

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

164

TESE DE DOUTORADO

IFT - T.005/00

OK

Polarização da luz e outros efeitos em universos multiplamente conexos

Evelise Gausmann



Orientador

Helio Vasconcelos Fagundes

Junho 2000

Ao Otavio

e

A José Germano Weigert

(um homem de fibra e de luta que aprendeu a ler e escrever com a vida)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- ao Prof. Helio V. Fagundes, pela orientação e por tudo que aprendi nos últimos anos;
- ao Otavio pelo amor, companheirismo, incentivo e equilíbrio que trouxe a minha vida;
- à Orieta, por ter me proporcionado um lugar onde me sinto em paz;
- aos meus Pais e Irmão pelo constante apoio e incentivo;
- à família Socolowski por me proporcionar uma segunda família;
- à Vanessa pelas nossas conversas e discussões;
- à Aneliza, Josiane, Kathia, Fabrise e Gilson pela amizade apesar da distância e do tempo;
- à Rozane, Gargamel, Thelma, Tadeu, Maria, Orlando, Sandro, Randal e aos amigos que fiz no IFT;
- ao Prof. Laerte Sodre Jr., por esclarecimentos sobre galáxias;
- ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho propomos alguns métodos com o objetivo de detectar observacionalmente topologias não-triviais de modelos cosmológicos euclidianos e hiperbólicos. Em universos compactos e euclidianos procuramos sinais da topologia no comportamento de raios de luz polarizada e na distribuição de direções dos eixos de galáxias espirais. Além disso, aplicamos também o método de cristalografia cósmica para mostrar que as dimensões da seção espacial euclidiana não necessitam ser muito pequenas para obtermos sinais da topologia. Esse método e uma variação do mesmo foram aplicados a universos compactos e hiperbólicos.

Palavras Chaves: Cosmologia, Topologia Cósmica, Cristalografia Cósmica

Áreas do Conhecimento: 1.05.03.00.5

Abstract

In this work we propose some methods to observe nontrivial topology in Euclidean and hyperbolic universe models. We look for a nontrivial topological signature in compact Euclidean Universes by analyzing polarized light rays and direction distributions of the spiral galaxies' axes. We also apply the cosmic crystallographic method to show that the size of the Euclidean spatial section need not be very small to obtain a topological signature. This method and a modified version of it is applied to compact hyperbolic universes.

Key Words: Cosmology, Cosmic Topology, Cosmic Crystallography

Índice

1	Introdução	1
2	Cosmologia e topologia	4
2.1	Cosmologia	4
2.2	Topologia	11
2.3	Detectabilidade da topologia do universo	16
3	Polarização da Luz e Eixos Galácticos	19
3.1	Polarização da luz	19
3.2	Direções de eixos galácticos	22
3.2.1	Simulações	29
3.2.2	Resultados	33
4	Cristalografia Cósmica	37
4.1	Separação de Pares	37
4.2	Modelos Euclidianos	38
4.2.1	O método em modelos euclidianos	38
4.2.2	Tamanho do poliedro fundamental	41
4.3	Modelo Hiperbólico	44
4.3.1	O método de cristalografia	45
4.3.2	Uma variação do método de cristalografia	51
5	Conclusão	58

A E1 recobre E4	61
B Algumas propriedades do espaço hiperbólico	68
Bibliografia	79

Lista de Figuras

2.1	Espaço de recobrimento universal do Toro. Baseado em figura de [1].	13
2.2	Paralelepípedo de faces associadas representando os PF's E1-E4 em variedades euclidianas. Extraído de [1].	14
2.3	Prisma hexagonal de faces associadas representando os PF's E5 e E6 para variedades euclidianas. Extraído de [1].	15
2.4	Icosaedro de faces associadas representando um PF em variedades hiperbólicas. Extraído de [1, 9].	16
3.1	Exemplo do comportamento de um raio de luz e sua polarização em T^2	22
3.2	Galáxia espiral tipo Sb. Extraído de [40].	23
3.3	Este gráfico representa uma galáxia espiral (em cinza) inclinada com relação à esfera celeste e sua projeção nela. Note que $a = r$ e $b = r \cos \alpha$	24
3.4	(a) Esta figura procura ajudar na visualização da relação entre o sistema de coordenadas da Terra (X,Y,Z) com origem no centro na Terra, e o sistema de coordenadas do céu (x,y,z) com origem no centro de uma galáxia. (b) Sistema de coordenadas do céu (x,y,z) e sistema de coordenadas da galáxia (ξ, η, ζ) . . .	28
3.5	Ângulos de Euler entre dois sistemas de coordenadas.	29
3.6	Gráfico mostrando duas posições de galáxias espirais, as quais não podemos diferenciar com os dados que possuímos.	30
3.7	Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E1. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.	33

3.8 Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E2. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.	34
3.9 Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E3. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.	35
3.10 Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E4. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.	36
3.11 Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia trivial. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.	36
4.1 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E1: (a) $L = 0.7R_H\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H\text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc. . . .	42
4.2 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E2: (a) $L = 0.7R_H\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H\text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc. . . .	43
4.3 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E3: (a) $L = 0.7R_H\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H\text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc. . . .	44
4.4 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E4: (a) $L = 0.7R_H\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H\text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc. . . .	45
4.5 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E5: (a) $L = 0.7R_H\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H\text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc. . . .	46

4.6 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E6: (a) $L = 0.7R_H Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H Mpc$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.	47
4.7 Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia trivial em espaços euclidianos com raio de simulação= 8000Mpc.	48
4.8 Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de v2293.	50
4.9 Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia trivial no espaço hiperbólico.	51
4.10 Gráfico usando o método de cristalografia para a diferença entre a topologia de v2293 e a trivial no espaço hiperbólico.	52
4.11 Variação do método de cristalografia aplicado a modelos hiperbólicos (a) corresponde a v2293 com observador no centro do PF; (b) distribuição para topologia trivial; (c) diferença entre (a) e (b).	56
4.12 Diferença entre v2293 com diferentes orientações do PF e o modelo com topologia trivial; (a) rotação de $(2^\circ, 0, 0)$; (b) rotação de $(0, 5^\circ, 0)$; (c) rotação de $(150^\circ, 100^\circ, 60^\circ)$	57
A.1 Esta figura representa E1 como recobrimento de E4.	63
A.2 As menores dimensões de E1 que recobrem E4.	64
A.3 Figura representando o recobrimento de E4 por E1.	65
A.4 Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de E1, com dimensões: $L_1 = 11200 Mpc$, $L_2 = L_3 = 7920 Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.	66
A.5 Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de E4, com dimensões: $L_1 = L_2 = L_3 = 5600 Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.	67
B.1 Corte transversal em um vértice do PF na “tessellation”.	76

Introdução

Acredita-se atualmente que o universo possa ser descrito de forma geral pela solução homogênea e isotrópica das equações de Einstein com seção espacial de curvatura constante. A métrica geral normalmente usada para descrever essa solução é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que inclui as três constantes de curvatura possíveis ($k = -1, 0, +1$) para esta solução. Essas métricas são soluções de equações diferenciais parciais e portanto descrevem somente propriedades locais do espaço-tempo. Assim, elas não fixam sua estrutura global (ou sua topologia).

Em geral a topologia da parte espacial das métricas de FLRW são triviais ou simplesmente conexas. Para $k = +1$, a topologia do espaço normalmente é uma hiperesfera finita S^3 ; com $k = 0$, temos o espaço euclidiano infinito \mathbf{R}^3 e para $k = -1$, o espaço hiperbólico infinito H^3 .

No entanto, podemos escolher topologias não-triviais ou multiplamente conexas para essas métricas. Tais topologias são variedades tridimensionais, orientáveis e compactas. De forma geral podemos representá-las por variedades quocientes $M = \widetilde{M}/\Gamma$ onde \widetilde{M} é um dos espaços S^3, \mathbf{R}^3 e H^3 e Γ é um grupo discreto de isometrias de ação livre e propriamente descontínua em \widetilde{M} [1]. Na prática, M é descrita por um poliedro fundamental (PF) em \widetilde{M} com faces identificadas aos pares.

A existência de topologias não-triviais no universo implica em imagens repetidas de uma mesma fonte. Isso acontece porque elas são vistas através de raios de luz percorrendo geodésicas

nulas no espaço-tempo. Em espaços multiplamente conexos teremos várias geodésicas nulas ligando fonte e observador. Alguns desses raios serão observados somente após dar várias voltas no universo e assim, a imagem recebida será a da fonte no passado, quando a luz foi emitida.

Dessa forma, a observação de imagens múltiplas dar-nos-ia um bom indicativo de uma topologia não-trivial. No entanto, uma das dificuldades dessa abordagem é exatamente o fato de que veremos imagens de fontes em diferentes épocas de sua evolução, dificultando sua identificação. Além disso, outros efeitos podem dificultar a visualização de uma imagem como, por exemplo, outro objeto ou poeira cósmica na linha de seu sinal.

Qualquer método que pretenda estudar universos multiplamente conexos deve levar esses fatos em consideração. Recentemente, modelos cosmológicos com seção espacial multiplamente conexa têm recebido considerável atenção. Alguns métodos vem sendo propostos com o objetivo de observar tais topologias. Eles se baseiam principalmente na observação de imagens múltiplas na distribuição de imagens no universo [2, 24, 9] e nas flutuações da radiação cósmica de fundo [21, 23].

Esta tese está organizada da seguinte forma:

No *Capítulo 2*, há uma pequena revisão de cosmologia, topologia e métodos de detecção de topologias não-triviais. Essa revisão não tem por objetivo ser completa, mas sim dar uma noção do estritamente necessário para o entendimento dos capítulos seguintes.

No *Capítulo 3*, há a descrição do primeiro método que desenvolvemos para a observação de universos multiplamente conexos. Ele utiliza o fato de que a luz emitida por uma fonte em universos desse tipo fica confinada ao PF, podendo sair e reentrar no mesmo de acordo com o grupo de isometrias presente. Nesse processo a polarização do raio de luz emitido varia. Desenvolvemos nesta tese um modelo simplificado desse estudo para o caso euclidiano, que infelizmente não possibilitou a obtenção de resultados. Então, procuramos observar o comportamento da distribuição de direções dos eixos de galáxias espirais (direção perpendicular ao

disco galáctico). Isso porque as transformações do grupo de isometria de uma topologia afetaria a direção real de uma galáxia com relação a sua imagem. Esse método apresenta uma vantagem com relação aos outros por não sofrer muita influência da dimensão do PF.

No *Capítulo 4*, estudamos algumas variações e aplicações do método de cristalografia cósmica (desenvolvido por R. Lehoucq, M. Lachièze-Rey e J.-P. Luminet [2]). Esse estudo já deu origem a três artigos publicados: *i*) No primeiro [6], aplicamos o método de cristalografia no espaço euclidiano para mostrar que podemos obter sinais da topologia não-trivial mesmo para um PF de dimensão da ordem de $1.2R_H$, onde R_H é o raio do universo observável. Esse valor para a dimensão do PF foi obtido por Oliveira-Costa e Smoot [26], usando dados da radiação cósmica de fundo. *ii*) No segundo [7], aplicamos o método de cristalografia às topologias não-triviais em espaços hiperbólicos. O PF usado nesse caso foi um icosaedro regular listado como v2293(+3,2) no programa SnapPea¹, [30]. *iii*) No terceiro [8], aplicamos uma variação do método de cristalografia, agora para dois icosaedros regulares listados como v2293(+3,2) e v2051(+3,2) em [30]. Neste trabalho, usamos os geradores do grupo Γ para, dadas as imagens de uma determinada distribuição, achar suas fontes no interior do PF. Se a distribuição for a de um universo multiplamente conexo, com PF igual ao que aplicamos nas imagens (ou mesmo o PF girado por pequenos ângulos), calculando a distância entre pares de todas as imagens, teremos uma indicação da topologia.

¹O programa SnapPea lista variedades tridimensionais hiperbólicas.

2

Cosmologia e topologia

2.1 Cosmologia

Após a publicação da teoria da Relatividade Geral, em 1917 Einstein propôs um modelo de universo estático, homogêneo (distribuição de matéria uniforme em todo o espaço) e isotrópico (não há direções preferenciais no universo). No entanto, como a Relatividade Geral previa um universo em expansão, ele teve, de modo a obter seu modelo de universo estático, que introduzir um novo termo Λ , chamado de constante cosmológica, na equação do campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $c = 3.00 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ é a velocidade da luz e $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ é a constante gravitacional. Esse termo altera a equação de forma a produzir soluções estáticas. A seção espacial desse espaço é esférica, isto é fechada e finita. Também em 1917, de Sitter propôs seu modelo de universo sem matéria, com constante cosmológica e seção espacial plana. No entanto, ao contrário do universo de Einstein, o universo de de Sitter apresenta expansão constante.

Em 1922, Alexander Friedmann publicou “On the curvature of space” e em 1924 publicou “On the possibility of a world with constant negative curvature” [44]. Nesses artigos ele apresentou seu modelo de universo com $\Lambda = 0$ e expansão uniforme. Há três tipos básicos de universos de Friedmann, correspondendo aos valores $0, -1, +1$, para a constante de curvatura. Em

1927, Lemaître redescobre as equações originalmente formuladas por Friedmann [44]. Hubble, em 1929, observou a relação entre distâncias e velocidades de galáxias, estabelecendo a lei de expansão do universo.

A solução homogênea e isotrópica das equações de Einstein, com seção espacial de curvatura constante, $k = -1, 0, +1$, é a forma geralmente usada na descrição do universo. Aqui trabalharemos com a hipótese de $\Lambda = 0$. O modelo que descreve essa solução é chamado modelo de Friedmann-Lemaître. A forma geral da métrica é chamada de modelo cosmológico de Robertson-Walker e é dada por [43]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \quad (2.2)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \text{ se } k = -1, \\ d\sigma^2 = d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \text{ se } k = 0, \\ d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \text{ se } k = +1. \end{array} \right.$$

Essas métricas são obtidas a partir do elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde $\mu, \nu = 0, \dots, 3$. $\mu, \nu = 0$ corresponde à parte temporal dessa métrica e $\mu, \nu = 1, 2, 3$ à parte espacial. Assim

$$ds^2 = dt^2 - dl^2,$$

e

$$dl^2 = g_{ab} dx^a dx^b,$$

com $a, b = 1, 2, 3$, onde g_{ab} descreve a geometria do espaço tridimensional em um dado instante de tempo. O espaço, no caso do universo, é suposto homogêneo e isotrópico. Dessa forma, a geometria que o representa não deve distinguir entre direções em um ponto.

As consequências da exigência de homogeneidade e isotropia para a seção espacial do universo são notadas no tensor de curvatura tridimensional R_{abcd} que determina completamente a curvatura do espaço. Como consequência da simetria do espaço, o tensor de curvatura tridimensional fica

$$R_{abcd} = K (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}),$$

onde K é uma constante. O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são respectivamente $R_{ab} = 2Kg_{ab}$ e $R = 6K$ [20]. Assim, a curvatura do espaço depende unicamente de uma constante. Essa constante poderá ser menor, maior ou igual a zero. Isso determina os três tipos de métrica espacial: curvatura positiva $K > 0$; sem curvatura $K = 0$; curvatura negativa $K < 0$. Definimos também $k \equiv 0$ para $K = 0$ e $k \equiv K/|K|$ para $K \neq 0$.

A geometria da parte espacial de nossas métricas são bem definidas de acordo com a simetria do espaço. Devemos nos preocupar agora, também com a parte temporal. Escrevemos as métricas, equação (2.2), em coordenadas χ, θ, ϕ , que descrevem a expansão do universo da melhor maneira. Essas coordenadas são consideradas comóveis com as galáxias, ou seja, elas se movem juntamente com a matéria em movimento no universo. Isso porque a isotropia e homogeneidade da expansão necessitam que se $dl(t)$ é a distância entre duas galáxias em um tempo t , então essa distância em um tempo $t + \Delta t$ deve ser proporcional à distância inicial

$$dl(t + \Delta t) = f(t) dl(t). \quad (2.3)$$

O fator $f(t)$ depende do tempo, mas não da posição no espaço. Dessa forma quando a distância entre um par de galáxias cresce por um fator $f(t)$, a distância entre quaisquer outros pares deverão crescer pelo mesmo fator [41].

Observando as métricas, equação (2.2), vemos que elas satisfazem a condição da equação (2.3) sendo que o fator de escala será $a(t)$. A dependência temporal de a é determinada solucionando as equações de Einstein.

O lado esquerdo das equações de Einstein (2.1) é determinado pela geometria do espaço-

tempo. Já o lado direito é determinado pela matéria contida no espaço-tempo. O tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ do universo é quem faz esse papel. $T_{\mu\nu}$, como é observado hoje, pode ser descrito por um gás de galáxias (partículas) com a pressão desprezível,

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade média de matéria.

Há também no universo uma distribuição de radiação a uma temperatura associada de $\sim 2.7K$. Essa radiação pode ser descrita pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito com pressão $P = \rho/3$. No entanto, a radiação é predominante no universo primitivo, mas no presente momento sua contribuição para $T_{\mu\nu}$ pode ser desprezada. Por isso usaremos $T_{\mu\nu}$ dado pela equação (2.4) ao solucionarmos as equações de Einstein [42].

Curvatura positiva, $K > 0$: Em coordenadas χ, θ, ϕ escrevemos a métrica como na equação (2.2) [43, 41],

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

Para facilitar a solução das equações de Einstein devemos fazer a seguinte transformação:

$$cdt = ad\eta. \quad (2.5)$$

Assim, obtemos a métrica

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.6)$$

É necessário calcularmos os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right)$$

para essa métrica, assim como o tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma}^\gamma,$$

onde

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\rho} - \Gamma_{\rho\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\rho}.$$

Substituímos os valores obtidos a partir da equação (2.6) no lado esquerdo das equações de Einstein com constante cosmológica $\Lambda = 0$:

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu}^{\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}^{\nu},$$

onde $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ é o escalar de curvatura. Considerando que $T_{\mu}^{\nu} = \rho u_{\mu}u^{\nu}$ deve estar em coordenadas comóveis, (já que a métrica, equação (2.6), está nessas coordenadas) as galáxias devem estar em repouso umas em relação às outras. Dessa forma, a única componente não nula de T_{μ}^{ν} é $T_0^0 = \rho$. Já o volume do universo varia no tempo com a^3 . Assim a densidade de matéria é dada por

$$\rho(t) = \frac{M}{2\pi^2 a^3},$$

onde M é a soma de todas as massas próprias das partículas no universo. As equações de Einstein se reduzem a

$$\frac{3}{a^4} (a^2 + \dot{a}^2) = \frac{8\pi G}{c^4} \rho \quad (2.7)$$

onde $\dot{a} = da/d\eta$. A solução dessa equação diferencial (2.7) é

$$a = a_0 (1 - \cos \eta),$$

onde a constante $a_0 = 2GM/3\pi c^2$ e a relação entre t e η é dada por

$$t = \frac{a_0}{c} (\eta - \sin \eta).$$

A curvatura do espaço é $K(t) = 1/a^2(t)$. As soluções para a e t acima determinam a forma paramétrica da função $a(t)$. Essa função cresce de zero para $t = 0$ ($\eta = 0$) até um valor máximo $a = 2a_0$ para $t = \pi a_0/c$ ($\eta = \pi$) e decresce até zero para $t = 2\pi a_0/c$ ($\eta = 2\pi$). Isso representa o universo expandindo-se até $a = 2a_0$ e contraindo-se a um ponto novamente.

Curvatura negativa, $K < 0$: A métrica para o espaço com curvatura negativa já com a troca de variáveis de t para η usando a expressão (2.5), fica

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

Procedendo da mesma forma que anteriormente obtemos a equação diferencial

$$\frac{3}{a^4} (\dot{a}^2 - a^2) = \frac{8\pi G}{c^4} \rho, \quad (2.8)$$

onde $\dot{a} = da/d\eta$ e $\rho = M/2\pi^2 a^3$. Aqui, no entanto, o volume é infinito. M não pode ser interpretado como a massa total, mas como a soma das massas de repouso contidas no volume $2\pi^2 a^3$. A solução da equação diferencial (2.8) é

$$a = a_0 (\cosh \eta - 1),$$

com $t = a_0 (\sinh \eta - \eta)$. A curvatura do espaço é $K(t) = -1/a^2(t)$. O universo começa com um “Big Bang” e expande-se para sempre.

Sem curvatura, $K = 0$: Procedemos para o universo com geometria plana da mesma forma que anteriormente. A métrica obtida é

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

A equação diferencial obtida a partir das equações de Einstein é

$$\frac{3}{a^4} \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$

onde $\rho = M/2\pi^2 a^3$ e $\dot{a} = da/dt$. Então,

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4GM}{3\pi a},$$

que tem solução

$$a(t) = \left(\frac{3GM}{\pi} \right)^{1/3} t^{2/3}.$$

Devemos analisar agora como se dá a expansão do universo vista de um observador que se encontra sobre um dos corpos em movimento no universo. O observador vê como se os outros corpos se movessem distanciando-se radialmente dele. A velocidade desse distanciamento é proporcional à distância entre os corpos. Isso deve estar de acordo com o deslocamento para o vermelho (redshift) das linhas dos espectros das galáxias.

Examinemos a propagação de raios de luz no espaço isotrópico ao longo da linha de propagação do raio luminoso $ds = 0$ [40]. A origem das coordenadas χ, θ e ϕ , está na fonte do raio de luz, por exemplo uma galáxia G_1 . Como o raio propaga-se radialmente ($\theta = \text{const}$ e $\phi = \text{const}$), temos que $a^2 (d\eta^2 - d\chi^2) = 0$, o que implica em $d\chi = \pm d\eta$, da qual tomamos a solução negativa. Mas sabemos que $d\eta = cdt/a(t)$; então

$$\frac{cdt}{a(t)} = -d\chi. \quad (2.9)$$

Consideremos um raio de luz emitido por G_1 em $\chi = \chi_1$ e $t = t_1$, sendo recebido em um observador, nossa galáxia, em $\chi = 0$ e $t = t_0$. Integramos a equação (2.9) para esses valores

$$\int_{t_1}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)} = - \int_{\chi_1}^0 d\chi = \int_0^{\chi_1} d\chi. \quad (2.10)$$

Entretanto, se G_1 continuar emitindo, por exemplo no intervalo t_1 a $t_1 + \Delta t_1$ e for recebido por nós no intervalo t_0 a $t_0 + \Delta t_0$, a integral acima fica

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} c \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{\chi_1} d\chi. \quad (2.11)$$

Como $a(t)$ varia lentamente, permanece praticamente invariável para pequenos intervalos como Δt_0 e Δt_1 . Subtraindo a equação (2.10) da equação (2.11) obteremos que

$$\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.12)$$

Mas $c\Delta t_1$ é o comprimento de onda λ_1 medido por um observador sobre G_1 e $c\Delta t_0$ o comprimento de onda λ_0 medido por nossa galáxia. Usando que

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1},$$

é o deslocamento para o vermelho, escrevemos a equação (2.12) na forma

$$\frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z.$$

A velocidade de afastamento de G_1 é

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt} (a\chi)_{t_0} \\ &= \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)_{t_0} a\chi_{t_0} \\ &= HR, \end{aligned}$$

essa é a chamada lei de Hubble, onde definimos $H_0 = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)_{t_0}$ como a constante de Hubble nos dias atuais e $R = a(t_0)\chi$ é a distância atual da galáxia G_1 até nós. No entanto, para a luz emitida por galáxias próximas temos $R \approx c(t_0 - t_1)$, [42]. Neste caso escrevemos

$$a(t_0) \approx a(t_1) + (t_0 - t_1) \frac{da}{dt},$$

e portanto

$$z \approx \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right) \frac{R}{c} = H \frac{R}{c}.$$

Essa relação entre distância e desvio para o vermelho foi descoberta por Hubble . O desvio para o vermelho em galáxias distantes será obtido a partir dessa lei, dependendo exatamente de como $a(t)$ varia com t .

Além das referências já citadas nessa seção, uma revisão mais profunda desse assunto pode ser encontrada em [45, 46]

2.2 Topologia

As equações de Einstein, descritas acima, são equações diferenciais parciais e suas soluções descrevem somente propriedades locais do espaço-tempo. Assim, elas não fixam a estrutura

global (ou a topologia) do espaço-tempo. Para um dado elemento métrico local podemos associar geralmente, um número de modelos topologicamente diferentes.

Em geral a topologia da parte espacial das métricas na expressão (2.2) é considerada trivial ou simplesmente conexa. Para $k = +1$, a topologia do espaço é a hiperesfera finita S^3 ; com $k = 0$, temos o espaço euclidiano infinito R^3 e para $k = -1$, o espaço hiperbólico infinito H^3 .

No entanto, podemos escolher topologias não-triviais ou multiplamente conexas para as métricas na expressão (2.2). Tais topologias são variedades tridimensionais, orientáveis e compactas. De forma geral podemos representá-las por variedades quocientes $M = \tilde{M}/\Gamma$, onde \tilde{M} é um dos espaços de recobrimento universal citados acima (S^3, R^3, H^3) e Γ é um grupo discreto de isometrias (ou movimentos rígidos) de ação livre e propriamente descontínua em \tilde{M} , [12, 1]. A classificação topológica das variedades fechadas é completa somente para os casos esférico em qualquer dimensão. Para o caso euclidiano a classificação é completa em duas e três dimensões. Já no caso hiperbólico é completa em duas, mas não em três dimensões.

Na prática M é descrita por um poliedro fundamental (PF) em \tilde{M} . O PF é definido de acordo com a ação de Γ em \tilde{M} de tal forma que, dado um ponto x em M os pontos do PF são tais que

$$\{y \in M, d(y, x) \leq d(y, g(x)) \quad \forall g \in \Gamma\}, \quad (2.13)$$

onde $d(y, x)$ é a distância entre os pontos x e y . Um exemplo bastante ilustrativo é o caso do toro $T^2 = R^2/\Gamma$, Fig.2.1. O PF é um retângulo de lados associados onde

$$T^2 \left\{ \begin{array}{l} g_1(x, y) = (x + L_1, y) \\ g_2(x, y) = (x, y + L_2) \end{array} \right.,$$

sendo g_1, g_2 os geradores do grupo discreto Γ de isometria e L_1, L_2 os comprimentos dos lados do retângulo.

Nesta tese trabalharemos somente com variedades euclidianas e hiperbólicas, tridimensionais, compactas e orientáveis.

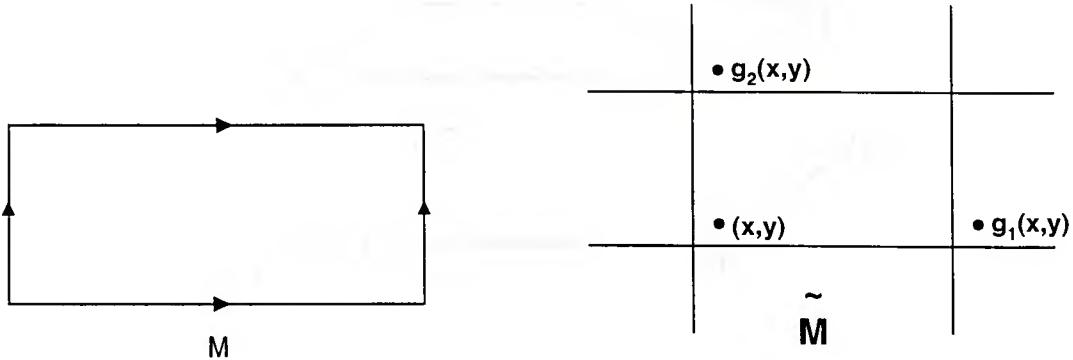


Figura 2.1: Espaço de recobrimento universal do Toro. Baseado em figura de [1].

Variedades Euclidianas: Das variedades euclidianas, usaremos aqui somente as seis compactas e orientáveis. Para quatro delas o PF pode ser um paralelepípedo com ponto base no centro do PF que tomamos como origem do sistema de coordenadas. De acordo com a nomenclatura de [1] chamaremos estas variedades de $E1 - E4$, com as seguintes identificações seguidas pelos respectivos geradores de Γ :

$$\begin{aligned}
 & ABCD \longleftrightarrow A'B'C'D' \quad g_1(x, y, z) = (x + L_1, y, z) \\
 E1) \quad & ABB'A' \longleftrightarrow DCC'D' \quad g_3(x, y, z) = (x, y, z + L_3) \\
 & ADD'A' \longleftrightarrow BCC'B' \quad g_2(x, y, z) = (x, y + L_2, z)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 & ABCD \longleftrightarrow C'D'A'B' \quad g_1(x, y, z) = (x + L_1, -y, -z) \\
 E2) \quad & ABB'A' \longleftrightarrow DCC'D' \quad g_3(x, y, z) = (x, y, z + L_3) \\
 & ADD'A' \longleftrightarrow BCC'B' \quad g_2(x, y, z) = (x, y + L_2, z)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 & ABCD \longleftrightarrow B'C'D'A' \quad g_1(x, y, z) = (x + L_1, z, -y) \\
 E3) \quad & ABB'A' \longleftrightarrow DCC'D' \quad g_3(x, y, z) = (x, y, z + L_3) \\
 & ADD'A' \longleftrightarrow BCC'B' \quad g_2(x, y, z) = (x, y + L_2, z)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

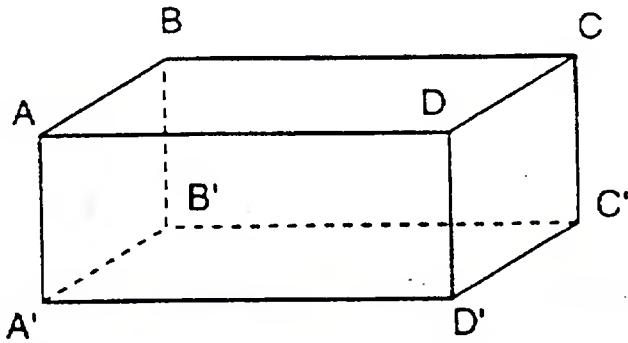


Figura 2.2: Paralelepípedo de faces associadas representando os PF's E1-E4 em variedades euclidianas. Extraído de [1].

$$\begin{aligned}
 ABCD &\longleftrightarrow C'D'A'B' \quad g_1(x, y, z) = (x + L_1, -y, -z) \\
 E4) \quad ABB'A' &\longleftrightarrow D'A'AD \quad g_3(x, y, z) = (-x, z + L_3, y) , \quad (2.17) \\
 BCC'B' &\longleftrightarrow C'D'DC \quad g_2(x, y, z) = (-x, z, y + L_2)
 \end{aligned}$$

onde L_1, L_2 e L_3 são o comprimento das arestas do paralelepípedo. Note que os movimentos são indicados com uma seta de dupla direção, pois além dos geradores que mostramos temos seus inversos, eles são tais que $g_k^{-1}g_k(x, y, z) = (x, y, z)$. Como os geradores de E4 em [1] não estão corretos, usamos E4 obtido por Gomero em [12]. Nas outras duas variedades o PF pode ser representado por um prisma hexagonal (Fig.2.3), com ponto base no centro coincidindo com a origem das coordenadas. Chamaremos essas variedades de E5 e E6 com as seguintes identificações e movimentos de Γ :

$$\begin{aligned}
 ABCDEF &\longleftrightarrow C'D'E'F'A'B' \quad g_1(x, y, z) = \left(x + L, \frac{-y+z\sqrt{3}}{2}, \frac{-y\sqrt{3}-z}{2}\right) \\
 E5) \quad AA'F'F &\longleftrightarrow CC'D'D \quad g_2(x, y, z) = \left(x, y - \frac{L}{2}, z + \frac{L\sqrt{3}}{2}\right) , \quad (2.18) \\
 EE'D'D &\longleftrightarrow AA'B'B \quad g_3(x, y, z) = \left(x, y + \frac{L}{2}, z + \frac{L\sqrt{3}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ABCDEF &\longleftrightarrow B'C'D'E'F'A' \quad g_1(x, y, z) = \left(x + L, \frac{y+z\sqrt{3}}{2}, \frac{-y\sqrt{3}+z}{2} \right) \\
 E6) \quad AA'F'F &\longleftrightarrow CC'D'D \quad g_2(x, y, z) = \left(x, y - \frac{L}{2}, z + \frac{L\sqrt{3}}{2} \right) , \quad (2.19) \\
 EE'D'D &\longleftrightarrow AA'B'B \quad g_3(x, y, z) = \left(x, y + \frac{L}{2}, z + \frac{L\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

onde L é o tamanho das arestas verticais e também o raio da circunferência inscrita à base hexagonal do poliedro. Lembremos que as setas de dupla direção indicam que além dos geradores mostrados temos seus inverso.

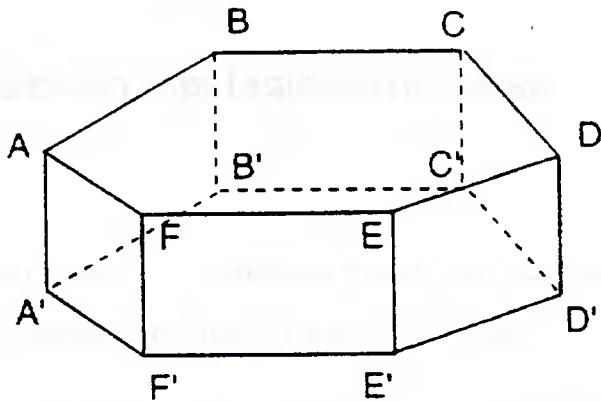


Figura 2.3: Prisma hexagonal de faces associadas representando os PF's E5 e E6 para variedades euclidianas.
Extraído de [1].

Variedades Hiperbólicas: Essas variedades são obtidas identificando pares de faces do PF em H^3 . H^3 pode ser visualizado como uma hipersuperfície imersa no espaço de Minkowski quadridimensional (*vide Apêndice B*).

Aqui usaremos duas das variedades de Best [35], as quais têm um icosaedro regular como PF, vide Fig.2.4. Estas duas variedades são listadas no programa SnapPea [30] como v2293(+3,2) e v2091(+3,2). Algumas de suas propriedades são apresentadas no *Apêndice B*.

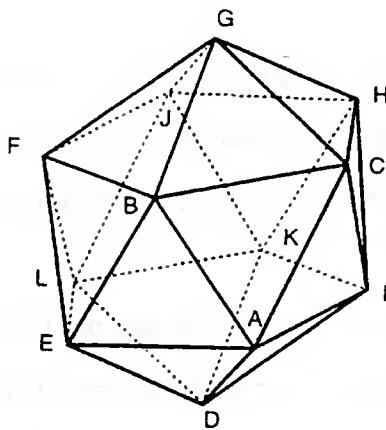


Figura 2.4: Icosaedro de faces associadas representando um PF em variedades hiperbólicas. Extraído de [1, 9].

2.3 Detectabilidade da topologia do universo

Considerando:

- que as equações de Einstein, cujas soluções hoje melhor descrevem a estrutura do espaço-tempo, não fixam sua estrutura global (ou sua topologia);
- que para cada solução das descritas na expressão (2.2) podemos associar diferentes topologias além da trivial;
- e que topologias não-triviais devem deixar sua marca na distribuição de corpos celestes (galáxias, quasares,...) e nas flutuações de densidade da radiação cósmica de fundo do universo;

é natural que nos ocupemos em verificar a possibilidade da topologia do universo ser não-trivial, criando meios para que, com os avanços nas observações do universo, possamos detectar a existência ou não de tais topologias.

Além disso, se pudéssemos identificar a topologia do universo, teríamos condições diretas de dizer qual é o sinal da curvatura espacial. Isso pois as topologias de espaços compactos são

diferentes entre si para $k = -1, 0, +1$.

A topologia global do universo pode ser testada, basicamente estudando a distribuição tridimensional de fontes discretas e flutuações bidimensionais na radiação cósmica de fundo. A existência de uma topologia não-trivial provocará imagens repetidas de uma mesma fonte ou flutuação de densidade.

Uma das maiores dificuldades deste tipo de abordagem, mais precisamente no caso tridimensional, é o fato que veremos imagens de uma mesma fonte em diferentes épocas de sua evolução, dificultando sua identificação. As fontes são vistas através de raios de luz percorrendo geodésicas nulas no espaço-tempo. Em espaços mutiplamente conexos teremos várias geodésicas nulas ligando fonte e observador. Algumas delas serão observadas somente após darem várias voltas no universo. Essas imagens da fonte serão vistas após percorrerem um longo caminho. Assim, a imagem recebida será a da fonte no passado, quando a luz foi emitida. Os métodos utilizados nesses casos devem levar isso em conta.

Além disso muitos efeitos podem dificultar a visualização de imagens, como por exemplo, outro objeto ou poeira cósmica na linha de seu sinal. Algumas inhomogeneidades na densidade de matéria no universo também podem amplificar e/ou distorcer imagens de alguma fonte, tornando-as de difícil identificação. De forma geral o objeto usado como fonte seria ideal [5] se: (i) não evoluísse (ou evoluísse pouco) com o decorrer do tempo; (ii) não tivesse velocidade local com relação ao fluxo de Hubble; (iii) emitisse isotropicamente; (iv) pudesse ser visto à longas distâncias.

Os objetos mais comumente usados na procura de imagens múltiplas são galáxias (apesar de sua evolução), aglomerados e superaglomerados de galáxias, e também quasares. Um bom exemplo é a procura de imagens de nossa própria galáxia [11].

A detecção de flutuações angulares na radiação cósmica de fundo, já previstas por modelos de formação de galáxias, também podem sofrer influência da presença de um universo mutiplamente conexo. A flutuação de temperatura associada $\Delta T/T$ da radiação cósmica de fundo

é interpretada como efeito da inomogeneidade na época da recombinação. Essas flutuações são expressas em termos de harmônicos esféricos. Em universos com topologias não-triviais o espectro de potência (média sobre o quadrado dos coeficientes dos harmônicos esféricos para cada l) apresenta somente números de onda correspondendo a harmônicos do tamanho do PF considerado. O espectro de comprimento de onda neste caso é discreto, o que não acontece para universos simplesmente conexos [23, 36, 21].

Alguns dos métodos desenvolvidos para detectar topologias não-triviais, usando radiação cósmica de fundo, são baseados na procura de manchas quentes e frias na radiação [10]. Outro método desenvolvido em [22, 31] se baseia na procura de pares identificados de círculos no céu (eles são formados pela intersecção de duas regiões da superfície de último espalhamento em um universo multiplamente conexo).

A referência [1] apresenta uma ampla revisão de topologia cósmica.

3

Polarização da Luz e Eixos Galácticos

A idéia aqui é usar fontes de luz polarizadas como objeto de detecção de universos multiplamente conexos. Nesses universos, a polarização poderia sofrer alterações quando um raio de luz alcança uma das faces do poliedro fundamental (PF). Os raios luminosos que deixam as fontes cósmicas chegam a nós, observadores na Terra, pelos vários caminhos permitidos pela topologia não-trivial. As trajetórias das ondas eletromagnéticas ficam confinadas ao poliedro, podendo sair e reentrar no mesmo, segundo as regras de identificação apresentadas no *Capítulo 2*. Nesse processo a polarização dos raios pode variar.

3.1 Polarização da luz

Para estudarmos a trajetória de um raio de luz polarizada em um universo com topologia não-trivial, devemos considerar a polarização da luz como um vetor no plano perpendicular à direção de propagação do raio de luz. A evolução desse vetor polarização pode variar de acordo com a topologia.

Analisemos como um vetor se comporta na presença das topologias $E1 - E4$ definidas no *Capítulo 2*, expressões (2.14) - (2.17). Consideremos o vetor campo elétrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, que tem sua direção e sentido dados pelo vetor unidade $\mathbf{u} = \mathbf{E} / |\mathbf{E}| = (E_x / |\mathbf{E}|, E_y / |\mathbf{E}|, E_z / |\mathbf{E}|) \equiv (d, e, f)$. As componentes do vetor unidade $\mathbf{u} = (d, e, f)$ são os cossenos diretores da direção \mathbf{u} e suas componentes em um sistema de coordenadas são formadas pela diferença de dois pon-

tos. Nesse caso, se colocarmos nosso sistema de coordenadas na fonte do campo elétrico, o vetor unidade é formado pela diferença entre o ponto (d, c, f) e o ponto $(0, 0, 0)$. Usaremos esse fato para estudar como a topologia afeta um vetor.

Devemos primeiramente aplicar os geradores da variedade em questão aos pontos formadores das componentes do vetor. Após a aplicação dos geradores aos pontos, recalculamos a diferença, obtendo então as correspondentes componentes da imagem do vetor.

Consideremos dois pontos $pt_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $pt_2 = (x_2, y_2, z_2)$ formando o vetor $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Ao aplicarmos os geradores de $E1$, por exemplo g_1 (expressão (2.14)), aos pontos desse vetor, temos:

$$g_1(pt_1) = (x_1 + L_1, y_1, z_1),$$

$$g_1(pt_2) = (x_2 + L_1, y_2, z_2)$$

formando o vetor

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{v}) &= (x_2 + L_1 - x_1 - L_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Para os outros geradores de $E1$, como no caso de g_1 , o vetor não se altera.

Já no caso de $E2$, um de seus geradores altera o vetor. Considere os pontos pt_1 e pt_2 e a aplicação de g_1 , expressão (2.15), à esses pontos

$$g_1(pt_1) = (x_1 + L_1, -y_1, -z_1),$$

$$g_1(pt_2) = (x_2 + L_2, -y_2, -z_2).$$

Assim, o vetor fica

$$g_1(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

A aplicação inversa de g_1 , g_1^{-1} , age da mesma forma. Os outros geradores de $E2$ não alteram o vetor. Em $E3$, expressão (2.16), os únicos geradores que alteram o vetor são g_1 e g_1^{-1} , pro-

duzindo

$$g_1(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - y\mathbf{k},$$

$$g_1^{-1}(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

Já em $E4$, expressão (2.17), todos os geradores alteram o vetor. Aplicando g_1 aos pontos pt_1 e pt_2 , obtemos

$$g_1(\mathbf{v}) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

a aplicação de g_1^{-1} resulta no mesmo vetor $g_1^{-1}(\mathbf{v}) = g_1(\mathbf{v})$. A aplicação de g_2 e g_2^{-1} gera

$$g_2(\mathbf{v}) = g_2^{-1}(\mathbf{v}) = -x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

e de g_3 e g_3^{-1} nos dá

$$g_3(\mathbf{v}) = g_3^{-1}(\mathbf{v}) = -x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

Podemos notar que as translações (como se espera) não alteram as componentes do vetor. Dessa forma, para fins de cálculo, usamos os geradores (omitindo as translações) para as componentes das imagens do campo. Abaixo serão listados os geradores das quatro variedades acima para o vetor:

$$E1 \left\{ \begin{array}{l} g_1(\mathbf{v}) = (x, y, z) \\ g_2(\mathbf{v}) = (x, y, z) \\ g_3(\mathbf{v}) = (x, y, z) \end{array} \right.,$$

$$E2 \left\{ \begin{array}{l} g_1(\mathbf{v}) = (x, -y, -z) \\ g_2(\mathbf{v}) = (x, y, z) \\ g_3(\mathbf{v}) = (x, y, z) \end{array} \right.,$$

$$E3 \left\{ \begin{array}{l} g_1(\mathbf{v}) = (x, z, -y) \\ g_2(\mathbf{v}) = (x, y, z) \\ g_3(\mathbf{v}) = (x, y, z) \end{array} \right.,$$

$$E4 \left\{ \begin{array}{l} g_1(\mathbf{v}) = (x, -y, -z) \\ g_2(\mathbf{v}) = (-x, z, y) \\ g_3(\mathbf{v}) = (-x, z, y) \end{array} \right.$$

Já sabemos como se comporta um vetor, que associamos à polarização, em um universo com topologia não-trivial. Nossa problema é como observar essas variações na polarização, caso e quando elas ocorram. Quando observamos o céu não temos, em geral, noção das distâncias dos corpos até nós. O que observamos são as projeções dos corpos no céu, a chamada esfera celeste. Dessa forma, somente observamos a polarização da luz quando projetada na esfera celeste que coincide com o plano perpendicular a qualquer raio de luz que possamos observar.

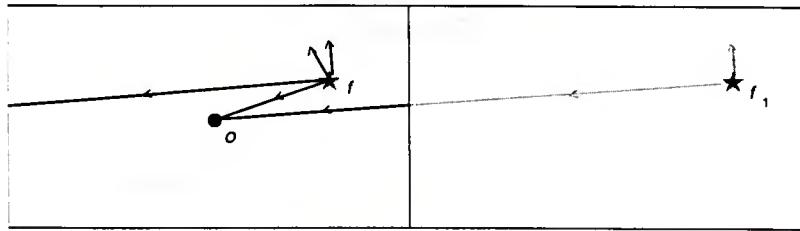


Figura 3.1: Exemplo do comportamento de um raio de luz e sua polarização em T^2

Nesse caso teremos um problema como mostrado na Fig.3.1. Como as fontes de luz emitem (luz) radialmente, um observador veria uma mesma fonte em diferentes posições (como seria o caso se o universo fosse multiplamente conexo) através de raios de luz de diferentes direções e com diferentes polarizações. Como resultado, não podemos identificar a polarização de um raio com a de outro, mesmo que vindos de uma mesma fonte. Ou seja, o estudo das polarizações (ao menos na forma acima) não ajuda na identificação da topologia.

3.2 Direções de eixos galácticos

Outra alternativa seria usar direções de eixos de galáxias espirais (chamaremos eixo galáctico) como ferramenta na observação de universos multiplamente conexos. O eixo galáctico é aquele

perpendicular ao plano do disco das galáxias espirais. Ressurge, nesse caso, o fato de que somente observamos os objetos celestes projetados sobre a esfera celeste. Conseqüentemente, se observamos uma galáxia, aparentemente não poderíamos dizer qual a direção de seu eixo. No entanto, no caso de galáxias espirais, se conhecermos as dimensões dos eixos maior e menor aparentes, poderemos inferir a inclinação de seu plano e portanto a direção de seu eixo.

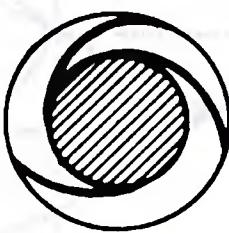


Figura 3.2: Galáxia espiral tipo Sb. Extraído de [40].

É necessário que isso seja explicado melhor. Considere, por exemplo, a Fig.3.2. Se víssemos uma galáxia espiral como essa, estariamos vendo uma galáxia com seu plano totalmente paralelo a nossa esfera celeste. Supomos que toda galáxia espiral tenha um disco aproximadamente circular. Vamos supor que víssemos essa mesma galáxia, no entanto, não-paralela ao céu, mas sim com uma inclinação. A forma da galáxia que veríamos projetada no céu é a de uma elipse e a relação entre os eixos maior e menor aparentes dessa elipse nos daria a inclinação dessa galáxia com relação à esfera celeste.

Observe a Fig.3.3: A região em cinza representa o disco circular de uma galáxia inclinada com relação à esfera celeste. Essa galáxia projetada na esfera celeste é vista, por um observador em O , como uma elipse (essa projeção é mostrada em branco na Fig.3.3). Seu eixo maior aparente, a , coincide sempre com o raio do disco, r , que a galáxia teria se ela estivesse paralela à esfera celeste, ou seja $a = r$. Já o raio menor aparente, b , é dado por $b = r \cos \alpha = a \cos \alpha$. Dessa forma, podemos medir o raio menor e maior aparentes de uma galáxia espiral e, com sua

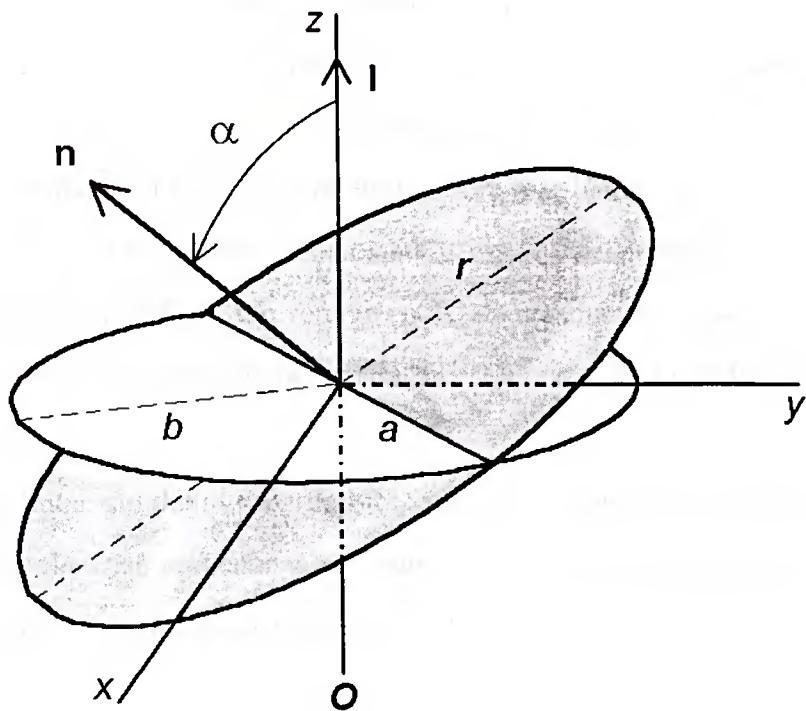


Figura 3.3: Este gráfico representa uma galáxia espiral (em cinza) inclinada com relação à esfera celeste e sua projeção nela. Note que $a = r$ e $b = r \cos \alpha$.

razão $b/a = \cos \alpha$, teremos a direção real \mathbf{n} da galáxia no céu, já que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = \cos \alpha$, onde \mathbf{l} é a direção perpendicular à esfera celeste (direção de visada).

De fato, catálogos como o “The Surface Photometry Catalogue of the ESO - Uppsala Galaxies” [29] apresentam a razão a/b . No entanto, para definirmos melhor a direção \mathbf{n} (ainda que não completamente) teremos que usar outro ângulo, o chamado ângulo de posição, PA (medido em graus com relação ao norte celeste, crescendo na direção do leste).

Assim, sabemos que \mathbf{n} faz um ângulo α com a direção de visada. E também que o eixo maior aparente da galáxia forma um ângulo PA com relação ao norte celeste. No entanto, precisamos escrever \mathbf{n} com relação ao nosso sistema de coordenadas na Terra. Para isso usaremos os ângulos de Euler como descrito em [39]. Usando-os poderemos executar a transformação de

um dado sistema de coordenadas cartesianas para outro por meio de três sucessivas rotações.

Precisamos definir um sistema de coordenadas no céu - SC, no qual possamos escrever \mathbf{n} em termos dos dados que possuímos (α e $P.A.$). Primeiramente, suponhamos que \mathbf{n} coincida com o eixo ζ de um sistema de coordenadas definido sobre a galáxia (chamaremos de sistema de coordenadas da galáxia - SG). Definiremos os eixos maior e menor aparentes respectivamente sobre ξ e η (coordenadas no SG). Escreveremos o SC da mesma forma que mostrado na Fig.3.4 (b), com z coincidindo com a direção de visada, l , $-y$ na direção do norte celeste e x paralelo ao equador celeste.

Os ângulos de Euler são definidos como três sucessivos ângulos de rotação transformando um sistema de coordenadas cartesianas em outro. Para cada ângulo temos uma matriz de rotação, as quais são mostradas abaixo seguindo notação de [39]:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{D} faz uma rotação em torno do eixo z de um ângulo ϕ no sentido anti-horário. A rotação seguinte é feita por \mathbf{C} em torno do eixo x intermediário (obtido após a primeira rotação) de um ângulo θ no sentido anti-horário. Finalmente, \mathbf{B} faz uma rotação em torno do eixo z final (obtido após a segunda rotação) de um ângulo ψ também no sentido anti-horário.

Em nosso caso, o ângulo ψ de Euler será nulo deixando a matriz B igual à identidade. Faremos uma rotação de ϕ em torno de z (que coincide com ζ) e uma rotação de θ em torno de ξ , a matriz obtida é o produto CD abaixo:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}_{SG} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{SC}.$$

Entretanto, como queremos escrever \mathbf{n} em SC, devemos fazer a transformação inversa $(CD)^{-1}$, que é a transposta de CD :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{SC} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}_{SG}.$$

Da forma como escrevemos \mathbf{n} em SG, ele é um vetor unidade coincidindo com a direção de ζ .

Então, podemos escrevê-lo como

$$\mathbf{n}_{SG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $\mathbf{n}_{SC} = (CD)^{-1} \mathbf{n}_{SG}$ e obtemos que

$$\mathbf{n}_{SC} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever \mathbf{n}_{SC} da maneira usual

$$\mathbf{n}_{SC} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos(\phi - \pi/2) \\ \sin \theta \sin(\phi - \pi/2) \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde θ é o ângulo entre z e \mathbf{n}_{SG} (ou ζ) e portanto $\theta = \alpha$. Quanto a ϕ , devemos lembrar que $0^\circ \leq PA \leq 180^\circ$ e que ele é o ângulo entre o pólo norte celeste (variando na direção do leste) e o eixo maior aparente a . Assim, PA não é o nosso ângulo de Euler ϕ , mas podemos relacioná-los. Como fica fácil observar, podemos escrever $\phi + PA = \pi/2 \rightarrow \phi = \pi/2 - PA$. Em termos dos ângulos observáveis temos que

$$\mathbf{n}_{SC} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos (-PA) \\ \sin \alpha \sin (-PA) \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Já conseguimos escrever \mathbf{n} no sistema de coordenadas do céu (SC) usando os dados observáveis. Precisamos ainda escrever \mathbf{n} em nosso sistema de coordenadas, ST (sistema de coordenadas na Terra). Usaremos, para isso, os ângulos de Euler da mesma forma que acima.

A posição de uma galáxia no céu é definida por dois ângulos, ascensão reta, RA , com variação $0h \leq RA < 24h$, e declinação, Dec , com variação $-90^\circ \leq Dec \leq +90^\circ$. Definiremos ST com Z na direção do pólo norte celeste, X perpendicular ao equador no ponto $0h$ de RA e Y perpendicular a X e Z , de acordo com a Fig.3.4(a).

Da forma que definimos SC e ST, podemos relacionar RA e Dec aos ângulos de Euler. Novamente faremos a transformação inversa, onde $\mathbf{n}_{ST} = (\mathbf{C}'\mathbf{D}')^{-1} \mathbf{n}_{SC}$ de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{ST} &= \begin{pmatrix} \cos \Phi \sin \alpha \cos PA + \cos \Theta \sin \Phi \sin \alpha \sin PA + \sin \Theta \sin \Phi \cos \alpha \\ \sin \Phi \sin \alpha \cos PA - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha \sin PA - \sin \Theta \cos \Phi \cos \alpha \\ -\sin \Theta \sin \alpha \sin PA + \cos \Theta \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Relacionamos os ângulos de Euler, Φ e Θ , como $\Phi = (RA \times 15^\circ) - 90^\circ$ (cada 15° corresponde a uma hora), e $\Theta = Dec - 90$.

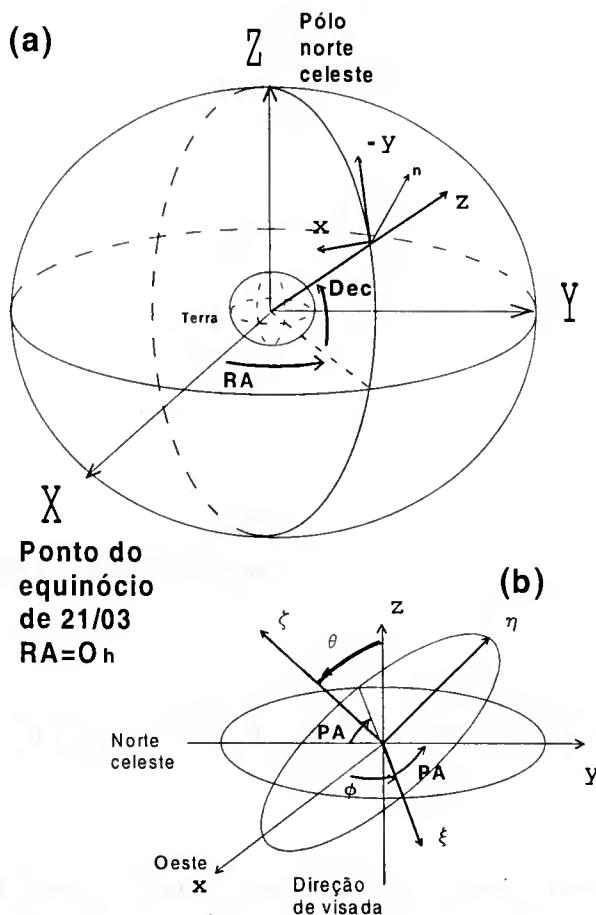


Figura 3.4: (a) Esta figura procura ajudar na visualização da relação entre o sistema de coordenadas da Terra (X, Y, Z) com origem no centro na Terra, e o sistema de coordenadas do céu (x, y, z) com origem no centro de uma galáxia. (b) Sistema de coordenadas do céu (x, y, z) e sistema de coordenadas da galáxia (ξ, η, ζ)

Dessa forma, se considerarmos que podemos escrever $\Theta_e = \cos^{-1}(Z_n)$ e $\Phi_e = \tan^{-1}(Y_n/X_n)$, teremos

$$\Theta_e = \cos^{-1}(-\sin \Theta \sin \alpha \sin PA + \cos \Theta \cos \alpha)$$

e

$$\Phi_e = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \Phi \sin \alpha \cos PA - \cos \Theta \cos \Phi \sin \alpha \sin PA - \sin \Theta \cos \Phi \cos \alpha}{\cos \Phi \sin \alpha \cos PA + \cos \Theta \sin \Phi \sin \alpha \sin PA + \sin \Theta \sin \Phi \cos \alpha} \right),$$

onde o índice e indica que Θ_e e Φ_e são equivalentes aos ângulos simulados. Com isso podemos

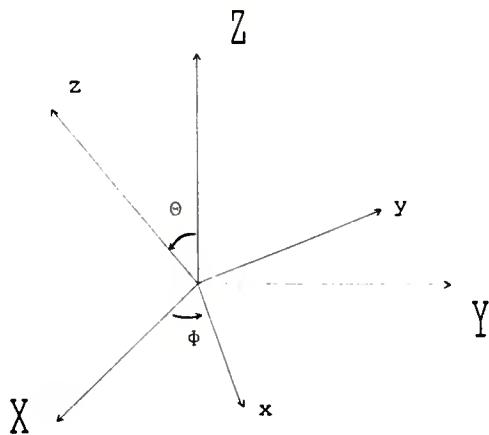


Figura 3.5: Ângulos de Euler entre dois sistemas de coordenadas.

escrever

$$\mathbf{n}_e = (\sin \Theta_e \cos \Phi_e, \sin \Theta_e \sin \Phi_e, \cos \Theta_e), \quad (3.1)$$

equivalente ao simulado.

No entanto, com os dados disponíveis nos catálogos atuais não temos condições de distinguir se \mathbf{n} está na direção de A ou B da Fig.3.6. Nessa figura, o plano (x, z) está sobre o plano celeste e o observador na direção de y . As duas galáxias espirais representadas na Fig.3.6 têm a mesma projeção no plano (x, z) e exemplificam a indefinição em \mathbf{n} . Para obtermos essa informação seria necessário conhecer a direção real de rotação de cada disco galáctico.

3.2.1 Simulações

Sendo possível obter informações sobre a direção real, \mathbf{n} , do eixo galáctico, podemos simular um catálogo de eixos de imagens de galáxias espirais e analisar sua distribuição no universo. Nossa objetivo é desenvolver métodos que, aplicados aos dados observacionais, somam-se a outros podendo contribuir para a obtenção de informações sobre a topologia do universo.

Simulamos catálogos onde distribuímos aleatoriamente (números gerados por computador

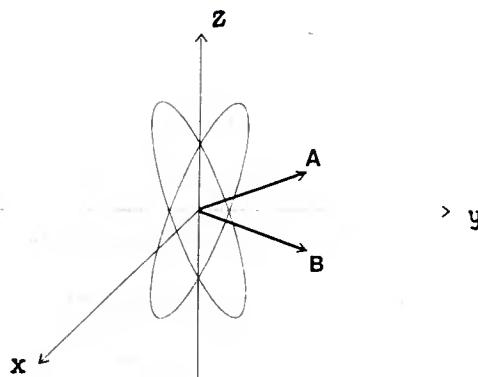


Figura 3.6: Gráfico mostrando duas posições de galáxias espirais, as quais não podemos diferenciar com os dados que possuímos.

pseudo-randomicamente) pontos referentes às posições de galáxias espirais no interior do PF de dimensões $L_1 = L_2 = L_3 = 5600 \text{ Mpc}$. Para cada galáxia espiral gerada, geramos, também aleatoriamente, a direção de seu eixo. Escrevemos, primeiramente, o vetor direção \mathbf{n}_s do eixo galáctico em termos das coordenadas esféricas,

$$\mathbf{n}_s = (\sin \theta_s \cos \varphi_s, \sin \theta_s \sin \varphi_s, \cos \theta_s).$$

Os ângulos θ_s e φ_s dão a direção de \mathbf{n}_s e foram gerados aleatoriamente, com $0^\circ \leq \theta_s \leq 180^\circ$ e $0^\circ \leq \varphi_s < 360^\circ$. Esses ângulos que simulamos equivalem àqueles da equação (3.1), obtidos a partir de dados observacionais.

No entanto, ao gerarmos os ângulos θ devemos tomar certos cuidados para que sua distribuição seja uniforme. Isso porque o elemento de ângulo sólido, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, não é proporcional a $d\theta$ e sim a $\sin \theta d\theta$. Dessa forma, um intervalo de $\Delta\theta$ em regiões próximas aos pólos tem ângulo sólido menor que o mesmo intervalo em regiões próximas ao equador. Por outro lado se definirmos a variável $\xi = -\cos \theta$, teremos $d\Omega = d\xi d\varphi$ e a distribuição será constante em ξ e φ . Assim, podemos gerar números aleatórios no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$ e

depois transformá-los para ângulos θ , garantindo a homogeneidade na sua distribuição.

Formado nosso catálogo simulado de galáxias espirais e suas respectivas direções devemos usar os geradores do grupo Γ de isometrias de $E1 - E4$ e aplicá-los a esse catálogo. Para aplicarmos esses geradores ao catálogo, devemos lembrar que os vetores movem-se, sob a aplicação dos geradores, de forma diferente do movimento dos pontos. As posições de nossas galáxias no espaço são dadas por pontos. As direções de seus eixos representamos por vetores. Devemos aplicar os geradores de $E1 - E4$, expressões (2.14) a (2.17), nas posições das galáxias e os geradores modificados de $E1 - E4$ nas direções (*vide Seção 3.1*).

Usando os geradores, formamos palavras¹ de até três letras preenchendo totalmente a vizinhança próxima ao PF. Essa vizinhança é formada por imagens do PF ligadas a ele por uma face (palavras de uma letra), por uma aresta (palavras de duas letras) e por um vértice (palavras de três letras), ou seja, formamos poliedros ligados ao PF por no mínimo um vértice. Obtemos 27 palavras, correspondentes aos 26 poliedros vizinhos do PF mais ele próprio, para cada topologia de $E1 - E4$.

Preenchida a vizinhança próxima ao PF, devemos definir o raio de nosso catálogo simulado. Usamos para isso o raio do universo observável dado por

$$R_H = 2c/H_0 = 6000 h^{-1} Mpc, \quad (3.2)$$

onde $H_0 = 100 h km s^{-1} Mpc$ é a constante de Hubble com $0.4 \leq h \leq 1.0$; escolhemos $h = 0.75$.

Como descrevemos acima, cada direção do eixo galáctico é gerada através de suas componentes em coordenadas esféricas. No entanto, para aplicarmos as 27 palavras de geradores, devemos colocar as componentes do vetor em coordenadas cartesianas. Aplicamos as listas de palavras aos pontos e vetores. Excluímos as imagens de galáxias que apresentam a distância ao centro do PF maior que R_H . Fazendo isso, obteremos a distribuição de galáxias espirais e sua

¹Termo usado em teoria de grupos para produtos de geradores. Cada gerador é chamado letra.

E1 - E4.

Além dos catálogos simulados para universos com topologia não-trivial, $E1 - E4$, simulamos também um catálogo para o universo com topologia trivial. Esse catálogo é gerado de forma similar aos outros. No entanto, não usamos os geradores de uma topologia para distribuir imagens até o raio do universo observável, R_H . O que fizemos foi gerar aleatoriamente (no sentido já definido) galáxias e suas respectivas direções espalhadas por todo o espaço até o raio observável, R_H . Geramos o mesmo número de galáxias no catálogo com topologia trivial que obtivemos no catálogo com as topologias de $E1 - E4$.

Com o catálogo simulado, procuramos obter informações sobre a topologia usando ângulos entre as direções dos eixos galácticos. O ângulo entre dois vetores é dado por $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos \beta$ ou em termos de suas componentes

$$\cos \beta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.3)$$

em coordenadas esféricas. Definimos a direção de cada galáxia pelos ângulos θ e φ . Dessa forma, usando a equação (3.3), calculamos o ângulo β entre as direções de cada par de imagens. Tomamos o cuidado de não repetir o cálculo do ângulo entre duas galáxias já consideradas. Os ângulos são arredondados em múltiplos de 1° . Contamos quantos valores de cada ângulo são obtidos, tomamos sua percentagem e plotamos o gráfico da percentagem do número de ângulos por cada ângulo conforme mostrado nas Figs.3.7 a 3.11.

Poderíamos esperar obter uma distribuição que caracterizasse, não somente as translações (como no caso do método de cristalografia, apresentado no *Capítulo 4*), mas também as rotações ocorridas em $E2 - E4$. Os ângulos entre imagens de uma mesma galáxia, as quais não têm sua direção alterada pelos geradores modificados (como no caso de $E1$), devem ser zero. Quando medimos ângulos entre imagens de galáxias diferentes, obtemos valores aleatórios, os quais não devem identificar nossa topologia. Assim, a topologia de $E1$ deve apresentar uma grande quantidade de ângulos de zero grau. Já em $E2$, esperar-se-ia observar uma certa quantidade de

ângulos iguais e diferentes de zero, correspondentes à inversão das duas componentes do vetor mantendo uma inalterada. Esse movimento causa uma rotação no vetor com relação ao inicial. Um comportamento similar poderia ser esperado das topologias $E3$ e $E4$. Com isso, teríamos uma maior indicação da topologia. Veremos adiante que isso não ocorre.

3.2.2 Resultados

Os resultados, infelizmente, não são tão animadores. Como imaginávamos, os ângulos entre direções de imagens de uma mesma galáxia, as quais não tem sua direção alterada pelos geradores modificados, são zero grau. No caso de $E1$, como nenhum dos geradores alteram a direção do eixo galáctico, obtemos uma grande quantidade de ângulos de zero grau entre as direções dos eixos. Quando contamos a quantidade de ângulos em cada grau, obtemos um pico bastante pronunciado em zero grau. (vide Fig.3.7, para a distribuição de $E1$).

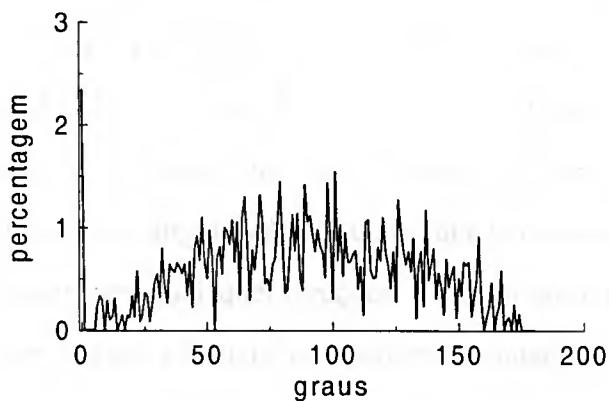


Figura 3.7: Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia $E1$. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600 Mpc$, raio de simulação= $8000 Mpc$.

Em $E2$ esperávamos encontrar, além do pico em zero grau, um pico em algum ângulo

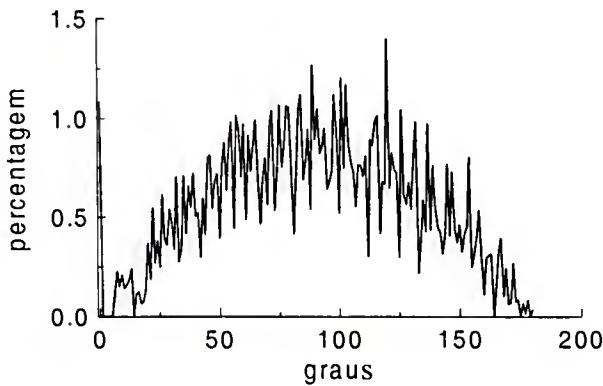


Figura 3.8: Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E2. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc .

referente às inversões nas direções y e z . Isso, no entanto, não ocorre. Considere o caso de $E2$ onde o gerador g_1 inverte as direções y e z , mas mantém a direção x tomando $\theta' = 0^\circ$ na direção x , o ângulo θ' não varia com esse movimento (ele só depende, nesse caso, de x , $x = -\cos \theta'$). Já o ângulo ϕ é acrescido de 180° ($y = \sin \theta' \cos \phi'$ e $z = \sin \theta' \sin \phi'$). Se mantivéssemos θ constante (sempre o mesmo para todas as direções de eixos galácticos) talvez obtivéssemos o resultado esperado. Nesse caso, o ângulo entre o eixo galáctico das galáxias e suas imagens (geradas por g_1) seriam iguais para quaisquer direções. Como fixar um ângulo θ' para todas as direções de eixos galácticos não seria realista, não podemos contar com essa possibilidade.

Note na Fig.3.8, distribuição para $E2$, que a quantidade de ângulos $\beta = 0^\circ$ é menor do que em $E1$. Isso ocorre porque embora g_2 e g_3 contribuam, o gerador g_1 produz menos ângulos $\beta = 0^\circ$. Por exemplo, se $p = (x, y, z)$ então $p' = g_1(p) = (x, -y, -z)$ e $p'' = g_1^2(p) = p$. Assim, o ângulo entre p e p'' é nulo, mas não o ângulo entre p e p' ou p' e p'' .

A situação em $E3$ (Fig.3.9) é similar à de $E2$. Já em $E4$ (Fig.3.10) o pico em $\beta = 0^\circ$ torna-se bem menor, pois todos os seus geradores alteraram a direção do eixo galáctico. Dessa forma, o

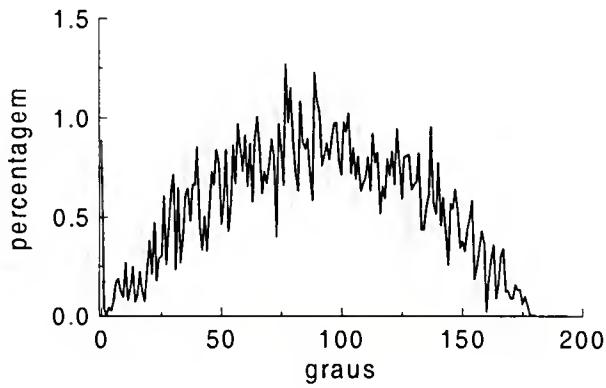


Figura 3.9: Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E3. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.

ângulo entre a direção do eixo de uma galáxia e o de sua imagem não é zero. No entanto, ainda obtemos $\beta = 0^\circ$ quando calculamos os ângulos entre eixos de imagens de uma mesma galáxia sendo o par formado, por exemplo, por uma imagem gerada por g_1^{-1} e outra por g_1 . Isso ocorre também com um par formado por g_2 e g_3 a partir de uma mesma fonte.

A distribuição para as direções de eixos galácticos em um universo com topologia trivial é mostrada na Fig.3.11. Comparando as distribuições de ângulos β para $E1 - E4$ com a distribuição para o universo com topologia trivial, notamos que ainda pode haver sinais da topologia nas distribuições de $E1 - E4$ para $\beta \neq 0^\circ$. No entanto, ainda não identificamos nada que a possa caracterizar.

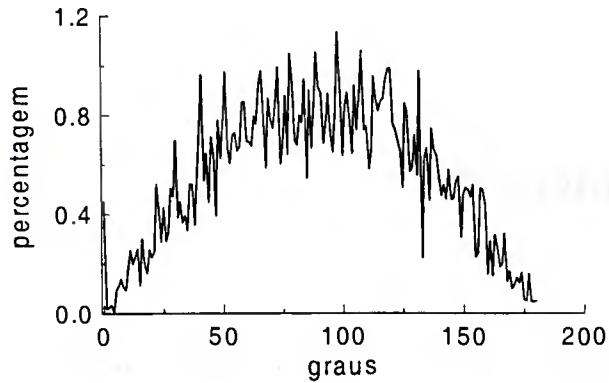


Figura 3.10: Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia E4. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.

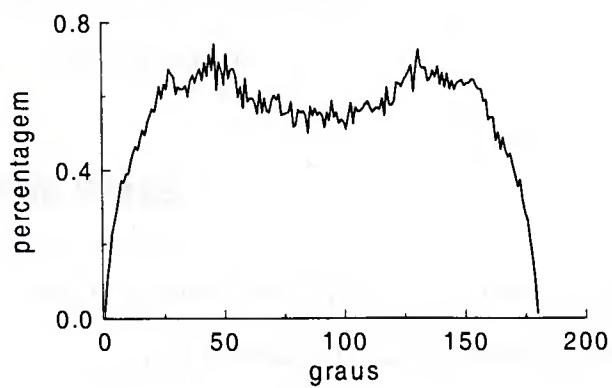


Figura 3.11: Distribuição do número de ângulos por grau em um universo com topologia trivial. $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, raio de simulação= 8000Mpc.

4

Cristalografia Cósmica

O método de cristalografia cósmica desenvolvido por R. Lehoucq, M. Lachièze-Rey e J. P. Luminet (LeLaLu) em 1996 [2], baseia-se em plotar histogramas de separação de pares de imagens cósmicas. Na realidade, toma-se o quadrado da distância entre todos os pares de imagens de um dado catálogo versus o número de ocorrências daquela distância. A eficiência do método está no fato que, em um universo multiplamente conexo, cada imagem de um mesmo objeto é ligada a cada outra por um elemento de um subgrupo discreto, Γ , de isometrias do espaço. Além disso, a cristalografia tem a vantagem de poder ser adaptada a qualquer tipo de espaço multiplamente conexo, não sendo baseada em propriedades específicas de um modelo cosmológico ou de uma população particular de objetos cósmicos.

4.1 Separação de Pares

Fundamentalmente, a idéia de universos multiplamente conexos implica na formação de imagens repetidas de um mesmo objeto cósmico. Essas imagens repetidas estão relacionadas por isometrias no espaço de recobrimento universal (*vide seção 2.2*). Conseqüentemente, qualquer par de imagens de um mesmo objeto está relacionado com uma isometria do espaço.

O método de cristalografia, dessa forma, tem como base verificar a separação de todos os pares de imagens de um catálogo tridimensional, dos quais emerge, no caso de o universo ser multiplamente conexo, uma significativa quantidade de pares de imagens de uma mesma fonte.

Os pares de imagens estão interligados por elementos g , do subgrupo discreto de isometrias Γ . Cada gerador g_k de Γ é associado a um “deslocamento”, λ_k , relacionado ao tamanho do poliedro fundamental (PF).

No artigo em que o método foi desenvolvido [2], LeLaLu expressaram as distâncias (separação entre pares de imagens), como combinações lineares de λ_k^2 , envolvendo coeficientes inteiros:

$$\Lambda_i^2 = \sum N_k \lambda_k^2. \quad (4.1)$$

Eles afirmam que cada imagem i_1 (exceto as próximas às arestas) é transformada por um gerador g_k , resultando em outra imagem i_2 , com separação λ_k . Assim, espera-se que para os N objetos de um catálogo, existam N pares correspondentes de uma mesma fonte com separação λ_k , as quais se sobressaem com relação à contribuição dos pares de imagens não referentes à mesma fonte. Esse número seria multiplicado por um fator de 2 ou 3 se $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ e $\lambda_k = \lambda_{k-1} = \lambda_{k-2}$, respectivamente.

Veremos que a expressão (4.1) só vale na sua integra para o caso do tritoro, no qual os geradores são “translações puras” [13, 6]. Serão analisadas as consequências deste fato na próxima seção, na qual daremos ênfase ao método de cristalografia em modelos localmente euclidianos.

4.2 Modelos Euclidianos

4.2.1 O método em modelos euclidianos

O método de cristalografia foi aplicado primeiramente ao caso euclidiano $k = 0$ em [2], embora seja, em princípio, aplicável a espaços-tempos com qualquer curvatura espacial, ($k = -1, 0, 1$). Usaremos, como em [2], o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com constante

cosmológica nula e com parâmetro de densidade de matéria $\Omega_0 = 1$. A métrica tem a forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (t/t_0)^{4/3} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

e seu espaço de recobrimento universal é \mathbf{R}^3 . Usaremos as seis variedades euclidianas, orientáveis, fechadas e tridimensionais, rotuladas por $E1 - E6$, expressões (2.14) a (2.19).

Pela equação (4.1), as distâncias entre pares de imagens de uma mesma fonte seriam combinações lineares de λ_k^2 , comprimentos característicos do PF. Consideremos, então, um sistema de coordenadas com origem no PF e um conjunto de geradores $\{g_1, g_2, g_3\}$ do grupo Γ . Suponhamos dois pontos $p = (x, y, z)$ e $g_1 g_2^2(x, y, z) = (x + L_1, y + 2L_2, z)$, este último obtido pela ação de uma combinação de geradores de $E1$. O quadrado da distância comóvel entre esses dois pontos é

$$d^2 = L_1^2 + 4L_2^2. \quad (4.2)$$

Quando usamos $E1$ obtemos distâncias similares a essa para quaisquer combinações de geradores, satisfazendo a equação (4.1) dada. Já no caso de $E2$, conseguimos obter distâncias que satisfazem a equação (4.1) principalmente através da ação de combinações dos geradores g_2 e g_3 . Ao usarmos combinações de geradores envolvendo g_1 , como o ponto obtido por $g_2 g_1(x, y, z) = (x + L_1, -y + L_2, -z)$, a distância a uma ponto p é

$$d^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2yL_2 + 4z^2 + 4y^2. \quad (4.3)$$

Neste caso, a distância dependerá da posição da fonte (marcada pela presença dos termos $4x^2$, $4y^2$ e $2yL_2$) e não satisfaz a equação (4.1). Podemos notar, no entanto, que algumas aplicações sucessivas de g_1 , como $g_1 g_1(x, y, z) = (x + 2L_1, y, z)$ e $g_1 g_2 g_1(x, y, z) = (x + 2L_1, y - L_2, z)$, já satisfazem novamente a equação (4.1). Tanto em $E3$ como em $E4$ [6] acontece o mesmo.

Os geradores que causam esse efeito incluem rotações e não contribuem para a formação de picos nos histogramas de separação de pares. De acordo com A. Bernui, G. I. Gomero, M. J.

Rebouças e A. F. F. Teixeira em [13], os picos apresentados nos histogramas ocorrem graças a translações de Clifford (*vide Apêndice A*) e que $E2, E3, E4$ admitem espaços de recobrimento do tipo $E1$; dessa forma teríamos picos graças a esses fatos.

Para plotar o histograma de separação de pares, calcula-se o quadrado das distâncias entre todas as imagens de um dado catálogo. Cada distância quadrada é dividida por $V^{2/3}$, onde V é o volume do PF. Plota-se $n(d)$, número de ocorrências de cada distância, por $d^2/V^{2/3}$.

Originalmente o volume para os poliedros, usado por LeLaLu foi $V = L_1 L_2 L_3$ para os casos $E1 - E4$ e $V = (3\sqrt{3}/2) L_1^2 L_2$ para $E5$ e $E6$. A forma de plotar os histogramas usa o volume como modo de realçar os picos. Veremos como isso ocorre: vamos supor que $L_1 = L_2 = L_3 = L$, dessa forma $V^{2/3} = L^2$ para $E1 - E4$. Nesse caso a expressão (4.2) fica

$$d^2 = 5L^2 \quad (4.4)$$

e assim, no histograma, essa distância contribuirá para o pico em $d^2/V^{2/3} = 5$. Se ao contrário $L_1 \neq L_2 \neq L_3$, a expressão (4.2), já dividido por $V^{2/3}$, torna-se

$$\frac{d^2}{V^{2/3}} = \frac{L_1^2}{(L_1 L_2 L_3)^{2/3}} + \frac{4L_2^2}{(L_1 L_2 L_3)^{2/3}}.$$

Podemos notar que, ao contrário da expressão (4.4), essa não será um número inteiro. Nesse caso, a quantidade de picos aumenta, mas suas amplitudes são bem menores.

Já a expressão (4.3), mesmo quando fizemos $L_1 = L_2 = L_3 = L$, fica

$$\frac{d^2}{V^{2/3}} = 2 - \frac{2y}{L} + \frac{4z^2}{L^2} + \frac{4y^2}{L^2},$$

e provavelmente essa distância não contribuirá significativamente para a formação de um pico, principalmente pela sua dependência da posição da fonte. As outras combinações que propomos para $E2$, $g_1 g_1$ (com $d^2/V^{2/3} = 4, V^{2/3} = L^2$) e $g_1 g_2 g_1$ (com $d^2/V^{2/3} = 2, V^{2/3} = L^2$), contribuem significativamente para os picos em $(d/L)^2 = 2$ e $(d/L)^2 = 4$ na Fig.4.2(a).

As simulações feitas por LeLaLu em [2] foram de catálogos de 50 fontes distribuídas aleatoriamente no PF e suas imagens distribuídas no espaço de recobrimento universal simulando a

aparência do céu até um raio equivalente a um “redshift” $z = 4$. Eles fizeram $L_1 = L_2 = L_3$, e o PF com volume $V = (1500 h^{-1} Mpc)^3$.

4.2.2 Tamanho do poliedro fundamental

Usamos o método de cristalografia de maneira similar ao desenvolvido por LeLaLu [2]. No entanto, usamos a forma de $E4$ obtido por Gomero [12] que demonstrou estar errada a forma dos geradores dessa variedade indicados em [37, 1]. Além disso, tomamos dimensões diferentes para $E5$ e $E6$. Fizemos o diâmetro menor da base hexagonal e o comprimento das arestas verticais iguais a L e não cada lado da base hexagonal igual a L como em [2]. Assim, o volume do PF nos casos $E5$ e $E6$ fica $(\sqrt{3}/2) L^3$.

Fizemos várias simulações, com vários números de fontes e diferentes tamanhos do PF. Escolhemos fontes distribuídas aleatoriamente no PF, as quais incluem nossa galáxia na posição de observador no ponto $(0, 0, 0)$. (Isto só é realista no caso de $E1$, que é homogêneo; nos demais espaços provavelmente não estamos no centro , pelo princípio cosmológico)

Com os geradores de $E1 - E6$, expressões (2.14) a (2.19), formamos palavras de até três letras com o objetivo de preencher toda a vizinhança do PF. Essa vizinhança é formada por todas as imagens ligadas ao PF por no mínimo um vértice.

O procedimento usado foi o seguinte: após distribuirmos os pontos aleatoriamente (usando “pseudo-random numbers ”gerados por computador) no interior do PF, aplicamos as listas de 27 palavras de geradores para cada uma das topologias $E1 - E4$ ou as 21 palavras de geradores para $E5 - E6$, expressões (2.18) e (2.19), correspondentes às vizinhanças ligadas ao PF como descrito acima, aos pontos distribuídos no interior do PF. Obtivemos a distribuição de imagens de fontes cósmicas do universo caso ele tenha uma das topologias $E1 - E6$. Usamos R_H , equação (3.2), como raio de nosso catálogo simulado e descartamos os pontos com distâncias à origem maiores que esse raio. Aplicamos a esse catálogo simulado, o método de cristalografia.

A questão é : Quais as dimensões que o poliedro fundamental deverá ter? E, para essas

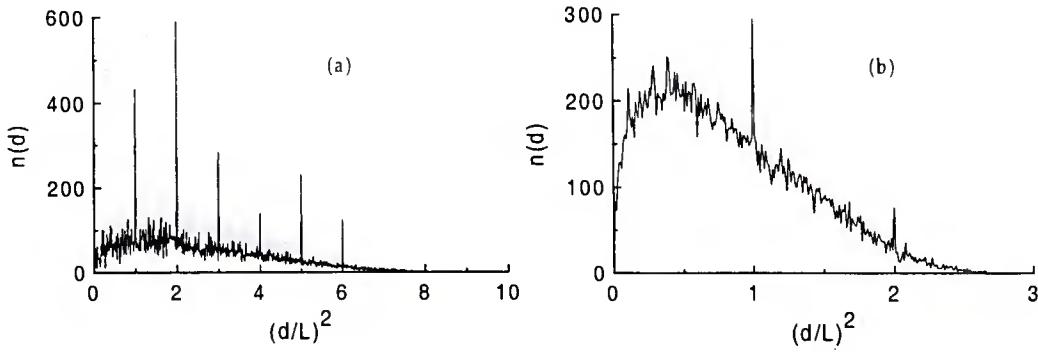


Figura 4.1: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E1: (a) $L = 0.7R_H Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H Mpc$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

dimensões, podemos obter informações sobre a topologia?

Ellis e Schreiber [38] estudaram modelos cosmológicos de seção espacial compacta, euclidiana, e além de fechada também pequena, com dimensões da ordem de 400 Mpc . Com isso eles pretendiam explicar, alternativamente ao modelo inflacionário, a uniformidade observável da distribuição de matéria em larga escala. Em um PF pequeno, com dimensões dessa ordem, não haveria necessidade de homogeneidade no espaço real, já que em larga escala observaríamos um universo homogêneo graças à repetição de imagens das fontes contidas no PF.

No entanto, com as medidas da radiação de fundo obtidas pelo satélite COBE, descobriu-se uma anisotropia na radiação de fundo. Essas observações demonstram que há uma anisotropia com componentes de multipolo em larga escala na radiação de fundo, impondo novos vínculos em uma possível topologia não-trivial do universo. De acordo com essas novas observações, Sokolov [34], usando o momento de quadrupolo, determinou que as dimensões topológicas deveriam ser, no mínimo, da ordem de $0.7R_H$ para E1. Outros autores como Stevens, Scott e Silk [28], de Oliveira-Costa e Smoot [26], de Oliveira-Costa, Smoot e Starobinsky [27] também

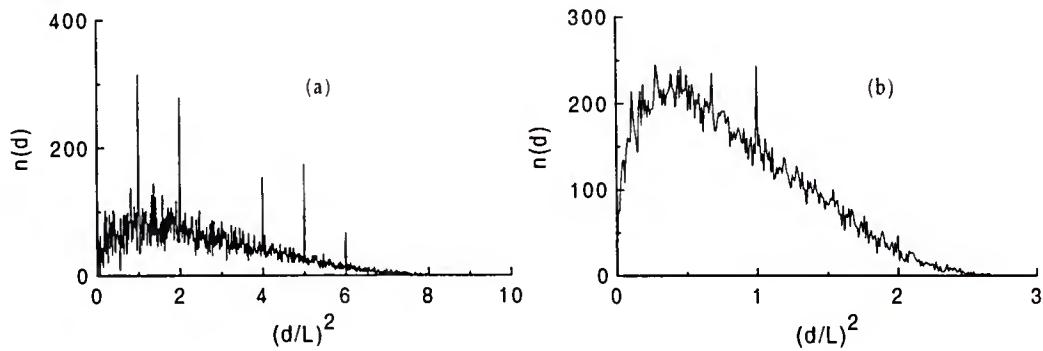


Figura 4.2: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E2: (a) $L = 0.7R_H Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H Mpc$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

estudaram os mapas da radiação de fundo e obtiveram diferentes valores para o tamanho mínimo do PF de $E1$. Os tamanhos variam entre $0.7R_H$, obtido em [34], e o maior deles, $1.2R_H$ obtido em [26].

Levando em conta esses resultados, não haveria sentido considerar as dimensões do PF tão pequenas como propuseram Ellis e Schreiber [38]. Aliás, Fagundes e Wighoski [11] haviam obtido valores da ordem de $3000 Mpc$ para a aresta de $E1$. Alguns dos autores acima concluem daí que não haveria mais interesse em uma topologia cósmica não-trivial.

Em nosso artigo [6], mostramos que mesmo usando altos valores de L (dimensão do PF), podemos, em princípio, observar efeitos originados por imagens múltiplas de fontes cósmicas, caracterizando um universo multiplamente conexo. Assim, nossas simulações usando o método de cristalografia cósmica [2] foram feitas com poliedros fundamentais de dimensões $L = 0.7R_H$ e $L = 1.2R_H$, que são os valores mínimo e máximo acima mencionados.

As Figs. 4.1 a 4.6 mostram os resultados obtidos em nossas simulações. A parte (a) das Figs. 4.1 a 4.6 mostra os resultados para o PF de dimensões $L = 0.7R_H$ com 20 fontes; a parte

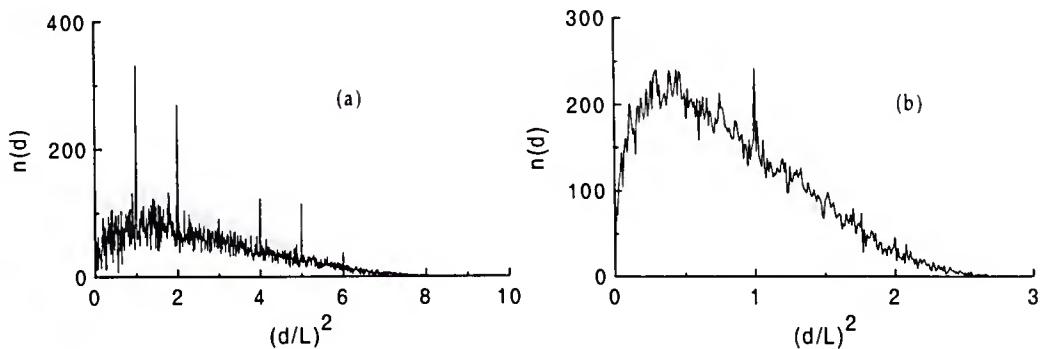


Figura 4.3: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E3: (a) $L = 0.7R_H \text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H \text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

(b) apresenta os resultados para $L = 1.2R_H$ e 100 fontes no interior do PF. Podemos notar que para poliedros menores há picos bastante pronunciados e em números inteiros como previsto para $L_1 = L_2 = L_3$. Já para os PF maiores podemos notar ainda sinais da topologia pela presença de um pico em $d = L$. Em E4, no entanto, o pico em L desaparece porque nenhum dos geradores é uma translação de Clifford (*vide apêndice A*).

A Fig.4.7 mostra o método aplicado a um universo com seção espacial euclidiana e topologia trivial. Podemos notar que não há presença de picos nessa distribuição. As referências [13, 14, 15, 16, 17, 18] investigam a presença de sinais topológicos com base no modelo de cristalografia cósmica.

4.3 Modelo Hiperbólico

Originalmente, como já vimos, o método de cristalografia cósmica [2] foi usado em modelos de universos com seção espacial euclidiana. No entanto, não há nada que impeça que o método

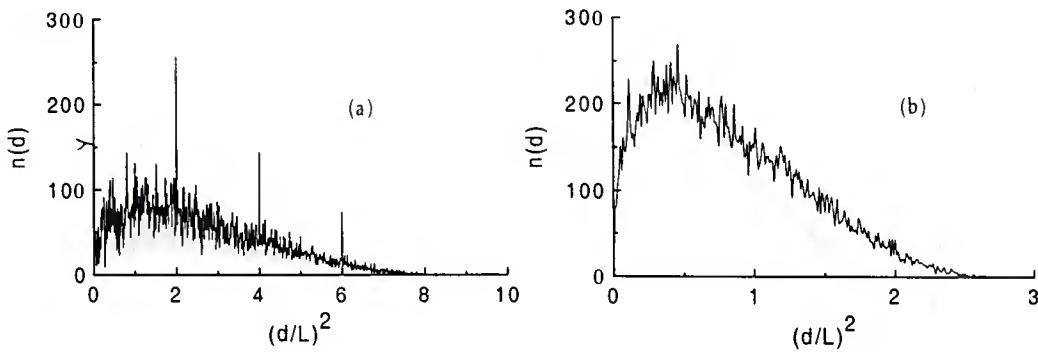


Figura 4.4: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E4: (a) $L = 0.7R_H \text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H \text{Mpc}$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

seja aplicado em modelos de universos com seção espacial hiperbólica ou esférica. Nesta seção mostraremos os resultados do método de cristalografia aplicado a modelos de universos com seção espacial hiperbólica.

4.3.1 O método de cristalografia

Usaremos o modelo hiperbólico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, cuja métrica é escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(d\eta^2 - d\sigma^2 \right), \quad (4.5)$$

onde $a(\eta)$ é o fator de expansão ou raio de curvatura e

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi \right),$$

é a métrica padrão do \mathbf{H}^3 . Assumimos os seguintes valores para os parâmetros cosmológicos: $\Omega_0 = 0.3$, $H_0 = 65 \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, e $\Lambda = 0$. O atual valor do raio de curvatura é $a(\eta_0) = cH_0^{-1}(1 - \Omega_0)^{-1/2} = 5512.62 \text{Mpc}$. Essa métrica admite tanto uma topologia trivial, seção

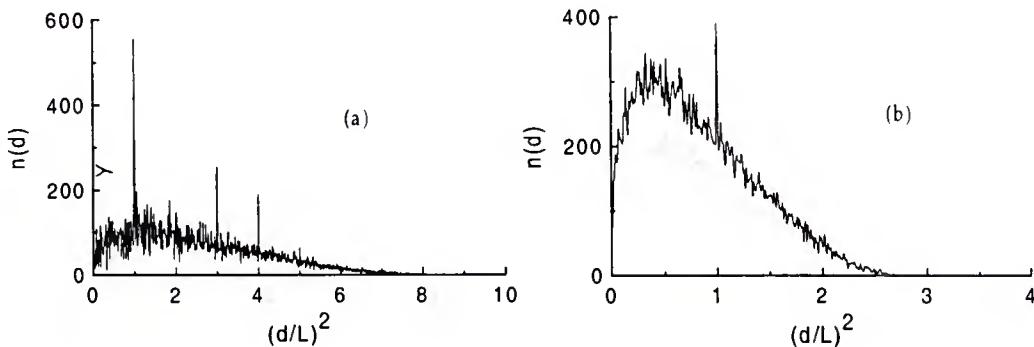


Figura 4.5: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E5: (a) $L = 0.7R_H Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H Mpc$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

espacial com variedade aberta e infinita, como uma topologia não-trivial com variedade M^3 , hiperbólica e fechada.

Simulamos catálogos com variedades hiperbólicas fechadas, assim como com a variedade aberta e infinita. Usamos, em nossas simulações com topologias não-triviais, como variedade M^3 , a segunda das três variedades de Best [35] que tem um icosaedro como PF (vide Fig.2.4). Esse icosaedro é listado com o número v2293(+3,2), nas variedades hiperbólicas, orientáveis e fechadas do programa de computador SnapPea [30]. O PF, um icosaedro em H^3 , tem 20 faces com a forma de um triângulo equilátero, 30 arestas e 12 vértices. A variedade hiperbólica fechada é obtida pela identificação de pares de faces do PF. Essa identificação se obtém pela ação de um grupo Γ de movimentos rígidos em H^3 . O grupo Γ , nesse caso, é formado por 20 geradores (na realidade são 10 geradores e seus inversos). Cada gerador é representado por uma matriz 4×4 (vide Apêndice A) que leva uma face a outra do PF.

O primeiro passo de nossas simulações foi distribuir as fontes de forma homogênea e aleatória no interior do PF. Para isso, tomamos a esfera que circunscreve o icosaedro, cujo

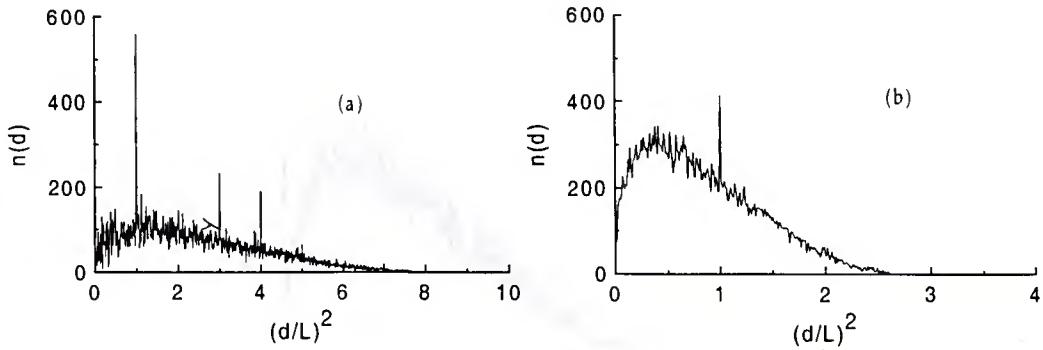


Figura 4.6: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia de E6: (a) $L = 0.7R_H Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc; (b) $L = 1.2R_H Mpc$, 100 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

raio é $\chi_{out} = 1.3826$. No entanto, não podemos simplesmente distribuir as fontes no interior dessa esfera. O caso é similar ao ocorrido no *Capítulo 3*, na distribuição de eixos galácticos. Aqui, para que a distribuição seja homogênea, devemos ter em mente que um elemento de volume no espaço hiperbólico é $dV = \sinh^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi$; portanto, proporcional a $\sinh^2 \chi$ e $\sin \theta$. Se ao gerarmos aleatoriamente nossas fontes não levarmos isso em conta, teremos uma concentração maior de fontes em uma região do PF, do que em outra. Para resolver esse problema definiremos novas coordenadas $u(\chi) = (\sinh \chi \cosh \chi - \chi)/2$, $v(\theta) = -\cos \theta$ e $\phi = \phi$, de tal forma que $du = \sinh^2 \chi d\chi$ e $dv = \sin \theta d\theta$; portanto obtemos $dV = du dv d\phi$. Assim, a densidade de probabilidade de pontos no espaço (u, v, ϕ) é uniforme. Podemos gerar nossos pontos aleatoriamente nessas coordenadas garantindo a homogeneidade.

Geramos 150 fontes (pontos (u, v, ϕ)) no interior da esfera que circunscreve o icosaedro. No entanto, não são todos os pontos gerados que se encontram no interior do PF. Devemos excluir os pontos que estão na esfera, mas não pertencem ao icosaedro. Para isso usaremos uma propriedade do PF (*vide Capítulo 2*, definição de PF, expressão (2.13)):

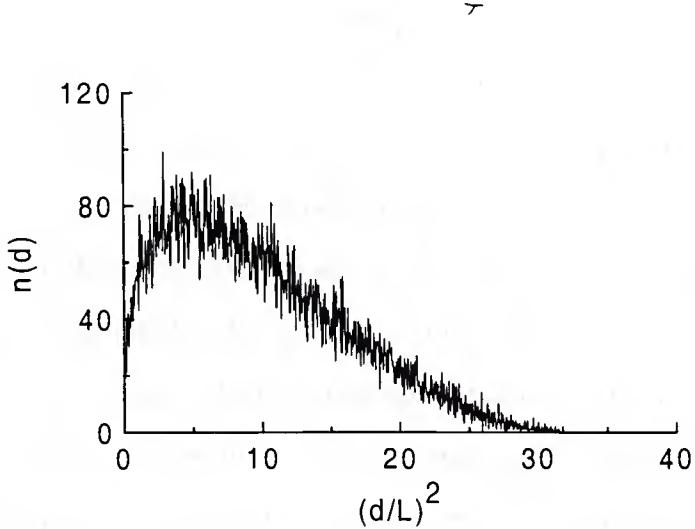


Figura 4.7: Distribuição de distâncias comóveis entre imagens em simulações em universos com a topologia trivial em espaços euclidianos com raio de simulação= 8000Mpc.

Se um ponto pertence ao PF, sua distância ao centro do próprio PF é menor que todas as distâncias desse ponto aos centros dos poliedros obtidos por ação dos, neste caso, 20 geradores de Γ .

Os pontos com distância menor do que o raio da esfera inscrita, $\chi_{in} = 0.8683$, garantidamente estão no interior do PF. Os pontos na região de $0.8683 \leq \chi \leq 1.3826$ são analisados segundo a sua distância ao centro do PF. Cada distância de um ponto p ao centro é comparada à distância de p ao centro dos poliedros gerados pela aplicação dos 20 geradores do grupo Γ . De forma prática, aplicamos os 20 geradores ao ponto central do PF, obtendo uma lista de 20 centros de poliedros ligados por uma face ao PF. Se a distância de p ao centro do PF for menor que sua distância aos outros 20 centros, p está dentro do PF. Excluímos os que não satisfazem essa condição. Das 150 fontes geradas inicialmente, apenas aproximadamente 1/3 delas estão no interior do PF.

Devemos agora preencher inteiramente o espaço até o raio de 12873 Mpc correspondente a um desvio para o vermelho $z = 1300$, que tomamos como a posição da superfície de último espalhamento da radiação cósmica de fundo. O raio de 12873 Mpc corresponde a $\chi = \chi_r = 2.33520$. Para preencher uma região dessa ordem, necessitamos de 92 réplicas do icosaedro, além do próprio PF. Essas 92 réplicas (*vide Apêndice B*) são compostas de 20 geradores (palavras¹ de 1 letra), produzindo réplicas ligadas ao PF por uma face; 60 combinações de geradores (palavras de 2 letras), produzindo réplicas ligadas ao PF por um vértice; 12 combinações de geradores (palavras de 3 letras), produzindo réplicas ligadas ao PF também por um vértice. Esse conjunto de icosaedros cobre, sem buracos, o espaço hiperbólico até um raio $\chi_{\max} = 2.33947$, ligeiramente maior que χ_r .

Aplicamos as 92 palavras de geradores em cada um dos pontos, associados a fontes, no interior do PF, excluindo aquelas imagens com distância maiores que χ_r . Esse será nosso catálogo simulado de imagens (incluindo as fontes) observadas em um universo com constante de curvatura negativa e topologia não-trivial dada por v2293(+3,2).

Nesse catálogo aplicamos o método de cristalografia, calculando as distâncias normalizadas (*vide Apêndice B*) para cada par de imagens e multiplicando-as pelo raio de curvatura atual do universo $a(\eta_0)$. Assim obtemos a distância comóvel, em parsecs, que observaríamos entre as imagens no presente momento. Com a lista de distâncias, agrupamo-as de acordo com o número de ocorrência de cada uma, em intervalos de 100 Mpc. Então plotamos o número de ocorrência de cada distância versus a distância própria em Mpc. O resultado é o que vemos na Fig.4.8.

Criamos também, um catálogo para um universo com topologia trivial. A distribuição das fontes foi feita de forma similar à descrita acima. No entanto, geramos os pontos aleatórios (posição das fontes) (u, v, ϕ) , preenchendo toda a região até o raio correspondente à posição da superfície de último espalhamento, $\chi_r = 2.33520$. A menos desse fato, procedemos exatamente

¹Ver seção 3.2 para definição de palavras.

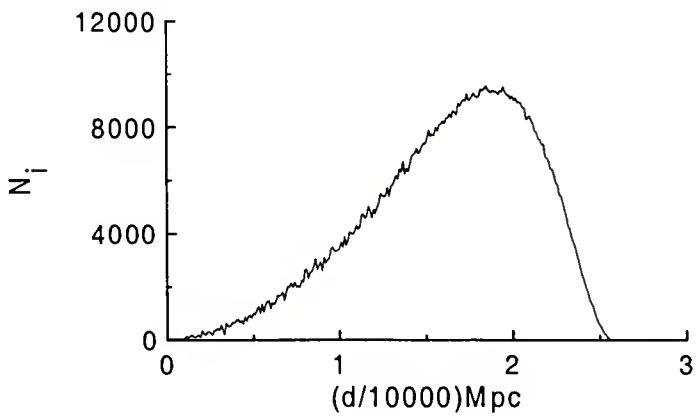


Figura 4.8: Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de v2293.

da mesma forma que anteriormente, tomando o cuidado de gerar o mesmo número de imagens que obtivemos para o universo com topologia não-trivial. O resultado obtido é apresentado na Fig.4.9.

Ao compararmos as Fig.4.8 e Fig.4.9, não vimos nenhuma diferença significante entre elas. Assim, subtraímos os valores da lista que gera a Fig.4.9 dos valores da lista que gera a Fig.4.8. Pretendíamos com isso observar se alguma característica marcante da topologia não-trivial seria vista mais claramente. Observe a Fig.4.10. Em princípio não vimos nada que possa caracterizar a topologia. Ainda assim, uma análise estatística mais detalhada poderia indicar algo. No entanto, não faremos essa análise aqui².

Dois trabalhos feitos simultaneamente ao nosso, por diferentes grupos de trabalho [13, 3], confirmam os resultados das Fig.4.8 e Fig.4.9.

²Depois de preparar esta tese, notei o artigo de A. F. F. Teixeira [18] que nos sugeriu a possibilidade de a Fig.4.10 conter informação topológica.

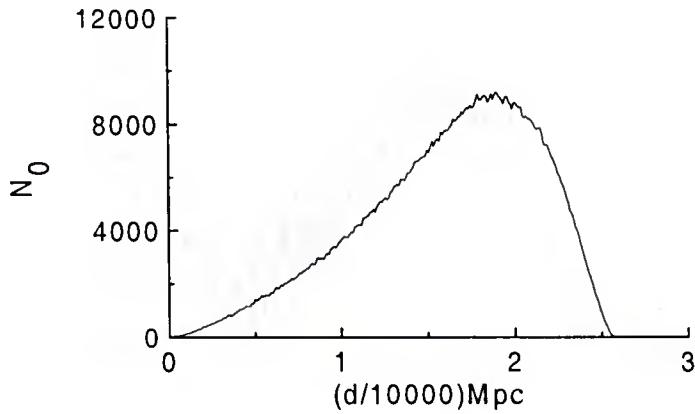


Figura 4.9: Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia trivial no espaço hiperbólico.

4.3.2 Uma variação do método de cristalografia

No método de cristalografia os elementos de Γ levam a posição de cada fonte no interior do PF para posições de imagens no interior de réplicas do PF. Em variedades hiperbólicas uma ação $g \in \Gamma$ sobre um ponto $p \in PF$ depende de p ; portanto não haverá distâncias iguais entre diferentes p 's. Conseqüentemente não teremos picos pronunciados como no caso euclidiano, [13, 3, 7].

Propomos uma variação do método no qual fizemos sucessivas aplicações dos geradores a todas as imagens de um catálogo de forma a trazê-las para o interior do PF. Após isso, calculamos as distâncias entre todas as imagens. Se a topologia for não-trivial deveremos ter uma grande quantidade de posições das imagens superpostas e portanto a distância entre elas é zero ou aproximadamente zero.

Fizemos simulações para dois modelos hiperbólicos compactos, ambos com um icosaedro como PF, mas com diferentes grupos Γ . As variedades são a primeira e a segunda das

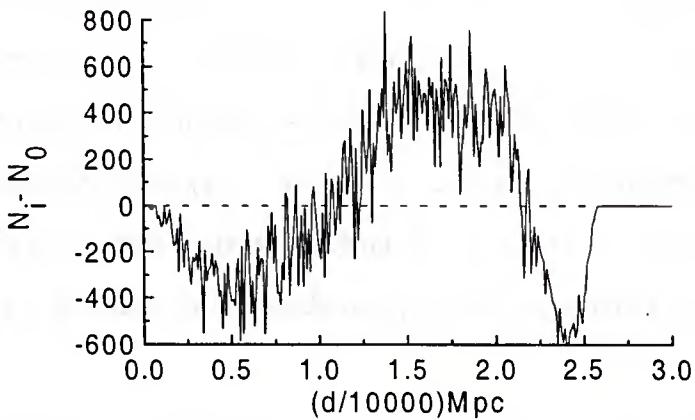


Figura 4.10: Gráfico usando o método de cristalografia para a diferença entre a topologia de v2293 e a trivial no espaço hiperbólico.

variedades de Best [35], listadas no SnapPea [30] como v2051(+3,2) e v2293(+3,2), respectivamente. Listamos os geradores de ambas, assim como algumas de suas propriedades no *Apêndice B*. Tomamos 92 réplicas do PF, ligadas a ele por no mínimo um vértice, para ambas as variedades cobrindo completamente um raio $\chi_{\max} = 2.33947$ em H^3 . (*vide Apêndice B*)

As fontes foram distribuídas no interior do PF exatamente da mesma maneira que fizemos na seção anterior quando aplicamos o método de cristalografia. A mesma mudança de coordenadas foi feita aqui, $(\chi, \theta, \phi) \rightarrow (u, v, \phi)$, garantindo a homogeneidade na distribuição de fontes. Aplicamos as 92 combinações de geradores nas posições das fontes no interior do PF, excluindo aquelas a uma distância ao centro do PF maior que $\chi_r = 2.33520$. χ_r é o raio da esfera, centrada no centro do PF, até a superfície de último espalhamento.

Nosso catálogo cobre o universo até a superfície de último espalhamento considerando que nós, observadores, estamos na posição $(0, 0, 0)$ em coordenadas (χ, θ, ϕ) . Esse também é o

ponto base no cálculo das coordenadas do PF. Provavelmente, no entanto, seria uma coincidência se estivéssemos no centro do PF. Dessa forma deslocamos o observador para o ponto $(0.1, 0, 0)$, mas mantivemos o ponto base do PF em $(0, 0, 0)$. Em coordenadas de Klein esse ponto corresponde a um deslocamento de $\delta = \tanh^{-1} 0.1 = 0.100335$ do centro do PF. Nesse caso o raio de nosso catálogo será $\chi_n = \chi_r - \delta = 2.23486$. Simulamos catálogos com o observador posicionado em ambos os pontos acima, $(0, 0, 0)$ e $(0.1, 0, 0)$, e em ambos os casos usamos χ_n como raio do catálogo, de modo que possamos comparar os resultados de cada simulação.

Nossas primeiras simulações foram feitas com as variedades na mesma orientação e ponto base dadas no SnapPea [30],(o ponto base no centro do PF). Seja i uma imagem em nosso catálogo e p sua pré-imagem no interior do PF: se $i = g(p)$, então $p = g^{-1}i$, $g \in \Gamma$, ou seja, aplicamos no catálogo os inversos dos movimentos. Os geradores são aplicados sucessivamente a um ponto do catálogo e a cada aplicação usamos a definição de PF para verificar se o ponto resultante está no interior do PF ou não. Se o ponto estiver no PF, ele é registrado, se não continuamos aplicando os geradores inversos. Quando conseguimos que todas as imagens do catálogo estivessem no interior do PF, calculamos as distâncias entre todas elas. Essas distâncias são agrupadas pelo número de ocorrências de cada uma em intervalos de 100 Mpc. Plotamos o número de ocorrências de cada distância, $n(d)$, em percentagem, por cada distância. Obtemos, como mostrado na Fig.4.11(a), um forte pico em zero. Isso ocorre, pois quando as imagens de uma mesma fonte são puxadas para o PF e a topologia é não-trivial, as imagens se superpõem na posição da fonte.

Geramos um catálogo de fontes aleatórias para o modelo de universo de FLRW aberto, com topologia trivial. Esse catálogo estende-se até χ_n . Como aqui não há PF nem geradores, usamos os geradores e o PF das variedades v2051(+3,2) e v2293(+3,2) para puxar as imagens para o interior do PF imaginário. Fizemos isso, pois uma vez que tenhamos um catálogo real do universo, não saberemos se sua topologia é trivial ou não. Assim, se o catálogo real pertencer

a uma das variedades acima, ao aplicarmos o método a todas as suas imagens, obteremos uma distribuição similar à da Fig.4.11(a), caso contrário obteremos algo como a Fig.4.11(b).

Similarmente ao que já fizemos em outras ocasiões, subtraímos os dados da Fig.4.11(b) dos da Fig.4.11(a). O resultado é mostrado na Fig. 4.11(c).

Ao movermos o observador de $(0, 0, 0)$ para $(0.1, 0, 0)$, geramos um novo catálogo com uma distância máxima χ_n ao novo centro. O procedimento foi o mesmo que descrevemos acima e os resultados foram praticamente iguais. Dessa forma, não precisamos nos preocupar com o privilégio que damos ao colocarmos o observador no ponto base do PF, $(0, 0, 0)$.

Agora vamos supor que o PF tem uma orientação diferente daquela dada no SnapPea [30]. As fontes foram geradas aleatoriamente para que estejam dentro do PF com a orientação do SnapPea, que chamaremos de PF1. Essas fontes são distribuídas de forma a cobrir o universo até χ_n , segundo os geradores do espaço de recobrimento do PF1 (geradores obtidos no SnapPea). Supomos então, que nosso universo não seja representado exatamente pelo PF1, mas sim por um PF2, que é o PF1 após sofrer uma rotação. Nesse caso nosso catálogo não irá mudar, mas algumas fontes em PF1 serão imagens com relação a PF2 e vice-versa. Iremos puxar as imagens do catálogo gerado com PF1 para o interior do PF2. Procuramos com isso verificar se será possível identificar a topologia mesmo se o PF estiver orientado de forma diferente do que usamos.

Representamos H^3 como um hiperbolóide $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 1$, imerso no espaço de Minkowski (*vide Apêndice B*). Os movimentos rígidos em H^3 , os elementos $g \in \Gamma$, são matrizes de transformações de Lorentz 4x4 no espaço de Minkowski $\{(X_0, X_1, X_2, X_3)\}$. A rotação no PF é feita usando os ângulos de Euler ϕ, θ, ψ , correspondentes à matriz $R_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, \dots, 3$), onde $R_{0\nu} = R_{\nu 0} = \delta_{\nu 0}$ e $R_{ij} = R_{ij}(\phi, \theta, \psi)$ é a matriz rotação 3x3 dada em [39]. Os geradores g_k , $k = 1, \dots, 20$, de nossas variedades, listados no *Apêndice B*, serão dados por $g'_k = R g_k R^{-1}$ para as variedades giradas.

Aplicamos os geradores girados da mesma forma que fizemos para os geradores não gi-

rados até que todas as imagens estejam no interior do PF2. As distâncias entre todas as fontes e imagens são calculadas e plotamos $n(d)$, em percentagem, versus distância. Desse resultado subtrai-se a lista de $n(d)$, em percentagem, de um universo com topologia trivial (gerado da mesma forma que anteriormente). As imagens puxadas para o PF girado, PF2, usando os novos geradores, não coincide com as fontes dentro de PF2. Por causa disso, o pico próximo a distância zero tende a desaparecer quando aumentamos o ângulo de rotação. Calculamos a diferença entre as variedades giradas e o modelo aberto, para os ângulos $(\phi, \theta, \psi) = (2^\circ, 0, 0), (0, 5^\circ, 0), (150^\circ, 100^\circ, 60^\circ)$; os resultados são mostrados na Fig.4.12. O pico é bastante visível no primeiro gráfico, bem menor no segundo, e no terceiro fica completamente diluído.

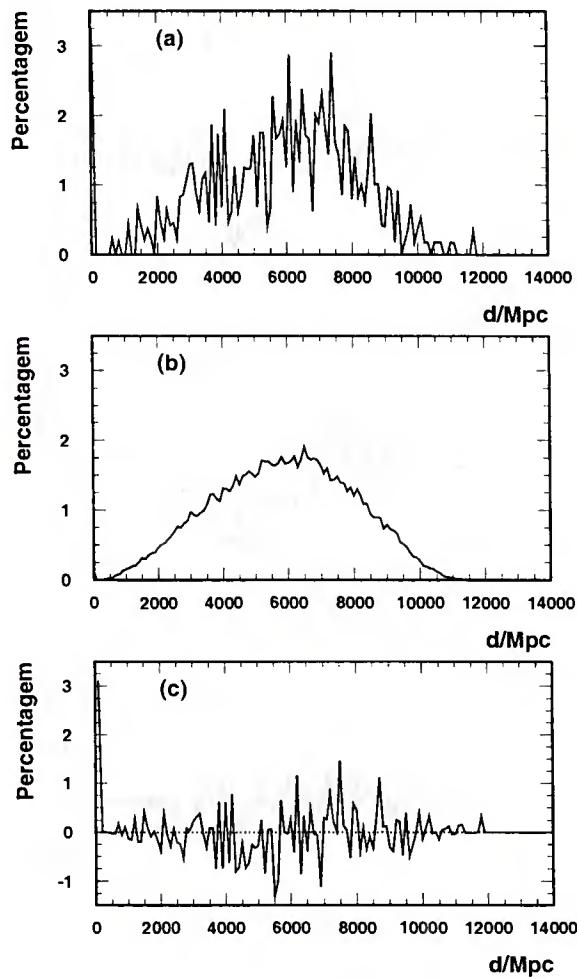


Figura 4.11: Variação do método de cristalografia aplicado a modelos hiperbólicos (a) corresponde a v2293 com observador no centro do PF; (b) distribuição para topologia trivial; (c) diferença entre (a) e (b).

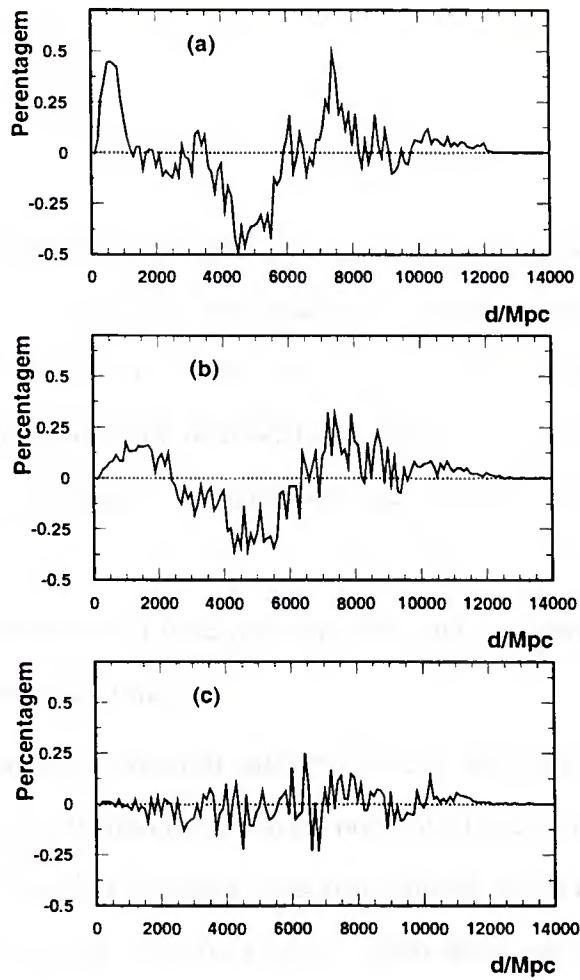


Figura 4.12: Diferença entre v2293 com diferentes orientações do PF e o modelo com topologia trivial; (a) rotação de $(2^\circ, 0, 0)$; (b) rotação de $(0, 5^\circ, 0)$; (c) rotação de $(150^\circ, 100^\circ, 60^\circ)$.

5

Conclusão

Por muito tempo desconsiderou-se a hipótese de nosso universo possuir uma topologia não-trivial. No entanto, não há nada (física, matemática ou observationalmente) que impeça essa possibilidade. Assim, é crescente o número de pesquisadores que hoje procuram investigar diferentes variedades compatíveis com os modelos de universo que temos, métodos que possibilitem obter informações topológicas e, finalmente, dados observacionais mais precisos a fim de testar esses métodos.

Nesse trabalho nos dedicamos a investigar métodos que possam auxiliar na obtenção de informações sobre a topologia do universo.

Analisamos, primeiramente, a possibilidade de usar raios de luz polarizada de fontes cósmicas como meio de observar sinais da topologia, não foi possível chegarmos a nenhum resultado. Estou planejando para o futuro uma pesquisa mais aprofundada dessa questão. Então, voltamos nossa atenção a direções reais de galáxias espirais, analisando sua distribuição em universos com topologias não-triviais. Os resultados nesse caso foram bons, possibilitando identificar tal topologia. Ainda não conseguimos, no entanto, esclarecer se os sinais da topologia são vistos somente na amplitude dos picos em zero grau ou se há alguma informação no restante da distribuição.

Usamos, também, o método de cristalografia cósmica (desenvolvido por R. Lehoucq, M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet) mostrando que para universos com seção espacial euclidiana com

poliedro fundamental de tamanho da ordem do raio do universo observável, ainda obtemos sinais da topologia não-trivial. Aplicamos esse método também a universos hiperbólicos sem, no entanto, obtermos aparentes sinais da topologia. Assim, desenvolvemos uma variação do método com a qual obtivemos melhores resultados. Entretanto essa variação necessita várias aplicações do método, usando várias topologias, a um catálogo real. Isso porque ele apresenta sinais da topologia somente quando aplicamos o método usando a topologia certa.

É certo que todos esses métodos merecem uma análise ainda mais profunda, principalmente no sentido de verificar se não existem sinais topológicos que tenham passado desapercebidos por nós. Devemos salientar que qualquer método destinado a obter informações topológicas deve levar em conta sua aplicação a dados observacionais com todas as dificuldades vindas desse fato. É provável, também, que um único método não seja capaz de nos dizer qual a exata topologia do universo, seja ela trivial ou não. No entanto, a soma de vários métodos aliados aos avanços na obtenção de dados observacionais devem ser úteis na busca de uma conclusão para o problema.

Apêndice A

Apêndice A.1

Este apêndice contém o resultado da análise de sensibilidade realizada para a estimativa da taxa de variação da taxa de inflação. A estimativa da taxa de variação da taxa de inflação é obtida a partir da equação:

$$\hat{\pi}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \pi_{t-1} + \hat{\gamma} \pi_{t-2} + \hat{\delta} \pi_{t-3} + \hat{\epsilon}_t$$

Onde:

- $\hat{\pi}_t$: Taxa de variação da taxa de inflação estimada;
- $\hat{\alpha}$: Intercepto estimado;
- $\hat{\beta}$: Coeficiente estimado da taxa de inflação no período anterior;
- $\hat{\gamma}$: Coeficiente estimado da taxa de inflação no período anterior a dois anos;
- $\hat{\delta}$: Coeficiente estimado da taxa de inflação no período anterior a três anos;
- $\hat{\epsilon}_t$: Resíduo estimado.

Apêndices

Apêndice A

E1 recobre E4

Gomero et al. em [13] afirmam que os picos obtidos pelo método de cristalografia cósmica, através dos histogramas de separação de pares, ocorrem somente graças a translações de Clifford (translações geradas por movimentos que agindo em um ponto $p \in PF$ são tais que a distância de p a sua imagem independe de p).

Além disso, sabemos que $E1$ é recobrimento de qualquer variedade tridimensional, compacta e euclidiana. Devemos ilustrar o fato e suas consequências para o método de cristalografia. Para isto, usaremos $E4$ e seus geradores (vide [7], por exemplo)

$$a(x, y, z) = (x + L, -y, -z), \quad (\text{A.1})$$

$$b(x, y, z) = (-x, z + L, y),$$

$$c(x, y, z) = (-x, z, y + L).$$

Combinando esses geradores, obtemos “palavras” (combinações de geradores formam palavras) de duas letras iguais aos geradores de $E1$ com poliedro fundamental de dimensões $L_1 = L_2 = L_3 = 2L$,

$$aa(x, y, z) = (x + 2L, y, z), \quad (\text{A.2})$$

$$bc(x, y, z) = (x, y + 2L, z),$$

$$cb(x, y, z) = (x, y, z + 2L),$$

ou ainda, as palavras a^2 , b^2 e $c^{-1}b$

$$\begin{aligned} aa(x, y, z) &= (x + 2L, y, z), \\ bb(x, y, z) &= (x, y + L, z + L), \\ c^{-1}b(x, y, z) &= (x, y - L, z + L), \end{aligned} \tag{A.3}$$

com PF de dimensões $L_1 = 2L$ e $L_2 = L_3 = L\sqrt{2}$. Esse último é o menor tritoro que recobre $E4$. Note que vamos analisar se $E1$ é mesmo recobrimento de $E4$ em somente duas dimensões. Isso será feito para facilitar a vizualização do problema, pois fica mais fácil inferir sobre três dimensões após provar em duas.

Na Fig.A.1 o quadrado $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$ representa a base do PF de $E4$ com volume $V = L^3$ e o quadrado \mathbf{ACIG} representa a base do PF de $E1$ com volume $V = 8L^3$. A Fig.A.2 mostra novamente a base do poliedro fundamental de $E4$ no quadrado \mathbf{abcd} e no losângulo \mathbf{ABCD} temos a base de $E1$, com volume $V = 4L^3$, assim como alguns pontos, identificados por letras, que ajudarão a ilustrar os movimentos.

Usando os dois conjuntos de palavras que geram os dois poliedros de $E1$ (expressões (A.2) e (A.3)) a partir de $E4$ (expressão (A.1)) podemos notar que $bc(ADG) = CFI$, $cb(GHI) = ABC$ (expressão (A.2)) na Fig.A.1 e $bb(AdD) = BbC$, $c^{-1}b(DcC) = AaB$ (expressão (A.3)) na Fig.A.2, isto é, os lados dos poliedros são associados como em $E1$.

Já para mostrar que $E1$ é recobrimento de $E4$ devemos ter em mente a definição de espaço de recobrimento [19]:

“ \widetilde{M} será um espaço (variedade) de recobrimento de M com mapa de recobrimento π se é conexo e se cada $p \in M$ tem uma vizinhança conexa U tal que $\pi^{-1}(U) = \cup \widetilde{U}_\alpha$, uma união de componentes abertos de \widetilde{U}_α , com a propriedade que $\pi|_{\widetilde{U}_\alpha}$, a restrição de π a \widetilde{U}_α , é um difeomorfismo em U . ”

Usaremos, para demonstrar que $E1$ é recobrimento de $E4$, o menor $E1$ obtido a partir de $E4$. Considere na Fig.A.2 o ponto p' e sua vizinhança U' contidos na região (1). Pela definição,

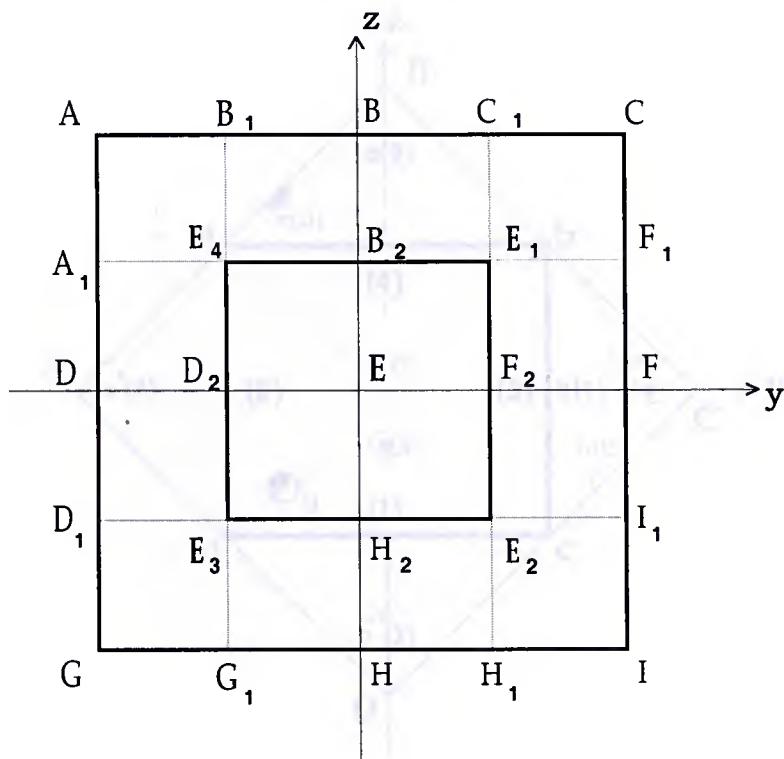


Figura A.1: Esta figura representa E1 como recobrimento de E4.

para que E1 seja recobrimento de E4, $\pi^{-1}(U') = \cup \tilde{U}_\alpha$, ou seja, em nosso caso temos:

$$\begin{aligned} [\tilde{U}_0 \approx U'] &\subset (1), \\ [\tilde{U}_1 \approx b(U')] &\subset b(1), \end{aligned}$$

onde $U' \in [E4 = M]$ e $\tilde{U}_\alpha \in [E1 = \tilde{M}]$ para $\alpha = 0, 1$; então

$$\pi|_{\tilde{U}_0} = I : \tilde{U}_0 \longrightarrow U',$$

$$\pi|_{\tilde{U}_1} = b^{-1} : \tilde{U}_1 \longrightarrow U'.$$

O mesmo ocorre nas regiões (2), (3) e (4). Agora, se considerarmos p na linha \overline{do} com vizinhança $U \subset [(1) \cup (2)]$ e $U \cap \overline{do} \neq \emptyset$ já que $p \in \overline{do}$, temos que

$$[\tilde{U}_0 \approx U] \subset [(1) \cup (2)],$$

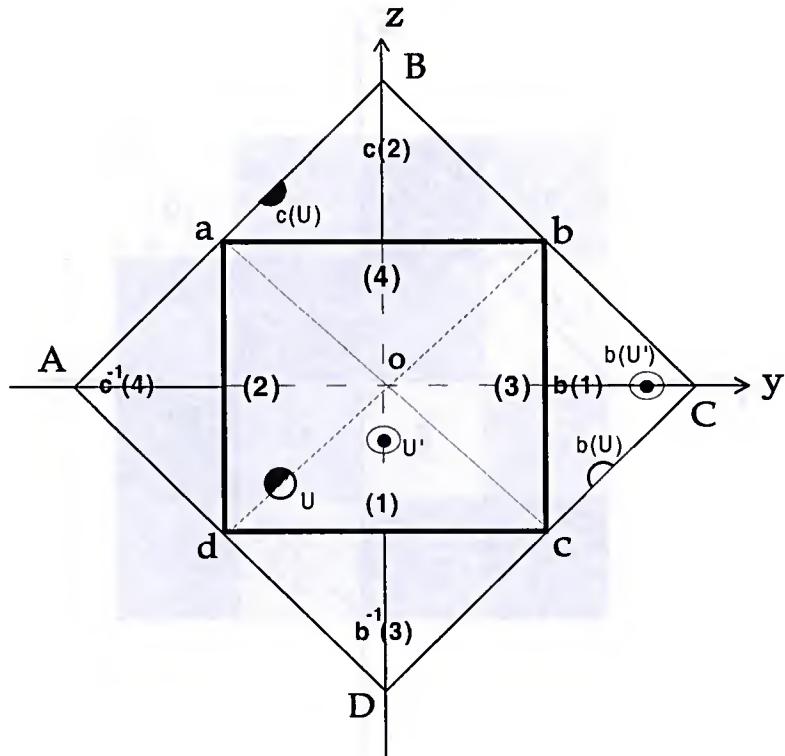


Figura A.2: As menores dimensões de E1 que recobrem E4.

$$[\tilde{U}_1 \approx b((1) \cap U) \cup c((2) \cap U)] \subset [c(2) \cup b(1)].$$

Note que \tilde{U}_1 é um disco, pois $c(2) \cup b(1) \approx aB \approx cC$, e assim

$$\begin{aligned} \pi|_{\tilde{U}_0} &= I : \tilde{U}_0 \longrightarrow U, \\ \pi|_{\tilde{U}_1} &= \begin{cases} c^{-1}(\tilde{U}_1) \text{ se } \tilde{U}_1 \in (2) \\ b^{-1}(\tilde{U}_1) \text{ se } \tilde{U}_1 \in (1) \end{cases} : \tilde{U}_1 \longrightarrow U. \end{aligned}$$

Isto mostra que E1 é espaço de recobrimento de E4.

A Fig.A.3 também tenta ilustrar esse fato. Os polígonos são representados como se juntassemos as Fig.A.1 e Fig.A.2 e com quatro cores base em E4, que através dos movimentos, são espalhadas formando E1 menor ($V = 4L^3$) e E1 maior ($V = 8L^3$). Podemos ver, pela Fig.A.3, que E1 menor tem seus lados associados juntando cores iguais, por exemplo, as diagonais de

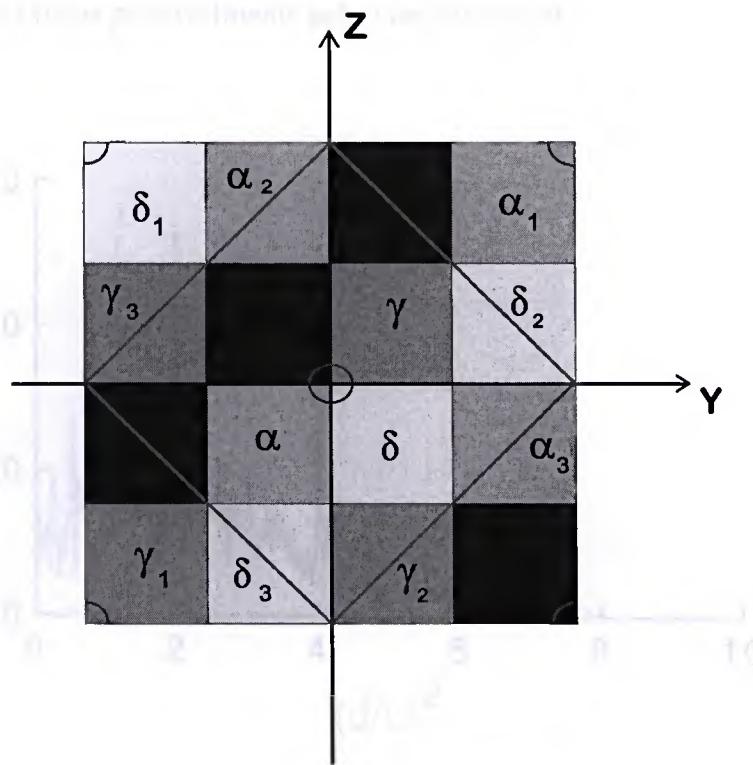


Figura A.3: Figura representando o recobrimento de $E4$ por $E1$.

α_2 e α_3 são identificadas em $E1$. Em $E1$ maior as associações de lados opostos ocorrem com diferentes cores, mas que são ligadas por uma aresta em $E4$, por exemplo, as arestas externas de β_3 e γ_2 correspondem à aresta comum de β e γ , e portanto são identificadas. Além disto, é possível verificar que $E1$ recobre $E4$, assim como que $E1$ maior recobre $E1$ menor.

As outras variedades euclidianas fechadas também são recobertas por $E1$. Graças a isso, o método de cristalografia apresenta seus picos pronunciados para qualquer das variedades $E1 - E6$, como observaram Gomero et al. [13]. A variedade euclidiana $E4$ sendo recoberta por $E1$, apresenta picos por causa de $E1$.

Nas Fig.A.4 e Fig.A.5 mostramos o método de cristalografia aplicado à $E4$ com dimensões $L_1 = L_2 = L_3 = L$ e a $E1$ menor (com dimensões $L_1 = 2L$ e $L_2 = L_3 = L\sqrt{2}$) e notamos que os picos ocorrem nas mesmas posições nos caso de $(d/L)^2 = 2$ e $(d/L)^2 = 4$. Em $(d/L)^2 = 6$

a Fig.A.4 não apresenta picos provavelmente pelo tamanho do PF.

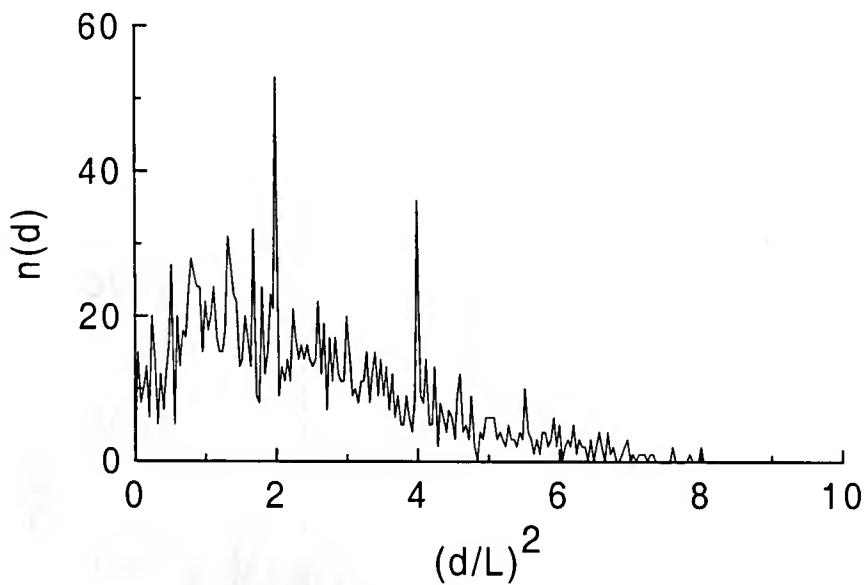


Figura A.4: Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de E1. com dimensões: $L_1 = 11200 Mpc$, $L_2 = L_3 = 7920 Mpc$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

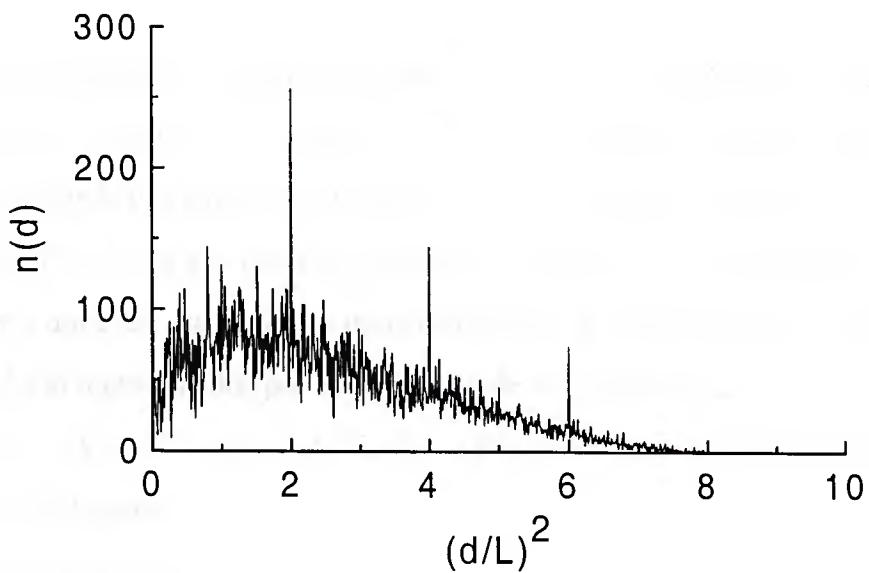


Figura A.5: Gráfico usando o método de cristalografia para a topologia de E4, com dimensões: $L_1 = L_2 = L_3 = 5600\text{Mpc}$, 20 fontes, raio de simulação= 8000Mpc.

Apêndice B

Algumas propriedades do espaço hiperbólico

Neste apêndice listaremos os geradores de movimentos rígidos Γ das duas variedades hiperbólicas usadas na tese, v2293(+3,2) e v2091(+3,2), de acordo com a notação do SnapPea [30]. O poliedro fundamental (PF) em ambos os casos é um icosaedro regular em H^3 . Esses movimentos rígidos em H^3 são tais que movem o PF para réplicas de si mesmo através de uma correspondência um a um entre esta ação e a transformação de Lorentz do espaço de Minkowski. Os pontos em H^3 são representados por coordenadas de Minkowski, X_m , $m = 0, \dots, 3$, sujeitos às condições $+X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 1$, $X_0 \geq 1$. Os geradores abaixo listados são matrizes 4x4 dadas nessas coordenadas.

Geradores de v2293(+3,2):

$$g_{01} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.196110062464 & 2.477094116569 & 0.03086930421046 \\ -0.1870224957019 & 0.3698429312562 & -0.3888091161172 & -0.8643038188753 \\ -2.16577814099 & -0.550041771044 & -2.297695293219 & 0.3296139341984 \\ -1.685839579534 & -1.411151847901 & -1.305916947239 & -0.3811646324125 \end{pmatrix}$$

$$g_{02} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.1870224957019 & 2.16577814099 & 1.685839579534 \\ -1.196110062464 & 0.3698429312562 & -0.550041771044 & -1.411151847901 \\ -2.477094116569 & -0.3888091161172 & -2.297695293219 & -1.305916947239 \\ -0.03086930421046 & -0.8643038188753 & 0.3296139341984 & -0.3811646324125 \end{pmatrix}$$

$$g_{03} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.682558543375 & 1.815850827583 & 1.199712456339 \\ -2.537381475268 & 1.346609490765 & -1.995245012356 & -1.282164174777 \\ -1.053602033012 & 1.415003253723 & -0.3020197982498 & -0.1289460250919 \\ 0.1387280173956 & -0.1241447671841 & -0.4744424202861 & 0.8824612906096 \end{pmatrix}$$

$$g_{04} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.537381475268 & 1.053602033012 & -0.1387280173956 \\ 1.682558543375 & 1.346609490765 & 1.415003253723 & -0.1241447671841 \\ -1.815850827583 & -1.995245012356 & -0.3020197982498 & -0.4744424202861 \\ -1.199712456339 & -1.282164174777 & -0.1289460250919 & 0.8824612906096 \end{pmatrix}$$

$$g_{05} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.828935603484 & 1.910899829885 & -0.755700903973 \\ 0.521423376082 & -1.102258987503 & -0.2177604741311 & 0.0974055311563 \\ 0.7987237219073 & -0.5307852549926 & 0.2671715829393 & -1.133510450896 \\ -2.580268500903 & 1.687690012782 & -2.129022752586 & 0.5260704101887 \end{pmatrix}$$

$$g_{06} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.521423376082 & -0.7987237219073 & 2.580268500903 \\ 1.828935603484 & -1.102258987503 & -0.5307852549926 & 1.687690012782 \\ -1.910899829885 & -0.2177604741311 & 0.2671715829393 & -2.129022752586 \\ 0.755700903973 & 0.0974055311563 & -1.133510450896 & 0.5260704101887 \end{pmatrix}$$

$$g_{07} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.9046434946217 & 0.5498822032844 & 2.539070138449 \\ 1.196110062464 & 1.054574327793 & 0.7917448789244 & 0.8316804166177 \\ 2.477094116569 & 0.5518504164179 & 0.2771009283465 & 2.598975077939 \\ 0.03086930421053 & 0.6338090859406 & -0.773773584258 & -0.02265826176451 \end{pmatrix}$$

$$g_{08} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.196110062464 & -2.477094116569 & -0.03086930421053 \\ -0.9046434946217 & 1.054574327793 & 0.5518504164179 & 0.6338090859406 \\ -0.5498822032844 & 0.7917448789244 & 0.2771009283465 & -0.773773584258 \\ -2.539070138449 & 0.8316804166177 & 2.598975077939 & -0.02265826176451 \end{pmatrix}$$

$$g^{09} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.521423376082 & 0.7987237219072 & -2.580268500903 \\ -2.357245229757 & -0.9742837210134 & -0.7829697200593 & 2.234800823709 \\ 0.1374804329214 & 0.1124658787258 & -0.9128809944435 & -0.4158131618197 \\ -1.411425348774 & 0.5567809212029 & -0.4376828662301 & 1.578147721082 \end{pmatrix}$$

$$g^{10} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.357245229757 & -0.1374804329214 & 1.411425348774 \\ -0.521423376082 & -0.9742837210134 & 0.1124658787258 & 0.5567809212029 \\ -0.7987237219072 & -0.7829697200593 & -0.9128809944435 & -0.4376828662301 \\ 2.580268500903 & 2.234800823709 & -0.4158131618197 & 1.578147721082 \end{pmatrix}$$

$$g^{11} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.682558543375 & -1.815850827583 & -1.199712456339 \\ -1.828935603484 & -1.569008804673 & 1.356316735471 & 0.2088581471535 \\ 1.910899829885 & 0.7067747035312 & -1.556693276459 & -1.314805583092 \\ -0.7557009039729 & -0.9325685718439 & -0.1855402493899 & 0.8166850867567 \end{pmatrix}$$

$$g^{12} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.828935603484 & -1.910899829885 & 0.7557009039729 \\ -1.682558543375 & -1.569008804673 & 0.7067747035312 & -0.9325685718439 \\ 1.815850827583 & 1.356316735471 & -1.556693276459 & -0.1855402493899 \\ 1.199712456339 & 0.2088581471535 & -1.314805583092 & 0.8166850867567 \end{pmatrix}$$

$$g^{13} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.120402171327 & -0.01631208339973 & 1.752499930265 \\ 0.9046434946216 & -0.3446362027779 & 0.6989802561647 & 1.100469146132 \\ 0.5498822032845 & -0.947848573793 & 0.5952167494787 & -0.2228688847454 \\ 2.539070138449 & -2.116344569549 & -0.3967489214816 & 1.676470436424 \end{pmatrix}$$

$$g^{14} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.9046434946216 & -0.5498822032845 & -2.539070138449 \\ 2.120402171327 & -0.3446362027779 & -0.947848573793 & -2.116344569549 \\ 0.01631208339973 & 0.6989802561647 & 0.5952167494787 & -0.3967489214816 \\ -1.752499930265 & 1.100469146132 & -0.2228688847454 & 1.676470436424 \end{pmatrix}$$

$$g_{15} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.1870224957019 & -2.16577814099 & -1.685839579534 \\ 0.04982056272834 & 0.2115860299549 & -0.6529903951466 & 0.7289149362201 \\ -2.319570657311 & -0.3524449462522 & 1.890691691163 & 1.63752115195 \\ 1.478085699506 & -0.930586549273 & -1.299801303585 & -0.7932607267434 \end{pmatrix}$$

$$g_{16} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.04982056272834 & 2.319570657311 & -1.478085699506 \\ 0.1870224957019 & 0.2115860299549 & -0.3524449462522 & -0.930586549273 \\ 2.16577814099 & -0.6529903951466 & 1.890691691163 & -1.299801303585 \\ 1.685839579534 & 0.7289149362201 & 1.63752115195 & -0.7932607267434 \end{pmatrix}$$

$$g_{17} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.357245229757 & 0.1374804329213 & -1.411425348774 \\ 2.537381475268 & -2.366650084223 & 0.4968671119867 & -1.261108719701 \\ 1.053602033012 & -0.8995445086323 & -0.8459360630452 & -0.7650418930992 \\ -0.1387280173956 & -0.3826122437245 & -0.2375207774106 & 0.9035691528936 \end{pmatrix}$$

$$g_{18} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.537381475268 & -1.053602033012 & 0.1387280173956 \\ 2.357245229757 & -2.366650084223 & -0.8995445086323 & -0.3826122437245 \\ -0.1374804329213 & 0.4968671119867 & -0.8459360630452 & -0.2375207774106 \\ 1.411425348774 & -1.261108719701 & -0.7650418930992 & 0.9035691528936 \end{pmatrix}$$

$$g_{19} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.120402171327 & 0.01631208339967 & -1.752499930265 \\ -0.04982056272836 & 0.1483332188142 & -0.9571194062623 & 0.2537750713187 \\ 2.319570657311 & 2.232180037465 & 0.1559446338399 & -1.171947774339 \\ -1.478085699506 & -0.70105271179 & 0.2446830549862 & 1.622773130471 \end{pmatrix}$$

$$g_{20} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.04982056272836 & -2.319570657311 & 1.478085699506 \\ -2.120402171327 & 0.1483332188142 & 2.232180037465 & -0.70105271179 \\ -0.01631208339967 & -0.9571194062623 & 0.1559446338399 & 0.2446830549862 \\ 1.752499930265 & 0.2537750713187 & -1.171947774339 & 1.622773130471 \end{pmatrix}$$

Geradores de v2091(+3,2):

$$g_{01} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.477717325266 & 1.175712839665 & 0.2150433271122 \\ -1.749954132618 & -1.757524433149 & -0.7664746148125 & 0.6212600083691 \\ 1.225337629739 & 1.480397940837 & -0.1663812630297 & 0.5312170167934 \\ 1.733157720662 & 1.363309556767 & 1.329336158206 & 0.6148887018037 \end{pmatrix}$$

$$g_{02} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.749954132618 & -1.225337629739 & -1.733157720662 \\ -2.477717325266 & -1.757524433149 & 1.480397940837 & 1.363309556767 \\ -1.175712839665 & -0.7664746148125 & -0.1663812630297 & 1.329336158206 \\ -0.2150433271122 & 0.6212600083691 & 0.5312170167934 & 0.6148887018037 \end{pmatrix}$$

$$g_{03} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.477717325266 & -1.175712839665 & -0.2150433271122 \\ -0.1946556456187 & 0.1432850342659 & -0.00183237791719 & 1.008641096584 \\ 2.670881531187 & -2.463459217663 & -1.42713814564 & -0.1680879228558 \\ -0.6293873877053 & 1.024656637997 & -0.5878554558763 & -0.02516388300055 \end{pmatrix}$$

$$g_{04} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.1946556456187 & -2.670881531187 & 0.6293873877053 \\ 2.477717325266 & 0.1432850342659 & -2.463459217663 & 1.024656637997 \\ 1.175712839665 & -0.00183237791719 & -1.42713814564 & -0.5878554558763 \\ 0.2150433271122 & 1.008641096584 & -0.1680879228558 & -0.02516388300055 \end{pmatrix}$$

$$g_{05} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.1081591269244 & 1.495793002437 & 2.306194344572 \\ -1.937103954345 & -0.2157179937455 & -0.5329535194582 & -2.102807176897 \\ 1.951582280297 & -0.01105772092309 & 1.717227458099 & 1.363701206542 \\ -0.0811315666381 & 0.9823654466233 & 0.06698588946252 & -0.1924924699789 \end{pmatrix}$$

$$g_{06} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.937103954345 & -1.951582280297 & 0.0811315666381 \\ -0.1081591269244 & -0.2157179937455 & -0.01105772092309 & 0.9823654466233 \\ -1.495793002437 & -0.5329535194582 & 1.717227458099 & 0.06698588946252 \\ -2.306194344572 & -2.102807176897 & 1.363701206542 & -0.1924924699789 \end{pmatrix}$$

$$g_{07} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.4324542439964 & 1.631502117525 & -2.172282584098 \\ 1.069386454541 & 0.5274330489294 & -0.03900052313482 & -1.365240172002 \\ 2.389188265763 & -0.04350688323131 & 1.718442964555 & -1.937338766954 \\ 0.8460611676457 & 0.9523330316433 & 0.8409708058283 & -0.3188250303592 \end{pmatrix}$$

$$g_{08} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.069386454541 & -2.389188265763 & -0.8460611676457 \\ -0.4324542439964 & 0.5274330489294 & -0.04350688323131 & 0.9523330316433 \\ -1.631502117525 & -0.03900052313482 & 1.718442964555 & 0.8409708058283 \\ 2.172282584098 & -1.365240172002 & -1.937338766954 & -0.3188250303592 \end{pmatrix}$$

$$g_{09} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.386886343163 & -0.4676514815009 & 1.285186031081 \\ 1.937103954345 & 1.4360680134 & -0.5185499239943 & 1.556016184734 \\ -1.951582280297 & -2.152106144172 & 0.1466429202899 & -0.3944722992969 \\ 0.08113156663811 & 0.05808803907369 & -0.9634831282406 & -0.2736939393144 \end{pmatrix}$$

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.937103954345 & 1.951582280297 & -0.08113156663811 \\ -2.386886343163 & 1.4360680134 & -2.152106144172 & 0.05808803907369 \\ 0.4676514815009 & -0.5185499239943 & 0.1466429202899 & -0.9634831282406 \\ -1.285186031081 & 1.556016184734 & -0.3944722992969 & -0.2736939393144 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.1081591269244 & -1.495793002437 & -2.306194344572 \\ 0.9224188382667 & -0.9556123944172 & -0.3354017069999 & -0.9083871199919 \\ -0.2698310617833 & 0.2019019191759 & 0.9714821300026 & -0.2970974385986 \\ 2.57758843548 & 0.2402893326938 & -1.476863186679 & -2.32488672996 \end{pmatrix}$$

$$g_{12} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.9224188382667 & 0.2698310617833 & -2.57758843548 \\ 0.1081591269244 & -0.9556123944172 & 0.2019019191759 & 0.2402893326938 \\ 1.495793002437 & -0.3354017069999 & 0.9714821300026 & -1.476863186679 \\ 2.306194344572 & -0.9083871199919 & -0.2970974385986 & -2.32488672996 \end{pmatrix}$$

$$g^{13} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 0.9224188382667 & -0.2698310617832 & 2.57758843548 \\ 2.08407157062 & 1.270906102897 & -0.5318943003356 & 1.856135890056 \\ 0.7074370472493 & -0.4341486409886 & -0.7304992200747 & 0.8822431766915 \\ -1.650395701196 & -0.217184595074 & -0.5062293399673 & -1.849423877197 \end{pmatrix}$$

$$g^{14} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.08407157062 & -0.7074370472493 & 1.650395701196 \\ -0.9224188382667 & 1.270906102897 & -0.4341486409886 & -0.217184595074 \\ 0.2698310617832 & -0.5318943003356 & -0.7304992200747 & -0.5062293399673 \\ -2.57758843548 & 1.856135890056 & 0.8822431766915 & -1.849423877197 \end{pmatrix}$$

$$g^{15} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 1.069386454541 & 2.389188265763 & 0.8460611676457 \\ 1.749954132618 & 1.434040276345 & 1.345911998254 & 0.4408955035387 \\ -1.225337629739 & -0.1359709087772 & -1.546795403343 & 0.3006463021839 \\ -1.733157720662 & -0.2619690572225 & -1.582455510404 & -1.196261867377 \end{pmatrix}$$

$$g^{16} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -1.749954132618 & 1.225337629739 & 1.733157720662 \\ -1.069386454541 & 1.434040276345 & -0.1359709087772 & -0.2619690572225 \\ -2.389188265763 & 1.345911998254 & -1.546795403343 & -1.582455510404 \\ -0.8460611676457 & 0.4408955035387 & 0.3006463021839 & -1.196261867377 \end{pmatrix}$$

$$g^{17} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & 2.08407157062 & 0.7074370472493 & -1.650395701196 \\ 2.386886343163 & 2.230064430208 & 0.6652050289992 & -1.132051819348 \\ -0.4676514815009 & 0.0097317147572 & -1.02857533105 & 0.4007941993519 \\ 1.285186031081 & 0.6083356329459 & 0.00149451369808 & -1.510506093534 \end{pmatrix}$$

$$g^{18} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -2.386886343163 & 0.4676514815009 & -1.285186031081 \\ -2.08407157062 & 2.230064430208 & 0.0097317147572 & 0.6083356329459 \\ -0.7074370472493 & 0.6652050289992 & -1.02857533105 & 0.00149451369808 \\ 1.650395701196 & -1.132051819348 & 0.4007941993519 & -1.510506093534 \end{pmatrix}$$

$$g_{19} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.4324542439964 & -1.631502117525 & 2.172282584098 \\ 0.1946556456187 & 0.952035556825 & -0.2422611012101 & 0.2698678894434 \\ -2.670881531187 & 0.5219195895366 & 1.859812530243 & -2.09816716399 \\ 0.6293873877053 & -0.09080150741791 & 0.3797447441102 & 1.115202896057 \end{pmatrix}$$

$$g_{20} = \begin{pmatrix} 2.927050983125 & -0.1946556456187 & 2.670881531187 & -0.6293873877053 \\ 0.4324542439964 & 0.952035556825 & 0.5219195895366 & -0.09080150741791 \\ 1.631502117525 & -0.2422611012101 & 1.859812530243 & 0.3797447441102 \\ -2.172282584098 & 0.2698678894434 & -2.09816716399 & 1.115202896057 \end{pmatrix}$$

É conveniente usarmos uma representação compacta do espaço hiperbólico, chamado modelo de Klein (vide [9]), que mapeia H^3 no interior de uma bola de raio unidade no espaço ordinário. As coordenadas cartesianas $x_i, i = 1, \dots, 3$, representam os pontos nesse modelo e são dadas por

$$x_1 = \tanh \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{B.1})$$

$$x_2 = \tanh \chi \sin \theta \sin \phi,$$

$$x_3 = \tanh \chi \cos \theta,$$

em termos das coordenadas (χ, θ, ϕ) . Nessas coordenadas a distância entre dois pontos é dada por [47]

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cosh^{-1} \left[\frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{(1 - \mathbf{x}^2)^{1/2} (1 - \mathbf{y}^2)^{1/2}} \right].$$

Assim, a distância de um ponto à origem é dada por

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= \cosh^{-1} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{x}^2)^{1/2}} \right] \\ &= \tanh^{-1} |\mathbf{x}| \end{aligned}$$

Mas das equações (B.1) obtemos que $\tanh \chi = |\mathbf{x}|$; então

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \chi = \tanh^{-1} |\mathbf{x}|.$$

As relações entre as coordenadas de Minkowski e as coordenadas cartesianas do modelo de Klein são $X_i = x_i X_0$ com $i = 1, \dots, 3$ e $X_0 = \cosh \chi$.

As dimensões do icosaedro devem ser tais que permitam transformar H^3 , em um espaço hiperbólico fechado, pela identificação das faces do icosaedro. O icosaedro tem, então, raio da esfera circunscrita $\chi_{out} = \cosh^{-1}(\tau^2/2) \approx 1.3826$, com $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$, que é a distância de um vértice ao centro geométrico do icosaedro. A esfera inscrita tem raio $\chi_{in} = \cosh^{-1}(\sqrt{3}\tau/2) \approx 0.8683$, que é a distância do centro de uma face até o centro do icosaedro. Cada aresta tem o comprimento de $2\chi_{in}$.

Devemos notar que o primeiro elemento da primeira coluna dos geradores é sempre o mesmo. Isso ocorre pois a primeira coluna de nossos geradores dá exatamente o ponto do centro do poliedro colado por uma face ao PF, cujo centro é $(1, 0, 0, 0)$ na representação de Minkowski. O primeiro elemento dessa coluna é equivalente à distância de um centro a outro $X_0 = \cosh(2\chi_{in}) = 2.9270509$ de dois poliedros ligados pelas faces. E todas as faces do PF têm a mesma distância ao centro do PF.

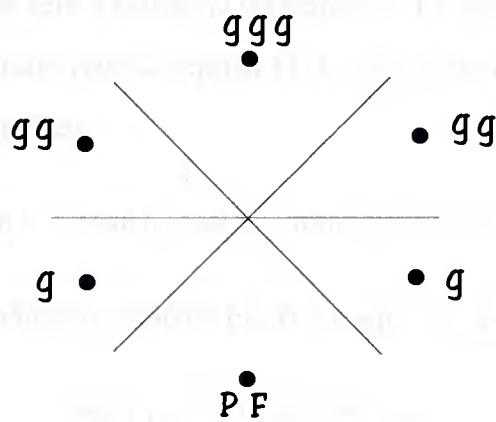


Figura B.1: Corte transversal em um vértice do PF na “tessellation”.

Os 20 geradores de cada variedade acima criam réplicas do PF ligadas a ele pelas faces. Isso não significa, entretanto, que eles representam todos os vizinhos do PF, ligados a ele. De fato, na

região dos vértices, há espaços vazios não preenchidos pelos vinte geradores. Devemos procurar preencher esses espaços usando combinações de dois geradores para criar as réplicas do PF. Essas réplicas devem ser ligadas ao PF e seus centros devem estar a uma distância, χ , do centro ao PF, maior que $2\chi_{in}$ e menor que $2\chi_{out}$. Veja na Fig.B.1 um esquema representando um corte transversal em um vértice do PF. Analisamos as combinações de dois geradores e verificamos quais os que tinham menor χ entre $2\chi_{out}$ e $2\chi_{in}$ e encontramos o valor de $\chi = 2.485480$. A partir disso obtivemos 60 geradores de duas letras ligados ao PF pelo vértice. Das combinações de três geradores usamos 12 ligadas ao PF pelo vértice, com seus centros a uma distância $\chi = 2\chi_{out}$. Obtivemos, assim, 92 palavras de geradores (20 de uma letra, 60 de duas letras e 12 de três letras) para completar a vizinhança mais próxima ao PF.

Agora precisamos saber qual o raio, a partir do centro do PF, dentro do qual podemos garantir que o universo foi recoberto, sem buracos, pela primeira camada de réplicas. Por construção, em torno de uma aresta teremos três réplicas do icosaedro (neste caso o PF e duas réplicas suas) e portanto 3 faces (cada uma composta de faces associadas, réplica-PF, réplica-PF, réplica-réplica). O raio que queremos será a distância do centro do PF até o ponto médio da aresta do PF mais a altura da face comum réplica-réplica [32]. Essa altura é obtida através da lei dos cossenos para o espaço hiperbólico

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C,$$

onde a, b, c são os lados do triângulo como na Fig.B.2 e aqui $c = 2\chi_{in}$, $b = \chi_{in}$, $C = 90^\circ$, assim

$$\cosh 2\chi_{in} = \cosh a \cosh \chi_{in},$$

o que implica em $a = 1.366812758$. A distância do centro do PF até a aresta do icosaedro é obtida no programa SnapPea [30] e tem o valor $\chi_a = 0.97265934$. Assim, podemos garantir que o espaço de recobrimento esta completo até um $\chi_{max} = a + \chi_a = 2.339472098$.

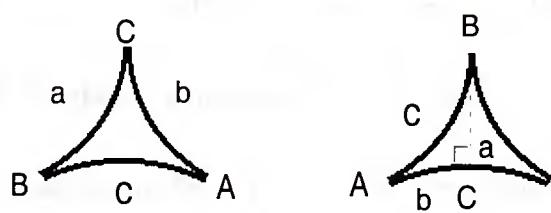


Figura B.2: Triângulos no espaço hiperbólico.

Bibliografia

- [1] M. Lachièze-Rey e J.-P. Luminet, *Physics Reports* **254**, 135 (1995).
- [2] R. Lehoucq, M. Lachièze-Rey, e J.-P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **313**, 339 (1996).
- [3] R. Lehoucq, J.-P. Luminet e J.-P. Uzan, *Topological lens effects in Universes with Non-Euclidean Compact Spacial Sections*, *astro-ph/9811107* (1998).
- [4] J.-P. Uzan, R. Lehoucq e J.-P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **351**, 766 (1999).
- [5] J.-P. Luminet e B. F. Roukema, *astro-ph/9901364* (1999).
- [6] H.V. Fagundes e E. Gausmann, *Phys. Lett. A* **238**, 235 (1998).
- [7] H. V. Fagundes e E. Gausmann, *Proc. XIX Texas Symp. Rel. Astrophys. Cosmology*, CD-ROM version (*astro-ph/9811368*).
- [8] H. V. Fagundes e E. Gausmann, *Phys. Lett. A* **261**, 235 (1999).
- [9] H. V. Fagundes, *The Astrophysical Journal* **338**, 618-629 (1989).
- [10] H. V. Fagundes, *Astrophys. J.* **470**, 43 (1996).
- [11] H. V. Fagundes e U. F. Wiczoski, *Astrophys. J.* **322**, L57 (1987).
- [12] G. I. Gomero, *Fundamental Polyedron and Ghuing Data for the Sixth Euclidean Compact Orientable 3-manifold*, preprint CBPF-NF-049/97 (1997).
- [13] A. Bernui, G. I. Gomero, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *Phys. Rev. D* **57**, 4699 (1998).

- [14] G. I. Gomero, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *Spikes in cosmic crystallography II: topological signature of compact flat universes*, gr-qc/9909078 (1999).
- [15] G. I. Gomero, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *A topological signature in cosmic topology*, gr-qc/9911049 (1999).
- [16] A. Bernui e A. F. F. Teixeira, *Cosmic crystallography: three multi-purpose function*, astro-ph/9904180 (1999).
- [17] A. Bernui e A. F. F. Teixeira, *Cosmic crystallography: the euclidean isometries*, gr-qc/0003063 (2000).
- [18] A. F. F. Teixeira, *Cosmic crystallography in a circle*, gr-qc/0005052 (2000).
- [19] William M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, ed. Academic Press (1975);
- [20] E. Kreyszig, *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*, ed. University of Toronto Press (1968).
- [21] N. J. Cornish, D. Spergel e G. Starkman, *Phys. Rev. D* **57**, 5982 (1998).
- [22] N. J. Cornish, D. Spergel e G. Starkman, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2657 (1998).
- [23] J. Levin, E. Scannapieco e J. Silk, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2689 (1998).
- [24] B. F. Roukema, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283**, 1147 (1996).
- [25] B. F. Roukema e V. Blanloeil, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2645 (1998).
- [26] A. de Oliveira-Costa e G. F. Smoot, *Astrophys. J.* **448**, 477 (1995).
- [27] A. de Oliveira-Costa, G. F. Smoot e A. A. Starobinsky, *Astrophys. J.* **468**, 457 (1996).

- [28] D. Stevens, D. Scott e J. Silk, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 20 (1993).
- [29] Catálogo de 1989 gentilmente cedido pelo Prof. Laerte Sodré Jr.(IAG-USP).
- [30] J. R. Weeks, *SnapPea: A computer Program for Creating and Studying Hiperbolic Manifolds*, disponível em www.northnet.org/weeks.
- [31] J. R. Weeks, [astro-ph/9802012](http://arxiv.org/abs/astro-ph/9802012), (1998).
- [32] J. R. Weeks, comunicação pessoal.
- [33] W. P. Thurston e J. R. Weeks, *Sci. Am.* **251**, 94 (1984).
- [34] I. Yu. Sokolov, *JETP Lett.* **57**, 617, (1993).
- [35] L. A. Best, *Can. J. Math.* **XXIII**, 451 (1971).
- [36] R. Aurich, [astroph/9903032 v2](http://arxiv.org/abs/astroph/9903032v2), (1999).
- [37] G. F. R. Ellis, *Gen. Rel. and Grav.* **2**, 7 (1971).
- [38] G. F. R. Ellis e G. Schreiber, *Phys. Lett. A* **115**, 97 (1986).
- [39] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, ed. Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [40] J. V. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, ed. Cambridge University Press (1993).
- [41] Hans C. Ohanian e Remo Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, ed. W. W. Norton (1994).
- [42] Robert M. Wald, *General Relativity*, ed. The University of Chicago Press (1984).
- [43] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, ed Mir (1980).
- [44] E. R. Harrison, *Cosmology: The Science of the Universe*, ed. Cambridge University Press (1981).

- [45] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, ed. John Wiley & Sons (1972).
- [46] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, ed. W. H. Freeman and Company (1973).
- [47] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, ed. University of Toronto Press (1965).

