New Physics: Sae Mulli,
Vol. 66, No. 1, January 2016, pp. 82∼89
http://dx.doi.org/10.3938/NPSM.66.82

Wormhole Solution in the Non-standard Theory of General Relativity

Jin Young Kim*
Department of Physics, Gunsan National University, Gunsan 54150, Korea

(Received 16 September 2015 : revised 25 September 2015 : accepted 25 September 2015)

We study the classical stability of the Euclidean wormhole solution of dilaton-axion supergravity based on string theory. We obtain the Einstein frame action from the bosonic action of type II string theory through a scale transformation. We derive the Euclideanized action by using a duality transformation and analytic continuation. From the $O(d)$-symmetric small fluctuation of the wormhole solution obtained by considering the axion field as exotic matter supporting the neck, we obtain two coupled equations of the metric and the dilaton. We find the stability condition for a wormhole from the harmonic perturbation. This condition is expressed in terms of the dimensionality of space time, the coupling of the dilaton to the axion, the cosmological constant, and the integration constant. As a concrete example, we consider the type II case where the coupling is given by $b = \sqrt{(d-2)/2}$ and show that the wormhole solution is unstable for all cases where the solution is obtained as elementary functions.

PACS numbers: 04.50.-h, 11.25.-w, 98.80.Cq
Keywords: Wormhole, Stability, Supergravity, String theory

비표준형 일반상대론에서의 웜홀 해

김진영*
군산대학교 물리학과, 군산 54150, 대한민국

(2015년 9월 16일 받음, 2015년 9월 25일 수정본 받음, 2015년 9월 25일 게재 확정)

끈이론에 근거한 딜라톤-액시온 초중력 이론의 유클리드 웜홀 해의 안정성을 살펴보았다. 유형 II 끈이론의 보존 (boson) 영역을 기술하는 작용을 척도변환을 하여 아인슈타인 틀에서의 작용을 구하여 이를 쌍대변환과 해석적 확장을 통해 유클리드 공간의 작용으로 나타내었다. 액시온을 웜홀의 목을 지탱하는 별난 물질장으로 보고 얻은 웜홀 해에 $O(d)$-대칭형 작은 요동을 고려하여 메트릭과 딜라톤에 관한 두 개의 결합된 방정식을 구하였다. 조화형 섭동을 고려하여 웜홀 해가 안정되기 위한 조건을 찾았다. 이 조건은 시공간의 차원, 딜라톤의 결합상수, 우주상수, 및 적분상수로 표현될 수 있다. 구체적인 예로 결합상수가 $b = \sqrt{(d-2)/2}$ 인 유형 II이론에서 해가 기본함수로 구해지는 모든 경우 웜홀 해는 요동에 대해 불안정함을 보였다.

PACS numbers: 04.50.-h, 11.25.-w, 98.80.Cq
Keywords: 웜홀, 안정성, 초중력, 끈이론

---

*E-mail: jykim@kunsan.ac.kr

I. 서 론

일반상대론에서 웜홀 해는 원래 점근적으로 평평한 두 시공간들을 연결하는 아인슈타인 방정식의 해로 정의되었다 [1]. 후에 웜홀 해는 점근적으로 평평한 시공간뿐만 아니라 반-드시터 (anti-deSitter, AdS) 및 드시터 (deSitter) 시공간에도 적용되는 개념으로 확장되었다. 웜홀 해에서 하나의 점근영역에서 다른 영역으로 물질이 이동할 수 있을 때 이를 통과가능한 웜홀 (traversable wormhole)이라 한다 [2,3]. 사건 지평선 (event horizon)이 존재하면 양방향 이동이 불가능하기 때문에 통과가능한 웜홀 해가 되기 위한 핵심요소 중 하나는 지평선이 없어야 한다는 것이다. 고전적 웜홀의 대표적인 예는 슈바르츠쉴드 블랙홀과 화이트홀을 연결한 아인슈타인-로젠 다리 (Einstein-Rosen bridge)를 들 수 있는데 이는 통과가능하지 않다. 양의 에너지를 갖는 물질만 허용되는 표준형 중력이론에서는 통과가능한 웜홀 해는 존재하지 않는다. 에너지 조건을 깨뜨리는 물질장을 도입하면 지평선이 없는 통과가능한 웜홀 해를 만들 수 있는데 이러한 물질들을 별난 물질 (exotic matter)이라 한다.

일반상대론은 통상적으로 큰 축적 (large scale, IR 영역)을 기술하는 이론으로 작은 축척 (small scale, UV 영역)에서는 양자효과에 의해 수정되어야 한다. 일반상대론과 양자역학을 결합한 양자중력 이론에서 웜홀은 우주론, 결합상수의 재규격화 등 다양한 흥미로운 현상에 중요한 역할을 한다. 4차원 이론에서는 웜홀의 목 (throat)을 지지하기 위해 액시온 (axion)장 [4], 스칼라장 [5], SU(2) Yang-Mills 장 [6] 등과 같은 물질장이 도입된 바 있다. 끈이론에 기초한 웜홀 해는 액시온과 질량이 없는 딜라톤을 도입하여 연구되었는데 [7,8] 유한한 작용을 갖는 특이하지 않은 (non-singular) 해의 존재는 딜라톤이 액시온에 어떻게 결합하는가에 의존한다.

양자중력에서 웜홀의 존재는 경로적분에 실수의 공헌을 할 것으로 여겼었다. 그러나 Rubakov와 Shvedov는 Giddings와 Strominger의 웜홀 해 [4]의 준고전적 섭동에서 음의 모드가 존재함을 보였다 [9]. 이는 웜홀이 유클리드적 함수 적분에 허수의 공헌을 하는 것을 의미하고 웜홀이 작은 우주를 방출함에 대한 큰 우주의 불안정성을 기술하는 것으로 해석할 수 있다. 1990년대 끈이론의 획기적인 발전을 가져온 D-막의 발견 및 막우주론 등에 의한 기초한 다양한 고차원 초중력이론의 연구에도 웜홀은 중요하다 [10–14]. 본 논문에서 비표준형 d차원 웜홀 해의 작은 섭동을 고려하여 웜홀의 안정성을 논의하고자 한다. 블랙홀의 안정성을 논의할 때와 유사하게 조화형 섭동 (harmonic form of perturbation)을 고려하여 모드 (mode)의 부호가 시공간의 차원, 우주상수, 장들의 결합 상수 및 적분상수에 어떻게 의존하는지를 살펴 그 안정성을 논의할 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서 유형 II 끈이론에 기초하여 딜라톤과 액시온을 갖는 초중력이론의 유클리드 작용과 운동방정식을 구하였다. III절에서 시공간의 차원, 우주상수 및 적분상수에 대해 해를 구하는 과정에 대해 설명하고 해가 존재하는 경우 그 해를 요약하였다. IV절에서는 $O(d)$-대칭을 갖는 작은 섭동을 고려하여 섭동항들의 결합된 방정식을 구하였다. 조화형 섭동을 가정하고 안정화되기 위한 조건을 살펴보았다. 마지막으로 V절에서 결과를 요약하고 앞으로 가능한 연구에 대해 논의하였다.

II. 액시온-딜라톤 초중력이론

본 논문에서 다루고자 하는 액시온과 딜라톤이 결합된 d-차원 초중력이론은 끈이론에 그 기원을 두고 있다. 유형 II 끈이론의 보존 (boson) 영역을 기술하는 작용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4\nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \right) - \frac{1}{2(d-1)!} F_{d-1}^2 - V(\phi) \right] \tag{1}$$

여기서 F_{d-1}은 Ramond-Ramond (RR) $(d-1)$-형태의 장세기 텐서, ϕ는 딜라톤, $V(\phi)$는 딜라톤의 퍼텐셜을 나타낸다. 위의 작용은 끈 틀 (string frame)에서의 작용인데 아래와 같은 척도변환 (scale transformation)을 하면

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\to e^{\frac{4}{d-4}\phi} g_{E\mu\nu}, \\ \sqrt{\frac{8}{d-2}}\phi &\to \phi_E \end{aligned} \tag{2}$$

아인슈타인 틀 (Einstein frame) 에서의 작용으로 나타낼 수 있다.

$$S_E = \int d^d x\sqrt{-g_E}\left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi_E)^2 - \frac{1}{2}e^{\sqrt{\frac{d-2}{2}}\phi_E}\frac{1}{(d-1)!}F_{d-1}^2 - V_E(\phi_E)\right] \tag{3}$$

위의 작용은 쌍대 변환 (duality transformation) $F_{\mu\cdots\nu} = \epsilon_{\mu\cdots\nu\lambda}e^{-\sqrt{(d-2)/2}\phi_E}\partial^\lambda\chi$ 을 통해 액시온 χ 를 도입하고 표기의 단순화를 위해 첨자 E 를 생략하면 다음과 같이 표현된다.

$$S = \int d^d x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{b\phi}(\nabla\chi)^2 - V(\phi)\right] \tag{4}$$

여기서 $b \equiv \sqrt{(d-2)/2}$ 이고 $d = 10$ 인 경우 $b = 2$ 이다. Minkowski 부호를 취하는 식 (4) 의 작용을 해석적 확장을 통해 유클리드 공간의 작용으로 나타내면 다음과 같다.

$$S_{eucl} = \int d^d x\sqrt{g}\left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{b\phi}(\nabla\chi)^2 - V(\phi)\right] \tag{5}$$

여기서 액시온 항의 부호가 바뀜은 쌍대화 (dualization) 와 유클리드 공간으로의 해석적 확장이 교환가능하지 (commute) 않기 때문이다. 일반적으로 퍼텐셜 $V(\phi)$ 는 끈이론의 비섭동적 공헌을 포함하며 딜라톤 ϕ 에 의존하나 본 논문에서는 $V(\phi) = \Lambda$ (상수) 인 경우만 고려하여 액시온 χ 를 웜홀의 목을 지탱하는 별난 물질장으로 보고 웜홀 해를 논의하고자 한다.

식 (5) 에서 액시온에 관한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\nabla_\mu(e^{b\phi}\nabla^\mu\chi) = 0 \tag{6}$$

이 식은 딜라톤-액시온 계가 온곳 (global) $U(1)$ 변환에 대해 불변이므로 $j_\mu = e^{b\phi}\nabla_\mu\chi$ 가 보존됨을 나타낸다. 이는 RR $(d-1)$-형태의 장세기 텐서의 비앙키 (Bianchi) 항등식을 쌍대변환한 것이다. 계량 (metric) 에 대해 가장 큰 대칭성을 갖도록 $O(d)$-불변인 형태를 가정하고

$$ds^2 = n^2(r)dr^2 + a^2(r)d\Omega_{d-1}^2 \tag{7}$$

ϕ 와 χ 가 변수 r 에만 의존한다고 가정하면 $j^0(r)$ 만 남는다. 식 (6) 으로부터

$$\sqrt{g}j^0 = na^{d-1}e^{b\phi}j^0 = iq \tag{8}$$

이 얻어진다. 여기서 i 는 작용을 유클리드화할 때 $\chi \to i\chi$ 로 대체한 것을 반영한다. 식 (6) 으로부터 액시온 χ 를 계량함수 n, a 와 딜라톤 ϕ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\partial_r\chi = \frac{iqne^{-b\phi}}{a^{d-1}} \tag{9}$$

식 (7) 로 주어지는 계량에 대해 Ricci 텐서의 영아닌 성분은 다음과 같다.

$$R_{rr} = -(d-1)\frac{na'' - n'a'}{na} \tag{10}$$

$$R_{ij} = -\frac{naa'' - n'aa' + (d-2)na'^2 - (d-2)n^3}{n^3}\delta_{ij} \tag{11}$$

여기서 $'$ 은 변수 r 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (9)-(11) 을 식 (5) 에 대입하고 각변수에 대해 적분하면 다음과 같은 1 차원 유효작용을 얻는다.

$$S_{eucl} = \mathrm{Vol}(S_{d-1})\int dr\left[(d-1)(d-2)\left(\frac{a'^2a^{d-3}}{n} + na^{d-3}\right) - \frac{1}{2}\frac{a^{d-1}}{n}\phi'^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2e^{-b\phi}n}{a^{d-1}} - \Lambda na^{d-1}\right] \tag{12}$$

여기서 $\mathrm{Vol}(S_{d-1})$ 은 $(d-1)$-차원 단위구의 부피이다. 계량과 딜라톤에 관한 운동방정식은 식 (5) 의 변분으로 직접 구할 수 있지만 위의 유효작용은 웜홀 해의 안정성을 논의하는데 유용하다. 식 (12) 로부터 ϕ, n, a 에 대한 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\partial_r\left(\frac{a^{d-1}}{n}\partial_r\phi\right) + \frac{bq^2}{2}\frac{n}{a^{d-1}}e^{-b\phi} = 0 \tag{13}$$

$$-(d-1)(d-2)\frac{(\partial_r a)^2 a^{d-3}}{n^2}+(d-1)(d-2)a^{d-3}+\frac{1}{2}\frac{a^{d-1}}{n^2}(\partial_r\phi)^2-\frac{1}{2}\frac{q^2e^{-b\phi}}{a^{d-1}}-\Lambda a^{d-1}=0 \tag{14}$$

$$\partial_r\left[2(d-2)\frac{(\partial_r a)a^{d-3}}{n}\right]-(d-2)(d-3)\left[\frac{(\partial_r a)^2a^{d-4}}{n}+na^{d-4}\right]+\frac{1}{2}\frac{a^{d-2}}{n}(\partial_r\phi)^2-\frac{1}{2}\frac{q^2ne^{-b\phi}}{a^d}-\Lambda na^{d-2}=0 \tag{15}$$

III. 유클리드 웜홀 해

식 (13)-(15) 로 주어지는 액시온-딜라톤 초중력 이론의 인스탄톤 (instanton) 과 웜홀 해는 Gutperle과 Sabra에 의해 논의된 바 있다 [10]. 본 논문의 초점은 웜홀 해의 안정성에 관한 것이므로 IV절의 안정성 분석을 위해 필요한 웜홀 해에 대해 간단하게 요약한다. $n=1$ 인 게이지를 택하고 [15] 식 (13) 에 $a^{d-1}\partial_r\phi$ 를 곱하여 적분하면 아래의 식을 얻는다.

$$(\partial_r\phi)^2-\frac{q^2}{a^{2d-2}}e^{-b\phi}-\frac{c}{a^{2d-2}}=0 \tag{16}$$

여기서 c는 적분상수이다. 식 (16) 을 이용하면 식 (14) 로부터 a 에 관한 다음의 식을 얻는다.

$$1-(\partial_r a)^2+\frac{c}{2(d-1)(d-2)a^{2d-4}}-\frac{\Lambda}{(d-1)(d-2)}a^2=0 \tag{17}$$

n 에 대한 변분으로 얻어진 식 (14) 는 식 (15) 와 중복되는 것으로 식 (15) 로부터도 동일한 식을 얻을 수 있다. 식 (17) 로부터 $a(r)$ 를 구하고 이를 이용하여 식 (16) 으로부터 ϕ를 구할 수 있고 마지막으로 식 (9) 로부터 χ를 구할 수 있다. 해는 상수 Λ 와 c 에 의존하는데 $\Lambda=0$, $\Lambda<0$, $\Lambda>0$ 는 각각 점근적으로 평평한 (flat), 반-드시터, 드시터인 경우이다. $c=0$ 은 초대칭성이 보존되는 경우로 인스탄톤 해에 [10] 해당되므로 고려하지 않는다.

웜홀 해가 가능한 경우는 계량함수 $a(r)$ 이 $\partial_r a(r)=0$ 의 조건을 만족하는 최솟값 a_0 를 가지는 것이다. 이 조건이 충족될 때 계량함수 $a(r)$ 은 식 (17) 을 적분하여 얻을 수 있다.

$$\pm\int_{a_0}^{a}\frac{da}{\sqrt{1+\frac{c}{2(d-1)(d-2)a^{2d-4}}-\frac{\Lambda}{(d-1)(d-2)}a^2}}=r \tag{18}$$

딜라톤 ϕ는 식 (16) 으로부터 아래의 식을 적분하여 얻을 수 있다.

$$\int\frac{d\phi}{\sqrt{q^2e^{-b\phi}+c}}=\pm\int\frac{da}{a^{d-1}\sqrt{1+\frac{c}{2(d-1)(d-2)a^{2d-4}}-\frac{\Lambda}{(d-1)(d-2)}a^2}} \tag{19}$$

최종적으로 액시온에 관한 해는 식 (9) 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\chi(r)-\chi_0=i\int dr\frac{e^{-b\phi}}{a^{d-1}} \tag{20}$$

1. 점근적으로 평평한 경우 ($\Lambda=0$)

$c<0$ 인 경우 차원에 무관하게 웜홀 해가 존재하고 웜홀의 목과 딜라톤 해는 다음과 같다.

$$a_0=\left[\frac{2(d-1)(d-2)}{|c|}\right]^{-\frac{1}{2d-4}} \tag{21}$$

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty}\right)=b\sqrt{\frac{d-1}{2(d-2)}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{2(d-1)(d-2)}}\frac{1}{a^{d-2}}\right) \tag{22}$$

여기서 $\phi_\infty=\phi(r=\infty)$ 이다.

2. 점근적으로 반-드시터인 경우 ($\Lambda<0$)

$c<0$ 인 경우 해가 가능하고 $d=3$ 인 경우 웜홀의 목과 딜라톤 해는 다음과 같이 기본함수로 표현할 수 있다.

$$a_0^2=\frac{\sqrt{1+\frac{|\Lambda c|}{2}}-1}{|\Lambda|} \tag{23}$$

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty}\right)=\pm\frac{b}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-\frac{|c|}{2}+a^2}{a^2(r)\sqrt{1+\frac{|c\Lambda|}{2}}}\right) \tag{24}$$

$d=4,5$ 인 경우에는 타원적분으로 표현할 수 있고, $d>5$ 인 경우 닫힌 형태의 해석적 해는 구하는 것은 불가능하다.

3. 점근적으로 드시터인 경우 ($\Lambda > 0$)

이 경우 특이하지 않은 (non-singular) 해는 존재하지 않는다.

IV. 웜홀 해의 안정성

웜홀 해의 안정성을 논의하기 위해 위에서 구한 특이하지 않은 해 근처에서의 작은 요동을 고려하자. 유클리드 웜홀의 주요 논점은 웜홀이 함수적분에 실수의 공헌을 하는지 허수의 공헌을 포함하는가에 있다. 이를 위해 각변수에 의존하지 않는 $O(d)$-대칭형 s-파 요동을 고려하자 [9].

$$n(r) = 1 + N(r) \tag{25}$$
$$a(r) = a_0 + A(r) \tag{26}$$
$$\phi(r) = \phi_0 + \Phi(r) \tag{27}$$

여기서 a_0는 식 (21) 또는 (23)으로 주어지는 웜홀의 목이고 ϕ_0는 목에서의 딜라톤의 값으로 해석적 해가 가능한 $\Lambda = 0$인 평형한 경우와 $\Lambda < 0$이고 $d = 3$인 반-드시트의 경우 각각 다음과 같다.

$$\Lambda = 0: \qquad e^{\frac{b}{2}\phi_0} = \sqrt{\frac{q^2}{|c|}} \sin\left[\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}} e^{\frac{b}{2}\phi_\infty}\right) + \frac{\pi}{2} b \sqrt{\frac{d-1}{2(d-2)}}\right] \tag{28}$$

$$\Lambda < 0,\ d = 3: \quad e^{\frac{b}{2}\phi_0} = \sqrt{\frac{q^2}{|c|}} \sin\left[\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}} e^{\frac{b}{2}\phi_\infty}\right) \mp \frac{b}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|c\Lambda|}{2}}}\right)\right\}\right] \tag{29}$$

게이지 조건 $n = 1$과의 일관성을 유지하기 위해 $N(r) = 0$로 택하고 식 (26)과 (27)을 식 (12)에 대입하여 A, Φ에 대해 이차항까지 구하면 다음과 같다.

$$S_{bil} = \mathrm{Vol}(S_{d-1}) \int dr a_0^{d-1} \left[C_0 A'^2 A + C_1 \Phi'^2 + C_2 A\Phi' + C_3 A\Phi + C_4 A^2 + C_5 \Phi^2\right] \tag{30}$$

여기서 $C_0, \cdots C_5$는 다음과 같다.

$$C_0 = \frac{(d-1)(d-2)}{a_0^2} \tag{31}$$
$$C_1 = -\frac{1}{2} \tag{32}$$
$$C_2 = -\frac{(d-1)}{a_0}\phi_0' \tag{33}$$
$$C_3 = -\frac{(d-1)}{2}\frac{bq^2 e^{-b\phi_0}}{a_0^{2d-1}} \tag{34}$$
$$C_4 = \frac{(d-1)(d-2)(d-3)(d-4)}{2a_0^4} - \frac{d(d-1)}{4}\frac{q^2 e^{-b\phi_0}}{a_0^{2d}} - \frac{(d-1)(d-2)}{2}\left(\frac{\phi_0'^2}{2a_0^2} + \frac{\Lambda}{a_0^2}\right) \tag{35}$$
$$C_5 = -\frac{1}{4}\frac{b^2 q^2 e^{-b\phi_0}}{a_0^{2(d-1)}} \tag{36}$$

식 (30)에서 A, Φ에 대한 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$-A'' + \frac{C_2}{2C_0}\Phi' + \frac{C_4}{C_0}A + \frac{C_3}{2C_0}\Phi = 0 \tag{37}$$
$$-\Phi'' + C_0 A' + C_3 A - 2C_5 \Phi = 0 \tag{38}$$

식 (37), (38)과 같이 요동 A, Φ에 대해 결합된 선형 2차 미분방정식을 풀기 위해 다음과 같이 조화형 섭동 (harmonic perturbation)을 고려하자.

$$A = A_0 e^{i\omega r}, \quad \Phi = \Phi_0 e^{i\omega r} \tag{39}$$

결합된 방정식의 기준방식 (normal mode)은 아래의 2×2

행렬방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + \frac{C_4}{C_0} & \frac{1}{2C_0}(C_3 + i\omega C_2) \\ -(C_3 - i\omega C_2) & \omega^2 - 2C_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (40)$$

위 행렬방정식이 뻔하지 않은 (non-trivial) 해를 가질 조건으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\omega^4 + \alpha\omega^2 + \beta = 0 \quad (41)$$

여기서 α, β는 아래와 같다.

$$\alpha = \frac{C_4}{C_0} - 2C_5 + \frac{C_2^2}{2C_0}, \quad \beta = \frac{C_3^2 - 4C_4C_5}{2C_0} \quad (42)$$

α, β는 식 (31)-(36) 및 (16)을 사용하면 목에서의 a_0 및 ϕ_0로 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = \frac{(d-3)(d-4)}{2a_0^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{d-2}\frac{c}{a_0^{2(d-1)}} + \frac{b^2}{2}Q^2 - \frac{\Lambda}{2} \quad (43)$$

$$\beta = \frac{b^2}{2}Q^2\left\{\frac{(d-3)(d-4)}{2a_0^2} - \frac{1}{4}\frac{c}{a_0^{2(d-1)}} - \frac{1}{4}\frac{d-1}{d-2}Q^2 - \frac{\Lambda}{2}\right\} \quad (44)$$

$$Q^2 = \frac{q^2 e^{-b\phi_0}}{a_0^{2(d-1)}} \quad (45)$$

요동에 대해 웜홀의 해가 안정되기 위한 조건은 식 (41)의 ω가 모두 실수해를 가지는 것이다. 기준방식 ω에 존재하는 허수부분은 $e^{i\omega r}$항이 지수함수적으로 증가하는 것을 의미하고 이 경우 웜홀 해는 안정되지 못한다. ω가 순실수해를 가질 조건은 식 (41)에서 ω^2의 근이 모두 음이 아닌 실수를 갖는 것과 같고 이 조건은 다음과 같다.

$$\alpha < 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha^2 - 4\beta > 0 \quad (46)$$

1. 점근적으로 평평한 경우 ($\Lambda = 0$)

안정된 해를 가질 조건은 식 (46)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\frac{3(d-3)}{a_0^2} + \frac{b^2}{2}Q^2 < 0 \quad (47)$$

$$\frac{b^2}{2}Q^2\left(\frac{d^2-5d+7}{a_0^2} - \frac{1}{4}\frac{d-1}{d-2}Q^2\right) > 0 \quad (48)$$

$$\frac{b^2}{2}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{d-1}{d-2}\right)Q^4 - b^2\frac{(2d^2-7d+8)}{a_0^2}Q^2 + \frac{9(d-2)^2}{a_0^4} > 0 \quad (49)$$

$b = \sqrt{(d-2)/2}$인 유형 II의 경우 안정화될 조건은 다음과 같다.

$$d = 3 : \quad Q^2 < \frac{2}{a_0^2} \quad (50)$$

$$d = 4 : \quad Q^2 < \frac{8}{a_0^2} \quad (51)$$

$$d \geq 5 : \quad Q^2 < \frac{4(d-2)}{da_0^2}\left[2d^2 - 7d + 8 - \sqrt{(2d^2-7d+8)^2 - 9d^2}\right] \quad (52)$$

위의 조건은 식 (21), (22) 및 (45) 로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d = 3 \ : \quad \sin\left(\sin^{-1}(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) > \sqrt{2} \tag{53}$$

$$d = 4 \ : \quad \sin\left(\sin^{-1}(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty} + \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) > \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{54}$$

$$d \geq 5 \ : \quad \sin\left(\sin^{-1}(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty} + \frac{\sqrt{d-1}\pi}{4}\right) > \left[\frac{d-1}{18}(2d^2 - 7d + 8 + \sqrt{(2d^2-7d+8)^2 - 9d^2})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{55}$$

식 (55) 의 우변은 항상 1보다 크므로 어떤 경우에도 식 (53)-(55) 를 만족하는 c와 q는 존재하지 않는다. 그러므로 $\Lambda = 0$인 웜홀 해는 모두 $O(d)$-대칭형 섭동에 대해 불안정하다고 결론내릴 수 있다.

2. 점근적으로 반-드시트인 경우 ($\Lambda < 0$)

이 경우 $c < 0$일 때 웜홀 해가 존재하고 $d = 3$일 때 기본함수로 표현 가능하다. $d = 3$인 유형 II인 경우 ($b = \sqrt{1/2}$) 만 고려하자. 이 경우 계수 α, β는 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3}{a_0^2} + \frac{Q^2}{4} - |\Lambda|, \\ \beta &= \frac{1}{4}Q^2(\frac{1}{a_0^2} - \frac{Q^2}{2} + |\Lambda|) \end{aligned} \tag{56}$$

식 (56) 의 α, β에 대해

$$\alpha^2 - 4\beta = \left(\frac{3}{4}Q^2 - \frac{3}{a_0^2} - |\Lambda|\right)^2 + 2\frac{Q^2}{a_0^2} \tag{57}$$

이므로 조건 $\alpha^2 - 4\beta > 0$는 자동적으로 만족되므로 조건 $\alpha < 0$ 및 $\beta > 0$으로부터 아래의 식을 얻는다.

$$Q^2 < \frac{1}{a_0^2} + |\Lambda| \tag{58}$$

위 조건은 식 (23), (24) 및 (46) 으로부터 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\sin\left[\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|c|}{q^2}}e^{\frac{b}{2}\phi_\infty}\right) \mp \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{|c\Lambda|}{2}}}\right)\right\}\right] > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{|c\Lambda|}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{59}$$

식 (59) 의 우변은 항상 1보다 크므로 위의 부등식은 성립되지 않는다. 따라서 이 경우 또한 안정된 웜홀 해는 존재하지 않는다.

V. 결론 및 제언

끈이론에 근거한 딜라톤-액시온 초중력 이론의 유클리드 웜홀 해의 안정성을 살펴보았다. 웜홀 배경에 $O(d)$-대칭형 작은 요동을 고려하여 두 개의 결합된 이차 선형 방정식을 구하였다. 조화형 섭동을 고려하여 웜홀 해가 안정되기 위한 조건을 찾았다. 이 조건은 시공간의 차원 d, 딜라톤의 결합상수 b, 우주상수 Λ, 및 적분상수 c로 표현될 수 있다. 구체적인 예로 결합상수가 $b = \sqrt{(d-2)/2}$인 유형 II이론에서 해석적 해가 기본함수로 구해지는 모든 경우 웜홀 해는 요동에 대해 불안정함을 보였다.

최근 별난 물질을 도입하지 않고서도 웜홀 해가 존재할 수 있다는 연구가 보고되고 있다. Gauss-Bonnet 항과 같은 높은 차수의 곡률을 작용에 포함시키는 이론을 대표적인 예로 들 수가 있다 [16]. 중력의 재규격화를 위해 응집물질물리의 Lifshitz이론과 유사하게 시간좌표와 공간에 대해 다른 변수비 (scaling) 를 적용한 Horava-Lifshitz 중력이론에서

도 별난 물질을 도입하지 않고 웜홀 해가 가능한 것으로도 알려진 바 있다 [17,18]. 유클리드 웜홀의 안정성을 분석하기 위해 본 논문에서 사용한 방법을 4차원 또는 고차원의 통과가능한 웜홀 해에 적용하는 것은 흥미로운 연구주제가 될 것으로 기대한다.

감사의 글

본 논문은 2015년도 군산대학교 학술연구 지원을 받아 수행된 것입니다.

REFERENCES

[1] A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935).
[2] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
[3] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
[4] S. B. Giddings and A. Strominger, Nucl. Phys. B **306**, 890 (1988).
[5] K. Lee, Phys. Rev. Lett. **61**, 263 (1988).
[6] A. Hosoya and W. Ogura, Phys. Lett. B **225**, 117 (1988).
[7] S. B. Giddings and A. Strominger, Phys. Lett. B **230**, 46 (1989).
[8] S. Rey, Phys. Rev. D **43**, 526 (1991).
[9] V. A. Rubakov and O. Shvedov, Phys. Lett. B **383**, 258 (1996).
[10] M. Gutperle and W. Sabra, Nucl. Phys. B **647**, 344 (2002).
[11] K. A. Bronnikov and S.-W. Kim, Phys. Rev. D **67**, 064027 (2003).
[12] A. Pinzul and A. Stern, Nucl. Phys. B **676**, 325 (2004).
[13] N. Arkani-Hamed, J. Orgera and J. Polchinski, J. High Energy Phys. **0712**, 018 (2007).
[14] M. Chiodaroli and M. Gutperle, Phys. Rev. D **79**, 085023 (2009).
[15] T. Tanaka and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **88**, 503 (1992).
[16] S. Koh, B.-H. Lee, W. Lee and G. Tumurtushaa, Phys. Rev. D **90**, 063527 (2014).
[17] M. B. Cantcheff, N. E. Grandi and M. Sturla, Phys. Rev. D **82**, 124034 (2010).
[18] E. J. Son and W. Kim, Phys. Rev. D **83**, 124012 (2011).