Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Facultad de Matemática, Física y Computación

Departamento de Física

Licenciatura en Física

Trabajo de Diploma

Obtención de una nueva solución estática esféricamente simétrica para las ecuaciones de campo de Einstein

Autor: Adrian Linares Rodríguez

Tutor: Dr. Carlos de la Caridad Rodríguez Fadragas

Santa Clara, Cuba
2017

Dedicatoria

A mis padres y mis hermanos,
a mis abuelos,
a mi querida Yai,
al resto de mi familia y amigos
a Delma y Karol, por su apoyo, fe y entusiasmo.

“Las cosas se deberían explicar de la forma más sencilla posible, pero no más sencilla aún.”

Albert Einstein

Agradecimientos

“Cuando bebas agua,
recuerda la fuente.”
Proverbio chino

De manera especial a mis padres, porque si he tomado buenos caminos, son ellos responsables de encausarme; a mis abuelos y a mi abuela Aideé, que siempre estuvieron ahí, para enseñarme y escucharme; a mis hermanos por ser despiadados ángeles en mi vida, que traen el milagro de alegrarte en circunstancias inimaginable; y en general, a todo el gran resto de mi familia, por exigir y esperar tanto de mí, por siempre creer que cumpliría con sus expectativas, sin su motivación constante no hubiese podido dar este primer gran paso.

A mi novia y amiga Yai y a su familia, por todo su cariño, apoyo y alegría durante estos últimos tiempos de peculiaridades.

A mi tutor y amigo el Dr. Carlos Rodríguez Fadragas, quien indudablemente ha hecho posible no solo la realización de esta tesis, sino además mi crecimiento intelectual y personal; más que tutor es un mentor para la vida. A todos mis demás profesores, gracias a los cuales adquirí muchos conocimientos necesarios para enfrentar las tareas de la ciencia.

Quiero agradecer especialmente a mis amigos y compañeros Ailier, Luis Daniel, Yadelvys, William Gabriel, Carlos Ernesto, Ángel Luis y Julio César por hacer de manera especial más amena la vida de ciencia y universidad, y al resto de mis amigos y compañeros de aula por los momentos que hemos compartido juntos a lo largo de estos años de estudio.

Por último y no menos importante agradecerles a Delma y Karol que especialmente me han hecho crecer como persona.

Resumen

Con esta investigación se pretende aportar humildemente al vasto conocimiento científico cosmológico. El problema principal considerado consiste en estudiar la manifestación de la energía oscura y los majestuosos agujeros negros sobre el espacio-tiempo. Se trabaja dentro de la línea de investigación con las ecuaciones de Einstein en combinación con el factor de escala $a(t)$ relacionado a la expansión acelerada del universo. Este modelo es aplicado al caso físico de un agujero negro estático no cargado rodeado de quintaesencia.

Se pone en vigor la interacción del agujero negro con el campo cosmológico de quintaesencia a través de la colocación directa (sin la obtención matemáticamente rigurosa) del factor de escala $a(t)$ en los términos espaciales de la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein.

Se utiliza como principal antecedente investigativo relativamente reciente, los confiables estudios realizados sobre la misma problemática en [1], donde se obtiene una nueva solución estática esféricamente-simétrica para un agujero negro rodeado por quintaesencia, utilizando el tensor de energía-momento de las ecuaciones de Einstein.

Se utiliza como base teórica principal las ecuaciones de Einstein de la Teoría de la Relatividad General, y sus soluciones del vacío para un agujero negro tipo Schwarzschild. Además se incluye un marco teórico con aspectos generales de energía oscura, y cosmología relacionada al tema.

Índice

Introducción

Alrededor de 1920 un periodista preguntó al astrofísico británico Arthur Eddington si era verdad que en el mundo entero solo habían cuatro personas que entendían la Teoría de la Relatividad General(TRG). Eddington se quedó pensativo durante unos momentos y respondió: “Me estoy preguntando quíen podría ser el cuarto”. [2]

Aunque es posible que la anécdota sea históricamente correcta, la afirmación de Eddington ciertamente no lo era, ni ahora, ni entonces. Prueba de ello es la gran cantidad de físicos que se han puesto a trabajar en la relatividad general y el número de soluciones que fueron halladas en los años inmediatamente después de la publicación de la teoría en 1915: la acción de Hilbert (1915), los agujeros negros de Schwarzschild (1916) y Reissner-Nordström (1916 y 1918), los espacios de De Sitter y anti-De Sitter (1916 y 1917), la clasificación cosmológica de Friedmann (1922), la onda gravitacional de Brinkmann (1923), las compactificaciones de Kaluza y Klein (1921 y 1926), los agujeros negros de Kerr (1964) y Kerr-Newman(1964 y 1966) etc. [3]

Aún así la teoría de la relatividad siempre ha tenido fama de contraintuitiva y tremendamente difícil. Sin embargo, conviene distinguir dos partes dentro de la relatividad general: una parte física, que describe las ideas básicas de la teoría, y una parte matemática, que nos da el formalismo con el cual describir la física. La dificultad de la TRG está en la parte matemática, ya que contiene análisis tensorial y geometría diferencial, temas que el típico estudiante de física no encuentra en su curriculum, a no ser para estudiar relatividad general(RG). Por otro lado, la parte física es relativamente sencilla, no siendo en el fondo nada más que llevar hasta sus últimas consecuencias lógicas unos pocos principios básicos. Según Rutherford "una buena teoría física se le puede explicar a una camarera en un bar". Se puede considerar que (la parte física de) la RG satisface esta condición (con suficiente tiempo disponible).

La teoría de la relatividad no es solo una teoría moderna de la gravedad, sino también nos enseña unas lecciones en la frontera entre física y metafísica. Primero, por un lado la relatividad especial (RE) ha eliminado los conceptos del espacio absoluto, del tiempo absoluto y de la velocidad absoluta, por no ser observables, mientras por otro lado la RG ha incorporado en la física el concepto del espacio-tiempo dinámico, como una entidad física, igualmente real que conceptos como masa, carga, energía o momento angular. El espacio-tiempo ha pasado de ser un escenario estático donde ocurre la física a ser una parte más de la física que influye sobre lo que contiene y puede ser influenciado por ello a la vez. No es de extrañar que la TRG sea uno de los pilares fundamentales de la física actual conocida [4]. De hecho, la cosmología sólo ha llegado a formar parte de la física cuando, gracias a la RG, se concibió el universo como un sistema dinámico, regido por las mismas leyes físicas que rigen la materia dentro del universo.

Entonces según esta teoría de la gravitación de A. Einstein, la cual resulta hasta cierto punto paradigmática, para modelos matemáticos que pretendan describir correctamente la evolución del universo, la gravitación no es más que una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo tetra-dimensional sobre la materia masiva, y esta materia a su vez dicta las características que describen la propia curvatura del espacio-tiempo. Dada la naturaleza atractiva de la gravitación, en un universo que se supone contiene únicamente materia ordinaria,[1] la expansión debe ocurrir a un ritmo desacelerado. Sin embargo las recientes observaciones astrofísicas (incluyendo distancia-luminosidad de supernovas, de aglomeraciones de galaxias y del fondo cósmico de microondas) concluyen que el universo observable es homogéneo e isótropo a grandes escalas y que este está expandiéndose aceleradamente [5, 6, 7, 8, 9]. Este descubrimiento sorpresivo en 1998 sobre este carácter acelerado de la expansión cósmica durante la presente etapa de la

[1] Ordinaria en el sentido que esta materia cumple con los requerimientos mínimos conocidos como condiciones de energía y genera gravedad atractiva

evolución, indica que si la teoría de Einstein es correcta, entonces nuestro universo debe de estar lleno básicamente de un tipo de materia desconocida cuya gravitación es de carácter repulsivo. Una de las primeras hipótesis que se propuso de acuerdo a esto fue exactamente suponer la presencia de un extraño fluido con presión p negativa para contrarrestar los efectos atractivos gravitacionales, provocando entonces el comportamiento acelerado en la expansión. Este tipo de materia desconocida satisface que la densidad, $\rho \backsim |p|$, por lo que se trata de materia no relativista [10].

Los fluidos que presentan esta propiedad son denominados *fluidos tipo energía*. Este tipo de materia además tiene la propiedad de no interactuar con la radiación electromagnética, por lo que no se puede "ver",de ahí viene su nombre de "Energía Oscura" (EO). [2]

Muchas hipótesis han surgido para intentar dar solución a este problema. La explicación más simple se remonta a Albert Einstein y consiste en la tan pequeña como innatural constante cosmológica Λ. El modelo de EO más simple es el modelo $\Lambda-$ Materia Oscura Fría (MOF) (Λ-MOF). Estos presentan los llamados problemas del *ajuste fino* de la constante cosmológica Λ y el problema de la *Coincidencia* [11].

Una variante más elaborada de estos modelos es considerar que la EO está compuesta de un campo escalar, llamado *Quintaesencia*, siendo este tipo de teorías un caso particular de las llamadas teorías Escalares-Tensoriales, en las que se introduce un campo escalar adicional en el sector gravitacional de la acción.

Como habíamos dicho la RG predice una estrecha relación entre la estructura del espacio-tiempo y su contenido de materia y energía. Es por lo tanto un paso lógico intentar utilizar las ecuaciones de Einstein para estudiar la dinámica del universo entero: su forma, su contenido y su evolución. Unas de las más conocidas soluciones de la ecuación de Einstein son soluciones de agujeros negros (AN). El AN es el más facinante objeto de la RG. Últimamente existen trabajos orientados a investigar estos objetos en relación con la EO. Hay casos donde se analizan

[2] Alrededor del 73 % del universo está formado por esta forma exótica de energía.

modelos que contienen nuevas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, considerando AN rodeados por *quintaesencia*. De una configuración así se podrían tener diversos objetivos a estudiar, entre estos por mencionar algunos, se podría investigar usando leyes termodinámicas para AN, la termodinámica y Fase de transición del mismo, al variar por ejemplo: temperatura, capacidad calorífica, entropía; o analizar en estas magnitudes su variación con relación a diferentes valores del parámetro de estado ω_q relacionado a la quintaesencia y la constante de normalización C relacionada con la densidad de la quintaesencia. Estudios como estos fueron realizados en [12] para un AN tipo *Reissner-Nordström* rodeado de quintaesencia, donde además muestran que al variar la entropía del AN se observa en este una fase de transición y cuando incrementa la densidad de quintaesencia, el punto de transición se traslada a una baja entropía y la temperatura del AN decrece.

Es **objetivo principal** de la tesis *aplicar el método perturbativo debido al efecto de expansión del Universo sobre la métrica del modelo estático esféricamente simétrico, demostrando que conduce a resultados equivalentes a los obtenidos por el método de introducción de la enrgía oscura como componente material en el tensor de energia-momento.* El trabajo realizado en [1] se toma como principal antecedente investigativo. En este se presenta una nueva solución exacta estática esféricamente-simétrica de la ecuación de Einstein para un AN rodeado de quintaesencia.

Teniendo en cuenta que el modelo cosmológico de quintaesencia es consecuente con el carácter acelerado de la expansión del universo, entonces para conformar una **hipótesis general**, resulta consecuente considerar el factor de escala $a(t)$ como función del *tiempo cosmológico*, [3] en los términos espaciales de la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein, lo que implicaría tomar en cuenta la expansión o contracción del Universo.

Las consideraciones anteriores enmarcan la línea de trabajo de la tesis. La incertidumbre, de:

[3]El Postulado de Weyl supone una clase de observadores priviligiados en el universo como un fluido perfecto: los que están en reposo con respecto al fluido perfecto y cuyo movimiento, por lo tanto, únicamente está determinado por la evolución del universo. A estos observadores se les suele llamar *observadores comóviles*, para los cuales se define el *tiempo cosmológico*, siendo la dirección temporal de un observador comóvil.

¿cómo se afectará la estructura del espacio-tiempo, al incluir el efecto de expansión del Universo en la métrica considerada? tiene un grado notable de **pertinencia** con la tesis. El hecho de incluir el efecto directo de la expansión del Universo, sobre la solución de vacío de las ecuaciones de campo de Einstein relacionada con el modelo estático esféricamente simétrico, pone en vigor el aspecto **novedoso** de la tesis. La determinación de una nueva variante de la solución estática de las ecuaciones de Einstein, delimita el más significativo y acuciante **problema científico** de la investigación.

Cabe preguntarse si ¿puede la consideración del efecto directo de la expansión del Universo sobre la solución de vacío de las ecuaciones de campo de Einstein relacionada con el modelo estático esféricamente simétrico, brindar información coherente con los resultados obtenidos por otros métodos y reportados en la bibliografía? Esta **interrogante científica** pretende ser respondida tras lograr los **objetivos específicos** de la tesis:

1. Realizar una revisión bibliográfica actualizada sobre los aspectos básicos relacionados con la TRG.

2. Realizar una revisión actualizada sobre la solución exacta del vacío de materia, relativa al caso estático y esféricamente simétrico.

3. Actualizar los conceptos relacionados con la expasión del Universo, en particular la energía oscura en forma de campo cosmológico de quitaesencia.

4. Realizar una revisión bibliográfica sobre los posibles efectos de energía oscura sobre la métrica de Schwarzschild.

5. Aplicar el método perturbativo a la métrica de Schwarzschild analizando el posible efecto de la expansión del universo sobre dicha métrica.

No se tratarán con AN cargados ni rotantes en esta investigación, ni se realizará ningún tipo de análisis termodinámico ya que seria asumir notable complegidad para un inicio de los estudio y comprometería la confiabilidad de los resultados.

Para la comprención del lector se mostrarán algunas **convenciones utilizadas en la tesis**; vienen dadas por abreviaturas y definiciones conceptuales.

Las abreviaturas empleadas son:

Relatividad General – RG

Relatividad Especial – RE

Teoría de la Relatividad General – TRG.

Friedmann-Robertson-Walker – FRW.

Energía Oscura – EO.

Materia Oscura – MO.

Materia Oscura Fria – MOF

Materia Oscura Caliente – MOC

$\Lambda-$ Materia Oscura Fría – Λ-MOF

Agujero Negro – AN

$g^{\mu\nu}$	Métrica Lorentziana
g	Determinante de $g^{\mu\nu}$
$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$	Conexión General Afín
$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$	Conexión Levi-Civita
∇_{μ}	Derivada covariante respecto a $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$
$\bar{\nabla}_{\mu}$	Derivada covariante respesto a $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$
$R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$	Tensor de Riemann de $g_{\mu\nu}$
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci de $g_{\mu\nu}$ $\left(\equiv R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}\right)$
R	Escalar de Ricci de $g_{\mu\nu}$ $\left(\equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right)$
S_M	Acción de la materia
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento $\left(\equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\right)$

Los subíndices y superíndices griegos $\alpha, \beta, ..., \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ designan los índices espacio-temporales 4D, donde el índice 0 representa el índice temporal, mientras que los índices $1, 2, 3$ representan los índices espaciales. Los índices latinos en minísculas representan los índices espaciales tridimensionales ordinarios: $i, j, ..., n, m = 1, 2, 3$. Es esta tesis, como en cualquier trabajo que se aborde análisis tensorial se utiliza la regla de suma de Einstein (por índices mudos repetidos se entiende sumatoria), que matemáticamente se puede resumir de la siguiente manera:

$$X^{...\alpha\nu...}{}_{...\mu\sigma...} Y^{...\gamma\mu...}{}_{...\nu\beta...} \equiv \sum_{\nu=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4} X^{...\alpha\nu...}{}_{...\mu\sigma...} Y^{...\gamma\mu...}{}_{...\nu\beta...} \tag{1}$$

en este caso, μ y ν son los índices mudos repetidos. Esta regla es válida independientemente de la dimensionalidad del espacio-tiempo, o sea, independiente del tipo de índice (griego o latino) utilizado. También resulta útil definir el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2}$$

Como definición del tensor de energía-momento consideramos:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m \right) \tag{3}$$

Se utiliza la siguiente signatura de la métrica: para la métrica de espacio-tiempos 4D

$$g_{\mu\nu} = diag(- + ++) \tag{4}$$

Capítulo 1

Aspectos básicos de la Teoría de la Relatividad General

En este capítulo se realiza una breve descripción de los aspectos fundamentales relacionados con la Teoría de la Relatividad general que son necesarios para desarrollar los demás puntos de esta tesis. Estos contenidos pueden ampliarse en los diversos textos que se han escrito sobre este tema. Alguno de ellos que se recomiendan son [4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]

1.1 La necesidad de la Teoría de la Relatividad General

En 1907, sólo dos años después de la publicación de la RE, Einstein se dio cuenta de que la teoría de la gravedad newtoniana y la RE son mutuamente in-compatibles (salvo en el caso de un campo gravitatorio constante y estático). Hay varias maneras, matemáticas y físicas, de ver esto.

Matemáticamente, se ve porque la gravedad newtoniana no es invariante bajo el grupo de Lorentz. Según Newton, una partícula en un campo gravitatorio está sometida a una aceleración

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi, \tag{1.1}$$

causada por la fuerza gravitatoria, cuyo potencial Φ está relacionado con la densidad de materia ρ_m en el universo a través de la *ecuación de Poisson*

$$\Delta\Phi = 4\pi G_N \rho_M \tag{1.2}$$

donde G_N es la constante de Newton. Obviamente, ni (1.1), ni (1.2) transforman bien bajo una transformación de Lorentz [17].

Primero, tanto el lado izquierdo como el derecho de (1.1) son vectores tridimensionales y no cuadrimensionales. Además, la aceleración está definida como la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, pero no está claro con respecto al tiempo de qué observador. Para Newton esto no era ningún problema, puesto que para él existía un solo tiempo absoluto, igual para todos los observadores. Sin embargo de la teoría de la RE sabemos que cada observador tiene su tiempo propio particular.

Se podría intentar remediar estos problemas, derivando con respecto al tiempo propio e intentando convertir (1.1) en una ecuación covariante. Pero un problema más gordo nos supone la otra parte de la teoría de la gravedad newtoniana, la ecuación (1.2). Aquí aparece el laplaciano $\Delta\Phi$, en lugar del operador invariante, el d′alambertiano $\Box\Phi$. Para apreciar las dificultades que supone este operador en lugar del otro, mencionaremos los argumentos físicos de la incompatibilidad.

La ecuación (1.2) dice que el potencial gravitatorio Φ en un punto x está determinado por la distribución de materia ρ_M en el universo. Si por lo tanto un observador cambia la distribución de materia en cierto punto, el efecto en el potencial gravitatorio se nota inmediatamente en todo el universo. En otras palabras, la fuerza gravitatoria se propaga en la teoría de Newton con una velocidad infinita.[1]|

No solo velocidades mayores que la velocidad de la luz son un problema en la RE, además considerando que un cambio de la distribución de materia en un punto y el cambio del potencial en otro punto son simultáneos, ya que el efecto se nota de manera inmediata, resulta cuestionarse: ¿para qué observadores ambos sucesos son simultáneos? La simultaneidad de sucesos es algo que no está bien definido, sino que depende del observador. Si la gravedad newtoniana tiene que recurrir a un observador especial, para el cual las fórmulas (1.1) y (1.2) son válidas, viola el Principio de la Relatividad [4].

Si el paso de electrostática a la teoría de Maxwell es grande, el de la gravedad newtoniana a la relatividad general lo es más aún y a Einstein le costó mucho remediar este problema. Aunque ya se dio cuenta en 1907 de la incompatibilidad de ambas teorías y de la solución, el Principio de Equivalencia, tardó hasta 1911 en llegar a una primera formulación matemática y otros 2 años más, hasta 1913, en el Principio de Covariancia. Y no fue hasta 1915, diez años después de la RE, cuando vino con una versión definitiva de la RG [3].

1.2 Teoría de la Relatividad General

En 1905 Albert Einstein publica su conocida "Teoría Especial de la Relatividad" donde esclarecía la interconexión entre el espacio y el tiempo y deducía las consecuencias físicas que se derivaban de ello.

Sin embargono fue hasta 1907 (dos años después) que el matemático alemán Hermann Minkowski demostró que las ideas de Einstein podían ser expresadas geométricamente solo si se consideraba que el espacio físico poseía cuatro dimensiones: una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales.

La idea matemática fue posteriormente utilizada por Einstein, quien a través de su amigo y com-

[1] Nótese que esto no pasaría si el operador diferencial fuera un d′alambertiano: las soluciones en este caso son funciones del tipo $f(t \pm x)$, los conocidos potenciales retardados y avanzados.

pañero de la Universidad Marcell Grossmann, ya conocía sobre la existencia de la geometría de Riemann. Considerando geometría de Riemann en espacios de cuatro dimensiones, Einstein derivó, en 1915, las leyes que rigen la gravitación y que generalizan la ley de Newton para campos gravitatorios intensos. La idea básica es que la gravitación debe entenderse como curvatura del espacio-tiempo de cuatro dimensiones avisorado por Minkowski [20]. La relatividad general está basada en un conjunto de principios fundamentales:

- El principio general de la relatividad: Las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores (inerciales o no).
- El principio general de covariancia: Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
- El movimiento inercial se realiza a través de trayectorias geodésicas.
- El principio de invariancia local de Lorentz: Las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales.
- Curvatura del espacio-tiempo: Esto permite explicar los efectos gravitacionales como movimientos inerciales en un espacio-tiempo curvado.
- La curvatura del espacio-tiempo está creada por la interacción entre la masa y la energía con el espacio-tiempo. La curvatura del espacio-tiempo puede calcularse a partir de la densidad de la materia y energía al igual que de las ecuaciones de campo de Einstein.

El principio de equivalencia que había guiado el desarrollo inicial de la teoría es una consecuencia del principio general de la relatividad y del principio del movimiento inercial sobre trayectorias geodésicas.

Una de las principales consecuencias de la gravedad es su manifestación a través de la geometría local del espacio-tiempo. Las bases matemáticas de la teoría se remontan a los axiomas de la geometría euclídea y los muchos intentos de probar, a lo largo de los siglos, el quinto postulado de Euclides, que dice que las líneas paralelas permanecen siempre equidistantes, y que culminaron con la constatación por Bolyai y Gauss de que este axioma no es necesariamente cierto. Las matemáticas generales de la geometría no euclidiana fueron desarrolladas por el discípulo de Gauss, Riemann, pero no fue hasta después de que Einstein desarrolló la teoría de la Relatividad especial que la geometría no euclidiana del espacio y el tiempo fue conocida.

Gauss demostró que no hay razón para que la geometría del espacio deba ser euclidiana, lo que signfica que si un físico pone un patrón, y un cartógrafo permanece a una cierta distancia y se mide su longitud por triangulación basada en la geometría euclidiana, entonces no está garantizado que sea dada la misma respuesta si el físico porta el patrón consigo y mide su longitud directamente.

1.3 Las ecuaciones de campo de Einstein

Se conoce por el Principio de Equivalencia que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio, es decir, una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Por otro lado sabemos que la fuente de esta curvatura es la materia de la cual se tiene una descripción tensorial, el llamado tensor de energía-momento. Teniendo en cuenta lo anterior se puede saber exactamente cómo la materia interacciona con el espacio-tiempo. Esta interacción viene dada por las ecuaciones de Einstein. Para llegar a la forma exacta de las ecuaciones de Einstein es conveniente encontrar como describir de manera cualitativa la interacción entre el espacio-tiempo y la materia. El Principio de Covariancia nos dice que la ecuación debe ser válida en todos los sistemas de referencia, y que por lo tanto debe tener una forma tensorial. Concretamente, la ecuación de Einstein tiene que ser de la forma

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que describe la curvatura del espacio, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento y k una constante de proporcionalidad [4, 13].

La problemática se reduce a la identificación del tensor $G_{\mu\nu}$, el cual debe cumplir ciertas restricciones matemáticas y físicas:

1. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser simétrico en los dos índices, ya que $T_{\mu\nu}$ también lo es.

2. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico. Por lo tanto, tiene que ser una función solamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas.

3. Para el espacio plano, tenemos que $G_{\mu\nu} = 0$.

4. La ley de conservación de energía $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica que también $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

5. Se puede identificar la componente g_{00} de la métrica con el potencial gravitacional newtoniano $\Phi = -\frac{G_N m}{r}$. Para tener una teoría dinámica y para recuperar la ecuación de Poisson (1.2), $G_{\mu\nu}$ debe contener segundas derivadas de la métrica. La manera más natural, por lo tanto es a través de las contracciones del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$.

6. Para obtener una ecuación diferencial de segundo orden (y no más) en los potenciales gravitatorios, $G_{\mu\nu}$ tiene que ser lineal en el tensor de Riemann.

Posibles candidatos para $G_{\mu\nu}$ podrían ser la misma métrica $g_{\mu\nu}$, su d'Alambertiano $\nabla_\rho\nabla^\rho g_{\mu\nu}$ o el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, pero ninguna de estas posibilidades cumple todas las condiciones mencionadas arriba. Aunque la métrica tiene el rango y las simetrías adecuadas y satisface la condición $\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0$, tiene la desventaja de que no cumple la condición 5: la ecuación $g_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$ no es una ecuación dinámica, ni mucho menos recupera la ecuación de Poisson (1.2). El d'Alambertiano $\nabla_\rho\nabla^\rho g_{\mu\nu}$ sufre del problema opuesto, ya que satisface (casi) todas las condiciones, pero es idénticamente cero, por el hecho de que la conexión de Levi-Civita es compatible con la métrica. Finalmente, $R_{\mu\nu}$ no satisface la condicón 4, sino $\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\nu R$. Por lo tanto, la ley de conservación de energía impondría que las únicas métricas permitidas serían las que tienen $\partial R = 0$ [4].

En realidad las condiciones 1 - 6 determinan el tensor $G_{\mu\nu}$ unívocamente; se puede demostrar que la expresión más general para un tensor simétrico de rango (0,2), construido de la métrica y sus derivadas y lineal en $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ es de la forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda(x), \tag{1.4}$$

con α una constante y $\Lambda(x)$ una función escalar con dimensiones ML^{-3}. Exigir que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ implica que $\alpha = -\frac{1}{2}$ y que Λ es una constante, mientras que exigir que $G_{\mu\nu} = 0$ para el espacio plano implica que $\Lambda = 0$. Por lo tanto el único tensor que satisface todas las condiciones necesarias es el tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{1.5}$$

Una comparación con las fórmulas newtonianas clásicas fija la constante de proporcionalidad $k = 8\pi G_N$, donde G_N es la constante de Newton, de modo que las ecuaciones de Einstein vienen dadas por

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden, lo que hace que sean muy difíciles de resolver analíticamente.

No hay técnicas conocidas para obtener una solución general. Todas las soluciones conocidas son casos con mucha simetría u obtenidas a través de técnicas específicas [4, 13].

Las ecuaciones de Einstein tienen 10 componentes, pero en realidad la condición $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ impone 4 ligaduras, de modo que sólo 6 ecuaciones son realmente independientes. Esto implica que de las 10 componentes de la métrica sólo 6 están determinadas por las ecuaciones de Einstein y corresponden a grados de libertad físicos. Las otras 4 componentes son componentes no-físicas que expresan la libertad de elección de sistema de coordenadas [4].

La gran diferencia conceptual entre las ecuaciones de Einstein y la teoría newtoniana de la gravedad es que las ecuaciones de Einstein describen la gravedad como una teoría de campos. El concepto de campo físico fue introducido por Faraday y aprovechado por Maxwell en el contexto del electromagnetismo, para resolver el problema de la acción a distancia. Donde en la ley de Newton o de Coulomb las partículas tienen interacciones (gravitacionales o electromagnéticas) a distancia, en una teoría de campos las partículas interaccionan indirectamente, a través de un campo que se extiende por el espacio y que sirve de intermediario para la interacción entre las partículas. Una perturbación se transmite a través del campo a velocidad finita (la velocidad de la luz en el caso del electromagnetismo y la gravedad). De este modo la RG resuelve el problema de acción inmediata y a distancia en la gravedad newtoniana, comentado en la sección 1.1.

Pero también hay una gran diferencia conceptual entre la teoría de Maxwell y la RG. En la teoría de Maxwell el campo intermediario es el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ (o los potenciales A_μ), que viven en un espacio-tiempo específico, generalmente Minkowski (aunque no necesariamente). Sin embargo en RG, el campo intermediario es justamemente la métrica $g_{\mu\nu}$, el tensor que resume todas las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Esto no sólo implica que el espacio-tiempo es de cierta forma dinámico, que interacciona con la materia y consigo mismo, sino también que la geometría no está fija y a priori determinada. En contraste con la teoría de Maxwell (o sus generalizaciones, como Yang-Mills o el Modelo Estándar), en RG el espacio-tiempo no es un escenario estático dentro del cual ocurre la física, sino que es una parte activa del juego. En cierto modo, en la RE el espacio de Minkowski era un espacio-tiempo absoluto, en el sentido de que no se contempla la posibilidad de otra geometría, ni de que se vuelva dinámico. Aquí la geometría no está determinada a priori, sino por el contenido de energía y materia y por las condiciones iniciales. Donde la RE eliminó el fantasma del espacio y el tiempo absoluto, la relatividad general acabó con la idea del espacio-tiempo estático y la geometría dada a priori [4].

A veces es útil rescribir las ecuaciones de Einstein sin la traza. Tomando la traza de (1.6), es decir contrayendo con $g_{\mu\nu}$, encontramos

$$R = kT, \tag{1.7}$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ considerando que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ en 4 dimensiones. Sustituyendo esto en (1.6) vemos que las ecuaciones de Einstein sin traza son de la forma

$$R_{\mu\nu} = -k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{1.8}$$

Esta ecuación es completamente equivalente a (1.6), pero es un poco más fácil a la hora de buscar soluciones, ya que no hace falta calcular el escalar de Ricci R. Históricamente, esta es la forma original en que Einstein escribió las ecuaciones, aunque su forma más comun es sin duda (1.6). Una de las ventajas de (1.8) es que en el vacío, donde $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.9}$$

Obviamente el espacio de Minkowski es una solución de esta ecuación (la condicón 3 sobre $G_{\mu\nu}$), pero (1.9) también es suficientemente complicado para admitir soluciones no-triviales, como la solución de Schwarzschild o de ondas gravitacionales. Las soluciones de (1.9) son en cierto modo el análogo de las ondas electromagnéticas en teoría de Maxwell, que también son soluciones de las ecuaciones en el vacío. Las métricas que tienen la propiedad (1.9) se llaman *Ricci-planas*.

1.4 La acción de Einstein-Hilbert

El problema original relacionado con la teoría de la gravitación de Albert Einstein está asociado con la llamada accción de Einstein- Hilbert. A partir de esta acción se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein a través de un principio variacional. Con la signatura métrica (- + + +), la parte propiamente gravitacional de la acción está dada mediante la integral

$$S = \tfrac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \tag{1.10}$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico, R es el escalar de Ricci, obtenido mediante la contracción del tensor de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, and $\kappa = 8\pi G c^{-4}$ siendo G la constante gravitacional de la teoría de I. Newton y c es la velocidad de la luz en el vacío. Se asume que la integral converge en el espacio-tiempo completo. En caso contrario S no está bien definida y se requiere entonces realizar ciertas modificaciones en la definición donde ahora se integra sobre dominios extensos y relativamente compactos para que se puedan seguir derivando las ecuaciones de campo de Einstein, concebidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de la acción de Einstein-Hilbert aplicando técnicas propias de la Mecánica de los Medios Continuos y de la Teoría Clásica del Campo [21].

La aplicación del método variacional para derivar las ecuaciones a partir de la acción es ventajoso en general. Esta técnica es empleada sistemáticamente en la Mecánica Teórica y en la Electrodinámica Clásica. Entonces la Teoría General de la Relatividad puede vincularse de manera natural con estas materias y utilizar sus métodos, firmemente establecidos. En la Teoría

General de la Relatividad se considera usualmente que la acción es una funcional de la métrica que se defina, así también como de los campos materiales, y que la conexión de Levi-Civita (Símbolos de Christoffel) es la que debe ser utilizada. Aquí se pueden distinguir dos formulaciones, la de Palatini (la métrica y la conexión son igualmente independientes para la acción) y la formulación métrica propiamente (donde solo la métrica es la independiente). La formulación de Palatini es usual en Física de Partículas. En este caso se utilizará la formulación métrica para el tratamiento que será realizado seguidamente [21].

1.5 Obtención de las ecuaciones del campo de Einstein

Para derivar las ecuaciones de Einstein debe incluirse generalmente la parte de la acción que refleja el contenido material del Universo. Se supone entonces que la acción requerida para derivar las ecuaciones de campo de Einstein es la suma de la acción deEinstein-Hilbert y la acción que describe los campos de materia presentes en el modelo $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$. Entonces se escribe

$$S = \int [\tfrac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}] \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \tag{1.11}$$

Corresponde realizar la variación de esta acción total con respecto a la inversa de la métrica $g_{\mu\nu}$ la cual es cero

$$0 = dS \tag{1.12}$$

$$0 = \int \left[\tfrac{1}{2\kappa} \tfrac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \tfrac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}^4 x \tag{1.13}$$

$$0 = \int \left[\tfrac{1}{2\kappa} \left(\tfrac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \tfrac{R}{\sqrt{-g}} \tfrac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \tfrac{1}{\sqrt{-g}} \tfrac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \tag{1.14}$$

El principio variacional se formula sobre la base de que las variaciones $\delta g_{\mu\nu}$, son linealmente independiente por lo que

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{1.15}$$

resultando la ecuación de Euler-Lagrange o ecuación del movimiento de este problema [21]. El miembro derecho de esta ecuación es por definición el tensor Energía-Momentum, y representa la parte material del modelo

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{M}}. \tag{1.16}$$

En cuanto al otro miembro de la ecuación, se requiere entonces calcular la variación del escalar de Ricci R y la variación del determinante de la métrica. Esta tarea resulta laboriosa aunque no difícil. El procedimiento requiere de desdoblar estos escalares hasta llegar a sus componentes métricos. Debe partirse del concepto de que el determinate del tensor métrico contiene las componentes de dicho tensor, y que el escalar de Ricci es obtenido por una contracción del tensor de curvatura covariante de rango dos de Ricci, y que este a su vez se obtiene de una contracción del tensor de curvatura mixto (3-covariante, 1-contravariante) de Riemann $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$, o sea, $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ donde la repetición de índices indica suma, en este caso desde $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 4$. Similarmente, debe recordarse que el tensor de curvatura mixto de Riemann se obtiene a partir de los Símbolos de Christoffel de segunda clase $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, como se verá debajo, y que estos finalmente se derivan de los elementos del tensor métrico (y también con los elementos de su inverso). Por ejemplo,

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = g^{\nu\sigma}[\lambda\mu, \sigma] = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \tag{1.17}$$

Por tanto, debe comenzarse por el cálculo de la variación del tensor de curvatura de Riemann, que se define como

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{1.18}$$

Como se aprecia este tensor depende sólo de los Símbolos de Christoffel, entonces su variación es

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{1.19}$$

Y aplicando la derivada covariante al tensor variación del símbolo de Christoffel se tiene que [2]

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}. \tag{1.20}$$

Lo anterior permite observar, después de aplicar ciertos manejos de índices, que la variación del tensor de curvatura de Riemann puede escribirse como

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}). \tag{1.21}$$

Seguidamente se puede obtener la variación del tensor de curvatura de Ricci mediante la contracción de dos índices (el superior y el segundo inferior) en la variación del tensor de curvatura de Riemann

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv \delta R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\mu}). \tag{1.22}$$

[2] En la expresión anterior debe saberse que al aplicar la derivada covariante, esta se expresa en el miembro derecho por cuatro términos en este caso: la derivada parcial en el primero, y un segundo término positivo asociado al índice contravariante ρ, y dos términos negativos asociados a los dos índices covariantes ν y μ.

Por otro lado, considerando la definición del escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.23}$$

se puede desarrollar la variación del escalar de Ricci con respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ y se obtienen

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \right). \end{aligned} \tag{1.24}$$

En la ecuación anterior se utilizó el resultado obtenido antes para la variación del tensor de curvatura de Ricci y además se consideró la condición $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$. En la expresión anterior, el término de la derivada covariante,$\nabla_\sigma (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}$ se puede multiplicar por $\sqrt{-g}$ y se convierte en una derivada total, ya que considerando ciertos elementos básicos sobre tensores, relacionados con la derivada ordinarias y la derivada covariante se cumple que

$$\sqrt{-g} A^a_a = (\sqrt{-g} A^a)_a \text{ or } \sqrt{-g} \nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu \left(\sqrt{-g} A^\mu \right). \tag{1.25}$$

Seguidamente se puede invocar el teorema de Stokes para argumentar que la variación de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$ se anula en el infinito por lo que el término en cuestión no contribuye a la variación de la acción, resultando finalmente

$$\tfrac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \tag{1.26}$$

Para calcular la variación del determinante del tensor métrico se puede utilizar la fórmula de Jacobi para la diferenciación de un determinante, o simplemente se pasa a coordenas principales el tensor métrico y se le aplica la regla de la derivada de un producto al producto de los elementos de la diagonal del tensor, y se encuentra que

$$\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{1.27}$$

Entonces, utilizando ese resultado se llega a

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \tag{1.28}$$

donde se ha utilizado la relación

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{1.29}$$

la cual se deriva de la regla para la derivada de la inversa de una matriz. En efecto

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} (\delta g_{\alpha\beta}) g^{\beta\nu} \tag{1.30}$$

Entonces se tiene el resultado buscado

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{1.31}$$

Seguidamente correponde sustituir todos los resultados anteriores en la ecuación de partida para tener finalmente la ecuación de Euler-Lagrange o ecuación del movimiento del modelo cosmológico que se está considerando, esto es,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.32}$$

la cual se conoce como ecuación de campo de Einstein y además $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ha sido elegido de tal manera que el límite no relativista produce la forma usual de la ley de la gravitación de Newton, donde G es la constante gravitacional ordinaria. Esta ecuación de carácter tensorial constituye una formulación covariante de la ecuación de Euler-Lagrange para este problema y en realidad se han de considerar, en general, 16 componentes, o sea, 16 ecuaciones. Sin embargo, las condiciones de simetría del modelo, la homogeneidad y la isotropía de la métrica, entre otros, son elementos que contribuyen a la simplificación del problema, ya que varias componentes del sistema de ecuaciones son idénticamente nulas y no aportan información nueva. En muchos de los modelos del Universo que se conciben es reducido el número de ecuaciones que se requiere resolver. Una vez definidos los componentes materiales del modelo queda definido de hecho el tensor $T_{\mu\nu}$ y definida la métrica, se define entonces el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y a partir de este se construyen la conexión de Levi-Civita, el tensor de curvatura de Riemann, el tensor de curvatura de Ricci y el escalar de Ricci, y por tanto, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Como resultado del análisis del modelo, en un paso posterior, se obtiene un sistema de ecuaciones donde la función a determinar es el factor de escala $a(t)$. Esta función es la que describe, básicamente, como evoluciona el Universo con el tiempo [21].

La ecuación de Einstein puede ser modificada, y de hecho Einstein lo hizo, incluyendo una constante en la ecuación, con el objetivo de buscar ciertas condiciones de equilibrio. Históricamente en este punto juega un papel determinante los resultados de la investigación realizada por Friedmann. Cuando se incluye la constante cosmológica, la acción de Einstein-Hilbert adopta la forma

$$S = \int \left[\tfrac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right] \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{1.33}$$

y a partir de esta acción, aplicando la técnica del cálculo variacional nuevamente se obtiene la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \tfrac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.34}$$

Esta constante es importante en relación con las condiciones de equilibrio que pudiera tener el Universo, o sea, pudiera resultar una expansión o también un recolapso, o permanecer estático. En general, el signo de esta constante es determinante y se discute aún hoy en día sobre este asunto. Bajo ciertas condiciones se puede asociar esta constante con el comportamiento del componente cosmológico conocido como energía oscura. Componente que aporta una presión negativa que contrarresta el efecto gravitatorio y por tanto puede definir la condición observacional de la expansión acelerada del Universo. Existe un número elevado de modelos diversos que intentan dar explicación a esta aceleración y en todos ellos la idea de la energía oscura con presión negativa está presente, de muchas formas [21].

1.6 La solución exacta de Schwarzschild

No esperaba que se pudiera obtener una solución exacta de manera tan sencilla.
(A. Einstein, en una carta a K. Schwarzschild)

Ya hemos dicho en varias ocasiones que las ecuaciones de Einstein son muy difíciles de resolver, debido a su carácter no lineal, de modo que la superposición de dos soluciones no es una nueva solución. No es difícil entender la razón física para esta no linealidad: sabemos que el espacio se curva debido a su contenido de masa y energía. Pero la propia curvatura del espacio-tiempo contiene energía, de modo que la misma curvatura es una fuente de curvatura. En otras palabras, la gravedad no sólo se acopla a la energía y la materia, sino también a sí misma, lo que resulta en ecuaciones no lineales.

Einstein mismo creyó inicialmente que sus ecuaciones eran tan complicadas que nunca se encontraría una solución exacta. Sin embargo, pocos meses después de la publicación de la relatividad general, en 1916, Karl Schwarzschild (1873 - 1916) halló la solución exacta de un objeto estático con simetría esférica y en los últimos 90 años cientos de soluciones exactas han sido encontradas. En este capítulo discutiremos esta solución de Schwarzschild y su significado físico [4].

Es un hecho notable que la primera solución exacta de la ecuación de Einstein que corresponde a un caso físico real, fue descubierta solo unos meses después de que apareciera el famoso artículo de 1915. Su autor, el anteriormente mecionado Karl Schwarzschild, un notable astrónomo alemán que contaba, entre sus trabajos científicos, los primeros estudios teóricos de los procesos radiativos en las estrellas, aplicaciones de la fotografía a la astronomía, una teoría pionera de los espectros atómicos, etc. Al estallar la primera Guerra Mundial, Schwarzschild fue movilizado por el ejército prusiano al frente oriental. Ahí, en condiciones precarias, contrajo una enfermedad infecciosa mortal, por lo que se le permitió regresar a su casa. Fue literalmente en su lecho de muerte donde leyó el artículo de Einstein de noviembre de 1915. Las ecuaciones parecían extremadamente complicadas, pero Schwarzschild tuvo la idea de considerar un problema simple, aunque realista: ¿Cómo deforma al espacio-tiempo una distribución perfectamente esférica de masa? Evidentemente, el espacio-tiempo resultante debe tener propiedades simétricas alrededor de la masa considerada; esto simplifica notablemente las ecuaciones, a tal grado que encontró una solución exacta: el espacio-tiempo de Schwarzschild, un espacio riemanniano que describe la región externa de un cuerpo esférico con masa M y radio arbitrario [22].

La solución de Schwarzschild es una solución estática de las ecuaciones del vacío, con simetría esférica. Por lo tanto es una buena descripción para el campo gravitatorio causado por objetos masivos esféricos, como estrellas y planetas. En particular, son precisamente las geodésicas de la métrica de Schwarzschild que nos permite calcular correcciones relativistas a las órbitas planetarias y la deflexión de la luz.

1.7 Colapso gravitacional y formación de agujeros negros

Existe la pregunta de si los AN tipo Schwarzschild realmente existen en la Naturaleza, o si sólo son una solución matemática, sin realidad física. La respuesta es un poco ambivalente: realmente se pueden llegar a formar agujeros negros, por ejemplo al final de la vida de estrellas muy masivas, pero a pesar de que tienen muchas de las características propias de la solución de Schwarzschild, no son exactamente como la extensión máxima de la solución. La gran diferencia está en que los AN en la Naturaleza están formados dinámicamente en un proceso de colapso gravitacional y por lo tanto no tienen la simetría de inversión temporal de una solución estática. Ya hemos visto que la solución (3.13) en realidad se corresponde con la parte exterior de un campo gravitatorio causado por un objeto con masa m en el centro. En circunstancias normales, la masa ocupa una esfera con un radio R_0 mayor que $2G_N m/c^2$, de modo que la solución exterior es la métrica (3.13) y la interior es la solución interior de Schwarzschild, que mencionamos antes. Sin embargo, si se comprime la masa en un volumen más pequeño, la gravedad en la superficie aumentará, ya que el potencial gravitatorio varía como $\Phi = -G_N m/r$ [4] .[3]

Al comprimir la masa en un volumen más pequeño, aumentará también la velocidad de escape, la velocidad inicial necesaria para que una partícula pueda salir del pozo potencial de un objeto masivo y llegar al infinito. Desde la ley de conservación de energía de la mecánica newtoniana, se puede calcular que la velocidad de escape v_e de un objeto con masa m y radio R viene dada por

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N m}{R}}. \tag{1.35}$$

En 1795 el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749 -1827) se dió cuenta de que la velocidad de escape superaría la velocidad de la luz si se comprimiese toda la masa en un radio

[3]Esto no implica que la gravedad a distiancia $r_0 > R_0$ aumente: el potencial gravitatorio a distancia r_0 fuera de la masa es independiente del volumen que ocupa la masa. Si el Sol colapsara en un AN, la trayectoria de la Tierra no cambiaría en absoluto.

$R = 2G_N m/c^2$. Escribe en su *Traité de la Méchanique Céleste en 1799:Una estrella luminosa de la misma densidad que la tierra, y cuyo diámetro es 250 veces mayor que el sol, no dejaría llegar por su atracción ningún rayo hasta nosotros; por lo tanto es posible que los más grandes cuerpos luminosos del Universo sean, por esa razón, invisibles para nosotros.* Sorprendentemente, el radio crítico para la velocidad de escape, calculado con métodos puramente newtonianos, coincide exactamente con el radio de Schwarzschild, el radio desde donde la luz ya no puede salir hacia el exterior. La interpretación, sin embargo es distinta, ya que en la mecánica newtoniana, la velocidad de la luz no es un límite superior, de modo que la "estrella negra" de Laplace no es un AN en el sentido estricto de la palabra.

En la RG, más que la velocidad de escape, la cantidad física importante es la curvatura del espacio-tiempo: cuanto más se comprime la masa, tanto más aumenta la curvatura alrededor del objeto y una vez que toda la masa está comprimida en un volumen más pequeño que el radio de Schwarzschild, ya no hay manera de parar el colapso gravitacional. La curvatura es tanta que la luz se queda atrapada, ya que incluso las geodésicas nulas están dirigidas hacia el centro. Se forma por lo tanto un horizonte de sucesos y, debido al teorema de Hawking y Penrose, también una singularidad. Por la estructura causal del espacio-tiempo dentro del horizonte, toda la materia del objeto original acabará en la singularidad y desaparecerá del espacio-tiempo, tal como se dió cuenta Oppenheimer en 1939. Por lo tanto no es preciso disponer de una masa grande para poder formar un AN, por lo menos, en principio. Más que de la masa, la formación de un AN depende de la densidad: cualquier masa m puede formar un horizonte y una singularidad si se comprime dentro del radio de Schwarzschild correspondiente a esa masa, es decir en un volumen $r = 2G_N m/c^2$. El radio de Schwarzschild del Sol es aproximadamente 3 km y el de la Tierra unos 9 mm.

En la práctica no hay fuerza en la Naturaleza capaz de comprimir ni el Sol, ni la Tierra dentro de sus respectivos radios de Schwarzschild. En el caso de planetas como la Tierra, la repulsión entre los electrones de los átomos es suficiente para contrarrestar la fuerza gravitatoria y prevenir un colapso gravitacional. En objetos más masivos, como estrellas, la presión gravitacional hacia dentro es tan grande que la materia forma un plasma tan caliente que hay fisión nuclear. En grandes líneas, 4 protones se juntan para formar un núcleo de helio. La energía térmica producida por estas reacciones nucleares contraresta la presión gravitatoria, de modo que la estrella se encuentra en un equilibrio térmico-gravitatorio [4].

Sin embargo, cuando a la estrella se le acaba el combustible,ya no es capaz de producir la energía términa necesaria para mantener el equilibrio. Lo que pasa entonces, depende básicamente de la masa de la estrella considerada. Para estrellas pequeñas y medianas, como el Sol, la gravedad comprimirá la estrella en un volumen comparable con la Tierra, con una densidad entre 10^4 hasta $10^9 kg/cm^3$. Allí la presión del gas degenerado de electrones y átomos completamente ionizados será lo suficiente para volver a mantener el equilibrio. La estrella se ha convertido en una *enana blanca*, llamada así por su tamaño y su color, debido a su alta temperatura. En 1931 el astrofísico Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 -1995) demostró que una enana blanca no puede tener una masa mayor que unos 1,4 masas solares. Para estrellas con masas superiores al *límite de Chandrasekhar*, la presión del gas degenerado no es capaz de contrarrestar la fuerza gravitacional. En este caso, la estrella será comprimida en un radio de unos pocos kilómetros. La presión gravitatoria es tan fuerte que los electrones están comprimidos dentro de los núcleos de los átomos y reaccionarán con los protones para formar una bola inmensa de neutrones, llamada *estrella de neutrones*. A estas alturas, la única fuerza que puede resistir la presión gravitacional es la repulsión fermiónica entre los neutrones. La densidad típica de una estrella de neutrones es de unos $10^17 kg/cm^3$.

En 1939 Oppenheimer y collaboradores calcularon el equivalente del límite de Chandrasekhar para estrellas de neutrones, el llamado *límite de Oppenheimer-Volkov* y encontraron que la repulsión entre los neutrones no es suficiente para contrarrestar la fuerza gravitatoria en estrellas de neutrones con masas superiores a unas 2 masas solares. En este caso ya no hay ninguna fuerza capaz de controlar la compresión gravitacional y la estrella colapsará a su radio de Schwarzschild y más allá ...

Einstein y Eddington, el padre de la teoría de la evolución estelar, se opusieron firmemente a la idea de que un estrella podría colapsar a un solo punto y renunciaron a dar a la solución de Schwarzschild algún significado físico. Pero hoy en día sabemos que existen estrellas con masas de decenas y cientos de veces la del Sol, así que, a pesar de que puedan perder mucha masa a lo largo de su evolución, es posible que algunas estrellas saturen el límite de Oppenheimer-Volkov y se conviertan en AN.

Además, la evolución estelar no es la única fuente de AN. Los astrónomos lo sospecharon desde hace tiempo, pero en los últimos años han encontrado pruebas convincentes de que existen AN supermasivos en los centros de galaxias, con masas del orden de 10^9 masas solares y radios de Schwarzschild del orden de $10^9 km$.

Al otro lado de la escala se sospecha que también existen AN primordiales, que no se formaron en colapsos gravitacionales de estrellas, sino en las primeras fases de la existencia del universo, debido a las fluctuaciones de densidad. Se calcula que estas AN primordiales tendrían una masa del orden de $10^{12} kg$ (en comparación, la Tierra tiene una masa del orden de $10^{24} kg$) y un radio de Schwarzschild de unos $10^{-14} m$.

Queda por preguntar ¿qué es lo que pasa con un observador que se cae en un AN? Se sabe que acabará inevitablemente en la singularidad, pero antes de esto, ¿qué ve y qué siente? El horizonte geoméricamente hablando es un punto perfectamente regular y que un observador puntual en caída libre no notaría nada al cruzarlo [4]. Por la estructura causal del espacio-tiempo está claro que el observador no puede ver la singularidad mientras que está fuera del radio de Schwarzschild, ya que ninguna señal puede salir del horizonte para advertirle de lo que le espera. Pero tampoco una vez dentro es capaz de ver la singularidad: de los diagramas de espacio-tiempo está claro que no pueden salir señales de la singularidad hacia un $r < 2G_N m/c^2$. La coordenada radial es una coordenada temporal para $r < 2G_N m/c^2$, así que querer ver la singularidad una vez dentro del radio de Schwarzschild es como querer ver en el futuro. El observador por lo tanto no ve el rostro de la singularidad hasta que da con ella.

Esto no implica que el viaje hacia $r = 0$ sea agradable, por lo menos no para observadores reales, es decir, observadores no puntuales. Objetos y observadores con una extensión espacial sufrirán grandes fuerzas de marea, debido a la inhomogeneidad del campo gravitatorio. En un potencial gravitatorio que varía como $1/r$, la fuerza de marea, es decir la diferencia entre la fuerza a distancia r y $r + \Delta r$ es proporcional a $G_N m/r^3$ [4], de modo que cerca de la singularidad, las fuerzas de marea son inmensas. No sólo la diferencia de la fuerza gravitacional entre la cabeza y los pies estira y desgarra al observador (o lo que queda de él) longitudinalmente como un potro de tortura cósmico, también transversalmente le comprime en una superficie $r^2\Delta\Omega$ cada vez menor [4].

Estas fuerzas de marea son muy grandes, cerca de la singularidad, pero esto no necesariamente implica que lo sean en el horizonte. Para AN estelares y primordiales efectivamente lo son: para un AN con la masa del Sol, un humano ya no sobreviviría las fuerzas a una distancia de 200 km, unos 66 radios de Schwarzschild. Pero en un AN supermasivo de 10^9 masas solares, el radio de Schwarzschild es 10^9 veces mayor, de modo que en $r = 2G_N m/c^2$ la curvatura y las fuerzas de marea todavía no son muy grandes. En este caso, el radio crítico de supervivencia está a unos 200.000 km de la singularidad, es decir a unos $66 \cdot 10^{-6}$ veces el radio de Schwarzschild. En general, el tiempo propio máximo que un observador tarda en llegar a la singularidad desde el radio de Schwarzschild de un AN con masa m es

$$\tau_{max} = 1,5 \cdot 10{-}5 \frac{m}{m_\odot} s, \tag{1.36}$$

donde $m_\odot$ es la masa del Sol. O sea, unos $10^{-5} s$ para un AN estelar, pero unas cómodas 4 horas y pico para un AN supermasivo de 10^9 masas solares [4].

Capítulo 2

Energía Oscura y expansión del Universo

En este capítulo se realiza una breve descripción de los aspectos fundamentales relacionados con la expansión del Universo que son necesarios para tener un mínimo de conocimiento sobre el tema y poder estudiar esta tesis. Estos contenidos pueden ampliarse en los diversos textos que se han citado a lo largo del capítulo.

2.1 ¿Qué es la energía oscura?

Ya había mencionado en la introducción que la EO es una forma de materia [23, 24, 25] o energía [26] que estaría presente en todo el espacio, produciendo una presión que tiende a acelerar la expansión del Universo, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva. [24] Considerar la existencia de la EO es la manera más frecuente de explicar las observaciones recientes de que el Universo parece estar en expansión acelerada. En el modelo estándar de la cosmología, la EO aporta casi tres cuartas partes de la masa-energía total del Universo. También se había mencionado que la EO para determinado valor del parámetro de estado ω es la llamada *constante cosmológica* Λ, una energía de densidad constante que llena el espacio en forma homogénea [27]. También puede ser un campo cosmológico de *quintaesencia* para otros valores de ω.

Existen muchos modelos los cuales permiten describir la fase actual de expansión acelerada del Universo. Algunos de estos modelos incluyen la energía oscura [24], como causante de la expansión acelerada, y otros modelos no incluyen a la energía oscura.

Una gran variedad de modelos del Universo que contienen únicamente dos componentes (energía oscura y materia oscura) han sido sugeridos. El más simple de todos es un modelo que contenga constante cosmológica o energía del vacío cuántico, para representar la energía oscura [20].

Añadir la constante cosmológica a la Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) conduce al mencionado modelo Λ-MOF [1], que se conoce como "modelo estándar" de cosmología debido a su coincidencia precisa con las observaciones.

Para este modelo en particular, al considerar la energía oscura como un fluido, la expresión del parámetro de estado queda prefijada: $\omega = p/\rho = -1$, donde p y ρ son la presión y la densidad de energía.

A pesar de ser sencillo, y repreducir bien muchas observaciones, presenta serios problemas como los que enumeramos a continuación:

1. **El Problema de la Constante Cosmológica**: Este problema surge cuando se compara el valor teórico calculado para la constante cosmológica y el valor que se observa. De dicha comparación resulta que existe una diferencia de 123 órdenes de magnitud entre ambos [28].

2. **El Problema del Ajuste Fino**: Para poder describir el Universo que observamos hoy la constante cosmológica debe ajustarse en un rango comprendido entre $-10^{-47} < \Lambda < 10^{-47}$.

3. **El Problema de la Coincidencia**: Este problema se puede expresar mediante la siguiente pregunta.¿Por qué las densidades de materia oscura fría y energía oscura se hacen com-

[1]En la Bibliografía en Inglés y a veces en español este modelo se encuentra bajo la abreviatura de Λ-CDM, donde las últimas siglas son: Cold Dark Matter

parables precisamente en la presente etapa de la evolución del universo y no mucho antes o después?

Para tratar de resolver los problemas que presenta el modelo con constante cosmológica en [29] se propone que la energía oscura no es constante, sino que evoluciona con el tiempo. Para describir la energía oscura los autores proponen un campo de naturaleza escalar. A estos modelos con campos escalares, que representan una constante cosmológica dinámica, se les denomina modelos de quintaesencia.

Al ser la constante cosmológica dinámica, en estos modelos se suaviza y hasta se puede evadir el problema de la constante cosmológica.

En los modelos de quintaesencia la densidad de energía se define como $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$, donde ϕ representa el campo escalar, $\dot{\phi}^2/2$ es la energía cinética del campo escalar, $V(\phi)$ es el potencial de autointeracción y el punto significa la derivada respecto al tiempo cosmológico.

La presión se define como $p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$, por lo que es conveniente introducir el parámetro de estado para la quintaesencia:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}. \tag{2.1}$$

De la dfinición anterior se puede notar que siempre para la quintaesencia el parámetro de estado va a tomar los valores ($\omega_\phi \geq -1$). Cuando $\omega_\phi = -1$ se recupera la energía del vacío o constante cosmológica.

Si se emplean potenciales atractores, o sea; potenciales para los cuales las condiciones iniciales sobre el campo escalar y sus derivadas no influyen mucho en la evolución actual del universo, el problema del ajuste no se puede suavizar. Estos modelos de forma general preservan el problema de la coincidencia [30, 31]

La medición de la ecuación de estado de la EO es uno de los mayores retos de investigación actual de la cosmología.

2.2 Otro componente del sector oscuro en la materia del Universo

No se debe confundir la EO con la MO, ya que, aunque ambas forman la mayor parte de la masa del Universo, la EO se asocia a un campo escalar que ocupa todo el espacio de manera omnipresente, mientras que la MO son formas de materia presentes en el Universo, *Materia Oscura Fría* y la *Materia Oscura Caliente* (MOC), la MOF es uno de los tipos de MO propuesto a principios de los años 1980 para explicar la formación de estructura cósmica en el modelo del Big Bang.

Partiendo con una cierta distribución para las fluctuaciones iniciales, la manera en que estas se amplifican y crecen depende de las características de la materia. Modelos que sólo tenían materia bariónica no predecían correctamente la estructura observada, además que ya se sabía que la cantidad de materia bariónica era muy baja. En modelos con Materia Oscura Caliente (MOC), formada por partículas moviéndose a altas velocidades (de ahí “caliente”), las fluctuaciones en escalas pequeñas eran “borradas” por el movimiento de las partículas calientes. En ese caso las primeras estructuras en formarse serían de dimensiones de supercúmulos, los que despúes se frangmentarían, dando origen a una formación de estructura “de arriba abajo” [2].

Con MOF, en cambio, las fluctuaciones en pequeñas escalas no son borradas, y la materia colapsa empezando por pequeñas escalas (menores que galaxias), y luego a escalas cada vez mayores, en una formación “de abajo arriba” [3]. Según este modelo, en la época actual la materia aún está colapsando en las escalas de cúmulos. Durante más de una década la MOF fue la favorita, y las simulaciones computacionales la favorecían. Sin embargo, en los últimos años del siglo XX, a medida que las simulaciones computacionales se hacían más detalladas, la MOF comenzó a tener problemas explicando la estructura a escalas subgalácticas.

[2] O conocido del inglés como “top-down”, quiere decir que primero serán las formaciones de estructuras de mayor magnitud en el universo y luego las de menor magnitud a partir de la fragmentación de estas.

[3] O conocido del inglés como “bottom-up”, quiere decir que primero serán las formaciones de estructuras de menor magnitud en el universo y luego las de mayor magnutud a partir de la agrupación de estas.

La MOC es un tipo de MO que estaría constituido por partículas que viajan a velocidad relativista. El candidato más probable para la MOC es el neutrino. Los neutrinos tienen una masa insignificante, no tienen carga eléctrica y por lo tanto prácticamente no interaccionan con la materia, lo cual los convierte en increíblemente difícil de detectar. Estas mismas características, es también lo que los convierte en buenos candidatos para ser la MOC. La MOC, sin embargo, no puede explicar cómo se formaron las galaxias individuales a partir del *Big Bang*. El fondo cósmico de microondas, tal como ha sido medido por el satélite COBE es uniforme y no puede explicarse como las partículas de movimiento rápido se agregarían desde este estado inicial. Para explicar la estructura del universo, se hace necesaria la MOF. La MOC es, en la actualidad, discutida como una parte de la teoría mixta de la MO.

Información divulgada relativamente reciente basada en el trabajo realizado por la nave espacial Planck sobre la distribución del universo, obtuvo una estimación más precisa de esta en 68,3 % de EO, un 26,8 % de MO y un 4,9 % de materia ordinaria [32].

2.3 Breve reseña histórica del concepto de energía oscura

La constante cosmológica fue propuesta por primera vez por Albert Einstein como un medio para obtener una solución estable de la ecuación del campo de Einstein que llevaría a un Universo estático, utilizándola para compensar la gravedad. El mecanismo no sólo fue un ejemplo poco elegante de *ajuste fino*, pues pronto se demostró que el Universo estático de Einstein sería inestable porque las heterogeneidades locales finalmente conducirían a la expansión sin control o a la contracción del Universo. El equilibrio es inestable: si el Universo se expande ligeramente, entonces la expansión libera la energía del vacío, que causa todavía más expansión. De la misma manera, un Universo que se contrae ligeramente se continuará contrayendo.

Estos tipos de perturbaciones son inevitables, debido a la distribución irregular de materia en el Universo. Las observaciones realizadas por Edwin Hubble demostraron que el Universo está expandiéndose y que no es estático en absoluto. Einstein se refirió a su fallo para predecir un Universo dinámico, en contraste a un Universo estático, como “su gran error”. Después de esta declaración, la constante cosmológica fue ignorada durante mucho tiempo como una curiosidad histórica.

Alan Guth propuso en los años 1970 que un campo de presión negativa, similar en concepto a la EO, podría conducir a la inflación cósmica en el Universo pre-primigenio. La inflación postula que algunas fuerzas repulsivas, cualitativamente similar a la EO, da como resultado una enorme y exponencial expansión del Universo poco después del BB. Tal expansión es una característica esencial de muchos modelos actuales del BB. Sin embargo, la inflación tiene que haber ocurrido a una energía mucho más alta que la EO que observamos hoy y se piensa que terminó completamente cuando el Universo solo tenía una fracción de segundo. No está claro qué relación (de haber alguna), existe entre la EO y la inflación. Incluso después de que los modelos inflacionarios hayan sido aceptados, la constante cosmológica se piensa que es irrelevante en el Universo actual.

El término “energía oscura” fue acuñado por Michael Turner en 1998 [33]. En ese tiempo, el problema de la masa perdida de la nucleosíntesis primordial y la estructura a gran escala del Universo fue establecida y algunos cosmólogos habían empezado a teorizar que había un componente adicional en nuestro Universo. La primera prueba directa de la EO provino de las observaciones de la aceleración de expansión de las supernovas, por Adam Riess [5]. y confirmada después por Saul Perlmutter en [34].Esto dio como resultado el modelo Λ-MOF, que hasta 2006 era consistente con una serie de observaciones cosmológicas. Los primeros resultados de la SNLS revelaron que el comportamiento medio de la EO se comporta como la constante cosmológica de Einstein con una precisión del 10 % [35]. Los resultados del Hubble Space Telescope Higher-Z Team indican que la EO ha estado presente durante al menos 9.000 millones de años y durante el período precedente a la aceleración cósmica.

2.4 Descubrimiento de la Energía Oscura.

En 1998 las observaciones de supernovas de tipo **1a** muy lejanas, realizadas por parte del Supernova Cosmology Project en el Laboratorio Nacional Lawrence Berkeley y el High-z Supernova Search Team, sugirieron que la expansión del Universo presenta el mencionado carácter acelerado [5, 34]. Desde entonces, esta aceleración se ha confirmado por varias fuentes independientes: medidas de la radiación de fondo de microondas, las lentes gravitacionales, nucleosíntesis primigenia de elementos ligeros y la estructura a gran escala del Universo, así como una mejora en las medidas de las supernovas han sido consistentes con el modelo Λ-MOF [36].

Las supernovas de tipo **1a** proporcionan la principal prueba directa de la existencia de la EO. Según la ley de Hubble, todas las galaxias lejanas se alejan aparentemente de la Vía Láctea, mostrando un desplazamiento al rojo en el espectro luminoso debido al *efecto Doppler*. La medición del factor de escala en el momento que la luz fue emitida desde un objeto es obtenida fácilmente midiendo el corrimiento al rojo del objeto en recesión. Este desplazamiento indica la edad de un objeto lejano de forma proporcional, pero no absoluta. Por ejemplo, estudiando el espectro de un *quasar* se puede saber si se formó cuando el Universo tenía un 20 % o un 30 % de la edad actual, pero no se puede saber la edad absoluta del Universo. Para ello es necesario medir con precisión la expansión cosmológica. El valor que representa esta expansión en la actualidad se denomina Constante de Hubble. Para calcular esta constante se utilizan en cosmología las *candelas estándar* [4], que son determinados objetos astronómicos con la misma magnitud absoluta, que es conocida, de tal manera que es posible relacionar el brillo observado, o magnitud aparente, con la distancia. Sin las candelas estándar, es imposible medir la relación corrimiento al rojo-distancia de la ley de Hubble. Las supernovas tipo **1a** son una de esas candelas estándar, debido a su gran magnitud absoluta, lo que posibilita que se puedan observar incluso en las galaxias más lejanas. En 1998 varias observaciones de estas supernovas en ga-

[4]En Astrofísica, el término "candela estándar" se usa para referirse a las propiedades físicas de determinados objetos muy lejanos o procesos que tienen lugar en estos objetos, que permiten estimar la distancia a la que se encuentran.

laxias muy lejanas, demostraron que la constante de Hubble no es constante, sino que su valor varía con el tiempo. Hasta ese momento se pensaba que la expansión del Universo se estaba frenando debido a la fuerza gravitatoria; sin embargo, se descubrió que se estaba acelerando, por lo que debía existir algún tipo de fuerza que acelerase el Universo.

La consistencia en magnitud absoluta para supernovas tipo **1a** se ve favorecida por el modelo de una estrella enana blanca vieja que gana masa de una estrella compañera y crece hasta alcanzar el límite de Chandrasekhar [5] definido de manera precisa. Con esta masa, la enana blanca es inestable ante fugas termonucleares y explota como una supernova tipo **1a** con un brillo característico. El brillo observado de la supernova se pinta frente a su corrimiento al rojo y esto se utiliza para medir la historia de la expansión del Universo. Estas observaciones indican que la expansión del Universo no se está desacelerando, como sería de esperar para un Universo dominado solo por materia ordinaria, sino más bien acelerándose. Estas observaciones se explican suponiendo que existe un nuevo tipo de energía con presión negativa.

La existencia de la EO, de cualquier forma, es necesaria para reconciliar la geometría medida del espacio con la suma total de materia en el Universo. Las medidas de la radiación de fondo de microondas más recientes, realizadas por el satélite WMAP, indican que el Universo está muy cerca de ser plano. Para que la forma del Universo sea plana, la densidad de masa-energía del Universo tiene que ser igual a una cierta densidad crítica. Posteriores observaciones de la radiación de fondo de microondas y de la proporción de elementos formados en el *Big Bang* han puesto un límite a la cantidad de materia bariónica y MO que puede existir en el Universo, que cuenta sólo el 30 % de la densidad crítica. Esto implica la existencia de una forma de energía adicional que cuenta alrededor del 70 % de la masa-energía restante [36]. Estos estudios indican que el 73 % de la masa del Universo está formado por la EO, un 23 % es MO (MOF y MOC) y un 4 % materia bariónica. La teoría de la estructura a gran escala del Universo, que determina la formación de estructuras en el Universo (estrellas, *quasars*, galaxias y agrupaciones galácticas),

[5] El límite de Chandrasekhar es la máxima masa posible de una estrella fría estable. Si se supera este límite la estrella colapsará para convertirse en un agujero negro o en una estrella de neutrones.

también sugiere que la densidad de materia en el Universo es solo el 30 % de la densidad crítica.

2.5 Experimentos para probar la existencia de la energía oscura

El más conocido es el Sistema de Detección Integrado Sachs-Wolfe, ideado en 1996 por dos investigadores canadienses y utilizado por primera vez en 2003; propusieron buscar pequeños cambios en la energía de la luz comparando la temperatura de la radiación con mapas de galaxias en el universo local. De no existir la EO, no habría correspondencia entre los dos mapas (el de fondo cósmico de microondas distante y el de la distribución de galaxias relativamente cercano). Si esta existiera, sin embargo, se podría observar un curioso fenómeno: los fotones del fondo cósmico de microondas ganarían energía en vez de perderla, al pasar cerca de grandes masas. El experimento mejoró sus resultados gracias al equipo de Tommaso Giannantonio, quien ha probado su existencia con una mayor certeza [37].

2.6 Naturaleza de la energía oscura

La naturaleza exacta de la EO es materia de debate. Se sabe que es muy homogénea, no muy densa, pero no se conoce su interacción con ninguna de las fuerzas fundamentales más que con la gravedad. Como no es muy densa, unos $10^{-29} g/cm$, es difícil realizar experimentos para detectarla. Pero si está claro que la EO tiene una gran influencia en el Universo, ya que es el 70 % de toda la energía y debido a que ocupa uniformemente el espacio interestelar. Los dos modelos principales son la quintaesencia y la constante cosmológica Λ.

2.6.1 Presión negativa

La EO causa la expansión del universo pues ejerce una presión negativa. Una sustancia tiene una presión positiva cuando empuja la pared del recipiente que lo contiene; este es el caso de los fluidos ordinarios (líquidos y gases de materia ordinaria). Una presión negativa tiene el efecto contrario, y un recipiente lleno de una substancia de presión negativa provocaría una presión hacia dentro del contenedor. De acuerdo con la RG, la presión de una substancia contribuye a su atracción gravitacional sobre otras cosas igual que hace su masa, de acuerdo con la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Si la sustancia es de presión negativa entonces su efecto es una repulsión gravitacional. Si el efecto gravitacional repulsivo de la presión negativa de la EO es mayor que la atracción gravitacional causada por la propia energía, resulta una expansión del tipo que se ha observado. Por esa razón, se ha postulado que la expansión acelerada observada podría ser el efecto de presión negativa de una sustancia exótica conocida como "Energía Oscura". Otra posibilidad para explicar la expansión es postular una ecuación de campo con constante cosmológica positiva:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \hat{T}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

Donde ahora el tensor $\hat{T}_{\mu\nu}$ sería la parte asociada a materia con presión positiva. Para resolver la contradicción de que el empuje cause atracción o la contracción cause repulsión se considera que:

El empuje de la presión positiva y el empuje de la presión negativa son fuerzas no gravitacionales que solamente mueven substancias en torno a su espacio interior sin cambiar el espacio en sí. La atracción o repulsión gravitacional actúan sobre el propio espacio, disminuyendo (o incrementando) la cantidad de espacio entre los cuerpos. Esto es lo que determina el tamaño del

Universo. No hay necesidad de que estos dos efectos actúen en la misma dirección. De hecho, actúan en direcciones opuestas.

2.6.2 Constante cosmológica

La explicación más simple para la EO es que simplemente es el "costo de tener espacio"; es decir, un volumen de espacio tiene alguna energía fundamental intrínseca y esta es la constante cosmológica Λ, si conocemos que la energía y la masa están relacionadas por la ecuación $E = mc^2$, la TRG predice que tendrá un efecto gravitacional. Algunas veces Λ es llamada energía del vacío porque su densidad de energía es la misma que la del vacío. De hecho, muchas teorías de la física de partículas predicen fluctuaciones del vacío que darían al vacío exactamente este tipo de energía. Los cosmólogos estiman que la constante cosmológica es del orden de $10^{-29} g/cm$ o unos 10^{-120} en unidades de Planck.

La constante cosmológica tiene una presión negativa igual a su densidad de energía, y así causa que la expansión del Universo se acelere. La razón por la que la constante cosmológica tiene una presión negativa se puede obtener a partir de la termodinámica clásica. La energía tiene que perderse desde dentro de un contenedor que se ocupe con el contenido. Un cambio en el volumen dV necesita el mismo trabajo que para un cambio de energía $-pdV$, donde p es la presión. Pero la energía neta en un volumen de energía de vacío realmente se incrementa cuando el volumen aumenta (dV es positivo), porque la energía es igual a ρV, donde ρ es la densidad de energía de la constante cosmológica. Por tanto, p es negativa y, de hecho, $p = -\rho$, significando que la ecuación de estado tiene la forma: $\omega = p/\rho = -1$, sin variación temporal.

Un gran problema pendiente es que muchas teorías cuánticas de campos predicen una gran constante cosmológica a partir de la energía del vacío cuántico, superior a 120 órdenes de magnitud. Algunas teorías supersimétricas necesitan una constante cosmológica que sea exactamente cero, lo que no ayuda. El consenso científico actual cuenta con la extrapolación de pruebas empíricas donde son relevantes las predicciones y el *ajuste fino* de las teorías hasta que se encuentre una solución más elegante. Técnicamente, esto se suma a las teorías de comprobación contra observaciones macroscópicas. Lamentablemente, como el margen de error conocido en la constante predice el destino final del Universo más que su estado actual, todavía continúan sin conocerse muchas preguntas "más profundas".

Otro problema aparece con la inclusión de la constante cosmológica en el modelo estándar que es la aparición de soluciones con regiones de discontinuidades con una baja densidad de materia [38]. La discontinuidad también afecta al signo pasado de la energía del vacío, cambiando la actual presión negativa a presión positiva (atractiva), de la misma forma que se ve hacia atrás hacia el Universo primigenio. Este hallazgo debería ser considerado como una deficiencia del modelo estándar, pero sólo cuando se incluye un término de vacío.

A pesar de sus problemas, la constante cosmológica es en muchos aspectos la solución más económica al problema de la aceleración de la expansión del Universo. Así, el modelo estándar actual de cosmología, Λ-MOF, incluye la constante cosmológica como una característica esencial.

2.6.3 Quintaesencia

La EO puede convertirse en MO cuando es golpeada por partículas bariónicas, conduciendo así a excitaciones como de partículas en algún tipo de campo dinámico, conocido como *quintaesencia*. La *quintaesencia* difiere de la constante cosmológica en que puede variar en el espacio y en el tiempo. Para que no se agrupen y se formen estructuras como materia, tiene que ser muy ligero de tal manera que tenga una gran longitud de onda Compton [6].

No se ha encontrado todavía ninguna prueba de la *quintaesencia*, pero tampoco ha sido descartada. Generalmente predice una aceleración ligeramente más lenta de la expansión del Universo que la constante cosmológica. Algunos científicos piensan que la mejor prueba de la *quintaesen-*

[6] El efecto Compton consiste en el aumento de la longitud de onda de un fotón de rayos X cuando choca con un electrón libre y pierde parte de su energía. La frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada depende únicamente de la dirección de dispersión

cia vendría a partir de violaciones del principio de equivalencia y la variación de las constantes fundamentales de Einstein en el espacio o en el tiempo. Los campos escalares son predichos por el modelo estándar y la teoría de cuerdas, pero un problema análogo al problema de la constante cosmológica (o el problema de construir modelos de inflación cósmica) ocurre: la teoría de la renormalización predice que los campos escalares deberían adquirir grandes masas.

El problema de la *coincidencia* cósmica se pregunta por qué la aceleración cósmica empezó cuando lo hizo. Si la aceleración cósmica hubiera empezado antes en el Universo, las estructuras como galaxias nunca habrían tenido tiempo de formarse y permanecer, al menos como se las conoce; nunca habrían tenido una oportunidad de existir. Sin embargo, muchos modelos de *quintaesencia* tienen un llamado "comportamiento rastreador", que soluciona este problema. En estos modelos, el campo de la *quintaesencia* tiene una densidad cercana pero menor que la densidad de radiación, hasta llegar al punto de igualdad materia-radiación, a partir del cual se dispara la *quintaesencia* a comportarse como EO, y finalmente dominando el Universo, provoca el carácter acelerado a partir de cierto momento. Esto naturalmente establece una baja escala de energía para la EO.

Algunos casos especiales de la *quintaesencia* es tambien la *energía fantasma* con $\omega = +1$, en que la densidad de energía de la *quintaesencia* realmente se incrementa con el tiempo y conserva la peculiar característica de una energía cinética negativa $-k$, una forma poco convencional de energía cinética. Pueden tener propiedades inusuales: la *energía fantasma*, por ejemplo, puede causar un *Big Rip* [7].

La nueva *quintaesencia* es una forma novedosa de energía inherente en el espacio vacío, que está basada en la constante de Planck. La suma fundamental de energía contenida en el espacio-tiempo, es representada por la ecuación $E = hn$, donde h es la constante de Planck y n es el número de *quintaesencia* contenido en un volumen de espacio dado, por unidad de tiempo [39].

[7] El "Gran Desgarramiento" o Teoría de la expansión eterna, llamado en inglés *Big Rip*, es una hipótesis cosmológica sobre el destino final del Universo.

2.6.4 Otras Ideas Alternativas

Algunos teóricos piensan que la EO y la aceleración cósmica son un fallo de la RG en escalas muy grandes, mayores que los supercúmulos. Es una tremenda extrapolación pensar que la ley de la gravedad, que funciona tan bien en el sistema solar, debería trabajar sin corrección a escala universal. Se han realizado muchos intentos de modificar la RG; sin embargo, han resultado ser equivalentes a las teorías de la *quintaesencia* o inconsistentes con las observaciones.

Las ideas alternativas a la EO van desde las *teoría de cuerdas*, la cosmología *brana* y el principio *holográfico*, pero no han sido probadas todavía tan convincentemente como la *quintaesencia* y la constante cosmológica.

Sin embargo, otras proposiciones "radicalmente conservadoras" intentan explicar los datos observacionales mediante un uso más refinado de las teorías establecidas más que a través de la introducción de la EO, centrándose, por ejemplo, en los efectos gravitacionales de heterogeneidades de la densidad, (asumidas como insignificantes en la aproximación estándar de la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker y confirmada como insignificante por los estudios de las anisotropías del fondo cósmico de microondas y las estadísticas de la estructura a gran escala del Universo) o en las consecuencias de la ruptura de la simetría electrodébil en el Universo primigenio [40].

2.7 La Energía Oscura y el destino del Universo

La consecuencia más directa de la existencia de la EO y la aceleración del Universo es que este es más antiguo de lo que se creía. Si se calcula la edad del Universo con base en los datos actuales de la constante de Hubble (714(km/s)), se obtiene una edad de 10.000 millones de años, menor que la edad de las estrellas más viejas que es posible observar en los cúmulos globulares, lo que crea una paradoja insalvable. Los cosmólogos estiman que la aceleración empezó hace unos 9.000 millones de años. Antes de eso, se pensaba que la expansión estaba ralentizándose, debido a la influencia atractiva de la MO y los bariones. La densidad de MO en un Universo en expansión desaparece más rápidamente que la EO y finalmente domina esta. Específicamente, cuando el volumen del Universo se dobla, la densidad de MO se divide a la mitad pero la densidad de EO casi permanece sin cambios (exactamente es constante en el caso de una constante cosmológica). Teniendo en cuenta la EO, la edad del Universo es de unos 13.700 millones de años aproximadamente (de acuerdo con los datos del satélite WMAP en 2003), lo que resuelve la paradoja de la edad de las estrellas más antiguas.

Si la aceleración continúa indefinidamente, el resultado final será que las galaxias exteriores al Supercúmulo de Virgo se moverán más allá del horizonte de sucesos: no volverán a ser visibles, porque su velocidad radial será mayor que la velocidad de la luz. Esta no es una violación de la relatividad especial y el efecto no puede utilizarse para enviar una señal entre ellos. Realmente no hay ninguna manera de definir la "velocidad relativa" en un espacio-tiempo curvado. La velocidad relativa y la velocidad solo pueden ser definidas con significado pleno en un espacio-tiempo plano o en regiones suficientemente pequeñas (infinitesimales) de espacio-tiempo curvado. La Tierra, la Vía Láctea y el Supercúmulo de Virgo, sin embargo, permanecerían virtualmente sin perturbaciones mientras el resto del Universo retrocede. En este escenario, el supercúmulo local finalmente sufriría la muerte caliente, justo como se pensaba para un Universo plano y dominado por la materia, antes de las medidas de la aceleración cósmica.

El fondo de microondas indica que la geometría del Universo es plana, es decir, el Universo tiene la masa justa para que la expansión continúe indeterminadamente. Si el Universo, en vez de plano fuese cerrado, significaría que la atracción gravitatoria de la masa que forma el Universo es mayor que la expansión del Universo, por lo que éste se volvería a contraer en lo que es llamado el *Big Crunch* [8] , tratado en la subsección siguientes de esta sección. Sin embargo, al estudiar la masa del Universo se detectó muy pronto que faltaba materia para que el Universo fuese plano. Esta "materia perdida" se denominó como la mencionada MO. Pero

[8] La "Gran Implosión", también conocida como "Gran Colapso" o directamente mediante el término inglés *Big Crunch*, es una de las teorías cosmológicas que se barajaban en el siglo XX sobre el destino último del universo.

de igual forma con el descubrimiento de la EO hoy se sabe que el destino del Universo ya no depende de la geometría del mismo, es decir, de la cantidad de masa que hay en él. En un principio la expansión del Universo se frenó debido a la gravedad, pero hace unos 4.000 millones de años la EO sobrepasó al efecto de la fuerza gravitatoria de la materia y comenzó la aceleración de la expansión.

El futuro último del Universo depende de la naturaleza exacta de la EO. Si esta es una constante cosmológica, el futuro del Universo será muy parecido al de un Universo plano. Sin embargo, en los mencionados modelos de *quintaesencia*, denominados *energía fantasma*, la densidad de la EO aumenta con el tiempo, provocando una aceleración exponencial. En algunos modelos extremos la aceleración sería tan rápida que superaría las fuerzas de atracción nucleares y destruiría el Universo en unos 20.000 millones de años, en el llamado *Big Rip* [9], tratado en la subsección siguientes de esta sección.

2.7.1 Teorías del Big Crunch y del Big Rip

La teoría de la “Gran Implosión” o *Big Crunch* propone un universo cerrado. Según esta teoría, si el universo tiene una densidad crítica superior a 3 átomos por metro cúbico, la expansión del universo, producida en teoría por el *Big Bang* irá frenándose poco a poco hasta que finalmente comiencen nuevamente a acercarse todos los elementos que conforman el universo, volviendo al punto original en el que todo el universo se comprimirá y condensará en un único punto de energía como el anterior a la Teoría de *Big Bang*.

El momento en el cual acabaría por pararse la expansión del universo y empezaría la contracción depende de la densidad crítica del Universo: a mayor densidad mayor rapidez de frenado y contracción; y a menor densidad, más tiempo para que se desarrollaran eventos que se prevé tendrían lugar en un universo en expansión perpetua. Sin embargo, debido a que la naturaleza

[9] El “Gran Desgarramiento” o Teoría de la expansión eterna, llamado en inglés *Big Rip*, es una hipótesis cosmológica sobre el destino final del Universo.

de la EO es desconocida, todavía es posible (aunque no respaldado por la observación a la fecha) que el universo finalmente revierta la marcha y cause un colapso [41].

Esta fase de contracción seguiría inexorablemente, y con ella el aumento de la temperatura de dicha radiación. Llegaría un momento en que todas las galaxias se fundieran en una (aunque los choques entre estrellas serían aún raros). Mientras, la temperatura del fondo de radiación iría subiendo y empezaría a poner en peligro la supervivencia de las formas de vida que existieran entonces, en un principio las que vivieran en planetas de tipo terrestre. En un momento dado, dicha temperatura sería de 300 Kelvin, impidiendo a los planetas antes mencionados deshacerse del calor acumulado y acabando por hacerse inhabitables (un auténtico efecto invernadero a escala universal). Más adelante, y con una contracción cada vez más acelerada (y junto a ella un aumento desbocado de la temperatura de la radiación cósmica) el universo se convertiría en un lugar infernal e inhabitable (al menos para seres como nosotros y sin ayuda tecnológica) con temperaturas de miles de grados debido a una radiación cósmica a esa temperatura y a colisiones entre estrellas al disponer estas cada vez de menos espacio.

Al parecer, las estrellas serían en su mayoría destruidas no por colisiones entre ellas sino por el aumento de temperatura del universo. Este llegaría a estar tan caliente que no podrían deshacerse del calor acumulado en su interior y pasarían a absorberlo del exterior, hasta acabar por estallar. Tras ello, sólo quedarían AN (el principal hecho que diferenciaría la fase de contracción de la de expansión) y un plasma cada vez más caliente [10], en el que el aumento de temperatura destruiría primero los átomos y luego las propias partículas elementales, sólo dejando *quarks*, a la vez que los AN empezaban a fusionarse entre sí y a absorber materia hasta dar lugar a un único "super" AN que significaría el fin del espacio, del tiempo, y de todo; del mismo modo que no tiene sentido preguntarse qué había "antes" del *Big Bang*, tampoco puede preguntarse que habría "después" del *Big Crunch*, aunque de la teoría de este último surge la idea de un modelo

[10] Este plasma sería muy distinto al existente tras el nacimiento del universo debido a que procedería de estructuras ya desaparecidas, por lo cual mostraría una gran asimetría en la densidad que presentara en diferentes puntos

de “Universo Oscilante” [11]

En el caso del *Big Rip*, el cumplimiento de esta hipótesis en esencia depende de la cantidad de EO en el Universo. Si el Universo contiene suficiente EO, podría acabar en un desgarramiento de toda la materia. El valor clave es la razón entre la presión de la EO y su densidad energética ω. Si su valor es tal que $\omega < -1$ el Universo acabaría por ser desgarrado. Primero, las galaxias se separarían entre sí, a 1000 millones de años antes del fin, luego la gravedad sería demasiado débil para mantener integrada cada galaxia, y 60 millones de años antes del fin, sólo habría estrellas aisladas. Aproximadamente tres meses antes del fin, los sistemas solares perderían su cohesión gravitatoria. En los últimos minutos, se desbaratarían estrellas y planetas. El Universo quedaría en átomos, pero no se habría acabado aún. Los átomos serían destruidos en una fracción de segundo antes del fin del tiempo y sólo quedaría radiación. El Universo sería como el Big Bang pero casi infinitamente menos denso.

A diferencia del *Big Crunch*, en el que todo se condensa en un solo punto, en el *Big Rip* el Universo se convertiría en partículas subatómicas flotantes que permanecerían por siempre separadas, sin cohesión gravitatoria ni energía alguna.

Los autores de esta hipótesis calculan que el fin del Universo, tal como lo conocemos, ocurriría aproximadamente $3,5 \cdot 10^{10}$ años (35.000 millones de años) después del Big Bang, o dentro de $2,0 \cdot 10^{10}$ años (20.000 millones de años).

Debido a que aproximadamente la materia sólo representa el 27 % del Universo y el 73 % restante está formado por la EO, el *Big Rip* parece ser una de las teorías más aceptadas en la actualidad del fin del Universo.

Entonces, a modo de resumen, es evidente que hay algunas ideas muy especulativas sobre el futuro del Universo. Una sugiere que la *energía fantasma* causa una expansión divergente, que implicaría que la fuerza efectiva de la EO continúa creciendo hasta que domine al resto de las

[11] Según esta teoría el universo sería descrito como un Universo oscilante, en el cual, tras el *Big Crunch* podría tener lugar un nuevo *Big Bang*; e incluso este universo podría proceder de un universo anterior que también se comprimió en un *Big Crunch*. Si esto hubiera ocurrido repetidas veces, nos encontraríamos ante un universo oscilatorio; donde cada universo termina con un *Big Crunch* y da lugar a un nuevo universo con un *Big Bang*.

fuerzas del Universo. Bajo este escenario, la EO finalmente destrozaría todas las estructuras gravitacionalmente acotadas, incluyendo galaxias y sistemas solares y finalmente superaría a las fuerzas eléctrica y nuclear para destrozar a los propios átomos, terminando el Universo en un *Big Rip*. Por otro lado, la EO puede disiparse con el tiempo o incluso llegar a ser atractiva. Tales incertidumbres abren la posibilidad de que la gravedad todavía pueda conducir al Universo que se contrae a sí mismo en un *Big Crunch*. Algunos escenarios, como el modelo cíclico [12], sugieren que este podía ser el caso. Mientras que estas ideas no están soportadas por las observaciones, no pueden ser excluidas. Las medidas de aceleración son cruciales para determinar el destino final del Universo en la Teoría del *Big Bang*.

[12]Un modelo cíclico es cualquiera de los modelos cosmológicos en la que el universo sigue una interminable cadena de ciclos auto-sostenibles (por ejemplo: una cadena indeterminada de *Big Bangs* y *Big Crunchs*).

Capítulo 3

Efecto de la expansión acelerada del Universo sobre la estructura de la métrica de Schwarzschild

En este capítulo se realiza primero un trabajo de obtención de la solución original de Schwarzschild encontrada en la bibliografía y se muestra además una vía más expedita para la derivación. Luego, del trabajo realizado en [1], considerado como investigación antecedente de esta tesis, se analiza lo relacionado al problema de la obtención de nuevas soluciones estáticas esféricamente simétricas, a través del tensor de enrgía-momento de las ecuaciones de campo de Einstein, y considerando la energía oscura como un campo cosmológico de quintaesencia. Para finalizar, considerando el efecto que debe tener la expansión acelerada del Universo, debido a la presencia de la energía oscura, se perturba consecuentemente la métrica de Schwarzschild al incluir el factor de escala en los términos espaciales de la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein. Este trabajo brinda una nueva solución estática esféricamente simétrica que describe la estructura del espacio-tiempo con una clara dependencia del factor de escala.

3.1 Derivación de la solución de Schwarzschild

En ausencia de energía y materia, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ es cero y (la parte sin traza de) las ecuaciones de Einstein se reducen a [4]

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{3.1}$$

A primera vista puede resultar extraño que las ecuaciones del vacío admiten soluciones no-triviales, aparte del espacio de Minkowski. Pero justo gracias a la no linealidad existe una gran clase de soluciones no-triviales del vacío. Las métricas que satisfacen la ecuaciones del vacío (3.1) se llaman Ricci-planas. Las soluciones que son Ricci-planas en general no son planas, pero sí son soluciones del vacío (en ausencia de una constante cosmológica).

La solución de Schwarzschild es la solución no-trivial más sencilla, debido a su gran cantidad de simetría. Para empezar es estática, lo que significa que no hay evolución en el tiempo y por lo tanto existe un sistema de coordenadas en que la métrica es independiente de la coordenada temporal. Además no puede haber términos cruzados del tipo $g_{ti}dtd^i$, ya que la presencia de estos términos rompería la invariancia $t \rightarrow -t$ de las soluciones estáticas. Luego, la simetría esférica implica que el espacio tiene una simetría $SO(3)$, es decir, que es invariante bajo rotaciones ortogonales en tres dimensiones[1]. Existen por lo tanto unas coordenadas angulares θ y φ tales que las secciones espaciales $t = t_0$ se puedan escribir como

$$ds^2 = -f(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.2}$$

donde r es la coordenada radial. En principio el factor delante de la parte angular puede ser una función arbitraria $h^2(r)$, pero con un cambio de coordenadas $\tilde{r} = h(r)$ siempre se puede escribir la métrica en la forma (3.2).

[1]Ojo, esto no implica que las secciones espaciales sean R3. La solución de Schwarzschild misma ya es un contraejemplo, como veremos en breve.

Sabemos que las ecuaciones de Einstein son demasiado difíciles de resolver directamente, pero gracias a la simetría de la solución de Schwarzschild podemos escribir una propuesta de la forma

$$ds^2 = e^{2A(r)}c^2dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.3}$$

con $A(r)$ y $B(r)$ dos funciones que quedan por determinar. Nótese cómo la propuesta refleja la simetría esférica y el hecho de que la solución es estática en la ausencia de términos cruzados y el hecho de que A y B son funciones de r únicamente. La idea ahora es sustituir esta propuesta en las ecuaciones del vacío (3.1) para determinar A y B [4].

Los símbolos de Christoffel no-triviales vienen dados por (ejerc.):

$$\left\{\begin{array}{lll} \Gamma^r_{tt} = e^{2(A-B)}c^2A', & \Gamma^\theta_{r\theta} = r^{-1}, & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta, \\ \Gamma^t_{tr} = A', & \Gamma^\varphi_{r\varphi} = r^{-1}, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta e^{-2B}, \\ \Gamma^r_{rr} = B', & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2B}, & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

de modo que las componentes del tensor y el escalar de Ricci que no son cero son (ejerc.):

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{2(A-B)}c^2[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1}A'], \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - 2r^{-1}B', \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B}[rA' - rB' + 1] - 1, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}, \\ R &= -2e^{-2B}[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1}(A' - B') + r^{-2}] + 2r^{-2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la prima denota la derivada con respecto a r. Igualar todas las componentes del tensor de Ricci a cero, como exigen las ecuaciones de Einstein, nos hace resolver un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas para dos incógnitas. En principio este sistema está sobredeterminado y no tiene soluciones, pero veremos que no todas las ecuaciones son independientes.

Multiplicando R_{tt} por $e^{-2(A-B)}c^{-2}$ y sumándolo con R_{rr} obtenemos que

$$0 = e^{-2(A-B)}c^{-2}R_{tt} + R_{rr} = -2r^{-1}(A' + B'), \tag{3.6}$$

de modo que

$$B' = -A', \tag{3.7}$$

o lo que es lo mismo, $B(r) = -A(r) + c_0$. La constante de integración c_0 no tiene significado físico, ya que se puede absorber en una redefinición de la coordenada temporal $t' = e^{c_0}t$. Sin pérdida de generalidad podemos poner $c_0 = 0$ y la solución general de (3.6) es [4]

$$A(r) = -B(r).. \tag{3.8}$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación para R_{rr} encontramos

$$R_{rr} = A'' + 2(A')^2 + 2r^{-1}A' = 0. \tag{3.9}$$

Haciendo el cambio de variable $A' = \alpha$ se reduce el orden de (3.8) y queda

$$\alpha' + 2\alpha^2 + 2r^{-1}\alpha = 0, \tag{3.10}$$

siendo una ecuación diferencial de tipo Bernoulli, reducible a través de otro cambio de variable a una ecuación diferencial lineal de primer orden. Integrando directamente dicha ecuación obtenemos que

$$e^{2A(r)} = 1 - \frac{C}{r}. \tag{3.11}$$

donde $-C$ es una constante de integración con dimensión de longitud **L**.

Se sabe que para soluciones estáticas de la ecuaciones de Einstein y con poca (o sin) curvatura la componente g_{tt} de la métrica es proporcional al potencial gravitatorio newtoniano $\Phi = -G_N m/r$. Por lo tanto comparando este con g_{tt} de (3.13), se puede identificar dicho potencial newtoniano $\Phi = -C/r$, donde $C = 2c^{-2}G_N m$ siendo $2c^{-2}$ el factor de proporcionalidad, por tanto (3.11) queda ahora de la forma

$$e^{2A(r)} = 1 - \frac{2}{c^2}\frac{G_N m}{r}. \tag{3.12}$$

No es difícil averiguar que (3.12) satisface idénticamente la ecuación (3.9). Por lo tanto la solución de Schwarzschild viene dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dt^2 - r^2 d\Omega_2^2, \tag{3.13}$$

donde r_s es el llamado *radio de Schwarzschild* [2] y $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ es el elemento de línea de las dos-esferas $\mathbb{S}^2$.

Es útil dedicar unas palabras a cómo compaginar el hecho de que por un lado la solución de Schwarzschild es una solución del vacío, en ausencia de masas y energía, y por otra lado su interpretación es la de un espacio-tiempo con una masa m en el origen. La solución de Schwarzschild (3.13), por lo menos la parte con $r > R_0$, corresponde a la parte exterior del campo gravitatorio causado por un objeto esférico con masa m y radio $R_0 > 2G_N m/c^2$ y por esto su nombre más correcto es la *solución exterior de Schwarzschild.* Claramente el exterior de ese objeto masivo es vacío y la solución correspondiente es una solución del vacío. Existe también otra solución (también encontrada por Karl Schwarzschild en 1916) que describe la parte interior $r < R_0$ donde se encuentra la estrella o el planeta, llamada *solución interior de Sch-*

[2] El radio crítico (tambien llamado por Laplace *radio gravitacional*) para la velocidad de escape, calculado con métodos puramente newtonianos, coincide exactamente con el *radio de Schwarzschild*, el radio desde donde la luz ya no puede salir hacia el exterior.

warzschild. El tensor de energía-momento de la solución interior es un fluido perfecto, mientras la solución exterior, como ya hemos visto, es una solución de vacío. Para el caso de un planeta o una estrella con radio $R_0 > 2G_N m/c^2$, las dos soluciones enlazan suavemente en $r = R_0$.

Otra propiedad de la solución de Schwarzschild (3.13), es que para grandes valores de la coordenada radial r, el factor $G_N m/r \ll 1$ y la métrica se aproxima cada vez más a Minkowski en coordenadas esféricas. En realidad, esto es de esperar a la luz de la interpretación de la solución como un objeto masivo en el origen. De la ley de Newton sabemos que la fuerza gravitatoria de un objeto masivo decae como $1/r^2$, es decir, a grandes distancias la influencia de la presencia del objeto es despreciable y el espacio se reduce a Minkowski. Soluciones que tienen esta propiedad se llaman *asintóticamente planas* y se les puede ver como objetos aislados.

Finalmente, existe un teorema de unicidad para la solución de Schwarzschild, llamado el *teorema de Birkhoff*. Este teorema dice que la solución exterior (3.13) es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones del vacío. En particular, no existen soluciones de vacío con simetría esférica que no sean estáticas y si una solución de esta clase es estática, es Schwarzschild. En otras palabras una bola de materia puede contraerse o una estrella puede explotar conservando su simetría esférica, la solución exterior siempre será la misma métrica estática (3.13).

Sin dar detalles a groso modo la demostraciónn de este torema consiste básicamente en demostrar que la propuesta más general con simetría esférica es la propuesta (3.3), sustituyendo las funciones $A(r)$ y $B(r)$ por $A(t, r)$ y $B(t, r)$. Las ecuaciones de Einstein en seguida restringen la dependencia de A y B a ser funciones únicamente de r y el resto de la demostración es la misma que la que hemos hecho antes. El teorema de Birkhoff es un caso especial del teorema de "no-hair" (no tiene pelo) para AN en general. Este teorema dice que cualquier AN clásico (no cuántico) está caracterizado por sólo tres cantidades físicas: la masa, la carga eléctrica y el momento angular. En el caso de soluciones esféricas del vacío, tanto la carga como el momento angular son cero y por lo tanto solo el valor de m caracteriza la solución[4].

3.1.1 Una vía expedita de derivación

Aunque se derivó anteriormente la sulución de Schwarzschild fue encontrada en esta investigación una forma más sencilla de obtenerla.
Retomando que 3.7 se sustituye en $R_{\theta\theta}$ se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= e^{-2B}\left(-2rB' + 1\right) - 1, \\ 1 &= e^{-2B}\left(-2rB' + 1\right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde el mienbro derecho de la última expresión es la derivada de un producto, quedando de la forma

$$\frac{d}{dr}\left(re^{-2B}\right) = 1, \tag{3.15}$$

e integrando directamente queda

$$e^{-2B} = 1 + \frac{C}{r}, \tag{3.16}$$

donde $C = -\frac{2G_N m}{c^2}$.

3.2 Agujeros Negros y quintaesencia

Se había mencionado que observaciones astronómicas recientes, muestran de una forma convincente la expansión acelerada del universo, insinuando un notable estado de presión negativa. El origen de esta presión negativa puede ser de dos tipos. El primero es la constante cosmológica, y el segundo es la llamada quintaesencia con la ecuación de estado dada por la relación entre la presión p_q y la densidad de energía ρ_q, siendo $p_q = \omega_q \rho_q$ en el intervalo de $-1 < \omega_q < -1/3$, según cuál sea la causa de la aceleración[3]. En el caso límite cuando $\omega_q = -1$, la extraordinaria quintaesencia cubre el término de la constante cosmológica.

El horizonte exterior del espacio de Sitter difiere significativamente del horizonte interior de un AN, el cual tiene asintóticamente un espacio plano muy lejano del AN [1]. EL trabajo realizado por el autor V.V.Kiselev en [1], es un punto importante de referencia para esta investigación. Del estudio de la métrica de Robertson-Walker en el horizonte futuro con el factor de escala de aceleración causado por la quintaesencia en [46, 47], y también de los estudios en [48, 49, 50, 51] se reconoce que la aceleración es un reto para la consecuente teoría de gravedad cuántica.

A raiz de esto se realiza en [1] una investigación de las ecuaciones de Einstein para una AN estático y esféricamente simétrico, rodeado por quintaesencia y resuelto exactamente para una opción específica de un parámetro libre, que caracteriza el tensor energía-momento T_μ^ν de la quintaesencia.

Considerando la métrica

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 - g_{rr}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{3.17}$$

y bajo la simetría esférica de un estado estático podemos escribir una expresión general para las componentes espaciales y temporales

[3]La restricción fenomenológica en el valor de ω_q está dada en [42, 43, 44, 45]

$$\begin{aligned} T_t^{\ t} &= A(r), \\ T_t^{\ j} &= 0 \\ T_i^{\ j} &= C(r) r_i r^j + B(r)\delta_i^{\ j} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Luego, promediando adecuadamente se obtiene:

$$\langle T_i^{\ j} \rangle = D(r)\delta_i^{\ j}, \qquad D(r) = -\tfrac{1}{3}C(r)r^2 + B(r). \tag{3.19}$$

Para la quintaesencia se tiene:

$$D(r) = -\omega_q A(r) \tag{3.20}$$

Por lo tanto se fija el parámetro de estado ω_q de la expresión de la función $D(r)$ como combinación de $C(r)$ y $B(r)$, en términos de densidad $A(r)$, aunque ω_q por ella misma no proporciona la información completa de la forma del tensor energía-momento en el caso estático y esféricamente simétrico.

El problema con la quintaesencia libre bajo la condición de $C(r) \equiv 0$ fue considerado en [52] y en [53, 54, 55, 56]. El resultado fue una métrica, la cual no posee horizonte, "ni pelos", ni AN; la métrica no permite "abarcar el término agujero negro".

En esta investigación se considera $C(r)$ no nulo y proporcional a $B(r)$, para que la solución exacta con el AN cargado o no cargado sea posible, incluyendo la generalización del espacio asintóticamente plano o espacio de Sitter. El coeficiente constante apropiado $C(r)/B(r)$ está definido por la condición de aditividad y linealidad, lo que permite obtener los límites correctos para los casos bien conocidos de materia relativista del campo eléctrico, para un AN $\omega_q = 1/3$, para el polvo $\omega_q = 0$, y para el extraordinario caso de la quintaesencia $\omega = -1$, la constante cosmológica.

También se encontraron las soluciones exactas, en coordenadas estáticas y esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein para la quintaesencia, que producen los horizontes externos en el intervalo de $-1 < \omega_q < -1/3$ tanto en los casos de un estado libre como en el de un AN rodeado por quintaesencia.

3.3 Solución exacta en coordenadas estáticas

En la investigación en [1] se parte de construir una solución general de las ecuaciones estáticas esféricamente simétricas de Einstein con quintaesencia que satisface la condición de aditividad y linealidad, la cual permite tratar los problemas con el AN cargado o no cargado en el espacio plano o de Sitter.

En las siguientes notaciones de [57], se parametriza el intervalo esféricamente simétrico del campo estático gravitacional:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta + \sin^2\theta \, d\phi^2), \tag{3.21}$$

con la función $\nu = \nu(r)$ y $\lambda = \lambda(r)$. Luego, en unidades con la constante gravitacional G normalizada por $4\pi G = 1$, las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$
\begin{aligned}
2T_t^{\ t} &= -e^{-\lambda}\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}, \\
2T_r^{\ r} &= -e^{-\lambda}\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}, \\
2T_\theta^{\theta} &= 2T_\phi^{\phi} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

La expresión general apropiada para el tensor de energía-momento de la quintaesencia está dada por:

$$T_t^{\ t} = \rho_{q(r)}, \tag{3.23}$$

$$T_i^{\ j} = \rho_{q(r)}\alpha\left[-(1+3B)\frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B\delta_i^{\ j}\right], \tag{3.24}$$

por lo que la parte espacial es proporcional a la componente de tiempo con el parámetro arbitrario B dependiendo de la estructura interna de la quintaesencia.

Donde promediando adecuadamente queda,

$$\langle T_i^{\ j}\rangle = -\rho_q(r)\frac{\alpha}{3}\delta_i^{\ j} = -p_q(r)\delta_i^{\ j}, \tag{3.25}$$

puesto que $r_i r^j = \frac{1}{3}\delta_i^{\ j} r_n r^n$. Por lo tanto se derivan las relaciones:

$$p_q = \omega_q \rho_q, \qquad \omega_q = \tfrac{1}{3}\alpha. \tag{3.26}$$

El estado de la quintaesencia tiene

$$-1 < \omega_q < 0 \implies -3 < \alpha < 0. \tag{3.27}$$

Podemos definir entonces el principio de aditividad y linealidad para la igualdad, considerando la relación entre los componentes de la métrica,

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} \implies \lambda + \nu = 0, \tag{3.28}$$

sin pérdida alguna de la generalidad prevista para las coordenadas estáticas del sistema establecido por lo indicado arriba de $\lambda + \nu = \text{cte} = 0$, puesto que la constante puede ser anulada por una apropiada redefinición del tiempo.

Luego sustituyendo:

$$\lambda = -ln(1 + f) \tag{3.29}$$

Se obtiene entonces una ecuación diferencial lineal de f, por lo que

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} = -\frac{1}{2r^2}(f + rf'), \tag{3.30}$$

$$T_\theta^{\ \theta} = T_\phi^{\ \phi} = -\frac{1}{4r}(2f' + rf''), \tag{3.31}$$

La condición de aditividad y linealidad establece el parámetro libre del tensor energía-momento para la materia

$$B = -\frac{(3\omega_q + 1)}{6\omega_q} \tag{3.32}$$

Lo que implica:

$$T_t^{\ t} = T_r^{\ r} = \rho_q, \tag{3.33}$$

$$T_\theta^{\theta} = T_\phi^{\phi} = -\frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1), \tag{3.34}$$

Haciendo uso de (3.30)-(3.31) con (3.33)-(3.34), deducimos:

$$(3\omega_q + 1)f + 3(1+\omega_q)rf' + r^2 f'' = 0, \tag{3.35}$$

con dos soluciones de la forma

$$f_q = \frac{C}{r^{(3\omega_q+1)}}, \tag{3.36}$$

$$f_{BH} = -\frac{r_s}{r}, \tag{3.37}$$

donde C y r_s son los factores de normalización. La función de f_{BH} representa la solución ordinaria de Schwarzschild con toda la masa del AN centrada en el punto origen, y esto coincide con la opción particular de materia en forma de polvo con $\omega_q = 0$ en f_q, lo cual da $\rho_q = 0$ en $r \neq 0$.

Si se considera una densidad de energía positiva, $\rho_q > 0$, entonces de la fórmula

$$\rho_q = \frac{C}{2}\frac{3\omega_q}{r^{3(1+\omega_q)}}, \tag{3.38}$$

se deduce que el signo de la constante de normalización podría coincidir con el signo del parámetro de estado de la materia,

$$C\ \omega_q \geqslant 0, \tag{3.39}$$

indicando que C es negativa para la quintaesencia.

La curvatura tiene la forma

$$R = 2T_\mu^{\ \mu} = 3\ C\ \omega_q\ \frac{1 - 3\omega_q}{r^{3(\omega_q+1)}}, \tag{3.40}$$

y esto tiene la singularidad en $r = 0$, si $\omega_q \neq \{0, 1/3, -1\}$.

Así de esta manera se ha encontrado una forma de solución exacta esféricamente-simétrica para las ecuaciones de Einstein que describe un AN rodeado de quintaesencia con el tensor de energía-momento, la cual satisface la condición de aditividad y linealidad de acuerdo con ecs.(3.33)-(3.34), tal que la métrica viene dada por

$$ds^2 = \left[1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}}\right]^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta\ d\phi^2), \tag{3.41}$$

donde $r_s = 2G_N m/c^2$ teniendo en cuenta la velocidad de la luz $c \neq 1$, m la masa del AN, y C la constante de normalización.

3.3.1 Quintaesencia con parámetro de estado $\omega = -2/3$.

Para la solución anterior se pueden analizar los casos límites importantes, en el espacio asintóticamente plano y de Sitter.

Por ejemplo, en el caso de un AN cargado y rodeado por el campo eléctrico estático esféricamente-simétrico corresponde a el caso con parámetro de estado de la materia relativista $\omega = 1/3$. Para este caso, la solución general (3.41) da la métrica de Reissner-Nordström o la de Schwarzschild cuando la carga $Q = 0$, tal que considerando

$$g_{tt} = -\frac{1}{g_{rr}}, \tag{3.42}$$

queda

$$g_{tt} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \tag{3.43}$$

y para $Q = 0$

$$g_{tt} = 1 - \frac{r_s}{r}, \tag{3.44}$$

También existe el importante caso con quintaesencia, característico por la elección de $\omega_q = -2/3$, estudiado más detalladamente en ([1]), para el cual se obtiene

$$g_{tt} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\,(-\frac{2}{3})+1}} = \left[1 - \frac{r_s}{r} - \frac{r}{C}\right], \tag{3.45}$$

y en el caso de la quintaesencia libre

$$g_{tt} = -\frac{1}{g_{rr}} = 1 - \frac{C}{r^{3\,(-\frac{2}{3})+1}} = \left[1 - \frac{r}{C}\right]. \tag{3.46}$$

3.4 Métrica de Schwarzschild perturbada.

En la investigación en [1] tratada anteriormente, se obtiene a través del tensor de energía-momento, una solución estática y esféricamente simétrica de la ecuación de Einstein, la cual describe un AN rodeado de quintaesencia, y satisface la condición de linealidad y aditividad. Según [12] la métrica del espacio-tiempo para un AN tipo Reissner-Nordström rodeado por quintaesencia puede escribirse de forma general como

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.47}$$

donde comparando a la vez con (3.3) y con (3.21)

$$e^{2A(r)} \equiv e^{\nu} \equiv f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}}, \tag{3.48}$$

Considerando el caso sin carga, o sea para $Q = 0$, se obtendría la métrica para el espacio-tiempo de un AN de Schwarzschild rodeado de quintaesencia para una nueva solución estática esféricamente simétrica dada por:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}})dt^2 - (1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{3.49}$$

donde ahora

$$e^{2A(r)} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{C}{r^{3\omega_q+1}}. \tag{3.50}$$

Pero ahora trabajemos desde la parte geométrica de la ecuación de Einstein, es decir se tomará la propuesta (3.3) y teniendo en cuenta que la EO está presente en el modelo, se debe considerar consecuentemente en la parte geométrica el factor de escala $a(t)$ relacionado con la expansión acelerada, de tal forma que (3.3) queda siendo:

$$ds^2 = e^{2A(r)}c^2dt^2 - a(t)^2e^{2B(r)}dr^2 - a(t)^2r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{3.51}$$

con $A(r)$ y $B(r)$ dos funciones que quedan por determinar.

En busca de simplicidad se puede notar que el factor de escala ha sido colocado directamente en la parte espacial de la propuesta, no es el resultado riguroso de un proceso matemático formal, pero aún esta forma sencilla lleva a sistemas de gran complejidad que si pueden brindar información valiosa acorde a la encontrada en la bibliografía.

La idea ahora es sustituir esta nueva propuesta en las ecuaciones del vacío (3.1) para determinar A y B a través de la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein.

Los símbolos de Christoffel no-triviales están dados por (ejerc.):

$$\left\{\begin{array}{lll}\Gamma^r_{tt}=e^{2(A-B)}\frac{c^2}{a^2}A', & \Gamma^\theta_{r\theta}=r^{-1}, & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\cot\theta,\\ \Gamma^t_{tr}=A', & \Gamma^\varphi_{r\varphi}=r^{-1}, & \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r\sin^2\theta e^{-2B},\\ \Gamma^r_{rr}=B', & \Gamma^r_{\theta\theta}=-re^{-2B}, & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta,\\ \Gamma^\theta_{t\theta}=\frac{\dot a}{a}, & \Gamma^r_{tr}=\frac{\dot a}{a}, & \Gamma^t_{rr}=e^{2(B-A)}\frac{a\dot a}{c^2},\\ \Gamma^t_{\varphi\varphi}=e^{-2A}r^2\sin^2\theta\frac{a\dot a}{c^2}, & \Gamma^t_{\theta\theta}=e^{-2A}r^2\frac{a\dot a}{c^2}, & \Gamma^\varphi_{t\varphi}=\frac{\dot a}{a},\end{array}\right\} \tag{3.52}$$

de modo que las componentes del tensor de Ricci no nulas son (ejerc.):

$$\begin{aligned}R_{tt} &= -\frac{c^2}{a^2}A''e^{2A-2B}-\frac{c^2}{a^2}A'^{\,2}e^{2A-2B}+\frac{3\ddot a}{a}+\frac{c^2}{a^2}A'B'e^{2A-2B}-\frac{2}{r}\frac{c^2}{a^2}A'e^{2A-2B}\\ R_{rr} &= A''+A'^{\,2}-A'B'-\frac{2}{r}B'-\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{\ddot a}{a}+\frac{2\dot a^2}{a^2}\right)e^{2B-2A},\\ R_{\theta\theta} &= -\frac{r^2}{c^2}\ddot a a e^{-2A}-rB'e^{-2B}+rA'e^{-2B}-2r^2\,\frac{\dot a^2}{c^2}e^{-2A}+e^{-2B}-1,\\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta},\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ahora, tomando R_{tt} y R_{rr} del conjunto (3.53) y haciendo

$$R_{tt}e^{-2A+2B}\frac{a^2}{c^2}+R_{rr}=3\frac{\ddot a}{a}\frac{a^2}{c^2}e^{-2A+2B}-2r^{-1}A'-\frac{\ddot a}{a}\frac{a^2}{c^2}e^{2B-2A}-2r-1B'-2\frac{\dot a^2}{a^2}\frac{a^2}{c^2}e^{2B-2A}, \tag{3.54}$$

queda

$$R_{tt}e^{-2A+2B}\,\frac{a^2}{c^2}+R_{rr}=2\left(\frac{\ddot a}{a}-\frac{\dot a^2}{a^2}\right)\frac{a^2}{c^2}e^{2B-2A}-2r^{-1}(A'+B'), \tag{3.55}$$

luego, considerando las relaciones

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \qquad \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \qquad \dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}, \tag{3.56}$$

se obtiene

$$R_{tt}e^{-2A+2B}\,\frac{a^2}{c^2} + R_{rr} = 2\dot{H}\frac{a^2}{c^2}e^{2B-2A} - 2r^{-1}(A' + B') \equiv 0, \tag{3.57}$$

si se divide por e^{2B-2A} queda

$$2\dot{H}\frac{a^2}{c^2} - e^{2A-2B}2r^{-1}(A' + B') = 0, \tag{3.58}$$

donde

$$2\dot{H}\frac{a^2}{c^2} = e^{2A-2B}\;2r^{-1}(A' + B') = -\lambda = \Gamma, \tag{3.59}$$

por tanto

$$-\,2r^{-1}(A' + B') = \lambda\; e^{2B-2A} \tag{3.60}$$

y si consideramos el caso sin expansión acelerada y por lo tanto con factor de escala nulo, de la relación anterior queda $\lambda \equiv 0$, se obtiene entonces

$$-\,2r^{-1}(A' + B') = 0, \tag{3.61}$$

que es efectivamente lo obtenido en (3.6) para la obtención de la métrica de Schwarzschild. De (3.59) también resulta

$$\Gamma = -2r^{-1}(A' + B')e^{2A-2B} \tag{3.62}$$

donde

$$\Gamma = \text{cte} = 2\dot{H}\frac{a^2}{c^2}. \tag{3.63}$$

Considerando nuevamente las relaciones (3.56) y sustituyendo en R_{rr} se tiene

$$R_{rr} = A'' + A'^{\,2} - A'B' - 2r^{-1}B' - \frac{a^2}{c^2}\left(\dot{H} + H^2 + 2H^2\right)e^{2B-2A}, \tag{3.64}$$

o mejor, efectuando y considerando (3.59)

$$R_{rr} = A'' + A'^{\,2} - A'B' - 2r^{-1}B' - (\frac{\Gamma}{2} + 3H^2\frac{a^2}{c^2})e^{2B-2A}, \tag{3.65}$$

y haciendo

$$\Delta = \left(\frac{\Gamma}{2} + 3H^2\frac{a^2}{c^2}\right), \tag{3.66}$$

queda

$$\left(A'' + A'^{\,2} - A'B' - 2r^{-1}B'\right)e^{2A-2B} = \Delta = \frac{\Gamma}{2} + 3H^2\frac{a^2}{c^2}, \tag{3.67}$$

donde despejando B' de (3.59) y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene

$$\left(A'' + 2A'^{\,2} + \frac{2}{r}A'^{\,2}\right)e^{2A-2B} - \Gamma\left(\frac{rA'}{2} + 1\right) = \Delta. \tag{3.68}$$

Utilizando las relaciones anteriores, y modificando $R_{\theta\theta}$ del conjunto (3.53) por un procedimiento análogo al realizado anteriormente para R_{rr} se obtiene

$$\left(\frac{2A'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{2A-2B} - \frac{e^{2A}}{r^2} = \Delta + \frac{\Gamma}{2}. \tag{3.69}$$

Las ecuaciones (3.68) y (3.69) conforman el sistema de ecuaciones del modelo considrado, con $A(r)$ y $B(r)$ como funciones incógnitas a determinar.

La notable complejidad de este sistema al tener ecuaciones no lineales y de segundo orden, dificulta la resolución analítica y lleva al tratamiento por métodos numéricos del problema; sin embargo se realizará una construcción analítica de la expresión (3.69) a partir de la estructura (3.50) obtenida para $e^{2A(r)} \equiv e^{\nu(r)}$ en [1], lo cual implicaría la reobtención de los resultados por una vía diferente a la utilizada en [1], donde se trabajó con el tensor de energía-momento y no con la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein.

Entonces, para el procedimiento de reconstrucción de (3.69) se consideraría

$$e^{2A} = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \delta\right) = e^{-2B}, \tag{3.70}$$

por tanto

$$e^{2A}e^{-2B} = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \delta\right)^2, \tag{3.71}$$

con $\delta = \delta(r)$, siendo esta la nueva función incógnita de r a determinar.

De manera consecuente y teniendo en cuenta las relaciones (3.70) y (3.71) se hace

$$
\begin{aligned}
e^{2A}\;2A' &= \left(0+\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right),\\
A' &= \frac{1}{2}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^{-1},\\
\frac{2A'}{r} &= \frac{1}{r}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^{-1},\\
\frac{2A'}{r}+\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{r}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^{-1}+\frac{1}{r^2},\\
\left(\frac{2A'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{2A-2B} &= \frac{1}{r}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^2,\\
\left(\frac{2A'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{2A-2B}-\frac{e^{2A}}{r^2} &= \left[\frac{1}{r}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)-\frac{1}{r^2}\right]\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^2,
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Donde ya en la expresión anterior se ha logrado construir el miembro izquierdo de la ecuación (3.69), por lo que los términos resultantes en el miembro derecho de (3.72) son además igual al miembro derecho de la ecuación original (3.69), quedando

$$
\left[\frac{1}{r}\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)-\frac{1}{r^2}\right]\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)^2=\Delta+\frac{\Gamma}{2}, \tag{3.73}
$$

de donde sigue

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r_s}{r^2}+\delta'\right)+\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)-\frac{1}{r} &= \frac{r\left(\Delta+\frac{\Gamma}{2}\right)}{1-\frac{r_s}{r}+\delta},\\
\delta' &= \frac{r\left(\Delta+\frac{\Gamma}{2}\right)}{1-\frac{r_s}{r}+\delta}+\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)-\frac{r_s}{r^2},\\
\delta' &= \frac{r\left(\Delta+\frac{\Gamma}{2}\right)}{\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)}-\frac{\delta}{r},\\
\delta' &= \frac{r^2\left(\Delta+\frac{\Gamma}{2}\right)-\delta\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)}{\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)r}, \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

donde considerando $K=\Delta+\Gamma/2$ y despejando rK queda

$$\left(\delta'+\frac{\delta}{r}\right)\left(1-\frac{r_s}{r}+\delta\right)=rK, \qquad (3.75)$$

la cual es una nueva ecuación diferencial con $\delta(r)$ como función incógnita. Esta puede ser transformada haciendo el cambio de variable $u=1/r$ que implica las relaciones

$$\tfrac{du}{dr}=-\tfrac{1}{r^2}=-u^2, \qquad \delta'=\tfrac{d\delta}{dr}=\tfrac{d\delta}{du}\tfrac{du}{dr}=\dot{\delta}u^2, \qquad (3.76)$$

por lo que

$$\left(u^2\dot{\delta}+u\delta\right)(1-ur_s+\delta)=\frac{1}{u}K. \qquad (3.77)$$

Las ecuaciones (3.75) y (3.77) son simplemente dos variantes para la determinación de $\delta(r)$, donde según (3.50) $\delta(r)$ tiene la forma

$$\delta(r)=\frac{C}{r^\alpha}, \qquad (3.78)$$

donde $\alpha = 3\omega_q + 1$

Tomando (3.75) y multiplicando por r se obtiene

$$(r\delta' + \delta)\left(1 - \frac{r_s}{r} + \delta\right) = r^2 K, \tag{3.79}$$

donde se aprecia que $(r\delta' + \delta)$ es la derivada de un producto, por lo que

$$(r\delta)'\left(1 - \frac{r_s}{r} + \delta\right) = r^2 K, \tag{3.80}$$

o mejor

$$(r\delta)' = \frac{r^2 K}{\left(1 - \frac{r_s}{r} + \delta\right)}. \tag{3.81}$$

Para (3.81) se tratan casos límites de r de importante significado físico, los cuales a su vez permiten hacer simples aproximaciones favorables para la integración de la expresión.

Por ejemplo tenemos el caso notable de $r \gg r_s$ muy lejos del cuerpo esférico, para el cual

$$(r\delta)' \approx \frac{r^2 K}{(1 - \delta)}. \tag{3.82}$$

ya que r_s/r tomaría un valor despreciable, luego si se considera que C/r^{α} crece, para un $\alpha < 0$ y considerando que r es muy grande, $\delta \gg 1$, por lo que se puede escribir

$$(r\delta)' \approx \frac{r^2 K}{\delta}, \tag{3.83}$$

que multiplicando por r y despejando queda

$$r\,\delta\, d(r\delta) \approx r^3 dr K, \tag{3.84}$$

e integrando,

$$\delta \approx \pm\sqrt{K\frac{r^2}{2}+\frac{2K_1}{r^2}}. \tag{3.85}$$

Siendo (3.85) una de las formas buscadas de δ y como r es muy grande, el termino $2K_1/r^2 \approx 0$, quedando

$$\delta \approx \pm\sqrt{\frac{K}{2}}\; r, \tag{3.86}$$

donde comparando con (3.78), resulta que $\alpha = -1$ y $C = \pm\sqrt{K/2}$, lo que significa que si $\alpha = (3\omega + 1)$ entonces $\omega = -2/3$, coincidiendo este valor del parámetro de estado ω con el reportado en [1, Sección 3] en el ejemplo estudiado detalladamente.

Luego teniendo en cuenta (3.70) y (3.86) queda que

$$e^{2A} \approx \left(1-\frac{r_s}{r}\pm\sqrt{\frac{K}{2}}\; r\right), \tag{3.87}$$

donde sin olvidar que $r \gg r_s$, $r_s/r \approx 0$, por lo que

$$e^{2A} \approx \left(1\pm\sqrt{\frac{K}{2}}\; r\right), \tag{3.88}$$

quedando la nueva métrica de la forma

$$ds^2 = \left(1\pm\sqrt{\frac{K}{2}}\; r\right)dt^2 - a(t)^2\frac{1}{\left(1\pm\sqrt{\frac{K}{2}}\; r\right)}dr^2 - a(t)^2\; r^2(\,d\theta^2+\sin^2\theta\; d\varphi^2), \tag{3.89}$$

Conclusiones

Tras realizar el trabajo fundamental para cumplir los objetivos propuestos se llega a las conclusiones:

1. Al realizar una revisión actualizada sobre la solución exacta del vacío de materia, relativa al caso estático y esféricamente simétrico se encuentra que finalmente, existe un teorema de unicidad para la solución de Schwarzschild, llamado el *teorema de Birkhoff*. Este teorema dice que la solución exterior (3.13) es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones del vacío. En particular, no existen soluciones de vacío con simetría esférica que no sean estáticas y si una solución de esta clase es estática, es Schwarzschild. En otras palabras, los resultados obtenidos al perturbar la métrica o considerar la energía oscura, no son más que variantes de la forma de la clásica solución estática de vacío.

2. Al actualizar los conceptos relacionados con la expasión del Universo, en particular la energía oscura en forma de campo cosmológico de quitaesencia, se encuentra que definitivamente la expansión es un hecho innegable, que ocurre de forma acelerada debido al carácter repulsivo de la energía oscura, y afecta todas las regiones del universo jugando un papel definitivo en el destino del mismo.

3. Al realizar una revisión bibliográfica sobre los posibles efectos de energía oscura sobre la métrica de Schwarzschild, se encuentran en confiables investigaciones que sirven como antecedentes de esta, que la consideración de la energía oscura indudablemente transfor-

ma la clásica solución del vacío esféricamente simétrica en nuevas variantes de la forma de la solución.

4. Al aplicar el método perturbativo a la métrica de Schwarzschild analizando el posible efecto de la expansión del universo sobre dicha métrica, resulta una nueva variante de la solución de vacío esféricamente simétrica, la cual se corresponde con los resultados obtenidos en [1] y [12] para el caso determinado donde el parámetro de estado ω es igual a $-2/3$.

Recomendaciones

A medida que se realizó el trabajo en la tesis se reconocieron las posibles vías de trabajo que pudieran conducir a resultados importantes y no fueron tratadas, entre estas están:

- Se propone la extensión de este trabajo a la métrica de Kerr, donde se incluye la rotación, acercándose así aún más a la real característica rotaiva de los AN, como el supuesto presente en el centro de nuestra galaxia.

Bibliografía

[1] V.V.Kiselev, "Quintessence and black hole,".

[2] B. Russell, *History of Western Philosophy*. Simon & Schuster Inc, 1972.

[3] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Vintage Books, 2004.

[4] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*. 2013.

[5] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *Astron.J.* **116** (1998) 1009–1038, `astro-ph/9805201v1`.

[6] Brian P. Schmidt et al, "The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae," `astro-ph/9805200v1`.

[7] M. Kowalski et al, "Supernova Cosmology Project Collaboration," *The Astrophysical Journal* **686(2)** (2008) 749, `0804.4142v1 [astro-ph]`.

[8] S. Allen, D. Rapetti, R. Schmidt, H. Ebeling, R. G. Morris, R. Morris, and A. Fabian, "Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **383 (3)** (2008) 879–896, `0706.0033v3 [astro-ph]`.

[9] Kevork N. Abazajian et al., "The seventh data release of the sloan digital sky survey," *The Astrophysical Journal Supplement Series* **182** (2009), no. 2 543, `0812.0649v2 [astro-ph]`.

[10] D. Escobar, "Dinámica del campo escalar atrapado en mundos branas de randall-sumdrum tipo ii." Diploma Thesis, june, 2011.

[11] Y.L.Nodal, *Expansión acelerada del universo: torías f(R) y energía oscura*. PhD thesis, Universidad Central ¨Marta Abreu¨ de las Villas, 2009.

[12] T.C.Kofane, T.B.Bouetou and M.Saleh , "Thermodynamics and phase transition of the reissner-nordström black hole surrounded by quintessence," *General Relativity and Gravitation* (2012).

[13] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.

[14] Sean Carroll, "Lecture Notes on General Relativity," tech. rep., University of California Santa Barbara, 1997.

[15] C. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.

[16] O. Gron and S. Hervik, *Einstein' s General Theory of Relativity*. Springer, 2007.

[17] R. d' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.

[18] M. Blau, "Lecture notes on general relativity," tech. rep., Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2015.

[19] V. Tapia, "La estructura canónica de la relatividad general," tech. rep., Universidad Nacional de Colombia, 2008.

[20] Tamé González Cruz, *Modelos del Universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura.* PhD thesis, Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas, 2006.

[21] Carlos de la Caridad Rodríguez Fadragas, *El Teorema de la Variedad Central y Los Modelos del Universo*. PhD thesis, Universidad Central Marta Abreu de Las Villas, 2015.

[22] Shahen Hacyan,, "Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo.," tech. rep., 1998.

[23] Ostriker, Jeremiah P., and Paul Steinhardt, "The quintessential universe," *Scientific American* **vol. 284** (Jan., 2001) pp. 46–53.

[24] P. J. E. Peebles y Bharat Ratra, "The cosmological constant and dark energy," *Reviews of Modern Physics* **75** pp. 559–606.

[25] S.Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.

[26] G. Altarelli, *Elementary Particles*, vol. p. Springer, 2008.

[27] S. Carroll, "The cosmological constant[la constante cosmológica]4: p. 1.," *Living Reviews in Relativity4*.

[28] S.Weinberg *Reviews of Modern Physics* **61** (1989).

[29] B.Ratra and P.J.Peebles *Phys. Rev. D* **37** (1988), no. 3406.

[30] L.P.Chimento, A.S.Jakubi and D.Pavón *Phys. Rev. D* **62** (2000) `astro-ph/0005070`.

[31] L.P. Chimento, A.S.Jakubi and D.Pavón, *Phys. Rev. D* **67** (2003) `astro-ph/0303145`.

[32] "Big bang's afterglow shows universe is 80 million years older than scientists first thought," *Washington Post* (2013).

[33] Huterer and Turner, “Prospectos para probar la energía oscura a través de medidas de distancia a supernovas,” *Phys. Rev. D* (1999).

[34] Saul Perlmutter et al., “Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae,” *Astrophysical J.* (2011).

[35] Pierre Astier et al., “The supernova legacy survey: Measurement of omega(m), omega(lambda) and w from the first year data set,” *Astronomy and Astrophysics* **447** (2006) pp. 31–48.

[36] D. N. Spergel et al., “Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology,” *(colaboración WMAP)* (2006).

[37] Tommaso Giannantonio et al., “The significance of the integrated sachs-wolfe effect revisited,” *Cosmology and Extragalactic Astrophysics* (Sept., 2012).

[38] A.M.Öztas and M.L.Smith, “Elliptical solutions to the standard cosmology model with realistic values of matter density,” *International Journal of Theoretical Physics45: pp. 925-936.* (2006).

[39] *Una Crónica de Física Moderna,*, vol. III. Universal-publishers.com, 2006.

[40] K.Matarrese, Notari and Riotto, “La inflación primordial explica por qué el universo está acelerando actualmente.”.

[41] Y. Wang, J. M. Kratochvil, A. Linde, and M Shmakova,, “Current observational constraints on cosmic doomsday,” *JCAP* **0412** (2004) 006, `astro-ph/0409264`.

[42] T.Chiba, *Phys. Rev. D* **60,** 083508 (1999), `arXiv:gr-qc/9903094`.

[43] N. A. Bahcall, J. P. Ostriker, S. Perlmuter and P. J. Steinhardt, *Science* **284,** 1481 (1999), `arXiv:astro-ph/9906463`.

[44] P. J. Steinhardt, L. M. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59,** 123504 (1999), arXiv:astro-ph/9812313.

[45] L.M.Wang, R.R.Caldwell, J.P.Ostriker and P.J.Steinhardt *Astrophys. J.* **530,** 17 (2000), arXiv:astro-ph/9901388.

[46] S. Hellerman, N. Kaloper and L . Susskind, *JHEP* **0106,** 003 (2001), arXiv:hep-th/0104180.

[47] W.Fischler, A.Kashani-Poor , R. McNees and S. Paban, *JHEP* **0107,** 003 (2001), arXiv:hep-th/0104181.

[48] T. Banks, W. Fischler and L .Motl, *JHEP* **9901** 019 (1999), [arXiv:hep-th/9811194.

[49] T. Banks, arXiv:hep-th/0011255.

[50] T. Banks and W. Fischler, arXiv:hep-th/0102077.

[51] E. Witten, arXiv:hep-th/0106109.

[52] A. D. Chernin, D. I. Santiago and A. S. Silbergleit, *Phys. Lett. A* **297,** 79 (2002), arXiv:astro-ph/0106144.

[53] P. F. Gonzalez-Diaz, *Phys. Lett. B* **522,** 211 (2001), [arXiv:astro-ph/0110335.

[54] P. F. Gonzalez-Diaz *Phys. Rev. D* **65,** 104035 (2002), arXiv:hep-th/0203210.

[55] P. F. Gonzalez-Diaz *Phys. Rev. D* arXiv:gr-qc/0205057.

[56] P. F. Gonzalez-Diaz arXiv:astro-ph/0210177.

[57] E. M. L. L. D.Landau, “Field theory,” *Nauka: Moscow* (1978).