que $-(1+\omega_m)/\alpha \leq \omega_{\phi,0} (< -1)$ la densidad de energía para el componente fantasma esta limitada en el futuro y por tanto en el tiempo futuro de la evolución cósmica no existe la singularidad del Big Rip para este modelo.

En la Figura 5.3 se plotea la densidad de energía de la materia oscura (gráfica superior), la densidad de energía del componente fantasma (gráfica intermedia) y el parámetro de Hubble (gráfica inferior) contra el corrimiento al rojo. Estas gráficas son para tres valores diferentes del parámetro de estado ($\omega_{\phi,0} : -1.1$ (línea continua gruesa), -1.5 (línea continua), -3 (línea discontinua)). Los valores de los parámetros libres seleccionados son: $m = 12$, $\beta = 0.03$ y $\delta = 3 \times 10^{-4}$. Si se asume que $\Omega_m(z=0) = 0.3$ [70] se puede encontrar la siguiente relación $\alpha = 0.7(\beta + 1)$. Para que nuestro modelo este libre de la singularidad del Big Rip se debe cumplir que $\omega_{\phi,0} \geq -1/\alpha = -1.387$, de aqui se puede apreciar que para los valores seleccionados solamente cuando $\omega_{\phi,0} = -1.1$ (gráfica con líneas continuas gruesas) se evita el Big Rip. Para los mismos valores de los parámetros libres, que anteriormente se seleccionaron, se puede apreciar que el término de interacción es negativo en un período de tiempo en el pasado (ver Figura (5.4)) lo que significa que la materia oscura le trasfiere energía al componente de energía oscura. Para altos corrimientos al rojo la evolución se realiza sin interacción. Se puede notar que solamente el caso libre de Big Rip ($\omega_{\phi,0} = -1.1$) el término de interacción esta limitado en el futuro.

En este modelo la transición desde una época de expansión desacelerada, en el pasado, hacia una época de expansión acelerada, en el presente, ocurre para $z \sim 0.4$ (ver Figura 5.5). En el presente el valor del parámetro de desaceleración se aproxima a ($q(z=0) \approx 0.8$), por lo tanto acorde con la data observacional [69] ($q(z=0) \approx -0.76$) y al igual que en el modelo anterior, en donde el parámetro de estado era constante, en este modelo se favorece a la solución que no presenta Big Rip (curva de línea continua gruesa), es decir cuando el parámetro de estado en el presente vale ($\omega_{\phi,0} = -1.1$). En la parte inferior de la Figura 5.5 es interesante notar que el componente de energía oscura se comporta como polvo ($\omega_{\phi} = 0$), para tiempos tempranos de la evolución cósmica (altos corrimientos al rojo), comportándose como un fluido “ordinario” con gravedad atractiva y recientemente ($z \simeq 0.45$) es que se convierte en un componente de energía fantasma. En el presente el Universo esta caracterizado por un valor constante del parámetro de estado ($\omega_{\phi,0} \sim -1.1$).

Para analizar como este modelo evade el Problema de Coincidencia se determina la función $f(r)$. A partir de la ecuacion 5.18 se puede obtener que para este modelo se tiene que:

$$f(r) = [\alpha(r+1) - 1] \left\{ [2m\delta + 3\alpha\beta\delta(1 - \omega_{\phi,0})r - m\alpha\delta(r+1)](r+1) - \frac{m}{\alpha}(\beta^2 + \delta) \right\} \quad (5.31)$$

Si se iguala esta función a cero se obtienen tres raices; una real y las otras dos imaginarias.

La raíz real de la ecuación (4.18) corresponde a ($r_{eq} = (1 - \alpha)/\alpha$). Para que este punto de equilibrio sea estable debe cumplirse que

$$\delta < \frac{m\beta}{(1 - \alpha)(1 - \omega_{\phi,0})}. \quad (5.32)$$

Los valores que fueron seleccionados para los parámetros libres para que el modelo en estudio reproduzca la data observacional cumplen con esta inecuación. Esto significa que la solución escalante dominada por energía fantasma, es decir la solución en donde $r_0 = (1 - \alpha)/\alpha$, es estable al hacer pequeñas perturbaciones lineales en su venciad y por lo tanto el Problema de la Coincidencia desaparece.

5.2 Conclusiones Parciales.

En este capítulo se han investigado modelos con una interacción adicional (no gravitatoria) entre la materia oscura y la energía fantasma. Este tipo de interacción es justificada si los componentes que interactúan son de naturaleza desconocida, como es el caso de la materia oscura y la energía fantasma.

Diferente al acercamiento fenomenológico que se sigue en otros casos (ver [55, 56]), en este capítulo se comienza con una forma general del término de interacción que es inspirado en la Teoría Escalar-Tensorial de gravitación. Se considera un modelo general de energía fantasma.

Se han estudiado dos modelos diferentes: uno en donde el parámetro de estado es constante y otro en donde este parámetro es dinámico. En ambos modelos se logra eliminar el Problema de la Coincidencia y además se obtiene que la data observacional favorece a modelos que sean libres del Big Rip.

En ambos modelos se selecciono una función de interacción de tal forma que los parámetros libres se pueden ajustar de tal forma que los modelos puedan reproducir la data observacional.

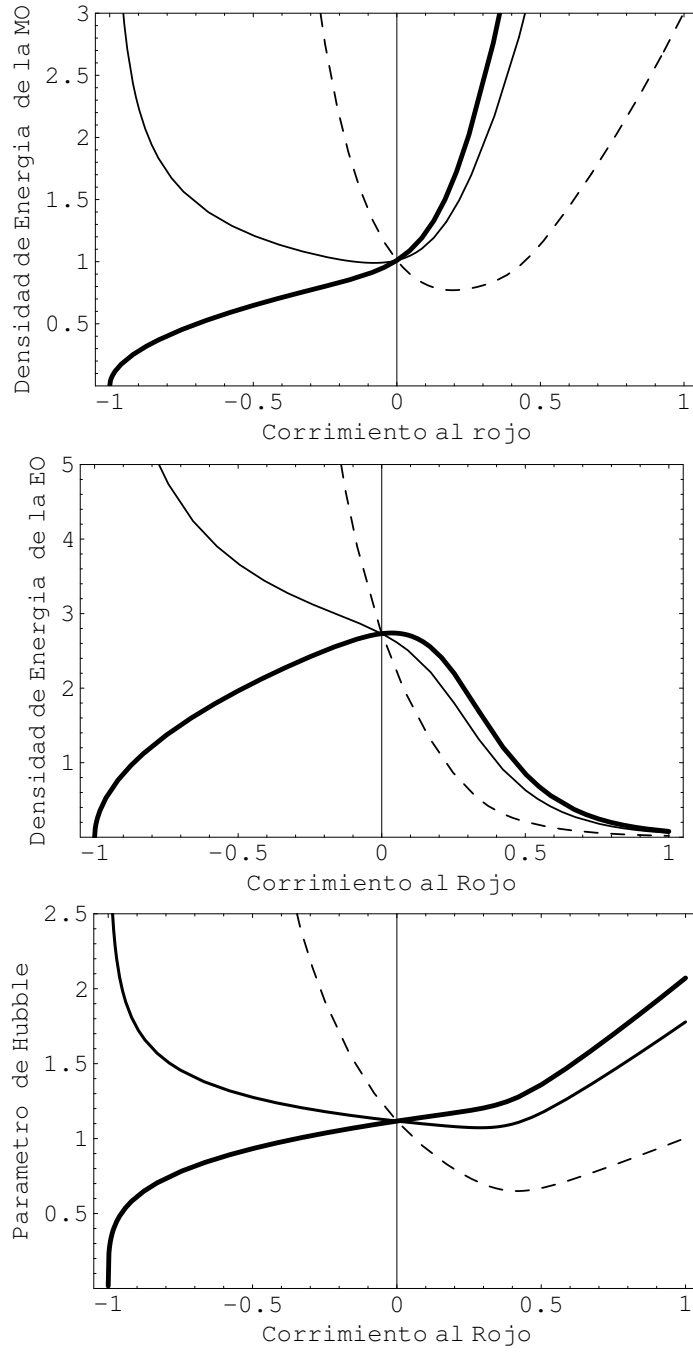


Figura 5.3: Gráficas de la densidad de energía de la materia oscura (MO) (gráfica superior), la densidad de energía fantasma (EO) (gráfica del medio) y el parámetro de Hubble respecto al corrimiento al rojo. Se seleccionaron los siguientes valores de los parámetros libres: $m = 12$, $\alpha = 0.72$, $\beta = 0.03$ y $\delta = 3 \times 10^{-4}$. Estas gráficas son para tres valores diferentes del parámetro de estado ($\omega_{\phi,0}$: -1.1 (línea continua gruesa), -1.5 (línea continua), -3 (línea discontinua)).

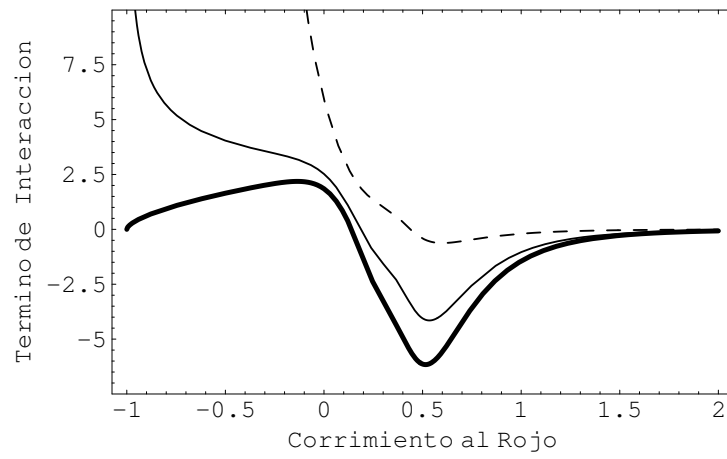


Figura 5.4: Evolución del Término de Interacción en función del corrimiento al rojo, para los mismos valores de los parámetros de la gráfica anterior.

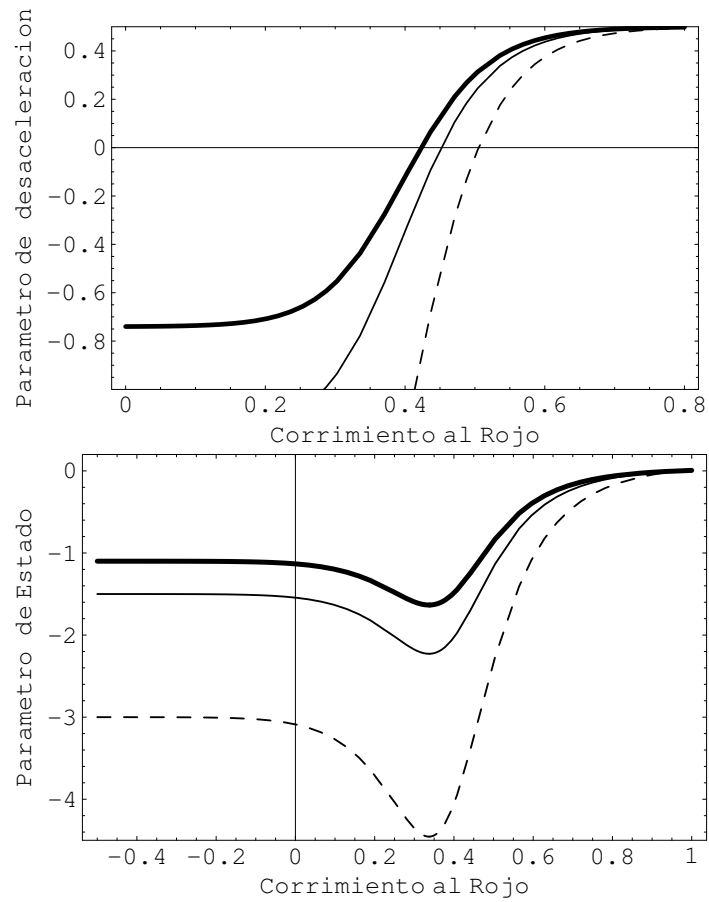


Figura 5.5: Evolución del parámetro de desaceleración (gráfica superior) y el parámetro de estado (gráfica inferior) en función del corrimiento al rojo, para los mismos valores de los parámetros de las gráficas anteriores.

CONCLUSIONES.

En esta Tesis se estudian modelos del Universo con inclusión de la energía oscura, tanto del tipo quintaesencia como energía fantasma, en donde se considera interacción (no gravitatoria) entre la energía oscura y el fluido de fondo (básicamente materia oscura). Estos modelos son basados en una Teoría Escalar-Tensorial de gravitación.

En los modelos de quintaesencia se encontraron nuevas familias de soluciones exactas a las ecuaciones del campo, para los casos donde se considera que existe tanto acoplamiento mínimo como no mínimo entre la materia oscura y la energía oscura. Para encontrar las soluciones exactas se asume una relación lineal entre la primera derivada del campo escalar respecto al tiempo cosmológico y el parámetro de Hubble. Esta consideración permite obtener el potencial de auto interacción del campo escalar a partir de una ecuación diferencial lineal (en el caso con acoplamiento no mínimo, se debe especificar, además, la función de acoplamiento). La relación lineal entre la raíz cuadrada de la energía cinética del campo escalar y el parámetro de Hubble es una de las vías más simples y naturales de poder resolver las ecuaciones del campo, siempre que no se tenga otra información, debido a que el parámetro de Hubble se puede considerar como una escala del tiempo cosmológico.

En los modelos, donde el acoplamiento es no mínimo, se estudian funciones de acoplamiento en forma de exponenciales, la Teoría de Brans-Dicke es un caso de este tipo de funciones de acoplamiento. Este tipo de acoplamiento puede conducir a potenciales de auto interacción que tienen la forma de simple exponencial y de una combinación de dos exponenciales simples.

En el estudio de estabilidad y existencia a las soluciones de estos modelos se aplica un método general en donde no se especifica el tipo de modelo de energía oscura. En todos los casos se obtienen tres puntos críticos. Para los valores de los parámetros libres que son favorecidos por la data observacional se tiene que la solución donde domina la energía oscura (quintaesencia) es siempre un nodo estable, mientras que la solución escalante puede ser un nodo inestable o un punto silla. Se observa que no se puede resolver el Problema de la Coincidencia, debido a que las soluciones donde se cumple que $\rho_m/\rho_\phi = \text{constante} \sim 1$ no son estables.

Del estudio realizado a los modelos de quintaesencia se puede concluir que los modelos con acoplamiento mínimo y no mínimo, que de forma general son complicados de resolver

matemáticamente, solo se pueden resolver de forma sencilla si se selecciona una adecuada dinámica de expansión del Universo, aunque a veces esto significa que las soluciones que se obtienen preservan el Problema de la Coincidencia.

En los Modelos con Energía Fantasma se investiga como una posible interacción adicional no gravitatoria entre la Materia Oscura y la Energía Oscura, modifica el Problema de la Coincidencia y, además, permite evadir el evento del Big-Rip, evento catastrófico típico de cosmologías fantasmas. En estos estudios no se tiene en cuenta un modelo de energía fantasma en específico. Se proponen dos modelos, en uno el parámetro de estado de la energía oscura se mantiene siempre constante y en el otro este parámetro es dinámico.

Al seleccionar, en estos modelos, el término de interacción de tal forma que se transfiera energía del componente fantasma hacia el componente de materia oscura se puede lograr que los parámetros libres se puedan escoger de manera tal que las densidades de energía del componente fantasma y la del componente de materia oscura decrezcan con el transcurso de la evolución cósmica, por lo que se puede obtener soluciones que eviten la singularidad del Big Rip. Desde un punto de vista observacional se obtuvo que los modelos sin Big Rip son favorecidos.

Estos modelos interactuantes de energía fantasma son útiles para explicar el Problema de la Coincidencia. Esto se debe a que las soluciones escalantes dominadas por energía oscura ($r_0 = \Omega_m/\Omega_\phi \lesssim 1$) son estables. Esto significa que una vez que el Universo alcance esta solución se mantiene en ella durante un período largo de tiempo cosmológico (en un Universo que se expande eternamente). Por lo que se pudiera decir que no es coincidencia que la densidad de energía de la materia oscura y la energía oscura sean del mismo orden precisamente hoy en día, sino que nuestro Universo se encuentra evolucionando hacia esta solución (solución escalante dominada por energía oscura) y debe permanecer en ella durante un largo tiempo.

RECOMENDACIONES

Luego de realizar un estudio de modelos del Universo con inclusión de la energía oscura, tanto del tipo quintaesencia como energía fantasma, en donde se considera interacción (no gravitatoria) entre la energía oscura y el fluido de fondo (básicamente materia oscura) se realizan las siguiente recomendaciones:

- Refinar los métodos de obtener soluciones exactas en los modelos con Quintaesencia para que estos no presente el Problema de la Coincidencia.
- Realizar un estudio de la evolución de las perturbaciones de la densidad de energía en los modelos estudiados.

Bibliografía

- [1] S. Perlmutter et al., *Astrophys.J.* **483** (1997) 565; S. Perlmutter et al., *Nature* 391, 51 (1998); P.M.Garnavich et al., *Astrophys.J.* **493** (1998)L53.
- [2] P. de Bernardis et al., *Nature* **404**, (2000), 955; A. Balbi et al., *Ap.J.*, **545**,(2000), L1; S. Hanany et al., *Ap.J.*, **545**, (2000), L5; T.J. Pearson et al., *Astrophys.J.*, **591** (2003) 556; C.L. Bennett et al, *Astrophys. J. Suppl.* ,**148**, (2003); D. N. Spergel et al., *ApJS*, **148**, (2003), 175 ; B. S. Mason et al., *Astrophys.J.* ,**591** (2003) 540.
- [3] W.J. Percival et al., *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **337**,(2002),1068 ; *MNRAS* **327**, (2001),1297 ; X. Wang et al., *Phys. Rev. D* **65**,(2002), 123001; T. Padmanabhan and Shiv Sethi, *Ap. J*, **555**,(2001), 125,astro-ph/0010309.
- [4] P.J.E. Peebles, astro-ph/0410284.
- [5] G. Efstathiou et al., *Nature*, **348**, (1990),705; J. P. Ostriker and P. J. Steinhardt, *Nature*, **377**, (1995),600; J. S. Bagla, T. Padmanabhan and J. V. Narlikar, *Comments on Astrophysics*, **18**, (1996), 275, astro-ph/9511102. S.J. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**,(1999),565; A.G. Reiss et al., *Astron. J.* **116**,(1998), 1009; J. L. Tonry et al., *ApJ*, **594**,(2003),1; B. J. Barris, *Astrophys.J.*, **602** (2004), 571; A. G.Reiss et al., *Astrophys.J.* **607**, (2004), 665; T. Padmanabhan and T. Roy Choudhury, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **344**,(2003), 823, astro-ph/0212573; T.Roy Choudhury, T. Padmanabhan, *Astron.Astrophys.*, **429**,(2005), 807, astro-ph/0311622; H. K. Jassal et al., *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.Letters*, **356**,(2005), L11, astro-ph/0404378.
- [6] P.J.E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75559 (2003).
(2002),3446-3458, astro-ph/0202007; http://map.gsfc.nasa.gov/m_m/mr_limits.html.
- [7] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**,(1989),1.
- [8] P.J. Steinhardt, “In Critical Problems in Physics”, edited by V.L. Fitch and D.R. Marlow (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997).
- [9] B. Ratra y P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3406; *Ap. J. Lett.* **325** (1988) L17;

- [10] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **302** (1988) 668; J.A.Frieman, C.T.Hill, A.Stebbins y I.Waga, Phys.Rev. Lett. **75** (1995)2077; K. Coble, S. Dodelson and J. A. Frieman, Phys. Rev. D **55** (1997) 1851; M. S. Turner y M. J. White, Phys. Rev. D **56** (1997)4439; P. G. Ferreira y M. Joyce, Phys.Rev.Lett. **79** (1997) 4740; P. G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. D **58** (1998) 023503; E.J. Copeland, A.R. Liddle y D. Wands, Phys.Rev. D **57** (1998) 4686; R. R. Caldwell, R. Dave y P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 1582; P. G. Ferreira y M. Joyce, Phys. Rev. D **58** (1998) 023503; L. M. Wang y P. J. Steinhardt, Astrophys. J. **508** (1998) 483; I. Zlatev, L. Wang y P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 986; P. J. Steinhardt, L. M. Wangand y I. Zlatev, Phys. Rev. D **59** (1999) 123504; I. Zlatev y P. J. Steinhardt, Phys.Lett. B **459** (1999)570; P. Bin´etruy, Phys. Rev. D**60** (1999) 063502; J. E. Kim, JHEP **9905** (1999)022; M. C. Bento and O. Bertolami, Gen. Rel. Grav. **31** (1999) 1461; J. P. Uzan, Phys. Rev. D **59** (1999) 123510; T. Chiba, Phys. Rev. D **60** (1999)083508; L. Amendola, Phys. Rev. D **60** (1999)043511.
- [11] L.P. Chimento, A.S. Jakubi and D. Pavón, Phys. Rev. D **62**, 063508 (2000), astro-ph/0005070; L.P. Chimento, A.S. Jakubi and D. Pavón, Phys. Rev. D **67**, 087302 (2003), astro-ph/0303145.
- [12] R. A. Knop et al., Astrophys. J. **598**, (2003), 102,astro-ph/0309368); A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], Astrophys. J. **607**, (2004), 665, astro-ph/0402512.
- [13] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, (2004), 275 , astro-ph/0311364; U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinski, JCAP **0406**, (2004), 008, astro-ph/0403687; B. Feng, X. L. Wang and X. Zhang, Phys. Lett. B**607**, (2005), 35-41, astro-ph/0404224; T. R. Choudhury and T. Padmanabhan, Astron. Astrophys. **429**, (2005), 807, astro-ph/0311622; H. K. Jassal, J. S. Bagla and T. Padmanabhan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Letters **356**, (2005), L11-L16, astro-ph/0404378.
- [14] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B **545**, 23-29 (2002); R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301 (2003); S. M. Carroll, M. Ho?man and M. Trodden, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003); P.Singh, M.Sami and N.Dadhich, Phys.Rev. D **68** 023522 (2003).
- [15] T. Matos “¿De qué está hecho el Universo? Materia Oscura y energía oscura”, editora La Ciencia para Todos, Mexico, ISBN 968-16-7448-0 (2004).
- [16] T. Appelquist, A. Chodos, y P.G.O. Freíd, “Modern Kaluza-Klein Theories”, editora Addison-Wesley, (1987).
- [17] D. Sciama, Mon. Not. Roy. Ast. Soc. , **113**,(1953), 34.
- [18] R.H. Dicke, “The Theoretical Significance of Experimental Relativity”, editorial Gordon and Breach, (1964).

- [19] C.H. Brans y R.H. Dicke, Phys. Rev. **124**,(1961),925.
- [20] C. H. Brans, “Gravity and the tenacious scalar field”, in Ed. A. Harvey, On Einstein´s Path (Springer, 1999); LANL Preprint gr-qc/9705069 (1997).
- [21] G. Magnano, M. Ferraris and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. **19**,(1987),465; M. Ferraris, M. Francaviglia and G. Magnano, Class. Quant. Grav. **5**,(1988),L95.
- [22] C. H. Brans, Class. Quant. Grav. **5**,(1988),L197.
- [23] G. Magnano and L. M. Sokolowski, Phys. Rev. D**50**(1994)5039; LANL Preprint gr-qc/9312008 (1993); G. Magnano, LANL Preprint gr-qc/9511027 (1995).
- [24] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, Fund. Cosmic Phys. **20** (1999) 121; LANL Preprint gr-qc/9811047 (1998).
- [25] L.P.Chimento, A.S.Jakubi, D.Pavon y W.Zimdahl, Phys.Rev., D**67** ,(2003),083513, astro-ph/0303145 .
- [26] L.Amendola, D.Tochini, Phys,RevD**66** (2002) 043528, astro-ph/0111535; Luca Amendola, Phys.Rev.D**62** (2000) 0433511, astro-ph/9908023.
- [27] W. Zimdahl, D. Pavon y L.P. Chimento, Phys. Lett. B**521**, 133 (2001).
- [28] R. Bean y J. Magueijo, Phys. Lett. B**517**,(2001),177-183.
- [29] C. Rubano and P. Scudellaro, Gen. Relativ. Gravit. **34**,(2002),307.
- [30] T. Gonzalez, O. Arias, Y. Leiva y I. Quiros, Class. Quantum. Grav., **20**,(2003), 2563-2578.
- [31] T. Gonzalez, R. Cardenas, O. Martin, I. Quiros and D. Villegas, Gen. Relativ. Gravit. **34**, (2002),1877.
- [32] T. Gonzalez, R. Cardenas, O. Martin, Yoelsy Leiva and I. Quiros, Phys. Rev. D**67**,(2003),083501.
- [33] T. González, G.Leon y I. Quiros, Class. Quantum Grav., 23, (2006), 3165-3179, astro-ph/0502383.
- [34] M.S. Turner, Astrophys J., **576**,(2002),L101-L104 .
- [35] A.G. Riess et al., Astrophys. J., **560**, (2001), astro-ph/0104455; M.S. Turner y A. Riess, Astrophys.J. **569**(2002), astro-ph/0106051.
- [36] D.J.Holden y D.Wands, Phys.Rev., D**61**,(2000),043506, gr-qc/9908026.
- [37] A.A. Coley, “Dynamical Systems and Cosmology”, Kluwer Academic Publishers, (2003).

- [38] W. Kaplan, “Ordinary differential equations”, Addison-Wesley (1960).
- [39] K. Ogata, “Ingeniería de control moderno”, Pueblo y Educación (1981).
- [40] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, Phys. Rev. D**68**, (2003), 023509, astro-ph/0301273.
- [41] R. R. Caldwell, Phys.Lett. B**545**, (2002), 23-29, astro-ph/9908168.
- [42] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B**562**, (2003), 147-152, hep-th/0303117.
- [43] H. P. Nilles, Phys. Rept. **110**, (1984), 1; J. D. Barrow, Nucl. Phys. B**310**, (1988), 743; M. D. Pollock, Phys. Lett. B**215**, (1988), 635.
- [44] I. Brevik, S. Nojiri, S. D. Odintsov and L. Vanzo, Phys. Rev. D**70**, (2004), 043520, hep-th/0401073.
- [45] J. M. Cline, S. Jeon, and G. D. Moore, Phys. Rev. D**70**, (2004), 043543, hep-ph/0311312.
- [46] A. Lue, G. D. Starkman, Phys. Rev. D**70**, (2004), 101501, astro-ph/0408246.
- [47] V. K. Onemli and R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **19**, (2002), 4607, gr-qc/0204065; Phys. Rev. D**70**, (2004), 107301, gr-qc/0406098.
- [48] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, (2003), 071301, astro-ph/0302506.
- [49] L. P. Chimento and R. Lazkoz, Mod.Phys.Lett. A **19**, (2004), 2479-2484, gr-qc/0405020.
- [50] S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Tsujikawa, Phys.Rev. D**71**, (2005), 063004, hep-th/0501025.
- [51] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B**595**, (2004) 1-8, hep-th/0405078; Phys. Rev. D**70**, (2004), 103522, hep-th/0408170; E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D**70**, (2004), 043539, hep-th/0405034.
- [52] B. McInnes, JHEP **0208**, (2002), 029, hep-th/0112066.
- [53] P. Wu and H. Yu, Nucl.Phys. B**727**, (2005), 355-367, astro-ph/0407424.
- [54] P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, Phys. Rev. D**68**, (2003), 023522, hep-th/0305110.
- [55] Z. K. Guo and Y. Z. Zhang, Phys. Rev. D**71**, (2005), 023501, astro-ph/0411524.
- [56] R. G. Cai and A. Wang, JCAP **0503**, (2005), 002, hep-th/0411025.
- [57] T. Gonzalez, R. Curbelo, G. Leon y I. Quiros, Class. Quantum Grav. **23**, (2006), 1585-1601, astro-ph/0502383.

- [58] W. Zimdahl, D. Pavon and L. P. Chimento, Phys. Lett. B**521**, (2001), 133-138, astro-ph/0105479; L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon and Winfried Zimdahl, Phys. Rev. D**67**, (2003), 083513, astro-ph/0303145; L. P. Chimento, A. S. Jakubi and D. Pavon, Phys. Rev. D **62**, (2000), 063508, astro-ph/0005070; L. P. Chimento, A. S. Jakubi and D. Pavon, Phys. Rev. D**67**, (2003), 087302, astro-ph/0303160.
- [59] C. M. Will, “Theory and Experiment in Gravitational Physics”, Cambridge University Press, (1993).
- [60] M. Doran and J. Jaeckel, Phys. Rev. D**66**, (2002), 043519, astro-ph/0203018.
- [61] H. Stefancic, Phys. Rev. D**71**, (2005), 124036, astro-ph/0504518.
- [62] A. A. Andrianov, F. Cannata, and A. Y. Kamenshchik, Phys. Rev. D**72**, (2005), 043531, gr-qc/0505087.
- [63] H. Wei, R-G. Cai, astro-ph/0512018.
- [64] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon and W. Zimdahl, Phys. Rev. D**67**, (2003), 083513, astro-ph/0303145.
- [65] N. Kaloper and K. A. Olive, Phys. Rev. D**57**, (1998), 811-822, hep-th/9708008.
- [66] M. Giovannini, Phys. Rev. D**72**, (2005) 083508, astro-ph/0507369.
- [67] A. P. Billyard and A. A. Coley, Phys. Rev. D**61**, (2000), 083503, astro-ph/9908224.
- [68] Z. K. Guo, R. G. Cai and Y. Z. Zhang, JCAP **0505**, (2005), 002, astro-ph/0412624.
- [69] M. V. John, Astrophys. J. **614**, (2004), 1, astro-ph/0406444.
- [70] P. J. E. Peebles, astro-ph/0410284.