行列模型とギンスパーグ・ウィルソン関係式

青木　一（佐賀大学理工学部）[1]

行列模型は弦理論の非摂動的定式化として有望である．この原稿の1節では，IIB行列模型について，その現状と問題点を簡単にまとめる．また，行列模型は格子理論に代わる，場の理論の正則化としても有用である．行列正則化は行列に空間を埋め込む手法としても重要なので，2節で簡単に紹介をする．最後に3節で，格子理論で発達したギンスパーグ・ウィルソン関係式を用いて行列模型でカイラリティを厳密に保つディラック演算子を定式化し，さらにインデックスの自発的生成の機構を提示することにより，行列模型でのカイラル・フェルミオンの実現の可能性を示す．

1　IIB行列模型

弦理論は重力まで含めた統一理論の有力候補であるが，摂動論では様々な時空次元，ゲージ群，物質構造をもつ真空が無数に構成でき，しかもそれらを比較し安定性を議論することができないので，物理的な予言力がない．そこで非摂動的定式化が必要であり，なかでも行列模型による定式化が有望と思われる [1, 2].

ここではIIB行列模型を紹介する [2, 3]．これは１０次元 $SU(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を０次元につぶしたもので，その作用は

$$S_{\rm IIBMM} = -\frac{1}{g^2} Tr\Big(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] + \frac{1}{2}\bar\psi\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\Big) \tag{1.1}$$

と書ける．但し，A_μ, ψ は $N \times N$ のエルミート行列で，ψ は１０次元マヨラナ・ワイル・スピノールである．この模型は，非常に簡単な形をもち，任意パラメターを含まず，$SO(10)$ 対称性が明白であるなど，基本理論としてふさわしい特徴をもつ．

この行列模型が弦理論の非摂動的定式化であると主張する理由を５つあげる：

1. 作用 (1.1) は，行列 A_μ の固有値の分布を時空間とみなすことにより，１０次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもつ．このような最大の超対称性をもつ理論は重力子を含むと思われる．

2. 作用 (1.1) は，IIB超弦理論のシルト作用

$$S_{\rm Schild} = \int d^2\sigma[\alpha\sqrt{\hat g}(\frac{1}{4}\{X^\mu, X^\nu\}^2 - \frac{i}{2}\bar\psi\Gamma^\mu\{X^\mu, \psi\}) + \beta\sqrt{\hat g}]. \tag{1.2}$$

を行列正則化したものに対応している．このことからも行列 A_μ が時空間座標に対応していることがわかる．

3. IIB行列模型における古典解が弦理論におけるＤブレーンに対応しており，実際Ｄブレーン間の相互作用についての計算結果が行列模型と弦理論で一致することが示せる．

[1] e-mail: haoki@cc.saga-u.ac.jp

4. IIB 行列模型におけるウィルソン・ループが弦理論における基本弦の生成消滅演算子に対応していると思われ，ウィルソン・ループのシュウィンガー・ダイソン方程式から弦の場の理論を導出する試みがなされている [4].

5. IIB 行列模型では，時空間や物質の構造のような，弦理論の非摂動効果を解析することができる．例えば，時空間は行列 A_μ の固有値分布と思え，N この固有値が 4 次元方向には広がり 6 次元方向にはつぶれた多様体に分布していれば，これは時空間が 4 次元であることを意味する．実際，固有値の分布を解析し，時空の 4 次元性が示唆されている [5, 6].

このように，IIB 行列模型は弦理論の非摂動的定式化としてふさわしく，今のところ矛盾は報告されていない．しかし，解決すべき重要な問題点がいくつかある：

1. IIB 行列模型が弦の摂動論を完全に再現することを定量的に示す必要がある．例えば，行列模型で頂点演算子を定義し，それらの散乱振幅を計算し，弦理論の結果と一致することを示す，または，行列模型でのループ方程式から弦の場の理論が導出できることを厳密に示すような研究をさらに進めるべきだと思う．

2. IIB 行列模型は，時空間，物質，相互作用が行列の中に渾然一体として埋め込まれている．これは究極理論としてふさわしい特徴ではあるが，これらが行列にいかに埋め込まれているのかを明らかにする必要がある．同時に，メトリック，トポロジー，コンパクト化，背景場非依存性，時間と空間の違い，場の局所性，場の伝播の仕方などの重要な概念が行列模型でいかに実現されるのかを明らかにしなければならない．そのためには，例えば，曲がった空間での行列模型を定式化し，それらの間の関係を見るような研究，または，行列の中のある部分についての有効理論への考察を深めるような研究などを進め，これらの問題への糸口を見つけるべきだと思う．

3. 4 次元時空でのカイラル・フェルミオンがいかに実現されるかを示す必要がある．例えば，$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{C}^3/Z_3$ オービフォールドでの行列模型を構成しある種のチャージを割り振ると，4 次元カイラル・フェルミオンが実現できる [7]．しかしなぜこのような背景場が好まれるのかを示す必要がある．結局，余次元空間（コンパクトでも大きく広がっていてもよい）が非自明なインデックスをダイナミカルに持つことを示す必要がある．そこで，この原稿の 3 節で，インデックスの自発的生成の機構を紹介する．

2　行列正則化

行列正則化は，格子正則化に代わる，場の理論の正則化法として興味深い．これは時空の並進対称性を破らないので，超対称性や位相構造を保つ，正則化された場の理論が構成できる可能性を与える．

一方，そもそも行列正則化とは行列と空間（または空間上の関数）に対応をつけるものなので，空間を行列で表す手法を与え，1 節で紹介したような弦理論の行列模型での定式化においても重要な役割を担っていた．例えば，IIB 行列模型とシルト作用の対応では，弦の世界面の時空間への埋め込みを行列で表したことになる．また，D ブレーンのような時空間の中で広がっ

た物体を行列で表すこともできた．さらに行列正則化は，時空間そのものを行列にいかに埋め込むかを考える際にも基本的な概念となる．

ところで，行列正則化では空間を非可換な行列で表しているのだから，空間座標の非可換性が自然にでてくる．IIB 行列模型をこのようなＤブレーン的非可換背景場のまわりで展開すると非可換場の理論が得られることがわかる．弦理論でのある種のＤブレーンの有効理論が非可換場の理論になることが知られているが，このようにして，これを行列模型で簡単に見ることができる．3 節で非可換球面を考えるが，その際にも行列正則化が基本になる．

ここでは行列正則化の簡単な紹介をする．任意の $n\times n$ 行列の展開を考えよう．まず，トフーフト行列，

$$U=\begin{pmatrix}1&&&\\&\omega&&\\&&\ddots&\\&&&\omega^{n-1}\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\1&&&0\end{pmatrix},\ \omega=e^{2\pi i/n},\tag{2.1}$$

を基底とすれば，任意の $n\times n$ 行列 A は次のように展開できる：

$$A=\sum_{n_x,n_y=1}^{n}\tilde{A}'(\mathbf{n})\ e^{i\pi n_x n_y/n}\ U^{n_x}\ V^{n_y}.\tag{2.2}$$

$n\to\infty$ では，非可換 $\mathbf{R}^2$ 座標 $\hat{x},\hat{y}$ が

$$U=e^{ik_0\hat{x}},\ V=e^{ik_0\hat{y}},\ [\hat{x},\hat{y}]=i\frac{2\pi}{n(k_0)^2}=i\theta\tag{2.3}$$

のように定義でき，展開 (2.2) は非可換平面波での展開となる：

$$A=\sum_{\mathbf{k}}\tilde{A}(\mathbf{k})e^{i(k_x\hat{x}+k_y\hat{y})},\tag{2.4}$$

但し，$k_x=k_0n_x, k_y=k_0n_y$．非可換平面波を通常の平面波に置き換えることにより，行列 A と $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $A(\mathbf{x})$ に対応がつけられる．

$$A\longleftrightarrow A(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}}\tilde{A}(\mathbf{k})e^{i(k_xx+k_yy)}\tag{2.5}$$

行列の積は関数の星積に対応する：

$$\begin{aligned}AB\ &\longleftrightarrow\ (A\star B)(\mathbf{x})\\ &=\ e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^{(A)}\partial_\nu^{(B)}}A(\mathbf{x})B(\mathbf{x})\\ &=\ A(\mathbf{x})B(\mathbf{x})+\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A(\mathbf{x})\partial_\nu B(\mathbf{x})+\cdots\end{aligned}$$

ここで $\theta^{\mu\nu}$ は

$$[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]=i\theta^{\mu\nu}=i\epsilon^{\mu\nu}\theta.\tag{2.6}$$

特に，行列の交換子は $\theta^{\mu\nu}$ の最初の次数でポワッソン括弧に対応する．また，行列のトレースは零モードをひろうので，関数の積分に対応する．（行列模型とシルト作用の対応でこれらのことを用いた．）このように関数を行列に対応させることが行列正則化である．

次に IIB 行列模型において，(2.6) のような背景場を一般に考える．$\theta^{\mu\nu}$ の μ, ν についてのランクが $p+1$ のとき，これは $p+1$ 次元に広がった非可換面であり，ある種の D-p ブレインと解釈できる．IIB 行列模型 (1.1) の行列 A^μ をこの背景場 $\hat{x}^\mu$ とそのまわりの揺らぎ $\hat{a}^\mu$ にわけ，

$$A^\mu = \hat{x}^\mu + \hat{a}^\mu, \tag{2.7}$$

$\hat{a}^\mu$ を非可換平面波で展開すると，

$$[\hat{x}^\mu, \hat{a}] \longleftrightarrow i\theta^{\mu\nu}\partial_\nu a(x) \tag{2.8}$$

などに注意すれば，作用 (1.1) が $p+1$ 次元超対称非可換ヤン・ミルズ理論に対応していることがわかる．このようにして，弦理論におけるある種の D ブレインから非可換幾何が生じることが行列模型でも理解できる．弦理論，非可換幾何，行列模型の関係は近年盛んに研究され，多くのことがわかってきた [8, 9, 10].

再び任意の $n\times n$ 行列の展開を考えよう．今度は $SU(2)$ 代数の n 次元表現 L_i を考える．

$$\hat{x}_i = \alpha L_i \tag{2.9}$$

が非可換 $\mathbf{S}^2$ の座標を表すことは，

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] \;=\; i\alpha\epsilon_{ijk}\hat{x}_k, \tag{2.10}$$

$$(\hat{x}_i)^2 \;=\; \alpha^2\frac{n^2-1}{4}\mathbf{1}_n \tag{2.11}$$

からわかる．ここで，α は非可換パラメター，$\rho = \alpha\sqrt{\frac{n^2-1}{4}}$ は非可換球面の半径をあらわす．ρ を固定し $\alpha\to 0, n\to\infty$ をとれば可換 $\mathbf{S}^2$ が得られ，$\theta = \alpha\rho$ を固定すれば非可換 $\mathbf{R}^2$ が得られる．任意の $n\times n$ 行列 A は非可換球面調和関数 $\hat{Y}_{l,m}$，すなわち $\hat{x}_i$ のトレースレス対称積，で展開でき，$\hat{Y}_{l,m}$ を通常の球面調和関数 $Y_{l,m}(\Omega)$ に置き換えることで，行列 A を球面上の関数 $A(\Omega)$ に対応させることができる：

$$A = \sum_{0\le l\le n-1} A_{lm}\hat{Y}_{l,m} \longleftrightarrow A(\Omega) = \sum_{0\le l<\infty} A_{lm}Y_{l,m}(\Omega) \tag{2.12}$$

行列の積は球面上の関数の星積に対応する．とくに，L_i の随伴演算子は角運動量演算子，すなわちキリングベクトル方向の微分演算子に対応する：

$$\tilde{L}_i A = [L_i, A] \longleftrightarrow \mathcal{L}_i A(x) = -i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k A(x) \tag{2.13}$$

行列のトレースは関数の積分に対応する：

$$\frac{1}{2L+1}\mathrm{tr} \longleftrightarrow \int\frac{d\Omega}{4\pi} \tag{2.14}$$

同じ $n\times n$ 行列を，先ほどはトフーフト行列で展開することでトーラスまたは平面上の関数に対応させ，今回は $SU(2)$ の n 次元表現で展開することで球面上の関数に対応させた．このように展開する基底によって，異なる空間が対応する．つまり 1 つの行列に様々な空間を対応させることができる．そもそも $n\times n$ 行列は n^2 の自由度を持っているのに対し，空間は n 程度の自由度しか持たないので，1 つの行列に様々な空間を埋め込む自由度が含まれているのである．従って，行列で空間や場を記述するためには，行列の中からある部分を取り出す，すなわち自由度を削減する操作をしなければならない．場の理論の正則化として行列模型を用いるのならば，何らかの人工的操作を行う必要がある．弦理論としての行列模型において空間が実現されるためには，自由度が削減された状態の方が力学的に安定になることを示す必要がある．

3　カイラル・フェルミオン

1節の最後に述べたように，IIB 行列模型で4次元カイラル・フェルミオンを実現するためには，非自明なインデックスをもつ余次元空間がより安定に存在する必要がある．そのためにはまず，非自明な位相不変量をもつ配位が非自明なインデックスを与える定式化が必要である．そこで，この節ではまず，格子理論で発達したギンスパーグ・ウィルソン関係式 [11] を用いて，有限自由度の行列模型でカイラル対称性とインデックス定理が厳密に成り立つディラック演算子を定式化する．この定式化は一般に任意の非可換空間上で行えるが，ここでは具体的に2節の後半で紹介した非可換球面を例にとって説明する．次に，行列模型で非自明な位相不変量をもつ配位，非可換球面上でのトフーフト・ポリャコフ・モノポール，を構成する．最後に，チャーン・サイモン項をもつ行列模型で，この位相的に非自明な配位の方が自明な配位より安定になることを示すことにより，非自明なインデックスの自発的生成の機構を提示し，行列模型での4次元カイラル・フェルミオンの実現の可能性を示す．

3.1　ギンスパーグ・ウィルソン・ディラック演算子 [12]

まず，2つのカイラリティー演算子を定義する：

$$\Gamma^R = a\left(\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{H}{\sqrt{H^2}}, \tag{3.2}$$

但し，

$$H = a\left(\sigma_i A_i + \frac{1}{2}\right), \tag{3.3}$$

$$A_i = L_i^L + \rho a_i^L, \tag{3.4}$$

$a = 2/n$ は非可換空間での格子間隔の対応物，σ_i はパウリ行列，L_i は $SU(2)$ 代数の n 次元表現である．上付き添え字 $R(L)$ は行列の右 (左) から作用する演算子であることを意味する．a_i は3次元でのゲージ場で，A_i はゲージ共変に定義されている．$\Gamma^R, \hat{\Gamma}$ は，

$$(\Gamma^R)^\dagger = \Gamma^R,\ (\hat{\Gamma})^\dagger = \hat{\Gamma},\ (\Gamma^R)^2 = (\hat{\Gamma})^2 = 1, \tag{3.5}$$

を満たし，可換極限で可換球面上のカイラリティー演算子，$\sigma_i x_i/\rho$，に一致する．

次に，ギンスパーグ・ウィルソン・ディラック演算子を定義する：

$$D_{\rm GW} = -a^{-1}\Gamma^R[1 - \Gamma^R\hat{\Gamma}] \tag{3.6}$$

これは可換極限で可換球面上のディラック演算子に一致する．また，定義 (3.6) より，ギンスパーグ・ウィルソン関係式

$$\Gamma^R D_{\rm GW} + D_{\rm GW}\hat{\Gamma} = 0 \tag{3.7}$$

が満たされることがすぐにわかる．よって，インデックス定理

$${\rm Index}(D_{\rm GW}) \equiv (n_+ - n_-) = \frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma^R + \hat{\Gamma}) \tag{3.8}$$

が容易に示せる．ここで，$n_\pm$ は $D_{\rm GW}$ の零モードで，カイラリティーが ± 1 であるものの数である（零モード空間では $\Gamma^R = \hat{\Gamma}$）．

(3.8) の右辺，$\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma^R + \hat{\Gamma})$，は以下の性質を持つので，位相不変量としてふさわしい：まず，$\Gamma^R, \hat{\Gamma}$ が符号演算子の形をしているので，これは整数値をとる．また，可換極限で，可換球面上での位相不変量，$\frac{\rho^2}{4\pi}\int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i F_{jk}$，に一致する．さらに，次副節で自発的に対称性の破れたゲージ理論で位相的に非自明な配位を構成するが，この位相不変量を少し変更することで，たしかに非自明な配位が非自明な位相不変量をもつことを示せる．

3.2 位相的に非自明な配位 [13]

次のような，(3.4) で定義した A_i が

$$A_i = \begin{pmatrix} L_i^{(n+m)} & \\ & L_i^{(n-m)} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

となるような，一連の配位を考える．但し，$L_i^{(n\pm m)}$ は $SU(2)$ 代数の $(n \pm m)$ 次元表現である．特に $m = 0$ の場合は，2 枚の重なった非可換球面を表し，非可換球面上の $U(2)$ ゲージ理論を与える．$|m| = n$ の場合は，1 枚の非可換球面であり，非可換球面上の $U(1)$ ゲージ理論を与える．

$|m| = 1$ の場合は，適当なユニタリ変換で，

$$A_i = L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2} \tag{3.10}$$

と等価である．定義 (3.4) から，第 1 項は空間，第 2 項はゲージ場を表す．可換極限でこのゲージ場は

$$a_i'^a = \frac{1}{\rho^2}\epsilon_{ija} x_j \tag{3.11}$$

$$\phi^a = \frac{1}{\rho} n^a \tag{3.12}$$

となる．但し，a_i' は球面に接する方向のゲージ場，ϕ は球面に垂直方向のゲージ場，つまり，球面上のスカラー場である．これはまさに，トフーフト・ポリャコフ・モノポールの配位に一致している．

一般の m の場合は，($|m| \ll n$ では，) (3.9) は位相不変量 $-|m|$ を持つ非自明な配位に対応することを以下に示す．自発的にゲージ対称性の破れた理論での位相不変量は

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r[\phi'(\Gamma^R + \hat{\Gamma})] \tag{3.13}$$

と定義するのがよい．但し，

$$\phi' = \frac{1}{n|m|}\left(A_i^2 - \frac{n^2 + m^2 - 1}{4}\right) \tag{3.14}$$

は可換極限で $\sum_a (\phi'^a)^2 = 1$ と規格化されたスカラー場となる．(3.13) は可換極限で

$$\frac{\rho^2}{8\pi}\int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \phi'^a F_{jk}^a \tag{3.15}$$

となり，破れず残った $U(1)$ ゲージ群方向の磁荷に一致する．配位 (3.9) では位相不変量 (3.13) が $-|m|$ となることが，代数的計算により示せる．

3.3 インデックスの自発的生成 [14]

ここではモノポール配位 (3.9) のダイナミクスを考える．これらは，ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型

$$S_{\mathrm{YMCS}} = \frac{\alpha^4}{g^2}\, tr\left(-\frac{1}{4}\,[A_i, A_j]^2 + \frac{2}{3}\, i\ \epsilon_{ijk} A_i A_j A_k\right) \tag{3.16}$$

での古典解となっており，古典作用

$$W_0 = -\frac{\alpha^4}{12g^2}\left(n^3 - n + 3m^2 n\right) \tag{3.17}$$

をもつ．これは $|m|$ とともに単調減少するので，$m = 0$ の配位（非可換球面上の $U(2)$ ゲージ理論）は不安定で，$|m| = 0 \to 1 \to 2 \to \cdots$ と雪崩式に，位相的に非自明な配位に崩壊していき，最後は $|m| = n$ の配位（非可換球面上の $U(1)$ ゲージ理論）に落ち着く．このような性質は量子補正を考慮しても変わらず，真空の構造は古典レベルで決まっている．さらに，$|m| = 0 \to 1$，および $|m| = 1 \to 2$ などの崩壊過程をより詳しく調べると，興味深い現象が見えるが，詳細は文献 [14] に譲る．

この模型 (3.16) では，最終的に $|m| = n$ の 1 枚の非可換球面（$U(1)$ ゲージ理論）という幾何学的に異なる配位にまで崩壊してしまうが，初期の崩壊過程（$|m| = 0 \to 1 \to 2 \to \cdots$）は位相的に非自明な配位 ($|m| \geq 1$) が自明な配位 ($m = 0$) よりも安定であることを意味する．このように位相的に非自明な配位がダイナミカルに好まれ，インデックスが自発的に生成される．$|m| \ll n$ で崩壊が止まるような模型を考えれば，より満足のいく例示ができるだろう．さらに，より現実的な模型にこの機構を適用し，余次元空間が自発的にインデックスもつことを示せば，我々の住む 4 次元時空にカイラル・フェルミオンを実現することができる．

一方，1 節での行列模型の問題点 2 でも述べたように，いかに 4 次元時空が行列模型のなかで実現され，いかに場がその時空上で伝播すのかを考えることは重要な課題である．これにより，このカイラル・フェルミオンがいかに時空を伝播するかがわかってはじめて，行列模型でのカイラル・フェルミオンの定式化ができたことになる．これは有限の大きさの行列でも行えるので，正則化された理論になる．もっとも，すでに有限自由度の格子理論でギンスパーグ・ウィルソン関係式を用いたカイラル・フェルミオンの定式化に成功している．しかし，行列模型で上記のことが行えれば，弦理論でのカイラル・フェルミオンの実現についての理解を深めることができるのである．

参考文献

[1] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model: A conjecture," Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [arXiv:hep-th/9610043].

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [arXiv:hep-th/9612115].

[3] For a review, H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, "IIB matrix model," Prog. Theor. Phys. Suppl. **134**, 47 (1999) [arXiv:hep-th/9908038].

[4] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "String field theory from IIB matrix model," Nucl. Phys. B **510**, 158 (1998) [arXiv:hep-th/9705128].

[5] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, "Space-time structures from IIB matrix model," Prog. Theor. Phys. **99**, 713 (1998) [arXiv:hep-th/9802085].

[6] J. Nishimura and F. Sugino, "Dynamical generation of four-dimensional space-time in the IIB matrix model," JHEP **0205**, 001 (2002) [arXiv:hep-th/0111102]. H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, "Mean field approximation of IIB matrix model and emergence of four dimensional space-time," Nucl. Phys. B **647**, 153 (2002) [arXiv:hep-th/0204240]. H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara, "Improved perturbation theory and four-dimensional space-time in IIB matrix model," Prog. Theor. Phys. **109**, 115 (2003) [arXiv:hep-th/0211272].

[7] H. Aoki, S. Iso and T. Suyama, "Orbifold matrix model," Nucl. Phys. B **634**, 71 (2002) [arXiv:hep-th/0203277].

[8] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, "Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori," JHEP **9802**, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162].

[9] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909**, 032 (1999) [arXiv:hep-th/9908142].

[10] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, "Noncommutative Yang-Mills in IIB matrix model," Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) [arXiv:hep-th/9908141].

[11] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, "A Remnant Of Chiral Symmetry On The Lattice," Phys. Rev. D **25**, 2649 (1982). P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, "The index theorem in QCD with a finite cut-off," Phys. Lett. B **427**, 125 (1998) [arXiv:hep-lat/9801021]. M. Luscher, "Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation," Phys. Lett. B **428**, 342 (1998) [arXiv:hep-lat/9802011]. F. Niedermayer, "Exact chiral symmetry, topological charge and related topics," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73**, 105 (1999) [arXiv:hep-lat/9810026].

[12] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, "Ginsparg-Wilson relation, topological invariants and finite noncommutative geometry," Phys. Rev. D **67**, 085005 (2003) [arXiv:hep-th/0209223].

[13] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, "Ginsparg-Wilson relation and 't Hooft-Polyakov monopole on fuzzy 2-sphere," Nucl. Phys. B **684**, 162 (2004) [arXiv:hep-th/0312199].

[14] H. Aoki, S. Iso , T Maeda and K. Nagao, "Dynamical generation of a nontrivial index on the fuzzy 2-sphere," accepted in Phys. Rev. D [arXiv:hep-th/0412052].