

ОЦІНКА НИЖНЬОЇ МЕЖІ ЕНЕРГІЇ ОСНОВНОГО СТАНУ АНГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА В ДЕФОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ З МІНІМАЛЬНОЮ ДОВЖИНОЮ

А. О. Панас^{id}, В. М. Ткачук^{id}

*Кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна*

(Отримано 01 липня 2024 р.; в остаточному вигляді — 20 липня 2024 р.; прийнято до друку — 29 липня 2024 р.;
опубліковано онлайн — 17 жовтня 2024 р.)

Ми знайшли нижню межу енергії основного стану ангармонічного осцилятора та його часткових випадків (гармонічного осцилятора й частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками) використовуючи узагальнені співвідношення невизначеностей у квантованому просторі. Для гармонічного осцилятора в деформованому просторі з мінімальною довжиною нижня межа енергії основного стану збігається з точним значенням. Запропонований метод може бути застосований для оцінки енергій основного стану інших систем.

Ключові слова: деформовані алгебри, мінімальна довжина, ангармонічний осцилятор, енергія основного стану.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.28.4001>

І. ВСТУП

Узагальнені співвідношення невизначеностей Гайзенберга й модель мінімальної довжини останнім часом викликають велике зацікавлення в наукового товариства. Вони впливають з теорії струн і квантової гравітації і в перспективі спрямовані на об'єднання квантової механіки й загальної теорії відносності через квантування простору [1,2].

Для цього вводять певні параметри в класичних співвідношеннях невизначеностей Гайзенберга, деформувавши канонічні комутаційні співвідношення.

Є багато способів деформації комутаційних співвідношень, які приводять до мінімальної довжини. Про різні алгебри, які при цьому можуть бути використані детальніше, можна почитати у [3,4].

З урахуванням моделі узагальнених співвідношень невизначеностей опубліковано багато праць з різних розділів фізики. Оскільки показано, що слабкий принцип еквівалентності порушується, зважаючи на узагальнені співвідношення невизначеностей у неоднорідному гравітаційному полі, цю проблему активно досліджували. Унаслідок цього вдалося примирити слабкий принцип еквівалентності й узагальнені співвідношення невизначеностей [5–15].

У межах узагальнених співвідношень невизначеностей, які включають деформаційні параметри як імпульсу, так і координати, знайдено точні розв'язки для одновимірного квантового гармонічного осцилятора [16,17]. Праця [18] присвячена докладному вивченню деформованих комутаційних співвідношень й узагальненого Гільбертового простору, з ними пов'язаного. Серед усього іншого знайдено спектр гармонічного осцилятора з урахуванням мінімальної довжини. Спектр перестає бути еквідистантним, проте залишається необмеженим. Також можна побачити, що вплив деформації простору суттєво відобразиться на енергетичних рівнях осцилятора лише

за великих n . Оскільки з фізичного погляду деформаційний параметр мусить бути малою величиною, внесок якої наразі неможливо зафіксувати експериментально. Також за допомогою узагальнених співвідношень невизначеностей вищого порядку, які задаються комутаційними співвідношеннями, що містить максимальний імпульс, знайдено точний розв'язок для спектра енергії частинки в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками та чисельні квазікласичні розв'язки й розв'язки з використанням теорії збурень для квантового гармонічного осцилятора [19]. Докладніше про квазікласичний підхід у разі деформованих комутаційних співвідношень [20,21].

Проаналізовано, як узагальнені співвідношення невизначеностей модифікують термодинаміку чорних дір, а саме: як вони впливають на швидкість випаровування чорних дір. У контексті цих досліджень удалося оцінити деформаційний параметр у комутаційних співвідношеннях, що приводить до появи мінімальної довжини. Також були наведені певні роздуми щодо знака цього параметра [22].

Опис багаточастинкової системи, що є в просторі, який описується однаковою деформованою алгеброю Гайзенберга для кожної частинки, проте з різними значеннями деформаційних параметрів, дав змогу знайти загальний імпульс і координату центра мас системи з точністю до лінійних за деформаційними параметрами доданків. У границі $N \rightarrow \infty$ задачі багатьох тіл відповідає задача руху макроскопічного тіла в деформованому просторі, для якого знайдено ефективний гамільтоніан [23]. Також досліджено, як впливає врахування моделі мінімальної довжини на спектр атома гідрогену [23–29].

Як відомо, класичні співвідношення невизначеностей Гайзенберга можна одержати за допомогою ентродійних співвідношень невизначеностей, якщо розглядати гаусів розподіл імовірностей. З іншого боку, отримано деформовані співвідношення невизначеностей Гайзенберга для врахування ефектів кванто-

вої гравітації. У праці [30] показано, що деформовані співвідношення невизначеностей можуть мати походження з модифікованої ентропії з розподілом, який відрізняється від розподілу Гаусса.

У праці [31] використано дані з події GW150914 гравітаційної хвилі, щоб порахувати модифіковану швидкість гравітонів. Унаслідок удалось одержати покращені верхні межі для деформаційних параметрів, які спричиняють появу мінімальної довжини й мінімального імпульсу. У дослідженні [32] отримано результат щодо нетривіальних поправок, які модифікують межу Бекенштайна, якщо врахувати в межах теорії узагальнені співвідношення невизначеностей Гайзенберга замість канонічних. У статті [33] досліджено орбітальний магнітний момент електрона в атомі водню з урахуванням моделі мінімальної довжини. Також отримано густину струму електрона в атомі гідрогену й поправки для орбітального магнітного моменту. У праці [34] точно знайдено власні функції та спектр енергії в імпульсному зображенні для одновимірного кулонівського потенціалу з урахуванням узагальнених співвідношень невизначеностей, які приводять до мінімальної довжини.

У розділі II ми розв'яжемо задачу оцінки енергії основного стану гармонічного осцилятора на основі узагальнених співвідношень невизначеностей.

У розділі III ми розв'яжемо таку саму задачу для загальнішого випадку - ангармонічного осцилятора. Також порівняємо, як співвідносяться знайдені розв'язки в різних границях з уже відомими розв'язаними задачами.

II. ЕНЕРГІЯ ОСНОВНОГО СТАНУ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРІ З МІНІМАЛЬНОЮ ДОВЖИНОЮ

Розгляньмо задачу оцінки енергії основного стану гармонічного осцилятора, який описується гамільтоніаном

$$\hat{H}_{\text{h.o.}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \quad (2.1)$$

у квантованому просторі, що описується деформованим комутаційним співвідношенням

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2). \quad (2.2)$$

Співвідношення невизначеностей Гайзенберга в цьому випадку дають

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta\Delta p^2), \quad (2.3)$$

де ми використали позначення $\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} \rightarrow \Delta x$, $\sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle} \rightarrow \Delta p$. Зауважимо також, що із симетричних міркувань $\langle \hat{x} \rangle = 0$ і $\langle \hat{p} \rangle = 0$.

Використовуючи такі позначення, запишемо вираз для енергії гармонічного осцилятора

$$E_{\text{h.o.}} = \langle \hat{H}_{\text{h.o.}} \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2. \quad (2.4)$$

Для знаходження енергії основного стану гармонічного осцилятора у квантованому просторі скористаймося нерівністю (2.3), виразивши звідти Δx , підставимо його в (2.4) й отримаємо

$$E_{\text{h.o.}}(\Delta p) \geq \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta\Delta p \right) \right]^2 = E(\Delta p). \quad (2.5)$$

Далі запишемо умову мінімуму

$$\frac{dE(\Delta p)}{d\Delta p} = \frac{\Delta p}{m} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{4\Delta p^3} (\beta^2\Delta p^4 - 1) = 0,$$

звідки

$$\Delta p_{\min} = \sqrt[4]{\frac{m^2\omega^2\hbar^2}{4 + m^2\omega^2\hbar^2\beta^2}}. \quad (2.6)$$

У вираз (2.5) підставляємо $\Delta p_{\min}$ і тоді отримаємо нижню межу енергії основного стану гармонічного осцилятора з урахуванням співвідношення невизначеностей (2.3)

$$E_{\min} = \frac{\omega\hbar}{2} \left(\frac{1}{2}m\omega\hbar\beta + \sqrt{1 + \frac{1}{4}m^2\omega^2\hbar^2\beta^2} \right). \quad (2.7)$$

Одержаний результат повністю збігається з енергією основного стану, отриманою розв'язанням рівняння Шредингера з урахуванням комутаційного співвідношення $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \alpha\hat{x}^2 + \beta\hat{p}^2)$ [16], якщо прийняти параметр $\alpha \rightarrow 0$.

Легко перекоонатись у тому, що в границі $\beta \rightarrow 0$ вираз для енергії основного стану (2.7) дасть результат, рівний $\frac{\omega\hbar}{2}$, що відповідає енергії основного стану квантового гармонічного осцилятора без урахування параметра β у комутаційному співвідношенні.

III. ЕНЕРГІЯ ОСНОВНОГО СТАНУ АНГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРІ З МІНІМАЛЬНОЮ ДОВЖИНОЮ

Тепер розгляньмо загальнішу задачу. Оцінімо енергію основного стану ангармонічного осцилятора у квантованому просторі з мінімальною довжиною. Систему опишемо гамільтоніаном

$$\hat{H}_{\text{a.o.}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{a^{2n}}\hat{x}^{2n}. \quad (3.1)$$

Запишемо вираз для енергії ангармонічного осцилятора в позначеннях Δx , Δp

$$\begin{aligned} E_{\text{a.o.}} &= \langle \hat{H}_{\text{a.o.}} \rangle = \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2m} + \frac{\gamma}{a^{2n}}\langle \hat{x}^{2n} \rangle \geq \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2m} + \frac{\gamma}{a^{2n}}\langle \hat{x}^2 \rangle^n \\ &= \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{\gamma}{a^{2n}}\Delta x^{2n}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де ми використали нерівність для середніх [35], яка задає співвідношення між двома середніми степеневими

$M_n(x, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i x^n \right)^{\frac{1}{n}}$ з різними показниками n .
Згідно з нею, якщо $n_1 > n_2$, то

$$M_{n_1}(x, \alpha) \geq M_{n_2}(x, \alpha),$$

де $n_1, n_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. У нашому випадку маємо

$$M_n(\hat{x}^2, \alpha) \geq M_1(\hat{x}^2, \alpha),$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{x}^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{x}^2.$$

Піднесімо обидві частини цієї нерівності до степеня $n \geq 1$. Урахувавши, що $\sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{x}^{2n} = \langle \hat{x}^{2n} \rangle$ і $\sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{x}^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle$, врешті отримаємо

$$\langle \hat{x}^{2n} \rangle \geq \langle \hat{x}^2 \rangle^n.$$

Знаходження $E_{\min}$ почнімо з того, що, використовуючи нерівність (2.3), виразивши з неї Δx , запишемо (3.2) як $E_{a.o.}(\Delta p)$

$$E_{a.o.}(\Delta p) \geq \frac{\Delta p^2}{2m} + \gamma \frac{\hbar^{2n}}{(2a)^{2n}} \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right)^{2n} = E(\Delta p). \quad (3.3)$$

Мінімуму досягнемо, коли

$$\frac{dE(\Delta p)}{d\Delta p} = \frac{\Delta p}{m} + 2n\gamma \frac{\hbar^{2n}}{(2a)^{2n}} \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right)^{2n-1} \left(-\frac{1}{\Delta p^2} + \beta \right) = 0. \quad (3.4)$$

Для зручності подальших обчислень дещо перетворимо вираз (3.4) і зробимо перепозначення

$$2nm\gamma \frac{\hbar^{2n}}{(2a)^{2n}} = \tilde{\gamma}_n^{2n+2}. \quad (3.5)$$

Тоді рівняння (3.4) набуває вигляду

$$\frac{1}{m} \left[\Delta p + \tilde{\gamma}_n^{2n+2} \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right)^{2n-1} \left(-\frac{1}{\Delta p^2} + \beta \right) \right] = 0. \quad (3.6)$$

Знаходження аналітичного розв'язку рівняння (3.6) — нетривіальна задача, проте ми можемо знайти його для малих β . Для цього ліву частину (3.6) запишемо як деяку функцію $f(\Delta p, \beta)$. Отже, маємо

$$f(\Delta p, \beta) = 0. \quad (3.7)$$

Далі шукатимемо розв'язок $\Delta \tilde{p}$, рівняння (3.7) як

$$\Delta \tilde{p} = \Delta p_0 + \Delta p_1 \beta, \quad (3.8)$$

де Δp_0 — це розв'язок (3.7), знайдений для $f(\Delta p, 0) = 0$.

Для знаходження Δp_1 розкладімо $f(\Delta p, \beta)$ в ряд по β , урахувавши (3.8) і залишивши лише лінійні за β доданки. Тоді отримаємо таке рівняння:

$$f(\Delta p_0, 0) + \Delta p_1 \beta f'(\Delta p_0, 0) + \beta f'_\beta(\Delta p_0, 0) = 0,$$

де $f' = \frac{df}{d\Delta p}$. Перший доданок у лівій частині дорівнює нулеві, й тоді, виразивши Δp_1 , урешті маємо

$$\Delta p_1 = -\frac{f'_\beta(\Delta p_0, 0)}{f'(\Delta p_0, 0)}. \quad (3.9)$$

Знайдімо Δp_0

$$\Delta p_0 - \tilde{\gamma}_n^{2n+2} \left(\frac{1}{\Delta p_0} \right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{1}{\Delta p_0^2} \right) = 0,$$

$$\Delta p_0 = \tilde{\gamma}_n^{2n+2}. \quad (3.10)$$

Порахувавши значення відповідних похідних і підставивши їх у (3.9), отримаємо

$$\Delta p_1 = \tilde{\gamma}_n^3 \cdot \frac{n-1}{n+1}.$$

І отже,

$$\Delta \tilde{p} = \tilde{\gamma}_n + \beta \tilde{\gamma}_n^3 \cdot \frac{n-1}{n+1}.$$

Тепер знайдімо $E_{\min}(\Delta \tilde{p})$, відкинувши всі доданки, окрім лінійних.

$$E_{\min}(\Delta \tilde{p}) = \frac{n+1}{n} \frac{\tilde{\gamma}_n^2}{2m} + \frac{\tilde{\gamma}_n^4}{m} \beta, \quad (3.11)$$

де $\tilde{\gamma}_n$ означено в рівнянні (3.5).

Вираз (3.11) є нижньою межею енергії основного стану системи (3.1) з урахуванням співвідношення невизначеностей (2.3) в лінійному наближенні за малих

β для будь-якого значення параметра n . Гамільтоніан (3.1) збігається з (2.1), якщо $n=1$. Результат (2.7) для гамільтоніана (2.1) для малих β з точністю до лінійного доданка збігається з результатом (3.11) для гамільтоніана (3.1) за $n = 1$, якщо повернутись у ньому до старих параметрів за допомогою (3.5) і провести заміну $\gamma = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$. Обидва вирази дають такий результат:

$$E_{\min} = \frac{\omega\hbar}{2} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{4}\beta. \quad (3.12)$$

Можемо перекоонатися, що (3.11) за $\beta \rightarrow 0$ збігається з оцінкою енергії основного стану системи (3.1), порашованою за допомогою недеформованих співвідношень невизначеностей Гайзенберга. В обох випадках отримаємо однаковий результат

$$E_{\min} = \frac{n+1}{n} \frac{\tilde{\gamma}_n^2}{2m}. \quad (3.13)$$

Маючи загальний розв'язок для будь-якого n , можемо обчислити, якою буде енергія основного стану в границі $n \rightarrow \infty$, що фактично відповідає розв'язку для частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками з шириною $2a$.

$$E_{\min}(\Delta\tilde{p}) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{\hbar^2}{8ma^2} + \frac{\hbar^4}{16a^4m}\beta. \quad (3.14)$$

Точний розв'язок для частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками в деформованому просторі з мінімальною довжиною [36] такий:

$$E_n = \frac{1}{2m\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\sqrt{\beta n \pi \hbar}}{2a} \right).$$

Як бачимо, розв'язок (3.14) справді не перевищує точно знайденого значення енергії основного стану такої системи, узятого з точністю до доданка лінійного за β

$$\frac{\hbar^2}{8ma^2} + \frac{\beta\hbar^4}{16ma^4} < \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} + \frac{\beta\hbar^4\pi^4}{48ma^4},$$

як і повинно бути. Розбіжність між нашими результатами й точним розв'язком пов'язана з тим, що метод оціночний.

Проаналізувавши результат, ми бачимо, що він складається з двох доданків: один з них — це результат, який можна отримати з використанням недеформованих співвідношень невизначеностей Гайзенберга, а другий — це лінійний за параметром β доданок, що з'являється під час використання узагальнених співвідношень невизначеностей. Цей доданок є поправкою, що враховує квантованість простору.

IV. ВИСНОВОК

У цій статті ми оцінили енергії основного стану квантового ангармонічного осцилятора та його часткових випадків (гармонічного осцилятора й частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками) у квантованому просторі. Досліджено мінімальну енергію квантового гармонічного осцилятора в деформованому просторі з мінімальною довжиною. Отримана оцінка енергії (2.7) збігається з точним розв'язком, обчисленим у [16] у границі $\alpha \rightarrow 0$, і якщо прийняти $\beta = 0$, то (2.7) переходить в енергію основного стану звичайного квантового гармонічного осцилятора.

Були знайдені загальні розв'язки для оцінки енергії основного стану ангармонічного осцилятора (3.1) з використанням узагальнених співвідношень невизначеностей (2.3) для довільного n з точністю до лінійних доданків за малих β . За $n = 1$ гамільтоніан ангармонічного осцилятора відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора. Результат ангармонічного осцилятора (3.11) збігається з результатом для гармонічного осцилятора (2.7), узятим з точністю до лінійного за β доданка. Обидва вирази, отже, дали результат (3.12).

Також знайдено оцінку енергії основного стану в границі $n \rightarrow \infty$ (3.14), що фактично є оцінкою енергії для частинки в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками в деформованому просторі з мінімальною довжиною. У цьому випадку отримана оцінка не перевищує точного результату, одержаного з розв'язку рівняння Шредингера [36], як і повинно бути. Запропонований метод можна використовувати для оцінки нижньої межі енергії основного стану інших систем. Також метод може бути узагальнений на тривимірний випадок.

- [1] D. J. Gross, P. F. Mende, Nucl. Phys. B **303**, 407 (1988); [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90390-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90390-2).
- [2] M. Maggiore, Phys. Lett. B **304**, 65 (1993); [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)91401-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91401-8).
- [3] T. Masłowski, A. Nowicki, V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 075309 (2012); <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/7/075309>.
- [4] A. M. Frydryszak, V. M. Tkachuk, Czechoslovak. J. Phys. **53**, 1035 (2003); <https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000010529.32268.03>.

- [5] V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **86**, 062112 (2003); <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.062112>.
- [6] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650026 (2019); <https://doi.org/10.1142/S0217732316500267>.
- [7] Kh. P. Gnatenko, Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013); <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.09.036>.
- [8] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **381**, 2463 (2017); <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.05.056>.

- [9] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, *Int. J. Theor. Phys.* **57**, 3359 (2018); <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3848-6>.
- [10] Kh. P. Gnatenko, *Europhys. Lett.* **123**, 50002 (2018); <https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/50002>.
- [11] K. H. C. Castello-Branco, A. G. Martins, *J. Math. Phys.* **51**, 102106 (2010); <https://doi.org/10.1063/1.3466812>.
- [12] Y. Lee, *Phys. Rev. D* **76**, 025022 (2007); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.025022>.
- [13] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *Class. Quantum Grav.* **28** 125007 (2011); <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125007>.
- [14] S. Hamid Mehdipour, A. Keshavarz, *Europhys. Lett.* **98**, 10002 (2012); <https://doi.org/10.1209/0295-5075/98/10002>.
- [15] A. Saha, *Phys. Rev. D* **89**, 025010 (2014); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.025010>.
- [16] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 10373 (2003); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/41/009>.
- [17] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 10095 (2004); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/43/006>.
- [18] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, *Phys. Rev. D* **52**, 1108 (1995); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1108>.
- [19] Won Sang Chung, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. C* **79**, 213 (2019); <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6718-3>.
- [20] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 379 (2006); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/2/008>.
- [21] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 045305 (2008); <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/4/045305>.
- [22] L. Buoninfante, G. G. Luciano, L. Petruzzello, *Eur. Phys. J. C* **79**, 663 (2019); <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7164-y>.
- [23] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A* **81**, 012106 (2010); <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.012106>.
- [24] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A* **74**, 012101 (2006); <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.012101>.
- [25] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2716 (2001); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2716>.
- [26] Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 151602 (2002); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.151602>.
- [27] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Eur. Phys. J. C* **36**, 251 (2004); <https://doi.org/10.1140/epjc/s2004-01886-1>.
- [28] N. Chair, M. A. Dalabeeh, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1553 (2005); <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/9/095306>.
- [29] S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 4133 (2011); <https://doi.org/10.1088/1742-6596/435/1/012020>.
- [30] N. C. Bizet, O. Obregón, W. Yupanqui, *Phys. Lett. B* **836**, 137636 (2023); <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137636>.
- [31] Zhong-Wen Feng, Shu-Zheng Yang, Hui-Ling Li, Xiao-Tao Zu, *Phys. Lett. B* **768**, 81-85 (2017); <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.043>.
- [32] L. Buoninfante, G. Gaetano Luciano, L. Petruzzello, F. Scardigli, *Phys. Lett. B* **824**, 136818 (2022); <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136818>.
- [33] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, *Phys. Lett. A* **372**, 5126-5130 (2008); <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.06.002>.
- [34] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 2143 (2006); <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/9/010>.
- [35] E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities* (Springer, Berlin-Heidelberg, 1961); <https://doi.org/10.1007/978-3-642-64971-4>.
- [36] P. Pedram, *Phys. Rev. D* **85**, 024016 (2012); <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.024016>.

LOWER BOUNDARY ESTIMATION OF THE GROUND STATE ENERGY FOR AN ANHARMONIC OSCILLATOR IN DEFORMED SPACE WITH MINIMAL LENGTH

A. O. Panas, V. M. Tkachuk

*Ivan Franko National University of Lviv, Professor Ivan Vakarchuk Department for Theoretical Physics,
12, Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

In this paper, we explore the ground state energy of an anharmonic oscillator and its special cases, such as the harmonic oscillator and particle in the box, applying generalized uncertainty relations in quantized space with minimal length. Consequently, we introduce a novel approach for estimating the ground state energy of quantum systems in deformed space. By using only the Hamiltonian of the system and generalized uncertainty relations, we manage to calculate a conditional extremum which corresponds to the minimal energy of the system, as allowed by the minimal length model.

For a harmonic oscillator in deformed space with minimal length, the lower boundary estimation for the ground state energy corresponds to the exact value found by solving the Schrodinger equation. In the case of an anharmonic oscillator with an arbitrary parameter n , we manage to find an exact solution through a linear approximation with respect to the deformational parameter, considering it a small quantity. In our case, n represents the degree of the coordinate in the anharmonic oscillator Hamiltonian.

When we set $n = 1$ in our solution for the anharmonic oscillator, it can be found that it corresponds to the harmonic oscillator solution through a linear approximation based on the deformational parameter,

as expected. When $n \rightarrow \infty$, we derive an expression that corresponds to the lower boundary estimation of the ground state energy of a particle in a box, which we compare with the exact solution. Our estimation fell below the exact solution found by solving the Schrodinger equation, which is a common occurrence in estimation methods.

Considering the advantages offered by our method for estimating ground state energies in deformed spaces with minimal length, including its simplicity of application and the satisfactory accuracy of results, this approach can effectively extend to determining the ground state energies of various other systems.

Key words: deformed algebras, minimal length, anharmonic oscillator, ground state energy.