



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
ASTROFÍSICA TEÓRICA

Campos gravitacionales generados por estrellas de neutrones, estrellas de bosones y agujeros de gusano

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA
MARIANA LIRA PERALTA

TUTOR PRINCIPAL:
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. DIEGO LOPEZ CAMARA RAMIREZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

Cd. Mx. Octubre 2024



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, Octubre 2024.

Índice general

Resumen	I
Agradecimientos	III
1 Introducción	1
1.1 Relatividad General	2
1.1.1 Aproximación Cuadrupolar	4
1.1.2 Formalismo Newman-Penrose	6
1.1.3 Condiciones de energía y materia exótica	8
1.2 Contexto empírico	9
1.2.1 Materia oscura y energía oscura	9
1.2.2 La detección de ondas gravitacionales	11
1.2.3 LIGO-Virgo-KAGRA	12
1.2.4 Otros detectores	14
1.3 Configuraciones autogravitantes	14
1.3.1 Agujeros negros	15
1.3.2 Estrellas de neutrones	16
1.3.3 Estrellas de bosones	17
1.3.4 Agujeros de gusano	19
1.4 Como se organiza esta tesis	20
2 Ondas gravitacionales de binarias magnetizadas en el régimen lineal	21
2.1 Resumen	21
2.2 Introducción	21
2.3 Descripción Newtoniana de la binaria magnetizada	24
2.3.1 Modelo de dos objetos compactos magnetizados	24
2.3.2 Dinámica Newtoniana	26
2.3.3 Movimiento circular	27
2.3.4 Precesión orbital debido a los campos magnéticos	29
2.4 Emisión gravitacional	30
2.4.1 Estimación de las ondas gravitacionales	31
2.4.2 Estimación de la masa	32
2.5 Resultados y Discusión	35
2.5.1 Efecto de la alineación de los dipolos magnéticos sobre la binaria y sus ondas gravitacionales	35
2.5.2 Efecto magnético sobre variables del espiraleo	39
2.5.3 Estimación de la masa: otra aplicación.	42

Índice general

2.6	Conclusiones del capítulo 2	44
3	Ondas gravitacionales de la colisión frontal de estrellas de bosones-ℓ	47
3.1	Resumen	47
3.2	Introducción	47
3.3	Fundamentos teóricos	49
3.3.1	Estrellas de bosones ($\ell = 0$)	49
3.3.2	Estrellas de bosones- ℓ	51
3.3.3	Colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ	53
3.3.4	Extracción de Ψ_4 de la simulación numérica	56
3.3.5	Ánálisis de las señales gravitacionales	56
3.4	Casos de estudio	58
3.4.1	Redimensionalización	60
3.4.2	Estimación de ordenes de magnitud respecto a la energía del campo escalar	61
3.4.3	Estimación del rango detección por LVK	62
3.5	Resultados	63
3.5.1	Varios valores de $m_\Phi c^2$ para todos los modelos	64
3.5.2	Todas las señales con $m_\Phi c^2 = 5.9 \times 10^{-13}$ eV	68
3.6	Conclusiones de este capítulo	70
4	Agujeros de gusano con carga eléctrica	73
4.1	Resumen	73
4.2	Introducción	73
4.3	Fundamentos teóricos	76
4.3.1	Ecuaciones de campo	76
4.3.2	Cantidades globales	79
4.3.3	Escalares geométricos	80
4.4	Soluciones y Discusión	81
4.4.1	Condiciones de frontera	81
4.4.2	Detalles sobre la obtención de las soluciones y las gráficas	82
4.4.3	Sobre la simulación numérica y soluciones particulares	84
4.4.4	Comportamiento para λ grandes	92
4.4.5	Movimiento de partículas	98
4.5	Conclusiones de este capítulo	100
5	Conclusiones generales	103

Resumen

La interacción gravitacional interviene en los procesos más energéticos del Universo y es el mecanismo con el cual es posible analizar a la materia oscura y a la energía oscura, las dos contituyentes del Universo que juntas suman el 96 % de la densidad total de materia-energía. Las observacionales apuntan a que el 22 % del contenido de materia-energía del Universo corresponde a materia oscura y el 74 % a la energía oscura y el 4 % restante corresponde a la materia ordinaria que constituye a las estrellas, planetas, gas interestelar, la radiación electromagnética y neutrinos. Se ha explorado la posibilidad de que la materia oscura y la energía oscura estén compuestas por partículas elementales o campos aún no observados. Para resolver el enigma, es necesario ampliar los modelos teóricos considerando las observaciones astronómicas y cosmológicas para acotar la respuesta correcta. Por otro lado, la detección de ondas gravitacionales y el modelado de fuentes confirmadas e hipotéticas, promete ayudar a discernir entre modelos.

En esta tesis presentamos resultados nuevos sobre la naturaleza de los campos gravitacionales producidos por tres tipos de objetos compactos: las estrellas de neutrones, las estrellas de bosones y los agujeros de gusano. Las estrellas de neutrones, son ejemplos de configuraciones de materia usual que conocemos, las estrellas de bosones lo son de la materia oscura y los agujeros de gusano son ejemplo de configuraciones formadas por materia exótica. Utilizamos las ondas gravitacionales como herramienta para comprender la naturaleza de los sistemas astrofísicos.

De éste modo, presentamos inicialmente el modelo de un sistema binario de objetos compactos como las estrellas de neutrones, pero en el que incorporamos a los campos magnéticos en la dinámica de la binaria durante la fase de espireleo y en la emisión de ondas gravitacionales. Demostramos que los campos magnéticos afectan la forma de las ondas gravitacionales aunque de manera imperceptible para la sensitividad de los actuales detectores de ondas gravitacionales. Obtenemos fórmulas explícitas para el decrecimiento en la separación de las estrellas, el tiempo para alcanzar un radio mínimo, la luminosidad gravitacional, la tasa de cambio de la frecuencia de las ondas gravitacionales, así como su amplitud, todo esto dentro de la aproximación cuadrupolar. Analizamos casos de campos magnéticos muy intensos $\sim 10^{16}$ G, y mostramos que el efecto sobre las cantidades observables es en orden de magnitud similar a las correcciones a segundo orden de la aproximación PostNewtoniana, aún por fuera del rango de sensitividad de los observatorios de ondas gravitacionales. Este trabajo aporta comprensión sobre el efecto de los campos magnéticos en las ondas gravitacionales, y, demuestra que éstos no deben ser despreciados en las futuras simulaciones de la colisión de las estrellas de neutrones debido a que en un futuro muy cercano, la sensitividad permitirá estudiar los efectos de

Índice general

los campos magnéticos en la forma de las ondas gravitacionales.

Una vez entendida la dinámica de un sistema binario compuesto de materia ordinaria y su emisión de ondas gravitacionales en el régimen lineal, pasamos a considerar un sistema binario de estrellas de bosones- ℓ , conformadas por campos escalares complejos. Lo hacemos analizando configuraciones estables de tipo materia oscura llamadas estrellas de bosones- ℓ . Nos enfocamos en entender las propiedades intrínsecas que deber tener el campo escalar complejo para formar estrellas de bosones- ℓ que al chocar frontalmente, emitan ondas gravitacionales con frecuencias y amplitudes dentro del rango de sensibilidad de los observatorios actuales de ondas gravitacionales. Encontramos relaciones cualitativas entre la masa intrínseca del campo escalar y el tamaño, duración y forma de las ondas gravitacionales generadas. El parámetro ℓ modifica la masa de la binaria y, por tanto, la forma de las ondas gravitacionales entre binarias $\ell = 0$ y $\ell \neq 0$ también difiere. Sin embargo, la comparación entre señales $\ell = 0$ y $\ell \neq 0$ requiere considerar muchos más modelos de fuentes dentro de todo el rango de compacidades posibles. Mostramos de éste modo que las estrellas de bosones podrían ser detectadas por la emisión gravitacional durante una colisión, lo cual podría ser un paso importante para describir a la naturaleza de la materia oscura.

Finalmente, analizamos un tipo de materia distinto: materia exótica. Luego del descubrimiento de la expansión acelerada del Universo, este tipo de materia está tomando mayor interés. Construimos una nueva solución numérica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell-Klein-Gordon de agujero de gusano eléctrico, formado por un campo escalar complejo acoplado a un campo eléctrico. Analizamos sistemáticamente el efecto de distintos parámetros como la auto-interacción del potencial escalar y la carga eléctrica. Encontramos expresiones aproximadas para el campo escalar y la masa del agujero de gusano en el régimen de grandes valores del parámetro de auto-interacción. Mostramos un acuerdo excelente entre las expresiones aproximadas y las soluciones numéricas. Además, estudiamos el efecto de la carga sobre la masa, el número de partículas y el radio de la garganta del agujero de gusano. Cerramos esta parte con el análisis del movimiento geodésico de partículas con y sin carga señalando que éste sería un paso en la dirección de detectar agujeros de gusano.

En conjunto, presentamos soluciones a las ecuaciones de Relatividad General de gran interés porque se trata de propuestas de objetos compuestos por distintos tipos de materia, lo cual nos puede ayudar a comprender no sólo la naturaleza de la materia ordinaria y su interacción con los campos electromagnéticos, sino también la naturaleza del 96 % del contenido de materia y energía del Universo: la materia y la energía oscura y la posibilidad de que éstas formen configuraciones autogravitantes.

Palabras clave: Relatividad General, Ondas Gravitacionales, Objetos Compactos, Campo Escalar, Materia oscura, Materia exótica.

Agradecimientos

Se agradece especialmente a CONAHCyT por su apoyo a través del Programa Nacional de Becas para estudiantes de Doctorado.

A Darío Nuñez por su acompañamiento, comprensión y enseñanzas durante mis estudios de Posgrado. Al Posgrado en Astrofísica, al Instituto en Ciencias Nucleares, a la UNAM y en particular a Bertha Alicia Vázquez Román del Instituto de Astronomía por su atención en cuanto a trámites.

A mis sinodales, la Dra. Argelia Bernal, el Dr. Diego Lopez Camara, Dr. Aldo Rodriguez, Dr. Victor Jaramillo y Dr. Mauricio Antelis por sus atinados comentarios y correcciones a la primera versión del presente documento, los cuales fueron fundamentales para encauzar la discusión general de la introducción y conclusiones generales.

A mi familia, a mi compañero Sergio Alberto Castillo Palomares por todo su apoyo, a mis abuelos, a Ndú Xacúa, a la Banda Sueño Santiaguense y a mi comunidad de Santiago del Río, Dinicuiti, Oaxaca. A Rita, Tita y Braulia.

1 Introducción

Relatividad General (RG) proporciona la base teórica más sólida y precisa a la fecha para describir los campos gravitacionales [1, 2], además, predice la existencia de las ondas gravitacionales [3]. Las ondas gravitacionales son una herramienta que promete aportar respuestas a enigmas como la naturaleza interior de las estrellas de neutrones, la colisión de sistemas binarios y el descubrimiento de objetos compactos y/o auto-gravitantes[4, 5]. Además, con ondas gravitacionales se prevé avanzar en la comprensión de la Física fundamental a densidades nucleares y probar rigurosamente la teoría de RG en el régimen de campo fuerte[6].

Si bien los agujeros negros estelares y las estrellas de neutrones son fuentes confirmadas de ondas gravitacionales[7, 8, 9], aún hay preguntas sin resolver sobre ellos. Respecto a las estrellas de neutrones, aspectos como su nacimiento, su ecuación de estado y la fuente de sus campos magnéticos, son temas vigentes de investigación [10, 11]. Además, aunque existen muchos observatorios de ondas electromagnéticas, puede ser que existan objetos astrofísicos, que por sus propiedades intrínsecas no emitan ondas electromagnéticas, pero sí ondas gravitacionales. Esta posibilidad ha sido explorada de forma casi sistemática, de modo que a día de hoy existe toda una variedad de objetos auto-gravitantes hipotéticos [12, 13]. Quizás el más plausible es la estrella de bosones [14, 15, 16], se trata de una solución a las ecuaciones de RG acopladas a un campo escalar complejo que pueden interpretarse como objetos de materia oscura cuyas compacidades típicas son comparables a la compacidad de las estrellas de neutrones. Existen otras soluciones teóricas más exóticas, también de campo escalar complejo, como los agujeros de gusano[17, 18], aunque estos estarían formados de materia exótica, en el sentido definido en la sec. 1.1.3.

Las tres investigaciones en las que colaboré durante mi doctorado, y que serán descritas en los capítulos dos [19, 20], tres y cuatro [21], respectivamente, descansan sobre la teoría de RG. En dos de las tres investigaciones trabajamos con las ondas gravitacionales emitidas por la interacción de sistemas binarios. También, en una de las tres investigación estudiamos estrellas de neutrones (capítulo dos), y, en las otras dos investigaciones trabajamos con configuraciones auto-gravitantes formadas de campos escalares complejos, a saber, estrellas de bosones (capítulo tres) y agujeros de gusano (capítulo cuatro), respectivamente.

En este capítulo introductorio, en la sección 1.1 se revisan los fundamentos de RG desde su formulación, incluyendo el formalismo de la aproximación cuadrupolar y el formalismo Newman-Penrose. Posteriormente, en la sección 1.2 hacemos un breve recuento histórico sobre los descubrimientos astronómicos de las ondas gravitacionales, la materia oscura y la energía oscura. En la sección 1.3 introducimos el concepto de configuraciones auto-gravitantes y dentro de ellas describimos los agujeros negros, las estrellas de neutrones, las estrellas de bosones y los agujeros de gusano, pues serán considerados en los

subsecuentes capítulos. Finalmente, en la sección 1.4 describimos la organización general del resto de la presente tesis.

En toda la tesis trabajamos con signatura $(-, +, +, +)$. También, a lo largo de la tesis utilizamos las siguientes constantes universales: Gravitación universal $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 1,327 \times 10^{11} M_{\odot}^{-1} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$, a excepción del capítulo cuatro donde utilizamos unidades geometrizadas.

1.1. Relatividad General

RG [22, 23, 24], formulada en 1916 [25, 26], es una herramienta teórica vigente para el estudio de los campos gravitacionales. En el caso de los fenómenos astrofísicos y cosmológicos, la interacción gravitacional juega un rol fundamental, por ejemplo, determina completamente la estructura a gran escala del Universo y la dinámica estelar y galáctica [2, 1]; esto ocurre por sus particularidades que la diferencian de las otras interacciones fundamentales¹: es de largo alcance, siempre es atractiva, y, es universal, pues actúa sobre todas las formas de materia y energía. RG, junto a la Mecánica Cuántica, es uno de los cimientos más sólidos y estables de la Física [27]. Para una revisión completa del tema puede consultarse [22, 24, 23, 5, 28].

A nivel matemático, RG se desarrolla sobre una variedad diferenciable de 4 dimensiones dotada de una métrica g_{ab} que contiene toda la información geométrica del espacio-tiempo. El elemento de línea ds^2 es un invariante que se utiliza para determinar la separación entre puntos del espacio-tiempo y está dado por,

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b. \quad (1.1)$$

La métrica g_{ab} depende de la distribución de materia y energía, y para conocer las componentes de la métrica se deben resolver las ecuaciones de campo de RG, como más adelante veremos. Dada una métrica, se construyen los símbolos de Christoffel²:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ba}}{\partial x^d} \right), \quad (1.2)$$

los cuales son necesarios para mantener la covarianza de las ecuaciones tensoriales diferenciales. Con los símbolos de Christoffel, se construye el tensor de Riemann R_{cbd}^a y el tensor de Ricci R_{ab} :

$$R_{cbd}^a = \partial_b \Gamma_{cd}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{eb}^a \Gamma_{cd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{cb}^e, \quad (1.3)$$

$$R_{ab} \equiv R_{acb}^c = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c, \quad (1.4)$$

¹Se considera que hay cuatro interacciones fundamentales: la interacción electromagnética, gravitacional, nuclear fuerte y nuclear débil. Dependiendo de la escala física del proceso, puede predominar una u otra [1].

²Los símbolos de Christoffel se determinan una vez dadas las coordenadas locales. Satisfacen las condiciones de una conexión de Levi-Civita, es decir, preservan la métrica y son libres de torsión [22, 29].

con $\partial_a := \partial/\partial x^a$. El escalar de Ricci \mathcal{R} se define como la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico:

$$\mathcal{R} \equiv g^{ab} R_{ab}, \quad (1.5)$$

el escalar de Ricci es el invariante que cuantifica la curvatura del espaciotiempo local en un punto dado y depende de las segundas derivadas del tensor métrico. La densidad lagrangiana del campo gravitacional depende directamente del escalar de curvatura \mathcal{R} del espaciotiempo:

$$\mathcal{L}_G = \frac{c^4}{16\pi G} \mathcal{R}, \quad (1.6)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G es la constante gravitacional universal.

El tensor métrico g_{ab} se acopla universal y mínimamente a todos los campos fundamentales presentes, englobados en la función lagrangiana \mathcal{L}_M , mediante la acción total S :

$$S \equiv \int \sqrt{|g|} \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{|g|} \left[\frac{c^4 \mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_M \right] d^4x, \quad (1.7)$$

donde $g = \det(g_{ab})$ es el determinante de la métrica g_{ab} , $d^4x = c dt d^3x$ y \mathcal{L} es la lagrangiana total del sistema dada por

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M = \frac{c^4 \mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_M. \quad (1.8)$$

La función lagrangiana \mathcal{L}_M puede incluir campos electromagnéticos A_a , campos fermiónicos y bosónicos ψ , el campo de Higgs H y en general campos escalares y vectoriales hipotéticos [1]. A manera de ejemplo y anticipando su definición que será empleada en el capítulo cuatro, la función lagrangiana del campo electromagnético es [22, 29],

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}, \quad (1.9)$$

donde $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ es el tensor de Faraday, el campo eléctrico $F^{0i} = E^i$ y el campo magnético $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$.

Bajo el principio variacional aplicado a la acción de la Ec.(1.7) se deducen las ecuaciones dinámicas del espaciotiempo y los campos físicos presentes. El principio plantea que el sistema cambia en el tiempo de modo que la trayectoria seguida entre dos puntos del espaciotiempo es aquella cuya acción es estacionaria (mínima o máxima en comparación con trayectorias vecinas), es decir,

$$\delta S = 0. \quad (1.10)$$

Luego de calcular la variación de la acción respecto al campo gravitacional, se obtienen las ecuaciones de RG en la forma:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \text{ con} \quad (1.11)$$

$$T_{ab} \equiv \delta \mathcal{L}_M / \delta g^{ab}, \quad (1.12)$$

1 Introducción

donde R_{ab} es el tensor de Ricci dado en la Ec.(1.4), g_{ab} es la representación matemática del espaciotiempo: la métrica, \mathcal{R} es el escalar de Ricci de la Ec.(1.5), T_{ab} recibe el nombre de tensor de energía-momento o tensor de materia-energía, y, como vemos, depende totalmente de la métrica y los campos físicos en la función lagrangiana \mathcal{L}_M . Las ecuaciones de campo (1.11) determinan el efecto de la curvatura del espaciotiempo sobre el movimiento de la materia y la energía, e inversamente, la manera en que la materia y la energía afectan la curvatura del espaciotiempo. Aunque está escrita en una línea, se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales, acopladas y no lineales por lo que resolverlas no es trivial. Existen pocas soluciones exactas de interés físico a dichas ecuaciones, en muchos otros casos se consideran soluciones aproximadas y numéricas.

1.1.1. Aproximación Cuadrupolar

Una manera de estudiar las ecuaciones de campo es trabajar en el régimen lineal de RG, el cual consiste en expandir la métrica alrededor del espaciotiempo plano, es decir,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad |h_{ab}| \ll 1, \quad (1.13)$$

donde η_{ab} es el espaciotiempo de Minkowski plano $\eta_{ab} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y h_{ab} es una pequeña perturbación a la métrica plana. Al sustituir esta métrica en las ecuaciones de campo (1.11) se llega a la ecuación de onda

$$\square \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1.14)$$

donde $\square = -1(c^2)\partial_0^2 + \nabla^2$, la amplitud libre de traza \bar{h}_{ab} se define como $\bar{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \eta_{ab}h/2$, siendo $h = h_a^a$ la amplitud libre de traza en la norma de Lorentz definida por $\partial^b \bar{h}_{ab} = 0$. En esta expresión, T_{ab} es el tensor de la materia-energía, denominada como fuente. Como vemos, \bar{h}_{ab} satisface la ecuación de onda, \bar{h}_{ab} es la parte del campo gravitacional que se comporta como onda, es por ello que se interpreta como las ondas gravitacionales. En el vacío, las perturbaciones métricas se propagan como fluctuaciones distorsionando la planitud del espaciotiempo.

La solución general a la ecuación de onda es

$$\bar{h}_{ab}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{ab} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right), \quad (1.15)$$

donde el tensor de energía materia está evaluada al tiempo retardado definido como $t_{ret} \equiv t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$. Fuera de la fuente, la solución se puede simplificar en la norma TT utilizando que $\bar{h}_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}$ (la matriz Λ_b^a satisface por definición que $\Lambda_a^c \Lambda_b^d \eta_{cd} = \eta_{ab}$), y, la conservación del tensor energía-momento para expresar las componentes T_{0k} y T_{00} en términos de las componentes espaciales T_{kl} , de modo que:

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \int d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{kl} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right), \quad (1.16)$$

donde usamos la notación $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{n}}$ y $|\mathbf{x}| = d$. Ahora bien, la aproximación cuadrupolar es un caso particular dentro del régimen lineal que añade las siguientes suposiciones [30]:

- que la distancia a la fuente respecto al tamaño de la fuente es mucho más grande. Si denotamos R el radio típico de la fuente, bajo la suposición de fuente lejana $d \gg R$, a un tiempo fijo el término del denominador se expande como: $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O(R^2/d) \sim r$, lo cual simplifica la integral en la Ec.(1.15).
- que la fuente es no relativista. Esta condición se expresa como $\lambda \ll R$, donde $\lambda = c/\omega$, siendo ω la frecuencia típica del movimiento dentro de la fuente. Bajo esta condición, el tensor de materia-energía se simplifica.
- que las longitudes de las ondas gravitacionales son mucho más grandes que el tamaño característico de la fuente (aproximación de onda larga). Esta condición se ocupa cuando la curvatura del espaciotiempo está determinada por la materia.

Bajo estas condiciones, se efectúa una expansión multipolar de las ondas gravitacionales en el espacio de Fourier, y se encuentra que a primer orden la ec.(1.16) se reduce a:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{d} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int d^3x T^{kl} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{d} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c) \quad (1.18)$$

donde $M^{ij} \equiv \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j$ es conocido como segundo momento de masa (o tensor cuadrupolar simétrico) y satisface, por principios de conservación de masa y energía ($\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}$) que $\ddot{M}^{ij} = 2 \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x})$.

Sin pérdida de generalidad, en un sistema de referencia donde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, es decir, las ondas gravitacionales se propagan en la dirección z , tenemos que

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{M}_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{xx} - \ddot{M}_{yy})/2 & \ddot{M}_{xy} & 0 \\ \ddot{M}_{yx} & -(\ddot{M}_{xx} - \ddot{M}_{yy})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

de manera que la solución de la Ec. (1.14) se puede expresar en términos de únicamente dos amplitudes de polarización denotadas h_+ y h_\times dadas por,

$$h_+(t) = \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} \left(\ddot{M}_{xx}(t_{ret}) - \ddot{M}_{yy}(t_{ret}) \right), \quad h_\times(t) = \frac{2}{d} \frac{G}{c^4} \ddot{M}_{xy}(t_{ret}). \quad (1.20)$$

La energía por unidad de tiempo transportada en las ondas gravitacionales recibe el nombre de luminosidad gravitacional, $dE_{OG}/dt \equiv L_G$. El cambio en la luminosidad gravitacional por unidad de ángulo sólido se relaciona con las amplitudes de polarización como sigue:

$$\frac{dL_G}{d\Omega} = \frac{r^2 c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (1.21)$$

1 Introducción

los corchetes $\langle \rangle$ representan el promedio temporal sobre varios periodos de las ondas gravitacionales³.

Luego de un tratamiento cuidadoso aprovechando todas las condiciones de la aproximación cuadrupolar, al insertar la Ec. (1.20) en la Ec. (1.21) y efectuar la integral angular, se encuentra que la luminosidad total es

$$L_G = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \right\rangle, \quad (1.22)$$

esta expresión es conocida como la fórmula cuadrupolar, fue derivada por primera vez en 1918 por Einstein [3]; en la actualidad es una primera aproximación confiable para estimar la luminosidad de las ondas gravitacionales. Para una revisión a detalle de la aproximación cuadrupolar puede consultarse [4, 5, 29, 22].

La fórmula cuadrupolar permite ver que cualquier objeto con masa acelerado emite ondas gravitacionales. Por ejemplo, un objeto en rotación cuyo eje de simetría y eje rotacional no coinciden emite ondas gravitacionales. En tal caso emite una luminosidad descrita por [31]

$$L_{G_R} = \frac{32GI^2\epsilon^2\Omega^6}{5c^5}, \quad (1.23)$$

donde ϵ es la elipticidad del objeto definida como $\epsilon \equiv (I_1 - I_2)/I_3$, I_n son los principales momentos de inercia ($n = 1, 2, 3$). En cambio, un sistema binario de masas individuales M_1, M_2 en el régimen lineal emite una luminosidad dada por [30]

$$L_{G_{SB}} = \frac{32GM\mu^3}{5c^5r^3} \quad (1.24)$$

donde $M = M_1 + M_2$, $\mu = M_1M_2/M$, y, r es la distancia entre las masas M_1 y M_2 . Esta expresión será generalizada en el capítulo siguiente para un sistema binario con interacción magnética dipolar. En la Sec. 1.2.2, se continúa la discusión de las ondas gravitacionales en torno a las detecciones directas recientes.

1.1.2. Formalismo Newman-Penrose

Volvamos a las ecuaciones relativistas (1.11), éstas son muy complejas, pero bajo distintas suposiciones, pueden representarse de modos más entendibles. No hay un formalismo mejor que otro, más bien, hay formalismos más convenientes dependiendo del sistema o problema.

Para el estudio de ondas gravitacionales resulta conveniente introducir el formalismo de Newman-Penrose donde la idea básica es estudiar la radiación a lo largo de geodésicas

³Al realizar la operación de promedio, se presupone que las fluctuaciones h_{ab} se distinguen claramente del espacio-tiempo de fondo y es posible identificar períodos en la fluctuación. Los períodos de una señal numérica se pueden identificar con análisis espectral.

nulas⁴ con dirección hacia el infinito, simplificando las ecuaciones. La expresión *hacia el infinito* se refiere a que las ondas gravitacionales se propagan alejándose de la fuente, tan lejos como el infinito.

La tetrada nula compleja es una base del espaciotiempo que consiste en dos vectores nulos reales ℓ , n y dos vectores nulos conjugados complejos m , \bar{m} , de modo que la tetrada es:

$$\{\mathbf{e}_a\} = (\ell, n, m, \bar{m}) \quad (1.25)$$

y satisface condiciones de normalización y ortogonalidad:

$$-\ell \cdot n = 1 = m \cdot \bar{m}, \quad (1.26)$$

todos los demás productos punto son idénticamente cero. Por otra parte, la métrica se expresa como,

$$g_{ab} = l_a n_b + l_b n_a - m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a, \quad (1.27)$$

Las ondas gravitacionales se mueven a la velocidad de la luz, la tetrada nula son las direcciones fundamentales sobre las que las ondas gravitacionales se mueven [32, 33].

El tensor de Weyl C_{abcd} contiene información sobre la curvatura del espaciotiempo y las ondas gravitacionales. El tensor de Riemann puede descomponerse como,

$$R_{abcd} = C_{abcd} + g_{a[c} S_{d]b} - g_{b[c} S_{d]a}, \quad (1.28)$$

donde

$$S_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{6} R g_{ab}, \quad (1.29)$$

es conocido como el tensor de Shouten. En el vacío, las ecuaciones de campo se reducen a $R_{ab} = 0$, por lo que el tensor de Shouten es igual a cero y el tensor de Weyl C_{abcd} es idéntico al tensor de Riemann R_{abcd} .

De acuerdo al teorema de Peeling [33, 23], un componente del tensor de Weyl decrece como $1/r$ conforme se aleja de la fuente, y es identificado como la radiación gravitacional saliente. El componente es justamente el escalar Newman-Penrose Ψ_4 , definido como,

$$\Psi_4 \equiv -C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta. \quad (1.30)$$

En las simulaciones numéricas de ondas gravitacionales es usual extraer las señales numéricas en términos de la cantidad Ψ_4 , como veremos en el capítulo tres.

El formalismo Newman-Penrose (NP) y el teorema de Peeling permiten estudiar la estructura asintótica del espaciotiempo, por lo que es particularmente importante para el estudio de ondas gravitacionales, como se mostrará en el capítulo tres.

⁴La geodésica es la trayectoria que sigue una partícula libre que no está sujeta a ninguna fuerza externa. En particular, la geodésica nula representa la trayectoria seguida por un haz de luz, es decir, a una partícula moviéndose a la velocidad de la luz. Dado que las ondas gravitacionales también se mueven a la velocidad de la luz, la tetrada nula son las direcciones fundamentales donde la radiación se mueve.

1.1.3. Condiciones de energía y materia exótica

Las ecuaciones de campo de RG se estudiaron inicialmente bajo condiciones físicamente lógicas tomando en cuenta las observaciones astronómicas hasta el momento, a saber, que la Gravedad es siempre atractiva y que la densidad de la materia-energía es positiva. Estas condiciones, más que leyes o principios fundamentales, se deben entender como condiciones fenomenológicas para explicar las propiedades de la materia observada[34, 35, 36, 37].

Condición de convergencia temporal: También llamada TCC por sus siglas en inglés. Establece que la Gravedad siempre es atractiva, es decir,

$$R_{ab}V^aV^b \geq 0, \quad (1.31)$$

donde V^a es cualquier vector temporal, implica, por ejemplo, que dos observadores en caída libre, conforme pase el tiempo, se irán acercando entre sí.

Condición de energía fuerte: También conocida SEC por sus siglas en inglés. Al sustituir las ecuaciones de campo de RG en la condición de convergencia temporal obtenemos la condición de energía fuerte:

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}T g_{ab} \right) V^a V^b \geq 0. \quad (1.32)$$

La condición de energía fuerte significa que, independientemente del marco de referencia, la densidad de energía debe propagarse causalmente y ser cero o positiva.

Condición de energía débil: La densidad de energía medida por cualquier observador es no negativa:

$$T_{ab}V^aV^b \geq 0. \quad (1.33)$$

La condición de energía débil aplicada a vectores V^a nulos, se conoce como condición de energía nula.

Condición de energía nula: Se deben satisfacer las condiciones de energía fuerte y energía débil en el límite de los observadores nulos:

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0, \quad (1.34)$$

donde k^a es un vector nulo. El producto punto escalar de un vector nulo consigo mismo es igual a cero.

En la presente tesis, la materia exótica se define como aquella que viola la condición de energía fuerte. Este concepto está en acuerdo con distintos autores como [18, 38, 39, 21].

En la siguiente sección 1.2 profundizaremos sobre el modelo AMOF y el concepto de materia oscura y energía oscura. Por ahora, solo mencionaremos que, de acuerdo a éste, la expansión acelerada del universo es producida por un término llamado constante cosmológica Λ ó energía oscura que se puede modelar como un fluido perfecto de la forma: $T_{ab} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, siendo $\rho > 0$ la densidad de energía y p la presión. Las observaciones cosmológicas son congruentes con una ecuación de estado $p(\rho) = -\rho$ para la energía oscura. Si evaluamos esto del lado izquierdo de la Ec.(1.32) llegamos

a que $(T_{ab} - \frac{1}{2}T g_{ab}) V^a V^b = (\rho + 3p) = -2\rho$, sin embargo, dado que la densidad ρ es positiva, el término -2ρ es negativo, lo que significa que la energía oscura no satisface la condición fuerte de energía (SEC).

Así que, de acuerdo a la definición de materia exótica recién presentada, la energía oscura es un tipo de materia exótica. Cabe aclarar que la energía oscura no viola ningún principio fundamental de la conservación de energía y satisface las condiciones de conservación locales de la materia-energía en RG, pero su comportamiento conduce a una violación de la condición de energía fuerte. Dado que la energía oscura parece violar una de las condiciones de energía tradicionales, investigar teorías que permitan tales violaciones podría ser crucial para avanzar en nuestra comprensión de qué es la energía oscura.

Por otra parte, algunos tipos de agujeros de gusano violan tanto la condición de energía fuerte como la condición de energía nula. En ese sentido, aunque la energía oscura es exótica, objetos como ciertos agujeros de gusano aún más exóticos, han sido considerados en la literatura reciente [17, 18]. Es interesante que aún cuando estas soluciones no satisfacen las condiciones de energía, poseen masas y tamaños finitos. Curiosamente, algunos agujeros de gusano pueden tener masas negativas [17, 40], como veremos en el capítulo cuatro [40, 21].

En la Sec.1.3 revisaremos las investigaciones sobre agujeros de gusano, y, en el capítulo cuatro trabajaremos una configuración auto-gravitante de materia exótica: un agujero de gusano con carga eléctrica formada por un campo escalar complejo, resultados que ya se encuentran disponibles en [21] .

1.2. Contexto empírico

RG predice que la luz se curva por efecto de objetos muy masivos, por ejemplo, la luz al pasar cerca del Sol. Este efecto recibe el nombre de lente gravitacional y fue comprobado por primera vez en el eclipse solar en 1919 mediante la observación de la luz de las estrellas localizadas cerca del borde del Sol. Las mediciones de las expediciones astronómicas encabezadas por Sir Arthur Eddington y Frank Dyson mostraron que la posición aparente de las estrellas se desplazaba. La observación de 1919 proporcionó un argumento a favor de la teoría de RG [41]. Además, los principios de RG han pasado todas las pruebas de precisión a la fecha, por ejemplo, el principio de equivalencia mediante el experimento de Eotvos[42], y, pruebas en el régimen de campo débil de alta precisión como la deflexión de la luz [43], el avance del perihelio de Mercurio[41], entre otros. Para una revisión reciente de las pruebas experimentales a RG puede consultarse [6].

A continuación examinaremos el contexto empírico de tres conceptos que se entienden dentro de RG: la materia oscura, la energía oscura y las ondas gravitacionales.

1.2.1. Materia oscura y energía oscura

El descubrimiento de la materia oscura y la energía oscura son hallazgos que han revolucionado nuestra comprensión del cosmos. Es así que en un siglo hemos pasado de

1 Introducción

una visión limitada de la Vía Láctea como el universo entero a una imagen amplia y dinámica de un universo en expansión acelerada, impulsado por componentes como la materia oscura y la energía oscura. Los avances en astronomía y cosmología del último siglo han transformado radicalmente la comprensión del tamaño y composición del universo [44, 2, 29]. Ahora sabemos que las galaxias se agrupan en cúmulos de galaxias y supercúmulos y que a gran escala, la estructura del universo está formada por regiones de sobre-densidad de galaxias unidas por filamentos y separadas por huecos prácticamente vacíos.

Es curioso que hasta principios del siglo XX se pensaba que la Vía Láctea constituía todo el universo. Aunque galaxias como Andrómeda ya habían sido observadas desde siglos previos, no se sabía que éstas eran galaxias, más bien, se referían a ellas como nebulosas espirales. Fue hasta 1926-1929, que Edwin Hubble descubrió que algunas nebulosas espirales eran galaxias independientes a la Vía Láctea [45, 46]. En 1929, Hubble descubrió la expansión del universo mediante la medición de las velocidades de recesión de las galaxias en función de su distancia a la Tierra[47]. Las observaciones de Hubble revelaron un universo mucho más grande y dinámico de lo que anteriormente se pensaba. Más tarde, en 1933, el astrónomo Fritz Zwicky [48], a través del estudio del movimiento de las galaxias en el cúmulo de Coma, encontró una discrepancia entre la masa luminosa y la masa dinámica del cúmulo, lo que le llevó a proponer la existencia de la materia oscura. Resultados sobre la dinámica galáctica de Jan Oort[49], parecían entenderse mejor considerando también la presencia de materia oscura en las galaxias. La idea de la materia oscura cobró mayor fuerza en 1970 cuando mediante el análisis de las curvas de rotación de distintas galaxias, se encontró que las estrellas más lejanas al centro galáctico se mueven más rápido que lo esperado para la cantidad de materia visible [50], lo cual llevó a replantear la existencia de la materia oscura como la causante de la forma de la curva de rotación de las galaxias. En las décadas de 1980 y 1990, se realizaron las primeras simulaciones computacionales de N-cuerpos para reproducir la estructura a gran escala del universo [51]. Estas simulaciones mostraron que era necesario considerar la materia oscura para replicar las observaciones cosmológicas. Con el paso de los años, la medición de la radiación cósmica de fondo, la distribución de galaxias, aportaron evidencia para conjeturar sólidamente la existencia de la materia oscura y que las galaxias se encuentran rodeadas de un halo de materia oscura [52, 53, 1]. Análisis relativamente recientes a partir de que todas las galaxias, incluida la Vía Láctea, tienen un halo de materia oscura [52, 54].

Por otra parte, el siglo XX cerró con la reafirmación mediante mediciones de supernovas tipo Ia⁵ de que la distancia entre las galaxias está aumentando, encontrando además que la expansión ocurre de manera acelerada[57, 58]. A falta de mayor claridad, a la energía que produce dicha aceleración acelerada se le nombra energía oscura. En seguida se encontró que la energía oscura podía describirse mediante una constante cosmológica

⁵De acuerdo a la clasificación de Lidman et al. [55], un objeto se clasifica como supernova tipo Ia si la línea de Si II o S II puede identificarse fácilmente en su espectro electromagnético, ó, si el espectro queda bien ajustado al espectro típico de SN Ia. Distintos modelos teóricos sugieren que las supernova tipo Ia emergen de la explosión termonuclear de una enana blanca que ha crecido hasta su masa de Chandrasekhar; esto también puede ocurrir dentro de un sistema binario [56].

denominada Λ en las ecuaciones de campo de RG[29]. Así pues, en los últimos años, se ha consolidado un modelo cosmológico llamado Λ MOF⁶ por contener energía oscura representada por Λ Y Materia Oscura Fría. En el cuadro 1.1 se puede consultar la proporción de las fuentes del contenido de materia-energía del Universo actual de acuerdo a las observaciones cosmológicas y el modelo Λ MOF.

Fuente	$\Omega_i = \rho_i / \rho_c$
Bariones	$\Omega_b \sim 0.04$
Radiación (fotones)	$\Omega_r < 8 \times 10^{-5}$
Materia oscura	$\Omega_m \sim 0.26$
Energía oscura (Λ)	$\Omega_\Lambda \sim 0.70$
Curvatura	$\Omega_k \leq 0.01$

Cuadro 1.1: Contenido de materia-energía del universo actual de acuerdo a las observaciones cosmológicas y el modelo Λ MOF reportadas en [2]. En la actualidad hay consenso internacional en ellos por su alta precisión. La cantidad $\rho_c \equiv 3H_0^2/(8\pi G) \simeq 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$ es la densidad crítica, con $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Es así que las observaciones cosmológicas del último siglo, particularmente de las últimas décadas, interpretadas dentro del modelo Λ MOF, revelan que en el Universo no solo hay materia ordinaria formada por bariones (fermiones y bosones) sino también materia oscura y energía oscura. El modelo Λ MOF a día de hoy es el paradigma estándar de la Cosmología y la Física.

Como ya mencionamos en la sección anterior, la energía oscura del modelo Λ MOF viola la condición de energía fuerte, en ese sentido, es un tipo de materia exótica. No obstante, la energía oscura del modelo Λ MOF no viola las condiciones de energía débil ni nula. Existen otros modelos cosmológicos como modelos de materia fantasma [59] o quintom[60], por ejemplo, que sí violan otras condiciones de energía además de la fuerte.

1.2.2. La detección de ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son una fuente de información para entender algunos de los procesos más energéticos del universo, como la colisión de agujeros negros, la explosión de supernovas, y una posibilidad de descubrir objetos astrofísicos nunca antes imaginados.

Las ondas gravitacionales fueron predichas teóricamente en 1916 (en la subsección (1.1.1) se aborda la deducción matemática) y fueron detectadas por primera vez en 2015[61] por la Colaboración LIGO-Virgo provenientes de la fusión de dos agujeros negros de $35.6 M_\odot$ y $28.6 M_\odot$ [61]. Anteriormente, habían sido detectadas indirectamente a través de la medición del cambio de periodo orbital de estrellas de neutrones en sistemas binarios [62].

⁶El modelo es más conocido como Λ CDM por estar incluida la constante cosmológica Λ siglas en inglés *Cold Dark Matter*.

1 Introducción

Para lograr las detecciones ha sido fundamental el análisis teórico de las fuentes de ondas gravitacionales. Existen distintos enfoques teóricos, algunos de ellos caen en aproximaciones lineales otros en aproximaciones perturbativas y también existen métodos numéricos donde se encuentran soluciones a las ecuaciones de RG con herramientas computacionales.

El descubrimiento de las ondas gravitacionales por los experimentos de interferometría laser de la colaboración LIGO y Virgo representa una novedosa herramienta para entender los fenómenos astrofísicos que emiten ondas gravitacionales de frecuencias relativamente altas, por encima de los Hz. Teóricamente se sabe que las fuentes que emiten ondas de estas frecuencias son principalmente, la colisión de agujeros negros y estrellas de neutrones.

Las recientes detecciones de ondas gravitacionales están aportando información nueva sobre objetos compactos como los agujeros negros y las estrellas de neutrones, cuya naturaleza interna es aún en gran parte desconocida. Además de las binarias compactas, podrían existir otros objetos auto-gravitantes, conocidos genéricamente como objetos compactos exóticos (ECOs), como ejemplo, las estrellas de materia oscura y los agujeros de gusano son otras posibles fuentes de ondas gravitacionales. Estos últimos dos objetos pueden construirse con campos escalares.

Entre los detectores de ondas gravitacionales, resaltan por su éxito los detectores basados en Interferometría Laser de la Colaboración LIGO-Virgo-KAGRA, además de otros detectores en funcionamiento o planeación.

1.2.3. LIGO-Virgo-KAGRA

El proyecto LIGO inició en 1984 con la parte experimental y tecnológica. La colaboración LIGO, Virgo, KAGRA [63, 64, 65] posee instrumentos de medición de ondas gravitacionales situados en Estados Unidos, Italia y Japón, respectivamente. Su funcionamiento se basa en Interferometría Laser que consiste en estudiar diferencias en el tiempo de llegada de un láser que viaja en una cavidad kilométrica en forma de L al vacío con espejos a los extremos. Cuando una onda gravitacional atraviesa los detectores, el tiempo de llegada de la luz del laser a los espejos se ve afectado. De forma posterior se analizan los datos del detector con un método de comparación de los datos con las señales gravitacionales predichas teóricamente en función de la fuente. Se evalúa la correlación entre los datos y la señal predicha. Este método recibe el nombre de "filtro adaptado".

La comunidad teórica sigue construyendo modelos de fuentes de radiación gravitacional para generar familias de formas de ondas gravitacionales debido a que la no-linealidad y complejidad de los procesos hace muy complicado o costosa la obtención de soluciones. Fue hasta 2005 cuando por primera vez de forma exitosa se simuló numéricamente la coalescencia de dos agujeros negros, incluyendo la fase de espiraleo, su fusión y el amortiguamiento final [66, 67].

A la fecha (Junio 2024), la Colaboración LIGO-Virgo-Kagra[63, 64, 65] (LVK) ha reportado más de 90 eventos[68], todos ellos corresponden a la coalescencia de binarias compactas con una probabilidad mayor a 50 %. Esto significa que en menos de una

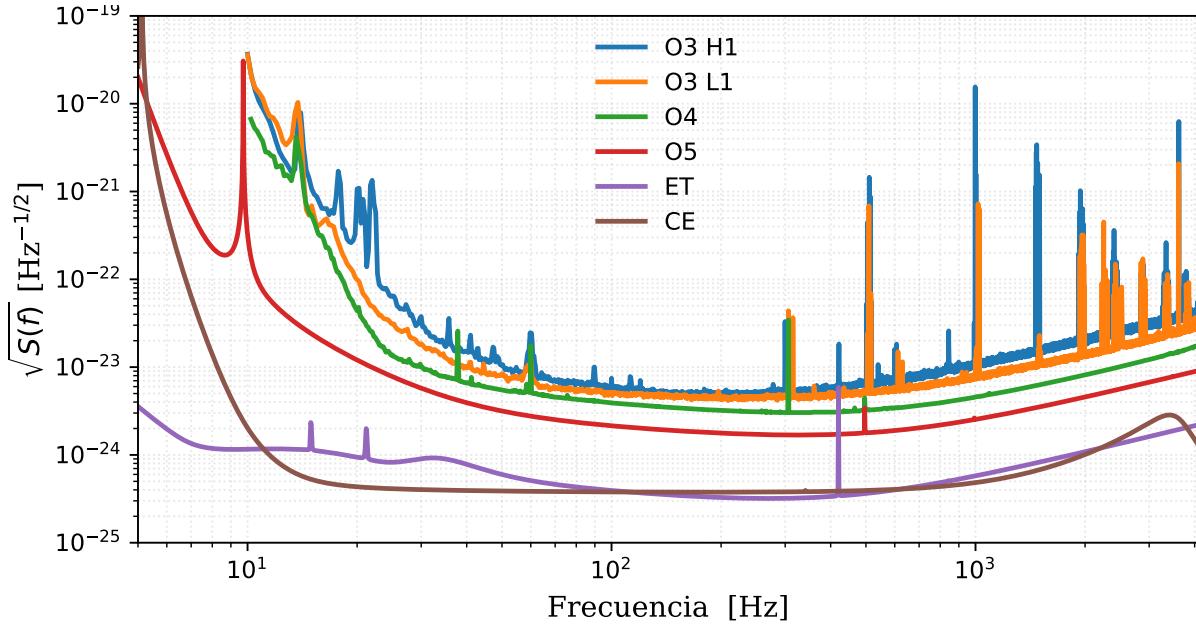


Figura 1.1: Densidad del ruido de la amplitud, $\sqrt{S(f)}$ en unidades de $[\text{Hz}^{-1/2}]$ de los interferómetros. Cada curva corresponde a un detector o corrida de observación. La curva azul 'O3 H1' corresponde al Periodo 3 del interferómetro en Hanford , de naranja se muestra la curva de 'O3 L1' para Livingston. El cuarto periodo de observación, 'O4', se encuentra en operación. La curvas O5 representa la densidad de ruido estimada para la corrida cinco de LIGO-Virgo. ET son las siglas de Einstein Telescope mientras que CE son siglas de Cosmic Explorer, ambos son observatorios de ondas gravitacionales en etapa de planeación.

1 Introducción

década, la astronomía de ondas gravitacionales ha detectado directamente ciento ochenta objetos compactos, casi todos son agujeros negros y hay algunas estrellas de neutrones. Estos eventos son de gran utilidad para estudiar las poblaciones de agujeros negros y estrellas de neutrones.

1.2.4. Otros detectores

Además de la colaboración LVK, existen otros esfuerzos por detectar ondas gravitacionales de otro rango de frecuencias. Resalta el proyecto Laser Interferometer Space Antenna (LISA) [69] que consistirá en tres satélites en el espacio separados por 2.5 millones de kilométricos de distancia entre sí, fungirán como los vértices de un triángulo equilátero los cuales a través de interferometría laser de alta precisión serán capaces de detectar el paso de ondas gravitacionales. Se espera que LISA observe la coalescencia de agujeros negros binarios de masas $10^4 - 10^7 M_{\odot}$, a corrimientos al rojo por debajo de $z \sim 10$ [70]; su rango de frecuencias de detección se estima entre 1 mHz y 0.1 Hz. Otro proyecto para la detección de ondas gravitacionales es el Einstein Telescope [71], y aunque sigue en planeación, se estima que podrá detectar señales con frecuencias entre 10 y 10,000 Hz[9]. También, se ha anunciado el proyecto Cosmic Explorer cuyos brazos de 40 km prometen observar ondas gravitacionales con un mayor rango de frecuencias [72]. En la Fig.(1.1) se muestra la sensitividad de estos detectores en función de la frecuencia de detección. La sensitividad se representa en términos de la densidad del ruido de la amplitud $\sqrt{S(f)}$, la cual se calcula a través de procesar la densidad del espectro de potencias del ruido esperado para cada detector[73, 5]. En la figura se aprecia que los siguientes detectores (CE y ET) tendrán una mayor sensitividad para distinguir el ruido de las ondas gravitacionales ⁷.

Cabe resaltar que en China también se está avanzando en la construcción de detectores de ondas gravitacionales, como los proyectos Taiji (muy similar a LISA)[74, 75] y TianQin [76].

Estas observaciones astronómicas recientes, revitalizan la RG en el sentido de que nos recuerdan y demuestran que la interpretación geométrica de la Gravedad es una poderosa herramienta para entender los procesos más energéticos del universo y su naturaleza misma.

La astronomía de ondas gravitacionales promete aportar claridad sobre la naturaleza del sector oscuro del universo[77] y la Gravedad en sí misma.

1.3. Configuraciones autogravitantes

Una condición para construir configuraciones autogravitantes en RG es que los espaciotiempos sean asintóticamente planos, es decir, que la curvatura tienda a cero conforme las coordenadas tienden a infinito. En este tipo de espaciotiempos, es posible estimar

⁷Cabe mencionar que los datos de la Fig.(1.1) me fueron compartidos por el Dr. Mauricio Antelis, a quien le agradezco su revisión y facilitación; él es miembro de la colaboración LIGO-Virgo-Kagra.

cantidades globales como la masa total, el radio característico, carga eléctrica total, momento angular total y el número de partículas [35]. Dada una masa M y un radio R , se define la compacidad de una configuración autogravitante como

$$\mathcal{C} \equiv \frac{GM}{c^2 R}. \quad (1.35)$$

Puesto que las unidades del factor G/c^2 son de distancia sobre masa, la compacidad es una cantidad adimensional que permite comparar que tan densa es la materia de las configuraciones autogravitantes.

Los agujeros negros son la primera configuración auto-gravitante obtenida a partir de las ecuaciones de campo de RG, los examineremos a continuación como preámbulo antes de describir las configuraciones autogravitantes que analizaremos en los siguientes tres capítulos, estos son: estrellas de neutrones, estrellas de bosones y agujeros de gusano, respectivamente.

1.3.1. Agujeros negros

La primera solución exacta no trivial a las ecuaciones de campo, Ec.(1.11), fue obtenida en 1916, cuando Karl Schwarzschild resolvió las ecuaciones de la RG, describiendo el campo gravitacional alrededor de una masa esférica, lo que llevó al concepto de un agujero negro.

Las primeras evidencias de su existencia provinieron de fuentes de rayos X, como Cygnus[78]. La Colaboración *Event Horizon Telescope* logró construir la imagen del agujero negro supermasivo localizado en el centro de la galaxia M87 [79]. En 2022, reconstruyeron a partir de interferometría la imagen del agujero negro supermasivo Sagitario A* localizado en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea [80]. Como dato adicional, recientemente han publicado imágenes de la polarización de su campo magnético[81], lo cual reafirma la participación de campos electromagnéticos a altas energías.

Aunque esta solución fue la primera en obtenerse a partir de las ecuaciones de RG, tardaron bastante tiempo desarrollar las herramientas teóricas y matemáticas para entender que la aparente singularidad de la solución de Schwarzschild localizada en $r = 2GM/c^2$, es una singularidad coordenada, el espaciotiempo es regular en ella. Además de la masa, los agujeros negros pueden tener carga eléctrica Q y momento angular total $J \leq GM^2/c$. El teorema de no pelo plantea que no existe otra cantidad que pueda asociarse a los agujeros negros más que éstas tres: M , Q y J . Es notable que tengan un comportamiento similar a otros objetos astrofísicos. El horizonte de eventos del agujero negro, definido como

$$R_{\text{AN}} \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.36)$$

significa que la compacidad de todos los agujeros negros, es independiente de su masa total:

$$\mathcal{C}_{\text{AN}} = \frac{G}{c^2} \frac{M}{R_{\text{AN}}} = \frac{1}{2}. \quad (1.37)$$

Los agujeros negros son las configuraciones autogravitantes con la más alta compacidad, le siguen las estrellas de neutrones.

1.3.2. Estrellas de neutrones

Cuando estrellas en secuencia principal de masas entre $\sim 8\text{-}20 M_{\odot}$ agotan su combustible nuclear comienzan a colapsar gravitacionalmente. Bajo ciertas condiciones, el colapso gravitacional es detenido por la presión de degeneración de neutrones del remanente estelar, el cual recibe el nombre de estrella de neutrones. Suelen tener masas entre 1.35 y $2.1 M_{\odot}$ y radios de 8 a 15 km [30]. Al utilizar estos valores en la Ec.(1.35), encontramos que las compacidades típicas para estrellas de neutrones $\mathcal{C} \sim 0.08 - 0.2$

A día de hoy, la física del interior de las estrellas de neutrones es en gran parte desconocida por lo que los modelos teóricos presentan una incertidumbre en la determinación de la masa máxima: $1.5 M_{\odot} \leq M_{\max} \leq 2.5 M_{\odot}$. Cada ecuación de estado $p = p(\rho)$, predice distintas características sobre las estrellas de neutrones, por ejemplo, una relación entre el radio R y la masa total M_T y una cota máxima para la masa de las estrellas de neutrones. Se espera con ondas gravitacionales acotar la ecuación de estado del interior de las estrellas de neutrones.

Dada una ecuación de estado $p = p(\rho)$, el interior de la estrella queda descrita por el siguiente tensor de energía-momento

$$T^{ab} = (\rho c^2 + p)u^a u^b + pg^{ab}, \quad (1.38)$$

donde u^a es la tavelocidad definida como $u^a \equiv dx^a/d\tau$, siendo τ el tiempo propio.

Para modelar estrellas de neutrones, en una primera aproximación se pretende construir soluciones con simetría esférica e independientes del tiempo, por lo tanto se parte del siguiente ansatz para el tensor métrico:

$$g_{ab}dx^a dx^b = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.39)$$

que al sustituir en las ecuaciones de campo (Ec. (1.11)) implica el sistema de ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$p'(r) = -\frac{G(\rho + p/c^2)(M(r) + 4\pi r^3 p/c^2)}{r^2(1 - 2GM(r)/(c^2 r))} \quad (1.40a)$$

$$M'(r) = 4\pi r^2 \rho \quad (1.40b)$$

$$\Phi'(r) = \frac{G(M(r) + 4\pi r^3 p/c^2)}{r^2(1 - 2GM(r)/(c^2 r))}. \quad (1.40c)$$

Fuera de la estrella ($R \leq r$), el espaciotiempo queda descrito por la métrica de Schwarzschild. Por fortuna, como nos encontramos lejos de las fuentes y fuera de la estrella ($R \leq r$), el espaciotiempo queda descrito por la métrica de Schwarzschild y se puede trabajar con aproximaciones, como el formalismo cuadrupolar, como mostraremos en el capítulo dos.

En 2017 por fin se observaron ondas gravitacionales de la fusión de estrellas de neutrones. Lo más resaltante es que también se detectaron ondas electromagnéticas (rayos gamma y luz visible en primer lugar) del mismo evento [82, 83]. Además, también se

detectó por primera vez una kilonova (cuya diferencia con la supernova es que la primera es de menor magnitud). Las estrellas de neutrones en binarias han emergido como objeto principal de estudio en la astronomía de multi-mensajeros. La señal GW170817, al tener como complemento señales electromagnéticas de rayos gamma con un tiempo de retraso de 1.7 s, permitió derivar una restricción para la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales c_{OG} respecto a la velocidad de la luz c y se obtiene que son prácticamente iguales. Tales resultados restringen o descartan teorías de Gravedad modificada. Recientemente, otras señales como GW190425 [84] fueron identificadas como ondas gravitacionales provenientes de la fusión de estrellas de neutrones en sistemas binarios.

Muchas estrellas de neutrones emiten pulsos electromagnéticos muy precisos que están relacionados con la rotación de las estrellas cuantificada a través del espín. Los espines \mathbf{S}_i de dos estrellas de neutrones $i = 1, 2$ se relacionan con la frecuencia angular Ω_i a través de $\mathbf{S}_i = I_i \Omega_i$. Esta rotación aporta una energía cinética rotacional dada por $E_{\text{rot}_i} = I_i \Omega_i^2 / 2$, donde $\Omega_i = |\Omega_i| = 2\pi/P_{s_i}$, P_{s_i} es el periodo de espín y I_i es su momento de inercia. Para estrellas de neutrones $I_i = a_i(x) M_i R_i^2$, donde x es el parámetro adimensional de compacidad a_i que depende de las ecuaciones de estado elegidas, $0 \leq a \leq 1$. Por un lado, en el régimen Newtoniano, si los espines \mathbf{S}_i ($i = 1, 2$) son considerados, el momento angular orbital \mathbf{L} no es una cantidad conservada, sino el momento angular total \mathbf{J} dado por $\mathbf{J} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{L}$. Si la dirección de los espines no se restringe, el sistema está determinado por siete ecuaciones de Euler-Lagrange: una para la coordenada radial r , y las demás para ambos espines \mathbf{S}_i . Además, la energía rotacional total $E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}_1} + E_{\text{rot}_2}$ debe ser añadida a la función lagrangiana dada en la función lagrangiana del sistema. Luego, en la fase inspiral, los espines introducen un acople espín-orbita y espín-espín en la dinámica de la binaria y en las ondas gravitacionales. Estas complejas relaciones causan que si los espines no están alineados con el momento angular orbital, entonces los espines y el campo orbital de la binaria precesan [85], esto es, tanto los espines \mathbf{S}_i como el momento angular orbital \mathbf{L} precesan en torno a un momento angular total.

1.3.3. Estrellas de bosones

Para una revisión profunda sobre estrellas de bosones pueden revisarse referencias como [14, 86, 87, 88]. A continuación se describen algunos aspectos cualitativos sobre la construcción de estas soluciones auto-gravitantes.

Las estrellas de bosones son soluciones a las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon aplicadas a un campo escalar. Aunque se trata de objetos astrofísicos hipotéticos (su existencia no está confirmada), cada vez cobran mayor interés como posibles configuraciones auto-gravitantes de materia oscura y fuente de ondas gravitacionales. Las estrellas de bosones tienen asociado un tensor de materia-energía que produce una curvatura sobre el espacio-tiempo que se determina resolviendo las ecuaciones de campo de RG.

El campo escalar es un tipo de campo que ha sido utilizado para describir partículas elementales y fenómenos cosmológicos, incluyendo la energía oscura, la materia oscura [16] y la Inflación. Desde los trabajos pioneros de Kaup en 1967 [89] Ruffini y Bonazolla[90] en 1969, consideran campos escalares para explorar configuraciones auto-

1 Introducción

gravitantes. En el contexto cosmológico, los campos escalares fueron propuestos por primera vez en 1988 por C.Wetterich [91]. Él propone que la energía oscura podría ser generada por un campo escalar dinámico y, entre otras cosas, muestra como el campo escalar afectaría las proporciones de densidad de energía de las componentes del universo. Casi paralelamente, Ratra y Peebles estudian las consecuencias cosmológicas de suponer un campo escalar homogéneo, auto-interactuante y en evolución temporal [92].

El campo escalar pueden interpretarse como un campo bosónico. Los bosones son partículas elementales con espín entero, pueden tener o no masa y carga. Les distingue que no cumplen el principio de exclusión de Pauli, por lo que un conjunto de bosones sí puede ocupar el mismo estado cuántico dentro de un sistema.

La función lagrangiana del campo escalar es,

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{\epsilon\sqrt{|g|}}{2} (g^{ab}\nabla_a\Phi\nabla_b\bar{\Phi} + V(|\Phi|^2)) , \quad (1.41)$$

donde ϵ puede valer 1 ó -1. En casos donde el campo escalar es invariante bajo transformaciones de la forma $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha}$ (transformaciones globales U(1)), el campo escalar tiene una cantidad conservada que recibe el nombre de densidad de corriente de Noether j^a dada por

$$j^\mu = -\frac{ig^{\mu\nu}}{2} [\Phi^*(\nabla_\nu\Phi) - \Phi(\nabla_\nu\Phi)^*] . \quad (1.42)$$

Mediante la integración de la ley de conservación Σ_t se obtiene el número total de partículas[90],

$$\mathcal{N} = \int_{\Sigma} j^\mu n_\mu dV , \quad (1.43)$$

siendo Σ una hipersuperficie tipo espacial, n^a un vector tipo-tiempo normal a Σ , con $n_a n^a = -1$, $dV = \sqrt{\gamma} d\eta d\theta d\varphi$ es el elemento de volumen, γ es el determinante de la métrica espacial. La masa total de las configuraciones auto-gravitantes puede calcularse mediante la expresión de Komar

$$M = 2 \int_{\Sigma} R_{ab} n^a \xi^b dV , \quad (1.44)$$

en esta expresión ξ es el vector de Killing tipo tiempo $\xi = \partial_t = (1, \vec{0})$.

Las estrellas de bosones, dadas por la función lagrangiana (1.41) con $\epsilon = 1$, están formadas por un número total \mathcal{N} de partículas elementales bosónicas de masa m_ϕ dadas por la Ec.(1.43). También, poseen una masa total M dada por la Ec.(1.44) y un radio característico que a veces se define como aquel que contiene el 99 % de la masa total [93]. Las soluciones estables satisfacen una relación específica entre su masa total y su radio total, como veremos en el capítulo tres. Mediante el análisis de las soluciones numéricas se ha encontrado que las estrellas de bosones son menos compactas que los agujeros negros pero pueden ser tan o más compactas que las estrellas de neutrones.

Existen distintos tipos de estrellas de bosones. La más simple corresponde a una solución de campo escalar Φ real, sin masa ni espín, esta solución también es conocida

como geón [89, 94]. En 1969, Ruffini y Bonazolla[90] presentan configuraciones auto-gravitantes compuestas por campos escalares de bosones no-interactuantes, y, encuentran que las propiedades de estas soluciones son muy distintas que las configuraciones compuestas por fermiones.

El campo escalar Φ satisface la ecuación de Klein-Gordon, la cual es la generalización relativista de la función de onda que satisface la ecuación de Schrodinger. La función de onda es un concepto complejo que ocupó el centro de las discusiones entre científicos como Heinsenberg, Schrodinger y Einstein. En el régimen Newtoniano, la función de onda puede acoplarse a un campo gravitacional a través del sistema de ecuaciones Schrodinger-Poisson, donde la función de onda se interpreta como una probabilidad de masa que genera un campo gravitacional. En cambio, en el régimen relativista, el campo gravitacional es una propiedad geométrica del espacio-tiempo que depende del tensor de energía-momento, el cual actúa como fuente en las ecuaciones de RG. En este contexto se pueden estudiar objetos auto-gravitantes generados por distintos tipos de tensores de energía-momento.

Dos estrellas de bosones pueden colisionar y emitir ondas gravitacionales [93]. Se trata de una colisión simple en el sentido de que la evolución está únicamente determinada por la interacción gravitacional. La detección de estas ondas gravitacionales es un hecho interesante en sí mismo, y también como posible evidencia de la existencia de objetos compactos compuestos por materia oscura. Las estrellas de bosones pueden emitir ondas gravitacionales cuando colisionan dos de ellas frontalmente. La masa total de dichas estrellas está intimamente relacionada con la masa del campo escalar que la compone, de modo tal que mientras más ligero es el campo escalar, más grandes pueden ser sus configuraciones estables macroscópicas. Del mismo modo, mientras más ligero es el campo escalar, mayor es la amplitud y duración de las ondas gravitacionales emitidas, como demostraremos en el capítulo tres.

1.3.4. Agujeros de gusano

Las primeras soluciones de las ecuaciones de RG que representaban un agujero de gusano atravesable fueron obtenidas en 1973 [95, 96], se trataba de soluciones exactas asintóticamente planas y regulares en todos los puntos. En 1988 [17], se demostraba bajo qué condiciones sería posible construir un objeto que conectase regiones distantes del universo a través de una garganta. Así como en el caso de las estrellas de bosones, las primeras soluciones de agujeros de gusano se obtuvieron bajo ciertas suposiciones que con el paso de los años fueron relajándose de modo que a la fecha, se han construido teóricamente agujeros de gusano compuestos por campos escalares con auto-interacción [40, 97], así como agujeros de gusano compuestos por varios campos escalares [98, 99, 100], entre muchos otros tipos de agujeros de gusano.

Para no tener dependencia temporal en las ecuaciones de campo, asumimos que el campo escalar complejo tiene un ansatz armónico dado por:

$$\Phi(\eta, t) = \phi(\eta)e^{i\omega t}, \quad (1.45)$$

donde ω es una constante real.

1 Introducción

Los agujeros de gusano atravesables violan la condición de energía fuerte (veáse Sec.1.1.3), en ese sentido, están formados por materia exótica. Diversos estudios donde confinan materia exótica de campos escalares pueden consultarse en los artículos de investigación: [101, 102, 16], entre otros.

- Un agujero de gusano descrito con campo escalar con simetría esférica y masivo, debe tener constante de auto-interacción λ [99].
- La frecuencia del campo escalar ω está relacionada con el parámetro de masa μ .

En el capítulo cuatro, examinaremos un agujero de gusano con carga eléctrica partiendo de la siguiente acción total:

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{\mathcal{R}}{16\pi} + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\text{EM}} \right] d^4x, \quad (1.46)$$

donde

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi) (D_\nu \Phi)^* + \mu^2 |\Phi|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4 \right). \quad (1.47)$$

y \mathcal{L}_{EM} está dada por la Ec.(1.9). Notemos que \mathcal{L}_Φ anterior es igual a la Ec. (1.41) pero con $\epsilon = -1$, $\nabla_a \rightarrow D_a$ y $V(|\Phi|) = \mu^2 |\Phi|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4$. El término D_a es una derivada covariante generalizada que será descrita en el capítulo cuatro.

1.4. Como se organiza esta tesis

En este primer capítulo introductorio, se resumió el contexto astrofísico observational. Los siguientes capítulos están organizados de la siguiente manera. Las ondas gravitacionales son el tema central en los dos siguientes capítulos. En el primero de ellos, se estudian bajo la aproximación lineal siendo la fuente un sistema binario de estrellas de neutrones con campos magnéticos, como se describe a detalle en el Capítulo dos. En la segunda investigación, se estudian ondas gravitacionales generadas por la colisión frontal de objetos auto-gravitantes de campo escalar, que aunque a la fecha no han sido observados, son una posible y potencial manera de describir a las estrellas de materia oscura, esto se describe en el capítulo tres. En la tercera investigación, puesto que trabajamos el tema de campo escalar y los campos electromagnéticos en las primeras dos investigaciones, nos resultó interesante y natural utilizar ambos conceptos para construir una nueva solución numérica de las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon-Maxwell de agujero de gusano eléctrico, volviendo al tema de inicio, la RG, como puede estudiarse en el capítulo cuatro. Finalmente, en el último capítulo se presentan conclusiones generales sobre los campos gravitacionales producidos por estrellas de neutrones, estrellas de bosones y agujeros de gusano.

2 Ondas gravitacionales de binarias magnetizadas en el régimen lineal

El presente capítulo está basado en el artículo [20], que lleva por título *On the role of magnetars-like magnetic fields into the dynamics and gravitational wave emission of binary neutron stars* y fue elaborado por Mariana Lira (ICN-UNAM), Juan Carlos Degollado (ICF-UNAM), Claudia Moreno (UdG) y Dario Nuñez (ICN-UNAM). Todas las figuras que aparecen en este capítulo fueron tomadas de dicho trabajo.

2.1. Resumen

Modelamos la interacción gravito-magnética de un sistema binario de estrellas de neutrones en el esquema más simple donde cada estrella es un dipolo magnético perfecto. Somos capaces de incluir los efectos magnéticos en la dinámica newtoniana y en la fase espiral de su emisión de ondas gravitacionales usando una descripción equivalente de un cuerpo. Además, en la etapa espiral determinamos el papel de la interacción magnética en las ondas gravitacionales generadas por el sistema binario y obtenemos fórmulas explícitas para la evolución de la separación de las estrellas, el tiempo para alcanzar un radio mínimo, la luminosidad gravitacional y el cambio de frecuencia de las ondas gravitacionales, todo esto dentro de la aproximación cuadrupolar. Para la magnitud extrema del campo magnético que se considera existente en estos sistemas binarios 10^{16} G, somos capaces de mostrar que su efecto sobre las cantidades observables es del orden de la corrección 2PN, ya cerca del rango de detección de los observatorios de ondas gravitacionales. También discutimos casos en los que el campo magnético podría tener una influencia más significativa.

2.2. Introducción

Las binarias de estrellas de neutrones son uno de los sistemas más estudiados en la actualidad tanto por la comunidad de astronomía de ondas gravitacionales, como por la comunidad de astrofísica teórica, al ser éstos un laboratorio ideal para poner al límite los modelos sobre la dinámica de la materia relativista a altas energías. Las estrellas de neutrones altamente magnetizadas están caracterizadas por períodos de espín típicamente entre $P \sim (10^{-3} - 12)s$ y con un cambio en el tiempo de $\frac{dP}{dt} \sim (10^{-16} - 10^{-12})ss^{-1}$ [11, 103]. Estas aproximaciones son consistentes con los campos magnéticos sobre la superficie de los pulsares del orden de $B \sim 10^{11} - 10^{13}$ G [104, 105], o tan intensos como

$B \sim 10^{14} - 10^{15}$ G en magnetares [106], e incluso arriba de 10^{16} G son valores que se han encontrado en estrellas de neutrones recién formadas [107].

Distintos escenarios donde los campos magnéticos juegan roles importantes han sido estudiados en la literatura reciente, por ejemplo, en [108] se realizan simulaciones magnetohidrodinámicas de la coalescencia de binarias de estrellas de neutrones y muestran que los campos magnéticos de las estrellas de neutrones de 10^{12} G son amplificados por varios ordenes de magnitud dentro de los primeros milisegundos después de la fusión, esto ocurre por inestabilidades de Kelvin-Helmoltz. La fusión de estrellas de neutrones binarias también es progenitora de destellos cortos de rayos gamma debido a los campos magnéticos intensos de una o dos estrellas de neutrones, y su alta frecuencia orbital [109, 110, 111, 112, 113]. Otros estudios sugieren que la interacción magnética entre dos estrellas de neutrones en proceso de fusión, modifican considerablemente la forma de las ondas gravitacionales de la radiación [114, 115, 116]. Las simulaciones magnetohidrodinámicas relativistas reportadas en [87, 88] han mostrado que algunas fusiones de estrellas de neutrones binarias son fuentes ideales para la astronomía de multimensajeros debido a su característico flujo de Poynting y su fuerte emisión de ondas gravitacionales.

Plantillas de ondas gravitacionales han sido modeladas para la fase de espiraleo, donde dos objetos se orbitan y se acercan uno a otro mientras la frecuencia orbital va incrementando. En esta fase, el enfoque post-Newtoniano a la relatividad general ha mostrado estar adecuado para evolucionar con un alto grado de precisión sistemas binarios [117]. [118]. A primer orden, el enfoque postnewtoniano recibe el nombre de formalismo cuadrupolar durante la fase de espiraleo ha mostrado ser una aproximación válida siempre y cuando la separación orbital de la binaria sea más grande que un radio mínimo al mismo tiempo que la velocidad orbital sea muy pequeña con respecto a la velocidad de la luz.

En este capítulo, mostramos que los campos magnéticos intensos cambian la estimación de los parámetros intrínsecos de la binaria; obtenemos que aunque los cambios son muy pequeños, el efecto puede ser inferido a partir de la señal gravitacional[19].

Se ha mostrado que bajo ciertas circunstancias, distintos efectos podrían modificar la forma de las ondas gravitacionales emitidas por la binaria a segundo orden del formalismo postnewtoniano, algunos de ellos son: el efecto post-Newtoniano [119], el acople espín orbita [120], espín-espín [121], auto-espín, además de un acople cuadrupolar del término monopolar[122, 123]. Más aún, se sabe que también puede haber contribuciones de marea [124, 125] y éstas pueden afectar la dinámica de la binaria y por lo tanto la forma de las ondas gravitacionales.

En este capítulo, consideramos un sistema de dos cuerpos magnetizados aislados en el régimen lineal de relatividad general, donde el Formalismo Cuadrupolar continúa siendo adecuado para modelar la fase de espiraleo y para estimar la emisión de ondas gravitacionales. Nos concentraremos en el efecto dipolo magnético-dipolo magnético [107] y consideraremos el caso donde los efectos de la rotación de las estrellas sobre la dinámica orbital es insignificante. Siguiendo un enfoque introducido en la Ref. ([107]), mostramos que utilizando el modelo dipolar para estrellas de neutrones, la dinámica de la binaria se reduce a un problema de un cuerpo efectivo, muy similar al caso no-magnetizado. Con este modelo calculamos el efecto de los campos magnéticos sobre la dinámica de

las estrellas de neutrones binarias de forma íntegra. Más aún, calculamos la amplitud de las ondas gravitacionales o strain para distintos valores de campos magnéticos y utilizamos estos datos para estimar la masa de las estrellas de neutrones fuente. Posteriormente, aplicamos este modelo de binarias magnetizadas para dos sistemas diferentes: en el primero consideramos una binaria de estrellas de neutrones típica y explicamos el efecto de los campos en varias observables, tales como el radio mínimo, el cambio del periodo orbital, la luminosidad gravitacional, el cambio logarítmico de la frecuencia de las ondas gravitacionales y el strain. Encontramos que la desviación en estas observables, con respecto a los casos respectivos no magnetizados, pueden ser hasta del orden de $\mathcal{O}(10^{-5})$ cuando la intensidad de los campos magnéticos es $B = 8 \times 10^{16}$ G. En el segundo enfoque, suponemos que la luminosidad gravitacional y el cambio logarítmico del periodo orbital son funciones conocidas y las utilizamos para inferir el cambio de las masas de la binaria como función de los campos magnéticos presentes. Así, encontramos que, con intensidades de los campos magnéticos del orden de $B \sim 10^{16}$ G, las masas de las estrellas de neutrones podrían estar sub o sobre estimadas con respecto a las fuentes no-magnetizadas por un factor hasta del 4 %. En nuestro análisis, también consideramos algunos resultados astrofísicos recientes, en particular consideramos el evento GW170817, debido a su importancia como primera evidencia de la colisión de las estrellas de neutrones y su importancia para el subsecuente desarrollo en la astrofísica. Nuestros resultados sobre el efecto de los campos magnéticos en ciertas observables, son consistentes con los reportados en simulaciones magneto-hidrodinámicas recientes, [126] de esta manera estamos dotando de una herramienta más simple para generar plantillas de ondas gravitacionales de estrellas de neutrones binarias tomando en cuenta la interacción magnética, claro, con la restricción de modelar únicamente la fase de espiraleo.

Como está organizado el resto del capítulo.

En el primer apartado de esta sección introductoria, hablaremos de las propiedades de las estrellas de neutrones binarias incluyendo sus propiedades magnéticas. El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2.3, introducimos los modelos para estrellas de neutrones binarias, incluyendo campos magnéticos en el enfoque dipolar y la dinámica del sistema binario utilizando la Gravedad Newtoniana para describir las órbitas. En la sección 2.4 describimos la formulación cuadrupolar para ondas gravitacionales y obtenemos la forma de las ondas gravitacionales, incluyendo amplitudes, frecuencias y evolución de la separación de la binaria, además de la estimación de las masas fuente. En la sección 2.5 presentamos algunos resultados relacionados con la estimación de parámetros. En la sección 2.5.1 describimos el ejemplo concreto de la dinámica y emisión de ondas gravitacionales de una binaria magnetizada de masa total de $2.8 M_{\odot}$ y campos magnéticos constantes de $B_1 = B_2 = 8 \times 10^{16}$ G. En la 2.5.2 analizamos cualitativa y cuantitativamente el efecto de la presencia de campos magnéticos dipolares en un rango de $B \sim 10^{12}$ G a $B \sim 10^{16}$ G sobre variables de la fase de espiraleo. Este rango es similar a otros utilizados en referencias como [103, 106]. En la sección 2.5.3, utilizamos la luminosidad gravitacional y la tasa de cambio logarítmico del periodo orbital del evento GW170817 para mostrar que dada la incertidumbre en la determinación de las masas a partir de los datos observacionales, es posible obtener un

límite para el valor máximo de los campos magnéticos de las estrellas de modo que las masas estimadas en los caos magnetizados más intensos, siguen siendo consistentes con las observaciones. Finalmente, en la sección 2.6 presentamos nuestras conclusiones de esta investigación. En nuestro análisis, utilizamos unidades CGS-gaussianas, donde los campos magnéticos se miden en Gauss ($G = g^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$) y los momentos magnéticos en emu igual a $g^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$.

2.3. Descripción Newtoniana de la binaria magnetizada

En la primera parte, 2.3.1, revisamos las condiciones bajo las cuales el potencial gravito-magnético puede ser analizado como un problema de un cuerpo para el sistema binario magnetizado. Una vez que hemos descrito la interacción magneto-gravitacional como un potencial central, en la segunda parte, 2.3.2, desarrollamos las ecuaciones de movimiento a través de la función lagrangiana del sistema binario. El principal propósito de esta sección es explorar el efecto magnético en la dinámica Newtoniana del sistema binario, como una herramienta necesaria en la subsecuente incorporación de los efectos magnéticos en la emisión de ondas gravitacionales, lo cual será analizado en la siguiente sección 2.4.

2.3.1. Modelo de dos objetos compactos magnetizados

Para abordar el análisis del sistema binario magnetizado, partimos de la premisa de que cada objeto se caracteriza intrínsecamente por sus masas M_1 y M_2 , así como por sus momentos magnéticos dipolares \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 . Con el propósito de enfocarnos específicamente en el efecto magnético, optamos por despreciar otras propiedades de los objetos.

Las posiciones de estas estrellas, representadas por $\mathbf{r}_i(t)$, se definen en un marco de referencia cuyo origen está en el centro de masa del sistema. En este marco, se cumple por definición que $M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = 0$. Esta elección de referencia presenta la ventaja de simplificar la dinámica del sistema, reduciéndola a la descripción de un cuerpo con masa reducida $\mu = M_1M_2/M$ y posición relativa $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, donde $M = M_1 + M_2$ denota la masa total del sistema.

Utilizaremos la aproximación magnetostática para el interior de las estrellas, donde asumimos que la carga eléctrica neta es cero [127, 128]. También, consideraremos que los campos magnéticos externos de las estrellas son un campo dipolar perfecto \mathbf{m}_i y por lo tanto, el momento magnético está relacionado con el radio de la estrella [107]¹. En este régimen magnetostático, el campo magnético \mathbf{B}_1 debido a la primera estrella en un punto arbitrario \mathbf{x} , está determinado por:

¹El radio de cada estrella está relacionado con su masa a partir de una ecuación de estado[129].

Una ecuación de estado realista para la materia de las estrellas de neutrones aún no se conoce con precisión, sin embargo, está bien acotado que para masas de 1 a $2M_\odot$ [130, 115] distintas ecuaciones de estado dan radios entre 8 y 16 km [87, 131]. Por simplicidad, usamos como valor típico del radio de las estrellas 12 km.

2.3 Descripción Newtoniana de la binaria magnetizada

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{\mathbf{n}}_1 (\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (2.1)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_1 = (\mathbf{x} - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|$. La energía potencial magnética resultante de la interacción entre un dipolo magnético \mathbf{m} con un campo magnético externo \mathbf{B} está dado por el producto punto $U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ [132]. Entonces, la energía potencial magnética en la posición \mathbf{r}_2 es,

$$\begin{aligned} U_m(1 \rightarrow 2) &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = -\mathbf{m}_2 \cdot \frac{3\hat{\mathbf{r}} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3} \\ &= -\frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde hemos utilizado la Ec. (2.1) y el vector unitario $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$.

Siguiendo [126, 133], en esta investigación asumimos que los momentos magnéticos permanecen paralelos al momento angular total del sistema $\mathbf{L} = \mu (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ durante la fase de espiraleo; por lo tanto, $\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$. De este modo, la torca magnética entre los dipolos $\mathbf{N} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{B}_2$ es nula [132] y la Ec. (2.2) se reduce a:

$$U_m(1 \rightarrow 2) = \frac{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (2.3)$$

Más aún, vamos a asumir que los momentos magnéticos de cada estrella son de la forma $m_i = R_i^3 B_i / 2$. En este punto, introducimos el *parámetro magnético* b como el producto punto de los momentos magnéticos:

$$b \equiv \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = \pm \frac{(R_1 R_2)^3 B_1 B_2}{4}, \quad (2.4)$$

donde el signo + o - indica si los dipolos están alineados o anti-alineados, respectivamente. Utilizando la Ec. (2.4) encontramos que es posible codificar la interacción magnética entre los dipolos magnéticos a través de una energía potencial magnética de la forma $U_m = b/r^3$.

Podemos estimar en ordenes de magnitud, la fracción de la energía potencial magnética respecto a la contribución gravitacional a la energía potencial $U_g = -GM\mu/r$ para tener una intuición del efecto físico del parámetro magnético. La fracción de los potenciales se reduce a:

$$\frac{U_m}{U_g} = -\frac{b}{GM\mu r^2} \quad (2.5)$$

Vamos a reescalar esta expresión en términos de las cantidades típicas de estrellas de neutrones binarias.

En el caso de las estrellas de neutrones binarias, consideraremos que sus masas individuales son iguales con valor $\sim 1.4 M_\odot$ y los radios ~ 12 km. Respecto a los valores de

campos magnéticos, utilizamos $\sim 10^{16}\text{G}$ porque son los valores máximos estimados en magnetares (aunque no los máximos teorizados). Entonces,

$$\frac{U_m}{U_{g\ EN}} \sim 1.0 \times 10^{-4} \left(\frac{R_1}{12\text{ km}} \right)^3 \left(\frac{B_1}{10^{16}\text{ G}} \right) \left(\frac{R_2}{12\text{ km}} \right)^3 \left(\frac{B_2}{10^{16}\text{ G}} \right) \\ \times \left(\frac{2.8 M_\odot}{M} \right) \left(\frac{0.7 M_\odot}{\mu} \right) \left(\frac{12\text{ km}}{r} \right)^2, \quad (2.6)$$

donde hemos utilizado la Ec. (2.4).

Podemos observar a partir de la Ec. (2.6), que la contribución magnética sobre el potencial gravitacional es $\mathcal{O}(10^{-4})$. Esto está en acuerdo con los análisis post-Newtonianos, los cuales reportan que la interacción dipolo-dipolo magnético produce una corrección de segundo orden en el formalismo post-Newtoniano [107, 134, 127].

2.3.2. Dinámica Newtoniana

Como acabamos de describir, la interacción magnética entre los dipolos magnéticos de las estrellas del sistema binario puede ser descrito utilizando un potencial central. Entonces, la interacción gravitomagnética, desde el centro de masa, está dado por la suma del potencial magnético U_m y gravitacional U_g :

$$U(r) = -\frac{GM\mu}{r} + \frac{b}{r^3} = -\frac{GM\mu}{r} \left(1 - \frac{b}{GM\mu r^2} \right), \quad (2.7)$$

donde b está definida en la Ec. (2.4). Con este potencial podemos utilizar el formalismo lagrangiano para reducir la dinámica de la binaria a un problema equivalente de un cuerpo de masa reducida μ localizada en \mathbf{r} . La posición de cada estrella se recupera utilizando las relaciones $\mathbf{r}_1 = (M_2/M)\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_2 = -(M_1/M)\mathbf{r}$.

Como el potencial U solo depende de la posición r , el momento angular total se conserva, entonces, el movimiento orbital se restringe a un plano. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, elegimos el plano ecuatorial. Así, la función lagrangiana² del sistema queda definida como la diferencia de la energía cinética $T = \mu\dot{r}^2/2 + \mu r^2\dot{\varphi}^2/2$, y la energía potencial dada en la Ec. (2.7), esto es,

$$\mathcal{L}(r, \varphi) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{GM\mu}{r} - \frac{b}{r^3}. \quad (2.8)$$

Dado que la función lagrangiana en la Ec. (2.8) es independiente de φ tenemos la conservación del momento angular directamente de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow l = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (2.9)$$

²La función lagrangiana de la ec. (2.8) es Newtoniana, se obtiene a partir de la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema newtoniano, no corresponde a la definición relativista presentada en el capítulo introductorio en la ec. (3.2).

2.3 Descripción Newtoniana de la binaria magnetizada

La energía total del sistema $E = T + U$ puede escribirse como

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) , \quad (2.10)$$

donde $V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} + \frac{b}{r^3}$ es el potencial efectivo, además, hemos utilizado la relación entre l y $\dot{\varphi}$ dada en la Ec. (2.9). En la otra mano, la ecuación de Euler-Lagrange de la coordenada r es

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} - \frac{3b}{\mu r^4} = 0 . \quad (2.11)$$

Con un cambio de variable $u = 1/r$ tenemos

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{l}{\mu}\frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\varphi} \quad \text{y} \quad \ddot{r} = -\frac{l}{\mu}\dot{\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} , \quad (2.12)$$

y, después de algunas simplificaciones obtenemos que la Ec. (2.11) se vuelve

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{R} = \delta_b u^2 , \quad (2.13)$$

donde

$$R \equiv \frac{l^2}{GM\mu^2} \quad \text{y} \quad \delta_b = -\frac{3\mu b}{l^2} . \quad (2.14)$$

En el lado derecho de la Ec. (2.13) tenemos un término no lineal inducido por la interacción dipolar magnética. Las soluciones sin campo magnético $b = 0 = \delta_b$, son secciones cónicas $u(\varphi) = \frac{1}{R}(1 + \epsilon \cos \varphi)$, con excentricidad $\epsilon^2 \equiv 1 + 2El^2/(G^2M^2\mu^3)$.

Es notable que el término no-lineal en la Ec. (2.13) tiene la misma forma que la corrección relativista al potencial Newtoniano dado por el espacio-tiempo de Schwarzschild. En la siguiente sección mostraremos que las órbitas circulares están permitidas sobre un rango de campos magnéticos.

2.3.3. Movimiento circular

Es sabido que la emisión de ondas gravitacionales tiende a circularizar las órbitas elípticas, al grado que antes de la fusión, las órbitas ya han sido circularizadas [135, 136, 137]. Puesto que el movimiento circular domina la dinámica de las estrellas de neutrones binarias durante la fase de inspiraleo, enfocaremos nuestro análisis a este tipo de órbitas.

Las órbitas circulares ($r = \text{cte.}$) son posibles si la condición $\ddot{r} = 0$ en la Ec. (2.11) se satisface. En el escenario que estamos considerando, es un caso particular para la combinación de las direcciones entre los campos magnéticos y el momento angular.

Haciendo $\ddot{r} = 0$ en la Ec. (2.11) y resolviendo para r obtenemos

$$r_c = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{12b}{GM\mu R^2}} \right) , \quad (2.15)$$

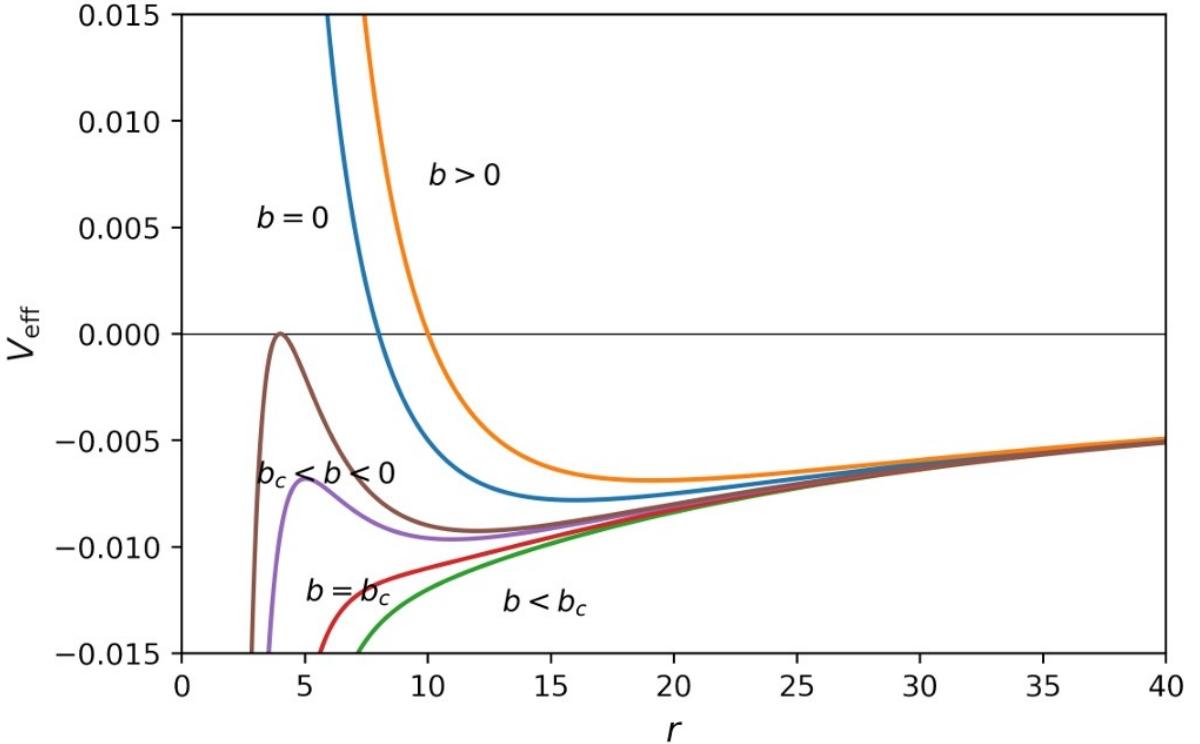


Figura 2.1: Potencial efectivo V_{eff} . Para valores no-negativos de b siempre es posible tener órbitas circulares estables. Cuando $b_c < b < 0$ tenemos órbitas circulares inestables. El valor crítico $b_c = -\frac{l^4}{12GM\mu^3}$ representa la última órbita circular. Para $b < b_c$ no hay órbitas circulares. Tomado de [20].

donde R está definida por la Ec. (2.14). Cuando $b > 0$, tenemos siempre órbitas circulares; cuando $b < 0$, existe un valor crítico $b_c = -\frac{l^4}{12GM\mu^3}$ por debajo del cual las órbitas circulares dejan de existir. Para valores más negativos de b la potencial efectivo no tiene puntos extremos. La Fig. (2.1) muestra V_{eff} para algunos valores representativos de b .

El momento angular l para órbitas circulares se expresa como:

$$l_b = \mu \sqrt{G M r_c \left(1 - \frac{3b}{G M \mu r_c^2} \right)}, \quad (2.16)$$

donde el subíndice b denota una dependencia de la variable al parámetro magnético b . Además, a partir de la Ec. (2.9), $\dot{\varphi} = l/\mu r^2$, la frecuencia orbital en las órbitas circulares está dada por:

$$\dot{\varphi}_b = \sqrt{\frac{G M}{r_c^3} \left(1 - \frac{3b}{G M \mu r_c^2} \right)}, \quad (2.17)$$

esta expresión es análoga a la tercera ley de Kepler para órbitas circulares y será utilizada en la siguiente sección.

2.3 Descripción Newtoniana de la binaria magnetizada

Finalmente, la energía total de las órbitas circulares es

$$E_b = -\frac{GM\mu}{2r_c} \left(1 + \frac{b}{GM\mu r_c^2}\right), \quad (2.18)$$

la cual es igual al mínimo del potencial efectivo V_{eff} en la Ec. (2.10). En la Fig.(2.1) se observa que dependiendo de la combinación de los parámetros, en el sistema pueden existir órbitas estables y/o inestables.

2.3.4. Precesión orbital debido a los campos magnéticos

En mecánica clásica es un resultado que una órbita ligeramente no-circular oscilará alrededor de un radio central. En la ausencia de campos magnéticos, las órbitas ligadas permitidas son elipses, como queda de manifiesto en las leyes de Kepler para el movimiento orbital planetario.

En nuestro caso, la presencia del término magnético modifica este comportamiento; las órbitas se ven como elipses que van lentamente rotando respecto al centro, este fenómeno es conocido como precesión de la órbita.

La Ec. 2.12 puede ser resuelta numéricamente con algo de esfuerzo, sin embargo, algo de información útil puede ser obtenida a partir de analizar la solución en el límite de pequeñas interacciones magnéticas. Asumiendo $\delta_b \ll R$, tenemos la solución aproximada de la Ec. (2.12) en la forma:

$$u = u_0 + \beta u_1, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{\delta_b}{R}, \quad (2.19)$$

en esta expresión hemos ignorado potencias más altas de δ_b/R . Substituyendo la Ec. (2.19) en la Ec. (2.13) y agrupando términos del mismo orden, obtenemos

$$\frac{d^2(Ru_0)}{d\varphi^2} + Ru_0 = 1, \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2(Ru_1)}{d\varphi^2} + Ru_1 = (Ru_0)^2. \quad (2.21)$$

La solución de la primera ecuación, como ya hemos mencionado, es la sección cónica

$$Ru_0 = 1 + \epsilon \cos \varphi, \quad (2.22)$$

donde $\epsilon^2 \equiv 1 + \frac{2El^2}{G^2M^2\mu^3}$. Por otro lado una solución particular de la Ec. (2.21) es

$$Ru_1 = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon \varphi \sin \varphi - \frac{\epsilon^2}{6} \cos(2\varphi)\right). \quad (2.23)$$

Notemos que el tercer término incrementa con cada órbita y se va volviendo más relevante. Ignorando las otras correcciones podemos expresar la Ec. (2.19), en el límite $\beta \ll 1$, como sigue:

$$\begin{aligned} Ru &\approx 1 + \epsilon \cos \varphi + \beta \epsilon \varphi \sin \varphi \\ &\approx 1 + \epsilon \cos(\varphi - \beta \varphi). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Entonces, el periodo de las órbita no es 2π sino más bien

$$\frac{2\pi}{1-\beta} \approx 2\pi(1+\beta) = 2\pi \left(1 + \frac{\delta_b}{R}\right). \quad (2.25)$$

La precesión, en unidades de radianes por órbita, queda dada por

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\pi \left(1 + \frac{\delta_b}{R}\right) = 2\pi \frac{\delta_b}{R}. \quad (2.26)$$

Sustituyendo las expresiones para R y δ_b dadas en la Ec. (2.14) y la expresión de b en términos de la intensidad de los campos magnéticos, obtenemos la precesión de la órbita $\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta_b}{R} = \mp 6\pi GM\mu^3 R_1^3 R_2^3 B_1 B_2 / (4l^4)$. Para valores típicos obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \mp 2.83 \times 10^{-7} \left(\frac{R_1}{12 \text{ km}}\right)^3 \left(\frac{B_1}{10^{16} \text{ G}}\right) \left(\frac{R_2}{12 \text{ km}}\right)^3 \\ &\quad \times \left(\frac{B_2}{10^{16} \text{ G}}\right) \left(\frac{M}{2.8 M_\odot}\right) \left(\frac{\mu}{0.7 M_\odot}\right)^3 \left(\frac{l_0}{l}\right)^4. \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde el momento angular l se obtiene a partir de la expresión Kepleriana $l^2 = GM\mu^2 a (1 - \epsilon^2)$, para binarias $a = 10^3 \text{ km}$, $l_0 = 2.69 \times 10^{50} \text{ g cm}^2 \text{s}^{-1} = 1.35 \times 10^7 M_\odot \text{ km}^2 \text{s}^{-1}$.

En la siguiente sección consideraremos la perdida de energía del sistema binario debido a la emisión de ondas gravitacionales utilizando el formalismo cuadrupolar. Nos enfocaremos en órbitas circulares por lo ya mencionado a inicio de esta sección: que la emisión de ondas gravitacionales tiende a circularizar las órbitas durante la fase de espiraleo.

2.4. Emisión gravitacional

Considerando el sistema binario (incluyendo los campos magnéticos) descrito en la Sección 2.3, donde el eje- z es perpendicular al plano de movimiento y φ_b es el ángulo del eje- x a la línea que une las masas, el segundo momento de masa del sistema es

$$M_b^{ij}(t) = \frac{1}{2} \mu r^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\varphi_b(t)) & \sin(2\varphi_b(t)) & 0 \\ \sin(2\varphi_b(t)) & 1 - \cos(2\varphi_b(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Entonces, utilizando la Eq.(1.22) para órbitas circulares incluyendo los campos magnéticos (con $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$), la luminosidad gravitacional es

$$L_b = \frac{32}{5} \frac{G^4 M^3 \mu^2}{c^5 r^5} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^3, \quad (2.29)$$

donde hemos usado la dependencia temporal de φ_b dada por la Ec. (2.17). La pérdida de energía a través de la emisión de ondas gravitacionales vía la relación $L_b + \dot{E} = 0$ implica que la separación entre las estrellas r decrece de la siguiente manera:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_b = -\frac{64G^3 M^2 \mu}{5c^5 r^3} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^{-1}, \quad (2.30)$$

en esta expresión hemos utilizado la Ec. (2.29) y el hecho de que $\dot{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{GM\mu}{r^2} + \frac{3b}{r^4} \right) \dot{r}$. A partir del previo análisis, puede verse que cuando la magnitud del parámetro magnético coincide con el valor crítico b_c obtenido en el análisis Newtoniano, no hay órbitas circulares y el sistema simplemente colapsa. Además, como una consecuencia del decrecimiento en r , el periodo orbital $P_b = 2\pi/\dot{\varphi}_b$ también decrece; la tasa de cambio logarítmico de P_b es

$$\frac{1}{P_b} \frac{dP_b}{dt} = -\frac{96G^3M^2\mu}{5c^5r^4} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{5b}{GM\mu r^2}\right) \left(1 + \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^{-1}. \quad (2.31)$$

Notemos que haciendo $b = 0$ en las Ecs. (2.30, 2.31) éstas se reducen a las expresiones bien conocidas para binarias en aproximación cuadrupolar dada por ejemplo en la referencia [31].

2.4.1. Estimación de las ondas gravitacionales

El decrecimiento en la separación de las estrellas de neutrones ocurre a través de una sucesión de órbitas casi circulares, es sostenido por la emisión de ondas gravitacionales hasta que ambas se fusionan en una sola. Sin embargo, cuando las estrellas están suficientemente cerca, la dinámica es dominada por los efectos de los campos fuertes, por lo tanto, la aproximación cuadrupolar que estamos utilizando, deja de ser válida.

Mientras las estrellas se orbitan entre sí, las distancias orbitales decrecen causando que la frecuencia de las ondas gravitacionales incremente hasta un valor máximo, al mismo tiempo que se alcanza cierto r_{\min} y termina la fase de espiraleo para dar paso a la fase de fusión.

El tiempo al cual la binaria alcanza dicho radio mínimo r_{\min} puede ser calculado como

$$\tau_b = \int_{r_0}^{r_{\min}} (dr/dt)_b^{-1} dr, \quad (2.32)$$

donde r_0 es la separación de las estrellas al tiempo $t = 0$ y el cambio en r con el tiempo $(dr/dt)_b$ está dado por la Ec. (2.30).

Partiendo de las órbitas circulares, el segundo momento de masa dado en la Ec. (2.28) y utilizando la Ec. (1.20), las amplitudes de polarización se expresan como:

$$\begin{aligned} h_{+b}(t) &= -\frac{4G^2M\mu}{c^4 dr_b(t)} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r_b(t)^2}\right) \cos(2\varphi_b(t)), \\ h_{\times_b}(t) &= -\frac{4G^2M\mu}{c^4 dr_b(t)} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r_b(t)^2}\right) \sin(2\varphi_b(t)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

aquí, $r_b(t)$ está dado por la integración de la Ec. (2.30). El *strain* de las ondas gravitacionales se define como $h_b = \sqrt{h_{+b}^2 + h_{\times_b}^2}$ y utilizando la Ec (2.33), el strain está dado por

$$h_b(t) = \frac{4G^2M\mu}{c^4 dr_b(t)} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r_b(t)^2}\right). \quad (2.34)$$

Notemos que haciendo $b = 0$ en las Ecs. (2.30, 2.31) éstas se reducen a las expresiones bien conocidas para binarias no-magnetizadas presentadas, por ejemplo, en la referencia [31].

Para ondas gravitacionales, el término $2\varphi_b$ en la Ec.(2.33) puede ser aproximado como $2\varphi_b \simeq 2\dot{\varphi}_b t$ donde la frecuencia de las ondas gravitacionales, $\omega_{\text{GW}} = 2\dot{\varphi}_b = 2\omega_b$ puede ser obtenida. La frecuencia medida en Hertz es simplemente $\nu_b = \frac{\omega_{\text{GW}}}{2\pi}$. El número de ciclos durante la fase integral puede calcularse con la siguiente integral:

$$\mathcal{N}_b = \int_0^{\tau_b} \nu_b(t) dt . \quad (2.35)$$

La derivada de la frecuencia orbital, $\dot{\omega}_b$, puede ser construida con la regla de la cadena: $\dot{\omega}_b = \left(\frac{d\omega_b}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)$, donde $\left(\frac{d\omega_b}{dr}\right)$ está calculado directamente a partir de la Ec. (2.17), y $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ se sustituye a partir de la Ec. (2.30). De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_b = & \frac{96G^3M^2\mu}{5c^5r^4} \sqrt{\frac{GM}{r^3} \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)} \\ & \times \left(1 - \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{5b}{GM\mu r^2}\right) \left(1 + \frac{3b}{GM\mu r^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalmente, considerando el radio circular de las binarias no-magnetizadas en la Ec. (2.17), podemos escribir el radio como $r = (GM/(\omega_0^2))^{1/3}$, con $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$, donde estamos denotando ω_0 como la frecuencia angular correspondiente a la binaria circular no-magnetizada. Después de un poco de manipulación algebraica obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_b = & \frac{96G^{5/3}M^{2/3}\mu\omega_0^{11/3}}{5c^5} \sqrt{1 - 3k\omega_0^{4/3}} \left(1 - 5k\omega_0^{4/3}\right) \\ & \times \left(1 - 3k\omega_0^{4/3}\right)^2 \left(1 + 3k\omega_0^{4/3}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $k \equiv b/(GM)^{5/3}\mu$.

2.4.2. Estimación de la masa

En esta sección, mostramos como las expresiones para la luminosidad gravitacional en la Ec. (2.29) y el cambio del periodo orbital en la Ec. (2.31) puede ser utilizada para determinar la masa total del sistema binario. Además, a partir de la masa total y la masa reducida, podemos obtener las masas individuales. Vamos a asumir un escenario en el cual definimos el radio $Q = \frac{P}{\dot{P}}$, y la luminosidad gravitacional L como funciones del tiempo conocidas durante la fase de espiraleo.

A partir de las Ecs. (2.29, 2.31) visto como sistema de ecuaciones para las masas y después de un poco de manipulación algebráica, obtenemos la siguiente expresión para la masa total

$$M = \frac{5Lr^9Q^2c^5}{96G^2} \frac{\sqrt{3}A(Lr^3 + Qb) + f_1}{f_2 + \sqrt{3}Af_3} , \quad (2.38)$$

y la masa reducida

$$\mu = -\frac{48G}{Lr^{11}Q^3c^5} \left(\sqrt{3}Af_4 + f_5 \right), \quad (2.39)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3L^2r^6 + 20QbLr^3 + 12Q^2b^2}, \\ f_1 &= 3L^2r^6 + 13QbLr^3 + 6Q^2b^2, \\ f_2 &= 9L^4r^{12} + 96L^3r^9Qb + 320L^2r^6Q^2b^2 + 389Lr^3Q^3b^3 + 144Q^4b^4, \\ f_3 &= 3L^3r^9 + 22QbL^2r^6 + 44Q^2b^2Lr^3 + Q^3b^3, \\ f_4 &= 3L^2r^6 + 14QbLr^3 + 12Q^2b^2, \\ f_5 &= 9L^3r^9 + 72QbL^2r^6 + 144Q^2b^2Lr^3 + 72Q^3b^3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para campos magnéticos nulos $b = 0$, recuperamos las expresiones bien conocidas para la masa total y reducida [118],

$$M_0 = \frac{5Q^2c^5r^3}{288G^2L} \quad \text{and} \quad \mu_0 = -\frac{864GL^2}{5Q^3c^5r^2}. \quad (2.41)$$

Para entender mejor el efecto de los campos magnéticos en la determinación de μ y M definimos la variable

$$x \equiv \frac{Qb}{Lr^3}. \quad (2.42)$$

Mediante re-escribir la Ec. (2.38) en términos de x , obtenemos $M(x) = M_0f_M(x)$ donde

$$f_M(x) \equiv \frac{3(3 + 13x + 6x^2 + \sqrt{3}A_x(1+x))}{\sqrt{3}A_xf_6 + f_7}, \quad (2.43)$$

con las definiciones

$$\begin{aligned} A_x &= \sqrt{12x^2 + 20x + 3}, \\ f_6 &= 3 + 22x + 44x^2 + 24x^3, \\ f_7 &= 9 + 96x + 320x^2 + 384x^3 + 144x^4. \end{aligned} \quad (2.44)$$

La masa reducida en términos del parámetro x se obtiene a partir de la Ec. (2.39) como $\mu(x) = \mu_0f_\mu(x)$, donde:

$$f_\mu(x) \equiv \frac{1}{2} + \sqrt{3}A_x \left(\frac{1}{6} + \frac{7x}{9} + \frac{2x^2}{3} \right) + 4x + 8x^2 + 4x^3. \quad (2.45)$$

De acuerdo a las Ecs. (2.38, 2.39) dados algunos valores de la luminosidad gravitacional L , y el cambio logarítmico de la frecuencia de las ondas gravitacionales Q , es posible deducir el valor de la masa total M y masa reducida μ . Cualquier desviación de los valores en las Ecs. (2.41) (lo que es equivalente a tener $f_M \neq 1$ y $f_\mu \neq 1$) pueden ser asociados con la presencia de un campo magnético.

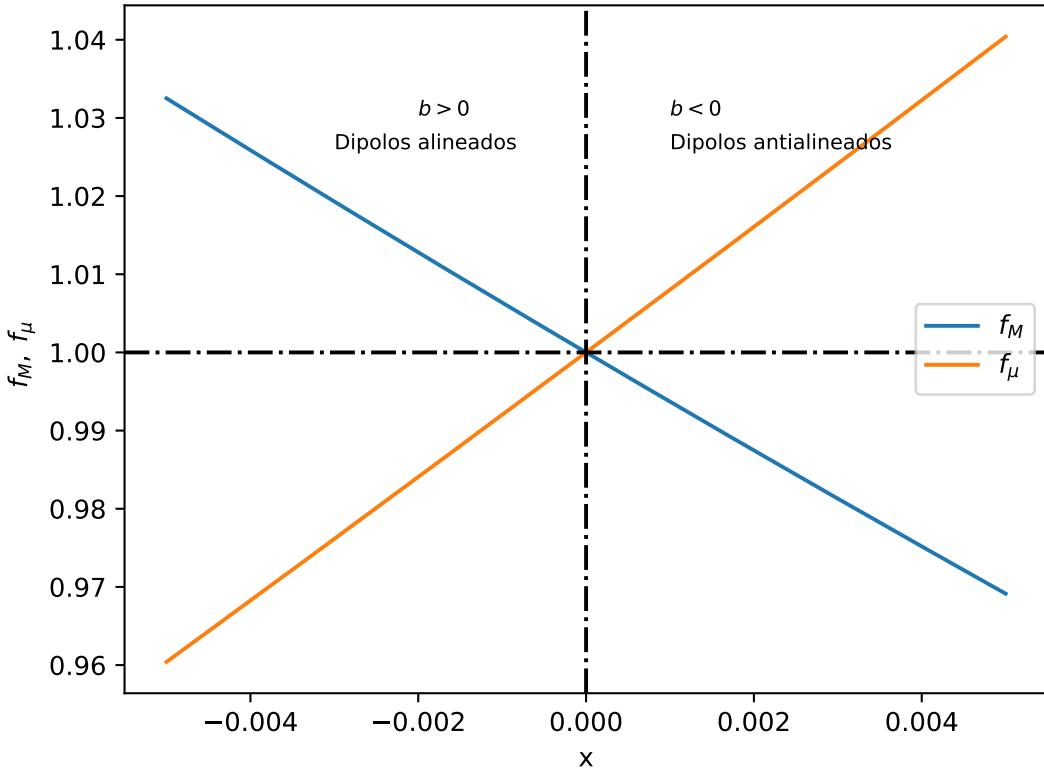


Figura 2.2: Funciones f_M y f_μ , las cuales se definen en las Ecs. (2.43, 2.45). La intersección de las rectas se da en $f_M = 1 = f_\mu$ y $x = 0$, correspondiendo al caso sin campos magnéticos.

Las masas individuales de la binaria pueden determinarse a partir de las definiciones de masa total y masa reducida, de este modo obtenemos que:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{1}{2}M_0 f_M(x) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{M_0} \frac{f_\mu(x)}{f_M(x)}} \right], \\ M_2(x) &= \frac{1}{2}M_0 f_M(x) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{M_0} \frac{f_\mu(x)}{f_M(x)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Notemos que las masas individuales dependen de los valores M_0 y μ_0 y no las masas individuales sin campos magnéticos.

Como describiremos en la siguiente sección, un campo magnético no nulo es consistente con la actual incertidumbre en la estimación de las masas de la fuente para sistemas binarios tanto con iguales como distintas masas individuales. Más aún, la estimación de masa mínima y máxima puede ser utilizada para determinar límites mínimos y máximos para los campos magnéticos de las estrellas de neutrones fuente.

La Fig. 2.2 muestra gráficas de f_M y f_μ en términos de x . Nos estamos centrándole en una región cercana a $x = 0$ (campos magnéticos nulos) ya que tenemos interés en desviaciones pequeñas producidas por los campos magnéticos. Cerca del origen, la pendiente de f_M es negativa mientras que la pendiente de f_μ es positiva y como mostramos, este comportamiento causará una sobreestimación o subestimación en la masa de cada componente en la presencia de campos magnéticos.

Valores de $x > 0$ corresponden a binarias con dipolos magnéticos anti-alineados y $x < 0$ corresponde a dipolos alineados. Esto es consistente con el hecho de que las configuraciones anti-alineadas almacenan más energía potencial.

En la siguiente sección mostraremos el efecto de los campos magnéticos sobre el strain de las ondas gravitacionales y la estimación de las masas utilizando algunos ejemplos de relevancia astrofísica.

2.5. Resultados y Discusión

En esta sección consideramos tres enfoques distintos en los cuales aplicamos cualitativa y cuantitativamente el formalismo que hemos desarrollado en las secciones anteriores con el propósito general de determinar el rol de los campos magnéticos en las binarias en escenarios de interés astrofísico.

2.5.1. Efecto de la alineación de los dipolos magnéticos sobre la binaria y sus ondas gravitacionales

En primer lugar vamos a analizar la fase de espiraleo de la binaria magnetizada. En esta sección consideramos la fase de espiraleo del movimiento orbital utilizando dos sistemas de estrellas de neutrones binarias: uno con masas iguales de $M_1 = M_2 = 1.4 M_\odot$ ($M = 2.8 M_\odot$, $\mu = 0.7 M_\odot$) y otro con masas $M_1 = 1.8 M_\odot$, $M_2 = 1 M_\odot$ ($M = 2.8 M_\odot$, $\mu = 0.643 M_\odot$) y una separación de $r_0 = 100$ km. Cualitativamente describimos el efecto de los campos magnéticos en algunas variables relevantes. Tomamos el radio de las estrellas de neutrones como $R = 12$ km, y fijamos el radio mínimo como $r_{\min} = 24$ km. En esta fase, tomamos campos magnéticos constantes $B_1 = B_2 = 8 \times 10^{16}$ G para determinar el efecto de la alineación relativa entre los dipolos y sus consecuencias sobre la forma de las ondas gravitacionales. Considerando el parámetro b , calculamos el tiempo τ_b que le toma a las binarias alcanzar el radio mínimo, para cada configuración con dipolos anti-alineados $b < 0$ y dipolos alineados $b > 0$. Para su comparación, también presentamos el caso sin campos magnéticos $b = 0$. Los resultados se presentan en el Cuadro (2.1), en éste, observamos que las binarias con masas iguales se fusionan antes que las que tienen masas individuales, independientemente de si hay campos magnéticos. En constante, para ambos sistemas binarios tenemos que cuando $b < 0$, el tiempo $\tau_b < \tau_0$ y cuando $b > 0$, entonces $\tau_b > \tau_0$.

La separación $r(t)$ se obtiene de $t = 0$ a τ_b para cada caso resolviendo numéricamente la ecuación diferencial (2.30). La Fig. 2.3 muestra $r(t)$ para casos con masas iguales y distintas. La alineación relativa, como hemos descrito, está dada por el signo de b .

2 Ondas gravitacionales de binarias magnetizadas en el régimen lineal

Alineación del dipolo magnético	$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
Masas iguales	$\tau_0 = 0.36647$ s	$\tau_b = 0.36572$ s ($\tau_b/\tau_0 = 0.9977$)	$\tau_b = 0.36724$ s ($\tau_b/\tau_0 = 1.0028$)
Masas distintas	$\tau_0 = 0.39905$ s	$\tau_b = 0.39815$ s ($\tau_b/\tau_0 = 0.9979$)	$\tau_b = 0.39996$ s ($\tau_b/\tau_0 = 1.0021$)

Cuadro 2.1: Tiempo para alcanzar el radio mínimo $r_{\min} = 24$ km a partir de una separación inicial $r_0 = 100$ km para dos alineaciones relativas. El caso con $b = 0$ corresponde al caso sin campos magnéticos. En los casos donde $b \neq 0$, también se especifica el valor del cociente τ_b/τ_0 .

Adicionalmente, determinamos la frecuencias de las ondas gravitacionales a partir de

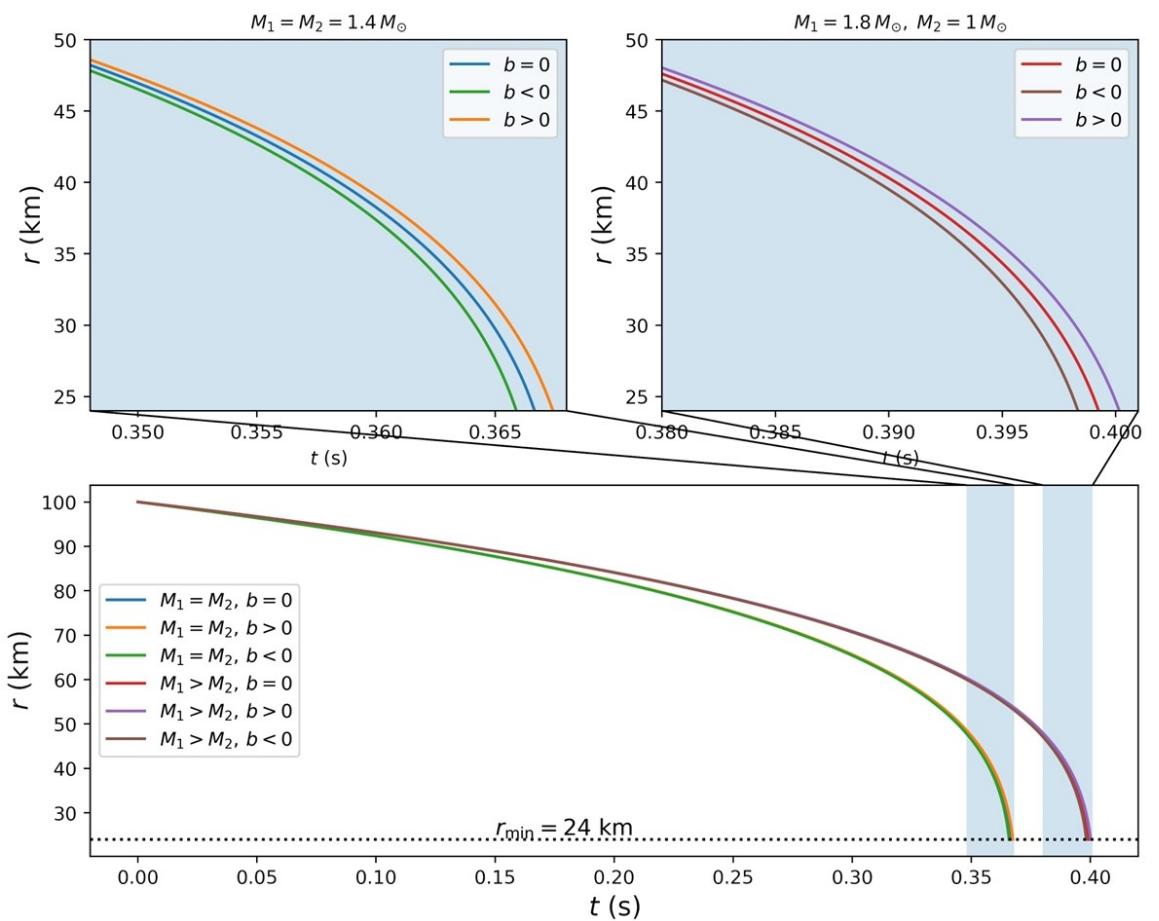


Figura 2.3: Se presenta la evolución de la separación de las estrellas de neutrones para casos con $M_1 = M_2 = 1.4 M_\odot$, y $M_1 = 1.8 M_\odot, M_2 = 1 M_\odot$. Estamos utilizando campos magnéticos de $B = 8 \times 10^{16}$ G. Los paneles superiores representan una mirada más cercana a los efectos magnéticos para hacerlos más notables cerca de la fusión.

$\nu_b(t) = \dot{\varphi}_b(r(t))/\pi$ y la Ec. (2.17). La frecuencia resultante como función del tiempo se muestra en la Fig. 2.4.

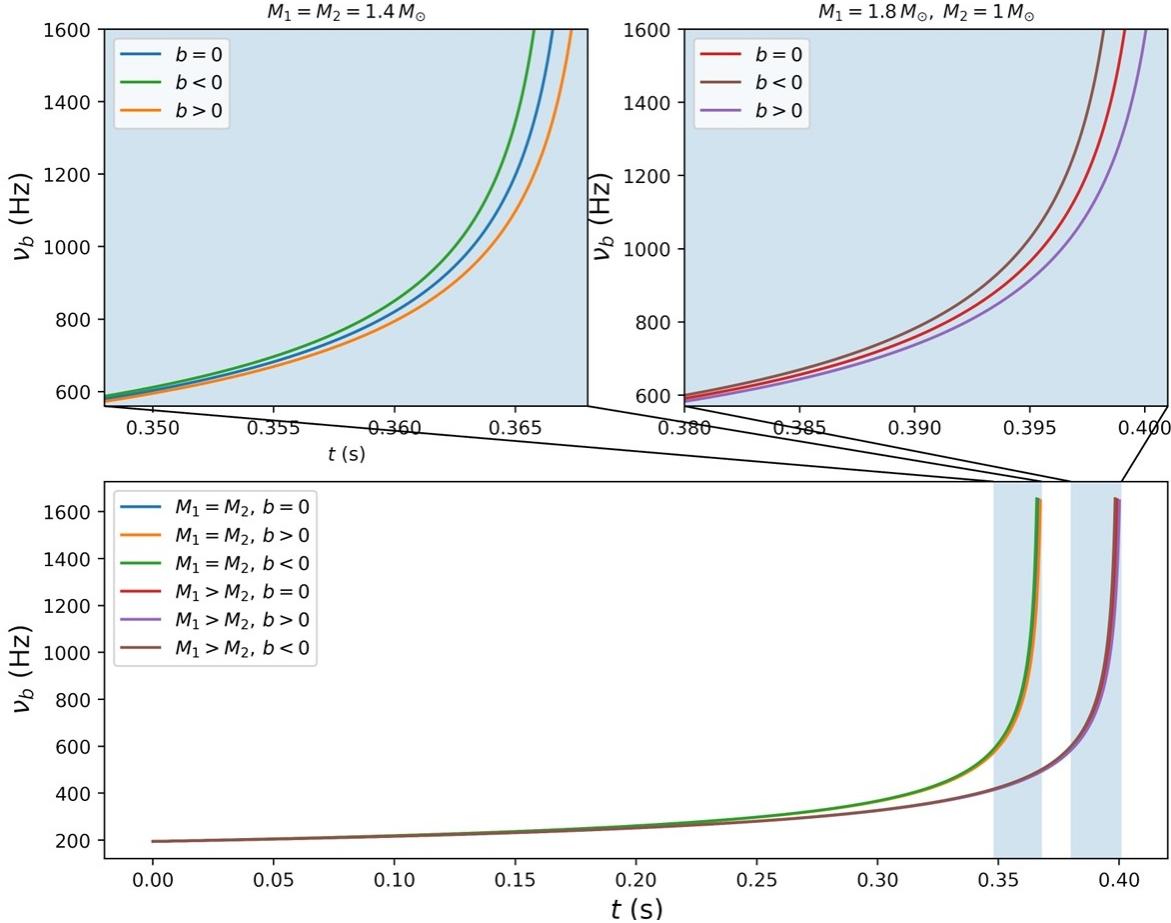


Figura 2.4: Evolución de las frecuencias de las ondas gravitacionales durante los últimos instantes de la fase de espiraleo para sistemas binarios con masas iguales (arriba a la izquierda) y desiguales (arriba a la derecha). El intervalo de tiempo y condiciones son las mismas que en la Fig. 2.3. La figura inferior muestra seis casos durante toda la fase de espiraleo.

Las amplitudes h_+ y h_\times se obtienen a partir de la Ec.(2.33) y la integración numérica de las Ecs. (2.17) y (2.30). En la Fig. 2.5 la polarización h_+ se grafica considerando una distancia $d = 40$ Mpc (como la reportada en el evento GW170817). Esta distancia nos da un strain en el radio mínimo de $h_b^{(\min)} = 10^{-20}$, como se muestra en la Fig. 2.5. El número de ciclos se calculó utilizando la Ec. (2.35) y presentamos los resultados en el Cuadro 2.2. Observamos que las binarias magnetizadas con masas iguales tienen menos número de ciclos \mathcal{N}_b que la binaria con masas distintas, independientemente de la alineación de los dipolos magnéticos. Vemos que debido a la relación entre las masas individuales, cuando $b < 0$ entonces $\mathcal{N}_b < \mathcal{N}$, y vice versa, cuando $b > 0$ entonces $\mathcal{N}_b > \mathcal{N}$. En este análisis hemos incluído casos con masas individuales iguales y distintas, estas diferencias afectan

2 Ondas gravitacionales de binarias magnetizadas en el régimen lineal

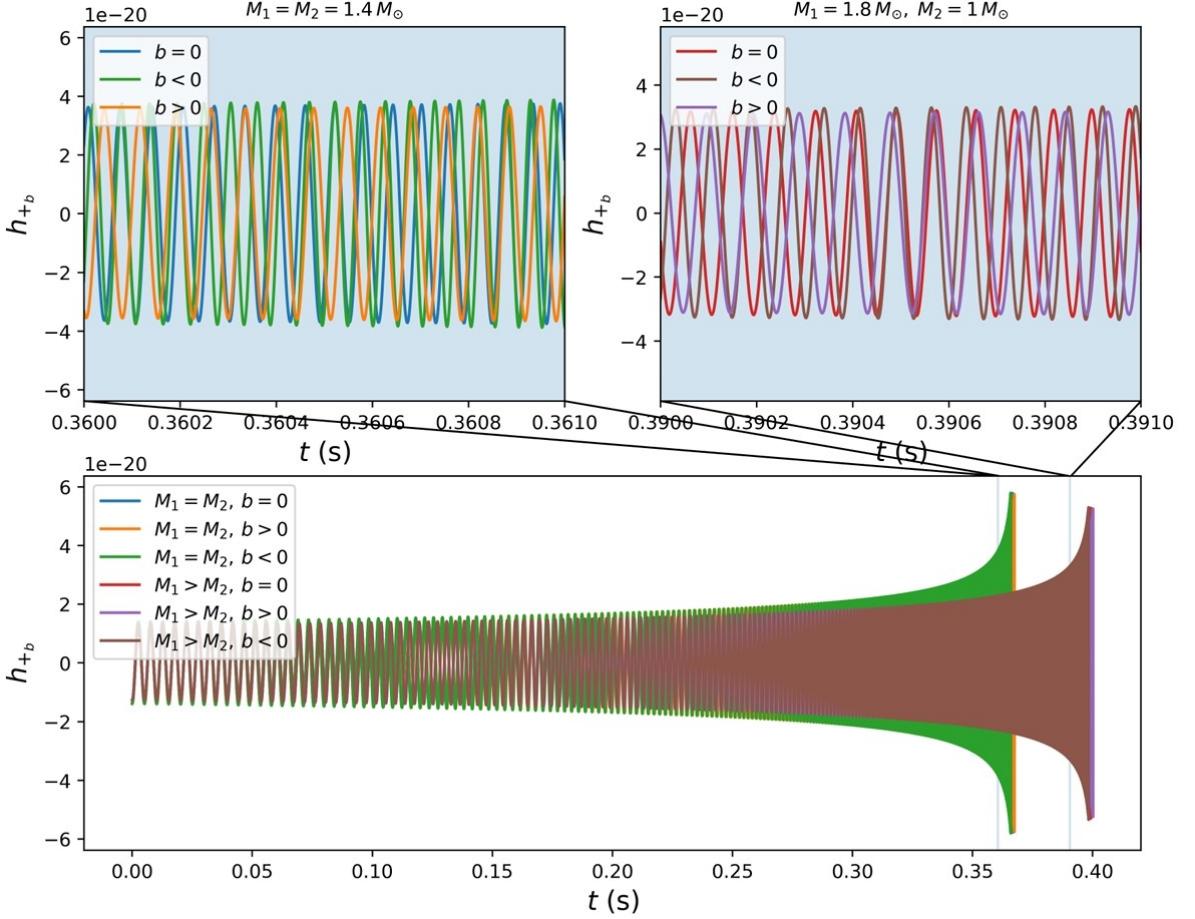


Figura 2.5: En la figura inferior se muestra la polarización h_+ durante la fase de espiraleo para binarias con masas iguales y masas diferentes comenzando de una separación inicial de 100 km. En las figuras superiores, presentamos una amplificación de los instantes finales, donde los efectos magnéticos son más notables.

Alineación dipolar magnética	$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
Masas iguales	$\mathcal{N}_0 = 110.74533$	$\mathcal{N}_b = 110.46847$ ($\mathcal{N}_b/\mathcal{N}_0 = 0.9975$)	$\mathcal{N}_b = 111.02361$ ($\mathcal{N}_b/\mathcal{N}_0 = 1.0025$)
Masas no-iguales	$\mathcal{N}_0 = 120.58936$	$\mathcal{N}_b = 120.26116$ ($\mathcal{N}_b/\mathcal{N}_0 = 0.9973$)	$\mathcal{N}_b = 120.91928$ ($\mathcal{N}_b/\mathcal{N}_0 = 1.0027$)

Cuadro 2.2: Número de ciclos en la fase de espiraleo para ambos sistemas binarios, comenzando en $r_0 = 100$ km. La alineación dipolar magnética corresponde a campos magnéticos de intensidad $B_1 = B_2 = 8 \times 8 \times 10^{16}$ G. Por practicidad, también se especifica el cociente $\mathcal{N}_b/\mathcal{N}_0$ para los casos correspondientes.

notablemente la frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas.

A continuación consideraremos los casos para un rango de campos magnéticos.

2.5.2. Efecto magnético sobre variables del espiraleo

Vamos continuar con nuestro análisis, ahora variando la magnitud de los campos magnéticos para describir el efecto correspondiente sobre las variables de la fase de espiraleo: el tiempo para alcanzar el radio mínimo, la luminosidad gravitacional, el strain y la frecuencia de las ondas gravitacionales. Para el análisis en esta parte, consideramos dos sistemas binarios, uno con masas iguales de $M_1 = M_2 = 1.4 M_\odot$ y otro con masas distintas: $M_1 = 1.8 M_\odot$, $M_2 = 1 M_\odot$. Consideramos campos magnéticos con intensidades entre $B = 10^{12}$ G y $B = 8 \times 10^{16}$ G, consistentes con los valores y predicciones reportadas en [106, 103]. Estas magnitudes de los campos magnéticos implican que el parámetro b toma valores dentro del intervalo $-4.77 \times 10^{69} \text{ g cm}^5/\text{s}^2 < b < 4.77 \times 10^{69} \text{ g cm}^5/\text{s}^2$. En la Fig. 2.6 el valor de τ_b como una función de b se grafica para ambos sistemas binarios. Estamos definiendo $\tau_0 := \tau_b(b = 0)$. Como mostramos en la Fig. 2.6, independientemente

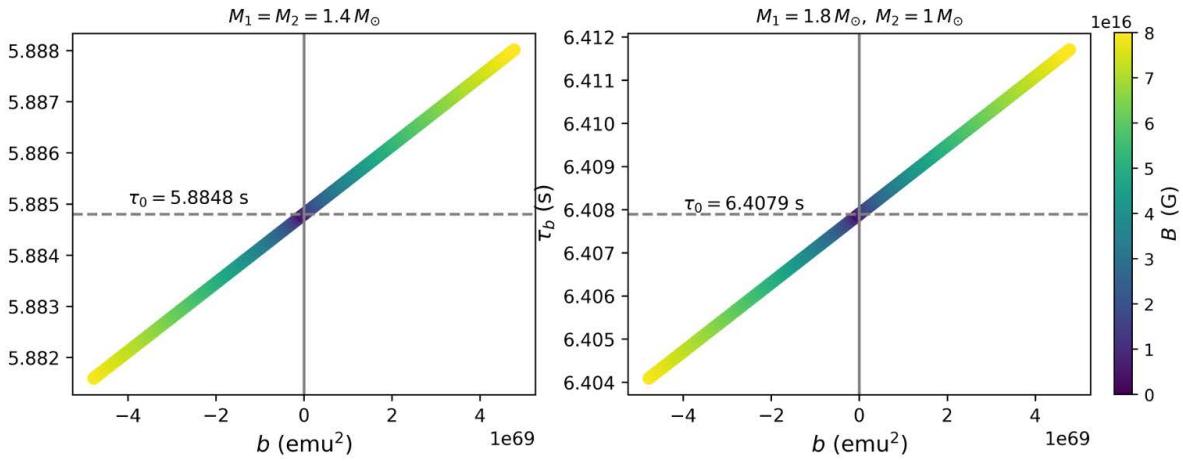


Figura 2.6: Valores del tiempo al cual el radio mínimo es alcanzado τ_b a partir de una separación inicial de $r_0 = 200$ km y un rango de valores del parámetro magnético b . El código de color representa la magnitud de los campos magnéticos, de morado para $B = 0$ a amarillo para $B = 8 \times 10^{16}$ G.

del campo magnético, el sistema con masas iguales alcanza su radio mínimo en un tiempo más corto τ_b respecto al caso con masas distintas. Sin embargo, en ambos casos, si $b < 0$, $\tau_b < \tau_0$ y si $b > 0$, $\tau_b > \tau_0$. Podemos interpretar este resultado como la muestra de que una configuración donde $b > 0$ ($b < 0$) produce un ligero incremento (decremento) en el tiempo requerido para alcanzar r_{min} . Este enunciado cualitativo puede ser cuantificado a través de la desviación magnética definida como el radio

$$\Delta X = \frac{X_b - X_0}{X_0}, \quad (2.47)$$

donde X_b es una variable que depende del parámetro magnético b y $X_0 = X_b(b = 0)$. Siguiendo nuestro análisis de τ_b , $\Delta\tau = \frac{\tau_b - \tau_0}{\tau_0}$. En los casos donde $\tau_b > \tau_0$, entonces $\Delta\tau > 0$, esto ocurre para configuraciones con $b < 0$. En constante, cuando $\tau_b < \tau_0$,

entonces $\Delta\tau < 0$ lo cual ocurre cuando $b > 0$. El orden de magnitud de $\Delta\tau$ se muestra en el Cuadro 2.3, el cual es el mismo para binarias con masas iguales y desiguales. El cambio en el tiempo para alcanzar el radio mínimo es alrededor de 10^{-4} con respecto al cambio en el tiempo del sistema sin interacción magnética.

Ahora vamos a considerar el strain $h_b^{(\min)}$ en r_{\min} dada por la Ec. (2.34). Si $b < 0$, $h_b^{\min} < h_0^{\min}$; en contraste si $b > 0$, entonces $h_b^{\min} > h_0^{\min}$. En otras palabras, cuando la alineación entre los dipolos magnéticos es tal que $b < 0$, el strain del sistema magnetizado es más pequeño que el strain del sistema no magnetizado en r_{\min} . Lo opuesto ocurre cuando $b > 0$, como vemos en la Fig. 2.7. El orden de magnitud de la desviación

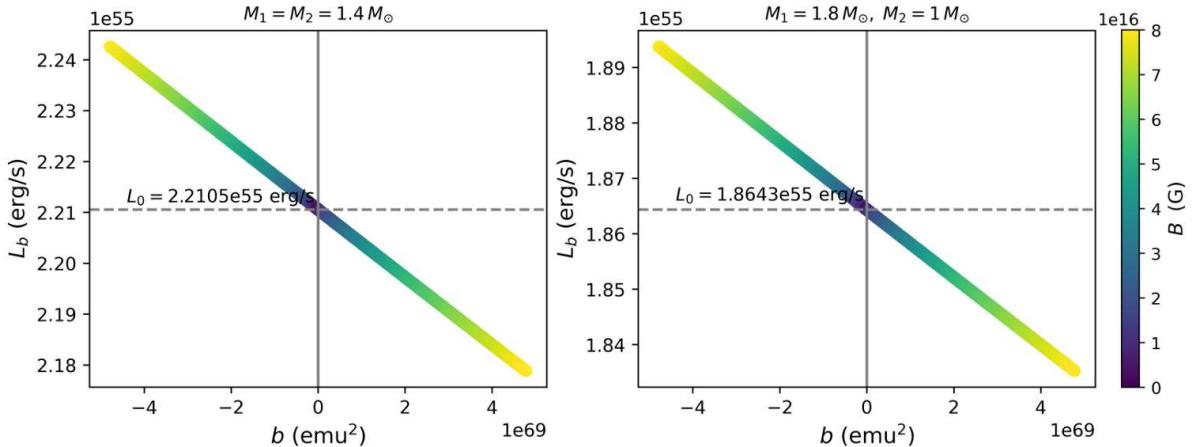


Figura 2.7: El strain en r_{\min} para ambos sistemas binarios. La distancia a la fuente d utilizada para calcular el strain es $d = 40$ Mpc, muy similar a la distancia a la fuente de la señal GW170817. El código de color es el mismo que en la figura 2.6.

B(G)	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}
$\sim \Delta\tau $	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$\sim \Delta h(r_{\min}) $	10^{-11}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}
$\sim \Delta L(r_{\min}) $	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}

Cuadro 2.3: Valor absoluto de la desviación sobre τ_b , $h_b(r_{\min})$ y $L_b(r_{\min})$ para algunos valores típicos de la intensidad de los campos magnéticos B presentes en las estrellas de neutrones.

magnética para Δh_b^{\min} se presenta en el Cuadro 2.3. Notemos que, en contraste con la desviación en el tiempo de fusión, el signo de la desviación del strain en r_{\min} es positivo cuando $b < 0$, lo cual significa que $\Delta h_b^{\min} > 0$ cuando los dipolos están anti-alineados, y $\Delta h_b^{\min} < 0$ cuando los dipolos magnéticos están antialineados. En este caso, el cambio en la magnitud del strain puede ser hasta de 10^{-3} . La luminosidad L_b dada en la Ec. (2.29)

2.5 Resultados y Discusión

y la frecuencia de las ondas gravitacionales ν_b evaluada en r_{\min} se muestra en la Fig. 2.8 y 2.9. La frecuencia de las ondas gravitacionales ν_b , se grafica sin barras de colores porque las diferencias entre los sistemas binarios son muy pequeñas. En el Cuadro

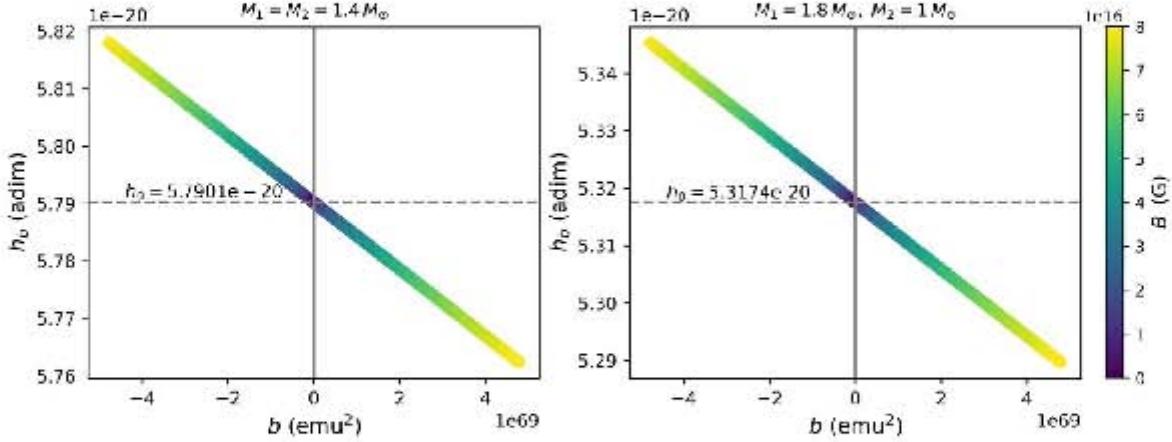


Figura 2.8: La luminosidad, $L_b(r_{\min})$, evaluada en $r_{\min} = 24.89$ km respecto al rango del parámetro magnético b para estrellas de neutrones con masas iguales (izquierda) y distintas (derecha). L_0 corresponde a la luminosidad gravitacional para la binaria no-magnetizada. El código de color es como en la Fig.(2.6).

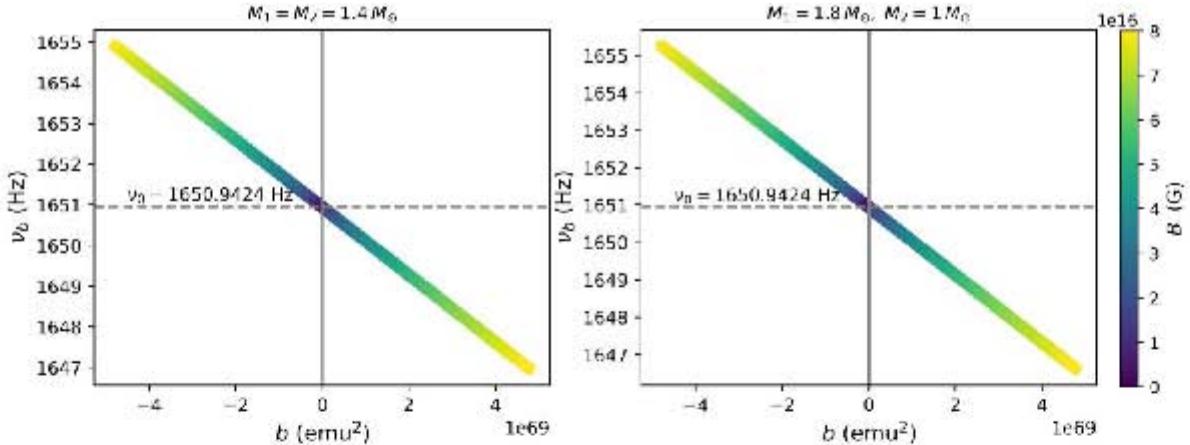


Figura 2.9: (Izquierdo). Frecuencia de las ondas gravitacionales $\nu_b(r)$, evaluada en $r = r_{\min} = 24.89$ km como función del parámetro magnético b para casos con masas iguales. La frecuencia $\nu_0(r_{\min})$ corresponde a una binaria no-magnetizada. (Derecha) Lo mismo que en la Izquierda pero para casos con masas distintas. El código de color es como en la Fig. 2.6.

2.3 se muestran las desviaciones magnéticas a las variables τ , Δh y ΔL . Para el valor máximo que estamos trabajando para los campos magnéticos, $B \sim 10^{16}$ G, el tiempo de función $\Delta\tau_b(r_{\min}) \sim 10^{-4}$, el strain $\Delta h(r_{\min}) \sim 10^{-3}$ y $\Delta L_b \sim 10^{-2}$. Además, notemos

que para $b > 0$, todas las desviaciones, excepto $\Delta\tau_b$, son negativas y las desviaciones de los casos no-magnetizados es más notable en la luminosidad gravitacional, resultando en un cambio del orden 10^{-2} . Los resultados presentados se extienden a lo largo de toda la fase de espiraleo, debido al comportamiento monótono de las variables. Un resumen del comportamiento cualitativo del tiempo τ_b , strain h_b , la luminosidad gravitacional L_b , la frecuencia de las ondas gravitacionales ν_b , y número de ciclos, \mathcal{N}_b , dependiendo del signo de b se muestra en el Cuadro 2.4.

Variable	$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
τ_b	τ_0	$\tau_b < \tau_0$	$\tau_b > \tau_0$
h_b	h_0	$h_b > h_0$	$h_b < h_0$
L_b	L_0	$L_b > L_0$	$L_b < L_0$
ν_b	ν_0	$\nu_b > \nu_0$	$\nu_b < \nu_0$
\mathcal{N}_b	\mathcal{N}_0	$\mathcal{N}_b < \mathcal{N}_0$	$\mathcal{N}_b > \mathcal{N}_0$

Cuadro 2.4: Comportamiento relativo de algunas variables astrofísicos: el tiempo para alcanzar el radio r_{\min} , τ_b , el strain, h_b , la luminosidad gravitacional, L_b , la frecuencia de las ondas gravitacionales ν_b y el número de ciclos \mathcal{N}_b , entre casos magnetizados y no magnetizados.

2.5.3. Estimación de la masa: otra aplicación.

Dado que los detectores tienen un rango de frecuencias de observación y una sensibilidad, sus reportes de masas de las fuentes tienen asociadas incertidumbres.

El escenario presentado en esta parte es ligeramente diferente que los presentados previamente. Aquí, mostramos como las incertidumbres en las mediciones de las masas de las binarias fuentes de ondas gravitacionales, pueden ser utilizadas para establecer límites en los campos magnéticos presentes en los sistemas binarios de estrellas de neutrones. Para nuestro propósito, consideraremos la señal GW170817 debido a que es la primera evidencia de la colisión de dos estrellas de neutrones y por su relevancia en el desarrollo subsecuente de la astrofísico. Cabe señalar que algunas suposiciones son utilizadas en el presente estudio (como la excentricidad cero de las órbitas y la no-rotación de las estrellas de neutrones) son consistentes con aquellos reportados en [83]. Ahora vamos a proceder como sigue: La Colaboración LIGO-Virgo reporta para la señal GW170817, una masa total de la binaria de estrellas de neutrones igual a $M = 2.74^{+0.04}_{-0.01} M_\odot$ [83]. En adición, los errores sistemáticos y estadísticos implican los valores límite para la masa total del sistema:

$$M_{\min} = 2.73 M_\odot \quad \text{and} \quad M_{\max} = 2.78 M_\odot .$$

Considerando la definición de la función $f_M \equiv M/M_0$, y tomando como masa promedio $M_0 = 2.74 M_\odot$ y $M_{\min}(M_{\max})$ como la masa mínima (máxima) posible para la masa total M . Entonces

$$f_M^{(\min)} \equiv \frac{M_{\min}}{M_0} = \frac{2.73}{2.74} = 0.99635 , \quad (2.48)$$

y

$$f_M^{(\max)} \equiv \frac{M_{\max}}{M_0} = \frac{2.78}{2.74} = 1.0145 . \quad (2.49)$$

Esto nos provee un dominio en x para la función f_M ,

$$0.99635 \leq f_M \leq 1.0145.$$

Este resultado es consistente con los datos. Utilizando el hecho de que f_M es monótona en x en una pequeña vecindad de $x = 0$, (esto puede ser visto a partir de la Ec. (2.43)), y además, puede ser invertido para obtener valores máximos y mínimos de x como $x_{\min} = -0.00225$ and $x_{\max} = 0.00058$. Posteriormente, a partir de la definición de la

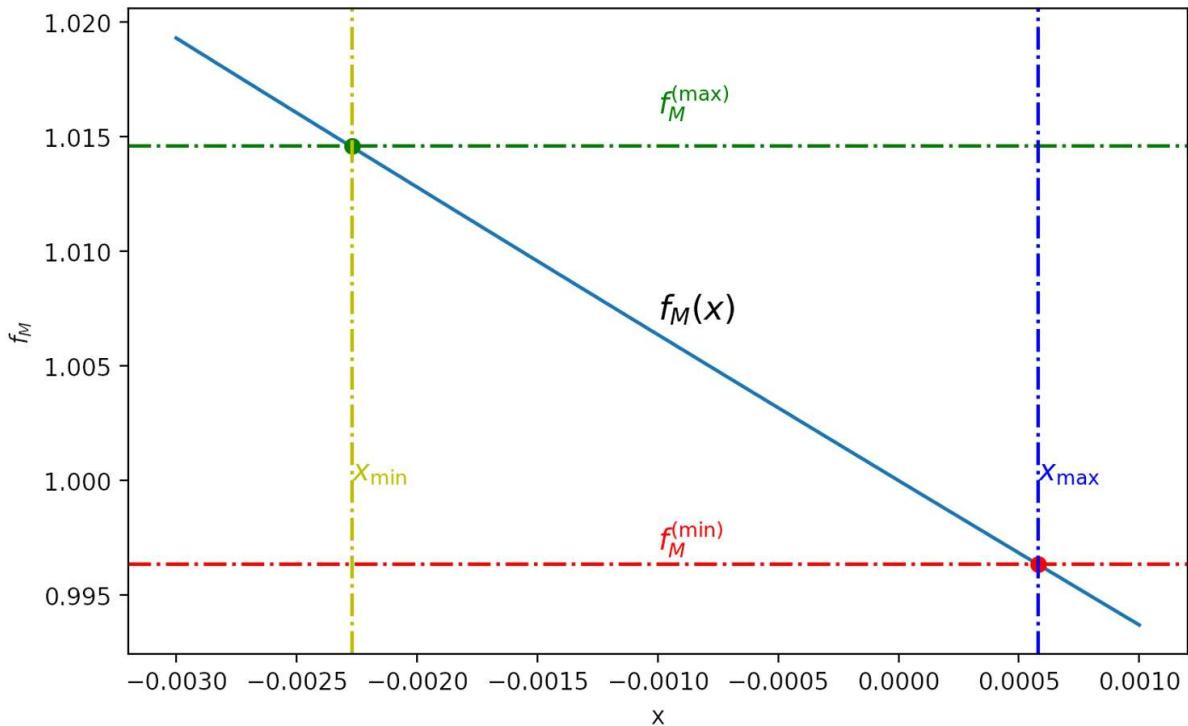


Figura 2.10: Función $f_M(x)$ con L y Q estimadas a partir de la señal GW170817. La líneas horizontales representan $f_M^{(\max)}$ y $f_M^{(\min)}$ como se definen en la Ec. (2.49) y Ec.(2.48) respectivamente. Líneas verticales son utilizadas para entender mejor los valores de x_{\max} y x_{\min} . La intersección de las tres líneas determinan que los masas permitidas son consistentes con la señal GW170817.

variable adimensional x , Ec. (2.42), tenemos que $b = Lr^3x/Q$. Utilizando los valores consistentes con la señal GW170817 obtenemos los siguientes valores para la luminosidad y cambio logarítmico del periodo: $L = 1.8423 \times 10^{55}$ ergs/s y $Q = -272.4447$ Hz, y con esto, obtenemos el siguiente rango para el parámetro magnético

$$\begin{aligned} b_{\min} &= -9.69 \times 10^{71} x_{\max} \text{emu}^2 = -5.623 \times 10^{68} \text{emu}^2, \\ b_{\max} &= -9.69 \times 10^{71} x_{\min} \text{emu}^2 = 2.18 \times 10^{69} \text{emu}^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Notemos que el signo de b es opuesto al signo de x , de modo que las configuraciones con $b_{\min} < 0$ corresponden a $x_{\max} > 0$, y viceversa. Finalmente, a partir de la Ec. (2.4), podemos estimar la magnitud de los campos magnéticos asociados con los valores mínimos y máximos de la masa. En términos de los campos magnéticos de los dipolos, el valor de b_{\min} requiere dipolos anti-alineados con $B = 2.74 \times 10^{16}$ G, el máximo teorizado para estrellas de neutrones, y b_{\max} requiere dipolos alineados con campos magnéticos de magnitud $B = 5.41 \times 10^{16}$ G. En resumen, la masa más alta para GW170817 puede ser asociada con la presencia de campos magnéticos alineados. La masa total mas pequeña puede ser asociada con campos magnéticos anti-alineados de la misma magnitud. De este modo, podemos inferir que las incertidumbres de la colaboración LIGO-Virgo para la determinación de las masas, permite la presencia de campos magnéticos de hasta $B = 2.74 \times 10^{16}$. Es entonces importante que la precisión en la medición de las masas incremente, de este modo podrían determinarse los campos magnéticos en las estrellas de neutrones que chocan y emiten ondas gravitacionales.

2.6. Conclusiones del capítulo 2

En el contexto de la astronomía de ondas gravitacionales y el modelado de las fuentes, los objetos compactos son un tema central de estudio. Las estrellas de neutrones son de los objetos astrofísicos que pueden poseer los campos magnéticos más intensos del Universo. Entonces, se espera que los campos magnéticas jueguen un rol importante en la dinámica de las estrellas de neutrones. En sistemas binarios, la emisión de ondas gravitacionales puede verse ligeramente afectada por la presencia de campos magnéticos intensos como ya había sido presentado en previas investigaciones [104, 107]. En este trabajo, presentamos un simple, pero útil modelo de un sistema binario de estrellas de neutrones que incorpora los campos magnéticos en la dinámica de la binaria. Nuestro enfoque está basado en el formalismo cuadrupolar para calcular las ondas gravitacionales emitidas durante la fase de espiraleo para sistemas binarios magnetizados. En un primer momento, utilizamos la descripción Newtoniana de la Gravedad y describimos los campos magnéticos de cada estrella como dipolos magnéticos perfectos para obtener expresiones para la frecuencia orbital de la binaria magnetizada. Además, como las ondas gravitacionales tienden a circularizar las órbitas de la binaria, nos enfocamos en el caso circular.

Asumiendo que la contribución de los espines individuales al momento angular total del sistema binario es muy pequeño, la contribución gravitacional y magnética domina la contribución del momento angular orbital y entonces las ecuaciones que contienen la interacción gravitacional y magnética puede ser expresadas en una forma muy simple y analítica. En particular, podemos argumentar que en la aproximación de dipolos magnéticos para las estrellas de neutrones, los momentos magnéticos individuales se mantienen en general alineados con el momento orbital angular. Bajo esta consideración mostramos que la dinámica de las binarias puede ser reducida a un problema de un cuerpo. Mediante el estudio del potencial efectivo del problema equivalente de un cuerpo, mos-

tramos que existe un valor crítico para los campos magnéticos por debajo del cual no existen órbitas ligadas. Este valor crítico emerge solamente cuando los momentos magnéticos están anti-alineados. Esto es, los sistemas ligados no existen si los campos son suficientemente intensos y con sus dipolos alineados entre sí porque la repulsión magnética es más fuerte que la atracción gravitacional.

En nuestro análisis determinamos el efecto de los campos magnéticos sobre algunas variables astrofísicas relevantes para un sistema binario tales como la luminosidad gravitacional, la tasa de cambio logarítmico del periodo orbital, el tiempo para alcanzar un radio mínimo y la masa total. Como esperábamos los resultados presentados aquí se reducen al problema binario de órbitas circulares en ausencia de campos magnéticos, descrito por ejemplo en [118].

Como una aplicación a nuestro modelos, mostramos que para sistemas binarios con masa total $M = 2.8 M_{\odot}$, y magnitud de sus campos magnéticos de $B \simeq 10^{16}$ G el radio entre el potencial magnético y gravitacional U_m/U_g es del orden de $\sim 10^{-4}$ cuando las estrellas están cerca de la colisión. También, encontramos que las desviaciones en la frecuencia y strain de las ondas gravitacionales con respecto a los casos no-magnéticos son del orden de $\sim 10^{-4}$ y las desviaciones en la luminosidad son un poco más grandes, son $\sim 10^{-2}$ con respecto al caso no magnetizado.

Por otro lado aplicamos este modelo a dos posibles escenarios astrofísicos.

(i) Considerando que la luminosidad gravitacional y la tasa de cambio logarítmico del periodo orbital pueden ser extraídas de los datos observacionales, nuestro modelo nos permite estimar el efecto de los campos magnéticos en la determinación de las masas individuales sobre la binaria. Mostramos que la masa total y masa reducida, puede ser sub o sobre-estimadas con respecto a un sistema binario sin interacción magnética. Además, si los momentos magnéticos están alineados, la masa total es subestimada mientras que si los momentos magnéticos están anti-alineados, la masa total se sobre-estima. Lo opuesto ocurre con la masa reducida. En concreto, para magnitudes de $B \sim 10^{16}$ G, pueden causar una sobre-estimación o sobre-estimación hasta 2 % de la masa total. Aunque este porcentaje parece pequeño, la desviación cae dentro de los rangos de incertidumbre de los detectores de la Colaboración LIGO-Virgo [138]. (ii) Usamos como ejemplo el evento GW170817 y lo aplicamos a nuestro modelo para calcular la incertidumbre en la determinación de la masa de los progenitores reportadas en la literatura. Este procedimiento, naturalmente impone un rango de posibles magnitudes de los campos magnéticos de la fuente de la señal GW170817. Concretamente, los posibles valores mínimos y máximos de la masa total asociada con la señal GW170817 dan un rango para que la binaria progenitora tenga magnitudes de los campos magnéticos de $B \sim 10^{16}$ G, lo cual está dentro de lo esperado.

Como estimamos en la Sec. 2.5 los efectos de los campos magnéticos son muy pequeños como para ser detectados con los actuales detectores de ondas gravitacionales, a menos que estos tuvieran campos magnéticos tan intensos como $B = 10^{17}$ G. Puesto que en un futuro la sensitividad y alcance de las observaciones de ondas gravitacionales permitirán la detección de los campos magnéticos y sus efectos en las propiedades de la binaria y las ondas gravitacionales, estudios como éste son de gran importancia. Basado en nuestros resultados, las plantillas de ondas gravitacionales pueden ser generadas y posteriormente

2 Ondas gravitacionales de binarias magnetizadas en el regimen lineal

efectuar la correspondiente búsqueda utilizando los datos publicados por la colaboración LIGO. Los resultados del presente capítulo pueden consultarse en [20]. Se agradece a los autores de dicho trabajo por sus valiosos aportes.

3 Ondas gravitacionales de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ

Este capítulo está basado en una investigación en elaboración que próximamente será enviada para su publicación. La investigación tiene por título: *Detection of gravitational waves emitted from head-on collisions of ℓ -boson stars* y los autores son: Mariana Lira (ICN-UNAM), Mtra. Laura O. Villegas (Udg), Dra. Claudia Moreno (Udg), Dr. Javier M. Antelis (Tec de Monterrey), Dr. Víctor Jaramillo (USTC) y Dr. Darío Nuñez (ICN, CIDMA).

3.1. Resumen

Se examinan distintas señales de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ , las cuales son posibles objetos compactos de materia oscura. Presentamos una revisión a los aspectos generales y propiedades de este tipo de objetos. Utilizamos los resultados de trabajos previos para analizar distintos perfiles de ondas gravitacionales generados en estas colisiones. Para fijar ideas, elegimos como distancia a la fuente 100 Mpc y determinamos el rango de masas y amplitudes del campo escalar que compone a las estrellas de bosones- ℓ . Posteriormente, procesamos las señales y obtenemos las imágenes como podrían ser detectadas por los detectores de la colaboración LIGO-Virgo-Kagra y otros. Además, comparamos cualitativamente las características de este tipo de señales gravitacionales con las producidas por colisiones de agujeros negros.

3.2. Introducción

Desde la primera detección de ondas gravitacionales (OGs) por la Colaboración LIGO-Virgo (CLV) en 2015 [61], la era de la astronomía de ondas gravitacionales ha comenzado y está avanzando rápidamente. A la CLV [139] se le ha sumado el grupo KAGRA en Japón [140]. El método empleado para analizar los datos de los detectores de CLV y KAGRA (CLVK) se llama filtro por empate y requiere forzosamente de modelos teóricos de ondas gravitacionales, sin ellos, no sería posible extraer las señales y asociarlas a una fuente. Es decir, son necesarios los modelos teóricos y un procesamiento de datos para encontrar señales gravitacionales de origen astrofísico. La CLVK ha terminado tres períodos de observación cuyos resultados pueden consultarse en el Tercer Catálogo de

3 Ondas gravitacionales de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ

Ondas Gravitacionales Transientes[138]. Reportan 90 eventos confirmados de 2015 a la fecha, todos estos eventos están asociados con la fusión de estrellas de neutrones o agujeros negros binarios. El cuarto periodo de observación O4 comenzó en Mayo de 2023 y sigue activo.

Dentro del estado-del-arte de las investigaciones en este tema, se modelan principalmente agujeros negros y estrellas de neutrones binarias como fuentes de OGs, ampliando el espacio de parámetros y los modelos. Más aún, con OGs, existe una gran oportunidad para probar modelos teóricos de otras posibles fuentes teóricas de ondas gravitacionales, como las estrellas de bosones [86] y las estrellas de Proca[141]. Las estrellas de bosones son sistemas astrofísicos teóricos cuya existencia aún no ha sido comprobada ni descartada. Se construyen dentro del marco teórico de la Relatividad General como soluciones auto-gravitantes al sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon, donde los bosones se describen a partir de un campo escalar complejo [142]. El campo escalar está tomando cada vez mayor interés como candidato para describir la materia oscura del Universo [16]. Es un campo del espaciotiempo cuatridimensional donde a cada punto x^a se le asigna una cantidad escalar compleja: Φ . Para una revisión detallada y actualizada del tema, existen algunos artículos de revisión como [15].

Hay una amplia variedad de modelos de estrellas de bosones, las más simples fueron construidas a finales de los 1960s [89, 143], conformadas por un solo campo escalar. Una de las configuraciones más interesantes son las estrellas de bosones- ℓ [142, 144]. Una estrella de bosones- ℓ es esféricamente simétrica y está formada por $2\ell + 1$ campos escalares complejos.

Se han planteado varios escenarios bajo los cuales se podrían detectar las estrellas de bosones- ℓ y así confirmar (o descartar) su existencia. Una posible manera sería a través de la detección de sus ondas gravitacionales producto de la interacción de dos de ellas. En simulaciones numéricas recientes, se ha encontrado que si dos estrellas de bosones chocan frontalmente, emiten ondas gravitacionales [86].

En el trabajo [145] se analiza bajo qué valores de la masa bosónica, las estrellas de bosones binarias podrían ser imitadores de agujeros negros binarios.

En simulaciones recientes de colisiones frontales de estrellas de bosones- ℓ , se encuentra que dependiendo de la masa de las estrellas de bosones- ℓ , el remanente de la colisión puede ser un agujero negro, una estrella de bosones- ℓ , ó un producto desviado de la simetría esférica con un campo escalar en dissipación. Del mismo modo, la forma de las ondas gravitacionales es distinta en cada caso [146].

En el presente capítulo analizamos distintos ejemplos de sistemas binarios de estrellas de bosones- ℓ en colisión frontal, las cuales son posibles objetos de materia oscura. Presentamos una revisión a los aspectos generales de este tipo de configuraciones auto-gravitantes y utilizamos estos resultados para analizar los perfiles de ondas gravitacionales emitidos en la colisión. Elegimos como distancia a la fuente 100 Mpc, y, determinamos el rango de energía intrínseca del campo escalar que compone a las estrellas que podrían ser detectadas por los actuales observatorios de ondas gravitacionales. Además, procesamos las señales y obtenemos los espectogramas y datos que verían los observatorios en la colisión frontal de estrellas de bosones y, resaltamos las similitudes y diferencias con las señales gravitacionales producidas en la colisión de agujeros negros.

Como está organizado este capítulo. En este trabajo, exploramos los ocho modelos de colisiones frontales de estrellas de bosones- ℓ generados en [146] (cuatro corresponden a binarias con $\ell = 0$ y cuatro a binarias $\ell = 1$). Aprovechando la libertad de elección de energía intrínseca del campo bosónico $m_\Phi c^2$, hacemos predicciones sobre los valores de energía que debería tener el campo escalar de las estrellas de bosones, para que éstas, al chocar frontalmente, emitan ondas gravitacionales con frecuencias y amplitudes dentro del rango de detección de la colaboración LIGO, Virgo, Kagra. Procesamos las señales para obtener la amplitud, energía y frecuencia característica de las ondas gravitacionales para el rango de $m_\Phi c^2$ estimado. Posteriormente, elegimos un valor conveniente de la energía $m_\Phi c^2$ (lo cual fija los valores de las masas y radios de la fuente, así como el tiempo de la colisión) y comparamos las señales entre fuentes con el mismo radio pero distinto valor del parámetro ℓ . En la sección de Resultados, mostramos que las señales de estrellas de bosones $\ell = 1$ son más fáciles de ser detectadas por LIGO-Virgo-KAGRA que las estrellas de bosones con $\ell = 0$. Sintetizamos ésta y otras conclusiones en la última sección del presente capítulo.

3.3. Fundamentos teóricos

En las subsecciones 3.3.1 y 3.3.2 se describen las estrellas de bosones estándar ($\ell = 0$) y las estrellas de bosones- ℓ , respectivamente. En la subsección 3.3.3, vamos a considerar sistemas binarios de ambos tipos de estrellas de bosones que interactúan entre sí únicamente a través de la Gravedad de acuerdo al sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon.

3.3.1. Estrellas de bosones ($\ell = 0$)

Sabemos que la acción en Relatividad General S está dada por la integral volumétrica de la función lagrangiana \mathcal{L} de modo que: $S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x$. Las ecuaciones que rigen toda la dinámica del sistema se obtienen a partir del principio de mínima acción que establece que $\delta S = 0$. Para más detalles sobre el formalismo lagrangiano se puede consultar la sección 1.1 del capítulo 1 de la presente tesis.

Las estrellas de bosones son configuraciones auto-gravitantes que satisfacen el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon (EKG). El sistema EKG se deduce aplicando el principio variacional a la siguiente acción total:

$$S = \int \sqrt{|g|} \left[\frac{c^4 \mathcal{R}}{16\pi G} + \mathcal{L}_\Phi \right] d^4x, \quad (3.1)$$

siendo \mathcal{L}_Φ la función lagrangiana del campo escalar Φ dada por:

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2} (\nabla^a \Phi \nabla_a \Phi^* + V(|\Phi|^2)), \quad (3.2)$$

donde $V(|\Phi|^2)$ es un potencial efectivo en principio arbitrario. El tensor T_{ab} se obtiene

3 Ondas gravitacionales de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ

a partir de la variación de la función lagrangiana respecto a la métrica:

$$T_{ab} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2} (\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi^* + \nabla_b \Phi \nabla_a \Phi^* - g_{ab} (g^{cd} \nabla_c \Phi \nabla_d \Phi^* + V(|\Phi|^2))). \quad (3.3)$$

Al sustituir la función lagrangiana en la acción total y estimar la variación respecto a los campos gravitacional y escalar se obtiene el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon (EKG):

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (3.4)$$

$$\square \Phi = \frac{\partial V}{\partial \Phi^*}, \quad (3.5)$$

con $\square \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ para un espaciotiempo estático y con simetría esférica descrito por la métrica en la Ec. (3.6). La expresión anterior implica un sistema de tres ecuaciones diferenciales para las funciones métricas y el campo escalar.

La ecuación para Φ es esencialmente una ecuación de onda y describe la dinámica del campo escalar en un espaciotiempo dado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Cuando resolvemos junto a las ecuaciones de Einstein con el tensor dado por la Ec. (3.3), se obtiene una estructura auto-gravitante compuesta de campo escalar. Para resolver es necesario definir el potencial escalar y simplificar un poco el sistema de ecuaciones a través de la elección de una métrica de prueba (anzatz) adecuada:

Anzatz y potencial escalar

Para construir soluciones esférico simétricas se considera el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = -\alpha(r) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M(r)G}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de línea de la 2-esfera y $\alpha(r)$ y $M(r)$ son las funciones a resolver. En esta simetría resulta lógico plantear como anzatz para el campo escalar una función de onda plana con frecuencia ω , esto es,

$$\Phi = \phi(r) e^{i\omega t}. \quad (3.7)$$

así como considerar el siguiente potencial escalar V

$$V(|\Phi|^2) = \mu^2 \Phi \Phi^*, \quad (3.8)$$

con μ conocido como parámetro de masa con unidades de inverso de longitud, que se relaciona con la masa asociada a la partícula bosónica, m_Φ , con

$$\mu = \frac{m_\Phi c}{\hbar}, \quad (3.9)$$

con c la rapidez de la luz en el vacío y \hbar la constante de Planck dividida por 2π .

Por otra parte, al demandar que el espaciotiempo sea asintóticamente plano, condición necesaria para obtener un objeto auto-gravitante, se encuentra que $\omega^2/c^2 < \mu^2$. Es decir, existe una relación entre la frecuencia de oscilación y la masa intrínseca del campo escalar.

Al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones, se deben considerar condiciones iniciales y se obtienen configuraciones auto-gravitantes de campo escalar que reciben el nombre de estrella de bosones caracterizadas por su masa total M_{Komar} , el radio que encierra el 99 % de dicha masa, R_{99} , el campo escalar y las funciones métricas. Este procedimiento puede repetirse muchas veces para obtener una familia de estrellas de bosones, como se aprecia en la Fig. (3.1). En esa figura, se grafica la masa M_{Komar} contra el radio R_{99} .

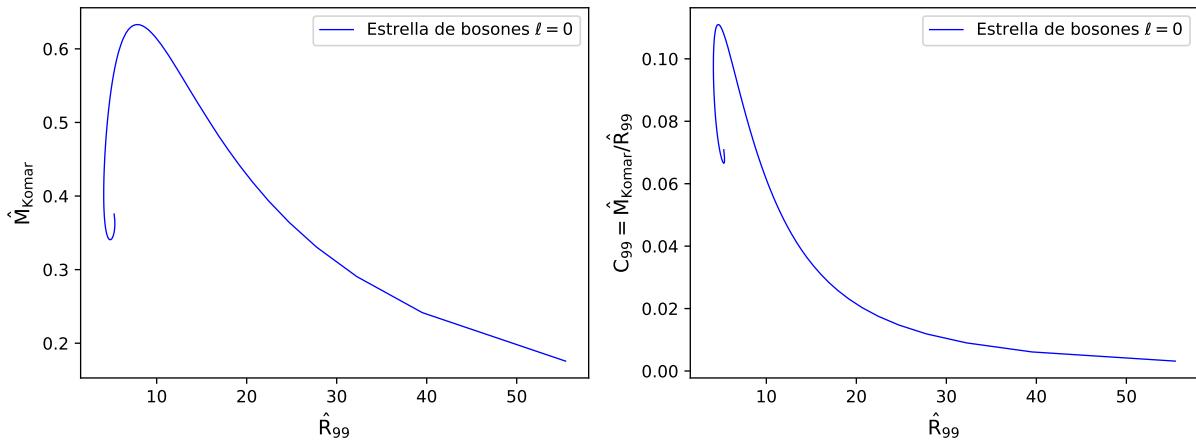


Figura 3.1: Se muestra la familia de estrellas de bosones $\ell = 0$ estables en unidades. A la izquierda se muestra la masa de Komar \hat{M}_{Komar} como función del radio \hat{R}_{99} frecuencia de oscilación del campo escalar $\hat{\omega} = \omega/(c\mu)$ en el eje horizontal y la masa total de la estrella $\hat{M} = G\mu M/c^2$. A la derecha se muestra la compacidad \mathcal{C} en función de $\hat{\omega}$. El símbolo $\hat{}$ (*gorrito*) denota que la cantidad es adimensional.

3.3.2. Estrellas de bosones- ℓ

Las estrellas de bosones convencionales pueden ser generalizadas utilizando en lugar de uno, varios campos escalares clásicos acoplados mínimamente a la Gravedad, [147], como es el caso de las estrellas de bosones- ℓ de modo que en vez de considerar la función lagrangiana de la Ec. (3.2) consideraremos ahora la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\nabla^a \Phi_m \nabla_a \Phi_m^* + V(|\Phi_m|)). \quad (3.10)$$

Estas configuraciones ya han sido estudiadas a detalle, por ejemplo, en [144]. Cuando se considera el parámetro ℓ se está suponiendo que la estrella de bosones- ℓ está compuesta

3 Ondas gravitacionales de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ

por el número impar $2\ell + 1$ de campos escalares complejos $\Phi_{\ell m}$ de la forma

$$\Phi_{\ell m}(t, r, \vartheta, \varphi) = e^{-i\omega t} \phi_\ell(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (3.11)$$

donde ω es una frecuencia real, $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ son los armónicos esféricos estándar, ℓ está asociado al momento angular, m es el número de nodo. Cuando $\ell = 0$, la ecuación anterior se reduce a la Ec. (3.7). Cuando $\ell = 1$, puede tomar los valores $-1, 0, 1$ por lo que la estrellas de bosones $\ell = 1$ queda descrita por tres campos escalares complejos: $\Phi_{\ell=1} = e^{-i\omega t} \phi_1(r)(Y_{11}(\vartheta, \varphi) + Y_{10}(\vartheta, \varphi) + Y_{1-1}(\vartheta, \varphi))$; y así sucesivamente.

Siguiendo el mismo procedimiento que con las estrellas de bosones convencionales ($\ell = 0$), el tensor de energía-momento se obtiene a través de la variación de la Ec. (3.10), de donde se obtienen $2\ell + 1$ términos de la forma del tensor dado en la Ec. (3.3) para un solo campo escalar. En el caso de las estrellas de bosones- ℓ ,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_m (\nabla_\mu \Phi_m \nabla_\nu \Phi_m^* + \nabla_\nu \Phi_m \nabla_\mu \Phi_m^* - g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi_m \nabla_\beta \Phi_m^* + \mu^2 \Phi_m \Phi_m^*)) . \quad (3.12)$$

Para comprobar que el tensor de energía-momento tiene simetría esférica y es independiente al tiempo, utilizamos el teorema de suma de los armónicos esféricos:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (3.13)$$

junto con el hecho de que aquí hay eigen-funciones del operador angular laplaciano:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y^{\ell m} = -\ell(\ell + 1) Y^{\ell m}, \quad (3.14)$$

con esta relación puede demostrarse [142] que la dependencia angular de las soluciones desaparece, el tensor de energía-momento se mantiene con simetría esférica [148].

La ecuación Klein-Gordon también pierde su dependencia angular, aunque mantiene un término con $\ell(\ell + 1)/r^2$. Finalmente, se obtienen, al igual que con las estrellas de bosones ($\ell = 0$), configuraciones esféricas de campo escalar con un radio contenido el 99 % de su masa, reciben el nombre de estrellas de bosones- ℓ [142].

Estos objetos son una generalización de las anteriores estrellas de bosones ya mencionadas. Para un valor dado de ℓ , se puede obtener una familia de soluciones variando el valor de ω y determinando las cantidades globales de cada solución, como se muestra en la Fig. 3.2 la cual incluye tanto las estrellas de bosones con $\ell = 0$ así como la familia $\ell = 1$. En ambos casos, el valor máximo de las curvas separa las configuraciones estables de las inestables [149, 150]. En [144], distintas propiedades de las configuraciones de múltiples campos escalares fueron analizadas, y, obtienen que la familia de soluciones $\ell = 1$ tiene propiedades cualitativas muy similares a los otros casos. Las estrellas de bosones- ℓ parecen ser estables ante perturbaciones esféricas, lo cual demuestra que para cada valor fijo de ℓ , existen estrellas de bosones linealmente estables ante fluctuaciones radiales. Incluso, los resultados en [150] sugieren que la familia $\ell = 1$ es un caso particular de una

familia más amplia de solitones auto-gravitantes, estáticos y posiblemente estacionarios. Estas configuraciones, también pueden interpretarse como condensados- ℓ , de naturaleza semi-clásica con número cuántico m .

Por otra parte, familias con valores grandes de ℓ ya han sido resueltas y construidas en [151] y obtuvieron que las soluciones con grandes valores de ℓ tienden a formar un cáscaro como estructura. Además, soluciones análogas pero usando materia exótica han sido considerados en [99] con lo que se han construido ya soluciones de agujeros de gusano- ℓ .

3.3.3. Colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ

Como mencionamos en la introducción, aún cuando técnicamente las estrellas de bosones- ℓ no colisionan, su interacción gravitacional genera una interferencia que modifica la geometría del espaciotiempo y se producen ondas gravitacionales cuando una estrella pasa a través de la otra. Mas aún, contrario a la colisión de agujeros negros, donde se generan ondas gravitacionales bien definidas, en cambio, para estrellas de bosones $\ell = 0$ y $\ell \neq 0$ [146], existe una variedad amplia de perfiles de ondas gravitacionales que dependen de distintos parámetros, siendo la compacidad de las estrellas una de las más determinantes.

Para valores grandes de compacticidad, el perfil de onda comienza a asemejarse al generado por colisión de agujeros negros con sus características fases de fusión y amortiguamiento, mientras que estrellas poco compactas al colisionar frontalmente general perfiles de ondas gravitacionales muy distintos a la colisión de agujeros negros, no es claro que haya fusión ni amortiguamiento, aunque sí algunas oscilaciones de periodo similar en orden de magnitud, lo cual también las diferencian de las ondas gravitacionales tipo destello o *burst*.

Para construir el sistema binario, designamos los índices $i = 1, 2$ para cada una de estrellas de bosones- ℓ . Cada una está descrita por los campos escalares complejos $\Phi^{(i)}$ de la forma

$$\Phi^{(i)} = \Phi_{\ell m}^{(i)}(t, r, \vartheta, \varphi) = e^{-i\omega t} \phi_{\ell}^{(i)}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (3.15)$$

En el caso del sistema binario de estrellas de bosones- ℓ partimos de la siguiente función lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\Phi SB} = - \sum_{i=1,2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\nabla_a \Phi_{\ell m}^{(i)} \nabla^a \bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)} + \mu^2 \|\Phi_{\ell m}^{(i)}\|^2), \quad (3.16)$$

donde ∇_a es la derivada covariante, $\mu \equiv \frac{m_\Phi c}{\hbar}$ es el parámetro de masa, m_Φ es la masa intrínseca de la partícula bosónica que constituye a los campos escalares complejos denotados $\Phi_{\ell m}^{(i)}$ con $i = 1, 2$ para representar a cada estrella. $\bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)}$ son los campos escalares conjugados.

En esta propuesta la simetría es esférica y la dependencia temporal es armónica. El tensor de materia energía del sistema binario T_{ab} está dado por la suma de los tensores de materia-energía individuales $T_{ab}^{(1)}$ y $T_{ab}^{(2)}$, es decir, $T_{ab} = T_{ab}^{(1)} + T_{ab}^{(2)}$, con

$$T_a^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [\nabla_a \bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)} \nabla_b \Phi_{\ell m}^{(i)} + \nabla_a \Phi_{\ell m}^{(i)} \nabla_b \bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)} - g_{ab} (\nabla_\alpha \bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)} \nabla^\alpha \Phi_{\ell m}^{(i)} + \mu^2 \bar{\Phi}_{\ell m}^{(i)} \Phi_{\ell m}^{(i)})] \quad (3.17)$$

con $i = 1, 2$, para referirse a la primera y segunda estrella, respectivamente.

Cada campo escalar satisface su correspondiente ecuación de Klein-Gordon:

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Phi_{\ell m}^{(i)} - \mu^2 \Phi_{\ell m}^{(i)} = 0. \quad (3.18)$$

Como en el caso de las estrellas de bosones individuales, se considera una métrica estática y simétricamente esférica de la siguiente forma:

$$ds^2 = -c^2 \alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.19)$$

donde $\alpha = \alpha(r)$ y $a = a(r)$ son las funciones métricas a determinar y $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin \vartheta^2 d\varphi^2$ es el elemento de línea de la esfera-2 unitaria, entonces, las ecuaciones de Klein-Gordon se simplifican a:

$$\phi_\ell'' = -\phi_\ell' \left(\frac{2}{r} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{2a} \right) + a\phi_\ell \left(\mu^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2 \alpha^2} \right), \quad (3.20a)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{(1-a)}{r} + 4\pi r a \left[\frac{(\phi_\ell')^2}{a} + \phi_\ell^2 \left(\mu^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2 \alpha^2} \right) \right], \quad (3.20b)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{(a-1)}{r} + \frac{a'}{2a} - 4\pi r a \phi_\ell^2 \left(\mu^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right). \quad (3.20c)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, se han desarrollado diversas infraestructuras computacionales. Resalta Einstein Toolkit, especializado en la resolución de sistemas relativistas[152]. Muchas de sus herramientas resuelven las ecuaciones en coordenadas cartesianas para la parte espacial. Es por esto que las soluciones se transforman a las coordenadas cartesianas mediante

$$x^1 = x = r \cos \phi \sin \varphi, \quad x^2 = y = r \sin \phi \sin \varphi, \quad x^3 = z = r \cos \varphi. \quad (3.21)$$

La métrica también conviene reexpresarla como

$$ds^2 = -c^2 \alpha^2 dt^2 + \gamma_{jk} dx^j dx^k, \quad (3.22)$$

donde γ_{jk} es la métrica espacial.

Consideraremos un sistema binario compuesto por la superposición de dos estrellas de bosones- ℓ aisladas. Las estrellas están inicialmente en reposo centradas en $(x_c, 0, 0)$ y $(-x_c, 0, 0)$. Como dato inicial ($t = 0$) se considera que:

$$\gamma_{jk} = \gamma_{jk}^{(+)}(x - x_c, y, z) + \gamma_{jk}^{(-)}(x + x_c, y, z) - \eta_{jk}(x, y, z) \quad (3.23)$$

donde η_{jk} es la métrica espacial plana. Bajo estas elecciones se utiliza la formulación Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) con el método de líneas localizado en la espina MoL para resolver el sistema de ecuaciones. Estos métodos de evolución de campos escalares han sido recientemente utilizados para el análisis de estrellas de bosones- ℓ . En la sección III.B del artículo [146] se encuentran todos los detalles técnicos del mecanismo empleado para generar las ondas gravitacionales que serán analizadas en la siguiente sección del presente capítulo.

Las dos estrellas de bosones- ℓ están compuestas por el mismo conjunto de campos escalares. Esta configuración recibe el nombre de estado coherente y se modela con un conjunto de campos $N = 2\ell + 1$ localizados en dos regiones distintas del espacio, es decir, al tiempo $t = 0$

$$\Phi_{lm}^{(1)} \neq 0, \quad \text{y} \quad \Phi_{lm}^{(2)} = 0 \quad (3.24)$$

para todo m . El sistema binario está compuesto por $2\ell + 1$ campos escalares independientes. Existe otra posibilidad, llamado estado incoherente y consiste en que cada estrella esté compuesta por un conjunto distinto de $2\ell + 1$ campos escalares, es decir, $\Phi_{lm}^{(1)} \neq 0$, y $\Phi_{lm}^{(2)} \neq 0$ para todo m , sin embargo, en la presente investigación nos restringimos al análisis de sistemas binarios coherentes.

Para la simulación numérica conviene expresar la condición inicial de los campos escalares del sistema binario coherente como

$$\Phi_m^{(1)}(t = 0, x, y, z) = \Phi_m^{(+)}(x - x_c, y, z) + \Phi_m^{(-)}(x + x_c, y, z) \quad (3.25)$$

y $\Phi_m^{(2)} = 0$.

Nos restringimos al análisis de sistemas binarios de estrellas de bosones- ℓ en estado coherente (mismo conjunto de campos escalares).

Una vez resueltas las ecs. (3.20) se obtienen las funciones métricas $\alpha(r)$ y $a(r)$ además de la parte espacial del campo escalar $\phi(r)$ introducido en la Ec. (3.15). Con ellas es posible estimar las componentes del tensor de materia-energía. En particular, es posible monitorear la densidad de energía de la materia a través de $\rho = n^a n^b T_{ab}$ (n^a es el vector unitario normal a la superficie Σ) durante el tiempo de la colisión. De esta manera se cuantifica el cambio en la energía antes y después de la colisión. Además, se puede cuantificar las desviaciones de la simetría esférica, para ello se computan los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} definidos como

$$I_{x^i x^i} \equiv \int_{\Sigma} \sqrt{\gamma} d^3 x \alpha \rho (r^2 - x^i)^2. \quad (3.26)$$

Como mostramos en la sección 1.1, particularmente en la subsección sobre la aproximación cuadrupolar, los momentos de inercia están muy relacionados con el comportamiento ondulatorio del espaciotiempo, es decir, con la emisión de ondas gravitacionales. Esta es la esencia de los mecanismos de extracción de las ondas gravitacionales a través de la cantidad Ψ_4 de las simulaciones numéricas. A continuación veremos algunos elementos básicos sobre la extracción de Ψ_4 de la simulación numérica. Para más detalles sobre

la cantidad Ψ_4 y el formalismo Newman-Penrose puede consultarse la sección 1.1.2 del capítulo introductorio.

3.3.4. Extracción de Ψ_4 de la simulación numérica

Luego del procedimiento computacional recién descrito, dentro de los datos de salida se encuentra el escalar-4 de Newman Penrose Ψ_4 , como es común en las simulaciones de fusiones de sistemas binarios compactos [153]. El escalar 4 de Newman Penrose se define como $\Psi_4 \equiv -C_{abpq}n^a\bar{m}^bn^p\bar{m}^q$, donde C_{abpq} es el tensor de Weyl (ver sección 1.1.2 del primer capítulo) y l, n, m, \bar{m} conforman una tetrada nula [32]. La tetrada nula tiene la propiedad de que algunos de todos sus productos internos se anulan, excepto $-l \cdot n = 1 = m \cdot \bar{m}$.

De acuerdo al teorema de Peeling, Ψ_4 es el componente del tensor de Weyl que cae como $1/r$ desde la fuente, por lo que se asocia a la radiación gravitacional saliente [154]. Una cuestión a resaltar de las colisiones frontales de cualquier tipo de objeto compacto es que por la simetría, Ψ_4 no tiene parte imaginaria.

El escalar Ψ_4 , a su vez, se relaciona con la amplitud de las ondas gravitacionales en la norma TT, mejor conocida como strain h_+, h_\times cuyas componentes son [155, 156],

$$\Psi_4 = \frac{\partial^2(h_+ - h_\times)}{c^2\partial t^2}, \quad (3.27)$$

Además, en la simulación numérica se descompone Ψ_4 utilizando los armónicos esféricos con peso de espín $s = -2$ ${}_{-2}Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\Psi_4(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} \Psi_4^{lm} {}_{-2}Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.28)$$

de forma equivalente, el strain total se puede obtener sobre la suma de todos los modos:

$$h \equiv h_+ - ih_\times = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (h_+^{lm} - ih_\times^{lm}) {}_{-2}Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.29)$$

De hecho, en las evoluciones numéricas de colisiones frontales de objetos compactos se ha encontrado que el modo dominante es el modo $lm = 22$ y será el analizado en lo que sigue.

3.3.5. Análisis de las señales gravitacionales

Transformar Ψ_4 a h no es una cuestión trivial, el método que actualmente más se emplea es el llamado método de *integración de frecuencia-fija (IFF)* [157, 158]. Consiste en hacer una transformada de Fourier sobre los términos Ψ_4^{lm} y utilizar una frecuencia de brinco para bajas frecuencias. De esta manera, en vez de hacer una doble integral sobre el tiempo:

$$h_+^{lm}(t) - ih_\times^{lm}(t) = \int^t \left(\int^t \psi_4^{lm}(t'') dt'' \right) dt' + A^{lm}t + B^{lm}, \quad (3.30)$$

donde A^{lm} y B^{lm} son constantes de integración (que deben ser calculadas tomando en cuenta las condiciones físicas, por ejemplo, que $h \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$), se efectúa una división en el espacio de Fourier y se aplica la transformada inversa de Fourier para obtener las series de tiempo $h_+^{lm}(t)$ y $h_\times^{lm}(t)$.

Aunque el procedimiento por la vía de la doble integral parece directo, tiene problemas pues al obtenerse de simulaciones numéricas, incluye ruido aleatorio, que al integrarse introduce efectos no lineales que no son físico sino asociados a la metodología de resolución. Por esta razón utilizamos el método IFF.

Los datos de salida de las simulaciones numéricas deben ser transformados en el strain de las ondas gravitacionales.

Una vez obtenidas las señales en su representación h_+ y h_\times , se procede a efectuar en análisis de los datos para conocer, entre otras cosas, la energía radiada por las ondas gravitacionales E_{OG} , la frecuencia característica f_{pico} .

Para el análisis, se utiliza la transformada de Fourier de la señal siguiendo la siguiente convención:

$$\tilde{h}(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (3.31)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi i f t} dt \quad (3.32)$$

La cantidad h_{rss} se define como,

$$h_{rss} = 2 \int_0^{\infty} \left[|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \right] df \quad (3.33)$$

Mientras que la energía de las ondas gravitacionales en la aproximación isotrópica es

$$E_{GW} = \frac{c^3}{G} \pi^2 D^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\tilde{h}_+(f)|^2 + |\tilde{h}_\times(f)|^2 \right) f^2 df. \quad (3.34)$$

Otra cantidad relevante es el radio Señal-Ruido o SNR por sus siglas en inglés. Se define como el producto punto del strain, procesado con la densidad del espectro de potencias del ruido $S(f)$:

$$SNR = \sqrt{\int \frac{4|\tilde{h}(f)|^2}{S(f)} df}. \quad (3.35)$$

Por otro lado, a partir del análisis de las frecuencias de las señales gravitacionales, puede determinarse la frecuencia máxima f_{pico} .

Existen diversos códigos, algunos de acceso libre como PyCBC [159], que permiten automatizar el análisis de las señales gravitacionales. En la siguiente sección se presentarán resultados utilizando la paquetería SN-LIBRARY para Python desarrollada por Marek Szczepanczyk 2020 (marek.szczepanczyk@ligo.org).

3.4. Casos de estudio

Vamos a considerar ocho configuraciones iniciales que corresponden a dos estrellas con mismo valor de ℓ (ver Fig.(3.2)) de masas individuales iguales entre sí $M_1 = M_2 \equiv M_0$. Cuatro de ellas corresponden a estrellas con $\ell = 0$ y cuatro con $\ell = 1$. Las señales que procesamos en este trabajo fueron obtenidas y reportadas por [146]. En dicho trabajo, las estrellas se colocan en sus posiciones y configuraciones iniciales y se les deja evolucionar en el tiempo, posteriormente se estiman algunas propiedades del remanente resultante de la colisión, las cuales se muestran en el cuadro (3.1). En dicho cuadro y a partir de ahora, las cantidades con el símbolo $\hat{\cdot}$ son adimensionales, mientras que las cantidades sin $\hat{\cdot}$ tienen unidades físicas.

En la Fig. (3.2) se muestran la familias de estrellas de bosones $\ell = 0$ y $\ell = 1$. Aunque cualitativamente ambas familias siguen el mismo comportamiento, se observa que las estrellas de bosones con $\ell = 1$ alcanzan masas $\hat{M} \equiv G\mu M/c^2$ y radios $\hat{R}_{99} \sim \mu R_{99}$ más altos que las estrellas de bosones con $\ell = 0$, dado un valor de $\hat{\omega} = \omega/(c\mu)$. Se observa que en ambas familias, existe un valor máximo de $\hat{M} = G\mu M/c^2$; se ha demostrado que a la izquierda del máximo, las soluciones son inestables, mientras que a la derecha, son estables. La masa máxima permite clasificar las soluciones entre la rama estable y la rama inestable. En la misma figura se etiqueta con una pequeña estrella las ocho configuraciones que se consideran en [146] y en el presente capítulo.

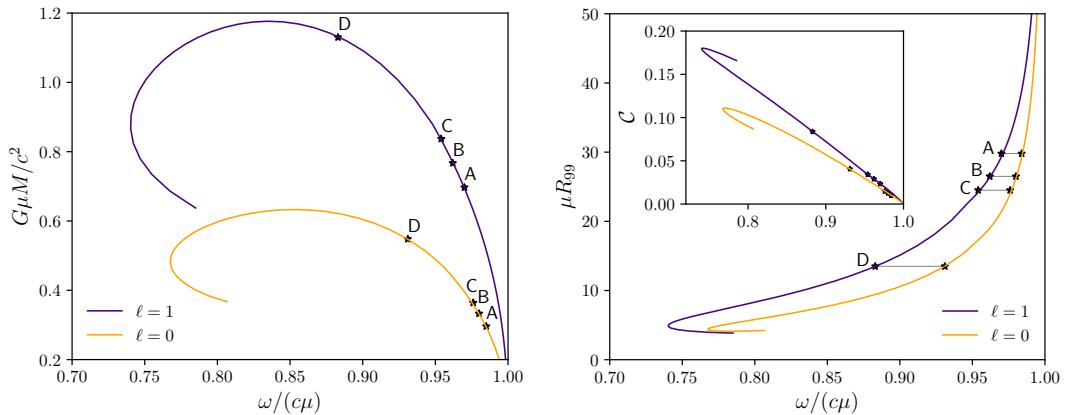


Figura 3.2: Izquierda: Masa total $\hat{M} = G\mu M/c^2$ de las estrellas de bosones aisladas para el los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$ contra la frecuencia de oscilación del campo escalar, $\hat{\omega} = \omega/(c\mu)$. Derecha: Radio y compacidad (subfigura) para las mismas estrellas de bosones. En ambas gráficas se marcan los modelos utilizados para la colisión frontal en este trabajo, los cuales se muestran en el cuadro (3.1).

Modelo	\hat{M}_0	\hat{R}_{99}	$\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$	$\hat{\omega}$	Remanente
Estrellas de bosones con $\ell = 0$					
h ℓ 0A	0.296	31.5	0.0221	0.985	BS
h ℓ 0B	0.333	27.5	0.0282	0.980	BS
h ℓ 0C	0.364	24.7	0.0391	0.976	BS
h ℓ 0D	0.548	13.5	0.0838	0.931	BH
Estrellas de bosones con $\ell = 1$					
h ℓ 1A	0.697	31.5	0.0221	0.970	BS
h ℓ 1B	0.775	27.5	0.0282	0.962	BS
h ℓ 1C	0.837	24.7	0.0391	0.954	BH
h ℓ 1D	1.17	13.5	0.0838	0.883	BH

Cuadro 3.1: Modelos de estrellas de bosones para la colisión frontal. \hat{M}_0 es la masa adimensional inicial de cada estrella, \hat{R}_{99} corresponde al radio adimensional que contiene el 99 % de la masa, \mathcal{C} es la compacidad, y $\hat{\omega}$ es la frecuencia adimensional de los bosones. El remanente de la colisión puede ser una estrella de bosones o un agujero negro, como se especifica en la última columna. Todos los modelos fueron obtenidos en [146].

Notemos que los dos modelos A, independientemente de si corresponden a $\ell = 0$ ó $\ell = 1$ tienen el mismo valor de \hat{R}_{99} y \mathcal{C} . Lo mismo pasa entre los modelos B, C y D. En cambio, los valores de \hat{M}_0 son distintos para cada modelo. Las compacidades de las fuentes toman valores $\mathcal{C} \sim 0.0221 - 0.0838$. La compacidad, al ser por construcción adimensional (ver Ec.(1.35)), permite comparar la densidad de las estrellas de bosones con otro tipo de objetos compactos. Recordemos que estamos utilizando como definición de configuración autogravitante, un objeto ligado gravitacionalmente con compacidad superior a una estrella de secuencia principal cuyo comportamiento es asintóticamente plano. La compacidad más alta se alcanza en los agujeros negros y es $\mathcal{C} = 1/2$, en cambio, las estrellas de neutrones, los segundos objetos más compactos del Universo conocido, alcanzan compacidades . En ese sentido, aunque las compacidades de las estrellas de bosones- ℓ que estamos considerando, son relativamente densas.

Por otro lado, podemos observar en el cuadro 3.1 que los modelos h ℓ 0D, h ℓ 1C h ℓ 1D tienen por remanente un agujero negro, mientras que los demás, una estrella de bosones- ℓ . Para estimar si el remanente es un agujero negro, se utilizó la espina AHFINDER de Einstein Toolkit [152], y en los casos donde el remanente resultó ser agujero negro, se estimó su masa a través de la relación, $M_{BH} = A/(16\pi)$, que es válida para un agujero negro de Schwarzschild.

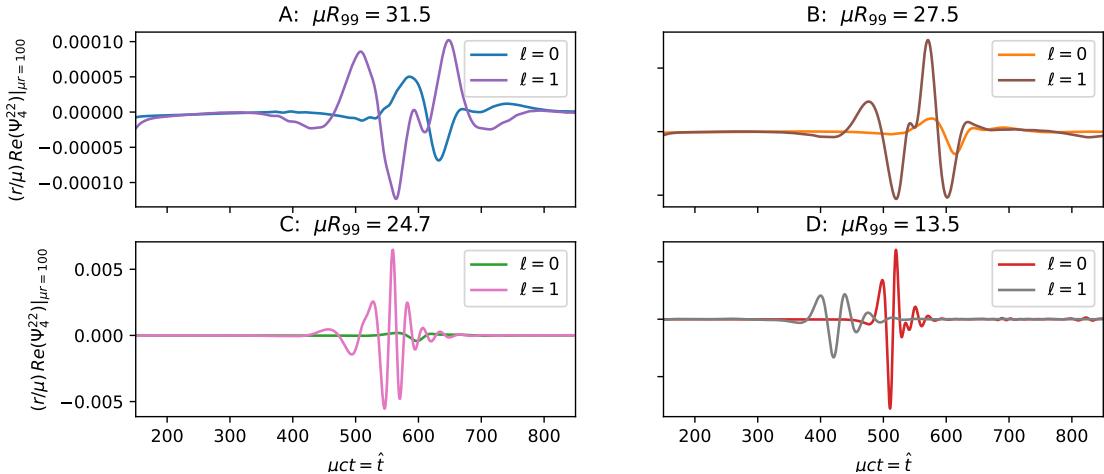


Figura 3.3: Cantidad $\hat{\Psi}_4$ en el tiempo extraída de la simulación numérica de colisiones frontales de estrellas de bosones- ℓ .

3.4.1. Redimensionalización

A partir de ahora vamos a considerar $G = 1.34 \times 10^{11} M_\odot^{-1} \text{km}^3 \text{s}^{-2}$, $c = 2.99 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ y $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ para expresar distancias en kilómetros, masas en masas solares, tiempo en segundos y energía en electronvoltios.

Un aspecto resaltable de las configuraciones de estrellas de bosones es que las soluciones tienen un parámetro libre: μ . Esto es, el sistema de ecuaciones del sistema binario de estrellas de bosones (con o sin ℓ), ante el cambio de variables

$$\hat{t} := c\mu t, \quad \hat{r} := \mu r, \quad \hat{\omega} := \frac{\omega}{c\mu} \quad (3.36)$$

mantiene la misma forma y queda expresado de forma independiente al parámetro μ . Las cantidades con gorro son adimensionales, mientras que las cantidades sin gorro tienen unidades físicas: $[t] = [T]$, $[r] = [D]$ y $[\omega] = [T]^{-1}$.

Utilizando la invariancia del sistema de ecuaciones bajo el re-escalamiento anterior, se obtienen soluciones para valores arbitrarios de μ . Para recuperar las unidades físicas de las soluciones, es necesario multiplicar por las constantes correspondientes a cada cantidad. En el cuadro (3.2) se muestran las cantidades relevantes para las estrellas de bosones- ℓ y las ondas gravitacionales, tanto en unidades adimensionales como en físicas así como la relación entre ambas.

Cantidad	Unidades adimensionales	Unidades físicas	Factor de conversión
Distancia radial	\hat{r}	r	$\hat{r} = \mu r$
Tiempo	\hat{t}	t	$\hat{t} = \mu c t$
Frecuencia Campo Escalar	$\hat{\omega}$	ω	$\hat{\omega} = \omega / (c\mu)$
Radio de la estrella	\hat{R}	R	$\hat{R} = \mu R$
Masa	\hat{M}	M	$\hat{M} = G\mu M/c^2$
Compacidad	\mathcal{C}	\mathcal{C}	$\mathcal{C} = GM/Rc^2$
Longitud de onda OGs	$\hat{\lambda}$	λ	$\hat{\lambda} = \mu \lambda$
Frecuencia OGs	\hat{f}	f	$\hat{f} = f/(c\mu)$

Cuadro 3.2: Unidades de las cantidades y variables de las estrellas de bosones- ℓ

3.4.2. Estimación de ordenes de magnitud respecto a la energía del campo escalar

En realidad, la cantidad física de interés no es el parámetro de masa del campo escalar μ , sino su energía intrínseca definida como

$$E_\Phi \equiv m_\Phi c^2 = 10^{-n} \text{ eV}, \quad (3.37)$$

donde n es un número arbitrario que nos permitirá fácilmente visualizar las escalas físicas de las estrellas de bosones en términos del orden de magnitud de la energía intrínseca E_Φ en unidades de eV, como suele tratarse en modelos de materia oscura y física de partículas. Por ejemplo, el bosón de Higgs tiene una energía intrínseca tal que $n = -9$, los axiones $n = 5$, mientras que los modelos de campos escalares ultraligeros consideran $n = 22$.

La relación entre μ y m_Φ nos permite estimar el orden de magnitud de μ en términos de n :

$$\mu = \frac{m_\Phi c}{\hbar} = \frac{E_\Phi}{\hbar c} = \frac{1}{1.96} 10^{10-n} \text{ km}^{-1}, \quad (3.38)$$

siguiendo con los ejemplos anteriores, para el bosón de Higgs $\mu \sim 10^{19} \text{ km}^{-1}$, en los axiones $\mu \sim 10^5 \text{ km}^{-1}$ y en los campos escalares ultraligeros $\mu \sim 10^{-12} \text{ km}^{-1}$. Con esto, todas las cantidades físicas se pueden re-expresar en términos de n .

Comencemos por el radio que contiene el 99 % de la masa de la estrella de bosones M_0 , es decir, R_{99} . En este caso, de la simulación numérica (ver cuadro 3.1) se conocen los valores $\hat{R}_{99} = \mu R_{99}$, entonces:

$$R_{99} = \frac{\hat{R}_{99}}{\mu} = \frac{c^2 \hbar \hat{R}_{99}}{E_\Phi} = 5.8826 \times 10^{n-5} \text{ km}. \quad (3.39)$$

Ahora veamos la masa total de las configuraciones. De la simulación numérica cono-

ceremos el valor adimensional $\hat{M}_0 = G\mu M_0/c^2$, e inversamente,

$$M_0 = \frac{\hbar c^3}{G E_\phi} \hat{M} = 1.3126 \times 10^{n-10} \hat{M} M_\odot. \quad (3.40)$$

También, de la simulación numérica conocemos las compacidades de las estrellas de bosones definidas como $\mathcal{C} \equiv GM_0/(c^2 R_{99})$, se trata de una cantidad adimensional útil para comparar densidades entre la materia. Utilizando que $\hat{M}_0 = G\mu M_0/c^2$ y $\hat{R}_{99} = \mu R_{99}$, podemos demostrar que $\mathcal{C} = \hat{M}_0/\hat{R}_{99}$, de modo que la compacidad no se requiere redimensionalizar.

Ahora pasemos a propiedades ya no de la fuente sino de las OGs: su frecuencia f_{OG} , longitud de onda λ_{OG} y amplitud característica h . Dado que las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz, $\lambda_{OG} f_{OG} = c$.

La longitud de onda de las ondas gravitacionales tiene unidades de distancia y para recuperar unidades a partir de algún valor numérico adimensional $\hat{\lambda}_{OG}$ se tiene que

$$\lambda_{OG} = \mu \hat{\lambda}_{OG} = \frac{E_\Phi}{\hbar c} \hat{\lambda}_{OG} = 5.1020 \times 10^{9-n} \hat{\lambda}_{OG} \text{ km}. \quad (3.41)$$

La cantidad f_{OG} debe tener unidades de Hertz, entonces, $\hat{f}_{OG} = f_{OG}/(c\mu)$, es decir,

$$f_{OG} = c\mu \hat{f} = E_\Phi \hat{f} / \hbar = 1.51 \times 10^{15-n} \hat{f}_{OG} \text{ Hz}. \quad (3.42)$$

Además, la amplitud de las señales \hat{h} , aunque es una cantidad por construcción adimensional, depende del inverso de la distancia a la fuente, D , y se reescalá mediante

$$h = \frac{\hat{h}}{\mu D} = \frac{\hbar c}{D E_\phi} = 5.1579 \times 10^{n-32} \frac{\hat{h}}{D_{100 \text{ Mpc}}} \quad (3.43)$$

donde hemos utilizado que $D_{100 \text{ Mpc}} = 100 \text{ Mpc} = 3.08 \times 10^{21} \text{ km}$.

Sabemos que las cantidades λ_{OG}, f_{OG}, h son funciones del tiempo cuya evolución durante la colisión de las estrellas de bosones permite inferir propiedades las ondas gravitacionales. Sin embargo, nos resultará útil designar un mecanismo para designar un valor característico para cada señal gravitacional en términos de la energía intrínseca del campo escalar mediante las ecs. (3.41), (3.42) y (3.43). El mecanismo que utilizaremos es el siguiente, para cada señal gravitacional identificamos el valor máximo de la amplitud \hat{h}_{max} en el cuadro (3.3) y calculamos el tiempo al que ocurre; en seguida, identificamos el segundo valor máximo de la amplitud más cercano y vemos el tiempo al que corresponde; finalmente, calculamos el valor absoluto de los tiempos y de esta manera construimos una longitud de onda característica que denotamos $\hat{\lambda}$. A partir de esta cantidad, obtenemos una frecuencia característica $\hat{f} = 1/\hat{\lambda}$. Esta es la manera en la que se obtienen los valores del cuadro (3.3).

3.4.3. Estimación del rango detección por LVK

Mediante la Ec. (3.43) podemos ver que mientras $n > 10$, la señal tiene una amplitud $h > 10^{-22}$, es decir, que estrellas de bosones con $E \sim 10^{-10} \text{ eV}$ o menor energía, producirían ondas gravitacionales detectables por los observatorios de la colaboración LVK.

No obstante, debemos tener en cuenta los detectores tienen un rango de detección en el espacio de frecuencias entre 10 y 1000 Hz.

Ahora, vamos a continuar el análisis anterior para entender el rango de energías intrínsecas del campo escalar que debe tener para formar configuraciones auto-gravitantes que al colisionar frontalmente, emitan ondas gravitacionales de frecuencias entre 10 y 1000 Hertz, es decir, en la banda de detección de los detectores de la Colaboración LIGO-Virgo-Kagra. Para más información sobre los detectores se puede consultar la SEc.(1.2.2). Para ello, partimos de la Ec.(3.42), de esta manera encontraremos los valores de n que producen ondas gravitacionales con $f_{\text{LIGO}} = 10 - 1000$ Hz. A partir de la Ec.(3.42), se sigue que

$$n = 15.17 - \log(f_{\text{LIGO}}) - \log(\hat{f}). \quad (3.44)$$

En el cuadro (3.1) , la columna n_1 corresponde al valor de n sustituyendo $\hat{\lambda}_c$ de la hilera correspondiente en lugar de $\hat{\lambda}$ y $f_{\text{LIGO}} = 10$ Hz; la columna n_2 corresponde al valor de n sustituyendo el mismo valor de $\hat{\lambda}_c$ y $f_{\text{LIGO}} = 1000$ Hz.

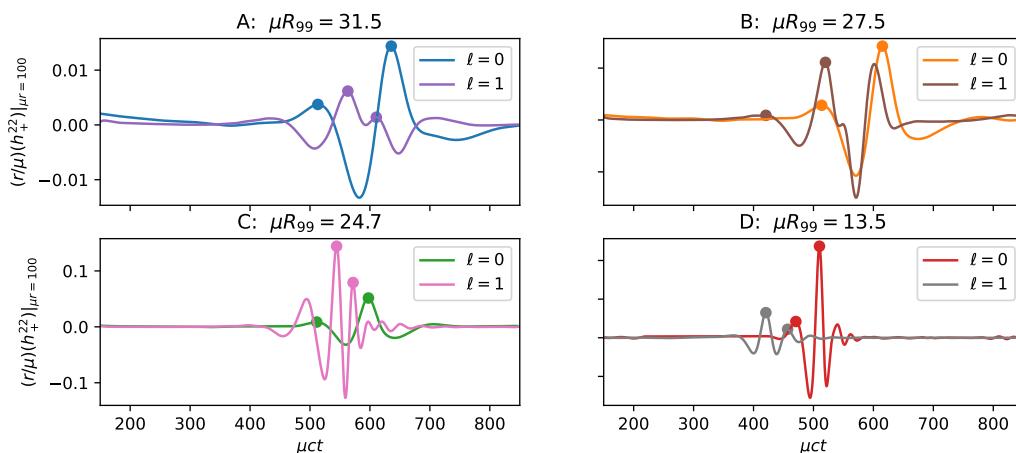


Figura 3.4: Amplitud de las OGs contra el tiempo adimensional para los modelos del cuadro (3.1). Se muestran los puntos de las dos amplitudes máximas locales cuya diferencia en el tiempo asociamos a la longitud de onda característica $\hat{\lambda}_c$.

En el cuadro (3.3) mostramos los valores adimensionales de las ondas gravitacionales que surgen del análisis de los datos numéricos de la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ .

3.5. Resultados

Dividimos los resultados en tres subsecciones. En la primera de ellas consideramos todo un rango de valores de energías del campo escalar E_ϕ y los ocho modelos de estrellas de bosones binarias que se muestran en la SEc. (3.4).

Modelo	\hat{h}_{max}	$\hat{\lambda}_c$	$1/\hat{\lambda}_c = \hat{f}_c$	n_1	n_2
Estrellas de bosones con $\ell = 0$					
h ℓ 0A	0.014	122.5	0.008	12.08	10.08
h ℓ 0B	0.0284	101.25	0.009	12.16	10.16
h ℓ 0C	0.051	86.25	0.011	12.23	10.23
h ℓ 0D	0.236	39.37	0.025	12.49	10.49
Estrellas de bosones con $\ell = 1$					
h ℓ 1A	0.006	47.5	0.021	12.49	10.49
h ℓ 1B	0.022	99.37	0.010	12.17	10.17
h ℓ 1C	0.144	27.5	0.036	14.73	10.73
h ℓ 1D	0.065	36.25	0.027	12.61	10.61

Cuadro 3.3: Valores adimensionales de la máxima amplitud y frecuencia pico de las ocho señales gravitacionales correspondientes a los modelos $h\ell 0A-D$ y $h\ell 0A-D$. El símbolo $\hat{\cdot}$ denota que la variable es adimensional.

3.5.1. Varios valores de $m_\Phi c^2$ para todos los modelos

Dado que el valor experimental del parámetro de masa del campo escalar complejo no ha sido establecido aún, tenemos la libertad de elegir un rango de μ adecuado a nuestros fines. Con base en nuestras estimaciones de la subsección (3.4.1), el intervalo de la energía intrínseca $m_\Phi c^2$ del campo escalar que podría ser detectado por la colaboración LVK es aproximadamente $10^{-15} - 10^{-10}$ eV. Por este motivo, vamos a considerar específicamente el intervalo $m_\Phi c^2 \in (1.9 \times 10^{-15}, 1.9 \times 10^{-10})$ eV. Dividimos este intervalo en cierto número de partes iguales (46) y para cada modelo y valor de $m_\Phi c^2$, reescalamos la señal gravitacional y la procesamos para obtener su espectograma, la cantidad h_{rss} (root-sum-square amplitude), la energía de las ondas gravitacionales E_{GW} , la frecuencia pico f_{pico} y el radio señal-ruido SNR (signal-to-noise ratio), de acuerdo a las definiciones de la subsección (3.3.5). Elegimos como distancia a la fuente $D = 100$ Mpc, esta elección es arbitraria. A manera de comparativa, mencionamos que la distancia a la fuente de la señal GW170817 se estimó en 40 Mpc mientras que la distancia a la fuente de la señal GW150914 se estimó en 410 Mpc[9].

Sería repetitivo mostrar las 8×46 señales gravitacionales que por este mecanismo estamos analizando en esta sección. En cambio, cada señal queda globalmente caracterizada por su amplitud máxima, frecuencia máxima y energía total. Por ello, elegimos las cantidades h_{rss} , f_{pico} y E_{GW} para mostrar la relación entre las propiedades físicas de las señales gravitacionales en función de la masa intrínseca del campo escalar. Esto es lo que se muestra en las Figuras (3.5,3.6,3.7), respectivamente.

Además, con el fin de tener un punto de comparación de las señales generadas por estrellas de bosones, vamos a considerar también un sistema de agujero negro-agujero negro (AN-AN) de masas $M_1 = M_2 = 10 M_\odot$. Para esto utilizamos el modelo SEOBNRv4 del Software Libre PyCBC que resuelve la señal gravitacional de agujeros negros sin espín ni carga eléctrica, únicamente descritos por sus masas individuales $M_1 = M_2 = 10 M_\odot$.

localizados también a $D = 100$ Mpc.

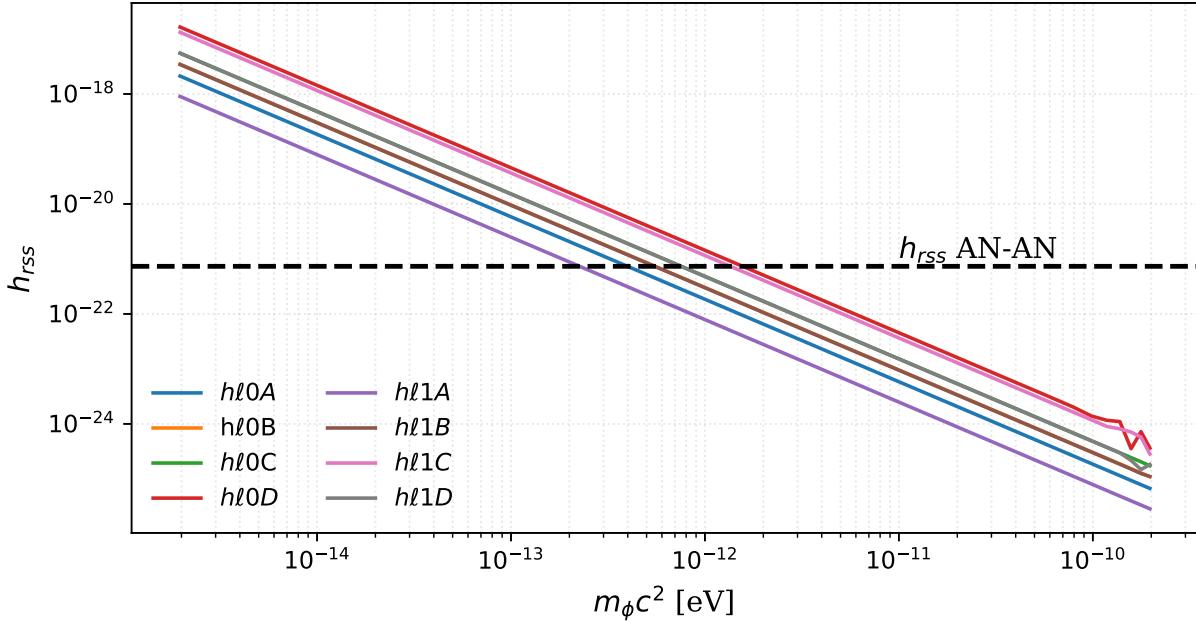


Figura 3.5: Amplitud característica de las ondas gravitacionales h_{rss} (adimensional) contra el rango de $m_\Phi c^2 \sim 10^{-15} - 10^{-10}$ eV. La recta punteada corresponde al caso de dos agujeros negros. Todas las señales están localizadas a 100 Mpc.

En la Fig.(3.5) se muestra la amplitud característica a través de la cantidad h_{rss} contra el valor del parámetro $m_\Phi c^2$. Observamos que en todos los modelos, conforme más ligero es el campo escalar, más grande es la amplitud de las ondas gravitacionales. En la misma Fig., también se muestra el caso de la colisión de los agujeros negros (AN-AN). Como los agujeros negros no dependen del parámetro m_Φ , lo que vemos en este caso es una recta horizontal a $h_{rss} = 7.35 \times 10^{-22}$.

Observamos que a $m_\Phi c^2$ constante, es decir, fijando la masa intrínseca del campo escalar, el modelo más intenso es $h\ell0D$, seguido del modelo $h\ell1C$ y $h\ell1D$. Los modelos $h\ell1B$ y $h\ell1C$ son casi indistinguibles en esta representación. El modelo menos intenso es $h\ell1A$. Aunque en estos casos no es claro si hay una relación entre los modelos con $\ell = 0$ y $\ell = 1$, lo que sí vemos es que en general, conforme más compacta es la fuente, más intensa será la amplitud de sus señales gravitacionales.

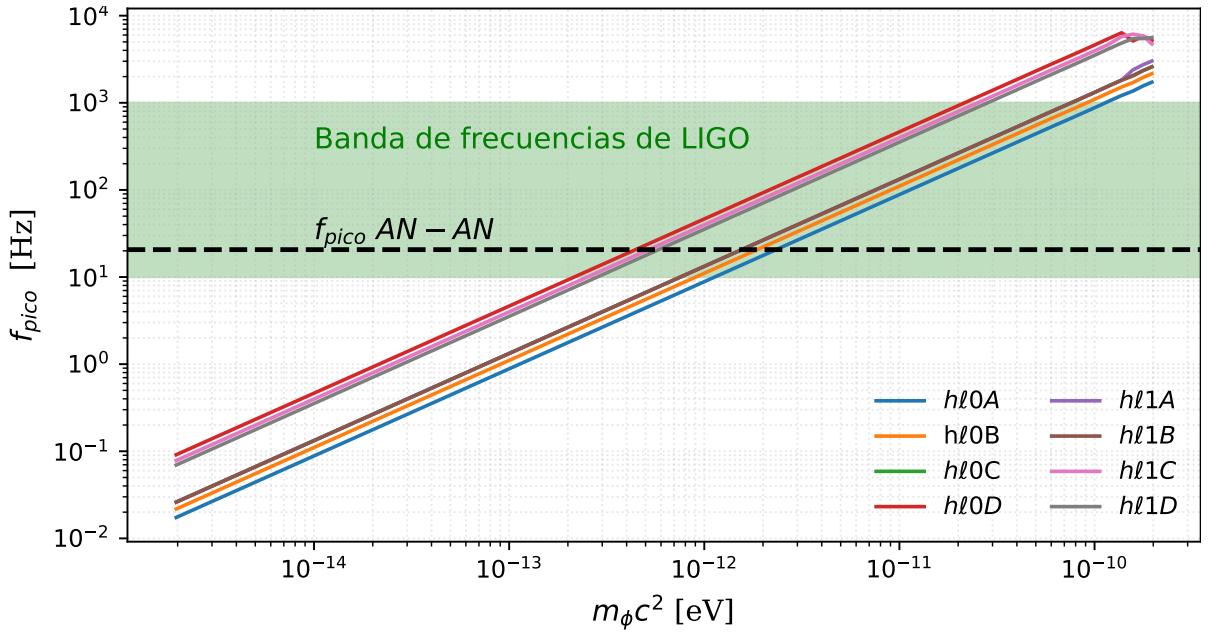


Figura 3.6: Frecuencia pico f_{pico} versus distintos valores de la masa intrínseca del campo escalar $m_\Phi c^2$. Se muestra la actual banda de detección de la colaboración LIGO (10-1000 Hz) de color verde. La recta horizontal punteada representa el caso de dos agujeros negros de $10 M_\odot$ cada uno.

En la Fig.(3.6) lo que se muestra es la frecuencia característica nombrada f_{pico} para el mismo rango de parámetros del campo escalar $m_\Phi c^2$. Observamos un comportamiento proporcional entre la masa m_Φ y la frecuencia de las ondas gravitacionales. En cambio, notamos las mismas relaciones respecto a la intensidad de los modelos que en la Fig.(3.5). También observamos que efectivamente, el rango elegido de $m_\Phi c^2$ produce algunas señales gravitacionales dentro del rango de detección de LIGO, representado como una banda de color verde en dicha figura.

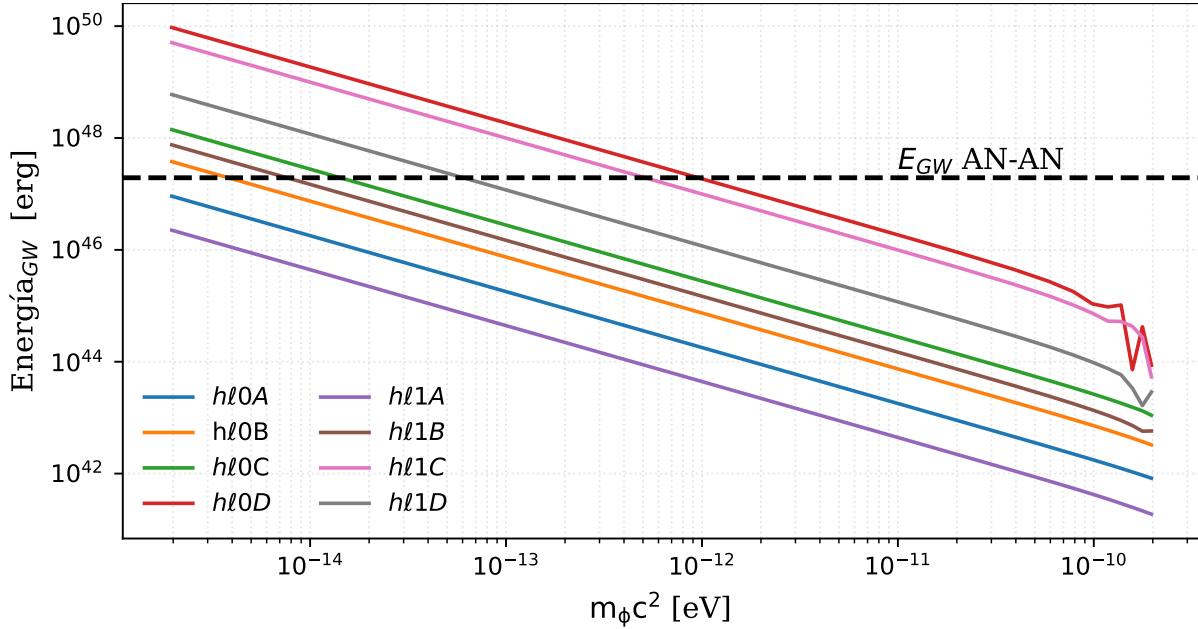


Figura 3.7: Energía total emitida en forma de ondas gravitacionales E_{GW} para el mismo rango de energía del campo escalar $m_\Phi c^2$ [eV] de la figura anterior. Una línea punteada horizontal muestra la energía emitida en OGs por parte de un sistema binario de agujeros negros de $10 M_\odot$ cada uno.

Para visualizar la relación entre la masa del campo escalar m_Φ y la energía emitida por las ondas gravitacionales, tenemos la Fig.(3.7). En ella se aprecia un comportamiento inversamente proporcional entre ambas cantidades, como en el caso de la amplitud de las ondas gravitacionales.

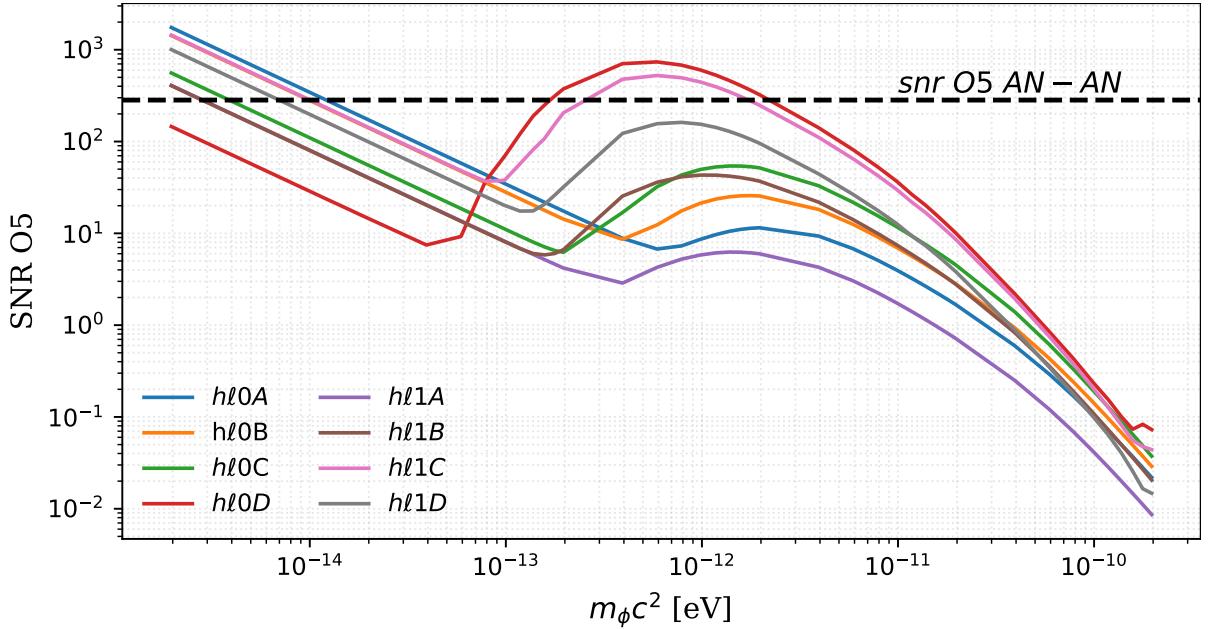


Figura 3.8: Radio señal-ruido versus el rango de masas del campo escalar de las figuras anteriores. Notamos que el comportamiento entre estas variables no es lineal. De la misma manera que en las figuras anteriores, se muestra la solución para agujeros negros binarios de $10 M_\odot$ cada uno.

3.5.2. Todas las señales con $m_\Phi c^2 = 5.9 \times 10^{-13}$ eV

Ahora bien, en la sección anterior analizamos un rango amplio de energías del campo escalar. Ahora fijamos $m_\Phi c^2 = 5.9 \times 10^{-13}$ eV y analizamos los ocho modelos.

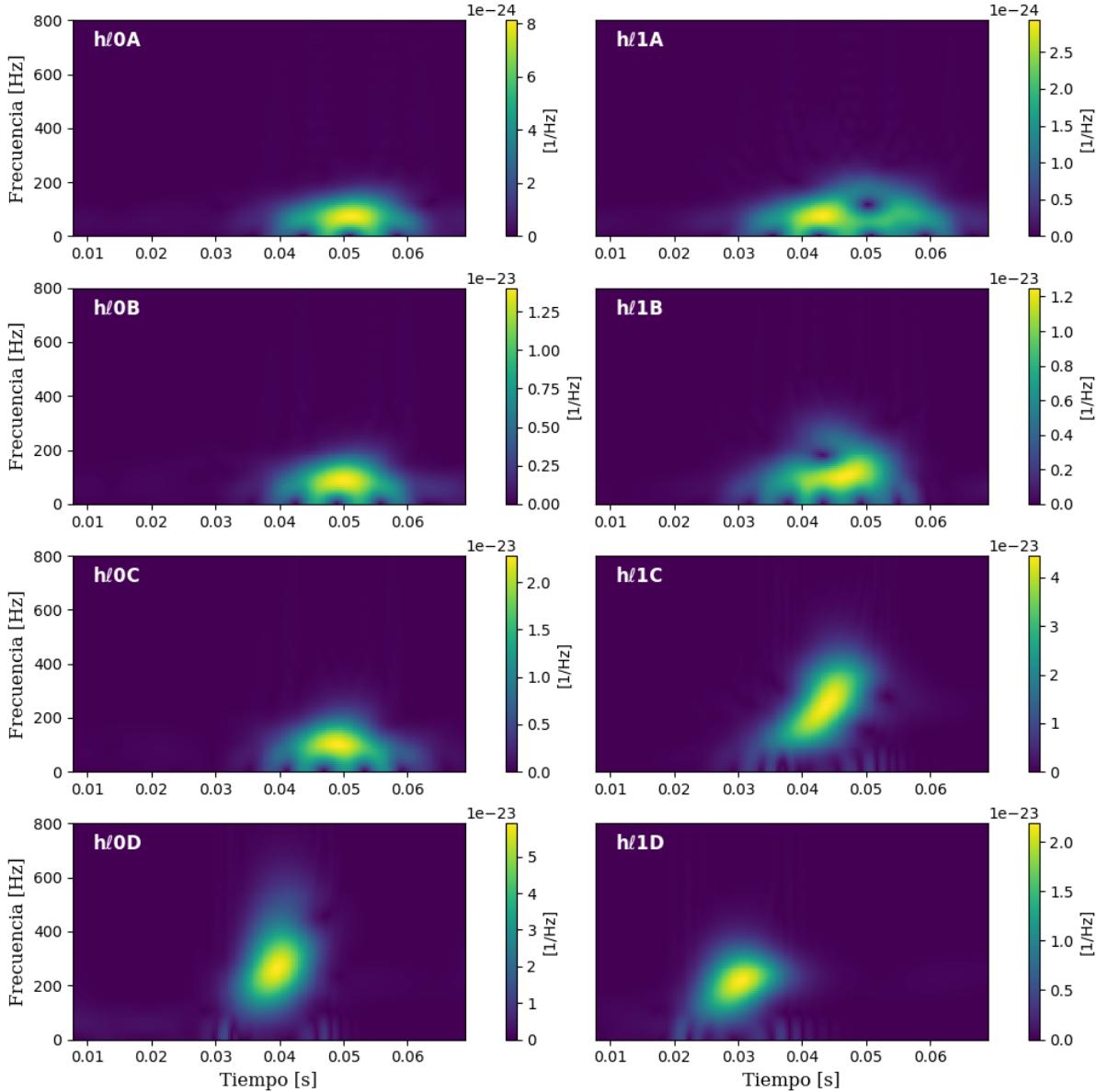


Figura 3.9: Espectograma de los ocho modelos de colisión de estrellas de bosones- ℓ para un campo escalar con $m_\Phi c^2 = 5.9 \times 10^{13}$ eV. Los modelos $h\ell 1C$ y $h\ell 0D$ son más similares al espectograma reportado para agujeros negros, pues se puede apreciar el incremento exponencial en la frecuencia de las ondas gravitacionales.

En la Fig. (3.9) se muestran los ocho espectogramas de cada modelo del cuadro (3.1). En estos, se muestra la evolución de la frecuencia de las ondas gravitacionales con un código de color para representar la evolución de la magnitud de la amplitud. Notamos que la colisión de estrellas de bosones- ℓ , en la mayoría de los casos, es muy diferente a los espectogramas de colisión de agujeros negros o estrellas de neutrones. Los únicos

modelos que tienen el comportamiento de *chirp* de las colisiones de agujeros negros o estrellas de neutrones son $h\ell0D$ y $h\ell1D$.

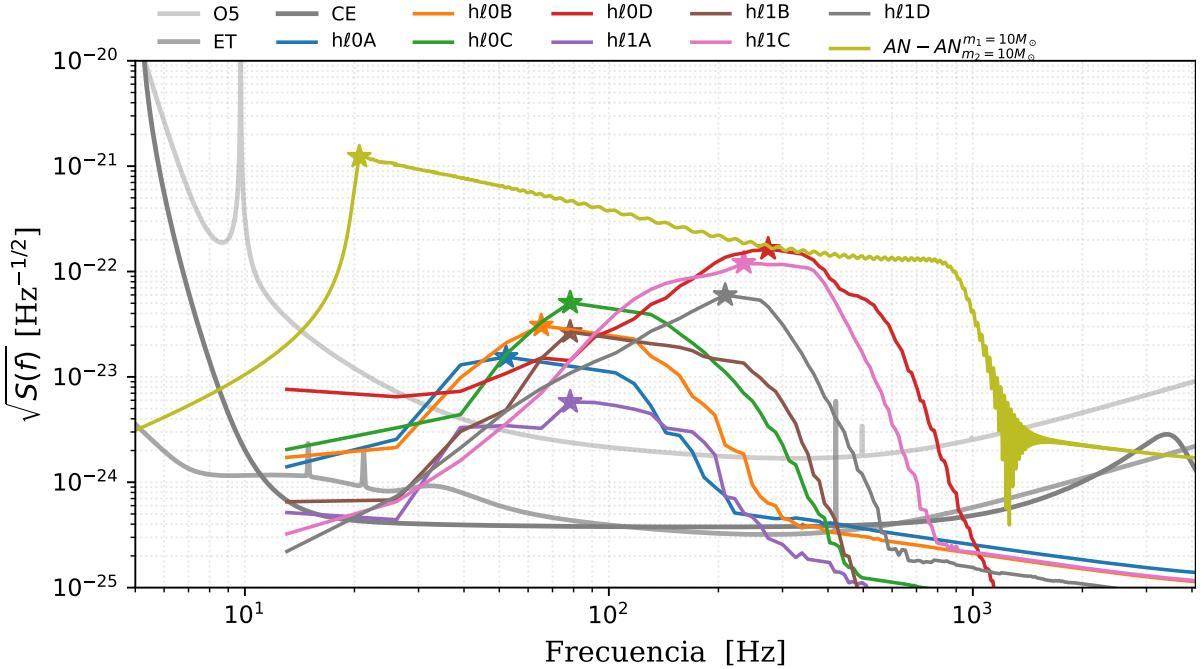


Figura 3.10: Raíz de la densidad del ruido la amplitud $\sqrt{S(f)}$ en unidades de $[\text{Hz}^{-1/2}]$.

Se muestra como se verían las señales en un diagrama de sensitividad de las proximas observaciones de ondas gravitacionales: O5 (gris claro), Cosmic Explorer (gris oscuro) y Einstein Telescope (gris medio). A la par, se muestra como se vería la señal de la colisión de dos agujeros negros de $10 M_\odot$. Comprobamos que si $m_\Phi c^2 \sim 10^{-12}$ eV, las señales caerían dentro del espacio de sensitividad.

En la Fig.(3.10) se muestra como se verían las señales tomando en cuenta las curvas de sensitividad de la próxima corrida de la colaboración LVK: O5, el proyecto Cosmic Explorer y Einstein Telescope. Actualmente, la colaboración LVK se encuentra en su cuarto periodo de observación, O4. Notamos, que en un futuro, todos los modelos con $m_\Phi c^2 = 5.9 \times 10^{-13}$ eV.

3.6. Conclusiones de este capítulo

Hemos presentado resultados sobre el análisis de ondas gravitacionales producidas en la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ . Nuestra perspectiva va hacia aportar elementos para la futura búsqueda de objetos auto-gravitantes de campo escalar en los datos de los observatorios de ondas gravitacionales. El campo escalar tiene el potencial de describir a la materia oscura, en ese sentido, será interesante ampliar el espacio de

parámetros de las estrellas de bosones- ℓ e injectar los modelos en los datos disponibles y futuros. La generación de ondas gravitacionales de este tipo de fuentes es un tema aún en *pañales* que se ha trabajado desde el área de las simulaciones numéricas. Pocos trabajos se detienen a explorar las escalas físicas a las que corresponderían las señales numéricas. Este trabajo aporta claridad sobre las escalas de las estrellas de bosones en función de los parámetros intrínsecos del campo escalar, en particular su masa m_Φ .

Encontramos que si $m_\Phi c^2$ tiene valores entre $10^{-14} - 10^{-10}$ eV, las señales gravitacionales provenientes de colisiones a 100 Mpc, podrían detectarse por los observatorios de ondas gravitacionales. Con esto en mente, nos centramos en analizar todos los modelos

De forma particular, mostramos que los campos escalares ligeros forman estrellas de bosones más grandes y masivas. Consideramos que esta es la razón por la que nuestros resultados muestran que a menor masa del campo escalar, mayor es la amplitud y energía de las ondas gravitacionales, y menor es su frecuencia característica. Por otro lado, el parámetro ℓ permite a las estrellas alcanzar una masa un poco mayor que los casos con $\ell = 0$, sin embargo, este hecho cualitativo no se traduce de forma clara en las propiedades de las ondas gravitacionales: encontramos modelos con la misma compacidad donde la señal del caso $\ell = 1$ tiene mayor intensidad que el caso $\ell = 0$; paralelamente, encontramos casos con distinta compacidad donde la señal con $\ell = 0$ fue más intensa que la señal $\ell = 1$. Para encontrar el motivo de este comportamiento será necesario examinar modelos con valores de ℓ más grandes y más compacidades.

Recapitulando, estudiamos los fundamentos teóricos que sustentan la colisión de estrellas de bosones $\ell = 0$ y $\ell \neq 0$, para ello, aprovechamos la formulación lagrangiana en Relatividad General. Luego, utilizando ocho modelos reportados en [21], los reescalamos y procesamos para analizar las relaciones del campo escalar con la amplitud, frecuencia y energía de ondas gravitacionales, así como el Radio Señal-Ruido de los detectores de la colaboración LVK y los próximos detectores Cosmic Explorer y Einstein Telescope. Mostramos las diferencias con colisiones de agujeros negros y estimamos que si el campo escalar tuviese una masa de $\sim 10^{-13}$, los ocho modelos serían perceptibles para los detectores recién mencionados.

Se agradece especialmente a la Mtra. Laura O. Villegas (UdG), Dra. Claudia Moreno (Udg), Dr. Javier M. Antelis (Tec de Monterrey), Dr. Víctor Jaramillo (USTC) y Dr. Darío Nuñez (ICN, CIDMA) por sus aportes en la discusión de este capítulo. Próximamente ampliaremos y publicaremos los resultados y discusiones.

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

Este capítulo está basado en el artículo , el cual se encuentra publicado en [21]. Fue elaborado por Victor Jaramillo (ICN-UNAM), Mariana Lira (ICN-UNAM), Daniel Ortega (ICN-UNAM) y Darío Nuñez (ICN-UNAM). Todas las figuras que aparecen en este capítulo fueron tomadas de dicho trabajo.

4.1. Resumen

Construimos y analizamos las propiedades de un agujero de gusano cargado eléctricamente, formado a partir de un campo escalar masivo y complejo, con autointeracción, y dotado de una carga eléctrica, mediante la resolución del sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon-Maxwell, donde el campo escalar está mínimamente acoplado al campo gravitacional y al campo electromagnético. Exploramos el espacio de los parámetros intrínsecos de los agujeros de gusano eléctricos, y, presentamos la dependencia las soluciones con respecto al valor de los diferentes parámetros, enfatizando el papel que juega la carga eléctrica en cantidades globales de los agujeros de gusano eléctricos, como su masa, tamaño de garganta y su número de partículas. Posteriormente, nos centramos en el régimen de grandes valores del parámetro de autointeracción y encontramos un comportamiento genérico del campo escalar, que a su vez nos permite determinar expresiones analíticas explícitas para los campos, la función métrica y las cantidades globales como la masa de Komar y el número de partículas. Finalmente, se reporta el movimiento geodésico en estos espaciotiempos.

4.2. Introducción

El paradigma relativista de la Gravedad, a saber, que la geometría y la materia están interrelacionados, aplicado al caso donde la materia viola las condiciones de energía, no solo ofrece una mayor comprensión de dicho paradigma, sino también un marco teórico para describir la expansión acelerada del Universo [58, 44]. Tanto la expansión acelerada del Universo como los modelos de Inflación en el Universo Temprano demandan la existencia de materia que viole al menos la condición fuerte de energía. Esta condición establece que, independientemente del marco de referencia, la densidad de energía debe ser no negativa y propagarse de manera causal, como se puede consultar en la sección 1.1.3 del capítulo introductorio. La materia que no satisface la condición fuerte de energía

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

se conoce como *materia exótica*. Se ha mostrado en recientes trabajos [160], que bajo ciertas condiciones la materia exótica puede ser confinada, lo cual representa un pequeño paso hacia describir objetos formados de materia exótica tales como los agujeros de gusano.

Los campos escalares complejos son un tipo de materia que existe dentro del núcleo duro de la Relatividad General, los cuales son ideales para describir materia exótica, como ya ha sido analizado en Refs. como [101, 102, 16, 161, 162, 160]. Hace cincuenta años se encontró la primera solución exacta de agujero de gusano asintóticamente plano y regular en todos los puntos [95, 96]. Los agujeros de gusano funcionan como túneles de una región del espaciotiempo a otra, en ese sentido, puede que acorten la distancia entre regiones, ésta última idea fue considerada seriamente desde Relatividad General en un artículo de Morris y Thorne [17]. Posteriormente, otras soluciones han sido encontradas, por ejemplo, aquellas configuraciones con campos escalares auto-interactantes [40, 97], auto-interacción [163] y soluciones con varios campos escalares [98, 99, 100]. Las soluciones de agujero de gusano se obtienen resolviendo las ecuaciones de Relatividad General (RG) con un tensor de materia-energía que viola la condición de energía nula [17, 164, 165, 166]. En los trabajos pioneros de Morris y Thorne [17], se presentan agujeros de gusano atravesables. Encuentran que las condiciones necesarias de atravesabilidad son: la métrica debe ser estática, simétricamente esférica, sin horizontes, con una garganta que conecta dos regiones del espacio asintóticamente planas y estable ante perturbaciones.

Distintas propiedades de los agujeros de gusano han sido establecidas en las últimas décadas. Por un lado, en la Ref. [99] se muestra que cuando el campo escalar que constituye al agujero de gusano es masivo y con simetría esférica, éste debe tener constante de auto-acople λ no nula. Por otro lado, e igual que el caso de las estrellas de bosones [89], la condición de planitud asintótica implica que la frecuencia del campo escalar ω está ligado al valor del parámetro de masa μ del campo escalar en consideración de modo que $|\omega| \leq \mu$. Los autores en [97] demuestran otros interesantes resultados: que las soluciones de agujero de gusano regulares soportadas por un campo escalar complejo fantasma con un potencial cuártico y coeficiente de auto-interacción, λ , existen para todos los valores $0 \leq \omega \leq \mu$; que las masas de los agujeros de gusano caen dentro de una región delimitada por las curvas $\omega/\mu = 0$ y $\omega/\mu = 1$ siendo positivo para $\omega/\mu \sim 0$ y negativo para $\omega/\mu \rightarrow 1$, y que entonces $\lambda \rightarrow \infty$ la masa incrementa sin límite y los valores del campo escalar en la garganta tienden a cero. En contraparte, hasta ahora no se han presentado soluciones de agujeros de gusano estable. Se ha mostrado que tanto los agujeros de gusano más simples formados por campos escalar sin masa como los agujeros de gusano formados por campos escalares complejos masivos con autointeracción, las configuraciones son inestables. Estos análisis se han hecho a través de perturbaciones lineales y simulaciones numéricas de la evolución no-lineal [167, 168, 169, 40]. Además, el proceso de formación de los agujeros de gusano sigue siendo poco claro. Posibles ideas sobre la formación de éstos son presentados en [170] y de estabilización [171] por fuera de RG, dentro de la teoría $f(R)$.

Con el propósito de continuar estudiando estos espaciotiempos generados por materia exótica, un paso siguiente es explorar las características de los agujeros de gusano cuando

otros campos físicos están presentes. En el reciente trabajo [160], varios autores presentamos una nueva solución a las ecuaciones de Relatividad General que describe un agujero de gusano regular y esféricamente simétrico acoplado a un campo eléctrico. En nuestro modelo, la corriente escalar es la fuente del campo eléctrico. Lo construimos siguiendo el procedimiento para acoplar campos eléctricos a estrellas de bosones planteado en [172] y que consiste en el acoplamiento de un campo escalar complejo al electromagnético a través de una derivada gauge covariante. Algunos de los autores de la investigación que presentamos en este capítulo utilizaron dicha formulación para construir una estrella de bosones magnetizada [173]. Este procedimiento, convenientemente preserva la invarianza de gauge, contrario a otros formalismos donde el campo escalar interactúa con el campo electromagnético a través de un producto $e^{\alpha\phi} F^2$ directamente en la función lagrangiana (ver por ejemplo [174, 175]). Soluciones de agujeros de gusano con un campo escalar real sin masa en el sistema Einstein-Klein-Gordon-Maxwell se obtuvieron en la Ref. [176]. En el presente capítulo, presentamos a detalle el procedimiento, resultados en conclusiones de dicha investigación. Aquí, exploramos las propiedades de un agujero de gusano eléctrico en relación a los valores de sus parámetros (de masa, de autointeracción y la frecuencia del campo escalar), con énfasis sobre el rol de la carga eléctrica; mostramos que la carga no afecta las propiedades del agujero gusano, siendo la más notable, que el espaciotiempo sigue siendo asintóticamente plano. Nuestro análisis sugiere un comportamiento peculiar de las funciones métricas, del campo escalar y del campo eléctrico cuando el parámetro de auto-interacción es grande λ . Siguiendo el trabajo de Colpi y sus colaboradores [177] sobre estrellas de bosones, fuimos capaces de determinar expresiones analíticas para el campo escalar y la masa total de los agujeros de gusano en el régimen de λ grandes, además de corroborar dichas expresiones con simulaciones numéricas para tales casos. Estas expresiones permiten una mejor comprensión de los parámetros del sistema, es decir, el parámetro de masa y la frecuencia μ , ω y la carga eléctrica q . Estos parámetros determinan la masa total y el número de partículas de las soluciones de agujero de gusano.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 4.3, introducimos el modelo, establecemos que nuestro espaciotiempo es estático y simétricamente esférico, introducimos el ansätze para un campo escalar complejo eléctricamente cargado, y expresamos las ecuaciones diferenciales para los coeficientes métricos, el campo escalar así como el campo eléctrico. Cerramos esta primera sección presentando expresiones para algunas cantidades globales como la masa de Komar y el número total de partículas. Una vez que tenemos las ecuaciones, en la Sección 4.4, damos condiciones de frontera para obtener soluciones asintóticamente plantas y regulares, además, hacemos una importante restricción sobre los campos en la garganta del agujero de gusano. Esto lo implementamos en un código para resolver las ecuaciones de campo con las condiciones necesarias. Luego de esto, resolvemos numéricamente soluciones, es decir, soluciones de agujeros de gusano para distintos intervalos de los parámetros. En seguida, presentamos el perfil de la masa total del espaciotiempo y el valor del radio de la garganta, \mathcal{G} , como función del campo escalar en la garganta. Además, presentamos la masa total como función de λ para distintos valores de la frecuencia del campo escalar ω y la carga q , también presentamos el perfil del campo eléctrico y la densidad de energía, τ , como función del

radio. Agregamos gráficas de la masa total como función de la frecuencia. Estos resultados en conjunto sugieren un comportamiento del campo escalar para valores grandes del parámetro de auto-interacción, λ . En la parte 4.4.4, desarrollamos estas ideas sobre las ecuaciones del sistema y obtenemos expresiones analíticas para las cantidades globales, probando además su validez al compararlas con las soluciones actuales. En la parte 4.4.5 analizamos el movimiento de partículas con masa total positiva, negativa y cero, para masas neutras y eléctricamente cargadas.

Finalmente, en la Sección 4.5 planteamos nuestras conclusiones. En este capítulo utilizamos unidades geométricas $c = G = 1$ y la signatura de la métrica $(-, +, +, +)$. Adicionalmente, hacemos igual a uno la permeabilidad magnética del vacío μ_0 .

4.3. Fundamentos teóricos

4.3.1. Ecuaciones de campo

Consideramos un modelo de campo escalar complejo Φ , mínimamente acoplado a las ecuaciones de relatividad general y electrodinámica utilizando una generalización del operador derivada. La acción del sistema está dada por:

$$S = \int \sqrt{|g|} \left[\frac{\mathcal{R}}{16\pi} + \mathcal{L}_M \right] d^4x, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci y la función lagrangiana de la materia-energía \mathcal{L}_M incluye la contribución del campo escalar \mathcal{L}_Φ y del campo electromagnético \mathcal{L}_{EM} :

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{EM} \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{\epsilon}{2} \left(g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi) (D_\nu \Phi)^* + \mu^2 |\Phi|^2 - \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4 \right) \quad (4.2b)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4}. \quad (4.2c)$$

donde μ es el parámetro de masa de la partícula del campo escalar, λ es la constante de acoplamiento $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Faraday y $D_\mu = \nabla_\mu + iqA_\mu$ es el operador de derivada covariante que acopla el campo escalar con el campo gauge A_μ a través de la constante electromagnética q . Aquí, ϵ es igual a uno cuando el campo escalar es canónico y es menos uno cuando el campo escalar describe materia fantasma. El campo escalar define la corriente electromagnética de la fuente, y a su vez, los campos electromagnéticos de la fuente afectan la geometría a través de las ecuaciones de Einstein.

La ecuaciones del sistema se obtienen tomando una variación de la Eq. (4.1), con respecto a los diferentes campos del sistema. La variación con respecto a los diferentes campos del sistema genera las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver *e.g.* [178]). La variación con respecto a $g_{\mu\nu}$ nos da las ecuaciones de relatividad general:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.3a)$$

$$T_{\mu\nu} = T^\Phi_{\mu\nu} + T^{EM}_{\mu\nu}, \quad (4.3b)$$

donde el tensor de energía está dado por:

$$\begin{aligned} T^{\Phi}_{\mu\nu} &:= -\frac{1}{2} [(D_\mu \Phi)(D_\nu \Phi)^* + (D_\nu \Phi)(D_\mu \Phi)^*] \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} (D_\alpha \Phi) D_\beta \Phi)^* + \mu^2 |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^4 \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$T^{\text{EM}}_{\mu\nu} := \left(F_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda} g^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (4.5)$$

La variación de la acción con respecto al campo escalar Φ nos arroja la ecuación de Klein-Gordon,

$$g^{\mu\nu} D_\nu D_\mu \Phi = \mu^2 \Phi - \lambda |\Phi|^2 \Phi. \quad (4.6)$$

Finalmente la variación con respecto al campo gauge (potencial electromagnético) A_μ nos da las ecuaciones de Maxwell, y a su vez, define al cuadri-vector de corriente que actúa como fuente del campo,

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu := q j^\mu, \quad (4.7)$$

donde j^μ se entiende como la corriente de Noether del campo complejo Φ

$$j^\mu = -\frac{ig^{\mu\nu}}{2} [\Phi^*(D_\nu \Phi) - \Phi(D_\nu \Phi)^*]. \quad (4.8)$$

aquí j^μ es la corriente de Noether del campo escalar complejo Φ .

Espaciotiempo con simetría esférica y Ansätze para los campos

Consideremos un elemento de línea con simetría esférica en coordenadas isotrópicas

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Psi^4 [d\eta^2 + (\eta^2 + \eta_0^2) d\Omega^2] \quad (4.9)$$

tal que las funciones métricas N y Ψ solamente dependen de la coordenada radial η , $d\Omega^2$ es el ángulo sólido unitario y hemos incluido la constante η_0 que hace que el agujero de gusano tenga un radio mínimo no nulo. A causa de este hecho, la coordenada radial no describe el radio de área y por esa razón no la denotamos como r (como por ejemplo en [97, 179]).

Con miras a no tener dependencia temporal en las ecuaciones de campo, asumimos que el campo escalar complejo tiene un Ansatz armónico dado por:

$$\Phi(\eta, t) = \phi(\eta) e^{i\omega t}, \quad (4.10)$$

donde ω es una constante real.

Finalmente, para ser consistentes con la simetría esférica, consideramos que el potencial gauge A_μ tiene solo una componente temporal, la cual está dada por

$$A_\mu dx^\mu = V(\eta) dt, \quad (4.11)$$

donde $V(\eta)$ define el potencial eléctrico.

Descomposición 3+1 del tensor de materia-energía y sistema de ecuaciones para los campos

Las ecuaciones de la teoría de Relatividad General pueden ser escritas como un conjunto de ecuaciones elípticas tales que las fuentes se expresan en términos de cantidades explícitas como la densidad de energía τ , la densidad de momento P_μ y el tensor de esfuerzos $S_{\mu\nu}$. Vamos a comenzar con la descomposición 3+1 del tensor de momento-energía la cual consiste en la proyección del tensor de materia-energía $T_{\mu\nu}$:

$$\tau = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu , \quad P_\mu = -n^\sigma T_{\sigma\alpha} \gamma^\alpha_\mu , \quad S_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu , \quad (4.12)$$

donde $\gamma^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$ es el operador de proyección y $n = (1/N, 0, 0, 0)$ es el vector normal a las hipersuperficies. Utilizando las expresiones para $T_{\mu\nu}$ dadas en la Ec. (4.4) y la Ec. (4.5), dentro de la Ec. (4.12) y considerando la métrica en la Ec.(4.9), podemos expresar las cantidades proyectadas explícitamente:

$$\tau = \frac{1}{2\Psi^4} \left(\frac{1}{N^2} V'^2 - \phi'^2 \right) - \frac{\phi^2}{2} \left(\mu^2 - \frac{\lambda\phi^2}{2} + \frac{(Vq + \omega)^2}{N^2} \right) , \quad (4.13)$$

$$S^\eta_\eta = \frac{1}{2\Psi^4} \left(-\frac{1}{N^2} V'^2 - \phi'^2 \right) + \frac{\phi^2}{2} \left(\mu^2 - \frac{\lambda\phi^2}{2} - \frac{(Vq + \omega)^2}{N^2} \right) , \quad (4.14)$$

$$S^\theta_\theta = S^\phi_\phi = \frac{1}{2\Psi^4} \left(\frac{1}{N^2} V'^2 + \phi'^2 \right) + \frac{\phi^2}{2} \left(\mu^2 - \frac{\lambda\phi^2}{2} - \frac{(Vq + \omega)^2}{N^2} \right) , \quad (4.15)$$

y P_α es igual a cero en este caso. Aquí y a partir de ahora utilizaremos la notación $f' := \frac{df}{d\eta}$.

La Ec. (4.13) impone condiciones que implican que el tensor mixto de Einstein y el tensor de materia-energía son diagonales. Una ecuación diferencial de segundo orden para la función lapso N pues ser obtenida a partir de la adición de las componentes espaciales menos la componente temporal, y la ecuación para el factor conforme Ψ se obtiene a partir de la componente temporal de las ecuaciones de campo.

De este modo, el sistema toma la forma:

$$\Delta_3 \Psi + \frac{1}{4} \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \Psi = -2\pi \Psi^5 \tau , \quad (4.16)$$

$$\Delta_3 N + 2 \frac{\Psi' N'}{\Psi} = 4\pi N \Psi^4 (\tau + S) , \quad (4.17)$$

$$\Delta_3 \phi + 2 \frac{\Psi' \phi'}{\Psi} + \frac{N' \phi'}{N} = \Psi^4 \left(\mu^2 - \lambda \phi^2 - \left(\frac{qV + \omega}{N} \right)^2 \right) \phi , \quad (4.18)$$

$$\Delta_3 V + 2 \frac{\Psi' V'}{\Psi} - \frac{N' V'}{N} = -q \Psi^4 (qV + \omega) \phi^2 , \quad (4.19)$$

donde $\Delta_3 := \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{d}{d\eta}$ es un operador.

También, escribimos explícitamente la ecuación para la componente radial-radial de las ecuaciones de campo. Ésta es una ecuación de restricción necesaria para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones

$$\frac{\Psi'^2}{\Psi^2} + \frac{N'\Psi'}{N\Psi} + \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \left(\frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{N'}{2N} \right) - \frac{\eta_0^2}{4(\eta^2 + \eta_0^2)^2} = 2\pi S_\eta^\eta . \quad (4.20)$$

Por último, hemos definido S como la traza del tensor de materia-energía $S := \gamma^{ij} S_{ij} = S^\eta_\eta + S^\theta_\theta + S^\varphi_\varphi$, con las siguientes expresiones explícitas para S y para el término que aparece en la ecuación para la función de lapso:

$$S = \frac{1}{2\Psi^4} \left(\frac{1}{N^2} V'^2 + \phi'^2 \right) + \frac{3\phi^2}{2} \left(\mu^2 - \frac{\lambda\phi^2}{2} - \frac{(Vq + \omega)^2}{N^2} \right) , \quad (4.21)$$

$$\tau + S = \frac{1}{\Psi^4 N^2} V'^2 + \phi^2 \left(\mu^2 - \frac{\lambda\phi^2}{2} - \frac{2(Vq + \omega)^2}{N^2} \right) . \quad (4.22)$$

4.3.2. Cantidades globales

Para espaciotiempos asintóticamente planos, las expresiones de Komar nos permiten calcular cantidades globales [35]. En particular, la masa total del espaciotiempo puede calcularse con la siguiente expresión de Komar

$$M_K = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} R_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu dV , \quad (4.23)$$

donde Σ_t denota la hipersuperficie tipo espacio, n^μ es el vector tipo-tiempo normal a Σ_t con $n_\mu n^\mu = -1$, tal que $n = \left(\frac{1}{N}, \vec{0} \right)$, $\xi = \partial_t = \left(1, \vec{0} \right)$ es el vector de Killing tipo-tiempo, $dV = \sqrt{\gamma} d\eta d\theta d\varphi$ es el elemento de volumen y γ es el determinante de la métrica espacial. En nuestro caso, $\xi^\mu = Nn^\mu$ y utilizando las ecuaciones de campo, esta expresión puede reescribirse como:

$$M_K = \int (2T_{\mu\nu} - T_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}) n^\mu \xi^\nu \sqrt{\gamma} d\eta d\theta d\varphi , \quad (4.24)$$

además, tenemos que $(2T_{\mu\nu} - T_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}) n^\mu \xi^\nu = N(T_\mu^\mu - 2T_t^t)$.

Por el otro lado, el número total de partículas \mathcal{N} puede obtenerse a partir de la cuatri-corriente j_μ definida en la Ec. (4.8). La cuatri-corriente j_μ surge a partir de la invarianza de la acción Eq. (1.46) bajo las transformaciones globales $U(1)$ con $\Phi \rightarrow \Phi e^{ia}$, esto implica que la corriente (4.8) es una densidad de corriente de Noether y satisface la ley de conservación $\nabla_\mu j^\mu = 0$. La integración de la ley de conservación sobre una hipersuperficie tipo-espacio Σ_t define la corriente conservada de Noether.

$$\mathcal{N} = \int_{\Sigma_t} j^\mu n_\mu dV , \quad (4.25)$$

la cual puede ser asociada con el número toral de partículas[90]. La carga eléctrica total de la solución puede ser definida como $Q = q\mathcal{N}$. Además, utilizando la masa de Komar y el número de partículas dadas en la Ec. (4.23) y la Ec. (4.25), es posible calcular M_k a partir del gradiente de la función de laps N sobre una 2-esfera en el infinito espacial (ver

por ejemplo [180]), mientras la carga Q puede ser calculada a partir del gradiente del potencial gauge V . De este modo, las soluciones globales M_k y Q pueden ser extraídas a partir del comportamiento asintótico de la métrica (4.13) y el potencial gauge $V(\eta)$, haciendo $M_K = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^2 N'$ y $Q = 4\pi \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^2 V'$.

4.3.3. Escalares geométricos

Las siguientes expresiones de los escalares geométricos serán de utilidad para caracterizar las soluciones de agujeros de gusano eléctricos. El escalar de Ricci es:

$$\mathcal{R} = -\frac{2}{\Psi^4} \left(\frac{\Delta_3 N}{N} + 4 \frac{\Delta_3 \Psi}{\Psi} + 2 \frac{N' \Psi'}{N \Psi} + \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \right). \quad (4.26)$$

El escalar de Weyl:

$$W = \frac{4}{3\Psi^8} \left(\frac{N''}{N} - \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{N'}{N} - 2 \left(\frac{\Psi''}{\Psi} - \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{\Psi'}{\Psi} - 3 \left(\frac{\Psi'}{\Psi} \right)^2 \right) - 4 \frac{N' \Psi'}{N \Psi} - \frac{2\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \right)^2, \quad (4.27)$$

y el escalar de Kretschmann:

$$\begin{aligned} K = & \frac{4}{\Psi^8} \left(\frac{N''}{N} \left(\frac{N''}{N} - 4 \frac{N' \Psi'}{N \Psi} \right) + \frac{8\Psi''}{\Psi} \left(\frac{\Psi''}{\Psi} - \left(2 \left(\frac{\Psi'}{\Psi} \right)^2 - \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{\Psi'}{\Psi} - \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \right) \right) \right. \\ & + 4 \left(\frac{\Psi'}{\Psi} \right)^2 \left(6 \left(\frac{\Psi'}{\Psi} \right)^2 + 4 \frac{\eta}{\eta^2 + \eta_0^2} \frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{2(3\eta^2 - 2\eta_0^2)}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} + 3 \left(\frac{N'}{N} \right)^2 \right) \\ & \left. + \frac{2}{\eta^2 + \eta_0^2} \left(\frac{N'}{N} \right)^2 \left(4\eta \frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{\eta^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \right) + \frac{3\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

En la Fig. (4.1), presentamos gráficas de estos escalares para entender mejor como los parámetros modifican la geometría del espaciotiempo de agujero de gusano. Las gráficas corresponden a distintas soluciones de agujero de gusano cuya construcción será más adelante detallada. El escalar de curvatura \mathcal{R} es proporcional a la traza del tensor de estres, $\mathcal{R} = -8\pi(\tau + S)$, y en la figura presentamos ambas cantidades dada su importancia en la determinación de la masa total.

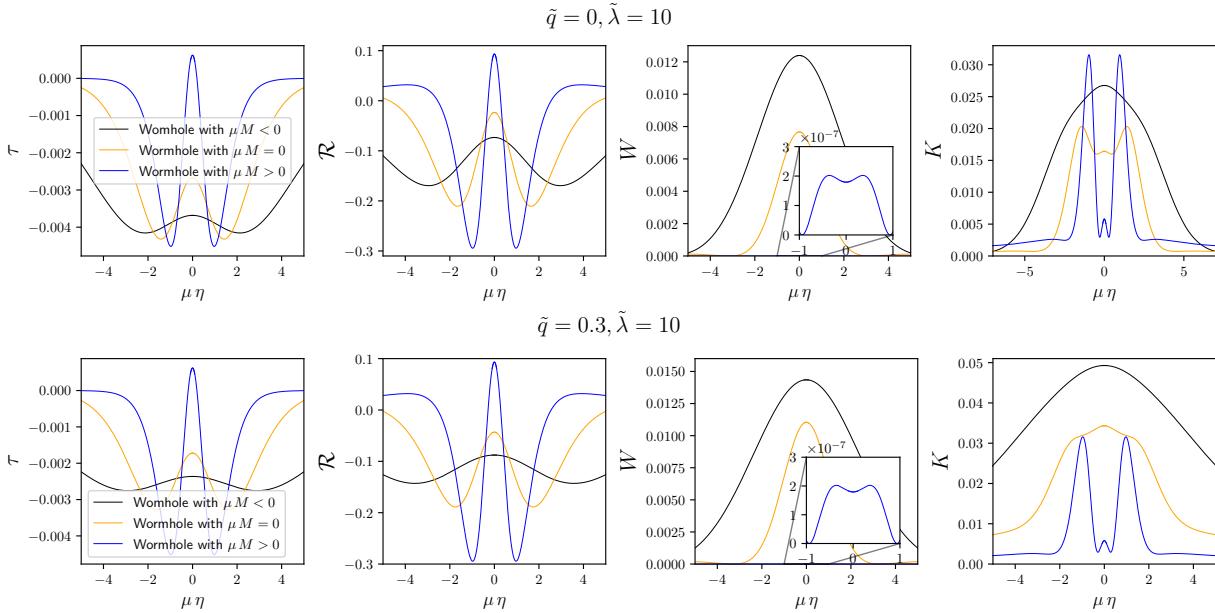


Figura 4.1: Escalar de Ricci \mathcal{R} , Weyl W , Kretschmann K y densidad de energía τ para los agujeros de gusano con $\tilde{\lambda} = 10$, $\tilde{q} = \{0, 0.3\}$ y $\omega/\mu = \{0, \omega_{zm}/\mu, 1\}$, cuyas masas son positiva, cero y negativa, respectivamente.

Es notable que el cambio sobre la geometría depende de la masa total del sistema. Esta influencia se ve principalmente en el escalar de Weyl cuyo máximo para el caso de masa cero es al menos la mitad que los casos de masa negativa; en cambio, para casos de masa positiva, el perfil del escalar de Weyl es más de cuatro órdenes de magnitud más chico que en otros casos. Estas soluciones nos invitan a realizar una investigación más amplia de la geometría del espaciotiempo para materia exótica, como lo es el campo escalar complejo con auto-interacción y carga eléctrica.

4.4. Soluciones y Discusión

4.4.1. Condiciones de frontera

Para construir soluciones electrostática que describan a un agujero de gusano es necesario establecer valores para los parámetros $\{\omega, \lambda, q\}$, y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones $\{N, \Psi, \phi, V\}$ a través de imponer condiciones de frontera apropiadas sobre el campo escalar, el potencial gauge y las funciones métricas. En primer lugar imponemos simetría de reflexión sobre la garganta, es decir, en $\eta = 0$, de modo que las funciones satisfacen que:

$$N'|_{\eta=0} = 0, \quad \Psi'|_{\eta=0} = 0, \quad \phi'|_{\eta=0} = 0, \quad V'|_{\eta=0} = 0. \quad (4.29)$$

Pedir que el espaciotiempo sea asintóticamente plano implica que

$$N|_{\eta \rightarrow \infty} = 1, \quad \Psi|_{\eta \rightarrow \infty} = 1, \quad \phi|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \quad V|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \quad (4.30)$$

mientras que el límite asintótico sobre el campo escalar implica la condición $\omega^2 < \mu^2$. Adicionalmente, estas condiciones de frontera implican una restricción sobre las funciones evaluadas en la garganta y el sistema de parámetros. Para ver esto, utilizamos un radio de circunferencia R dado por

$$R = \Psi^2 \sqrt{\eta^2 + \eta_0^2} , \quad (4.31)$$

vemos que la circunferencia mínima se alcanza en la garganta del agujero de gusano, esto es, en $\eta = 0$, entonces, el radio de la garganta está dado por $\mathcal{G} = \Psi_{\text{th}}^2 \eta_0$.

Por otro lado, otra expresión para dicho radio de garganta puede ser obtenido a partir de la Ec. (4.20). De esta forma, evaluando esta expresión en la garganta, $\eta = 0$, y utilizando las condiciones de frontera, podemos obtener otra expresión para el radio de garganta. Al igualarlo con la anterior expresión, podemos derivar una ecuación de restricción para determinar el parámetro η_0 en términos de otros parámetros y los valores de las funciones en la garganta:

$$\mathcal{G}^2 = \Psi_{\text{th}}^4 \eta_0^2 = \frac{1}{4\pi\phi_{\text{th}}^2 \left(-\mu^2 + \frac{\lambda\phi_{\text{th}}^2}{2} + \frac{(V_{\text{th}} q + \omega)^2}{N_{\text{th}}^2} \right)} , \quad (4.32)$$

donde $N_{\text{th}} := N(0) > 0$, $\Psi_{\text{th}} := \Psi(0)$, $\phi_{\text{th}} := \phi(0) > 0$, y $V_{\text{th}} := V(0)$ son los valores en la garganta de los coeficientes métricos N , Ψ , el campo escalar ϕ y el potencial eléctrico V . Dicho de otro modo, ésta es una ecuación de restricción sobre los parámetros utilizando las condiciones de frontera del sistema.

4.4.2. Detalles sobre la obtención de las soluciones y las gráficas

Para una revisión detallada de la resolución numérica del sistema de ecuaciones pueden consultarse referencias como [181]. El mecanismo empleado se llama método de colocación espectral. En ella, utilizamos los polinomio de Chebyshev como base espectral de las funciones a resolver.

Como ya hemos detallado a lo largo de este capítulo, los parámetros que describen a los agujeros de gusano eléctricos son cuatro: el parámetro de masa del campo escalar, μ , la frecuencia del campo escalar, ω , el parámetro de auto-interacción, λ , y la carga o parámetro de acople, q . También vimos que μ re-escalas los otros tres parámetros, de modo que para obtener soluciones numéricas basta con variar los últimos tres parámetros y obtener soluciones para μ arbitrarios. En un análisis posterior, se puede especificar μ para describir al sistema en escalas físicas. Por ahora, vamos a comenzar describiendo el método para obtener las soluciones numéricas. En primer lugar, construimos familias de n agujeros de gusano eléctricos fijando dos de los tres parámetros y variando el tercero en cierto intervalo dividido en n partes iguales; además, damos como entrada una solución inicial y el número de coeficientes espectrales en que serán descompuestas las funciones a determinar, en general usamos 24, 30 o 32 coeficientes espectrales. Contamos con tres códigos escritos en el lenguaje Python: electro-wormhole.py, omega-electro-wormhole.py

y q-electro-wormhole.py. Los tres códigos funcionan básicamente de la misma manera: resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales parciales y no lineales con el método de colocación espectral, donde los polinomios de Chebyshev se usan como base espectral de las funciones métricas N y Ψ así como el campo escalar ϕ y el potencial eléctrico V , todo esto en un dominio compactificado.

La diferencia sustancial entre los tres códigos es que con electro-wormhole.py se obtienen familias de agujeros de gusano dados valores fijos de ω y q y un intervalo de $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_f]$ dividido en n partes. Con omega-electro-wormhole.py se obtienen soluciones con q y λ fijos pero $\omega \in [\omega_i, \omega_f]$. Mientras que con q-electro-wormhole.py se mantiene constante λ y ω pero se varía el parámetro q . En la Fig.(4.2) se muestra un resumen del procedimiento empleado, comenzando con el código ewh.py

El código calcula el valor del campo escalar en la garganta ϕ_c , la masas M_{Komar} , M_{ADM} , R_{99} , C , Q y η_0 para cada solución, éstos valores los almacena en archivos de datos titulados uc.dat, Mkomar.dat, MADM.dat, R99.dat, C.dat, Q.dat y eta0.dat, respectivamente. Cada uno de éstos archivos contiene una sola columna con n filas.

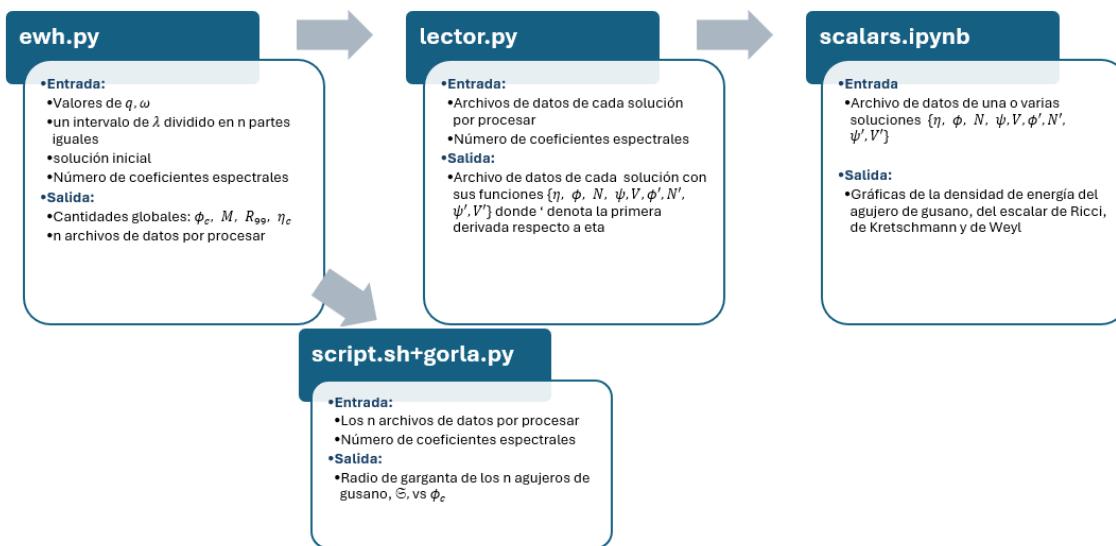


Figura 4.2: Detalle del procedimiento para generar soluciones del sistema de ecuaciones EKGM asociadas a agujeros de gusano eléctricos con parámetro de auto-interacción

También, el código genera como salida n soluciones por procesar de agujeros de gusano contenidas en n archivos.dat cuyo nombre particular permite identificar el valor del parámetro variable al que corresponde dicha solución. Por ejemplo, con el código electro-wormhole.py el nombre de cada solución se construye con iniciando con la letra N, seguida del número de coeficientes espectrales, luego se agrega la palabra lambda más el valor particular de λ de la solución. Por ejemplo, la solución con nombre N24lambda1.00+01.dat fue generada con 24 coeficientes espectrales para el valor de $\lambda = 10$.

Es importante resaltar que de los archivos de las soluciones particulares recién salidas de estos tres códigos siguen expresadas en términos de los polinomios de Chebyshev, no es posible leer directamente las funciones incógnita: $N(\eta)$, $\Psi(\eta)$, $\phi(\eta)$, $V(\eta)$, sino que es necesario auxiliarnos de un código de nombre lector.py. En éste, se debe especificar la solución particular del tipo N24lambda1.00+01.dat para obtener el archivo de salida de la variable η , las funciones incógnita y sus primeras derivadas, de modo que el archivo de salida tiene nueve columnas:

$$\{\eta, N, \Psi, \phi, v, dN/d\eta, d\Psi/d\eta, d\phi/d\eta, dV/d\eta\}.$$

Ahora sí, con estos valores es posible estimar otras cantidades relevantes del sistema como, sus escalares geométricos y su densidad de energía para cada agujero de gusano eléctrico. De esta manera calculamos la densidad de energía, el escalar de Ricci, de Weyl y de Kretschmann que aparecen en la Fig. (4.1).

De forma posterior calculamos el radio de garganta \mathcal{G} de una familia de agujeros de gusano con ayuda de un script.sh que ejecuta la rutina garganta.py para cada solución particular; generan como salida el conjunto de valores de \mathcal{G} asociados a cada valor de campo escalar evaluado en la garganta ϕ_c .

Entre los detalles técnicos, podemos decir que para las soluciones con ω cercano a cero, $q \sim 0$, y $\lambda \in [1, 30]$, basta con ocupar 24 coeficientes espectrales para que haya convergencia en la determinación de soluciones. En cambio, para λ s más grandes, ω cercano a uno y qs distintos de cero, llegamos a ocupar 32 y 36 coeficientes en la aproximación para que las soluciones convergieran.

4.4.3. Sobre la simulación numérica y soluciones particulares

Recapitulando, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales y no lineales (4.16-4.19) se resuelve numéricamente junto con las condiciones de frontera (4.29) y (4.30) utilizando un método de colocaciónpectral con los polinomios de Chebyshev como base espectral de las funciones desconocidas $\{N, \Psi, \phi, V\}$ en un dominio compactificado. Para detalles del método se pueden consultar distintas referencias, por ejemplo la Ref. [181]. Las soluciones presentadas en este trabajo utilizan iteraciones de Newton-Raphson.

De este modo, hemos construido una variedad de soluciones de agujeros de gusano variando el parámetro λ en el intervalo $\frac{1}{2} \leq \lambda/4\pi \leq 100$, la frecuencia del campo escalar ω se explora en todo su intervalo físicamente posible, es decir, $0 \leq \omega/\mu \leq 1$, y analizamos las soluciones para casos fijos de q , incrementándolo gradualmente entre $0 \leq q/\sqrt{8\pi} \leq 0.5$. Este procedimiento coincide con el utilizado por [40], y los intervalos los hemos elegido así para obtener soluciones físicamente aceptables y comparables con éste y otros trabajos previos.

Ahora, vamos a comenzar discutiendo el comportamiento general de los agujeros de gusano eléctricos. Como ya mencionamos, obtenemos soluciones numéricas para distintos valores del parámetro ω , λ y q . Utilizando la invarianza de las ecuaciones (4.16-4.19) bajo el re-escalamiento:

$$r \rightarrow \mu r, \quad \omega \rightarrow \omega/\mu, \quad \lambda \rightarrow \lambda/\mu^2, \quad q \rightarrow q/\mu, \quad (4.33)$$

hemos obtenido soluciones para valores arbitrarios de μ . Todos las demás cantidades reportadas a partir de este punto, serán dadas en términos de la masa del campo escalar μ . Adicionalmente, utilizamos el escalamiento para la carga y el campo escalar para facilitar la comparación con otros trabajos como [97],

$$\tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{8\pi}}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{4\pi}}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi}. \quad (4.34)$$

En la Fig. 4.3, presentamos soluciones para la masa total M y el radio de la garganta, \mathcal{G} del agujero de gusano eléctrico como una función del campo escalar en la garganta. En la misma figura estamos mostrando con color negro las soluciones con $\omega/\mu = 0$ y de color violeta las soluciones con $\omega/\mu = 1$ variando $\tilde{\lambda} \in [1, 30]$. Hemos agregado líneas punteadas representando soluciones con algunos valores de $\tilde{\lambda}$, pero en este caso variando $\omega/\mu \in [0, 1]$.

La curva $\omega/\mu = 0$ delimita la masa máxima de los agujeros de gusano y es independiente al valor de q , mientras que la curva $\omega/\mu = 1$ sí varía con q . Cuando $\omega/\mu \sim 1$, conforme q incrementa, la masa total y radio de la garganta también incrementa en magnitud conforme q incrementa.

Las soluciones con $\tilde{q} = 0$ son consistentes con el resultado en [40] como puede verse comparando sus Figs. 2 y 3 con la primera fila en la Fig. 4.3. Las soluciones con $\tilde{q} > 0$ siguen la misma relación cualitativa entre las cantidades globales que las soluciones con $q = 0$. También presentamos como la masa de los agujeros de gusano y el radio de la garganta dependen del campo escalar evaluado en la garganta. La diferencia con el caso neutrón es que los agujeros negros cargados con frecuencia ω/μ cercanas a uno, alcanzan masas más grandes (negativas) y gargantas más grandes que las correspondientes a agujeros de gusano no cargados. El comportamiento común para los valores de q utilizados es que para pequeños $\tilde{\phi}_{\text{th}}$, el radio de la garganta incrementa casi exponencialmente, mientras que para valores grandes, el radio de la garganta tiende a cero. Para los casos neutros, la masa total con $\omega/\mu = 0$ es siempre positiva, mientras que cuando $\omega/\mu = 1$ la masa total es siempre negativa, aunque este comportamiento puede cambiar con la carga eléctrica, como veremos. También, notemos que para cada valor de $\tilde{\phi}_{\text{th}}$, el radio de garganta es siempre más grande para $\omega/\mu = 1$ respecto al valor de $\omega/\mu = 0$, un hecho que se conserva en los agujeros de gusano eléctricos. En esta figura también hemos incluido casos para distintos valores del parámetro $\tilde{\lambda}$, donde las frecuencias varían de $\omega/\mu = 0$ a $\omega/\mu = 1$. Ahora bien, para estudiar el comportamiento de la carga q sobre las soluciones, en el código fijamos el valor de q , analizamos las soluciones variando λ y ω , y repetimos para otro valor de la carga q . En [97], los autores analizan las propiedades de las soluciones de los agujeros de gusano no cargados y se enfocan en el comportamiento de λ . Siguiendo su procedimiento, en la Fig. 4.4, graficamos la masa total M como una función de $\tilde{\lambda}$ para distintas valoress de ω/μ , y en la Fig. 4.5, mostramos el número de partículas \mathcal{N} como función de $\tilde{\lambda}$ para distintos valores de la carga, con un valor fijo de ω/μ . De esta manera podemos enfatizar las diferencias entre los agujeros de gusano electricamente cargados con los no cargados, los cuales se estudian en [97].

En la Fig. 4.4, vemos que el comportamiento de la masa total como función de $\tilde{\lambda}$ en los casos cargados es muy similar que el caso neutro: para valores pequeños de

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

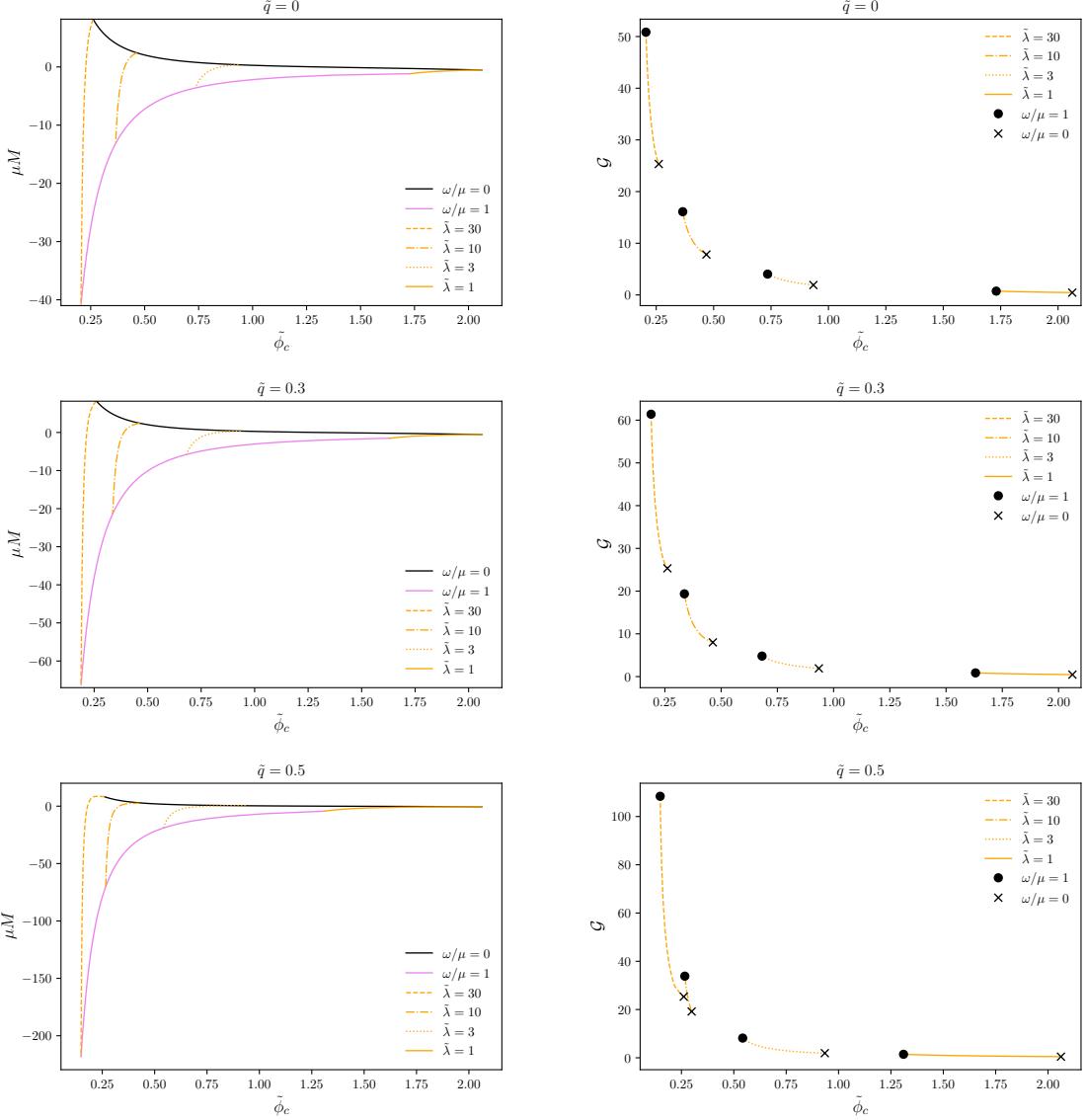
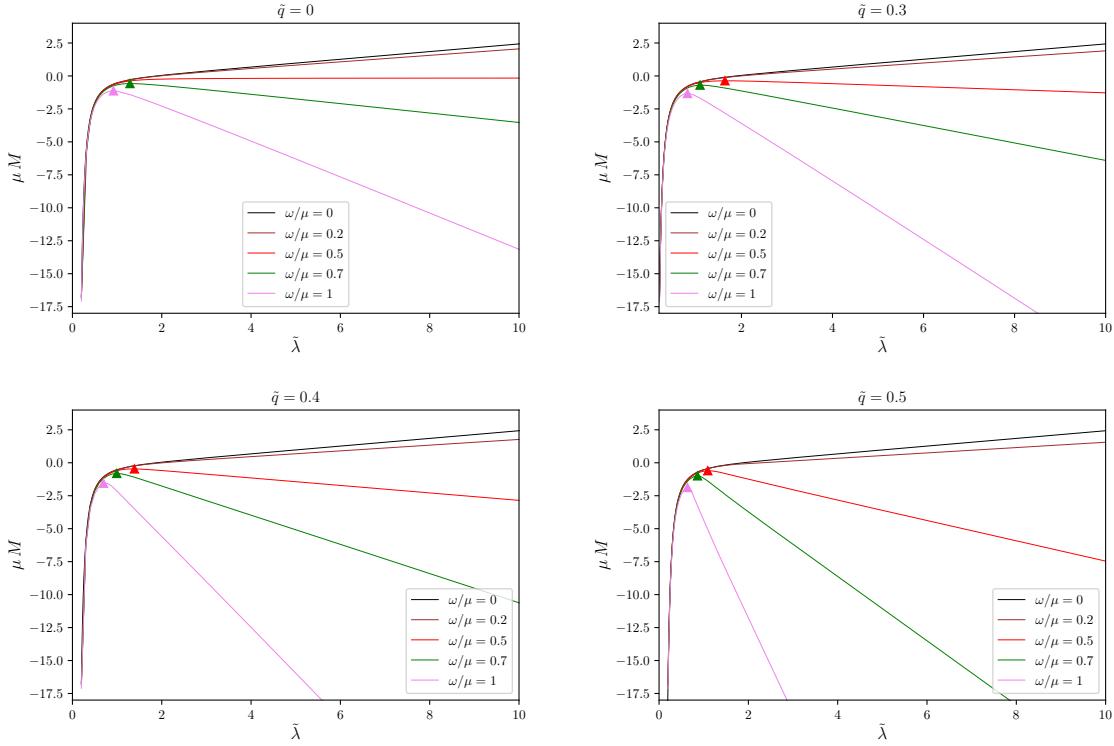
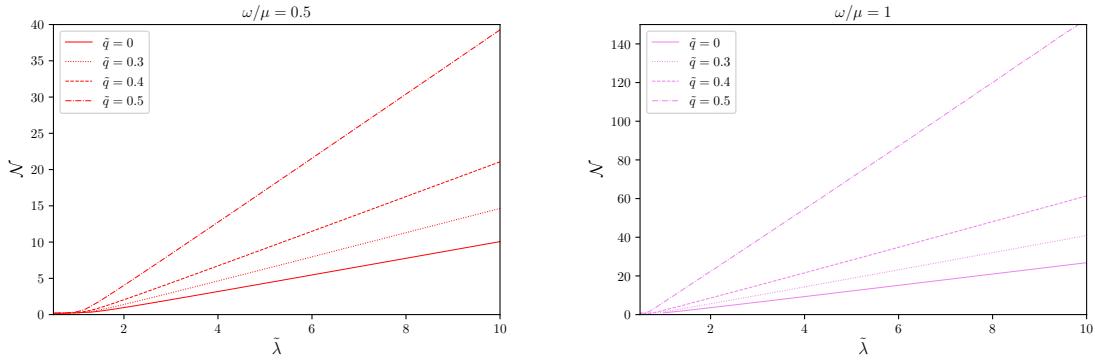


Figura 4.3: En las gráficas de la izquierda graficamos la masa total de los agujeros de gusano M y del lado derecho graficamos el radio de la garganta como función del valor del campo escalar en la garganta, $\tilde{\phi}_{\text{th}}$. Notemos que $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\phi}_{\text{th}}$ están monótonamente relacionadas, es decir, cada valor de ϕ_{th} corresponde un valor $\tilde{\lambda}$. Las líneas sólidas son soluciones para $\omega/\mu = 0$ (negro) y $\omega/\mu = 1$ (violeta). Hemos incluido casos para distintos valores fijos del parámetro $\tilde{\lambda}$ (naranja) donde las frecuencias toman valores entre 0 y 1, con $\tilde{\lambda} \in [1, 30]$.


 Figura 4.4: La masa de las soluciones de los agujeros de gusano contra el parámetro $\tilde{\lambda}$.

Mostramos la masa M como función de $\tilde{\lambda} > 0$ en todo el intervalo posible para la frecuencia del campo escalar $\omega/\mu \in [0, 1]$ para distintos valores del campo eléctrico del campo escalar $\tilde{q} \in [0, 0.5]$. Los triángulos invertidos representan el máximo de la masa M_{max} de las soluciones con carga eléctrica para distintas frecuencias. Los valores de los parámetros de las soluciones en estos puntos están dados en el cuadro 4.1.


 Figura 4.5: Número de partículas para agujeros de gusano cargados como función del parámetro $\tilde{\lambda}$ para valores representativos de \tilde{q} . Las líneas sólidas representan casos no cargados mientras que las líneas punteadas representan casos cargados eléctricamente.

$\tilde{\lambda}$, la masa total es negativa y esencialmente independiente de la frecuencia ω/μ , y en este caso, como vemos en la Fig. 4.3, el radio de la garganta tiende a cero. Conforme $\tilde{\lambda}$ incrementa, las soluciones con $\omega/\mu = 0$ adquieren una masa total positiva que incrementa linealmente con $\tilde{\lambda}$.

Por lógica, debemos tener una frecuencia, visualmente notamos que es cercana a $\omega/\mu = 0.5$, para la cual la masa total es igual a cero para cada valor de $\tilde{\lambda}$ por encima de ~ 2 ; conforme la frecuencia incrementa, la masa total alcanza un valor máximo y luego se vuelve más negativa, con una dependencia lineal de $\tilde{\lambda}$.

La presencia de la carga mantiene el comportamiento general de la función de masa respecto a $\tilde{\lambda}$ pero tiene algunas notables diferencias. Las soluciones $\omega/\mu = 0$ son independientes de la carga, con lo que se esperaba, puesto que en este caso el campo escalar es real y no hay posibilidad de que se cargue electricamente. Para $\omega/\mu \neq 0$, el rol de la carga eléctrica comienza a ser notable, cambiando el valor de la frecuencia a la cual el agujero de gusano agnieri una masa total igual a cero; esto como vemos es esencialmente independiente de $\tilde{\lambda}$, y haciendo la pendiente de la dependencia de la masa total como una función de $\tilde{\lambda}$ mucho más pronunciada.

Hasta aquí nos hemos enfocado en valores específicos de $\tilde{\lambda}$ en los cuales la masa total alcanza un máximo según el valor de q y ω . En la Fig. 4.4, presentamos gráficas de la masa total M para distintos valores de la frecuencia ω/μ dado un valor de q ; cada panel corresponde a distintos valores de la carga, éstos son: $\tilde{q} = 0, 0.3$, y 0.5 . Hemos marcado los puntos de la masa máxima sobre las diferentes gráficas y en el cuadro 4.1 aparecen sus valores. También, hemos identificado las frecuencias en las cuales la masa total de la solución es igual a cero, para cada valor de la carga, esta frecuencia la denotamos como ω_{zm} .

Para soluciones con $\omega > \omega_{zm}$, no hay un máximo local para la masa, en cambio, la masa incrementa linealmente con $\tilde{\lambda}$, mientras que para $\omega < \omega_{zm}$, la masa total crece con λ , alcanzando un valor máximo, y entonces un decrecimiento lineal.

En el caso de $\tilde{q} = 0$, tenemos que $\omega_{zm}/\mu = 0.5$, y la masa incrementa (decrece) linealmente para $\omega/\mu > 0.5$ ($\omega/\mu < 0.5$) como ha sido reportado en [97].

El valor de ω_{zm} decrece conforme q incrementa; esto lo podemos ver observando las soluciones con $\tilde{q} = 0, 0.3, 0.4$, y 0.5 dados en el cuadro 4.1, donde ω_{zm} corresponde a los valores de la frecuencia tales que la masa se vuelve cero.

Respecto al número total de partículas, la Ec. (4.25), y el efecto de la carga del campo escalar, q , sobre las cantidades globales, en la Fig. 4.5 describimos la dependencia del número de partículas respecto al parámetro λ , para distintos valores de q y ω . Como en el caso de la masa total, para valores de $\tilde{\lambda}$ no muy pequeños (más grandes que ~ 1.5), el número de partículas \mathcal{N} incrementa linealmente con $\tilde{\lambda}$, para un valor fijo de q . El efecto de la carga q es que la pendiente del número de partículas \mathcal{N} como una función de $\tilde{\lambda}$ incrementa con \tilde{q} , alcanzando una pendiente máxima para $\tilde{q} = 0.5$. Resolver el sistema de ecuaciones para valores de q más grandes que éste valores, se vuelve computacionalmente muy demandante, posiblemente indicando el hecho de que hay un valor máximo para la carga \tilde{q} por encima de la cual ya no hay configuraciones estáticas y esféricas.

Presentamos el caso para dos valores de la frecuencia. Ambos casos son muy similares en cuanto al comportamiento del número de partículas como función de $\tilde{\lambda}$, con una

\tilde{q}	ω/μ	μM_{max}	$\tilde{\lambda}$
0	0.5*	0	∞
0	0.7	-0.578	1.289
0	1	-1.132	0.919
0.3	0.4375*	0	∞
0.3	0.5	-0.3678	1.636
0.3	0.7	-0.6978	1.091
0.3	1	-1.3305	0.814
0.4	0.3875*	0	∞
0.4	0.5	-0.467	1.388
0.4	0.7	-0.809	0.992
0.4	1	-1.554	0.694
0.5	0.3125*	0	∞
0.5	0.5	-0.604	1.091
0.5	0.7	-0.995	0.861
0.5	1	-1.877	0.636

Cuadro 4.1: Máximo local de la masa M_{max} dado un valor de la carga q y frecuencia $\omega \leq \omega_{zm}$. Configuraciones con $M_{max} = 0$ definen la frecuencia ω_{zm} ; para casos donde la frecuencia es más grande que ésta, $\omega > \omega_{zm}$, la masa no tiene máximo local e incrementa linealmente con λ .

pendiente incrementando para valores grandes de \tilde{q} , la diferencia es que, dado un valor de $\tilde{\lambda}$, el número de partículas con q es más grande que en el caso neutrón, sobre todo para valores grandes de ω/μ .

Notemos que con la expresión Eq. (4.25), no podemos obtener el número de partículas de particulares relacionado a la masa negativa y otra correspondiente a masas positivas; sería interesante derivar expresiones que diferencien tales números.

En la Fig. 4.6, presentamos el radio de la garganta \mathcal{G} como función de $\tilde{\lambda}$ y algunos valores de la carga \tilde{q} para dos valores de la frecuencia ω/μ . Es resaltable que el radio de la garganta sigue un comportamiento muy similar al número de partículas, posiblemente indicando una relación entre estas cantidades y las cantidades globales.

Otro interesante aspecto de los agujeros de gusano cargados que presentan la posibilidad de probar la validez del teorema para agujeros de gusano no cargados, [99], el cual plantea que el parámetro de auto-interacción, λ es una condición necesaria para tener un agujero de gusano. Entonces, exploramos la posibilidad de que la carga, \tilde{q} , juegue el rol del parámetro de auto-interacción. Sin embargo, en nuestros experimentos numéricos encontramos que este no es el caso y el parámetro de auto-interacción sigue siendo una condición necesaria para la existencia de un agujero de gusano, aún si está cargado.

Finalmente, en la Fig. 4.7, presentamos nuevamente el comportamiento de la masa total, ahora como una función de la frecuencia del campo escalar ω para distintos valores de $\tilde{\lambda}$ y ciertos valores de la carga q .

Con los factores dados en la Ec. (4.34), somos capaces de comparar con los resultados

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

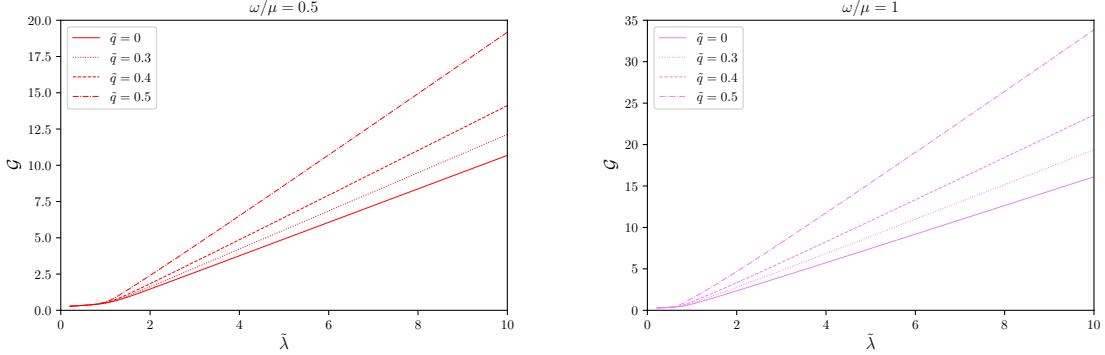


Figura 4.6: Presentamos algunas soluciones numéricas para el radio de garganta G como función de $\tilde{\lambda}$ para valores diferentes de la carga \tilde{q} y dos valores de ω/μ . El tamaño de la garganta crece linealmente con $\tilde{\lambda}$, cuando el parámetro no es también muy pequeño, y la pendiente incrementa con \tilde{q} . El tamaño de la garganta incrementa con ω .

presentados en la literatura, por ejemplo en [40], para casos neutros. Como ya mencionamos, genéricamente, uno de los efectos de la carga es el cambio del valor de frecuencia que hace cero la masa de Komar, ésta es ω_{zm} .

En los cuatro paneles de la Fig. 4.7, tenemos una línea vertical indicando el valor $\omega_{zm}/\mu = 0.5$, el cual corresponde al caso neutro. De esta manera es más claro que el efecto de la carga es reducir el valor de ω al cual la masa de Komar se anula; además, notemos que esto es independiente de $\tilde{\lambda}$ para un carga dada.

Notando que el sistema de ecuaciones, Ecs. (4.16), es invariante bajo cambios tanto en la carga \tilde{q} como en el potencial eléctrico, V , vemos que no hay un cambio notable en el comportamiento de la masa total debido al cambio del signo de la carga escalar \tilde{q} .

Las fuentes de los campos gravitacionales pueden ser útiles para clarificar la estructura de los agujeros de gusano así como sus propiedades globales. En la Fig. 4.8, graficamos la densidad de energía τ para soluciones con $\tilde{\lambda} \in [0.5, 30]$, frecuencia $\omega/\mu \in [0, 1]$ y carga $\tilde{q} \in [0, 0.5]$. De izquierda a derecha, los paneles muestran valores de $\tilde{\lambda} \in [0.5, 30]$, mientras que de arriba a abajo los paneles muestran distintos valores de \tilde{q} . Cuando $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$, la distribución de la energía tiene cualitativamente el mismo perfil para todos los valores de ω/μ , lo cual indica que la frecuencia se vuelve irrelevante cuando $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$, (recordemos que para $\tilde{\lambda} = 0$, no hay soluciones de agujero de gusano). Más aún, para pequeños valores de $\tilde{\lambda}$ el rol de la carga es también despreciable, mientras que para valores grandes de $\tilde{\lambda}$ el rol de la carga en la densidad de la energía se vuelve más relevante, causando un aplanamiento del valor de la densidad de la energía en la garganta.

Respecto al comportamiento del perfil de la densidad de la energía de la Fig. 4.8, vemos que hay un máximo en la garganta $\eta = 0$, seguido de un decrecimiento hacia un valor mínimo negativo, luego de ahí, la función tiende asintóticamente a cero conforme $\eta \rightarrow \infty$.

Más aún, como puede ser claramente visto en la gráfica de arriba a la izquierda, el

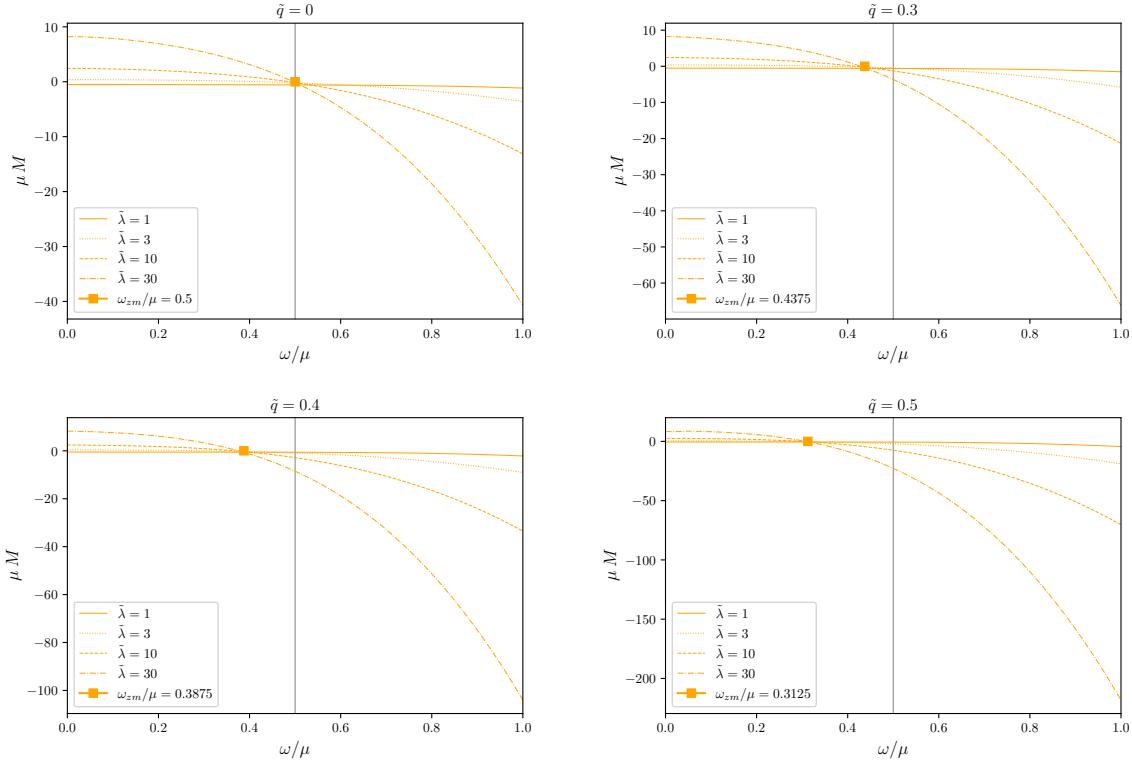


Figura 4.7: La masa de los agujeros de gusano para distintos valores del parámetro $\tilde{\lambda}$ con diferentes valores de \tilde{q} . Aunque los perfiles son muy similares, en el límite $\tilde{\lambda} \rightarrow \infty$ la masa se vuelve cero para cierta frecuencia denotada ω_{zm}/μ . El símbolo cuadrado corresponde a tal frecuencia para distintos valores de \tilde{q} , los cuales son reportados en el cuadro 4.1.

perfil de la densidad de energía para valores pequeños de $\tilde{\lambda}$ prácticamente no cambia, aún cuando corresponda a casos con masa de Komar negativa con $\omega/\mu = 1$.

En la Fig. 4.9 algunas soluciones para el campo escalar ϕ se presentan, notando que ϕ está re-escalado por un factor $\sqrt{\lambda}$. Podemos ver que para valores grandes de λ , las soluciones presentan un comportamiento muy similar entre sí, indicando un posible re-escalamiento de la forma $\phi \rightarrow \sqrt{\lambda} \phi$ en el régimen $\lambda \rightarrow \infty$.

De esta manera, hemos visto que para λ grande, el número de partículas \mathcal{N} y el radio de garganta \mathcal{G} , incrementan con λ , la masa M depende linealmente de λ y finalmente podemos ver que las soluciones de $\sqrt{\lambda} \phi$ tienden a tener un perfil muy similar para λ grandes. Estos resultados nos sugieren re-escalar las cantidades $\phi_* := \sqrt{\lambda} \phi$, $\eta_{0*} := \eta_0/\lambda$, $\mathcal{N}_* := \mathcal{N}/\lambda$ y $M_* := M/\lambda$ para estudiar el comportamiento de las soluciones con frecuencias ω y cargas q constantes en el régimen $\lambda \rightarrow \infty$. Esto es lo que haremos en el siguiente apartado.

Concluimos el presente apartado presentando en la Fig. 4.10 los perfiles del campo eléctrico $E = -\nabla V$ para algunos valores de los parámetros λ , ω y q . Por nuestra implementación numérica, el efecto repulsivo del parámetro q no nos permite obtener

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

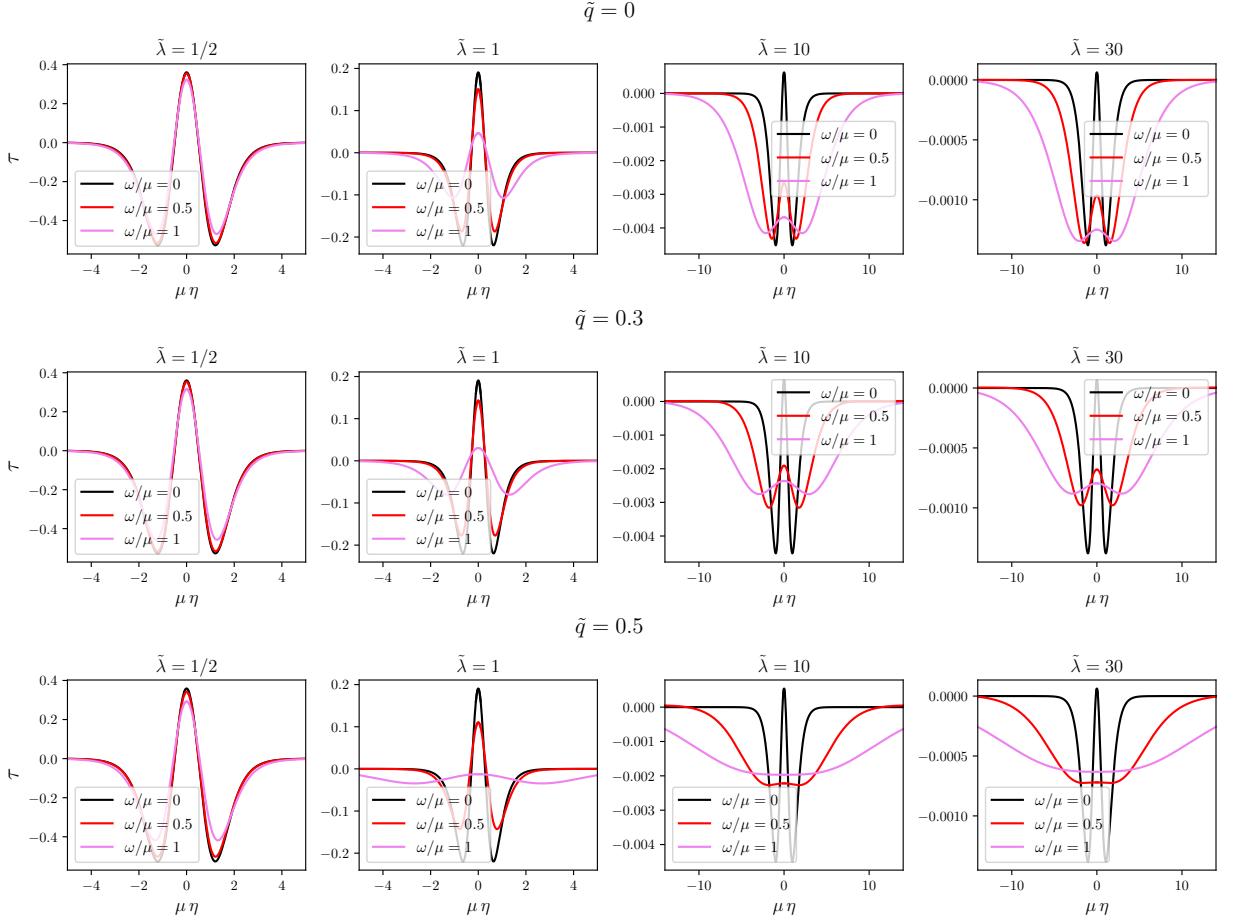


Figura 4.8: La densidad de energía τ como función de η para varias soluciones con $\tilde{\lambda} \in [0.5, 30]$ y $\tilde{q} \in [0, 0.5]$. La densidad de energía decrece con $\tilde{\lambda}$. Para casos con carga \tilde{q} y $\tilde{\lambda} \geq 0.5$ la densidad de energía decrece tanto que es negativa en todo el dominio.

soluciones por arriba del valor $\tilde{q} \sim 0.5$. Conforme uno se acerca a este valor, el tamaño de la garganta incrementa, este hecho podría indicar la existencia de un valor crítico para la carga del agujero de gusano. El parámetro ω , también afecta la dificultad de obtener soluciones, aún con soluciones con valores pequeños de q . En varios de nuestros resultados, somos capaces de mostrar soluciones con $q \neq 0$ y algunas frecuencias acercándonos a $\omega/\mu < 1$, aunque sin llegar a la igualdad. En la siguiente sección, uniremos las observaciones recién descritas para derivar una posible explicación de dichos comportamientos.

4.4.4. Comportamiento para λ grandes

Basados en nuestros resultados previamente presentados, y siguiendo el análisis del re-escalamiento de las estrellas de bosones para valores grandes λ planteado por Colpi

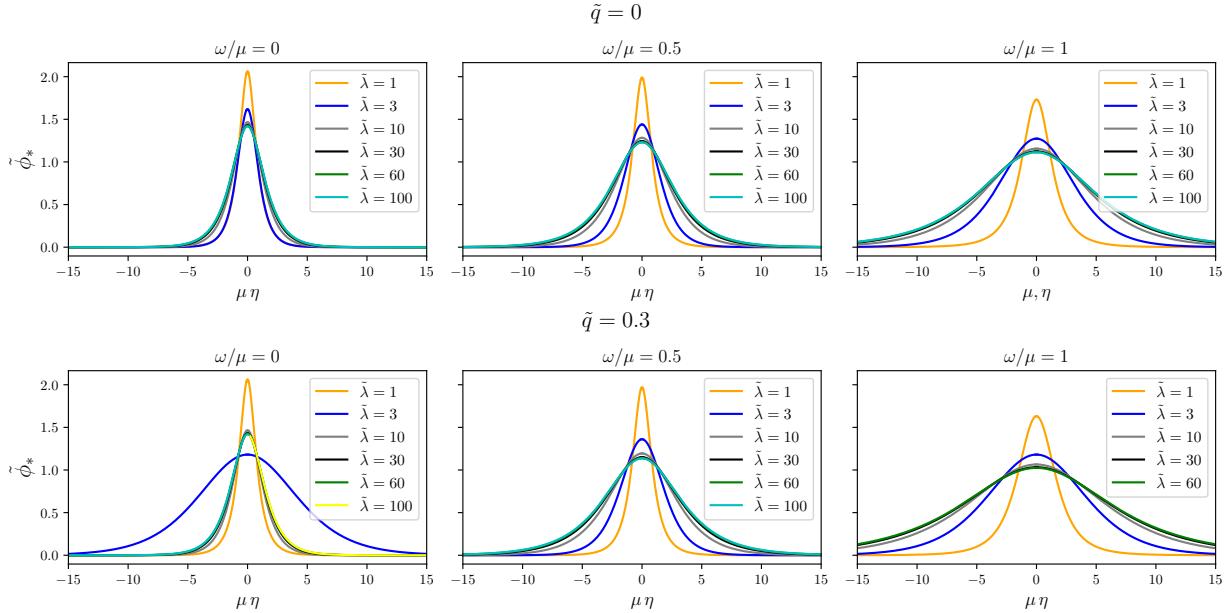


Figura 4.9: Presentamos algunas soluciones numéricas para el campo escalar re-escalado por el factor $\sqrt{\lambda}$ y diferentes valores de q . Las soluciones son muy similares para valores grandes de $\sqrt{\lambda}$ mientras que para valores pequeños de $\sqrt{\lambda}$ las soluciones exhiben perfiles muy distintos entre sí.

et. al. en 1986 [177], ahora vamos a considerar soluciones de agujero de gusano eléctrico cuando $\lambda \gg 1$.

Un análisis del comportamiento de la geometría del espaciotiempo y el perfil radial del campo escalar cuando la auto-interacción es grande, hace evidente un re-escalamiento de distintas funciones y parámetros de la solución. Por ejemplo, ya vimos en la Fig. 4.9 que las soluciones convergen a un perfil independiente de λ igual a $\phi_* = \sqrt{\lambda} \phi$ conforme λ incrementa. Por otro lado, también vemos un comportamiento lineal entre el parámetro de la garganta dado por $\eta_{0*} = \eta_0/\lambda$; los coeficientes métricos Ψ , N y el potencial eléctrico convergen a funciones constantes, sea éstas, Ψ_{th} , N_{th} y V_{th} en un región cercana a la garganta que incrementa también linealmente con λ . De este modo, nuestros resultados muestran que no solo el campo escalar se vuelve independiente de λ en el régimen de lambdas grandes, sino toda la solución. Con este resultado en mente, es posible encontrar expresiones analíticas para el agujero de gusano cargado en el régimen de $\lambda \gg 1$, siendo un caso particular de este análisis de agujero de gusano neutro, $q = 0$.

Vamos a comenzar re-escalando la ecuación de constrictión (4.32) para la garganta del agujero de gusano, obtenemos que:

$$4\pi\Psi_{\text{th}}^4\eta_{0*}^2\phi_{\text{th}*}^2 = \frac{1}{\lambda \left(-\mu^2 + \frac{\phi_{\text{th}*}^2}{2} + \frac{(V_{\text{th}} q + \omega)^2}{N_{\text{th}}^2} \right)}, \quad (4.35)$$

donde, puesto que las cantidades $\phi_{\text{th}*}$, N_{th} y el producto $\Psi_{\text{th}}^4\eta_{0*}^2\phi_{\text{th}*}^2$ son finitos para $\lambda \rightarrow \infty$, entonces el lado derecho de la Ec. (4.35) debe seguir la misma dependencia

4 Agujeros de gusano con carga eléctrica

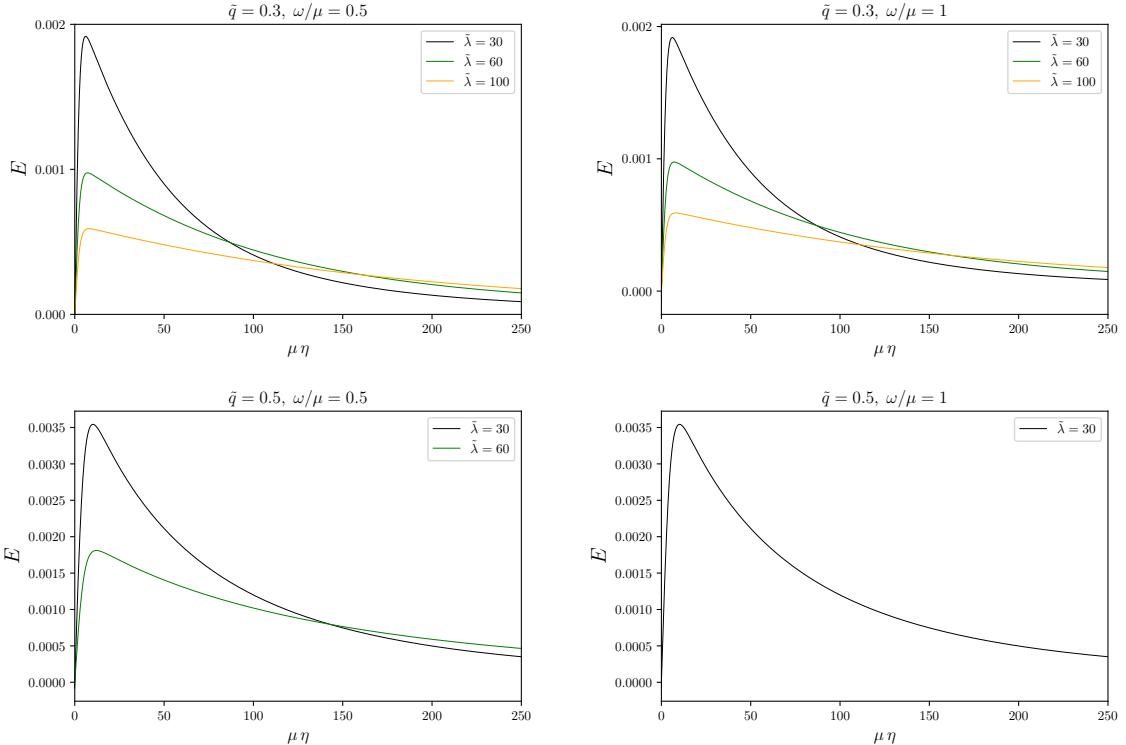


Figura 4.10: Campo eléctrico E ($-\nabla V$) como función de η para $\omega/\mu = 0.5$ (izquierda) y $\omega/\mu = 1$ (derecha), con las cargas $\tilde{q} = 0.3$ (arriba) y $\tilde{q} = 0.5$ (abajo). El campo eléctrico incrementa con \tilde{q} . En el caso de valores grandes de λ es difícil obtener soluciones cerca de $\tilde{q} = 0.5$, mientras que soluciones con grandes $\tilde{\lambda}$ y pequeños valores \tilde{q} sí son posibles.

para mantener la consistencia de la ecuación de restricción:

$$\mu^2 - \frac{\phi_{\text{th}*}^2}{2} - \frac{(V_{\text{th}} q + \omega)^2}{N_{\text{th}}^2} \sim \frac{1}{\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) . \quad (4.36)$$

Ahora, vamos a tomar el límite $\lambda \rightarrow \infty$, manteniendo η fija en la Ec. (4.36). Vamos a definir las siguientes cantidades límite con el subíndice ∞ ,

$$N_{\lambda_\infty} = N|_{\lambda \rightarrow \infty}, \quad \Psi_{\lambda_\infty} = \Psi|_{\lambda \rightarrow \infty}, \quad \phi_{*\lambda_\infty} = \phi_*|_{\lambda \rightarrow \infty}, \quad V_{\lambda_\infty} = V|_{\lambda \rightarrow \infty} , \quad (4.37)$$

esto nos permite expresar el valor del campo escalar en la garganta en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ como,

$$\phi_0 := \phi_{*\lambda_\infty}(\eta = 0) = \sqrt{2 \left(\mu^2 - \frac{(\omega + q V_0)^2}{N_0^2} \right)} , \quad (4.38)$$

donde $V_0 := V_{\lambda_\infty}(\eta = 0)$ y $N_0 := N_{\lambda_\infty}(\eta = 0)$. Esta ecuación implica que siempre debe pasar que $\omega + q V_{\lambda_\infty} \gg 1$, para que el valor de la función de lapso tome valores suficientemente grandes que mantengan la Ec. (4.38) real, lo cual explica porque es más posible obtener soluciones numéricas con valores altos de q y ω . Esto puede ser corroborado mirando las primeras dos columnas de los cuadros 4.2 y 4.3, más adelante explicaremos con cuidado ambos cuadros. Ahora, insertando las cantidades re-escalas ϕ_* y η_{0*} en el sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon-Maxwell y tomando el límite $\lambda \rightarrow \infty$ (con η constante y asumiendo $|\eta/\eta_0| \ll 1$), se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \Psi_{\lambda_\infty} = 0 , \quad (4.39)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} N_{\lambda_\infty} = 0 , \quad (4.40)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} V_{\lambda_\infty} = 0 , \quad (4.41)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \phi_{*\lambda_\infty} - \Psi_{\lambda_\infty}^4 \left(\mu^2 - \phi_{*\lambda_\infty}^2 - \left(\frac{q V_{\lambda_\infty} + \omega}{N_{\lambda_\infty}} \right)^2 \right) \phi_{*\lambda_\infty} = 0 . \quad (4.42)$$

Estas soluciones son válidas en el intervalo $-\lambda \eta_{0*} \ll \eta \ll \lambda \eta_{0*}$.

Imponiendo las condiciones de simetría en la garganta dadas en la Ec. (4.29) y utilizando las definiciones dadas en la Ec. (4.37), el sistema de ecuaciones (4.39) tiene la solución,

$$N_{\lambda_\infty}(\eta) = N_0, \quad \Psi_{\lambda_\infty}(\eta) = \Psi_0, \quad V_{\lambda_\infty}(\eta) = V_0 ; \quad (4.43)$$

$$\phi_{*\lambda_\infty}(\eta) = \phi_0 \operatorname{sech} \left(\frac{\Psi_0^2 \phi_0}{\sqrt{2}} \eta \right) , \quad (4.44)$$

con ϕ_0 constreñido por la Ec. (4.38). Dada q y ω , los números N_0 , Ψ_0 , V_0 y ϕ_0 son estimados mediante interpolación y apartir de soluciones con valores altos de λ . En el

Cuadro 4.2: Cantidades N_{λ_∞} , Ψ_{λ_∞} , ϕ_{λ_∞} y V_{λ_∞} para $\omega/\mu = 0.5$ y diferentes valores de la carga q . Estas cantidades se relacionan con las condiciones de frontera en la garganta para $\lambda \rightarrow \infty$, en acuerdo con las Ecs. (4.37) y Ecs. (4.38).

\tilde{q}	N_0	Ψ_0	ϕ_0	V_0	$(\omega + qV_0)/N_0$
0	1	0.7099	1.225	0	0.5
0.2	1.0860	0.6897	1.193	0.0882	0.5418
0.3	1.2153	0.6617	1.1365	0.1515	0.5990
0.5	1.9767	0.5504	0.8926	0.4146	0.7787

Cuadro 4.3: Cantidades límite N_0 , Ψ_0 y ϕ_0 para $q = 0$ ($V_0 = 0$) y valores diferentes de ω/μ .

ω/μ	N_0	Ψ_0	ϕ_0	ω/N_0
0	0.5820	0.9001	1.4189	0
0.2	0.6895	0.8427	1.3551	0.2901
0.5	1	0.7099	1.2250	0.5
0.7	1.2401	0.6347	1.1707	0.5645
1	1.6153	0.5448	1.1131	0.6191

cuadro 4.2 presentamos algunos de los valores numéricos utilizados para el caso $\omega/\mu = 0.5$. En el cuadro 4.3 reportamos las mismas cantidades para el caso $q = 0$, ω .

Con el objetivo de comparar nuestras expresiones analíticas en el régimen $\lambda \rightarrow \infty$ con nuestro código y soluciones numéricas, en la Fig. 4.11 presentamos la convergencia de los perfiles numéricos $\phi_{*\lambda_\infty}$ respecto a su perfil dado por la Ec. (4.44). Concluimos que las expresiones analíticas son buenas aproximaciones para estos casos. También hemos verificado la validez de las aproximaciones (4.43) para los funciones métricas, comprobando el crecimiento lineal de éstas y del potencial eléctrico respecto al parámetro λ . Previamente describimos que la masa (y el número de partículas) tienen también un escalamiento lineal en el régimen $\lambda \rightarrow \infty$, y más aún remarcable, la masa total tiende a cero para configuración con exactamente $\omega = 0.5\mu$ conforme $\lambda \rightarrow \infty$. Las Ecs. (4.43) y (4.44) proveen una explicación a esta propiedades. Utilizando $\phi_{*\lambda_\infty}$ y η_{0*} es posible mostrar que la masa de Komar en la Ec. (4.24) escala como $M_* = M/\lambda$ para $\lambda \gg 1$. Más aún, una expresión analítica para M_* puede ser obtenida notando que cuando $\lambda \gg 1$ la raíz cuadrada del determinante puede approximarse como $\sqrt{\gamma} \approx \lambda^2 \Psi_{\lambda_\infty}^6 \eta_{0*}^2 \sin \theta$, y el integrando $N(T_\mu^\mu - 2T_t^t)$ puede ser simplificado a orden $1/\lambda$ como

$$N(T_\mu^\mu - 2T_t^t) \approx \frac{2N_{\lambda_\infty} \phi_{*\lambda_\infty}^2}{\lambda} \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\phi_{*\lambda_\infty}^2}{4} - \frac{(qV_{\lambda_\infty} + \omega)^2}{N_{\lambda_\infty}^2} \right). \quad (4.45)$$

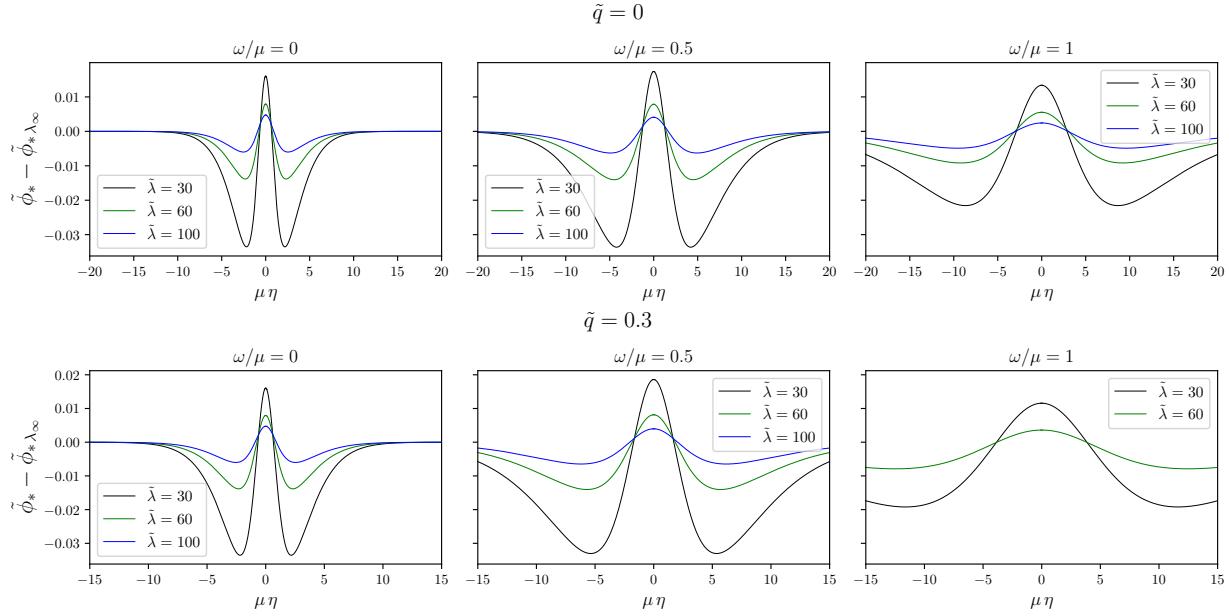


Figura 4.11: Diferencia entre el campo escalar re-escalado numérico $\tilde{\phi}_*$ y analítico $\tilde{\phi}_{*\lambda_\infty}$, dado en la Ec. (4.44) y los parámetros dados en el cuadro 4.2, como una función de la coordenada radial η en el régimen de $\tilde{\lambda} \rightarrow \infty$. Estamos considerando casos con $\omega/\mu = 0, 0.5, 1$ y $\tilde{q} = 0, 0.3$.

Entonces, insertando la expresión de la masa de Komar (4.24), obtenemos

$$\begin{aligned} M_* &= 8\pi N_0 \Psi_0^6 \eta_{0*}^2 \left[-\frac{1}{4} \int_0^\infty \phi_{*\lambda_\infty}^4 d\eta + \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{(\omega + qV_0)^2}{N_0^2} \right) \int_0^\infty \phi_{*\lambda_\infty}^2 d\eta \right], \\ &= \frac{8}{3}\pi N_0 \Psi_0^4 \eta_{0*}^2 \left(\mu^2 - \frac{(\omega + qV_0)^2}{N_0^2} \right)^{1/2} \left[\mu^2 - \frac{4(\omega + qV_0)^2}{N_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aquí hemos utilizado que la expresión para el campo escalar de la Eq. (4.44), implica que $\int_0^\infty \phi_{*\lambda_\infty}^2 d\eta = \frac{2\phi_0}{\sqrt{2}\Psi_0^2}$, $\int_0^\infty \phi_{*\lambda_\infty}^4 d\eta = \frac{4\phi_0^3}{3\sqrt{2}\Psi_0^2}$.

Como estábamos buscando, estas ecuaciones nos permiten ver la masa del sistema se hará cero si y solo sí la condición $\omega = \omega_{zm}$ se satisface, con

$$\omega_{zm} = \frac{\mu N_0}{2} - q V_0. \quad (4.47)$$

Sustituyendo los valores en el cuadro 4.2 para las soluciones $q = 0$ y $\omega = 0.5\mu$ vemos que sí se satisface la condición, de la misma manera podemos comprobar con las configuración con $q > 0$, $\lambda \gg 1$ y sus M son igual a zero. Más aún, puede mostrarse¹ que en los casos

¹ Considerando la expansión completa de la función de lapso, después del término constante N_{λ_∞} , (el cual es consistente con el sistema de ecuaciones (4.16-4.19)) (y considerando las posibles contribuciones de las expansiones de los otros campos) se debe tener $N = N_{\lambda_\infty} + \lambda^{-1}N_1(\eta) + \mathcal{O}(\lambda^{-2})$,

neutros, $q = 0$, el valor de N_0 es exactamente igual a 1, entonces por esta razón en $\omega = 0.5\mu$ la masa de Komar es igual a cero, como ya habían reportado en [40, 97]. En general, tales valores se modifican en presencia de la carga q , como se muestra en las figuras previas. Notamos a partir de los cuadros 4.2 y 4.3 que las cantidades N_0 y V_0 tienen un incremento monótono respecto a la frecuencia y la carga, mientras que las cantidades ϕ_0 y Ψ_0 decrecen monótonamente, igualmente respecto a la frecuencia y la carga, por lo tanto, para cada valor de ω y q , corresponde un solo valor de estas cantidades, en particular, N_0 , tales que la masa M_* es igual a cero.

Finalmente, utilizando el mismo procedimiento es posible ver que el número de particular \mathcal{N} dados por la Ec. (4.25) re-escalan como $\mathcal{N}_* = \mathcal{N}/\lambda$ en el régimen $\lambda \gg 1$. Así que podemos encontrar una expresión analítica para \mathcal{N}_* resultando en:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_* &= 4\pi \eta_{0*}^2 (\omega + qV_0) \frac{\Psi_0^6}{N_0} \int_0^\infty \phi_{*\lambda_\infty}^2 d\eta, \\ &= 8\pi \eta_{0*}^2 (\omega + qV_0) \frac{\Psi_0^4}{N_0} \left(\mu^2 - \frac{(\omega + qV_0)^2}{N_0^2} \right)^{1/2},\end{aligned}\quad (4.49)$$

aquí hemos utilizado la expresión para la corriente j dada en la Ec. (4.8) y el ansatz de la Ec. (4.10) para obtener $j^0 = -\frac{\phi_{\lambda_\infty}^2}{N_{\lambda_\infty}^2} (V_{\lambda_\infty} q + \omega)$.

4.4.5. Movimiento de partículas

Estudiar el movimiento de partículas en los espaciotiempos generados por agujeros de gusano cargados tiene el propósito de comprender mejor las propiedades de dichas geometrías y predecir posibles efectos sobre otras partículas.

La acción completa de la partícula cargada con masa m y carga e interactúa con un campo electromagnético relativista es [36],

$$\mathcal{A} = - \int m d\tau + \int e A_\mu u^\mu d\tau + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} \mathcal{R} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (4.50)$$

con N_1 satisfaciendo la ecuación diferencial $N_1'' = 4\pi N_{\lambda_\infty} \Psi_{\lambda_\infty}^4 \phi_*^2 (\mu^2 - \phi_*^2/2 - 2\omega^2/N_{\lambda_\infty}^2)$ junto a la condición de frontera $N_1'(\eta = 0) = 0$. Bajo esta consideración, la solución es,

$$N_1(\eta) = 4\pi N_{\lambda_\infty} \phi_{*\lambda_\infty}^2 \left[\left(\frac{1}{3} - \kappa \right) \ln(\cosh(b\eta)) + \frac{1}{6} \operatorname{sech}^2(b\eta) \right] + k_1, \quad (4.48)$$

con $\kappa = 2\phi_{*\lambda_\infty}^{-2} \omega^2/N_{\lambda_\infty}$ y $b = \Psi_{\lambda_\infty}^2 \phi_{*\lambda_\infty} / \sqrt{2}$. Estas soluciones son válidas en el dominio $|\eta| < \lambda\eta_{0*}$, la función de lapso completa $N = N_{\lambda_\infty} + \lambda^{-1} N_1(\eta) + \mathcal{O}(\lambda^{-2})$ debe empatar con la solución exterior $N_{\eta \rightarrow \infty} = 1 + \kappa_1/\eta$ en un cierto punto $1 \ll \eta_m < \lambda$, pero este es precisamente en el caso de masa cero que $\kappa = 1/3$, como se obtiene a partir de la Ec. (4.44), así que el término $\lambda^{-1} N_1$ contribuye insignificantemente (no así cuando $\kappa \neq 1/3$). Más aún, se puede argumentar que las contribuciones $\mathcal{O}(\lambda^{-2})$ son igualmente insignificante en el punto de empate, de modo que N_{λ_∞} debe satisfacer la condición de frontera en infinito, $N_{\lambda_\infty} = 1$, para la familia de soluciones $q = 0$ sí y solo sí $M_* = 0$.

donde u^μ es la cuatri-velocidad de la partícula. Variando \mathcal{A} respecto a la trayectoria de las partículas obtenemos las ecuaciones de movimiento de la partícula,

$$m u^\mu \nabla_\mu u^\nu = e F^\nu_\alpha u^\alpha , \quad (4.51)$$

notemos que se trata de la Ley de Lorentz. Ahora, consideremos el campo vectorial de Killing K del espaciotiempo, entonces se puede mosr que la ecuación de Killing $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ no implica que $u^\mu \nabla_\mu (K_\nu u^\nu) = 0$ como en el caso de las geodésicas, sino que se satisface que $u^\mu \nabla_\mu [K_\nu (mu^\nu + eA^\nu)] = 0$ ahora cuando la Ec. (4.51) se utiliza y se asume que el campo electromagnético es consistente con la simetría asociada a K [35] (como en el caso de nuestra solución de agujero de gusano eléctrico) . Esto significa que las cantidades

$$K_\nu (mu^\nu + eA^\nu) , \quad (4.52)$$

son constantes a lo largo de la línea de mundo de las partículas cargadas. Regresando al espaciotiempo de agujero de gusano, el campo de Killing tipo tiempo ξ y el campo de Killing axial $\psi = \partial_\varphi$ implican la existencia de una energía conservada $\mathcal{E} := -\xi_\nu (mu^\nu + eA^\nu)$ y el momento angular conservado azimutal $L := \psi_\nu (mu^\nu + eA^\nu)$, las cuales, en las coordenadas descritas en la Ec. (4.13) obtenemos $\mathcal{E} = mN^2u^t - eV$ and $L = m\Psi^4(\eta^2 + \eta_0^2) \sin^2 \theta u^\varphi$. Puesto que tanto el campo gravitacional como eléctrico son simetricamente esférico, podemos estudiar el movimiento sobre el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad. De este modo, la normalización de la cuatri-velocidad nos permite obtener una ecuación simple para el movimiento radial:

$$m^2 N^2 \Psi^4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 + m^2 N^2 - (\mathcal{E} + eV)^2 + \frac{N^2}{\Psi^4} \frac{L^2}{\eta^2 + \eta_0^2} = 0 , \quad (4.53)$$

cuyas soluciones permiten entender mejor las propiedades de los agujeros de gusano y sus parámetros. Ahora, podemos definir el potencial efectivo U_{eff} como el valor mínimo permitido de \mathcal{E} dado un η , es decir,

$$U_{\text{eff}}(\eta) = -eV(\eta) + \sqrt{m^2 N(\eta)^2 + \frac{N(\eta)^2}{\Psi(\eta)^4} \frac{L^2}{\eta^2 + \eta_0^2}} . \quad (4.54)$$

Dado \mathcal{E} y L , entonces, las regiones permitidas para el movimiento de las partículas están dadas por aquellos valores de η tales que $U_{\text{eff}}(\eta) \leq \mathcal{E}$.

Para ilustrar el movimiento de las partículas alrededor del agujero de gusano cargado, algunos potenciales efectivos se muestran en la Fig. 4.12. En el panel de la izquierda, estamos considerando tres espaciotiempos distintos tales que su masa total de Komar es $M > 0$, $M < 0$ y $M = 0$, suponemos que una partícula neutra con momento angular $L/m = 0.1$ cae dentro del agujero de gusano cuando su masa es positiva, es repelida cuando la masa es negativa, y continúa con su movimiento en línea recta cuando $M = 0$, todo esto, lejos de la garganta. En el panel de la derecho de la Fig. 4.12, consideramos un agujero de gusano con $M = 0$ y damos algunos valores para la carga de la partícula; podemos ver que tenemos casos tanto con interacción electromagnética atractiva como repulsiva.

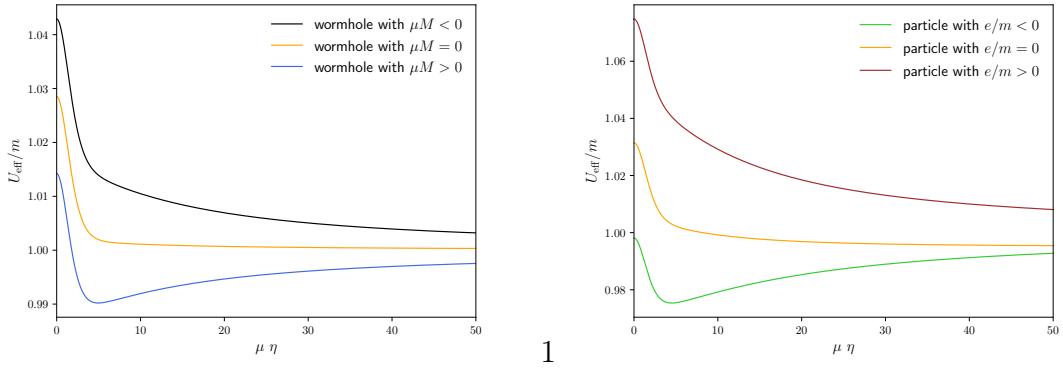


Figura 4.12: Potencial efectivo U_{eff} para una partícula con momento angular $L/m = 0.1$. Panel de la izquierda: Partícula neutral moviéndose en un agujero de gusano eléctrico con $\tilde{\lambda} = 30$ y $\tilde{q} = 0.1$ hay diferentes valores de ω/μ tales que la masa total del espaciotiempo es positiva, cero y negativa ($\omega/\mu = 0.475$, 0.4875 y 0.5 respectivamente). Panel de la derecha: partículas cargadas con $e/m = 1, 0, -1$ moviéndose en el espaciotiempo del agujero de gusano con $M = 0$, igual que en el panel de la izquierda.

4.5. Conclusiones de este capítulo

La energía oscura y la Inflación son dos conceptos actualmente bien aceptados dentro de la comunidad científica para describir, respectivamente, las propiedades del Universo y su origen. Tanto la energía oscura como la Inflación estarían compuestas por materia exótica en el sentido de que puede tener regiones del espaciotiempo con densidades de energía negativa. El modelado de la materia exótica es, entonces, de gran interés para mejorar la comprensión del Universo a gran escala y su origen. Dentro de los estudios de la materia exótica, los agujeros de gusano representan una configuración de gran interés desde que Einstein y Rose propusieron el concepto de *puente* entre espaciotiempos. Posteriormente, se han propuesto otras soluciones de agujeros de gusano, siendo todas ellas al parecer, inestables en el tiempo. Aún falta entender bastante como interacciona la materia exótica con otros campos físicos, como el electromagnético. Estos podrían jugar algún rol en la naturaleza y estabilidad de la materia exótica.

En el trabajo presentado en este capítulo [21], hemos derivado y resuelto el sistema de ecuaciones Einstein-Maxwell-Klein-Gordon para el caso de un campo escalar complejo y exótico, con término de auto-interacción, mínimamente acoplado al campo electromagnético. Imponiendo condiciones de frontera apropiadas, obtuvimos un espaciotiempo asintóticamente plano que describe un agujero de gusano con carga eléctrica. Así, obtenemos soluciones con las ya conocidas regiones de densidad positiva cerca de la garganta y regiones de densidad negativa, permitiendo esto obtener soluciones cuya masa total es positiva, negativa e igual a cero, dependiendo de los valores de los parámetros del sistema. Obtenemos que la carga eléctrica afecta la morfología de los agujeros de gusano y juega un rol importante en la determinación de su masa total y número de partículas.

Además, el movimiento de partículas en regiones lejanas a la garganta del agujero de gusano es diferente dependiendo de la masa total del sistema y su carga.

Nuestro análisis sugiere que, para valores grandes de λ , la solución para el campo escalar tiende a un mismo comportamiento. Nos detuvimos en este hecho y fuimos capaces de obtener expresiones analíticas para el campo escalar que reproducen su comportamiento. Comprobamos comparando las soluciones numéricas con las expresiones analíticas, obteniendo un excelente acuerdo. Esto no permitió entender mejor el rol de los parámetros en la determinación de las propiedades globales de los espaciotiempos de agujero de gusano cargado, tales como la masa total y el número de partículas, en función de los parámetros μ , ω , q , η_0 , así como el potencial eléctrico y los coeficientes métricos evaluados en el caso donde λ es muy grande. Es interesante notar que la carga y el campo eléctrico juegan un rol importante no solo en la determinación de la masa total sino que también modifica las condiciones en las cuales la masa es igual a cero.

Otro hecho que queremos resaltar es que nuestros experimentos numéricos nos permiten conjeturar que la carga no puede suplir el rol del parámetro de autointeracción, implicando que aún con carga eléctrica, los agujeros de gusano deben tener un parámetro de auto-interacción no nulo en aras de tener soluciones en equilibrio. Además, aún cuando no se deduce de las ecuaciones la existencia de un valor crítico para la carga, en nuestros experimentos numéricos, sí encontramos dificultades al incrementar q por encima de 0.5, lo cual sugiere la existencia de algún valor crítico por encima del cual ya no hay soluciones de equilibrio.

Finalmente, presentamos el movimiento de partículas tanto cargadas como neutras, obteniendo un comportamiento en términos de la masa total de las soluciones de agujero de gusano. En particular, en la región donde la masa total encerrada ya es constante, las partículas sienten una atracción hacia el agujero de gusano si éste tiene masa positiva, se repele en el caso donde la masa es negativa y, no se afecta su movimiento cuando la masa total es cero. Las soluciones donde $Q \neq 0$ y $M = 0$ son importantes porque significan que aunque el campo electromagnético contribuye como fuente a las ecuaciones de Einstein, el sistema completo de ecuaciones (campo electromagnético + campo escalar) es tal que una partícula cargada, lejos de la garganta, podría sentir la presencia del agujero de gusano, mientras que una partícula neutra no.

Más aún, nos ha sido posible construir soluciones donde $Q > M$ sin que esto implique la existencia de alguna singularidad desnuda. Las futuras investigaciones sobre el movimiento geodésico alrededor de los agujeros de gusano eléctrico y su posible distinción de otros posibles objetos compactos (como por ejemplo hicieron en [182, 183])) pueden trabajarse en un futuro trabajo.

Las ideas y procedimiento aquí descrito puede ser adaptado un campo electromagnético más general incluyendo la construcción de un agujero de gusano magnético. Tales ideas ya están en desarrollo por algunos autores de la investigación presentada en este capítulo basado en el artículo [21] .

5 Conclusiones generales

A través de estos capítulos comprendimos y utilizamos distintas herramientas para el estudio de los campos gravitacionales en condiciones extremas -y no tan extremas-. Entre las herramientas que utilizamos incluimos a la Física Newtoniana, la teoría electromagnética clásica, la Relatividad General, la teoría de perturbaciones a primer orden (aproximación cuadrupolar), la Relatividad Numérica en su actual estado-de-arte, así como el estudio de las ondas gravitacionales. Con estas herramientas, durante mi doctorado investigué algunas configuraciones auto-gravitantes, comenzando por los sistemas binarios de estrellas de neutrones. Además, exploré la teoría de los campos escalares complejos para construir estrellas de bosones- ℓ y agujeros de gusano. En el caso de las estrellas de neutrones y de las estrellas de bosones- ℓ , analicé sus ondas gravitacionales. Al mismo tiempo, durante mis investigaciones exploré la interacción entre los campos electromagnéticos y gravitacionales en configuraciones auto-gravitantes con campos electromagnéticos (particularmente, trabajé con estrellas de neutrones con campos magnéticos dipolares y agujeros de gusano con campos eléctricos).

En las últimas décadas, las observaciones astronómicas han explorado regiones cada vez más amplias y con mejor resolución del Universo y han observado múltiples formas de organización de la materia y la energía. Y, aunque la Astronomía ha aportado mucho conocimiento a la humanidad (por ejemplo, sobre la naturaleza de las partículas elementales, la evolución de las estrellas y la Cosmología), también ha abierto muchas interrogantes y grandes retos para la comunidad de Física Teórica. Parece que en nuestro Universo no solo existe la materia ordinaria, también existe la materia oscura y muy probablemente algún tipo de materia exótica (de acuerdo a la definición de la sección 1.1.3). En esta tesis, estudiamos el efecto gravitacional producido por objetos de los tres tipos de materia: estrellas de neutrones, compuestas por materia ordinaria, estrellas de bosones, interpretadas como objetos de materia oscura, y agujeros de gusano compuestos por un tipo de materia exótica. Es decir, los resultados obtenidos durante mi doctorado aportan información sobre los campos gravitacionales y su interacción con los campos electromagnéticos a través del estudio de objetos como las estrellas de neutrones magnetizadas y los agujeros de gusano eléctricamente cargados.

Reafirmamos que la Gravedad, aún siendo la interacción fundamental más débil, a escalas astrofísicas, galácticas y cosmológicas, rige la dinámica de la materia y energía. Las ondas gravitacionales contienen información sobre las propiedades de la materia y la energía.

Concretamente, durante mi doctorado colaboré en tres investigaciones, dos de las cuales ya se encuentran publicadas en revistas internacionales. La primera investigación trató sobre el efecto de los campos magnéticos en las ondas gravitacionales emitidas durante la coalescencia de dos estrellas de neutrones magnetizadas, en esta investigación

5 Conclusiones generales

soy primera autora y se encuentra publicada en la Revista *General Relativity and Gravitation* [20] y está descrita en el capítulo dos. En la segunda investigación construimos un agujero de gusano con carga eléctrica, en este trabajo soy segunda autora y puede consultarse en *Physical Review D* [21] y en el capítulo cuatro de la presente tesis. La tercera investigación, en la que soy primera autora, está por ser enviada para su publicación, en ella exploramos la detección de ondas gravitacionales de estrellas de bosones- ℓ en colisión frontal (capítulo tres).

Es así que en el primer capítulo de la presente tesis, es una introducción a las investigaciones, colocando en primer lugar el contexto observacional y en segundo lugar, la Relatividad General como marco teórico común. En el segundo capítulo, examinamos el campo gravitacional y electromagnético producido por dos estrellas de neutrones en la etapa de espiraleo rumbo a su fusión. Demostramos que la interacción magnética entre las estrellas de neutrones afecta tanto la luminosidad gravitacional como la forma de las ondas gravitacionales durante el espiraleo, esto porque la dinámica de la binaria (su periodo orbital y radio) depende de la magnitud de los campos magnéticos. Restringimos nuestro estudio al caso de órbitas circulares, argumentando que es bien sabido el proceso de circularización de las órbitas en este tipo de sistemas. Así, encontramos que cuando los dipolos magnéticos se atraen entre sí, el tiempo de fusión es más corto en comparación con el caso sin interacción magnética. En cambio, cuando los dipolos magnéticos se repelen, este tiempo se alarga. En el primer caso, el potencial magnético tiene el mismo signo que el potencial gravitacional, por lo que se suman sus efectos haciendo más rápida la fusión de las estrellas. Sin embargo, también encontramos que el efecto magnético, aún en los casos extremos de magnetares con $B \sim 10^{16}$ G, genera una corrección muy pequeña, del orden de 10^{-4} en variables como la frecuencia y la amplitud de las ondas gravitacionales y del orden de 10^{-2} en la luminosidad gravitacional. Concluimos que la cantidad de energía que transportan las ondas gravitacionales depende de la naturaleza de la fuente y que detectores más sensibles serán capaces de ver la huella de los campos magnéticos en la forma de las ondas gravitacionales. Hicimos predicciones sobre el efecto de los campos magnéticos de las estrellas de neutrones binarias en la emisión de ondas gravitacionales y comprobamos que conforme la sensitividad de los detectores incremente, será posible poner cotas más precisas sobre la naturaleza magnética de las estrellas de neutrones.

En el capítulo tres, analizamos las ondas gravitacionales generadas en la colisión frontal de estrellas de bosones- ℓ . Este tipo de estrellas de bosones están descritas por campos escalares complejos, y, aunque su existencia no ha sido confirmada, son interesantes candidatas a ser configuraciones autogravitantes de materia oscura formada por partículas bosónicas de masa intrínseca m_ϕ y parámetro angular ℓ . En nuestro trabajo, estudiamos qué valores de masa intrínseca debería tener el campo escalar para conformar estrellas de bosones- ℓ de escalas astrofísicas y emitir ondas gravitacionales con frecuencias y amplitudes dentro del rango de detección de las actuales y próximas observaciones de la colaboración LIGO-Virgo-Kagra. Encontramos que mientras más ligero es el campo escalar, más energía transportan las ondas gravitacionales y mayor es su amplitud, aunque menos es su frecuencia pico. A compacidad constante, no encontramos relaciones generales entre las propiedades de las señales producidas por estrellas de bosones $\ell \neq 0$ respecto

a colisiones de estrellas de bosones con $\ell = 0$. Concluimos que si la energía intrínseca del campo escalar que conforma a las estrellas de bosones- ℓ fuese entre $10^{-14} - 10^{-10}$ eV y estuviesen localizadas a 100 Mpc, al chocar frontalmente podrían ser detectadas por los interferómetros actualmente en funcionamiento.

En el capítulo cuatro, demostramos que la carga eléctrica puede acoplarse a la materia exótica para conformar un agujero de gusano cargado descrito por el sistema de ecuaciones Einstein-Maxwell-Klein-Gordon. En esta interpretación, la materia exótica está representada por un campo escalar complejo con parámetro de auto-interacción. Encontramos que las relaciones entre las cantidades globales que describen a los agujeros de gusano sin carga son cualitativamente similares a los agujeros de gusano con carga. Sin embargo, también encontramos que la carga juega un rol determinante en el valor de la masa total, el radio de garganta y el número de partículas. La carga eléctrica afecta el tamaño de la garganta del agujero de gusano haciéndola más grande conforme se incrementa la carga. Lo mismo ocurre con el número de partículas. Otro aporte de esta investigación fue que encontramos una solución analítica para el campo escalar complejo en el régimen de grandes valores del parámetro de auto-interacción, que aplica tanto para el agujero de gusano sin carga eléctrica como el caso con carga eléctrica. La solución analítica coincide bastante bien con las soluciones numéricas con λ , probando así la validez del método de integración utilizado para resolver el sistema de ecuaciones. Por otro lado, al estudiar el movimiento geodésico de partículas prueba cargadas y/o neutras en la vecindad de dicho agujero de gusano, nos encontramos que el hoyo de gusano, aún sin carga eléctrica, puede tener una masa asintótica tal que éste sea positiva, cero o inclusive negativa; la carga tiene el efecto de modificar la frecuencia a la cual la masa asintótica del hoyo de gusano sea cero. Estudiamos con detalle el movimiento geodésico mencionado y, efectivamente, hay partículas que lejos no sentirían ningún efecto gravitacional y otras que sentirían sólo un efecto electromagnético. Esto podría tener consecuencias observacionales.

Durante décadas se ha planteado la posibilidad de extender el paradigma actual de la cosmología y la física y se han buscado en experimentos de colisiones más partículas elementales, sin embargo, siguen sin detectarse. Esto ha dado pie a que otros modelos se planteen para explicar la naturaleza del sector oscuro del universo. Las capacidades computacionales están permitiendo explorar otras posibles configuraciones de la materia y la energía.

En estos tiempos, podría pensarse que la Astronomía y Física están en crisis al saber muy poco sobre la mayoría del Universo, no obstante, son tiempos muy interesantes porque hay muchas herramientas y colaboraciones científicas que están trabajando y avanzando rápidamente en todas las posibilidades teóricas y sus implicaciones observacionales, para así ir descartando soluciones a las ecuaciones de la dinámica de la materia y la energía, y quedarnos con aquellas configuraciones auto-gravitantes de distintos tipos de materia, sea ésta ordinaria, oscura o exótica, que sí existen en nuestro Universo. A través del análisis de ondas gravitacionales es posible descartar, acotar o reafirmar modelos sobre las fuentes. A casi una década de la primera detección de ondas gravitacionales, ya no podemos decir que las ondas gravitacionales son una nueva ventana para comprender el Universo, más bien, son una herramienta en completo desarrollo

5 Conclusiones generales

y auge que seguirá aportando información sorprendente sobre los objetos y fenómenos del Universo. El actual esquema teórico de la Física Contemporánea es un compendio de teorías y modelos con preguntas abiertas pero que en lo general es una muy buena aproximación a la realidad.

Bibliografía

- [1] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 98(3):030001, 2018.
- [2] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astron. Astrophys.*, 641:A1, 2020.
- [3] Albert Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1918:154–167, 1918.
- [4] M. Maggiore. Gravitational waves: Theory and experiments. *Oxford University Press*, 2007.
- [5] B. S. Sathyaprakash and B. F. Shutz. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. *Living Rev. Relativity*. 12, 2, 2009.
- [6] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [7] Virgo Collaboration LIGO Scientific Collaboration. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102, 2016.
- [8] Benjamin P. Abbott et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101, 2017.
- [9] B. P. Abbott et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Phys. Rev.*, X9:031040, 2019.
- [10] C.J. Pethick G.C. Baym, H. Bethe. Neutron star matter. *Nucl. Phys. A* 175, 225, 1979.
- [11] Daniele Viganò. Magnetic fields in neutron stars. Other thesis, Universitat d'Alacant, 10 2013.
- [12] Vitor Cardoso and Paolo Pani. Tests for the existence of black holes through gravitational wave echoes. *Nature Astron.*, 1(9):586–591, 2017.
- [13] Vitor Cardoso and Paolo Pani. Testing the nature of dark compact objects: a status report. *Living Rev. Rel.*, 22(1):4, 2019.
- [14] Yakov Shnir. Boson Stars. 4 2022.

Bibliografía

- [15] Luca Visinelli. Boson stars and oscillatons: A review. *Int. J. Mod. Phys. D*, 30(15):2130006, 2021.
- [16] L. Arturo Ureña López. Brief Review on Scalar Field Dark Matter Models. *Front. Astron. Space Sci.*, 6:47, 2019.
- [17] M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [18] Matt Visser. *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995.
- [19] Lira P. Mariana. Sistemas binarios con interacción magnética y emisión de ondas gravitatorias en fase inspiral. *Tesis de maestría, Astrofísica. Universidad Nacional Autónoma de México*, 2020.
- [20] Mariana Lira, Juan Carlos Degollado, Claudia Moreno, and Darío Núñez. On the role of magnetars-like magnetic fields into the dynamics and gravitational wave emission of binary neutron stars. *Gen. Rel. Grav.*, 54(11):146, 2022.
- [21] Víctor Jaramillo, Mariana Lira, Daniel Martínez-Carbajal, and Darío Núñez. Electric traversable wormhole supported by a charged scalar field. *Phys. Rev. D*, 109(6):064007, 2024.
- [22] Thorne Misner and Wheeler. General relativity. *Astrophysical Journal, vol. 157, p.1395*, 1973.
- [23] S. Weinberg. Gravitation and cosmology. *Wiley, New York*, 1972.
- [24] S. M. Carroll. Spacetime and geometry. *Addison-Wsley, New York*, 2003.
- [25] Albert Einstein. Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:688–696, 1916.
- [26] Albert Einstein. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, 49(7):769–822, 1916.
- [27] Emanuele Berti et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quant. Grav.*, 32:243001, 2015.
- [28] Hans Stephani, D. Kramer, Malcolm A. H. MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [29] Mike Guidry. Modern general relativity: Black holes, gravitational waves, and cosmology. *Cambridge*, 2019.
- [30] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Black holes, white dwarfs, and neutron stars. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1983.

- [31] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. WILEY-VCH, 1983.
- [32] Roger Penrose. Asymptotic properties of fields and space-times. *Phys. Rev. Lett.*, 10:66–68, 1963.
- [33] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 269:21–52, 1962.
- [34] S. Carroll, S.M. Carroll, and Addison-Wesley. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [35] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.
- [36] Thanu Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 12 2014.
- [37] Carlos Soler Vicente. Agujeros de gusano atravesables, materia exótica y warp drives, 2023-06-19.
- [38] David Hochberg and Matt Visser. The Null energy condition in dynamic wormholes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:746–749, 1998.
- [39] Francisco S. N. Lobo. *Exotic solutions in General Relativity: Traversable wormholes and 'warp drive' spacetimes*. 10 2007.
- [40] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Ratbay Myrzakulov, and Douglas Singleton. Non-singular solutions to Einstein-Klein-Gordon equations with a phantom scalar field. *JHEP*, 07:094, 2008.
- [41] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 220:291–333, 1920.
- [42] C. W. F. Everitt et al. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 106:221101, 2011.
- [43] Matthias Bartelmann and Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Phys. Rept.*, 340:291–472, 2001.
- [44] Elcio Abdalla et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. *JHEAp*, 34:49–211, 2022.
- [45] E. P. Hubble. Extragalactic nebulae. *Astrophys. J.*, 64:321–369, 1926.
- [46] Edwin Hubble. A Spiral Nebula as a Stellar System, Messier 31. *Astrophys. J.*, 69:103–158, 1929.

Bibliografía

- [47] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929.
- [48] Zwicky F. Baade W. On super-novae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Volume 20, Issue 5, pp. 254-259*, 1934.
- [49] J.H. Oort. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System*, 1932.
- [50] Vera C. Rubin and W. Kent Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*, 159:379–403, 1970.
- [51] Marc Davis, George Efstathiou, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Evolution of Large Scale Structure in a Universe Dominated by Cold Dark Matter. *Astrophys. J.*, 292:371–394, 1985.
- [52] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462:563–575, 1996.
- [53] Phillip James E. Peebles. Anomalies in physical cosmology. *Annals Phys.*, 447:169159, 2022.
- [54] Volker Springel, Jie Wang, Mark Vogelsberger, Aaron Ludlow, Adrian Jenkins, Amina Helmi, Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Aquarius Project: the subhalos of galactic halos. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 391:1685–1711, 2008.
- [55] P. Astier et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M , Ω_Λ and Ξ from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447:31–48, 2006.
- [56] L.S. Sparke and J.S. Gallagher. *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [57] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038, 1998.
- [58] Saul Perlmutter, Michael S. Turner, and Martin J. White. Constraining dark energy with SNe Ia and large scale structure. *Phys. Rev. Lett.*, 83:670–673, 1999.
- [59] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, 91:071301, 2003.
- [60] Yi-Fu Cai, Emmanuel N. Saridakis, Mohammad R. Setare, and Jun-Qing Xia. Quintom Cosmology: Theoretical implications and observations. *Phys. Rept.*, 493:1–60, 2010.
- [61] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.

- [62] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J. Lett.*, 195:L51–L53, 1975.
- [63] B. P. Abbott et al. LIGO: The Laser interferometer gravitational-wave observatory. *Rept. Prog. Phys.*, 72:076901, 2009.
- [64] F. Acernese et al. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):024001, 2015.
- [65] J. Aasi et al. Advanced LIGO. *Class. Quant. Grav.*, 32:074001, 2015.
- [66] Frans Pretorius. Evolution of binary black hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 95:121101, 2005.
- [67] Manuela Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, and Y. Zlochower. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111101, 2006.
- [68] R. Abbott et al. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. 8 2021.
- [69] Pau Amaro-Seoane et al. Laser Interferometer Space Antenna. 2 2017.
- [70] Pierre Auclair et al. Cosmology with the Laser Interferometer Space Antenna. *Living Rev. Rel.*, 26(1):5, 2023.
- [71] M. Punturo et al. The Einstein Telescope: A third-generation gravitational wave observatory. *Class. Quant. Grav.*, 27:194002, 2010.
- [72] David Reitze et al. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO. *Bull. Am. Astron. Soc.*, 51(7):035, 2019.
- [73] B. F. Schutz and F. Ricci. Gravitational waves, sources and detectors. *Living Rev. Relativity*. 12, 2, 2009.
- [74] Wen-Rui Hu and Yue-Liang Wu. The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity. *Natl. Sci. Rev.*, 4(5):685–686, 2017.
- [75] Wen-Hong Ruan, Zong-Kuan Guo, Rong-Gen Cai, and Yuan-Zhong Zhang. Taiji program: Gravitational-wave sources. *Int. J. Mod. Phys. A*, 35(17):2050075, 2020.
- [76] Jun Luo et al. TianQin: a space-borne gravitational wave detector. *Class. Quant. Grav.*, 33(3):035010, 2016.
- [77] Leor Barack et al. Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap. *Class. Quant. Grav.*, 36(14):143001, 2019.

Bibliografía

- [78] S. Bowyer, E. T. Byram, T. A. Chubb, and H. Friedman. Cosmic x-ray sources. *Science* 147: 394–398, 1965.
- [79] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10, 2019.
- [80] Kazunori Akiyama et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophys. J. Lett.*, 930(2):L12, 2022.
- [81] G. F. Paraschos et al. Ordered magnetic fields around the 3C 84 central black hole. *Astron. Astrophys.*, 682:L3, 2024.
- [82] B. P. Abbott et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *Astrophys. J. Lett.*, 848(2):L12, 2017.
- [83] B. P. Abbott et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101, 2017.
- [84] B. P. Abbott et al. GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4M_{\odot}$. *Astrophys. J. Lett.*, 892(1):L3, 2020.
- [85] T. A. Apostolatos. Modulation of gravitational waveforms from merging binaries caused by spin-induced orbital precession. In *7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (MG 7)*, pages 1075–1077, 7 1994.
- [86] C. Palenzuela, I. Olabarrieta, L. Lehner, and Steven L. Liebling. Head-on collisions of boson stars. *Phys. Rev. D*, 75:064005, 2007.
- [87] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, Marcelo Ponce, Steven L. Liebling, Matthew Anderson, David Neilsen, and Patrick Motl. Electromagnetic and Gravitational Outputs from Binary-Neutron-Star Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 111(6):061105, 2013.
- [88] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, Steven L. Liebling, Marcelo Ponce, Matthew Anderson, David Neilsen, and Patrick Motl. Linking electromagnetic and gravitational radiation in coalescing binary neutron stars. *Phys. Rev. D*, 88(4):043011, 2013.
- [89] David J. Kaup. Klein-Gordon Geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968.
- [90] Remo Ruffini and Silvano Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969.
- [91] C. Wetterich. Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nucl. Phys. B*, 302:668–696, 1988.

- [92] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys. Rev. D*, 37:3406, 1988.
- [93] Miguel Bezares and Carlos Palenzuela. Gravitational Waves from Dark Boson Star binary mergers. *Class. Quant. Grav.*, 35(23):234002, 2018.
- [94] Lam Hui, Jeremiah P. Ostriker, Scott Tremaine, and Edward Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D*, 95(4):043541, 2017.
- [95] K. A. Bronnikov. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B*, 4:251–266, 1973.
- [96] H. G. Ellis. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:104–118, 1973.
- [97] Xiao Yan Chew, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz, Vladimir Dzhunushaliev, and Vladimir Folomeev. Rotating wormhole solutions with a complex phantom scalar field. *Phys. Rev. D*, 100:044019, Aug 2019.
- [98] Shin’ichi Nojiri and G. G. L. Nashed. Wormhole solution free of ghosts in Einstein’s gravity with two scalar fields, 9 2023.
- [99] Belen Carvente, Víctor Jaramillo, Juan Carlos Degollado, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. Traversable ℓ -wormholes supported by ghost scalar fields. *Class. Quant. Grav.*, 36(23):235005, 2019.
- [100] Christian Hoffmann, Theodora Ioannidou, Sarah Kahlen, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Wormholes Immersed in Rotating Matter. *Phys. Lett. B*, 778:161–166, 2018.
- [101] Steven L. Liebling and Carlos Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Rev. Rel.*, 26(1):1, 2023.
- [102] Tonatiuh Matos and Francisco Siddhartha Guzman. Scalar fields as dark matter in spiral galaxies. *Class. Quant. Grav.*, 17:L9–L16, 2000.
- [103] Victoria M. Kaspi. The Neutron Star Zoo. *IAU Symp.*, 337:3–8, 2017.
- [104] Peter M. Woods and C. Thompson. Soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars: Magnetar candidates. 6 2004.
- [105] Robert C. Duncan and Christopher Thompson. Formation of very strongly magnetized neutron stars - implications for gamma-ray bursts. *Astrophys. J. Lett.*, 392:L9, 1992.
- [106] Victoria M. Kaspi and Andrei Beloborodov. Magnetars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 55:261–301, 2017.

Bibliografía

- [107] Kunihito Ioka and Keisuke Taniguchi. Gravitational waves from inspiralling compact binaries with magnetic dipole moments. *Astrophys. J.*, 537:327, 2000.
- [108] Daniel Price and Stephan Rosswog. Producing ultra-strong magnetic fields in neutron star mergers. *Science*, 312:719, 2006.
- [109] Eleonora Troja, Stephan Rosswog, and Neil Gehrels. Precursors of short gamma-ray bursts. *Astrophys. J.*, 723:1711–1717, 2010.
- [110] Vladimir M. Lipunov and Ivan E. Panchenko. Pulsars revived by gravitational waves. *Astron. Astrophys.*, 312:937, 1996.
- [111] Brad M. S. Hansen and Maxim Lyutikov. Radio and x-ray signatures of merging neutron stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 322:695, 2001.
- [112] M. V. Medvedev and A. Loeb. On Poynting-Flux-Driven Bubbles and Shocks Around Merging Neutron Star Binaries. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 431:2737, 2013.
- [113] Vasileios Paschalidis, Zachariah B. Etienne, and Stuart L. Shapiro. General relativistic simulations of binary black hole-neutron stars: Precursor electromagnetic signals. *Phys. Rev. D*, 88(2):021504, 2013.
- [114] Bruno Giacomazzo, Luciano Rezzolla, and Luca Baiotti. General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Binary Neutron Star Mergers. In *46th Rencontres de Moriond on Gravitational Waves and Experimental Gravity*, pages 69–76, Paris, France, 2011. Moriond.
- [115] John Antoniadis et al. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:6131, 2013.
- [116] Nikhil Sarin and Paul D. Lasky. The evolution of binary neutron star post-merger remnants: a review. *Gen. Rel. Grav.*, 53(6):59, 2021.
- [117] Luc Blanchet, Thibault Damour, Bala R. Iyer, Clifford M. Will, and Alan G. Wiseman. Gravitational-radiation damping of compact binary systems to second post-newtonian order. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3515–3518, May 1995.
- [118] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007.
- [119] Luc Blanchet. General relativistic dynamics of compact binary systems. *Comptes Rendus Physique*, 8:57–68, 2007.
- [120] Laszlo A. Gergely, Zoltan Perjes, and Matyas Vasuth. Spin effects in radiating compact binaries. In *Spanish Relativity Meeting (ERE 98)*, pages 259–262, 9 1998.
- [121] Laszlo A. Gergely. Spin spin effects in radiating compact binaries. *Phys. Rev. D*, 61:024035, 2000.

- [122] Laszlo A. Gergely and Zoltan Keresztes. Gravitational radiation reaction in compact binary systems: Contribution of the quadrupole - monopole interaction. *Phys. Rev. D*, 67:024020, 2003.
- [123] Matyas Vasuth, Zoltan Keresztes, Andras Mihaly, and Laszlo A. Gergely. Gravitational radiation reaction in compact binary systems: Contribution of the magnetic dipole - magnetic dipole interaction. *Phys. Rev. D*, 68:124006, 2003.
- [124] Tim Dietrich et al. Matter imprints in waveform models for neutron star binaries: Tidal and self-spin effects. *Phys. Rev. D*, 99(2):024029, 2019.
- [125] Sebastiano Bernuzzi, Alessandro Nagar, Tim Dietrich, and Thibault Damour. Modeling the Dynamics of Tidally Interacting Binary Neutron Stars up to the Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 114(16):161103, 2015.
- [126] Matthew Anderson, Eric W. Hirschmann, Luis Lehner, Steven L. Liebling, Patrick M. Motl, David Neilsen, Carlos Palenzuela, and Joel E. Tohline. Magnetized Neutron Star Mergers and Gravitational Wave Signals. *Phys. Rev. Lett.*, 100:191101, 2008.
- [127] Andrei Gruzinov. Pulsar Emission and Force-Free Electrodynamics. *Astrophys. J. Lett.*, 667:L69, 2007.
- [128] Benoît Cerutti and Andrei Beloborodov. Electrodynamics of pulsar magnetospheres. *Space Sci. Rev.*, 207(1-4):111–136, 2017.
- [129] James M. Lattimer. The nuclear equation of state and neutron star masses. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 62:485–515, 2012.
- [130] Paul Demorest, Tim Pennucci, Scott Ransom, Mallory Roberts, and Jason Hessels. Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star. *Nature*, 467:1081–1083, 2010.
- [131] K. S. Cheng and Z. G. Dai. On the Bimodal Magnetic Field Distribution of Binary Pulsars. *APJL*, 476(1):L39–L42, February 1997.
- [132] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [133] Yuk Tung Liu, Stuart L. Shapiro, Zachariah B. Etienne, and Keisuke Taniguchi. General relativistic simulations of magnetized binary neutron star mergers. *Phys. Rev. D*, 78:024012, 2008.
- [134] Balazs Mikoczi, Matyas Vasuth, and Laszlo A. Gergely. Self-interaction spin effects in inspiralling compact binaries. *Phys. Rev. D*, 71:124043, 2005.
- [135] Craig W. Lincoln and Clifford M. Will. Coalescing Binary Systems of Compact Objects to (Post)5/2 Newtonian Order: Late Time Evolution and Gravitational Radiation Emission. *Phys. Rev. D*, 42:1123–1143, 1990.

Bibliografía

- [136] Luc Blanchet, Bala R. Iyer, Clifford M. Will, and Alan G. Wiseman. Gravitational wave forms from inspiralling compact binaries to second postNewtonian order. *Class. Quant. Grav.*, 13:575–584, 1996.
- [137] Luc Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiring Compact Binaries. *Living Rev. Rel.*, 17:2, 2014.
- [138] R. Abbott et al. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. *Libre access*, 11 2021.
- [139] B. P. Abbott et al. GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries. *Phys. Rev. Lett.*, 116(13):131103, 2016.
- [140] the KAGRA Collaboration The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration. The lsc-virgo-kagra observational science working groups: white paper. *Phys. Rev. D*, 78, 02412, 2020.
- [141] Nicolas Sanchis-Gual, Miguel Zilhão, and Vitor Cardoso. Electromagnetic emission from axionic boson star collisions. 7 2022.
- [142] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Dario Nunez, and Olivier Sarbach. ℓ -Boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 35(19):19LT01, 2018.
- [143] Remo Ruffini and Silvano Bonazzola. Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, 1969.
- [144] Nicolas Sanchis-Gual, Fabrizio Di Giovanni, Carlos Herdeiro, Eugen Radu, and José A. Font. Multifield, Multifrequency Bosonic Stars and a Stabilization Mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, 126(24):241105, 2021.
- [145] Juan Calderón Bustillo, Nicolas Sanchis-Gual, Alejandro Torres-Forné, José A. Font, Avi Vajpeyi, Rory Smith, Carlos Herdeiro, Eugen Radu, and Samson H. W. Leong. GW190521 as a Merger of Proca Stars: A Potential New Vector Boson of 8.7×10^{-13} eV. *Phys. Rev. Lett.*, 126(8):081101, 2021.
- [146] Víctor Jaramillo, Nicolas Sanchis-Gual, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Carlos Herdeiro, Miguel Megevand, and Darío Núñez. Head-on collisions of ℓ -boson stars. *Phys. Rev. D*, 105(10):104057, 2022.
- [147] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. Boson stars and their relatives in semiclassical gravity. *Phys. Rev. D*, 107(4):045017, 2023.
- [148] Ignacio Olabarrieta, Jason F. Ventrella, Matthew W. Choptuik, and William G. Unruh. Critical Behavior in the Gravitational Collapse of a Scalar Field with Angular Momentum in Spherical Symmetry. *Phys. Rev. D*, 76:124014, 2007.

- [149] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. On the linear stability of ℓ -boson stars with respect to radial perturbations. *Class. Quant. Grav.*, 38(17):174001, 2021.
- [150] Víctor Jaramillo, Nicolas Sanchis-Gual, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Carlos Herdeiro, and Darío Núñez. Dynamical ℓ -boson stars: Generic stability and evidence for nonspherical solutions. *Phys. Rev. D*, 101(12):124020, 2020.
- [151] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Víctor Jaramillo, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. Extreme ℓ -boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 39(9):094001, 2022.
- [152] Frank Löffler et al. The Einstein Toolkit: A Community Computational Infrastructure for Relativistic Astrophysics. *Class. Quant. Grav.*, 29:115001, 2012.
- [153] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. General - relativistic MHD for the numerical construction of dynamical space - times. *Astrophys. J.*, 585:921–929, 2003.
- [154] Nigel T. Bishop and Luciano Rezzolla. Extraction of Gravitational Waves in Numerical Relativity. *Living Rev. Rel.*, 19:2, 2016.
- [155] Saul A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. 1. Fundamental equations for gravitational electromagnetic and neutrino field perturbations. *Astrophys. J.*, 185:635–647, 1973.
- [156] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007.
- [157] Christian Reisswig and Denis Pollney. Notes on the integration of numerical relativity waveforms. *Class. Quant. Grav.*, 28:195015, 2011.
- [158] C. Reisswig, C. D. Ott, U. Sperhake, and E. Schnetter. Gravitational Wave Extraction in Simulations of Rotating Stellar Core Collapse. *Phys. Rev. D*, 83:064008, 2011.
- [159] Samantha A. Usman et al. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence. *Class. Quant. Grav.*, 33(21):215004, 2016.
- [160] Víctor Jaramillo, Erik Jiménez-Vázquez, and Darío Núñez. Confinement of exotic matter: Static solutions. *Phys. Rev. D*, 107(6):064061, 2023.
- [161] He-Yu Gao, Paul M. Saffin, Yi-Jie Wang, Qi-Xin Xie, and Shuang-Yong Zhou. Boson Star Superradiance, 6 2023.

Bibliografía

- [162] Bohua Li, Tanja Rindler-Daller, and Paul R. Shapiro. Cosmological Constraints on Bose-Einstein-Condensed Scalar Field Dark Matter. *Phys. Rev. D*, 89(8):083536, 2014.
- [163] Kimet Jusufi. Conical Morris-Thorne Wormholes with a Global Monopole Charge. *Phys. Rev. D*, 98(4):044016, 2018.
- [164] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1446–1449, 1988.
- [165] Sergey Bolokhov, Kirill Bronnikov, Serguey Krasnikov, and Milena Skvortsova. A Note on “Traversable Wormholes in Einstein–Dirac–Maxwell Theory”. *Grav. Cosmol.*, 27(4):401–402, 2021.
- [166] Francisco S. N. Lobo. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 71:084011, 2005.
- [167] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. I. Linear stability analysis. *Class. Quant. Grav.*, 26:015010, 2009.
- [168] Hisa Aki Shinkai and Sean A. Hayward. Fate of the first traversible wormhole: Black-hole collapse or inflationary expansion. *Phys. Rev. D*, 66:044005, Aug 2002.
- [169] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach. Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. II. Nonlinear evolution. *Class. Quant. Grav.*, 26:015011, 2009.
- [170] Andreu Masó-Ferrando, Nicolas Sanchis-Gual, José A. Font, and Gonzalo J. Olmo. Numerical evolutions of boson stars in Palatini $f(\mathcal{R})$ gravity. 9 2023.
- [171] Ramesh Radhakrishnan, Patrick Brown, Jacob Mutulevich, Eric Davis, and Gerald Cleaver. A review of wormhole stabilization in $f(R)$ gravity theories. 5 2024.
- [172] P. Jetzer and J. J. van der Bij. CHARGED BOSON STARS. *Phys. Lett. B*, 227:341–346, 1989.
- [173] Víctor Jaramillo and Darío Núñez. Magnetostatic boson stars. *Phys. Rev. D*, 106(10):104023, 2022.
- [174] Galaxia Miranda, Juan Carlos Del Águila, and Tonatiuh Matos. Exact rotating magnetic traversable wormhole satisfying the energy conditions. *Phys. Rev. D*, 99:124045, Jun 2019.
- [175] Hyat Huang and Jinbo Yang. Charged Ellis Wormhole and Black Bounce. *Phys. Rev. D*, 100(12):124063, 2019.
- [176] J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach. On the instability of charged wormholes supported by a ghost scalar field. *Phys. Rev. D*, 80:024023, 2009.

- [177] M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman. Boson Stars: Gravitational Equilibria of Selfinteracting Scalar Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2485–2488, 1986.
- [178] Stephen W. Hawking and George F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 2023.
- [179] Miguel Alcubierre. *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*, volume 189. Springer, 2017.
- [180] Eric Gourgoulhon. An Introduction to the theory of rotating relativistic stars. In *CompStar 2010: School and Workshop on Computational Tools for Compact Star Astrophysics*, 3 2010.
- [181] Philippe Grandclement and Jerome Novak. Spectral methods for numerical relativity. *Living Rev. Rel.*, 12:1, 2009.
- [182] Vittorio De Falco, Emmanuele Battista, Salvatore Capozziello, and Mariafelicia De Laurentis. General relativistic Poynting-Robertson effect to diagnose wormholes existence: static and spherically symmetric case. *Phys. Rev. D*, 101(10):104037, 2020.
- [183] Vittorio De Falco, Mariafelicia De Laurentis, and Salvatore Capozziello. Epicyclic frequencies in static and spherically symmetric wormhole geometries. *Phys. Rev. D*, 104(2):024053, 2021.