

T.
(043) 53
B 434
2024

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

SIMETRÍAS GENERALIZADAS Y CORRIENTES DE NOETHER

Valentin Benedetti
Doctorando

Dr. Horacio Casini
Director

Miembros del Jurado

Dr. Gerardo Aldazabal (Instituto Balseiro)
Dr. Diego M. Hofman (University of Amsterdam)
Dr. Gonzalo Torroba (Instituto Balseiro)

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov CAB-IB)

Inventario 24901
27/05/2024
Biblioteca Leo Falicov

A mi mamá.

Índice de símbolos

ABJ: Adler–Bell–Jackiw

ADM: Arnowitt-Deser-Misner

AdS: anti-de Sitter

AQFT: teoría algebraica cuántica de campos (algebraic quantum field theory)

CFT: teoría conforme de campos (conformal field theory)

CFTs: teorías conformes de campos (conformal field theories)

CM: Coleman-Mandula

DHR: Doplicher-Haag-Roberts

GFF: campo libre generalizado (generalized free field)

GR: relatividad general (general relativity)

HD: Haad-Dirac

HDV: violaciones de dualidad de Haag (Haag duality violations)

IR: infrarrojo (infrared)

OPE: expansión en producto de operadores (operator product expansion)

QCD: cromodinámica cuántica (quantum chromodynamics)

QED: electrodinámica cuántica (quantum electrodynamics)

QFT: teoría cuántica de campos (quantum field theory)

QFTs: teorías cuánticas de campos (quantum field theories)

QG: gravedad cuántica (quantum gravity)

RG: grupo de renormalización (renormalization group)

SSB: ruptura espontánea de simetría (spontaneous symmetry breaking)

UV: ultravioleta (ultraviolet)

TL: lazo de t' Hooft (t' Hooft loop)

WL: lazo de Wilson (Wilson loop)

WW: Weinberg-Witten

WZW: Wess-Zumino-Witten

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Resumen	xi
Abstract	xiii
1. Introducción	1
2. Álgebras y regiones en QFT	7
2.1. Axiomas y Álgebras en QFT	7
2.1.1. Axiomas de Wightman	7
2.1.2. Álgebras de von Neumann en QFT	10
2.2. Simetrías Generalizadas y Dualidad de Haag	16
2.2.1. Aditividad vs Dualidad de Haag	17
2.2.2. Clases de equivalencia HDV no locales	19
2.2.3. Las simetrías generalizadas vienen en pares duales	20
2.2.4. Redes de Haag-Dirac	22
2.2.5. Completitud	23
2.2.6. Simetrías globales y regiones con π_0 no trivial	24
2.2.7. Simetrías 1-forma y regiones con π_1 no trivial	26
2.2.8. Reglas de fusión para clases HDV	33
2.3. Líneas genuinas y superficies topológicas como operadores HDV	36
2.3.1. ¿Ambigüedades en el ordenamiento temporal euclídeo?	40
2.3.2. Las (engañosas) lecciones de los orbifolds y $D = 2$	42
2.3.3. Variedades compactas	43
2.4. Discusión del capítulo	46
3. Simetrías Generalizadas del Gravitón	49
3.1. Gravedad Linealizada	51
3.1.1. Simetría de Gauge: difeomorfismos lineales	52

3.1.2. Vínculos, simetrías globales y cargas conservadas	53
3.1.3. Gravedad linealizada en la formulación ADM	56
3.1.4. Espacio de fases invariante de gauge del gravitón	57
3.1.5. Formulación dual del campo gravitatorio linealizado	59
3.2. Operadores topológicos para el gravitón	61
3.2.1. Un nuevo conjunto de cargas conservadas	62
3.2.2. Álgebras de operadores topológicos para Maxwell	63
3.2.3. Álgebras de operadores topológicos para el gravitón	68
3.2.4. Comutador de flujos para el caso de dos cuadrados	72
3.3. Fractones y completitud del espectro	74
3.3.1. Fractones y teorías de gauge tensoriales	75
3.3.2. Líneas de Wilson para el gravitón	79
3.4. Discusión del capítulo	83
4. Simetrías Generalizadas de Gravitones Generalizados	85
4.1. Gravitones generalizados	86
4.2. Simetrías generalizadas para gravitones de Einstein-Hilbert	91
4.2.1. Gravitones de Fierz-Pauli en $D = 4$	92
4.2.2. Garvitones de Fierz-Pauli en $D > 4$	95
4.2.3. Buscando $(D - 2)$ -formas conservadas en $D > 4$	99
4.3. Simetrías generalizadas para gravitones de curvatura superior	101
4.4. Simetrías generalizadas definen el gravitón generalizado	106
4.5. Discusión del capítulo	107
5. Simetrías Generalizadas y el teorema de Noether	109
5.1. Simetrías generalizadas y corrientes de Noether	112
5.1.1. Transformaciones de punto sobre etiquetas de clases	112
5.1.2. Twists y sus diferentes tipos	114
5.1.3. Twists para simetrías espacio-temporales continuas	117
5.1.4. Simetrías generalizadas y cargas de Noether	117
5.1.5. Clases HDV no invariantes ante una simetría continua	119
5.2. Propiedades de los twists y twists estándar	122
5.2.1. Twists estándar construidos a partir de la split property	123
5.2.2. Estructura de los operadores no locales en la buffer zone	127
5.2.3. Twists verdaderamente aditivos	128
5.2.4. Existencia de twists aditivos y completos	130

5.2.5. Concatenación de twists y twists aditivos concatenables	132
5.2.6. Concatenación arbitraria de twists	135
5.3. Ejemplos	137
5.3.1. Orbifolds	137
5.3.2. Campos de Maxwell con rotación de sabor	144
5.3.3. Simetría de dualidad electromagnética	151
5.3.4. Gravitón de Fierz-Pauli en $D = 4$	152
5.4. Teorema Weinberg-Witten	157
5.4.1. Generalizaciones	158
5.5. Discusión del capítulo	161
6. Cargas en la completación UV de una electrodinámica Neutra 163	
6.1. Simetrías de forma no compactas	166
6.1.1. Características de una simetría de forma no compacta	166
6.1.2. Simetrías de forma no compactas clásicas	169
6.2. Funciones de dos puntos	173
6.2.1. Biformas y notación	173
6.2.2. Estructuras tensoriales	174
6.2.3. Conmutadores de flujos	178
6.2.4. Positividad	182
6.3. Simetrías de forma invariantes de escala	184
6.3.1. Simetrías de forma no compactas invariantes de escala	184
6.3.2. Una simetría de forma continua invariante de escala	186
6.4. Flujo del grupo de Renormalización	189
6.4.1. Suposiciones sobre el flujo del RG y el límite UV	190
6.4.2. Filtrado de campos libres en el UV	192
6.5. Discusión del capítulo	199
7. La anomalía ABJ como simetría $U(1)$ y el teorema de Noether 201	
7.1. La anomalía ABJ como simetría $U(1)$	203
7.1.1. Electrodinámica con piones	204
7.1.2. Origen de la cuantización de la anomalía	211
7.1.3. Simetría quiral en QED no masiva	213
7.1.4. Correspondencia de anomalías y teorema de Goldstone	218
7.1.5. Implementación local de la simetría	220
7.2. Simetrías no invertibles y literatura reciente	221
7.2.1. Discusión de literatura reciente sobre la anomalía ABJ	222
7.2.2. Variedades compactas con topología no trivial	225
7.2.3. Hacia un teorema de reconstrucción generalizado	235

7.3. Reflexiones sobre el teorema de Noether y otros contra-ejemplos falsos	238
7.4. Discusión del capítulo	241
8. Discusión	243
A. Generalized Free Fields	253
A.1. Ejemplo: campos libres independientes	254
A.2. Generalized Free Fields conformes	256
A.3. Álgebras holográficas	258
A.4. Discusión del apéndice	262
B. Teorema Weinberg-Witten	263
C. Efecto Witten y simetría quiral	269
C.1. Electrodinámica con término θ	269
C.2. Efecto Witten	271
C.3. Simetría quiral en la integral de caminos	273
C.4. Operadores de línea en la integral de camino	277
Publicaciones	299
Agradecimientos	301

Resumen

Simetrías generalizadas y corrientes de Noether:

Explicamos que si las simetrías generalizadas están cargadas bajo una simetría global continua, entonces dicha simetría no puede ser implementada por una corriente de Noether. Utilizamos este resultado para volver a derivar el teorema de Weinberg-Witten en el contexto de la QFT local. Aplicamos estas ideas a distintas teorías con gravitones mostrando cómo las teorías generales de la gravedad exhiben simetrías de 1-forma emergentes en el IR que están cargadas bajo el grupo de Poincaré y discutimos las implicaciones de estos resultados en relación con el principio de completitud en la gravedad cuántica. Además, si las simetrías generalizadas están cargadas ante un grupo continuo, deben estar generadas por clases duales continuas. En este contexto, demostramos que una teoría con una simetría de forma no compacta es necesariamente no masiva y libre. Por lo tanto, estos modelos no pueden completarse en el UV de manera interactuante sin romper estas simetrías generalizadas no compactas a una compacta. Esta ruptura requiere la existencia de operadores cargados que aparecen a una cierta escala de energía. Por otro lado, encontramos modelos interactuantes no triviales donde la simetría continua actúa sobre las clases no locales. Estos tienen anomalías ABJ, donde vemos que la existencia de simetrías 1-forma cargadas ante la acción de la simetría quiral impiden la existencia una corriente que implemente dicha simetría. Es decir, la simetría quiral puede entenderse como una simetría $U(1)$ sin corriente de Noether, que cambia las clases no locales asociadas a la simetría 1-forma. En este caso, las simetrías generalizadas describen un grupo compacto. Esto nos permite entender y unificar características fundamentales de las teorías anómalas en términos más convencionales basados en simetrías internas. La compatibilidad del ciclo correspondiente a las simetrías generalizadas con acción no trivial de la simetría quiral requiere la cuantización del coeficiente de la anomalía ABJ, y podemos derivar la existencia de excitaciones cargadas en el IR de la presencia de la simetría todas las escalas.

Palabras clave: SIMETRÍAS GENERALIZADAS, DUALIDAD DE HAAG, CORRIENTES DE NOETHER, GRAVITONES, ANOMALÍA ABJ

Abstract

Generalized symmetries and Noether currents:

We explain that if generalized symmetries are charged under a continuous global symmetry, then such a symmetry cannot be implemented by a Noether current. We use this result to re-derive the Weinberg-Witten theorem in the context of local QFT. We apply these ideas to different theories with gravitons by showing how general theories of gravity exhibit emergent 1-form symmetries in the IR that are charged under the Poincaré group and discuss the implications of these results in relation to the completeness principle in quantum gravity. Furthermore, if the generalized symmetries are charged under the action of a continuous group, they must be generated by a continuum of dual classes. In this context, we show that a theory with a noncompact form symmetry is necessarily massless and free. Therefore, these models cannot be completed in the UV in an interacting manner without breaking these generalized noncompact symmetries to a compact one. This breaking requires the existence of charged operators appearing at a certain energy scale. On the other hand, we find non-trivial interacting models where the continuous symmetry acts on the non local classes. These have ABJ anomalies, where we see that the existence of charged 1-form symmetries under the action of the chiral symmetry prevents the existence of a current that implements such a symmetry. That is, the chiral symmetry can be understood as a $U(1)$ symmetry without Noether current, which changes the non local classes associated with the 1-form symmetry. In this case, the generalized symmetries describe a compact group. This allows us to understand and unify fundamental features of anomalous theories in more conventional terms based on internal symmetries. The compatibility of the cycle corresponding to the generalized symmetries with nontrivial action of the chiral symmetry requires the quantization of the ABJ anomaly coefficient, and we can derive the existence of charged excitations in the IR from the presence of the symmetry at all scales.

Keywords: GENERALIZED SYMMETRIES, HAAG DUALITY, NOETHER CURRENTS, GRAVITONS, ABJ ANOMALY

Capítulo 1

Introducción

El concepto de simetría desempeña un papel central en el estudio de la teoría cuántica de campos (QFT). Para empezar, la simetría global de Poincaré es un requerimiento mínimo para la descripción de una teoría de partículas relativistas [1]. A su vez, el estudio de simetrías internas, ya sean exactas o emergentes a bajas energías, nos ha permitido obtener muchos de los resultados fundamentales que definen el éxito y aceptación universal del Modelo Estándar.

Dado un modelo particular, conocer las simetrías siempre es deseable, pero suele ser una tarea difícil especificar todas ellas. En este contexto, son fundamentales los teoremas del tipo “no-go” que restringen el espacio de simetrías que puede exhibir una teoría. Tal vez, el más famoso de estos teoremas es el de Coleman-Mandula [2], el cual acota las simetrías posibles de una matriz S. En particular, establece que este grupo de simetrías no puede ser mas grande que un producto tensorial del grupo de Poincaré con algún grupo de simetría interno. En otras palabras, prohíbe la mezcla entre los generadores de Poincaré y los de las demás simetrías de la teoría. Posiblemente, la importancia del teorema de Coleman-Mandula se basa en que nos ha ayudado a descartar distintas versiones previas del modelo estándar y restringe sus posibles extensiones [3].

No obstante, existen distintos tipos de simetrías, que no son alcanzables por el teorema de Coleman-Mandula. Históricamente, el ejemplo más característico de este tipo es la supersimetría, la cual escapa al teorema debido a que es generada por operadores de carácter fermiónico, las llamadas supercargas [4, 5]. Más aún, recientemente, la noción de simetría global se ha ampliado a la de simetrías generalizadas para incluir simetrías de forma, simetrías no invertibles, entre otras [6]. Hasta que punto estas simetrías generalizadas son alcanzadas por un teorema “no-go” del tipo Coleman-Mandula es desconocido hoy en día.

Dentro de estas simetrías generalizadas, uno de los conceptos que ha recibido más atención es el de simetrías k -forma. Este se remonta a lo expuesto por ‘t Hooft en su artículo fundacional [7], pero recientemente se ha desarrollado más firmemente en [8].

La idea principal es que los operadores de simetría no viven necesariamente en hipersuperficies de codimensión uno, sino que pueden vivir en hipersuperficies de codimensión dos/tres/.... Por otra parte, los operadores cargados bajo la simetría no tienen por qué ser operadores locales: también pueden ser operadores de línea/superficie/.... Esta idea es natural desde el punto de vista de teoría de cuerdas, donde los objetos cargados no necesariamente son partículas, sino que pueden ser objetos extendidos como branjas de mayor dimensión. Sin embargo, este tipo de simetrías también aparecen QFTs usuales, siendo un ejemplo característico los lazos de Wilson o 't Hooft en las teorías gauge.

Podríamos decir que una de las motivaciones más importantes detrás de la generalización del concepto de simetrías es que el paradigma de Landau [9] se extiende de forma natural para incluir un zoológico mucho mayor de teorías físicas, incluidas las teorías gauge. Desde una perspectiva más moderna -o de bootstrap- podemos utilizar el conjunto de simetrías k -forma para caracterizar de manera robusta ciertas propiedades de una QFT fuera de los regímenes débilmente acoplados. Por lo tanto, la caracterización cuidadosa de estas simetrías generalizadas nos permite entender aspectos no perturbativos.

Otro de los núcleos del entendimiento de las simetrías en QFT es, por supuesto, el teorema de Noether [10]. Este predice la existencia de una corriente local conservada cuando una acción es invariante bajo un grupo de simetría continuo. Sin embargo, una cuestión pendiente desde hace tiempo es determinar en qué medida, o bajo qué condiciones este teorema se cumple incluso para simetrías globales usuales. En la mayoría de los casos esto es así, y la presencia de una simetría continua global implica la existencia de una corriente local conservada. Sin embargo, esto no siempre es correcto y conocemos varios ejemplos de simetrías globales que no pueden ser implementadas por una corriente de Noether.

Un contraejemplo reconocido es el de la simetría quiral. En ciertas teorías de gauge como por ejemplo, la electrodinámica cuántica con fermiones no masivos, encontramos una corriente conservada a nivel clásico para dicha simetría que actúa de forma distinta en las dos quiralidades de los fermiones. A nivel cuántico sin embargo la corriente correspondiente deja de ser conservada, siendo esta la afirmación estándar de que la teoría posee una anomalía Adler-Bell-Jackiw [11, 12]. Aunque este resultado es crucial para la física de partículas, ya que permite describir el decaimiento del pion neutro en las teorías efectivas de bajas energías de la cromodinámica cuántica, es algo inconveniente desde el punto de vista del teorema de Noether. Esto se debe a que, si bien la conservación de la corriente quiral ya no es válida a nivel cuántico, la acción sigue siendo invariante ante dicha simetría. En este sentido, hasta que punto la simetría quiral se conserva a nivel cuántico y cual es su naturaleza se ha discutido extensivamente en la literatura, con propuestas que van desde la conservación de la simetría [11, 13], a

que parte de ella se rompe [14] o incluso que se vuelve no invertible [15, 16].

No obstante, para encontrar contraejemplos del teorema de Noether no necesitamos remitirnos exclusivamente a anomalías cuánticas. En efecto, muchos de ellos se originan a partir de otro teorema “no-go” a priori no relacionado. Este es el teorema Weinberg-Witten [17] que afirma que las simetrías ante las cuales partículas sin masa con helicidad mayor o igual a uno están cargadas no pueden estar generadas por una corriente de Noether. Tal vez de forma aun más patológica, este teorema incluye una segunda afirmación. Esta indica que la presencia de partículas sin masa con helicidades mayores que uno, prohíbe existencia de un tensor de energía-momento. En este sentido, el teorema nos permite comprender la ausencia de ciertas partículas no masivas como una condición necesaria para la definición de una corriente de Noether tanto para simetrías internas como para simetrías espacio-temporales. En otras palabras, cuando encontremos partículas no masivas con helicidad mayor o igual a uno en el espectro, es posible encontrar excepciones del teorema de Noether.

En una dirección diferente, esta última parte del teorema parece tener implicaciones directas en la gravedad cuántica. En particular, se interpreta típicamente como un obstáculo para definir la gravedad cuántica como una QFT, o equivalentemente a encontrar una QFT interactuante con un graviton emergente en el IR. Por esta razón, el teorema de Weinberg-Witten se considera una prueba contundente de que la cuantización de la gravedad debe seguir una ruta diferente. Sin embargo, existe un posible escape para esta conclusión, ya que aún se desconoce si puede existir una QFT interactuante sin tensor de energía-momento. Si tal estructura pudiera existir, aún cabría contemplar la posibilidad de una realización de la gravedad cuántica en QFT.

En el contexto de la gravedad cuántica las simetrías también tienen un rol protagónico. Un teorema popular crucial es la ausencia de simetrías generalizadas en gravedad cuántica [18, 19]. Recientemente ha habido un creciente interés en tratar de entender esta idea, y su relación con la completitud de las cargas eléctricas/magnéticas en el espectro de cualquier teoría gauge acoplada a la gravedad [14, 20–22]. Pero la relación entre las simetrías generalizadas y la completitud del espectro es a priori una afirmación puramente de QFT, y podemos intentar avanzar desde dicho punto de vista. De hecho, para QFTs con una dada estructura de simetrías generalizadas, se han construido ejemplos de este proceso de completitud introduciendo un número suficiente de operadores cargados. Sin embargo, todavía no está claro qué características de baja energía fuerzan la aparición de cargas a cierta energía.

Durante esta tesis nuestro objetivo es describir avances en estos frentes y, en particular, comenzar a delinejar un hilo conductor mostrando como todas estas cuestiones mencionadas anteriormente se relacionan entre sí. En el centro de estas ideas encontramos la noción de simetrías generalizadas. Por ende, en el capítulo 2 comenzaremos revisando brevemente las propiedades de las simetría generalizadas en QFT. Tomare-

mos una formulación diferente a la estándar de la literatura. Esto será en términos de álgebras de observables asociadas a regiones del espacio-tiempo [22, 23]. El objetivo principal de dicho capítulo es establecer las convenciones y, lo que es más importante, revisar en qué sentido preciso las simetrías generalizadas se relacionan con distintas asignaciones posibles de álgebras para una región del espacio-tiempo.

Una vez desarrollado este nuevo enfoque, es natural preguntarse si podemos aprender algo de la interacción entre las simetrías generalizadas y la gravedad. En esta dirección, tomaremos un punto de partida conservador. Consideraremos una teoría de campos efectiva, donde describimos a la gravedad mediante la dinámica de campos de espín dos en el espacio-tiempo de Minkowski. Dentro de este contexto, en el capítulo 3, trabajaremos el escenario más simple que implica el estudio de las simetrías generalizadas asociadas con el gravitón de Einstein. Luego, en el capítulo 4 generalizaremos estas ideas a teorías linealizadas provenientes de términos de mayor curvatura. Un resultado clave de estos estudios es que las simetrías generalizadas del gravitón están cargadas bajo simetrías espacio-temporales. Por un lado, esta observación parece contradecir un posible teorema Coleman-Mandula para simetrías generalizadas. Por otro, veremos que proporciona una relación intrigante entre la interacción gravitatoria y la física de los fractones.

Motivados por el ejemplo del gravitón, en el capítulo 5 buscaremos entender, en un marco más general, las consecuencias de que las simetrías generalizadas estén cargadas ante otro grupo global de simetría de la teoría. En concreto, demostraremos que en los casos donde encontramos una simetría global continua que pueda transformar a los operadores no locales asociados a una dada simetría generalizada, no puede existir una corriente de Noether para dicha simetría global. Veremos que este resultado redirige y, en algunas direcciones, generaliza el teorema Weinberg-Witten desde una perspectiva diferente, es decir, sin recurrir a la matriz S . Esto es evidente para el caso del gravitón y sus simetrías generalizadas cargadas ante el grupo de Poincaré. Además, esta nueva condición necesaria para la existencia de una corriente, nos permite comenzar a caracterizar el espacio de QFTs con una simetría global no generada por una corriente de Noether. Durante este capítulo también describiremos como las simetrías globales pueden ser implementadas localmente en la ausencia de una corriente.

Dado este resultado, podríamos cuestionar qué tiene de especial este espacio de teorías. En este sentido, mostramos que si las simetrías de forma asociadas a una región del espacio-tiempo están cargadas bajo una simetría global continua, estas deben formar a un grupo continuo. Lo mismo debe suceder en la región complementaria. En el capítulo 6, estudiaremos el caso en el que estos grupos son no compactos. A partir de un cuidadoso análisis de las restricciones de positividad y la existencia de un punto fijo UV invariante de escala, demostramos que las teorías con estas simetrías de forma no compactas deben tener un sector libre y sin masa. Curiosamente, las simetrías de

forma superior no compactas aparecen, a nivel clásico, en formulaciones lagrangianas de teorías de campos interactuantes que no son renormalizables. Algunos ejemplos son la electrodinámica neutra, como la electrodinámica no lineal o un fotón acoplado magnéticamente a un campo de neutrones, y también las teorías efectivas de baja energía de los modos de Goldstone. Nuestro resultado predice que la completación UV de estas teorías debe implicar necesariamente la ruptura de las simetrías generalizadas no compactas. Dicha ruptura requiere la existencia de operadores cargados a una cierta escala de energía. Dado que las simetrías de forma están bien definidas a nivel clásico, esta obstrucción puede verse como una nueva forma de anomalía cuántica. De otra manera, podemos entender este resultado como una derivación de parte del principio de completitud anteriormente mencionado aplicable a estos casos.

Durante el capítulo 7 analizamos el otro caso, en el que las simetrías generalizadas pueden asociarse a un grupo compacto. El ejemplo fundamental es el de las teorías de gauge con anomalías quirales. Veremos que en estos casos tenemos una simetría de forma generada por los lazos de Wilson y 't Hooft, donde estos últimos están cargados ante la acción de la simetría quiral. De esta forma, mostraremos como dicha simetría puede entenderse como una simetría interna $U(1)$ convencional con la única particularidad de que transforma los sectores no locales de la simetría 1-forma. Por ello, no puede ser implementada por una corriente de Noether. Esto se debe a la existencia de simetrías generalizadas cargadas ante la acción de la simetría. Más aún, veremos como la necesidad de compatibilizar los ciclos de la simetría quiral y la simetría generalizada nos permiten entender la cuantización del coeficiente de la anomalía y daremos argumentos para explicar la correspondencia entre anomalías IR y UV (“anomaly matching”), y la validez del teorema de Goldstone para estos casos. Es decir, encontramos que la acción non trivial de la simetría $U(1)$ sobre las clases no locales permite explicar de manera simple y unificada las características más sobresalientes de las teorías anómalas.

Terminamos en el capítulo 8 con una discusión de otras ideas o conjeturas que surgieron durante el desarrollo de esta tesis y quedan como caminos de investigación hacia el futuro. Esto incluye un posible camino hacia una caracterización completa de las QFT que violan el teorema de Noether, comentarios sobre invariancia de escala e invariancia conforme, posibles demostraciones/generalizaciones del teorema con el teorema Coleman-Mandula en términos de física local (en lugar de la matriz S), e intrigantes conexiones con la completación UV de la teorías con gravitones en el IR.

Capítulo 2

Álgebras y regiones en QFT

El propósito principal de este capítulo es presentar algunas definiciones y resultados que nos serán útiles en esta tesis. En particular, desarrollaremos la noción de simetrías generalizadas desde el punto de vista de la teoría algebraica de campos. Como mencionamos anteriormente dichas simetrías se manifiestan a partir de la no unicidad en la asignación de álgebras a regiones de topología no trivial.

En la sección 2.1 comenzaremos revisando los axiomas de Wightman y como estos se traducen al lenguaje de álgebras asociadas a regiones. Luego, en la sección 2.2 exploraremos exhaustivamente el problema de asignación de álgebras a regiones en teorías con simetrías generalizadas. Veremos como dichas simetrías emergen en el contexto de la teoría algebraica y que propiedades tienen. Finalmente, en la sección 2.3, compararemos nuestro enfoque con el usualmente presentado en la literatura de simetrías generalizadas.

2.1. Axiomas y Álgebras en QFT

En esta sección enunciaremos los axiomas de Wightman, entendiéndolos como los requerimientos mínimos para definir una QFT. Luego, traduciremos dichos axiomas al lenguaje Haag-Araki, es decir, el de álgebras asociadas a regiones del espacio tiempo. Veremos que las propiedades mínimas asociadas a estas álgebras pueden ser extendidas y como las simetrías generalizadas emergen generando distintas posibilidades para esta elección.

2.1.1. Axiomas de Wightman

Durante varios momentos de esta tesis buscaremos probar cuestiones formales en QFT, por eso empezaremos definiendo que entendemos por QFT. Con este propósito durante la década del 50 se introdujeron los axiomas de Wightman como requerimientos mínimos. Podemos escribir los postulados fundamentales, siguiendo [1], como

- (a) **Supuestos sobre el espacio de Hilbert y grupo de Poincaré:** Tenemos un espacio de Hilbert \mathcal{H} que contiene una representación unitaria del grupo de Poincaré. En dicho espacio \mathcal{H} existe exactamente un estado (único salvo una fase constante) conocido como el vacío físico, que es invariante bajo todos los elementos del grupo de Poincaré actuando en la representación correspondiente. En particular, podemos escribir las traslaciones como $U(b) = e^{ip^\mu b_\mu}$ donde p_μ es un operador hermítico no acotado que interpretamos como el operador de energía-momento de la teoría de manera que sus autovalores obedecen las condiciones espectrales $p^2 \geq 0$ y $p^0 \geq 0$.
- (b) **Supuestos sobre el dominio y la continuidad del campo:** Los campos cuánticos de la teoría son “distribuciones temperadas valuadas en operadores”. Es decir, para cada función de prueba $\alpha(x)$ suave y de decrecimiento más rápido que cualquier potencia definida sobre un espacio-tiempo de Minkowski existe un set de operadores $\phi_1(\alpha), \phi_2(\alpha), \dots, \phi_n(\alpha)$ definidos sobre algún dominio denso $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ de la forma

$$\phi_\lambda(\alpha) = \int d^D x \alpha(x) \phi_\lambda(x), \quad \lambda = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

donde asumimos que el vacío físico pertenece a \mathcal{D} y que tanto las operaciones del grupo Poincaré como las generadas por los campos mapean elementos de \mathcal{D} en elementos de \mathcal{D} . La motivación física detrás de esta idea se basa en que una medición en un punto requeriría energía infinita. Sin embargo los elementos de matriz $\langle \Psi_2 | \phi_\lambda(x) | \Psi_1 \rangle$ son finitos si ambos estados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{D}$ están caracterizados por la propiedad de que las amplitudes de probabilidad para configuraciones de partículas disminuyen suficientemente rápido con el aumento de los momentos y el número de partículas. En este caso el problema es que no podemos multiplicar trivialmente los operadores de campo en un mismo punto.

- (c) **Hermiticidad:** El conjunto de campos cuánticos de la teoría contiene tanto a los campos ϕ_λ con $\lambda = 1, 2, \dots, n$ como a sus conjugados hermíticos ϕ_λ^\dagger , cuyos valores de expectación están dados por $\langle \Psi_2 | \phi_\lambda^\dagger(x) | \Psi_1 \rangle = \overline{\langle \Psi_1 | \phi_\lambda(x) | \Psi_2 \rangle}$.
- (d) **Propiedades de transformación de los campos:** Los campos transforman ante la acción del grupo de Poincaré como

$$U(\beta, b) \phi_\lambda^i(\alpha(x)) U^{-1}(\beta, b) = \sum_j S^{ij}(\beta^{-1}) \phi_\lambda^j(\alpha(\Lambda(\beta)x + b)), \quad (2.2)$$

donde $S(\beta)$ es una representación matricial finito dimensional de una transformación de Lorentz determinada por β y b representa una traslación.

- (e) **Causalidad:** Si los soportes compactos de dos funciones de prueba α_1 y α_2 están espacialmente separados, es decir

$$\alpha_1(x)\alpha_2(y) = 0, \quad \forall x, y : (x - y)^2 \geq 0, \quad (2.3)$$

para cualquier estado en \mathcal{D} debe valer alguno de los siguientes

$$[\phi_\lambda(\alpha_1), \phi_\kappa(\alpha_2)]_\pm = \phi_\lambda(\alpha_1)\phi_\kappa(\alpha_2) \pm \phi_\kappa(\alpha_2)\phi_\lambda(\alpha_1) = 0, \quad (2.4)$$

y además

$$[\phi_\lambda(\alpha_1), \phi_\kappa^\dagger(\alpha_2)]_\pm = 0. \quad (2.5)$$

En términos de campos “sin smearing”, podemos simplemente traducir esto para $(x - y)^2 < 0$, en la condición

$$[\phi_\lambda(x), \phi_\kappa(y)]_\pm = 0, \quad [\phi_\lambda(x), \phi_\kappa^\dagger(y)]_\pm = 0. \quad (2.6)$$

- (f) **Time slice axiom:** Debe existir una ley dinámica que permita calcular los campos en un momento arbitrario en términos de los campos en un pequeño intervalo temporal de la forma

$$\mathcal{O}_{t,\delta} = \{x \in M : |x^0 - t| < \delta\}. \quad (2.7)$$

donde denotamos con M toda la variedad sobre la que esta definida la teoría. Una consecuencia fundamental de este axioma es que podemos recuperar cualquier campo de la teoría a partir los campos $\phi_\lambda(\alpha)$ si usamos funciones de prueba α de soporte compacto en $\mathcal{O}_{t,\delta}$. Es decir, si tomamos combinaciones lineales de productos de los operadores $\phi_\lambda(\alpha)$ es posible aproximar cualquier operador actuando sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} . No existe ningún operador acotado que commute con todos los $\phi_\lambda(\alpha)$ aparte de los múltiplos de la identidad.

Vemos la importancia de estos axiomas evidenciada en la prueba de ciertos teoremas que hoy entendemos como centrales en QFT, entre otros destacamos: El teorema de Reconstrucción que establece que cualquier teoría puede ser reconstruida a partir de todos los valores de expectación asociados a productos de n operadores en el vacío; El teorema espín-estadística que determina que las partículas espín entero (bosones) comutan a distancia espacial mientras que las partículas de espín semi-entero anti-comutan; El teorema CPT que establece que toda teoría de campos tiene una simetría ante una simultánea transformación de paridad, conjugación de carga e inversión temporal. Sin embargo, los axiomas no deben entenderse como supuestos rígidos que no pueden variar, de hecho algunos de los supuestos son bastante técnicos y la idea general

es que deberían sustituirse por otros más naturales a medida que se profundice en ellos.

En este contexto, punto técnico destacable de los axiomas es la introducción de los campos como distribuciones valuadas en operadores a partir de las funciones de prueba. Esta idea nos será útil, para varias demostraciones a lo largo de estas tesis. En estos casos, llamaremos a $\phi_\lambda(\alpha)$ campos “con smearing” y a las funciones α como “funciones de smearing”. Sin embargo, por simplicidad cuando sea posible utilizaremos los campos “sin smearing” $\phi_\lambda(x)$. En este sentido, denominaremos a un campo sobre el que podemos hacer un smearing de manera que satisfaga todos los axiomas “campo de Wightman”.

2.1.2. Álgebras de von Neumann en QFT

Ahora abordaremos estas ideas a partir de unos de los enfoques algebraicos a QFT, más específicamente la teoría Haag-Araki [24, 25]. En este contexto, entendemos a los objetos básicos de la teoría, como álgebras¹ de operadores asociadas a regiones espacio-temporales. La idea intuitiva es que podemos pensar estas álgebras como laboratorios asociados a regiones R del espacio-tiempo y de esta manera deben estar formadas a partir de operadores físicos, es decir, observables invariantes de gauge. Esto implica que los elementos del álgebra deben satisfacer requerimientos análogos a los axiomas de Wightman.

Si partimos de campos de Wightman, con pequeños cambios técnicos en la prescripción axiomática, se garantiza la existencia de álgebras asociadas a los operadores de campo (véase por ejemplo [26]). En este sentido, podemos revisar uno por uno los axiomas que describimos anteriormente y ver que propiedades nos sugieren para álgebras que podemos encontrar en QFT:

- (a) **Subálgebras de operadores acotados en el espacio de Hilbert:** Debemos entender las álgebras asociadas a regiones $\mathcal{A}(R)$ como subálgebras del conjunto de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Además, entre los operadores acotados de \mathcal{H} podemos encontrar a los unitarios de Poincaré $U(\beta, b)$ que efectúan las transformaciones de dicho grupo. Asimismo, mantendremos las suposiciones sobre la existencia del vacío físico y la positividad de la energía.
- (b) **Isotonía:** La introducción de la noción de campos locales nos sugiere la validez de la propiedad de isotonia

$$\mathcal{A}(R_1) \subset \mathcal{A}(R_2), \quad \forall R_1 \subset R_2. \quad (2.8)$$

¹Un álgebra es un espacio vectorial sobre un cuerpo (en este caso los números complejos) equipado con una ley de multiplicación que asocia un producto a cada par de los elementos del álgebra. Dicho producto debe ser asociativo, distributivo y debe conmutar con el producto por elementos del cuerpo.

- (c) **Álgebras cerradas ante conjugación hermítica:** Podemos entender la conjugación hermitica sobre las álgebras $\mathcal{A}(R)$ como una operación que mapea elementos del álgebra en elementos del álgebra. Es decir,

$$O^\dagger \in \mathcal{A}(R), \quad \forall O \in \mathcal{A}(R). \quad (2.9)$$

- (d) **Propiedades de transformación de las álgebras:** Los álgebras transforman ante la acción del grupo de Poincaré como

$$U(\beta, b)\mathcal{A}(R)U^{-1}(\beta, b) = \mathcal{A}(\Lambda(\beta)R + b). \quad (2.10)$$

En palabras, las transformaciones de Poincaré trasladan el álgebra de una región al álgebra de la región transformada.

- (e) **Causalidad:** Escribimos la causalidad, entendida como commutación de observables espacialmente separados, en términos de álgebras como

$$\mathcal{A}(R) \subseteq \mathcal{A}(R')', \quad (2.11)$$

donde R' representa el complemento causal de la región R dado por

$$R' = \{x \in M : (x - y)^2 < 0, \forall y \in R\}. \quad (2.12)$$

y $\mathcal{A}(R')'$ es el conmutante de $\mathcal{A}(R')$, es decir, el álgebra formada por todos los operadores que commutan con todos los elementos de $\mathcal{A}(R')'$.

$$\mathcal{A}(R')' = \{O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : [O, \tilde{O}] = 0, \forall \tilde{O} \in \mathcal{A}(R')\}. \quad (2.13)$$

Evidentemente, la condición (2.11) no puede aplicarse directamente a operadores fermiónicos que anti-commutan a distancia espacial. Puede modificarse o bien podemos trabajar con bilineales de fermiones. No consideraremos álgebras fermiónicas durante la mayor parte de esta tesis, para un desarrollo de estas ideas véase [27].

- (f) **Time slice axiom:** Podemos expresar el time slice axiom en términos de álgebras de la siguiente manera

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_{t,\delta}) = \mathcal{A}(M). \quad (2.14)$$

es decir, a partir del álgebra de un pequeño intervalo temporal $\mathcal{O}_{t,\delta}$ podemos generar el álgebra de toda la variedad espacio-temporal M .

Una consideración importante que mencionamos brevemente en el punto (a), es que los operadores de $\mathcal{A}(R)$ no solo deben ser operadores en el espacio de Hilbert \mathcal{H} sino que también deben ser acotados. Esto es $\mathcal{A}(R) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dicha condición es necesaria para que el álgebra $\mathcal{A}(R)$ sea cerrada ante sumas y productos arbitrarios de operadores. Esto es debido a que solo los operadores acotados pueden tener dominio sobre todo el espacio de Hilbert. Dado este contexto, es importante destacar que los campos de Wightman bosónicos con smearing $\phi_\lambda(\alpha)$ en (2.1) no son operadores acotados. Sin embargo, a partir de ellos podemos definir operadores acotados usando exponentiales o los proyectores obtenidos a partir de una descomposición espectral.

Por otro lado, es esperable que las álgebras $\mathcal{A}(R)$ sean cerradas bajo la topología débil. En otras palabras, todas las sucesiones débilmente convergentes de operadores acotados $\{O_n\}$ en $\mathcal{A}(R)$ tienen su límite O dentro del álgebra. Dicho límite débil se define como

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, |\Psi_1\rangle \dots, |\Psi_m\rangle \in \mathcal{H}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = O \text{ (débil)} \Leftrightarrow \exists n_0 / |\langle \Psi_i | (O_n - O) | \Psi_j \rangle| < \epsilon, \\ i, j = 1 \dots, m \text{ si } n > n_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Físicamente podemos entender esta idea como como que no podemos distinguir los operadores de la cola de la sucesión de su respectivo límite con una cantidad finita de experimentos de finita precisión. Esta condición, en combinación de los puntos (a) y (c) tiene consecuencias importantes sobre el zoológico de álgebras que podemos encontrar en QFT. Esto es por el teorema del doble commutante de von Neumann. Dicho teorema establece que cualquier subálgebra del conjunto de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} que es cerrada ante conjugación hermítica, es cerrada para la topología débil y contiene a la identidad debe satisfacer que

$$\mathcal{A}(R)'' = \mathcal{A}(R), \quad (2.16)$$

donde notamos como $\mathcal{A}(R)''$ al doble commutante de $\mathcal{A}(R)$, es decir, al commutante de $\mathcal{A}(R)'$ definido análogamente a (2.13). Las álgebras que satisfacen (2.16) se conocen como “álgebras de von Neumann”.

Es de esperar que en QFT siempre podamos asignar a cada región espacio-temporal un álgebra de von Neumann de manera que se satisfagan todas las propiedades (a-f) mencionadas. Estas pueden entenderse como los requerimientos mínimos para una formulación algebraica de la teoría de campos (AQFT). En efecto, dada una teoría definida de forma algebraica, existe un procedimiento establecido para extraer (o recuperar) sus campos de Wightman [28–30]. Para una teoría generada por campos de Wightman este procedimiento recupera los campos iniciales.

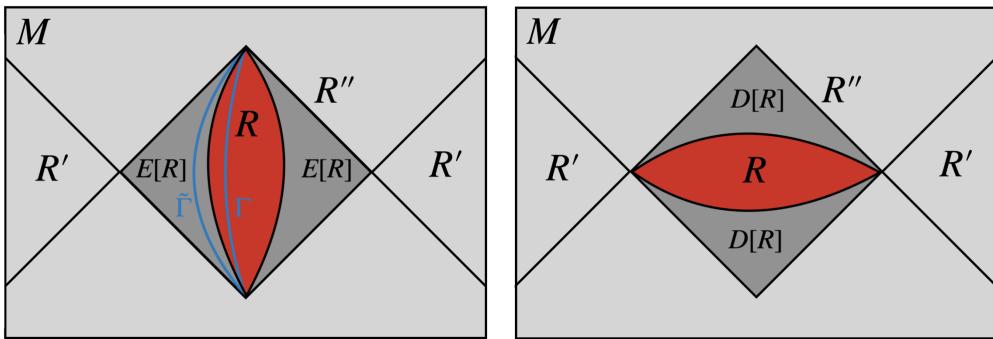


Figura 2.1: Izquierda: Región espacio-temporal R y su envolvente tipo tiempo $E[R]$. Por el “time-like tube theorem” tenemos que $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(E[R])$. Derecha: Otra región espacio-temporal R y su dominio de dependencia causal $D[R]$. Si vale el ‘Time slice axiom local’ tendremos $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(D[R])$. En ambas figura R' representa el complemento causal de R y R'' el doble complemento causal de R . La dirección vertical representa al tiempo.

En este contexto, es importante mencionar que hay dos principios que afirman que el álgebra de una determinada región espacio-temporal coincide con el álgebra de una región causalmente completa que la contiene. Las regiones causalmente completa son regiones iguales a su doble complemento causal $R = R''$, siendo R'' es el complemento causal de R' dado por (2.12). El primero de estos principios, es que el álgebra de R debe incluir el álgebra de su envolvente tipo tiempo $E[R]$. Siendo $E[R]$ el conjunto de puntos que podemos alcanzar comenzando con una curva de tipo tiempo $\Gamma \in R$ y si la deformamos continuamente a otra curva tipo tiempo $\tilde{\Gamma}$ manteniendo sus puntos finales fijos. Véase figura izquierda en 2.1. El hecho de que $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(E[R])$ para álgebras como las ya definidas esta asegurado por el “time-like tube theorem” [31–35].

En segundo lugar, una idea natural es que $\mathcal{A}(R)$ debe ser la misma que su dominio de dependencia causal $D[R]$, es decir, $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(D[R])$. Véase figura derecha en 2.1. Esta idea es una versión mas restrictiva del punto (f) conocida como el “Time slice axiom local”. Observamos que esta condición no es muy restrictiva, por ejemplo vemos que se cumple en cualquier teoría con tensor energía-momento bien definido. Sin embargo, también puede cumplirse en ausencia de este ultimo cuando exista una ecuación de movimiento lineal, como es el caso para las teorías libres de espín $\geq 3/2$ [36]. En este sentido, no es aplicable al caso de los “Generalized Free Fields” que estudiaremos en el apéndice A.

Motivados por estas dos extensiones, durante esta tesis asumiremos el “Time slice axiom local” y nos focalizaremos solo en álgebras asociadas a regiones causalmente completas. Esto nos permitirá trabajar exclusivamente con regiones espaciales definidas a tiempo fijo (o más formalmente con smearing sobre una pequeña banda temporal), en vez de regiones espacio-temporales. Haciendo un abuso de la notación ya utilizada a partir de ahora notaremos estas regiones espaciales con R y asumiremos

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R'') . \quad (2.17)$$

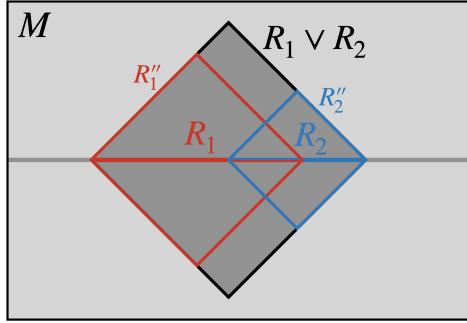


Figura 2.2: A partir de las regiones espaciales R_1 y R_2 podemos generar las álgebras $\mathcal{A}(R_1) = \mathcal{A}(R_1'')$ y $\mathcal{A}(R_2) = \mathcal{A}(R_2'')$ asociadas a regiones causalmente completas. Además, a partir de ellas podemos generar la región causalmente completa $R_1 \vee R_2 = (R_1 \cup R_2)''$, si vale la aditividad de las álgebras a su vez tendremos que $\mathcal{A}(R_1 \vee R_2) = \mathcal{A}(R_1) \vee \mathcal{A}(R_2)$.

Como vimos para el punto (f), también surgen versiones más fuertes de los puntos (b) y (e). Una noción más restrictiva de la isotonia (2.8) es la aditividad. Esta última propiedad establece que todos los operadores en una región se generan como productos de operadores locales dentro de la región. Podemos escribirla como

$$\mathcal{A}(R_1 \vee R_2) = \mathcal{A}(R_1) \vee \mathcal{A}(R_2), \quad (2.18)$$

donde utilizamos el símbolo \vee para el dominio causal generado por dos regiones

$$R_1 \vee R_2 = (R_1 \cup R_2)''. \quad (2.19)$$

y análogamente \vee denota el álgebra generada por dos conjuntos de operadores

$$\mathcal{A}(R_1) \vee \mathcal{A}(R_2) = (\mathcal{A}(R_1) \cup \mathcal{A}(R_2))''. \quad (2.20)$$

Por otro lado, para restringir la causalidad (2.11) podemos llevarla a su saturación

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R')'. \quad (2.21)$$

Esta igualdad se denomina dualidad de Haag. Intuitivamente, podríamos creer que tanto la aditividad como la dualidad Haag deben estar presentes en QFT. Sin embargo, resulta que este no necesariamente es el caso. Esto proviene de la existencia de operadores que no pueden generarse localmente en R pero que siguen siendo conmutativos con operadores en R' . Llamaremos a estos operadores “no locales”. La presencia de operadores no locales, nos permite más de una elección posible para el álgebra de una región. Por lo tanto, veremos que si los incluimos en el álgebra de R podemos tener dualidad de Haag, pero introduciremos una violación de la aditividad (2.18). Por el contrario podríamos no incluir ninguno de estos operadores no locales en el álgebra y recuperar la aditividad a expensas de la dualidad de Haag. Veremos que esta tensión

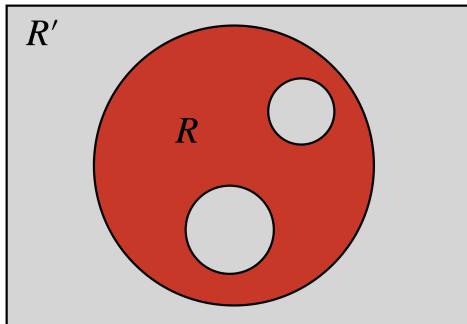


Figura 2.3: Esquema de una región espacial R arbitraria con topología no trivial (rojo) y su complemento causal R' (gris) sobre una superficie a tiempo fijo. En la teoría algebraica debemos asignar álgebras de von Neumann a cada una de estas regiones. En teorías con simetrías generalizadas estas elecciones pueden no ser únicas.

entre dualidad y aditividad en algunas estas teorías no puede resolverse sin cambiar el espectro de la teoría.²

La idea de que la dualidad de Haag puede ser violada es estándar en la literatura para teorías con simetrías globales [27, 37, 38]. La razón es que se pueden formar observables neutros a partir del producto de operadores locales cargados. Si elegimos una región R que esté desconectada, de modo que tenga un grupo de homotopía π_0 no trivial (cuyo complemento causal tiene π_{D-2} no trivial), entonces la dualidad de Haag no se cumplirá para el álgebra neutra debido a la existencia de operadores de carga-anticarga localizados en diferentes zonas desconectadas. Veremos este ejemplo en detalle en la sección 2.2.6.

Además, si bien las simetrías globales implican la posibilidad de una ruptura de la dualidad de Haag para regiones con π_0 o π_{D-2} no triviales, observamos que esta idea puede generalizarse. Esto es a teorías con simetrías generalizadas de tipo k -forma. Estas simetrías están caracterizadas por operadores cargados con soporte compacto sobre superficies k -dimensionales y generadores con soporte compacto sobre superficies $(D-k-1)$ -dimensionales. En dichos casos veremos la dualidad de Haag puede romperse para regiones con grupos de homotopía π_k o π_{D-k-2} no triviales [22, 23]. Véase por ejemplo la figura 2.3.

Revisemos el ejemplo más sencillo. Este es el de una simetría k -forma producida por una corriente $(k+1)$ -forma F conservada en el sentido de que su derivada exterior se anula $dF = 0$. A su vez, asumimos que esta corriente F no puede ser obtenida como la derivada exterior de un campo observable. En este escenario, podemos integrar F sobre una superficie abierta $(k+1)$ -dimensional Σ_{k+1} , cuya frontera $\partial\Sigma_{k+1}$ es una superficie

²Otra propiedad que podemos asignar a las álgebras es la propiedad de intersección, es decir que $\mathcal{A}(R_1 \cap R_2) = \mathcal{A}(R_1) \cap \mathcal{A}(R_2)$. Sin embargo, para cualquier álgebra universalmente valen las leyes de de Morgan dadas por $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)' = \mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2$ y $(R_1 \vee R_2)' = R'_1 \cap R'_2$. Estas implican que si valen la aditividad y la dualidad de Haag, entonces vale la propiedad de intersección. O bien, si valen la propiedad de intersección y la dualidad de Haag, entonces vale la aditividad. En otras palabras, podemos hablar de aditividad o propiedad de intersección indistintamente.

cerrada k -dimensional, de manera obtenemos un operador de flujo no trivial

$$\Phi_{\partial\Sigma_{k+1}}^F \equiv \int_{\Sigma_k} F , \quad (2.22)$$

con interesantes propiedades topológicas. Por un lado, dada la conservación de la corriente, este operador no depende de la superficie concreta Σ_{k+1} que utilicemos para la integración. Sólo depende de su borde $\partial\Sigma_{k+1}$. Esto implica que este tipo de operadores commutan con todos los operadores locales fuera de $\partial\Sigma_{k+1}$. Detrás de esta idea esta el teorema de Stokes, si el operador local no está sobre el borde $\partial\Sigma_{k+1}$, siempre podemos elegir una superficie de integración que no pase por el operador local y que tenga la mismo borde. Entonces la causalidad asegura la commutatividad. Por otro lado, dado que F no es la derivada exterior de un campo físico de la teoría, este operador no puede escribirse como una circulación sobre el borde en el álgebra de observables.

La consecuencia de estas dos propiedades es que si consideramos una región espacio-temporal R que encierra al borde $\partial\Sigma_{k+1}$ y con la misma topología, el álgebra de esta región contendrá tanto operadores locales como no locales. A saber, los operadores locales estarán dados por F y cualquier otro operador que surja de F multiplicando con operadores locales en R , mientras, que los operadores no locales estarán representados por los flujos $\Phi_{\partial\Sigma_{k+1}}^F$ o más formalmente los operadores unitarios acotados

$$a_{\partial\Sigma_{k+1}}^q \equiv e^{iq\Phi_{\partial\Sigma_{k+1}}^F} , \quad q \in \mathbb{R} . \quad (2.23)$$

Estos operadores no locales commutan con todos los operadores locales en R' por ende podemos incluirlos (o no) en el álgebra de R . Vemos que este ejemplo evidencia una tensión entre la aditividad y la dualidad de Haag en teorías con simetrías generalizadas. En la próxima sección mayoritariamente estudiaremos estas ideas de forma abstracta y puntualmente en la sección 2.2.7 elaboraremos sobre el ejemplo de simetrías 1-forma.

2.2. Simetrías Generalizadas y Dualidad de Haag

En esta sección estudiamos en detalle el rol de las simetrías generalizadas en relación a la asignación de álgebras de von Neumann a regiones de topología no trivial desarrollado en [22, 23, 38]. Comenzaremos describiendo detalladamente el origen de la tensión entre Aditividad y Dualidad de Haag y como las simetrías generalizadas están asociadas más de una posibilidad en la asignación de álgebra a una región. Luego, estudiaremos las implicaciones de estas ideas incluyendo: como definir clases de equivalencias de operadores no locales; que las simetrías generalizadas vienen en pares duales; como recuperar dualidad de Haag introduciendo una red de Haag-Dirac; y como podemos diagnosticar precisamente la completitud del espectro de una teoría.

También, mostraremos con ejemplos de violaciones de dualidad para regiones de distinta topología. En particular estudiaremos primero el ejemplo de simetrías globales en regiones desconectadas, y luego, el de simetrías 1-forma en regiones con lazos no contractibles. Para terminar, analizaremos las posibles reglas de fusión de las clases de equivalencia de operadores no locales en estos dos casos.

En esta sección, y de hecho en el resto de esta tesis a excepción del apéndice A, trabajaremos con regiones espaciales R definidas a tiempo fijo. En estos casos consideraremos que las álgebras asociadas a estas regiones coinciden con las de su completación causal. Esto está dado formalmente por la condición (2.17).

2.2.1. Aditividad vs Dualidad de Haag

Comenzamos ahora a describir la clasificación de los operadores en QFTs con simetrías generalizadas que se propuso en [22, 23]. La esencia de la clasificación reside en reconocer y distinguir los dos significados diferentes que se suelen asignar a la idea de localidad. Un sentido de localidad corresponde a la idea de que un operador está formado por grados de libertad locales. Para cualquier región R existe un álgebra intrínseca asociada a ella, a saber, el “álgebra aditiva”. Intuitivamente, se trata del álgebra generada por productos arbitrarios de operadores locales (invariantes de gauge) dentro de la región. Es el álgebra a la que tendría acceso un observador/laboratorio en dicha región. Formalmente, puede definirse de forma autoconsistente como el álgebra generada por las álgebras de bolas que recubren la región R

$$\mathcal{A}(R) \equiv \bigvee_{\{B_i \text{ bola} \mid \cup_i B_i = R\}} \mathcal{A}(B). \quad (2.24)$$

El otro sentido, o idea, asociado a la localidad es que los operadores asociados a regiones espacialmente separadas comutan. Previamente llamamos a esta propiedad “causalidad”. Una pregunta inmediata es si estas dos nociones de localidad acaban siendo esencialmente una o no.

Para abordar esta cuestión, primero nos fijamos en una observación sencilla pero básica. Si las álgebras asociadas a bolas satisfacen la causalidad, las álgebras aditivas para cualquier región dada, independientemente de su topología, satisfacen también la causalidad por construcción. Sin embargo, para una región R puede haber operadores a que son causales o locales en el sentido de que comutan con todos los operadores en $\mathcal{A}(R')$, pero que no pueden ser generados por operadores locales en R . Estos son los operadores no locales en R . Tomando un conjunto completo de estos operadores no locales podemos definir

$$\mathcal{A}_{\max}(R) \equiv (\mathcal{A}(R'))' = \mathcal{A}(R) \vee \{a\}, \quad (2.25)$$

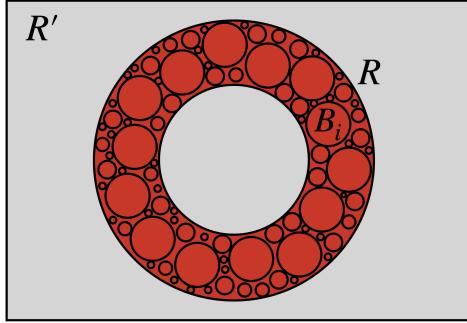


Figura 2.4: Esquema de la construcción del álgebra aditiva $\mathcal{A}(R)$ como el álgebra generada por el álgebra de bolas B_i que podemos usar para cubrir la región R .

En esta situación, llamamos a $\mathcal{A}_{\max}(R)$ como “álgebra máxima”. Además, decimos que la red aditiva de álgebras $\mathcal{A}(R)$, que por definición satisface la causalidad, no satisface la dualidad de Haag (2.21). Equivalentemente, los operadores no generados localmente a violan la dualidad de Haag en la región R . En este tipo de teorías, el primer sentido de la localidad (relacionado con si los operadores pueden ser generados por campos locales o no) y el segundo sentido (relacionado con la causalidad) difieren en un sentido físicamente significativo.

Estos operadores no locales $\{a\}$ no son algo extraño. Por ejemplo, para el campo libre de Maxwell en $D = 4$, los lazos de Wilson (WL) y t' Hooft (TL) representan operadores no locales para regiones tipo anillo. En efecto, veremos que los operadores $\{a\}$ resultan desempeñar el papel de los operadores cargados y/o el de generadores de las simetrías generalizadas [8]. Haremos una comparación extensiva con la literatura existente al respecto en la sección 2.3.

Una suposición simplificadora que se mantiene de forma bastante general es que el álgebra aditiva, cuando se considera para regiones B topológicamente triviales como bolas, satisfacen tanto aditividad (2.18) como dualidad de Haag (2.21). Por ende, obedece que

$$\mathcal{A}_{\max}(B) = \mathcal{A}(B). \quad (2.26)$$

Es sabido que las violaciones de esta propiedad no están relacionadas con simetrías generalizadas, sino que aparecen para ciertas subálgebras neutras en QFT cuando tenemos una ruptura espontánea de una simetría global. En ese caso, puede repararse simplemente tomando la red dual [39], o, equivalentemente, considerando los operadores cargados además de los neutros. Volveremos sobre este tema en la sección 5.3.1. Otros ejemplos corresponden a QFT que son patológicas por otras razones, como los generalized free fields que violan el time slice axiom [40]. Trataremos de forma extensiva este ejemplo en el apéndice A.

La importancia de (2.26), reside en que esta ecuación implica que todos los operadores se generan, en última instancia, localmente: cualquier operador que comuta

con todos los operadores locales fuera de B puede generarse por productos, combinaciones lineales, y límites, de operadores locales en B . En este sentido, queda claro que la noción de operador no local es relativa a una región R con una topología particular. Por ejemplo, un operador puede ser no local en un anillo, pero local en una bola lo suficientemente grande como para contener el anillo. El hecho de que los WL y TL en teorías de gauge no abelianas están generados en última instancia por operadores locales se demostró mediante una construcción explícita en la red [23], apéndice B2.³ Para el WL esta construcción resulta implicar tanto operadores de placa “magnéticos” como operadores “eléctricos” locales invariantes de gauge en la superficie.

Es bastante notable que la red aditiva de álgebras (2.24) contenga en sí misma todas las manifestaciones físicas de las simetrías generalizadas. Estas características aparecen como texturas del álgebra aditiva, y representan un fenómeno físico y local. En particular, no es necesario añadir a mano “sondas externas no locales”. El conjunto completo de operadores no locales o de violaciones de dualidad de Haag (HDV) aparecen al tomar comutantes dentro de las propias álgebras aditivas, y son operadores dinámicos que pertenecen a la teoría.

2.2.2. Clases de equivalencia HDV no locales

Podemos utilizar los operadores no locales a para definir clases/sectores irreducibles $[a]$ de operadores en $\mathcal{A}_{\max}(R)$. Más concretamente, definimos la clase HDV $[a]$ de $\mathcal{A}_{\max}(R)$ como el conjunto de operadores de la forma

$$[a] \equiv \left\{ \sum_{\lambda} O^{\lambda} a \tilde{O}^{\lambda} \mid O^{\lambda}, \tilde{O}^{\lambda} \in \mathcal{A}(R) \right\}. \quad (2.27)$$

Decimos que la clase es irreducible si no hay subespacios no triviales en su interior invariantes bajo la acción simultánea izquierda y derecha del álgebra aditiva. En el caso contrario, decimos que es reducible y se puede descomponer en una suma de irreducibles. Como $\mathcal{A}_{\max}(R)$ es un álgebra cerrada ante el producto, el conjunto de clases debe cerrar un álgebra de fusión en sí misma. Esto es

$$[a][a'] = \sum_{a''} n_{aa'}^{a''} [a'']. \quad (2.28)$$

Estas reglas de fusión pueden estar relacionadas con la fusión de representaciones o clases de conjugación de un cierto grupo, pero pueden ser más generales. Este último caso incluye el de las simetrías no invertibles, volveremos sobre esta idea en la sec-

³Formas conocidas del teorema de Stokes no abeliano, véase [41–43], tienen este mismo espíritu, pero no son concluyentes desde la perspectiva actual porque expresan el WL en términos de cantidades no invariantes de gauge en la superficie limitada por el lazo.

ción 7.2. La clase identidad [1] es por definición $\mathcal{A}(R)$, y sus reglas de fusión son por construcción $[1][a] = [a][1] = [a]$.

Es una suposición natural subyacente en QFT que $\mathcal{A}(R)$ no tiene centro. El centro de un álgebra \mathcal{Z} es el conjunto de operadores que comutan con todos los operadores en el álgebra, para este caso sería $\mathcal{Z} = \mathcal{A}(R) \cap \mathcal{A}(R)'$. Estas álgebras sin centro se llaman factores y son a su vez irreducibles. Podemos pasar de cualquier elemento distinto de cero a cualquier otro mediante combinaciones de acciones a izquierda y derecha con otros operadores pertenecientes a $\mathcal{A}(R)$. De la misma manera $\mathcal{A}_{\max}(R)$ no tiene centro. Es irreducible respecto a productos arbitrarios de operadores en $\mathcal{A}_{\max}(R)$. Estas condiciones surgen de la imposibilidad genérica de construir operadores de campo con smearing en una frontera $D - 2$ dimensional de la región (para actuar como un elemento del centro) y todavía producir un operador bien definido en el espacio de Hilbert. Ambos hechos implican que podemos obtener operadores en $\mathcal{A}(R)$ a partir de elementos no locales en $\mathcal{A}_{\max}(R)$ multiplicando con otros elementos no locales de $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y acciones arbitrarias izquierda-derecha de operadores en $\mathcal{A}(R)$.

Otra noción usual en QFT es que las simetrías generalizadas son transportables. Esto significa que al deformar suavemente una región R_1 en otra R_2 con la misma topología, los operadores no locales en R_1 pueden convertirse en operadores no locales en R_2 mediante la acción de operadores locales. Esta noción de simetrías generalizadas es topológica en este sentido, con las clases no locales preservadas bajo deformaciones. Supondremos transportabilidad en lo que sigue. Pero, destacamos que para simetrías generalizadas generadas por flujos de k -formas físicas como (2.22) esta transportabilidad es evidente.

2.2.3. Las simetrías generalizadas vienen en pares duales

En este enfoque algebraico, podemos derivar una conclusión general no trivial. La inclusión estricta en (2.11) obliga a una inclusión estricta dual en el complemento R' de R . La razón es sencilla y podemos deducirla del teorema del doble comutante de von Neumann (2.16). Comenzamos con las dos álgebras potenciales asociadas a la región complementaria, a saber

$$\mathcal{A}(R') = \mathcal{A}_{\max}(R)', \quad \mathcal{A}_{\max}(R') = \mathcal{A}(R)' . \quad (2.29)$$

Ahora observamos que la igualdad de $\mathcal{A}(R')$ y $\mathcal{A}_{\max}(R')$ implica la de las álgebras análogas correspondientes a R

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R') = \mathcal{A}_{\max}(R') &\iff \mathcal{A}_{\max}(R)' = \mathcal{A}(R)' \\ &\iff (\mathcal{A}_{\max}(R)')' = (\mathcal{A}(R)')' \iff \mathcal{A}_{\max}(R) = \mathcal{A}(R) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

De aquí, concluimos que si en (6.68) existen operadores HDV no locales $\{a\}$ asociados a R , entonces deben existir operadores no locales $\{b\}$ asociados al complemento R' . Formalmente, tenemos el álgebra máxima

$$\mathcal{A}_{\max}(R') = \mathcal{A}_{\text{add}}(R') \vee \{b\} . \quad (2.31)$$

Estos operadores HDV duales deben tener sus propias reglas de fusión, a saber

$$[b][b'] = \sum_{b''} n_{bb'}^{b''} [b''] . \quad (2.32)$$

Como $\mathcal{A}_{\max}(R) = \mathcal{A}(R)'$ los operadores no locales de R commutan con los operadores aditivos en R' y viceversa. Sin embargo, los operadores no locales $\{a\}$ y $\{b\}$ para R y R' no pueden commutarse (todos ellos) entre sí. Dicha commutatividad implicaría

$$\mathcal{A}_{\max}(R) \subseteq (\mathcal{A}_{\max}(R'))' = \mathcal{A}(R) \quad (2.33)$$

Esto no es posible si las inclusiones $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$ son estrictas. Remarcamos que este fallo de commutatividad no es un fallo de causalidad ya que dichos operadores no pueden construirse localmente en sus respectivas regiones.

En resumen, las álgebras de operadores no locales asociadas a simetrías generalizadas “vienen en pares duales”. De hecho, no sólo vienen en pares duales, sino que además el “tamaño” de estas álgebras duales es, en un sentido preciso, el mismo. El tamaño de estas inclusiones se mide por el llamado “índice de Jones” de la inclusión de álgebras [44–46],⁴ y aquí mide el tamaño de las álgebras de operadores no locales en QFT [22, 23, 49]. Cuando se aplica a simetrías de grupo finitas, el índice es simplemente el número de elementos en el grupo. Cuando es finito, las inclusiones duales $\mathcal{A}(R) \subset \mathcal{A}_{\max}(R)$ y $\mathcal{A}(R') \subset \mathcal{A}_{\max}(R')$ tienen el mismo índice.

En términos físicos intuitivos, debemos entender a los operadores HDV duales $\{a\}$, $\{b\}$ como variables complementarias canónicas, en el sentido mecánico cuántico habitual. El hecho de que vengan en pares duales se reduce al hecho de que el espacio de fases (descrito por variedad simpléctica) es siempre de dimensión par. En este marco, podemos resumir la estructura algebraica que especifica la violación de la dualidad para las regiones R y R' en un diagrama de complementariedad cuántica

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\max}(R) \equiv \mathcal{A}(R) \vee \{a\} &\supset \mathcal{A}(R) \\ &\Downarrow' \qquad \Downarrow' \\ \mathcal{A}(R') &\subset \mathcal{A}(R') \vee \{b\} \equiv \mathcal{A}_{\max}(R') . \end{aligned} \quad (2.34)$$

⁴Véase [47–49] para introducciones más sencillas al concepto y cálculos específicos.

En este diagrama, en la parte superior, tenemos la inclusión de las dos álgebras asociadas a la región R . Bajar en el diagrama equivale a tomar conmutantes, produciendo las álgebras naturalmente asociadas con la región complementaria R' . En QFT podemos suponer que para este tipo de inclusiones $\mathcal{A}(R) \subset \mathcal{A}_{\max}(R)$ el conmutante relativo es $\mathcal{A}_{\max}(R) \cap \mathcal{A}(R)' = \mathcal{A}_{\max}(R) \cap \mathcal{A}_{\max}(R') = \{\mathbb{1}\}$, es decir, el álgebra identidad. Esto es equivalente a la aditividad fuerte [50, 51], $(\mathcal{A}(R) \vee \mathcal{A}(R'))' = \{\mathbb{1}\}$. Físicamente, esto se debe a que un operador no local que commuta con toda el álgebra aditiva no puede tener un smearing suave en la región. De nuevo, esto hace que el operador sea demasiado singular para estar bien definido.

Los operadores no locales para cada región (los a y b) generan endomorfismos de las álgebras máximas de las regiones complementarias. En este sentido, los operadores no locales actúan como operaciones de simetría generalizadas, donde los objetos cargados son los operadores no locales complementarios y los objetos neutros son los observables en el álgebra aditiva.

Uno de los principales resultados en [22, 23] es que los operadores HDV duales $\{a\}, \{b\}$ proporcionan una definición unificada de lo que es un parámetro de orden/desorden en una QFT. Esto se respaldó primero con ejemplos explícitos. Pero un fuerte apoyo viene al mostrar que los operadores HDV son los únicos tipos de operadores que pueden exhibir un comportamiento del tipo “ley de volumen generalizada”, donde esta terminología debe entenderse en un sentido generalizado. Por ejemplo, los operadores de línea HDV son los únicos operadores de línea que pueden exhibir ley de área ($\langle a \rangle \sim e^{-\mu \text{area}}$, $\mu > 0$). En sentido inverso, si uno encuentra un operador que puede mostrar una “ley de volumen generalizada”, este operador debería violar la dualidad de Haag en la región apropiada. Por ejemplo, si se encuentra un operador de línea que muestre ley de área, entonces este operador no puede generarse localmente en el lazo donde está definido.

2.2.4. Redes de Haag-Dirac

Anticipamos brevemente en la sección 2.2.1 que la asignación de álgebras máximas a regiones complementarias no forma una red (local) ya que $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y $\mathcal{A}_{\max}(R')$ no conmutan. Cuando $\mathcal{A}(R) \subsetneq \mathcal{A}_{\max}(R)$. En dicho caso, también, es evidente que la red aditiva no satisface dualidad de Haag. En esta situación se puede ampliar la red aditiva añadiendo operadores no generados localmente, para generar una red que satisfaga dualidad de Haag. En general, esto puede hacerse de varias maneras. Llamaremos a estas redes como redes de Haag-Dirac (HD) por razones que haremos evidentes en la sección 2.2.7. Por construcción, las redes Haag-Dirac satisfacen la dualidad

$$\mathcal{A}_{HD}(R) = \mathcal{A}_{HD}(R')', \quad (2.35)$$

pero, en general, no satisfacen la aditividad.

Dado que los operadores duales no generados aditivamente $\{a\}$ y $\{b\}$ no comutan, al construir redes de HD que satisfagan la dualidad, tenemos que sacrificar algunos operadores de $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y/o $\mathcal{A}_{\max}(R')$, para mantener la causalidad de la red. La asignación $\mathcal{A}_{\max}(R)$ para todo R no forma una red causal. Una opción siempre posible es $\mathcal{A}_{\max}(R)$ para R y $\mathcal{A}(R')$ para R' o viceversa. Pero, normalmente existen algunas opciones intermedias. En particular, si las topologías de R y R' son iguales, ambas opciones extremas no son muy naturales y pueden romper algunas simetrías espaciales.

En este contexto, la observación fundamental es la siguiente. Incluso si algún operador no generado aditivamente se excluye del álgebra de R , esto no significa que no exista en la teoría. Debido a (2.26), todos los operadores no generados aditivamente que podrían asignarse a R siempre se forman aditivamente en una bola que contiene a R y, por tanto, no puede evitarse su existencia.

2.2.5. Completitud

El posible fracaso de la saturación de la causalidad en dualidad de Haag, implica una cierta falta de operadores en las álgebras generadas localmente (las álgebras aditivas) de tal manera que podrían añadirse algunos otros operadores sin violar el principio de causalidad. Podemos basarnos en esta observación para sugerir una definición de completitud en QFT. Específicamente, diremos que el espectro de una teoría es completo (o de forma más breve que la teoría es completa) si

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}_{\max}(R), \quad \forall R \tag{2.36}$$

En palabras, una QFT es completa si para una región arbitraria del espacio el álgebra de observables generada por los grados de libertad locales es la máxima compatible con la causalidad. Nótese que en las teorías completas no hay ambigüedad para el álgebra asociada a una región dada. Esta álgebra sólo puede ser la mínima, a saber, el álgebra aditiva, que coincide con la máxima. La única red de álgebras posible es la red aditiva. En este sentido vemos que las siguientes propiedades son equivalentes

- (a) La teoría es completa,
- (b) El álgebra aditiva satisface dualidad de Haag para cualquier región,
- (c) La teoría no tiene simetrías generalizadas,
- (d) La red de Haag-Dirac es única.

Físicamente, veremos que esta definición puede entenderse de la siguiente manera: una teoría con simetrías generalizadas no es completa porque tiene más de un álgebra

posible para alguna región de topología no trivial. Sin embargo, podríamos completarla añadiendo más operadores dinámicos a la teoría que rompan la simetría generalizada. Para el caso de teorías con simetrías k -forma dadas por corrientes conservadas $(k+1)$ -forma, podemos entender estos operadores nuevos como cargas que aparecen a una cierta escala de energía completando el espectro de la teoría en cuestión y rompiendo estas leyes de conservación de la simetría de forma. Veremos ejemplos para teorías de gauge en la sección (2.2.7) y desarrollaremos extensivamente el caso del gravitón en el capítulo 3.

2.2.6. Simetrías globales y regiones con π_0 no trivial

Comenzamos con el primer ejemplo, en particular veremos como teorías con simetrías globales presentan violaciones de dualidad de Haag para regiones con π_0 no trivial. Para esto, consideramos la subálgebra \mathcal{O} de una teoría \mathcal{F} , formada por operadores invariantes bajo un grupo de simetría global G que actúa sobre \mathcal{F} . Denominaremos a la teoría $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$ como “orbifold”. Estos modelos se trataron extensivamente en [38]. En este caso, nos interesaría tomar regiones R con π_0 no trivial, es decir, regiones desconectadas. El complemento R' tendrá π_{D-2} no trivial. El ejemplo más sencillo son dos bolas disjuntas B_1 y B_2 formando $R = (B_1 \cup B_2)$, y su complemento $R' = (B_1 \cup B_2)'$ que topológicamente es una “cáscara” con la topología de $S_{D-2} \times \mathbb{R}$. Véase la figura 2.5.

En esta sección, nos centraremos en el caso de una simetría no espontáneamente rota, donde el espacio de Hilbert generado a partir del vacío por operadores invariantes consiste en estados invariantes. La discusión, en este caso, puede hacerse sin apelar a la teoría \mathcal{F} . Trataremos las modificaciones producidas por un estado de vacío no invariante en la sección 5.3.1.

Sean $\psi_1^{i,r}$, y $\psi_2^{i,r}$ operadores creadores de carga en B_1 y B_2 respectivamente para la teoría \mathcal{F} , correspondientes a la representación irreducible r con i un índice de la representación. Podemos definir un operador “intertwiner” correspondiente a esta representación como

$$\mathcal{I}_r = \sum_i \psi_1^{i,r} (\psi_2^{i,r})^\dagger. \quad (2.37)$$

Claramente, este operador es invariante bajo transformaciones globales del grupo y pertenece a la teoría neutra \mathcal{O} . También, vemos que commuta con todos los operadores aditivos neutros en R' , pero no puede ser generado aditivamente por operadores en las álgebras neutras asociadas a R ya que los operadores cargados $\psi_1^{i,r}$, y $\psi_2^{i,r}$ pertenecen al álgebra de campos locales $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}(R)$ de \mathcal{F} pero no a $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}(R)$ de \mathcal{O} .

En la región complementaria R' , podemos definir operadores duales de “twist” τ_g que implementan las operaciones de grupo en B_1 y actúan trivialmente en B_2 . Estos

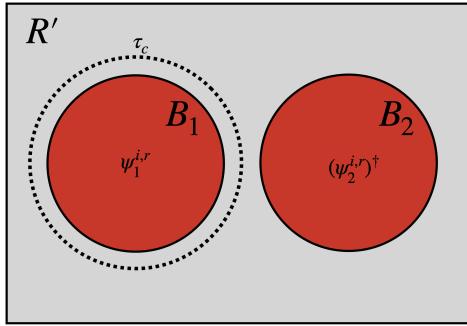


Figura 2.5: Una región $R = B_1 \cup B_2$ dada por la unión de dos bolas disjuntas B_1 y B_2 tiene grupo de homotopía con π_0 no trivial. Para teorías neutras, generadas a partir del orbifold de una simetría global dicha región presenta operadores no locales que violan dualidad de Haag. Estos son los intertwiner \mathcal{I}_r generados por los operadores cargados $\psi_1^{i,r}$, y $\psi_2^{i,r}$ en B_1 y B_2 y los twists τ_c en la región complementaria $R' = (B_1 \cup B_2)'$.

comutan con las álgebras neutras en B_1 y B_2 , pero no comutan con los intertwiners (2.37). Esto es porque los últimos incluyen operadores cargados en B_1 .

Para estudiar estos twists, empecemos considerando el caso más simple. Esto es el caso en el que estos implementan la acción un grupo G abeliano. Los twists en la teoría \mathcal{F} pueden elegirse⁵ de modo que satisfagan

$$\tau_g \tau_h = \tau_{gh}, \quad U(g) \tau_g U(g)^{-1} = \tau_{ghg^{-1}}, \quad (2.38)$$

donde $U(g)$ es el unitario que implementa operación de simetría global. Como G es abeliano, estos twists τ_g no transforman ante la acción de G y por ende también pertenecen a la teoría del orbifold \mathcal{O} . De esta manera, podemos escribir las relaciones de conmutación a parir del carácter del grupo $\chi_r(g)$ como

$$\tau_g \mathcal{I}_r = \chi_r(g) \mathcal{I}_r \tau_g. \quad (2.39)$$

Para un grupo G no abeliano, los twists no son invariantes bajo la acción del grupo global. Las combinaciones de operadores de twists invariantes bajo el grupo global son

$$\tau_c = \sum_{h \in c} \tau_h, \quad (2.40)$$

donde estos twists τ_c están etiquetados por clases de conjugación $c \in G$ tales que $g c g^{-1} = c$ para todo $g \in G$. Estos operadores τ_c pertenecen al álgebra neutra \mathcal{O} . En este escenario, vemos que si bien el modelo completo \mathcal{F} , que incluye los operadores creadores de carga, satisface aditividad y dualidad de Haag, éste no es el caso para el modelo neutro \mathcal{O} . De hecho, podemos resumir la presencia de clases HDV en el modelo

⁵Dado un grupo de simetría global G , la existencia de twists locales τ_g que implementan la acción de $g \in G$ sobre el álgebra de una región por conjugación esta garantizada en QFT bajo requerimientos muy generales. Estudiaremos en detalle estos twists y sus propiedades en el capítulo 5.

\mathcal{O} mediante el diagrama de complementariedad cuántica

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\max}^{\mathcal{O}}(B_1 \cup B_2) &\equiv \mathcal{A}^{\mathcal{O}}(B_1 \cup B_2) \vee \{\mathcal{I}_r\} \supset \mathcal{A}^{\mathcal{O}}(B_1 \cup B_2) \\ &\quad \uparrow' \qquad \uparrow' \\ \mathcal{A}^{\mathcal{O}}((B_1 \cup B_2)') &\subset \mathcal{A}((B_1 \cup B_2)') \vee \{\tau_c\} \equiv \mathcal{A}_{\max}^{\mathcal{O}}((B_1 \cup B_2)'). \end{aligned} \quad (2.41)$$

En palabras, los intertwiner y los twists producen la tensión entre aditividad y dualidad de Haag en la teoría del orbifold. En efecto, como ya mencionamos, estos no comutan y generan las clases no locales. En cuanto a las reglas de fusión de dichas clases, podemos elegir los intertwiners (Véase apéndice A de [23]) de manera que se satisfagan

$$\mathcal{I}_r \mathcal{I}_{r'} = \sum_{r''} n_{rr'}^{r''} \mathcal{I}_{r''}, \quad (2.42)$$

con $n_{rr'}^{r''}$ las matrices de fusión de las representaciones del grupo G . Mientras que los twists, etiquetados por sus clases de conjugación, satisfacen las reglas de fusión

$$\tau_c \tau_{c'} = \sum_{c''} m_{cc'}^{c''} \tau_{c''}, \quad (2.43)$$

con $m_{cc'}^{c''}$ los coeficientes de fusión de clases de conjugación de G .

Un punto importante en cuanto a nomenclatura es el siguiente, durante esta tesis muchas veces nos referiremos a “simetrías generalizadas” incluyendo el caso de simetrías globales usuales o 0-forma. Cuando lo hagamos nos estaremos refiriendo a las ideas de esta sección donde las violaciones de dualidad aparecen en la teoría del orbifold pero no en la teoría completa.

2.2.7. Simetrías 1-forma y regiones con π_1 no trivial

En esta sección desarrollaremos el ejemplo de violaciones de dualidad de Haag generadas por simetrías 1-forma. Con este propósito, tomamos una región R con grupo de homotopía π_1 no trivial, es decir, una región tipo anillo con lazos no contractibles. El caso más sencillo de analizar es el de simetrías 1-forma en teorías de gauge abelianas. En particular, para el campo de Maxwell libre en $D = 4$ podemos encontrar dos 2-formas conservadas estas son

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ d * F &= 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde notamos como $F = dA$ a la derivada exterior del campo de gauge y con $*$ al operador dual de Hodge. De esta manera, podemos entender que la primera de las

conservaciones es simplemente por simetría ($d^2 = 0$) y que la segunda es debido a las ecuaciones de movimiento.

Podemos integrar estas corrientes sobre superficies bidimensionales abiertas Σ_2 de la forma (2.22) para obtener

$$\Phi_{\partial\Sigma_2}^B = \int_{\Sigma_2} F, \quad \Phi_{\partial\Sigma_2}^E = \int_{\Sigma_2} *F, \quad (2.45)$$

Observamos que, debido a las leyes de conservación (2.44), podemos entender a los flujos como operadores asociados exclusivamente a los bordes unidimensionales $\partial\Sigma_2$. Nuevamente, esto es porque los operadores de flujo son los mismos para cualquier elección de Σ_2 que no cambie sus respectivos bordes. De la misma manera, vemos que ambos flujos comutan con todos los operadores en el álgebra aditiva de la región complementaria $\mathcal{A}(R')$ generada exclusivamente por el campo F y sus productos y derivadas.

Otra forma de hacer evidente esta idea, es utilizando el campo de gauge A . En particular, usando el teorema de Stokes, podemos entender a $\Phi_{\partial\Sigma_2}^B$ ⁶ como la circulación del campo de gauge sobre el lazo cerrado $\partial\Sigma_2$

$$\Phi_{\partial\Sigma_2}^B = \int_{\Sigma_2} F = \int_{\Sigma_2} dA = \oint_{\partial\Sigma_2} A. \quad (2.46)$$

Ahora, si $\partial\Sigma_2$ es un lazo no contractible en R no podemos generar al operador de flujo $\Phi_{\partial\Sigma_2}^B$ con operadores locales invariantes de gauge en R . Lo mismo sucede con $\Phi_{\partial\Sigma_2}^E$. La conclusión es que los unitarios (operadores acotados) que podemos definir exponenciando los flujos (2.45) de la forma

$$W_{\partial\Sigma_2}^q = e^{iq\Phi_{\partial\Sigma_2}^B}, \quad T_{\partial\Sigma_2}^g = e^{ig\Phi_{\partial\Sigma_2}^E}, \quad q, g \in \mathbb{R}, \quad (2.47)$$

pertenecerán a $\mathcal{A}_{\max}(R)$ pero no a $\mathcal{A}(R)$. Es decir, los WL y TL usuales representan los operadores no locales para regiones tipo anillo en la teoría de Maxwell.

Establecimos en la sección 2.2.3, que los operadores no locales vienen en pares duales que no comutan. En este caso el complemento de una región R con π_1 no trivial es una región R' con la misma topología. De esta forma, las clases HDV en R' también serán generadas por los WL y TL. Para calcular el conmutador entre los WL y TL, el camino mas sencillo es introducir una foliación y calcular el conmutador entre los flujos a tiempo constante. En este caso, los flujos no son mas que los flujos Φ^B y Φ^E de los campos eléctricos y magnéticos respectivamente

$$\Phi_{\partial\Sigma_2}^B = \int_{\Sigma_2} dS^i B_i, \quad \Phi_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^E = \int_{\tilde{\Sigma}_2} dS^i E_i. \quad (2.48)$$

⁶Introduciendo el campo de gauge dual de la forma $*F = d\tilde{A}$ podemos hacer lo mismo con $\Phi_{\partial\Sigma_2}^E$.

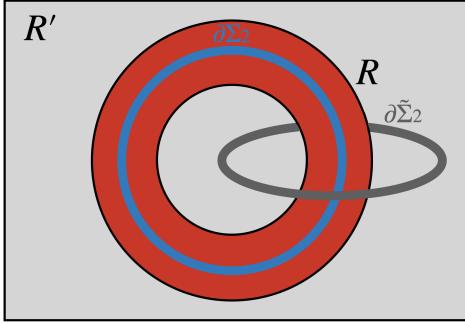


Figura 2.6: La región R con homotopía π_1 no trivial contiene lazos no contractiles como $\partial\Sigma_2$. De la misma manera, su complemento causal R' contiene también lazos no contractiles como $\partial\tilde{\Sigma}_2$. Los WL y TL asociados a $\partial\Sigma_2$ no comutan con los TL y WL sobre $\partial\tilde{\Sigma}_2$ respectivamente.

Nótese que también podríamos haber tomado como punto de partida las leyes de conservación del tipo

$$\partial^i B_i = 0, \quad \partial^i E_i = 0. \quad (2.49)$$

Las relaciones de commutación de los campos invariantes de gauge, obtenidas como consecuencia de las relaciones de commutación canónicas están dadas por

$$[E_i(x), B_j(y)] = i\varepsilon_{ijk}\partial^k\delta(x - y). \quad (2.50)$$

A partir de aquí, podemos recuperar que el commutador de los flujos asociados a regiones complementarias (Vease figura 2.6) es proporcional al numero de enlace entre los lazos que definen los respectivos flujos

$$[\Phi_{\partial\Sigma_2}^B, \Phi_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^E] = \frac{i}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma_2} \oint_{\partial\tilde{\Sigma}_2} \varepsilon_{ijk} \frac{(x - y)^i}{|x - y|^3} dx^j dy^k = i \text{ link}(\partial\Sigma_2, \partial\tilde{\Sigma}_2) \quad (2.51)$$

donde $\text{link}(\partial\Sigma_2, \partial\tilde{\Sigma}_2)$ cuenta cuantas veces $\partial\Sigma_2$ enlaza a $\partial\tilde{\Sigma}_2$. Si bien este es un resultado conocido, en la sección 3.2.2 mostraremos como recuperarlo a través de versiones con smearing de los flujos. Exponenciando la relación (2.51) mediante la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff recuperamos

$$W_{\partial\Sigma_2}^q T_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^g = e^{iq_g} T_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^g W_{\partial\Sigma_2}^q. \quad (2.52)$$

Esto implica que los WL W_q y los TL T_g en efecto definen las clases HDV no locales. En $D = 4$ tanto los WL y TL se asocian a lazos unidimensionales produciendo operadores no locales en regiones tipo anillo. Como dijimos el complemento de una región tipo anillo en $D = 4$ tiene topología de anillo. Esto implica que los WL y TL también serán los operadores HDV en la región complementaria, produciendo el siguiente diagrama

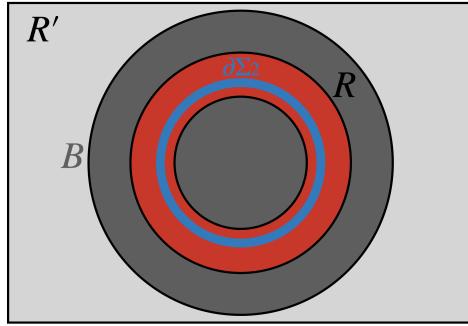


Figura 2.7: Los WL y TL definidos sobre un lazo $\partial\Sigma_2$ no contractible en R representan operadores no locales para dicha región. Sin embargo, estos son localmente generables en una bola B que contiene a R

de complementariedad cuántica

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\max}(R) &\equiv \mathcal{A}(R) \vee \{W^q, T^g\}_{q,g \in \mathbb{R}} \supset \mathcal{A}(R) \\ &\quad \downarrow' \quad \downarrow' \\ \mathcal{A}(R') &\subset \mathcal{A}(R') \vee \{W^q, T^g\}_{q,g \in \mathbb{R}} \equiv \mathcal{A}_{\max}(R'). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por otro lado, las reglas de fusión de los operadores no locales son las de un grupo abeliano.

$$W_{\partial\Sigma_2}^q W_{\partial\Sigma_2}^{q'} = W_{\partial\Sigma_2}^{q+q'}, \quad T_{\partial\Sigma_2}^g T_{\partial\Sigma_2}^{g'} = T_{\partial\Sigma_2}^{g+g'}. \quad (2.54)$$

Veremos en la sección 2.2.8 que este siempre sera el caso para clases HDV únicamente asociadas simetrías 1-forma. Más aún, reescribiendo la relación de conmutación (2.52) convenientemente tenemos,

$$W_{\partial\Sigma_2}^q T_{\partial\Sigma_2}^g (W_{\partial\Sigma_2}^q)^{-1} = e^{iqg} T_{\partial\Sigma_2}^g, \quad T_{\partial\Sigma_2}^g W_{\partial\Sigma_2}^q (T_{\partial\Sigma_2}^g)^{-1} = e^{-iqg} W_{\partial\Sigma_2}^q. \quad (2.55)$$

Es decir, los WL de R forman un grupo \mathbb{R} ante el cual los TL de R' están cargados y los los TL de R forman otro grupo \mathbb{R} ante el cual los WL de R' están cargados. Lo mismo sucede para la región complementaria de manera que el grupo de todas las clases HDV es $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Como hemos descrito anteriormente, uno podría argumentar que todos estos operadores no locales no pueden pertenecer a la teoría para preservar la causalidad. Esto no es cierto porque todos estos WL son generados por flujos del campo magnético, por lo que evidentemente se generan localmente en una bola que contiene a la región tipo anillo R . Véase la figura 2.7. También, podemos deducir la existencia de todos los TL en la misma bola partir del teorema de la doble comutación de von Neumann o bien de su definición como exponencial de un flujo eléctrico.⁷

⁷Nótese que el primero de estos argumentos sigue siendo valido cuando introducimos cargas eléctricas dinámicas en la teoría mientras el segundo no.

Sin embargo, es cierto que todos estos operadores no locales no pueden pertenecer a las álgebras de R y R' simultáneamente. Podríamos bien trabajar con una red aditiva, es decir tomar $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}(R')$ de manera que se respete (2.18) a expensas de la dualidad de Haag. O bien podríamos construir una red HD que respete (2.21) a expensas de aditividad. Considerando el operador no local mas general en R esta dado por dión obtenido al multiplicar un WL y TL

$$D_{\partial\Sigma_2}^{(g,q)} = W_{\partial\Sigma_2}^q T_{\partial\Sigma_2}^g. \quad (2.56)$$

Una condición natural es añadir operadores con cargas magnéticas y eléctricas (g, q) a todos los anillos. Dados dos diones (g, q) y (\tilde{g}, \tilde{q}) en el mismo anillo, el formado por su producto $(g + \tilde{g}, q + \tilde{q})$, y los conjugados $(-g, -q)$ y $(-\tilde{g}, -\tilde{q})$, también debe estar presente para cerrar un álgebra. Por lo tanto, el conjunto de todos los diones debe ser un subgrupo aditivo del plano, dando una red

$$(g, q) = n_1(g_1, q_1) + n_2(g_2, q_2), \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad (g_1, q_1), (g_2, q_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.57)$$

En Ademas, dada la relación de conmutación (2.52) tenemos que

$$D_{\partial\Sigma_2}^{(g,q)} D_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^{(\tilde{g},\tilde{q})} = e^{i(q\tilde{g} - \tilde{q}g)} D_{\partial\tilde{\Sigma}_2}^{(\tilde{g},\tilde{q})} D_{\partial\Sigma_2}^{(g,q)}. \quad (2.58)$$

por ende, si queremos una red HD, podemos reescribir el requerimiento de conmutatividad como

$$q\tilde{g} - \tilde{q}g = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.59)$$

Esto es compatible con (2.57) siempre que $(q_1g_2 - g_1q_2)/2\pi \in \mathbb{Z}$. Si queremos construir una red de Haag-Dirac, necesitamos tomar un conjunto máximo de cargas que satisfagan (2.57). Esto nos obliga a elegir $q_1g_2 - g_1q_2 = 2\pi$.

Para el caso del campo relativista de Maxwell, al resolver para el espacio de soluciones de la ecuación anterior, necesitamos tener en cuenta que existe una simetría de dualidad que mapea campos eléctricos y magnéticos y viceversa. Entonces, hay un parámetro libre oculto que nos mueve entre redes de Haag-Dirac isomorfas. Esta libertad puede eliminarse escribiendo las distintas soluciones como

$$(g, q) = \left(\frac{2\pi}{q_0} n_m, q_0 \left(n_e + \frac{\theta}{2\pi} n_m \right) \right), \quad q_0 \in \mathbb{R}^+, \quad n_e, n_m \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (2.60)$$

siendo esta condición sobre las cargas eléctricas y magnéticas conocida como cuantización de Dirac o Dirac-Zwanziger [52–55]. Las redes con $\theta \neq 0, \pi$ no son simétricas ante la reflexión temporal. Nótese que en un modelo específico que describe cargas eléctricas y monopolos, al añadir un término θ topológico al Lagrangiano, cambiamos las cargas

de la red según el efecto Witten [56]. Volveremos sobre este efecto en el capítulo 7.

Estas redes de HD, así construidas satisfarán la dualidad de Haag, pero no la aditividad. La aditividad puede recuperarse si acoplamos la teoría a campos cargados. Por ejemplo, si tenemos un campo ψ de carga eléctrica q_0 , ahora podemos considerar operadores las líneas de Wilson invariantes de gauge la forma

$$W_{x \rightarrow y}^{q_0} = \psi(x) e^{iq_0 \int_x^y dx^\mu A_\mu} \psi^\dagger(y). \quad (2.61)$$

Tomando productos de líneas de Wilson consecutivas, y permitiendo la fusión de los campos con cargas opuestas en los extremos de las líneas que queremos unir, vemos que WL de carga q_0 ya no representa un operador no local para regiones tipo anillo. En otras palabras, la introducción de una partícula cargada con carga q_0 nos permite recuperar los WL con carga q_0 a partir de operadores invariantes gauge (líneas de Wilson) dentro del anillo. Esto significa que el WL de R carga q_0 pertenece ahora al álgebra aditiva del anillo, $W_{\partial\Sigma_2}^{q_0} \in \mathcal{A}(R)$ para $\partial\Sigma_2 \in R$. Esto tiene dos consecuencias:

- (a) Podemos escribir los WL de carga $q > q_0$ como producto de tantos WL aditivos de carga q_0 que necesitemos y un WL de carga $q < q_0$. Esto es evidente a partir de las reglas de fusión. En consecuencia, los únicos WL verdaderamente no locales son los que tienen $0 < q < q_0$ porque los operadores aditivos definen la equivalencia de las clases a partir de (2.27). Esto implica que los WL generan un $U(1)$ con los TL de R' como objetos cargados y lo mismo sucede en la región complementaria.
- (b) Podemos obtener el álgebra máxima de la región complementaria $\mathcal{A}_{\max}(R')$ como el conmutante $\mathcal{A}(R)$. Dado que esta última incluye ahora el WL de carga q_0 , la primera no puede tener los TL⁸ cuya carga difiera de $g = 2\pi k/q_0$ para $k \in \mathbb{Z}$. Esto implica que los TL de R' generan un \mathbb{Z} con los WL de R como objetos cargados y lo mismo sucede en la región original.

En la ausencia de cargas el grupo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ representa el grupo de todos las clases HDV posibles para regiones tipo anillo. El resultado de agregar la carga eléctrica es que las clases HDV se rompen al grupo $(U(1) \times \mathbb{Z}) \times (U(1) \times \mathbb{Z})$. Podríamos también agregar monopolios dinámicos de carga $g_0 = 2\pi/q_0$ en la teoría obteniendo así un teoría sin clases no locales y por ende completa.

Para el caso de $D \neq 4$ tenemos que el complemento de una región con tipo anillo tiene π_{D-3} no trivial. Sin embargo, si bien el WL sigue siendo asociable a un lazo unidimensional el TL es un operador definido sobre superficies cerradas $(D-3)$ -dimensionales. Los WL producen clases HDV en R y los TL hacen lo mismo en R' . La relación de

⁸Si bien el espacio de fases con la carga dinámica es diferente, la definición de los TL en presencia de dicha carga ya no es la exponencial del flujo eléctrico pero conserva (2.52). En la sección 7.1.3 describimos como realizar dicha construcción usando la integral de camino.

comutación se mantienen y podemos escribir el diagrama de complementariedad cuántica

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\max}(R) \equiv \mathcal{A}(R) \vee \{W^q\}_{q \in \mathbb{R}} &\supset \mathcal{A}(R) \\ &\quad \uparrow' \quad \uparrow' \\ \mathcal{A}(R') &\subset \mathcal{A}(R') \vee \{T^g\}_{g \in \mathbb{R}} \equiv \mathcal{A}_{\max}(R') . \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde el grupo de clases HDV es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y agregando cargas eléctricas se rompe a $U(1) \times \mathbb{Z}$. Vemos, en estos casos, que si las clases HDV forman un grupo continuo compacto, entonces las clases duales son discretas. Durante esta tesis diremos que en estos casos tenemos una “simetría generalizada compacta”. Por el contrario, vemos que si las clases HDV de la región original corresponden a un grupo no compacto, lo mismo se aplica a las clases duales. De esta manera, llamaremos a las simetrías generalizadas que producen este tipo de clases “simetría generalizada no compacta”.

Por otro lado, en el caso no abeliano la dificultad reside en que las leyes de conservación (2.44) ya no son válidas, ni los campos eléctricos y magnéticos son invariantes de gauge. De esta manera perdemos la interpretación de los WL y TL como exponenciales de flujos. Sin embargo, podemos seguir definiendo el WL mediante el potencial de gauge como

$$W_{\partial\Sigma_2}^r = \text{Tr} \left[\mathcal{P} e^{i \oint_{\partial\Sigma_2} dx^\mu A_\mu^r} \right]. \tag{2.63}$$

Un punto interesante es que inclusive la ausencia de cargas algunos WL son destructibles, es decir, pertenecen al álgebra aditiva. Esto es porque los propios gluones están cargados. Están cargados bajo la representación adjunta. De hecho, podemos formar la siguiente línea de Wilson

$$F_{\alpha\beta}(x) \mathcal{P} e^{i \int_x^y dx^\mu A_\mu} F_{\gamma\delta}(y). \tag{2.64}$$

donde todos los campos están en la representación adjunta del álgebra de Lie. Esto produce que los verdaderamente no locales, es decir los que no pueden ser aditivamente generados en una región tipo anillo, están etiquetados por las clases de equivalencia que surgen cuando cocientamos el conjunto de representaciones irreducibles por el conjunto de representaciones generadas a partir del WL adjunto. De esta manera, los WL no locales están etiquetados por las representaciones del centro del grupo de gauge, mientras que los TL por los elementos de dicho centro. No seguiremos el desarrollo extensivo de estas clases HDV para teorías de gauge no abelianas en esta tesis. Para un tratamiento con más profundidad, desde este punto de vista algebraico, véase [23, 57].

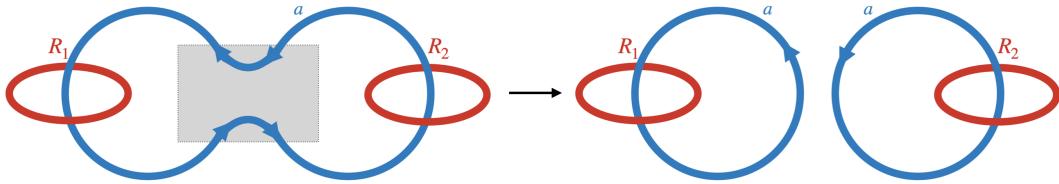


Figura 2.8: Pegado con operaciones aditivas de operadores no locales de lazo pertenecientes a la misma clase HDV.

2.2.8. Reglas de fusión para clases HDV

Ahora que hemos visto algunos ejemplos, una pregunta interesante es que forma pueden tomar las reglas de fusión (2.28) de las clases HDV (2.27). En esta sección, estudiaremos cuales son las posibilidades para las simetrías 0-forma y 1-forma analizadas en los ejemplos 2.2.6 y 2.2.7 respectivamente.

Para el caso de simetrías globales y regiones con π_0 no trivial discutido en la sección 2.2.6 las reglas de fusión están acotadas por el teorema de reconstrucción Doplicher-Haag-Roberts (DHR) [58–62]. Este teorema establece que en $D > 2$, bajo condiciones bastante generales como dualidad de Haag para bolas simples, las álgebras de fusión asociadas a sectores de superselección de bola surgen de un grupo. En $D = 2$ pueden aparecer reglas de fusión más generales [63, 64]. Cuando aplicamos este resultado a las teorías del orbifold como \mathcal{O} , vemos que las clases de equivalencia asociadas a violaciones de dualidad de Haag en sectores de dos bolas deben obedecer reglas de fusión de un grupo o un cociente de grupos [51]. Más aún, como vimos en (2.42-2.43) estas reglas de fusión están dadas por las matrices de fusión de las representaciones o clases de conjugación correspondientes. En el sentido inverso, el teorema de reconstrucción también muestra que partiendo del modelo \mathcal{O} con este tipo de clases HDV existe una nueva teoría completa \mathcal{F} donde los operadores cargados curan estos problemas de dualidad de Haag y aditividad. El grupo de simetría está representado globalmente en \mathcal{F} actuando sobre los campos cargados. Es destacable que esta reconstrucción no cambia la teoría \mathcal{O} ya que las funciones de correlación de los operadores invariantes no cambian después de incluir los operadores cargados.

Otro caso particularmente interesante es el de teorías con simetrías 1-forma. Como vimos en la sección 2.2.7, estas simetrías suelen aparecer en teorías tipo gauge y están caracterizadas por operadores HDV no locales definidos sobre lazos unidimensionales. Para el caso de teorías abelianas podemos pensar estos operadores como definidos de forma análoga a (2.45). Pero, las ideas que desarrollaremos a continuación aplican también a teorías de gauge no abelianas donde no tenemos una corriente 2-forma conservada. Un ejemplo son los WL no abelianos de la forma (2.63). En cualquier caso estos operadores generan clases HDV asociadas a regiones tipo anillo (con grupo de homotopía π_1 no trivial) y su complemento (con grupo de homotopía π_{D-3} no trivial).

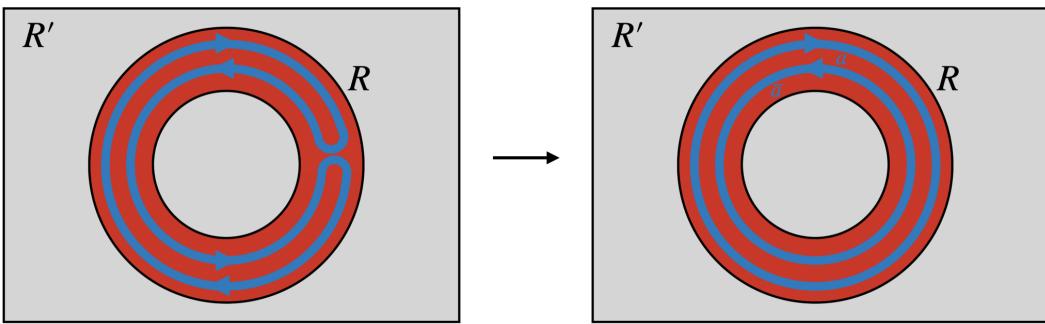


Figura 2.9: Pegado de operadores no locales asociados a una simetría 1-forma dentro de un anillo R . El operador de lazo en el panel izquierdo es contractible en R así que pertenece a la clase identidad $[1]$. Entonces los operadores en el panel derecho deben corresponder a clases HDV $[a], [\bar{a}]$ inversas entre si de manera que $[a][\bar{a}] = [1]$

Ahora, siguiendo el desarrollo presentado en [23], probaremos que en estos casos (y en la ausencia de sectores de dos bolas) las reglas de fusión son las de un grupo abeliano, es decir, (2.28) presenta un solo elemento del lado derecho.

Comenzamos en la configuración dibujada en la figura 2.8, tomando dos regiones tipo anillo no enlazadas R_1 y R_2 (que contienen a las curvas rojas). Vemos que un operador de lazo correspondiente a la clase a de $(R_1 \cup R_2)'$, que se enlaza una vez con R_1 y otra con R_2 (curva azul en el panel izquierdo) pertenece a la misma clase que el producto de dos operadores de lazo disjuntos de clase a , cada uno enlazado una sola vez con uno solo de los dos anillos R_1 y R_2 (curvas azules en el panel derecho). Esto es así porque, en la ausencia de sectores de dos bolas, el álgebra de operadores no locales de los dos anillos R_1 y R_2 es el producto tensorial de las álgebras de operadores no locales de R_1 con las de R_2 . No es difícil ver que el lazo original de un componente de clase a basado en $(R_1 \cup R_2)'$ tiene la misma acción sobre el álgebra no local de la región $(R_1 \cup R_2)$ que el producto de los dos lazos independientes de la misma clase. Luego, el lazo de un componente y los dos lazos pertenecen a la misma clase. Esto implica que están relacionados mediante operaciones aditivas en $(R_1 \cup R_2)'$ (representadas por la región gris). Este es un paso importante para demostrar que el álgebra no local es abeliana, ahora sabemos que podemos pegar y separar lazos asociados a operadores no locales de la misma clase HDV. Nótese que para alcanzar la configuración geométrica de la figura 2.8 requerida por la prueba necesitamos una dimensión espacio-temporal $D > 3$.

Ahora pasamos a la configuración presentada en la figura 2.9. Tomemos una única región tipo anillo R (region roja) con un operador de lazo de la clase a en su interior, pero con este operador doblado de tal manera que sea localmente generable en R (curva azul en el panel izquierdo). Si ejecutamos la misma operación que en el caso anterior obtenemos dos operadores de lazo correspondientes a las clases a y \bar{a} (curvas azules en el panel izquierdo). Sin embargo, como lazo original era contractible correspondía a la

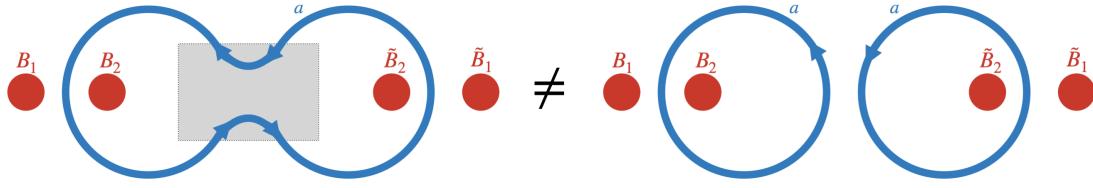


Figura 2.10: Imposibilidad de pegado de operadores HDV no locales para dos bolas con operaciones aditivas

clase identidad debido a que el lazo original era contractible esto implica que

$$[a][\bar{a}] = \sum_{a''} n_{a\bar{a}}^{a''} [a''] = [\mathbb{1}] \Rightarrow n_{a\bar{a}}^{a''} = 0, \forall a'' \neq \mathbb{1}. \quad (2.65)$$

En palabras, hemos establecido $[\bar{a}]$ como la inversa de $[a]$ y viceversa. Ahora volvamos a la expresión general (2.28) y veamos que es lo que esto implica

$$[a][a'] = \sum_{a''} n_{aa'}^{a''} [a''] \Rightarrow [a'] = [\bar{a}][a][a'] = \sum_{a''} n_{aa'}^{a''} [\bar{a}][a'']. \quad (2.66)$$

Ahora, si asumimos que en el lado derecho de la ultima expresión tenemos más de un termino, por ejemplo $n_{aa'}^{a_1''}, n_{aa'}^{a_2''} \neq 0$ tenemos que

$$[a'] = [\bar{a}][a_1''] = [\bar{a}][a_2''] \Rightarrow [a][a'] = [a_1''] = [a_2''] \quad (2.67)$$

En conclusión , tenemos que las reglas de fusión de las clases HDV asociadas a una simetría 1-forma sean las de un grupo abeliano, es decir

$$[a][\bar{a}] = [\mathbb{1}], \quad [a][\mathbb{1}] = [a], \quad [a][a'] = n_{aa'}^{a''} [a''] \text{ (no suma en } a''). \quad (2.68)$$

Ademas, es de esperarse que este tipo de ideas puedan aplicarse a simetrías del tipo k -forma con $k \geq 1$ en general, pero no existe una prueba conocida para $k > 1$.

Observamos que no podría realizarse este tipo de pruebas para el caso de regiones desconectadas con topología de dos bolas. De hecho, vimos en este caso que las reglas de fusión (2.42-2.43) no son necesariamente abelianas como (2.68). La razón principal de esta diferencia es que en este caso no podemos pegar/separar operadores HDV con operadores locales. Esto es porque debemos remplazar los dos anillos R_1 y R_2 en la figura 2.8 por las regiones de dos bolas $R_1 = (B_1 \cup B_2)$ y $R_2 = (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$. Véase la figura 2.10. Sin embargo, en este caso las clases HDV de $(R_1 \cup R_2)$ no son el producto tensorial de las clases de R_1 y R_2 porque podemos formar intertwiners entre B_2 y \tilde{B}_2 . De esta manera uno de los argumentos fundamentales de la prueba presentada en esta sección ya no es valido en este caso. Lo mismo ocurre para teorías con simetrías 1-forma que también presenten clases HDV asociadas a regiones de π_0 no trivial.

2.3. Líneas genuinas y superficies topológicas como operadores HDV

Ahora describiremos la forma estándar en que se suelen describir las simetrías generalizadas, conectándola con la discusión anterior. La presente sección no es necesaria para comprender el contenido de esta tesis. La incluimos aquí porque sera útil para el lector familiarizado con literatura de simetrías generalizadas y cuando comparemos algunos de nuestros resultados con la bibliografía reciente durante la sección 7.2.

En la referencia fundamental [8], véase también [65], se propuso una clasificación particular de los operadores/defectos que aparecen en QFT con simetrías generalizadas. Esta clasificación se estudia principalmente en la formulación euclídea de la teoría. Los principales papeles los desempeñan los “generadores de simetría” y los “operadores cargados genuinos”, tales como las líneas genuinas para simetrías 1-forma. Estos operadores cargados genuinos son los parámetros de orden de la simetría generalizada en esta formulación.

Aunque a veces los generadores de simetría se denominan “operadores topológicos de simetría”, es más apropiado decir que son endomorfismos del álgebra de operadores. De hecho, suelen definirse por su acción sobre los operadores. En el ejemplo de la sección 2.2.7, para la simetría 1-forma eléctrica $U(1)$ en la teoría de Maxwell en $D = 4$, el flujo eléctrico exponenciado sobre superficies bidimensionales cerradas efectúa uno de estos endomorfismo de simetría $F^g \equiv e^{ig\Phi^E}$. En particular, actúa sobre líneas de Wilson $W^q \equiv e^{i\oint A dx} = e^{iq\Phi^B}$ que enlazan con dicha superficie como

$$F^g(W^q) = e^{-igq} W^q. \quad (2.69)$$

La razón por la que F^g no es un operador bien definido en la teoría lorentziana a tiempo real es sencilla. Para una superficie cerrada el operador que obtenemos es la identidad debida a la ley de Gauss. Pero, aunque esto es más propiamente un endomorfismo, tiene un avatar en el álgebra de operadores de la teoría. Cortando la superficie cerrada que define a F^g en dos mitades, obtenemos un operador real, llamémoslo T^g , en una mitad y su inverso en la otra mitad. El significado del endomorfismo en la teoría lorentziana pasa a ser (2.55), es decir

$$F^g(W^q) = T^g W^q (T^g)^{-1} = e^{-igq} W^q, \quad (2.70)$$

donde T^g se denominan, a veces, operadores topológicos de superficie. Por supuesto, una vez que cortamos el flujo en dos mitades, aparecen ambigüedades locales en la definición del operador en su frontera unidimensional. Pero estas ambigüedades por la acción de los operadores locales no afectan a la ley de transformación anterior ya

que conmutan con el WL. De hecho, como cualquier representante es tan bueno como cualquier otro, es más propio hablar de las clases que surgen por el cociente de los operadores no locales sobre dichas acciones de operadores locales en una cierta región topológicamente no trivial. Estas son las clases HDV que definimos en la sección 2.2.2.

Concluimos que, en tiempo real, la caracterización de operadores planteada en [8] concierne a flujos abiertos de corrientes generalizadas (o más en general operadores topológicos de superficie) y operadores cargados genuinos.⁹ Notemos, sin embargo, que el papel de WL y TL en (2.70) puede invertirse como en (2.55). Por ende, también, podemos decir que los TL son los cargados bajo la acción de los WL. En efecto, ya vimos que desempeñan un papel simétrico dual y que pueden entenderse como variables complementarias cuánticas en un sentido preciso (2.53). De forma más general, estos operadores son proporcionados por los a y los b en la discusión de sección 2.2.3. En este sentido, la perspectiva de esta tesis es que uno puede entender las simetrías generalizadas directamente en la física local del espacio plano.¹⁰

Como tal, esta nomenclatura usual en la literatura de simetrías generalizadas diferiría muy poco de nuestro enfoque. El problema surge cuando esta selección particular de lo que es un “operador de línea genuino” y lo que es un “operador de superficie topológico” se promueve para que tenga un significado físico intrínseco. Por ejemplo, el denominado campo de Maxwell compacto libre se dice que tiene WL genuinos W^q en R y TL genuinos T^q que envuelven el anillo R' . Se denominan $g = g_0 n_m$ y $q = q_0 n_e$, siendo n_m, n_e números enteros y $q_0 = 2\pi/g_0$. Esta elección satura la condición de cuantización de Dirac que vimos en (2.60). Obviamente conmutan con el álgebra local exterior, y no pueden ser generados por operaciones locales invariantes de gauge en R o R' respectivamente. Son operadores HDV en el sentido descrito anteriormente. Pero también tenemos los operadores topológicos de superficie, es decir, la exponencial de los flujos eléctrico y magnético sobre superficies abiertas con límites R y R' . Estas superficies topológicas están etiquetadas por dos ángulos $q \in [0, q_0)$ y $g \in [0, g_0)$ y precisamente no conmutan con los operadores de línea anteriores. Estos operadores de flujo son también operadores HDV, y son no locales en ese preciso sentido. De hecho, este modelo es el campo de Maxwell ordinario que para $D = 4$ y tiene un grupo de operadores HDV $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dados por cargas eléctricas y magnéticas arbitrarias. En este ejemplo es bastante evidente la arbitrariedad de la elección de los llamados operadores de línea y de superficie topológica. Todos los operadores no locales son operadores de línea en el sentido de que conmutan con operadores locales fuera del anillo en el que están definidos, y ambos son operadores topológicos de superficie en el sentido de que son localmente construibles dentro de una bola, pero no de un anillo. Lo mismo puede

⁹Para simetrías 0-forma, estos flujos abiertos son los twists que hemos discutido en la sección 2.2.6.

¹⁰En un enfoque llamado “Symmetry Topological Field Theories” [66–69], se añaden dimensiones extra para caracterizar las simetrías. Sería interesante entender la conexión con dicho enfoque.

decirse en ejemplos más complicados, como una teoría de gauge $SU(2)$.

Más que la terminología de operadores de línea y operadores topológicos de superficie (que normalmente entran en la formulación como endomorfismos y no como operadores), el núcleo de diferencia entre los enfoques parece ser el requisito de que los operadores no locales correspondientes a regiones complementarias deben commutar. Esta es la razón por la que se piensa en ellos como operadores de línea, la idea subyacente es que comutan con seguridad entre sí a distancia espacial. De hecho, en cualquier teoría con clases HDV, podemos dar el paso de extender las álgebras aditivas $\mathcal{A}_{\text{add}}(R)$ algunos operadores no locales (no todos), y cuidar que los que añadimos para regiones complementarias comuten entre sí. De esta forma podemos llegar a redes de álgebras que satisfacen la dualidad de Haag. Estas redes son locales en el segundo sentido mencionado en la sección 2.2.1. Un ejemplo es la red del campo de Maxwell donde tomamos WL y TL con cargas cuantizadas que satisfacen la condición de cuantización de Dirac. Durante la sección 2.2.4, hemos llamado redes de Haag Dirac (HD) a este tipo de elecciones ya que las nociones de dualidad de Haag y de cuantización de Dirac resultan coincidentes. Aunque no hay ningún problema en hacerlo, observamos que se trata de un juego puramente académico sin ninguna consecuencia física. En efecto, tenemos que

- (a) Siempre hay muchas opciones posibles de redes de HD.
- (b) La teoría es exactamente la misma para cualquiera de estas opciones, y no podemos distinguirlas físicamente, ya que todas las redes tienen las mismas álgebras de operadores locales con los mismos valores de expectación, y todos los operadores pertenecen en última instancia al álgebra aditiva de alguna bola.
- (c) Una red de Haag Dirac no satisface la aditividad. Así que, incluso desde un punto de vista puramente matemático, la red aditiva, los operadores no locales y cualquier otra elección de red (como una red HD diferente) pueden reconstruirse a partir de cualquiera de ellas.

Por supuesto, la elección de una red HD es importante si se van a introducir cargas dinámicas que destruyen la no aditividad de los operadores no locales.¹¹ La causalidad implica que la única manera de hacerlo es rompiendo los operadores no locales que comutan entre sí. Pero la introducción de cargas dinámicas produciría un modelo diferente, y precisamente destruiría todas las simetrías generalizadas o sectores HDV. La existencia de simetrías generalizadas es lo mismo que la existencia de diferentes redes HD para la misma teoría. Por eso insistir en la elección de una red HD oscurece precisamente la naturaleza de los fenómenos en discusión.

¹¹La elección de una red HD no es necesaria si las cargas son sondas externas y no son dinámicas.

En este sentido, pensamos que es engañoso decir, como es habitual en la literatura, que hay dos teorías de gauge puras con grupos de gauge $SU(2)$ y $SO(3)$ porque una de ellas contiene el WL fundamental y la otra el TL.¹² En realidad, estas son la misma teoría $SU(2)$, que contiene tanto el WL como el TL. La razón detrás de esta afirmación, es que si hay un operador no local no se puede evitar la existencia del dual. La denominación, entonces, no se refiere a teorías, sino a redes HD. Esto sólo puede ser inofensivo si no se extraen consecuencias físicas de ello.

De esta manera aprendemos varias cosas. La primera es que, después de todo, los operadores topológicos de superficie, desde una perspectiva física precisa, no son tanto “operadores de superficie”. Están naturalmente asociados a los bordes de las superficies que los definen, ya que comutan con el álgebra aditiva de cualquier región que no incluya al mismo. La segunda es que, después de todo, las líneas genuinas no son tanto “operadores de línea”. Para construirlas utilizando operadores locales invariantes de gauge necesitamos superficies que vayan más allá de las líneas sobre las que se definieron en un principio. La tercera es que la no commutatividad entre operadores duales HDV no sólo no es un problema, sino una necesidad matemática. Es lo que permite al endomorfismo de simetría topológica hacer su trabajo sobre los operadores cargados. Estas estructuras no commutativas aparecen directamente a partir del álgebra aditiva, que es el álgebra local intrínseca, simplemente analizando sus commutantes.

De nuevo nos encontramos con el resultado de que el álgebra aditiva contiene toda la información sobre los parámetros de orden y los generadores de simetría. De hecho, queda claro que todos los operadores HDV deben considerarse como parámetros de orden. Esto resuelve un problema ya descrito en la referencia original [8], donde se reconocía que la teoría de gauge $SU(N)$ contiene más parámetros de orden que las habituales líneas de Wilson. Básicamente, se trata de los flujos eléctricos no abelianos, los generadores de la simetría 1-forma de la teoría. Dicha referencia señalaba que sería deseable una teoría más unificada de los parámetros de orden. El presente enfoque proporciona precisamente dicho marco unificado. La solución es que tanto las líneas de Wilson como los flujos eléctricos son operadores HDV para anillos en teorías de gauge, y que todos ellos son parámetros de orden de la teoría por igual. Además, como ya se hemos mencionado, los únicos operadores que pueden mostrar la dualidad ‘ley de área

¹²Esta terminología no está relacionada con la terminología natural en la formulación lattice de teorías de gauge. Nótese que una teoría en la red $SO(3)$ que no tiene ningún operador no local. Equivalentemente no tiene simetrías generalizadas y no muestra fases en las que los operadores de línea tengan una ley de área. Al menos desde la perspectiva de la red esta teoría debería corresponder a una teoría $SU(2)$ con cargas en la representación fundamental. De hecho, un problema importante en este contexto es averiguar si la teoría de gauge de la red $SO(3)$ tiene un parámetro de orden de confinamiento en el límite del continuo [70]. Aunque las partículas cargadas aparecerán necesariamente a alguna escala de energía, tapando la ley de área del WL, estas cargas pueden aparecer a la escala del espaciado de la red, permaneciendo ocultas en la física del continuo. En cualquier caso, la diferencia entre las teorías de gauge de la red puras $SO(3)$ y $SU(2)$ es física en la red.

vs ley de perímetro” son los operadores HDV [23].

Finalmente, remarcamos nuevamente que estas características aparecen en el espacio de Minkowski. Es decir, no necesitamos ir a variedades con topología no trivial. Sin embargo, toda la misma física aparece también en variedades con topología no trivial cuando se mira dentro de subregiones dadas por bolas contractibles.

Terminamos esta sección con algunas observaciones sobre tres cuestiones que pueden inducir erróneamente a pensar que una definición de una QFT requiere la elección de una red de Haag-Dirac.

2.3.1. ¿Ambigüedades en el ordenamiento temporal euclídeo?

La traducción de las cantidades calculadas con la integral de caminos euclídea al lenguaje de operadores implica introducir un ordenamiento temporal. Esto es necesario para explicar la no conmutatividad de los operadores en la teoría cuántica, en contraposición con la conmutatividad de las inserciones en la integral de camino. Como es bien sabido, para operadores locales $\phi(x)$, el correlador de dos puntos euclídeo para ambos ordenamientos de campos

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \langle \phi(y)\phi(x) \rangle , \quad (2.71)$$

calcula el siguiente valor de expectación

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}) e^{-H(t-t')} \phi(\vec{y}) | 0 \rangle , \quad (2.72)$$

donde asumimos $t > t'$. Para que esta prescripción tenga sentido, los operadores insertados en $t = 0$ con diferentes posiciones deben commutar entre sí. Éste es, por supuesto, un requerimiento básico en QFT.

En teorías con simetrías generalizadas, esta prescripción euclídea puede parecernos paradójica. Imaginemos que tenemos que calcular un correlador entre un WL W^q y un TL T^g . Podemos tomar ambos en el tiempo $t = 0$ y enlazados entre sí. A partir de la prescripción de la integral de caminos Euclídea podemos concluir que

$$\langle W^q T^g \rangle = \langle T^g W^q \rangle . \quad (2.73)$$

Pero esto es, por supuesto, incorrecto, ya que los dos términos en general difieren por un factor de fase. Pero, ¿qué está calculando aquí la integral de caminos euclídea en el lado izquierdo o el derecho?

Para evitar este problema, podemos considerar que sólo uno de los dos operadores se puede insertar en la integral de trayectoria como operador de línea. Esto puede llevar a la idea de que una red HD es necesaria para que la teoría tenga una descripción

euclídea, porque los operadores no locales en una red HD conmutan entre sí. Y si sólo permitimos los operadores consistentes con dicha elección no nos encontramos con el problema anterior.¹³.

Pero de nuevo esto no es correcto. El problema es simplemente que la integral de camino puede no entender el significado de W^g o T^g , o de ambos, si no somos más precisos. Para calcular la integral de camino tenemos que expresar el integrando en términos de las variables de integración. En la descripción habitual del campo de Maxwell integramos la trayectoria sobre A . De esta manera, el significado de la WL es suficientemente claro como exponencial de la circulación de A . En cambio, debemos escribir el TL como un flujo del campo eléctrico. Para evitar puntos de coincidencia de operadores podemos mover el flujo que define el TL infinitesimalmente hacia el futuro o el pasado, y esto calculará cualquiera de las dos ordenaciones posibles. Pero esto será sólo una prescripción que da sentido al cálculo de la integral de camino en cuestión. De hecho, para resolver el mismo problema podríamos haber escrito el WL en términos del flujo magnético. De esta manera podemos obtener diferentes prescripciones para dar significado a la integral de camino euclídea en QFTs con simetrías generalizadas. Por supuesto, en la QFT Lorentziana este problema no aparece, y no existen ambigüedades en el cálculo de los valores de expectación de los productos de WL y TL.

Pero aquí nos asalta de nuevo una duda. ¿Por qué es importante la posición del flujo en el tiempo si el flujo se conserva? La respuesta es que la integral de camino realiza un cálculo específico cuya interpretación en términos de operadores puede diferir aunque se trate del mismo operador, y depende específicamente de cómo se escriba este operador en términos de campos. Lo mismo ocurre con la ordenación temporal ordinaria en tiempo real. Esta ordenación temporal no es un mapa de operadores en operadores, porque para entender cuál es el resultado de la ordenación temporal necesitamos escribir un operador dado de forma concreta en términos de operadores de campo a tiempos fijos. Por ejemplo, $\phi(x, t)$ es el mismo operador si lo expresamos en un tiempo diferente utilizando las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, no podemos esperar que el resultado de la ordenación temporal con otro operador no dependa de estas dos formas de escribir $\phi(x, t)$.

Resumiendo, la principal lección física aquí es que podemos usar operadores no locales no conmutantes en la integral de caminos sin problemas, pero a costa de recordar que podemos escribirlos en términos de operadores locales, y que cada prescripción particular en la expresión de los operadores no locales en términos de campos locales insertados en el cálculo de la integral de camino euclídea tiene su propio significado físico.

¹³Una mayor elaboración en torno a esta cuestión se describió en [71].

2.3.2. Las (engañosas) lecciones de los orbifolds y $D = 2$

Supongamos que tenemos una teoría \mathcal{F} sin violaciones de la dualidad de Haag, y con un grupo de simetría global G no espontáneamente roto. Tomemos la teoría del orbifold $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$. El orbifold tiene sectores no locales correspondientes a regiones con la topología de dos bolas disjuntas y con la topología complementaria. Los operadores no locales son operadores de carga-anticarga en las dos bolas, y operadores de twist con borde fuera de las dos bolas. De nuevo podemos elegir redes HD, por ejemplo, tomando todos los operadores de carga-anticarga para el álgebra de dos bolas cualesquiera, pero no tomando el operador de twist para el álgebra del complemento, o la elección opuesta.

La cuestión es que para este tipo particular de sectores del orbifold ocurre algo especial. Podemos pensar en otra teoría, a saber, la teoría \mathcal{F} , que contiene los operadores cargados. Esta representa una extensión de \mathcal{O} que respeta la dinámica y los valores de expectación de \mathcal{O} para los operadores neutros, pero cambia la noción de álgebra aditiva. De otra manera, la extensión \mathcal{F} no tiene sectores HDV. Esto es porque el operador carga-anticarga es ahora un operador del álgebra aditiva de las dos bolas. Como consecuencia no podemos considerar al twist como un operador en el complemento porque no commuta con operadores cargados en una sola bola. En resumen, esta extensión \mathcal{F} es completa en el sentido de que tanto la dualidad de Haag como la aditividad se satisfacen para cualquier región dada, sin importar su topología. Esta noción de completitud coincide con la noción de completitud del espectro de cargas en las teorías de gauge y la ausencia de simetrías generalizadas que mencionamos en la sección 2.2.3.

Podriamos estar tentados a pensar que había una elección preferencial de la red HD para el orbifold original \mathcal{O} , a saber, aquella en la que elegimos el operador carga-anticarga para el álgebra de las dos bolas. Esta elección es la que permite descomponer el operador carga-anticarga no local en cargas independientes, dando lugar a la nueva teoría \mathcal{F} . En particular, dicha completación no podría alcanzarse rompiendo los twists para $D > 2$. En otras palabras, podemos reparar esta forma particular de violaciones de la dualidad de Haag ampliando el álgebra con operadores cargados. Además, dado el orbifold, esta completación es única para $D > 2$, evidenciando que toda la información sobre \mathcal{F} ya existía en \mathcal{O} . Podemos formalizar estas ideas a partir del teorema DHR, el cual discutiremos en la sección 7.2.3.

Para CFT's en $D = 2$, las regiones donde aparecen los operadores no locales consisten en dos intervalos, y el complemento tiene la misma topología. Solemos afirmar que el orbifold¹⁴ tiene un nuevo operador de campo, a saber, el twist. Esto es cierto si el twist sobre un intervalo se descompone en sus dos puntos extremos. Esto indica que

¹⁴Hablando estrictamente, el orbifold de una teoría \mathcal{F} en cualquier dimensión es la teoría $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$ que no incluye ni los operadores cargados ni los campos que rompen a los twists en operadores locales para el caso de $D = 2$. En la bibliografía de las CFTs con $D = 2$ el nombre “teoría del orbifold” corresponde a la adición a la teoría \mathcal{O} de estos campos cargados que rompen los twists locales.

se pueden formar diferentes teorías completas (en el sentido descrito anteriormente) eligiendo redes HD particulares en $D = 2$, y promoviendo operadores no locales a operadores de campo locales.¹⁵ Estas diferentes teorías procedentes de diferentes opciones de redes HD no son compatibles entre sí porque los tipos de operadores no locales que rompemos actuarían como operadores de campo locales no pueden conmutar entre sí. En este escenario, el hecho de que se trate de teorías diferentes puede verse ya en el espacio plano a nivel local: el álgebra aditiva es diferente y tanto la aditividad como la dualidad de Haag se satisfacen al mismo tiempo para cualquier región. Aún así, nótese que la totalidad de la información sobre ambas completaciones ya estaba en \mathcal{O} .

Estos ejemplos de $D = 2$ pueden inducir a pensar que todas las teorías pueden tener completaciones intrínsecas a sí mismas y que la importancia de las redes HD reside en las posibles completaciones de este tipo. Sin embargo, no parece posible tal “completación gratuita” intrínseca, que no cambie la dinámica de la teoría, para sectores correspondientes a otras topologías. No es posible romper un WL y colocarlo en la dirección del tiempo, de modo que imite a una partícula cargada. Tal línea de Wilson en el sentido del tiempo no tiene ninguna dinámica que pueda ser dictada por, o estaría de acuerdo con, la de la teoría original. Tampoco parece posible construir operadores de la línea de Wilson para romper el WL no local sin introducir operadores cargados reales que cambien la teoría. Obsérvese también que, mientras que en $D = 2$ diferentes redes HD en las que los operadores no locales se rompen a campos locales tienen diferentes álgebras aditivas, no ocurre lo mismo con otros tipos de redes HD para simetrías generalizadas asociadas a diferentes topologías. Por ejemplo, una red HD para el campo de Maxwell restablece la dualidad de Haag, pero la teoría sigue violando la aditividad, y el álgebra aditiva después de tal elección sigue siendo la misma.

2.3.3. Variedades compactas

Como hemos explicado anteriormente, las manifestaciones locales de las simetrías generalizadas suelen despreciarse porque quedan ocultas por la descripción habitual. Como consecuencia de esto, se suele afirmar que para comprender las consecuencias sutiles de las simetrías generalizadas es necesario poner la teoría en variedades M topológicamente no triviales. De esta manera se pueden construir observables interesantes. Pero en la medida en que no consideramos teorías gravitatorias, poner la teoría en una variedad diferente, incluso con una formulación lagrangiana, no es un proceso automático y únicamente definido. Para que podamos entender la teoría en estas variedades como la “misma teoría” que definimos originalmente en el espacio de Minkowski, los observables deben tener una comprensión en Minkowski. Por el contrario, puede ser el caso que debamos introducir nuevos datos, más allá de los que definen la teoría

¹⁵ La completitud para CFTs en $D = 2$ está relacionada con la invariancia modular, véase [22, 72].

original, como una entrada arbitraria en la definición de la teoría en M .

Para teorías con simetrías generalizadas, donde el fenómeno en el espacio plano es suficientemente claro en términos de clases HDV, tenemos una combinación de estas dos opciones en el proceso de poner la teoría en variedades topológicamente no triviales. Por un lado, la estructura local de las álgebras debe ser la misma que en el espacio plano, y esto se puede detectar observando los sectores HDV dentro de una bola. En este sentido, si la teoría es una teoría de gauge pura $SU(2)$, ésta puede distinguirse de una teoría sin sectores por la existencia tanto del TL como del WL para las álgebras locales. Por otro lado, para las teorías con sectores HDV, generalmente necesitaremos especificar la estructura global mediante elecciones arbitrarias en M (condiciones de contorno, sectores de superselección, etc). En esta sección desarrollaremos estas ideas de forma general. Para un ejemplo concreto nos referimos a la sección 7.2.2 donde hacemos explícitas las ideas descritas en esta sección para el campo de Maxwell.

Estas elecciones globales son, de hecho, bastante similares a las que tenemos para la teoría en el espacio de Minkowski, si restringimos nuestra atención a una subregión R . En general hay varias álgebras diferentes que podemos asignar a R , conteniendo o no algún subgrupo de operadores no locales. Como esperamos tener un álgebra de tipo I¹⁶ para una teoría en una variedad compacta, el paralelismo es aún mayor si en lugar de considerar álgebras asignadas a regiones del espacio consideramos álgebras asignadas a factores locales de tipo I. Veremos en el capítulo 5 como éstas pueden localizarse para que sean mayores que el álgebra de R y menores que el álgebra de una región ligeramente mayor que R . Para estos factores de tipo I tenemos el ingrediente adicional de que los endomorfismos en el álgebra efectuados por operadores duales no locales en R' son ahora internos, es decir, están implementados por operadores en el álgebra misma. Entonces, podemos tener tanto el álgebra de operadores no locales de R como los de R' como parte del factor de tipo I.¹⁷ Además de eso también podemos generar álgebras de tipo I con centro simplemente eliminando los operadores globales no locales contenidos en el factor original de tipo I.

Al poner la teoría en una variedad no trivial M volvemos a tener un álgebra de tipo I, y tendremos, junto a los posibles operadores no locales a correspondientes a la topología de M , los duales b , correspondientes a los endomorfismos de esta álgebra no local. Estos operadores duales commutan con el álgebra aditiva, y con el tensor energía-momento. Entonces, estos operadores duales b actúan como simetrías del Hamiltoniano

¹⁶ Las álgebras de von Neumann sin centro se clasifican en factores. En QFT las álgebras asociadas a regiones son de tipo III. En cambio, los factores tipo I son isomorfos al álgebra de todos los operadores acotados en algún espacio de Hilbert de dimensión finita o infinita. Véase [73] para una introducción y aplicaciones en QFT o [74] para un análisis más matemático.

¹⁷ Esto no es posible para las álgebras habituales asociadas a subregiones, que son de tipo III. Los operadores duales en R' commutan con el álgebra aditiva en R . Podemos empujar este operador hacia R intentando ponerlo dentro del álgebra de R , pero la única manera de que siga commutando con el álgebra local es ponerlo en la frontera de R , y en ese caso el operador se vuelve demasiado singular.

global, sin ninguna acción sobre las álgebras locales, y la única acción no trivial está en los operadores a . En consecuencia, el Hamiltoniano es una función de los operadores locales y los b , que actúan como cargas conservadas, pero no dependen de los a .

Mientras que las álgebras locales para subregiones con topología no trivial en una bola dentro de M no pueden hacerse únicas sin cambiar la teoría, las opciones globales (posibles subálgebras de los operadores no locales y sus duales) representan modelos físicamente diferentes en M . En la literatura estándar se insiste en que la teoría debería definir un modelo para cualquier M . Esto, por supuesto, puede establecerse, pero la relevancia física es de nuevo discutible. Podemos preparar diferentes sistemas, con diferente estructura global, para diferentes M , y no hay conexión entre estas elecciones a medida que cambiamos M . La receta estándar es que uno debe elegir los modelos para diferentes M de acuerdo con una única red HD para la teoría original. Por ejemplo, para una teoría $SU(2)$, para cualquier M con un lazo no contractible, se puede tomar la prescripción con el WL global o sin el WL global, y esto está en correspondencia con las dos redes HD. Una vez más, desde el punto de vista de la teoría original, y desde un punto de vista físico, no hay nada que apunte a estas elecciones, ni a ninguna compatibilidad prescrita para las elecciones para diferentes M .¹⁸

La lógica detrás de esta idea de que debemos elegir una única red HD para todas las variedades M puede venir de los modelos de gravedad, donde el espacio es dinámico, y en principio la física en cualquier variedad debe ser determinada automáticamente. Aquí no hablamos de gravedad. Pero incluso en este caso, no está claro por qué la teoría en cada variedad debería estar dictada por una red HD, y no por cualquier otra elección, o incluso por una superposición cuántica de elecciones. Más aún, si tenemos en cuenta que la estructura local sigue gozando de toda su arbitrariedad. Tal vez esta imposibilidad de eliminar la arbitrariedad de la red HD esté relacionada con la idea habitual de que, en última instancia, las simetrías generalizadas deben estar realmente ausentes en las teorías de la gravedad.

Otra motivación puede venir de conectar la idea de simetrías generalizadas con la descripción de modelos topológicos. En efecto, podemos utilizar variedades suficientemente grandes para estudiar la física infrarroja de una teoría con grados de libertad locales, y este límite puede mostrar propiedades topológicas. En este caso, lo que ocurre es que la propia dinámica de la teoría determina una red IR HD efectiva. Por ejemplo, una teoría $SU(2)$ puede tener confinamiento, de tal manera que en el IR el valor de expectación del WL es 0 mientras que el del TL es 1 (después de un smearing adecuado). La opción opuesta es válida para la ruptura espontánea de simetría.

¹⁸Exigir que una QFT se defina automáticamente para todas las variedades sin entradas externas en parte también se origina en la definición de Segal de CFTs en $D = 2$ [75]. Esta definición prescribe una función de partición única para cualquier variedad, y debido a ello asume invariancia modular. Sin embargo, la existencia de diferentes redes HD está asociada al fallo de la invariancia modular. Véanse las referencias en la nota a pie de página 15.

Esta saturación de los valores de expectación, ya sea a 1 o a 0, sólo puede ocurrir para las redes HD, precisamente debido a las relaciones de conmutación no triviales de los operadores no locales, y a las relaciones de complementariedad cuántica que satisfacen. Por supuesto, también podemos estudiar este fenómeno de saturación IR en el espacio plano. En este caso existe una elección dinámica en el IR. Pero para estudiar la teoría fuera del límite IR puramente topológico, tenemos que entender que ambos operadores duales existen en pie de igualdad, aunque con estadísticas diferentes. En el límite topológico, podemos asimilar efectivamente el operador con valor de expectación 1 a un número (el “generador de simetría” que respeta el vacío), mientras que el que tiene valor de expectación 0 conducirá a degeneraciones del vacío en una variedad no trivial. Entonces, tenemos más bien una estructura de sectores de superselección correspondientes a las diferentes vacíos. En el caso del límite IR del confinamiento, por ejemplo, la terminología habitual de $SU(2)$ frente a $SO(3)$ implica nombrar la teoría por la elección de considerar todos los sectores de superselección (y el WL que cambia entre ellos) o sólo considerar uno de ellos, mientras que todos los sectores existen realmente en ambos casos.

Una cuestión interesante revelada por la presente discusión es la siguiente. Dada una QFT en un espacio plano, ¿cuáles son las ambigüedades al poner esta “misma teoría” en variedades compactas? Argumentamos que la presencia de sectores HDV siempre da lugar a tales ambigüedades. La cuestión es si éstas son todas las posibles, o si hay más. Otra cuestión relacionada es que las subregiones del espacio plano no tienen topologías tan ricas como las de las variedades compactas de la misma dimensión. Esto puede sugerir que las variedades no triviales pueden revelar otras propiedades. Éstas, sin embargo, por razones más lógicas que físicas, deben tener otra manifestación en el espacio plano.

2.4. Discusión del capítulo

Durante este capítulo hemos introducido las herramientas que utilizaremos a lo largo de esta tesis. En particular, vimos como en las teorías con simetrías generalizadas existe más de una álgebra posible para ciertas regiones del espacio-tiempo con topología no trivial. En otras palabras, las simetrías generalizadas vienen asociadas a operadores no locales que producen los fallos en la aditividad y/o dualidad de Haag a la hora de definir el álgebra asociada a una dada región.

Este enfoque algebraico nos permite probar de forma abstracta resultados que valdrán para cualquier tipo de simetría generalizada, ya sea una simetría 0-forma proveniente de un orbifold o una simetría tipo k -forma. Un ejemplo claro es el hecho de que las simetrías generalizadas vienen en pares. También, nos permite definir con precisión ciertas ideas, como las clases de equivalencia de operadores no locales, la completitud,

etc. Durante los próximos capítulos trabajaremos estas ideas para distintas teorías, comenzando con el graviton de Einstein en el capítulo 3.

En la sección final comparamos nuestro enfoque algebraico con el enfoque usual usado en la literatura de simetrías generalizadas. Vimos que ambas nociones son mayormente equivalentes en lo que respecta a cálculos específicos pero difieren en ciertas interpretaciones. En el centro de esta discrepancia se encuentra la idea de red de Haag-Dirac, la cual en algunos casos suele entenderse como parte de la definición de la teoría. Pospondremos volver a discutir esta comparación hasta el capítulo 7 donde veremos un ejemplo que maximiza las consecuencias de estas diferencias.

Capítulo 3

Simetrías Generalizadas del Gravitón

El objetivo de este capítulo es encontrar y analizar en teoría de gravedad linealizada los operadores no locales y las correspondientes clases HDV, así como sus reglas de fusión y álgebra. A continuación describiremos las motivaciones para dicho estudio.

Comencemos con las que provienen puramente de QFT. Como es bien sabido, aparecen varios obstáculos y peculiaridades cuando se intenta construir una QFT con partículas sin masa de espín dos. Por un lado, tenemos el teorema de Weinberg-Witten [17], que prohíbe la existencia de un tensor de energía-momento para estas teorías. Por otro lado, tenemos el teorema de Coleman-Mandula [2], que impide una mezcla no trivial de simetrías espacio-temporales con simetrías internas. Dado este contexto, sería interesante profundizar en estas cuestiones desde el punto de vista de las simetrías generalizadas. En particular, dado que la simetría de gauge del gravitón está relacionada con simetrías espacio-temporales, uno podría imaginar que las simetrías generalizadas podrían estar cargadas bajo el grupo Poincaré. De hecho, encontraremos que el gravitón tiene clases HDV asociadas a regiones con lazos no contractibles, y que estas clases están cargadas bajo simetrías espacio-temporales. Podemos pensar esto, en principio, como un contra-ejemplo a una posible extensión del Coleman-Mandula para simetrías generalizadas. En particular, este ejemplo podría explicarse porque la teoría es libre, pero estaría dando un fuerte argumento adicional en contra de potenciales teorías interactuantes e invariantes de Lorentz del gravitón.

Desde una perspectiva de QFT, también estamos motivados a estudiar este problema para comprender mejor el alcance del enfoque algebraico de las simetrías generalizadas, dado que esperamos que el gravitón muestre varios comportamientos peculiares que podrían escapar los enfoques usuales de las simetrías generalizadas.

Por otro lado existen motivaciones procedentes de la gravedad cuántica. Desde la aparición de [18, 19], ha habido un creciente interés en tratar de entender la comple-

titud del espectro en la gravedad cuántica. A partir de [19], y más recientemente en [20–23], la cuestión de la completitud se ha relacionado acertadamente con la ausencia de simetrías generalizadas. El enfoque algebraico hace esto transparente, como hemos revisado anteriormente en el capítulo 2. Dada una QFT con una estructura dual de simetrías generalizadas, para que la teoría sea completa, necesitamos introducir un número suficiente de operadores cargados tal que las inclusiones anteriores se saturen, o equivalentemente, tal que los operadores no generados localmente se generen localmente. En este sentido, al estudiar las simetrías generalizadas del gravitón, también estamos allanando el camino para una posible comprensión de cómo completar tal teoría y/o qué problemas o sutilezas surgen en el proceso. En este contexto, veremos que para romper los operadores no locales manteniéndonos dentro de formalismo estándar de QFT, necesitaremos romper drásticamente la invariancia de Poincaré.

Por último, también existen motivaciones procedentes de la física de la materia condensada. Recientemente, se han explorado algunos nuevos tipos de excitaciones con movilidad restringida. Estas fueron denominadas fractones, véase por ejemplo [76–81] y para posibles escenarios experimentales [82, 83]. Las formulación de teorías fractónicas dentro del formalismo de QFT fue desarrollada en [84–86]. En particular, dichas teorías no poseen simetría de Poincaré y las propiedades de movilidad de estos fractones están completamente determinadas por la naturaleza de las simetrías generalizadas asociadas con los campos de gauge a los que se acoplan los fractones. Estas simetrías generalizadas, y sus operadores topológicos asociados, están típicamente cargados bajo simetrías espaciales, y esto es la raíz de las propiedades de movilidad restringida de los fractones. Además, en [87] ya se estableció una conexión heurística entre la física de los fractones y la física gravitacional, basada en los vínculos hamiltoniano y de momento. En este capítulo, analizando en detalle las simetrías generalizadas del gravitón, podremos precisar mejor las conexiones y diferencias entre la física de los gravitones y la física de los campos de gauge tensoriales que son usualmente asociados a los fractones.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 3.1, introduciremos la teoría del gravitón (gravedad linealizada) y repasaremos la derivación de los vínculos hamiltoniano y de momento, junto con sus respectivas cargas globales asociadas. Veremos que estas pueden escribirse en términos de integrales de superficie de operadores no invariantes de gauge. Por ende, no son responsables de las simetrías generalizadas. Para encontrar simetrías generalizadas es necesario escribir la teoría en términos de operadores invariantes de gauge y estudiar la no saturación de la causalidad para tal álgebra. Para ello, reformulamos la teoría del gravitón en términos de ciertos campos eléctricos y magnéticos, re-derivando finalmente la formulación de Longo et al [36]. Utilizaremos esta formulación electromagnética del gravitón en la sección 3.2 para encontrar las clases HDV duales producidas por la simetría generalizada. Éstas resultan ser simetrías 1-forma cargadas bajo el grupo de Poincaré (esto es debido a que

llevan índices espaciales). Trabajando las relaciones de commutación canónicas del gravitón derivaremos las relaciones de commutación de los campos eléctricos y magnéticos del gravitón. Con estas relaciones de commutación, hallaremos el álgebra de operadores topológicos. En la última sección 3.3, discutiremos la conexión entre la física del gravitón y la física de los sistemas fractónicos. Exploramos brevemente la naturaleza de los operadores cargados que necesitamos incluir para romper explícitamente las simetrías generalizadas y completar la teoría del gravitón dentro del marco de la QFT. Terminamos con algunas discusiones sobre el contenido del capítulo en la sección 3.4.

3.1. Gravedad Linealizada

Vamos a comenzar analizando la teoría del gravitón de Einstein linealizado en un espacio-tiempo plano en $D = 4$ dimensiones. Dicha teoría surge al considerar pequeñas perturbaciones sobre una métrica de Minkowski fija de fondo. Más precisamente, la métrica tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (3.1)$$

Utilizando esta expresión podemos expandir a cualquier orden deseado cualquier variable relacionada con la curvatura en relatividad general. En particular, partiendo de las ecuaciones de Einstein sin fuentes externas en $D = 4$ dimensiones, la ecuación de movimiento linealizada esta dada por

$$\partial^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h_\sigma^\sigma - \eta_{\mu\nu} (\partial^\lambda \partial_\sigma h_{\lambda\sigma} - \partial^\sigma \partial_\sigma h_\rho^\rho) = 0. \quad (3.2)$$

Por otro lado, expandiendo el escalar de Ricci a primer y segundo orden, obtenemos

$$R^{(1)} = \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\rho h_\sigma^\sigma, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= h^{\lambda\sigma} [\partial_\rho \partial^\rho h_{\lambda\sigma} - \partial_\lambda \partial^\rho h_{\rho\sigma} - \partial_\sigma \partial^\rho h_{\rho\lambda} + \partial_\lambda \partial_\sigma h_\rho^\rho] + \frac{3}{4} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial^\sigma h^{\rho\lambda} \\ &\quad - \partial^\sigma h_{\sigma\lambda} \partial_\rho h^{\rho\lambda} + \partial^\sigma h_{\sigma\lambda} \partial^\lambda h_\rho^\rho - \frac{1}{2} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial^\rho h^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4} \partial^\lambda h_\sigma^\sigma \partial_\lambda h_\rho^\rho. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En este contexto, podemos recuperar las ecuaciones de movimiento anteriores (3.2) a partir de la acción cuadrática de Einstein-Hilbert ¹

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} R \approx \int d^4x \left[\left(1 + \frac{1}{2} h \right) R^{(1)} + R^{(2)} \right]. \quad (3.5)$$

¹Para mayor comodidad consideraremos $(8\pi G) = 1$ a menos que se exprese lo contrario.

Esta es simplemente la acción habitual de Fierz-Pauli para el gravitón [88], a excepción de algunos términos de borde que surgen de integrar por partes la curvatura, es decir

$$S_{FP} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu h_\rho^\rho \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\partial_\mu h_\rho^\rho \partial^\mu h_\sigma^\sigma - \frac{1}{4}\partial^\lambda h^{\mu\nu} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \right]. \quad (3.6)$$

3.1.1. Simetría de Gauge: difeomorfismos lineales

Debido a la invariancia ante difeomorfismos, la teoría de los gravitones tiene una simetría de gauge. Sin embargo, no se trata del grupo de difeomorfismos completo, como ocurre para la teoría de Einstein no lineal completa. La razón fundamental es que hay difeomorfismos que destruyen el límite de perturbación débil definido por (3.1). Por ende, necesitamos restringirnos a los difeomorfismos que respetan dicha suposición. A orden lineal, podemos escribir los difeomorfismos en cuestión como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (3.7)$$

donde $\xi^\mu(x)$ es del mismo orden que $h_{\mu\nu}$. Bajo este conjunto restringido de difeomorfismos, la perturbación $h_{\mu\nu}$ transforma de la siguiente forma

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x), \quad (3.8)$$

lo que implica que los símbolos de Christoffel linealizados dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\mu n} (h_{n\alpha,\beta} + h_{n\beta,\alpha} + h_{\alpha\beta,n}), \quad (3.9)$$

transforman como

$$\Gamma'_{\alpha\beta}^{\mu(1)} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu(1)} + \partial_\alpha \partial_\beta \xi^\mu. \quad (3.10)$$

Siguiendo, vemos que el tensor de Riemann a primer orden definido como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu}^{(1)} = \eta_{\rho\alpha} (\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\alpha(1)} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\alpha(1)}) = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\rho \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\rho\mu}), \quad (3.11)$$

es claramente invariante de gauge

$$R'_{\sigma\mu\nu}^{\rho(1)} = \Gamma'_{\nu\sigma,\mu}^{\rho(1)} - \Gamma'_{\mu\sigma,\nu}^{\rho(1)} = (\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho(1)} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho(1)}) + (\partial_\nu \partial_\sigma \partial_\mu \xi^\rho - \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu \xi^\rho) = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho(1)}. \quad (3.12)$$

Como mencionamos anteriormente, nos interesa estudiar la teoría de gravitones linealizados en el espacio plano. Esta es una teoría de partículas de espín dos sin masa. En este contexto, el tensor de curvatura (3.11), como operador en la teoría cuántica, genera el álgebra invariante de gauge local de la teoría de gravitones.

3.1.2. Vínculos, simetrías globales y cargas conservadas

Para derivar los operadores no locales que implementan a las simetrías generalizadas, se podría seguir ingenuamente un procedimiento similar al del campo electromagnético libre. En la teoría de Maxwell, podemos integrar los vínculos de gauge $\nabla \cdot E = 0$ sobre un volumen espacial. Esto nos da lugar a la ley de Gauss en ausencia de cargas. La ley de Gauss implica que si definimos un operador de flujo sobre una superficie abierta, este operador no depende de la superficie elegida, sólo de su borde. Esto produce que dicho operador pueda asociarse a cualquier anillo que contenga el borde, ya que commuta con todos los operadores locales invariantes de gauge fuera de dicho anillo. Estos operadores de superficie son los TL.

Repasemos como funciona este método en la teoría del gravitón. En este caso, las ecuaciones de movimiento de los multiplicadores de Lagrange h_{00} y h_{0i} producen respectivamente los vínculos hamiltoniano y de momento linealizados

$$\mathcal{H} = -2G_{00}^{(1)} = \partial_i \partial^i h_j^j - \partial^i \partial^j h_{ij} = 0, \quad \mathcal{H}_i = -2G_{0i}^{(1)} = -2\partial_j \pi^{ij} = 0, \quad (3.13)$$

donde π_{ij} denota los momentos canónicos asociados a las restantes variables dinámicas h_{ij} . Más explícitamente, tenemos

$$\pi_{ij} = \frac{\delta \mathcal{L}_{FP}}{\delta \dot{h}^{ij}} = \frac{1}{2} \left(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i} - \delta_{ij} \dot{h}_k^k + 2\delta_{ij} \partial^k h_{0k} \right). \quad (3.14)$$

A nivel cuántico, las variables duales canónicas h_{ij} y π_{ij} satisfacen las relaciones de commutación a igual tiempo

$$[h_{ij}(x), \pi^{kn}(y)] = \frac{i}{2} (\delta_i^k \delta_j^n + \delta_i^n \delta_j^k) \delta(x - y). \quad (3.15)$$

A partir de estas relaciones de commutación, es sencillo encontrar que los vínculos con smearing producen la acción de difemorfismos linealizados (3.8) sobre las variables canónicas. Esto es, si introducimos funciones de smearing $\xi_0(x)$ y $\xi_i(x)$ para \mathcal{H} y \mathcal{H}_i respectivamente, podemos escribir las operaciones no triviales sobre las variables canónicas como

$$\left[h_{ij}(x), \int d^3y \mathcal{H}^k(y) \xi_k(y) \right] = i(\partial_i \xi_j(x) + \partial_j \xi_i(x)), \quad (3.16)$$

$$\left[\pi_{ij}(x), \int d^3y \mathcal{H}(y) \xi_0(y) \right] = i(\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) \xi_0(x). \quad (3.17)$$

Al igual que con el campo de Maxwell, uno podría estar interesado en encontrar las cargas asociadas con estos vínculos, es decir, con la invariancia ante difeomorfismos lineales. Teniendo en cuenta el segundo teorema de Noether [89, 90] para difeomorfismos

linealizados, es posible derivar las cargas asociadas de forma más rigurosa. Podemos escribir estas cargas como integrales de los vínculos sobre una región R definida sobre una superficie de Cauchy, o como flujos sobre el borde cerrado ∂R de dicha región. Más explícitamente:

$$\begin{aligned} P^0 &= -\frac{1}{2} \int_R d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\partial R} dS_n (\partial_j h^{nj} - \partial^n h^j_j) , \\ P^i &= -\frac{1}{2} \int_R d^3x \mathcal{H}^i = \frac{1}{2} \int_{\partial R} dS_n [\partial^n h_0^i - \dot{h}^{ni} - \delta^{ni}(\partial_j h_0^j - \dot{h}^j_j)] , \\ J^{0i} &= -\frac{1}{2} \int_R d^3x (x^i \mathcal{H} - x^0 \mathcal{H}^i) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial R} dS_n [x^i (\partial^j h_{jn} - \partial^n h^j_j) - h^{ni} + \delta^{ni} h^j_j - x^0 (\partial^n h_0^i - \dot{h}^{ni} - \delta^{ni} \partial^j h_0^j + \delta^{ni} \dot{h}^j_j)] , \\ J^{ij} &= -\frac{1}{2} \int_R d^3x (x^j \mathcal{H}^i - x^i \mathcal{H}^j) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial R} dS_n [x^j (\partial^n h_0^i - \dot{h}^{ni} - \delta^{ni} \partial_m h^0_m + \delta^{ni} \dot{h}^m_m) - \delta^{jn} h_0^i - (i \leftrightarrow j)] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Estas son las famosas “cargas de Poincaré”. Son precisamente las que se propusieron originalmente en [91] mediante la construcción del tensor de energía-momento efectivo del gravitón (cuando se consideran válidas las ecuaciones completas de la relatividad general). Puede verse que estas cargas de Poincaré satisfacen el álgebra de Poincaré [92], lo que podemos considerar como una consecuencia de la linealización del álgebra de Dirac-Schwinger para los vínculos no lineales de la formulación Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [93].

No obstante, aquí vemos la primera diferencia con la teoría de Maxwell. Mientras que en la teoría de Maxwell las cargas se escriben como flujos de operadores locales invariantes de gauge (campos eléctrico y magnético), en gravedad estas cargas conservadas de Poincaré, que surgen al integrar los vínculos hamiltoniano y de momento, son flujos de operadores locales no invariantes de gauge. Esto se produce, a pesar de que, los propios vínculos y cargas asociadas son invariantes de gauge. Esta característica nos impide extraer de ellas los WL y TL de la forma en que se hace para el campo de Maxwell. Más concretamente, si integramos los flujos anteriores sobre superficies abiertas obtenemos operadores lineales que no son invariantes de gauge, y por tanto no generan simetrías del espacio físico de Hilbert invariantes de gauge en el que los vínculos están fijados a cero.

De forma equivalente, la diferencia entre el caso de Maxwell y el de gravedad linealizada en consideración se manifiesta en que el tensor de energía-momento efectivo del gravitón no presenta invariancia ante difeomorfismos (excepto en el bode de la variedad diferencial en cuestión, donde las transformaciones de gauge desaparecen). Más aún, no es posible encontrar una modificación de dicho tensor de energía-momento que sea

invariante de gauge. Esto es debido al teorema de Weinberg-Witten [17], que prohíbe la existencia de un tensor de energía-momento invariante de gauge, conservado y covariante de Lorentz que produzca las cargas de Poincaré en una teoría con partículas no masivas de espín 2.

Notamos que la ausencia de un tensor de energía-momento bien definido no implica la ausencia de la simetría de Poincaré. Esta es implementada por los unitarios del grupo que podemos definir si exponentiamos (3.18) tomando a R como una superficie de Cauchy completa e infinita. También, existen implementaciones de la simetría sobre álgebras locales pero las estudiaremos en el capítulo 5. En esta dirección, para el caso $D = 4$ podemos ver que las simetrías espacio-temporales de la teoría de la gravedad linealizada pueden extenderse al grupo conforme completo. A continuación esbozamos los argumentos en cuestión y presentamos las referencias correspondientes.

La teoría libre del gravitón sobre un espacio de Minkowski claramente exhibe invariancia de Poincaré y de escala, por lo que nos resta comprender si podemos ampliar dicha simetría para incluir el grupo conforme completo en $D = 4$. Por un lado, hemos afirmado que el teorema Weinberg-Witten [17] excluye la existencia de un tensor de energía-momento. Podríamos considerar este fallo como un argumento en contra de que la teoría tenga simetría conforme. Es decir, la teoría no satisface los axiomas de CFT habituales que aparecen en la literatura bootstrap, y que usualmente asumen la existencia de tal corriente [94, 95]. Por otro lado, podemos relajar esta suposición [96–98]. En este contexto, todas las representaciones libres, sin masa e irreducibles del grupo conforme se han clasificado en [99, 100], donde las representaciones spin 2 de $SO(4, 2)$ vienen dadas por diagramas de Young con las mismas simetrías y ecuaciones de movimiento que el tensor de Riemann lineal on-shell:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \quad (3.19)$$

Además, el tensor de Riemann es el operador de menor dimensión que aparece en el espacio de fases invariante de gauge, con su dimensión de escala $\Delta = 3$ saturando el límite de unitaridad [101]. Esto lo hace un candidato a operador primario que describe una CFT libre.

Siguiendo esta línea, se ha demostrado explícitamente que todas las funciones de correlación del tensor de Riemann lineal en $D = 4$ coinciden con las de un campo de spin 2 primario con $\Delta = 3$ [102]. Esto prueba que la teoría en cuestión (definida por sus correladores) tiene simetría conforme. Más aún, podemos obtener los generadores del grupo conforme a partir de los de Poincaré utilizando la construcción presentada en [36].

3.1.3. Gravedad linealizada en la formulación ADM

Para mayor claridad respecto al origen físico de las leyes de conservación mencionadas anteriormente, aquí presentamos la teoría de la gravedad linealizada utilizando el enfoque Hamiltoniano usual de la Relatividad General. Es decir, revisitamos la teoría ya presentada en la formulación ADM, presentada por primera vez en [103]. En particular, seguiremos la notación y las ideas generales desarrolladas en [104]. Esta sección no es necesaria para el desarrollo de lo que sigue en el capítulo, solo mostramos que los resultados ya presentados son consistentes con ADM.

Para comenzar, vemos que la acción ADM cuadrática que es equivalente a la acción de Einstein-Hilbert al mismo orden (3.5) y a la acción de Fierz-Pauli (3.6) a excepción de los términos de borde. Podemos escribir a la primera de estas como

$$S_{ADM}^{(2)} = \int dt d^3x \left[\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h_{00}}{2} \right) {}^3R^{(1)} + {}^3R^{(2)} + K_{(1)}^{ij} K_{ij}^{(1)} - K_{(1)}^2 \right], \quad (3.20)$$

donde 3R es la curvatura tridimensional, y la foliación queda definida por la función de lapso N y el vector de desplazamiento \mathcal{N}^i

$$N = \sqrt{(1 - h_{00})} + \mathcal{O}(h^2) = 1 - \frac{h_{00}}{2} + \mathcal{O}(h^2), \quad \mathcal{N}^i = -h^{0i} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.21)$$

que se corresponden a la curvatura extrínseca definida como

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i} \right). \quad (3.22)$$

La foliación determinada por N y \mathcal{N}^i y la métrica inducida $q_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$ nos permiten recuperar la métrica completa $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ de la forma usual en ADM

$$\begin{aligned} ds^2 &= (-N^2 + q_{ij} \mathcal{N}^i \mathcal{N}^j) dt^2 + q_{ij} \mathcal{N}^j dx^i dt + q_{ij} \mathcal{N}^i dx^j dt + q_{ij} dx^i dx^j \\ &= -(1 - h_{00}) dt^2 + 2h_{0b} dt dx^b + (\delta_{ab} + h_{ab}) dx^a dx^b + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Los momentos y vínculos estándar de ADM reproducen los momentos correctos (3.14) y los vínculos (3.13) presentados en la sección 3.1.2

$$\pi_{ij} = \sqrt{q} (K_{ij} - q_{ij} K) = \frac{1}{2} \left(\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i} - \delta_{ij} \dot{h}_k^k + 2\delta_{ij} \partial^k h_{0k} \right) + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.24)$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{q} \left({}^3R + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right) = \partial_a \partial_a h_{bb} - \partial_a \partial_b h_{ab} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.25)$$

$$\mathcal{H}_i = \sqrt{q} \bar{\nabla}_i^j \pi_{ij} = -2\partial^j \pi_{ij} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.26)$$

donde $\bar{\nabla}_i$ es la derivada covariante proyectada sobre la superficie de Cauchy del espacio-tiempo de Minkowski definida por la foliación (3.21). Esta actúa sobre variables de orden $\mathcal{O}(h)$ como la derivada habitual ∂_i .

Además, podemos recuperar el Hamiltoniano a partir de la transformación de Legendre de (3.20) o bien expandiendo el Hamiltoniano de ADM no lineal

$$\begin{aligned} H_{ADM} &= \int d^3x [N(x)\mathcal{H}(x) + \mathcal{N}^i(x)\mathcal{H}_i(x)] \\ &= \int d^3x \left[\mathcal{H}^{(2)} + \left(1 - \frac{h_{00}}{2}\right) \mathcal{H}^{(1)}(x) - h^{0i}(x)\mathcal{H}_i^{(1)}(x) \right] + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Desde este punto de vista, el Hamiltoniano de gravedad linealizada sin términos de borde no es una combinación lineal de vínculos lineales. Sin embargo, como cabría esperar a partir de la foliación (3.21), los vínculos procedentes de la función de laps y del vector de desplazamiento son equivalentes a los derivados en la sección 3.1 a partir de los multiplicadores de Lagrange h_{00} y h_{0i} respectivamente.

Nos será útil tener en cuenta que podemos calcular las ecuaciones de Heisenberg para las variables canónicas utilizando (3.27)

$$i\dot{h}_{ij}(x) = [h_{ij}(x), H_{ADM}] \Rightarrow \pi_{ij} = \frac{1}{2} \left(K_{ij} - \delta_{ij} K_n^n \right), \quad (3.28)$$

$$i\dot{\pi}_{ij}(x) = [\pi_{ij}(x), H_{ADM}] \Rightarrow G_{ij}^{(1)} = 0. \quad (3.29)$$

las cuales equivalen a la ecuación de movimiento (3.2).

3.1.4. Espacio de fases invariante de gauge del gravitón

La descripción del campo gravitatorio linealizado en términos de variables del espacio de fases invariante de gauge nos facilitara la comprensión del problema de encontrar las simetrías generalizadas. El objetivo es encontrar campos gravitatorios eléctricos y magnéticos que desempeñen papeles análogos a los del campo de Maxwell. En el caso del campo de Maxwell, el álgebra completa de la teoría está generada por dichos campos. Así que empecemos por buscar un conjunto de operadores invariantes de gauge que generen el álgebra de gravitones.

En contraste con lo que se espera en la gravedad cuántica completa, la teoría del campo de gravitones en el espacio de Minkowski contiene operadores locales invariantes de gauge. Como hemos mencionado anteriormente, podemos construirlos a partir del tensor de Riemann linealizado², definido en (3.11). Este tensor genera completamente el álgebra local de la teoría. Además, presenta las mismas simetrías del tensor de Riemann no lineal. Un camino para escribir la teoría en términos de campos eléctricos y magnéticos, utiliza el hecho de que podemos entender el tensor de Riemann como la curvatura de una conexión local de Lorentz, la conexión de espín³. Esto nos sugiere

²De ahora en adelante suprimiremos el índice de orden en perturbaciones y escribiremos el tensor de Riemann linealizado $R_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1)}$ simplemente como $R_{\mu\nu\rho\sigma}$

³Para una descripción completa de este enfoque y su historia, véase [88].

definir los siguientes campos eléctricos y magnéticos

$$\tilde{E}_i{}^{\alpha\beta} = -R_{0i}{}^{\alpha\beta}, \quad \tilde{B}_i{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}R_{jk}{}^{\alpha\beta}. \quad (3.30)$$

Sin embargo, como es bien sabido, la formulación de la teoría gauge de la Relatividad General difiere en muchos aspectos de la de Maxwell. En el caso que nos ocupa, y a diferencia de Maxwell, utilizando la ecuación de Heisenberg para los momentos canónicos π_{ij} (o las ecuaciones del movimiento en la imagen clásica), observamos que estos campos no son independientes. En efecto obtenemos

$$\tilde{E}_i{}^{0a} = \varepsilon_{ijk}\delta^{jn}\tilde{B}_n{}^{ka}, \quad \tilde{B}_i{}^{0a} = -\varepsilon_{ijk}\delta^{jn}\tilde{E}_n{}^{ka}. \quad (3.31)$$

En consecuencia, podemos describir mejor los grados de libertad on-shell del tensor de Riemann linealizado mediante la elección de operadores eléctricos y magnéticos presentada en [36]. Estos son

$$E_{ij} = -R_{0i0j}, \quad B_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}R_{0j}^{ab}. \quad (3.32)$$

Dichas variables proporcionan un conjunto independiente de campos locales invariantes de gauge que generan el álgebra de gravitones. Es importante que destaquemos que heredan del tensor de Riemann las siguientes propiedades de simetría

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}, \quad E^i{}_i = 0, \quad B^i{}_i = 0, \quad (3.33)$$

y obedecen a una versión generalizada de las ecuaciones de Maxwell

$$\partial^j E_{ij} = 0, \quad \partial^j B_{ij} = 0, \quad (3.34)$$

$$\varepsilon_{ink}\partial^n E_j^k = -\dot{B}_{ij}, \quad \varepsilon_{ink}\partial^n B_j^k = \dot{E}_{ij}. \quad (3.35)$$

Utilizando la expresión (3.11), podemos describir estos campos eléctricos y magnéticos en términos de las variables canónicas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial^k\partial_k h_{ij} + \partial_i\partial_j h^k{}_k - \partial_i\partial^k h_{kj} - \partial_j\partial^k h_{ki}), \quad (3.36)$$

$$B_{ij} = \varepsilon_{ink}\partial^k \left(\pi_j^n - \delta_j^n \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.37)$$

con $\pi = \pi_j^j$. Estas expresiones nos permiten interpretar las propiedades sin divergencia y sin traza de los campos eléctricos como consecuencia del vínculo hamiltoniano

$$\partial^j E_{ij} = \frac{1}{4}\partial_i \mathcal{H}, \quad E^i{}_i = \frac{1}{4}\mathcal{H}, \quad \varepsilon_{ijk}E^{ij} = 0, \quad (3.38)$$

mientras que las propiedades de simetría y ausencia de divergencia del campo magnético proceden del vínculo de momento

$$\partial^j B_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ink} \partial^k \mathcal{H}_n, \quad B^i_i = 0, \quad \varepsilon_{ijk} B^{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{H}_k = 0. \quad (3.39)$$

Aunque la teoría del gravitón y la teoría de Maxwell parecen bastante similares en esta formulación, existe una diferencia clave al cuantizar la teoría. Las relaciones de conmutación entre los campos eléctrico y magnético resultan ser muy diferentes. En el presente caso, utilizando las relaciones de conmutación canónicas (3.15), y las expresiones (3.36-3.37), obtenemos⁴

$$\begin{aligned} [E_{ij}(x), B_{kl}(y)] &= \frac{i}{4} \varepsilon_{kab} [\delta_{ia} (\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) \\ &\quad + \delta_{ja} (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) - \delta_{la} (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)] \partial_b \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Estas expresiones obedecen todas las propiedades (3.33-3.34). De hecho, podemos reescribirlas de una manera más simétrica

$$\begin{aligned} [E_{ij}(x), B_{kl}(y)] &= \frac{i}{8} [\varepsilon_{kib} (\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) + \varepsilon_{kjb} (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) \\ &\quad + \varepsilon_{lib} (\partial_j \partial_k - \delta_{jk} \partial^2) + \varepsilon_{ljb} (\partial_i \partial_k - \delta_{ik} \partial^2)] \partial_b \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para resumir, en esta formulación Maxwelliana, las álgebras locales están generadas por campos eléctricos y magnéticos E_{ij}, B_{ij} , que obedecen los vínculos (3.33), las ecuaciones de movimiento (3.34-3.35), y tienen conmutadores (3.41). El análisis de simetrías generalizadas será mucho más transparente en esta formulación como mostraremos en la sección (3.2).

3.1.5. Formulación dual del campo gravitatorio linealizado

Un estudio más profundo de las simetrías generalizadas de la gravedad linealizada requiere entender la transformación de dualidad que involucra un tensor simétrico de segundo rango $h_{\mu\nu}$. La dualidad correspondiente, análoga a la electromagnética, se describió en detalle en [107]. Aquí presentamos una revisión de los aspectos útiles. Comenzamos escribiendo la acción en términos de un Lagrangiano “parental”

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{16} T_{(\alpha\beta)\mu} T^{(\alpha\beta)\mu} + \frac{1}{8} T_{(\alpha\beta)\mu} T^{(\alpha\mu)\beta} + \frac{1}{4} T_{(\alpha\beta)\mu} \varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho} \partial_\nu h^\mu{}_\rho \right], \quad (3.42)$$

⁴Las relaciones de conmutación deben ser invariantes de gauge. Por ende, un ejercicio más sencillo es calcular estas relaciones de conmutación utilizando el esquema de cuantización de Gupta [105, 106] en gauge armónico. El resultado es exactamente el mismo.

donde el campo $T_{(\alpha\beta)\mu}$ es un tensor antisimétrico en los índices $\alpha \leftrightarrow \beta$ y además tiene traza cero $T_{(\alpha\beta)}^\alpha = 0$. Podemos resolver la ecuación de movimiento de $T_{(\alpha\beta)\mu}$ en términos de $h_{\mu\nu}$ para obtener

$$T_{(\alpha\beta)\mu} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} (\partial_\sigma h^{\sigma\lambda} - \partial^\lambda h_\sigma) - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\sigma\nu} \partial_\sigma h_{\nu\mu}. \quad (3.43)$$

Nótese que sustituyendo (3.43) en (3.42) podemos recuperar la acción de Fierz-Pauli (3.6) que esperamos para el campo original. Además, en (3.42) el campo $h_{\mu\nu}$ aparece como multiplicador de Lagrange dando lugar, en ausencia de fuentes, al vínculo

$$\partial_\sigma (\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\mu} T_{\alpha\beta}^\nu + \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\nu} T_{\alpha\beta}^\mu) = 0. \quad (3.44)$$

La solución correspondiente viene dada por un par de campos duales $\tilde{h}_{\mu\nu}$ y $\omega_{\mu\nu}$ de la forma

$$T_{(\alpha\beta)\mu} = (\partial_\alpha \omega_{\mu\beta} - \partial_\beta \omega_{\mu\alpha}) + (\partial_\alpha \tilde{h}_{\mu\beta} - \partial_\beta \tilde{h}_{\mu\alpha}), \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad \tilde{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\nu\mu}. \quad (3.45)$$

Escribimos la acción (3.42) en término de los campos simétrico y antisimétrico como

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} \partial^\alpha \tilde{h}_{\mu\nu} \partial_\alpha \tilde{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \partial^\mu \tilde{h}^{\mu\nu} \partial^\alpha \tilde{h}_{\alpha\nu} - \frac{1}{12} \partial^\mu \tilde{h}_\nu^\nu \partial_\mu \tilde{h}_\alpha^\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \partial_\mu \tilde{h}_\alpha^\alpha \partial_\nu \tilde{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \partial^\mu \tilde{h}^{\mu\nu} \partial^\alpha \omega_{\nu\alpha} + \frac{1}{6} \partial^\mu \omega^{\nu\mu} \partial^\alpha \omega_{\nu\alpha} \right]. \quad (3.46)$$

Dicha acción tiene una simetría de gauge dual que podemos escribir como

$$\omega'^{\mu\nu}(x') = \omega^{\mu\nu}(x) - \partial^\mu \tilde{\xi}^\nu(x) + \partial^\nu \tilde{\xi}^\mu(x), \quad (3.47)$$

$$\tilde{h}'^{\mu\nu}(x') = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu \tilde{\xi}^\nu(x) + \partial^\nu \tilde{\xi}^\mu(x). \quad (3.48)$$

Permitiéndonos obtener identidades útiles a partir de la relación de dualidad entre los potenciales que provienen de (3.43) y (3.45). Por ejemplo, podemos escribir

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} (\partial_\sigma h^{\sigma\lambda} - \partial^\lambda h_\sigma) - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\sigma\nu} \partial_\sigma h_{\nu\mu} = (\partial_\alpha \omega_{\mu\beta} - \partial_\beta \omega_{\mu\alpha}) + (\partial_\alpha \tilde{h}_{\mu\beta} - \partial_\beta \tilde{h}_{\mu\alpha}). \quad (3.49)$$

También, demostramos que este proceso implementa una transformación de dualidad sobre el tensor de Riemann de la forma

$$\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}, \quad (3.50)$$

que intercambia los campos eléctrico y magnético como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{iab} \tilde{R}^{ab}_{0j}, \quad B_{ij} = -\tilde{R}_{0i0j}. \quad (3.51)$$

Además, una consecuencia particularmente interesante de (3.49) es que podemos escribir el campo magnético como un doble rotor

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d\tilde{h}^{ac}, \quad (3.52)$$

donde hemos utilizado la definición canónica (3.37) y la expresión (3.49) contraída con un tensor espacial Levi-civita como

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{abj}T_{(ab)i} = \dot{h}_i^j - \partial^j h_{0i} - \delta_i^j (\dot{h}_{aa} - \partial_j h_{aa}) = \varepsilon^{abj}\partial_b (\tilde{h}_{ia} + \omega_{ia}). \quad (3.53)$$

De la misma manera, como cabría esperar de la dualidad, podemos utilizar (3.36) para obtener

$$E_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d h^{ac}. \quad (3.54)$$

cuando el vínculo hamiltoniano⁵ y las ecuaciones de movimiento se satisfacen. Destacamos que esta formulación dual, y en particular las ecuaciones (3.54-3.52), serán útiles cuando analicemos la relación con los modelos fractónicos en la sección 3.3.

3.2. Operadores topológicos para el gravitón

Habiendo encontrado una formulación de la gravedad lineal en términos de un conjunto de campos eléctricos y magnéticos locales invariantes de gauge, podemos ahora proceder a encontrar operadores HDV. A partir de las ecuaciones de Maxwell generalizadas (3.34-3.35), esperamos que estos operadores violen la dualidad en un anillo, como en las teorías de gauge convencionales [23]. A continuación confirmamos que este es el caso. Pero también podríamos esperar ingenuamente que estos operadores sólo estén dados por los flujos de los campos eléctrico y magnético, como en el caso de Maxwell. En otras palabras, tenderíamos a suponer que los flujos se obtienen considerando los vínculos que fijan divergencia cero para los campos eléctrico y magnético, lo que conduciría a las cargas conservadas habituales. Aunque esto es parcialmente correcto, pasa por alto varias cargas conservadas. La diferencia es que para la teoría del gravitón, necesitamos añadir también las restricciones que provienen de la formulación a partir métrica, estas son

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad E^i_i = 0, \quad (3.55)$$

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad B^i_i = 0. \quad (3.56)$$

Vamos a ver que teniendo en cuenta estas propiedades, encontraremos un conjunto ampliado de cargas conservadas. Además, en la sección 3.3, veremos que la adición de

⁵Es necesario que agreguemos al campo eléctrico un factor de $\delta_{ij}\mathcal{H} = 0$ para llegar a esta expresión

estas restricciones sugiere que la analogía correcta no es entre el gravitón y el campo de Maxwell, sino entre la teoría del gravitón y los sistemas fractónicos.

3.2.1. Un nuevo conjunto de cargas conservadas

Las propiedades de simetría y traza nula de los campos eléctricos y magnéticos (3.33), junto con las ecuaciones de divergencia cero (3.34), sugieren que es útil pensar en estos campos como “tensores de energía-momento” T_{ij} de CFTs Euclídeas en $D = 3$. Tal tensor de energía-momento satisface análogamente que

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad T^i{}_i = 0, \quad \partial^i T_{ij} = 0. \quad (3.57)$$

Y sabemos que dado tal tensor de energía-momento, las cargas conservadas están en correspondencia uno a uno con los generadores del grupo conforme. Para esto, sólo necesitamos contraer el tensor de energía-momento con los campos vectoriales que generan las isometrías conformes asociadas. Utilizando esta intuición podemos verificar que tenemos un conjunto ampliado de operadores vectoriales invariantes de gauge⁶ con divergencia nula. Estos son

$$B_i^P = B_{ji}a^j, \quad B_i^J = -B_{ij}s^{jn}x_n, \quad B_i^D = \kappa B_{ij}x^j, \quad B_i^K = B_{ij}(b^jx^2 - 2x^j b \cdot x), \quad (3.58)$$

$$E_i^P = E_{ji}\tilde{a}^j, \quad E_i^J = -E_{ij}\tilde{s}^{jn}x_n, \quad E_i^D = \tilde{\kappa} E_{ij}x^j, \quad E_i^K = E_{ij}(\tilde{b}^jx^2 - 2x^j\tilde{b} \cdot x), \quad (3.59)$$

donde tenemos que κ , a_i , b_i y s_{ij} son respectivamente un escalar, dos vectores y un tensor antisimétrico arbitrarios. Lo mismo se aplica a $\tilde{\kappa}$, \tilde{a}_i , \tilde{b}_i y \tilde{s}_{ij} . Las etiquetas P, J, D, K representan respectivamente la analogía con traslaciones, rotaciones, dilataciones y transformaciones conformes especiales. En este contexto, podemos comprobar utilizando las ecuaciones de Maxwell generalizadas, junto con los vínculos correspondientes, que tenemos

$$\begin{aligned} \partial^i E_i^P &= (\partial^i E_{ij})\tilde{a}^j = 0, \\ \partial^i E_i^J &= E_{ij}\tilde{s}^{ij} - (\partial^i E_{ij})\tilde{s}^{jn}x_n = 0, \\ \partial^i E_i^D &= \tilde{\kappa}(\partial^i E_{ij})x^j + \tilde{\kappa}E^i{}_i = 0, \\ \partial^i E_i^K &= (\partial^i E_{ij})(\tilde{b}^jx^2 - 2x^j\tilde{b} \cdot x) + 2E_{ij}(\tilde{b}^jx^i - \tilde{b}^ix^j) - 2(\tilde{b} \cdot x)E^i{}_i = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

El conjunto ampliado de ecuaciones de divergencia nula y sus contrapartes magnéticas nos dicen que la teoría tiene el siguiente conjunto de flujos⁷ conservados

⁶Para un difeomorfismo linealizado tenemos que $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$. Pero, como los campos eléctrico y magnético son ya de primer orden en la perturbación, la no invariancia de gauge de estas cargas es de segundo orden, y podemos despreciarla en la teoría linealizada.

⁷Cuando consideramos el adimensional $h_{\mu\nu}$ las cargas de Poincaré (3.18) se suprimen en realidad por un factor $(8\pi G)^{-1}$. Este no es el caso de los flujos eléctricos y magnéticos (3.61-3.62).

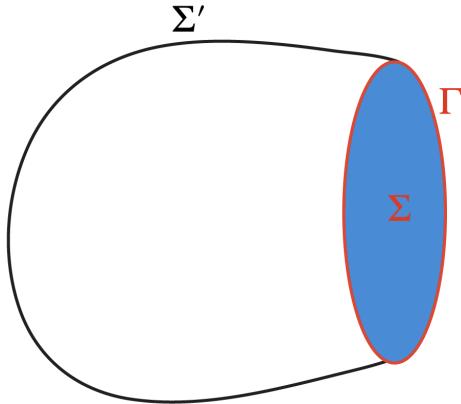


Figura 3.1: Elecciones posibles de Σ y Σ' para un borde fijo Γ .

$$\Phi_P^B = \int_{\Sigma} B_i^P dS^i, \quad \Phi_J^B = \int_{\Sigma} B_i^J dS^i, \quad \Phi_D^B = \int_{\Sigma} B_i^D dS^i, \quad \Phi_K^B = \int_{\Sigma} B_i^K dS^i, \quad (3.61)$$

$$\Phi_P^E = \int_{\Sigma} E_i^P dS^i, \quad \Phi_J^E = \int_{\Sigma} E_i^J dS^i, \quad \Phi_D^E = \int_{\Sigma} E_i^D dS^i, \quad \Phi_K^E = \int_{\Sigma} E_i^K dS^i, \quad (3.62)$$

donde la superficie de integración Σ es cualquier superficie abierta bidimensional delimitada por una cierto borde cerrado en forma de anillo. Estos operadores de flujo conmutan con todos los operadores locales fuera del anillo. La razón es la misma que en la teoría de Maxwell, podemos simplemente mover la superficie Σ de la definición del operador topológico a otra Σ' con el mismo borde $\Gamma = \partial\Sigma = \partial\Sigma'$ y el operador no cambia (Ver figura 3.1). Por tanto, los operadores locales que yacen sobre Σ conmutan con los flujos debido a la necesidad de preservar la causalidad, ya que podemos alejar el flujo del soporte del operador. Crucialmente, como explicamos en el capítulo 2, incluso si por este argumento podemos asociar estos operadores con regiones tipo anillo, no se generan localmente en el anillo. En particular, no conmutan con algunos de los operadores que no son aditivamente generados en el anillo complementario. En la sección 3.2.3 probaremos y discutiremos esta afirmación en detalle.

Por otro lado, queremos que los flujos de los vectores conservados (3.58-3.59) sean cargas adimensionales. Teniendo en cuenta que B_{ij}, E_{ij} tienen dimensión tres en energía tenemos que a_i, \tilde{a}_i tienen dimensiones de longitud, $s_{ij}, \tilde{s}_{ij}, \kappa, \tilde{\kappa}$ son adimensionales, y b_i, \tilde{b}_i tienen dimensiones de energía.

3.2.2. Álgebras de operadores topológicos para Maxwell

Dado el conjunto de flujos conservados y sus operadores topológicos asociados, el objetivo ahora es calcular su álgebra. Dado que vamos a introducir nuevas técnicas, adaptadas al estudio de los operadores no locales con smearing que nos permitirán calcular relaciones de conmutación entre operadores no locales, empezaremos recuperando

los resultados conocidos presentados en [7, 108, 109] para el campo de Maxwell.

Sabemos que los operadores topológicos en la teoría de Maxwell son los WL y TL (a los que respectivamente notamos como W y T). Estos son operadores invariantes de gauge que podemos obtener exponenciando el flujo magnético y eléctrico respectivamente. Se definen típicamente como lazos singulares infinitamente delgados. Sin embargo, en esta teoría abeliana, podemos definir una versión con smearing de ellos de la siguiente manera.⁸ Comenzamos con

$$W = e^{i\Phi^B} = e^{i \int d^4x A_\mu J^\mu}, \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.63)$$

donde J es una corriente conservada de soporte compacto. Estas dos condiciones impuestas sobre la corriente (entendida como una función de smearing) aseguran la invariancia de gauge del operador anterior. Más precisamente,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad \Rightarrow \quad W \rightarrow W e^{i \int d^4x (\partial_\mu \Lambda) J^\mu} = W e^{-i \int d^4x \Lambda (\partial_\mu J^\mu)} = W. \quad (3.64)$$

Ahora suponemos además que el soporte de J está restringido a una región del espacio-tiempo R . Dicha región es definida como dominio de dependencia causal de una región espacial que contiene un círculo no contractible. Para ser concretos, supondremos que la topología de R es $S^1 \times \mathbb{R}^3$. Debido a la conservación de la corriente, el flujo sobre una superficie tridimensional Σ que corta el anillo R una vez es independiente del Σ particular. Este flujo define una carga

$$q = \int_{\Sigma} dS_\mu J^\mu = \int_{\Sigma} d\sigma n_\mu J^\mu. \quad (3.65)$$

donde el vector n^μ es la normal espacio-temporal a Σ . La afirmación es que W es un WL con smearing y carga adimensional q . Lo confirmaremos mediante cálculo directo.

Por otro lado, podemos hacer una reescritura equivalente de este operador, en términos del campo magnético, de la forma

$$\Phi^B = \int d^4x A_\mu J^\mu = \frac{1}{2} \int d^4x \omega_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

donde $\omega_{\mu\nu}$ es una 2-forma cualquiera para la cual requerimos que

$$J_\mu = \partial^\nu \omega_{\mu\nu}. \quad (3.67)$$

En este contexto, podemos recuperar el TL para el campo de Maxwell a partir del flujo

⁸Definir versiones con smearing de operadores de lazo en teorías de gauge no abelianas resulta ser un problema particularmente difícil, véase [57] para un relato reciente desde la perspectiva de este capítulo o [110] para desarrollos numéricos en la red.

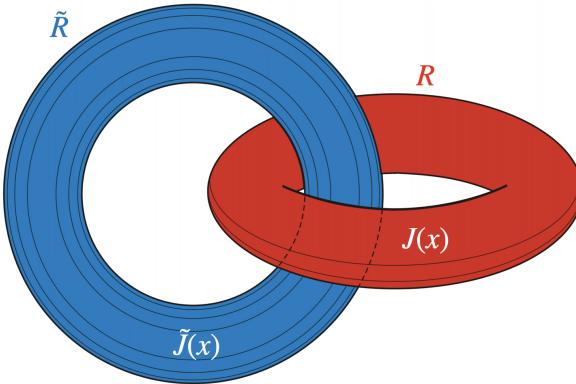


Figura 3.2: Las regiones tipo anillo R y \tilde{R} sobre las que definimos los WL y TL son el soporte compacto de las corrientes $J(x)$ y $\tilde{J}(x)$.

del campo eléctrico

$$T = e^{i\Phi^E} = e^{\frac{i}{2} \int d^4x \tilde{\omega}_{\mu\nu}(*F^{\mu\nu})}, \quad (3.68)$$

o bien podemos escribirlo de forma dual al WL, utilizando la expresión del flujo en términos el campo de gauge dual \tilde{A}_μ como

$$\Phi^E = \frac{1}{2} \int d^4x \tilde{\omega}_{\mu\nu}(*F^{\mu\nu}) = \int d^4x \tilde{A}_\mu \tilde{J}^\mu, \quad (3.69)$$

donde tenemos que $*F = d\tilde{A}$ y $\tilde{J}_\mu = \partial^\nu \tilde{\omega}_{\mu\nu}$. Si la corriente \tilde{J} tiene soporte en un anillo, podemos medir la carga monopolar del TL con smearing integrando el flujo de esta corriente dual sobre una superficie tridimensional $\tilde{\Sigma}$ con vector normal \tilde{n}_μ de la forma

$$g = \int_{\tilde{\Sigma}} dS_\mu \tilde{J}^\mu = \int_{\tilde{\Sigma}} d\sigma \tilde{n}_\mu \tilde{J}^\mu. \quad (3.70)$$

Ahora estamos listos para calcular el comutador $[\Phi_B, \Phi_E]$. El caso interesante es cuando las corrientes duales J y \tilde{J} tienen soporte en anillos enlazados como mostramos en la figura 3.2. En primer lugar, elegimos las funciones de smearing para tener soporte compacto espacial sobre los anillos de interés y que también cumplan

$$J_i(t, x) \propto \delta(t - t_0), \quad \tilde{J}_i(t, x) \propto \delta(t - t_0), \quad J_0(t, x) = 0, \quad \tilde{J}_0(t, x) = 0. \quad (3.71)$$

Esto implica que la 2-forma $\omega_{\mu\nu}$ tiene divergencia cero y componentes espaciales proporcionales a la función delta

$$\omega_{ij}(t, x) \propto \delta(t - t_0), \quad \tilde{\omega}_{ij}(t, x) \propto \delta(t - t_0), \quad \partial^\nu \omega_{0\nu}(t, x) = 0, \quad \partial^\nu \tilde{\omega}_{0\nu}(t, x) = 0. \quad (3.72)$$

Sin embargo, podemos utilizar la libertad restante para elegir la condición más fuerte

$$\omega_{0\mu}(t, x) = 0, \quad \tilde{\omega}_{0\mu}(t, x) = 0. \quad (3.73)$$

Ahora, nos permitiremos un ligero abuso en la notación y escribiremos $\omega_{ij} \rightarrow \omega_{ij} \delta(t-t_0)$ y $(t_0, x) \rightarrow x$. También, observamos que $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k$ y $*F_{ij} = \epsilon_{ijk} E^k$. Por ende, podemos escribir los flujos de la forma

$$\Phi^B = \frac{1}{2} \int d^3x \omega^{ij} F_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \omega^{ij} B^k = \int d^3x \Omega_k B^k, \quad (3.74)$$

$$\Phi^E = \frac{1}{2} \int d^3x \tilde{\omega}^{ij} (*F_{ij}) = \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \tilde{\omega}^{ij} E^k = \int d^3x \tilde{\Omega}_k E^k, \quad (3.75)$$

donde hemos definido las funciones de smearing más convenientes

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega^{jk}, \quad \tilde{\Omega}_i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \tilde{\omega}_{jk}. \quad (3.76)$$

Esto implica que el rotor de Ω viene dado por la corriente J como $(\nabla \times \Omega)_i = \partial^j \omega_{ij} = J_i$. Entonces, para una curva cerrada $\Gamma = \partial\Sigma$, tenemos que

$$\oint_{\Gamma=\partial\Sigma} \Omega_i dx^i = \int_{\Sigma} (\nabla \times \Omega)_i dS^i = \int_{\Sigma} J_i dS^i. \quad (3.77)$$

Vemos aquí una ambigüedad en la elección de Σ . En particular, tenemos permitido elegir otras superficies como Σ' (Ver figura 3.1). Sin embargo, debido a la conservación de la corriente $\nabla \cdot J = 0$ y a que J tiene soporte compacto en un anillo, el flujo es el mismo para cada Σ que corta el anillo una sola vez. Más precisamente, este flujo viene dado por la carga q como

$$q = \int_{\Sigma} J_i dS^i = \oint_{\Gamma} \Omega_i dx^i. \quad (3.78)$$

Nótese que estamos usando (3.65) y (3.71) para llegar a esta conclusión.

La situación es la misma en el caso dual con el TL. A partir de (3.70), podemos ver que la carga del monopolo obedece que

$$g = \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{J}_i dS^i = \oint_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\Omega}_i dx^i. \quad (3.79)$$

Volviendo a los flujos y utilizando el commutador canónico entre los campos eléctricos y magnéticos⁹

$$[E_i(x), B_j(y)] = i \epsilon_{ijk} \partial^k \delta(x-y), \quad (3.80)$$

vemos que el commutador que queremos calcular toma la forma

$$\begin{aligned} [\Phi^B, \Phi^E] &= \int d^3x \int d^3y \tilde{\Omega}^i(x) \Omega^j(y) [B_j(y), E_i(x)] \\ &= i \int d^3x \int d^3y \tilde{\Omega}^i(x) (\epsilon_{ikj} \partial_y^k \Omega^j(y)) \delta(x-y) = i \int d^3x \tilde{\Omega}^i(x) J_i(x). \end{aligned} \quad (3.81)$$

⁹Esto se deduce simplemente de las relaciones de commutación canónicas entre el campo eléctrico y el potencial de gauge.

Dentro del anillo R , donde $J(x)$ tiene soporte compacto, la otra corriente $\tilde{J}(x)$ es cero

$$x \in R \implies \tilde{J}(x) = 0 . \quad (3.82)$$

Recortando una sección Σ de R podemos convertirla en una región simplemente conexa, en la que podemos escribir el vector $\tilde{\Omega}$ localmente como un gradiente

$$x \in R - \Sigma \implies \nabla \times \tilde{\Omega}(x) = \tilde{J}(x) = 0 \implies \tilde{\Omega}(x) = \nabla \tilde{\varphi}(x) . \quad (3.83)$$

La circulación de $\tilde{\Omega}$ sobre una curva no contractible γ dentro de R (enlazada una vez con \tilde{R}) y que incluye un punto $y \in \Sigma$ viene dada por el salto de $\tilde{\varphi}$ en y a través de Σ . Este salto es constante en Σ porque es equivalente al flujo del rotor de $\tilde{\Omega}$, o el flujo de la corriente \tilde{J} :

$$g = \oint_{\Gamma} \partial_i \tilde{\varphi} dx_i = \Delta \tilde{\varphi}(y) . \quad (3.84)$$

Utilizando esta observación dentro del commutador (3.81) e integrando por partes obtenemos simplemente que

$$\begin{aligned} [\Phi^B, \Phi^E] &= i \int d^3x J_i(x) \partial^i \tilde{\varphi}(x) \\ &= i \int d^3x (\partial^i [\tilde{\varphi}(x) J_i(x)]) - \tilde{\varphi}(x) [\partial^i J_i(x)] . \end{aligned} \quad (3.85)$$

El último término desaparece por la conservación de la corriente $\partial^i J_i = 0$. El término restante es una divergencia que podemos escribir como

$$[\Phi^B, \Phi^E] = i \int_{\Sigma} dS_i \Delta \tilde{\varphi}(y) J_i = i q g . \quad (3.86)$$

Físicamente, las cargas q y g tienen en cuenta “cuántas veces la corriente da la vuelta” al respectivo anillo. Entonces, para regiones lineales delgadas, este resultado da el número de enlace habitual entre los lazos enlazados. Otro comentario es que, debido a la naturaleza topológica de estas relaciones de commutación, podemos deformar las regiones para que parezcan anillos infinitamente finos, o tomar las corrientes para que se extiendan por el espacio-tiempo en lugar de simplemente por la superficie $t = 0$, y las relaciones de commutación no cambian en la medida de que las cargas no cambien y las regiones sigan espacialmente separadas. De hecho, las deformaciones que preservan la carga son producidas por operadores locales que commutan con el operador no local dual.

Si ahora tomamos el WL y el TL como en las ecuaciones (3.63) y (3.68), de nuevo con soporte compacto en anillos espacialmente separados pero simplemente enlazados entre sí, llegamos a las famosas relaciones de commutación introducidas en [7]. Es decir,

tenemos que

$$W^q T^g = e^{i\Phi^B} e^{i\Phi^E} = e^{i\Phi^B + i\Phi^E + \frac{1}{2}[\Phi^B, \Phi^E]} = e^{i q g} T^g W^q. \quad (3.87)$$

Nótese que los términos siguientes de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff no aparecen para estos campos libres debido a que el conmutador (3.86) entre los flujos es numérico.

3.2.3. Álgebras de operadores topológicos para el gravitón

En la teoría de la gravedad linealizada, podemos definir operadores tipo WL y TL con smearing análogamente utilizando los flujos conservados (3.61-3.62) relacionados con las corrientes conservadas (3.58-3.59). Más concretamente, definimos

$$W_G = e^{i\Phi_G^B}, \quad T_F = e^{i\Phi_F^E}, \quad F, G = P, J, D, K, \quad (3.88)$$

donde los flujos con smearing vienen dados por

$$\Phi_G^B = \int d^3x \Omega^i(x) B_i^G(x) = \int d^3x \Omega^i(x) g_G^j(x) B_{ij}(x) \quad (3.89)$$

$$\Phi_F^E = \int d^3x \tilde{\Omega}^i(x) E_i^F(x) = \int d^3x \tilde{\Omega}^i(x) f_F^j(x) E_{ij}(x), \quad (3.90)$$

y donde las funciones $g_G^j(x)$ vienen dadas, para los diferentes G , por

$$a_j, -s_{jn}x^n, \kappa x_j, (b_j x^2 - 2x_j b \cdot x), \quad (3.91)$$

mientras que $f_F^j(x)$ para los diferentes F toman la forma

$$\tilde{a}_j, -\tilde{s}_{jn}x^n, \tilde{\kappa} x_j, (\tilde{b}_j x^2 - 2x_j \tilde{b} \cdot x). \quad (3.92)$$

Las funciones de smearing $\Omega^i(x)$ y $\tilde{\Omega}^i(x)$ son tales que $\nabla \times \Omega = J$, $\nabla \times \tilde{\Omega} = \tilde{J}$. Los soportes de J y \tilde{J} están restringidos a las regiones tipo anillo R y \tilde{R} respectivamente. Sin pérdida de generalidad, fijaremos las cargas correspondientes a uno. De esta manera tenemos que

$$\int_{\Sigma} J_i dS^i = \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{J}_i dS^i = 1. \quad (3.93)$$

Para demostrar que los operadores (3.88) son no locales en sus respectivos anillos, tenemos que demostrar que no comutan con ciertos operadores no locales en la región complementaria. Este problema, por supuesto, se resuelve completamente una vez que calculamos el álgebra de los flujos involucrados. Para esto, comenzamos de la expresión del conmutador en términos de los campos con smearing y consideramos el conmutador

entre las variables eléctricas y magnéticas

$$[\Phi_G^B, \Phi_F^E] = \iint d^3x d^3y \tilde{\Omega}^i(x) \Omega^k(y) f_F^j(x) g_G^l(y) [B_{kl}(y), E_{ij}(x)] . \quad (3.94)$$

Ahora sustituimos la expresión para el conmutador (3.40), integramos por partes las derivadas de cada término actuando sobre y , y eliminamos la función delta integrando sobre y . Como resultado, obtenemos que podemos escribir el conmutador como

$$\begin{aligned} [\Phi_G^B, \Phi_F^E] = & -\frac{i}{4} \int d^3x \tilde{\Omega}^i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) J_i g_G^l + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) J_j g_G^l \right. \\ & - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) J_l g_G^l + \varepsilon_{ibk} (\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) \Omega^k \partial_b g_G^l \\ & \left. + \varepsilon_{jbk} (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) \Omega^k \partial_b g_G^l - \varepsilon_{lbk} (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) \Omega^k \partial_b g_G^l \right], \end{aligned} \quad (3.95)$$

donde usamos que $J_i = \varepsilon_{ijk} \partial^j \Omega^k$.

Los últimos tres términos de (3.95) no están expresados en términos de la corriente. Esto obstruye momentáneamente la localización de la integral en la región R (que es el soporte de J). Esta localización nos fue fundamental en la derivación de las relaciones de conmutación para el campo de Maxwell. Sin embargo, esta localización se produce naturalmente cuando escribimos en detalle la forma de la función g_G^l . Tenemos que analizar caso por caso. Proporcionamos aquí el ejemplo para “dilataciones magnéticas” $g_D^l(x) = \kappa x^l$. En dicho caso, obtenemos

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{ibk} (\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) + \varepsilon_{jbk} (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) - \varepsilon_{lbk} (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)] (\Omega^k \partial^b g^l) \\ & = \kappa [\varepsilon_{ilk} \partial_j \partial^l \Omega^k - \varepsilon_{ijk} \partial^2 \Omega^k + \varepsilon_{jlk} \partial_i \partial^l \Omega^k - \varepsilon_{jik} \partial^2 \Omega^k] = \kappa [\partial_j J_i + \partial_i J_j] . \end{aligned} \quad (3.96)$$

Es decir, podemos expresar este término de forma proporcional a la corriente (y sus derivadas) como sucede para los primeros términos en (3.95). Sustituyendo en dicha expresión para el conmutador, tenemos

$$\begin{aligned} [\Phi_D^B, \Phi_F^E] = & -\frac{i\kappa}{4} \int d^3x \tilde{\Omega}^i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2) (J_i x^l) \right. \\ & \left. + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2) (J_j x^l) - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2) (J_l x^l) + \partial_j J_i + \partial_i J_j \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Como cada término es proporcional a la corriente, la integración se restringe a la región R . En (3.97) estamos considerando el caso particular de $g_G = g_D$, pero este paso ocurre también para los otros g_G . En los demás casos, considerando el análogo de (3.97) obtenemos respectivamente para “traslaciones, rotaciones y transformaciones

conformes especiales magnéticas” que

$$\begin{aligned} [\Phi_P^B, \Phi_F^E] &= -\frac{i\kappa}{4} \int d^3x \tilde{\Omega}^i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_i x^l) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2)(J_j x^l) - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)(J_l x^l) \right], \quad (3.98) \\ [\Phi_J^B, \Phi_F^E] &= -\frac{i s^{nl}}{4} \int d^3x \tilde{\Omega}^i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_i x^n) + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2)(J_j x^n) \right. \\ &\quad \left. - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)(J_l x^n) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{inl} \varepsilon_{jab} + \varepsilon_{jnl} \varepsilon_{iab}) \partial^a J^b \right], \\ [\Phi_K^B, \Phi_F^E] &= -\frac{i}{4} \int d^3x \tilde{\Omega}^i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_i x^l) + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2)(J_j x^l) \right. \\ &\quad \left. - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)(J_l x^l) + 2(b \cdot x) (\partial_j J_i + \partial_i J_j) - 8 \delta_{ij} (b \cdot J) \right. \\ &\quad \left. + 6 b_i J_j + 6 b_j J_i + (b^l x^n - b^n x^l) (\varepsilon_{inl} \varepsilon_{jab} + \varepsilon_{jnl} \varepsilon_{iab}) \partial^a J^b \right]. \end{aligned}$$

El siguiente paso es escribir dentro de R el campo $\tilde{\Omega}_i = \partial_i \tilde{\varphi}$ donde $\tilde{\varphi}$ tiene un salto unidad al cruzar Σ . Después de la integración por partes encontramos que la divergencia en el índice i del integrando desaparece. Considerando la conservación de la corriente, esto es válido para todo $f_F(x)$ y $g_G(x)$ con $F, G = P, D, J, K$. Por ejemplo, para el caso de dilataciones magnéticas, (3.97), vale que

$$\partial_i \left\{ f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_i x^l) + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2)(J_j x^l) \right. \right. \\ \left. \left. - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)(J_l x^l) + \partial_j J_i + \partial_i J_j \right] \right\} = 0. \quad (3.99)$$

Como resultado de (3.99), la integral en (3.97) viene dada únicamente por un término de superficie, que es independiente de la elección particular de Σ que corte a R :

$$\begin{aligned} [\Phi_D^B, \Phi_F^E] &= -\frac{i\kappa}{4} \int_{\Sigma} dS_i f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_i x_l) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_i \partial_l - \delta_{il} \partial^2)(J_j x_l) - (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^2)(J_l x_l) + \partial_j J_i + \partial_i J_j \right]. \quad (3.100) \end{aligned}$$

Para evaluar la integral de superficie, considerando que el resultado es independiente de la sección de corte elegida sobre R , elegimos una superficie plana Σ . Además, tomamos coordenadas cartesianas donde x_1, x_2 son paralelas a dicha superficie, y x_3 es la ortogonal. Véase la figura 3.3. Con esta imagen en mente, estudiemos las integrales de superficie que aparecen. Estas son de la forma

$$\begin{aligned} [\Phi_D^B, \Phi_F^E] &= -\frac{i\kappa}{4} \int_{\Sigma} dx_1 dx_2 f_F^j \left[(\partial_j \partial_l - \delta_{jl} \partial^2)(J_3 x^l) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_3 \partial_l - \delta_{3l} \partial^2)(J_j x^l) - (\partial_3 \partial_j - \delta_{3j} \partial^2)(J_l x^l) + \partial_j J_3 + \partial_3 J_j \right]. \quad (3.101) \end{aligned}$$

La integración de las derivadas paralelas a la superficie desaparece porque la co-

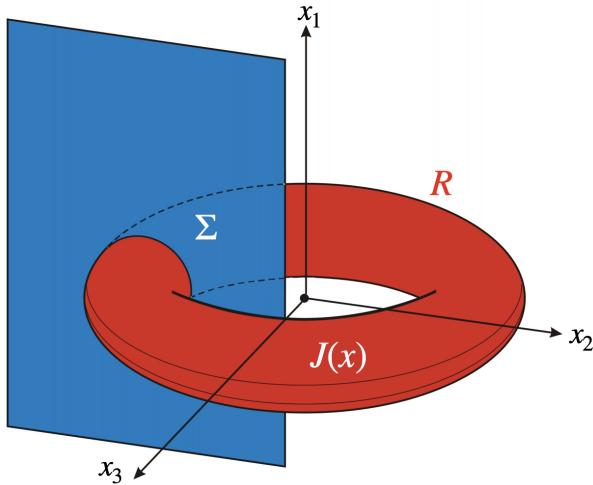


Figura 3.3: Ejemplo de superficie de integración Σ . Aquí utilizamos coordenadas (x_1, x_2, x_3) siendo la superficie Σ ortogonal a x_3 .

riente y sus derivadas tienen soporte compacto en R y por ende se anulan en las borde de Σ . También podemos utilizar la conservación de la corriente para escribir $\partial_3 J_3 = -\partial_1 J_1 - \partial_2 J_2$, e integrar por partes las derivadas paralelas. Después de un poco de trabajo, encontramos que para cualquier f_F^j específica la integral o bien desaparece o se hace proporcional a $\int_{\Sigma} dx_1 dx_2 J_3 = 1$. De este modo obtenemos

$$[\Phi_D^B, \Phi_P^E] = 0, \quad [\Phi_D^B, \Phi_J^E] = 0, \quad [\Phi_D^B, \Phi_D^E] = \frac{i \kappa \tilde{\kappa}}{2}, \quad [\Phi_D^B, \Phi_K^E] = 0. \quad (3.102)$$

Como se ha dicho, podemos seguir el mismo procedimiento para obtener los demás conmutadores de g_G para $G \neq D$. No reproducimos aquí estos cálculos porque son bastante largos y no especialmente esclarecedores. También hemos comprobado el resultado realizando los cálculos con un programa para manipulaciones matemáticas. El álgebra completa de operadores topológicos que obtenemos considerando (3.97-3.98) es

$$\begin{aligned} [\Phi_P^B, \Phi_K^E] &= i a^i \tilde{b}_i, & [\Phi_J^B, \Phi_J^E] &= \frac{i}{4} s^{ij} \tilde{s}_{ji}, \\ [\Phi_D^B, \Phi_D^E] &= \frac{i}{2} \kappa \tilde{\kappa}, & [\Phi_K^B, \Phi_P^E] &= i b^i \tilde{a}_i. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Nótese que todos los demás conmutadores tienen que ser cero por análisis dimensional. En particular, los conmutadores son adimensionales al igual que las cargas. Para obtener un resultado adimensional que dependa totalmente de las cargas escalar, vectorial y tensorial, los únicos conmutadores que pueden presentar resultados distintos de cero son los anteriores. Otras posibilidades implican funciones de las coordenadas que dependen de la geometría de los anillos, pero esto no es posible debido a la naturaleza topológica de estas cargas. Para ser precisos, si cambiamos suavemente la geometría

de R y el valor de J a R' y J' , manteniendo fija la carga y evitando intersecar \tilde{R} , los conmutadores no deben cambiar. La razón es que la diferencia entre el operador de flujo definido en R y el definido en R' es un operador aditivo en el complemento de \tilde{R} , y por ende commuta con los operadores basados en \tilde{R} .

Teniendo en cuenta estos resultados, las correspondientes relaciones de conmutación distintas de cero para los WL y TL del gravitón (3.88) tienen la forma

$$\begin{aligned} W_P^a T_K^{\tilde{b}} &= e^{i\tilde{b}\cdot a} T_K^{\tilde{b}} W_P^a, & W_J^s T_J^{\tilde{s}} &= e^{-\frac{i}{4}\tilde{s}\cdot s} T_J^{\tilde{s}} W_J^s, \\ W_D^\kappa T_D^{\tilde{\kappa}} &= e^{\frac{i}{2}\tilde{\kappa}\kappa} T_D^{\tilde{\kappa}} W_D^\kappa, & W_K^b T_P^{\tilde{a}} &= e^{i\tilde{a}\cdot b} T_P^{\tilde{a}} W_K^b. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Las relaciones de conmutación muestran que los operadores definidos anteriormente son operadores no locales HDV en el anillo, ya que no commutan con al menos un operador no local en el anillo complementario. El grupo de simetrías generalizadas es el grupo abeliano $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10}$ de flujos eléctricos y magnéticos. Hay 10 flujos eléctricos independientes y 10 flujos magnéticos independientes, y podemos asociar ambos a la misma región tipo anillo R en $D = 4$.

La característica más destacada de esta simetría generalizada, que no está presente en las teorías de gauge ordinarias, es la presencia de índices de Lorentz para las cargas de la simetría generalizada que definen las clases HDV. Estudiaremos en detalle este tema en el capítulo 5.

3.2.4. Conmutador de flujos para el caso de dos cuadrados

Dado que la prueba de las relaciones de conmutación (3.86) y especialmente (3.103) pueden ser algo abstractas es conveniente comprobarlas utilizando lazos singulares (infinitamente delgados). Para el campo de Maxwell en $D = 4$ dimensiones, tenemos que las relaciones de conmutación entre los campos eléctrico y magnético vienen dadas por (3.80). Podemos calcular el conmutador de los flujos Φ^B y Φ^E asociados a las superficies bidimensionales S y \tilde{S} como

$$\begin{aligned} [\Phi^B, \Phi^E] &= \int_S \int_{\tilde{S}} [B_j(y), E_i(x)] dS^j(y) d\tilde{S}^i(x) \\ &= i \int_S \int_{\tilde{S}} \varepsilon_{jik} [\partial^k \delta(x - y)] dS^j(y) d\tilde{S}^i(x). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Supongamos que podemos representar la curva que define la región S mediante sus extremos como $\Gamma = \partial S = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ y que la curva que define \tilde{S} viene dada por

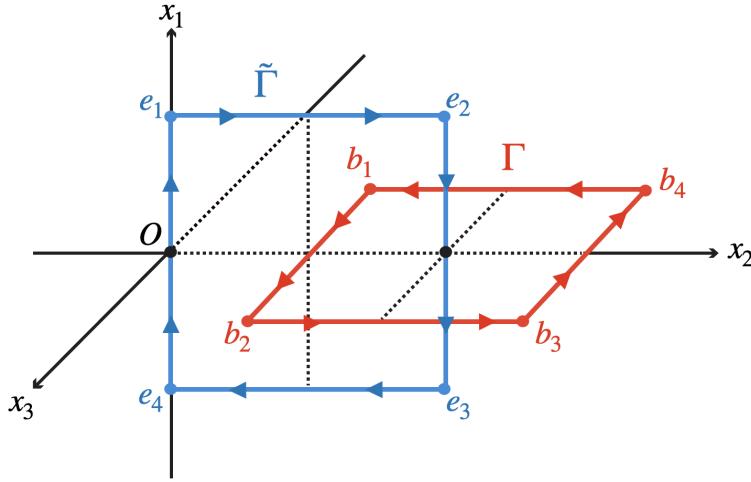


Figura 3.4: Regiones S y \tilde{S} delimitadas por Γ y $\tilde{\Gamma}$ para $e = x_3 = 0$ y $b = y_1 = 0$.

$\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{S} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ donde

$$b_1 \left(0, \frac{L}{2}, -\frac{L}{2} \right), \quad b_2 \left(0, \frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right), \quad b_3 \left(0, \frac{3L}{2}, \frac{L}{2} \right), \quad b_4 \left(0, \frac{3L}{2}, -\frac{L}{2} \right), \quad (3.106)$$

$$e_1 \left(\frac{L}{2}, 0, 0 \right), \quad e_2 \left(\frac{L}{2}, L, 0 \right), \quad e_3 \left(-\frac{L}{2}, L, 0 \right), \quad e_4 \left(-\frac{L}{2}, 0, 0 \right). \quad (3.107)$$

Esta geometría se representa en la figura 3.4. Los vectores normales a las superficies S y \tilde{S} (asociados a la circulación que hemos dibujado) dan $n_i = \delta_{i1}$ y $\tilde{n}_i = -\delta_{i3}$. Por tanto las diferenciales de superficie vienen dadas por

$$dS_j(y) = n_j dy_2 dy_3 = \delta_{j1} dy_2 dy_3, \quad y_2 \in \left[\frac{L}{2}, \frac{3L}{2} \right], \quad y_3 \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], \quad (3.108)$$

$$d\tilde{S}_i(x) = \tilde{n}_i dx_1 dx_2 = -\delta_{i3} dx_1 dx_2, \quad x_1 \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right], \quad x_2 \in \left[0, L \right]. \quad (3.109)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.108-3.109) en (3.105), tenemos que el conmutador es

$$[\Phi^E, \Phi^B] = i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^L \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \delta(x_1) \delta(-y_3) \partial_2 \delta(x_2 - y_2) dx_1 dx_2 dy_2 dy_3 = i. \quad (3.110)$$

Además, podemos comprobar que si se rotan los cuadrados el resultado no cambia (salvo un signo menos global relacionado con la orientación de las superficies). Sin embargo, si se separan los cuadrados y sus superficies ya no se tocan, el resultado es siempre cero. Esto se debe a que el conmutador $[\Phi^B, \Phi^E]$ es proporcional al número de enlace entre las curvas Γ y $\tilde{\Gamma}$.

Podemos realizar el mismo proceso para el gravitón considerando el conmutador (3.40). Queremos calcular los conmutadores de los flujos definidos por (3.61) y (3.62) en la configuración que presentamos en la figura 3.4. Más específicamente, podemos

utilizar la notación

$$\Phi_G^B = \int_S B_{ij}(x) g^j(x) dS^i, \quad g_j(x) = a_j, -s_{jn}x_n, kx_j, (b_jx_nx_n - 2x_jb_nx_n), \quad (3.111)$$

$$\Phi_F^E = \int_{\tilde{S}} E_{ij}(x) f^j(x) d\tilde{S}^i, \quad f_j(x) = \tilde{a}_j, -\tilde{s}_{jn}x_n, \tilde{k}x_j, (\tilde{b}_jx_nx_n - 2x_j\tilde{b}_nx_n). \quad (3.112)$$

De esta manera, para las geometrías cuadradas enlazadas definidas anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned} [\Phi_G^B, \Phi_F^E] &= \int_S \int_{\tilde{S}} [E_{kl}(y), B_{ij}(x)] g^l(y) f^j(x) dS^k(y) d\tilde{S}^i(x) \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^L \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [E_{3i}(x), B_{1j}(y)] f^i(x) g^j(y) dx_1 dx_2 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (3.113)$$

A partir de aquí, calculando caso por caso, obtenemos los resultados esperados

$$\begin{aligned} [\Phi_P^B, \Phi_K^E] &= i a^i \tilde{b}_i, \quad [\Phi_J^B, \Phi_J^E] = \frac{i}{4} s^{ij} \tilde{s}_{ji}, \\ [\Phi_D^B, \Phi_D^E] &= \frac{i}{2} \kappa \tilde{\kappa}, \quad [\Phi_K^B, \Phi_P^E] = i b^i \tilde{a}_i. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Observamos que esto sigue siendo cierto si movemos los cuadrados cambiando las coordenadas x_3 y y_1 en el rango $[-L/2, L/2]$ (sin cambiar el número de enlace) pero el resultado desaparece si separamos los cuadrados, lo cual es un buen síntoma ya que esperamos que el resultado general sea topológico.

3.3. Fractones y completitud del espectro

Habiendo derivado el álgebra de las simetrías generalizadas de la teoría del gravitón linealizado libre, discutimos ahora algunas aplicaciones interesantes. En particular, como se describe en la introducción, queremos abordar la cuestión de cargar o romper estas simetrías generalizadas desde una perspectiva puramente de QFT.

Seamos más precisos. En [18] se argumentó que las teorías de campos efectivas de tipo gauge en gravedad cuántica deberían ser “completas”, lo que significa que el espectro de cargas posibles debería ser el máximo consistente con la condición de cuantización de Dirac. Este principio se amplió posteriormente en [19] para incluir simetrías generalizadas. Más recientemente, en [20, 21, 23], la relación entre completitud y ausencia de simetrías generalizadas ha sido profundizada. En particular, como vimos en el capítulo 2, en [23] se define que una QFT (sin gravedad) como completa siempre que la causalidad $A(R) \subseteq A(\bar{R})'$ siempre esté saturada para el álgebra de observables asociada a cualquier región con cualquier topología dada. Permitir la no saturación de esta condición conduce inevitablemente a la existencia de dos simetrías generalizadas

duales, como los dos conjuntos duales que derivamos para el gravitón.¹⁰ De la existencia de tales simetrías generalizadas, o equivalentemente de la no saturación de causalidad en regiones tipo anillo por la precencia de clases HDV, sabemos que la teoría del gravitón libre no es completa.

Así pues, es interesante ver si podemos “completar” la teoría del gravitón introduciendo un número suficiente de operadores cargados para destruir el conjunto de simetrías generalizadas que describimos anteriormente. Se podría anticipar que aparecerían problemas al intentar llevar a cabo este proceso. Por ejemplo, dado que las simetrías generalizadas del gravitón están cargadas bajo simetrías espacio-temporales, esperamos que alguna generalización del teorema de Coleman-Mandula a simetrías internas generalizadas dificulte encontrar una completación invariante Lorentz simple de esta teoría. Además, a partir de los conocimientos actuales sobre gravedad cuántica, no esperamos poder completar la teoría de una forma usual desde el punto de vista de QFTs relativistas.

Resulta que el hecho de que las simetrías generalizadas del gravitón estén cargadas bajo simetrías espacio-temporales significa que las partículas cargadas que hacen aditivos los operadores topológicos tendrán su movimiento altamente restringido, ya que el mismo debe respetar todas las leyes de conservación en cuestión. Curiosamente, este tipo de comportamiento se ha observado muy recientemente en el contexto de materia condensada, donde este tipo de excitaciones reciben el nombre de “fractones”.

3.3.1. Fractones y teorías de gauge tensoriales

Los fractones se definen como partículas incapaces de moverse a través del espacio [76–80]¹¹. La razón detrás de esta restricción de movilidad, no tiene nada que ver con la inercia, en el sentido de tener grandes masas. Tiene que ver con leyes de conservación bastante peculiares que el movimiento tiene que respetar. Aunque los fractones, de forma aislada, no pueden moverse, los estados ligados de fractones pueden moverse por el espacio. Por ejemplo, en algunos modelos que revisaremos más adelante, los fractones aislados no pueden moverse, mientras que sus dipolos sí. Intuitivamente, hay una “simetría” que prohíbe la existencia de operadores dipolares localizados en la teoría, que de otro modo podrían transportar fractones de un lugar a otro, pero esa simetría no prohíbe la existencia de operadores cuadrupolares localizados que transporten dipolos de un lugar a otro, véase [81] y también [82, 83] para posibles escenarios experimentales.

Estas propiedades bastante inusuales y sorprendentes han sido bien descritas por Pretko [80, 113] en términos de los recientes avances en las teorías de gauge tensoriales

¹⁰En el contexto de AdS/CFT hay diferentes argumentos para la ausencia de diferentes tipos de simetrías en las teorías de campo efectivas del bulk, véase [14, 22, 111, 112].

¹¹En esta línea también se encuentran los “lineones” y los “planones”, que son partículas a las que sólo se les permite moverse en sub-variedades diferenciales apropiadas [81].

[114], que resultan mostrar leyes de conservación de este tipo. Un ejemplo estándar que se encuentra en la literatura es el siguiente: empecemos con un potencial de gauge simétrico de dos índices A_{ij} y una ley de transformación de gauge dada por

$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} + \partial_i \partial_j \alpha . \quad (3.115)$$

Podemos introducir un campo magnético invariante de gauge de dos índices de la forma habitual mediante

$$B_{ij} = \epsilon_{ikl} \partial^k A_j^l , \quad (3.116)$$

y podemos definir el campo eléctrico invariante de gauge implícitamente imponiendo una relación de commutación canónica con el potencial de gauge

$$[A_{ij}, E_{kl}] = i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\delta(x - y) . \quad (3.117)$$

La ley de conservación presente en esta teoría es una versión modificada de la ley de Gauss para el caso de Maxwell

$$\partial^i \partial^j E_{ij} = 0 , \quad (3.118)$$

donde podemos verificar que, dadas las relaciones de commutación canónicas, genera adecuadamente la transformación de gauge (5.86). Si introducimos un nuevo potencial A_0 con transformación de gauge

$$A_0 \rightarrow A_0 + \dot{\alpha} , \quad (3.119)$$

podemos escribir el campo eléctrico como $E_{ij} = \dot{A}_{ij} - \partial_i \partial_j A_0$.

Es de interés comprender cómo acoplar este modelo con fuentes. Llamando $\rho = \partial^i \partial^j E_{ij}$ a una fuente de densidad de carga para la ecuación de conservación anterior, podemos medir las cargas eléctricas conservadas de este modelo por el flujo correspondiente en el infinito

$$Q = \int dx^3 \rho = \int dx^3 \partial_i \partial_j E_{ij} = \int dS_j \partial_i E^{ij} , \quad (3.120)$$

esto es, de la misma manera que se hace con la carga eléctrica habitual. Además, también tenemos una carga vectorial, no invariante bajo las simetrías espacio-temporales. Esta carga “dipolar” escribe como

$$P^i = \int dx^3 \rho x^i = \int dx^3 x^i \partial_j \partial_k E^{jk} = \int dS_j (x^i \partial_k E^{jk} - E^{ij}) . \quad (3.121)$$

La conservación de esta carga dipolar impide que las excitaciones cargadas locales, llamadas fractones, se muevan por el espacio, mientras que los dipolos pueden moverse

si conservan la dirección. Este modelo se denomina “modelo tensorial de carga escalar”.

Un segundo tipo de teoría, denominado “modelo tensorial de carga vectorial”, surge al considerar la siguiente transformación de gauge diferente para el potencial

$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} + \partial_i \alpha_j + \partial_j \alpha_i , \quad (3.122)$$

generada por la siguiente vínculo de carácter vectorial

$$\partial^i E_{ij} = 0 . \quad (3.123)$$

En esta teoría podemos escribir el campo magnético invariante de gauge como

$$B_{ij} = \varepsilon_{iab} \varepsilon_{jcd} \partial^b \partial^d A^{ac} , \quad (3.124)$$

que obedece explícitamente $\partial^i B_{ij} = 0$.

En este escenario, se denomina teoría vectorial, ya que la fuente de la ecuación de conservación transforma como un vector bajo rotaciones. Esta teoría tiene la carga conservada habitual.

$$Q^i = \int d^3x \rho^i = \int d^3x \partial_j E^{ij} = \int dS_j E^{ij} , \quad (3.125)$$

pero también una carga de tipo momento angular

$$M^i = \int d^3x \varepsilon^{ijk} \rho_j x_k = \int dS_j (\varepsilon^{ilk} E_l^j x_k) . \quad (3.126)$$

De nuevo, la conservación de ambas cargas restringe el movimiento de las excitaciones y estados ligados. En general, estos modelos se incluyen dentro de “teorías de gauge de rango superior”, cuyos grados de libertad son potenciales de gauge y campos eléctricos y magnéticos con varios índices simétricos. En este contexto, los vínculos y/o leyes de conservación surgen por diferentes combinaciones de divergencias y trazas, véase [114] para revisión más completa.

Dadas estas características de las teorías de gauge tensoriales que potencialmente se acoplan a fractones o excitaciones relacionadas, se desarrollaron conexiones con la relatividad general en [87, 115, 116]. En particular, se argumentó en [87] que varias propiedades de las interacciones entre fractones se asemejan a la gravedad. Las razones heurísticas descritas en esos artículos se basan en el hecho de que la teoría de los gravitones, en su formulación métrica, puede verse como una teoría tensorial de gauge donde el potencial de gauge $h_{\mu\nu}$, representa la perturbación sobre la métrica de fondo. Más aún, se propuso que el papel de las leyes de conservación no triviales de las teorías tensoriales de gauge lo desempeñan los vínculos hamiltoniano y de momento (3.13). Si

bien la intuición detrás de esta idea es correcta, una comparación adecuada entre las teorías fractónicas y la de gravitones debe realizarse en el espacio de fases invariante de gauge. En lo que resta de esta sección buscaremos formular precisamente dicha relación a partir de los campos E_{ij} y B_{ij} del gravitón definidos en (3.32).

En lugar de intentar adaptar el zoológico de sistemas fractónicos y teorías de gauge tensoriales a la gravedad, utilizando nuestros resultados anteriores sobre simetrías generalizadas y la formulación electromagnética generalizada de la gravedad lineal, podemos ir en la dirección opuesta. Es decir, intentaremos describir la teoría linealizada del gravitón como un ejemplo específico del zoológico de teorías de gauge tensoriales que describen sistemas fractónicos.

Observando la clasificación anterior y nuestros resultados anteriores, vemos que las restricciones sobre las variables físicas E_{ij}, B_{ij} nos muestran de que el gravitón es un ejemplo de una “teoría de carga vectorial de traza nula”, como se describe en [113]. Curiosamente, la teoría del gravitón no es precisamente la teoría de gauge tensorial de este tipo descrita en [113], pero comparte con ella el mismo conjunto de leyes de conservación y simetrías generalizadas. La razón es que el modelo del gravitón también es auto-dual, y los campos eléctrico y magnético satisfacen las mismas relaciones algebraicas y de conservación que los tensores energía-momento de las CFTs Euclídeas en una dimensión menos. La diferencia radica en la dinámica y las relaciones de commutación. En particular, el modelo descrito en [113] debe tener la misma estructura de operadores no locales y simetrías generalizadas que los descritos en el presente trabajo. Sin embargo, esperamos que el álgebra de estos operadores topológicos sea diferente del álgebra descrita anteriormente, dado que esta es procedente de la teoría de gravitones.

Además, la forma natural de acoplar la materia fractónica a los campos de gauge no resulta ser la misma que la forma en que acoplamos la materia a la métrica en relatividad general. En particular, podemos escribir las ecuaciones de movimiento linealizadas en presencia de un tensor de energía-momento de materia acoplado mínimamente como

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} R^{(1)} = T_{\mu\nu}, \quad (3.127)$$

donde $T_{\mu\nu}$ da cuenta de las fuentes de materia y gravitones como en [91]. En la formulación electromagnética, esto es

$$\begin{aligned} E_i^i &= T_i^i - 2T_{00}, & \epsilon_{ijk} E_{ij} &= 0, \\ B_i^i &= 0, & \epsilon_{ijk} B_{ij} &= T_{k0}, \\ \partial_j E_{ij} &= \dot{T}_{0i} - 2\partial_i T_{00} + \partial_i T_j^j, & \epsilon_{iab} \partial_a E_{bj} &= -B_{ij}, \\ \partial_j B_{ij} &= \epsilon_{ijk} \partial_j T_{k0}, & \epsilon_{iab} \partial_a B_{bj} &= E_{ij} - T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{2} T + \partial_j T_{ij}. \end{aligned} \quad (3.128)$$

El principio de equivalencia, en su encarnación de “acoplamiento mínimo”, obliga a

las “corrientes eléctricas y magnéticas” a tener alguna forma peculiar definida. Esta característica también se desvía del modelo específico considerado en [113].

3.3.2. Líneas de Wilson para el gravitón

Si estuviéramos considerando una teoría de gauge convencional, para romper la simetría generalizada primero escribiríamos el operador no local utilizando el potencial de gauge. En otras palabras, pondríamos el operador no local como un operador de lazo de un campo no invariante de gauge, en lugar de escribirlo como un flujo sobre una superficie. De este modo, podemos descomponer el lazo en líneas de Wilson abiertas. Estas líneas de Wilson abiertas no son invariantes de gauge, pero su transformación sólo depende de los puntos extremos. Esto nos permite comprender qué tipo de materia debemos incluir para obtener una línea de Wilson verdaderamente invariante de gauge. Para las teorías de gauge típicas, esto significa incluir materia que transforme bajo una cierta representación del grupo de gauge. Estas líneas de Wilson invariantes de gauge convierten entonces el operador HDV topológico en uno aditivo.

Hasta ahora, sólo hemos producido expresiones de los operadores HDV no locales en términos de flujos invariantes de gauge. Ahora buscaremos expresiones en términos de operadores de lazo de campos no invariantes de gauge, que desempeñan el papel del potencial de gauge en el escenario de una teoría de gauge convencional. Veremos que los resultados sugieren que el contenido de materia que puede romper los operadores no locales es una completación no convencional de la teoría del gravitón linealizado.

Para empezar, observamos que los campos eléctrico y magnético del gravitón pueden escribirse en términos de las variables de ADM presentadas en la sección 3.1.3. Específicamente, usando la curvatura extrínseca (3.22) y la función de lapso (3.21) tenemos que

$$E_{ij} = \dot{K}_{ij} - \partial_i \partial_j N, \quad B_{ij} = \varepsilon_{iab} \partial_b K_{aj}. \quad (3.129)$$

Aunque los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo la acción de difeomorfismos linealizados, la curvatura extrínseca y la función de lapso se transforman como en el “modelo tensorial de carga escalar” con la ley (5.86) asociada a la componente ξ_0 . Es decir,

$$K_{ij} \rightarrow K_{ij} - \partial_i \partial_j \xi_0, \quad N \rightarrow N - \dot{\xi}_0. \quad (3.130)$$

Esto sólo depende de la función ξ_0 y reproduce las transformaciones (5.86) y (3.119) presentadas en [80, 113]. Nótese, sin embargo, que E_{ij} y K_{ij} no son variables canónicamente conjugadas, como se suele suponer en las discusiones de los modelos tensoriales de carga escalar. En este punto desaparece la similitud de la teoría del gravitón con este tipo de modelos. En particular, la transformación de las variables canónicas inducida por los vínculos es muy diferente.

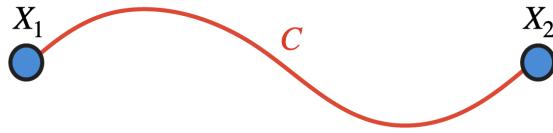


Figura 3.5: Ejemplo de una curva que define un operador de línea.

Utilizando las expresiones (3.129-3.130) podemos escribir los campos magnéticos de traslación y dilatación descritos en la ecuación (3.58) de la forma

$$B_i^P = \epsilon_{iab} \partial^b (K^{aj} a_j), \quad B_i^D = \epsilon_{iab} \partial^b (\kappa K^{aj} x_j). \quad (3.131)$$

Esto nos permite escribir los correspondientes flujos de operadores no locales como circulaciones de $K^{aj} a_j$ y $\kappa K^{aj} x_j$ a lo largo del borde de la superficie. Estas mismas integrales de línea sobre una curva abierta C nos permiten definir

$$U^P(C) = \int_C d\ell_i (K^{ij} a_j) = \frac{1}{2} \int_C d\ell_i (a_j \dot{h}^{ij} - a_j \partial^j h_0^i - a_j \partial^i h_0^j), \quad (3.132)$$

$$U^D(C) = \int_C d\ell_i (\kappa K^{ij} x_j) = \frac{\kappa}{2} \int_C d\ell_i (x_j \dot{h}^{ij} - x_j \partial^j h_0^i - x_j \partial^i h_0^j). \quad (3.133)$$

Estos operadores, como era de esperar, tienen transformaciones de gauge que sólo dependen de los puntos finales de la curva (Ver figura 3.5)

$$U^P(C) \rightarrow U^P(C) - a_j \int_C d\ell_i \partial_i \partial_j \xi_0 = U^P(C) - a_j \partial_j \xi_0|_{X_1}^{X_2}, \quad (3.134)$$

$$U^D(C) \rightarrow U^D(C) - \kappa \int_C d\ell_i x_j \partial_i \partial_j \xi_0 = U^D(C) - \kappa (x_j \partial_j \xi_0 - \xi_0)|_{X_1}^{X_2}. \quad (3.135)$$

Podemos interpretar estas líneas de Wilson como el límite de las bandas de Wilson asociadas a un dipolo fractónico, como se procede en [85, 86] en el contexto de los modelos tensoriales de carga escalar. La configuración correspondiente se describe en la Figura 3.6. El operador de banda viene dado ahora por una integral de línea doble sobre la curva C y otra sobre la fibra F_λ en cada punto λ perteneciente a C :

$$U(C, F) = \int_C d\ell_i^C \int_{F_\lambda} d\ell_j^\lambda K^{ij} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \left[\frac{\partial x_i^C(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial x_j^\lambda(\beta)}{\partial \beta} K^{ij} \right]. \quad (3.136)$$

Para una fibra infinitesimal, escribimos el vector tangente $\frac{\partial x_j^\lambda(\beta)}{\partial \beta} = \epsilon k^j(\lambda)$ y obtenemos

$$U(C, F) = \epsilon \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{\partial x_i^C(\lambda)}{\partial \lambda} k_j(\lambda) K^{ij}. \quad (3.137)$$

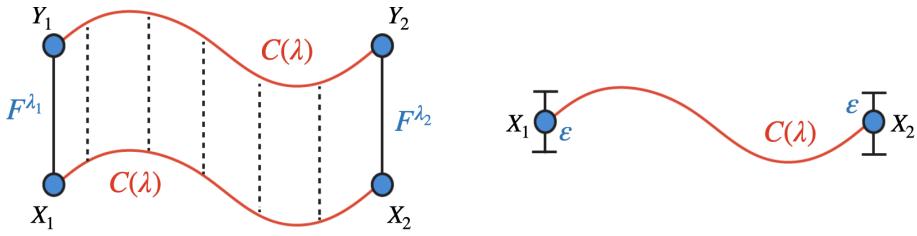


Figura 3.6: Configuración de las curvas correspondientes a una banda de Wilson finita (izquierda) y el correspondiente límite infinitesimal u operador del límite asociado (derecha).

A partir de aquí, las transformaciones de gauge (3.130) actúan como

$$\begin{aligned} \delta U(C, F) &= -\epsilon \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{\partial x_i^C(\lambda)}{\partial \lambda} k_j(\lambda) \partial_i \partial_j \xi_0 = -\epsilon \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda k_j(\lambda) \partial_\lambda \partial_j \xi_0 = \\ &= -\epsilon (k_j(\lambda) \partial_j \xi_0)|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \epsilon \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[\frac{\partial k_j(\lambda)}{\partial \lambda} \partial_j \xi_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Esto tiene un término que no depende exclusivamente de los puntos extremos de la curva $C(\lambda)$. Sin embargo, aún podemos elegir la dependencia de la dirección de la fibra como queramos. Para reproducir las transformaciones de gauge del operador lineal de traslación $U^P(C)$ elegimos $k_j(\lambda) = a_j$. De este modo, recuperamos

$$U(C, F) = \epsilon \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{\partial x_i^C(\lambda)}{\partial \lambda} a_j K^{ij} = \epsilon \int_C d\ell_i (a_j K^{ij}) = \epsilon U^P(C), \quad (3.139)$$

teniendo una transformación de gauge consistente con la esperada (7.98)

$$\delta U(C, F) = -\epsilon (a_j \partial_j \xi_0)|_{X_1}^{X_2}. \quad (3.140)$$

Considerando las dilataciones proponemos la dependencia $k_j(\lambda) = \kappa x_j^C(\lambda)$ y obtenemos

$$U(C, F) = \epsilon \kappa \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[\frac{\partial x_i^C(\lambda)}{\partial \lambda} x_j^C(\lambda) K^{ij} \right] = \epsilon \kappa \int_C d\ell_i^C (x_j^C K^{ij}) = \epsilon U^D(C). \quad (3.141)$$

Con esta elección de fibra, el segundo término en (3.138) da un término de borde, y recuperamos la transformación de gauge esperada de (7.99)

$$\begin{aligned} \delta U(C, F) &= -\epsilon \kappa (x_j^C(\lambda) \partial^j \xi_0)|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \epsilon \kappa \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left[\frac{\partial x_j^C(\lambda)}{\partial \lambda} \partial^j \xi_0 \right] \\ &= -\kappa \epsilon (x_j \partial^j \xi_0 - \xi_0)|_{X_1}^{X_2}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

De este modo, es evidente que una forma de hacer invariantes de gauge estas líneas de Wilson es acoplar las exponenciales de estos operadores de banda con dipolos de carga

ordinarios en los extremos, donde el campo cargado se transforma, como es habitual, es decir, $\psi \rightarrow e^{i\xi_0}\psi$. Necesitamos un dipolo constante para la carga de traslación y un dipolo de tamaño proporcional a ϵx_i para la carga de dilatación. Algunos candidatos para los Lagrangianos de materia fractónica que obedecen estas leyes de transformación exóticas han sido estudiados recientemente en [117, 118].

En el caso de las demás cargas, es necesario adoptar prescripciones más complejas. Consideremos el caso de las cargas de rotación. Hasta donde vimos, no hay manera de escribir las líneas de Wilson relacionadas con los operadores de rotación provenientes de (3.58) como integrales de lazo de operadores no invariantes de gauge. Sin embargo, podemos llegar más lejos observando la teoría dual presentada en la sección 3.1.5. Aquí, consideraremos la formulación electromagnética obtenida a partir de (3.52) y (3.54), es decir,

$$E_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d h^{ac}, \quad B_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d \tilde{h}^{ac}. \quad (3.143)$$

Nótese que ahora la simetría de gauge tiene el aspecto de un “modelo tensorial de carga vectorial” como en (3.122) y (3.124) (compárese con [114]). Esto es debido a la transformación

$$\tilde{h}_{ij} \rightarrow \tilde{h}_{ij} + \partial_i \tilde{\xi}_j + \partial_j \tilde{\xi}_i. \quad (3.144)$$

Entonces, escribimos las corrientes de traslación y rotación en (3.58) como

$$B_i^P = \frac{a^j}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d \tilde{h}^{ac}, \quad B_i^J = \frac{s^{jn}}{2}x_n\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\partial^b\partial^d \tilde{h}^{ac}, \quad s_{ij} = \varepsilon_{ijk}s^k. \quad (3.145)$$

Las líneas de Wilson correspondientes son

$$U^P(C) = \frac{1}{2} \int_C d\ell_i \left[\varepsilon_{jab} \partial^b \tilde{h}^{ai} a^j \right], \quad (3.146)$$

$$U^J(C) = \frac{1}{2} \int_C d\ell_i \left[(s_n x_k - s_k x_n) \partial^n \tilde{h}^{ki} - s_k \tilde{h}^{ki} \right]. \quad (3.147)$$

Ahora, como queríamos, las transformaciones de gauge correspondientes sólo dependen de los puntos extremos de la curva:

$$U^P(C) \rightarrow U^P(C) - \frac{1}{2}\varepsilon^{jab}a_j\partial_b\tilde{\xi}_a \Big|_{X_1}^{X_2}, \quad (3.148)$$

$$U^D(C) \rightarrow U^D(C) - \frac{1}{2}(s^n x^k - s^k x^n)\partial_n \tilde{\xi}_k \Big|_{X_1}^{X_2} - s^k \tilde{\xi}_k \Big|_{X_1}^{X_2}. \quad (3.149)$$

Estas leyes de transformación podrían coincidir con un tipo diferente de partículas cargadas cuyas transformaciones dependen de un vector de gauge ξ_j en lugar de una función escalar. Véase [85, 86] para interpretaciones en términos de , partículas restringidas a moverse en líneas, denominadas “lineones”.

Es importante destacar, que todos los modelos explícitos conocidos en los que se cargan estas teorías tensoriales rompen alguna invariancia de Lorentz y algunas simetrías espaciales. Entonces estas formas de completar la teoría del gravitón linealizado deberían, como era de esperar, renunciar a la invariancia relativista.

3.4. Discusión del capítulo

Hemos encontrado simetrías generalizadas para la teoría del gravitón linealizado. Estas son simetrías tipo 1-forma que están asociadas con la existencia de clases HDV para regiones con grupo de homotopía no trivial π_1 , es decir, regiones que contienen lazos no contractibles. En otras palabras, se trata de la misma configuración de simetrías generalizadas para teorías de gauge libres ordinarias. Sin embargo, las cargas de los operadores no locales para el gravitón no son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Esto da lugar a consecuencias en la física UV de la teoría.

En particular, vimos que para completar el espectro de cargas de la teoría del gravitón linealizado necesitamos incluir partículas cargadas con movilidad restringida. En otras palabras, intentar completar la teoría del gravitón como sería estándar en QFT parece requerir romper la invariancia relativista. Así pues, los resultados y observaciones de este capítulo, apoyan la idea de que para completar la teoría de los gravitones debería seguirse una ruta distinta a la de QFT. Una vía diferente para completar dicha teoría es la Teoría de Cuerdas o, más en general, holografía. Sería interesante comprender cómo se rompen allí estas simetrías.

Otra diferencia entre las teorías de gauge ordinarias y el campo de gravitones es que esta última no posee un tensor de energía-momento bien definido como consecuencia del teorema de Weinberg-Witten. No obstante, esta en realidad es la razón por la que están permitidos los operadores no locales transforman bajo simetrías espaciotemporales. Dicho de otra forma, parece haber una razón muy sencilla por la que una teoría con tensor de energía-momento no puede tener una mezcla de índices de Lorentz con las etiquetas de simetría generalizada, una especie de generalización del teorema de Coleman-Mandula. En presencia de un tensor de energía-momento, podemos formar un operador aditivo en $\mathcal{A}(R)$ que implemente la simetría de Poincaré en la región R y no en su complemento. En este contexto, como el operador que implementa la simetría es aditivo en R cualquiera sea la topología de la región, y por ende no puede transformar las clases no locales. Esto prohíbe los índices de Lorentz en las etiquetas de clase. En el capítulo 5 estudiaremos más en detalle y generalidad estas ideas.

Capítulo 4

Simetrías Generalizadas de Gravitones Generalizados

Considerando los resultados del capítulo anterior, el siguiente escenario más sencillo es ir más allá de las cuatro dimensiones y considerar teorías generales de gravedad linealizada, denominadas aquí teorías de “gravitones generalizados”. Este zoológico de modelos desciende de la linealización de teorías de gravedad de orden superior generales e invariantes ante difeomorfismos construidas a partir de la métrica y el tensor de Riemann. Encontrar las simetrías generalizadas para estos gravitones generalizados es el objetivo principal de este capítulo.

Hay dos motivaciones principales para este análisis. La primera proviene de la gravedad clásica. El estudio de las cargas conservadas en las teorías gravitatorias de todo tipo ha sido un área clave en este campo, siendo en este contexto uno de sus aspectos más destacados el llamado formalismo de Wald [119–121]. Si existen nuevas cargas conservadas, aunque sean de naturaleza diferente, es importante encontrarlas.

La segunda motivación proviene de AQFT. Como mencionamos en el capítulo 2, una consecuencia clave del teorema del doble commutante de von Neumann sobre las simetrías generalizadas es que estas vienen en pares duales. Este principio básico tiene varias implicaciones importantes. Por ejemplo, en un contexto holográfico, proporciona un argumento sólido contra la existencia de simetrías p -forma en gravedad cuántica [22]. Sin embargo, a simple vista las teorías generalizadas de gravitones parecen desafiar dicho principio.

Más precisamente, para derivar las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos en el capítulo anterior utilizamos propiedades del tensor de Riemann y su dual que no necesariamente son válidas cuando consideramos generalizaciones de la teoría. Por un lado, en las teorías de mayor orden en curvatura el tensor de Riemann no es una corriente conservada pero si lo es su dual. Por otro, en más dimensiones, incluso para la gravedad de Einstein, las identidades de Bianchi del tensor de Riemann dual no

necesariamente tienen las mismas implicaciones. En este contexto, el hecho de que las simetrías generalizadas vengan en pares duales podría predecir la existencia de nuevas clases HDV, de otro modo inesperadas. Por el contrario, podría sugerir que ciertos operadores no locales ingenuos en realidad son aditivamente generados y no corresponden a una simetría generalizada.

El resto del capítulo se organiza de la siguiente manera: Comenzamos en sección 4.1 introduciendo el conjunto de teorías gravitatorias que consideraremos, y mostraremos como estas surgen de extensiones cuadráticas generales de la teoría de Einstein. En la sección 4.2 identificamos las cargas conservadas asociadas con las simetrías generalizadas de la gravedad linealizada de Einstein donde presentaremos de forma covariante los resultados del capítulo 3 y su generalización a $D > 4$. Siguiendo, en la sección 4.3, estudiamos las simetrías generalizadas que emergen en teorías de mayor curvatura linealizadas en dimensiones generales. Finalmente, en la sección 4.4 mostramos que las ecuaciones de movimiento de cada una de las teorías pueden deducirse a partir de sus correspondientes conjuntos de simetrías generalizadas. Concluimos en la sección 4.5 con algunas discusiones respecto a la aplicabilidad del principio de pares duales y planes para futuros trabajos relacionados.

4.1. Gravitones generalizados

Como mencionamos, vamos a trabajar con generalizaciones Lagrangianas de Einstein-Hilbert que incluyen funciones genéricas invariantes ante difeomorfismos construidas a partir del tensor de Riemann. La linealización de esas teorías resulta proporcionar un interesante zoológico de modelos, al que denominaremos “gravitones generalizados”. En esta sección describimos este zoológico de gravitones generalizados.

Las extensiones de la teoría de la relatividad general de Einstein surgen al considerar acciones construidas a partir de contracciones del tensor de Riemann y de la métrica¹

$$S = \int d^Dx \sqrt{|g|} \mathcal{L}(g^{\alpha\beta}, R_{\sigma\mu\nu}^\rho). \quad (4.1)$$

En ausencia de campos adicionales, las ecuaciones de movimiento no lineales que se derivan de esta acción son las siguientes

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv P_\mu^{\sigma\rho\delta} R_{\nu\sigma\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2\nabla^\alpha \nabla^\beta P_{\mu\alpha\beta\nu} = 0, \quad \text{donde} \quad P_{\nu\rho\sigma}^\mu \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\nu\rho\sigma}^\mu} \right]_{g^{\gamma\delta}}. \quad (4.2)$$

Nótese que buscamos analizar las simetrías generalizadas para gravitones en un espacio de Minkowski. Por lo tanto, fijamos la constante cosmológica a cero, lo que implica que

¹Obsérvese que podríamos haber elegido un conjunto diferente de variables independientes en \mathcal{L} . De hecho, todas las expresiones son consistentes con elecciones como $\{R_{\mu\nu\rho\sigma}, g^{\alpha\beta}\}$ o $\{R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\}$ [122].

el espacio de Minkowski es una solución de estas ecuaciones.² Deseamos considerar la versión linealizada del conjunto anterior de teorías en torno a dicho fondo, caracterizado por $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$ y $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho(0)} = 0$. De esta forma, una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ sobre este fondo se define por (3.1), es decir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (4.3)$$

Como en el capítulo 3, subiremos y bajaremos índices utilizando la métrica de fondo $\eta_{\mu\nu}$ y su inversa, y utilizaremos la notación $h \equiv h_\lambda^\lambda$. Usando esta expresión para la métrica podemos calcular las cantidades asociadas relevantes al orden deseado en $h_{\mu\nu}$. Para cada una de ellas tendremos una expansión de la forma

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)} + \mathcal{O}(h^3). \quad (4.4)$$

Las expresiones relevantes hasta $\mathcal{O}(h^2)$, serán suficientes para nuestros propósitos. En particular, para los órdenes cero y lineal del determinante de la métrica, de la métrica inversa, de los símbolos de Christoffel, del tensor de Riemann, del tensor de Ricci y del escalar de Ricci, encontramos respectivamente:

$$\sqrt{|g|}^{(0)} = 1, \quad \sqrt{|g|}^{(1)} = \frac{1}{2}h, \quad (4.5)$$

$$g^{\mu\nu(0)} = \eta^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu(1)} = -h^{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu(0)} = 0, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu(1)} = \frac{1}{2}(h_{\alpha,\beta}^\mu + h_{\beta,\alpha}^\mu + h_{\alpha\beta}^{\mu}), \quad (4.7)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho(0)} = 0, \quad R_{\sigma\mu\nu}^{\rho(1)} = \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho(1)} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho(1)} = \frac{1}{2}(h_{\nu,\sigma\mu}^\rho + h_{\mu\sigma,\nu}^\rho - h_{\nu\sigma,\mu}^\rho - h_{\mu\sigma,\nu}^\rho), \quad (4.8)$$

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = 0, \quad R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(h_{\nu,\mu\rho}^\rho + h_{\mu,\nu\rho}^\rho - h_{\mu\nu,\rho}^\rho - h_{\rho,\mu\nu}^\rho), \quad (4.9)$$

$$R^{(0)} = 0, \quad R^{(1)} = h_{\mu\nu}^{\mu\nu} - h_{\mu,\nu}^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

Por otra parte, los términos de orden cuadrático correspondientes son los siguientes

$$\sqrt{|g|}^{(2)} = \frac{1}{8}h^2, \quad (4.11)$$

$$g^{\mu\nu(2)} = h_\sigma^\mu h^{\sigma\nu}, \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu(2)} = -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} + h_{\alpha\beta,\nu}), \quad (4.13)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho(2)} = \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho(2)} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho(2)} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho(1)}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda(1)} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho(1)}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda(1)}, \quad (4.14)$$

²A continuación será conveniente pensar en esta teoría como si contuviera una parte de Einstein-Hilbert, más correcciones.

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}^{(2)}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= h^{\lambda\sigma} (h_{\lambda\sigma,\rho}^{,\rho} - h_{\rho\sigma,\lambda}^{,\rho} - h_{\rho\lambda,\sigma}^{,\rho} + h_{\rho,\sigma\lambda}^{\rho}) + \frac{3}{4} h_{\rho\lambda,\sigma}^{,\sigma} h^{\rho\lambda}_{,\sigma} \\ &\quad - h_{\sigma\lambda,\rho}^{,\sigma} h^{\rho\lambda}_{,\rho} + h_{\sigma\lambda,\rho}^{,\sigma} h^{\rho\lambda}_{,\rho} - \frac{1}{2} h_{\rho\lambda,\sigma}^{,\sigma} h^{\sigma\lambda}_{,\rho} - \frac{1}{4} h_{\sigma,\lambda}^{,\sigma} h^{\rho\lambda}_{,\rho}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En este contexto, dada una densidad lagrangiana genérica de curvatura superior a orden n en curvaturas de Riemann, observamos que los tres términos que aparecen en las ecuaciones de movimiento (4.2) son de órdenes Riem^n , Riem^{n-1} y Riem^{n-2} , respectivamente. Por lo tanto, a orden lineal en $h_{\mu\nu}$, cada uno de esos términos será de la forma: $\text{Riem}^{(1)}$. $[\text{Riem}^{n-1}]^{(0)}$, $\text{Riem}^{(1)}$. $[\text{Riem}^{n-1}]^{(0)}$ y $\text{Riem}^{(1)}$. $[\text{Riem}^{n-2}]^{(0)}$, respectivamente. Puesto que el tensor de Riemann se anula idénticamente en el fondo de Minkowski, todos estos términos desaparecerán para n general con dos únicas excepciones:

- (a) los dos primeros términos para $n = 1$, que combinados no serán más que el tensor de Einstein linealizado;
- (b) el tercer término para $n = 2$.

En consecuencia, basta con considerar una teoría cuadrática genérica para dar cuenta del caso más general posible.³ Por ende, podemos escribir una teoría cuadrática genérica a partir de la densidad lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} [R + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \alpha_3 R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma}], \quad (4.17)$$

donde $\alpha_{1,2,3}$ son constantes arbitrarias con dimensiones de longitud al cuadrado. Podemos obtener las ecuaciones linealizadas para esta teoría a partir de la acción expandida a orden cuadrático en perturbaciones. Más precisamente, escribiremos dicha acción como

$$S = \frac{1}{16\pi G} [S_{\text{FP}} + S_{\text{HD}}] + \mathcal{O}(h^3). \quad (4.18)$$

donde el primer término, S_{FP} , es la acción de Fierz-Pauli procedente de la densidad de Einstein-Hilbert. Sin considerar términos de borde, podemos escribirla análogamente a (3.6), es decir

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}} &= \int d^D x \left[\left(1 + \frac{h}{2}\right) R^{(1)} + R^{(2)} \right] \\ &= \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{4} \partial^\lambda h^{\mu\nu} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

³Naturalmente, esto cambia cuando está presente una constante cosmológica, ya que entonces $\text{Riem}^{(0)} \neq 0$, véase [123–126].

Por otra parte, el segundo término, S_{HD} , proviene de las densidades cuadráticas como

$$\begin{aligned} S_{\text{HD}} &= \int d^Dx \left[\alpha_1 R_{(1)}^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu}^{(1)} R_{(1)}^{\mu\nu} + \alpha_3 R_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(1)} R_{(1)}^{\mu\nu\lambda\sigma} \right] \\ &= \int d^Dx \left[\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 \right) \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{4} \right) (\partial^2 h \partial^2 h - 2\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^2 h) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_2}{4} + \alpha_3 \right) (\partial^2 h^{\mu\nu} \partial^2 h_{\mu\nu} - 2\partial_\mu \partial_\lambda h^{\mu\sigma} \partial^\nu \partial^\lambda h_{\nu\sigma}) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Obsérvese que si elegimos $\alpha_1 = \alpha_3$ y $\alpha_2 = -4\alpha_3$ en (4.17), la parte cuadrática se hace proporcional a la densidad de Gauss-Bonnet. Para esa teoría, el tercer término que aparece en las ecuaciones de movimiento no lineales genéricas (4.2) está ausente, ya que tenemos $\nabla^\alpha P_{\alpha\mu\beta\nu} = 0$ en las teorías de Lovelock [127, 128]. Por lo tanto, siguiendo nuestro razonamiento anterior, la densidad de Gauss-Bonnet no debería contribuir en absoluto a las ecuaciones linealizadas sobre un fondo de Minkowski. Esto es precisamente lo que ocurre si analizamos cuidadosamente S_{HD} , debido a que dicha acción se anula idénticamente para la elección de acoplamientos en cuestión.

Siguiendo el desarrollo en [125], es conveniente escribir los acoplamientos α_1 y α_2 en términos de dos nuevos parámetros, m_s y m_g , que tienen dimensiones de masa, como

$$\alpha_1 = \frac{(D-2)m_g^2 + Dm_s^2}{4(D-1)m_s^2 m_g^2} + \alpha_3, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{m_g^2} - 4\alpha_3. \quad (4.21)$$

Entonces, podemos escribir la teoría cuadrática original como ⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{16\pi G} \left[R + \frac{(D-2)(m_g^2 - m_s^2)}{4(D-1)m_s^2 m_g^2} R^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(D-2)}{4(D-3)m_g^2} [C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - \mathcal{X}_4] + \alpha_3 \mathcal{X}_4 \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Weyl y \mathcal{X}_4 es la densidad de Gauss-Bonnet. La ecuación de movimiento de la perturbación coincide con la presentada en [125] y viene dada por $\mathcal{E}_{\mu\nu}^{(1)} = 0$, donde

$$\begin{aligned} 16\pi G \mathcal{E}_{\mu\nu}^{(1)} &\equiv \left[1 - \frac{\partial^2}{m_g^2} \right] \left[R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \right] \\ &\quad + \left[\frac{(D-2)(m_g^2 - m_s^2)}{2(D-1)m_s^2 m_g^2} \right] [\eta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu] R^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

⁴Aquí usamos la relación

$$\mathcal{X}_4 - C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{D(D-3)}{(D-2)(D-1)} \left[R^2 - \frac{4(D-1)}{D} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right]. \quad (4.22)$$

Esta ecuación de movimiento se reduce a la de Einstein linealizada para $m_g^2, m_s^2 \rightarrow \infty$, lo que equivale a desactivar los acoplamientos cuadráticos (con la excepción del de Gauss-Bonnet, que no contribuye). Los dos coeficientes m_g^2 y m_s^2 que parametrizan la ecuación linealizada modificada corresponden a las masas al cuadrado de dos modos adicionales que aparecen en el espectro linealizado de (4.2), además del gravitón habitual. En particular, m_s es la masa de un modo escalar, mientras que m_g es la masa de un modo de espín 2 masivo y fantasma que, en D dimensiones, propaga $D(D - 1)/2 - 1$ grados de libertad. Para ver esto explícitamente, es conveniente reescribir las expresiones anteriores en el gauge de Donder. Este gauge se define por

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\nu h. \quad (4.25)$$

En este gauge, podemos obtener el tensor de Ricci linealizado y el escalar de Ricci como

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{\mu\nu}, \quad R^{(1)} = -\frac{1}{2}\partial^2 h, \quad (4.26)$$

y podemos escribir las ecuaciones linealizadas de la forma

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}^{(1)} \equiv -\frac{1}{32\pi G}\partial^2 \hat{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.27)$$

donde representamos como $\hat{h}_{\mu\nu}$ a la expresión

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{1}{m_g^2} & \left[\partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h \right] \\ & + \left[\frac{m_g^2(D - 2) + m_s^2}{2(D - 1)m_g^2 m_s^2} \right] (\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)h. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Esta perturbación modificada, que corresponde al gravitón sin masa habitual, es transversal pero tiene traza no nula

$$\partial_\mu \hat{h}^{\mu\nu} = 0, \quad \hat{h} \neq 0. \quad (4.29)$$

Descomponiendo $h_{\mu\nu}$ como en [125] tenemos

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}\hat{h}}{(D - 2)} + \frac{(m_g^{-2} - m_s^2)}{(D - 1)}\partial_{\langle\mu}\partial_{\nu\rangle}\hat{h} \\ + \frac{2}{D(D - 2)}\eta_{\mu\nu}\phi + \frac{1}{(D - 1)m_s^2}\partial_{\langle\mu}\partial_{\nu\rangle}\phi, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $t_{\mu\nu}$ es un modo de spin-2 sin traza, ϕ es un escalar y $\langle\mu\nu\rangle$ denota la parte sin

traza. En efecto, podemos demostrar que estos satisfacen

$$(\partial^2 - m_s^2)\phi = 0, \quad (\partial^2 - m_g^2)t_{\mu\nu} = 0. \quad (4.31)$$

Por lo tanto, describen modos masivos de espín 0 y 2 respectivamente, como habíamos previsto. Si hubiéramos incluido algún tensor de energía-momento de materia en el Lagrangiano, $t_{\mu\nu}$ se acoplaría a él con el signo equivocado, lo que refleja su naturaleza de campo fantasma.

Resumiendo, los gravitones generalizados se caracterizan básicamente por dos parámetros dimensionales, las masas de los nuevos modos existentes en el espectro. Dado que tenemos nuevos modos masivos anticipamos que las simetrías generalizadas del gravitón de Einstein cambiarán. Este será el caso, como mostraremos a continuación.

4.2. Simetrías generalizadas para gravitones de Einstein-Hilbert

Antes de sumergirnos en el caso general, estudiemos primero las simetrías generalizadas de la gravedad de Einstein linealizada en $D \geq 4$ dimensiones.

Esta teoría está controlada por la acción de Fierz-Pauli (4.19), que tiene una simetría de gauge asociada a la acción de difeomorfismos linealizados que actúan según (3.8) como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (4.32)$$

Las corrientes p -forma conservadas deben ser operadores físicos, y por lo tanto invariantes ante difeomorfismos linealizados. Esto significa que deben escribirse en términos del tensor de Riemann linealizado $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. Al igual que en el capítulo 3, podemos considerar a dicho tensor de curvatura como el generador del álgebra local invariante de gauge de la teoría. Sin embargo, a diferencia de lo ya estudiado, trataremos de encontrar una formulación covariante de los operadores no locales. Con este propósito, observamos primero que el tensor de Riemann on-shell cumple las siguientes identidades

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \quad [\text{Antisimetría}] \quad (4.33)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad [\text{Simetría de intercambio}] \quad (4.34)$$

$$\eta^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad [\text{Ecuación de Einstein}] \quad (4.35)$$

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{D-3} \alpha \beta \gamma} R_{\alpha\beta\gamma\nu} = 0 \quad [1\text{ra Identidad de Bianchi}] \quad (4.36)$$

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{D-3} \alpha \beta \gamma} \partial_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} = 0 \quad [2\text{da Identidad de Bianchi}] \quad (4.37)$$

$$\partial^\mu R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad [\text{Ecuación de Einstein + 2da de Bianchi}] \quad (4.38)$$

donde aquí y en adelante omitimos el superíndice “(1)” utilizado en la sección anterior. Nótese que la última ecuación, (4.38), dice que el tensor de Riemann se comporta como un biforma conservada a partir de la cual esperamos poder construir corrientes p -forma.

Ahora bien, aunque el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el generador del álgebra invarianta de gauge, también podemos utilizar el tensor máximamente antisimétrico $\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_D}$ para producir nuevos tensores. Equivalentemente, otro candidato natural para construir cargas conservadas es la curvatura dual [129, 130].⁵ Definimos la curvatura dual mediante la acción del operador de Hodge sobre el tensor de Riemann de la siguiente manera

$$R^*_{\mu_1\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu_1\dots\mu_{D-2}\lambda\sigma} R^{\lambda\sigma}_{\alpha\beta}. \quad (4.39)$$

Este operador satisface las siguientes ecuaciones algebraicas y de conservación

$$R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = -R^*_{\mu_2\mu_1\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = \dots, \quad [\text{Antisimetría del Levi-Civita}] \quad (4.40)$$

$$R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = -R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\beta\alpha}, \quad [\text{Antisimetría del Riemann}] \quad (4.41)$$

$$\eta^{\gamma\alpha} R^*_{\gamma\mu_1\dots\mu_{D-3}\alpha\beta} = 0, \quad [1\text{ra Identidad de Bianchi}] \quad (4.42)$$

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}\beta} R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}\alpha} = 0, \quad [\text{Ecuación de Einstein}] \quad (4.43)$$

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}\beta} R^*_{\alpha\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}} = 0, \quad [\text{Ecuación de Einstein}] \quad (4.44)$$

$$\partial^\gamma R^*_{\gamma\mu_1\dots\mu_{D-3}\alpha\beta} = 0. \quad [2\text{da Identidad de Bianchi}] \quad (4.45)$$

$$\partial^\beta R^*_{\mu_1\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = 0. \quad [\text{Conservación del Riemann}] \quad (4.46)$$

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}\gamma} \partial_{\mu_1} R^*_{\mu_2\mu_3\dots\mu_{D-1}\alpha\beta} = 0. \quad [\text{Conservación del Riemann}] \quad (4.47)$$

$$\varepsilon^{\nu_1\nu_2\dots\nu_{D-3}\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} = 0. \quad [2\text{da Identidad de Bianchi}] \quad (4.48)$$

Obsérvese que muchas de las propiedades algebraicas y diferenciales dadas en (4.33-4.38) y (4.40-4.48) son válidas on-shell más allá del nivel linealizado si se sustituye la métrica de Minkowski por una métrica general, y la derivada parcial por una derivada covariante. Sin embargo, el tensor de Riemann ya no es un operador invarianta de gauge cuando vamos más allá de la teoría linealizada sobre el espacio plano y, por tanto, no podemos extender la construcción de las corrientes de forma sencilla más allá del caso en cuestión. Para realizar dicha generalización, en [132] se ha utilizado el formalismo de Cartan donde se han extendido los resultados de este capítulo a gravitones sobre métricas de fondo generales.

4.2.1. Gravitones de Fierz-Pauli en $D = 4$

Permitámonos ahora revisar el caso de $D = 4$, que desarrollamos en el capítulo 3. En esta dimensión podemos construir las siguientes cuatro familias de 2-formas

⁵Podemos realizar el mismo procedimiento con el doble dual del tensor de Riemann, véase [131].

conservadas [131, 133].

$$A_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} a^{\alpha\beta}, \quad (4.49)$$

$$B_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} (x^\alpha b^\beta - x^\beta b^\alpha), \quad (4.50)$$

$$C_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} c^{\alpha\beta\gamma} x_\gamma, \quad (4.51)$$

$$D_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} (x^\alpha d^{\beta\gamma} x^\gamma - x^\beta d^{\alpha\gamma} x^\gamma + \frac{1}{2} d^{\alpha\beta} x^2), \quad (4.52)$$

donde $a^{\alpha\beta}$, b^α , $c^{\alpha\beta\gamma}$ y $d^{\alpha\beta}$ son tensores reales de antisimétricos de parámetros libres que determinan las 20 específicas 2-formas conservadas. Sin embargo, como veremos en el capítulo siguiente estos tensores no necesariamente transforman como tensores de Lorentz. Siguiendo, podemos ver que las corrientes satisfacen las ecuaciones de conservación apropiadas de la forma

$$d * A = 0, \quad d * B = 0, \quad d * C = 0, \quad d * D = 0. \quad (4.53)$$

Nótese que la conservación de A sólo requiere que se conserve el tensor de Riemann (4.38) mientras que para las otras corrientes necesitamos propiedades algebraicas adicionales. En concreto, la conservación de B depende de la condición de traza nula (4.35), para C se requiere la primera identidad de Bianchi (4.36), y para D necesitamos tanto (4.35) como (4.36). Para relación con el capítulo 3: la familia A contiene a los operadores llamados traslaciones eléctricas y magnéticas, las familias B y C son equivalentes a las dilataciones y rotaciones eléctricas y magnéticas, y finalmente la familia D esta compuesta por las transformaciones conformes especiales eléctricas y magnéticas.

Podemos integrar todas las corrientes (4.49-4.52) en una superficie Σ_2 de codimensión 2 en $D = 4$ produciendo cargas conservadas si Σ_2 es cerrada. En particular, en [131] se estudiaron cargas análogas para soluciones linealizadas de [134–140]. El resultado es que, por un lado, la integral del dual de B es proporcional a la masa y el flujo del dual de D mide el momento angular. Por otro lado, los duales de C y A están relacionados con las soluciones magnéticas, de manera que son respectivamente proporcionales a la carga NUT (que representa la dual magnética de la masa) y a la versión magnética del momento angular.

Podemos también integrar las corrientes 2-forma (4.49-4.52) sobre superficies Σ_2 abiertas, produciendo operadores HDV no locales que sólo dependen del borde $\partial\Sigma_2$ si. En este contexto, podemos escribir el flujo no local más general posible definido por los parámetros $(a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c^{\alpha\beta\gamma}, d^{\alpha\beta})$ en una región tipo anillo R que contiene una curva

cerrada no contractible $\partial\Sigma_2$ como

$$\Phi_{\partial\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} * (A + B + C + D) . \quad (4.54)$$

Si consideremos además un operador no local $\Phi_{\partial\tilde{\Sigma}_2}$ en la región complementaria \overline{R} con parámetros $(\tilde{a}^{\alpha\beta}, \tilde{b}^\alpha, \tilde{c}^{\alpha\beta\gamma}, \tilde{d}^{\alpha\beta})$. Los operadores $\Phi_{\partial\Sigma_2}$ y $\Phi_{\partial\tilde{\Sigma}_2}$ no se generan localmente en regiones complementarias y, por tanto, no comutan entre sí. Podemos introducir una foliación y calcular comutador correspondiente a partir de (3.103) para obtener

$$[\Phi_{\partial\Sigma_2}, \Phi_{\partial\tilde{\Sigma}_2}] = i \left(a \cdot \tilde{d}^* + 2b \cdot \tilde{c}^* - 2c^* \cdot \tilde{b} - d^* \cdot \tilde{a} \right) \quad (4.55)$$

donde utilizamos la convención

$$d_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} d^{\gamma\delta}, \quad c_\alpha^* = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} c^{\beta\gamma\delta} . \quad (4.56)$$

Esto prueba que las corrientes (4.49-4.52) integradas sobre superficies bidimensionales abiertas en efecto producen violaciones de dualidad de Haag y generan las clases HDV asociadas a regiones tipo anillo que contienen lazos no contractibles. Dicho de otra manera, el hecho de que los comutadores no sean cero asegura directamente que las corrientes que generan los flujos no son exactas en el álgebra física. La razón es que siempre que una de los flujos que aparecen en un comutador esté generado por una corriente exacta, dicho comutador debe ser cero por causalidad, ya que el álgebra máxima en una región dada es precisamente el conmutante del álgebra aditiva de región complementaria.

Cabe preguntarse si podrían construirse más corrientes conservadas. De hecho, podemos definir cantidades conservadas similares a partir de la curvatura dual, a saber,

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^* \tilde{a}^{\alpha\beta}, \quad (4.57)$$

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^* (x^\alpha \tilde{b}^\beta - x^\beta \tilde{b}^\alpha), \quad (4.58)$$

$$\tilde{C}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^* \tilde{c}^{\alpha\beta\gamma} x_\gamma, \quad (4.59)$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^* (x^\alpha \tilde{d}^{\beta\gamma} x^\gamma - x^\beta \tilde{d}^{\alpha\gamma} x^\gamma + \frac{1}{2} \tilde{d}^{\alpha\beta} x^2) . \quad (4.60)$$

Sin embargo, en $D = 4$ tenemos una simetría de dualidad $U(1)$ que corresponde a una rotación de Riemann y su dual,

$$\begin{pmatrix} R \\ R^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R^* \end{pmatrix} . \quad (4.61)$$

análoga a la simetría de dualidad del campo libre de Maxwell. Esto significa que el álgebra generada por A, B, C, D es de hecho la misma que la generada por $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$. Como

veremos en un momento, para la generalización a dimensiones arbitrarias $D \geq 4$ sera más conveniente elegir una base “más equilibrada”, formada por el mismo número de cargas tildadas y no tildadas. Esta esta dada por $B, D, \tilde{A}, \tilde{B}$. Entonces, equivalentemente, podemos escribir el operador no local más general en $D = 4$ como

$$\Phi_{\partial\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} * \left(B + D + \tilde{A} + \tilde{B} \right) . \quad (4.62)$$

En este número de dimensiones el hecho de que las simetrías vengan en pares duales es a primera vista trivial ya que para una región tipo anillo el complemento es también una región tipo anillo. Por lo tanto, las mismas cargas aparecen en una región tipo anillo y en su complemento. Sin embargo, no es una coincidencia que el número total de ellos es par, a saber, 20. Esto es requerido por el comutador, dado que las B están emparejadas con las \tilde{B} y las D están emparejadas con las \tilde{A} .

4.2.2. Garvitones de Fierz-Pauli en $D > 4$

Ahora pasamos a dimensiones $D > 4$. En este caso, el complementario de una región tipo anillo ya no es un anillo, por lo que las clases HDV y clases HDV duales corresponden a regiones con topologías diferentes. En particular, tendremos operadores no locales que violan dualidad de Haag en regiones con grupo de homotopía no trivial π_1 , digase anillos, y cargas duales que violan la dualidad en regiones con grupo homotopía no trivial π_{D-3} .

A primera vista, siguiendo a [131], se observa que las familias A, B, C, D de 2-formas descritas anteriormente siguen siendo conservadas en dimensiones generales, y son $D(D+1)(D+2)/6$ candidatas para generar simetrías generalizadas asociadas a anillos. El principio de que las simetrías generalizadas vienen en pares duales predice entonces que deberíamos encontrar un número igual de $(D-2)$ -formas duales conservadas. Los candidatos naturales aparecen al considerar la extensión obvia de las familias $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ a dimensiones superiores. Desgraciadamente, en dimensiones superiores sólo podemos recuperar $(D+1)/2$ corrientes conservadas $(D-2)$ -forma. Estas provienen de las dos familias \tilde{A}, \tilde{B} construidas como

$$\tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} \tilde{a}^{\alpha\beta}, \quad (4.63)$$

$$\tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} (x^\alpha \tilde{b}^\beta - x^\beta \tilde{b}^\alpha). \quad (4.64)$$

Desde un punto de vista técnico, el problema reside en que, en $D > 4$, no podemos construir corrientes conservadas $\tilde{C}_{\mu\nu}$ y $\tilde{D}_{\mu\nu}$ análogamente a (4.51-4.52). Esto se debe a que la identidad de Bianchi del tensor dual de Riemann con sólo tres índices contraídos

no se cumple. Más precisamente, se obtiene

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{D-3} \alpha \beta \gamma} R_{\nu_1 \dots \nu_{D-3} \alpha \beta \gamma}^* = \frac{1}{2} \eta_{\alpha \delta \nu_1 \dots \nu_{D-3}}^{\beta \gamma \mu_1 \dots \mu_{D-3}} R^{\delta \alpha}_{\beta \gamma}, \quad (4.65)$$

donde $\eta_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots}$ es la métrica generalizada definida a partir del determinante

$$\eta_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots} = \begin{vmatrix} \eta_{\nu_1}^{\mu_1} & \eta_{\nu_1}^{\mu_2} & \dots \\ \eta_{\nu_2}^{\mu_1} & \eta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (4.66)$$

Mientras que en $D = 4$ esto se reduce a una combinación de tensores de Ricci que desaparece en virtud de la ecuación de Einstein (4.35), este ya no es el caso en dimensiones superiores.⁶

Esta discrepancia entre el número de clases HDV asociadas a simetrías generalizadas en regiones complementarias tiene dos posibles orígenes. La primera posibilidad es que nos falten operadores no locales que surjan de nuevas $(D - 2)$ -formas conservadas. En este caso, los flujos tienen que ser del tipo \tilde{C} o \tilde{D} para que las dimensiones coincidan y podamos formar comutadores no nulos con las A y B . Argumentamos que estas cargas no existen en la sección 4.2.3. La segunda posibilidad es que algunas de las familias A, B, C, D de 2-formas conservadas se vuelvan exactas en dimensiones superiores a cuatro y no generen simetrías generalizadas. Aunque esto resulte contraintuitivo a primera vista, resulta ser así, ya que las familias A, C contienen exclusivamente 2-formas exactas en $D > 4$. Para observar esto con precision definimos las siguientes 3-formas

$$\mathcal{A}_{\mu \nu \rho}^{[R]} = -\frac{R_{\mu \nu \rho \alpha_1 \dots \alpha_{D-3}}^*}{(D-4)!} \tilde{a}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3} \sigma} x_\sigma, \quad (4.67)$$

$$\mathcal{C}_{\mu \nu \rho}^{[R]} = \frac{R_{\mu \nu \rho \alpha_1 \dots \alpha_{D-3}}^*}{(D-5)!(D-2)} \left(\frac{1}{2} \tilde{c}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3}} x^2 + \frac{\eta_{\beta_1 \dots \beta_{D-3}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3}}}{(D-4)!} c^{\beta_1 \dots \beta_{D-4} \sigma} x^{\beta_{D-3}} x_\sigma \right), \quad (4.68)$$

donde hemos nombrado $\tilde{a}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}}$ y $\tilde{c}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3}}$ a formas constantes obtenidas actuando con el operador estrella de Hodge sobre los tensores antisimétricos $a^{\mu \nu}$ y $c^{\mu \nu \rho}$ en (4.49) y (4.51) respectivamente.

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-2} \mu \nu} a_{\mu \nu}, \\ \tilde{c}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3}} &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-3} \mu \nu \rho} c_{\mu \nu \rho}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

⁶Por ejemplo, en $D = 5$ encontramos $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \alpha \beta \gamma} R_{\nu_1 \nu_2 \alpha \beta \gamma}^* = 2R_{\nu_1 \nu_2}^{\mu_1 \mu_2}$.

Por cálculo directo, podemos obtener que las divergencias correspondientes obedecen

$$\begin{aligned}\partial^\rho \mathcal{A}_{\mu\nu\rho}^{[R]} &= A_{\mu\nu}, \\ \partial^\rho \mathcal{C}_{\mu\nu\rho}^{[R]} &= C_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (4.70)$$

Considerando que la divergencia se escribe en lenguaje de formas diferenciales como $*d*$, esto implica

$$\begin{aligned}d * \mathcal{A}^{[R]} &\sim * A, \\ d * \mathcal{C}^{[R]} &\sim * C.\end{aligned}\quad (4.71)$$

Esto nos demuestra que $*A$ y $*B$ son exactas en el álgebra física de la teoría. Los flujos construidos a partir de ellas pertenecen al álgebra aditiva del anillo y comutan con todos los operadores de la región complementaria, incluidos los no locales. En otras palabras, no generan simetrías generalizadas. Nótese que este análisis no es aplicable en $D = 4$ ya que (4.67) y (4.68) no corresponden a formas diferenciales antisimétricas. Se podría intentar antisimetrizar los índices libres, pero tal procedimiento daría lugar a que tanto $\mathcal{A}_{\mu\nu\rho}$ como $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ desaparecieran debido a la identidad de Bianchi del tensor de Riemann dual (4.43). El hecho de que las corrientes conservadas A y B no generan simetrías generalizadas en $D > 4$ también puede verse a partir del teorema de Noether, ya que corresponden a variaciones triviales de la acción obtenida en [131] para los gravitones en cuestión.

En este contexto, los operadores no locales más generales asociados a superficies de dimension $(D - 2)$ y 2 toman la forma

$$\Phi_{\partial\Sigma_{(D-2)}} = \int_{\Sigma_{(D-2)}} * (B + D), \quad \tilde{\Phi}_{\partial\tilde{\Sigma}_2} = \int_{\tilde{\Sigma}_2} * (\tilde{A} + \tilde{B}). \quad (4.72)$$

La verificación definitiva de que los operadores $\Phi_{\partial\Sigma_{(D-2)}}$ y $\tilde{\Phi}_{\partial\tilde{\Sigma}_2}$ realmente representan operadores HDV no locales, es evaluar el comutador entre los flujos para superficies enlazadas. Para empezar, observamos que podemos escribir tensor de Riemann a orden lineal en perturbaciones de $h_{\mu\nu}$ como función de las variables dinámicas del espacio de fases de la forma

$$R_{0i0j} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_n h_{nj} + \partial_j \partial_n h_{ni} - \partial_i \partial_j h_{nn} - \partial_n \partial_n h_{ij}), \quad (4.73)$$

$$R_{0ijk} = \partial_l \pi_{ik} - \partial_k \pi_{il} - \frac{\delta_{ik}}{D-2} \partial_l \pi_{nn} + \frac{\delta_{il}}{D-2} \partial_k \pi_{nn}, \quad (4.74)$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} (\partial_l \partial_i h_{jk} + \partial_k \partial_j h_{il} - \partial_k \partial_i h_{jl} - \partial_l \partial_j h_{ik}), \quad (4.75)$$

donde π_{ij} representa los momentos canónicos asociados a h_{ij} , definidos a partir del

lagrangiano de Fierz-Pauli como

$$\pi_{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{FP}}}{\delta \dot{h}^{ij}} = \frac{1}{2} (\dot{h}_{ij} - \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i} - \delta_{ij} \dot{h}_{nn} + 2\delta_{ij} \partial_n h_{0n}). \quad (4.76)$$

Procedemos ahora a calcular el conmutador de los flujos para una configuración análoga a la desarrollada en la sección 3.2.4 del capítulo 3. En particular, usaremos los flujos definidos sobre un “cuadrado” espacial finito $(D - 2)$ -dimensional Σ_{D-2} y uno Σ_2 -dimensional. Elegimos el sistema de coordenadas como $(x^0, x^1, x^2, \dots, x^{D-1})$, de modo que las superficies están definidas por los parámetros de longitud L , α , y β como

$$\Sigma_{D-2} \equiv \left\{ x^0 = 0, x^1 = 0, x^2 \in [0, \alpha], x^3, \dots, x^{D-1} \in [-L/2, L/2] \right\}, \quad (4.77)$$

$$\Sigma_2 \equiv \left\{ x^0 = 0, x^1 \in [-L/2, L/2], x^2 \in [\beta, 3L/2], x^3, \dots, x^{D-1} = 0 \right\}. \quad (4.78)$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 3L/2)$. Considerando (4.73-4.75) y las relaciones de conmutación a tiempos iguales dadas por la cuantización canónica de la teoría de Fierz-Pauli como

$$[h_{ij}(x), \pi_{kl}(y)] = \frac{i}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \delta(x - y), \quad (4.79)$$

o equivalentemente, la generalización a $D > 4$ del enfoque ADM linealizado presentado en el la sección 3.1.3 del capítulo 3. Recuperamos por cálculo directo el resultado

$$[\Phi_{\partial\Sigma_{(D-2)}}, \tilde{\Phi}_{\partial\Sigma_2}] = i(D - 3) (2b \cdot \tilde{b} + d \cdot \tilde{a}) \theta(\alpha - \beta). \quad (4.80)$$

La dependencia del resultado de la función de Heaviside $\theta(\alpha - \beta)$ representa el hecho de que el conmutador sólo es no nulo cuando $\alpha > \beta$, es decir, cuando los bordes de los cuadrados están enlazados. Además, las leyes de conservación

$$d * B = d * D = d * \tilde{A} = d * \tilde{B} = 0, \quad (4.81)$$

implican que el mismo argumento vale para cualquier otro par de geometrías Σ_{D-2} y Σ_2 . Siempre que sus bordes estén enlazados, el conmutador vendrá dado en términos de $(b \cdot \tilde{b})$ y $(d \cdot \tilde{a})$ por la expresión anterior. Cuando no lo estén, el conmutador se anulará.

Una cuestión interesante es si en $D \geq 6$ dimensiones podemos encontrar p -formas conservadas con $p \neq 2$ y $p \neq (D - 2)$. Efectivamente es así, pero estas corrientes conservadas resultan ser formas exactas, es decir, se pueden obtener si aplicamos la derivada exterior a una $(p - 1)$ -forma. Lo mismo ocurre para el campo de Maxwell en

$D \geq 6$. Algunos ejemplos son:

$$R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda\alpha\beta}^* \tilde{a}^{\alpha\beta} v^\lambda = \tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} v^\lambda, \quad (4.82)$$

$$R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda\alpha\beta}^* (x^\alpha \tilde{b}^\beta - x^\beta \tilde{b}^\alpha) x^\lambda = \tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} x^\lambda, \quad (4.83)$$

con $\tilde{a}^{\alpha\beta}$, \tilde{b}^α , y v^α constantes. Podemos ver que estas corrientes conservadas, simplemente obedecen a que

$$\partial_\lambda (\tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} v^\sigma x_\sigma) = \tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} v^\lambda, \quad (4.84)$$

$$\partial_\lambda \left(\frac{1}{2} \tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} x^2 \right) = \tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\lambda} x^\lambda. \quad (4.85)$$

En resumen, al considerar un gravitón de Fierz-Pauli, encontramos dos familias de 2-formas conservadas de que generan simetrías generalizadas, las B y las D —véase (4.50) y (4.52). Generando un total de cargas conservadas $D(D+1)/2$ integrando sus duales de Hodge de la forma (4.72). En las regiones complementarias también encontramos dos familias de $(D-2)$ -formas conservadas que generan simetrías generalizadas. Se trata de las \tilde{A} y las \tilde{B} —véase (4.63-4.64). Generan un número igual de cargas conservadas $D(D+1)/2$ integrando sus duales de Hodge (4.72). Este resultado puede entenderse como una manifestación no trivial del principio de que los operadores no locales HDV vienen en pares duales.

4.2.3. Buscando $(D-2)$ -formas conservadas en $D > 4$

Si bien la solución a la discrepancia de pares duales se evidencia en el hecho de que las cargas generadas por las familias A y C son exactas, es un ejercicio interesante convencernos de que no existen otras $(D-2)$ -formas conservadas en $D > 4$. Cuando buscamos dichas corrientes, la primera propuesta que podemos intentar es la generalización directa del caso $D = 4$. Esto incluye las corrientes bien definidas \tilde{A} y \tilde{B} definidas en (4.63-4.64) así como

$$\tilde{C}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* \tilde{c}^{\alpha\beta\gamma} x_\gamma, \quad (4.86)$$

$$\tilde{D}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* \left(x^\alpha \tilde{d}^{\beta\gamma} x_\gamma + x^\beta \tilde{d}^{\gamma\alpha} x_\gamma + \frac{1}{2} \tilde{d}^{\alpha\beta} x^2 \right), \quad (4.87)$$

donde $\tilde{c}^{\alpha\beta\gamma}$ y $\tilde{d}^{\beta\gamma}$ son de nuevo tensores reales antisimétricos de parámetros libres. Sin embargo, estas 2-formas no se conservan. En concreto, para su divergencia obtenemos

$$\partial^\rho \tilde{C}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho} = R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho\alpha\beta}^* \tilde{c}^{\rho\alpha\beta} \quad (4.88)$$

$$\partial^\rho \tilde{D}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho} = R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho\alpha\beta}^* \left(x^\alpha \tilde{d}^{\beta\rho} + x^\beta \tilde{d}^{\rho\alpha} + \tilde{d}^{\alpha\beta} x^\rho \right) \quad (4.89)$$

Sin embargo, como en $D > 4$ las identidades de Bianchi del tensor dual de Riemann (4.43-4.44) son menos restrictivas que en $D = 4$, se permiten varias modificaciones de esta primera propuesta. De hecho, podemos escribir todas las combinaciones posibles del tensor dual de Riemann y sus derivadas con $\tilde{c}^{\alpha\beta\gamma}$, $\tilde{d}^{\alpha\beta}$ y las coordenadas espacio-temporales que obedezcan la antisimetría requerida y tengan la dimensión de escala correcta. Muchas de estas combinaciones no son linealmente independientes unas de otras, pero haciendo varias manipulaciones algebraicas que implican añadir ciertos términos a las formas originales de $\tilde{C}_{\mu\nu}$ y $\tilde{D}_{\mu\nu}$, encontramos que otras corrientes conservadas adicionales existen. Por ejemplo, podrían estar dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} &= \left(R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* + \frac{x^\sigma}{3}\partial_\sigma R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^*\right)\tilde{c}^{\alpha\beta\gamma}x_\gamma \\ &\quad - \frac{1}{3(D-3)!}\eta_{\mu_1\dots\mu_{D-2}}^{\nu_1\dots\nu_{D-2}}R_{\nu_1\dots\nu_{D-3}\alpha\beta\gamma}^*\tilde{c}^{\alpha\beta\gamma}x_{\nu_{D-2}},\end{aligned}\quad (4.90)$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} &= \left(R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* + \frac{x^\sigma}{4}\partial_\sigma R_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^*\right)\left[x^\alpha\tilde{d}^{\beta\gamma}x_\gamma + x^\beta\tilde{d}^{\gamma\alpha}x_\gamma + \frac{1}{2}\tilde{d}^{\alpha\beta}x^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{4(D-3)!}\eta_{\mu_1\dots\mu_{D-2}}^{\nu_1\dots\nu_{D-2}}R_{\nu_1\dots\nu_{D-3}\alpha\beta\gamma}^*x_{\nu_{D-2}}\left[x^\alpha\tilde{d}^{\beta\gamma} + x^\beta\tilde{d}^{\gamma\alpha} + x_\gamma\tilde{d}^{\alpha\beta}\right],\end{aligned}\quad (4.91)$$

donde se obtienen las leyes de conservación deseadas

$$\partial^\rho\tilde{C}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho} = 0, \quad (4.92)$$

$$\partial^\rho\tilde{D}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-3}\rho} = 0. \quad (4.93)$$

Además, añadiendo a estas nuevas corrientes conservadas $(D-2)$ -forma alcanzamos el total originalmente esperado de $D(D+1)(D+2)/6$ corrientes duales. Pero, estas nuevas corrientes conservadas son exactas y no generan simetrías generalizadas. Es decir, podemos encontrar $(D-1)$ -formas físicas $\tilde{\mathcal{C}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}$ de modo que

$$d * \tilde{\mathcal{C}}^{[R]} \sim *C, \quad d * \tilde{\mathcal{D}}^{[R]} \sim *D, \quad (4.94)$$

con las componentes de $\tilde{\mathcal{C}}$ and $\tilde{\mathcal{D}}$ dadas por

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}}^{[R]} = \frac{\eta_{\mu_1\dots\mu_{D-1}}^{\nu_1\dots\nu_{D-1}}}{3(D-2)!}R_{\nu_1\dots\nu_{D-2}\alpha\beta}^*c^{\alpha\beta\gamma}x_\gamma x_{\nu_{D-1}}, \quad (4.95)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-1}}^{[R]} = \frac{\eta_{\mu_1\dots\mu_{D-1}}^{\nu_1\dots\nu_{D-1}}}{4(D-2)!}R_{\nu_1\dots\nu_{D-2}\alpha\beta}^*\left[x^\alpha\tilde{d}^{\beta\gamma} + x^\beta\tilde{d}^{\gamma\alpha} + \frac{\tilde{d}^{\alpha\beta}}{2}x_\gamma\right]x^\gamma x_{\nu_{D-1}}, \quad (4.96)$$

En efecto, podemos chequear que tienen las divergencias esperadas

$$\partial^\rho\tilde{\mathcal{C}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\rho} = C_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}}, \quad \partial^\rho\tilde{\mathcal{D}}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\rho} = D_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}}. \quad (4.97)$$

4.3. Simetrías generalizadas para gravitones de curvatura superior

Consideremos ahora el caso de gravitones generalizados. La acción linealizada en este caso viene dada por (4.18). Puesto que la simetría de gauge sigue siendo la misma, es decir, los difeomorfismos linealizados descritos en (4.32), el tensor de Riemann sigue siendo el generador de operadores invariantes de gauge en la teoría. Sin embargo, la ecuación de movimiento viene dada ahora por (4.24) y, en particular, el tensor de Ricci no se anula on-shell. Por lo tanto, dicho tensor es un operador no trivial invariante de gauge en la teoría. Como consecuencia, el tensor de Riemann ya no es una corriente conservada como en (4.38) ni tampoco lo es el tensor de Weyl.

Por otra parte, la conservación y las propiedades adicionales del tensor de Riemann dual no son consecuencia de las ecuaciones de movimiento. Estas dependen únicamente de sus simetrías y de las identidades de Bianchi. Más concretamente, las ecuaciones (4.40-4.45) siguen siendo válidas para los gravitones en teorías de curvatura superior y obtenemos de nuevo $D(D+1)/2$ corrientes $(D-2)$ -forma conservadas correspondientes a las familias \tilde{A} y \tilde{B} , a saber

$$\tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} \tilde{a}^{\alpha\beta}, \quad (4.98)$$

$$\tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}} = R^*_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta} (x^\alpha \tilde{b}^\beta - x^\beta \tilde{b}^\alpha). \quad (4.99)$$

El flujo no local, definido sobre superficies bidimensionales, más general que podemos escribir tiene entonces de la misma forma que para el gravitón de Einstein

$$\tilde{\Phi}_{\partial\tilde{\Sigma}_2} = \int_{\tilde{\Sigma}_2} * \left(\tilde{A} + \tilde{B} \right). \quad (4.100)$$

Este resultado predice la existencia de un número igual de $D(D+1)/2$ corrientes 2-forma conservadas. Nuevamente, esta se trata de una predicción no trivial ya que, como se ha mencionado anteriormente, el tensor de Riemann ya no es una corriente conservada. Una primera generalización puede construirse sin recurrir a la dinámica específica de cada teoría. En particular, podemos construir⁷

$$S_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \left(\eta_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} \right. \\ \left. + \eta_{\nu\beta}R_{\mu\alpha} + \eta_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} \right) R, \quad (4.101)$$

⁷Véase que el tensor $S_{\mu\nu\alpha\beta}$ no coincide con el tensor de Weyl porque los pesos relativos de los términos son diferentes

que debido a las simetrías del Riemann y la 2^a identidad de Bianchi cumple que

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{D-3} \alpha \beta \gamma} S_{\alpha \beta \gamma \nu} = 0 . \quad \partial^\mu S_{\mu \nu \alpha \beta} = 0 . \quad (4.102)$$

No obstante, el tensor (4.101) no genera nuevos operadores no locales, ya que todos sus flujos resultan venir de corrientes exactas. Podemos observar esto por cálculo directo de las versiones con traza no nula de (4.67-4.68). Por ejemplo, podemos ver que los flujos de tipo A asociados a $S_{\mu \nu \alpha \beta}$ son aditivos debido a que

$$\partial^\rho A_{\mu \nu \rho}^{[R]} = R_{\mu \nu \alpha \beta} a^{\alpha \beta} + 2R_\alpha^\nu a_{\alpha \mu} - 2R_\alpha^\mu a_{\alpha \nu} + R a^{\mu \nu} = S_{\mu \nu \alpha \beta} a^{\alpha \beta} \quad (4.103)$$

Sin embargo, debería existir un tensor generalizado que desempeñara el papel que desempeña el tensor de Riemann en el caso Fierz-Pauli. En dicho caso, vimos que las leyes de conservación requieren la validez de las ecuaciones de Eistein, por ende es de esperar que una generalización al caso de orden superior involucre la dinámica de dichas teorías. Siguiendo esta idea nos sera útil re-escribir la ecuación de movimiento (4.24) como

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{m_g^2}\right) R_{\mu \nu} = \Delta_{\mu \nu} R . \quad (4.104)$$

donde $\Delta_{\mu \nu}$ es un operador diferencial simétrico de orden dos definido como

$$\Delta_{\mu \nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu \nu} \left[1 - \frac{\partial^2}{m_g^2}\right] + \frac{(D-2)(m_g^2 - m_s^2)}{2(D-1)m_s^2 m_g^2} [\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu \nu} \partial^2] . \quad (4.105)$$

A partir de aquí, después de bastante trabajo, tenemos que las simetrías generalizadas de las teorías gravitatorias linealizadas de curvatura superior pueden caracterizarse utilizando el tensor \mathcal{W} de trazas nulas definido como

$$\mathcal{W}_{\mu \nu \alpha \beta} \equiv \mathcal{R}_{\mu \nu \alpha \beta} + \frac{2}{(D-2)} [\eta_{\nu[\alpha} \mathcal{R}_{\beta]\mu} - \eta_{\mu[\alpha} \mathcal{R}_{\beta]\nu}] + \frac{2}{(D-2)(D-1)} \eta_{\mu[\alpha} \eta_{\beta]\nu} \mathcal{R} , \quad (4.106)$$

donde además hemos definido

$$\mathcal{R}_{\mu \nu \alpha \beta} \equiv \left[1 - \frac{\partial^2}{m_g^2}\right] R_{\mu \nu \alpha \beta}^{(1)} + 2\Delta_{\mu[\beta} R_{\alpha]\nu}^{(1)} + 2\Delta_{\nu[\alpha} R_{\beta]\mu}^{(1)} . \quad (4.107)$$

En particular, la divergencia de la biforma \mathcal{W} puede calcularse en cualquier teoría gravedad linealizada de curvatura superior, de manera que tenemos

$$\partial^\mu \mathcal{W}_{\mu \nu \alpha \beta} = \frac{1}{(D-2)} \left[\partial_\beta \left(\mathcal{R}_{\nu \alpha} - \frac{\eta_{\nu \alpha}}{(D-1)} \mathcal{R} \right) - \partial_\alpha \left(\mathcal{R}_{\nu \beta} - \frac{\eta_{\nu \beta}}{(D-1)} \mathcal{R} \right) \right] , \quad (4.108)$$

donde nombramos a las contracciones de $\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ de la forma

$$\mathcal{R}_{\nu\beta} = \eta^{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \Delta_{\beta\sigma}R^\sigma_\nu + \Delta_{\nu\sigma}R^\sigma_\beta - \Delta R_{\beta\nu}, \quad (4.109)$$

$$\mathcal{R} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 2\Delta_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - \Delta R. \quad (4.110)$$

Podemos ver que los términos dentro del paréntesis en (4.108) pueden calcularse utilizando las definiciones (4.109-4.110), la segunda identidad de Bianchi y la ecuación del movimiento. Más específicamente, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{(D-1)}\mathcal{R} &= \frac{(D-2)(m_g^2 - m_s^2)}{2(D-1)m_s^2m_g^2} \times \\ &\times \left[(D-3)\partial^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2(D-1)}R \right) - (D-4)\partial_\mu\partial_\nu R \right]. \end{aligned} \quad (4.111)$$

De aquí, vemos que ecuación (4.108) claramente se anula en dos casos diferentes:

- (a) cuando el modo de espín 2 está ausente del espectro ($m_g^2 \rightarrow \infty$), es decir que la parte cuadrática de la acción se reduce a un único término R^2 ;
- (b) cuando $m_s^2 = m_g^2$ de manera que solo encontramos un único término de alta curvatura en la acción de forma de Weyl².

Observaremos, que en ambas situaciones, se deduce que $\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta}$ genera cargas no triviales de las clases B y D de forma análoga a la gravedad de Einstein. Comencemos analizando el primer caso. Específicamente, cuando $m_g \rightarrow \infty$ recuperamos una teoría que sólo contiene el gravitón sin masa habitual y un campo escalar masivo. En tal caso, podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2(D-1)} \left[\frac{(D-2)}{m_s^2} \partial_\mu\partial_\nu + \eta_{\mu\nu} \right] R, \quad (4.112)$$

pudiendo utilizarse para comprobar explícitamente a partir de (4.108) y (4.111) que \mathcal{W} define una corriente biforma conservada. Sin embargo, en este caso, podemos simplificar aún más (4.106) para obtener una expresión más manejable, es decir

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{(D-1)m_s^2} \left[\eta_{\nu[\alpha}\partial_{\beta]}\partial_\mu + \eta_{\mu[\beta}\partial_{\alpha]}\partial_\nu \right] R. \quad (4.113)$$

A partir de (4.113), podemos comprobar explícitamente que \mathcal{W} obedece las mismas propiedades que el tensor de Riemann en una teoría de Fierz-Pauli, a saber

$$\eta^{\mu\alpha}\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_{D-3}\alpha\beta\gamma}\mathcal{W}_{\alpha\beta\gamma\nu} = 0, \quad (4.114)$$

$$\partial^\mu\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_{D-3}\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\mathcal{W}_{\beta\gamma\mu\nu} = 0.$$

Esto implica que \mathcal{W} produce flujos no locales de las clases tipo-B y tipo-D. A saber, las generadas por las corrientes conservadas

$$B_{\mu\nu}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} (x^\alpha b^\beta - x^\beta b^\alpha), \quad (4.115)$$

$$D_{\mu\nu}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} (x^\alpha d^{\beta\gamma} x^\gamma - x^\beta d^{\alpha\gamma} x^\gamma + \frac{1}{2} d^{\alpha\beta} x^2). \quad (4.116)$$

Podemos ver que las corrientes conservadas restantes, es decir las de las clases tipo-A y tipo-C, están producidas por formas exactas. Esto se consigue si consideramos las mismas estructuras tensoriales que en el caso de la gravedad de Einstein. Para ser precisos, obtenemos que

$$A_{\mu\nu}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} a^{\alpha\beta} = \partial^\rho \mathcal{A}_{\mu\nu\rho}^{[\mathcal{W}]}, \quad (4.117)$$

$$C_{\mu\nu}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} c^{\alpha\beta\gamma} x_\gamma = \partial^\rho \mathcal{C}_{\mu\nu\rho}^{[\mathcal{W}]}, \quad (4.118)$$

donde hemos utilizado la notación

$$\mathcal{A}_{\mu\nu\rho}^{[\mathcal{W}]} \equiv -\frac{\mathcal{W}_{\mu\nu\rho\alpha_1\dots\alpha_{D-3}}^*}{(D-4)!} \tilde{a}^{\alpha_1\dots\alpha_{D-3}\sigma} x_\sigma, \quad (4.119)$$

$$\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}^{[\mathcal{W}]} \equiv \frac{\mathcal{W}_{\mu\nu\rho\alpha_1\dots\alpha_{D-3}}^*}{(D-5)!(D-2)} \left(\frac{1}{2} \tilde{c}^{\alpha_1\dots\alpha_{D-3}} x^2 + \frac{\eta_{\beta_1\dots\beta_{D-3}}^{\alpha_1\dots\alpha_{D-3}}}{(D-4)!} c^{\beta_1\dots\beta_{D-4}\sigma} x^{\beta_{D-3}} x_\sigma \right). \quad (4.120)$$

Siguiendo esta línea, una cuestión que hemos evitado hasta ahora es que \mathcal{R} , definido a partir de (4.107), es por sí mismo una corriente biforma conservada en cualquier teoría gravitatoria de orden superior, a saber $\partial^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Sin embargo, tiene una traza no nula y por ende produce sólo flujos de los tipo-A y tipo-C. Podemos comprobar que éstos son generadas por corrientes exactas. Por ejemplo, obtenemos que en el límite $m_g \rightarrow \infty$ vale

$$A_{\mu\nu}^{[\mathcal{R}]} - A_{\mu\nu}^{[\mathcal{W}]} = \partial^\rho \left(\frac{\mathcal{A}_{\mu\nu\rho}^{[\mathcal{W}]} - \mathcal{A}_{\mu\nu\rho}^{[R]}}{(D-3)(D-1)} \right), \quad (4.121)$$

donde hemos utilizado que (4.107) se reduce a

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{(D-2)}{(D-1)^2 m_s^2} \left[\eta_{\nu[\alpha} \partial_{\beta]} \partial_\mu + \eta_{\mu[\beta} \partial_{\alpha]} \partial_\nu \right] R - \frac{\eta_{\mu[\alpha} \eta_{\beta]\nu}}{(D-1)^2} R. \quad (4.122)$$

Nos queda comprobar qué ocurre en la imagen dual, donde el tensor dual $\mathcal{W}_{\mu_1\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^*$ también se conserva y genera flujos de tipo- \tilde{A} y de tipo- \tilde{B} de la forma habitual

$$\tilde{A}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* \tilde{a}^{\alpha\beta}, \quad (4.123)$$

$$\tilde{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}}^{[\mathcal{W}]} = \mathcal{W}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{D-2}\alpha\beta}^* (x^\alpha \tilde{b}^\beta - x^\beta \tilde{b}^\alpha). \quad (4.124)$$

Observamos que este tensor dual puede escribirse como

$$\mathcal{W}_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \alpha \beta}^* = R_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \alpha \beta}^* + \frac{1}{(D-1)} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \rho \sigma} \eta_{[\beta}^\rho \partial_{\alpha]} \partial^\sigma R , \quad (4.125)$$

lo que implica que $\mathcal{W}_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \alpha \beta}^*$ genera las mismas cargas que $R_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \alpha \beta}^*$. La razón es que diferencia entre ambas también es exacta. Deducimos esto definiendo

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mu_1 \dots \mu_{D-1}} \equiv \frac{1}{(D-1)} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-1} \rho} a^{\alpha \beta} \eta_{[\alpha}^\rho \partial_{\beta]} R , \quad (4.126)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mu_1 \dots \mu_{D-1}} \equiv \frac{1}{(D-1)} \left[\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-1} \rho} (b^\alpha x^\beta - b^\beta x^\alpha) \eta_{[\alpha}^\rho \partial_{\beta]} R - \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-1} \rho} b^\rho R \right] , \quad (4.127)$$

cuyas divergencias son

$$\begin{aligned} \partial^\sigma \tilde{\mathcal{A}}_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \sigma} &= \frac{1}{(D-1)} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \rho \sigma} a^{\alpha \beta} \eta_{[\beta}^\rho \partial_{\alpha]} \partial^\sigma R \\ &= \tilde{\mathcal{A}}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-2}}^{[\mathcal{W}^*]} - \tilde{\mathcal{A}}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-2}}^{[R^*]} , \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \partial^\sigma \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \sigma} &= \frac{1}{(D-1)} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-2} \rho \sigma} (b^\alpha x^\beta - b^\beta x^\alpha) \eta_{[\beta}^\rho \partial_{\alpha]} \partial^\sigma R \\ &= \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-2}}^{[\mathcal{W}^*]} - \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D-2}}^{[R^*]} . \end{aligned} \quad (4.129)$$

Por último, nos queda analizar el caso $m_s^2 = m_g^2 = m^2$ cuya lógica sigue un patrón similar. En tal caso, la ecuación de movimiento puede simplificarse y obtenemos

$$\left[1 - \frac{\partial^2}{m^2} \right] R_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.130)$$

Además, las ecuaciones (4.106) y (4.107) se convierten en

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \left[1 - \frac{\partial^2}{m^2} \right] R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (4.131)$$

que obedece a todas las propiedades presentadas en (4.114), generando por tanto cargas no triviales a partir de las corrientes (4.115-4.116) y (4.98-4.99). Los cálculos correspondientes y las pruebas que demuestran que las restantes corrientes conservadas son exactas son análogas a los ya presentadas.

Resumiendo, en ausencia del modo de espín 2 masivo encontramos que las teorías de mayor curvatura poseen $D(D+1)$ corrientes conservadas, organizadas en dos conjuntos duales de igual tamaño $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ y $\{B, D\}$. Además, las corrientes obtenidas pueden entenderse como deformaciones continuas de las de Einstein.

Cuando m_g^2 es finito y $m_s^2 \neq m_g^2$, esta construcción falla y encontramos una posible violación del principio de pares duales. Esto está probablemente relacionado con el hecho de que el modo de espín 2 es un fantasma [125, 141], cuya presencia hace que la

teoría no sea unitaria [142, 143]. Es razonable esperar que las simetrías generalizadas y el principio de pares duales sean sensibles a esta cuestión. No obstante, también es una posibilidad lógica que exista un conjunto de cargas más elusivo para estos casos y que acabe salvando el día para estas teorías.

Por otra parte, el caso $m_g^2 = m_s^2$, para el cual la partícula de espín 2 sigue propagándose, tiene problemas de unitaridad similares [143]. El hecho de que esto no viole el principio de pares duales sugiere que las teorías consistentes siempre respetarán dicho principio, pero que la implicación contraria en general no sería cierta. En este contexto, como el campo se espín 2 masivo es un fantasma, queda abierta la pregunta si las simetrías generalizadas para esta teoría están bien definidas desde el punto de vista de la causalidad. Esto podría ser estudiado incluso a nivel clásico utilizando los métodos que presentaremos en la sección 6.1.2.

4.4. Simetrías generalizadas definen el gravitón generalizado

En [131] se adoptó una perspectiva interesante en relación con la gravedad. Siguiendo el paradigma de Landau [9], y en particular su generalización para incluir simetrías generalizadas [8]. Se caracteriza una fase de la materia (una teoría) en términos de sus simetrías y su patrón de ruptura de simetría. La gravedad podría seguir este paradigma, y de hecho esto se demostró para el gravitón de Einstein linealizado en [131], donde la acción de Fierz-Pauli se rediseñó a partir del patrón de simetría. Aquí mostramos que éste también es el caso para gravitones generalizados. En lugar de centrarnos en rediseñar la acción apropiada, nos centramos en rediseñar las ecuaciones de movimiento apropiadas. En otras palabras, buscamos recuperar el conjunto completo de ecuaciones linealizadas para gravitones generalizados, a partir del patrón de simetría de la teoría.

Es un ejercicio sencillo ver que, suponiendo que buscamos una teoría con las simetrías generalizadas generadas por los operadores HDV no locales

$$\Phi_{\partial\Sigma_{(D-2)}} = \int_{\Sigma_{(D-2)}} * (B + D), \quad \tilde{\Phi}_{\partial\tilde{\Sigma}_2} = \int_{\tilde{\Sigma}_2} * (\tilde{A} + \tilde{B}), \quad (4.132)$$

entonces, el carácter cerrado de las respectivas corrientes $(D - 2)$ -forma y 2-forma implica el conjunto completo de ecuaciones de Einstein. Por ejemplo, para el gravitón de Einstein pretendemos recuperar (4.35-4.37). Podemos deducir esto de las leyes de conservación

$$d * B = 0, \quad d * D = 0, \quad d * \tilde{A} = 0, \quad d * \tilde{B} = 0, \quad (4.133)$$

que hacen que se cumplan las identidades de Bianchi del tensor de Riemann así como las ecuaciones de Einstein. Para gravitones generalizados debemos considerar las mismas condiciones de conservación pero recordando que es el tensor \mathcal{W} el que genera la simetrías generalizadas de tipo- B y tipo D . En dicho caso, la conservación de \tilde{A} implica la validez de la segunda identidad de Bianchi (4.37). La conservación de B produce las ecuaciones de movimiento (4.24). Finalmente, el comportamiento de D y \tilde{B} generan la primera identidad de Bianchi (4.36). Por lo tanto, concluimos que el conjunto completo de ecuaciones de movimiento para teorías generales de gravedad linealizada se sigue de su patrón de simetrías generalizadas.

4.5. Discusión del capítulo

En este capítulo hemos hallado $D(D + 1)$ corrientes que producen simetrías generalizadas para la gravedad de Einstein linealizada, así como para gravedades de mayor curvatura que propagan un modo adicional de espín 0 en dimensiones generales. La mitad de las simetrías son generadas por corrientes de 2-forma y la otra mitad por corrientes de $(D - 2)$ -forma , lo cual verifica el principio de QFT de que las simetrías generalizadas siempre vienen en pares duales. Sin embargo, en el caso de gravitones de mayor curvatura que propagan un gravitón masivo adicional de espín 2, la teoría no es unitaria, y parece violarse el principio de los pares duales.

Un resultado interesante es que los gravitones generalizados pueden definirse por sus simetrías generalizadas, apoyando la perspectiva de [131]. Más precisamente, la gravedad linealizada es una teoría de simetría, caracterizada por la conservación de sus corrientes p -forma cerradas. Esto nos recuerda a AdS/CFT [144, 145], donde la gravedad es dual a la dinámica del tensor de energía-momento de una CFT, restringida por su conservación, traza nula e identidades de Ward asociadas.

Otros resultados interesantes son que las simetrías generalizadas del gravitón están cargadas bajo simetrías espacio-temporales para cualquiera de las acciones consideradas. Esto implica que estas teorías amplían el espacio de las llamadas teorías tensoriales de gauge [114], proporcionando más ejemplos de la conexión propuesta entre la gravedad y los sistemas fractónicos que hemos estudiado en el capítulo 3. Además, que las clases HDV de operadores no locales transformen ante el grupo de Poincaré tiene consecuencias directas en la construcción de tensores energía-momento para todas las teorías consideradas. Estudiaremos esta idea en profundidad en el capítulo 5.

Este escenario nos abre varias posibilidades de trabajo futuro. En primer lugar, nuestro análisis podría extenderse a: teorías linealizadas de la gravedad cuyo Lagrangiano sea también un funcional de la derivada covariante, teorías con términos de masa explícitos en la acción, o métricas de fondo más generales. Si bien [132] ya plantea un progreso en esta ultima dirección, el calculo explicito sobre métricas de fondo como

AdS podría ser particularmente interesante. Por un lado, podríamos estudiar como se rompen las simetrías generalizadas del gravitón en gravedad cuántica y, por otro, podríamos aprender sobre las propiedades de tensores energía-momento de CFTs holográficas.

Otra cuestión no relacionada, es si la existencia de un espacio no trivial de teorías gravitatorias de baja energía (definidas en términos del espectro de simetrías generalizadas) implica la existencia de un espacio similar de completaciones UV. Uno espera que este no sea el caso, y que la ausencia de simetrías generalizadas en la gravedad cuántica [18, 19] debería conducir a una teoría unificada en el UV, donde todas estas diferentes fases están suavemente conectadas entre sí.

Capítulo 5

Simetrías Generalizadas y el teorema de Noether

En mecánica clásica, el teorema de Noether [10] afirma la existencia de cargas conservadas Q cuando la acción es invariante bajo un grupo de simetría continuo. Estas cargas conservadas son los generadores del grupo en el espacio de fases clásico de la teoría. Una versión, a priori más fuerte aparece en la teoría clásica de campos, donde el teorema de Noether implica la existencia de corrientes locales conservadas j^μ , que satisfacen $\partial_\mu j^\mu = 0$. Integrando estas corrientes sobre una superficie espacial, recuperamos las cargas conservadas.

Es una cuestión de larga data determinar en qué medida, o en qué condiciones, este teorema se mantiene en QFT. En la mayoría de los escenarios, sabemos que es así, y que la existencia de una simetría continua global implica la existencia de una corriente local conservada. En lo que sigue de esta tesis, denominaremos la aparición de corrientes locales asociadas a simetrías continuas globales como “versión fuerte” del teorema de Noether.

De hecho, existe una versión más débil del teorema de Noether. Si tenemos una corriente, podemos integrarla sobre una región finita R contenida dentro de una superficie de Cauchy completa. Esta integración parcial da lugar a las cargas locales Q_R , que miden la cantidad de carga en la región R . Equivalentemente, vemos que las cargas Q_R generan las transformaciones de simetría para los campos locales dentro de R . Estas transformaciones de simetría locales se conocen como “twists”. La existencia de estas cargas locales Q_R y twists está garantizada por la existencia de las propias corrientes. Pero desconocemos la validez de la afirmación inversa. Nombraremos a la existencia de Q_R locales para cualquier región R como “versión débil” del teorema de Noether.

Un progreso significativo hacia una prueba de primeros principios e independiente del Lagrangiano del teorema de Noether en QFT apareció en [146–149], dentro del contexto del estudio de simetrías globales en AQFT [58, 59, 62, 150, 151]. En particular,

en [149], dada una cierta suposición técnica pero débil en QFT llamada “split property”, se demostró la versión débil del teorema de Noether, y se encontró una construcción canónica de las cargas locales Q_R . A continuación revisaremos esta construcción, la cual también es válida para simetrías globales discretas, extendiendo la versión débil del teorema también a esos casos. Finalmente, [149] también reconoce que esta construcción no es una prueba de la versión fuerte del teorema de Noether, y que se requieren nuevas ideas para lograr tal objetivo, o para encontrar la potencial obstrucción. Podemos encontrar progreso en esta dirección en [14, 152, 153].

Un teorema a priori no relacionado en QFT para $D = 4$ es el teorema Weinberg-Witten [17]. Este teorema afirma que la existencia de una corriente conservada j^μ excluye la existencia de partículas sin masa con helicidad mayor o igual a uno que estén cargadas bajo ella, y que la existencia de un tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ excluye la existencia de partículas sin masa con helicidad mayor o igual a dos. Estos teoremas restringen entonces el espacio de posibles QFTs en $D = 4$. En particular, la segunda versión se interpreta típicamente como una obstrucción a la construcción de QFTs relativistas con un gravitón emergente en el infrarrojo, sugiriendo que la cuantización de la gravedad debe seguir una ruta diferente.

Es evidente que ambos teoremas, la versión fuerte del teorema de Noether y el teorema de Weinberg-Witten, exigen una comprensión más profunda de cuándo y por qué pueden aparecer en la teoría corrientes conservadas que generen simetrías globales. Una observación que sugiere que ambas están relacionadas entre sí aparece al dar la vuelta al teorema de Weinberg-Witten. Por ejemplo, si existiera en $D = 4$ una teoría de partículas sin masa con helicidad mayor o igual a uno cargadas bajo una simetría global, esta violaría definitivamente la versión fuerte del teorema de Noether ya que según Weinberg-Witten no existe corriente local conservada para tal simetría.

Dado este contexto, la principal motivación de este capítulo es comenzar a comprender el espacio de QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether, y analizar las lecciones aprendidas en relación con el teorema de Weinberg-Witten. Para tal fin, desarrollamos una clasificación más fina de cargas locales y operadores de twist en QFT. Esta clasificación se deriva naturalmente del enfoque para simetrías generalizadas en AQFT presentado en el capítulo 2. Más concretamente, para avanzar será crucial considerar QFTs que poseen simultáneamente simetrías generalizadas y una simetría global usual en la que centraremos nuestra atención. En tales escenarios, las cargas/twists asociadas en una cierta región R son potencialmente de diferentes tipos, los cuales analizaremos en detalle.

Utilizando esta clasificación más fina de los operadores de twist derivaremos los principales resultados de este capítulo, de donde se siguen los demás. En palabras, mostraremos que las simetrías generalizadas no pueden estar cargadas bajo una simetría global continua que tenga una corriente de Noether, y que sólo las simetrías generaliza-

das con un continuo de clases duales pueden cargarse bajo una simetría global continua. También describiremos la extensión natural de estas afirmaciones a simetrías globales asociadas a grupos finitos.

La discusión dejará claro que las versiones débil y fuerte del teorema de Noether no son equivalentes. Existe un espacio no vacío de QFTs que satisfacen la versión débil y violan la fuerte. Además, llegamos a una caracterización mínima de dicho espacio. Muy explícitamente, éste espacio contendrá a las QFTs con simetrías generalizadas cargadas bajo la simetría continua global. Estas teorías son muy especiales, ya que poseen simetrías generalizadas con un continuo de clases duales, lo que concuerda con la validez casi universal de la versión fuerte.

Utilizaremos estos resultados (junto con los presentados en los capítulos 3 y 4) para proporcionar una nueva demostración del teorema de Weinberg-Witten. A la luz de estas ideas, el teorema de Weinberg-Witten surge como una obstrucción topológica para que una simetría global tenga una corriente conservada debido a la existencia de simetrías generalizadas 1-forma cargadas bajo ella. En este contexto, se permiten generalizaciones de distintos tipos del teorema Weinberg-Witten, como a dimensiones $D \neq 4$ y partículas sin masa en distintas representaciones del “little group”. De la misma manera, esta forma de pensar nos lleva a ideas similares aplicables a ejemplos no relativistas y simetrías globales dadas por grupos finitos.

Para ilustrar la física estudiamos ejemplos de diferente espín con simetrías globales continuas y finitas. Todos los aspectos descritos en la discusión general abstracta, aparecerán en estos ejemplos concretos. En particular, veremos explícitamente como transforman las clases asociadas a los operadores no locales de las simetrías generalizadas presentadas para el gravitón en los capítulos 3 y 4, y como esto implica que la teoría no puede tener un tensor energía-momento bien definido.

La organización del capítulo es la siguiente. En la sección 5.1 presentaremos los twists y desarrollaremos la clasificación más fina de estos operadores que surge para las QFTs con simetrías generalizadas. A continuación, utilizamos esta clasificación para deducir nuestro principal resultado, a saber, que si las clases HDV de una teoría transforman bajo la acción de un grupo de simetría continuo, entonces dicha simetría no puede ser implementada por una corriente de Noether. Más aún, veremos que en estos casos las clases HDV deben formar un continuo y presentaremos una clasificación de la posibles formas de estos continuos para los casos más simples. La sección 5.2 está dedicada a un análisis técnico más profundo de los operadores de twist en QFTs con simetrías generalizadas. En la sección 5.3 ilustramos la nueva clasificación de twists y los resultados derivados con ejemplos explícitos. En la sección 5.4 proporcionamos una demostración diferente del teorema de Weinberg-Witten, y discutimos varias generalizaciones. La sección 5.5 está dedicada a una discusión final incluyendo la motivación para varias que desarrollaremos durante el resto de la tesis.

5.1. Simetrías generalizadas y corrientes de Noether

Introducimos ahora un nuevo ingrediente al enfoque de las simetrías generalizadas desarrollado durante el capítulo 2. Comenzamos con una QFT con cierta álgebra aditiva $\mathcal{A}(R)$, posiblemente violando la dualidad de Haag en ciertas regiones, y por lo tanto con potenciales simetrías generalizadas. Pero, ahora permitimos que esta álgebra aditiva esté cargada bajo un grupo de simetría global G .¹

Para empezar consideremos que G es una simetría global interna. Por definición, el grupo actúa como un automorfismos de las álgebras aditivas para cualquier región R . Para una simetría global no rota vemos actúa mediante los operadores unitarios

$$U(g) \mathcal{A}(R) U(g)^{-1} = \mathcal{A}(R), \quad g \in G. \quad (5.1)$$

Debemos entender esta relación, y las que siguen como un mapeo entre álgebras. No está diciendo que todos los elementos de $\mathcal{A}(R)$ sean invariantes bajo el grupo de simetría, sino que se transforman entre sí. Es fácil comprobar que la conjugación con el unitario $U(g)$ lleva álgebras que commutan a álgebras que commutan, es decir, dado (7.76) tenemos para su commutante

$$U(g) \mathcal{A}(R)' U(g)^{-1} = \mathcal{A}(R)', \quad g \in G. \quad (5.2)$$

Dado que $\mathcal{A}(R')' = \mathcal{A}_{\max}(R)$, el grupo actuando como conjugación es también un automorfismo de las álgebras máximas

$$U(g) \mathcal{A}_{\max}(R) U(g)^{-1} = \mathcal{A}_{\max}(R). \quad (5.3)$$

Por lo tanto, la simetría no puede convertir los operadores no locales en locales o viceversa. Dicho de otra forma, esta obligada a transformar los operadores no locales entre ellos mismos. La cuestión que queremos estudiar es si esta acción de grupo puede cambiar las clases no locales de una región dada R o debe dejar las clases invariantes. Y luego entender las consecuencias en ambos casos.

5.1.1. Transformaciones de punto sobre etiquetas de clases

Comenzamos considerando posibles transformaciones de las etiquetas de las clases. Para esto, elegimos representantes para las clases HDV no locales $[a_\lambda]$ en R , digamos a_λ . Para la clase identidad podemos elegir el propio operador identidad. Recordemos que las clases $[a_\lambda]$ son conjuntos disjuntos de operadores invariantes bajo la acción izquierda y derecha de $\mathcal{A}(R)$, y son irreducibles cuando no hay subconjuntos propios

¹Escenarios similares relacionados con mezcla de simetrías han aparecido recientemente. Véase [154–157] y referencias allí contenidas.

de $[a_\lambda]$ invariantes bajo $\mathcal{A}(R)$. Por definición, podemos escribir cualquier operador $A \in \mathcal{A}_{\max}(R)$ como

$$A = \sum_{\lambda,s} O_{\lambda,s} a_\lambda \tilde{O}_{\lambda,s}, \quad O_{\lambda,s}, \tilde{O}_{\lambda,s} \in \mathcal{A}(R). \quad (5.4)$$

Para una combinación no irreducible de clases HDV de la forma (5.4), podemos proyectar la suma a uno de los operadores no locales irreducibles que aparecen con coeficiente no triviales en el lado derecho de (5.4). Lo hacemos actuando a izquierda y a derecha con combinaciones de elementos de $\mathcal{A}(R)$ (utilizando los proyectores presentados en [23] y construidos a partir de operadores no locales duales que pueden ser contenidos en R)

$$\sum_i P_i A \tilde{P}_i = a_\lambda, \quad P_i, \tilde{P}_i \in \mathcal{A}(R). \quad (5.5)$$

Consideremos ahora de nuevo la simetría global. La transformación de un operador no local a_β bajo la simetría global pertenece a $\mathcal{A}_{\max}(R)$. Por lo tanto, podemos escribirla como

$$U(g) a_\beta U(g)^{-1} = \sum_\lambda O_{\lambda,s} a_\lambda \tilde{O}_{\lambda,s}. \quad (5.6)$$

Como antes, podemos proyectar el lado derecho en un a_λ si multiplicamos esta ecuación a izquierda y derecha por ciertos P_i y \tilde{P}_i pertenecientes a $\mathcal{A}(R)$ y sumando sobre i . Mediante este proceso, obtenemos

$$U(g) \left(\sum_i Q_i a_\beta \tilde{Q}_i \right) U(g)^{-1} = a_\lambda, \quad (5.7)$$

donde escribimos como Q_i y \tilde{Q}_i a los operadores que obtenemos cuando el grupo actúa como conjugación sobre P_i y \tilde{P}_i , es decir

$$Q_i = U(g)^{-1} P_i U(g) \in \mathcal{A}(R), \quad \tilde{Q}_i = U(g)^{-1} \tilde{P}_i U(g) \in \mathcal{A}(R). \quad (5.8)$$

De esta manera tenemos que

$$\left(\sum_i Q_i a_\beta \tilde{Q}_i \right) \in [a_\beta]. \quad (5.9)$$

Por tanto, (5.7) nos dice que un elemento de la clase HDV β se transforma en solamente un elemento de la clase HDV λ . Esto, junto con el hecho de que la simetría global mapea $\mathcal{A}(R)$ en $\mathcal{A}(R)$, nos permite deducir que todos los elementos pertenecientes a la clase β se transforman en elementos pertenecientes a la clase λ . Por tanto, sólo puede haber una clase no nula en la descomposición (5.6). Concluimos, que el grupo actúa como

una transformación de punto sobre la variedad generada por las etiquetas de clase. Más aún, esta se divide en órbitas bajo la acción del grupo de simetría global, dejando invariante la clase identidad. Estas transformaciones de punto deben manifestarse como una simetría de las reglas de fusión asociadas a las clases $[a_\lambda]$. También, deducimos que la acción del grupo sobre clases HDV no locales es transportable (es decir, se mantiene igual) bajo la identificación de clases irreducibles cuando deformamos continuamente una región pero no su topología.

Si la simetría global se rompe espontáneamente (SSB) no podemos implementar los automorfismos de grupo con un operador unitario global $U(g)$, pero podemos implementarlos dentro de cualquier región acotada fija R usando un operador unitario [39]. Estos unitarios locales que efectúan la transformación del grupo en regiones compactas R son los twists $\tau_g(R)$. Estos twists jugarán un papel central en lo que sigue y por ende los discutiremos a continuación. Utilizando estos twists, no es difícil demostrar que las conclusiones de esta sección siguen siendo válidas para el caso de SSB, ya que las simetrías generalizadas siempre pueden estudiarse dentro de una región finita R con la topología de una bola.

5.1.2. Twists y sus diferentes tipos

Introducimos a continuación los operadores de twist. Basicamente, se tratan de unitarios locales que implementan la transformación del grupo sólo en una determinada región R . Ahora los discutiremos más formalmente. Dada una región R podemos definir otra región ligeramente mayor $R \cup Z$, tal que su borde esté separada del de R por una distancia ϵ suficientemente pequeña (ϵ representa “la anchura” de Z). Llamaremos a la región Z como “buffer zone”. El borde de Z es $\partial Z = (\partial Z)_1 \cup (\partial Z)_2$, siendo $(\partial Z)_1 = \partial R$ y $(\partial Z)_2 = \partial(R \cup Z)$. Las topologías de $(\partial Z)_1$ y $(\partial Z)_2$ son iguales. La topología de Z es la misma que $\partial R \times \mathbb{R}$. También, llamamos $\bar{R} = (R \cup Z)'$, de manera que $R \cup Z \cup \bar{R}$ es una partición del espacio completo dada por tres regiones disjuntas. Esta configuración geométrica se representa en la figura 5.1.

Con estas convenciones geométricas, un twist $\tau_g(R, Z)$ es un operador unitario que implementa la trasformacion de simetría global g (por conjugación) sobre los operadores del álgebra $\mathcal{A}(R)$ y deja invariantes los operadores en $\mathcal{A}(\bar{R})$. Introdujimos la buffer zone por la razón técnica de que al tender ϵ a cero el twist es demasiado singular para ser un operador. Por definición, dada la acción trivial de dicho twist sobre $\mathcal{A}(\bar{R})$, deducimos simplemente que

$$\tau_g(R, Z) \in \mathcal{A}_{\max}(R \cup Z). \quad (5.10)$$

Podemos aclarar la intuición asociada a estos operadores cuando tenemos una corriente de Noether j^μ . En estos casos producimos el twist si integramos la carga sobre R con smearing igual a uno, y luego dejamos que el smearing decaiga en la buffer zone Z .

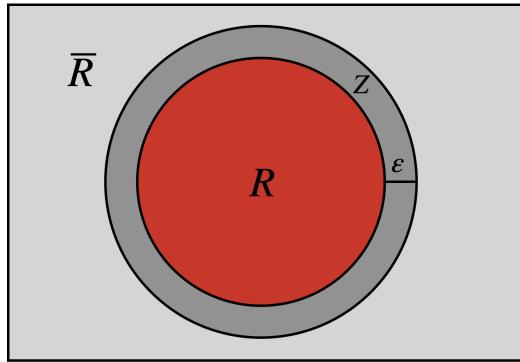


Figura 5.1: Configuración geométrica que usamos para caracterizar la definición de un operador de twist $\tau_g(R, Z)$. No es necesario que la topología de la región R sea trivial para que podamos definir el twist. Este se construye de modo que efectúe la transformación de simetría en $\mathcal{A}(R)$ y deje invariantes los operadores en $\mathcal{A}(\bar{R})$. Requerimos la existencia de la buffer zone Z con tamaño ϵ distinto de cero para que formalmente exista el operador en la QFT.

Pero, como estudiaremos en la siguiente sección, estos twists existen en condiciones muy generales, incluso para grupos finitos, y pueden construirse canónicamente utilizando la teoría modular.

Cuando la QFT en la que actúa el grupo de simetría G presenta simetrías generalizadas, podríamos tener inclusiones estrictas del tipo discutido en la sección anterior, a saber $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$. En particular, para la región $R \cup Z$ sobre la cual definimos el twist podríamos tener, debido a la existencia de operadores no locales en $R \cup Z$, la inclusión

$$\mathcal{A}(R \cup Z) \subset \mathcal{A}_{\max}(R \cup Z) . \quad (5.11)$$

En estos escenarios, hay refinamientos en los posibles tipos de twists que podemos tener. En primer lugar, un twist puede pertenecer al álgebra aditiva $\mathcal{A}(R \cup Z)$, en lugar de pertenecer sólo a la máxima (5.10). En este caso decimos que el twist es “aditivo”. Nótese que si no es aditivo es, por definición, tenemos un operador no local de $\mathcal{A}_{\max}(R \cup Z)$. En segundo lugar, un twist puede implementar la simetría global en el álgebra máxima $\mathcal{A}_{\max}(R)$, en lugar de sólo sobre la aditiva. En dicho caso, diremos que el twist es “completo”. Obsérvese que no se requiere que un twist general actúe sobre los operadores no locales de R ya que estos operadores sólo se vuelven locales en una región que va más allá de la que define el twist. A continuación discutiremos ejemplos de twist aditivos/no aditivos y completos/no completos. También, en la siguiente sección discutiremos otros refinamientos, relacionados con la forma en que el twist transforma las diferentes álgebras en la buffer zone. No obstante, la caracterización en términos de twist aditivos y completos será suficiente para entender la mayoría de los resultados del capítulo.

Dado un twist $\tau_g(R, Z)$ para R , podemos construir un twist “complementario”

$\tau_g(\bar{R}, Z)$ para \bar{R} como

$$\tau_g(\bar{R}, Z) = U(g) \tau_g(R, Z)^{-1}, \quad (5.12)$$

donde $U(g)$ es el unitario global del grupo de simetría. De la definición deducimos que $\tau_g(\bar{R}, Z)$ implementa las operaciones de grupo en $\mathcal{A}(\bar{R})$, dejando invariantes los operadores en $\mathcal{A}(R)$. Si $\tau_g(R, Z)$ es completo, el twist complementario $\tau_g(\bar{R}, Z)$ también deja invariantes los operadores no locales en $\mathcal{A}_{\max}(R)$ ya que toda transformación no trivial es cancelada por $U(g)$. Por lo tanto, pertenece al conmutante de $\mathcal{A}_{\max}(R)$, a saber, $\mathcal{A}(\bar{R} \cup Z)$. En resumen, si $\tau_g(\bar{R}, Z)$ es un twist aditivo para \bar{R} si $\tau_g(R, Z)$ es completo. Del mismo modo, si $\tau_g(R, Z)$ es aditivo, el twist complementario es completo. En otras palabras, los twist completos y aditivos son nociones complementarias o duales.

Es inmediato que la existencia de twists $\tau_g(R, Z)$ para R , que son simultáneamente completos y aditivos, implica que las clases no locales correspondientes a R son invariantes bajo la acción G . Por lo tanto, la simetría generalizada no está cargada con respecto a G . Esto se deduce de la siguiente cadena de argumentos. Al ser completo, el twist implementa la operación de grupo sobre los operadores no locales en R . Por transportabilidad, los operadores no locales en R son operadores no locales en $R \cup Z$. Siendo el twist un operador aditivo en $R \cup Z$, no puede producir transiciones entre las clases HDV de $R \cup Z$. Entonces, la simetría generalizada no está cargada bajo la acción de G . Por supuesto, el twist completo y aditivo puede cambiar el contenido aditivo de los operadores no locales ya que los operadores aditivos están genéricamente cargados bajo G pero no es capaz de transformar las clases HDV. En la sección 5.2 mostraremos la afirmación contraria: la existencia de clases HDV no cargadas implica la existencia de twists aditivos y completos (asumiendo la split property). Como discutiremos en varios lugares a lo largo del capítulo, ambas afirmaciones son cruciales para entender la diferencia entre las versiones débil y fuerte del teorema de Noether.

En consecuencia, si hay clases no locales en R que transforman no trivialmente bajo la acción de G tenemos dos posibilidades distintas. O bien el twist no es completo o, si es completo, debe ser no aditivo. En el segundo caso, el twist tiene que ser un operador no local en la región $R \cup Z$, es decir, el twist contiene elementos no locales de $\mathcal{A}_{\max}(R \cup Z)$. Como en general los operadores no locales en R pueden ser transportados a la buffer zone Z , también podemos pensar que el twist pertenece a $\mathcal{A}_{\text{add}}(R) \vee \mathcal{A}_{\max}(Z)$. En esta presentación, el twist parece tener “términos de borde no locales”.²

²Observamos que esto no debe confundirse con un problema de regularización UV. El hecho de que la corrección sea no local es una característica macroscópica que no depende de ambigüedades UV y que tiene consecuencias para la física IR.

5.1.3. Twists para simetrías espacio-temporales continuas

En contraste a lo que ya analizamos, las simetrías espacio-temporales Λ introducen la novedad de que las álgebras no se mantienen invariantes sino que se transforman geométricamente según (2.10), es decir

$$U(\Lambda) \mathcal{A}(R) U(\Lambda)^{-1} = \mathcal{A}(\Lambda R). \quad (5.13)$$

Para simetrías espacio-temporales continuas y transformaciones suficientemente pequeñas las regiones se desplazan muy poco de manera que, debido a la transportabilidad, existe una identificación única de sectores no locales entre las álgebras transformadas. Por consiguiente, la cuestión de la transformación o no de los sectores no locales bajo la operación de simetría tiene perfecto sentido: es la cuestión de si la transformación unitaria que implementa la simetría cambia las clases HDV con respecto a las clases HDV asociadas por transportabilidad.

La definición de los twists puede generalizarse para transformaciones de simetría de espacio-tiempos finitas si requerimos que el twist implemente la operación de simetría en $\mathcal{A}(R)$ sólo en operadores $O \in \mathcal{A}(R)$ tales que $U(\Lambda) O U(\Lambda)^{-1}$ también pertenezca $\mathcal{A}(R)$. También podremos construirse twists estándar para este caso utilizando la split property [149], como revisaremos en detalle en la siguiente sección. Para nuestros propósitos, será suficiente hablar de las cargas locales, generadores infinitesimales de los twists para simetrías continuas. Se requiere que estas cargas tengan los mismos conmutadores que la carga global con elementos en $\mathcal{A}(R)$ y commuten con elementos en $\mathcal{A}(\bar{R})$. Definimos las cargas locales como aditivas si están asociadas³ al álgebra aditiva de $R \cup Z$, a saber $\mathcal{A}(R \cup Z)$. Por otro lado, diremos que las cargas locales son completas si tienen el mismo conmutador que la carga global con el álgebra máxima de R , a saber $\mathcal{A}_{\max}(R)$.

5.1.4. Simetrías generalizadas y cargas de Noether

Anteriormente mostramos, desde un punto de vista general, que la existencia de twists simultáneamente aditivos y completos implica que la simetría generalizada no puede estar cargada bajo el grupo de simetría global. Ahora mostraremos que las simetrías globales implementadas por una corriente de Noether siempre tienen twists aditivos y completos. Por tanto, las simetrías globales implementadas por una corriente de Noether deben dejar invariantes las clases HDV no locales de todas las simetrías generalizadas. Equivalentemente, las simetrías generalizadas no pueden estar cargadas bajo simetrías globales implementadas por corrientes de Noether. A la inversa, esto

³Dado que una carga no es en general un operador acotado no puede pertenecer al álgebra de von Neumann, pero puede ser asociada a ella si los proyectores espectrales pertenecen al álgebra.

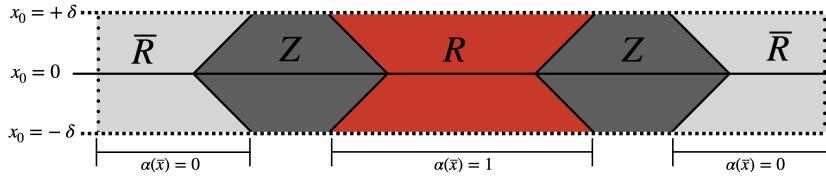


Figura 5.2: Configuración geométrica utilizada para la definición de operadores de twist a partir de corrientes de Noether. La función de smearing $\alpha(\vec{x})$ es igual a uno para el futuro y el pasado de R en el intervalo de tiempo $(-\delta, \delta)$ y es igual a cero en el futuro y el pasado de \bar{R} en el mismo intervalo de tiempo.

demuestra una obstrucción a la existencia de corrientes de Noether cuando encontramos clases HDV no locales que se transforman bajo una simetría continua. Esto nos demuestra que el espacio de QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether incluye todas las QFTs con simetrías generalizadas cargadas bajo un grupo de simetría continuo global.

Consideremos una región R (con cualquier topología dada) con una buffer zone Z , y supongamos que la simetría global es generada por una corriente local de Noether j_μ . Podemos construir un twist $\tau_g(R, Z)$, que implementa la simetría en R y no hace nada en $(R \cup Z)'$, haciendo un smearing de la corriente de Noether j_μ . Explícitamente, podemos definir el twist local y la carga correspondiente como

$$\tau_\lambda(R, Z) = e^{i\lambda Q(R, Z)}, \quad Q(R, Z) = \int d^D x \beta(x^0) \alpha(\vec{x}) j_0(x). \quad (5.14)$$

En esta fórmula λ determina el elemento específico del grupo de simetría G . Las funciones de smearing α y β son suaves. Además, cumplen los siguientes requisitos: $\int dx^0 \beta(x^0) = 1$, el soporte de β está en $[-\delta, \delta]$ para δ suficientemente pequeño, $\alpha(\vec{x}) = 1$ para todas las coordenadas espaciales de los puntos dentro de la intersección del cono de luz futuro y pasado de R con $x^0 \in [-\delta, \delta]$, $\alpha(\vec{x}) = 0$ para todos los puntos dentro de la intersección del cono de luz futuro y pasado de $\bar{R} = (R \cup Z)'$ con $x^0 \in [-\delta, \delta]$. Representamos esta configuración geométrica en la figura 5.2. Esta elección de funciones de smearing nos asegura que el comutador de la carga local $Q(R, Z)$ con cualquier operador local en R , y por tanto con el álgebra aditiva $\mathcal{A}(R)$ de la región R , coincide con el comutador del operador de carga global. También asegura que el comutador de $Q(R, Z)$ con operadores locales en la región \bar{R} se anula. El operador $\tau_\lambda(R, Z)$ definido anteriormente es entonces un operador de twist para la región R y la buffer zone Z .

Es evidente que los twists de Noether $\tau_g(R, Z)$, al estar formados localmente por el álgebra de un campo local, son siempre aditivos en $R \cup Z$. Ahora, podemos demostrar sencillamente que los twists de Noether también son necesariamente completos. Sea Q la carga global, la cual recuperamos de la misma expresión (5.14) pero donde $\alpha(\vec{x}) = 1$ para todo \vec{x} . Esta carga Q genera la transformación de simetría global para todos los

operadores no locales en R ya que estos operadores son aditivos en última instancia en la teoría completa. Tenemos trivialmente $Q = Q(R, Z) + (Q - Q(R, Z))$. A partir de la definición de la carga local (5.14), el operador $Q - Q(R, Z)$ es aditivo en $\bar{R} \cup Z$. Por lo tanto, vemos que conmuta con todos los operadores no locales en R . Esto implica que el commutador de $Q(R, Z)$ con los operadores no locales en R es el mismo que el de Q . Por tanto, los twists de Noether son aditivos y completos. Concluimos que para QFTs en las que la simetría está generada por una corriente de Noether, las clases HDV no locales, asociadas con cualquier región (de topología general), son invariantes bajo la acción de G .

Las simetrías espacio-temporales continuas (simetrías de Poincaré y/o conformes) son generadas por el tensor de energía-momento, cuando éste existe. Podemos generar una carga para un twist de Poincaré o uno conforme utilizando el tensor de energía-momento tal como describimos anteriormente. Entonces, si la QFT contiene un tensor de energía-momento las cargas locales correspondientes serán aditivas y completas. Concluimos que para teorías con un tensor de energía-momento bien definido, las clases HDV dadas por la simetría generalizada no pueden cargarse bajo simetrías espacio-temporales continuas.⁴

5.1.5. Clases HDV no invariantes ante una simetría continua

Probamos que las clases HDV generadas por una simetría generalizada no pueden cargarse bajo simetrías continuas implementadas por una corriente de Noether. Entonces, ahora es interesante que investiguemos las consecuencias que puede acarrear la existencia de simetrías generalizadas que si se cargan bajo una simetría continua. Además, en esta sección obtenemos una clasificación completa de los posibles sectores HDV para el caso más simple, a saber, cuando dichos sectores son abelianos con hasta dos generadores y la simetría global que los trasforma esta dada por un grupo uniparamétrico.

Dadas las transformaciones de punto entre clases descritas en la sección 5.1.1, el conjunto H de elementos de G que dejan invariantes todas las clases no locales es un subgrupo normal de G . Podemos centrarnos entonces en el cociente $\tilde{G} = G/H$. Excepto la identidad, ninguno de sus elementos de \tilde{G} deja invariantes todas las clases. Nos interesa particularmente el caso en que \tilde{G} es un grupo de Lie. Este grupo actuará como transformaciones de punto sobre el conjunto de etiquetas de clase. Por lo tanto, las clases no locales para R deben formar un continuo. Bajo la acción de \tilde{G} tal varie-

⁴En [149, 158] se han utilizado argumentos relacionados para demostrar que el grupo de simetría global subyacente a una estructura de sectores de superselección de carga conmuta con las transformaciones de Poincaré cuando existe un tensor de energía-momento. Estos son un caso particular del presente teorema cuando se restringe al caso de dos sectores de bola, o sectores de orbifold. Véase ejemplo de la sección 5.3.1. Aquí demostramos que el resultado se extiende a todas las simetrías generalizadas.

dad generada por etiquetas de las clases HDV podría romperse en diferentes órbitas, generadas por el grupo y un solo punto en la órbita. Si dicho punto tiene un grupo estabilizador no trivial, la dimensión de la órbita es la dimensión del cociente entre \tilde{G} y el grupo estabilizador. En este contexto, debemos encontrar al menos una órbita unidimensional o las clases HDV serían invariantes.

Por otra parte, recordamos que en el capítulo 2 probamos que clases HDV producidas por una simetría generalizada vienen en pares duales asociadas a regiones complementarias. Inclusive vimos ejemplos no triviales en el capítulo 4. En este contexto, vemos como estas ideas se vuelven relevantes nuevamente. Más precisamente, si las clases HDV no locales de R no son invariantes, entonces, las clases HDV de \bar{R} necesariamente deben ser también no invariantes. Esto implica, que estas ultimas también deben formar un continuo de clases. En conclusión: cuando las simetrías generalizadas se cargan bajo un grupo de simetría global continuo, las simetrías generalizadas deben tener un continuo de clases duales que no comutan entre sí.

Luego, terminaremos esta sección iniciando una clasificación de las posibles estructuras en las que tenemos clases HDV no invariantes bajo un grupo uniparamétrico. En este sentido consideremos que el grupo \tilde{G} que actúa de forma no trivial sobre las clases HDV asociadas a una región R es un grupo uniparamétrico con parámetro aditivo λ . Por definición, tenemos que el grupo completo \tilde{G} no deja invariantes las clases (no consideramos el caso que sólo un subgrupo discreto desplaza las clases no trivialmente). Llamemos ahora a a un operador no local en R que no es invariante. Entonces, existe necesariamente un continuo de clases $a(\lambda)$.

En este tipo de escenarios, el caso más sencillo se da cuando estos $a(\lambda)$ son los únicos sectores no locales. Entonces la fusión de a es necesariamente abeliana formando un grupo uniparamétrico A , y podemos etiquetar $a_1 + a_2$ a la clase generada por el producto de los sectores a_1, a_2 , correspondiendo $a = 0$ a la clase identidad. La acción de la simetría que respeta esta álgebra de fusión debe ser de la forma

$$a(\lambda) = e^\lambda a, \quad (5.15)$$

donde hemos normalizado el parámetro de grupo λ de forma que el exponente no tenga un factor constante extra. En la región \bar{R} tenemos los operadores duales no locales b . El dual del grupo abeliano A es otro grupo abeliano B formado por los caracteres de A , y podemos establecer la parametrización de los b de tal forma que la fusión de b_1 y b_2 sea $b_1 + b_2$. Las relaciones de commutación entre clases no locales son de la forma [23]

$$a b = e^{i a b} b a. \quad (5.16)$$

La única acción posible de la simetría sobre los sectores duales b que respeta esta

relación de conmutación es

$$b \rightarrow e^{-\lambda} b. \quad (5.17)$$

Esto da un continuo de b , y la simetría generalizada es necesariamente un grupo \mathbb{R} tanto para A como para B . El grupo \tilde{G} es un grupo \mathbb{R}^+ no compacto. Este es el caso, por ejemplo, de los sectores HDV asociados al álgebra de las derivadas de un campo escalar libre sin masa para $d \geq 3$ bajo la acción del grupo de dilatación. Estudiaremos este ejemplo en la sección 5.3.1. De forma general, cuando los sectores de R forman una variedad continua no compacta (o alguna parte de ella es continua no compacta) llamaremos a la simetría generalizada no compacta. En este caso ocurre lo mismo con las clases duales. Esperamos encontrar teorías libres cuando hay sectores no compactos, en particular, en el capítulo 6, demostraremos que este es el caso cuando estas clases no compactas estén generadas por campos de forma.

Analicemos a continuación el caso de clases HDV formadas por un grupo abeliano A con elementos etiquetados $a = (a_1, a_2)$, donde la fusión es aditiva en esta parametrización vectorial. Las coordenadas pueden formar un grupo \mathbb{Z} , \mathbb{R} , o $U(1)$. El grupo dual B tiene elementos $b = (b_1, b_2)$, con fusión aditiva. Las relaciones de conmutación pueden escribirse

$$a b = b a e^{ia \cdot b}. \quad (5.18)$$

Para respetar estas reglas de fusión y relaciones de conmutación necesitamos una acción de la simetría de la forma

$$a \rightarrow M(\lambda) a, \quad b \rightarrow (M(\lambda)^T)^{-1} b, \quad (5.19)$$

donde $M(\lambda)$ es un grupo uniparamétrico de matrices reales bidimensionales.

- (a) El caso $A = U(1) \times U(1)$, que produce $B = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, o viceversa, no puede contener la acción de una simetría continua. La razón es la discretización de uno de los sectores duales. Ambos sectores duales tienen que contener partes continuas para que sea posible una acción no trivial.
- (b) Para el caso $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que tiene $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el grupo puede ser cualquier subgrupo uniparamétrico de $GL(2, \mathbb{R})$. Esto incluye, por ejemplo, dilataciones como la discutida anteriormente, y una rotación. En este último caso, el grupo de simetría es $U(1)$. Un ejemplo de rotación de clases HDV viene dado por la simetría de rotación entre dos campos de Maxwell independientes, o la dualidad electromagnética del campo libre de Maxwell en $D = 4$. Veremos estos ejemplos en las secciones 5.3.2 y 5.3.3 respectivamente. Todos estos casos corresponden a simetrías generalizadas no compactas y son libres. Sin embargo, veremos que emergen otros escenarios posibles en el marco de la teoría efectiva de campos,

estos tienen simetrías generalizadas bien definidas a nivel clásico. Estudiaremos las simetrías generalizadas clásicas en el capítulo 6 y discutiremos en detalle un ejemplo concreto, la electrodinámica de piones, en el capítulo 7.

- (c) Si $A = \mathbb{R} \times U(1)$, entonces $B = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Tenemos $a_2 \equiv a_2 + 2\pi$ y $b_2 \in \mathbb{Z}$. La simetría general es una combinación de una dilatación en los sectores duales no compactos \mathbb{R} y la transformación

$$(a_1, a_2) \rightarrow (a_1, a_2 + \lambda a_1), \quad (b_1, b_2) \rightarrow (b_1 - \lambda b_2, b_2). \quad (5.20)$$

No tenemos ejemplos de este tipo, aunque la no compacidad de los sectores implicaría un modelo libre si estuvieran generados por un campo de forma (suponiendo que la parte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la simetría no sea efectiva sino exacta). En ese caso, no parece posible que se pueda realizar esta transformación.

- (d) Por último, tenemos el caso $A = \mathbb{Z} \times U(1)$, con dual $B = U(1) \times \mathbb{Z}$. La única acción posible de \tilde{G} es la dada en (5.20). Posteriormente veremos que este es exactamente el caso de la anomalía quiral para $D = 4$, donde \mathbb{Z} corresponde a TL y $U(1)$ a WL. Discutiremos dicho ejemplo de forma extensa en el capítulo 7. En este ejemplo la estructura de los sectores duales en R y \bar{R} es la misma porque tienen la misma topología.⁵ No sabemos si este tipo de transformación es posible para regiones R y \bar{R} de topología diferente. Si la simetría es una $U(1)$ el rango de las diferentes λ es $\lambda \in [0, 2\pi n]$, siendo n un número entero. Esto se deduce del hecho de que $\lambda = 2\pi n$ tiene que actuar como la identidad en (5.20), y hemos fijado la periodicidad de los sectores no locales de $U(1)$ en 2π .

La simetría continua no trivial implica que tanto R como \bar{R} presentan algunos sectores continuos HDV, pero esto no implica la no compacidad ya que los sectores continuos pueden conmutar entre sí. Esto será claramente evidenciado en el ejemplo de la anomalía quiral en el capítulo 7

5.2. Propiedades de los twists y twists estándar

Vimos en la sección anterior los dos principales resultados importantes de este capítulo: las simetrías generalizadas cargadas bajo una simetría global continua generan un continuo de clases duales, y en tales escenarios el grupo de simetría global no puede ser generado por una corriente de Noether. Con esta información, y la clasificación de los twists en términos de aditividad y completitud, el lector puede saltar con seguridad a las siguientes secciones donde discutimos ejemplos explícitos en la sección

⁵El signo diferente en a_1 y b_2 en la transformación (5.20) puede eliminarse redefiniendo $b_2 \rightarrow -b_2$.

5.3 y generalizaciones del teorema de Weinberg-Witten en la sección 5.4. La presente sección es más técnica que las demás y no es necesaria para comprender los puntos principales del resto del capítulo. No obstante, será importante en relación con una posible clasificación completa de las QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether. También nos permite completar el análisis de la clasificación de los operadores de twist cuando están presentes simetrías generalizadas.

Comenzamos revisando la construcción de los twists estándar utilizando la split property. Esto garantiza la existencia de twists en la mayoría de las teorías de interés físico. Más aún, extenderemos la construcción a casos en los que están presentes simetrías generalizadas. A continuación, estudiaremos los sectores no locales en la buffer zone y la acción de los twists en esta región. Esto nos permite encontrar nuevas condiciones suficientes para tener twists que sean simultáneamente aditivos y completos. Utilizando este análisis obtenemos el resultado principal de esta sección: demostraremos que existen twists aditivos completos cuando las clases no están cargadas y que estos pueden construirse de manera estándar. Esta es la inversa de la afirmación que derivamos en la sección 5.1.2. Terminamos con una discusión sobre la posibilidad de concatenar twists pequeños para producir otros para regiones más grandes.

5.2.1. Twists estándar construidos a partir de la split property

Existe una forma estándar aunque abstracta de construir operadores de twist [146–149]. Esta requiere la split property. Revisaremos la forma original en que se formuló esta construcción, y luego introducimos las variaciones que aparecen cuando, además de la simetría global, la QFT en cuestión posee simetrías generalizadas. A continuación seguiremos la construcción presentada en [149].

Dadas dos álgebras commutativas \mathcal{A} y \mathcal{B} , y un estado $|\Omega\rangle$ cíclico y separador⁶ para $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, la split property afirma la existencia de un factor de tipo I \mathcal{N} tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}'$. Un factor de tipo I⁷ es el álgebra de todos los operadores acotados en algún espacio de Hilbert. Una descripción equivalente de la split property es que las álgebras \mathcal{N} y \mathcal{N}' son las álgebras de los operadores que actúan en cada uno de los dos factores de Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{N}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{N}'}$ asociados a una descomposición del espacio de Hilbert completo

⁶Podemos pensar que un vector $|\Omega\rangle$ perteneciente a un dado espacio de Hilbert \mathcal{H} es cíclico con respecto a un álgebra de von Neumann \mathcal{A} definida sobre el conjunto de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuando $\{O|\Omega\rangle, O \in \mathcal{A}\}$ es denso en \mathcal{H} . Por otro lado, $|\Omega\rangle$ es separador con respecto a \mathcal{A} cuando el cero es el único operador perteneciente a \mathcal{A} que aniquila $|\Omega\rangle$.

⁷En QFT, es esperable que álgebras asociadas a regiones sin buffer zone sean de tipo III. Estas álgebras exhiben entrelazamiento infinito de manera que es de esperar que el espacio de Hilbert no factorize para las álgebras de una región y su complemento causal. Las álgebras de tipo I, en cambio, muestran entrelazamiento finito. Intuitivamente, esto permite la factorización del espacio de Hilbert global para estas álgebras. Sin embargo, perdemos la interpretación geométrica aguda sin smearing sobre la buffer zone. Véase [73].

como producto tensorial de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{N}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{N}'} . \quad (5.21)$$

Las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} se incluyen entonces en las álgebras de operadores que actúan a cada lado de este producto tensorial.

Esperamos que la split property asociada a las álgebras de regiones espacialmente separadas se mantenga con gran generalidad en QFT. Esta, se deduce simplemente de dos premisas básicas [159, 160]. La primera es que las traslaciones temporales de una de las álgebras para cualquier tiempo en algún intervalo no vacío $(-t_0, t_0)$ aún comutan con la otra álgebra. En una QFT local relativista, esto se garantiza por la existencia de la buffer zone Z entre las dos regiones espacialmente separadas. Véase la figura 5.1. La segunda es una condición UV que requiere que el número de grados de libertad a altas energías no aumente demasiado rápido. En términos físicos más concretos, esto implica que la energía libre local aumente como máximo con una ley de potencias en la temperatura. Esta condición solamente garantiza propiedades termodinámicas normales a todas las temperaturas (por ejemplo implica que en nuestra teoría no encontraremos una temperatura máxima de Hagedorn). Por lo tanto, en el contexto de esta tesis, supondremos que se cumple la split property para en cualquier teoría y cualquier región definida sobre cualquier espacio. Solamente, en el apéndice A estudiaremos la teoría de Generalized Free Fields la cual viola la primera de las condiciones presentadas para algunas elecciones de álgebras.

El factor de split \mathcal{N} con el que definimos la split property es altamente no único. Sin embargo, hay una construcción general por Doplicher y Longo para un split estándar. Comienza con un estado $|\Omega\rangle$ que es cíclico y separador para $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, y la conjugación modular inducida por $J \equiv J_{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ con respecto a dicha álgebra. En QFT es natural utilizar el estado de vacío. Tenemos permitido construir explícitamente el factor de split estándar como

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} \vee (J \mathcal{A} J) , \quad \mathcal{N}' = \mathcal{B} \vee (J \mathcal{B} J) . \quad (5.22)$$

Una buena característica a favor de esta construcción es que \mathcal{N} sólo depende del vacío y de las álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} .

Una vez que tenemos un split, podemos elegir un vector construido a partir del producto tensorial $|\eta\rangle = |\Omega\rangle_{\mathcal{N}} \otimes |\Omega\rangle_{\mathcal{N}'}$ tal que el estado inducido por $|\eta\rangle$ en \mathcal{A} y \mathcal{B} coincide con el estado producto inducido por $|\Omega\rangle$ sobre dichas álgebras. En otras palabras, $|\eta\rangle$ es una purificación del estado de vacío en cada álgebra dentro de los factores de tipo I correspondientes. Observamos que este estado no tiene correlaciones entre las álgebras, en contraste con $|\Omega\rangle$. Además, el vector $|\eta\rangle$ es único si lo elegimos en

el cono estándar \mathcal{P} .⁸ Más concretamente, tenemos que existe una isometría invertible $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que

$$W A B |\eta\rangle = A |\Omega\rangle \otimes B |\Omega\rangle, \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \quad (5.23)$$

$$W A W^* = A \otimes 1, \quad W B W^* = 1 \otimes B, \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}. \quad (5.24)$$

Este mapeo lleva los factores de tipo I dados por \mathcal{N} y \mathcal{N}' a las álgebras de operadores de los dos espacios de Hilbert. Asimismo, obtenemos que

$$J |\eta\rangle = |\eta\rangle, \quad W J W^* = J_{\mathcal{A}} \otimes J_{\mathcal{B}}. \quad (5.25)$$

Esta estructura hace transparente la construcción estándar de los twists. Sólo tenemos que utilizar la construcción anterior con las asociaciones

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}(R), \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(\bar{R}), \quad (5.26)$$

tal que $\mathcal{A}(R) \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{A}(\bar{R}) \subset \mathcal{N}'$. Para cualquier operador unitario $U(g)$ actuando en el espacio de Hilbert global, siguiendo [149], definimos

$$\tau_g(R, Z) = W^* (U(g) \otimes 1) W \quad (5.27)$$

que actúa no trivialmente sólo sobre el factor \mathcal{N} y por tanto commuta con $\mathcal{A}(\bar{R})$. Además, si $U(g)$ lleva un elemento A de $\mathcal{A}(R)$ a otro elemento \tilde{A} de $\mathcal{A}(R)$ es directo que $\tau_g(R, Z)$ tendrá la misma acción sobre A . Entonces, $\tau_g(R, Z)$ puede generar un twist tanto para las simetrías internas como para las simetrías espacio-temporales. Además, a partir de su definición, los twists $\tau_g(R, Z)$ nos proporcionan una representación del grupo

$$\tau_g \tau_h = \tau_{gh}. \quad (5.28)$$

Estas relaciones de producto de grupo no son necesarias para que el twist efectúe las operaciones de grupo localmente. De hecho, típicamente no se mantienen para un smearing más general del twist en la buffer zone Z . Por ejemplo, para los twists que surgen al hacer el smearing convencional de las corrientes de Noether (5.14).

Para una simetría interna no rota, los twists estándar pueden entenderse como las restricciones de $U(g)$ a los dos factores de tipo I que commutan. Es decir, tenemos que

$$U(g) = \tau_g^{\mathcal{N}} \otimes \tau_g^{\mathcal{N}'} = \tau_g(R, Z) \tau_g(\bar{R}, Z). \quad (5.29)$$

Entonces podemos ver que los twists estándar tienen la noción de complementariedad

⁸El cono estándar se define como el conjunto de vectores $O J O |\Omega\rangle$ con $O \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Vease [27] para una presentación completa.

asociada. Otro un resultado muy conveniente de esta construcción específica, que nos sera útil más adelante, es que los twists estándar para simetrías internas se transforman de forma covariante, es decir

$$U(g) \tau_h(R, Z) U(g)^{-1} = \tau_{ghg^{-1}}(R, Z). \quad (5.30)$$

En el caso de simetrías globales espontáneamente rotas, no tenemos un $U(g)$ que implemente las transformaciones de simetría y este adecuadamente definido globalmente. Sin embargo, dada cualquier región compacta R , siempre nos es posible construir un operador unitario $U_R(g)$ en el espacio de Hilbert global que implementa la simetría en R , véase [39]. Si utilizamos este operador unitario, la misma construcción anterior proporciona un twist $\tau_g(R, Z)$ para $\mathcal{A}(R)$ en tal caso. Dicho de otra forma, la falta del $U(g)$ global no interfiere con nuestra investigación actual, ya que podemos describir las simetrías generalizadas dentro de regiones contenidas en una bola y sus complementos relativos dentro de la misma bola. Podemos definir un espacio de Hilbert y un factor de tipo I para la bola separada del resto del espacio, y se puede restringir la atención a la física dentro de dicha álgebra. La única diferencia restante con el caso de simetría no rota es que el estado del vacío no es invariante bajo el grupo. No obstante, como no estamos interesados en el estado sino en las simetrías de las álgebras, esto se puede manejar promediando las transformaciones del grupo sobre estado del vacío en una bola y tomando una purificación dentro de la bola que separamos.

Ahora pasamos al caso en que la QFT muestra simetrías generalizadas que producen clases HDV asociadas a ciertas regiones R . En estas QFT podemos considerar más de una álgebra para la misma R , por ejemplo $\mathcal{A}(R)$ o $\mathcal{A}_{\max}(R)$. Entonces, en lugar de empezar la construcción de Buchholz-Doplicher-Longo con las álgebras conmutativas $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}(\bar{R})$, podemos tomar las álgebras también conmutativas $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}_{\max}(\bar{R})$. Para esta elección, por las mismas razones descritas anteriormente, podemos realizar el split requerido. De esta manera, podemos construir los twists estándar procediendo de forma análoga. Es inmediato que estos twists son completos para \bar{R} y por tanto aditivos para R . Por otro lado, si partimos de un split estándar entre $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y $\mathcal{A}(\bar{R})$, dicho twist estándar será completo para R y aditivo para \bar{R} .⁹

Aquí terminamos con la revisión de la construcción algebraica desarrollada en [146–149], y su extensión para incluir simetrías generalizadas. La conclusión es que, dada la split property en QFT, se pueden hallar los twists locales $\tau_g(R, Z)$ para cualquier región R , y buffer zone Z . Éstas son las versiones locales de los operadores de simetría global $U(g)$. Esto nos demuestra la versión débil del teorema de Noether. Además, esta construcción se aplica también al caso de simetrías discretas. Sin embargo, como se

⁹Una expectativa natural para los twist estándar que surgen de $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}(\bar{R})$ es que en general no son necesariamente completos ni aditivos.

subraya en [149], la derivación de una corriente conservada a partir de la existencia de twists no es necesariamente cierta para simetrías continuas. De hecho, en la sección 5.3, revisaremos una variedad de ejemplos sencillos que nos mostrarán que esto no siempre es posible, y que la versión fuerte del teorema de Noether no siempre es válida. Más precisamente, tal como se discutió anteriormente, cuando tenemos simetrías generalizadas, existe una diferencia importante en la naturaleza de los twists estándar con respecto a las que surgen a través de una posible corriente de Noether. En particular, mientras que los twists estándar pueden construirse generalmente, los twists aditivos y completos no pueden construirse cuando la simetría generalizada está cargada bajo la simetría global, prohibiendo la existencia de una corriente de Noether.

5.2.2. Estructura de los operadores no locales en la buffer zone

Analizaremos ahora las clases no locales que pueden aparecer en la buffer zone Z . Son las clases HDV de $\mathcal{A}_{\max}(Z)$. En primer lugar, destacamos que una clase no local en $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ puede corresponder a operadores que son aditivos en $R \cup Z$. En este caso, el operador claramente pertenece a

$$\mathcal{A}^R(Z) = \mathcal{A}(R \cup Z) \cap \mathcal{A}(R)' . \quad (5.31)$$

Análogamente, si el operador no local es aditivo en $\bar{R} \cup Z$ vemos que pertenece a

$$\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z) = \mathcal{A}(\bar{R} \cup Z) \cap \mathcal{A}(\bar{R})' . \quad (5.32)$$

Podemos comprobar fácilmente que tanto $\mathcal{A}^R(Z)$ como $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$ están contenidos en $\mathcal{A}_{\max}(Z)$. La razón es que comutan con $\mathcal{A}(R) \vee \mathcal{A}(\bar{R})$. Esto implica que

$$\mathcal{A}^R(Z) \vee \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z) \subseteq \mathcal{A}_{\max}(Z) . \quad (5.33)$$

Sin embargo, también podemos estudiar la inclusión opuesta, es decir, $\mathcal{A}_{\max}(Z) \subseteq \mathcal{A}^R(Z) \vee \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$. Si tomamos comutantes vemos que es equivalente a

$$(\mathcal{A}_{\max}(R) \vee \mathcal{A}(\bar{R})) \cap (\mathcal{A}_{\max}(\bar{R}) \vee \mathcal{A}(R)) \subseteq \mathcal{A}(R) \vee \mathcal{A}(\bar{R}) . \quad (5.34)$$

Esto se deduce expandiendo en operadores no locales las dos álgebras intersecadas del lado izquierdo y usando que $\mathcal{A}_{\max}(R) \cap \mathcal{A}_{\max}(\bar{R}) = \{\mathbb{1}\}$. Por tanto tenemos que

$$\mathcal{A}_{\max}(Z) = \mathcal{A}^R(Z) \vee \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z) . \quad (5.35)$$

Entonces, los operadores no locales de Z están generados por los que son aditivos en $R \cup Z$ y los que son aditivos en $\bar{R} \cup Z$. Llamaremos genéricamente a estos operadores no

locales c y \bar{c} respectivamente. Si nombramos a a los operadores no locales en $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y b a los de $\mathcal{A}_{\max}(\bar{R})$, tenemos que $[a, \bar{c}] = [b, c] = 0$. Puesto que

$$\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z) = \mathcal{A}^R(Z) \cap \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z) = \mathcal{A}(R \cup Z) \cap \mathcal{A}(\bar{R} \cup Z), \quad (5.36)$$

puede contener operadores no locales de Z , y algunos de los operadores no locales en Z pueden ser aditivos en ambos lados.

Las clases c, \bar{c} comutan porque siempre podemos dividir Z en dos partes, una contigua a R y otra contigua a \bar{R} , y elegir representantes de cada uno de los dos tipos de clases localizados en cada una de las partes, y por lo tanto aditivos en regiones complementarias. Entonces, para un operador genérico en $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ tenemos la expansión

$$\sum_{\lambda\beta s} O_{\lambda\beta s} c_\lambda \bar{c}_\beta \tilde{O}_{\lambda\beta s}, \quad (5.37)$$

para $O_{\lambda\beta s}, \tilde{O}_{\lambda\beta s}$ operadores locales en Z , es decir, pertenecientes a $\mathcal{A}(Z)$. Las clases c y \bar{c} son por definición clases no locales en $\mathcal{A}_{\max}(Z)$. Sin embargo, un operador $c\bar{c}$ puede ser descompuesto en varias clases de $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ por la acción de operadores locales en Z , de modo que $c\bar{c}$ podría no representar una única clase irreducible.

Observamos que no hemos utilizado que la buffer zone es delgada. Este resultado es completamente general y de naturaleza topológica: si R y \bar{R} son regiones disjuntas, las clases no locales de $Z = (R \cup \bar{R})'$ están generadas por productos de clases aditivas en $R \cup Z$ y clases aditivas en $\bar{R} \cup Z$. Además, tenemos la expansión general (5.37) para el álgebra máxima de Z .

5.2.3. Twists verdaderamente aditivos

Por las definiciones (5.31-5.32) y (5.36), cualquier elemento global de grupo $U(g)$ deja invariantes las álgebras $\mathcal{A}_{\max}(Z)$, $\mathcal{A}^R(Z)$, $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$, $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$, y $\mathcal{A}(Z)$.¹⁰ Mezclará las clases HDV no locales de las álgebras anteriores entre sí cuando estas están cargadas. Sin embargo, un twist genérico definido para R sólo deja $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ invariante. Si el twist fuese aditivo, es decir $\tau_g(R, Z) \in \mathcal{A}(R \cup Z)$, también dejaría invariante $\mathcal{A}^R(Z)$. En cambio, si el twist fuese completo dejaría invariante $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$, la razón es que el twist complementario es aditivo y el grupo de simetría global deja las álgebras invariantes. Por último, si el twist fuese aditivo y completo, además dejaría $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ invariante.

La inversa de estas afirmaciones no es cierta en general. Pero es cierto que si tenemos un twist aditivo que deja $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ invariante podemos construir otro twist que sea completo y aditivo. Llamaremos a un twist aditivo que mantiene $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ en sí

¹⁰Para comprobarlo recordamos que la conjugación con un unitario mapea álgebras que comutan a álgebras que comutan

misma “verdaderamente aditivo”. Los twists aditivos y completos son verdaderamente aditivos. A continuación (en esta sección y la siguiente) mostraremos que las clases son invariantes si y sólo si hay un twist aditivo y completo, y que la misma afirmación es cierta para los twists verdaderamente aditivos. A la inversa, si las clases están cargadas, no es posible tener un twist aditivo que mantenga $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ en sí misma.

Para probar esto tomemos un twist verdaderamente aditivo $\tau_g(R, Z)$ y un twist aditivo $\tau_g(\bar{R}, Z)$. Si utilizamos también la transformación de simetría global, podemos definir el siguiente unitario

$$z = U(g)^{-1} \tau_g(R, Z) \tau_g(\bar{R}, Z) \in \mathcal{A}_{\max}(Z). \quad (5.38)$$

Donde vemos que $O z = z \bar{C}$ para cualquier $O \in \mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ y algún $\bar{C} \in \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$. De aquí, podemos deducir que

$$\sum_{\lambda} O_{\lambda} z \tilde{O}_{\lambda} = z \bar{C}, \quad (5.39)$$

para cualquier $O_{\lambda}, \tilde{O}_{\lambda} \in \mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ y algún $\bar{C} \in \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$. Expandiendo z en elementos $c\bar{c}$ como en (5.37), podemos elegir cualquiera de estos elementos actuando a izquierda y derecha con elementos $O \in \mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ (como en el lado izquierdo de (5.39)). Por tanto, obtenemos

$$C \bar{C}' = z \bar{C}. \quad (5.40)$$

En términos de las clases de $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ con respecto a la acción de $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$, esta ecuación nos implica que sólo puede haber una única clase C en la expansión de z . Como z es unitario, la clase c debe ser abeliana, cc^* es la clase identidad (aquí $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$), y podemos tomar un representante unitario C . Entonces, podemos poner todos los elementos del álgebra $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$ en la expansión de z del mismo lado, y obtenemos

$$z = C \bar{C}, \quad (5.41)$$

con \bar{C} unitario en $\mathcal{A}^{\bar{R}}(Z)$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= C^{-1} U(g)^{-1} \tau_g(R, Z) \tau_g(\bar{R}, Z) \bar{C}^{-1} \\ &= U(g)^{-1} ((C')^{-1} \tau_g(R, Z)) (\tau_g(\bar{R}, Z) \bar{C}^{-1}) \\ &\equiv U(g)^{-1} \tilde{\tau}_g(R, Z) \tilde{\tau}_g(\bar{R}, Z), \end{aligned} \quad (5.42)$$

con $(C')^{-1} \in \mathcal{A}^R(Z)$. Por lo tanto, (5.42) muestra dos twists aditivos complementarios $\tilde{\tau}_g(R, Z)$ y $\tilde{\tau}_g(\bar{R}, Z)$ que son simultáneamente aditivos y completos.

Vemos que los twists verdaderamente aditivos, y en particular los twists aditivos y completos, no sólo dejan invariante $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ sino también el álgebra aditiva $\mathcal{A}(Z)$ y de hecho todas las clases de $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$. Más aún, tenemos que cualquier twist que

deje invariante $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ lo hará. La razón es que las clases de $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ con respecto a $\mathcal{A}(Z)$ son duales de las clases de $\mathcal{A}_{\max}(R \cup \bar{R})$ con respecto a $\mathcal{A}_{\max}(R) \vee \mathcal{A}_{\max}(\bar{R})$. Estos operadores duales son no locales en $R \cup \bar{R}$ y sus clases no pueden ser cambiadas por operadores no locales en R o en \bar{R} . Luego, por transportabilidad, los twists no pueden cambiar estas clases. Por lo tanto, el twist tampoco puede cambiar las clases de $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$.

5.2.4. Existencia de twists aditivos y completos

En la sección 5.1.2 demostramos que la existencia de twists aditivos completos implica que las clases HDV no locales no están cargadas. Ahora, demostraremos lo contrario, si las clases HDV no están cargadas, existen twists completos y aditivos. La prueba que presentaremos es válida para simetrías globales internas. De hecho, demostramos que los twists estándar son, al menos, verdaderamente aditivos. Utilizando los resultados de la sección anterior, esto implica que siempre podemos construir twists aditivos y completos modificando ligeramente los estándar.

Tomemos un twist estándar aditivo $\tau_g(R, Z)$ construido con la split property. El twist complementario ,

$$\tau_g(\bar{R}, Z) = \tau_g(R, Z) U(g)^{-1}, \quad (5.43)$$

da una representación del grupo. En lo que sigue, sólo necesitaremos considerar un subgrupo abeliano de G generado por un único elemento g . Más específicamente, el subgrupo $G_g = g^n$, con n un número entero.

El twist $\tau_g(\bar{R}, Z)$ deja invariantes los elementos de $\mathcal{A}(R)$. Como $U(g)$ deja invariante $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y $\tau_g(R, Z)$ actúa sólo en el factor de split \mathcal{N} , el twist complementario $\tau_g(\bar{R}, Z)$ transforma un operador no local $a \in \mathcal{A}_{\max}(R)$ en un operador no local \tilde{a} contenido en

$$\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \vee \{a\} = \mathcal{N} \vee \mathcal{A}_{\max}(R). \quad (5.44)$$

Nótese que $\mathcal{N} = \mathcal{A}(R) \vee J \mathcal{A}(R) J$ y $J \mathcal{A}(R) J$ conmuta con $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}_{\max}(\bar{R})$, y por tanto tenemos que $J \mathcal{A}(R) J \subset \mathcal{A}^R(Z)$. Luego, $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}(R \cup Z)$. También, deducimos que $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{N})$ tiene las mismas clases a que $\mathcal{A}_{\max}(R)$ y que conmuta con $\mathcal{A}(\bar{R})$. Entonces, podemos pensar $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{N})$ como el álgebra máxima asociada al factor \mathcal{N} .

Ahora consideraremos que las clases de R no están cargadas bajo la acción de G . Por lo tanto, vemos que no están cargadas bajo el subgrupo abeliano G_g . Entonces, el twist $\tau_g(\bar{R}, Z)$ deja invariantes las clases de $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{N})$ porque $U(g)$ lo hace, y porque $\tau_g(R, Z)$ es aditivo y por ende no puede cambiar clases no locales. Si tomamos la acción de G_g sobre un operador no local a perteneciente a R (mediante conjugación) podemos

proyectar en representaciones irreducibles tales que

$$\tau_g(\bar{R}, Z) a_p \tau_g(\bar{R}, Z)^{-1} = e^{i\phi} a_p . \quad (5.45)$$

Este a_p pertenece a la misma clase que a . Como $\tau_g(\bar{R}, Z)$ deja invariante de punto a los elementos de \mathcal{N} , y los elementos de la clase $[a]$ en $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{N})$ están generados por a_p y \mathcal{N} , vemos que necesariamente todos los elementos de $[a]$ se transforman con el misma fase. Entonces, de hecho sólo hay una representación irreducible en la descomposición de a sobre representaciones irreducibles de G_g . En el caso de un grupo no compacto G_g tendríamos que haber tomado a_p proyectado a un intervalo de factores de fase, pero el intervalo puede ser tan pequeño como queramos. Al final el resultado es el mismo y sólo intervienen una única fase y representacion.

Por tanto, de la expresión (5.43) hemos aprendido que la acción de $U(g)$ y el twist aditivo $\tau_g(R, Z)$ sobre el elemento no local $a \in \mathcal{A}_{\max}(R)$ difieren (como mucho) en una fase. En términos de cargas en un grupo continuo, esto significa que los comutadores de la carga global Q y la carga aditiva local Q_R^{add} con a difieren (como máximo) en un término proporcional a a ,

$$[Q, a] = [Q_R^{\text{add}}, a] + \phi' a . \quad (5.46)$$

Ahora tomemos un twist estándar aditivo $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ para R y un twist estándar completo $\tau_g^{\text{com}}(R, Z)$ para R . Recordamos que estos dos siempre se pueden encontrar eligiendo adecuadamente un split para las álgebras. Luego, calculamos

$$z = \tau_g^{\text{com}}(R, Z)^{-1} \tau_g^{\text{add}}(R, Z) . \quad (5.47)$$

Este elemento pertenece a $\mathcal{A}_{\max}(Z)$ porque conmuta, por construcción, tanto con $\mathcal{A}(R)$ como con $\mathcal{A}(\bar{R})$. Actúa sobre un elemento a de $\mathcal{A}_{\max}(R)$ introduciendo una fase ya que $\tau_g^{\text{com}}(R, Z)$ actúa como el grupo global. El punto importante es que no lleva a el operador a fuera de $\mathcal{A}_{\max}(R)$ hacia la buffer zone. También, podemos escribir el unitario z si utilizamos una expresión análoga a (5.47) en términos de los twists complementarios, es decir, los aditivos y completos para \bar{R} . Más concretamente,

$$\begin{aligned} z &= \tau_g^{\text{com}}(R, Z)^{-1} \tau_g^{\text{add}}(R, Z) \\ &= (U(g)^{-1} \tau_g^{\text{add}}(\bar{R}, Z))^{-1} (U(g)^{-1} \tau_g^{\text{com}}(\bar{R}, Z)) \\ &= \tau_g^{\text{add}}(\bar{R}, Z)^{-1} \tau_g^{\text{com}}(\bar{R}, Z) . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Por lo tanto, también vemos que transforma elementos b cambiando una fase. Consideremos ahora un elemento O de $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$. Recordemos que

$$\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z) = \mathcal{A}^R(Z) \cap \mathcal{A}^{\bar{R}}(Z) = \mathcal{A}(R \cup Z) \cap \mathcal{A}(\bar{R} \cup Z) , \quad (5.49)$$

Por tanto si O pertenece a $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ conmuta con los operadores no locales a y b a ambos lados. Además, como O conmuta con a, b también deducimos que

$$zOz^* \quad (5.50)$$

conmuta con a, b . Concluimos que

$$zOz^* \in \mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z). \quad (5.51)$$

Usaremos ahora esta información para demostrar que $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ es verdaderamente aditivo. Escribiendo

$$z = \tau_g^{\text{add}}(\bar{R}, Z) U(g)^{-1} \tau_g^{\text{add}}(R, Z), \quad (5.52)$$

vemos que la acción de z sobre O está compuesta por la acción de tres operadores. El twist $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ podría llevarnos de O a un operador con una clase exclusiva de $\mathcal{A}^R(Z)$, es decir, una clase no aditiva en $\bar{R} \cup Z$. Esto es así porque $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ es aditivo en $R \cup Z$. El elemento de grupo global $U(g)$ no cambiará esta clase. El operador de twist aditivo en el complemento $\tau_g^{\text{add}}(\bar{R}, Z)$ no puede cambiar una clase exclusiva en $\mathcal{A}^R(Z)$ porque es aditivo en $\bar{R} \cup Z$. Por lo tanto, la única forma de que z deje $\mathcal{A}^{R\bar{R}}(Z)$ en sí misma, satisfaciendo (5.52), es que $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ también deje esta álgebra invariante. Por tanto, el twist estándar aditivo original $\tau_g^{\text{add}}(R, Z)$ es en realidad un twist verdaderamente aditivo. Puesto que los twists verdaderamente aditivos pueden convertirse en twists aditivos y completos, como mostramos en la sección 5.2.3, esto completa la prueba de la existencia de twists aditivos y completos cuando las clases no están cargadas bajo la acción de la simetría global.

Resumiendo, si las clases no locales de una región R son invariantes bajo la simetría, existen twists aditivos y completos para R . Además, estos pueden construirse de manera estándar. Esto implica que el twist complementario también es aditivo y completo. Por lo tanto las clases de \bar{R} son invariantes. Y sabemos que las clases duales están ambas cargadas o ninguna lo está.

Para las simetrías espacio-temporales continuas los twists aditivos y completos de las regiones complementarias no pueden ser complementarios (aunque las cargas puedan sumarse a la global). Pero el principal obstáculo para la generalización de la presente demostración es que necesitamos un twist completo para $\mathcal{A}_{\max}(R)$ que tenga la misma acción que el twist aditivo en \mathcal{N} . Sería interesante seguir estudiando este problema.

5.2.5. Concatenación de twists y twists aditivos concatenables

Consideremos regiones no intersecantes A y B tales que Z_A es una buffer zone para A y Z_B es una buffer zone para B . Suponemos que $Z_B \cap A = Z_A \cap B = \emptyset$.

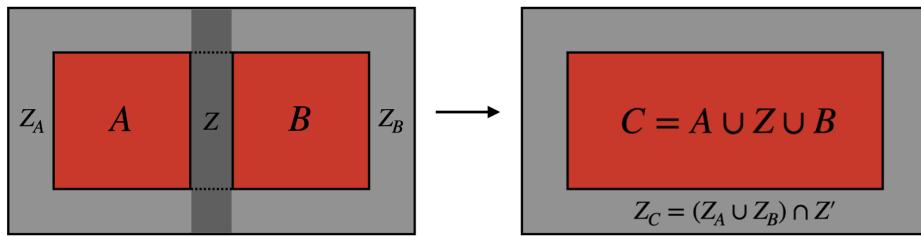


Figura 5.3: Configuraciones geométricas apropiadas para la definición de concatenabilidad asociada a operadores de twist. El lado izquierdo representa la existencia de operadores de twist $\tau_g(A, Z_A)$ y $\tau_g(B, Z_B)$. En el lado derecho representamos la existencia de un operador de twist $\tau_g(C, Z_C)$ para $C = A \cup B \cup Z$ y $Z = (Z_A \cup Z_B) \cap Z'$. Decimos que $\tau_g(A, Z_A)$ y $\tau_g(B, Z_B)$ son “concatenables” si $\tau_g(AZB, Z_A \cup Z_B)$ puede obtenerse como el producto de $\tau_g(A, Z_A)$ y $\tau_g(B, Z_B)$.

Representamos esquemáticamente esta configuración geométrica en la parte izquierda de la figura (5.3). En este escenario, decimos que los twists $\tau_g(A, Z_A)$ y $\tau_g(B, Z_B)$ “concatenan” en la región $A \cup B \cup Z$, si el producto de los dos produce un twist para $A \cup B \cup Z$ con buffer zone $(Z_A \cup Z_B) \cap Z'$. Más concretamente,

$$\tau_g(A, Z_A) \tau_g(B, Z_B) = \tau_g(C, Z_C), \quad C = A \cup B \cup Z, \quad Z_C = (Z_A \cup Z_B) \cap Z'. \quad (5.53)$$

Esto se representa en la parte derecha de la figura (5.3). En este sentido, decimos que los twists complementarios concatenan al operador de simetría global.

Si tenemos dos twists aditivos $\tau_g(A, Z_A), \tau_g(B, Z_B)$ que concatenan a un twist completo $\tau_g(C, Z_C)$, es inmediato que los tres twists son simultáneamente completos y aditivos. Veamos, en primer lugar, el twist $\tau_g(C, Z_C)$ también es aditivo porque es el producto de operadores aditivos en $C \cup Z_C$. Ahora escribiendo

$$\tau_g(A, Z_A) = \tau_g(C, Z_C) \tau_g(B, Z_B)^{-1}, \quad (5.54)$$

Tenemos que el twist $\tau_g(A, Z_A)$ es completo ya que $\tau_g(C, Z_C)$ implementa operaciones de grupo en $\mathcal{A}_{\max}(A) \subseteq \mathcal{A}_{\max}(C)$, pero $\tau_g(B, Z_B)^{-1}$, al ser aditivo, commuta con $\mathcal{A}_{\max}(A)$. Análogamente, vemos que el twist $\tau_g(B, Z_B)$ es necesariamente completo.

Por lo tanto, en esta situación ninguna de las clases no locales de A, B, C puede cargarse bajo la simetría global. Un caso particularmente útil es cuando C no tiene clases no locales, lo que implica que $\tau_g(C, Z_C)$ es automáticamente completo. Este caso aparece naturalmente cuando C es el espacio completo o una región con la topología de una bola (Véase la figura 5.4), bajo el supuesto de dualidad de Haag.¹¹ En tal escenario, la existencia de twists aditivos para A y B que concatenan a un twist para C implica que los twists aditivos para A y B son también completos, y por tanto las clases para A y B son no pueden estar cargadas bajo la acción del grupo.

¹¹Para un orbifold de un grupo de simetría global interna espontáneamente rota hay más de un álgebra posible para regiones con topología de una única bola. Véase la sección 5.3.1 más adelante.

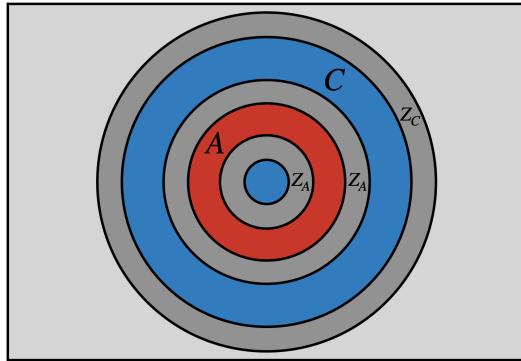


Figura 5.4: Una bola C con su buffer zone Z_C . En su interior tenemos una región A con una buffer zone Z_A . Llamamos B a la región complementaria de A dentro de C . La región C no puede mostrar simetrías generalizadas bajo el supuesto de la dualidad de Haag. Las regiones A y B pueden presentar simetrías generalizadas. Cuando las clases asociadas con la simetría generalizada se cargan bajo el grupo de simetría global vemos que los twists aditivos en A y B no pueden concatenar a twists en C .

De este modo llegamos a una conclusión sencilla pero importante. Cuando las clases no locales asociadas a cierta simetría generalizada están cargadas bajo el grupo de simetría global, los twists aditivos no pueden concatenar a twists en una bola o en el espacio completo.

Para el caso de simetrías continuas, los twists locales $\tau_g(R, Z_R)$ pueden sustituirse por las cargas locales $Q(R, Z_R)$ que generan estos twists por exponenciación. La carga $Q(R, Z_R)$ tiene el mismo conmutador que la carga global para $\mathcal{A}(R)$, y commuta con $\mathcal{A}(\bar{R})$. La noción de concatenabilidad de twists puede expresarse en términos de estas cargas. Muy sencillamente, diremos que las cargas locales $Q(A, Z_A)$ y $Q(B, Z_B)$ en $A \cup Z_A$ y $B \cup Z_B$ ¹² concatenan a la carga $Q(C, Z_C)$ en C si

$$Q(C, Z_C) = Q(A, Z_A) + Q(B, Z_B). \quad (5.55)$$

Cuando C no tiene clases no locales esto implica de nuevo que las clases no locales en A y B no están cargadas si las cargas locales de A y B son aditivas. La razón es que el conmutador de $Q(C, Z_C)$ con un operador no local en $\mathcal{A}_{\max}(A)$ es igual al conmutador de $Q(A, Z_A)$ ya que $Q(B, Z_B)$ es aditivo. Pero como $Q(A, Z_A)$ es aditivo, estos conmutadores no pueden cambiar las clases no locales. Por lo tanto $Q(C, Z_C)$ y la carga global no pueden cambiar las clases en A . Este es el mismo argumento utilizado en la sección 5.1.4 para demostrar la no existencia de corrientes de Noether cuando hay clases cargadas.

¹²Estas cargas son, en realidad, asociadas a las álgebras aditivas, como se mencionó en la sección anterior.

5.2.6. Concatenación arbitraria de twists

En esta sección, consideraremos la generalización de discusión anterior a n regiones A_1, A_2, \dots, A_n levemente separadas permitiendo la existencia de las respectivas buffer zones Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Diremos que los twists $\tau_g(A_1, Z_1), \tau_g(A_2, Z_2), \dots, \tau_g(A_n, Z_n)$ son concatenables para A_1, A_2, \dots, A_n con buffer zones Z_1, Z_2, \dots, Z_n si

$$\tau_g(A_1, Z_1) \tau_g(A_2, Z_2) \dots \tau_g(A_n, Z_n) = U(g). \quad (5.56)$$

En esta definición, también requerimos que $Z_i \cap A_j = \emptyset$ para cada i, j y que Z_i tenga topología contactible a ∂A_i . De otra forma, perderíamos la noción de concatenabilidad de operadores locales dado que los twists estarán típicamente extendidos por toda la buffer zone.

Para construir estos twists nuestro primer impulso sería hacerlo en orden utilizando la split property. Es decir, primero sepáramos A_1 con Z_1 de $\cup_{i=2}^n A_i$ y el resto de álgebras correspondiente a las buffer zones. Más concretamente, empleamos la split property entre A_1 y $(A_1 \cup Z_1)'$. Luego, dentro del espacio de Hilbert correspondiente a $\cup_{i=2}^n A_i$ hacemos el split correspondiente a A_2 y $\cup_{i=3}^n A_i$, etc. Sin embargo, esta construcción no respetará la contractibilidad de las buffer zones. Esto se debe a que, en la mayoría de las geometrías, la buffer zone para A_2 rodeará todo $\cup_{i=3}^n A_i$ después de haber usado la split property sobre A_1 . Entonces, si por ejemplo dividimos un plano con cuadrados el twist típico obtenido empleando dicha partición será totalmente no local en el plano. Análogamente, si hacemos un split entre A_1 y $\cup_{i=2}^n A_i$, y definimos la buffer zone como $\cup_{i=1}^n Z_i$, entonces el twist de A_1 estará repartido por todo el espacio.

Consideramos ahora la posibilidad de elegir una partición del espacio de Hilbert como $\mathcal{H} = \bigotimes_i \mathcal{H}_{\mathcal{N}_i}$ donde los factores de tipo I correspondientes \mathcal{N}_i contienen $\mathcal{A}(A_i)$ y están incluidos en el álgebra $\mathcal{A}(A_i \cup Z_i)$. En tal caso se seguiría una concatenación de twists restringiendo la acción del grupo a cada factor, si los factores se eligen de manera invariantante ante grupo. Sin embargo, tal split general por factores locales de tipo I es imposible en teorías que tienen simetrías generalizadas. Por ejemplo, considérese un split asociado a cuadrados u otras regiones topológicamente triviales. El álgebra $\vee_{i \in I} \mathcal{N}_i$ para cualquier subconjunto de índices I es aditiva en la unión de las regiones correspondientes. El álgebra complementaria $\vee_{i \notin I} \mathcal{N}_i$ también es aditiva. Esto implica que ninguna de estas regiones contiene operadores no locales y que no hay clases no locales. Por el contrario, en una partición arbitraria del espacio por regiones no intersecantes esperamos que las álgebras aditivas correspondientes a estas regiones generen el álgebra completa de operadores (podemos encontrar esta idea en la literatura como aditividad fuerte). Sin embargo, estas álgebras son de tipo III y no están en producto tensorial entre sí debido a que comparten sus bordes.

Entonces, no podemos esperar un split arbitrario por factores de tipo I, al me-

nos cuando están presentes simetrías generalizadas. Sin embargo, queda la cuestión de la concatenación de twists. Para las corrientes de Noether es posible la concatenación arbitraria de cargas, incluso si existen simetrías generalizadas no cargadas. Pero la concatenación arbitraria no es posible con simetrías generalizadas cargadas. De nuevo, pensamos en utilizar una partición por regiones topológicamente triviales. Si $\tau_k, \tau_{k+1} \dots \tau_{q-1}, \tau_q$ cubre una región con clases cargadas, será un twist aditivo para ella. En otras palabras, tenemos que $U(g)(\tau_{q+1} \dots \tau_n)^{-1}$ es completo, y $\tau_1 \dots \tau_{k-1}$ es aditivo. Entonces, como explicamos en la sección anterior, las clases no pueden estar cargadas. Cambiando la ordenación de forma que ninguna subsecuencia contigua cubra una región que tenga clases cargadas, podríamos obtener concatenabilidad. Pero eso significaría que los comutadores del conjunto de twists aditivos pequeños deben producir no localidades grandes. Vemos que cuando concatenamos más de dos twists la cuestión de la comutatividad entre los twists se vuelve importante.

Otra cuestión es si podemos producir twists concatenables cuando tenemos clases no cargadas y que sean twists simultáneamente aditivos y completos. Esperamos que así sea, pero no tenemos ninguna prueba. Un caso particular que vale la pena mencionar es el caso en que las buffer zones Z_i de A_i comparten componentes conectadas entre sí, es decir, $Z_{ij} \equiv Z_i \cap Z_j$ está formado por uniones de componentes conectadas de Z_i, Z_j . En este caso, como cada componente conexa de la frontera divide el espacio en dos regiones disjuntas, podemos definir una partición adecuada, y tenemos que las clases no están cargadas si y sólo si hay twists aditivos y completos τ_{A_i} que comutan y se concatenan.

Supongamos, más en general, que tenemos twists aditivos y completos para A, B , y $C = A \cup B \cup Z$, $Z_C = (Z_A \cup Z_B) \cap Z'$ (Ver figura 5.3). Si escribimos

$$z = \tau_A \tau_B \tau_C^{-1}, \quad (5.57)$$

vemos que el unitario z lleva $\mathcal{A}(Z_A \cup Z_B)$ en sí misma porque cada uno de los twists lo hace. Entonces z pertenece al álgebra aditiva de la unión de buffer zones. Esto no es válido para otro tipo de twists, donde z contiene típicamente operadores no locales de $Z_A \cup Z_B$. Para corregir los twists y lograr la concatenabilidad necesitamos dividir z en un producto de un operador en Z_C , que se absorberá en τ_C , y otro en Z , que se absorberá en τ_A . Esto nos requiere cierta localidad de z . En el límite de anchura pequeña ϵ de la buffer zone esperamos que la escala de no localidad, en la dirección paralela al borde de R , de los factores de split sea del mismo orden que ϵ . En este límite podemos pensar en una delgada pared que separa dos semi-espacios, y que en el UV no existen más escalas para el problema que ϵ . Por lo tanto, un z que no contiene operadores no locales, sería aproximadamente local en el límite de ϵ pequeño y los twists se concatenarían aproximadamente en dicho límite. Por el contrario, si z contiene operadores no locales,

el límite $z \rightarrow 0$ no puede ayudar a la concatenación.

5.3. Ejemplos

En esta sección describimos varios ejemplos de simetrías generalizadas cargadas bajo la acción una simetría global. Los ejemplos incluirán simetrías globales continuas y discretas, transformaciones de dualidad y simetrías espacio-temporales. Construiremos operadores de twist, y mostraremos explícitamente algunas de sus propiedades sutiles que discutimos de forma abstracta anteriormente.

5.3.1. Orbifolds

Dada una teoría \mathcal{F} con un grupo de simetría interno H , podemos producir otra teoría $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$ formada por los operadores invariantes ante dicha simetría. Llamamos a \mathcal{O} teoría del orbifold. Queremos ver cómo la discusión anterior se refleja en este orbifold. El orbifold tiene simetrías generalizadas asociadas con la violación de la dualidad en regiones con la topología de dos bolas si la simetría no está rota o una bola si está rota. En el caso donde no vemos rotura de simetría, los operadores no locales que violan la dualidad en una región R formada por dos bolas $R = B_1 \cup B_2$ son intertwiners

$$I_r = \sum_r \psi_r^i(x_1) (\psi_r^i)^\dagger(x_2) \quad x_1 \in B_1, \quad x_2 \in B_2. \quad (5.58)$$

Estos son operadores de carga / anti-carga localizados en las dos bolas. Más aún, están etiquetados por las representaciones r de H . Por otra parte, los operadores HDV en la región complementaria $R' = (B_1 \cup B_2)'$ son los twists simetrizados de H que actúan sobre una sola de las bolas. Estos surgen si tomamos los twists estándar $\tau_h(B_1, Z)$ para B_1 , definidos en la sección 5.2.1, que están etiquetados por elementos de grupo $h \in H$, y los simetrizamos promediando sobre una clase de conjugación c

$$\tau_c = \sum_{h \in c} \tau_g. \quad (5.59)$$

Entonces, estos twists invariantes nos quedan etiquetados por clases de conjugación c del grupo. En estos casos, el grupo de simetría interna original H actúa trivialmente en la teoría $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$ por definición. Por tanto, actúa trivialmente en cada una de las simetrías generalizadas del orbifold, generadas por los intertwiners I_r y los twists τ_c . De hecho, el propio grupo de simetría H ya no existe en el orbifold, puesto que la operación de grupo global se identifica con la identidad. Un tratamiento más completo de estos escenarios fue desarrollado en [22, 23, 38], véase también el capítulo 2.

Construimos ahora sobre estos ejemplos e introducimos otro grupo de simetría

internala G actuando sobre \mathcal{O} . Tenemos entonces la alternativa de que G deje invariantes o no las clases HDV generadas por los intertwiners I_r y los twists de \mathcal{O} . En particular, si seguimos los resultados de la sección anterior, si existe una corriente de Noether para G , debería darse el primer caso.

Para ver cómo pueden darse las dos situaciones, imaginemos que tenemos un grupo de simetrías G actuando sobre \mathcal{F} tal que $H \subseteq G$ es un subgrupo normal. Entonces, tenemos que $\tilde{G} = G/H$ es un grupo que actúa sobre el orbifold $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$. Si \tilde{G} también es normal en G , o equivalentemente $G = \tilde{G} \times H$, entonces la simetría global restante \tilde{G} del orbifold claramente no interfiere con las clases no locales. Sin embargo, si éste no es el caso, habrá twists de \tilde{G} definidos sobre dos bolas $B_1 \cup B_2$ o sobre la cáscara $S = (B_1 \cup B_2)'$ que actúan de forma no trivial sobre las clases no locales. En este caso, los twists τ_g asociados a \tilde{G} no pueden ser aditivos y completos al mismo tiempo, y los twists aditivos no podrán concatenarse. Si hay corrientes de Noether asociadas a \tilde{G} en la teoría original \mathcal{F} , veremos que estas no pertenecerán a la teoría del orbifold $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$.

Como un ejemplo, tomemos la teoría de dos campos escalares reales (posiblemente interactuantes) ϕ_1, ϕ_2 , con una simetría $H = Z_2 \times Z_2$ actuando como $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$, $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, sumada a una simetría de intercambio $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ entre los dos campos. Entonces, tenemos en la notación anterior

$$G = (Z_2 \times Z_2) \rtimes Z_2 \equiv H \rtimes Z_2 . \quad (5.60)$$

El último Z_2 en el producto semidirecto es el que intercambia los dos campos. Es un subgrupo del grupo de simetría completo, pero no es normal, mientras que H sí es un subgrupo normal. Tomando el cociente $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$ tenemos una teoría de orbifolds con una simetría residual $\tilde{G} = G/H = Z_2$ que intercambia los campos. Luego, tenemos cuatro clases para regiones dadas por la unión de dos bolas B_1, B_2 , a saber

$$\mathbb{1}, \quad I_1, \quad I_2, \quad I_1 I_2 , \quad (5.61)$$

donde $\mathbb{1}$ es la clase identidad y $I_i = \phi_i(x_1) \phi_i(x_2)$ con $i = 1, 2$. Las clases no locales (dadas por los intertwiners) I_1, I_2 , son intercambiadas por \tilde{G} , y por tanto están cargadas bajo la acción de dicho subgrupo. También tenemos cuatro clases asociadas a la región complementaria, que es un cascarón $S = (B_1 \cup B_2)'$. Vemos que estas clases vienen dadas como

$$\mathbb{1}, \quad \tau_{B1}^{H1}, \quad \tau_{B1}^{H2}, \quad \tau_{B1}^{H1} \tau_{B1}^{H2} , \quad (5.62)$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad asociado a la clase identidad, y τ_{B1}^{Hi} con $i = 1, 2$ son los twists, actuando sobre B_1 como el grupo de simetría global H , y no haciendo nada en B_2 . Estos twists están asociados al grupo de orbifold H . Como H es un grupo abeliano,

tales twists pertenecen directamente al orbifold $\mathcal{O} = \mathcal{F}/H$. También, están cargados bajo la acción \tilde{G} , como se mostraremos en un momento.

Construimos ahora el twist localizado de \tilde{G} para una región R . Este debería llamarse $\tau_R^{\tilde{G}}$, pero como lo usaremos repetidamente lo renombraremos como $\tau_R^{\tilde{G}} \rightarrow \tau_R$. Observamos que podemos hacer twists para la transformación $(\phi_1 \rightarrow \phi_2, \phi_2 \rightarrow -\phi_1)$ en la teoría \mathcal{F} original utilizando las relaciones de commutación canónicas. Para simplificar la discusión y no desordenar la notación, omitimos la dependencia de la buffer zone Z , y escribimos los twist de la forma heurística sin incluir el smearing. Esto es,

$$\tau_R = e^{i\frac{\pi}{2} \int_R d^{D-1}x (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1)}. \quad (5.63)$$

Aquí π_1, π_2 son los momentos canónicos. Cambiar el signo del exponente dará $(\phi_1 \rightarrow -\phi_2, \phi_2 \rightarrow \phi_1)$. Tenemos que ver cómo actúan estos twists en la teoría del orbifold \mathcal{O} . Para empezar, estos twists intercambian las dos álgebras de campos neutros en \mathcal{O} ,

$$\tau_R \phi_1(x_1) \phi_1(x_2) = \phi_2(x_1) \phi_2(x_2) \tau_R, \quad \tau_R \phi_2(x_1) \phi_2(x_2) = \phi_1(x_1) \phi_1(x_2) \tau_R, \quad (5.64)$$

para $x_1, x_2 \in R$. En el caso particular en el que $R = B_1 \cup B_2$ es la unión de dos bolas, vemos que este twist intercambia entonces las clases no locales, es decir

$$\tau_R I_1 = I_2 \tau_R. \quad (5.65)$$

Sin embargo, (5.63) no es invariante bajo el cambio de signo independiente para los dos campos. Por lo tanto, no pertenece al orbifold. Para construir el twist de \tilde{G} en el orbifold podemos promediar sobre la acción de H . A continuación, redefinimos el twist (5.63) como ¹³

$$\tau_R = \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{2} \int_R (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1)} + e^{-i\frac{\pi}{2} \int_R (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1)} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \int_R (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) \right). \quad (5.66)$$

Este twist es invariante bajo H . Tiene la commutación correcta (5.64) cuando lo hacemos actuar sobre pares de campos. Más aún, cuando R es una bola, o cualquier región con topología trivial, este operador es aditivo porque su expansión en serie contiene sólo pares de campos de cada tipo en R .

En cambio, para dos bolas $R = B_1 \cup B_2$ tenemos dos opciones. Podemos tomar el producto $\tau_{B_1} \tau_{B_2}$ de twists para bolas simples. Éste es el twist aditivo en las dos bolas por construcción, pero no podrá intercambiar las clases de los intertwiners, es decir, no transforma $I_1 = \phi_1(x_1) \phi_1(x_2)$ a $I_2 = \phi_2(x_1) \phi_2(x_2)$. La razón es que estos intertwiners

¹³Para hacer este operador unitario podemos dividirlo por $\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \int_R (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) \right)}$. Esto comunica con pares de campos en la región.

contienen un solo campo en cada bola. Los twists completos para la simetría de intercambio en las dos bolas tienen la misma expresión (5.66), donde la integral está ahora en $R = B_1 \cup B_2$. Esto es claramente no aditivo en las dos bolas, dado que implica a los propios intertwiners en su construcción. Esto se puede ver expandiendo el coseno en una expansión de Taylor. Además, si tenemos una bola B que contiene $R = B_1 \cup B_2$, entonces los twists aditivos de la forma $\tau_{B_1} \tau_{B_2}$ y τ_{B-R} , no concatenan al twist τ_B . La razón es que τ_B transforma las clases no locales en R , mientras que $\tau_{B_1}, \tau_{B_2}, \tau_{B-R}$ no lo hace. En cambio, los twists originales de la forma (5.63), definidos en la teoría \mathcal{F} , son concatenables.

Consideremos ahora dos bolas anidadas, $B_1 \subset B_2$, y el cascarón $S = B_2 - B_1$. Un twist aditivo τ_S para el cascarón se proporciona de nuevo por la fórmula (5.66) donde $R = S$. Esto no cambia las clases no locales dadas por los twists $\tau_{B_1}^{H1}, \tau_{B_1}^{H2}$ del orbifold con base en S . Un twist completo $\bar{\tau}_S$ viene dado por la construcción complementaria, tomando por ejemplo $\bar{\tau}_S \equiv \tau_{B_2} \tau_{B_1}^{-1}$ donde ambos operadores de la derecha vienen dados por la expresión aditiva (5.66). Como el grupo es \mathbb{Z}_2 podemos sustituir el twist inverso por el propio twist. Esto nos produce un operador

$$\bar{\tau}_S = \tau_{B_2} \tau_{B_1} \sim \tau_S + \cos \left(\frac{\pi}{2} \int_{B_1} (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) + \frac{\pi}{2} \int_{B_2} (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) \right). \quad (5.67)$$

El primer y segundo término del lado derecho tienen la misma commutación (5.64) con operadores locales en S , mientras que ambos términos comutan con operadores locales del orbifold en B_1 . Para el segundo término esto se debe a que el coeficiente total de la integral de la corriente en B_1 es π en lugar de $\pi/2$, produciendo la transformación $\phi_1 \rightarrow -\phi_1, \phi_2 \rightarrow -\phi_2$, que deja a los operadores locales en el orbifold invariantes. Pero esto también muestra que el nuevo operador dado por (5.67) contiene, además del twist aditivo τ_S , los twists no locales del orbifold a través de B_1 , que cambian el signo de los campos allí. Para una bola genérica B , los denominamos τ_B^{H1} y τ_B^{H2} . Estos, cambian el signo de ϕ_1 y ϕ_2 en la bola B .¹⁴ Si $B_1 \subset B \subset B_2$, se nos vuelve evidente que

$$\bar{\tau}_S \tau_B^{H1} = \tau_B^{H2} \bar{\tau}_S. \quad (5.68)$$

Esto dice que el twist $\bar{\tau}_S$ es completo, e intercambia clases no locales. La razón es que para dos bolas B, \tilde{B} tenemos

$$\tau_{\tilde{B}} \tau_B^{H1} = \tau_B^{H2} \tau_{\tilde{B}}, \quad \tau_{\tilde{B}} \tau_B^{H2} = \tau_B^{H1} \tau_{\tilde{B}}, \quad B \subset \tilde{B}, \quad (5.69)$$

$$\tau_{\tilde{B}} \tau_B^{H1} = \tau_B^{H1} \tau_{\tilde{B}}, \quad \tau_{\tilde{B}} \tau_B^{H2} = \tau_B^{H2} \tau_{\tilde{B}}, \quad \tilde{B} \subset B. \quad (5.70)$$

Entonces, dentro de $\bar{\tau}_S = \tau_{B_2} \tau_{B_1}$, el twist τ_{B_2} intercambia los twists del orbifold mientras

¹⁴Pueden escribirse $e^{\pi \int_B \phi_i(x) \pi_i(x)}$.

que τ_{B_1} , al ser un operador local dentro de B , commuta con ellos.

Ahora, veamos otro ejemplo donde el grupo de simetría global G es continuo. Para esto, consideramos el caso de dos campos escalares libres reales sin masa con simetrías $\phi_i \rightarrow \phi_i + \alpha_i$, $i = 1, 2$, y $\tilde{G} \equiv U(1)$ asociado a la rotación entre los campos. El grupo de simetría completo es entonces isomorfo a la simetría euclídea del plano

$$G = E(2) = T(2) \rtimes U(1), \quad (5.71)$$

donde las traslaciones forman el subgrupo normal utilizado para producir un orbifold con $H = T(2)$, y donde el grupo de simetría global residual es

$$\tilde{G} = U(1) = E(2)/T(2). \quad (5.72)$$

En este caso, vemos que el orbifold está generado por las derivadas $\partial\phi_i$. Además, tenemos intertwiners de dos bolas $B_1 \cup B_2$ que podemos escribir de la forma

$$I_{\lambda\beta} = e^{i\lambda(\phi_1(x_1) - \phi_1(x_2))} e^{i\beta(\phi_2(x_1) - \phi_2(x_2))} \quad x_i \in B_i, \quad (5.73)$$

estando etiquetados por dos números reales λ, β . La corriente de Noether de la simetría que rota los campos es

$$J_\mu = \phi_1 \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \phi_1. \quad (5.74)$$

Claramente dicha corriente no es un operador de la teoría del orbifold ya que contiene campos ϕ_i que no están en el álgebra de $\partial\phi_i$. Esto está en consonancia con los resultados genéricos que derivamos en la sección 5.1, a saber, que las etiquetas de los operadores no locales estén cargadas bajo una simetría global continua prohíbe la existencia de la corriente de Noether. En este caso, los twists completos para el resto del $U(1)$, construidos a partir de la construcción estándar usando la split property transforman $I_{\lambda\beta} \rightarrow I_{\beta\lambda}$. Nótese que estos twists pertenecerán al orbifold, mientras que la corriente anterior no.¹⁵

Tenemos que ser un poco más precisos en este ejemplo, distinguiendo los casos de dimensión $D = 2$ de los de $D > 2$. Para $D = 2$ los campos ϕ_i no son campos cuánticos debido a las divergencias infrarrojas, mientras que la teoría del orbifold estando generada por $\partial\phi_i$ sigue teniendo perfecto sentido. La simetría de rotación no tiene corriente de Noether, como ya se hemos mencionado. Esta teoría tiene dos sectores de bolas generados por los intertwiners (5.73).

Para $D > 2$, la simetría de desplazamiento de los campos se rompe espontáneamente. Debido a ello, el álgebra del orbifold generado por $\partial\phi_i$ genera el espacio de Hilbert

¹⁵La falta de la corriente $U(1)$ en el caso de dos dimensiones fue reconocida en [152] utilizando otras técnicas. Aquí vemos el origen físico de la corriente de Noether que falta, y cómo encaja en el zoológico general de QFTs sin corrientes de Noether.

completo de los campos libres completos cuando actúan sobre el vacío. Entonces se puede considerar que la teoría contiene también los escalares y que existe una corriente de Noether. Pero, coherentemente, desde esta perspectiva no encontramos sectores no locales generados por la simetría generalizada asociada a dos bolas, y no hay nada que prohíba la existencia de tal corriente.

Por otra parte, el álgebra del orbifold generada por $\partial\phi_i$ es algebraicamente cerrada. También es cerrada bajo transformaciones de Poincaré. Por tanto, forma una subred. Esta subred producida por el orbifold, además de los sectores de dos bolas debidos a los intertwiners, también tiene sectores no locales asociados bolas individuales. Éstos se deben a los propios campos locales que violan dualidad de Haag para las bolas simples. Más específicamente, vemos que el conmutante del álgebra de la derivada en una región contiene el campo escalar en el complemento, y este escalar constituye un operador no local en el orbifold. Este es siempre el caso para las álgebras del orbifold cuando hay rupturas espontáneas de simetría [161, 162].

En este contexto, vemos que grupo de simetría global \tilde{G} produce una rotación entre operadores no locales para bolas individuales, pero no está generado por una corriente de Noether en el orbifold. Los sectores no locales para una única bola B están asociados a operadores de la forma

$$\psi_{\bar{\alpha}}^i = e^{i \int_B \alpha \phi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (5.75)$$

donde α es una función de smearing con soporte dentro de la bola y $\bar{\alpha} = \int_B \alpha$. La clase no local de ψ^i depende exclusivamente de $\bar{\alpha}$. Esto se debe a que una función de smearing con integral cero nos produce un operador aditivo formado por $\partial\phi_i$. Los operadores duales, naturalmente asociados a la región complementaria, son los twists del orbifold

$$\tau_{\lambda}^{Hi} = e^{i \lambda \int_R \dot{\phi}_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.76)$$

Las relaciones de conmutación entre operadores duales no locales son

$$\tau_{\lambda}^{Hi} \psi_{\bar{\alpha}}^i (\tau_{\lambda}^{Hi})^{-1} = e^{i \lambda \bar{\alpha}} \psi_{\bar{\alpha}}^i. \quad (5.77)$$

El twist para la simetría global \tilde{G} que actúa sobre el orbifold que se obtiene de la corriente (5.74). Específicamente, tenemos que

$$\tau_{\theta} = e^{i \theta \int_B (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1)}. \quad (5.78)$$

Este twist es completo. Es decir, tenemos que rota los sectores no locales. Aunque es un operador aditivo en la teoría \mathcal{F} , claramente no es un operador aditivo de la teoría del orbifold porque contiene los propios campos ϕ_i . Nuevamente, esto es consistente con las lecciones generales de la sección anterior. Para obtener un twist aditivo en el

orbifold escribimos primero

$$\phi_i(x) = \phi_i(x_0) + \int_{x_0}^x dx^\mu \partial_\mu \phi_i \quad (5.79)$$

con x_0 un punto fijo en ∂B . Entonces, reemplazamos

$$\phi_i(x) \rightarrow \int_{x_0}^x dx^\mu \partial_\mu \phi_i \quad (5.80)$$

en la expresión (5.78). Esto rota correctamente $\partial_\mu \phi_i$, y por tanto cualquier operador aditivo en el orbifold, pero no rota las clases no locales. En otras palabras, este twist no es completo. La diferencia entre los twists aditivos y completos es el operador

$$e^{i\theta(\phi_1(x_0)(\int_B \pi_2) - \phi_2(x_0)(\int_B \pi_1))}. \quad (5.81)$$

Este combina operadores no locales del orbifold en B (los campos $\phi_i(x_0)$) con operadores no locales del orbifold definidos sobre el borde de la región¹⁶ ∂B (los generadores de twist $\int_B \pi_i$). Esta es una característica general de los twists completos que hace transparente su no aditividad en la ausencia de una corriente de Noether.

Terminamos esta sección con algunas observaciones. En primer lugar, el álgebra de la derivada de un escalar libre sin masa es también un ejemplo de un modelo que tiene sectores que no son invariantes bajo simetrías conformes. Si hacemos una transformación de escala las etiquetas de clase no pueden permanecer invariantes porque la etiqueta de clase $\bar{\alpha}$ en (5.75) tiene dimensiones $-(D-2)/2$ en energía, mientras que λ en (5.76) tiene dimensión $(D-2)/2$. De hecho, el álgebra orbifold no tiene un tensor energía-momento conforme que permita generar la corriente de escala (para $D > 2$). Si bien se podría hacer un “improving” del tensor energía-momento esto requiere el uso del campo ϕ .

En segundo lugar, podemos construir un ejemplo análogo para producir sectores de bola no invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Tomamos la subálgebra de derivadas del campo libre de Maxwell $\partial_\gamma F_{\mu\nu}$. Los sectores respecto a esta subred vienen dados por operadores cargados $e^{i\int_B \alpha_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$.¹⁷ Los sectores están etiquetados por integrales $\bar{\alpha}_{\mu\nu} = \int_B \alpha_{\mu\nu}$, y no son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. De nuevo, como era de esperar, el tensor de energía-momento no puede escribirse en términos

¹⁶Más precisamente estos twists son no locales en la región complementaria cuando se incluye la buffer zone necesaria para su definición. En este caso, estamos simplificando la discusión tomando la buffer zone pequeña y pensando en estos operadores como si vivieran en el borde de B .

¹⁷En [39] se propuso este modelo como ejemplo de ruptura de simetría espontánea de una simetría continua que da lugar a un bosón de Goldstone no escalar (el fotón en este caso). Sin embargo, usualmente en la literatura de simetrías generalizadas [8, 163] suele entenderse al fotón como el bosón de Goldstone de la simetría 1-forma espontáneamente rota generada por los WL y TL. Sería interesante comprender la relación entre ambos argumentos.

de las derivadas de $F_{\mu\nu}$. En otras palabras, aunque se pueden construir los twists de las simetrías de Lorentz, para ser completos implicarán necesariamente que el tensor energía-momento de la teoría de Maxwell completa, en particular el operador $F_{\mu\nu}$ que representa un operador no local en la bola para el orbifold.

5.3.2. Campos de Maxwell con rotación de sabor

Consideramos ahora un ejemplo en el que las clases HDV no locales de la simetría generalizada están asociadas con la violación de la dualidad en una región tipo anillo. Esto ocurre con dos campos de Maxwell independientes en $D = 4$ dimensiones de espacio-tiempo. Más concretamente, consideramos la acción

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \quad a = 1, 2. \quad (5.82)$$

Tenemos una simetría gauge abeliana asociada a las transformaciones gauge

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \chi^a. \quad (5.83)$$

Además, esta teoría muestra sectores no locales para regiones que contienen lazos no contractibles (regiones tipo anillo). La violación de la dualidad de Haag en tales regiones corresponde al flujo de los campos eléctricos o magnéticos en superficies limitadas por estos lazos. Se trata de una simetría generalizada 1-forma no compacta con grupo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.¹⁸

Por otro lado, esta teoría exhibe una simetría global $U(1)$ correspondiente a la rotación entre los campos gauge. Queremos analizar cómo se manifiesta esta simetría en el álgebra invariante gauge y en el espacio de Hilbert. Inmediatamente vemos que esta manifestación va a ser problemática al notar que las transformaciones infinitesimales del grupo $U(1)$, dadas por $\delta A_\mu^1 = \epsilon A_\mu^2$ y $\delta A_\mu^2 = -\epsilon A_\mu^1$, no son implementadas por una corriente física de Noether. La raíz de esta característica es que la simetría global transforma los sectores no locales y los twists locales serán aditivos o completos pero no cumplirán ambas condiciones a la vez.¹⁹

Para analizar estas ideas comenzamos calculando la corriente de Noether no invariante gauge mediante la prescripción habitual. Obtenemos

$$j^\mu = F_2^{\mu\nu} A_\nu^1 - F_1^{\mu\nu} A_\nu^2. \quad (5.84)$$

¹⁸Los dos factores \mathbb{R}^2 corresponden a los dos campos. Para cada campo tenemos WL etiquetados por un número real y TL etiquetados también por un número real, de ahí \mathbb{R}^2 . El segundo \mathbb{R}^2 corresponde a los WL y TL de la región complementaria

¹⁹En este escenario específico, la no existencia de la corriente de Noether es también una consecuencia del teorema de Weinberg-Witten [17]. Describiremos esto en detalle en la siguiente sección.

Esto se conserva on-shell dado que $\partial_\mu F_a^{\mu\nu} = 0$. Para cualquier región R con buffer zone Z , esta corriente nos produce twists candidatos para la simetría de rotación como $\tau_q(R, Z) = e^{iqQ_R}$ con la carga local Q_R dada por

$$Q_R = \int d^3x \alpha(x) j^0(x) = \int_{R \cup Z} d^3x \alpha(x) [E_1^i(x) A_i^2(x) - E_2^i(x) A_i^1(x)], \quad (5.85)$$

donde $\alpha(x)$ es una función de smearing de soporte compacto sobre la región tridimensional $R \cup Z$, con $\alpha(x) = 1$ para $x \in R$, y $\alpha(x) = 0$ para x fuera de $R \cup Z$. En este escenario, puesto que la teoría es libre, sólo tenemos que hacer un smearing en el espacio. El twist resultante no es invariante gauge ya que la carga se transforma como

$$Q_R \rightarrow Q_R - \int [\partial_i \alpha(x)] [E_1^i(x) \chi^2(x) - E_2^i(x) \chi^1(x)]. \quad (5.86)$$

Se trata de un término de borde con smearing de soporte compacto en la buffer zone Z . Matemáticamente, esto se produce porque $\partial_i \alpha(x) = 0$ para $x \in R$. La cuestión ahora es si podemos añadir algún término de borde para que la carga sea invariante gauge. Esta cuestión se consideró anteriormente en [14], donde se construyó una versión (sin smearing) del twist invariante gauge. Aquí comenzamos construyendo una versión con smearing análoga. Para hacer invariante de gauge el twist $\tau_q(R, Z)$, consideremos la función $v(x, y)$ dada por la solución de la ecuación de Poisson con carga unitaria en x y condiciones de contorno de Newman en la región Z

$$\nabla_y^2 v(x, y) = \delta(x - y), \quad x, y \in Z, \quad (5.87)$$

$$n^i \partial_i^y v(x, y) = 0, \quad y \in \partial Z. \quad (5.88)$$

donde n^i es el versor normal a ∂Z . Si utilizamos la función $v(x, y)$, podemos definir la siguiente cantidad no invariante gauge con soporte compacto en Z

$$I_a(x) = - \int_Z d^3y \partial_i^y v(x, y) A_i^a(y) \rightarrow \delta I_a(x) = \alpha_a(x). \quad (5.89)$$

Entonces, utilizando $I_a(x)$ continuamos definiendo el operador

$$C = \int d^3x \partial_i \alpha(x) [E_i^1(x) I_2(x) - E_i^2(x) I_1(x)], \quad (5.90)$$

que tiene la transformación gauge

$$\delta C = \int d^3x \partial_i \alpha(x) [E_1^i(x) \chi^2(x) - E_2^i(x) \chi^1(x)]. \quad (5.91)$$

Vemos que dicha transformación, claramente coincide con (5.86) haciendo que el ope-

rador de carga modificado

$$\tilde{Q}_R = Q_R + C , \quad (5.92)$$

sea explicitamente invariante gauge. Esta se trata de una versión con smearing de la carga construida en [14].

La carga \tilde{Q}_R implementa claramente la operación de twist correcta, correspondiente a la simetría global $U(1)$, en el álgebra aditiva de R . Esto se debe a que el soporte del operador C que agregamos está confinado a la buffer zone Z . De ahí, vemos claramente que el commutador con los campos eléctricos y magnéticos en R coincidirá con los de la carga de Noether no invariante Q_R .

Para regiones topológicamente triviales, esta construcción da un twist aditivo y completo ya que no hay sectores no locales en estas regiones para la teoría en cuestión. Ahora, queremos analizar este twist pero definido para un anillo R . Empezamos preguntándonos cómo actúa esta carga sobre los operadores no locales en R . Los operadores eléctricos no locales tienen como generadores los flujos

$$\Phi_a^E = \int d^3x \Omega_i(x) E_a^i(x) \quad a = 1, 2 , \quad (5.93)$$

donde Ω es la función vectorial de smearing definida en el capítulo 3 y cuyo rotor produce una corriente conservada $J = \nabla \times \Omega$ que tiene soporte compacto en R . A partir de aquí, calculamos el commutador obteniendo

$$[Q_R, \Phi_1^E] = \int d^3x \int d^3y \alpha(x) \Omega^i(y) E_j^2(x) [A_j^1(x), E_i^1(y)] = i \int d^3x \alpha(x) \Omega^i(x) E_i^2(x) , \quad (5.94)$$

es decir, un operador local en $R \cup Z$ (el soporte de $\alpha(x)$). Utilizando

$$[E_a^i(y), I^a(x)] = \partial_y^i v(x, y) , \quad (5.95)$$

también tenemos

$$[C, \Phi_1^E] = - \int d^3x \int d^3y \Omega_i(y) \partial_j \alpha(x) E_2^j(x) \partial_y^i v(x, y) . \quad (5.96)$$

Este se trata de un operador local en la buffer zone Z , y por tanto también en $R \cup Z$. Así que el commutador del twist con el flujo eléctrico es un operador aditivo en $R \cup Z$. Esto implica que este twist no cambia la clases HDV generadas por el flujo eléctrico.

Por otra parte, también siguiendo el tratamiento de operadores no locales en el capítulo 3, para el flujo magnético escribimos

$$\Phi_a^B = \int d^3x J_i(x) A_a^i(x) \quad a = 1, 2 , \quad (5.97)$$

con una corriente conservada J con soporte en R . Tenemos que

$$[\tilde{Q}_R, \Phi_a^B] = i \varepsilon_{ab} \Phi_b^B, \quad (5.98)$$

con ε_{ab} el tensor de Levi-Civita de dos índices. Implicando que estas cargas locales rotan las clases HDV asociadas a los flujos magnéticos del mismo modo que el grupo de simetría global.

Concluimos que el twist en consideración no es completo ni aditivo. Produce las transformaciones correctas en el álgebra aditiva y en los flujos magnéticos no locales, pero no cambia los flujos eléctricos no locales. Dualmente, podemos hacer un twist con la transformación correcta para los flujos eléctricos no locales y actuando trivialmente sobre los magnéticos. En $D > 4$ esta misma construcción nos provee un twist completo para un anillo R que sólo contiene WL como operadores no locales. Este twist vuelve a ser no aditivo. En este escenario, está claro que los twists aditivos no pueden concatenarse a los twists en una bola ya que estos últimos transforman todos los operadores dentro de la bola.

Twist aditivo construido a partir de un fijado de gauge

A partir de la discusión abstracta de la sección anterior sabemos, por razones generales, que se pueden construir twists aditivos y completos. Una forma es realizar la construcción estándar a partir de la split property comenzando con el álgebra aditiva en R y el álgebra completa en $\bar{R} = (R \cup Z)'$, donde Z es la buffer zone. Esto da un twist aditivo para R y uno completo para \bar{R} . Aún así es clarificador tener una construcción más explícita del twist aditivo, y estudiar las diferencias con el completo.

Para construir un twist puramente aditivo en el escenario actual partimos de la expresión (5.85) y buscamos una solución de $\nabla \times A = B$, donde el potencial A se escribe como una función no local de B sólo dentro de la región $R \cup Z$. Podemos interpretar esto como una fijación gauge particular que tiene en cuenta la forma de la región, salvo un pequeño detalle que encontraremos más adelante. Por lo tanto, A , definido de esta forma como una funcional del campo magnético dentro de $R \cup Z$, es automáticamente invariante gauge y aditivo en $R \cup Z$, y así será el twist construido a partir de dicho potencial vector. Este tipo de fijaciones gauge se utilizaron en el contexto del estudio de la entropía de entrelazamiento para campos gauge. Una construcción general en la red se encuentra en [164]. En el continuo, y para el caso de esferas se discutió en [165].

Para resolver $\nabla \times A = B$ en el anillo $R \cup Z$, tomamos una coordenada “radial” $r \in [0, 1]$ en $R \cup Z$. Esta coordenada radial es cero para cierto lazo no contractible dentro de R , y es uno en la superficie $\partial(R \cup Z)$ que representa el borde del anillo. Las superficies de r constante representan una foliación del anillo con toros topológicos T_r . Para $r = 1$ tenemos $T_1 = \partial(R \cup Z)$. ∇r es perpendicular al toro T_r . Esta configuración

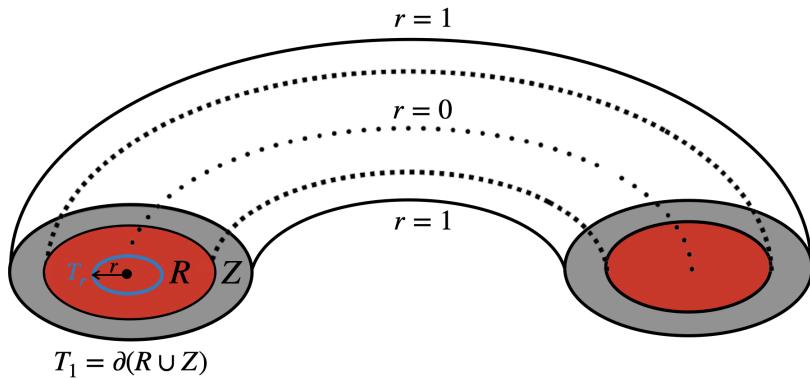


Figura 5.5: Configuración geométrica que nos facilita resolver $\nabla \times A = B$ dentro de una región tipo anillo. Las superficies a r constante representan una foliación del anillo con toros topológicos, a los que llamamos T_r .

geométrica se representa en la figura (5.5).

Llamaremos $F^{(r)}$ a la restricción de las 2-formas F_{ij} al toro T_r . Análogamente, llamamos $A^{(r)}$ a la restricción de la 1-forma A_i . En T_r tenemos $F^{(r)} = dA^{(r)}$, siendo d la derivada exterior. Más aún, por descomposición de Hodge en T_r tenemos

$$A^{(r)} = d\alpha + \delta w + \bar{A}. \quad (5.99)$$

Donde los tres términos están definidos únicamente, y son ortogonales en el sentido de producto escalar de campos sobre T_r . α es una 0-forma (una función), w es una 2-forma (caracterizada por una única función), δ es el adjunto de la derivada exterior d , y \bar{A} es una 1-forma armónica (que tiene laplaciano cero). \bar{A} también satisface $d\bar{A} = \delta\bar{A} = 0$. En este contexto, utilizaremos la libertad gauge para eliminar el primer término en (5.99). Con esta elección tenemos

$$F^{(r)} = d\delta w = (d\delta + \delta d)w = \Delta w, \quad (5.100)$$

con Δ el operador Laplaciano. Esta ecuación tiene una solución única para w en términos de $F^{(r)}$, excepto por adiciones de la 2-forma de volumen. Pero esta ambigüedad no afecta a $A^{(r)}$. Por tanto, con esta elección de gauge hemos fijado $A^{(r)}$ de forma única en términos del campo magnético $F^{(r)}$ en T_r , excepto por la forma armónica \bar{A} .

Para fijar \bar{A} observamos que las formas armónicas están asociadas al grupo de cohomología del toro y tienen un número finito de soluciones en una variedad compacta. En este caso, hay dos soluciones. Son localmente de puro gauge, pero tienen circulación no trivial a lo largo de los dos círculos no contractiles del toro. Por tanto, una vez determinado δw , podemos deducir su coeficiente evaluando la circulación de A , o el flujo del campo magnético, a lo largo de cualquier par de superficies limitadas por los dos círculos no contractiles de la superficie toroidal. Para el círculo que es contráctil dentro de $R \cup Z$, obtenemos el resultado en términos del campo magnético dentro de

$R \cup Z$. Para la otra dirección no podemos calcular sólo en términos de operadores en $R \cup Z$. Necesitamos fijar el valor de una sola circulación no trivial. Entonces, fijamos esta contribución en cero. Esta elección no es posible mediante la fijación gauge de A en el espacio completo. Sin embargo, es una elección válida para resolver la ecuación $\nabla \times A = B$ en $R \cup Z$.

Por tanto, hemos resuelto las componentes tangenciales $A^{(r)}$ en términos del campo magnético en el interior del anillo. La restante componente radial A_r queda fijada por la ecuación

$$F_{a,r} = \partial_a A_r - \partial_r A_a, \quad (5.101)$$

donde $a = 1, 2$ son las dos coordenadas en el toro T_r . Como A_a ya se ha fijado, esta ecuación determina A_r salvo un valor constante. Este valor constante puede fijarse a voluntad mediante la transformación gauge residual $A_r \rightarrow A_r + \partial_r f(r)$.

Con esta elección del potencial vectorial A , el twist (5.85) es automáticamente invariante gauge y aditivo. Para comprobar que sigue haciendo las transformaciones correctas en el álgebra aditiva del anillo R , evaluemos el conmutador de

$$Q_R = \int d^3x \alpha(x) (E^1 \cdot A^2 - E^2 \cdot A^1) \quad (5.102)$$

con los campos invariantes de gauge dentro de R . Comenzamos con el campo magnético

$$[Q_R, B_i^a(y)] = i \varepsilon_{a,b} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \delta(x - y) \partial_k(\alpha(x) A_j^b(x)) = i B_i^b(y), \quad (5.103)$$

donde hemos utilizado

$$[E_j(x), B_i(y)] = i \varepsilon_{ijk} \partial_k \delta(x - y), \quad (5.104)$$

además de que el campo magnético commuta con el potencial vectorial a gauge fijo, y que α es constante dentro de R . Esto demuestra la transformación correcta para el campo magnético. Pero aún no hemos utilizado nuestra prescripción específica para A . Para analizar la conmutación con el campo eléctrico definimos $E = \nabla \times \tilde{A}$, y tomamos para la expresión de \tilde{A} en términos de E exactamente la misma que tenemos para A en términos de B . Insertando $E = \nabla \times \tilde{A}$ en (5.102) obtenemos

$$Q_R = \int d^3x \alpha (B^1 \cdot \tilde{A}^2 - B^2 \cdot \tilde{A}^1) + \int d^3x \varepsilon_{ijk} (\partial_j \alpha) (\tilde{A}_k^1 A_i^2 - \tilde{A}_k^2 A_i^1). \quad (5.105)$$

Para simplificar el último término en (5.105) elegimos nuestra función de smearing $\alpha(r)$ como una función de r . Luego, el último término se puede escribir como

$$\int dr \alpha'(r) \int_{T_r} (\tilde{A}_1^{(r)} \wedge A_2^{(r)} - \tilde{A}_2^{(r)} \wedge A_1^{(r)}). \quad (5.106)$$

Vemos que esto se anula debido a que $\int_{T_r} \delta w \wedge \delta \tilde{w} = 0$ y $\int_{T_r} \delta w \wedge \tilde{A} = 0$, por propiedades del cálculo de formas en T_r , combinado con $\delta \tilde{A} = 0$. De esta manera, tenemos que

$$Q_R = \int d^3x \alpha(r) (B^1 \cdot \tilde{A}^2 - B^2 \cdot \tilde{A}^1), \quad (5.107)$$

tiene una expresión invariante dual (véase 5.102). Esto induce la transformación correcta sobre el campo eléctrico en R , replicando el cálculo anterior para el campo magnético.

En conclusión, Q_R con esta particular fijación gauge construimos un generador de twists aditivos para R . Estos twists no pueden cambiar las clases no locales ya que son aditivo en ambos campos, pero tienen la acción correcta sobre los operadores aditivos. El twist completo puede construirse ahora utilizando el twist complementario de uno aditivo, a saber

$$\tau_{\text{complete}}(R, Z) = \tau_{\text{global}} \tau_{\text{additive}}(\bar{R}, Z)^{-1}. \quad (5.108)$$

Para ver más claramente la diferencia entre los twists completos y los aditivos pensemos heurísticamente en términos de twists sin smearing. La carga aditiva Q_{add} sin smearing rota los campos eléctricos y magnéticos dentro y en el borde de R . No hace nada fuera y por lo tanto no rota los operadores no locales, que son flujos que cruzan el agujero del anillo. Para construir una carga completa a partir de Q_{add} , consideremos los flujos eléctricos y magnéticos $\Phi_{E,B}^{1,2}(\Gamma_1)$ alrededor del lazo no contractible de R , y los $\Phi_{E,B}^{1,2}(\Gamma_2)$ en un círculo maximal contractible de R . Estos comutan, respectivamente, con operadores locales fuera y dentro del anillo en la aproximación sin smearing. Entonces, podemos escribir una carga local completa como

$$Q_{\text{max}} = Q_{\text{add}} + (\Phi_E^1(\Gamma_1)\Phi_B^2(\Gamma_2) - \Phi_E^2(\Gamma_1)\Phi_B^1(\Gamma_2)) \\ + (\Phi_B^1(\Gamma_1)\Phi_E^2(\Gamma_2) - \Phi_B^2(\Gamma_1)\Phi_E^1(\Gamma_2)). \quad (5.109)$$

Esta nueva carga rota los operadores no locales así como los aditivos. Es evidente que se trata de un operador no local en $R \cup Z$ dado que contiene operadores no locales en el borde (o en la buffer zone Z). Más aún, está claro por qué dos twists complementarios completos no pueden concatenarse: la combinación tiene el doble de operadores no locales necesarios. Dos twists aditivos tampoco pueden concatenarse. Un twist completo y uno aditivo se concatenan por construcción, véase (5.108). Tenemos entonces otro ejemplo de una QFT en la que podemos construir twists locales para cualquier región. Es este caso, nuevamente son aditivos o completos, pero no tienen ambas cualidades a la vez, y por tanto perdemos la concatenabilidad de los twists aditivos (y también de los twists completos).

5.3.3. Simetría de dualidad electromagnética

El campo de Maxwell libre tiene una simetría de dualidad. Podemos escribirla, de forma compacta, usando la transformación entre F y su dual F^*

$$(F + iF^*) \rightarrow e^{i\phi} (F + iF^*) . \quad (5.110)$$

Vemos que esta transformación representa una simetría interna de la teoría, ya que preserva las álgebras locales. En particular, sólo intercambia el campo eléctrico local por el campo magnético local en todo el espacio. Esto implica que intercambia los WL y TL (obtenidos exponenciando los flujos magnéticos y eléctricos) y por tanto no deja invariantes las clases HDV asociadas a los anillos. De acuerdo con el resultado de la sección anterior, esperamos que no pueda haber una corriente física de Noether que implemente dicha simetría. Nótese que (5.110) no nos dice cómo efectuar la simetría en las variables lagrangianas no físicas A_μ . Por lo tanto no podemos aplicar la prescripción habitual para obtener una corriente de Noether. Sin embargo, si escribimos $F = dA$, $F^* = d\tilde{A}$, tenemos que

$$d(A \wedge F + \tilde{A} \wedge F^*) = F \wedge F + F^* \wedge F^* = 0 . \quad (5.111)$$

Por lo tanto la 3-forma $A \wedge F + \tilde{A} \wedge F^*$ es cerrada y su dual de Hodge es una corriente conservada. De forma explícita encontramos que

$$J^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \tilde{A}_\nu \partial_\rho \tilde{A}_\sigma) , \quad (5.112)$$

donde podemos escribir carga asociada como

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3x (A_i B_i + \tilde{A}_i E_i) . \quad (5.113)$$

Dicha carga, efectúa las transformaciones deseadas

$$[Q, E_j] = i B_j , \quad (5.114)$$

$$[Q, B_j] = -i E_j . \quad (5.115)$$

Por lo tanto Q implementa la simetría de dualidad (5.110). A partir de su implementación como la integral de una densidad conservada sobre todo el espacio, entendemos que la dualidad representa una simetría convencional (0-forma). Pero, nótese que dicha densidad no es invariante gauge y no produce una corriente de Noether bien definida. Entonces, podremos implementar la simetría mediante twists aditivos o completos pero no twists que cumplan ambas propiedades. Si queremos construir un twist aditivo procedemos como en la sección 5.3.2. En otras palabras, escribimos A y \tilde{A} como función

de B y E respectivamente dentro de la región tipo anillo R , obteniendo

$$Q_R = \int d^3x \alpha(r) (A_i B_i + \tilde{A}_i E_i). \quad (5.116)$$

Esta carga implementa correctamente la simetría de dualidad en la región R por las mismas razones. Al ser aditiva no puede cambiar las clases no locales asociadas a los WL y TL. Para construir los twists completos tenemos que recurrir los twists complementarios de los aditivos. Retomaremos estas ideas durante el capítulo 7 donde estudiaremos la simetría de dualidad para el campo libre de Maxwell definido sobre variedades compactas no triviales.

5.3.4. Gravitón de Fierz-Pauli en $D = 4$

En el siguiente ejemplo estudiaremos la teoría del gravitón libre sin masa en $D = 4$. Por un lado, como argumentamos en el capítulo 3, esta teoría es invariante conforme a nivel cuántico. Por otro obedece la split property [36]. De esta manera, sabemos que podemos construir los twists estándar que implementan la simetría conforme localmente. La pregunta es si es posible generar los twists mediante una corriente local conservada. Claramente, esto no será posible porque aplica el teorema de Weinberg-Witten [17]. Este prohíbe la existencia de un tensor de energía-momento bien definido para teorías con partículas de espín 2 no masivas.

No obstante, para abordar esta situación desde el punto de vista de los sectores HDV retomamos el análisis de los capítulos 3 y 4. En particular, ya mostramos la teoría en cuestión tiene simetrías generalizadas que producen un grupo \mathbb{R}^{20} de operadores HDV no locales en regiones tipo anillo, es decir, en regiones con lazos no contractibles. Éstas, al igual que en la teoría de Maxwell, corresponden a simetrías generalizadas 1-forma. Además, habíamos encontrado que las clases no locales están cargadas bajo simetrías espacio-temporales. A la luz de los resultados de la sección anterior, esto implica la validez del teorema Weinberg-Witten, es decir, prohíbe la existencia de un tensor de energía-momento. Esto se debe a que tal tensor energía-momento daría lugar a twists aditivos, completos y concatenables, en contradicción con el hecho de que las clases no locales están cargadas bajo el grupo conforme.

En este ejemplo usaremos la formulación covariante de las simetrías generalizadas del gravitón que presentamos en el capítulo 4. Consideraremos que esta forma, es la más adecuada para el análisis de las transformaciones conformes de los sectores no locales, las cuales estudiaremos en detalle a continuación. En particular en este ejemplo queremos aclarar, en una situación algo sofisticada, una de las observaciones descritas en la sección 5.1 respecto al carácter de punto de las transformaciones asociadas a simetrías generalizadas cargadas bajo grupos continuos.

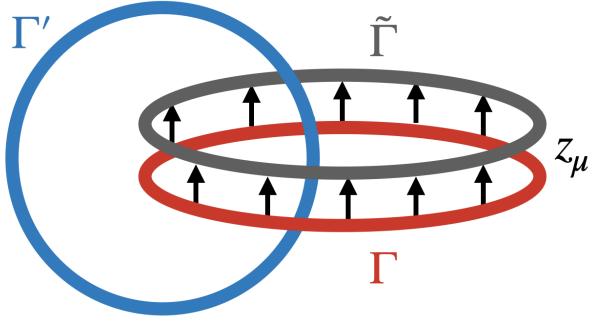


Figura 5.6: Definimos el operador no local Φ_Γ con la curva Γ . En la región complementaria tenemos $\Phi_{\Gamma'}$, definido con Γ' , que no commuta con Φ_Γ . Obtenemos la curva $\tilde{\Gamma}$ al actuar con pequeñas traslaciones z_μ sobre Γ . La traslación cambia las clases HDV no locales para el gravitón. Sin embargo, al operador de una clase HDV determinada en $\tilde{\Gamma}$ le corresponde un operador con la misma clase en Γ no trasladándolo, sino extendiendo la integral de superficie desde $\tilde{\Gamma}$ a Γ con operadores locales.

Para comenzar, reescribimos el flujo no local más general posible Φ_Γ que presentamos en (4.54) de la forma

$$\Phi_\Gamma = \int_{\Sigma_2} d\sigma^{\mu\nu} R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) f^{\alpha\beta}(x), \quad (5.117)$$

donde $d\sigma^{\mu\nu} = dx^\mu \wedge dx^\nu$ es el dual de la 2-forma diferencial de área en la superficie Σ_2 con borde $\Gamma = \partial\Sigma_2$ y $f^{\alpha\beta}(x)$ representa todas las funciones que definen la 2-forma cerrada (5.117). Podemos escribir la función obtenida explicitamente usando los parámetros $(a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c^{\alpha\beta\gamma}, d^{\alpha\beta})$ de la forma

$$f^{\alpha\beta}(x) = a^{\alpha\beta} + (x^\alpha b^\beta - x^\beta b^\alpha) + c^{\alpha\beta\gamma} x_\gamma + (x^\alpha d^{\beta\gamma} x^\gamma - x^\beta d^{\alpha\gamma} x^\gamma + \frac{1}{2} d^{\alpha\beta} x^2). \quad (5.118)$$

Ahora, analizamos el efecto de una transformación conforme general sobre un operador no local Φ_Γ . Podemos deducirlo del cambio de coordenadas asociado, el cual es implementado por una transformación de Lorentz y un factor conforme en el tensor de curvatura. Absorbemos el cambio de cada punto mediante una transformación de coordenadas $x \rightarrow \tilde{x}$ en la integración sobre Σ_2 . Esto transporta la curva Γ a $\tilde{\Gamma}$, pero esta transformación es irrelevante para las clases HDV no locales mientras sea pequeña. En consecuencia, podemos escribir la transformación conforme del espacio-tiempo global como un cambio de los parámetros que determinan la clase HDV de la curva $\tilde{\Gamma}$ ligeramente desplazada. Más concretamente, vemos que el conjunto de polinomios de 2-formas que multiplican $R_{(\mu\nu)(\alpha\beta)}$ en las ecuaciones anteriores se mezcla bajo transformaciones conformes generales.

Empecemos por las traslaciones. Al realizar $x^\mu \rightarrow x^\mu + z^\mu$, el tensor de Riemann transforma como

$$U(z) R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) U^{-1}(z) = R_{\mu\nu\alpha\beta}(x - z). \quad (5.119)$$

Esto implica que el operador no local (5.117) cambia como

$$\tilde{O}_{\tilde{\Gamma}} = \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu\nu} R_{\mu\nu\alpha\beta}(x-z) f^{\alpha\beta}(x) = \int_{\tilde{\Sigma}} d\tilde{\sigma}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\alpha\beta}(\tilde{x}) f^{\alpha\beta}(\tilde{x}+z). \quad (5.120)$$

Nótese que z^μ es lo suficientemente pequeño como para permitir que $\tilde{\Gamma}$ tenga las mismas clases HDV no locales que Γ (Ver figura 5.6). Al calcular el cambio en el integrando en el lado derecho de (5.120) obtenemos que el cambio de clases tiene la forma

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &\rightarrow a^{\alpha\beta} + (z^\alpha b^\beta - z^\beta b^\alpha) + c^{\alpha\beta\gamma} z_\gamma + (z^\alpha d^{\beta\gamma} z^\gamma - z^\beta d^{\alpha\gamma} z^\gamma + \frac{1}{2} d^{\alpha\beta} z^2), \\ b^\alpha &\rightarrow b^\alpha + d^{\alpha\gamma} z_\gamma, \\ c^{\alpha\beta\gamma} &\rightarrow c^{\alpha\beta\gamma} + (z^\alpha d^{\beta\gamma} + z^\beta d^{\gamma\alpha} + z^\gamma d^{\alpha\beta}), \\ d^{\alpha\beta} &\rightarrow d^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.121)$$

De forma análoga, podemos verificar que las transformaciones de Lorentz $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ inducen una transformación de las etiquetas de clase $(a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c^{\alpha\beta\gamma}, d^{\alpha\beta})$ simplemente como tensores con la transformación Lorentz inversa Λ^{-1} . Para las transformaciones de escala observamos primero que el tensor de Riemann tiene dimensión de escala $\Delta = 3$, de modo que bajo transformaciones de escala $x \rightarrow \lambda x$ se transforma como $U(\lambda) R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) U^{-1}(\lambda) = \lambda^{-3} R_{\mu\nu\alpha\beta}(\lambda^{-1} x)$. A partir de esta observación, nos encontramos con la transformación de las etiquetas de clase de la forma $a^{\alpha\beta} \rightarrow \lambda^{-1} a^{\alpha\beta}$ y $d^{\alpha\beta} \rightarrow \lambda d^{\alpha\beta}$, como era de esperar basandonos en motivos dimensionales.

Simplemente, nos quedan las transformaciones conformes especiales

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + w^\mu x^2}{1 + 2 w \cdot x + w^2 x^2}. \quad (5.122)$$

Dicha transformación actúa localmente como una dilatación y una transformación de Lorentz. Más precisamente

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Omega(x) \Lambda^\mu{}_\nu(x), \quad (5.123)$$

donde $\Omega(x)$ caracteriza una transformación de escala pura dada en términos del vector w como

$$\Omega(x) = 1 - 2 w \cdot x + w^2 x^2, \quad (5.124)$$

y $\Lambda^\mu{}_\nu(x)$ es una transformación pura de Lorentz que podemos escribir como

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(x) = \delta^\nu_\mu - 2 \frac{w^\nu x_\mu - w_\mu x^\nu + w^2 x^\nu x_\mu + x^2 w^\nu w_\mu - 2(w \cdot x) w^\nu x_\mu}{1 - 2 w \cdot x + w^2 x^2} \quad (5.125)$$

De nuevo utilizamos que el tensor de curvatura on-shell se comporta como un campo

primario conforme con dimensión de escala igual a $\Delta = 3$. De ello se deduce que

$$\begin{aligned} U(w) R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) U^{-1}(w) &= \Omega^{-3} \Lambda^{-1\rho}_{\mu} \Lambda^{-1\sigma}_{\nu} \Lambda^{-1\gamma}_{\alpha} \times \\ &\quad \times \Lambda^{-1\delta}_{\beta} R_{\rho\sigma\gamma\delta} \left(\frac{x^{\mu} - w^{\mu} x^2}{1 - 2 w \cdot x + w^2 x^2} \right). \end{aligned} \quad (5.126)$$

Como en los casos anteriores, podemos cambiar las coordenadas dentro del flujo. Obtenemos entonces un nuevo operador no local $\tilde{\Phi}_{\tilde{\Gamma}}$ para el lazo ligeramente desplazado $\tilde{\Gamma}$ que toma la forma

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{\Gamma}} = \int_{\tilde{\Sigma} \equiv \Sigma} d\tilde{\sigma}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\gamma\delta}(\tilde{x}) \Omega^{-1}(x(\tilde{x})) \Lambda^{-1\gamma}_{\alpha}(x(\tilde{x})) \Lambda^{-1\delta}_{\beta}(x(\tilde{x})) f^{\alpha\beta}(x(\tilde{x})). \quad (5.127)$$

De aquí, encontramos que las etiquetas de las clases HDV se transforman bajo transformaciones conformes especiales como

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &\rightarrow a^{\alpha\beta}, \\ b^{\alpha} &\rightarrow b^{\alpha} - 2 a^{\alpha\gamma} w_{\gamma}, \\ c^{\alpha\beta\gamma} &\rightarrow c^{\alpha\beta\gamma} + 2 (w^{\alpha} a^{\beta\gamma} + w^{\beta} a^{\gamma\alpha} + w^{\gamma} a^{\alpha\beta}), \\ d^{\alpha\beta} &\rightarrow d^{\alpha\beta} + 2 w^2 a^{\alpha\beta} + 4 (w^{\alpha} w_{\gamma} a^{\beta\gamma} - w^{\beta} w_{\gamma} a^{\alpha\gamma}) - 2 (w^{\alpha} b^{\beta} - w^{\beta} b^{\alpha}) + 2 c^{\alpha\beta\gamma} w_{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Concluimos que la acción del grupo conforme es lineal en las operadores HDV no locales. Esto es necesario para respetar las reglas de fusión y mantener invariantes los conmutadores (4.55). También, esta en perfecto acuerdo con los comentarios generales realizados en las secciones anteriores .

Como mencionamos en los capítulos 3 y 4 el gravitón de Einstein en $D = 4$ presenta, además del grupo conforme, una simetría de dualidad $U(1)$. Podemos ver claramente dicha simetría como una simetría de las de las reglas de fusión y conmutadores (4.55) de los operadores no locales. Específicamente, vemos que corresponde a una rotación de R y su dual R^* como en (4.61), es decir de la forma

$$\begin{pmatrix} R \\ R^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R^* \end{pmatrix}. \quad (5.129)$$

Utilizando las expresiones anteriores encontramos que esta transformación actúa sobre las etiquetas de las clases HDV como

$$a \rightarrow \cos(\theta) a - \sin(\theta) a^*, \quad d^* \rightarrow \cos(\theta) d^* - \sin(\theta) d, \quad (5.130)$$

$$b \rightarrow \cos(\theta) b + \sin(\theta) c^*, \quad c^* \rightarrow \cos(\theta) c^* - \sin(\theta) b. \quad (5.131)$$

Por lo tanto, el grupo completo de simetrías globales que actúan sobre los sectores no

locales es el grupo conforme más el grupo de dualidad. Su álgebra de Lie es $SO(5, 1) \times U(1)$, con 16 generadores. Hemos verificado mediante cálculo explícito que las órbitas genéricas del grupo completo de simetrías son 16 dimensionales. Los 4 casimires del grupo $SO(5, 1) \times U(1)$ deben etiquetar las 4 coordenadas restantes de la variedad que definen 20 las clases HDV. Por ejemplo, podemos escribir el casimir cuadrático como

$$a \cdot d + b \cdot b + c^* \cdot c^*. \quad (5.132)$$

Sin embargo, como era de esperar, hay puntos especiales en la variedad asociada a las etiquetas de clase con grupos estabilizadores no triviales. La dimensión de estas órbitas es la dimensión del cociente de $SO(5, 1) \times U(1)$ por el grupo estabilizador. En resumen, todos estos resultados para el caso del gravitón están en perfecto acuerdo con la discusión general realizada en las secciones anteriores.

Como mencionamos, la construcción de operadores de twist que implementan las transformaciones conformes de grupo en el tensor de curvatura se puede hacer, a nivel abstracto, mediante la construcción estándar de la split property, dando lugar a twists aditivos o completos. Más explícitamente, para el caso de las traslaciones espaciales, puede construirse una torsión no invariante gauge utilizando la componente t^{0i} del tensor de energía-momento de Belinfante, o simplemente

$$\tau_P = e^{iz_j P^j}, \quad P_j = \int_R d^3x \pi^{kl} \partial_j h_{kl}. \quad (5.133)$$

Donde los h_{ij} son los campos dinámicos de los gravitones definidos sobre una superficie de Cauchy que contiene la región R , y π_{ij} son los momentos canónicos (3.14) que obedecen las reglas de cuantización (3.15)

$$[h_{ij}(x), \pi^{kl}(y)] = \frac{i}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta(x - y). \quad (5.134)$$

Vemos que operador P_j realiza traslaciones espaciales dentro de R sobre las variables canónicas y los operadores invariantes gauge como era de esperar. Pero como podríamos haber anticipado, a partir de la discusión del campo de Maxwell, dado que los difeomorfismos linealizados actúan sobre los campos dinámicos de los gravitones siguiendo (3.8) como

$$\delta h_{ij}(x) = \partial_i \xi_j(x) + \partial_j \xi_i(x), \quad \delta \pi^{ij}(x) = (\partial^i \partial^j - \delta^{ij} \partial^2) \xi_0(x), \quad (5.135)$$

el operador de twist propuesto (5.133) no es invariante gauge. Sin embargo, como en el

caso de Maxwell, podemos calcular su variación simplemente como término de borde

$$\delta P^j = \int_{\partial R} d\sigma_i [2\partial_k \xi_0 \partial^j \partial^k \xi^i - 2\partial^i \xi_0 \partial^j \partial_k \xi^k + 2\pi^{ik} \partial^j \xi_k \\ + \xi_0 \partial^i \partial^j h^k_k - \partial^i \xi_0 \partial^j h^k_k - \xi_0 \partial_k \partial^j h^{ik} + \partial_k \xi_0 \partial^j h^{ik}] . \quad (5.136)$$

Por lo tanto, debería ser posible hacer este twist invariante de gauge mediante la adición de un término de borde que cancele la transformación gauge. Si R contiene lazos no contractibles, esta modificación transformará el twist en un operador no local, consistente con el hecho de que no hay un tensor de energía-momento bien definido para el gravitón. Equivalentemente, esta modificación contendrá los propios operadores no locales del anillo en su construcción. Además, podríamos abordar la construcción del twist aditivo mediante un procedimiento similar de fijación de gauge, como hicimos para el par de campos de Maxwell. Sin embargo, no proseguiremos con esta construcción por lo que resta de esta tesis.

5.4. Teorema Weinberg-Witten

Uno de los principales resultados de este capítulo es que la existencia de una simetría generalizada que no es invariante bajo una simetría global continua implica que la simetría global no tiene corriente. En esta sección mostramos cómo este resultado contiene el teorema de Weinberg-Witten [17], y cómo expresa manifiestamente las obstrucciones topológicas detrás de él. Esta nueva comprensión nos permitirá hacer varias generalizaciones.

Recordemos que el teorema de Weinberg-Witten [17] establece que para QFTs en $D = 4$ dimensiones espacio-temporales:

- (a) las partículas sin masa de helicidad $h \geq 1$ no pueden llevar una carga global asociada a una corriente conservada,
- (b) una teoría con partículas sin masa de helicidad $h > 1$ no admite un tensor de energía-momento .

Realizamos en el apéndice B una descripción de la prueba original del teorema en términos de estados asintóticos de una partícula. A continuación mostraremos cómo derivarlo a partir de los argumentos de QFT local presentados en la sección 5.1.

La conexión del teorema de Weinberg-Witten con los resultados de este capítulo surge de dos hechos. En primer lugar, las teorías libres de partículas sin masa con $h \geq 1$ en $D = 4$ tienen simetrías generalizadas de tipo 1-forma (simetrías generalizadas asociadas con regiones que contienen lazos no contractibles). En segundo lugar, para las teorías libres de partículas sin masa con $h \geq 3/2$ los operadores no locales asociados

con la simetría generalizada 1-forma llevan índices Poincaré. Anteriormente hemos analizado explícitamente los casos de $h = 1$ y $h = 2$. Para helicidades enteras mayores en $D = 4$, tenemos la teoría de un campo conservado $R_{(\mu_1,\nu_1)\dots(\mu_h,\nu_h)}$ con una simetría de diagrama de Young de $2 \times h$ para los índices. Este campo da lugar a diferentes 2-formas conservadas de forma análoga al tensor de Riemann para $h = 2$. Lo más importante es que estas formas conservadas están etiquetadas por clases cargadas bajo la simetría de Poincaré. Los espines semienteros también dan lugar a 2-formas conservadas. Por ejemplo, podemos describir la teoría de $h = 3/2$ usando el campo de gauge espinor-vector de Rarita-Schwinger ψ_μ^α [166–168]. El espacio de fases invariante gauge esta generado exclusivamente por la 2-forma espinorial $\partial_\mu\psi_\nu^\alpha - \partial_\nu\psi_\mu^\alpha$ y su conjugado [169, 170]. Esta 2-forma genera sectores HDV asociados a anillos etiquetados por espinores constantes, y por lo tanto cargados bajo la simetría de conforme de la teoría.²⁰

Por tanto, todas estas simetrías globales, internas para $h \geq 1$ o Poincaré para $h > 1$, bajo las cuales están cargadas las partículas sin masa no pueden ser generadas por una corriente. Deducimos esto de nuestro resultado genérico, dada la existencia de simetrías generalizadas de 1-forma en estas teorías que están cargadas bajo la simetría global. Este es el teorema de Weinberg-Witten. Desde el punto de vista actual, dicho teorema se basa en las obstrucciones topológicas que aparecen cuando se intenta cargar una simetría 1-forma con una simetría 0-forma.

Observamos que no suponemos que la teoría sea libre ni que tenga una simetría generalizada 1-forma exacta. Sin embargo, suponemos que la simetría global es exacta, como en el teorema de Weinberg Witten. Por ejemplo, las partículas sin masa en el teorema de Weinberg-Witten pueden no conducir a una simetría generalizada exacta en la teoría completa, ya que podría haber cargas pesadas rompiendo los operadores no locales a energías suficientemente altas, donde la teoría se vuelve interactuante. Sin embargo, el límite IR asintótico de la teoría es libre, ya que es necesario para definir los estados de entrada y salida y determinar que tenemos una partícula sin masa en el espectro. Por lo tanto, en el IR estas partículas muestran las simetrías generalizadas antes mencionadas. Por otro lado, la corriente, al estar asociada a una simetría global exacta, tiene que generar los twists a todas las escalas. Puesto que la simetría global está no trivialmente presente en la teoría IR, la corriente también tiene que formar parte de la teoría IR. Como hemos visto, esto no es posible.

5.4.1. Generalizaciones

La primera generalización que se desprende del presente planteamiento se refiere a los campos sin masa de espín superior en dimensiones superiores. De nuevo, es-

²⁰Análogamente a la discusión para el graviton en el capítulo 3, la teoría generada por $\partial_\mu\psi_\nu^\alpha - \partial_\nu\psi_\mu^\alpha$ es una CFT libre con dicha 2-forma actuando como campo primario de espín 3/2 y $\Delta = 5/2$ [171].

tas partículas sin masa no pueden estar cargadas bajo un grupo de simetría continuo implementado por una corriente de Noether. Para el caso de gravitones una generalización previa en esta dirección puede encontrarse en [172] con argumentos similares a los originales. En este caso generalización aplica a todo espín y se debe a que todas estas partículas presentan diferentes tipos de simetrías generalizadas, como simetrías k -forma, y éstas no pueden cargarse bajo una simetría generada por una corriente local.

Observamos que las partículas sin masa en dimensiones superiores se caracterizan por representaciones de la parte semi-simple $SO(D - 1)$ del little group. Los campos se clasifican por representaciones del grupo de Lorentz $SO(D - 1, 1)$. El problema de clasificar qué partículas sin masa pueden caber dentro de un tipo de campo dado se resolvió recientemente en [173, 174]. La solución es que una partícula con una representación del little group $SO(D - 1)$, caracterizada por un cierto Young-tableaux, puede caber mínimamente en un campo que se transforma bajo el grupo de Lorentz $SO(D - 1, 1)$ en una representación irreducible caracterizada por un Young-tableaux dado por la adición de otra fila (primera fila). Entonces, cualquier partícula bosónica no escalar dará lugar, como mínimo, a una simetría generalizada k -forma con k la longitud de la columna mayor en el diagrama de Young $SO(D - 1)$. Las simetrías globales, bajo las cuales se cargan este tipo de partículas, no pueden tener corriente. Si el diagrama de Young $SO(D - 1)$ tiene más de una columna, entonces las etiquetas de clase no locales tendrán índices de Lorentz, y las teorías que describen este tipo de partículas sin masa no pueden tener un tensor energía-momento.

La segunda generalización es que, en este lenguaje, podemos deshacernos de cualquier suposición adicional acerca del espectro de la teoría, alcanzando así una afirmación válida para QFTs o CFTs interactuantes. Supongamos que una QFT contiene un campo F invariante gauge k -forma, cerrado y “físicamente” no exacto, con $1 \leq k \leq D - 2$. Esto significa que $dF = 0$, $F \neq dA$, para cualquier campo de $(k - 1)$ -forma invariante del gauge A . En cualquier teoría de este tipo, si F está cargado bajo un grupo de simetría continuo G , no puede haber una corriente para G . La razón es que tal forma cerrada, pero no exacta, conduce a una simetría generalizada $(D - k - 1)$ -forma. Esto se debe a que al integrar F en una superficie espacial abierta p -dimensional da lugar a un operador que depende sólo del borde $(k - 1)$ -dimensional. Cambiando ligeramente la superficie²¹ de integración podemos demostrar que conmuta con operadores locales espacialmente separados del borde. Pero este flujo generalizado no es un operador aditivo en la frontera ya que la forma cerrada no es exacta en el álgebra física invariante de gauge. La carga de F bajo la simetría global conduce a una simetría generalizada cargada que no admite una corriente como se deduce de nuestro resultado general.

²¹Como discutimos en la sección 5.3.4, la transportabilidad es automática en este escenario.

El caso de $k = D - 1$ (simetría 0-forma) es un poco diferente porque conduce a operadores de twist integrando la $(D - 1)$ -forma sobre una superficie espacial $(D - 1)$ -dimensional. Esto no conduce automáticamente a una simetría generalizada en la QFT local en el sentido revisado anteriormente. La razón es que la superficie de integración espacial $(D - 1)$ -dimensional sólo puede desplazarse en el tiempo. Por tanto, no se garantiza que existan operadores locales no cargados bajo el twist. En otras palabras, el orbifold generado por esta simetría puede estar simplemente vacío si todos los operadores están cargados. Volveremos a enfrentarnos a esta cuestión similar en el capítulo 8, al comparar estas ideas con el teorema de Coleman-Mandula. En cualquier caso, si el orbifold no es trivial, y los twists están cargados bajo una simetría global continua G (posiblemente una simetría del espacio-tiempo), no puede haber corriente de Noether en la teoría del orbifold que genera G .

Como caso particular de estas generalizaciones podemos elegir que el grupo de simetría continua sea el propio grupo de Poincare. En este caso, si la QFT tiene un tensor invariante gauge $v_{(s_1 \dots s_k) \alpha_1 \dots \alpha_l}$, donde $1 \leq p \leq D - 2$, que es cerrado para los primeros p índices

$$\partial_{(s_{k+1}} v_{(s_1 \dots s_k)) \alpha_1 \dots \alpha_l} = 0, \quad (5.137)$$

y no es la derivada exterior de una forma invariante gauge $a_{(s_1 \dots s_{k-1}) \alpha_1 \dots \alpha_l}$, entonces la QFT en cuestión no puede tener un tensor energía-momento si $l \geq 1$. Nótese que índices α_i pueden tanto espinoriales como de Lorentz. Es decir, en términos más generales, cualquier operador topológico (no necesariamente generado por un campo k -forma). cargado ante un grupo de simetría continuo G prohíbe la existencia de una corriente para G .

Otra generalización se refiere a simetrías globales discretas (no continuas) G . Aquí, la no existencia de una corriente local se sustituye por la no existencia de twists aditivos y concatenables. Las restricciones que podrían surgir en estas teorías, debido a esta obstrucción, son objeto de un estudio futuro y no se seguirán desarrollando en esta tesis.

La última generalización se refiere a la QFTs no relativista. Muchas de las herramientas utilizadas para el enfoque local de las simetrías generalizadas no se limitan únicamente a las QFTs relativistas. En particular, esperamos que por motivos bastante generales, las simetrías generalizadas cargadas bajo simetrías globales continuas prohíban la existencia de corrientes locales conservadas asociadas. Si la simetría global es discreta, esta condición prohibirá la existencia de twists concatenables. Este resultado podría ser interesante para sistemas de materia condensada. También reduce el número de loop-holes respecto a la aplicación del teorema de Weinberg-Witten en el contexto de la gravedad cuántica. En este contexto, el teorema de Weinberg-Witten se entiende como un obstáculo para disponer de un modelo de gravedad puramente

QFT, con un gravitón IR. Una fuente obvia de loop-holes que se ha explotado es la necesidad de simetría relativista en el UV. Aquí observamos que incluso si la QFT UV no es relativista, está muy restringida. En particular, no puede tener corrientes que generen ningún tipo de simetría espacio-temporal, y no puede ser discreta con twists concatenables.

5.5. Discusión del capítulo

En este capítulo hemos demostrado que las simetrías globales continuas que no dejan invariante todas las simetrías generalizadas no pueden ser generadas por una corriente local conservada. Además, en estos escenarios, la simetría generalizada debe estar asociada a un continuo de clases HDV duales no locales.

Estos resultados se han derivado de un cuidadoso análisis de las condiciones para que una simetría generalizada no sea invariante bajo una global. En primer lugar, observamos que las simetrías globales actúan como una transformación de punto en el espacio de clases HDV no locales. En segundo lugar, y lo que es más importante, desarrollamos una clasificación más exhaustiva de los operadores de twist en QFT. Descubrimos que los twists pueden ser aditivos (o no) y completos (o no), y que los twists aditivos en regiones más pequeñas podrían no producir twists para regiones más grandes. Esto nos sugiere el concepto de concatenabilidad de twists, el cual argumentamos como crucial para entender el teorema de Noether en QFT.

Hemos apoyado la discusión abstracta con varios ejemplos de simetrías generalizadas cargadas bajo una global en donde la simetría global es continua y por tanto sin corriente. En todos los casos analizados, la simetría generalizada es no compacta, es decir, esta asociada un grupo no compacto de clases HDV. Además, los ejemplos analizados, siempre correspondieron a campos libres sin masa. En el capítulo 6 veremos que esto es una condición necesaria para teorías UV completas con una simetría generalizada no compacta.

Sin embargo, notamos que las simetrías generalizadas cargadas ante un grupo continuo no necesariamente se corresponden con un grupo no compacto de clases HDV. En esta dirección, hemos iniciando una clasificación de las posibles estructuras en las que tenemos clases HDV no invariantes bajo un grupo uniparamétrico. Vimos que cuando existe más de un tipo de sectores no locales asociados a una dada región podemos tener un continuo compacto de clases HDV. En estos casos podemos tener teorías interactuantes. Un ejemplo es el de la simetrías 1-forma cargadas ante la acción de la simetría quiral en presencia de la anomalía ABJ. Estudiaremos este ejemplo para diversos modelos en el capítulo 7.

Por último, los resultados de este capítulo, por un lado, pueden ser usados para re-derivar teorema de Weinberg-Witten como un caso especial, generalizándolo en

varias direcciones no triviales. Por otro, parecen proporcionar una caracterización potencialmente completa del espacio de QFTs que muestra una violación de la versión fuerte del teorema de Noether. En esta dirección, probamos que la inexistencia de clases HDV cargadas ante una dada simetría implica que podemos construir twists aditivos, completos y concatenables que implementen dicha simetría. Pero, es incierto bajo qué condiciones estos twists pueden converger a una corriente de Noether. En el capítulo 8, estudiaremos esto recogiendo algunas de estas ideas combinadas con que desarrollaremos de capítulos siguientes y propondremos conjeturas interesantes para avanzar en esta dirección.

Capítulo 6

Cargas en la completación UV de una electrodinámica Neutra

El objetivo principal de este capítulo es demostrar una conjetura: una teoría invarianta de Poincaré UV completa con simetrías generalizadas no compactas tiene necesariamente un sector libre y no masivo.

En primer lugar, esta conjetura viene sugerida por nuestro fracaso (durante los capítulos 3, 4 y 5) en la construcción de ejemplos interactuantes. Pero hay más indicios. En particular, ya se ha probado que una teoría conforme en $D = 4$ con una simetría no compacta 1-forma tiene que ser libre [163]. En este capítulo estudiaremos el caso de simetrías k -forma no compactas en D dimensiones sin asumir la simetría conforme.

Esta idea es naturalmente interesante a la luz del capítulo 5, debido a que una simetría generalizada cargada ante un grupo continuo presenta un continuo de clases HDV duales. Más aún, si solamente podemos asociar un tipo de operador no local a una dada región, necesariamente tendremos un continuo no compacto de clases HDV. En este sentido, las ideas que desarrollaremos en este capítulo nos ayudarán a comprender el espacio de QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether. Sin embargo, es importante resaltar que la conjetura en cuestión sólo se refiere a las simetrías generalizadas. Es decir, no requerimos que estas estén cargadas bajo otra simetría global.

Otra motivación importante es que esta conjetura conlleva profundas implicaciones dinámicas. En particular, veremos que conecta la renormalizabilidad de ciertas teorías con una pregunta sobre sus simetrías y, en este sentido, describe nuevas fuentes de anomalías cuánticas. A continuación, ilustraremos esta noción en teorías del campo electromagnético con interacciones neutras.

Estas teorías están dadas por un Lagrangiano interactuante que podemos escribir sin implicar el potencial vector. Más específicamente, incluimos teorías de “Electrodinámica no lineal”¹ siendo ejemplos particularmente interesantes las teorías de Born-

¹Véase [175–178] para literatura reciente sobre el tema y [179] para un resumen actualizado.

Infeld [180], la más reciente “ModMax” [181–183] y las teorías del electromagnetismo quasi-topológico [184, 185]. También, englobamos dentro del concepto “electrodinámica neutra” acoplamientos magnéticos con campos neutros. Para ser concretos, comenzamos proponiendo el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\mu_1}{8} (F^2)^2 - \frac{\mu_2}{2} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

Estos acoplamientos no son renormalizables en ninguna dimensión $D > 2$, y es sencillo darse cuenta de que no podemos encontrar un acoplamiento neutro renormalizable para el campo electromagnético. En el modelo estándar, estos términos aparecen como términos efectivos de baja energía. El acoplamiento μ_1 es del orden $(e/m_e)^4$, mientras que μ_2 es del orden e/m_N para un neutrón y $e^3 m_l/M_Z^2$ para un neutrino, donde m_N es la masa del neutrón, y m_l representa las masas de los leptones cargados. Estos términos neutros tienen escalas características $\mu_1^{-1/4}$ y μ_2^{-1} donde se rompe la descripción efectiva. En el modelo estándar estos términos se generan integrando los campos cargados. De hecho, las partículas cargadas aparecen a escalas más pequeñas que $\mu_1^{-1/4}$ y μ_2^{-1} , donde el modelo efectivo predice que ocurre nueva física.

Es evidente entonces que nos encontramos con problemas para construir una electrodinámica puramente neutra desde el punto de vista perturbativo. La cuestión que queremos abordar es si se puede llegar a la misma conclusión a nivel no perturbativo: ¿existe una “electrodinámica neutra” UV completa o, a la inversa, cualquier teoría interactuante UV completa para el fotón contiene cargas?

Para abordar este problema en toda su generalidad necesitamos hacer más precisa la afirmación de que “no hay cargas”. Los operadores cargados no existen porque no son invariantes de gauge, y la existencia de partículas cargadas requiere entender el espectro de la teoría. Elegimos un camino diferente. El modelo (6.1), tomado a nivel clásico, tiene dos campos diferentes descriptos por 2-formas cerradas

$$F_{\mu\nu}, \quad dF = 0, \quad (6.2)$$

$$G_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (F^{\alpha\beta}(1 + \mu_1 F^2) + \mu_2 \bar{\psi} \sigma^{\alpha\beta} \psi), \quad dG = 0. \quad (6.3)$$

El campo G es cerrado debido a las ecuaciones de movimiento. El hecho de que existan dos campos F y G dados por 2-formas cerradas es lo que interpretamos como la ausencia de cargas en el modelo. De hecho, las cargas magnéticas llevarían a $dF \neq 0$ y las cargas eléctricas a la imposibilidad de encontrar un campo G tal que $dG = 0$. Esto es una característica común a todos los modelos en cuestión. La razón es evidente cuando escribimos la ecuación de movimiento de la forma habitual $\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu$. Luego, la

única forma de obtener una 2-forma cerrada G sería que

$$J^\mu = \partial_\nu \omega^{\mu\nu} \quad (6.4)$$

para algún otro campo 2-forma invariante de gauge $\omega^{\mu\nu}$. La forma particular (6.4) de la corriente es precisamente la que obtenemos en todos los modelos de electrodinámica neutra, pero no es el caso de la QED habitual. De forma más física, (6.4) nos dice que existe un operador de flujo eléctrico re-definido como integral de $G = \star(F + \omega)$ sobre superficies bidimensionales, que no detecta ninguna carga a través de su ley de Gauss.

En estos términos, podemos reformular lo que tiene de especial cualquier modelo de electrodinámica neutra diciendo que posee una simetría generalizada no compacta. Esto se refleja en la existencia de los generadores infinitesimales dados por los dos campos cerrados duales F y G . En este capítulo, demostraremos que F y G , son generadores de las simetrías de forma duales, y que podemos elegirlos como campos duales libres. Esto significa que si los campos F, G de la teoría efectiva interactúan, la simetría generalizada tiene que romperse en la completación UV a un grupo más pequeño, lo que implica la existencia de cargas eléctricas y/o magnéticas.

Otro ejemplo similar es la teoría de baja energía de un bosón de Goldstone. En un modelo de este tipo sólo podemos tener acoplamientos con derivadas de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \tilde{\mathcal{L}}(\partial\phi). \quad (6.5)$$

En este caso, podemos escribir las formas duales como

$$F_{\mu_1 \dots \mu_{d-1}} = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-1} \mu} \left(\partial^\mu \phi + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right), \quad G_\mu = \partial_\mu \phi. \quad (6.6)$$

Ambos campos son cerrados $dF = dG = 0$ y la teoría efectiva tiene simetrías de forma no compactas. De nuevo, todos los acoplamientos posibles son no renormalizables ya que la dimensión de $\partial_\mu \phi$ es $D/2$ y deben ir acompañados en el Lagrangiano por un campo vectorial de dimensión menor que $D/2$, lo cual no es posible.

El plan del capítulo es el siguiente. En la próxima sección 6.1, describiremos las propiedades de los dos generadores de simetrías de forma no compacta y mostraremos como dicha simetría puede definirse a nivel clásico. En la sección 6.2, analizaremos la forma de las funciones de dos puntos más generales de los campos involucrados, teniendo en cuenta las simetrías (o antisimetrías) requeridas y las restricciones de positividad. Luego, en la sección 6.3, estudiaremos aspectos de simetrías generalizadas en teorías invariantes de escala. En particular, probaremos que en tal caso las corrientes cerradas que generan una simetría de forma no compacta deben ser libres y sin masa. En esta linea, la sección 6.4 contiene la prueba principal. En ella extenderemos los resultados

obtenidos para teorías invariantes de escala a todas las QFTs. Esto requerirá el estudio de los puntos fijos UV de la teoría, y especialmente las restricciones que imponen sobre la QFT completa. Por último, la sección 6.5 discutiremos el resultado de este capítulo con una perspectiva ligeramente diferente. Como las simetrías generalizadas no compactas de los modelos clásicos interactuantes no pueden implementarse cuánticamente, podemos interpretar esto como una anomalía.

6.1. Simetrías de forma no compactas

En esta sección, para evitar ambigüedades, desarrollaremos exactamente que entendemos por simetrías de forma no compactas tanto a nivel clásico como cuántico. Comenzamos especificando que suposiciones necesitamos para entender los operadores no locales, definidos partir corrientes de forma conservadas, como generadores de una simetría de forma no compacta. Desde el punto de vista de AQFT, repasaremos en qué sentido estos operadores producen violaciones de dualidad de Haag para ciertas regiones. Luego, estudiamos como puede implementarse un escenario análogo en una teoría clásica de campos a través del corchete de Peierls/Poisson. Terminamos revisando varios ejemplos de simetrías de forma no compactas a nivel clásico en teorías interactuantes. Si bien la definición de la simetría de forma no compacta clásica no es necesaria para el desarrollo del capítulo, ni para la prueba de la conjetura que mencionamos, es necesario comprender en qué sentido y bajo qué condiciones dichas simetrías están bien definidas.

6.1.1. Características de una simetría de forma no compacta

Las simetrías de forma no compactas corresponden a la existencia de un campo F real k -forma cerrado ($dF = 0$), y un campo G real q -forma cerrado ($dG = 0$), con $D = k + q$, y $1 \leq k, q \leq D - 1$. Por definición y sin perdida de generalidad tomamos $k \geq q$. Suponemos que tanto F como G son campos de Wightmann físicos (invariantes gauge) de manera que podemos definir apropiadamente los flujos

$$\Phi_F = \int_{\Sigma_F} F, \quad \Phi_G = \int_{\Sigma_G} G, \quad (6.7)$$

sobre superficies espaciales k -dimensionales Σ_F , y superficies q -dimensionales Σ_G respectivamente. Estos flujos, dependen sólo de los bordes $\Gamma_F = \partial\Sigma_F$, $\Gamma_G = \partial\Sigma_G$, y no de las superficies particulares Σ_F y Σ_G . Por simplicidad, podemos pensar que Σ_F y Σ_G se encuentran en $x^0 = 0$.

Si $k < D - 1$, tanto Φ_F como Φ_G comutan con cualquier operador de campo local en cualquier punto x espacialmente separado de Γ_F y Γ_G respectivamente. Esto se debe

a que podemos deformar las superficies Σ_F y Σ_G de forma que queden espacialmente separadas de cualquier punto x , sin cambiar el operador de flujo (Véase la figura 3.1 para el caso de $k, q = 2$). En particular, los flujos comutan con $F(x)$ y $G(x)$ para x espacialmente separado de los respectivos bordes. Si $k = D - 1$ la commutatividad de Φ_F con operadores locales espacialmente separados del borde no puede implicarse porque sólo podemos deformar la superficie Σ_F en una dirección temporal. En este caso, suponemos además que Φ_F commuta con $F(x)$ y $G(x)$ para x espacialmente separados de Γ_F . En este caso $k = D - 1$ el flujo de F sobre todo el espacio da un generador de un grupo global de simetría uniparamétrico. Entonces, el requisito adicional que necesitamos para este caso es que F y G sean campos no cargados con respecto a esta simetría. Observamos que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar el espacio de Hilbert como el generado por F, G actuando sobre el vacío de tal forma que estos campos actúen irreduciblemente.

Tomemos Γ_F y Γ_G con la topología de S^{k-1} y S^{q-1} , y simplemente enlazados entre sí en el plano espacial $x^0 = 0$. Estas representan los bordes de regiones tipo disco Σ_F, Σ_G , de dimensión k y q respectivamente. Una última suposición que consideramos implicada en la idea de las simetrías de forma no compactas es que los flujos Φ_F y Φ_G no comutan entre sí en este caso de bordes simplemente enlazados. Esto implica que ninguno de los campos de forma es un campo de forma físicamente exacto. Es decir, no podemos escribirlos como $F = d\mathcal{F}$, o $G = d\mathcal{G}$, para campos \mathcal{F}, \mathcal{G} invariantes de gauge. De lo contrario Φ_F o Φ_G podrían escribirse como integrales de campos locales en Γ_F y Γ_G y los respectivos flujos comutarían.² Vimos extensivamente un ejemplo donde esto sucede: el caso del gravitón en $D > 4$ durante el capítulo 4.

Podemos ver una primera simplificación en este escenario de la siguiente manera. El conmutador $[\Phi_F, \Phi_G]$ no cambia si deformamos Γ_F o Γ_G manteniéndolos espacialmente separados y simplemente enlazados. La razón es que el cambio en el flujo Φ_G bajo tal deformación de Γ_G es un flujo en una superficie entre el borde Γ_G y su deformación Γ'_G . Entonces, es un flujo de G en una región espacialmente separada de Γ_F , y commuta con Φ_F . Lo mismo ocurre si deformamos Γ_F .

Como consecuencia de la idea anterior, podemos desplazar ambas superficies juntas hasta el infinito manteniéndolas unidas, y el conmutador no puede cambiar. Esto implica que el conmutador de los flujos commuta con cualquier operador local, y por tanto es un número, que también representa un invariante topológico para el par Γ_F, Γ_G . Podemos normalizarlo para que sea

$$[\Phi_F, \Phi_G] = i. \quad (6.8)$$

²Una excepción es el caso de simetrías globales $k = D - 1, q = 1$, donde G podría ser de la forma $d\phi$, para un campo escalar ϕ . Sin embargo, para tener flujos no commutativos ϕ debe ser un operador cargado bajo la simetría global, y por tanto cae fuera de las álgebras neutras generadas por G y F .

En esta situación la teoría generada por los campos F, G contiene violaciones de la dualidad de Haag. Para ver esto más claramente, tomemos regiones espacio-temporales causalmente complementarias R_F y R_G , tales que $\Gamma_F \subset R_F$ y $\Gamma_G \subset R_G$. Entonces, podemos asignar a estas regiones álgebras de von Neumann $\mathcal{A}(R_F)$ y $\mathcal{A}(R_G)$ generadas por ambos campos F, G en R_F y R_G . Sin embargo, estas álgebras no incluyen los grupos uniparamétricos de unitarios $a(q) = e^{iq\Phi_F}$, $b(g) = e^{ig\Phi_G}$, $q, g \in \mathbb{R}$. Estos están formados por exponentiales de versiones con smearing de los flujos Φ_F, Φ_G cuyos bordes tienen soporte compacto dentro de las respectivas regiones. Para ver esto notamos que por construcción $a(q)$ commuta con $\mathcal{A}(R_G)$ y $b(g)$ commuta con $\mathcal{A}(R_F)$. Entonces, el álgebra $\mathcal{A}(R_F)$ no puede contener $a(q)$ porque todos los elementos de esta álgebra commutan con el flujo Φ_G mientras que $a(q)$ no. Del mismo modo, $b(g)$ no está contenida en $\mathcal{A}(R_G)$. Así que tenemos

$$\mathcal{A}(R_F) \subsetneq \mathcal{A}(R_G)' \equiv \mathcal{A}_{\max}(R_F), \quad \mathcal{A}(R_G) \subsetneq \mathcal{A}(R_F)' \equiv \mathcal{A}_{\max}(R_G). \quad (6.9)$$

Es decir, (6.9) implica que no hay dualidad de Haag para estas regiones. Los operadores $a(q)$, $b(g)$, son operadores no locales en sus respectivas regiones en el sentido de que no pueden formarse localmente en estas regiones, pero commutan con los operadores locales fuera de ellas. Los campos de forma generan los grupos continuos duales de operadores de simetría no local de forma análoga a como una corriente de Noether genera una simetría global continua. Las cargas q, g , etiquetan las diferentes clases no locales de operadores. Los miembros de la misma clase no local se diferencian por la acción de los operadores locales en las regiones. Los operadores no locales $a(q), b(g)$ son duales entre sí en el sentido de que se basan en regiones complementarias y no commutan entre sí. Ambos conjuntos de operadores no locales duales forman grupos continuos no compactos. Tomamos este escenario como definición de una simetría de forma no compacta.

La relación (6.8) elimina la posibilidad de que cualquiera de los grupos duales sea un grupo $U(1)$ compacto, y da dos grupos duales no compactos \mathbb{R} de simetrías generalizadas.³ Las relaciones de commutación para los operadores no locales se fijan por (6.8) a

$$a(q) b(g) = e^{-iqg} b(g) a(q). \quad (6.10)$$

³Si una de las simetrías duales fuera $U(1)$ la dual se vería forzada a ser un grupo \mathbb{Z} no continuo, y sus operadores no locales no podrían ser generados por un campo de forma de manera análoga a como una simetría global discreta no es generada por una corriente. Veremos ejemplos de este tipo en el capítulo siguiente.

6.1.2. Simetrías de forma no compactas clásicas

Siguiendo con las ideas básicas necesarias para este capítulo definimos simetrías de forma no compactas en la teoría de campos clásica y mostramos que no surgen contradicciones para modelos interactuantes. Claramente, estas simetrías son anómalas en el sentido de que estos modelos no pueden existir a nivel cuántico, pero, por ahora procedemos.

Nuestra definición de simetría de forma requiere el análisis de la localización de los observables y de las relaciones de conmutación. En la teoría clásica, representamos los observables mediante funciones en el espacio de fases y las relaciones de conmutación mediante corchetes de Poisson. En este sentido, quedamos obligados a trabajar en un formalismo canónico, pero también necesitamos una descripción espacio-temporal para localizar los observables. Podemos conseguir esto mediante el formalismo covariante del espacio de fases [186–188].

Nuestro punto de partida es una acción S dada por un Lagrangiano local en términos de campos. En la teoría podemos tener simetrías gauge pero la acción es invariante gauge. Además, en el Lagrangiano podemos incluir términos de derivadas superiores, y tenemos la posibilidad de tratar con campos fermiónicos que anticomutran [187]. Para proceder, seguimos la notación compacta de Witt [188] y llamamos ϕ_i a los campos, donde el índice i incluye coordenadas del espacio-tiempo. La variación de la acción se anula en las soluciones de las ecuaciones de movimiento, y podemos escribirla como

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \equiv S_{,i} \doteq 0. \quad (6.11)$$

Nos referimos con el símbolo \doteq a una ecuación válida sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Consideremos un funcional invariante gauge A de los campos con soporte compacto $\text{sup}(A)$ en el espacio-tiempo. Dicho soporte es el conjunto de puntos tales que el funcional depende de los valores del campo en esos puntos. Este funcional tiene dos papeles diferentes. En primer lugar, podemos utilizarlo para perturbar la acción. En segundo lugar, si evaluamos sobre las soluciones de las ecuaciones de movimiento le podemos dar al funcional A la interpretación de un elemento del espacio de fases de la teoría. Dado un elemento del espacio de fases de la teoría A como un funcional invariante gauge de las soluciones de las ecuaciones de movimiento, podemos producir un funcional invariante gauge sobre los campos que es único excepto por términos proporcionales a las propias ecuaciones de movimiento. Esta ambigüedad no será relevante en lo que sigue.

Si perturbamos la acción con $S \rightarrow S + \epsilon A$, el cambio en las soluciones obedece a

orden lineal en ϵ las ecuaciones

$$S_{,ij} \delta_A \phi_j \doteq - A_{,i} . \quad (6.12)$$

donde $S_{,ij}$ es un operador diferencial local que depende de los campos si el Lagrangiano no es cuadrático. La solución de (6.12) no es única. Hay soluciones de la ecuación homogénea $S_{,ij} \delta\phi_j \doteq 0$ porque son transformaciones gauge infinitesimales alrededor de los campos de fondo (soluciones de las ecuaciones de movimiento), y también hay soluciones de la ecuación homogénea porque hay perturbaciones físicas linealizadas $\delta\phi_j$ que se propagan del pasado al futuro. Podemos considerar soluciones especiales que obedecen las condiciones de contorno retardadas y adelantadas

$$\delta_A^\pm \phi_i = 0 \text{ para } x \in I^\pm(\sup(A)) , x \notin \sup(A) , \quad (6.13)$$

donde $I^\pm(X)$ es el futuro y el pasado de X . Esto no elimina la redundancia gauge pero la variación en los observables físicos invariantes gauge resulta ser también invariante gauge, definiendo el nuevo elemento del espacio de fases

$$\delta_A^\pm B \equiv B_{,i} \delta_A^\pm \phi_i . \quad (6.14)$$

Notamos que, dejando a un lado la invariancia gauge, las soluciones adelantadas y retardadas son únicas porque la solución y todas sus derivadas desaparecen en el pasado o en el futuro.

Recuperamos las relaciones de reciprocidad $\delta_A^\pm B = \delta_B^\mp A$. A partir de ellas, podemos definir el corchete de Peierls/Poisson [186] siguiendo [188] como

$$\{A, B\} = \delta_A^- B - \delta_A^+ B = \delta_A^- B - \delta_B^- A = \delta_B^+ A - \delta_B^- A . \quad (6.15)$$

Vemos que este corchete obedece las relaciones usualmente impuestas, incluyendo la identidad de Jacobi.

Si dos observables están separados espacialmente tenemos $\{A, B\} = 0$. Esto nos requiere alguna condición extrae en el caso de lagrangianos de derivada superior, porque la perturbaciones adelantadas y retardadas se mueven en el campo de fondo de cualquier solución de las ecuaciones de movimiento. Por ende, tenemos que comprobar que este fondo no ensancha los conos de luz en los que se propaga la perturbación. Esta es una restricción de causalidad independiente para la teoría clásica no lineal que tenemos que asumir. Para los Lagrangianos (6.1) y (6.5) esto fue estudiado en [189]. El resultado es que las teorías clásicas son causales si los coeficientes de los términos no lineales satisfacen ciertas restricciones de positividad.

Una vez que tenemos un espacio de fases covariante, podemos definir una simetría

de forma clásica por analogía con el caso cuántico. Supongamos que tenemos una k -forma cerrada F invariante de gauge. Como discutimos en la sección anterior, un flujo $\Phi_F = \int_{\Sigma_F} F$ construido con F commuta con todos los observables O , que tienen un soporte topológicamente trivial, y están espacialmente separados del borde $\Gamma_F = \partial\Sigma_F$. Para $k = D - 1$ tenemos que pedir esta propiedad como condición independiente. Este campo de forma produce una simetría de forma sólo cuando F no es la derivada exterior de una $(k - 1)$ -forma invariante de gauge. En caso contrario Φ_F puede escribirse como una integral sobre Γ_F y no es un operador no local.

Supongamos ahora que tenemos formas k y $d - k$ cerradas F y G . Tomemos los elementos de flujo del espacio de fases Φ_F , Φ_G , sobre superficies con límites Γ_F y Γ_G , enlazados entre sí, y supongamos que los flujos no comutan. En este caso, obtenemos automáticamente que representan simetrías de forma porque las formas no pueden ser exactas en el espacio invariante gauge. Como describimos en la sección anterior, si movemos las fronteras Γ_F y Γ_G , manteniéndolas enlazadas y espacialmente separadas, el corchete de Poisson $\{A, B\}$ no puede cambiar. Por tanto, podemos deformar los bordes manteniéndolos enlazados y manteniendo invariante el conmutador. En particular podemos alejar Γ_F y Γ_G juntos. Entonces $\{A, B\}$ tiene que commutar con cualquier elemento del espacio de fases, y tiene que ser un número, que podemos normalizar a 1. Entonces, tenemos una simetría de forma asociada al grupo abeliano no compacto \mathbb{R} .

Supongamos que tenemos esta situación para una teoría donde el Lagrangiano tiene un término libre que ya muestra la simetría de forma no compacta, y un término interaccuante que no rompe esta simetría de forma dual. Para ser concretos, consideremos simplemente el caso

$$L = -\frac{1}{4} \left(F^2 + \frac{\mu}{2} (F^2)^2 \right). \quad (6.16)$$

Podemos modificar este lagrangiano de manera que

$$L = -\frac{1}{4} \left(F^2 + \frac{\mu(x)}{2} (F^2)^2 \right), \quad (6.17)$$

donde $\mu(x)$ depende de las coordenadas, y es constante en una región Λ del espacio-tiempo, y cero suficientemente lejos en el espacio-tiempo. Podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\partial_\nu (F^{\mu\nu} (1 + \mu(x) F^2)) = 0. \quad (6.18)$$

De esta forma, recuperamos dos corrientes 2-forma conservadas

$$F_{\mu\nu}, \quad * (F_{\mu\nu} (1 + \mu(x) F^2)). \quad (6.19)$$

Podemos aplicar el razonamiento anterior para demostrar que los flujos enlazados por estas dos formas tienen un conmutador constante. En particular, este conmutador pue-

de evaluarse en el infinito espacial donde $\mu(x) = 0$, lo que nos da el mismo conmutador que en la teoría de Maxwell. El mismo conmutador debe ser válido en la región donde $\mu(x) = \mu$. Podemos, entonces, tomar el límite donde $\mu(x) = \mu$ en todo el espacio-tiempo. Vemos que la adición de términos al Lagrangiano que no contienen cargas, y que en consecuencia no pueden romper la conservación de una de las formas cerradas, sólo deformarán la expresión de la corriente conservada, y deben mantener fijo el conmutador. Por lo tanto, estos modelos clásicos nos exhiben simetrías de forma no compactas a pesar de ser interactuantes.

Debido al teorema de Groenewold [190] no es posible ningún mapeo razonable del espacio de fases clásico a los operadores del espacio de Hilbert que respete la estructura no lineal y dé una representación de corchetes de Poisson. Las anomalías aparecen ahí, y en el caso que nos compete veremos que no existe un modelo cuántico correspondiente a estos modelos clásicos.

Para finalizar esta sección, como ya hemos definido las simetrías de forma a nivel clásico y comprendemos donde podemos encontrar problemas a nivel cuántico, estudiemos más detenidamente lo que ocurre cuando una de las simetrías es compacta. Pensemos en el caso de una simetría continua rota que da lugar a un bosón de Goldstone. Para ser concretos presentamos el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}(\partial\psi)(\partial\psi)^* - \frac{\lambda}{4}(|\psi|^2 - v^2)^2 \quad (6.20)$$

que tiene una simetría $U(1)$ rota. Escribiendo $\psi = (v + \sigma)e^{i\phi}$ tenemos

$$L = \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2(v + \sigma)^2 - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + 2v\sigma)^2. \quad (6.21)$$

Como consecuencia de las ecuaciones de movimiento, esta teoría se ve como si tuviéramos una simetría no compacta generada por la 1-forma cerrada $\partial_\mu\phi$ y la $(D - 1)$ -forma dual $*((\partial_\mu\phi)(v + \sigma)^2)$. Sin embargo, ϕ sólo está definido a excepción de múltiplos de 2π . Ambas corrientes son invariantes bajo el desplazamiento $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$. En la teoría completa sólo podemos hacer un smearing para $e^{i\int \alpha(x)\phi(x)}$ con $\int \alpha(x) = n$ un número entero. Esto implica que no podemos formar los flujos de $\partial_\mu\phi$ a lo largo de una recta con coeficientes arbitrarios.

En la teoría clásica esto significa que sólo se permiten flujos cuantizados y no representa un campo de forma ordinaria. En la teoría cuántica esto significa que los campos ϕ o $\partial_\mu\phi$ no son campos de Wightman (lo mismo vale para σ). En la integral de camino pueden representarse como campos siempre que también sumemos sobre contribuciones topológicamente no equivalentes para las amplitudes, donde el campo ϕ va a $2\pi n$ en el infinito en lugar de a cero. Así que el Lagrangiano (6.21) no está describiendo la teoría de forma completa porque tenemos una prescripción oculta para la integral de camino

que debemos que añadir. Sin embargo, vemos que la corriente que se conserva debido a las ecuaciones de movimiento es simplemente

$$((\partial_\mu \phi) (v + \sigma)^2) \sim i(\psi \partial_\mu \psi^* - \psi^* \partial_\mu \psi), \quad (6.22)$$

dándonos un buen candidato representar un campo de Wightman.

6.2. Funciones de dos puntos

En esta sección, volviendo a la configuración que explicamos en la sección 6.1.1, analizamos la forma general las funciones de dos puntos los campos reales F y G en cualquier dimensión D . Comenzamos con un breve resumen de la notación que utilizaremos por el resto del capítulo. Seguimos, con el estudio de todas las estructuras tensoriales posibles en el espacio de momento. Luego, proporcionamos la expresión más general para los correladores en la representación de Kallen-Lehmann permitida por las leyes de conservación de los campos, la comutatividad espacial y el conmutador de flujos (6.8). También, analizamos las restricciones de positividad requeridas sobre las funciones espectrales de Kallen-Lehmann en cada caso.

6.2.1. Biformas y notación

Podemos describir la estructura tensorial de la función de dos puntos de los campos F y G mediante biformas. Éstas pueden representarse mediante tensores con dos pares de índices antisimétricos. En este apéndice, estableceremos la notación para una $(k|q)$ -biforma T con dos multiíndices μ, ν . Obsérvese que con μ representamos el primer conjunto de k índices antisimétricos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, mientras que con ν describimos los siguientes q índices antisimétricos $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$. Es decir, podemos escribir

$$[T]_{\mu|\nu} \equiv [T]_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k | \nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}. \quad (6.23)$$

Un buen ejemplo explícito de una biforma es la métrica generalizada $\eta^{(k)}$ introducida en (4.66). Se trata de una $(k|k)$ -biforma obtenida por la contracción de dos tensores antisimétricos Levi-civita de la siguiente manera

$$\eta_{\mu|\nu}^{(k)} \equiv \frac{(-1)^{D-1}}{(D-k)!} \varepsilon_\mu^{\alpha} \varepsilon_{\nu\alpha} = \frac{(-1)^{D-1}}{(D-k)!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_{D-k}} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k \alpha_1 \dots \alpha_{D-k}}. \quad (6.24)$$

En general, las operaciones habituales de geometría diferencial pueden actuar sobre cualquiera de los dos conjuntos de índices. Siguiendo la notación de [131], al escribir la operación en el lado izquierdo de T denotamos que la operación actúa sobre los primeros k índices etiquetados por μ . Por ejemplo, el producto en exterior $p \wedge T$ donde

p^α es el vector momento da lugar al $(k+1|q)$ -biforma dada por

$$[p \wedge T]_{\mu|\nu} = \frac{1}{k!} \eta_{\mu|\alpha\rho}^{(k+1)} p^\alpha T_\rho^\nu \equiv \frac{1}{k!} \eta_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} | \alpha \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k}^{(k+1)} p^\alpha T^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}. \quad (6.25)$$

Por otro lado, si el operador está en el lado derecho de T , actúa sobre los segundos índices q etiquetados por ν . En este caso el producto exterior produce la $(k, q+1)$ -biforma

$$[T \wedge p]_{\mu|\nu} = \frac{1}{q!} \eta_{\nu|\rho\alpha}^{(q+1)} T_\rho^\mu p^\alpha \equiv \frac{1}{q!} \eta_{\nu_1\nu_2 \dots \nu_q \nu_{q+1} | \rho_1 \rho_2 \dots \rho_q \alpha}^{(q+1)} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q} p^\alpha. \quad (6.26)$$

Podemos extender las mismas ideas para otras operaciones. El producto punto actuando sobre la izquierda $p \cdot T$ produce una $(k-1|q)$ -biforma mientras que $T \cdot p$ da una $(k|q-1)$ -biforma

$$[p \cdot T]_{\mu|\nu} = p^\alpha T_{\alpha\mu|\nu} \equiv p^\alpha T_{\alpha\mu_1\mu_2 \dots \mu_{k-1} | \nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}. \quad (6.27)$$

$$[T \cdot p]_{\mu|\nu} = T_{\mu|\nu\alpha} p^\alpha \equiv T_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_k | \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{q-1} \alpha} p^\alpha. \quad (6.28)$$

Además, el dual de Hodge produce una $(D-k|q)$ -biforma o una $(k|D-q)$ -biforma respectivamente

$$[*T]_{\mu|\nu} = \frac{1}{k!} \varepsilon_{\mu\rho} T_\rho^\nu \equiv \frac{1}{k!} \varepsilon_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_{D-k} \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k} T^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}, \quad (6.29)$$

$$[T *]_{\mu|\nu} = \frac{1}{q!} T_\mu^\rho \varepsilon_{\rho\nu} \equiv \frac{1}{q!} T_{\mu_1\mu_2 \dots \mu_k}^{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q} \varepsilon_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{D-q}}. \quad (6.30)$$

Con esta normalización y la métrica en signatura⁴ $(+, -, - \dots)$ tenemos que

$$[* * T]_{\mu|\nu} = (-1)^{(k-1)(D-1)} [T]_{\mu|\nu}, \quad [T *]_{\mu|\nu} = (-1)^{(q-1)(D-1)} [T]_{\mu|\nu}. \quad (6.31)$$

En este contexto, nos será útil definir el operador $\tilde{*}$ que actúa en el lado derecho como

$$[T \tilde{*}]_{\mu|\nu} \equiv (-1)^{q(D-q)} [T *]_{\mu|\nu}. \quad (6.32)$$

6.2.2. Estructuras tensoriales

Cualquiera de las funciones de dos puntos F y G es una biforma conservada en cada índice. En otras palabras, en el espacio de momentos podemos escribir la estructura genérica de una función de Wightman de dos puntos, usando una función de Kallen-Lehmann, de la forma

$$\int ds \rho(s) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} P_{\mu|\nu}(p), \quad (6.33)$$

⁴Notamos que en este capítulo y los siguientes utilizaremos la métrica de Minkowski en signatura $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, \dots)$ a diferencia de los capítulos anteriores donde usamos $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots)$.

donde usamos notación recientemente mencionada de manera que el tensor de polarización $P_{\mu|\nu}$ es una $(k|k)$, $(q|q)$ o $(k|q)$ biforma según el correlador en cuestión. Además, las leyes de conservación $dF, dG = 0$ nos requieren que

$$p \wedge P = 0, \quad P \wedge p = 0. \quad (6.34)$$

Utilizando el operador estrella de Hodge $*$, podemos analizar un problema dual equivalente. Si definimos $\tilde{P} = *P*$, la condición de conservación viene dada por $p \cdot \tilde{P} = \tilde{P} \cdot p = 0$. Esto se debe a que estos dos tensores son proporcionales

$$*p \wedge *(\cdots) \sim p \cdot (\cdots). \quad (6.35)$$

Esto corresponde en el espacio de momento a la identidad $\delta = (-1)^{kD+1} * d *$ entre la coderivada δ (proporcional a la divergencia del tensor) y la derivada exterior d que actúa sobre las formas. Recordamos que $\delta \delta = 0$ como consecuencia de $dd = 0$.

A continuación estudiamos todas las estructuras posibles para el tensor de polarización P . Este tensor debe escribirse en términos de la métrica η , el momento p y el tensor de Levi-Civita ε . En primer lugar, consideramos los tensores construidos utilizando sólo la métrica. Comencemos con el caso de $\langle FF \rangle$ con $(k|k)$ -biformas de igual número de índices. El caso de $\langle GG \rangle$ se sigue de manera similar para $(q|q)$ -biformas. La antisimetría implica que si tenemos una métrica involucrada, sus dos índices deben pertenecer a los dos conjuntos diferentes de índices μ, ν , de igual tamaño. Entonces, hay exactamente k tensores métricos en P . Después de antisimetrizar en ambos conjuntos de índices, sólo hay una estructura tensorial posible que podemos obtener de esta forma. Esta está dada por un término proporcional a la métrica generalizada (6.24).

Para un polinomio del momento y la métrica, por antisimetría, no podemos incluir más de dos potencias de p . Tampoco solamente un momento, porque eso implicaría que una de las métricas tiene los dos índices en el mismo conjunto antisimétrico. Con dos vectores momento y la métrica, la única estructura tensorial posible que contiene un momento en cada conjunto de índices es

$$p \cdot \eta^{(k+1)} \cdot p. \quad (6.36)$$

Sin embargo, sólo una combinación de (6.24) y (6.36) es cerrada en ambos conjuntos índices. Puesto que (6.36) es la única estructura bi-cerrada, la bi-cerrada para P es su dual para el orden apropiado, digamos

$$*p \cdot \eta^{(d-k+1)} \cdot p * \sim p \wedge \eta^{(k-1)} \wedge p. \quad (6.37)$$

Consideremos ahora el correlador $\langle FG \rangle$, con índices $(k|q)$ obedeciendo $k + q = D$.

Podemos aplicar el análisis anterior si $k = q = D/2$ para D par. Si $k \neq q$ no podemos formar nada antisimétrico sólo con la métrica. Con un momento tenemos para $k = q+1$, y $D = 2k - 1$ impar,

$$\eta^{(k)} \cdot p \sim p \wedge \eta^{(k-1)}. \quad (6.38)$$

Sin embargo, esta estructura sólo es cerrada por un lado pero co-cerrada por el otro, y no puede aparecer en el correlador.

Además, con dos o más vectores de momento, la antisimetría de nuevo no nos permite ninguna estructura tensorial construida sólo con la métrica y el momento para $k \neq q$. Sin embargo, podemos considerar estructuras tensoriales que contengan el tensor de Levi-Civita ε . Estas resultan de las anteriores actuando con la estrella de Hodge en un solo lado. La parte de $P_{\mu\nu}$ que contiene ε tiene que ser bi-cerrada por separado. Entonces tenemos que ir a través de las estructuras tensoriales anteriores y comprobar si son cerradas por un lado y co-cerradas por el otro. La única estructura bi-cerrada posible se obtiene dualizando (6.37) cuando $p^2 = 0$, ya que en tal caso obtenemos

$$*p \cdot \eta^{(d-k+1)} \cdot p \sim p \cdot \eta^{(k+1)} \cdot p *. \quad (6.39)$$

Este término siempre puede aparecer en $\langle FG \rangle$. También, podemos verlo aparecer en $\langle FF \rangle$ o $\langle GG \rangle$ cuando $k = q = D/2$.

Si incluimos el tensor de Levi-Civita, surge una nueva posibilidad lineal en el momento para el correlador $\langle FF \rangle$. Dualizando (6.38) por un lado recuperamos

$$*\eta^{(d-k)} \wedge p \sim p \wedge \eta^{(k-1)} * \sim *p \cdot \varepsilon *. \quad (6.40)$$

Esto sólo puede aparecer cuando D es impar y $D = 2k - 1$. En $D = 3$ representa el caso del campo Maxwell-Chern-Simons.

En resumen, para el caso genérico donde $k \neq q$ y $k \neq (D + 1)/2$, la forma más general de los correladores en forma Kallen-Lehmann es

$$\langle F(x)F(0) \rangle = \int_0^\infty ds (a_F \delta(s) + \rho_F(s)) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} P^{(k)}(p), \quad (6.41)$$

$$\langle G(x)G(0) \rangle = \int_0^\infty ds (a_G \delta(s) + \rho_G(s)) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} P^{(q)}(p), \quad (6.42)$$

$$\langle F(x)G(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2) e^{ipx} (P^{(k)} \tilde{*})(p), \quad (6.43)$$

$$\langle G(x)F(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2) e^{ipx} (*P^{(k)})(p), \quad (6.44)$$

donde el operador $\tilde{*}$ es el definido en (6.32). Las funciones de Kallen-Lehmann tienen que ser reales debido a la conmutatividad a distancias espaciales y porque requerimos

que los campos sean reales. Aquí, hemos separado las partes sin masa de las densidades espectrales para $\langle FF \rangle$ y $\langle GG \rangle$ con los coeficientes reales a_F y a_G . Además, hemos elegido la normalización de (6.37) como

$$P_{\mu|\nu}^{(k)} \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \eta_{\mu|\alpha}^{(k)\gamma} \eta_{\nu|\beta\gamma}^{(k)} p^\alpha p^\beta. \quad (6.45)$$

Esto nos permite obtener una identidad útil para el dual de $P^{(k)}$ a ambos lados. Es decir, tenemos

$$*P^{(k)}\tilde{*} = P^{(q)} + (-1)^q \eta^{(q)} p^2. \quad (6.46)$$

Curiosamente, vemos a partir de (6.39) que el correlador $\langle F(x)G(0) \rangle$ sólo puede ser proporcional a un único término en el espacio de momento con soporte $p^2 = 0$. Hemos escrito este término en la forma (6.43). Este no puede ser cero porque el conmutador de flujos tiene que ser un número, y su valor de expectación en el vacío no se anula. Hemos optado por normalizar el coeficiente a uno. Este correlador sólo puede tener una contribución no masiva, y por tanto es covariante de escala, y satisface la ecuación de movimiento sin masa

$$\square \langle F(x)G(0) \rangle = 0. \quad (6.47)$$

En otras palabras, tenemos que la simetría generalizada no compacta fuerza la forma particular de esta función de dos puntos que no renormaliza. El hecho de que obedezca a la ecuación de movimiento libre sin masa contiene la esencia de la prueba de que la teoría tiene un sector libre no masivo.

Sin embargo, notamos que la ecuación de Klein Gordon para el correlador de dos campos diferentes como (6.47) no implica la ecuación para los operadores, ni que los campos sean libres. Por ejemplo, podríamos escribir $F = F_0 + F_1$ y $G = G_0 + G_1$ con $F_0 = *G_0$ libres y F_1, G_1 no libres, de manera que F_1 , y G_1 tengan funciones de dos puntos cero entre sí y con los campos libres F_0 , y G_0 . En este caso seguiríamos teniendo un subsector libre de la teoría, que es responsable de la función de dos puntos mixta no nula y de la simetría no compacta. Es una expectativa natural que éste sea el caso en general. En lo que resta del capítulo, nos ocuparemos del “filtrado” de los campos para extraer su parte libre.

Antes de seguir, como hemos dicho, hay que considerar dos casos especiales. Cuando $k = q = D/2$ las estructuras de $\langle FF \rangle$ y $\langle GG \rangle$ pueden aparecer en $\langle FG \rangle$ y $\langle GF \rangle$ y viceversa. Escribimos la nueva forma de los correladores como en (6.41-6.45) más

nuevos términos

$$\langle F(x)F(0) \rangle = \cdots + b_F \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2) e^{ipx} (P^{(k)} \tilde{*})(p), \quad (6.48)$$

$$\langle G(x)G(0) \rangle = \cdots + b_G \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2) e^{ipx} (P^{(k)} \tilde{*})(p), \quad (6.49)$$

$$\langle F(x)G(0) \rangle = \cdots + \int_0^\infty ds (c \delta(s) + \tilde{\rho}(s)) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} P^{(k)}(p), \quad (6.50)$$

$$\langle G(x)F(0) \rangle = \cdots + \int_0^\infty ds (c \delta(s) + \tilde{\rho}(s)) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} P^{(k)}(p). \quad (6.51)$$

El nuevo término en los correladores $\langle FF \rangle$ y $\langle GG \rangle$ obedece que

$$[P^{(k)} \tilde{*}]_{\mu|\nu} = (-1)^{k-1} [P^{(k)} \tilde{*}]_{\nu|\mu}. \quad (6.52)$$

Si combinamos esto con la commutatividad espacial, se impone que $b_F, b_G = 0$ si k es par. En los casos restantes sólo implica que las funciones de Kallen-Lehmann son reales.

Análogamente, a partir de (6.40), en el caso de $D = 2k - 1$ nos aparece una posibilidad adicional para la función de dos puntos $\langle FF \rangle$

$$\langle F(x)F(0) \rangle = \cdots + i^{k-1} \int_0^\infty ds \rho_{CS}(s) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) e^{ipx} (*p \cdot \varepsilon \tilde{*}). \quad (6.53)$$

donde el factor i^{k-1} se ha añadido para mantener $\rho_{CS}(s)$ real.

6.2.3. Conmutadores de flujos

Como describimos anteriormente, los conmutadores de flujos enlazados (6.8) son numéricos y no dependen de la forma geométrica de los lazos enlazados Γ_F, Γ_G . Esto puede verificarse utilizando el correlador cruzado (6.43) en la expresión para el conmutador de flujos e integrando sobre las regiones limitadas por los lazos Γ_F, Γ_G . Para ello necesitamos un mapa φ_F que describa el embedding de Σ_F en \mathbb{R}^D mediante

$$\varphi_F^\mu(s_1, s_2, \dots, s_k) = (\varphi_F^1(s_1, s_2, \dots, s_k), \dots, \varphi_F^d(s_1, s_2, \dots, s_k)), \quad (6.54)$$

donde las variables s_1, s_2, \dots, s_k parametrizan la superficie tomando valores en un dominio $S_F \subset \mathbb{R}^k$. En este contexto, podemos definir el flujo como el pullback de F sobre

S_F o más explícitamente

$$\begin{aligned}\Phi_F(\Sigma_F) &= \int_{S_F} d^k s F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} (\varphi_F^1(s_1, s_2, \dots, s_k), \dots, \varphi_F^d(s_1, s_2, \dots, s_k)) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial \varphi_F^{\mu_1}}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi_F^{\mu_2}}{\partial s_2} \dots \frac{\partial \varphi_F^{\mu_k}}{\partial s_k} \right).\end{aligned}\quad (6.55)$$

Comenzamos ahora calculando el conmutador de los flujos definidos sobre un “cuadrado” espacial infinito k -dimensional Σ_F^∞ y otro $(D-k)$ -dimensional Σ_G^∞ . Elegimos las coordenadas $(x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{d-1})$ de modo que las superficies están definidas análogamente a (4.77-4.78) de la forma

$$\Sigma_F^\infty \equiv \left\{ x^0 = 0, x^1 \in (-\infty, \alpha), x^2, x^3, \dots, x^k \in \mathbb{R}, x^{k+1}, \dots, x^{D-1} = 0 \right\}, \quad (6.56)$$

$$\Sigma_G^\infty \equiv \left\{ x^0 = 0, x^1 \in (\beta, \infty), x^2, x^3, \dots, x^k = 0, x^{k+1}, \dots, x^{D-1} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (6.57)$$

Esto nos lleva a que Σ_F^∞ y Σ_G^∞ estén parametrizados por los siguientes mapas

$$\begin{aligned}\varphi_F^\mu &= (0, x^1, x^2, \dots, x^k, 0, 0, \dots, 0), \\ \varphi_G^\mu &= (0, x^1, 0, \dots, 0, x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^{D-1}).\end{aligned}\quad (6.58)$$

Considerando (6.58) en (6.55) obtenemos que podemos calcular el flujo de F sobre Σ_F^∞ simplemente como

$$\Phi_F(\Sigma_F^\infty) = \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k F_{12\dots k}(0, x^1, x^2, \dots, x^k, 0, 0, \dots, 0). \quad (6.59)$$

Para proceder, calculamos el valor de expectación del conmutador mediante

$$\langle [\Phi_F(\Sigma_F^\infty), \Phi_G(\Sigma_G^\infty)] \rangle = \int_{\Sigma_F^\infty} \int_{\Sigma_G^\infty} \langle F(x), G(y) \rangle - \int_{\Sigma_F^\infty} \int_{\Sigma_G^\infty} \langle G(y), F(x) \rangle, \quad (6.60)$$

donde solo tenemos en cuenta los componentes relevantes presentados en (6.59) y su análogo para Φ_G . Considerando que la estructura tensorial en cuestión toma los valores

$$[P^{(k)} \tilde{*}]_{12\dots k 1k+1\dots D-1} = [*P^{(k)}]_{1k+1\dots D-1 12\dots k} = (-1)^{k(D-k)+1} p_1 p_0 \quad (6.61)$$

podemos integrar las funciones delta que aparecen en las integrales de los momentos p_2, p_3, \dots, p_{d-1} . La expresión resultante para el valor de expectación del conmutador

$\langle [\Phi_F(\Sigma_F^\infty), \Phi_G(\Sigma_G^\infty)] \rangle$ es

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{kq+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \int_{\beta}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} dp_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \delta(p_0^2 - p_1^2) p_1 p_0 e^{ip_1(x_1-y_1)} \\ &= (-1)^{kq} \frac{i}{2\pi} \int_{\beta}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 e^{ip_1(x_1-y_1)} = i (-1)^{kq} \theta(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (6.62)$$

La dependencia del resultado de la función de Heaviside $\theta(\alpha - \beta)$ representa que el conmutador sólo es no nulo cuando $\alpha > \beta$. Es decir, cuando los límites de los cuadrados están enlazados. Por otra parte, el signo $(-1)^{kq}$ no es relevante para el resultado, ya que el signo del conmutador también cambiará con la orientación de las superficies. Como esperamos que el conmutador sea siempre un número, tenemos para cuadrados enlazados que se extienden hasta el infinito que

$$[\Phi_F(\Sigma_F^\infty), \Phi_G(\Sigma_G^\infty)] = \pm i. \quad (6.63)$$

Podemos generalizar fácilmente este resultado a cuadrados finitos. Obtenemos el flujo sobre un cuadrado finito Σ_F restando al flujo sobre Σ_F^∞ el flujo sobre otro cuadrado infinito $\tilde{\Sigma}_F$ que termina en $x_1 < \beta$. Tenemos la posibilidad de hacer lo mismo sobre un cuadrado finito dual Σ_G restando el flujo sobre $\tilde{\Sigma}_G$ que termina en $x_1 > \alpha$. Esto significa que tenemos

$$\Phi_F(\Sigma_F) = \Phi_F(\Sigma_F^\infty) - \Phi_F(\tilde{\Sigma}_F), \quad \Phi_G(\Sigma_G) = \Phi_G(\Sigma_G^\infty) - \Phi_F(\tilde{\Sigma}_G), \quad (6.64)$$

donde hemos elegido las regiones $\tilde{\Sigma}_F$ y $\tilde{\Sigma}_G$ de manera que

$$[\Phi_G(\tilde{\Sigma}_G), \Phi_F(\tilde{\Sigma}_F)] = [\Phi_G(\tilde{\Sigma}_G), \Phi_F(\Sigma_F^\infty)] = [\Phi_G(\Sigma_G^\infty), \Phi_F(\tilde{\Sigma}_F)] = 0. \quad (6.65)$$

Esto implica que el conmutador calculado sobre los cuadrados finitos enlazados Σ_F y Σ_G es el mismo que el que se extiende hasta el infinito. A saber,

$$[\Phi_G(\Sigma_G), \Phi_F(\Sigma_F)] = [\Phi_G(\Sigma_G^\infty), \Phi_F(\Sigma_F^\infty)] = \pm i. \quad (6.66)$$

Podemos aplicar el mismo argumento a otras deformaciones de las geometrías de Σ_F y Σ_G que no cambian el hecho de que estén enlazadas. En resumen, el conmutador sobre superficies enlazadas vendrá siempre dado por

$$[\Phi_F, \Phi_G] = \pm i. \quad (6.67)$$

Recordamos que el caso $k = q = D/2$ puede contener términos adicionales en la función de dos puntos cruzada (6.50). Sin embargo, este nuevo término no puede

cambiar el conmutador de los flujos. La razón es que la forma de $P^{(k)}$ es proporcional a (6.37) y esto implica que estos nuevos términos⁵ son la doble derivada exterior (en distintas coordenadas) de una $(k-1|q-1)$ -biforma que llamamos $K(x, y)$

$$\langle F(x)G(y) \rangle = \cdots + d_x d_y K(x, y). \quad (6.68)$$

Podemos ver que estos términos doblemente exactos no pueden cambiar el valor del conmutador de dos maneras. Primero podemos insertarlos directamente en la expresión para el conmutador de flujos y verificar que se anulan incluso cuando los flujos no están trivialmente enlazados. En este caso, las componentes nuevas relevantes al cálculo de los conmutadores son

$$[P^{(k)}]_{12\dots k 1k+1\dots D-1} = [P^{(k)}]_{1k+1\dots D-1 12\dots k} = \begin{cases} p_1^2 & \text{if } k = 1 \\ p_2 p_3 & \text{if } k = 2 \\ 0 & \text{if } k > 2 \end{cases}. \quad (6.69)$$

Para $k > 2$ obtenemos trivialmente cero. Para $k = 2$ tenemos que sustituyendo en (6.60) podemos escribir el término extra en (6.68) como

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_F^\infty} \int_{\Sigma_G^\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p_0) \delta(p^2) P^{(2)}(p) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \int_{\beta}^{\infty} dy_1 \int d^4 p \theta(p_0) \delta(p^2) p_2 \delta(p_2) p_3 \delta(p_3) = 0, \end{aligned} \quad (6.70)$$

donde integrando la función delta obtenemos que el término extra no contribuye al conmutador. Para $k = 1$ procedemos de la misma manera y obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_F^\infty} \int_{\Sigma_G^\infty} \int \frac{d^2 p}{2\pi} \theta(p_0) \delta(p^2) P^{(1)}(p) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \int_{\beta}^{\infty} dy_1 \int d^2 p \theta(p_0) \delta(p^2) p_1^2 (e^{ip_1(x_1-y_1)} - e^{-ip_1(x_1-y_1)}) = 0, \end{aligned} \quad (6.71)$$

donde obtenemos el cero si cambiamos el signo de p_1 en el segundo término. Resumiendo obtenemos

$$\int_{\Sigma_F^\infty} \int_{\Sigma_G^\infty} \int \frac{d^{2k} p}{(2\pi)^{2k-1}} \theta(p_0) \delta(p^2) P^{(k)}(p) = 0. \quad (6.72)$$

Como esto es cierto para cualquier elección α y β , es válido para cuadrados enlazados o no enlazados. Teniendo en cuenta que $dF = 0$ y $dG = 0$, las superficies pueden deformarse de nuevo, lo que significa que el resultado (6.72) es válido para cualquier elección de Σ_F y Σ_G .

⁵Físicamente, este tipo de términos corresponden a la correlación entre operadores lineales aditivos, que, enlazados o no, deberían comutar debido a la microcausalidad.

Otra forma de ver que los términos adicionales en el caso $k = q = D/2$ no afectan el conmutador es cambiar a los correladores euclídeos. Estos no son singulares excepto en los puntos de coincidencia. Tomemos un disco k -dimensional Σ_F con borde Γ_F en $x^0 = 0$ y un disco q -dimensional Σ_G en $y^0 = 0$ con borde Γ_G . Los bordes Γ_F y Γ_G están simplemente enlazados entre sí. Sin cambiar los flujos podemos deformar Σ_F moviendo los puntos hacia el futuro en tiempo euclídeo de forma que formemos una nueva superficie Σ_F^+ con la misma frontera Γ_F en $x^0 = 0$. De forma análoga formamos Σ_F^- deformando la superficie hacia el pasado. Considerando el tiempo como vector euclídeo $\hat{\tau} = (1, 0, \dots, 0)$, la expresión euclídea para el valor de expectación del conmutador es

$$\langle [\Phi_F, \Phi_G] \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Sigma_F^+ + \epsilon \hat{\tau}} \int_{\Sigma_G} \langle F(x) G(y) \rangle - \int_{\Sigma_F^- - \epsilon \hat{\tau}} \int_{\Sigma_G} \langle F(x) G(y) \rangle \right). \quad (6.73)$$

Es inmediato que la contribución de un término doblemente exacto como el de (6.68) se anula. Esto es debido a que, como éste es exacto en x e y , obtenemos una expresión donde la integración es en los bordes Γ_G y $\Gamma_F \pm \epsilon \hat{\tau}$. Estos dos términos son continuos en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ ya que sólo involucran correlaciones distantes, y se cancelan entre sí en el límite. No ocurre lo mismo con el término (6.43) que es exacto en cualquiera de sus variables pero no en ambas a la vez. Podemos integrar este término sobre Σ_G para dar una forma armónica no exacta en $\mathbb{R}^D - \Gamma_G$ que contribuye de forma no trivial al conmutador (6.73).

Visto a la luz del cálculo euclídeo (6.73), el conmutador de flujos aparece como un invariante topológico para dos superficies intersecantes de dimensiones k y q con $k + q = D$, una cerrada, $\Sigma_F^+ \cup \Sigma_F^-$, y otra abierta Σ_G . Se denomina índice de Kronecker para las superficies, y el correlador $\langle FG \rangle$ es la bi-forma “número de enlace” que permite escribir este invariante topológico como una integral doble. Véase [191], capítulo 33.

6.2.4. Positividad

En una teoría unitaria, los correladores de la forma $\langle FF \rangle$ deben ser semidefinidos positivos

$$\int d^d x d^d y \phi^*(x) \langle F(x) F(y) \rangle \phi(y) \geq 0. \quad (6.74)$$

Esperamos que esto sea válido para todas las posibles funciones de prueba $\phi(x)$. Por lo tanto, para cada p tenemos que

$$\hat{\phi}^*(p) P^{(k)}(p) \hat{\phi}(p) \geq 0, \quad (6.75)$$

lo que lleva a que la estructura tensorial en el espacio de momentos sea semidefinida positiva. Esto es cierto para $P_{\mu\nu}^{(k)}$ como se define en (6.45). Podemos comprobarlo fácil-

mente fijando p en la dirección temporal. Para $p^2 = 0$ la positividad de esta matriz se deduce porque es el límite de una matriz semidefinida positiva.

Además, las restricciones de positividad se aplican por separado a las funciones delta no masivas y a las medidas remanentes de Kallen-Lehmann $\rho_F(s)$ y $\rho_G(s)$ que incluimos en (6.41) y (6.42). Eligiendo un smearing en (6.75) con $p^2 \neq 0$, la positividad de los correladores $\langle FF \rangle$ y $\langle GG \rangle$ implica que $\rho_F(s)$ y $\rho_G(s)$ son medidas positivas en $[0, \infty)$. Además, para distribuciones temperadas, $\rho_F(s), \rho_G(s)$ tienen que ser como mucho de crecimiento polinomial en el infinito. Por otro lado, podemos deducir la positividad de los términos que incluyen funciones delta no masivas a partir de la positividad en el límite IR, donde éstas constituyen la única contribución restante. En este contexto, recuperamos que las constantes que multiplican las funciones delta deben obedecer $a_F, a_G \geq 0$.

Para este caso particular, la positividad de la matriz de los correladores cruzados nos añade una nueva restricción sólo para $p^2 = 0$. Hemos elegido convenientemente la normalización de (6.45) de modo que $P^{(q)}(p) = *P^{(k)}(p)\tilde{*}$. Véase (6.46). Por lo tanto, podemos escribir la matriz de correladores cuando $p^2 = 0$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a_F P^{(k)} & P^{(k)} \tilde{*} \\ *P^{(k)} & a_G *P^{(k)} \tilde{*} \end{pmatrix}. \quad (6.76)$$

El requisito en cuestión es que (6.76) debe ser una matriz semidefinida positiva. Entonces, se deduce que la positividad para $p^2 = 0$ da

$$a_F a_G \geq 1. \quad (6.77)$$

En particular, esto obliga a los coeficientes a_F y a_G a ser distintos de cero, lo que significa que $a_F, a_G > 0$. Este resultado, combinado con la forma específica de los correladores (6.41) y (6.42), implica que la teoría tiene una partícula sin masa.

Nos queda analizar los casos especiales. Cuando $k = q = D/2$ los correladores tienen los términos adicionales descritos en (6.48-6.51). Para la parte masiva, seguimos teniendo $\rho_F, \rho_G \geq 0$. Para el sector $p^2 = 0$, si k es par, obtenemos $a_F, a_G \geq 0$ y $a_F a_G \geq 1 + c^2$. Por otro lado, si k es impar tenemos que $0 \leq |b_F| \leq a_F$ y $0 \leq |b_G| \leq a_G$, y la matriz de correladores cruzados produce que $a_F a_G + b_F b_G \geq 1 + c^2$. Nótese que la combinación de ambas restricciones en cada caso implica la existencia de una partícula sin masa.

En el caso $D = 2k - 1$, la función de dos puntos $\langle GG \rangle$ permanece inalterada y seguimos recuperando $\rho_G(s) \geq 0$. Sin embargo, para el $\langle FF \rangle$ definido por (6.53), podemos comprobar que

$$0 \leq |\rho_{CS}(s)| \leq \sqrt{s} \rho_F(s). \quad (6.78)$$

Esto obliga a $\rho_{CS}(s)$ a desaparecer para $s = 0$ y no altera la desigualdad (6.77) ni los resultados obtenidos para el sector $p^2 = 0$.

6.3. Simetrías de forma invariantes de escala

A continuación analizamos las simetrías de forma en teorías invariantes de escala. Comenzamos mostrando que si la simetría de forma es no compacta, entonces los campos que generan dicha simetría deben ser libres y sin masa. Luego, estudiamos el caso más general de un único campo de forma conservado, y clasificamos distintas posibilidades que existen en dicho caso.

6.3.1. Simetrías de forma no compactas invariantes de escala

Consideremos el caso de la simetría de forma no compacta generada por los campos F y G en una teoría invariante de escala. Sean las dimensiones de F y G dadas por Δ_F y Δ_G respectivamente. Esto implica que debemos introducir las densidades espectrales

$$\rho_F(s) \sim s^{\Delta_F - D/2 - 1}, \quad \rho_G(s) \sim s^{\Delta_G - D/2 - 1}. \quad (6.79)$$

El hecho de que ρ_F y ρ_G deban ser medidas integrables implica las cotas de unitaridad

$$\Delta_F, \Delta_G \geq D/2. \quad (6.80)$$

En el caso concreto de la dimensión $D/2$ que satura el límite de unitaridad, debemos sustituir la medidapectral por $\delta(s)$ en lugar de s^{-1} debido a que esta última no es integrable en $s = 0$. Por otra parte, los correladores (6.43-6.44) nos requieren que

$$\Delta_F + \Delta_G = D. \quad (6.81)$$

Combinando (6.80-B.16), tenemos que $\Delta_F = \Delta_G = D/2$. Esto implica la saturación de la cota de unitaridad, y que la medidapectral es proporcional a $\delta(s)$. Entonces, las funciones de dos puntos satisfacen $\square_x \langle F(x)F(y) \rangle = 0$. A partir de aquí, por el argumento estándar de que

$$\langle \square F(x) | \square F(y) \rangle = 0 \Rightarrow \square F(x) | 0 \rangle = 0 \Rightarrow \square F(x) = 0, \quad (6.82)$$

obtenemos ecuaciones de movimiento libres para el campo (véase, por ejemplo, [192]). Como es bien sabido, esto implica que el campo es libre. Los campos se pueden normalizar como $F = *G$.⁶

⁶El término impar de paridad en $D = 2k - 1$ no puede aparecer en el punto fijo, y el conteo de potencias para el caso $k = q = D/2$ no se altera.

Otra forma de llegar a esta conclusión es utilizar un teorema de Buchholz y Freidenhagen que implica que para una teoría invariante de escala una partícula sin masa es una partícula libre [193]. Es precisamente el contenido de partícula libre de la teoría el responsable de los términos $\delta(s)$ en las funciones espectrales, en particular para la forma de $\langle FG \rangle$ que necesitamos para tener la simetría de forma no compacta.

Un campo que satisface la ecuación de Klein Gordon es libre

Como mencionamos, que un campo satisfaga la ecuación de Klein Gordon implica que el campo en cuestión libre. Existen varias pruebas de este hecho. A continuación presentamos un breve resumen de las referencias que pueden encontraren la literatura. Además, presentamos una prueba alternativa simple basada en las propiedades de las funciones armónicas. Para comenzar veamos que en este contexto, libre significa que el conmutador del campo consigo mismo es númerico o que el campo es gaussiano y tiene funciones de n puntos que satisfacen el teorema de Wick. Ambas propiedades son equivalentes para un campo de Wightman, y caracterizan a los generalized free fields [194]. El caso masivo se trató primero en [195, 196]. El caso sin masa se demostró en [197], incluyendo el caso más sutil de $D = 2$, donde el enunciado se aplica a campos vectoriales quirales. Este último trabajo demuestra que el conmutador tiene que ser un número a partir de las propiedades de soporte copacto de las funciones de correlación en el espacio de momento y la condición espectral. La misma conclusión se sigue del resultado [198] que establece que si el soporte de un campo en el espacio de momento no contiene la vecindad de un punto espacial entonces el campo es un generalized free field. De hecho, la ecuación de movimiento implica que el campo tiene soporte en el cono nulo (un mass-shell para el caso masivo) en el espacio de momento. Más recientemente, el teorema ha sido revisado en [199], donde el énfasis está en propiedades de la propagación de ecuaciones hiperbólicas y una descripción algebraica.

Ahora, mostraremos que una prueba sencilla se deduce de las propiedades de las funciones armónicas en la versión euclídea de la teoría. Pensemos primero en un campo escalar para simplificar. El correlador euclídeo $S(x, y_1, \dots, y_n)$ es una función analítica real de x excepto en los puntos y_1, \dots, y_n . Además, es una función armónica en dicho dominio debido a las ecuaciones de movimiento $\square\phi = 0$. También, cae a cero en el infinito y diverge como a lo sumo como una potencia cerca de los puntos y_1, \dots, y_n [200]. Por la expresión general de una función armónica en $\mathbb{R}^D - \{y_1, \dots, y_n\}$, tenemos una descomposición en los diferentes términos singulares para cada y_i que tiene la forma [201]

$$S(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^r \frac{q_{m,i}[x - y_i]}{|x - y_i|^{2m+D-2}}. \quad (6.83)$$

Los $q_{m,i}$ son polinomios armónicos homogéneos de grado m en las coordenadas de $x - y_i$

cuyos coeficientes pueden depender de los puntos $y_j \neq y_i$, y r es un entero positivo. Podemos deducir esta descomposición esencialmente de la unicidad de las funciones armónicas una vez fijado el comportamiento en el borde y en los puntos singulares.

Si utilizamos esta expresión para $x \rightarrow x + a, y_i \rightarrow y_i + a$, en el límite $|a| \rightarrow \infty$, se deduce de la propiedad de clustering de los correladores que $r = 0$ y $q_{0,i} = S(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)$, donde \hat{y}_i representa una variable omitida. Hemos normalizado la función de dos puntos para que sea $|x - y|^{-(D-2)}$. Esto nos da la gaussianidad

$$S(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \frac{S(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)}{|x - y_i|^{D-2}}. \quad (6.84)$$

Para campos armónicos en una representación arbitraria de espín y $D > 2$ la gaussianidad se obtiene en la misma línea. Una descomposición análoga a (6.83) es válida para el caso masivo en términos de soluciones elementales de la ecuación de Klein Gordon euclídea, las cuales son singulares en un único punto. Entonces, podemos extender la misma derivación a campos que obedecen ecuaciones lineales masivas.

Para $D = 2$, utilizando coordenadas complejas, tenemos $\square = \partial_z \partial_{\bar{z}}$. Entonces, para los operadores quirales en las CFT de $D = 2$, como las corrientes o el tensor de energía-momento, todos los correladores son armónicos (holomorfos en este caso) y por lo tanto, de acuerdo con (6.83), las funciones de correlación son meromorfas. La estructura singular del OPE es suficiente para calcular las funciones de correlación completas en forma cerrada. Véase [202]. Sin embargo, estos correladores no son necesariamente gaussianos y, en general, la función de dos puntos no es suficiente para determinarlos. La novedad aquí es que los coeficientes de $q_{m,i}$ pueden depender de y_i para $D = 2$, y el correlador sigue siendo armónico en y_i , mientras que esto no puede ocurrir en $D > 2$. Esto tiene el efecto de que hay términos en $x - y_i$ en (6.83) tales que $q_{m,i}$ puede decaer a cero en el límite $|a| \rightarrow \infty$, haciendo que este término sea invisible en el límite de clustering. Sin embargo, una corriente quiral es siempre gaussiana.

6.3.2. Una simetría de forma continua invariante de escala

En esta sección analizamos el caso más general de una única simetría de forma continua en una teoría invariante de escala. Consideramos que esta está generada por el campo H con h índices antisimétricos. Utilizamos otra letra para este campo para no confundirlo con el análisis de F, G en el resto del capítulo. Este análisis no es estrictamente necesario para los propósitos de este capítulo, centrado principalmente en el caso no compacto, pero queremos destacar que incluso si sólo se tiene invariancia de escala muchas de las características que se siguen de la invariancia conforme aparecen a partir del análisis de la simetría generalizada.

Vemos que la dimensión de escala Δ_H de este campo resulta ser $D/2$ o h para

$h \geq D/2$. La razón es muy sencilla. Si $\Delta_H \neq h$ los operadores no locales $e^{i\alpha \int_{\Sigma} d\sigma H}$ tienen un parámetro α que transforma de forma no trivial ante transformaciones de escala. Esto significa que las clases HDV no locales de estos operadores (la carga de la simetría de forma esta etiquetada por α) cambian con la escala. Como las clases HDV no son invariantes bajo un grupo de simetría continuo, vimos en el capítulo anterior que la simetría de forma debe ser continua. En este caso particular, implica que la simetría es no compacta. Por ende, necesariamente existe una simetría de forma dual continua, digamos generada por \tilde{H} con $D - h$ índices. Como hemos visto, la única forma de que el correlador de H y \tilde{H} tenga el término necesario para producir conmutadores numéricos entre los flujo es que ambos campos tengan la dimensión libre $D/2$. Otra forma de decir esto es que los operadores de flujo $\Phi_H, \Phi_{\tilde{H}}$, que generan las transformaciones de simetría de forma, deben tener conmutador i . La transformación invariante de escala asociada a un parámetro λ multiplica uno de los flujos por $\lambda^{\Delta_H - h}$ y entonces el otro debe transformarse con exponente $h - \Delta_H$. Esto nos da una dimensión de escala $\Delta_{\tilde{H}} = D - \Delta_H$, y una de las dos es incompatible con el límite de unitaridad excepto en el caso libre, donde ambas son iguales a $D/2$. Luego, también tenemos la posibilidad de $\Delta_H = h$, para $h > D/2$. En este caso, la simetría de forma es invariante bajo escaleos pero no puede ser una simetría no compacta ya que no puede existir una forma dual con dimensión $D - h < D/2$. Debe ser entonces una simetría compacta $U(1)$.

En resumen, una forma cerrada H con h índices en una teoría invariante de escala debe encontrarse en una de las siguientes posibilidades mutuamente excluyentes:⁷

- (a) H es un campo libre con dimensión $\Delta_H = D/2$, que genera una simetría de forma no compacta junto con su correspondiente campo dual $*H$.
- (b) H tiene dimensión $\Delta_H = h$ con $h > D/2$, generando una simetría de forma $U(1)$ continua pero compacta.
- (c) H es una forma exacta, es decir, es una derivada total $H = d\phi$ con ϕ un campo invariante de gauge. En este caso H no genera una simetría de forma.

En el último caso el campo es cerrado, pero no produce una simetría de forma porque los flujos son locales sus bordes. Aun así, el caso $h = 1$ puede ser una simetría de forma en el caso de que la simetría dual sea una simetría global y la transformación de simetría actúe como $\phi \rightarrow \phi + \text{constante}$ para el campo escalar ϕ . Pero, éste sólo puede ser un campo escalar ϕ libre sin masa, y ya cubrimos este caso en el punto (a).

⁷Suponemos que puede definirse una red aditiva para regiones causales basadas en la superficie $t = 0$, de modo que la simetría de forma pueda definirse correctamente. Esto elimina explícitamente los generalized free fields. En este sentido, alcanza con que la teoría contenga un tensor de energía-momento, pero podría valer de forma más general.

Durante el razonamiento anterior no consideramos simetría conforme, sino sólo argumentos asociados a violaciones de dualidad de Haag que implican la existencia de simetrías duales generalizadas. Sin embargo, es interesante analizar las implicaciones de la invariancia conforme por si misma sin apelar estas ideas.⁸

Un campo primario h -forma H tiene una cota de unitariedad $\Delta_H \geq \max(h, D - h)$ [204–207]. Puede ser cerrado sólo para $\Delta_H = h \geq D/2$, cuando satura la cota unitariedad. A la inversa, es co-cerrado para $\Delta_H = D - h$, $h \leq D/2$. El único caso libre es para D par con $h = D/2$. Fuera de estos casos, el campo cerrado no puede ser primario. Pero, nos resta analizar si puede ser un campo descendente, es decir, una derivada de un campo primario. Una derivada puede añadir un índice al campo, en cuyo caso sólo permitimos una derivada porque H es antisimétrico, es decir, tendríamos $H = d\phi$ para algún primario $(h - 1)$ -forma ϕ . Otra posibilidad sería que tengamos $H_{\mu_1 \dots \mu_h} = \partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} \phi_{\mu_1 \dots \mu_h \alpha_1 \dots \alpha_n}$ para un campo primario $\phi_{\mu_1 \dots \mu_h \alpha_1 \dots \alpha_n}$ antisimétrico en los índices μ y simétrico en los α . Sin embargo, dicho campo no puede ser cerrado porque dichos campos primarios no obedecen ecuaciones de conservación a menos que se encuentren en el límite de unitariedad, y en tal caso la divergencia es cero [207]. La tercera y última posibilidad sería que $H = \delta\phi$ para un primario antisimétrico ϕ . La conservación implica que ϕ es libre, y eso implica que el número de índices en ϕ es $D/2$, y que $\delta\phi = 0$. Por tanto, para una CFT tenemos el mismo resultado que en el caso anterior, con el añadido de que el caso (a) sólo puede darse para $h = D/2$. Resumiendo, si tenemos un punto fijo conforme con una simetría de forma no compacta, sólo puede corresponder a la teoría de dos campos de forma primarios y libres de dimensión $D/2$ (como en el campo de Maxwell para $D = 4$).

Si volvemos al caso general, es importante que las simetrías de forma de los casos (a) y (b) no estén saturadas. Equivalentemente, no podemos haber llegado a un límite topológico en el que los operadores unitarios no locales tengan valor de expectación 1 o 0. Estos casos sólo pueden ser el resultado de un límite, pero nunca ser producidos por operadores reales existentes en la teoría. Por ejemplo, tomemos una región R con la topología de un $S^{k-1} \times T$ siendo T un subconjunto compacto de \mathbb{R}^{D-k+1} . Entonces, podemos formar el operador unitario

$$W(q) = e^{i q \int \omega(x) H(x)}, \quad (6.85)$$

donde q es la carga asociada a la clase HDV no local y $\omega(x)$ es una función de smearing tal que

$$\delta\omega(x) = J(x), \quad J(x) = 0 \text{ si } x \notin R. \quad (6.86)$$

Como vimos en el capítulo 3, esta condición garantiza que $W(q)$ corresponda a un

⁸Véase [163, 203] para un análisis similar en el caso conforme.

operador localizado en R en el sentido de que commuta con operadores locales en R' . Por otro lado, para tener carga q necesitamos normalizar el flujo de J en una sección S de R

$$\int_S J = 1. \quad (6.87)$$

El valor de expectación de este operador unitario está acotado como $0 < |\langle 0 | W(q) | 0 \rangle| < 1$. No puede ser igual a 1 porque en ese caso $W(q)|0\rangle = |0\rangle$ debido a la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Por el teorema de Reeh-Schlieder si $(W(q) - 1)|0\rangle = 0$ para un operador local entonces $W(q) = 1$, que no es el caso. De la misma manera no puede ser $\langle 0 | W(q) | 0 \rangle = 0$ para todo q . Si ése fuera el caso, como $W(q)$ no puede aniquilar el vacío, debe convertirlo en un vector unitario ortogonal $|q\rangle$. De ello se seguiría que todos los $|q\rangle$ son ortogonales entre sí para el parámetro continuo q , lo que es imposible.

Esto tiene una implicación interesante en cualquier teoría en la que exista un campo cerrado F (no necesariamente asociado a una simetría no compacta). En ese caso, o bien el campo es una derivada total $F = d\phi$, o bien el punto fijo UV contiene violaciones de dualidad de Haag. Es decir, las violaciones de dualidad de Haag no pueden convertirse en topológicas en el UV. Esto contrasta con los casos de sectores no continuos, como el caso de las teorías de Yang Mills asintóticamente libres donde la simetría generalizada discreta se satura en el UV [57].

6.4. Flujo del grupo de Renormalización

En esta sección probamos que una teoría con simetrías de forma no compacta tiene un sector libre sin masa. Tales resultados descienden de la prueba invariante de escala, presentada en la sección 6.3.1, mediante argumentos relacionados al flujo del grupo de renormalización (RG). Por lo tanto, para continuar, haremos la suposición habitual de que una teoría UV completa tiene un punto fijo UV invariante de escala, y que la teoría completa surge perturbando dicho punto fijo UV. Para el problema que nos interesa, de hecho, necesitamos suponer menos estructura, básicamente que hay un punto fijo UV invariante de escala, y que a los campos cuánticos en este punto fijo corresponden campos cuánticos (Wightman) en la teoría completa, y viceversa. Dado que los detalles de la relación esperada entre el punto fijo UV y la QFT correspondiente rara vez se explican con detalle, nos esforzaremos por ser más precisos en lo que sigue. En este escenario analizaremos las restricciones sobre la QFT completa que surgen de la existencia de un punto fijo UV con una simetría de forma no compacta. Aunque la existencia de un punto fijo invariante de escala es una suposición en esta tesis, observamos que esto se ha demostrado bajo la condición de ciertas propiedades del espacio de fases que restringen el aumento del número de grados de libertad a altas energías [208].

6.4.1. Suposiciones sobre el flujo del RG y el límite UV

Puesto que la existencia de una completación, o un límite UV de la teoría, es bastante central para nuestros argumentos, vamos a ser explícitos sobre los supuestos implicados en esta idea. Describimos la QFT y su punto fijo UV mediante el conjunto de sus campos de Wightman. Suponemos que el punto fijo UV es una teoría invariante de escala.

Formalmente, dado un campo φ , suponemos que siempre hay un $\Delta > 0$ tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\alpha \langle \varphi(\lambda x) \varphi(0) \rangle = 0, \quad \forall \alpha > \Delta, \quad (6.88)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\alpha |\langle \varphi(\lambda x) \varphi(0) \rangle| = \infty, \quad \forall \alpha < \Delta. \quad (6.89)$$

De esta manera, decimos que dicho campo φ tiene dimensión asintótica Δ . En una teoría invariante de escala para campos irreducibles esto coincide con la dimensión de escala. Suponemos, tanto para el punto fijo UV como para la QFT, que el espacio lineal de campos con dimensión menor que cualquier Δ es de dimensión finita y que los campos se encuentran en representaciones de dimensión finita del grupo de Lorentz. Ésta es una condición necesaria para muchos de los requisitos habituales de una QFT, por ejemplo tener una función de partición finita.

Para continuar, con respecto a la relación entre la QFT y su punto fijo UV, haremos las siguientes suposiciones:

- (a) Para cada φ de la QFT existe una función $Z_\varphi(\lambda)$ y un campo φ_0 en el punto fijo UV (llamamos φ_0 al límite UV de φ), único a excepción de la normalización, tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle Z_\varphi(\lambda) \varphi(\lambda x_1) \cdots Z_\varphi(\lambda) \varphi(\lambda x_n) \rangle = \langle \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_n) \rangle. \quad (6.90)$$

Las funciones $Z_\varphi(\lambda)$ son altamente no únicas pero su límite asintótico está bastante restringido. En particular

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-\alpha} Z_\varphi(\lambda) = 0, \quad \text{si } \alpha < \Delta, \quad (6.91)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-\alpha} Z_\varphi(\lambda) = \infty, \quad \text{si } \alpha > \Delta, \quad (6.92)$$

donde Δ es la dimensión de escala de φ_0 . De aquí se deduce que φ_0 tiene una dimensión de escala única y que se corresponde con una única representación de espín. Estas coinciden con la dimensión asintótica y el espín de φ . Escribimos este mapeo de campos (a excepción de la normalización) como $\mathcal{M}(\varphi) = \varphi_0$, o simplemente $\varphi \rightarrow \varphi_0$. Este mapeo es generalmente muchos a uno porque a partir de una combinación lineal de campos en la QFT, sólo la componente de dimensión más alta sobrevive en el límite UV. También, deducimos que para una

combinación irreducible no nula de derivadas de φ , que para abreviar escribimos como $\partial\varphi$, y tal que $\partial\varphi_0 \neq 0$, tenemos $\mathcal{M}(\partial\varphi) = \partial\varphi_0$, donde $Z_{\partial\varphi}(\lambda) = \lambda Z_\varphi(\lambda)$. Si $\partial\varphi = 0$ lo mismo vale para φ_0 , es decir $\partial\varphi_0 = 0$.

- (b) Existe una base lineal B_0 de los campos en la teoría UV, que tiene representación de espín y dimensión de escala definidas, y una base B para los campos de la QFT, tal que para cada uno de los campos $\varphi_0 \in B_0$ hay un único (excepto la normalización) $\mathcal{N}(\varphi_0) = \varphi \in B$, tal que $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\mathcal{N}(\varphi_0)) = \varphi_0$. La idea física detrás de esta suposición es que los campos irreducibles en el punto fijo UV (en una cierta base en el caso de tener un espectro degenerado) generan campos en la QFT una vez que perturbamos la teoría fuera del punto fijo. De esto deducimos que para cada $\tilde{\Delta} > 0$, los campos en $\mathcal{N}(\{\varphi_0 \in B_0, \Delta_{\varphi_0} < \tilde{\Delta}\})$ forman una base lineal para todos los campos en la QFT con dimensión asintótica menor que $\tilde{\Delta}$, y que las dimensiones de ambos espacios es la misma. Esperamos que cualquier $\varphi \rightarrow \varphi_0$ conduzca a un $\varphi_0 \in B_0$, exceptuando posibles degeneraciones debidas a simetrías. Más en general, para tal $\varphi \rightarrow \varphi_0$, donde φ_0 se descompone linealmente en un subconjunto $\varphi_0^i \in B_0$, podemos descomponer linealmente el campo φ en los elementos φ^i de B asociados a φ_0^i más (eventualmente) campos de menor o igual dimensión. Combinando estas ideas con el supuesto (a), pedimos que las funciones de correlación obedezcan que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle Z_{\varphi^{i_1}}(\lambda) \varphi^{i_1}(\lambda x_1) \cdots Z_{\varphi^{i_n}}(\lambda) \varphi^{i_n}(\lambda x_n) \rangle = \langle \varphi_0^{i_1}(x_1) \cdots \varphi_0^{i_n}(x_n) \rangle. \quad (6.93)$$

- (c) Para cualquier $\varphi_0 \in B$, con $\mathcal{N}(\varphi_0) = \varphi$, y cualquier campo irreducible no nulo formado a partir de las derivadas de φ_0 , que para abreviar llamaremos $\partial\varphi_0$, suponemos que $\partial\varphi_0 \in B_0$ y $\mathcal{N}(\partial\varphi_0) = \partial\varphi \in B$.

Algunas de las ideas anteriores han requerido una comprensión más cuidadosa de la relación entre una QFT y su límite UV. Aunque estos son supuestos usualmente implícitos en la noción de una teoría en el límite UV, sería importante tener una derivación de estas propiedades desde un punto de vista más general. Aunque no nos ocuparemos aquí de esta investigación, observamos que los avances en los estudios matemáticos de la QFT en las últimas décadas ayudan a delinear los contornos de estos supuestos usualmente utilizados. A continuación, revisamos brevemente parte este progreso incluyendo las referencias relevantes.

La idea del grupo de renormalización puede formular precisamente en el contexto algebraico de AQFT mediante la idea de álgebras escaleables (“scaling algebras”) [209]. Estas también pueden ser usadas para definir apropiadamente una teoría en el límite UV. En general la complicación reside en que, dicho límite puede no ser único, o puede ser clásico (en el sentido de que todos los operadores commutan). Más aún, podemos

construir ejemplos que “fallan” utilizando generalized free fields⁹. Como ocurre para cualquier campo, el crecimiento polinómico de la función de dos puntos en el espacio de momento obliga a que exista un Δ tal que (6.88) se cumpla [210]. Pero (6.88-6.89) no se cumplen necesariamente para el mismo Δ . Luego, es posible diseñar una función espectral de Kallen-Lehmann para el correlador del generalized free field tal que su comportamiento a corta distancia oscile entre diferentes dimensiones de escala y nunca converja realmente.

Para controlar el comportamiento de la teoría límite, y eliminar estos casos, es necesario introducir una condición sobre el espacio de fases que limite el crecimiento del número de grados de libertad a altas energías. Con tal fin, en el contexto algebraico, se han introducido varias condiciones sobre el espacio de fases. Una de estas condiciones es llamada compacidad uniforme (“uniform compactness”), y garantiza la unicidad del límite y la convergencia a una QFT invariante dilatacional [208]. Otra “condición microscópica del espacio de fases” se ha introducido en [30], y se demostró que bajo esta condición existe un número finito de campos de espín finito con dimensiones de escala por debajo de cualquier número fijo Δ [211]. Las simetrías globales internas (rotas o no rotas) y espacio-temporales de la QFT se preservan en el límite del escaleo, y pueden obtenerse análogos de las funciones de renormalización $Z_\varphi(\lambda)$ presentadas en (6.90) [211]. Inclusive, esta condición de espacio de fases es lo suficientemente fuerte como para permitir un OPE [212].

En conclusión, gran parte de las suposiciones del presente trabajo respecto al límite UV se derivan de las condiciones del espacio de fases que, a grandes rasgos, podemos entender como restricciones al crecimiento del número de grados de libertad en el UV. Por ejemplo, basta con que este crecimiento esté acotado por arriba por el correspondiente a un número finito de campos libres en un número finito de dimensiones espacio-temporales $\geq D$. Sin embargo, la coincidencia con nuestros requisitos no es completa. Por ejemplo, [211] sólo prueba que el número de campos φ_0 independientes del punto fijo UV con dimensión de escala por debajo de cierto Δ es menor o igual que el número de campos linealmente independientes φ de la QFT por debajo de la misma dimensión.

6.4.2. Filtrado de campos libres en el UV

Analicemos las distintas posibilidades de los límites UV F_0, G_0 de los campos F, G . Estos satisfacen $dF_0 = dG_0 = 0$. Empecemos por la hipótesis más sencilla en la que la simetría de forma se genera en el UV por los campos límite F_0, G_0 . Como comentamos en la sección 6.3, esto implica que ambos campos tienen dimensión $D/2$. Las correla-

⁹Estos se definen por una función espectral de Kallen-Lehmann en el correlador de dos puntos y el teorema de Wick. Véase apéndice A.

ciones de estos campos UV serán proporcionales a una $\delta(p^2)$ en el espacio de momento. El requisito de que el término de enlace en $\langle FG \rangle$ no sea borrado por la renormalización implica que las funciones de renormalización tienen un límite $Z_F \sim \lambda^{D/2} Z_F^0$, $Z_G \sim \lambda^{D/2} Z_G^0$, con Z_F^0 y Z_G^0 finitos. Utilizando la notación de (6.41-6.44), obtenemos cuando $p^2 = 0$ para los coeficientes de las estructuras tensoriales normalizadas en matriz de correladores cruzados de F_0 y G_0 :

$$\begin{pmatrix} (Z_F^0)^2 (a_F + \int ds \rho_F) & Z_F^0 Z_G^0 \\ Z_F^0 Z_G^0 & (Z_G^0)^2 (a_G + \int ds \rho_G) \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Simplifiquemos aún más el escenario suponiendo que no hay degeneración en la dimensión de escala ni en los espines de F_0 y G_0 . Por lo tanto, podemos normalizar F_0 y G_0 de tal manera que $F_0 = *G_0$, y los coeficientes de la matriz anterior sean todos iguales a uno. De aquí obtenemos un determinante cero, lo que nos lleva a la condición

$$\left(a_F + \int ds \rho_F \right) \left(a_G + \int ds \rho_G \right) = 1. \quad (6.95)$$

Sin embargo, la positividad en el límite IR implica $a_F a_G \geq 1$, (6.77). Combinando con la positividad de ρ_F y ρ_G tenemos que

$$\rho_F = 0, \quad \rho_G = 0. \quad (6.96)$$

Por ende, tenemos funciones de correlación que obedecen a la ecuación de Klein Gordon sin masa, y en consecuencia una teoría libre. No es difícil darse cuenta de que siguiendo el mismo cálculo, el caso ligeramente más complicado de $k = q = D/2$, donde podemos encontrar términos mixtos en la matriz de correladores de la forma (6.48-6.51), obtenemos de nuevo a campos libres.

Otra forma de decir esto es que como vale la relación dualidad $F_0 = *G_0$ con F_0 el único campo que encontramos para la dimensión de escala y espín en cuestión, los campos $\mathcal{N}(F_0) \sim F$ y $\mathcal{N}(*G_0) \sim *G$ son proporcionales entre sí. Esto produce que

$$dF = d*G = 0 \Rightarrow \delta G = 0 \Rightarrow \square G = (d\delta + d\delta)G = 0, \quad (6.97)$$

y lo mismo ocurre para F a partir de $dG = 0$.

Podemos considerar el caso más general en el que las dimensiones de escala $D/2$ y los espines de F, G en el UV son degenerados, pero dichos campos siguen teniendo renormalizaciones finitas. En este caso obtenemos una descomposición

$$F = \tilde{F} + F_1, \quad G = \tilde{G} + G_1. \quad (6.98)$$

Los campos \tilde{F} y \tilde{G} son responsables de la simetría de forma en el UV,¹⁰ y podemos elegirlos de forma que $\tilde{F} = * \tilde{G}$. Los campos \tilde{F}, F_1, G_1 son libres y no están correlacionados en el UV. Si F_1 y G_1 estuvieran correlacionados en el UV tendríamos una componente $F_1 = *\tilde{G}_1$ que podríamos absorber en las definiciones de \tilde{F} y \tilde{G} . Seguiríamos teniendo $dF = d\tilde{F} + dF_1 = 0$, $dG = d\tilde{G} + dG_1 = 0$, pero los campos individuales $\tilde{F}, \tilde{G}, F_1, G_1$ podrían no ser cerrados fuera del punto fijo. Ciertamente resulta un escenario muy particular. No obstante, vemos que el análisis de positividad sigue misma línea que el cálculo anterior dando de nuevo un resultado libre. Debido a su extensión presentamos los detalles de este cálculo debajo.

Solamente resta analizar el caso cuando al menos uno de los campos tiene renormalización infinita. Con esto queremos decir que la integral de la medida espectral es divergente, $\int ds \rho(s) = \infty$. En este caso la función de dos puntos es más singular que la libre, y no es difícil ver que $Z(\lambda)$ tiene que tender a cero más rápido que la correspondiente a un campo libre:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Z(\lambda) \lambda^{-D/2} = 0. \quad (6.99)$$

En particular, tendremos entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Z_F(\lambda) Z_G(\lambda) \lambda^{-D} = 0. \quad (6.100)$$

En este caso, los flujos, luego de que realizamos el escaleo correspondiente,

$$\Phi_F^\lambda = Z_F(\lambda) \int_{\Sigma_F} F(\lambda x) = Z_F(\lambda) \lambda^{-k} \int_{\lambda \Sigma_F} F(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \Phi_{F_0} = \int_{\Sigma_F} F_0(x), \quad (6.101)$$

$$\Phi_G^\lambda = Z_G(\lambda) \int_{\Sigma_G} G(\lambda x) = Z_G(\lambda) \lambda^{-q} \int_{\lambda \Sigma_G} G(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \Phi_{G_0} = \int_{\Sigma_G} G_0(x), \quad (6.102)$$

se conservan y una versión con smearing de ellos tiene valores de expectación finitos en el límite UV. Sin embargo, el comutador llega a cero en el UV debido a que

$$[\Phi_F^\lambda, \Phi_G^\lambda] = i Z_F(\lambda) Z_G(\lambda) \lambda^{-D} \rightarrow 0. \quad (6.103)$$

En otras palabras, los campos UV F_0, G_0 son cerrados, pero su función de correlación cruzada no contiene el término de número de enlace. La razón es que, como vimos anteriormente, dicho término no se renormaliza en la QFT, y por ende se borra por renormalización en la teoría UV.

Si el campo UV $F_0 = d\phi_0$ es exacto, tenemos un campo ϕ en la QFT tal que $\phi \rightarrow \phi_0$. Deducimos, entonces, que $d\phi$ es una componente de F . Podemos simplemente eliminar esta componente y redefinir $F \rightarrow F - d\phi$. El nuevo campo sigue siendo cerrado, y sigue

¹⁰Más exactamente, sus límites UV \tilde{F}_0 y \tilde{G}_0 son responsables de la simetría de forma no compacta.

generando la misma simetría de forma no compacta, porque ésta no puede cambiarse por la adición del campo exacto. De este modo eliminamos la posibilidad de que F_0 sea (físicamente) exacto en el UV. Lo mismo ocurre con G_0 .

Por otro lado, si F_0, G_0 no son exactos, generan simetrías de forma no triviales en la teoría UV, y estas simetrías de forma no son duales entre sí. Podemos definir los operadores de flujo no locales unitarios y escaleados por analogía con (6.85-6.87) como

$$W^\lambda(q) = e^{i q \int d^D x \omega(x) F(\lambda x)}, \quad (6.104)$$

donde $\delta\omega = J$ tiene soporte en una región fija topológicamente no contractible R , con carga unitaria, véase (6.87) o para más detalles el capítulo 3. El límite débil de este operador no local da lugar a un operador no local basado en R , con carga q en la teoría límite UV

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} W^\lambda(q) = W^0(q) = e^{i q \int d^D x \omega(x) F_0(x)}. \quad (6.105)$$

Por tanto, por el análisis general revisado en el capítulo 2, sabemos que deben existir operadores duales $T^0(g)$ con valores de expectación no saturados, y relaciones de commutación

$$W^0(q) T^0(g) = e^{i q g} T^0(g) W^0(q). \quad (6.106)$$

Estos $T^0(g)$ están generados por el campo de forma dual $*F_0$ en caso de que el UV sea libre. Sino, cuando elegimos que el grupo $U(1)$ corresponda a $q \in [0, 1]$, los operadores $T^0(g)$ tienen cargas discretas $g \in 2\pi n$. En cualquier caso, fuera del punto fijo, los $W^\lambda(q)$ son auténticos operadores no locales de la teoría. Entonces, para regiones finitas pequeñas, a medida que $\lambda \rightarrow 0$, debe existir un conjunto de operadores $T^\lambda(g)$ que satisfagan (6.106) con $W^\lambda(q)$ también en la teoría completa, y tales que sus valores de expectación converjan a los de $T^0(g)$.

Podríamos buscar los operadores $T^\lambda(g)$ entre los generados por los flujos de G , pero esto es imposible. Si intentamos mantener fijo el comutador de los dos operadores no locales como $\lambda \rightarrow 0$, por analogía con (6.104) tenemos que tomar un operador de la forma

$$T^\lambda(g) = e^{i g \int d^D x \tilde{\omega}(x) Z_G(\lambda) G(\lambda x)} \sim e^{i g (\int d^D x \tilde{\omega}(x) G_0(x))}. \quad (6.107)$$

Esto nos conduce a un escaleo del flujo de G demasiado poco suprimido para producir un operador con valor de expectación no nulo en el límite.

En otras palabras, esto significa que las violaciones de dualidad de la teoría forman un grupo mayor, por ejemplo $\mathbb{R} \times U(1)$ o mayor, en lugar de sólo \mathbb{R} . Entonces, F resulta ser una mezcla de generadores de dos (o más) simetrías de forma. Por lo tanto, podemos reajustar nuestra definición de F extrayendo el componente de renormalización mayor

(la de dimensión de escala mayor si hay más de una dimensión de escala diferente). Pero, está claro que como hay un número finito de campos independientes en el UV en un rango de dimensiones, podemos continuar el proceso hasta que obtengamos un F con renormalización finita, mostrando que debe haber un sector libre de la teoría.

Filtrado UV de campos degenerados con renormalización finita

A continuación, presentamos con detalle el filtrado UV mencionado anteriormente en el cual consideramos que existe más de un campo en el UV con el mismo espín y dimensión de escala $D/2$. En este caso, si todas las renormalizaciones son finitas podemos descomponer los campos F y G como

$$F = \tilde{F} + F_1, \quad G = \tilde{G} + G_1. \quad (6.108)$$

podemos elegir que los campos \tilde{F} y \tilde{G} obedezcan la condición de dualidad $\tilde{F} = * \tilde{G}$ y por lo tanto en el IR sus funciones de dos puntos deben incluir un término como el que vemos en (6.43-6.44).

Para comenzar, nos limitaremos al estudio de los correladores de $\tilde{F}F_1$. Podemos escribir expresión más general para las funciones de dos puntos que involucran sólo a los campos \tilde{F} y F_1 de la forma

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}(x)\tilde{F}(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(a \delta(s) + \rho_0(s)) P^{(k)} + (-1)^k s \rho_1(s) \eta^{(k)}], \\ \langle F_1(x)F_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(b \delta(s) + \rho_2(s)) P^{(k)} + (-1)^k s \rho_1(s) \eta^{(k)}], \\ \langle \tilde{F}(x)F_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(c \delta(s) + \rho_3(s)) P^{(k)} - (-1)^k s \rho_1(s) \eta^{(k)}], \end{aligned} \quad (6.109)$$

donde $\rho_1(s)$ aparece en los tres correladores de manera que sean consistentes con la ley de conservación $dF = d\tilde{F} + dF_1 = 0$, a saber

$$\langle \tilde{F}(x)dF(0) \rangle = 0, \quad \langle F_1(x)dF(0) \rangle = 0. \quad (6.110)$$

Será interesante que veamos las restricciones impone la positividad de los correladores. Para $\langle \tilde{F}\tilde{F} \rangle$ y $\langle F_1F_1 \rangle$ la positividad en el IR sólo alcanza al coeficiente de las funciones delta y por tanto obtenemos $a \geq 0$, y $b \geq 0$. Sin embargo, a energías más altas la positividad de la parte masiva implica que las funciones de Kallen-Lehmann

obedecen a

$$0 \leq \rho_1(s) \leq \rho_0(s), \quad 0 \leq \rho_2(s) \leq \rho_0(s). \quad (6.111)$$

Además, la positividad de la matriz de correladores cruzados entre \tilde{F} y F_1 produce las desigualdades

$$ab \geq c^2, \quad \rho_0(s) - 2\rho_1(s) + \rho_2(s) \pm \sqrt{[\rho_0(s) - \rho_2(s)]^2 + 4[\rho_1(s) + \rho_3(s)]^2} \geq 0. \quad (6.112)$$

El hecho de que $\tilde{F} = * \tilde{G}$, fija las funciones de correlación que contienen a \tilde{G} y \tilde{F} o F_1 . Esto junto con $dG = 0$ implica que las funciones de dos puntos están limitadas a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{G}(x)\tilde{G}(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(a \delta(s) + \rho_0(s)) P^{(q)} + (-1)^q s [\rho_0(s) - \rho_1(s)] \eta^{(q)}], \\ \langle G_1(x)G_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(d \delta(s) + \rho_4(s)) P^{(q)} + (-1)^q s [\rho_0(s) - \rho_1(s)] \eta^{(q)}], \\ \langle \tilde{G}(x)G_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(e \delta(s) + \rho_5(s)) P^{(q)} - (-1)^q s [\rho_0(s) - \rho_1(s)] \eta^{(q)}], \\ \langle \tilde{F}(x)\tilde{G}(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(a \delta(s) + \rho_0(s)) P^{(k)} \tilde{*} + (-1)^{Dk} s \rho_1(s) \epsilon], \quad (6.113) \\ \langle F_1(x)\tilde{G}(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(c \delta(s) + \rho_3(s)) P^{(k)} \tilde{*} - (-1)^{Dk} s \rho_1(s) \epsilon], \\ \langle \tilde{F}(x)G_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(e \delta(s) + \rho_5(s)) P^{(k)} \tilde{*} - (-1)^{Dk} s [\rho_0 - \rho_1 + \rho_5](s) \epsilon], \\ \langle F_1(x)G_1(0) \rangle &= \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p e^{ipx}}{(2\pi)^{D-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) \times \\ &\quad \times [(f \delta(s) - [\rho_0 + \rho_3 + \rho_5]) P^{(k)} \tilde{*} + (-1)^{Dk} s [\rho_0 - \rho_1 + \rho_5] \epsilon]. \end{aligned}$$

Nótese que la positividad en el límite IR implica que $f \geq 0$, $ad \geq e^2$, y $bd \geq f^2$. Además, la positividad de los correladores $\langle \tilde{G}\tilde{G} \rangle$ y $\langle G_1G_1 \rangle$ es análoga a (6.111). La matriz de correladores cruzados de \tilde{G} y G_1 , por analogía con (6.112), nos produce la nueva restricción

$$-\rho_0(s) + 2\rho_1(s) + \rho_4(s) \pm \sqrt{[\rho_0(s) - \rho_4(s)]^2 + 4[\rho_0(s) - \rho_1(s) + \rho_5(s)]^2} \geq 0. \quad (6.114)$$

El cálculo directo de la función de dos puntos $\langle FG \rangle$, utilizando (6.113), tiene sólo una contribución resultante. Vemos que esta es no masiva y podemos escribirla como

$$\begin{aligned}\langle F(x)G(0) \rangle &= \langle \tilde{F}(x)\tilde{G}(0) \rangle + \langle F_1(x)\tilde{G}(0) \rangle + \langle \tilde{F}(x)G_1(0) \rangle + \langle F_1(x)G_1(0) \rangle \\ &= (a + c + e + f) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) P^{(k)} \tilde{*} (p).\end{aligned}\quad (6.115)$$

Como este correlador no renormaliza, en el UV $\langle FG \rangle_{\text{UV}}$ es equivalente a $\langle \tilde{F}\tilde{G} \rangle_{\text{IR}}$, lo que implica que

$$c + e + f = 0. \quad (6.116)$$

Además, pedimos que los campos F_1 y G_1 no estén correlacionados con \tilde{F} en el UV. Es decir, tenemos $\langle \tilde{F}F_1 \rangle_{\text{UV}}, \langle \tilde{F}G_1 \rangle_{\text{UV}} = 0$, o bien

$$c + \int_0^\infty \rho_3(s) ds = 0, \quad e + \int_0^\infty \rho_5(s) ds = 0. \quad (6.117)$$

El último requisito UV que pedimos es que F_1 y G_1 no estén correlacionados en dicho límite. Esto no implica pérdida de generalidad, ya que si estuvieran correlacionados tendríamos una componente de la forma $F_1 = *G_1$ que podría ser absorbida en las definiciones de \tilde{F} y \tilde{G} . El hecho de que $\langle F_1G_1 \rangle_{\text{UV}} = 0$ produce que

$$f - \int_0^\infty (\rho_0(s) + \rho_3(s) + \rho_5(s)) ds = 0. \quad (6.118)$$

Sustituyendo (6.116) y (6.117) en (6.118) obtenemos $\int ds \rho_0(s) = 0$. A la luz de (6.111), esto significa que $\rho_0(s) = 0$ y, también, $\rho_1(s) = 0$. Entonces, las restricciones (6.112) y (6.114) implican que $\rho_3(s), \rho_5(s) = 0$, así como $c, e, f = 0$. Obtenemos que la forma final de los correladores no nulos fuera del UV es de la forma

$$\langle \tilde{F}(x)\tilde{F}(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2) P^{(k)}, \quad (6.119)$$

$$\langle \tilde{G}(x)\tilde{G}(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2) P^{(q)}, \quad (6.120)$$

$$\langle \tilde{F}(x)\tilde{G}(0) \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2) P^{(k)} \tilde{*}, \quad (6.121)$$

$$\langle F_1(x)F_1(0) \rangle = \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) (b \delta(s) + \rho_2(s)) P^{(k)}, \quad (6.122)$$

$$\langle G_1(x)G_1(0) \rangle = \int_0^\infty ds \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{D-1}} e^{ipx} \theta(p^0) \delta(p^2 - s) (d \delta(s) + \rho_4(s)) P^{(q)}, \quad (6.123)$$

donde también fijamos $a = 1$. Esto nos conduce a que \tilde{F} y \tilde{G} son campos libres sin masa que generan la simetría de forma por (6.121). Además, tenemos que el espacio

de Hilbert generado por estos campos está en producto tensorial con el generado por los campos restantes F_1 y G_1 .

6.5. Discusión del capítulo

Las formulaciones lagrangianas una electrodinámica neutra, como la electrodinámica no lineal (por ejemplo, Born-Infeld) o un fotón acoplado magnéticamente a un campo de neutrones, y también las teorías efectivas de baja energía de los bosones de Goldstone, son todas no renormalizables. En este capítulo hemos explorado la cuestión de si esta clase de teorías puede completarse en el UV, o si el comportamiento no renormalizable apunta a algunas características más profundas. Para abordar este problema hemos observado que esta clase de teorías está mejor definida por sus simetrías generalizadas. En particular, todas comparten la misma estructura de simetrías generalizadas, es decir, simetrías de forma no compactas. En términos de estas simetrías la pregunta es: ¿puede una teoría UV completa con simetrías de forma no compactas ser interactuante? El análisis descrito en este capítulo muestra que esto no es posible, y que la completación UV de una electrodinámica neutra o de los bosones de Goldstone interactuantes deben implicar necesariamente la ruptura de estas simetrías. Esto debe producirse debido a la existencia de operadores cargados a una cierta escala de energía que romperían las leyes de conservación de los campos que generan la simetría no compacta (Véanse los ejemplos e ideas que discutimos en los capítulos 2 y 3 y posteriormente en el capítulo 7). Sin embargo, las simetrías de forma están bien definidas en el nivel clásico, por ende esta obstrucción puede verse como una nueva forma de anomalía cuántica.

Surge naturalmente una pregunta importante: ¿a qué escala de energía aparecen en el espectro las cargas eléctricas y/o magnéticas que rompen la simetría generalizada? Si disponemos de una formulación lagrangiana perturbativa, como la descrita por (6.1), es natural esperar que un límite superior para la masa de estas partículas cargadas predichas venga dado por los acoplamientos dimensionales apropiados que aparecen en el lagrangiano. Pero en realidad no hay ninguna razón específica para esperar la saturación de este límite, y de hecho en el modelo estándar las partículas asociadas aparecen a escalas muy por debajo del límite. Sería conveniente desarrollar un método directo para acotar estas masas a partir de la teoría efectiva en el infrarrojo. Podríamos esperar que estas masas aparecieran en las estructuras de los correladores de los campos conservados que generan la simetría de forma no compacta dual. Hemos llevado a cabo exploraciones preliminares usando teoría de perturbaciones y hemos llegado a la conclusión provisoria de que la simetría se conserva en una expansión diagramática de Feynman del modelo efectivo. Se requiere más trabajo para responder a esta pregunta.

Capítulo 7

La anomalía ABJ como simetría $U(1)$ y el teorema de Noether

En este capítulo estudiamos la anomalía de Adler-Bell-Jackiw (ABJ) [11, 12], y su relación con el teorema de Noether [10]. La anomalía ABJ o quiral se refiere originalmente al decaimiento anómalo del pión neutro, cuando lo comparamos con las predicciones provenientes del álgebra de corrientes [213, 214]. Esta misma anomalía aparece en QED y en muchas otras generalizaciones. Más precisamente, un fermión sin masa acoplado al campo electromagnético contiene una corriente quiral clásicamente conservada $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$. Si se conservara dicha corriente a nivel cuántico generaría una simetría global $U(1)$. Pero, la corriente quiral es un operador compuesto, y debemos que definirlo adecuadamente mediante regularización. Este proceso rompe la conservación de la corriente quiral y famosamente nos conduce a

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} , \quad (7.1)$$

donde con F describimos al campo electromagnético, con una normalización tal que ψ tiene carga unitaria. La existencia de esta anomalía puede demostrarse de varias maneras diferentes, véase [215].

Por otro lado, el teorema de Noether afirma la correspondencia entre cargas conservadas y simetrías que dejan invariante la acción. En el contexto de QFT vimos que existe una versión fuerte de este teorema que daría una correspondencia a una entre simetrías continuas y corrientes locales conservadas j^μ . Sin embargo, en el contexto de QFT, también encontramos la versión débil donde sólo se requieren implementaciones locales de la simetría (twists), que actúan sobre regiones compactas [146–149]. Esta segunda versión es válida con gran generalidad en QFT, siendo una pregunta interesante: ¿Cómo podemos caracterizar el espacio de teorías para las que la versión fuerte del teorema de Noether no es aplicable?

En el capítulo 5, hemos hecho una propuesta independiente de la formulación la-

grangiana para responder a esta pregunta. Simplemente afirmamos que la versión fuerte del teorema de Noether se viola para una simetría global continua siempre que haya simetrías generalizadas cargadas bajo ella. En otras palabras, mostramos que la existencia de una corriente de Noether implica que las clases son invariantes bajo dicha simetría. Sin embargo, la implicación opuesta es más sutil. Más específicamente, probamos que siempre que una simetría deje invariante las clases no locales será posible encontrar twists aditivos y concatenables. Pero, no probamos la convergencia de estos twists a una corriente.

Volviendo a la anomalía ABJ, ya en su artículo seminal [11], Adler mencionó que una modificación aparentemente inofensiva, pero ingeniosa, de la corriente quiral daría lugar a una comprensión de la anomalía en términos de una simetría global $U(1)$ convencional. A saber, si redefinimos una nueva corriente local \tilde{j}_5 por

$$\tilde{j}_5^\mu = j_5^\mu - \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \tilde{j}_5^\mu = 0 , \quad (7.2)$$

recuperamos una ecuación de conservación convencional. El problema, ya reconocido por Adler, es que \tilde{j}_5 no es un operador invariante de gauge y, por ende, la teoría no tiene un operador de corriente conservado asociado a dicha simetría. Aún así, integrando la densidad de carga local sobre una superficie de Cauchy completa en el espacio de Minkowski, se llega a una carga conservada invariante de gauge, que genera un grupo de simetría global $U(1)$. Desde esta perspectiva, vemos que la anomalía ABJ simplemente redefine la simetría quiral.

Este contexto plantea cuestiones importantes que constituyen la motivación de este capítulo. La primera es que si tomamos seriamente esta simetría quiral $U(1)$ modificada, entonces esta clase de teorías parece violar la versión fuerte del teorema de Noether. Luego, basándonos en propuesta desarrollada en el capítulo 5, sería esperable ver que estas teorías contengan sectores cargados bajo la nueva simetría quiral. En este capítulo demostraremos que éste es efectivamente el caso. Nuestra conclusión será que la simetría $U(1)$ modificada es una simetría interna ordinaria de la teoría con la peculiar característica de que mezcla las clases no locales del campo electromagnético. Esta peculiaridad explica la ausencia de la corriente de Noether.

Además, en el capítulo 5 observamos que una simetría generalizada cargada bajo la acción de un grupo continuo produce un continuo de clases. Si este continuo es no compacto, vimos en el el capítulo 6 que la simetría corresponde a la presencia de un sector libre no masivo. En este sentido, la anomalía representa el otro caso. Es decir, tenemos un continuo compacto de clases no locales, lo que en este contexto parece compatible con una teoría interactuante.

También, esta imagen proporciona una nueva perspectiva sobre el origen de la cuantización de la anomalía. Brevemente, veremos que dicha cuantización se ve forzada

por la compatibilidad de los ciclos $U(1)$ asociados con el grupo quiral correcto y el grupo de operadores HDV no locales. Equivalentemente, encontramos que la anomalía en la simetría y el hecho de que una simetría cambie las clases es el mismo fenómeno físico. Desde esta perspectiva también podemos explicar la correspondencia de anomalías (“anomaly matching”) [216], incluyendo la existencia de excitaciones sin masa en el modelo infrarrojo, de una manera convencional (basada en la simetría). Un último beneficio de esta perspectiva es que nos permite entender la aplicabilidad del teorema de Goldstone.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. Comenzamos en la sección 7.1 desarrollando como las teorías con anomalías ABJ ejemplifican las pruebas presentadas en el capítulo 5. Además, mostramos como estas ideas explican la cuantización del coeficiente de la anomalía, la correspondencia entre anomalías IR y UV, y la validez del teorema de Goldstone para estos casos. Luego, durante la sección 7.2 comparamos nuestros resultados con la literatura reciente. En la sección 7.3, estudiamos nuevos ejemplos que nos ayudaran (en el capítulo 8) a establecer una caracterización potencialmente completa de teorías que violan la versión fuerte del teorema de Noether. Finalmente, la sección 7.4 contiene un resumen y discusión de los resultados del capítulo.

7.1. La anomalía ABJ como simetría $U(1)$

En esta sección estudiamos escenarios que contienen la anomalía dentro de una teoría abeliana. Comenzamos describiendo el caso de la electrodinámica de piones, ya que en este modelo efectivo la anomalía se manifiesta a nivel clásico. Como consecuencia, podemos representar todas las características de la simetría, incluyendo su acción sobre operadores locales y no locales, de forma muy sencilla. A continuación describimos el caso de la QED no masiva, donde adaptamos esencialmente la discusión de Adler [11], complementada por el efecto Witten [56] que determina la acción de la simetría sobre los TL.¹ Tanto los modelos de piones como los provenientes de QED nos cuentan la misma historia, la de un grupo continuo de simetría interna que transforma de forma no trivial las clases HDV.

Además, destacaremos cómo la cuantización de la anomalía surge aquí de la compatibilidad entre los dos ciclos $U(1)$ asociados a las dos simetrías, equivalentemente de la compatibilidad entre la simetría 0-forma quiral modificada y la simetría 1-forma magnética. A la luz de lo anterior, deducimos la correspondencia de anomalías de ’t Hooft entre la física UV e IR como resultado de la existencia de una simetría global ordinaria $U(1)$. Finalmente, recordamos cómo la acción no trivial de la simetría sobre las clases HDV impide la existencia de una corriente conservada.

¹Esta acción fue discutida en la literatura reciente [14–16] como discutiremos en la siguiente sección.

7.1.1. Electrodinámica con piones

En el contexto de la teoría efectiva de piones, podemos utilizar un enfoque lagrangiano más transparente, en el que podemos deducir la anomalía quiral de las ecuaciones de movimiento. Entonces, discutamos primero una electrodinámica efectiva de piones en $D = 4$ con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_0 \partial^\mu \pi_0 - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{8\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \pi_0 F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (7.3)$$

donde μ es una constante con dimensiones de masa. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las siguientes

$$\square \pi_0 = \frac{1}{4\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (7.4)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{e^2}{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} (\partial_\nu \pi_0), \quad (7.5)$$

donde definimos el dual de F como $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Este, es conservado ($\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$) por simetría. Obsérvese que la primera ecuación de movimiento (7.4), asociada al campo del pión neutro π_0 , expresa la anomalía. De hecho, podemos reescribir esta ecuación como

$$j^\mu = \mu \partial^\mu \pi_0, \quad \partial_\mu j^\mu = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (7.6)$$

En este contexto, siguiendo a Adler, podemos expresar (7.6) como una ecuación de conservación de una corriente dependiente del gauge

$$\tilde{j}^\mu = \mu \partial^\mu \pi_0 - \frac{1}{2} \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu, \quad \partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0. \quad (7.7)$$

Podemos integrar, esta corriente no invarianta de gauge sobre una superficie de Cauchy completa para obtener una carga conservada

$$\tilde{Q} = \int d^3x \tilde{j}^0(x) = \int d^3x \left(\mu \dot{\pi}_0(x) - \frac{1}{2} B^i(x) A_i(x) \right). \quad (7.8)$$

donde $B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$ representa el campo magnético. Esta carga es ahora invariante de gauge para transformaciones de gauge o campos que se anulan en el infinito.

Entonces, la cuestión es si este generador da lugar a una simetría de la teoría en el sentido convencional, y cuáles son las diferencias, si las hay, con las simetrías internas ordinarias. Un operador autoadjunto genérico genera un grupo de unitarios, pero para que sea generador de una simetría interna deben darse otras condiciones. Más concretamente, el grupo debe dejar álgebras de operadores locales en sí mismas (5.1), y las transformaciones deben commutar con simetrías de Poincare. A continuación,

utilizando la cuantización canónica, comprobamos que éste es el caso en el modelo actual.

Si definimos el campo eléctrico como $E^i = -F^{0i}$, los momentos canónicos son

$$p_0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\pi}_0} = \dot{\pi}_0, \quad p_A^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i} = \frac{1}{e^2} E^i + \frac{1}{\mu} \pi_0 B^i. \quad (7.9)$$

Vemos que el momento del pión no se ve afectado por el término anómalo, mientras que el momento conjugado del campo del fotón recibe una contribución. Escribimos las relaciones de conmutación canónicas a igual tiempo no nulas como

$$[\pi_0(x), p_0(y)] = i \delta(x - y), \quad [A_i(x), p_A^j(y)] = i \delta_i^j \delta(x - y). \quad (7.10)$$

Nos resultará esclarecedor ver la manifestación de estas relaciones de conmutación canónicas en los conmutadores de los observables. Las no triviales son

$$[B^i(x), E^j(y)] = i e^2 \epsilon^{ijk} \partial_k^x \delta(x - y), \quad (7.11)$$

$$[p_0(x), E^i(y)] = \frac{i e^2}{\mu} B^i(y) \delta(x - y), \quad (7.12)$$

$$[E^i(x), E^j(y)] = -\frac{i e^4}{\mu} \epsilon_{ijk} (\pi_0(y) \partial_y^k \delta(y - x) + \pi_0(x) \partial_x^k \delta(x - y)). \quad (7.13)$$

Las relaciones (7.12-7.13) muestran el efecto de la interacción en el espacio de fases físico de la teoría como una deformación de las relaciones de conmutación canónicas. Es especialmente interesante la no conmutatividad de los campos eléctricos. Estos conmutadores juegan el papel de los términos de Schwinger encontrados para QED en [13] y que discutiremos más adelante. En la teoría efectiva del pión, surgen mediante cuantización canónica.

Utilizando estos conmutadores podemos encontrar la acción de la carga (7.8) sobre los operadores de campo locales que describen el espacio de fases de la teoría. A saber,

$$[\tilde{Q}, \pi_0(x)] = -\mu i, \quad [\tilde{Q}, B_i(x)] = 0, \quad [\tilde{Q}, p_0(x)] = 0, \quad [\tilde{Q}, E_i(x)] = 0. \quad (7.14)$$

El único conmutador no nulo es con el propio campo de piones π_0 . Esto es lo que esperábamos, ya que todos los demás campos no llevan carga quiral. En este caso, la simetría esta espontáneamente rota y el pión es un bosón de Goldstone para la simetría quiral, transformándose aditivamente como

$$U(\lambda) \pi_0(x) U(\lambda)^\dagger = \pi_0(x) + \lambda \mu, \quad U(\lambda) = e^{i \lambda \tilde{Q}}. \quad (7.15)$$

Podemos comprobar fácilmente que la transformación implementada por $U(\lambda)$ respeta las ecuaciones de movimiento y las relaciones de conmutación. Entonces, avanzamos y

calculamos el tensor energía-momento. Podemos escribir el mismo como

$$T^{\mu\nu} = \left(\partial^\mu \pi_0 \partial^\nu \pi_0 - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \partial_\alpha \pi_0 \partial^\alpha \pi_0 \right) + \frac{1}{e^2} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (7.16)$$

Un punto interesante es que en este modelo parece existir una tensión entre el tensor energía-momento canónico, y el que obtenemos derivando la acción con respecto a la métrica. Esto es debido a que este último, dado por (7.16), coincide con el libre. No obstante, podemos demostrar que está permitida una modificación para llevar el tensor canónico a la forma (7.16) y que esta implementa la evolución temporal correcta. Debemos esto a las relaciones de commutación no triviales (7.12) y (7.13). Debido a la longitud de los cálculos, presentamos un resumen más detallado de estas sutilezas al final de esta sección. Siguiendo, dados los comutadores anteriores, comprobamos claramente que el tensor energía-momento es invariante bajo las transformaciones quirales modificadas, a saber

$$[\tilde{Q}, T^{\mu\nu}] = 0. \quad (7.17)$$

Esto demuestra, en lo que respecta al modelo efectivo, que \tilde{Q} genera una verdadera simetría interna de la teoría. Además, ni siquiera necesitamos pensar que esta simetría está implementada por un unitario global, ya que la transformación del pión (7.15) es un automorfismo de las álgebras de operadores locales y de las ecuaciones de movimiento. En particular, siguiendo los resultados [146–149] (resumidos en el capítulo 5), esto implica que podemos encontrar transformaciones locales para cualquier subregión compacta de cualquier topología.

Una vez establecida la simetría quiral modificada como una simetría global $U(1)$, tenemos que entender sus implicaciones. La primera cuestión se refiere al sentido en que esta simetría es diferente de otras simetrías más convencionales. En particular, deberíamos encontrar una razón por la que esta simetría no tiene una corriente de Noether, ya que la corriente (7.7) no es invariante de gauge. La razón resulta ser un caso particular del teorema mostrado en capítulo 5. En otras palabras, la teoría actual posee clases HDV asociadas a regiones con la topología de lazos no contractibles, y la simetría quiral sí transforma estas clases no locales. Sin embargo, notamos que la descripción de este fenómeno no implica más información que la ya tenemos, y que la acción de la simetría está completamente especificada por (7.14). En particular, todas las relaciones de commutación con operadores no locales se siguen de las relaciones de commutación con los locales.

Para analizar la acción de la simetría quiral sobre las clases HDV analicemos más detalladamente las ecuaciones de movimiento (7.5) del campo de gauge. Estas pueden ser reescritas como la conservación de un campo 2-forma invariante de gauge, es decir²

²Esta corriente también fue identificada en [20] pero se descartó debido a la compacidad del campo de piones. Sin embargo, en esta teoría efectiva de baja energía, deberíamos interpretar el campo de

$$G^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{e^2} F^{\mu\nu} - \frac{\pi_0}{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (7.18)$$

La otra 2-forma conservada invariante de gauge es el dual de F . Tenemos,

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (7.19)$$

Esto nos permite definir los flujos conservados correspondientes integrando estas corrientes sobre superficies orientadas bidimensionales Σ como

$$\Phi_G = \int_{\Sigma} *G, \quad \Phi_F = \int_{\tilde{\Sigma}} *\tilde{F}. \quad (7.20)$$

Para obtener operadores no triviales necesitamos integrar estos flujos sobre superficies Σ abiertas con su borde $\partial\Sigma$ dado por un lazo. Debido a la conservación de los flujos, los operadores resultantes comutan con todos los operadores de campo locales espacialmente separados de $\partial\Sigma$ y, en este sentido, pueden considerarse operadores de lazo. Consideraremos estos flujos sobre superficies bidimensionales en el corte a tiempo constante $x^0 = 0$

$$\Phi_G = - \int_{\Sigma} dS_i p_A^i = - \int_{\Sigma} dS_i \left(\frac{1}{e^2} E^i + \frac{1}{\mu} \pi_0 B^i \right), \quad \Phi_F = \int_{\tilde{\Sigma}} dS_i B^i. \quad (7.21)$$

El conmutador entre estos flujos, cuando los definimos sobre dos superficies diferentes, es proporcional al número de enlace entre los lazos que determinan el borde de las respectivas superficies. Podemos entender el hecho de que se trate de un invariante topológico a partir de la comutatividad de estos flujos con operadores locales espacialmente separados de los bordes. Como vimos anteriormente, esto nos permite deformar los lazos de borde sin cambiar el conmutador. Siguiendo con el cálculo, utilizando (7.10-7.13) obtenemos para lazos simplemente enlazados que

$$[\Phi_G, \Phi_F] = i. \quad (7.22)$$

Por supuesto, lo mismo ocurre con el campo electromagnético libre. La diferencia es que en este modelo efectivo, el flujo eléctrico necesita ser modificado (incluyendo el campo quiral) para ser un operador de lazo. Desde cierto punto de vista, esto es análogo a lo que estudiamos en el capítulo 6 para las electrodinámicas neutras.

Definimos ahora los operadores unitarios, como WL y TL, exponenciando los flujos

$$W_q = e^{iq\Phi_F}, \quad T_g = e^{ig\Phi_G}. \quad (7.23)$$

piones como no compacto (ya que $\pi_0 \ll \mu$) y este conduce (a través de un flujo de superficie) a un operador HDV bien definido en el IR.

Estos se tratan de operadores no locales asociados a anillos. Las reglas de fusión para estos operadores no locales son

$$W_q W_{q'} = W_{q+q'} , \quad T_g T_{g'} = T_{g+g'} . \quad (7.24)$$

En este modelo efectivo, los operadores no locales de una región tipo anillo R forman un grupo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.³ Un operador genérico no local será “diónico”, es decir, tendrá cargas eléctricas y magnéticas, y lo llamaremos $D_{(g,q)}$. Está formado, por ejemplo, por productos de WL y TL con cargas q, g , en el mismo R . Estos operadores en R forman clases invariantes bajo la acción de los operadores locales en R , y determinadas exclusivamente por las cargas (g, q) . Equivalentemente, si multiplicamos un dión dado por operadores locales en R no podremos cambiar su clase. El grupo dual, correspondiente a R' , es también $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Las relaciones de commutación de los operadores diónicos enlazados se deducen simplemente de las de los propios flujos. Son las siguientes

$$D_{(g,q)}^R D_{(g',q')}^{R'} = e^{i(qg' - q'g)} D_{(g',q')}^{R'} D_{(g,q)}^R . \quad (7.25)$$

Como podíamos prever, la acción de la carga quiral correcta \tilde{Q} es particularmente interesante sobre estos operadores. Transforma los flujos eléctricos dejando invariantes los magnéticos. Más precisamente

$$[\tilde{Q}, \Phi_G] = i \Phi_F , \quad [\tilde{Q}, \Phi_F] = 0 . \quad (7.26)$$

Considerando transformaciones finitas sobre los operadores de lazo obtenemos

$$U(\lambda) W_q U^{-1}(\lambda) = W_q , \quad U(\lambda) T_g U^{-1}(\lambda) = D_{(g,\lambda g)} . \quad (7.27)$$

El TL preciso en el lado izquierdo de la última fórmula depende de la forma precisa del TL en el lado derecho. Pero, lo importante es la clase a la que pertenece. En palabras, los TL (clases HDV magnéticas) están cargados bajo la acción de la simetría generada por \tilde{Q} . En particular, se mezclan con flujos magnéticos. Para una clase HDV genérica, vemos que la transformación se convierte en

$$U(\lambda) D_{(g,q)} U^{-1}(\lambda) = D_{(g,q+\lambda g)} . \quad (7.28)$$

Dado que la simetría mantiene el álgebra de operadores locales en R' dentro de sí misma, también mantendrá invariante el conjunto de todos los operadores que commutan con ella (5.2). Entonces, se mapeará el álgebra de los operadores locales y no locales en

³Añadir los piones cargados sin masa π_\pm convertiría esto en un grupo $\mathbb{Z} \times U(1)$. Esto es consistente con el resto de esta discusión siempre que mantengamos las transformaciones de simetría en el rango del modelo efectivo $\pi_0 \ll \mu$.

R en sí misma (5.3), un hecho que será relevante de nuevo más adelante. Aunque las clases no son invariantes bajo la simetría quiral modificada, las reglas de fusión y las relaciones de commutación son invariantes, como debe ser el caso para un automorfismo del álgebra:

$$D_{(g_1, q_1 + \lambda g_1)}^R D_{(g_2, q_2 + \lambda g_2)}^R = D_{(g_1 + g_2, q_1 + q_2 + \lambda(g_1 + g_2))}^R, \quad (7.29)$$

$$D_{(g, q + \lambda g)}^R D_{(g', q' + \lambda g')}^{R'} = e^{i(qg' - q'g)} D_{(g', q' + \lambda g')}^{R'} D_{(g, q + \lambda g)}. \quad (7.30)$$

La interpretación de esta acción es sencilla y transparente. Tenemos una simetría unitaria interna ordinaria que transforma cualquier álgebra de operadores locales para cualquier región en sí misma. Esta acción también transforma las clases HDV no locales. Esta es la única nueva característica que no se encuentra generalmente para otras simetrías internas.

Para terminar esta sección nos parece importante destacar dos hechos clave que suelen llevar a confusión. En primer lugar, tanto los operadores eléctricos como los magnéticos no locales forman parte del álgebra ordinaria de operadores locales en bolas, y como tales no pueden ser eliminados o excluidos de la teoría. En segundo lugar, el comportamiento de los operadores no locales bajo la simetría viene determinado, por la misma razón, por la acción de la simetría sobre los operadores de campo locales. Las características que definen a los operadores no locales de la teoría se calculan a partir de las propias álgebras de operadores locales. No es posible tener una simetría que actúe de forma diferente sobre los operadores locales y no locales en una QFT. En el presente ejemplo, esto es explícito puesto que todos los commutadores se determinan a partir de los canónicos (locales). El punto interesante aquí es que los flujos del campo eléctrico se mezclan con el campo local quiral (el pión) para producir un operador no local en un anillo. El flujo eléctrico por sí mismo, que es no local para el campo libre de Maxwell, no es un operador no local en una región anular R en el presente modelo porque no commuta con operadores locales fuera de R .

Tensor energía-momento del pión y el acoplamiento quasi-topológico WZW

Por completitud, estudiamos el tensor energía-momento del pión neutro en presencia del acoplamiento quasi-topológico WZW introducido como en (7.33). Véase [104] para una discusión más general sobre los acoplamientos quasi-topológicos. Para empezar, el tensor energía-momento obtenido derivando la acción con respecto a la métrica en signo $(+, -, -, -)$ viene dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \Big|_{g=\eta}. \quad (7.31)$$

En este punto, vemos que se vuelve relevante la naturaleza cuasi-topológica del término de interacción. Considerando que \tilde{F} se conserva

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\rho A_\sigma = 0, \quad (7.32)$$

la acción que surge del lagrangiano (7.3) puede reescribirse convenientemente como

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \pi_0 \partial^\mu \pi_0 - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\pi_0}{4\mu} \partial_\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu F^{\rho\sigma}) \right]. \quad (7.33)$$

Esto demuestra que el término de interacción en (7.33) no se acopla a la métrica y por lo tanto no tiene ninguna contribución a (7.31). Por lo tanto, recuperamos sólo las contribuciones libres dadas por (7.16). Esto es

$$T^{\mu\nu} = \left(\partial^\mu \pi_0 \partial^\nu \pi_0 - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \partial_\alpha \pi_0 \partial^\alpha \pi_0 \right) + \frac{1}{e^2} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (7.34)$$

Por otra parte, el tensor energía-momento canónico viene dado por

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \pi_0} \partial^\nu \pi_0 + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} = \left(\partial^\mu \pi_0 \partial^\nu \pi_0 - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \partial_\alpha \pi_0 \partial^\alpha \pi_0 \right) + \\ &\quad - \frac{1}{e^2} \left(F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \frac{\pi_0}{\mu} \left(\tilde{F}^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (7.35)$$

que parece evidenciar una contribución no trivial procedente del término de interacción en (7.3). Es evidente que $\Theta_{\mu\nu}$ no es simétrico ni invariante de gauge, pero puede modificarse de la manera habitual. En concreto, podemos utilizar las ecuaciones de movimiento para escribir que

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^\alpha \chi_{\alpha\mu\nu} + \frac{\pi_0}{\mu} \left(\tilde{F}_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (7.36)$$

donde $\chi^{\alpha\mu\nu}$ obedece a la condición habitual $\chi^{\alpha\mu\nu} = -\chi^{\mu\alpha\nu}$ ya que viene dado por

$$\chi^{\alpha\mu\nu} = G^{\mu\alpha} A^\nu = \left(\frac{1}{e^2} F^{\mu\alpha} - \frac{\pi_0}{\mu} \tilde{F}_{\mu\alpha} \right) A^\nu. \quad (7.37)$$

Sin embargo, el último término de (7.36) nos impide a priori igualar (7.35) y (7.34). Un análisis más detallado de esta estructura tensorial nos muestra que

$$\tilde{F}_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha = -\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} \epsilon^\alpha_{\nu\lambda\epsilon} F^{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\epsilon} = \frac{1}{4} \eta_{\mu\rho\sigma} \eta_{\nu\lambda\epsilon} F^{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\epsilon} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \tilde{F}_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha, \quad (7.38)$$

lo que demuestra que el tensor canónico (7.35) es consistente el que se obtiene derivando con respecto a la métrica (7.34) como

$$\tilde{F}_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^{\alpha}\chi_{\alpha\mu\nu}. \quad (7.39)$$

La pregunta que queda es si (7.34) es suficiente para proporcionar la evolución temporal correcta. El tensor energía-momento en cuestión produce el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x T^{00}(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[p_0^2 - \partial_i \pi_0 \partial^i \pi_0 + \frac{1}{e^2} (E_i E_i + B_i B_i) \right], \quad (7.40)$$

donde podemos utilizar (7.10-7.13) para obtener que

$$i[H, \pi_0(x)] = p_0(x), \quad (7.41)$$

$$i[H, A_i(x)] = E_i(x), \quad (7.42)$$

$$i[H, p_0(x)] = -\partial_i \partial^i \pi_0(x) - \frac{1}{\mu} B_i(x) E^i(x), \quad (7.43)$$

$$i[H, E_i(x)] = -\epsilon_{ijk} \partial^j B^k(x) - \frac{e^2}{\mu} (B_i(x) p_0(x) + \epsilon_{ijk} E^j(x) \partial^k \pi_0(x)), \quad (7.44)$$

que es equivalente a las ecuaciones de movimiento. En resumen, el tensor energía-momento (7.34) es, de hecho, el generador simétrico invariante de gauge de la evolución temporal de la teoría.

7.1.2. Origen de la cuantización de la anomalía

El modelo de pión efectivo discutido anteriormente es no renormalizable y tiene que ser completado en el UV. Esta completación necesitará necesariamente la introducción de cargas que rompan los sectores HDV de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a un grupo más pequeño. Una razón formal para esta reducción de los sectores es que para el caso de sectores no compactos, los campos duales 2-forma F y G que los generan deben tener un correlador cruzado que está fijado por la simetría y no se renormaliza. Como vimos en el capítulo 6, esto nos conduce a un modelo libre.

En la completación del modelo dentro de QCD con quarks no masivos cargados, los sectores HDV se reducen a $U(1) \times \mathbb{Z}$. Tenemos un $U(1)$ generado por WL continuos mientras que los TL están discretizados y forman un grupo \mathbb{Z} . En el modelo efectivo podríamos implementar esto introduciendo los piones cargados.

Consideremos tal compactificación desde una perspectiva más general. Fijamos la carga eléctrica mínima en $q = q_0$, donde la derivada covariante es $\partial_{\mu} + iqA_{\mu}$. Esto corresponde a fijar en eq_0 la carga de Coulomb correspondiente al campo electromagnético débilmente acoplado. Entonces, para el WL tenemos un grupo compacto $U(1)$ etique-

tado por las cargas $q \in [0, q_0]$. En consecuencia, el TL forma un grupo \mathbb{Z} con cargas $g = \frac{2\pi}{q_0} k$, y k entero. Crucialmente, la compatibilidad del grupo compacto de WL con la acción no trivial de la simetría quiral sobre el grupo $U(1) \times \mathbb{Z}$ de sectores HDV implica restricciones para el radio de compactificación de dicha simetría.

Observamos en primer lugar que cualquier extensión de la simetría a energías más altas debe respetar (7.28). Esto implica que el rango del parámetro λ de la simetría quiral $U(1)$ es

$$\lambda \in [0, \lambda_0), \quad \lambda_0 = n \frac{q_0^2}{2\pi}, \quad (7.45)$$

donde n es un entero positivo. En términos del modelo con Lagrangiano (7.3) esta ecuación relaciona el radio de compactificación del campo de piones con el coeficiente del término anómalo. La definición convencional de la constante de decaimiento del pión nos permite escribir radio de compactificación del pión como $\pi_0 \equiv \pi_0 + 2\pi f_\pi$. Utilizando (7.15) para el generador de la simetría quiral y (7.45) obtenemos para el coeficiente del término anómalo la siguiente expresión

$$\frac{1}{8\mu} = \frac{n q_0^2}{32\pi^2 f_\pi}. \quad (7.46)$$

Esta ecuación expresa la cuantización del valor del coeficiente de anomalía en términos de teoría de grupos. Esto es porque proviene de la compatibilidad necesaria entre las clases HDV y una simetría global que actúa no trivialmente sobre ellas.

La cuantización de la anomalía se ha obtenido anteriormente a partir de distintas consideraciones. Por ejemplo, en la inmersión de este modelo en un modelo sigma no lineal, apropiado para QCD con quarks sin masa y un número de sabores $N_f \geq 3$. En este contexto, la cuantización del coeficiente se sigue de la cuantización del coeficiente WZW por razones topológicas [217].⁴ En este caso tenemos $q_0 = 1/3$ y $n = 3N_c$ con N_c el número de colores [218].

Otra forma de expresar estas características es en términos de una corriente $\hat{j} = \frac{\lambda_0}{2\pi} j$ normalizada tal que el operador de carga tiene un ciclo fijado en el valor estándar 2π . Esto implica que la carga toma valores enteros. A partir de (7.6) esta corriente quiral produce la anomalía

$$\partial_\mu \hat{j}^\mu = n \frac{q_0^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}. \quad (7.47)$$

Vemos que esta fórmula se ajusta bien al valor general de la anomalía. Para la corriente quiral en QED tenemos $n = 2$ si el ángulo quiral es la fase que actúa sobre el electrón, como corresponde a tener dos campos quirales para el fermión de Dirac. Pero tenemos $n = 1$ si fijamos la carga quiral mínima en los operadores invariantes de gauge en 1 (véase más adelante).

⁴Nótese que nuestra derivación de la cuantización de la anomalía no requiere ninguna suposición sobre el número de sabores.

Para $n > 1$ tenemos que la simetría quiral se mueve n veces más rápido en las clases no locales que en el campo del pión. Los operadores con carga quiral unidad se obtienen exponenciando los campos de piones con el smearing adecuado:

$$e^{i f_\pi^{-1} \int \alpha(x) \pi_0(x)}, \quad \int \alpha(x) = 1. \quad (7.48)$$

Por otra parte, podemos producir operadores cargados quiralmente combinando operadores no locales como

$$\Psi_{k,m} = \int_0^{q_0} dq e^{i m \frac{2\pi q}{q_0}} D_{(\frac{k 2\pi}{q_0}, q)}, \quad (7.49)$$

para enteros m .⁵ La transformación quiral produce

$$U(\lambda) \Psi_{k,m} U(\lambda)^\dagger = e^{i n m k \frac{2\pi \lambda}{\lambda_0}} \Psi_{k,m}. \quad (7.50)$$

La carga mínima no nula con respecto a la simetría quiral en este tipo de operadores es entonces n , alcanzada para $m = 1$ y el TL elemental con $k = 1$. Esto nos proporciona una interpretación física complementaria del número entero n que define la anomalía.

7.1.3. Simetría quiral en QED no masiva

Consideramos ahora el caso de la QED sin masa en $D = 4$. Podemos describir esta teoría mediante la acción

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i\partial^\mu \psi - \bar{\psi} A^\mu \psi \right]. \quad (7.51)$$

En este caso, la simetría quiral dada por transformaciones de la forma $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi$ está asociada, por el teorema de Noether, a la corriente

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (7.52)$$

Sin embargo, la ley de conservación correspondiente es anómala a nivel cuántico [11, 12]. En este caso, podemos escribir la anomalía a partir de

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (7.53)$$

⁵Nótese que la selección de operadores especiales representantes de las clases no locales que se transforman en sí mismos por la operación de grupo como en (7.28) elimina automáticamente las cargas adicionales de los operadores locales. La construcción de estos operadores puede llevarse a cabo de manera estándar utilizando herramientas modulares. Véase [23], sección 2.2.3.

Como en el ejemplo del pión, podemos definir una corriente conservada pero no invariante de gauge mediante

$$\tilde{j}_5^\mu = j_5^\mu - \frac{1}{4\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu, \quad \partial_\mu \tilde{j}_5^\mu = 0. \quad (7.54)$$

Esto nos da un operador de carga global conservado invariante de gauge cuando se integra sobre todo el espacio

$$\tilde{Q} = \int d^3x \left[\psi^\dagger(x) \gamma^5 \psi(x) - \frac{B^i(x) A_i(x)}{4\pi^2} \right]. \quad (7.55)$$

Para entender si esta carga define una simetría interna o no necesitamos saber cómo actúa sobre los campos locales. Los momentos canónicos pueden calcularse como

$$p_\psi = i\psi^\dagger, \quad p_A^i(x) = \frac{1}{e^2} E^i, \quad (7.56)$$

implicando las relaciones de (anti)comutación a igual tiempo

$$\left\{ \psi(x), \psi^\dagger(y) \right\} = \delta(x-y) \mathbb{1}, \quad [A_i(x), E^j(y)] = ie^2 \delta_i^j \delta(x-y). \quad (7.57)$$

A partir de aquí, uno podría pensar ingenuamente que la acción de la carga (7.55) viene dada por

$$[\tilde{Q}, \psi(x)] = -\gamma^5 \psi(x), \quad [\tilde{Q}, \psi^\dagger(x)] = \psi^\dagger(x) \gamma^5, \quad (7.58)$$

$$[\tilde{Q}, A_i(x)] = 0, \quad [\tilde{Q}, E^i(x)] = -\frac{i}{2\pi^2} B^i(x). \quad (7.59)$$

Es decir, la carga actúa como era de esperar sobre el campo fermiónico intercambiando sus quiralidades. Sin embargo, actúa sobre el campo de fotones de una manera no covariante cambiando el campo eléctrico en un campo magnético y dejando el campo magnético invariante. Esto no sólo es extraño, sino también incoherente con el hecho de que $\dot{\tilde{Q}} = 0$. Este problema se resuelve considerando los términos de Schwinger que aparecen en el comutador con la densidad de carga compuesta. Los términos de Schwinger no nulos⁶ a primer orden en teoría de perturbaciones están dados por [13] de la forma:

⁶Claramente, podríamos preguntarnos por la posible existencia de más términos de Schwinger. Sin embargo, tal como se calculó en [13], el conjunto completo (7.64) es consistente con todas las ecuaciones de movimiento y leyes de conservación de la teoría. Esto, combinado con el hecho de que por razones generales uno no esperaría más derivadas de las funciones delta en (7.64) [13, 219], nos sugiere que (7.64) es de hecho exacta a todo orden en teoría de perturbaciones.

$$\left[J_5^0(x), E^i(y) \right] = \frac{ie^2}{2\pi^2} B^i(x) \delta(x-y), \quad (7.60)$$

$$\left[J_5^i(x), E^j(y) \right] = \frac{ie^2}{4\pi^2} \epsilon^{ijk} E_k(x) \delta(x-y), \quad (7.61)$$

$$\left[J^0(x), J_5^0(y) \right] = \frac{i}{2\pi^2} B^i(y) \partial_i^x \delta(x-y), \quad (7.62)$$

$$\left[J^i(x), J_5^0(y) \right] = \frac{i}{2\pi^2} \epsilon^{ijk} E_j(x) \partial_k^x \delta(x-y), \quad (7.63)$$

$$\left[J^0(x), J_5^i(y) \right] = -\frac{i}{2\pi^2} \epsilon^{ijk} E_j(x) \partial_k^x \delta(x-y). \quad (7.64)$$

En consecuencia, (7.59) se modifica como

$$\left[\tilde{Q}, A_i(x) \right] = 0, \quad \left[\tilde{Q}, E^i(x) \right] = 0. \quad (7.65)$$

Es evidente que \tilde{Q} deja invariantes las variables del fotón, como cabía esperar basándonos en el ejemplo anterior. En este caso, las cargas quirales más pequeñas vienen dadas por los bilineales quirales

$$\left[\tilde{Q}, \bar{\psi} \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \psi(x) \right] = \pm 2 \bar{\psi}(x) \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \psi(x). \quad (7.66)$$

Estos bilineales tienen dos unidades de carga como mencionamos anteriormente. Mediante cálculos similares, también podemos comprobar que la carga modificada, que implementa una transformación quiral bastante estándar, commuta con el tensor energiamomento. Nótese que este cálculo requiere de nuevo la consideración de los términos de Schwinger anteriores dados por (7.64).

Concluimos que las transformaciones generadas por la carga (7.55) parecen obedecer todos los requisitos de simetría interna. En particular, puesto que transforma las álgebras locales en sí mismas y commuta con las simetrías espacio-temporales, podemos construir cargas locales (o twists) para cualquier subregión de cualquier topología dada.

Como antes, la pregunta que queda es en qué sentido esta simetría es diferente de las simetrías internas convencionales. Para abordar esta cuestión, observamos que esta teoría tiene sectores HDV para regiones tipo anillo, dadas por un grupo $\mathbb{Z} \times U(1)$. La parte \mathbb{Z} corresponde a TL con cargas $2\pi k$, mientras que la parte $U(1)$ corresponde a WL de cargas en $q \in [0, 1]$. Los WL con cargas enteras no son operadores no locales porque podemos descomponerlos localmente en líneas de Wilson. Como \tilde{F} se conserva, el WL puede construirse exponenciando los flujos del campo magnético. La simetría quiral deja invariantes las clases de los WL, porque el campo magnético es invariante. Por otro lado, sólo los TL de cargas $2\pi k$ son operadores de lazo. Esto, y las relaciones

de conmutación con WL, queda fijado por las clases de WL no locales que forman un grupo $U(1)$.

La cuestión crucial nos refiere a la naturaleza de los TL. Observamos, en primer lugar, que estos operadores TL necesariamente forman parte del álgebra generada por los operadores locales en una bola.⁷ La razón es que el WL pertenece a esta álgebra (es un flujo del campo magnético). En consecuencia, el teorema del doble conmutante de von Neumann nos requiere que el TL pertenezca al álgebra de la misma bola. Una expresión del TL que muestre que pertenece al álgebra de los operadores locales podría obtenerse de forma abstracta utilizando la teoría modular. Pero es ciertamente oscuro cómo hacer explícita dicha construcción en este contexto QED. El modelo de piones anterior da una pista sobre lo que ocurre en la expresión del TL en términos de operadores locales. Ciertamente, los operadores locales cargados quiralmente deberían jugar un papel.

Sin embargo, la forma estándar de expresar la acción del TL es a partir de la definición original de 't Hooft. Esto es, como una inserción de una condición de contorno a lo largo de $\Gamma = \partial\Sigma$ en la integral de camino [7, 220]. Esta condición de contorno es la imposición de una condición de tipo monopolo magnético sobre el campo de gauge en una esfera S^2 alrededor de cualquier punto en Γ . Esta inserción tiene necesariamente las relaciones de conmutación correctas con WL, un hecho que establece al TL como un operador HDV en el anillo.

Para seguir, queremos analizar la transformación quiral estos TL. Podemos calcular esta transformación a partir del efecto Witten, y de esta manera, se conecta directamente con el mismo efecto en la electrodinámica del píón. Presentamos en el apéndice C una descripción extensa de dicho efecto, junto con más detalles de la definición del TL como condición de borde en la integral de camino y el cálculo de la transformación quiral de la medida del fermión. Todos estos conceptos serán necesarios a continuación para analizar la trasformación quiral del TL.

En esta línea, el efecto de Witten [56] describe un monopolo de carga magnética g sujeto a un cambio externo del parámetro del término θ en el Lagrangiano

$$L_\theta = \frac{1}{16\pi^2} \theta F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (7.67)$$

para un cambio total $\Delta\theta$. En este proceso un monopolo con carga g se transforma en un dión de carga

$$\left(g, g \frac{\Delta\theta}{4\pi^2} \right). \quad (7.68)$$

Equivalentemente, el monopolo ha adquirido una carga eléctrica $g \frac{\Delta\theta}{4\pi^2}$. Como resultado,

⁷Dicha bola debe contener completamente la región tipo anillo que encierra el lazo en el que se define el TL.

las condiciones de contorno del monopolo a lo largo del TL también se modifican a condiciones de contorno de dión, y el cambio del TL a lazo de carácter diónico viene dado por la misma fórmula (7.68).

Ahora, sólo queda conectar tal cambio de θ con una transformación quiral a través de la anomalía. En efecto, dicho término aparece en la acción como resultado de una transformación quiral de la medida del fermión en la integral de camino [221]. La transformación quiral cambia la acción con el término (7.67), donde

$$\Delta\theta = \left(\sum_i q_i^2 \right) \lambda. \quad (7.69)$$

En esta ecuación, λ es precisamente el ángulo de la transformación quiral, y la suma es sobre los diferentes fermiones quirales con carga q_i . Para QED es $\Delta\theta = 2\lambda$. Nótese que también podríamos haber invocado el efecto de Witten en la electrodinámica de piones, con la identificación

$$\theta = n q_0^2 \frac{\pi_0}{f_\pi}. \quad (7.70)$$

Por lo tanto, en QED tenemos el mismo fenómeno que en la electrodinámica de piones. El de una simetría quiral $U(1)$ que cambia las clases como

$$(2\pi k, q) \rightarrow \left(2\pi k, q + 2k \frac{\lambda}{2\pi} \right), \quad (7.71)$$

con $\lambda \in [0, 2\pi]$, $q \in [0, 1]$. Vemos que la carga mínima construida con estos lazos es 2, pero ésta es también la carga mínima en los operadores locales invariantes de gauge. En este sentido, este modelo alcanza el valor mínimo posible $n = 1$. Descripciones análogas de la acción no trivial de las transformaciones quirales sobre el TL han aparecido anteriormente [14–16]. Sin embargo, la interpretación y las consecuencias difieren. Compararemos con tales trabajos en la sección 7.2.

Es interesante observar que en QED esperamos a priori que esta simetría no se rompa. De hecho, la QED ordinaria no presenta ningún escalar de Goldstone y la masa del electrón ya es muy pequeña con respecto a la escala a la que la constante de acoplamiento es fuerte. Esto conduciría a la ecuación $\langle D_{(g,q)} \rangle = \langle D_{(g,q+\lambda g)} \rangle$ para operadores no locales relacionados con la simetría. Esta ecuación es ciertamente sorprendente desde el punto de vista del campo libre de Maxwell. Podemos preguntarnos cómo esto es compatible con el signo “equivocado” de la función beta en QED. En este sentido, sería interesante tener una comprensión más explícita de esta ecuación.

7.1.4. Correspondencia de anomalías y teorema de Goldstone

La interpretación habitual de las anomalías es que no se renormalizan. Equivalentemente, la divergencia de la corriente anómala debe ser la misma en los modelos UV e IR. Esto implica que la expresión general para la anomalía

$$\partial_\mu j_5^\mu = c \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (7.72)$$

tiene el mismo c adimensional para las teorías IR y UV, cuando fijamos la normalización de la corriente y del campo electromagnético. Esto impone una correspondencia de anomalías entre los modelos IR y UV. Esta correspondencia implica la existencia de excitaciones sin masa en el IR, ya sean fermiones o bosones de Goldstone, capaces de reproducir la anomalía UV [216]. Por ejemplo, para QCD con quarks sin masa tenemos para la anomalía en la corriente quiral

$$j^\mu = \frac{1}{2} (\bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 u - \bar{d} \gamma^\mu \gamma^5 d), \quad (7.73)$$

generando el valor del coeficiente

$$c = \frac{N_c}{2} \frac{1}{16\pi^2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right) = \frac{N_c}{96\pi^2}. \quad (7.74)$$

Podemos deducir esto de la anomalía presente en QED para cargas $2/3$ y $-1/3$ asociadas a los quarks u y d , que se replican por el número de colores N_c . Fijamos la normalización de F estableciendo la carga del protón en uno. Esta corriente se identifica en el IR con la que crea el campo de piones $j_\mu = f_\pi \partial_\mu \pi_0$. La correspondencia de anomalías nos da entonces el coeficiente en el Lagrangiano del píon a través de (7.46-7.47), con $q_0 = 1/3$, $n = 3N_c$.

Ahora queremos entender la correspondencia de anomalías en términos de la existencia de la simetría quiral global $U(1)$. Nótese que, genéricamente, la existencia de una simetría global continua ordinaria en el UV no implica necesariamente excitaciones sin masa en el IR. Aunque los bosones de Goldstone sin masa aparecen si la simetría se rompe espontáneamente, podemos tener el caso de que todas las partículas cargadas se vuelvan masivas, y la simetría desaparezca efectivamente en el IR. Sin embargo, para la simetría quiral actual, el punto clave es que cambia las clases HDV. Por lo tanto, la simetría no puede simplemente desaparecer en el IR ya que transforma las clases no locales del campo electromagnético. Estas clases también están presentes en el IR, ya que se supone que el campo electromagnético se acopla débilmente en ese régimen. Además, no puede darse el caso de que una simetría cambie las clases en el UV y luego deje de cambiarlas en el IR, si las clases siguen estando presentes. Esto no

es posible porque la acción de la simetría sobre las clases no locales se preserva bajo “transportabilidad”, o deformaciones de los operadores no locales por los locales. Estas deformaciones pueden transformar continuamente un lazo pequeño en uno grande.

Otra perspectiva es la siguiente. La simetría de 1-forma no desaparece en el IR debido a la existencia del campo de Maxwell. Entonces, los TL tienen valores de expectación no triviales, dando lugar a operadores cargados quirales no triviales. La complementariedad cuántica obliga a la existencia de operadores duales a estos cargados, también con valores de expectación no triviales [22, 49]. En este caso, estos son los twists locales que efectúan la transformación de simetría en el IR.

Por otro lado, como hemos comentado antes, los operadores no locales se construyen con operadores locales ordinarios. Puesto que los TL están cargados quiralmente, esto implica que en el IR debe haber operadores locales que aún se transforman bajo la simetría. Esto explica la existencia de excitaciones sin masa en el IR (además del campo fotónico). Entonces, la correspondencia de anomalías se convierte simplemente en la afirmación de que la acción de la simetría de grupo sobre las clases no locales se preserva a través del flujo del RG, y por lo tanto sus manifestaciones pueden corresponderse a diferentes escalas. Está claro que la velocidad de estas transformaciones en las clases preservadas también tiene que ser preservada, y esta velocidad es la que establece el coeficiente de la anomalía.

En este sentido, podría darse el caso de que no todos los sectores no locales se conserven o, como en QCD, que surjan nuevos sectores en el IR porque la carga mínima cambia de $1/3$ a 1 (considerando los piones cargados). En este caso, los sectores UV forman un subgrupo $U(1)_{\text{IR}}/Z_3 \times 3\mathbb{Z}_{\text{IR}}$ de los infrarrojos. La correspondencia con la acción de la simetría quiral conduce entonces a

$$n_{\text{UV}} (q_0^{\text{UV}})^2 = n_{\text{IR}} (q_0^{\text{IR}})^2. \quad (7.75)$$

Por último, la existencia de una simetría global continua en la QFT implica que se aplica el teorema de Goldstone [222–224]. La validez de este teorema no se apoya en la existencia de una corriente invariante de gauge. Sólo requiere la existencia de las cargas o twists locales invariantes de gauge, como se demuestra en [39]. Como discutiremos en la siguiente sección, las cargas locales $U(1)$ pueden construirse para el campo del pión. Por lo tanto, esta simetría puede romperse espontáneamente o no en el IR, conduciendo a la existencia de modos Goldstone o no. En QCD surge la primera posibilidad, con la aparición de los piones como bosones de Goldstone de la ruptura de la simetría quiral. En otras palabras, el acoplamiento entre la QCD y el campo electromagnético, que deforma la conservación ingenua de la corriente quiral, no estropea la aplicabilidad del teorema de Goldstone, lo que implica la existencia de piones neutros a bajas energías.⁸

⁸Una versión del teorema de Goldstone para simetrías no invertibles que explica estos aspectos

7.1.5. Implementación local de la simetría

Dada una simetría interna, definida como un automorfismo global de las álgebras (aditivas) generadas localmente para cualquier región del espacio-tiempo, siempre podemos encontrar operadores con soporte en regiones compactas del espacio que implementan la simetría dentro de estas regiones, actuando trivialmente fuera de ellas. Este es el contenido de la forma débil del teorema de Noether [146–149]. Estos operadores que implementan transformaciones locales son los twists que estudiamos extensivamente en el capítulo 5.⁹ Podemos construirlos de forma general y abstracta utilizando la split property y la teoría modular. Como vimos en la sección 5.2.1, una vez que tenemos dos álgebras que comuten (sin intersección no trivial entre ellas), y un unitario global que efectúa automorfismos para esas álgebras, podemos construir los twists que efectúan la transformación en una de las álgebras.

La versión débil del teorema de Noether y la construcción de twists locales pueden extenderse al caso de ruptura de simetría [39]. Esta extensión es relevante para el caso que nos interesa, a saber, para QCD con quarks sin masa, ya que la simetría quiral esta espontáneamente rota. En este caso, los automorfismos de las álgebras locales que comutan con la simetría de Poincaré sustituyen a los operadores de simetría global (que están mal definidos en el caso de ruptura de simetría) en la construcción de los twists. Para un resumen de las sutilezas involucradas véase la sección 5.2.1 y para un ejemplo la sección 5.3.1.

Por lo tanto, la existencia de estas implementaciones locales nos permite estudiar, por ejemplo, las transformaciones de las clases HDV bajo la simetría, donde ahora todas las transformaciones de simetría están definidas localmente y representadas por los operadores de twist τ_g . Si definimos el modelo en un espacio de topología no trivial, la estructura de las álgebras locales dentro de una bola contractible debe ser en principio la misma, a saber, el álgebra aditiva (véase [226] para una discusión reciente con diferentes motivaciones). Existirán twists para tales bolas, y a su vez a partir de ellas podemos proporcionar twists asociados a cualquier región dada (de cualquier topología) dentro de la bola. Esto nos permite comprender que la simetría quiral es la misma simetría $U(1)$ invertible en cualquier espacio-tiempo, en lo que se refiere a los automorfismos de las álgebras locales. Esta simetría es intrínseca a la QFT y, lo que es más importante, controla el decaimiento de piones. Discutiremos las simetrías globales para variedades

se describió en [225]. Pero a partir del presente análisis, está claro que es el teorema de Goldstone convencional el que dicta que el campo del pión es un bosón de Nambu-Goldstone.

⁹Las simetrías globales convencionales se definen, a veces, como aquellas con operadores topológicos para cualquier variedad de codimensión uno en signatura euclídea. Nótese que la presente versión débil del teorema de Noether en QFT muestra que uno sólo necesita demostrar la existencia del operador topológico global en la variedad M de sobre la que definimos la teoría, y que tal operador topológico global genera un automorfismo de las álgebras aditivas. Una vez demostradas estas dos cosas en la QFT en cuestión, el teorema estudiado en [146–149] implica la existencia de operadores topológicos para cualquier subregión en la variedad M .

compactas con topología no trivial utilizando los conceptos introducidos en el capítulo 2 durante la sección 7.2. No obstante, veremos que las posibles características de estos operadores globales no tienen nada que ver con el decaimiento de los piones.

Como vimos en el capítulo 5, cuando la simetría global modifica las clases no locales asociadas a una determinada región, se producen ciertos refinamientos en la clasificación de los twists. Más concretamente, los twists para regiones que contienen operadores no locales pueden reproducir o no la acción de la simetría global sobre estos operadores no locales. En términos más generales, los twists pueden implementar la simetría en una subálgebra cerrada de los operadores no locales que se mantiene invariante bajo la simetría. Esto es posible porque los twists estándar surgen al elegir las dos álgebras conmutativas y no intersecantes apropiadas aplicando la split property, y en estos casos tenemos más de una opción. Se pueden elegir las álgebras aditivas para ambas regiones, o el álgebra aditiva para una región y el álgebra máxima para la otra. También se pueden elegir opciones intermedias, siempre que commuten. Los twists formarán siempre el mismo grupo que el global y actuarán de forma correcta sobre cualquier operador cuya transformación de simetría se mantenga en el álgebra.

7.2. Simetrías no invertibles y literatura reciente

Este capítulo fue motivado principalmente por la interesante interacción entre las teorías con anomalías ABJ, el teorema de Noether y su relación con las pruebas del capítulo 5. La discusión anterior concluyó que las anomalías ABJ deberían entenderse más propiamente como teorías con una simetría global $U(1)$, como anticipó Adler. Siendo la única característica que hace especial a esta simetría global el hecho de que transforma las clases no locales. Sin embargo, esta peculiaridad nos permite explicar

- (a) la cuantización del coeficiente de la anomalía debido a la necesidad de compatibilidad de los ciclos $U(1)$ asociados a la simetría quiral y a la simetría generalizada 1-forma,
- (b) la correspondencia de la anomalía (“anomaly matching”) por la preservación de la simetría que transforma las clases no locales a lo largo del flujo del RG entre el IR y el UV,
- (c) la ausencia de una corriente de Noether por el hecho de que los twists locales transforman las clases no locales mientras que los twists de Noether no pueden hacerlo,
- (d) la aplicabilidad del teorema de Goldstone que muestra que el campo de piones puede considerarse un bosón de Goldstone incluso cuando QCD está acoplada al campo de fotones.

Estas conclusiones resultan estar en contraste con literatura reciente [14–16]. Aunque parte del espíritu y varios cálculos son similares, no encontramos que la simetría quiral se reduzca a Z_{n_f} en QED con n_f fermiones sin masa [14], o que deba interpretarse como no invertible [15, 16]. Estas discrepancias se originan en características asociadas con las manifestaciones en la física local de las simetrías generalizadas. La física de QFTs con anomalías ABJ simplemente amplifica sus consecuencias. Por lo tanto durante esta sección buscamos aclarar la imagen física general en comparación con los trabajos anteriores. Para esto tomamos como punto de partida las ideas desarrolladas en el capítulo 2 durante la sección 2.3 y describimos cómo afectan a la comprensión de la anomalía en la literatura reciente.

Terminamos la sección recordando el teorema de reconstrucción DHR [58–62], destacando las dificultades, o más bien la imposibilidad, que plantea a tener genuinas simetrías internas globales (0-forma) no invertibles, para dimensiones $D > 2$. Nuestros resultados relativos a las teorías con anomalías ABJ son, por tanto, coherentes con dicho teorema general. Esbozamos además la idea de un “teorema de reconstrucción generalizado”.

7.2.1. Discusión de literatura reciente sobre la anomalía ABJ

A continuación describimos cómo las características discutidas en los capítulos 2 y 5 afectan a las interpretaciones recientes de la anomalía ABJ. El primer artículo que dio cuenta de que había una interacción interesante entre la simetría quiral y los TL fue [14]. Sin embargo, allí se argumentaba que en QED, la simetría quiral modificada $U(1)$ de Adler no es realmente una simetría global. La razón dada es que esta simetría mezcla el TL con un operador topológico de superficie, concretamente el flujo magnético. La definición que proporcionan de simetría global es la estándar, y la misma que en la literatura algebraica, a saber, como un automorfismo de las álgebras locales. El problema en cuestión es la noción de álgebra local. En el artículo citado, esto significa el álgebra aditiva más los TL, pero no el WL. Esto es hacer una elección particular de red de Haag-Dirac (HD) y atribuirle un significado físico. En este caso particular, para decidir si algunas transformaciones son simetrías de la teoría o no.

Sin embargo, una definición de simetría global que sea física (intrínseca) debe partir únicamente de los automorfismos del álgebra aditiva. Y, de hecho, esto nos es suficiente para toda la discusión de este capítulo y el capítulo 5. La razón es la siguiente. Puesto que las regiones topológicamente triviales tienen álgebras únicas (satisfacen la dualidad de Haag), es un requisito minimalista que una simetría global sea un automorfismo de las álgebras asociadas a regiones topológicamente triviales como las bolas. Pero este requisito minimalista se extiende inmediatamente a toda la red aditiva, ya que la construimos a partir de las álgebras asociadas a las bolas. Supongamos entonces que

efectivamente tenemos (5.1)

$$U(g) \mathcal{A}(R) U(g)^{-1} = \mathcal{A}(R), \quad g \in G, \quad (7.76)$$

donde debemos entender esta relación como un mapeo entre álgebras. Por supuesto, no dice que todos los elementos de $\mathcal{A}(R)$ son invariantes bajo el grupo de simetría. Sólo dice que la acción de la simetría deja el álgebra en sí misma. Equivalentemente, si $a \in \mathcal{A}(R)$ entonces $U(g) a U(g)^{-1} \in \mathcal{A}(R)$. Ahora, recordamos que la conjugación con un unitario $U(g)$ lleva álgebras que comutan a álgebras que comutan, es decir, dado (7.76) recuperamos (5.2), a saber

$$U(g) \mathcal{A}(R)' U(g)^{-1} = \mathcal{A}(R)', \quad g \in G. \quad (7.77)$$

Pero el commutante del álgebra aditiva en una dada región es el álgebra máxima en el complemento, que contiene todos los operadores HDV. Equivalentemente, contiene todas las líneas genuinas y superficies topológicas. Concluimos que si tenemos un automorfismo de las álgebras locales asociadas a bolas, tenemos un automorfismo para las álgebras máximas asociadas a cualquier región R , dado por (5.3) de la forma

$$U(g) \mathcal{A}_{\max}(R) U(g)^{-1} = \mathcal{A}_{\max}(R). \quad (7.78)$$

En resumen, esto implica que la simetría no puede convertir operadores no locales en locales o viceversa. Tiene que transformar las clases de operadores no locales en sí mismas. La mayoría de las simetrías no transforman estas clases, pero algunas sí lo hacen. Dado que las líneas genuinas y las superficies topológicas son operadores HDV por igual, se espera que las simetrías de este tipo transformen entre ellas. Obsérvese que el hecho de que algunas simetrías puedan transformar líneas genuinas en superficies topológicas sólo es posible si tal distinción no tiene sentido físico. En tales escenarios, esos operadores pertenecen al mismo multiplete generalizado. Equivalentemente, la noción de clases HDV es la noción adecuada para caracterizar y clasificar las posibles mezclas entre diferentes simetrías generalizadas.

Para la anomalía ABJ, tal como se ha calculado anteriormente, el commutante del álgebra aditiva del anillo es el álgebra máxima en el anillo complementario. Esta incluye el álgebra aditiva más los TL dados por T_g con $g = g_0 n$ y n entero, y los WL actuando como superficies topológicas, es decir $W_q = e^{iq\Phi_B}$ con Φ_B el flujo magnético sobre cualquier superficie con borde en el anillo complementario y $q \in [0, 2\pi/g_0]$. Podemos construir automorfismos del álgebra aditiva, que dejan invariantes las álgebras aditivas, pero mezclan los TL con los WL, como deducimos en la sección 7.1. Como la simetría cambia las clases no locales, no respeta las elecciones de redes de HD, como por ejemplo la que obtenemos al tomar sólo los TL como operadores no locales para una región.

Como ya hemos explicado, las elecciones de HD no son intrínsecas o físicas, y una simetría física puede cambiarlas. Este tipo de mezcla es la generada por la simetría quiral modificada. Por ende, vemos que trata de una transformación $U(1)$ sin corriente de Noether debido al teorema que probamos en el capítulo 5.

En otra visión del tema se introdujo en [15, 16], donde se ha argumentado que la afirmación correcta no es la de Adler, a saber, que la anomalía ABJ está codificando una simetría global $U(1)$ abeliana, sino que su origen reside en la existencia de una cierta simetría no invertible implementada por un conjunto modificado de generadores de simetría. En la construcción original los nuevos operadores de simetría se etiquetaron mediante números racionales, mientras que las extensiones a etiquetas compactas continuas se han descrito en [225, 227]. La construcción sigue la línea de una análoga para el caso de simetría de dualidad y escenarios relacionados [228–234]. La motivación para estos nuevos desarrollos es que la construcción de Adler de la carga conservada invariante de gauge \tilde{Q} sólo es válida cuando la carga tiene soporte compacto sobre una superficie de Cauchy infinita a tiempo fijo, y sólo cuando insertamos operadores locales, tales como el campo pión π_0 o $F_{\mu\nu}$ en la electrodinámica con axiones. Aunque se reconoce que en el espacio plano con inserciones de operadores locales la simetría se convierte en una $U(1)$, la transformación no trivial de el TL se considera de nuevo un problema. Se argumenta que la mezcla no convencional entre líneas genuinas (aquí el TL) y superficies topológicas (el WL con cargas no enteras) está relacionada con la naturaleza no invertible de la propuesta simetría.

Sin embargo, como hemos explicado, la simetría actúa como actúa sobre el TL exactamente porque transforma los campos locales de la forma correcta. El TL y el WL no son más que operadores construidos con los campos locales.¹⁰ La afirmación de que una simetría puede actuar de algún modo en operadores locales pero de un modo fundamentalmente distinto en operadores no locales es inconsistente en QFT. Esta observación de primeros principios se vuelve completamente explícita en el caso de la electrodinámica de piones, donde podemos escribir el TL como

$$T_g = e^{ig\Phi_G}, \quad \Phi_G \equiv - \int_{\Sigma} dS_i p_i^A = - \int_{\Sigma} dS_i \left(\frac{1}{e^2} E_i + \frac{1}{\mu} \pi_0 B_i \right). \quad (7.79)$$

Insertar el TL no significa otra cosa que insertar muchos campos eléctricos, magnéticos y de piones. La transformación no trivial del TL se sigue enteramente de la del campo de piones local π_0 , que a su vez es un $U(1)$, como reconoce en [15, 16]. También, es transparente que el hecho de que la transformación mezcle el TL con la superficie topológica no tiene nada que ver con la no invertibilidad de la simetría, sólo con el

¹⁰Este es el caso del TL y la WL definidos por lazos contractiles en la variedad sobre la que se definen. Estos tipos de lazos contractiles están relacionados con la física local. En la siguiente sección comentaremos los no contractiles.

hecho de que el TL, para ser topológico, necesita incluir con el campo quiral local. Es transparente que la clasificación entre líneas genuinas y superficies topológicas sólo causa confusión aquí, como muestran precisamente estos modelos, que las conectan mediante una transformación de simetría.

Estos trabajos descartan hasta cierto punto la discusión de lo que ocurre para las álgebras locales y la física local y se concentran en definir y comprender la simetría en las variedades topológicamente no triviales. Esto nos aleja del ámbito de la anomalía ABJ y de la física de partículas. Para variedades de topologías no triviales, la física relevante dentro de bolas contenidas estas variedades debería seguir la que hemos descrito en el espacio plano.

Como hemos mencionado en el capítulo 2, para entender la estructura global necesitamos hacer elecciones adicionales que definen el modelo. La acción global de la simetría debe definirse en consecuencia. En la próxima sección profundizaremos más en las simetrías que cambian de clase en las variedades no triviales. Aquí queremos destacar que un problema muy similar, con elecciones y soluciones paralelas, puede estudiarse dentro del espacio plano. Podemos preguntarnos cómo construir twists para la simetría que actúan en una región compacta R del espacio y no hacen nada en el complemento de una región ligeramente mayor. En el caso que nos ocupa el interés se centra, por ejemplo, en una región R con la topología de un anillo. Como se estudiamos en detalle durante el capítulo 5, para una región topológicamente no trivial R hay diferentes opciones de álgebras y twists que podemos considerar. El álgebra puede de ser puramente aditiva, o contener todas, o algún subgrupo de clases no locales de operadores. Los twists para estas álgebras pueden construirse de tal forma que formen un grupo $U(1)$, y de tal forma que tengan, al menos, la misma acción que la simetría global sobre los operadores locales. Si la subálgebra elegida de operadores no locales es invariante bajo la simetría, entonces también pueden construirse twists que realicen las transformaciones relevantes también sobre operadores no locales. Estos twists completos siguen formando una representación del grupo original. Vemos que no necesitamos ninguna acción no invertible para definir localmente la acción de la simetría.

7.2.2. Variedades compactas con topología no trivial

En secciones anteriores hemos demostrado que es posible recuperar la simetría quiral $U(1)$ para subregiones contractiles de cualquier topología en cualquier variedad. En el capítulo 5 durante la sección 5.3.3, hicimos una discusión similar para la simetría de dualidad electromagnética del campo de Maxwell y subregiones del espacio de Minkowski. Desde nuestro punto de vista, esta es la afirmación importante, ya que tales simetrías $U(1)$, válidas a nivel local, son las que controlan la física local, como el decaimiento de piones, en cualquier espacio-tiempo. Sin embargo, parte de la comu-

nidad define convencionalmente una simetría global de modo que existan generadores de simetría topológica cuando la teoría se sitúa en variedades con topología no trivial. Ahora mostramos cómo extender la construcción a dichos casos.

Para ser concisos y por simplicidad nos centramos en el ejemplo considerado recientemente en [232, 234], a saber, las transformaciones de dualidad electromagnética de un campo libre de Maxwell en un espacio-tiempo $S_2 \times S_1 \times \mathbb{R}$. Esta simetría, como la simetría quiral, transforma las clases, ya que rota los flujos eléctricos y magnéticos del campo de Maxwell. Por ello se considera que también se vuelve no invertible, véase [232, 234] y referencias al respecto. En lo que sigue, mostramos cómo cuantizar la teoría en este espacio-tiempo y luego como recuperar la simetría de dualidad $U(1)$.

Armónicos esféricos en $S^2 \times S^1$

Empezamos desarrollando, a partir de los armónicos esféricos usuales, una base completa ortonormal que nos permita expandir campos escalares y vectoriales en $S^2 \times S^1$. Más precisamente, consideramos la métrica del espacio-tiempo dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + L^2 d\chi^2, \quad (7.80)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ describe la coordenada temporal, $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ representan los ángulos de S^2 con radio R , y usamos $\chi \in [0, 2\pi)$ para notar el ángulo de S^1 con radio L .

Para construir la base necesaria, comenzamos estudiando las auto-funciones del Laplaciano espacial. Estas vienen dadas por

$$\Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi) = \frac{1}{R} \frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2\pi L}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (7.81)$$

con $l \in \mathbb{N}_0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, y $|m| \leq l$. Los auto-valores correspondientes vienen dados por las frecuencias $\omega_{lk} = \frac{l(l+1)}{R^2} + \frac{k^2}{L^2}$ como

$$\nabla^2 \Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left[\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi) \right] = -\omega_{lk} \Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi). \quad (7.82)$$

Las funciones (7.81) obedecen a la condición de ortonormalidad dada por el producto escalar

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{|g|} \Phi_{lmk}^*(\theta, \varphi, \chi) \Phi_{l'm'k'}(\theta, \varphi, \chi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{kk'}. \quad (7.83)$$

De esta forma podemos expandir campos escalares $\phi(t, \theta, \varphi, \chi)$ en $S_2 \times S_1$ de la forma

$$\phi(t, \theta, \varphi, \chi) = \sum_{lmk} \phi_{lmk}(t) \Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi). \quad (7.84)$$

Continuando, podemos utilizar los modos escalares, y podemos obtener una base para vectores espaciales en $S_2 \times S_1$, a saber

$$[\Phi_{lmk}^e(\theta, \varphi, \chi)]_i = \frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2\pi L}} \frac{\partial_i Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad l > 0, -l \leq m \leq l, k \in \mathbb{Z}, \quad (7.85)$$

$$[\Phi_{lmk}^m(\theta, \varphi, \chi)]_i = \frac{1}{L} \frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2\pi L}} \frac{E_{ijn} \hat{\chi}^j \partial^n Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad l > 0, -l \leq m \leq l, k \in \mathbb{Z}, \quad (7.86)$$

$$[\Phi_{lmk}^\chi(\theta, \varphi, \chi)]_i = \frac{1}{RL} \frac{e^{ik\chi}}{\sqrt{2\pi L}} Y_{lm}(\theta, \varphi) g_{ij} \hat{\chi}^j, \quad l \geq 0, -l \leq m \leq l, k \in \mathbb{Z}. \quad (7.87)$$

En estas definiciones, observamos que $\vec{\Phi}_{lmk}^\chi$ es paralelo al versor $\hat{\chi}^i = (0, 0, 1)$ en la dirección dada por el S_1 , y $\vec{\Phi}_{lmk}^e$ y $\vec{\Phi}_{lmk}^m$ representan las direcciones “eléctrica” y “magnética” habituales sobre S_2 . También, hemos definido el tensor de Levi-Civita como $E_{ijk} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk}$, con $\varepsilon_{\theta\varphi\chi} = 1$, y definimos el gradiente espacial en las coordenadas naturales de la variedad $S_2 \times S_1$, es decir $\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right)$. Si utilizamos las relaciones de ortonormalidad anteriores asociadas a los modos escalares, podemos comprobar que los vectores (7.85-7.87) satisfacen

$$\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{|g|} [\Phi_{lmk}^{s*}(\theta, \varphi, \chi)]^i [\Phi_{l'm'k'}^{s'}(\theta, \varphi, \chi)]_i = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{kk'} \delta_{ss'}, \quad (7.88)$$

donde los índices son $s, s' = e, m, \chi$. Usando esta base podemos expandir la parte espacial de campos vectoriales $\bar{v}(t, \bar{x})$ como

$$\bar{v}(t, \theta, \varphi, \chi) = \sum_{lmk} \sum_s v_{lmk}^s(t) \bar{\Phi}_{lmk}^s(\theta, \varphi, \chi). \quad (7.89)$$

Podemos calcular otras propiedades considerando la acción correspondiente de las derivadas covariantes ∇_i . Por ejemplo, las divergencias toman la forma

$$\nabla_i [\Phi_{lmk}^e]^i = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \Phi_{lmk}, \quad (7.90)$$

$$\nabla_i [\Phi_{lmk}^m]^i = 0, \quad (7.91)$$

$$\nabla_i [\Phi_{lmk}^\chi]^i = \frac{ik}{L} \Phi_{lmk}, \quad (7.92)$$

mientras podemos escribir los rotores como

$$E_{ijn} \nabla^j [\Phi_{lmk}^e]^n = \frac{ik}{L} [\Phi_{lmk}^m]_i , \quad (7.93)$$

$$E_{ijn} \nabla^j [\Phi_{lmk}^m]^n = -\frac{ik}{L} [\Phi_{lmk}^e]_i - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} [\Phi_{lmk}^\chi]_i , \quad (7.94)$$

$$E_{ijn} \nabla^j [\Phi_{lmk}^\chi]^n = -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} [\Phi_{lmk}^m]_i . \quad (7.95)$$

Campo de Maxwell libre en la variedad $S^2 \times S^1$

Seguimos, con el análisis de la estructura del álgebra, para esto tenemos que definir la teoría de Maxwell en $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$. Con este propósito, estudiaremos la transición al formalismo hamiltoniano donde veremos que la cuantización es sencilla y que podemos entenderla como la de una serie de osciladores armónicos desacoplados. A continuación, presentamos este cálculo detalladamente.

Como primer paso, expandimos las partes escalar y vectorial del potencial de gauge combinando (7.81) y (7.85-7.87). Más precisamente, tenemos

$$A_0 = \sum_{lmk} A_{lmk}^0(t) \Phi_{lmk}(\theta, \varphi, \chi), \quad A_i = \sum_{lmk} \sum_s A_{lmk}^s(t) [\Phi_{lmk}^s(\theta, \varphi, \chi)]_i . \quad (7.96)$$

Nótese que por coherencia con las definiciones (7.85-7.87) tenemos $l \geq 1$ para $s = e, m$, mientras que $l \geq 0$ para $s = \chi$. Utilizaremos este abuso de notación durante lo que resta de la sección. Además, el hecho de que $A_\mu(x)$ sea un campo vectorial real combinado con el hecho de que $\Phi_{lmk}^{s*} = (-1)^m \Phi_{l-m-k}^s$ y $\Phi_{lmk}^* = (-1)^m \Phi_{l-m-k}$ implica que

$$A_{lmk}^{s*} = (-1)^m A_{l-m-k}^s, \quad A_{lmk}^{0*} = (-1)^m A_{l-m-k}^0 . \quad (7.97)$$

En este contexto, podemos reescribir una transformación de gauge de la forma $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ expandiendo la función $\alpha(t, \theta, \varphi, \chi)$ en la base escalar dada por los modos (7.81). De esta manera, obtenemos

$$A'_0 = \sum_{lmk} \left(A_{lmk}^0 + \dot{\alpha}_{lmk} \right) \Phi_{lmk} , \quad (7.98)$$

$$\begin{aligned} A'_i = & \sum_{lmk} \left[\left(A_{lmk}^e + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} \alpha_{lmk} \right) [\Phi_{lmk}^e]_i \right. \\ & \left. + A_{lmk}^m [\Phi_{lmk}^m]_i + \left(A_{lmk}^\chi + \frac{ik}{L} \alpha_{lmk} \right) [\Phi_{lmk}^\chi]_i \right] . \end{aligned} \quad (7.99)$$

A partir de esta relación es transparente que podemos fijar el gauge de modo que recuperemos $A_{lmk}^e = 0$ para todo m, k y $l \geq 1$. Para seguir, impondremos dicho gauge.

A partir de las expresiones anteriores, también podemos reescribir los campos

eléctricos y magnéticos que describen el espacio de fase invariante de gauge. Si remplazamos (7.93-7.95) y (7.96) en las definiciones $E_i = -\dot{A}_i + \partial_i A_0$ y $B_i = E_{ijk} \nabla^j A^k$ encontramos

$$E_i = (-1) \sum_{lmk} \left[\dot{A}_{lmk}^m [\Phi_{lmk}^m]_i - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} A_{lmk}^0 [\Phi_{lmk}^e]_i + \left(\dot{A}_{lmk}^\chi - \frac{ik}{L} A_{lmk}^0 \right) [\Phi_{lmk}^\chi]_i \right], \quad (7.100)$$

$$B_i = (-1) \sum_{lmk} \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} A_{lmk}^\chi [\Phi_{lmk}^m]_i + \frac{ik}{L} A_{lmk}^m(t) [\Phi_{lmk}^e]_i + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} A_{lmk}^m [\Phi_{lmk}^\chi]_i \right]. \quad (7.101)$$

Basándonos en estos resultados, procedemos a estudiar la dinámica de esta teoría. Como generalización del caso de espacio plano es natural expandir en modos la acción

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|g|} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = \int dt \mathcal{L} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int dt \mathcal{L}_{lmk}, \quad (7.102)$$

donde los modos lagrangianos \mathcal{L}_{lmk} pueden calcularse combinando (7.88) y (7.100-7.101). Por ejemplo, si $l \geq 1$, recuperamos

$$\mathcal{L}_{lmk} = \frac{1}{2} \left[\dot{A}_{lmk}^\chi * \dot{A}_{lmk}^\chi - \left(\omega_{lk}^2 - \frac{k^2}{L^2} \right) A_{lmk}^\chi * A_{lmk}^\chi + \dot{A}_{lmk}^m * \dot{A}_{lmk}^m - \omega_{lk}^2 A_{lmk}^m * A_{lmk}^m + \omega_{lk}^2 A_{lmk}^0 * A_{lmk}^0 - \frac{ik}{L} \left(\dot{A}_{lmk}^\chi * A_{lmk}^0 - A_{lmk}^0 * \dot{A}_{lmk}^\chi \right) \right]. \quad (7.103)$$

Dada esta forma del Lagrangiano, donde todos los modos están básicamente desacoplados, podemos proceder modo por modo. Debemos tener en cuenta que A_{lmk}^0 y su conjugado aparecen como multiplicadores de Lagrange. Las correspondientes ecuaciones de movimiento nos producen los vínculos

$$\omega_{lk}^2 A_{lmk}^0 = -\frac{ik}{L} \dot{A}_{lmk}^\chi, \quad \omega_{lk}^2 A_{lmk}^{0*} = \frac{ik}{L} \dot{A}_{lmk}^\chi*. \quad (7.104)$$

Podemos ver que estos son equivalentes a la ley de Gauss $\nabla_i E^i = 0$ recordando (7.93-7.95) y (7.100). Resolviendo dichos vínculos y remplazando en el Lagrangiano tenemos

$$\mathcal{L}_{lmk} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{\omega_{lk}^2 L^2} \right) \dot{A}_{lmk}^\chi * \dot{A}_{lmk}^\chi + \dot{A}_{lmk}^m * \dot{A}_{lmk}^m - \left(\omega_{lk}^2 - \frac{k^2}{L^2} \right) A_{lmk}^\chi * A_{lmk}^\chi - \omega_{lk}^2 A_{lmk}^m * A_{lmk}^m \right], \quad (7.105)$$

donde recordamos que estamos analizando $l \geq 1$. A partir de aquí podemos encontrar

los momentos, que obedecen las relaciones de commutación canónicas. Estos son

$$\pi_{lmk}^m = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_{lmk}^m} = \dot{A}_{lmk}^{m*}, \quad \pi_{lmk}^\chi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_{lmk}^\chi} = \left(1 - \frac{k^2}{\omega_{lk}^2 L^2}\right) \dot{A}_{lmk}^{\chi*}, \quad (7.106)$$

y conducen, mediante la transformación de Legendre apropiada, al Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{lmk} = & \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{\omega_{lk}^2 L^2}\right)^{-1} \pi_{lmk}^\chi * \pi_{lmk}^\chi + \pi_{lmk}^m * \pi_{lmk}^m \right. \\ & \left. + \left(\omega_{lk}^2 - \frac{k^2}{L^2}\right) A_{lmk}^\chi * A_{lmk}^\chi + \omega_{lk}^2 A_{lmk}^m * A_{lmk}^m \right]. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Nótese que en esta notación $\mathcal{H}_{lmk} = \mathcal{H}_{l-m-k}$ y ambos contribuyen al mismo modo. En este contexto, nos será útil redefinir las variables canónicas como

$$\pi_{lmk}^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{lmk}^{(1)} - i p_{l-m-k}^{(1)}), \quad \pi_{lmk}^\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} (q_{lmk}^{(2)} - i q_{l-m-k}^{(2)}), \quad (7.108)$$

$$A_{lmk}^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{lmk}^{(1)} + i q_{l-m-k}^{(1)}), \quad A_{lmk}^\chi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{l(l+1)}} (p_{lmk}^{(2)} + i p_{l-m-k}^{(2)}), \quad (7.109)$$

considerando para el caso especial de $m = 0$ y $k = 0$ que

$$\pi_{l00}^m = p_{l00}^{(1)}, \quad A_{l00}^m = q_{l00}^{(1)}, \quad A_{l00}^\chi = -\frac{R}{\sqrt{l(l+1)}} p_{l00}^{(2)}, \quad \pi_{l00}^\chi = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R} q_{l00}^{(2)}. \quad (7.110)$$

Esto nos permite reescribir el Hamiltoniano como el correspondiente a osciladores armónicos reales desacoplados con las mismas frecuencias

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{lmk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left((p_{lmk}^{(1)})^2 + (p_{lmk}^{(2)})^2 + \omega_{lk}^2 [(q_{lmk}^{(1)})^2 + (q_{lmk}^{(2)})^2] \right). \quad (7.111)$$

Las relaciones de commutación, recuperadas de la cuantización canónica de (7.105), simplemente toman la forma de

$$[q_{lmk}^{(1)}, p_{lmk}^{(1)}] = i \quad [q_{lmk}^{(2)}, p_{lmk}^{(2)}] = i. \quad (7.112)$$

Por último, consideramos el caso faltante de $l = 0$. Nos concentraremos en el subconjunto de esos modos con $k \neq 0$, es decir, todos los modos restantes menos el que tiene $k = l = m = 0$. Para estos modos tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{00k} = \dot{A}_{00k}^\chi * \dot{A}_{00k}^\chi + \frac{k^2}{L^2} A_{00k}^0 * A_{00k}^0 - \frac{ik}{L} (\dot{A}_{00k}^\chi * A_{00k}^0 - A_{00k}^0 * \dot{A}_{00k}^\chi). \quad (7.113)$$

En este caso, el multiplicador de Lagrange A_{00k}^0 produce el vínculo $\dot{A}_{00k}^\chi = (ik/L) A_{00k}^0$,

forzando que $\mathcal{L}_{00k} = 0$.

Finalmente nos queda el modo $k = l = m = 0$, que resulta ser una partícula libre no relativista con Lagrangiano y Hamiltoniano dados por la forma usual

$$\mathcal{L}_{000} = \frac{1}{2} \dot{A}_{000}^{\chi} - \Rightarrow \mathcal{H}_{000} = \frac{1}{2} p_0^2, \quad p_0 \equiv \dot{A}_{000}^{\chi}, \quad q_0 \equiv A_{000}^{\chi}. \quad (7.114)$$

Las relaciones de commutación canónicas para estos modos son simplemente

$$[q_0, p_0] = i. \quad (7.115)$$

En resumen, el Hamiltoniano completo conserva la forma una serie de osciladores armónicos desacoplados, dígase

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dt \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{|g|} g^{ij} (E_i E_j + B_i B_j) = \\ &= \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left((p_{lmk}^{(1)})^2 + (p_{lmk}^{(2)})^2 + \omega_{lk}^2 (q_{lmk}^{(1)})^2 + \omega_{lk}^2 (q_{lmk}^{(2)})^2 \right), \end{aligned} \quad (7.116)$$

Además, en esta notación podemos escribir los campos invariantes de gauge como

$$E_i = -p_0 [\Phi_{000}^{\chi}]_i + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=0}^{\infty} [E_{lmk}]_i, \quad B_i = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=0}^{\infty} [B_{lmk}]_i, \quad (7.117)$$

donde tenemos que remplazando (7.108-7.110) en (7.100-7.101) vale que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=0}^{\infty} [E_{lmk}]_i &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[\omega_{l0} q_{l00}^{(2)} [\Phi_{l00}^r]_i - p_{l00}^{(1)} [\Phi_{l00}^m]_i \right] \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=1}^{\infty} \left[\omega_{lk} q_{lmk}^{(2)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^r + \Phi_{lmk}^{r*}}{\sqrt{2}} \right) + i \omega_{lk} q_{l-m-k}^2 \left(\frac{\Phi_{lmk}^r - \Phi_{lmk}^{r*}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{lmk}^{(1)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^m + \Phi_{lmk}^{m*}}{\sqrt{2}} \right) + i p_{l-m-k}^1 \left(\frac{\Phi_{lmk}^m - \Phi_{lmk}^{m*}}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.118)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=0}^{\infty} [B_{lmk}]_i &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[\omega_{l0} q_{l00}^{(1)} [\Phi_{l00}^r]_i + p_{l00}^{(2)} [\Phi_{l00}^m]_i \right] \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=1}^{\infty} \left[\omega_{lk} q_{lmk}^{(1)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^r + \Phi_{lmk}^{r*}}{\sqrt{2}} \right) + i \omega_{lk} q_{l-m-k}^{(1)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^r - \Phi_{lmk}^{r*}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{lmk}^{(2)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^m + \Phi_{lmk}^{m*}}{\sqrt{2}} \right) + i p_{l-m-k}^{(2)} \left(\frac{\Phi_{lmk}^m - \Phi_{lmk}^{m*}}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.119)$$

Nótese que hemos cambiado convenientemente de base, definiendo para $l \neq 0$

$$[\Phi_{lmk}^r(\theta, \varphi, \chi)]_i = \frac{1}{\omega_{lk}} E_{ijn} \nabla^j [\Phi_{lmk}^m(\theta, \varphi, \chi)]^n . \quad (7.120)$$

Con estas expresiones, estamos en posición de entender el rol de los WL y TL (globales o no) en esta teoría. Podemos comenzar calculando el flujo eléctrico sobre la esfera espacial S^2 . Más concretamente, el flujo eléctrico sobre una superficie S^2 llamada Σ definida por $\Sigma = \{(t_0, \theta, \phi, \chi_0) | \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$ viene dado por la integración del pullback de $*F$ a Σ (Véase la sección 6.2.3 para detalles). De esta forma, tenemos

$$\Phi_E(\Sigma) = \int_{\Sigma} *F = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{|h|} E^\chi = - \left(\frac{L^{3/2}}{\sqrt{2R}} \right)^{-1} p_0(t_0) . \quad (7.121)$$

En otras palabras, el modo p_0 representa al flujo eléctrico sobre la esfera espacial S^2 en el álgebra. Dígase,

$$p_0 \sim \int_{\Sigma} *F . \quad (7.122)$$

Este commuta con el Hamiltoniano (7.116) y con todos los demás operadores (7.108-7.110) excepto $q_0 \sim A_{000}^\chi$. La razón física detrás de esta commutatividad, es que tenemos un campo eléctrico que satisface $\nabla_i E^i = 0$ y por ende su flujo commuta con todos los operadores locales de la teoría. Aquí, los operadores locales están representados por todos los modos restantes a excepción de q_0 . Esta última variable, es la pareja canónica del flujo eléctrico global en S^2 y, en consecuencia, es de esperar que no corresponda un operador local de la teoría. En efecto, podemos ver que q_0 representa en el álgebra al WL global paralelo a la dirección S^1 , es decir, es el resultado de integrar A^χ sobre toda la variedad espacial

$$q_0 \sim \int_{S^2 \times S^1} (A \cdot \hat{\chi}) . \quad (7.123)$$

Esto es esperable en base a la discusión presentada en el capítulo 2. Como hemos mencionado, para las álgebras dadas por factores tipo I, los automorfismos del álgebra (como los que el TL efectúa sobre el WL para regiones complementarias en el espacio plano) son internos e implementados por operadores en el álgebra misma. Por eso obtenemos aquí el WL global y su operador dual dentro del álgebra, representados por q_0 y p_0 respectivamente.

Por otro lado, para el flujo magnético global sobre la superficie S^2 dada por Σ obtenemos simplemente cero, a saber

$$\Phi_B(\Sigma) = \int_{\Sigma} F = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{|h|} B^\chi = 0 . \quad (7.124)$$

Del mismo modo, no tenemos una versión de el TL con smearing a largo de la dirección

S^1 . Esto implica que el álgebra en este modelo está generada por el WL global y las álgebras locales. La razón de esta asimetría para los modos globales proviene de haber cuantizado la teoría utilizando el potencial vector A , de tal manera que $F = dA$ incluso para el modo global, y esto no es necesario para tener $dF = 0$. Por supuesto, nada en la teoría de Maxwell nos instruyó para establecer el flujo magnético sobre el S^2 a cero mientras dejamos que el flujo eléctrico tome cualquier valor. Esto implica una elección, análoga a la elección de la red HD. Dada la teoría en el espacio plano, también podríamos haber definido nuestra formulación lagrangiana utilizando un dual \tilde{A} tal que $*F = d\tilde{A}$. Esta cuantización nos habría dado un modelo en el que el flujo eléctrico sobre la esfera se fija en cero y el magnético es libre. Como veremos a continuación, también son posibles otras opciones.

Recuperando la simetría de dualidad $U(1)$ en $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$

En este escenario, la cuestión es si existe una definición de la teoría de Maxwell en $S_2 \times S_1 \times \mathbb{R}$ que respete la dualidad electromagnética. De hecho, hay dos formas canónicas. En primer lugar, podemos optar por eliminar ambos operadores de flujo y los WL y TL no locales.¹¹ Esta es una restricción análoga al álgebra aditiva en las discusiones de las secciones anteriores ya que esta álgebra no contiene el WL o TL no local y no puede cambiar los flujos eléctricos y magnéticos. En esta teoría, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H_{\text{add}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(p_{lmk}^{(1)})^2 + (p_{lmk}^{(2)})^2 + \omega_{lk}^2 (q_{lmk}^{(1)})^2 + \omega_{lk}^2 (q_{lmk}^{(2)})^2 \right]. \quad (7.125)$$

Esto define una QFT local en $S_2 \times S_1$ donde podemos describir el álgebra asociada a cualquier región compacta a partir campos locales con smearing de la forma

$$\int \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.126)$$

La restricción que establece los flujos eléctrico y magnético en cero podría sugerir la idea de que las álgebras locales no contienen el campo de Wightman $F_{\mu\nu}(x)$. Esto no es así, las únicas restricciones están en las funciones de smearing disponibles de esta distribución valuada en operadores. Esto no implica que no existan álgebras locales¹², sino que solo impone que

$$\int_{\Sigma} \sigma = 0, \quad \int_{\Sigma} \sigma^* = 0. \quad (7.127)$$

¹¹Más formalmente esto se puede hacer a partir de la teoría dada por (7.116) y eliminando de q_0 del álgebra. Esto se hace mediante una “conditional expectation” actuando con exponentiales de p_0 . Entonces, p_0 forma un centro del álgebra resultante. Podemos entonces fijar $p_0 = 0$.

¹²Obsérvese que lo mismo podría decirse en el caso que sólo fijamos flujo magnético o el eléctrico a cero. Es decir, cuando cuantizamos A con $F = dA$ o \tilde{A} con $*F = d\tilde{A}$.

En esta QFT existe una simetría de dualidad electromagnética $U(1)$ generada por la siguiente carga

$$Q_{\text{add}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{k=0}^{\infty} (q_{lmk}^{(1)} p_{lmk}^{(2)} - q_{lmk}^{(2)} p_{lmk}^{(1)}) , \quad (7.128)$$

donde el sufijo “add” significa que pertenece al álgebra aditiva. Como era de esperar, si calculamos la acción de (7.128) sobre (7.118-7.119) vemos que esta carga rota los campos eléctrico y magnético como

$$[Q_{\text{add}}, F_{\mu\nu}(x)] = F_{\mu\nu}^*(x) , \quad [Q_{\text{add}}, F_{\mu\nu}^*(x)] = -F_{\mu\nu}(x) , \quad (7.129)$$

donde las restricciones (7.127), compatibles con esta simetría, se imponen a las funciones de smearing.

Observamos que esta carga transformará las clases HDV dentro de la variedad en cuestión. De forma equivalente, efectuará la transformación de dualidad en WL y TL contráctiles dentro de la variedad, ya que estos operadores pueden construirse a partir de los propios campos eléctricos y magnéticos. En este sentido, la simetría sigue rotando las clases no locales. Nótese también que con esta carga global podemos construir twists locales en la variedad utilizando la teoría modular, como explicamos en la sección 5.2.1 . Para ello sólo necesitamos la carga global (7.128) y el hecho de que produce un automorfismo de las álgebras locales, como acabamos de mostrar en (7.129).

Una segunda posibilidad es permitir que tanto los flujos eléctricos como los magnéticos atraviesen la superficie S^2 . Ambos flujos comutan con el Hamiltoniano y el álgebra local (el resto de los modos desde esta perspectiva). También podemos incluir el WL y el TL globales. No hay ningún principio que nos lo impida. Llegamos a esta teoría introduciendo un nuevo modo cero \tilde{p}_0 cuyos valores de expectación miden el flujo del campo magnético a través de la esfera S^2 espacial. En esta teoría “parental” de Maxwell, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H_{\text{max}} = \frac{p_0^2 + \tilde{p}_0^2}{2} + H_{\text{add}} . \quad (7.130)$$

Podemos ver esta teoría como una representación diferente de los campos eléctrico y magnético, junto con su dinámica, en la variedad de interés. Es totalmente invariante de gauge, y es una representación menos sesgada que la que surge del potencial de gauge A o del potencial dual de gauge \tilde{A} .¹³ Esta elección corresponde al álgebra máxima en

¹³Neficientemente se podría pensar que esta elección no es posible ya que no podemos elegir cuantizar la teoría con A y \tilde{A} al mismo tiempo. Pero este razonamiento no es correcto porque una teoría cuántica no necesita definirse por cuantización.

la variedad.

Con esta elección máxima, también tenemos una simetría de dualidad electromagnética $U(1)$. Está generada por la siguiente carga

$$Q_{\max} = Q_{\text{add}} + (\tilde{q}_0 p_0 - q_0 \tilde{p}_0), \quad (7.131)$$

donde el sufijo “max” significa que pertenece al álgebra máxima. Transforma todos los operadores no locales, tanto los contractiles como los no contractiles. Esta carga deja invariante al Hamiltoniano. Es sólo una transformación de dualidad local entre los campos eléctrico y magnético (7.129), que ahora no satisfacen las restricciones (7.127). Esto recupera la simetría completa $U(1)$ del campo de Maxwell en esta variedad, la cual también intercambia clases no locales.

Por supuesto, si cortamos el modo global de forma sesgada “romperemos” inmediatamente la simetría de dualidad electromagnética $U(1)$. Hay muchas maneras de hacerlo. Por ejemplo, podemos tomar el operador de flujo eléctrico global y no el WL. En este caso el álgebra tiene un centro. También, podemos tomar una red de HD para los operadores globales. Por ejemplo, podemos elegir subálgebras de los modos globales como $\{e^{iq_0 n}\}$ para enteros n , en lugar de todos los operadores generados por q_0 , y análogamente para \tilde{q}_0 . Pero nótese que de esta forma, primero, sólo rompemos la parte $U(1)$ asociada al modo global. El $U(1)$ asociado a la teoría local en la variedad (7.129), es decir, la que actúa en todos los demás modos, sigue intacta y no se puede romper. Esta está controlada por la física local. Esto demuestra que incluso en las elecciones globales sesgadas existe una simetría $U(1)$. Todas estas elecciones pueden implementarse mediante una extensión de el $U(1)$ que actúa sobre el álgebra aditiva al espacio de Hilbert completo. Esta extensión puede tomarse como la identidad sobre los modos globales. De esta forma no hay necesidad de invocar una simetría no invertible para ver las manifestaciones de la simetría de dualidad. También se pueden construir simetrías no invertibles, a partir de una “conditional expectation”¹⁴ del álgebra global elegida al álgebra aditiva y seguida de la simetría $U(1)$ habitual. Sin embargo, el presente ejemplo muestra que oscurecemos innecesariamente la física al pensar de esta manera.

7.2.3. Hacia un teorema de reconstrucción generalizado

Terminamos con una digresión sobre las simetrías no invertibles, el teorema de reconstrucción en QFT y una posible generalización del mismo. Discutiremos cada tema por separado.

Como hemos comentado anteriormente, recientemente ha habido una intensa ac-

¹⁴Una conditional expectation es un mapa positivo, lineal, y unital $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de un álgebra \mathcal{N} a una subálgebra \mathcal{N} que satisface $\varepsilon(n_1 m n_2) = n_1 \varepsilon(m) n_2 \quad \forall m \in \mathcal{M} \text{ y } \forall n_1, n_2 \in \mathcal{N}$. Véase [23, 49, 57, 235–237] para aplicaciones recientes en QFT y QG.

tividad en torno a la noción de simetría no invertible en dimensiones $D > 2$. Como su nombre indica, las simetrías no invertibles son generadas por operadores que no satisfacen una ley de la teoría de grupos. En concreto, las “operaciones de simetría” no tienen inversa. Son generadas por operadores topológicos (o endomorfismos de las álgebras locales) T_r que satisfacen álgebras de fusión más generales. En general, son de la forma

$$T_r T_{r'} = \sum_{r''} n_{rr'}^{r''} T_{r''}, \quad (7.132)$$

donde encontramos más de un r'' con coeficiente de fusión distinto de cero.

Probablemente de forma contraintuitiva, obtener teorías con estas estructuras de simetría es bastante sencillo. De hecho, ejemplos anteriores de simetrías no invertibles en dimensiones generales se encontraron en el análisis de simetrías ordinarias no abelianas en [22, 23, 38]. Surgen en un escenario similar al de los orbifolds considerado en las secciones 2.2.6 y 5.3.1. En este caso, tomamos una QFT \mathcal{F} con una simetría global no abeliana G , y consideramos el orbifold $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$. La QFT original contiene, por suposición, defectos topológicos invertibles, los twists τ_g que generan la simetría G . En el orbifold, estos twists dan lugar a defectos topológicos no invertibles τ_c etiquetados por las clases de conjugación c del grupo G definidos como (2.40). Más precisamente, puesto que una combinación lineal de operadores topológicos es un operador topológico, al definir

$$\tau_c = \sum_{g \in c} \tau_g, \quad (7.133)$$

obtenemos operadores topológicos, etiquetados por las clases de conjugación c , pertenecientes a la teoría \mathcal{O} y que satisfacen las reglas de fusión (2.43), a saber

$$\tau_c \tau_{c'} = \sum_{c''} n_{cc'}^{c''} \tau_{c''}, \quad (7.134)$$

donde $n_{cc'}^{c''}$ son los coeficientes de fusión de la categoría de clases de conjugación. Remitimos a [23, 38] para más detalles, incluyendo la diagonalización del álgebra y la construcción de proyectores topológicos que nos muestran transparentemente que la simetría se ha vuelto no invertible. Por lo tanto, en estos casos vemos que el orbifold \mathcal{O} representa una teoría con una simetría no invertible.

Podemos construir fácilmente ejemplos similares para simetrías 1-forma. Un ejemplo sencillo consiste en tomar el producto de dos teorías de gauge $SU(2)$ independientes con un grupo Z_2 de operadores no locales (digamos, para simplificar, para $D = 5$) y hacer el orbifold diagonal. Llamando a cada sabor 1 y 2 respectivamente, la teoría original tenía cuatro sectores no locales generados por los WL y sus productos $\mathbb{1}, W_1, W_2, W_1 W_2$. La teoría del orbifold tiene sólo tres sectores generados por $\mathbb{1}, W_1 + W_2, W_1 W_2$. En este caso, esta construcción nos proporciona incluso reglas de fusión que no están relacionadas

con la categoría de representaciones/clases de conjugación de un grupo.¹⁵

Muchos de los ejemplos en $D > 2$ que se han considerado recientemente son de este tipo, es decir, surgen por un cociente global de la forma $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$. En estos ejemplos, la no invertibilidad de la simetría es bastante leve, ya que podemos repararla considerando la QFT \mathcal{F} completa en lugar del orbifold \mathcal{O} . En otras palabras, simplemente tenemos un álgebra de operadores topológicos (de cualquier codimensión) que satisface reglas de fusión de tipo grupo y elegimos subálgebras particulares con reglas de fusión no triviales. Aun así, la cuestión interesante sigue siendo si existen simetrías no invertibles de 0-forma o 1-forma que no surjan de una construcción de orbifold de este tipo. Que éstas existen y que aparecen en teorías con anomalías ABJ es parte de la afirmación de [15, 16]. Ahora, argumentamos lo contrario.¹⁶

Para ello, es importante que recordemos el denominado teorema de reconstrucción DHR en QFT [58–62]. En este lenguaje, este teorema establece precisamente la no existencia de simetrías 0-forma no invertibles en $D > 2$ que no surgen de la construcción anterior, es decir, como resultantes de un cociente global de la forma $\mathcal{O} = \mathcal{F}/G$. Los supuestos para derivar este teorema son muy leves, y básicamente se basan en la validez de dualidad de Haag para regiones en forma de bola. Esta noción simplemente establece que cada operador dentro de una bola se genera en última instancia por productos de operadores locales. Esto representa la esencia de la localidad en QFT. El teorema se deriva entonces de una sutil interacción entre las restricciones impuestas por la simetría relativista y la microcausalidad de Einstein, por un lado, y la categoría de sectores de superselección globales (0-forma), por otro. Los recientes resultados/afirmaciones de [15, 16] están, por tanto, en tensión con dicho teorema de reconstrucción. Lo mismo se aplica a las afirmaciones en [232, 234] de que la simetría de dualidad no es invertible. Desde esta perspectiva, esta sección puede interpretarse como una aclaración de esta tensión, coherente con el teorema de reconstrucción.

Queda la cuestión de si podemos tener simetrías de 1-forma no invertibles que no surjan por el procedimiento del cociente global anterior. Ahora sostendremos que no es el caso. Esto debería conducir a una especie de “teorema de reconstrucción generalizado”. La idea es la siguiente. Consideremos una QFT genérica con sólo simetrías de 0-forma y 1-forma, siendo probablemente algunas de ellas no invertibles. El teorema de reconstrucción indica que la parte de 0-forma de la simetría es, en el caso más extremo, no invertible debido a un cociente. Podemos eliminar los problemas derivados de tales sectores no locales acudiendo a la teoría madre, es decir la teoría \mathcal{F} . Esto es precisamente la reconstrucción de una teoría con cargas locales a partir de su sector

¹⁵Nótese que no se puede utilizar esta construcción para proporcionar sectores no invertibles de 0-forma con reglas de fusión no relacionadas con la fusión de representaciones/clases de conjugación de un grupo.

¹⁶El caso de las teorías con anomalías ABJ, y por qué deben ser entendidas como simetrías invertibles convencionales ha sido el contenido de este capítulo. Queremos tomar ahora un camino más general.

neutro. Pero una vez que hemos eliminado los sectores de 0-forma, podemos utilizar la construcción que presentamos en la sección 2.2.8. Allí demostramos que una QFT sin sectores de 0-forma sólo puede tener sectores de 1-forma generados por un grupo de simetría abeliano. Esto muestra potencialmente que los sectores de 1-forma no invertibles se deben de nuevo en última instancia a un cociente subyacente de la forma \mathcal{F}/G . Se debería continuar por este camino analizando simetrías superiores a la 1-forma, lo que potencialmente podría conducirnos a un teorema de reconstrucción generalizado.

7.3. Reflexiones sobre el teorema de Noether y otros contra-ejemplos falsos

En esta sección retomamos más a fondo el estudio de la anomalía en relación con la forma fuerte del teorema de Noether. En el capítulo 5 probamos que la existencia de clases HDV cargadas ante una dada simetría implica la ausencia de una corriente de Noether que implemente dicha simetría. Durante la sección 7.1 vimos que dicha idea está en perfecto acuerdo con distintos modelos que contienen una anomalía ABJ en $D = 4$, dígase la electrodinámica de piones y la QED no masiva. A continuación, vemos como otros ejemplos que podrían poner a prueba estas ideas en realidad se encuentran en perfecto lineamiento con las mismas.

- (a) **Anomalía ABJ no abeliana:** El primer ejemplo es una corriente con una anomalía no abeliana, como la corriente quiral para un quark sin masa en alguna representación de la teoría de gauge $SU(N)$. Esta corriente es anómala

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{16\pi^2} \text{tr} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (7.135)$$

Sin embargo, a diferencia del caso abeliano, sabemos que existen instantones para las teorías no abelianas. Éstos introducen fluctuaciones dinámicas en el lado derecho de (7.135) cuya integral mide el número de instantones. En consecuencia, la carga quiral no es preservada por la dinámica y la simetría continua se rompe explícitamente. En QCD esto está relacionado con el hecho de que el mesón η' no es un modo Goldstone. En particular, no es sin masa en el límite del quarks sin masa.

- (b) **Modelo de Schwinger:** Una situación similar ocurre para la QED en $D = 2$. En este caso podemos resolver exactamente el modelo dado que es equivalente a un campo escalar libre masivo. Esta equivalencia es conocida en la literatura y se obtiene si bosonizamos los fermiones y posteriormente integramos el campo de gauge, véase [218] para más detalles. En este contexto, podemos reescribir la

corriente quiral en términos del campo escalar como

$$J_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = \frac{1}{2\pi} \partial^\mu \phi. \quad (7.136)$$

Esto nos muestra que la simetría generada por la carga correspondiente está explícitamente rota para un escalar masivo, y no puede ser reparada. En términos de las variables QED originales la simetría quiral tiene la anomalía

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (7.137)$$

Por tanto, a partir de (7.137) aún podemos intentar definir una corriente conservada, añadiendo un término proporcional a $\epsilon^{\mu\nu} A_\nu$ a J_5^μ . En términos del escalar los dos términos en (7.137) son proporcionales a

$$\square \phi = \frac{e^2}{\pi} \phi. \quad (7.138)$$

Por lo tanto, dicha corriente mejorada sería

$$\tilde{J}_5^\mu = \partial^\mu \phi(x) - \frac{e^2}{\pi} \int d^2y [\partial^\mu G_0(x, y)] \phi(y), \quad \square G_0(x, y) = \delta(x - y). \quad (7.139)$$

Vemos que podemos construir la corriente conservada a costa de no ser local. Concluimos que en estos ejemplos no hay de hecho ninguna simetría continua interna ordinaria y la ausencia de una corriente de Noether no es más que lo esperado.

- (c) **Teorías con un conjunto denso de cargas:** Un ejemplo más desafiante es QED en $D = 4$ con un fermión sin masa de carga q_1 y otro campo, que podría ser un escalar, de carga q_2 , tal que q_1/q_2 es irracional. En este caso podemos definir la carga quiral como hicimos anteriormente, pero no hay sectores HDV para el campo de Maxwell. Todo WL con carga que sea combinación $n_1 q_1 + n_2 q_2$ con n_1, n_2 enteros, se genera localmente. En consecuencia, no existen TL no locales. La razón es que un operador no local en un lazo tiene que commutar con operadores locales fuera, y un TL para cualquier carga no podría commutarse con todos los WL generados localmente. Así que, a primera vista tenemos una simetría que no cambia las clases no locales pero no tiene corriente. A continuación tratamos de entender por qué la completación UV de este modelo debe tener problemas.

Esta teoría con un conjunto denso de cargas fue propuesta en [20] como ejemplo de un modelo donde hay sectores no locales, aquí los WL con cargas que no son de la forma $n_1 q_1 + n_2 q_2$, y los duales están ausentes. Pero esto es imposible, porque la existencia de operadores no locales está ligada a la existencia de los duales como

lo impone el teorema de la doble conmutación de von Neumann. Además, las clases duales no locales, si son abelianas, deben ser grupos duales. Entonces, en este caso lo que debe ocurrir en una teoría completa es que el conjunto de cargas sea de hecho la recta real continua. Tener un continuo de cargas dinámicas es de hecho un problema que muy probablemente enferma la teoría. Pensemos en el caso más simple de cargas para una simetría global. Tal teoría no tendría una función de partición bien definida (o violaría la split property). Por ejemplo, si ponemos la teoría en una esfera compacta, los auto-estados deben ser discretos para tener una función de partición finita. Pero un conjunto discreto de auto-estados no puede acomodar un conjunto continuo de cargas a menos que haya infinitas degeneraciones.

Para entender en términos más físicos lo que está pasando, podemos adoptar el punto de vista de la teoría efectiva de campo . Consideremos las escalas de energía por debajo de algún punto de corte dado. Para simplificar, pensemos que el campo electromagnético está débilmente acoplado, y tenemos dos escalares casi libres de cargas no commensurables. La carga $m_1 q_1 + m_2 q_2$ es producida por polinomios en los campos, produciendo un operador con dimensión de al menos $|m| + |n|$. Así que no podemos considerar los operadores que rompen los WL livianos para todas las cargas, y ciertamente no tenemos un conjunto denso de cargas a ninguna escala. De hecho, para cada escala fija, tendríamos muchos sectores que no pueden considerarse rotos. En este escenario físico, la ausencia de una corriente de Noether se sigue explicando por el hecho de que a bajas energías tenemos sectores HDV cargados bajo la simetría continua. Si queremos romper estos sectores a bajas energías, necesitamos introducir un nuevo campo liviano y nuevos grados de libertad. Y para romper un conjunto denso de sectores a una escala dada necesitaríamos demasiados grados de libertad locales de tal manera que la teoría no tendría una función de partición bien definida. Resumiendo, si sólo añadimos dos campos cargados de cargas no commensurables, entonces los argumentos del capítulo 5 siguen siendo válidos a baja energía. Si añadimos un conjunto continuo de campos locales cargados a baja energía, entonces la teoría se vuelve mal definida desde varios puntos de vista.

- (d) **Monopolos:** Finalmente, en lugar de considerar cargas no commensurables, otra forma de borrar los sectores HDV es incluir monopolos magnéticos saturando la condición de cuantización de Dirac. El grupo $U(1) \times \mathbb{Z}$ de operadores no locales desaparece entonces. Más precisamente, el grupo \mathbb{Z} de TL es generado aditivamente porque podemos crear los lazos utilizando líneas que terminan en los monopolos, y el $U(1)$ deja de ser topológico porque $dF \neq 0$ en presencia de monopolos. Pero esto no cuestiona el teorema de Noether porque, al mismo tiempo,

rompemos explícitamente la simetría quiral $U(1)$ de Adler. Como no podemos escribir $F = dA$, la carga quiral modificada no se conservará. También, podemos ver que la simetría se rompe explícitamente porque la transformación quiral cambiaría, mediante el efecto de Witten, un monopolio en un dión que no existe en la teoría.

En resumen, para los ejemplos analizados, las ideas del capítulo 5 siguen aplicando perfectamente. En este contexto, la pregunta interesante es si la no existencia de una corriente de Noether para una simetría continua implica que la teoría debe tener sectores HDV no locales y que estos deben ser afectados por la simetría. Los ejemplos analizados se inclinan en esta dirección, pero también parecen apuntar a la necesidad de algún ingrediente extra relacionado con la completación UV de las teorías en cuestión. Esto no es nuevo, de hecho, ya hemos afrontado una situación similar durante el capítulo 6. Buscaremos formalizar nuestras conjeturas en este sentido durante el capítulo 8.

7.4. Discusión del capítulo

Este capítulo nos hemos centrado en la interacción entre las simetrías generalizadas, las anomalías ABJ y el teorema de Noether, un tema que ha recibido mucha atención recientemente. Utilizando la noción de sectores HDV, hemos aclarado por qué la anomalía ABJ puede formularse en términos de una simetría global $U(1)$ convencional. La única particularidad es que esta simetría transforma las clases HDV. Más aún, esto explica la cuantización de la anomalía, la correspondencia de anomalías, la validez del teorema de Goldstone y la ausencia de una corriente de Noether que genere esta simetría.

Por otro lado, esperamos haber ejemplificado ciertas cuestiones sutiles relativas a la manifestación local de las simetrías generalizadas mencionadas en el capítulo 2. Como hemos discutido anteriormente, vimos dos cuestiones que son particularmente relevantes para este problema en cuestión. La primera es la noción de álgebra local de una cierta región R . Una elección física intrínseca está formada por los operadores locales de la región, a saber, el álgebra aditiva. En este contexto, debemos ser cuidadosos al asignar un significado fuerte a otras elecciones. La segunda es el hecho de que cualquier operador, incluidos los no locales para cierta región R , están generados en última instancia por operadores locales. Si nos encontramos en una situación en la que cierta propiedad (como tener una simetría particular) depende de la naturaleza de los operadores no locales, y no se puede remontar a la naturaleza de los operadores locales, esto es señal de un problema.

En resumen, las teorías con anomalías ABJ apoyan aún más las ideas desarrolladas

en el capítulo 5 relativas a la versión fuerte del teorema de Noether. Es decir, que la existencia de clases HDV cargadas impide la existencia de una corriente de Noether. En este sentido, sería importante disponer de una derivación adecuada de la afirmación inversa. Es decir, que la clases HDV no estén cargadas ante una simetría implica la existencia de una coerriente de Noether. De este modo, la pregunta es si esta afirmación inversa requiere alguna suposición extra. Los ejemplos discutidos en la ultima sección parecen mostrar que este es el caso. Discutiremos estas ideas en la discusión final de esta tesis en el capítulo 8.

Capítulo 8

Discusión

Durante esta tesis nos hemos dedicado al estudio de distintos aspectos relacionados con la existencia simetrías generalizadas en QFT. Seguimos una perspectiva algebraica diferente a la usualmente utilizada para dichos estudios. Para esto en el capítulo 2 estudiamos como estas simetrías generalizadas están relacionadas con las ambigüedades en la asignación de álgebras a regiones. En particular, destacamos que en teorías con simetrías k -forma existe más de una álgebra posible para regiones con grupo de homotopía π_k no trivial.

En los capítulos 3 y 4, estudiamos la aparición de simetrías k -forma en QFTs con partículas de espín 2 descritas por tensores biforma invariantes de gauge. Siguiendo esta línea, encontramos estas simetrías para distintas teorías linealizadas de gravitones provenientes de acciones tipo Einstein-Hilbert o de alta curvatura. En todos los casos podemos construir las corrientes 2-forma que generan estas simetrías a partir del tensor de Riemann y/o sus derivadas y contracciones mezcladas con funciones espacio-temporales. Además, en relación con el paradigma de Landau, las teorías de gravitones están completamente determinadas por su patrón de simetrías generalizadas.

Es, a priori, sorprendente encontrar que las simetrías de los gravitones en los capítulos estan cargadas ante las simetrías espacio-temporales. Sin embargo, en el capítulo 5 comprendimos que esto no sólo no es extraño sino que desde un nuevo punto de vista esperable. Durante el capítulo 5 probamos que una simetría continua con una corriente de Noether asociada no puede transformar los generadores de una simetría generalizada. En otras palabras, si las simetrías generalizadas están cargadas ante la acción de una simetría continua de la teoría, esta no puede estar generada por una corriente de Noether. En este contexto, vimos para el ejemplo del gravitón, y otras partículas no masivas que esta idea re-deriva el teorema Weinberg-Witten y además nos permite algunas generalizaciones del mismo.

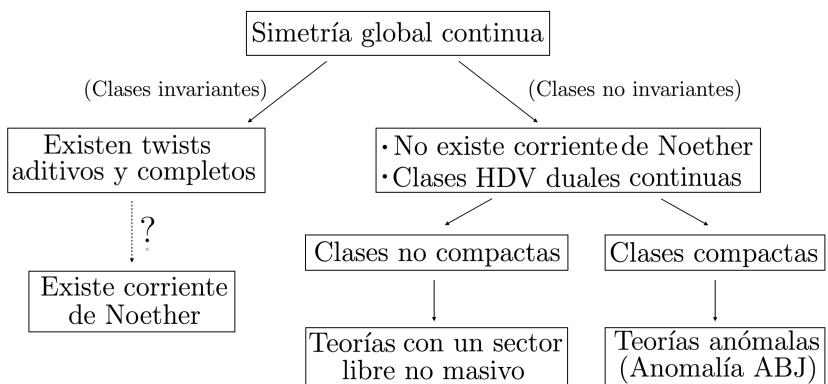
Estas ideas nos permiten intentar caracterizar el espacio de QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether, es decir teorías con simetrías continuas 0-forma

no implemendas por corrientes de Noether. A la luz del capítulo 5 sabemos que este espacio al menos contiene las teorías con clases no locales cargadas ante la acción de la simetría sin corriente. En este contexto, una pregunta interesante es bajo qué condiciones esta caracterización es completa. Si bien vimos que la inexistencia de clases cargadas implica que podemos construir twists aditivos y completos, resta entender si estos twists cuando los hacemos suficientemente pequeños pueden concatenarse para formar corriente. Más adelante en este capítulo, volveremos con más detalle sobre esta idea.

En cualquier caso, observamos que las teorías con clases HDV cargadas ante un grupo continuo son especiales en sí mismas. En particular están caracterizadas por un continuo de clases duales. Si el continuo de clases duales es no compacto y la teoría es UV completa probamos en el capítulo 6 que la teoría contiene un sector libre no masivo. De otra forma, las teorías interactuantes con una simetría de forma no compacta necesitan cargas que rompan la simetría de forma en cuestión para ser completadas en el UV. Podemos interpretar este resultado como una prueba no perturbativa de la necesidad de introducir cargas a alta energía en las teorías de electrodinámica neutra o en las teorías con bosones de Goldstone interactuantes.

Por otro lado, las clases HDV pueden generar un grupo compacto. Estos son los casos que estudiamos durante el capítulo 7, donde la corriente quiral tiene una anomalía ABJ. En estos casos, vimos que la compatibilidad del grupo compacto de clases con acción no trivial de la simetría quiral requiere la cuantización del coeficiente de la anomalía ABJ. Además, observamos que las ideas desarrolladas durante el capítulo 5 nos permiten explicar la correspondencia entre anomalías IR y UV, y la validez del teorema de Goldstone para estas teorías.

Dado este escenario, incluimos a continuación un gráfico resumiendo los resultados fundamentales de esta tesis:



Si algo es claro, es que la noción de simetrías generalizadas nos está obligando a replantearnos problemas tradicionales del contexto de QFT y gravedad cuántica. A continuación recogemos algunas conjeturas e ideas que se desprenden de los resultados de esta tesis y podrían continuarse en un futuro:

(a) Espacio de QFTs que violan la versión fuerte del teorema de Noether

Habiendo identificado un obstáculo para la existencia de corrientes de Noether asociadas con simetrías continuas, una idea natural es que las corrientes deben existir siempre que este obstáculo esté ausente. Es decir, podríamos pensar que una teoría con una simetría global continua, donde todas las simetrías generalizadas para cualquier topología son invariantes bajo la simetría, debe contener una corriente que generador dicha simetría. Esta es la inversa del resultado principal del capítulo 5 presentado en la sección 5.1. Equivalentemente, desde una perspectiva más matemática, en dicho capítulo hemos encontrado una condición necesaria para la existencia de una corriente de Noether. Esta condición necesaria es la ausencia de simetrías generalizadas cargadas bajo la simetría global continua. En este contexto, la pregunta es si esta también es una condición suficiente.

De hecho, durante la sección 5.2 vimos argumentos sólidos en esta dirección. Un camino prometedor en el escenario actual se deriva del hecho de que, como demostramos en la sección 5.2.4, si las clases no locales asociadas con cualquier topología son invariantes bajo la simetría global, entonces existen twists completos aditivos para ellas. Estos twists aditivos para dos regiones con clases HDV no cargadas deberían concatenar, al menos en un sentido aproximado como discutimos en la sección 5.2.6. Esto es, en el límite de buffer zones delgadas, el producto de dichos twists produce twists aditivos y completos para la unión de las regiones, si esta última también tiene clases no cargadas.¹ Claramente, esto no es posible para clases HDV cargadas.

Ahora bien, los twists para una simetría continua pueden describirse mediante cargas locales Q_R . Los twists aditivos tienen cargas locales formadas con operadores aditivos de la región. Si tenemos el time slice axiom podemos pensar heurísticamente que estas cargas son operadores aditivos en una superficie de tiempo constante. Que los twists aditivos sean concatenables para cualquier forma de las regiones implicadas implica que para cualquier partición dada del espacio, siempre es posible elegir una partición de cargas locales que sumen la global. Esto parece bien en el camino para demostrar que la carga puede expresarse como una integral de una cantidad local. Básicamente, notamos que la validez de la noción de concatenabilidad hace que este problema sea análogo a la forma en que se definen integrales continuas a partir de sumas discretas, pero para álgebras de operadores. Si bien es una tarea técnicamente difícil derivar campos cuánticos de una teoría descrita en términos de álgebras locales, esperamos que se pueda demostrar pensando en límites de funciones de correlación para particiones cada vez más pequeñas de la carga utilizando la convergencia en la topología débil de las álgebras de von Neumann. Por otro lado, es tal vez más conveniente,

¹Probar, de forma rigurosa y general, la concatenabilidad de twists para teorías con simetrías generalizadas pero no cargadas bajo el grupo de simetría global es un importante problema abierto.

utilizar el procedimiento establecido en [28] para recuperar campos de Wightman a partir de la versión algebraica.

Desde este punto de vista, interrogante restante es si dicha convergencia requerirá suposiciones extra sobre la teoría. Sin duda, el análisis de regiones cada vez más pequeñas podría requerir alguna condición UV. Notamos además que este ya fue el caso durante el capítulo 6. En esta dirección, las ideas desarrolladas en el capítulo 7, específicamente los ejemplos y reflexiones de la sección 7.3, nos llevan a refinar la conjetura de que una teoría con una simetría global continua que no cambie las clases no locales debe tener una corriente de Noether. Como tal, esta afirmación se aplica a teorías completas con una simetría exacta y sectores no locales. Pero en este caso, también podemos hacer afirmaciones sobre la física IR. En particular, si la simetría sobrevive en el IR, la corriente también debe ser un operador en la teoría IR. Entonces tenemos una especie de inversa de la correspondencia de anomalías que discutimos durante la sección 7.1.4, a saber podemos conjeturar que

Si un modelo efectivo tiene una simetría continua que cambia las clases HDV (y por tanto sin corriente), entonces cualquier completación del modelo que preserve la simetría tiene que preservar los sectores HDV cargados.

Como el fenómeno de las clases no locales cargadas y la no existencia de la corriente parece aparecer de forma independiente de una gran separación de escalas, podemos conjeturar además que

Si un modelo efectivo tiene una simetría continua sin corriente, pero ningún sector HDV está cargado bajo la simetría, el modelo no tiene una completación UV.

Un ejemplo de modelo alcanzado por esta última conjetura es la generalización de la electrodinámica de piones a $D = 6$. Este modelo efectivo tiene una acción

$$S = \frac{1}{2} \int d\pi_0 \wedge \star d\pi_0 + \frac{1}{2e^2} \int F \wedge \star F + \frac{1}{\mu} \int \pi_0 F \wedge F \wedge F .$$

Este tiene una simetría local $\pi_0 \rightarrow \pi_0 + \text{constante}$ que se deduce de la invariancia de la acción. Como en el modelo (7.3) en $D = 4$, podemos construir una corriente no invariantе gauge y una carga global. Sin embargo, ahora los TL son operadores asociados a superficiales tridimensionales, y la simetría no tiene permitido cambiar su clase mezclándola con los WL. Eso es por la sencilla razón de que los WL son operadores de lazo unidimensionales ordinarios. De hecho, se puede comprobar mediante cálculo directo que la simetría sólo modifica los TL por operadores locales sin cambiar de clase. Por lo tanto, la conjetura afirma que este modelo no puede completarse consistentemente en el UV.

Si esta conjetura es correcta, el zoológico de teorías con completación UV bien definida que violan la versión fuerte del teorema de Noether estaría restringido exclusivamente a teorías con sectores HDV cargados. De otra manera, dada una teoría completable en el UV con un grupo de simetría global existiría una corriente de Noether para tal simetría sí y solo sí las clases HDV asociadas a cualquier región no transforman ante la acción del grupo.

(b) Invariancia de escala vs. Invariancia de conforme

Es parte una idea estándar en QFT que la invariancia de escala debería implicar invariancia conforme. De hecho, sólo se conocen unos pocos contraejemplos, y se construyen con teorías libres [238]. También, existe una prueba para $D = 2$ [239, 240], pero no se conoce una prueba completa para dimensiones superiores.

Para comenzar este análisis, supongamos que la teoría tiene un tensor de energía-momento, esta suele ser una suposición usual en la discusión de este tema. Entonces, la ruta habitual para tratar de demostrar la invariancia conforme a partir de la invariancia de escala implica tomar el tensor energía-momento y mejorarlo para que tenga traza nula. Sin embargo, vemos que podemos encontrar un obstáculo importante en esta construcción. La teoría con invariancia de escala puede tener sectores HDV asociados a una simetría generalizados con etiquetas de clase que tienen dimensiones. Es decir, las etiquetas de las clases estarán cargadas ante el grupo de dilataciones, que por suposición, representa un grupo de simetría de la teoría. En ese caso, los resultados del capítulo 5 prohíben la existencia de una corriente de dilatación, y por tanto no existe una mejora del tensor energía-momento. El punto es que este tipo de contraejemplos deberían ser muy peculiares. Vimos en el capítulo 6, que la existencia de clases dimensionales en una teoría invariante de escala implica la que estamos ante simetrías generalizadas no compactas, y estas, si son UV completas, son libres.

Estas ideas aplican a los casos conocidos en la literatura. Hemos visto el ejemplo de la derivada de un escalar libre sin masa en la sección 5.3.1. Otro es el campo de Maxwell para $D \neq 4$ [238]. Este coincide con la derivada del escalar en $D = 3$. La razón de la ruptura de la invariancia conforme es clara. Por razones dimensionales, las cargas de los WL y TL son tienen dimensiones cuando $D \neq 4$. De manera que existe un tensor de energía-momento (que genera simetrías de Poincaré) pero no una corriente de dilatación y, por lo tanto, no existe un “tensor energía-momento tipo CFT”.

Obsérvese que, como se señala en [238], para $D = 3$ podemos reparar este problema considerando la teoría completa de un escalar, en lugar de las derivadas del escalar (que coinciden con el álgebra de campo de Maxwell). La razón es que los sectores de esta teoría son sectores del orbifold (sectores de dos bolas) y podemos eliminarlos pensando en la teoría madre reconstruida a partir del orbifold. El modelo original es

una subteoría de otra que es invariante conforme. Sin embargo, esto no es posible con los sectores 1-forma en $D \geq 5$ por ejemplo. En [241] se demostró que si la teoría con tensor energía-momento e invariancia escala pero no conforme puede embeberse en una CFT entonces es una teoría libre. Este no es el caso general, pero concuerda con nuestra discusión actual.

Nótese que para $D = 2$, donde existe una prueba, todos los sectores son sectores de dos (o más) intervalos. Es decir, son operadores de carga anti-carga, donde la carga no existe en la teoría.² Los sectores con etiquetas dimensionales e invariancia de escala dan un continuo de sectores, un ejemplo de la descripción general de la sección 5.1.1. El generador de carga correspondiente debe ser una corriente conservada, y esto fija su dimensión en 1. A su vez, esto no da sectores dimensionales cuando la densidad de carga se integra sobre el intervalo. Esto es consistente con la discusión en la sección 6.3.2. Concluimos que los contraejemplos en cuestión no pueden existir en $D = 2$.

Nos resta ver qué pasa en el caso donde no tenemos corriente de dilatación pero tampoco tensor energía-momento. En estos casos, el modelo podría seguir siendo invariante conforme, como discutimos para el gravitón de Fierz-Pauli en la sección 3.1.2. Esto también aplica a las partículas de espín 3/2 descritas por la teoría de Rarita-Schwinger que presentan invariancia conforme inclusive teniendo clases dimensionales [171]. Más en general, esto se extiende a todos los campos libres primarios en D dimensiones con estructura de índices dadas por diagramas de Young (bosónicos o fermiónicos) que contengan $D/2$ filas [205]. Para estos modelos, aunque no existan las corrientes locales por las razones mencionadas, sí existen las representaciones unitarias del grupo conforme. Sin embargo, todos estas teorías tienen simetrías generalizadas no compactas y, por ende, son libres. A la luz, de lo discutido en el punto (a), esto parecería ser esperable para todas las teorías sin tensor energía-momento con un punto fijo UV bien definido.

En conclusión, esto da una nueva comprensión que separa los contraejemplos del resto de las QFT, reduciendo el problema a la presencia de sectores cargados bajo el grupo de dilatación para la teoría invariante ante dicho grupo. Esto implica que no hay corriente de dilatación y por tanto no hay tensor energía-momento de CFT. Entonces, una conjetura natural es que la prueba del teorema debería existir para el caso en que no existan tales sectores no invariantes de escala. Si confiamos en que estos casos sólo proceden de teorías libres, bastaría con restringir el ámbito a modelos sin sector libre. Si creemos en el teorema de Noether cuando no hay clases no invariantes bajo la simetría del continuo, tendríamos una corriente de escala física más el tensor energía-momento original para empezar, véase [242].

²Aquí por “carga” nos referimos a una noción generalizada de la misma. Podría estar relacionada con representaciones de las álgebras de Virasoro y/o quiral extendida.

(c) Teorema Coleman-Mandula

El hecho de que una teoría con un tensor energía-momento no puede tener simetrías generalizadas cargadas bajo la simetría de Poincaré se asemeja, y de hecho extiende en algunas direcciones, al teorema Coleman-Mandula (CM) [2]. En las direcciones que generaliza el teorema CM también lo conecta con el teorema de Weinberg Witten (véase la sección 5.4). En otras direcciones no lo hace. Ahora, discutimos la intersección de la de los resultados de esta tesis con el teorema CM.

Recordemos que el teorema CM se expresa en el lenguaje de la matriz S . Nos afirma que para una teoría interactuante con un mass-gap, un grupo de simetría asociado a la matriz S debe ser un producto del grupo de Poincaré y otro grupo. El teorema CM no supone un tensor energía-momento. Pero, siguiendo nuestras discusiones anteriores, las teorías sin tensor energía-momento bien definidas son probablemente libres. Puesto que el teorema requiere teorías interactuantes, considerar teorías con un tensor de energía-momento no parece una restricción importante.

Con la única suposición de tener un tensor energía-momento, los presentes resultados muestran que cualquier clase HDV generada por una simetría generalizada debe ser invariante de Poincaré. Esto extiende el teorema CM, aplicándolo también a simetrías k -forma. Sin embargo, el teorema CM trata de simetrías de la matriz S , y las únicas simetrías generalizadas que son (fácilmente) visibles en la matriz S son las que proceden de grupos de simetría globales no rotos. En muchos casos estas corresponden a simetrías generalizadas de orbifolds (simetrías de 0-forma). Nuestra afirmación se aplica a estos orbifolds, y se extiende también a orbifolds de simetría rota, prohibiendo sectores cargados bajo simetría de Poincaré. No obstante, requerimos que haya un tensor de energía-momento en el propio orbifold. Por otra parte, también puede haber grupos de simetría global que no den lugar a un orbifold, porque todos los operadores locales están cargados. Entonces el orbifold está vacío. Los casos en los que el orbifold no tiene un tensor de energía-momento (incluyendo el caso que no hay orbifold) no están cubiertos por los presentes resultados.

Para entender estas observaciones en términos más precisos, podemos formar el álgebra aditiva generada por el tensor energía-momento. Llamamos a esta álgebra \mathcal{T} . Para una CFT en $D = 2$, ésta es la red de Virasoro para la carga central dada. En cada dimensión, la red \mathcal{T} contiene muchos campos locales, además del tensor energía-momento y sus derivadas. En esta teoría \mathcal{T} podemos tener simetrías generalizadas. En particular, podría tener simetrías generalizadas asociadas con la violación de la dualidad en regiones de dos bolas. En este escenario, para $D > 2$, el teorema de reconstrucción DHR [161] afirma la existencia de un grupo global G de simetrías tal que \mathcal{T} es el orbifold sobre G de una teoría extendida \mathcal{F} , a saber $\mathcal{T} = \mathcal{F}/G$. Siguiendo nuestros resultados, puesto que el tensor de energía-momento pertenece a la teoría del

orbifold, dicho grupo de simetría global G debe commutar con las simetrías de Poincaré para que los sectores del orbifold sean no cargados. Esta versión restringida del teorema CM también se deduce de la propia reconstrucción DHR por razones bastante similares [149].

Sin embargo, esto deja abierta la posibilidad de que pueda haber otras simetrías que se mezclen de forma no trivial con la simetría de Lorentz porque el orbifold esté vacío o no contenga el tensor energía-momento. Esta mezcla de simetrías implica operadores de twists con índices. En el caso continuo, éstos estarían representados por corrientes conservadas con más índices no antisimétricos,³ como un $j_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}$ simétrico que satisface $\partial^\mu j_{\mu \alpha_2 \dots \alpha_l} = 0$. Si hacemos el orbifold con estas nuevas simetrías implementadas por los twists con índices de Lorentz obtenemos un álgebra \mathcal{O} . Esta álgebra puede ser vacía, es decir, generada únicamente por la identidad. Si no está vacía, el tensor energía-momento no debe pertenecer al orbifold $T_{\mu\nu} \notin \mathcal{O}$ ya que los sectores del orbifold mostrarán índices de Lorentz y estarán cargados bajo el grupo de Poincaré.⁴ Entonces, esperamos un modelo libre ya que \mathcal{O} no tiene tensor energía-momento. Este es el caso del ejemplo comentado en la sección 5.3.1. Quedamos reducidos, entonces, a considerar $\mathcal{O} = \mathbb{1}$. En estos casos, también, podemos formar el álgebra generada por la corriente $j_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}$. De forma equivalente esta es el álgebra generada por los twists de la simetría asociada. Podemos llamarla \mathcal{J} . Si $\mathcal{J} \subset \mathcal{T}$, o más generalmente $T_{\mu\nu} \notin \mathcal{J}$, existe una red sin tensor energía-momento y esperaríamos de nuevo un modelo libre. Las álgebras de Kac Moody en $D = 2$, la supersimetría y las corrientes de espín superior conservadas de [243] tienen $\mathcal{O} = \mathbb{1}$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$. Necesitamos más ideas para ampliar el presente enfoque con el propósito de restringir tales escenarios.

(d) Completación UV de la teorías con gravitones en el IR

Comencemos considerando un punto fijo IR con partículas de espín 2 no masivas. Estas teorías famosamente poseen estados de norma negativa y la única forma de definirlas consistente es incluir invariancia ante difeomorfismos. Eso significa que una teoría que contenga cualquier partícula de espín 2 no masiva es necesariamente descrita por la gravedad de Einstein, quizá complementada por términos de derivadas superiores.

Analizamos estas teorías en los capítulos 3 y 4, donde vimos que son caracterizadas por simetrías 1-forma que están cargadas ante simetrías espacio-temporales. Estas están descritas por el grupo de Poincaré, o bien para el caso gravedad de Einstein en $D = 4$, el grupo conforme correspondiente. Como vimos, por un lado, esto implica que aplica el teorema Weinberg-Witten y la teoría no tiene tensor energía-momento bien definido. Por otro, implica que estamos ante una teoría con una simetría de forma no compacta.

³Para comparar con la discusión de la sección 5.4, este es el caso $k = D - 1$.

⁴El caso de simetrías internas ordinarias no cargadas bajo el grupo de Poincaré tiene $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$, pero esto no es posible aquí.

A la luz del capítulo 6, la teoría es libre y no masiva.

Por supuesto, que esta teoría está perfectamente definida si es libre y no masiva a toda escala, es decir, con flujo del RG trivial. No obstante, en la búsqueda de una teoría interactuante de gravitones podríamos buscar romper la simetrías de forma no compactas introduciendo cargas a alguna escala dada. Sin embargo, según el capítulo 3, la única forma de hacer esto dentro de QFT es incluir fractones. Esto implicaría que la simetría de Poincaré no es exacta, en particular está rota en la escala que aparecen las cargas fractónicas. Nótese que estas ideas están en perfecto acuerdo con la conjectura que presentamos en el punto (a), dicho de otra manera, como los sectores HDV están cargados ante el grupo de Poincaré, cualquier completación que preserve dicha simetría debe preservar los sectores cargados que en este caso implican una teoría libre.

Esos resultados apoyan simplemente la noción de que una teoría UV completa que contenga gravitones en el IR debe seguir una ruta distinta a la de QFT por ejemplo a partir de teoría de cuerdas y/o holografía. Estas ideas están alineadas con la aplicación usual del teorema de Weinberg-Witten a la gravedad cuántica, y apoya firmemente su interpretación como un obstáculo para tener un modelo puramente QFT.

Apéndice A

Generalized Free Fields

Los “Generalized free fields” (GFF), introducidos en [244], son los modelos más simples de las teorías cuánticas de campos (QFT) que satisfacen los axiomas de Wightman (a-e) presentados en la sección 2.1.1. Se definen por tener correlaciones gaussianas, es decir, que satisfacen el teorema de Wick para las funciones de correlación de n puntos. La teoría queda entonces completamente especificada por una función de dos puntos que cumple los requerimientos necesarios de positividad, la condición espectral y covarianza de Poincaré. Para un campo escalar, la función de dos puntos más general tiene la forma de Kallen-Lehmann

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int_0^\infty ds \rho(s) W_0(x-y, s), \quad (\text{A.1})$$

siendo $W_0(x-y, s)$ la función de dos puntos de un campo escalar libre con masa al cuadrado $m^2 = s \geq 0$. La densidad espectral $\rho(s)$ es una medida positiva para $s \geq 0$ con un incremento a lo sumo polinómico en s .

Los GFF aparecen de forma natural en algunos resultados formales en QFT axiomática [194, 245–247]. Debido a la simplicidad de la teoría también son utilizados en la literatura matemática como fuente de ejemplos para probar diferentes conjeturas o analizar la independencia o consistencia de diferentes propiedades, véase por ejemplo [148, 248]. Desde el punto de vista físico, aparecen naturalmente como límites en modelos vectoriales o matriciales a N grande [249]. Esto es porque el límite de N grande suprime las funciones n puntos con respecto a las funciones de dos puntos para campos suficientemente simétricos. Un ejemplo notable son las teorías holográficas donde los GFF describen el sector de baja energía de la teoría en la aproximación de N grande, y son equivalentes a los campos libres ordinarios que viven en el espacio Anti-de Sitter (AdS) [40, 250, 251].

En este apéndice buscamos analizar las propiedades algebraicas del los GFF. En particular veremos que estos muestran violaciones de dualidad de Haag para regiones con topologías triviales (que no son bolas perfectas). En este sentido, no respetan

la suposición (2.26) que hicimos en el capítulo 2 y escapan muchos de los resultados presentados en esta tesis. Destacamos que estas posibles elecciones de álgebras emergen debido a que los GFF no cumplen el axioma (f) de la sección 2.1.1, es decir, el time slice axiom.¹ Esto es porque si bien, tienen una evolución temporal bien definida no podemos construir al hamiltoniano integrando dentro de pequeño intervalo temporal, sino que este es un objeto no local en el espacio-tiempo [244].

Comenzaremos, en la sección A.1 con un ejemplo de campos libres independientes, que ilustra la idea general de como podemos asignar más de un álgebra a una región con topología trivial. Este es el caso, donde la densidad de Kallen-Lehmann $\rho(s)$ en (A.1) es una suma de deltas. Luego, procederemos al estudiar densidades espectrales continuas. Para facilitar esta cuestión miraremos el ejemplo de GFF holográficos, donde la prescripción usual de AdS/CFT [250, 251] nos permite visualizar adecuadamente las diferentes posibilidad de álgebras [40]. Con este propósito estudiaremos los GFF conformes en la sección A.2 y sus posibles álgebras en la sección A.3. Terminaremos en la sección A.4 con una breve discusión sobre las ideas de este capítulo, comentarios sobre la literatura y posibles avances.

A.1. Ejemplo: campos libres independientes

Para exponer las peculiaridades algebraicas que aparecen en las teorías de GFF en contraposición al caso de QFTs más ordinarias consideremos primero un caso sencillo. Cuando el GFF es un campo libre de masa m , la densidad espectral consiste en una única función delta $\rho(s) = \delta(s - m^2)$. En este caso, podemos asignar un álgebra de operadores a una región espacial R en $x^0 = 0$. Esta álgebra está generada por ϕ y $\dot{\phi}$ en R . Debido a las ecuaciones hiperbólicas de movimiento del campo,

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\text{A.2})$$

esta álgebra coincide con el álgebra generada por el campo en el desarrollo causal de la región espacial R dado por $D[R]$ en la figura 2.1.

Ahora, tomemos $\rho(s) = \delta(s - m_1^2) + \delta(s - m_2^2)$, correspondiente a la suma de dos campos libres independientes $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$. El álgebra generada por $\phi, \dot{\phi}$ sigue cerrándose en sí misma debido al conmutador numérico del GFF. Sin embargo, obsérvese que $\phi(x)$ obedece ahora a una ecuación de movimiento con mayor número de derivadas temporales

$$(\square + m_1^2)(\square + m_2^2)\phi = 0, \quad (\text{A.3})$$

¹Si bien no cumplen el time slice axiom si obedecen un axioma de completitud mas leve. En otras palabras, podemos generar todo el espacio de Hilbert utilizando los GFF con todos los smearing posibles pero no podemos hacerlo con smearings sobre un intervalo temporal.

de modo que $\ddot{\phi}$ y ϕ son operadores independientes. La inclusión o no del operador $\ddot{\phi}$ da lugar a diferentes álgebras. Por ejemplo, podemos considerar el álgebra generada por $\{\phi, \dot{\phi}\}$ y el álgebra commutativa generada por $\{\tilde{\phi}, \dot{\phi}\}$ con $\tilde{\phi}(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$. De otra manera, podemos incluir $\ddot{\phi}, \ddot{\phi}$ en el álgebra. En este último caso, el álgebra resultante resulta ser exactamente el álgebra de dos campos libres independientes de masas m_1 y m_2 . podemos deducir esto de las relaciones

$$\frac{\square + m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} \phi = \phi_1 , \quad \frac{\square + m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \phi = \phi_2 , \quad (\text{A.4})$$

a partir de la cual podemos reconstruir los dos operadores independientes de campo y de momento. Por lo tanto, esta nueva álgebra que contiene derivadas superiores generada por $\{\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \ddot{\phi}\}$ es igual al álgebra producida por $\{\phi_1, \phi_2\}$ en el desarrollo causal R_c .

Para una densidad espectral con cualquier número finito n de funciones delta, es decir de la forma

$$\rho(s) = \sum_{i=0}^n \delta(s - m_i^2), \quad m_i^2 \in \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.5})$$

tenemos una situación análoga. Podemos tomar álgebras del campo y menos de $2n - 1$ derivadas temporales en $x^0 = 0$, o podemos incluir $2n - 1$ derivadas temporales de manera que el álgebra será la misma que la de n campos libres independientes. En este último sentido los n campos libres independientes se codifican en un único GFF.

En QFT relativista es natural definir las álgebras tomando un espacio-tiempo en lugar de una región espacial. Si tomamos un espacio de tiempo finito alrededor de la región espacial R no hay diferencia entre el GFF definido con un número finito de funciones delta en la densidad espectral y una teoría de campos libres independientes. Sin embargo, esta discusión nos anticipa los problemas que podemos encontrar al considerar una medida continua $\rho(s)$. En este caso veremos que la teoría tiene propiedades bastante inusuales. En particular, no satisface el time slice axiom, lo que significa que el álgebra generada por los operadores de campo en un pequeño intervalo temporal, como (2.7), alrededor de $x^0 = 0$ no agota todos los operadores de la teoría. Esta es otra forma de decir que el campo no obedece a ninguna ecuación de movimiento local, con cualquier número finito de derivadas temporales.

Por esta misma razón, vemos que la teoría de los GFF en general no contiene un tensor energía-momento. De lo contrario podríamos utilizarlo para construir el Hamiltoniano en el álgebra dentro de un intervalo temporal. Con el Hamiltoniano podemos entonces mover los operadores en el tiempo para generar todos los operadores de la teoría. El Hamiltoniano para un GFF con medida espectral que tiene soporte en un conjunto no discreto todavía existe pero es más bien no local [244].

Entonces, está claro que una región espacial no determina de forma única un álgebra para estas teorías y debemos elegir una región espacio-temporal en su lugar. Una

elección natural es centrarse en regiones causalmente completas. Éstas son el dominio de dependencia de las regiones espaciales. Sin embargo, incluso para una región causalmente completa existe en general una ambigüedad en el álgebra que se le puede asociar para un GFF. Como vimos en esta tesis, las ambigüedades en la asignación de álgebras a regiones aparecen también en QFT ordinaria con simetrías generalizadas, pero son mucho más severas para los GFF.

A.2. Generalized Free Fields conformes

Una gran simplificación en la comprensión de la naturaleza las posibilidades permitidas para las álgebras de GFF, aparece con la realización holográfica de (una clase) de estas teorías como campos libres ordinarios en el “bulk” asociados a un espacio-tiempo de una dimensión más. A continuación estudiaremos estas ideas poniendo el foco en los GFF holográficos, especialmente en los GFF conformes. De esta manera, aprovecharemos la descripción dual para definir y caracterizar las álgebras de una región dada. En particular, en esta sección introduciremos los campos GFF conformes. Estos tienen una densidad espectral dada por

$$\rho(s) = s^{\Delta - \frac{D}{2}}, \quad (\text{A.6})$$

y dimensión conforme Δ . Claramente, (A.6) nos da una medida bien definida para (A.1) siempre que Δ obedezca la cota de unitaridad $\Delta > (D - 2)/2$. Para cualquiera de estos Δ el GFF define una CFT. El caso límite, $\Delta = (D - 2)/2$ queda excluido porque $\rho(s)$ se vuelve no integrable alrededor de $s = 0$. En cambio, el campo libre sin masa tiene $\rho(s) = \delta(s)$.

La descripción holográfica dual es en el espacio AdS. En el parche de Poincaré podemos escribir la métrica como

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (dz^2 + dx^2), \quad (\text{A.7})$$

siendo dx^2 la métrica de Minkowski en D dimensiones del espacio-tiempo y $z \in (0, \infty)$. El campo dual φ del GFF es un campo libre masivo en AdS con ecuación de movimiento

$$(z^2 \partial_z^2 + z^2 \square_D + (1 - D)z\partial_z - m^2) \varphi = 0, \quad (\text{A.8})$$

donde la masa m está dada a partir de la dimensión de escala Δ en el borde como

$$m^2 = \Delta(\Delta - D). \quad (\text{A.9})$$

El valor mínimo para la masa al cuadrado viene dado por la cota de Breitenlohner-

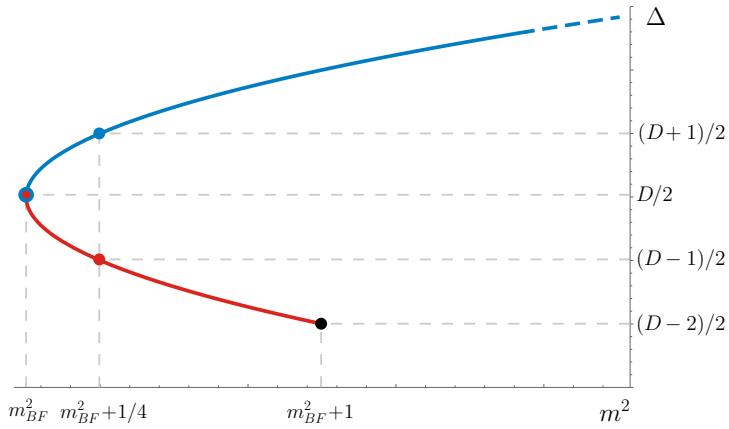


Figura A.1: El gráfico muestra la relación (A.9), destacando algunos puntos importantes de la curva. Los segmentos de color azul y rojo corresponden a la cuantización con condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann respectivamente. De abajo a arriba, el punto negro es el final de la curva, donde la CFT_D alcanza la cota de unitaridad, precisamente en $m^2 = m_{BF}^2 + 1$. El punto rojo muestra el punto donde el campo masivo de AdS está acoplado de forma conforme para condiciones de Neumann. El punto rojo y azul es la cota BF, la masa más baja posible en AdS consistente con la unitaridad $m_{BF}^2 = -D^2/4$. El punto azul destaca cuando el campo de AdS es acoplado de forma conforme con la condición de Dirichlet.

Freedman $m^2 \geq m_{BF}^2 = -D^2/4$ [252]. Nótese que puede ser negativa.

El campo φ puede cuantizarse canónicamente para un vacío simétrico en AdS. Para $-D^2/4 \leq m^2 < -D^2/4 + 1$ existen dos cuantizaciones no equivalentes correspondientes a las dos raíces de (A.9). Véase la figura A.1. Éstas están definidas por diferentes condiciones de contorno para el campo en el borde de AdS, es decir $z \rightarrow 0$. La condición de contorno de Dirichlet corresponde a

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(D + \sqrt{D^2 + 4m^2} \right), \quad (\text{A.10})$$

y la condición de frontera Neumann a

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D^2 + 4m^2} \right). \quad (\text{A.11})$$

Para $m^2 \geq -D^2/4 + 1$ sólo se permite la condición de contorno de Dirichlet. Por otro lado, en el límite $m^2 \rightarrow -D^2/4 + 1$ la rama de Neumann alcanza el límite de unitaridad $\Delta = (D - 2)/2$. No existe descripción holográfica para dicho punto.

También hay puntos notables en $m^2 = -D^2/4 + 1/4$, $\Delta = (D \pm 1)/2$, en los que el dual en AdS es un escalar sin masa acoplado de forma conforme y, por tanto, un campo conforme por si mismo. Estas teorías de masa particulares pueden tener un mapeo conforme al espacio de Minkowski $D + 1$ -dimensional con métrica $ds^2 = (dz^2 + dx^2)$, donde tenemos las dos posibles condiciones de contorno conformes en $z = 0$. En la rama de Neumann en este punto tiene $\Delta = (D - 1)/2$ correspondiente a un campo libre de dimensión $D + 1$ sin masa, y la rama de Dirichlet tiene una dimensión de borde

diferente $\Delta = (D + 1)/2$ debido a la condición de contorno.

La relación entre el campo del borde y el campo en AdS puede describirse del siguiente modo. El GFF puede obtenerse simplemente como el límite del campo en AdS utilizando el diccionario holográfico habitual [251], a saber

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \varphi(x, z) = \frac{2^{-\alpha-1/2}}{\Gamma[\alpha + 1]} \phi_\Delta(x), \quad (\text{A.12})$$

donde $\alpha = \Delta - D/2$. A la inversa, el campo en AdS tiene una expresión no local en términos del de los campos en el borde

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z^\Delta (z^2 \square)^{-\alpha/2} J_\alpha(z\sqrt{\square}) \phi_\Delta(x). \quad (\text{A.13})$$

A.3. Álgebras holográficas

Podemos dar una relación más esclarecedora entre las teorías en AdS y el borde en términos de álgebras locales. Si W es una región en AdS, llamemos W' al conjunto de puntos espacialmente separados de W el bulk. La completación causal de W es W'' y una región causalmente completa, es decir, satisface $W = W''$. Las regiones causalmente completas en el bulk son el dominio de dependencia de las superficies espaciales y están naturalmente unidas a las álgebras $\mathcal{A}^\varphi(W)$ generadas por el campo libre φ en W .

En la teoría de borde, para cualquier región espacio-temporal R llamemos $\mathcal{A}^\phi(R)$ al álgebra generada por el GFF ϕ en R . Si consideramos R como una región en el borde de AdS podemos definir una región causal asociada en el bulk como R'' . Para un doble cono D (la intersección del pasado de un punto con el futuro de otro punto) en la frontera se demostró en [40] que vale la igualdad

$$\mathcal{A}^\phi(D) = \mathcal{A}^\varphi(D''). \quad (\text{A.14})$$

Esta relación puede generalizarse. Las álgebras del borde $\mathcal{A}^\phi(R)$ son generadas por el GFF local y luego son aditivas bajo unión de regiones espacio-temporales. En otras palabras, podemos descomponerlas como generadas por álgebras de doble cono

$$\mathcal{A}^\phi(R) = \bigvee_{D \subset R} \mathcal{A}^\phi(D) = \bigvee_{D \subset R} \mathcal{A}^\varphi(D''). \quad (\text{A.15})$$

En particular, si R es causalmente cerrada en el borde, tenemos

$$\mathcal{A}^\phi(R) = \mathcal{A}^\varphi(R_{CW}), \quad R_{CW} \equiv J^+(R) \cap J^-(R). \quad (\text{A.16})$$

donde $J^+(R)$ y $J^-(R)$ son el futuro y el pasado de R . Esto generaliza (A.14). La región de bulk R_{CW} se llama la “causal wedge” de R [253].² Por lo tanto, si hacemos un smearing del el GFF para tal R obtenemos el álgebra de campo libre en el bulk asociada al causal wedge. Esta asignación del álgebra es la más natural desde el punto de vista del GFF y es también la mínima posible. Escribimos

$$\mathcal{A}_{CW}(R) \equiv \mathcal{A}^\phi(R) = \mathcal{A}^\varphi(R_{CW}). \quad (\text{A.17})$$

También podemos definir el complemento causal en el espacio-tiempo del borde como \bar{R} , y una región causalmente completa en el límite satisface $R = \bar{R}$.³ Por causalidad, las álgebras correspondientes a regiones límite complementarias comutan:

$$\mathcal{A}^\phi(R) \subseteq (\mathcal{A}^\phi(\bar{R}))'. \quad (\text{A.18})$$

Un campo escalar libre ordinario satisface la dualidad de Haag (2.21) para cualquier región causal [25]. Entonces, a partir de la representación bulk (A.16) podemos comprobar fácilmente que las álgebras de los causal wedge del GFF no satisfacen la dualidad de Haag para regiones generales. Esto se debe a que a las regiones complementarias del borde R y \bar{R} corresponden las regiones del bulk R_{CW} y \bar{R}_{CW} que generalmente no son complementarias. La región espacialmente separada de estas dos regiones $(R_{CW} \cup \bar{R}_{CW})'$ se llama “causal shadow” [254]. Una excepción es el caso en el que R es un doble cono y el causal shadow desaparece. La dualidad de Haag para conos dobles es, de hecho, siempre necesariamente válida para todas las CFT, cuando tomamos el complemento en el espacio compacto [37].

Vimos durante esta tesis que los fallos topológicos de la dualidad de Haag están asociados a simetrías generalizadas y están ausentes para teorías suficientemente completas. Sin embargo, el presente caso es diferente en varios aspectos. El fallo de la dualidad de Haag para GFF está relacionado con el fallo del time slice axiom y el consiguiente fallo de la aditividad para regiones causales basadas en el mismo plano espacial. El álgebra generada por el campo en dos conos dobles superpuestos no corresponde al álgebra de una región causal para un GFF. Por el contrario, los ejemplos ordinarios de QFT satisfacen esta forma de aditividad causal, formulada formalmente a partir de (2.17). Además, el commutante relativo $\mathcal{A}(R)' \cap \mathcal{A}(\bar{R})'$ es trivial en casos de QFT ordinaria mientras que es un álgebra grande para los GFF. Esto está representado por el álgebra de los campos del bulk en el causal shadow, véase la figura A.2.

²Esta región no es en general una región causalmente cerrada. Por lo tanto, una expectativa natural es que usando las propiedades de las álgebras de campos libres [25], la región del bulk en el lado izquierdo de (A.16) podría extenderse a $((J^+(R) \cap J^-(R))'' = R''$, teniendo la misma álgebra. No necesitaremos esto en lo que sigue.

³Tomamos el complemento de R , dado por \bar{R} , en el espacio compacto o equivalentemente en el cilindro espacio-temporal.

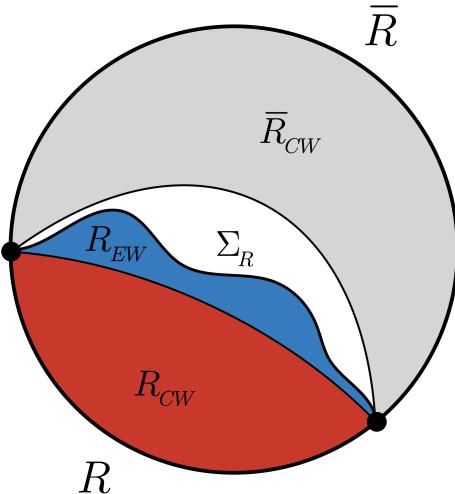


Figura A.2: Un corte a tiempo constante de AdS. Los causal wedges R_{CW} y \bar{R}_{CW} para regiones complementarias en el borde R y \bar{R} no cubren el espacio en el bulk, sino que están separados por el causal shadow. Una superficie que divide el causal shadow en dos, puede utilizarse para definir álgebras que satisfagan dualidad de Haag. La superficie mínima HRT Σ_R nos da una partición de este tipo y define el entanglement wedge R_{EW} .

Como desarrollamos en el capítulo 2, una vez que falla la dualidad de Haag, la posible asignación de álgebras a las regiones no es única. Podemos ampliar las álgebras de R y \bar{R} manteniéndolas aún conmutativas entre sí. En la representación holográfica, una forma sencilla de hacerlo es desplazando los límites del álgebra asociada campo en AdS hacia adentro en el bulk, pero manteniendo las regiones de bulk espacialmente separadas entre sí. Si dividimos el AdS en dos regiones, una que contenga R_{CW} y la otra \bar{R}_{CW} , las álgebras de campo libre asociadas serán duales entre sí, y podremos recuperar la dualidad de Haag. Es decir, tenemos una posible red Haag-Dirac tal como definimos en la sección 2.2.4. Un punto fundamental es que la prescripción elegida también debería ser monotónicamente creciente con el tamaño de la región para dar álgebras mayores a regiones mayores, esto es, debemos obedecer la isotonia (2.8).

En este contexto, la prescripción holográfica selecciona una división particular del espacio en dos dada por la superficie mínima Σ_R anclada en el borde a una región causal R (o equivalentemente \bar{R}). Se denomina superficie Ryu-Takayanagi [255] o Hubeny-Rangamani-Takayanagi [256]. La región causal que abarca desde R hasta Σ_R se denomina “entanglement wedge” y la notaremos como R_{EW} . Es sabido en la literatura que $R_{CW} \subseteq R_{EW}$, y que el mapeo $R \rightarrow R_{EW}$ es monotónico bajo el orden de inclusión. Esta propiedad se denomina “entanglement wedge nesting” [257]. En este escenario, definimos

$$\mathcal{A}_{EW}(R) \equiv \mathcal{A}^\varphi(R_{EW}). \quad (\text{A.19})$$

Esta es, de hecho, el álgebra de los operadores de baja dimensión asociada a la región

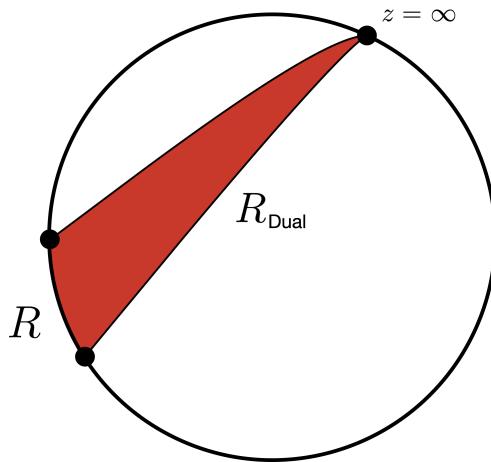


Figura A.3: Red dual representada sobre un corte a tiempo constante de AdS.

en el límite de N grande de los modelos holográficos. Por construcción deducimos que

$$\mathcal{A}_{CW}(R) \subseteq \mathcal{A}_{EW}(R), \quad \mathcal{A}_{EW}(R) = (\mathcal{A}_{EW}(\bar{R}))'. \quad (\text{A.20})$$

Sin embargo, observamos que desde el punto de vista de la propia teoría de los GFF hay potencialmente infinitas opciones diferentes de álgebras para las regiones que satisfacen la dualidad de Haag y la propiedad de nesting, siendo el entanglement wedge sólo una de ellas.

Para las teorías holográficas existe la idea de la reconstrucción de campos en el bulk a partir de operadores del borde [258]. A nivel de los GFF, podemos realizar la reconstrucción de los operadores del bulk dentro de R_{EW} , a partir de los operadores del borde en R , utilizando el flujo modular de $\mathcal{A}_{EW}(R)$ [259, 260]. Pero este flujo modular ya involucra a los operadores de bulk dentro del entanglement wedge. En principio, también para otras regiones distintas que contengan al causal wedge, podríamos reconstruir los campos de forma similar.

Saliendo un poco de las ideas holográficas usuales, podemos asignar a los GFF otra álgebra para la región de borde R de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_{\text{Dual}}(R) \equiv \mathcal{A}^\varphi(R_{\text{Dual}}), \quad R_{\text{Dual}} = R \times \{z \in (0, \infty)\}, \quad (\text{A.21})$$

siendo esta nueva prescripción covariante de Poincaré pero no invariante conforme. Dicha asignación de álgebras se denomina “red dual” en la literatura matemática porque surge como conmutante del álgebra del complemento de la región dentro del espacio de Minkowski (en lugar del complemento tomado en el cilindro espacio-temporal). Se demostró que esta asignación de álgebras no satisface la split property [148], lo que implica que los métodos desarrollados en el capítulo 5 no necesariamente se aplican a

esta familia de teorías.⁴

A.4. Discusión del apéndice

Los GFF son teorías cuánticas de campos con propiedades inusuales. Si bien definen una QFT apropiadamente, el hecho de que no cumplan el time slice axiom esta asociado a distintas posibilidades en la elección de un álgebra para regiones con topología trivial. Estudiamos estas ideas desde un punto de vista holográfico para GFF conformes donde podemos entender estas posibilidades como tomar el álgebra del causal wedge, entanglement wedge, la red dual, etc.

En la literatura, las propiedades de estas álgebras se han estudiado a partir de la información mutua [261], “quantum error correction” [260] y el rol del límite de N grande [262–264]. Una pregunta abierta es si existe algún argumento intrínseco de GFF que seleccione el entanglement wedge como opción preferida. A partir de la información mutua se ha visto que la elección del álgebra del entanglement wedge difiere de todas las demás porque permite una noción de causalidad “falsa” en la teoría de los GFF [261]. Sería interesante estudiar este punto más en profundidad y también su relación con las álgebras tipo II emergentes en gravedad [265, 266].

Además, un punto interesante es que nos hemos centrado sólo en los GFF conformes. Pero, otros GFF también pueden estudiarse holográficamente utilizando un espacio-tiempo asintóticamente AdS. Una problema interesante es cuál es el conjunto de GFF que podemos producir de esta manera. La positividad de la densidad de Kallen-Lehmann parece estar relacionada con la condición de energía nula en el bulk [267], pero no está claro cuál es la clase de densidades espectrales que se derivan de soluciones a ecuaciones diferenciales en un espacio asintóticamente AdS.

⁴Este fallo de la split property puede verse a nivel de la información mutua entre dos regiones de borde R_1 y R_2 . En particular se calculó que dicha cantidad es divergente para las redes duales y finita para cualquiera de las otras elecciones de álgebra mencionadas. Véase [261].

Apéndice B

Teorema Weinberg-Witten

En este apéndice, presentaremos la prueba usual del teorema Weinberg-Witten. El teorema en cuestión cuenta de dos partes

- (a) Las teorías con simetrías globales internas implementadas por una corriente de Noether j^μ no pueden presentar partículas sin masa de espín ≥ 1 en el espectro cargadas ante dicha simetría.
- (b) Las teorías con un tensor energía-momento bien definido que implemente la simetría de Poincaré no pueden presentar partículas sin masa de espín > 1 en el espectro.

Durante el desarrollo de esta tesis, hemos discutido extensamente este teorema y provisto ejemplos explícitos. Además, en la sección 5.4, presentamos una rederivación de este teorema en el contexto de QFT local con simetrías generalizadas y propuesto generalizaciones del mismo. En este apéndice, exclusivamente presentaremos la prueba original del teorema introducida en [17]. Esta prueba alcanza partículas de espín ≥ 1 en $D = 4$ dimensiones espacio-temporales. Para revisiones más modernas y extensas de esta prueba véase [268, 269] y para la extensión a $D = 5$ del caso de espín 2 [172].

Específicamente, la prueba de este teorema se basa en el estudio de los elementos matriciales de la corriente conservada j^μ y del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ entre dos estados de una partícula sin masa de helicidad h y momentos definidos p'^μ y p^μ , es decir,

$$\langle p', h | j^\mu | p, h \rangle, \quad \langle p', h | T^{\mu\nu} | p, h \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Por un lado, mostraremos que los elementos de matriz (B.1) no pueden anularse en el límite $p' \rightarrow p$ debido a que, por suposición, las partículas no masivas de helicidad h en cuestión están cargadas ante la acción de la simetría generada por la corriente j^μ o ante el mismo grupo de Poincaré en el caso del $T^{\mu\nu}$. Por otro lado mostraremos que la invariancia de Poincaré requiere que los elementos (B.1) se anulen si $|h| \geq 1$ para

el caso de la corriente y si $|h| > 1$ para el tensor energía-momento. La tensión entre ambas afirmaciones prueba el teorema.

A continuación presentamos de forma concreta ambas partes del teorema y sus respectivas pruebas:

Teorema (a): Una teoría que permite la construcción de una corriente conservada de j^μ covariante de Lorentz no puede contener partículas sin masa de espín ≥ 1 con valores de expectación no nulos para la carga conservada $Q = \int d^3x j^0$.

Demostración: Formalmente, podemos escribir la condición de que las partículas no masivas de helicidad h están cargadas ante la simetría si consideramos que los estados de momento definido actúan como autoestados del operador de carga global obtenido a partir de la corriente $j^\mu(x^0, x^i)$, es decir

$$Q|p, h\rangle = q|p, h\rangle, \quad Q = \int d^3x j^0(0, x^i), \quad q \neq 0, \quad (\text{B.2})$$

donde los estados de momento definido generan una base ortonormal de manera que

$$\langle p', h | p, h \rangle = \delta(p' - p). \quad (\text{B.3})$$

De aquí, tenemos que los valores de expectación del operador de carga global están dados por

$$\langle p', h | Q | p, h \rangle = q \delta(p' - p). \quad (\text{B.4})$$

Para el mismo valor de expectación, por otro lado, podemos calcular que

$$\begin{aligned} \langle p', h | Q | p, h \rangle &= \int d^3x \langle p', h | j^0(0, x^i) | p, h \rangle = \int d^3x \langle p', h | e^{iP_i x^i} j^0(0, 0) e^{-iP_i x^i} | p, h \rangle = \\ &= \int d^3x e^{i(p'_i - p_i)x^i} \langle p', h | j^0(0, 0) | p, h \rangle = (2\pi)^3 \delta(p' - p) \langle p', h | j^0(0, 0) | p, h \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La consistencia entre (B.4) y (B.5) nos requiere que

$$\lim_{p' \rightarrow p} \langle p', h | j^0(0, 0) | p, h \rangle = \frac{q}{(2\pi)^3}. \quad (\text{B.6})$$

Más aún, debido a la covariancia de Lorentz de j^μ tenemos necesariamente que

$$\lim_{p' \rightarrow p} \langle p', h | j^\mu(0, 0) | p, h \rangle = \frac{q p^\mu}{E (2\pi)^3}. \quad (\text{B.7})$$

Observamos que esto es consistente con la conservación de la corriente $\partial_\mu j^\mu = 0$ debido

a que al tener partículas no masivas p^μ es tipo luz, es decir

$$p_\mu p^\mu = 0. \quad (\text{B.8})$$

Otra consecuencia del carácter tipo luz de los momentos p^μ y p'^μ implica que

$$\begin{aligned} (p' + p)^2 &= (p'^\mu + p^\mu)(p'_\mu + p_\mu) = p'^\mu p'_\mu + p^\mu p_\mu + 2 p'^\mu p_\mu = \\ &= 2 p'^\mu p_\mu = 2(|p'| |p| - p'_i p^i) = 2 |p'| |p| (1 - \cos \varphi) \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

para φ el angulo formado por los momentos espaciales p^i y p'^i . Análogamente, tenemos

$$(p' - p)^2 = -2 |p'| |p| (1 - \cos \varphi) \leq 0.$$

De esta manera para $\varphi \neq 0$, tenemos que $(p' - p)^\mu$ es un vector tipo espacio y $(p' + p)^\mu$ es tipo tiempo. Esto implica que podemos elegir un sistema de referencia de Lorentz en el cual la parte espacial de $(p' + p)^\mu$ se anula, a saber

$$p^\mu = (|p|, p^i), \quad p'^\mu = (|p|, -p^i). \quad (\text{B.10})$$

En este sistema de referencia, dado por (B.10), consideramos una rotación definida por un angulo θ alrededor de p^i . Los estados de una partícula transforman según su helicidad como

$$\Lambda(\theta)|p, h\rangle = e^{i\theta h}|p, h\rangle \quad \Lambda(\theta)|p, h\rangle = e^{-i\theta h}|p, h\rangle, \quad (\text{B.11})$$

donde la diferencia en signo proviene de la elección que hicimos en (B.10). En otras palabras, $\Lambda(\theta)$ genera una rotación alrededor de p^i dada por θ pero una dada por $-\theta$ alrededor de $p'^i = -p^i$. Además, en este caso, la covariancia de Lorentz de j^μ implica que

$$\Lambda(\theta)_\nu^\mu \langle p', h | j^\nu | p, h \rangle = e^{2i\theta h} \langle p', h | j^\mu | p, h \rangle. \quad (\text{B.12})$$

Sin embargo, el hecho de que $\Lambda(\theta)$ sea una matriz de rotación implica en su descomposición de Fourier solo pueden aparecer los autovalores $e^{i\theta}$, 1, o $e^{-i\theta}$. De esta manera, tenemos que, si $\langle p', h | j^\mu | p, h \rangle \neq 0$, la consistencia entre el lado izquierdo y derecho de (B.12) requiere que $2|h| = 0, 1$, es decir,

$$h = 0, \pm \frac{1}{2}. \quad (\text{B.13})$$

De otra forma si $|h| \geq 1$ la consecuencia es que estos elementos de matriz en

cuestión deben anularse, a saber

$$\langle p', h | j^\mu | p, h \rangle = 0 \text{ si } h \neq 0 \pm \frac{1}{2}. \quad (\text{B.14})$$

La validez de esta ecuación (B.14) en el sistema de referencia de Lorentz dado por (B.10), que j^μ es covariantes de Lorentz y, que las helicidades de las partículas sin masa son invariantes de Lorentz, nos permiten concluir que los elementos de la matriz en cuestión tendrían que desaparecer en todos los sistemas de referencia. Por lo tanto, la contradicción entre (B.7) y (B.14) prueba el teorema.

Un detalle importante de esta prueba es que escribimos la ecuación (B.6) en términos del límite $p' \rightarrow p$, y no en términos de los valores de expectación elementos $\langle p, h | j^0 | p, h \rangle$. Esta definición mediante el límite corresponde al método mediante el cual se determinan realmente las cargas (y de hecho también las energías y momentos). Esto es a partir de mediciones del “nearly forward scattering” evaluando las cargas locales $Q_R = \int_R d^3x j^0$ para una región R finita. Si hubiésemos tomado los elementos matriciales con $p' = p$ no podríamos haber probado el teorema sin asumir la continuidad de $\langle p', h | j^\mu | p, h \rangle$ para $(p' - p)$ tipo espacio y tipo luz. Si bien esta suposición parece razonable, en este contexto, no es necesaria.

Teorema 2: Una teoría que permite la construcción de una tensor energía-momento conservado $T^{\mu\nu}$ covariante de Lorentz para el cual $P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$ es el vector energía-momento no puede contener partículas sin masa de espín > 1 .

Demostración: Podemos probar esta segunda parte del teorema, de forma análoga a la anterior. Comenzamos considerando que el operador momento, construido a partir del tensor energía-momento, actúa sobre los estados de una partícula momento definido como

$$P^\mu |p, h\rangle = p^\mu |p, h\rangle, \quad P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}(0, x^i). \quad (\text{B.15})$$

De esta manera, también tenemos el valor de expectación

$$\langle p', h | P^\mu | p, h \rangle = p^\mu \delta(p' - p). \quad (\text{B.16})$$

Nuevamente, podemos calcular explícitamente para obtener

$$\begin{aligned} \langle p', h | P^\mu | p, h \rangle &= \int d^3x \langle p', h | T^{0\mu}(0, x^i) | p, h \rangle = \int d^3x \langle p', h | e^{iP_i x^i} T^{0\mu}(0, 0) e^{-iP_i x^i} | p, h \rangle \\ &= \int d^3x e^{i(p'_i - p_i)x^i} \langle p', h | T^{0\mu}(0, 0) | p, h \rangle = (2\pi)^3 \delta(p' - p) \langle p', h | T^{0\mu}(0, 0) | p, h \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Combinando (B.16) y (B.17) tenemos para el límite de las mediciones $p' \rightarrow p$ que

$$\lim_{p' \rightarrow p} \langle p', h | T^{0\mu}(0, 0) | p, h \rangle = \frac{p^\mu}{(2\pi)^3}. \quad (\text{B.18})$$

Más aún, de la covariancia de Lorentz del tensor energía-momento recuperamos

$$\lim_{p' \rightarrow p} \langle p', h | T^{\mu\nu}(0, 0) | p, h \rangle = \frac{p^\mu p^\nu}{E(2\pi)^3}. \quad (\text{B.19})$$

Por otro lado, si trabajamos en el sistema de referencia definido por (B.10) tenemos que una rotación $\Lambda(\theta)$ alrededor de p^i dada por θ obedece que

$$\Lambda(\theta)_\rho^\mu \Lambda(\theta)_\sigma^\nu \langle p', h | T^{\rho\sigma} | p, h \rangle = e^{2i\theta h} \langle p', h | T^{\mu\nu} | p, h \rangle. \quad (\text{B.20})$$

En este caso, vemos que el carácter tensorial del $T^{\mu\nu}$ permite los que valores de expectación $\langle p', h | T^{\mu\nu} | p, h \rangle$ sean no nulos para $2|h| = 0, 1, 2$, o bien

$$h = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1. \quad (\text{B.21})$$

Al revés, si no acotamos la helicidades tenemos

$$\langle p', h | T^{\mu\nu} | p, h \rangle = 0 \text{ si } h \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1. \quad (\text{B.22})$$

En este caso, la contradicción entre (B.19) y (B.22) prueba el teorema.

Apéndice C

Efecto Witten y simetría quiral

En este apéndice revisaremos ideas relacionadas con la electrodinámica en presencia de un término θ

$$S_\theta \propto \int d^4x \theta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}. \quad (\text{C.1})$$

Estos conceptos serán particularmente útiles para interpretar los resultados incluidos en el capítulo 7. Comenzaremos en la sección C.1 estudiando como un término de la forma (C.1) con $\theta = \theta(x^0, x^i)$ produce variaciones en la ecuaciones de movimiento, es decir, como afecta la dinámica de la teoría a nivel clásico. Luego, en la sección C.2 veremos que podemos entender esta nueva física a partir del efecto Witten [270]. Dicho efecto se basa en que los monopolos magnéticos en presencia de un término θ no se comportaran exclusivamente como monopolos, sino que actúan como diones que tienen tanto carga magnética como carga eléctrica. En la sección C.3 estudiaremos un problema a priori no relacionado, la derivación de la anomalía Adler–Bell–Jackiw (ABJ) [11, 12] en la integral de caminos introducida en [221]. Sin embargo, veremos como la transformación quiral de la medida de integración induce un término θ en la acción. Por último, en la sección C.4 estudiaremos brevemente como podemos describir las líneas de Wilson y 't Hooft como condiciones de contorno en la en la integral de camino. Combinando con los demás resultados del apéndice, veremos que los operadores no locales diónicos en el caso de QED no masiva están cargados ante la simetría quiral.

C.1. Electrodinámica con término θ

Comencemos viendo en que situaciones en un término θ afecta a la dinámica de la teoría a nivel clásico. Para esto escribimos la acción del campo de gauge como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \left[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta e^2}{4\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right], \quad (\text{C.2})$$

donde podemos recuperar la 2-forma invariante de gauge $F_{\mu\nu}$ y su dual $\tilde{F}_{\mu\nu}$ a partir del campo de gauge A_μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta. \quad (\text{C.3})$$

Observamos que hemos escrito las constantes del término θ de manera que sean consistentes con (7.46) para $\theta \in [0, 2\pi)$. Siguiendo este camino, podemos escribir las ecuaciones de movimiento del campo de gauge A_ν asociadas a la acción (C.2) como

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - \frac{\theta e^2}{4\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{4\pi^2} (\partial_\mu \theta) \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.4})$$

A la luz de (C.4), es evidente que el término θ solo puede afectar las ecuaciones de movimiento si θ que es una función no trivial del espacio-tiempo, es decir

$$\theta = \theta(x^0, x^i). \quad (\text{C.5})$$

Esto se debe a que la 2-forma dual $\tilde{F}_{\mu\nu}$, dada por (C.3), siempre es conservada por simetría,

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0. \quad (\text{C.6})$$

La necesidad de que θ sea una función no trivial viene del hecho que podemos expresar $F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ como derivada total

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 2(\partial^\mu A^\nu) \tilde{F}_{\mu\nu} = 2\partial^\mu (A^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}). \quad (\text{C.7})$$

De esta manera si θ es constante el término extra en la acción no es mas que un término de borde y, por ende no cambia las ecuaciones de movimiento. Por el contrario en los casos que θ tiene una dependencia como (C.5) estaremos ante la presencia de un término cuasi-topológico. Esto es el término θ no esta acoplado a la métrica de espacio-tiempo pero cambia las ecuaciones de movimiento.

Para entender las implicaciones físicas de la introducción de un término θ , podemos escribir las ecuaciones de movimiento en función de los campos eléctricos y magnéticos

$$E^i = -F^{0i}, \quad B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}. \quad (\text{C.8})$$

En particular, la ecuación (C.4) toma la forma

$$\partial_i E^i = \frac{e^2}{4\pi^2} (\partial_i \theta) B^i, \quad \dot{E}_i = -\varepsilon_{ijk} \partial^j B^k - \frac{e^2}{4\pi^2} \left(B_i \dot{\theta} + \varepsilon_{ijk} E^j \partial^k \theta \right), \quad (\text{C.9})$$

mientras que las ecuaciones dadas por (C.6) no varían inclusive en presencia del término

θ no trivial, es decir

$$\partial_i B^i = 0, \quad \dot{B}_i = \varepsilon_{ijk} \partial^j E^k. \quad (\text{C.10})$$

Claramente, las ecuaciones (C.9) son las que contienen la nueva física. La primera nos dice que en regiones del espacio donde θ varía, un campo magnético actúa como una densidad de carga eléctrica. La segunda nos dice que la combinación $(B_i \dot{\theta} + \varepsilon_{ijk} E^j \partial^k \theta)$ actúa como una densidad de corriente.

Un ejemplo muy simple de la nueva dinámica es el caso donde vamos muy lentamente cambiando θ en el tiempo de manera que $\theta = \theta(t)$. Esta variación produce un término en la segunda ecuación de (C.9) proporcional a $\dot{\theta}$

$$\dot{E}_i = -\frac{e^2 \dot{\theta}}{4\pi^2} B_i. \quad (\text{C.11})$$

En consecuencia, si comenzamos un campo magnético constante generado posiblemente por la presencia de un monopolo magnético puntual g y hacemos el aumento $\theta(0) \rightarrow \theta(t)$, vemos que esto será acompañado por un campo eléctrico variable en el tiempo que paralelo a campo magnético. Específicamente, tenemos integrando (C.11) que

$$E_i = \int_0^t dt \left(-\frac{e^2 \dot{\theta}}{4\pi^2} B_i \right) = -\frac{e^2 \Delta \theta}{4\pi^2} B_i. \quad (\text{C.12})$$

El punto fundamental es que la presencia de un monopolo magnético ha generado un campo eléctrico. Esto es consecuencia del efecto Witten que estudiaremos a en la siguiente sección.

C.2. Efecto Witten

Podemos entender idea de que el término θ variable en el espacio-tiempo actúa como fuente de cargas/corrientes eléctricas como una consecuencia del efecto Witten. En otras palabras, como mostramos ahora, el efecto del término θ es esencialmente dotar al monopolo magnético de una carga eléctrica.

Esta idea fue introducida originalmente en [270]. Sin embargo, a continuación seguiremos el desarrollo más didáctico presentado en [218]. En particular, tomaremos un monopolo magnético con carga magnética g y lo colocaremos en el vacío dentro de una cavidad con $\theta = 0$. Además, como mostramos en la figura C.1, rodearemos dicha cavidad con un medio que tiene $\theta \neq 0$.

Podemos escribir el campo magnético, obtenido a partir de la ley de Gauss magnética, en todo el espacio como

$$B^i(r) = \frac{g}{4\pi r^3} r^i \quad (\text{C.13})$$

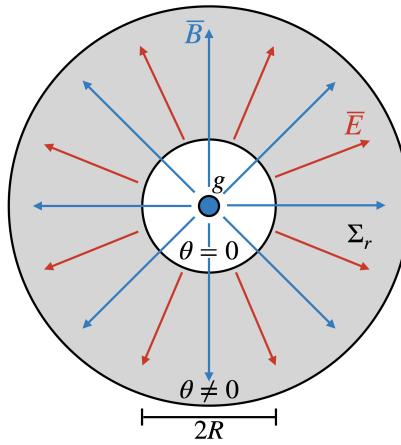


Figura C.1: Configuración geométrica que usamos para estudiar el efecto Witten. Un monopolo magnético con carga magnética g se encuentra en una cavidad con $\theta = 0$ y, a su vez, dicha cavidad esta rodeada de un medio con $\theta \neq 0$. En el medio donde $\theta \neq 0$, vemos al monopolo magnético como un dión que genera tanto un campo magnético \bar{B} como uno eléctrico \bar{E} .

donde r^i es el vector posición espacial y r su modulo. Además, si asumimos que la cavidad con $\theta = 0$ es esférica de radio R mientras que el medio con $\theta \neq 0$ se extiende hasta el infinito tenemos

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R, \\ \theta & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

De la ecuación (C.9) sabemos lo que sucede a partir de nuestra discusión anterior. Cuando el campo magnético cruza la interfaz donde cambia θ , se inducirá un campo eléctrico. En particular tenemos

$$\partial_i E^i = \frac{e^2 \theta}{4\pi^2} B^r \delta(r - R) = \left(\frac{e^2 g \theta}{4\pi^2} \right) \frac{\delta(r - R)}{4\pi r^2} \quad (\text{C.15})$$

y podemos escribir el campo eléctrico como

$$E^i(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R, \\ \left(\frac{e^2 g \theta}{4\pi^2} \right) \frac{r^i}{4\pi r^3} & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Desde el interior del medio cuando $\theta \neq 0$, parece que el monopolo tiene carga eléctrica distinta de cero es decir actúa como un dión de cargas eléctricas y magnéticas dado por

$$(g, q) = \left(g, \frac{e^2 g}{4\pi^2} \theta \right). \quad (\text{C.17})$$

Es fundamental que este resultado es independiente de R , es decir, del tamaño de la región interior donde $\theta = 0$. Podríamos encoger esta región hasta que fuera infinitesimalmente pequeña, y aún encontraríamos que el monopolo inevitablemente tiene carga electrica q . La interpretación física de este resultado es que cuando $\theta \neq 0$ un monopolo

siempre es un dión de cargas (g, q) . En particular, cuando el monopolo lleva la carga magnética mínima permitida por la cuantización de Dirac, su carga dionica viene dada por

$$(g, q) = \left(\frac{2\pi}{e}, \frac{e\theta}{2\pi} \right). \quad (\text{C.18})$$

Podríamos intentar construir un verdadero monopolo agregando cargas eléctricas que cancelen las generadas por el monopolo original. Esto solo es posible si tenemos $\theta = 2\pi$, de manera que la carga eléctrica del monopolo coincida con la carga q original. En este caso, podemos construir un monopolo neutro considerando un estado ligado del dión-positrón. Sin embargo, cuando θ no es un mutliplo de 2π , todos los monopolos llevan necesariamente carga eléctrica.

C.3. Simetria quiral en la integral de caminos

Ahora estudiaremos la derivación de la anomalía quiral usando la integral de caminos y veremos como las transformaciones quirales están relacionada con los términos θ . Para esto, consideremos la acción de un campo fermiónico ψ sin masa y un campo electromagnético fijo A_μ como fuente

$$S[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \bar{\psi} i\cancel{D} \psi, \quad (\text{C.19})$$

donde usamos la notación

$$\cancel{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - A_\mu), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{C.20})$$

La simetría quiral viene dada por transformaciones sobre los campos fermiónicos como

$$\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma^5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\theta\gamma^5}. \quad (\text{C.21})$$

De la misma manera, podemos escribir la versión infinitesimal de la forma

$$\delta\psi = i\theta\gamma^5\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\theta\bar{\psi}\gamma^5. \quad (\text{C.22})$$

Vemos que la acción (C.19) es invariante ante la transformación (C.22), es decir

$$S[\psi + \delta\psi, \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, A] - S[\psi, \bar{\psi}, A] = 0. \quad (\text{C.23})$$

A partir de aquí, podemos calcular la corriente de Noether siguiendo el procedimiento presentado en [89, 90]. Escribiendo la variación de la acción a partir de las ecuaciones

de movimiento $E[\psi]$ y $E[\bar{\psi}]$ y términos de borde tenemos

$$\delta S[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \left[\delta\bar{\psi} E[\bar{\psi}] + E[\psi] \delta\psi + \partial_\mu \Theta^\mu \right], \quad (\text{C.24})$$

donde consideramos que $E[\psi]$, $E[\bar{\psi}]$, y Θ^μ vienen dados por

$$E[\bar{\psi}] = i \overleftrightarrow{D}\bar{\psi}, \quad E[\psi] = -i \bar{\psi} \overleftarrow{D}, \quad \Theta^\mu = i \bar{\psi} \gamma^\mu \delta\psi. \quad (\text{C.25})$$

Por ende, la simetría esta asociada por el teorema de Noether a la corriente

$$j_5^\mu = \frac{\delta \Theta^\mu}{\delta \theta} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (\text{C.26})$$

Si bien esta derivación, nos asegura que la conservación de la corriente quiral es válida a nivel clásico,

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0, \quad (\text{C.27})$$

sabemos que a nivel cuántico se rompe por la presencia de la anomalía ABJ. La contribución de esta anomalía fue originalmente calculada a primer orden en perturbaciones usando los diagramas triángulos para las corrientes [11, 12], y dicho resultado es válido a todas las escalas [271]. De esta manera, para QED no masiva tenemos

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (\text{C.28})$$

Sin embargo, otra forma para ver la contribución de la anomalía es usar la integral de caminos [221]. A continuación presentamos dicho cálculo siguiendo las referencias más modernas [218, 272]. Empezamos escribiendo la función partíción correspondiente a la acción (C.19) como

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS[\psi, \bar{\psi}, A]}. \quad (\text{C.29})$$

Si hacemos una transformación quiral dentro de dicha integral sabemos, por (C.24), que la acción es invariante el efecto de la simetría. Pero, en este caso también debemos considerar la transformación de la medida de integración de los campos. Estas vienen dadas por,

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = |J|^{-2} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (\text{C.30})$$

donde $|J|$ representa el jacobiano de la transformación y el factor -2 viene del carácter fermiónico de los campos. A continuación, veremos que no solo obedece que $|J| \neq 1$ sino que, de hecho, produce la contribución correspondiente a la anomalía ABJ.

Para definir apropiadamente las medidas $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$, necesitamos estudiar los autovectores/autovectores del operador de Dirac \not{D} . Estos vienen dados a derecha/izquierda

por las funciones $\phi_m(x)$ y $\bar{\phi}_m(x)$ respectivamente como

$$(i\cancel{D})\phi_m(x) = \lambda_m \phi_m(x), \quad \bar{\phi}_m(x) (i\cancel{D}) = \lambda_m \bar{\phi}_m(x), \quad (\text{C.31})$$

obedeciendo la condición de ortonormalidad

$$\int d^4x \bar{\phi}_m(x) \phi_{m'}(x) = \delta_{mm'} . \quad (\text{C.32})$$

Cuando la fuente externa se anula, es decir $A_\mu = 0$, los ϕ_m son funciones de onda de Dirac con momento definido $k^2 = \lambda_m^2$. Si en cambio ponemos A_μ a una constante no nula esta solución sigue valiendo a nivel asintótico. En este contexto, podemos expandir los campos en modos como

$$\psi(x) = \sum_m c_m \phi_m(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{c}_m \bar{\phi}_m(x), \quad (\text{C.33})$$

De esta manera, tenemos que medida de la integral de caminos toma la forma

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \int \prod_m dc_m d\bar{c}_m . \quad (\text{C.34})$$

Para calcular la transformación quiral de (C.34) necesitamos el jacobiano (C.30). Para esto, vemos como transforman los c_m antitransformando Fourier la transformacion infinitesimal (C.22). Esto es, calculamos

$$c_m = \int d^4x \bar{\phi}_m \psi \rightarrow c_m = \int d^4x \bar{\phi}_m (1 + i\theta \gamma^5) \psi = c_m + \delta c_m , \quad (\text{C.35})$$

donde podemos recuperar δc_m de la forma

$$\delta c_m = \sum_{m'} X_{mm'} c_{m'} , \quad X_{mm'} = i \int d^4x \theta(x) (\phi_m^\dagger(x) \gamma^5 \phi_{m'}(x)) . \quad (\text{C.36})$$

De esta manera, el jacobiano viene dado simplemente a partir del determinante

$$|J| = \det(1 + X) = e^{Tr[\log(1+X)]} = e^{\sum_m X_{mm} + \mathcal{O}(\theta^2)} , \quad (\text{C.37})$$

donde podemos no considerar los siguientes términos en la ultima igualdad debido al carácter infinitesimal de X que es lineal en θ según (C.36). De aquí, nuestro propósito

será calcular $\sum_m X_{mm}$. Para esto, es útil calcular

$$\begin{aligned} \sum_m (\phi_m^\dagger(x) \gamma^5 \phi_m(x)) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_m (\phi_m^\dagger(x) \gamma^5 \phi_m(x)) e^{\frac{\lambda_m^2}{M^2}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_m (\phi_m^\dagger(x) \gamma^5 e^{\frac{(iD)^2}{M^2}} \phi_m(x)) = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x | Tr[\gamma^5 e^{\frac{(iD)^2}{M^2}}] | x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Destacamos que (C.38) no es exactamente una traza de γ^5 por la necesidad de introducir una regularización. Esta regularización es necesaria porque para cada x estamos sumando sobre infinitos modos $\phi_m(x)$ y $\phi_m^\dagger(x)$ y no hay razón para pensar que dicha sumatoria converge. En este contexto, introducimos la variable M con unidades de energía como escala de dicha regularización. De esta manera, esperamos que el límite converja para $M \rightarrow \infty$. Esto está asegurado debido a que el signo de $\lambda_m^2 = k^2$ es negativo para momento grande después de una rotación de Wick, por ende el factor del exponente es el correcto para asegurar la convergencia del límite en cuestión.

Para seguir calculando, podemos concentrarnos simplemente en la parte asintótica del espectro a k grande. Entonces, expandimos en potencias del campo de gauge A_μ reescribiendo el operador de Dirac al cuadrado como

$$\begin{aligned} (iD)^2 &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = -\frac{1}{2} \left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) D_\mu D_\nu \\ &= -\frac{1}{2} \left(2g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] \right) = -D^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

donde usamos $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$. Para obtener una traza distinta de cero para γ^5 en (C.38), debemos bajar al menos cuatro matrices de Dirac del exponente. Podemos calcular el primer término no trivial expandiendo el exponente hasta el orden $(\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2$. Así obtenemos, remplazando (C.39) en (C.38), que

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x | Tr[\gamma^5 e^{\frac{(iD)^2}{M^2}}] | x \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x | Tr[\gamma^5 e^{(-D^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})/M^2}] | x \rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \left[\frac{\gamma^5}{2!} \left(\frac{e}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 \right] \langle x | e^{-\frac{\partial^2}{M^2}} | x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

También, podemos simplificar esta expresión haciendo una rotación de Wick como

$$\langle x | e^{-\frac{\partial^2}{M^2}} | x \rangle = \lim_{x \rightarrow y} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} e^{\frac{k^2}{M^2}} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{\frac{-k_E^2}{M^2}} = \frac{i M^4}{16\pi^2}. \quad (\text{C.41})$$

Remplazando (C.40-C.41) en (C.36) recuperamos que

$$\begin{aligned} \sum_m (\phi_m^\dagger(x) \gamma^5 \phi_m(x)) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{iM^4}{16\pi^2} \text{Tr} \left[\frac{\gamma^5}{2!} \left(\frac{e}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)^2 \right] \\ &= \frac{ie^2}{128\pi^2} \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}] = \frac{ie^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Finalmente, volviendo a (C.37) tenemos el jacobiano

$$|J| = e^{-\frac{ie^2\theta}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}. \quad (\text{C.43})$$

Considerando que el jacobiano entra en la transformación de la medida como (C.30) tenemos para la acción dentro de la función partición (C.29) que

$$S[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \left[\bar{\psi} i \not{D} \psi + \frac{e^2\theta}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right]. \quad (\text{C.44})$$

En conclusión, el efecto de una transformación quiral en la función partición es añadir a la acción un término θ como el introducido en (C.2). Este término extra nos permite recuperar la ecuación de conservación anómala (C.28) de manera análoga a (C.26). Nótese que la transformación de la medida según el jacobiano (C.43) también es valida para un $\theta(x)$ con dependencia espacial, mientras que la acción (C.44) tiene un termino extra $(\partial_\mu \theta) j_5^\mu$.

C.4. Operadores de línea en la integral de camino

Dada una teoría de gauge, podemos definir las líneas de Wilson y operadores/líneas de 't Hooft como condiciones de borde en la integral de camino. A continuación presentamos estas ideas para teorías de gauge abelianas. Para comenzar, podemos entender heurísticamente los operadores de 't Hooft, definidos sobre superficies $(D - 3)$ -dimensionales Γ_{D-3} abiertas o cerradas, como la descripción de un monopolo de carga magnética g infinitamente pesado actuando como sonda externa sobre un volumen de mundo dado por $\tilde{\Gamma}_{D-3}$. En este contexto, el operador de 't Hooft se suele definir extirmando un volumen estrecho alrededor de $\tilde{\Gamma}_{D-3}$ del espacio tiempo y exigiendo que los campos de gauge en la integral de camino tengan una condición de contorno cerca de $\tilde{\Gamma}_{D-3}$ de manera que valga

$$\int_{\Sigma_2} F = g, \quad (\text{C.45})$$

para una esfera pequeña Σ_2 que enlaza Γ_{D-3} . Véase figura 2.3.1. Esto asegura que la conmutación entre operadores de 't Hooft y líneas de Wilson sea la correcta [273].

En efecto, podemos aplicar la misma idea si queremos definir una línea de Wilson

como condición de borde en la integral de camino. La idea en este caso es extirpar un tubo alrededor una línea Γ_1 . Análogamente al caso del operador de 't Hooft, debemos exigir cerca de curva Γ_1 una condición de borde tal que

$$\int_{\tilde{\Sigma}_{D-2}} \star F = q, \quad (\text{C.46})$$

para superficies $(D-2)$ -dimensionales pequeñas y cerradas que enlazan Γ_1 . En palabras, la línea de Wilson inserta una partícula infinitamente masiva de carga q cuya línea del mundo es Γ_1 siendo esto consistente con la interpretación usual de la definición

$$W_{\Gamma_1} = e^{iq \int_{\Gamma_1} dx^\mu A_\mu}. \quad (\text{C.47})$$

Veamos el caso particular de $D = 4$. Para tal dimension, también podemos asociar los operadores de 't Hooft a líneas unidimensionales y podemos escribir las condiciones de contorno para la integral de camino a partir de las soluciones de cargas eléctricas/magnéticas puntuales que discutimos brevemente en la sección C.2. En particular, siguiendo [220] podemos obtener líneas de carácter diónico a partir de condiciones de contorno cerca de Γ_1 dadas por

$$F^{i0} \sim \frac{q r^i}{4\pi r^3}, \quad F^{ij} \sim \varepsilon^{ijk} \frac{g r_k}{4\pi r^3}, \quad (\text{C.48})$$

donde r^i representan el vector posición centrado en punto mas cercano de Γ .

Podemos combinar esta idea con los conceptos revisados en las secciones C.2 y C.3, para comprender las transformaciones de los operadores dionicos ante la simetría quiral. La acción de la simetría quiral dentro de la integral de caminos es como vimos en la sección la adición de un término θ . Según (C.7), dicho término es un término de borde en la acción y por ende podemos entenderlo como un cambio sobre las condiciones de contorno. Dicha variación es naturalmente la del efecto witten según (C.18), mapeando monopolos magnéticos en diones. En el contexto del capítulo 7, vemos que la simetría quiral mueve los operadores no locales diónicos, dados por un producto de WL y TL cambiando la carga de los WL según el valor de θ y la carga original del TL.

Bibliografía

- [1] Streater, R. F., Wightman, A. S. PCT, spin and statistics, and all that, tomo 52. Princeton University Press, 2000. [1](#), [7](#)
- [2] Coleman, S., Mandula, J. All possible symmetries of the s matrix. *Physical Review*, **159** (5), 1251, 1967. [1](#), [49](#), [249](#)
- [3] Weinberg, S. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. Cambridge University Press, 2013. [1](#)
- [4] Golfand, Y. A., Likhtman, E. P. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance. *JETP Lett.*, **13**, 323–326, 1971. [1](#)
- [5] Haag, R., Lopuszanski, J. T., Sohnius, M. All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix. *Nucl. Phys. B*, **88**, 257, 1975. [1](#)
- [6] Cordova, C., Dumitrescu, T. T., Intriligator, K., Shao, S.-H. Snowmass White Paper: Generalized Symmetries in Quantum Field Theory and Beyond. [En](#): 2022 Snowmass Summer Study. 2022. [1](#)
- [7] 't Hooft, G. On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement. *Nucl. Phys. B*, **138**, 1–25, 1978. [1](#), [64](#), [67](#), [216](#)
- [8] Gaiotto, D., Kapustin, A., Seiberg, N., Willett, B. Generalized Global Symmetries. *JHEP*, **02**, 172, 2015. [1](#), [18](#), [36](#), [37](#), [39](#), [106](#), [143](#)
- [9] Landau, L. D. 3^a ed.^{ón}. Oxford: Pergamon Press, 1980. [2](#), [106](#)
- [10] Noether, E. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1918**, 235–257, 1918. URL <http://eudml.org/doc/59024>. [2](#), [109](#), [201](#)
- [11] Adler, S. L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, **177**, 2426–2438, Jan 1969. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.177.2426>. [2](#), [201](#), [202](#), [203](#), [213](#), [269](#), [274](#)

- [12] Bell, J. S., Jackiw, R. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model. *Nuovo Cim. A*, **60**, 47–61, 1969. [2](#), [201](#), [213](#), [269](#), [274](#)
- [13] Adler, S. L., Boulware, D. G. Anomalous commutators and the triangle diagram. *Phys. Rev.*, **184**, 1740–1744, 1969. [2](#), [205](#), [214](#)
- [14] Harlow, D., Ooguri, H. Symmetries in quantum field theory and quantum gravity, 2018. [3](#), [75](#), [110](#), [145](#), [146](#), [203](#), [217](#), [222](#)
- [15] Cordova, C., Ohmori, K. Noninvertible Chiral Symmetry and Exponential Hierarchies. *Phys. Rev. X*, **13** (1), 011034, 2023. [3](#), [222](#), [224](#), [237](#)
- [16] Choi, Y., Lam, H. T., Shao, S.-H. Noninvertible Global Symmetries in the Standard Model. *Phys. Rev. Lett.*, **129** (16), 161601, 2022. [3](#), [203](#), [217](#), [222](#), [224](#), [237](#)
- [17] Weinberg, S., Witten, E. Limits on massless particles. *Physics Letters B*, **96** (1), 59–62, 1980. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380902129>. [3](#), [49](#), [55](#), [110](#), [144](#), [152](#), [157](#), [263](#)
- [18] Polchinski, J. Monopoles, duality, and string theory. *Int. J. Mod. Phys. A*, **19S1**, 145–156, 2004. [3](#), [49](#), [74](#), [108](#)
- [19] Banks, T., Seiberg, N. Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity. *Phys. Rev. D*, **83**, 084019, 2011. [3](#), [49](#), [50](#), [74](#), [108](#)
- [20] Heidenreich, B., McNamara, J., Montero, M., Reece, M., Rudelius, T., Valenzuela, I. Non-Invertible Global Symmetries and Completeness of the Spectrum. *JHEP*, **21**, 203, 2020. [3](#), [50](#), [74](#), [206](#), [239](#)
- [21] Rudelius, T., Shao, S.-H. Topological Operators and Completeness of Spectrum in Discrete Gauge Theories. *JHEP*, **12**, 172, 2020. [74](#)
- [22] Casini, H., Magan, J. M. On completeness and generalized symmetries in quantum field theory. *Mod. Phys. Lett. A*, **36** (36), 2130025, 2021. [3](#), [4](#), [15](#), [16](#), [17](#), [21](#), [22](#), [43](#), [75](#), [85](#), [137](#), [219](#), [236](#)
- [23] Casini, H., Huerta, M., Magan, J. M., Pontello, D. Entropic order parameters for the phases of QFT. *JHEP*, **04**, 277, 2021. [4](#), [15](#), [16](#), [17](#), [19](#), [21](#), [22](#), [26](#), [32](#), [34](#), [40](#), [50](#), [61](#), [74](#), [113](#), [120](#), [137](#), [213](#), [235](#), [236](#)
- [24] Haag, R., Schroer, B. Postulates of quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, **3** (2), 248–256, 1962. [10](#)

- [25] Araki, H. Von neumann algebras of local observables for free scalar field. *Journal of Mathematical Physics*, **5** (1), 1–13, 1964. [10](#), [259](#)
- [26] Guido, D. Modular theory for the von neumann algebras of local quantum physics. *Aspects of Operator Algebras and Applications, Contemp. Math.*, **534**, 97–120, 2011. [10](#)
- [27] Haag, R. Local quantum physics: Fields, particles, algebras. Springer Science & Business Media, 2012. [11](#), [15](#), [125](#)
- [28] Fredenhagen, K., Hertel, J. Local algebras of observables and pointlike localized fields. *Communications in Mathematical Physics*, **80** (4), 555–561, 1981. [12](#), [246](#)
- [29] Rehberg, J., Wollenberg, M. Quantum fields as pointlike localized objects. *Mathematische Nachrichten*, **125** (1), 259–274, 1986.
- [30] Bostelmann, H. Phase space properties and the short distance structure in quantum field theory. *Journal of mathematical physics*, **46** (5), 052301, 2005. [12](#), [192](#)
- [31] Borchers, H.-J. Über die vollständigkeit lorentzinvarianter felder in einer zeitartigen rohre. *Il Nuovo Cimento*, **19**, 787–793, 1961. URL <https://doi.org/10.1007/BF02733373>. [13](#)
- [32] Araki, H. A generalization of borchers theorem. *Helvetica Physica Acta*, **36**, 132–9, 1963.
- [33] Strohmaier, A. On the local structure of the Klein-Gordon field on curved spacetimes. *Lett. Math. Phys.*, **54**, 249–261, 2000.
- [34] Strohmaier, A., Witten, E. Analytic states in quantum field theory on curved spacetimes, 2023.
- [35] Strohmaier, A., Witten, E. The Timelike Tube Theorem in Curved Spacetime, 2023. [13](#)
- [36] Longo, R., Morinelli, V., Prete, F., Rehren, K.-H. Split property for free massless finite helicity fields. En: Annales Henri Poincaré, tomo 20, págs. 2555–2584. Springer, 2019. [13](#), [50](#), [55](#), [58](#), [152](#)
- [37] Brunetti, R., Guido, D., Longo, R. Modular structure and duality in conformal quantum field theory. *Comm. Math. Phys.*, **156** (1), 201–219, 1993. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1104253522>. [15](#), [259](#)

- [38] Casini, H., Huerta, M., Magán, J. M., Pontello, D. Entanglement entropy and superselection sectors. Part I. Global symmetries. *JHEP*, **02**, 014, 2020. [15](#), [16](#), [24](#), [137](#), [236](#)
- [39] Buchholz, D., Doplicher, S., Longo, R., Roberts, J. E. A new look at goldstone's theorem. *Reviews in Mathematical Physics*, **4** (spec01), 49–83, 1992. [18](#), [114](#), [126](#), [143](#), [219](#), [220](#)
- [40] Dütsch, M., Rehren, K.-H. Generalized free fields and the ads-cft correspondence. En: *Annales Henri Poincare*, tomo 4, págs. 613–635. Springer, 2003. [18](#), [253](#), [254](#), [258](#)
- [41] Arefeva, I. NonAbelian Stokes formula. *Theor. Math. Phys.*, **43**, 353, 1980. [19](#)
- [42] Hirayama, M., Ueno, M. Non-Abelian Stokes Theorem for Wilson Loops Associated with General Gauge Groups. *Progress of Theoretical Physics*, **103** (1), 151–159, 01 2000. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.103.151>.
- [43] Broda, B. Non-abelian stokes theorem in action, 2002. [19](#)
- [44] Jones, V. Index for subfactors. *Inventiones mathematicae*, **72**, 1–26, 1983. URL <http://eudml.org/doc/143011>. [21](#)
- [45] Kosaki, H. Extension of jones' theory on index to arbitrary factors. *Journal of Functional Analysis*, **66** (1), 123 – 140, 1986. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022123686900856>.
- [46] Longo, R. Index of subfactors and statistics of quantum fields 1. *Comm. Math. Phys.*, **126** (2), 217–247, 1989. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1104179850>. [21](#)
- [47] Teruya, T. Index for von neumann algebras with finite-dimensional centers. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **28**, 437–453, 1992. [21](#)
- [48] Giorgetti, L., Longo, R. Minimal Index and Dimension for 2-C*-Categories with Finite-Dimensional Centers. tomo 370, págs. 719–757. 2019.
- [49] Magan, J. M., Pontello, D. Quantum Complementarity through Entropic Certainty Principles. *Phys. Rev. A*, **103** (1), 012211, 2021. [21](#), [219](#), [235](#)
- [50] Xu, F. Strong additivity and conformal nets. *Pacific Journal of Mathematics*, **221**, 167–199, 2003. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14558999>. [22](#)

- [51] Kawahigashi, Y., Longo, R., Muger, M. Multiinterval subfactors and modularity of representations in conformal field theory. *Commun. Math. Phys.*, **219**, 631–669, 2001. [22](#), [33](#)
- [52] Dirac, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field,. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **133** (821), 60–72, 1931. [30](#)
- [53] Zwanziger, D. Quantum field theory of particles with both electric and magnetic charges. *Phys. Rev.*, **176**, 1489–1495, 1968.
- [54] Schwinger, J. S. Magnetic charge and quantum field theory. *Phys. Rev.*, **144**, 1087–1093, 1966.
- [55] Schwinger, J. S. Sources and magnetic charge. *Phys. Rev.*, **173**, 1536–1544, 1968. [30](#)
- [56] Witten, E. Dyons of charge $e\theta/2\pi$. *Physics Letters B*, **86** (3-4), 283–287, 1979. [31](#), [203](#), [216](#)
- [57] Casini, H., Magan, J. M., Martinez, P. J. Entropic order parameters in weakly coupled gauge theories. *JHEP*, **01**, 079, 2022. [32](#), [64](#), [189](#), [235](#)
- [58] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Fields, observables and gauge transformations 1. *Commun. Math. Phys.*, **13**, 1–23, 1969. [33](#), [109](#), [222](#), [237](#)
- [59] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Fields, observables and gauge transformations. 2. *Commun. Math. Phys.*, **15**, 173–200, 1969. [109](#)
- [60] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Local observables and particle statistics. 1. *Commun. Math. Phys.*, **23**, 199–230, 1971.
- [61] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Local observables and particle statistics. 2. *Commun. Math. Phys.*, **35**, 49–85, 1974.
- [62] Doplicher, S., Roberts, J. E. Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. *Commun. Math. Phys.*, **131**, 51–107, 1990. [33](#), [109](#), [222](#), [237](#)
- [63] Fröhlich, J., Kerler, T. Quantum groups, quantum categories and quantum field theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2006. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540566236>. [33](#)
- [64] Bischoff, M., Kawahigashi, Y., Longo, R., Rehren, K.-H. Tensor categories and endomorphisms of von neumann algebras: with applications to quantum field theory, tomo 3 de *Springer Series in Mathematical Physics*. Springer, 2015. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540566236>. [33](#)

- [65] Aharony, O., Seiberg, N., Tachikawa, Y. Reading between the lines of four-dimensional gauge theories. *JHEP*, **08**, 115, 2013. [36](#)
- [66] Freed, D. S., Teleman, C. Relative quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, **326**, 459–476, 2014. [37](#)
- [67] Apruzzi, F., Bonetti, F., García Etxebarria, I. n., Hosseini, S. S., Schafer-Nameki, S. Symmetry TFTs from String Theory. *Commun. Math. Phys.*, **402** (1), 895–949, 2023.
- [68] Freed, D. S., Moore, G. W., Teleman, C. Topological symmetry in quantum field theory, 9 2022.
- [69] Bhardwaj, L., Schafer-Nameki, S. Generalized Charges, Part II: Non-Invertible Symmetries and the Symmetry TFT, 5 2023. [37](#)
- [70] Athenodorou, A., Teper, M. SU(N) gauge theories in 2+1 dimensions: glueball spectra and k-string tensions. *JHEP*, **02**, 015, 2017. [39](#)
- [71] Witten, E. AdS / CFT correspondence and topological field theory. *JHEP*, **12**, 012, 1998. [41](#)
- [72] Xu, F. On relative entropy and global index. *Transactions of the American Mathematical Society*, **373** (5), 3515–3539, 2020. [43](#)
- [73] Witten, E. APS Medal for Exceptional Achievement in Research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory. *Rev. Mod. Phys.*, **90** (4), 045003, 2018. [44](#), [123](#)
- [74] Bratteli, O., Robinson, D. W. Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vol. 1.: C* and W* algebras, symmetry groups, decomposition of states. 1979. [44](#)
- [75] Segal, G. B. The Definition of Conformal Field Theory, págs. 165–171. Dordrecht: Springer Netherlands, 1988. URL https://doi.org/10.1007/978-94-015-7809-7_9. [45](#)
- [76] Chamon, C. Quantum Glassiness. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (4), 040402, 2005. [50](#), [75](#)
- [77] Haah, J. Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators. *Phys. Rev. A*, **83** (4), 042330, 2011.
- [78] Vijay, S., Haah, J., Fu, L. A New Kind of Topological Quantum Order: A Dimensional Hierarchy of Quasiparticles Built from Stationary Excitations. *Phys. Rev. B*, **92** (23), 235136, 2015.

- [79] Vijay, S., Haah, J., Fu, L. Fracton Topological Order, Generalized Lattice Gauge Theory and Duality. *Phys. Rev. B*, **94** (23), 235157, 2016.
- [80] Pretko, M. Subdimensional Particle Structure of Higher Rank U(1) Spin Liquids. *Phys. Rev. B*, **95** (11), 115139, 2017. [50](#), [79](#)
- [81] Pretko, M., Chen, X., You, Y. Fracton Phases of Matter. *Int. J. Mod. Phys. A*, **35** (06), 2030003, 2020. [50](#), [75](#)
- [82] Sous, J., Pretko, M. Fractons from polarons. *Phys. Rev. B*, **102**, 214437, Dec 2020. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.214437>. [50](#), [75](#)
- [83] Sous, J., Pretko, M. Fractons from frustration in hole-doped antiferromagnets. *npj Quantum Materials*, **5** (1), Nov 2020. URL <http://dx.doi.org/10.1038/s41535-020-00278-2>. [50](#), [75](#)
- [84] Seiberg, N., Shao, S.-H. Exotic Symmetries, Duality, and Fractons in 2+1-Dimensional Quantum Field Theory. *SciPost Phys.*, **10** (2), 027, 2021. [50](#)
- [85] Seiberg, N., Shao, S.-H. Exotic $U(1)$ Symmetries, Duality, and Fractons in 3+1-Dimensional Quantum Field Theory. *SciPost Phys.*, **9** (4), 046, 2020. [80](#), [82](#)
- [86] Seiberg, N., Shao, S.-H. Exotic \mathbb{Z}_N symmetries, duality, and fractons in 3+1-dimensional quantum field theory. *SciPost Phys.*, **10** (1), 003, 2021. [50](#), [80](#), [82](#)
- [87] Pretko, M. Emergent gravity of fractons: Mach's principle revisited. *Phys. Rev. D*, **96** (2), 024051, 2017. [50](#), [77](#)
- [88] Ortin, T. Gravity and strings. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, 2004. [52](#), [57](#)
- [89] Barnich, G., Brandt, F. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nucl. Phys. B*, **633**, 3–82, 2002. [53](#), [273](#)
- [90] Avery, S. G., Schwab, B. U. W. Noether's second theorem and Ward identities for gauge symmetries. *JHEP*, **02**, 031, 2016. [53](#), [273](#)
- [91] Weinberg, S. Gravitation and Cosmology. New York: John Wiley and Sons, 1972. URL <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>. [54](#), [78](#)
- [92] Abbott, L. F., Deser, S. Stability of Gravity with a Cosmological Constant. *Nucl. Phys. B*, **195**, 76–96, 1982. [54](#)

- [93] DeWitt, B. S. Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory. *Phys. Rev.*, **160**, 1113–1148, 1967. [54](#)
- [94] Poland, D., Rychkov, S., Vichi, A. The Conformal Bootstrap: Theory, Numerical Techniques, and Applications. *Rev. Mod. Phys.*, **91**, 015002, 2019. [55](#)
- [95] Simmons-Duffin, D. The Conformal Bootstrap. En: Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings, págs. 1–74. 2017. [55](#)
- [96] Kravchuk, P., Qiao, J., Rychkov, S. Distributions in CFT. Part II. Minkowski space. *JHEP*, **08**, 094, 2021. [55](#)
- [97] Dorigoni, D., Rychkov, V. S. Scale Invariance + Unitarity => Conformal Invariance?, 10 2009.
- [98] Anselmi, D. Irreversibility and higher spin conformal field theory. *Class. Quant. Grav.*, **17**, 2847–2866, 2000. [55](#)
- [99] Mack, G. All unitary ray representations of the conformal group $SU(2,2)$ with positive energy. *Commun. Math. Phys.*, **55**, 1, 1977. [55](#)
- [100] Siegel, W. All Free Conformal Representations in All Dimensions. *Int. J. Mod. Phys. A*, **4**, 2015, 1989. [55](#)
- [101] Minwalla, S. Restrictions imposed by superconformal invariance on quantum field theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**, 783–851, 1998. [55](#)
- [102] Farnsworth, K., Hinterbichler, K., Hulik, O. Scale versus conformal invariance at the IR fixed point of quantum gravity. *Phys. Rev. D*, **105** (6), 066026, 2022. [55](#)
- [103] Arnowitt, R. L., Deser, S., Misner, C. W. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, **40**, 1997–2027, 2008. [56](#)
- [104] Blau, M. Lecture Notes on General Relativity. [56, 209](#)
- [105] Gupta, S. N. Quantization of Einstein’s gravitational field: general treatment. *Proc. Phys. Soc. A*, **65**, 608–619, 1952. [59](#)
- [106] Bracci, L., Strocchi, F. Local and covariant quantization of linearized einstein’s equations. *J. Math. Phys.*, **13**, 1151–1163, 1972. [59](#)
- [107] Casini, H., Montemayor, R., Urrutia, L. F. Duality for symmetric second rank tensors. 2. The Linearized gravitational field. *Phys. Rev. D*, **68**, 065011, 2003. [59](#)

- [108] Polyakov, A. M. Fermi-Bose Transmutations Induced by Gauge Fields. *Mod. Phys. Lett. A*, **3**, 325, 1988. [64](#)
- [109] Witten, E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Commun. Math. Phys.*, **121**, 351–399, 1989. [64](#)
- [110] Bacilieri, P., *et al.* Scaling in Lattice QCD: Glueball Masses and String Tension. *Phys. Lett. B*, **205**, 535–539, 1988. [64](#)
- [111] Harlow, D. Wormholes, Emergent Gauge Fields, and the Weak Gravity Conjecture. *JHEP*, **01**, 122, 2016. [75](#)
- [112] Harlow, D., Ooguri, H. A universal formula for the density of states in theories with finite-group symmetry, 9 2021. [75](#)
- [113] Pretko, M. Generalized Electromagnetism of Subdimensional Particles: A Spin Liquid Story. *Phys. Rev. B*, **96** (3), 035119, 2017. [75](#), [78](#), [79](#)
- [114] Rasmussen, A., You, Y.-Z., Xu, C. Stable gapless bose liquid phases without any symmetry, 2016. [76](#), [77](#), [82](#), [107](#)
- [115] Gu, Z.-C., Wen, X.-G. A lattice bosonic model as a quantum theory of gravity. [77](#)
- [116] Xu, C. Gapless bosonic excitation without symmetry breaking: An algebraic spin liquid with soft gravitons. *Phys. Rev. B*, **74**, 224433, Dec 2006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.74.224433>. [77](#)
- [117] Bidussi, L., Hartong, J., Have, E., Musaeus, J., Prohazka, S. Fractons, dipole symmetries and curved spacetime, 11 2021. [82](#)
- [118] Jensen, K., Raz, A. Large N fractons, 5 2022. [82](#)
- [119] Lee, J., Wald, R. M. Local symmetries and constraints. *J. Math. Phys.*, **31**, 725–743, 1990. [85](#)
- [120] Wald, R. M. Black hole entropy is the Noether charge. *Phys. Rev. D*, **48** (8), R3427–R3431, 1993.
- [121] Iyer, V., Wald, R. M. Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical Review D*, **50** (2), 846–864, jul 1994. [85](#)
- [122] Padmanabhan, T. Some aspects of field equations in generalised theories of gravity. *Phys. Rev. D*, **84**, 124041, 2011. [86](#)

- [123] Sisman, T. C., Gullu, I., Tekin, B. All unitary cubic curvature gravities in D dimensions. *Class. Quant. Grav.*, **28**, 195004, 2011. [88](#)
- [124] Lu, H., Pope, C. N. Critical Gravity in Four Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 181302, 2011.
- [125] Bueno, P., Cano, P. A., Min, V. S., Visser, M. R. Aspects of general higher-order gravities. *Phys. Rev. D*, **95** (4), 044010, 2017. [89](#), [90](#), [105](#)
- [126] Bueno, P., Cano, P. A. Einsteinian cubic gravity. *Phys. Rev. D*, **94** (10), 104005, 2016. [88](#)
- [127] Lovelock, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, **12**, 498–501, 1971. [89](#)
- [128] Padmanabhan, T., Kothawala, D. Lanczos-Lovelock models of gravity. *Phys. Rept.*, **531**, 115–171, 2013. [89](#)
- [129] Hull, C. M. Duality in gravity and higher spin gauge fields. *JHEP*, **09**, 027, 2001. [92](#)
- [130] Henneaux, M., Lekeu, V., Leonard, A. A note on the double dual graviton. *J. Phys. A*, **53** (1), 014002, 2020. [92](#)
- [131] Hinterbichler, K., Hofman, D. M., Joyce, A., Mathys, G. Gravity as a gapless phase and biform symmetries. *JHEP*, **02**, 151, 2023. [92](#), [93](#), [95](#), [97](#), [106](#), [107](#), [173](#)
- [132] Gómez-Fayrén, C., Meessen, P., Ortín, T. Covariant generalized conserved charges of General Relativity, 7 2023. [92](#), [107](#)
- [133] Benedetti, V., Casini, H., Magan, J. M. Generalized symmetries and Noether's theorem in QFT. *JHEP*, **08**, 304, 2022. [93](#)
- [134] Schwarzschild, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, **1916**, 189–196, 1916. [93](#)
- [135] Kerr, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237–238, 1963.
- [136] Taub, A. H. Empty space-times admitting a three parameter group of motions. *Annals Math.*, **53**, 472–490, 1951.
- [137] Newman, E., Tamburino, L., Unti, T. Empty space generalization of the Schwarzschild metric. *J. Math. Phys.*, **4**, 915, 1963.

- [138] Weyl, H. The theory of gravitation. *Annalen Phys.*, **54**, 117–145, 1917.
- [139] Kinnersley, W., Walker, M. Uniformly accelerating charged mass in general relativity. *Phys. Rev. D*, **2**, 1359–1370, 1970.
- [140] Hong, K., Teo, E. A New form of the rotating C-metric. *Class. Quant. Grav.*, **22**, 109–118, 2005. [93](#)
- [141] Alvarez-Gaume, L., Kehagias, A., Kounnas, C., Lüst, D., Riotto, A. Aspects of Quadratic Gravity. *Fortsch. Phys.*, **64** (2-3), 176–189, 2016. [105](#)
- [142] Stelle, K. S. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, **16**, 953–969, 1977. [106](#)
- [143] Stelle, K. S. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, **9**, 353–371, 1978. [106](#)
- [144] Maldacena, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**, 231–252, 1998. [107](#)
- [145] Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., Oz, Y. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, **323** (3-4), 183–386, Jan 2000. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6). [107](#)
- [146] Doplicher, S. Local aspects of superselection rules. *Communications in Mathematical Physics*, **85** (1), 73–86, 1982. [109](#), [123](#), [126](#), [201](#), [206](#), [220](#)
- [147] Doplicher, S., Longo, R. Local aspects of superselection rules. II. *Commun. Math. Phys.*, **88**, 399–409, 1983.
- [148] Doplicher, S., Longo, R. Standard and split inclusions of von Neumann algebras. *Invent. Math.*, **75**, 493–536, 1984. [253](#), [261](#)
- [149] Buchholz, D., Doplicher, S., Longo, R. On noether’s theorem in quantum field theory. *Annals of Physics*, **170** (1), 1–17, 1986. [109](#), [110](#), [117](#), [119](#), [123](#), [125](#), [126](#), [127](#), [201](#), [206](#), [220](#), [250](#)
- [150] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Local observables and particle statistics. 1. *Commun. Math. Phys.*, **23**, 199–230, 1971. [109](#)
- [151] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J. E. Local observables and particle statistics. 2. *Commun. Math. Phys.*, **35**, 49–85, 1974. [109](#)
- [152] Carpi, S. Quantum Noether’s theorem and conformal field theory: A study of some models. *Rev. Math. Phys.*, **11**, 519–532, 1999. [110](#), [141](#)

- [153] Morsella, G., Tomassini, L. From global symmetries to local currents: The Free U(1) case in 4 dimensions. *Rev. Math. Phys.*, **22**, 91–115, 2010. [110](#)
- [154] Córdova, C., Dumitrescu, T. T., Intriligator, K. Exploring 2-Group Global Symmetries. *JHEP*, **02**, 184, 2019. [112](#)
- [155] Benini, F., Córdova, C., Hsin, P.-S. On 2-Group Global Symmetries and their Anomalies. *JHEP*, **03**, 118, 2019.
- [156] Bhardwaj, L., Bullimore, M., Ferrari, A. E. V., Schafer-Nameki, S. Anomalies of Generalized Symmetries from Solitonic Defects, 5 2022.
- [157] Bhardwaj, L., Gould, D. S. W. Disconnected 0-Form and 2-Group Symmetries, 6 2022. [112](#)
- [158] Longo, R., Rehren, K.-H. Nets of subfactors. *Rev. Math. Phys.*, **7**, 567–598, 1995. [119](#)
- [159] Buchholz, D., Wichmann, E. H. Causal independence and the energy-level density of states in local quantum field theory. *Communications in mathematical physics*, **106** (2), 321–344, 1986. [124](#)
- [160] Buchholz, D., D’Antoni, C., Fredenhagen, K. The universal structure of local algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **111** (1), 123–135, 1987. [124](#)
- [161] Doplicher, S., Roberts, J. E. Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. *Communications in Mathematical Physics*, **131** (1), 51–107, 1990. [142](#), [249](#)
- [162] Roberts, J. E. Spontaneously broken gauge symmetries and superselection rules. Inf. téc., Centre National de la Recherche Scientifique, 1974. [142](#)
- [163] Hofman, D., Iqbal, N. Goldstone modes and photonization for higher form symmetries. *SciPost Physics*, **6** (1), 006, 2019. [143](#), [163](#), [188](#)
- [164] Casini, H., Huerta, M., Rosabal, J. A. Remarks on entanglement entropy for gauge fields. *Phys. Rev.*, **D89** (8), 085012, 2014. [147](#)
- [165] Benedetti, V., Casini, H. Entanglement entropy of linearized gravitons in a sphere. *Phys. Rev. D*, **101** (4), 045004, 2020. [147](#)
- [166] Rarita, W., Schwinger, J. On a theory of particles with half integral spin. *Phys. Rev.*, **60**, 61, 1941. [158](#)
- [167] Adler, S. L. Classical Gauged Massless Rarita-Schwinger Fields. *Phys. Rev. D*, **92** (8), 085022, 2015.

- [168] Adler, S. L., Henneaux, M., Pais, P. Canonical Field Anticommutators in the Extended Gauged Rarita-Schwinger Theory. *Phys. Rev. D*, **96** (8), 085005, 2017. [158](#)
- [169] Allcock, G. R., Hall, S. F. Massless Spin 3/2 Theory and the Unmixed Spinor Representations of the Lorentz Group. *J. Phys. A*, **10**, 267, 1977. [158](#)
- [170] Deser, S., Kay, J. H., Stelle, K. S. Hamiltonian Formulation of Supergravity. *Phys. Rev. D*, **16**, 2448, 1977. [158](#)
- [171] Benedetti, V., Daguerre, L. Entanglement entropy of a Rarita-Schwinger field in a sphere, 6 2023. [158](#), [248](#)
- [172] Camanho, X. O., Edelstein, J. D., Maldacena, J., Zhiboedov, A. Causality Constraints on Corrections to the Graviton Three-Point Coupling. *JHEP*, **02**, 020, 2016. [159](#), [263](#)
- [173] Weinberg, S. Massless particles in higher dimensions. *Physical Review D*, **102** (9), 095022, 2020. [159](#)
- [174] Distler, J. A Note on S. Weinberg, "Massless Particles in Higher Dimensions", 10 2020. [159](#)
- [175] Russo, J. G., Townsend, P. K. Nonlinear Electrodynamics without Birefringence, 11 2022. [163](#)
- [176] Guerrieri, A., Murali, H., Penedones, J., Vieira, P. Where is M-theory in the space of scattering amplitudes?, 11 2022.
- [177] Cano, P. A., Murcia, A. Duality-invariant extensions of Einstein-Maxwell theory. *JHEP*, **08**, 042, 2021.
- [178] Denisov, V. I., Dolgaya, E. E., Sokolov, V. A., Denisova, I. P. Conformal invariant vacuum nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, **96** (3), 036008, 2017. [163](#)
- [179] Sorokin, D. P. Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications. *Fortsch. Phys.*, **70** (7-8), 2200092, 2022. [163](#)
- [180] Born, M., Infeld, L. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **144** (852), 425–451, 1934. [164](#)
- [181] Bandos, I., Lechner, K., Sorokin, D., Townsend, P. K. A non-linear duality-invariant conformal extension of Maxwell's equations. *Phys. Rev. D*, **102**, 121703, 2020. [164](#)

- [182] Bandos, I., Lechner, K., Sorokin, D., Townsend, P. K. ModMax meets Susy. *JHEP*, **10**, 031, 2021.
- [183] Kosyakov, B. P. Nonlinear electrodynamics with the maximum allowable symmetries. *Phys. Lett. B*, **810**, 135840, 2020. [164](#)
- [184] Liu, H.-S., Mai, Z.-F., Li, Y.-Z., Lü, H. Quasi-topological Electromagnetism: Dark Energy, Dyonic Black Holes, Stable Photon Spheres and Hidden Electromagnetic Duality. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **63**, 240411, 2020. [164](#)
- [185] Cisterna, A., Giribet, G., Oliva, J., Pallikaris, K. Quasitopological electromagnetism and black holes. *Phys. Rev. D*, **101** (12), 124041, 2020. [164](#)
- [186] Peierls, R. E. The Commutation laws of relativistic field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **214**, 143–157, 1952. [169](#), [170](#)
- [187] de Witt, B. Dynamical theory of groups and fields. *Relativity, groups and topology*, Publ. Gordon and Breach, 1963. [169](#)
- [188] DeWitt, B. S. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Physical Review*, **162** (5), 1195, 1967. [169](#), [170](#)
- [189] Adams, A., Arkani-Hamed, N., Dubovsky, S., Nicolis, A., Rattazzi, R. Causality, analyticity and an ir obstruction to uv completion. *Journal of High Energy Physics*, **2006** (10), 014, 2006. [170](#)
- [190] Groenewold, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. En: On the principles of elementary quantum mechanics, págs. 1–56. Springer, 1946. [172](#)
- [191] de Rham, G. Differentiable manifolds, volume 266 of grundlehren der mathematischen wissenschaften [fundamental principles of mathematical sciences], 1984. [182](#)
- [192] Federbush, P. G., Johnson, K. A. Uniqueness Property of the Twofold Vacuum Expectation Value. *Phys. Rev.*, **120**, 1926–1926, 1960. [184](#)
- [193] Buchholz, D., Fredenhagen, K. Dilations and interaction. *Journal of Mathematical Physics*, **18** (5), 1107–1111, 1977. [185](#)
- [194] Baumann, K. When is a field theory a generalized free field? *Communications in Mathematical Physics*, **43** (3), 221–223, 1975. [185](#), [253](#)
- [195] Jost, R. Properties of wightman functions. *Lectures on Field Theory: The many Body Problem*, Academic Press, New York, 1961. [185](#)

- [196] Schroer, B. Master's thesis. *University Hamburg, 1958.* [185](#)
- [197] Pohlmeyer, K. The jost-schroer theorem for zero-mass fields. *Communications in mathematical physics*, **12** (3), 204–211, 1969. [185](#)
- [198] Robinson, D. Support of field in momentum space. *Helvetica Physica Acta (Switzerland)*, **35**, 1962. [185](#)
- [199] Buchholz, D., Longo, R., Rehren, K.-H. Causal lie products of free fields and the emergence of quantum field theory. *arXiv preprint arXiv:2204.00225*, 2022. [185](#)
- [200] Truman, A. Spectrality, cluster decomposition and small distance properties in wightman field theory. *J. Math. Phys.*, **15**, 1680–1685, 1974. [185](#)
- [201] Axler, S., Bourdon, P., Wade, R. Harmonic function theory, tomo 137. Springer Science & Business Media, 2013. [185](#)
- [202] Gaberdiel, M. R. An introduction to conformal field theory. *Reports on Progress in Physics*, **63** (4), 607, 2000. [186](#)
- [203] Argyres, P. C., Plesser, M. R., Seiberg, N., Witten, E. New $N=2$ superconformal field theories in four-dimensions. *Nucl. Phys. B*, **461**, 71–84, 1996. [188](#)
- [204] Mack, G. All unitary ray representations of the conformal group $su(2, 2)$ with positive energy. *Communications in Mathematical Physics*, **55** (1), 1–28, 1977. [188](#)
- [205] Siegel, W. All free conformal representations in all dimensions. *International Journal of Modern Physics A*, **4** (08), 2015–2020, 1989. [248](#)
- [206] Minwalla, S. Restrictions imposed by superconformal invariance on quantum field theories. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, **2** (4), 783–851, 1998.
- [207] Costa, M. S., Hansen, T. Conformal correlators of mixed-symmetry tensors. *Journal of High Energy Physics*, **2015** (2), 1–44, 2015. [188](#)
- [208] Bostelmann, H., D'Antoni, C., Morsella, G. On dilation symmetries arising from scaling limits. *Communications in Mathematical Physics*, **294** (1), 21–60, 2010. [189](#), [192](#)
- [209] Buchholz, D., Verch, R. Scaling algebras and renormalization group in algebraic quantum field theory. *Reviews in Mathematical Physics*, **7** (08), 1195–1239, 1995. [191](#)

- [210] Truman, A. Spectrality, cluster decomposition and small distance properties in wightman field theory. *Journal of Mathematical Physics*, **15** (10), 1680–1685, 1974. [192](#)
- [211] Bostelmann, H., D’Antoni, C., Morsella, G. Scaling algebras and pointlike fields. *Communications in mathematical physics*, **285** (2), 763–798, 2009. [192](#)
- [212] Bostelmann, H. Operator product expansions as a consequence of phase space properties. *Journal of mathematical physics*, **46** (8), 082304, 2005. [192](#)
- [213] Sutherland, D. Current algebra and some non-strong mesonic decays. *Nuclear Physics B*, **2** (4), 433–440, 1967. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321367901800>. [201](#)
- [214] Veltman, M. I. theoretical aspects of high energy neutrino interactions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **301** (1465), 107–112, 1967. URL <http://www.jstor.org/stable/2415932>. [201](#)
- [215] Weinberg, S. The quantum theory of fields. vol. 2: Modern applications. *Cambridge University Press*, pág. 489 p, 1996. [201](#)
- [216] Hooft, G. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. In: Recent developments in gauge theories, págs. 135–157. Springer, 1980. [203](#), [218](#)
- [217] Witten, E. Global Aspects of Current Algebra. *Nucl. Phys. B*, **223**, 422–432, 1983. [212](#)
- [218] Tong, D. Gauge theory. *Lecture notes, DAMTP Cambridge*, **10**, 2018. [212](#), [238](#), [271](#), [274](#)
- [219] Boulware, D. G., Brown, L. S. Tree Graphs and Classical Fields. *Phys. Rev.*, **172**, 1628–1631, 1968. [214](#)
- [220] Kapustin, A. Wilson-’t Hooft operators in four-dimensional gauge theories and S-duality. *Phys. Rev. D*, **74**, 025005, 2006. [216](#), [278](#)
- [221] Fujikawa, K. Path integral for gauge theories with fermions. *Physical Review D*, **21** (10), 2848, 1980. [217](#), [269](#), [274](#)
- [222] Nambu, Y. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, **117**, 648–663, Feb 1960. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.648>. [219](#)

- [223] Goldstone, J. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, **19**, 154–164, 1961.
- [224] Goldstone, J., Salam, A., Weinberg, S. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, **127**, 965–970, Aug 1962. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.965>.
219
- [225] García Etxebarria, I. n., Iqbal, N. A Goldstone theorem for continuous non-invertible symmetries, 11 2022. [220](#), [224](#)
- [226] Witten, E. Algebras, Regions, and Observers, 3 2023. [220](#)
- [227] Karasik, A. On anomalies and gauging of U(1) non-invertible symmetries in 4d QED, 11 2022. [224](#)
- [228] Choi, Y., Cordova, C., Hsin, P.-S., Lam, H. T., Shao, S.-H. Noninvertible duality defects in 3+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, **105** (12), 125016, 2022. [224](#)
- [229] Kaidi, J., Ohmori, K., Zheng, Y. Kramers-Wannier-like Duality Defects in (3+1)D Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, **128** (11), 111601, 2022.
- [230] Choi, Y., Cordova, C., Hsin, P.-S., Lam, H. T., Shao, S.-H. Non-invertible Condensation, Duality, and Triality Defects in 3+1 Dimensions, 4 2022.
- [231] Bhardwaj, L., Bottini, L. E., Schafer-Nameki, S., Tiwari, A. Non-invertible higher-categorical symmetries. *SciPost Phys.*, **14** (1), 007, 2023.
- [232] Niro, P., Roumpedakis, K., Sela, O. Exploring non-invertible symmetries in free theories. *JHEP*, **03**, 005, 2023. [226](#), [237](#)
- [233] Heckman, J. J., Hubner, M., Torres, E., Yu, X., Zhang, H. Y. Top down approach to topological duality defects. *Phys. Rev. D*, **108** (4), 046015, 2023.
- [234] Cordova, C., Ohmori, K. Quantum Duality in Electromagnetism and the Fine-Structure Constant, 7 2023. [224](#), [226](#), [237](#)
- [235] Hollands, S. Variational approach to sandwiched renyi entropies (with application to qft). *arXiv preprint arXiv:2009.05024*, 2020. [235](#)
- [236] Magan, J. M. Proof of the universal density of charged states in QFT. *JHEP*, **12**, 100, 2021.
- [237] Gesteau, E. Large N von Neumann algebras and the renormalization of Newton's constant, 2 2023. [235](#)

- [238] El-Showk, S., Nakayama, Y., Rychkov, S. What Maxwell Theory in D $< >$ 4 teaches us about scale and conformal invariance. *Nucl. Phys. B*, **848**, 578–593, 2011. [247](#)
- [239] Zamolodchikov, A. B. Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2d field theory. *JETP lett.*, **43** (12), 730–732, 1986. [247](#)
- [240] Polchinski, J. Scale and conformal invariance in quantum field theory. *Nuclear Physics B*, **303** (2), 226–236, 1988. [247](#)
- [241] Dymarsky, A., Zhiboedov, A. Scale-invariant breaking of conformal symmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **48** (41), 41FT01, 2015. [248](#)
- [242] Dymarsky, A., Komargodski, Z., Schwimmer, A., Theisen, S. On Scale and Conformal Invariance in Four Dimensions. *JHEP*, **10**, 171, 2015. [248](#)
- [243] Maldacena, J., Zhiboedov, A. Constraining conformal field theories with a higher spin symmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46** (21), 214011, 2013. [250](#)
- [244] Greenberg, O. W. Generalized free fields and models of local field theory. *Annals of Physics*, **16** (2), 158–176, 1961. [253](#), [254](#), [255](#)
- [245] Licht, A. L. A generalized asymptotic condition. i. *Annals of Physics*, **34** (1), 161–186, 1965. [253](#)
- [246] Licht, A., Toll, J. Two-point function and generalized free fields. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, **21** (2), 346–351, 1961.
- [247] Greenberg, O. Heisenberg fields which vanish on domains of momentum space. *Journal of Mathematical Physics*, **3** (5), 859–866, 1962. [253](#)
- [248] Yngvason, J. A note on essential duality. *letters in mathematical physics*, **31** (2), 127–141, 1994. [253](#)
- [249] Coleman, S. Aspects of symmetry: selected Erice lectures. Cambridge University Press, 1988. [253](#)
- [250] Maldacena, J. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, **38** (4), 1113–1133, 1999. [253](#), [254](#)
- [251] Witten, E. Anti-de sitter space and holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, **2**, 253–291, 1998. [253](#), [254](#), [258](#)
- [252] Breitenlohner, P., Freedman, D. Z. Stability in Gauged Extended Supergravity. *Annals Phys.*, **144**, 249, 1982. [257](#)

- [253] Hubeny, V. E., Rangamani, M. Causal holographic information. *Journal of High Energy Physics*, **2012** (6), 1–35, 2012. [259](#)
- [254] Matthew, Hubeny, V. E., Lawrence, A., Rangamani, M. Causality \& holographic entanglement entropy. *JHEP*, **12**, 162, 2014. [259](#)
- [255] Ryu, S., Takayanagi, T. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 181602, 2006. [260](#)
- [256] Hubeny, V. E., Rangamani, M., Takayanagi, T. A Covariant holographic entanglement entropy proposal. *JHEP*, **07**, 062, 2007. [260](#)
- [257] Wall, A. C. Maximin Surfaces, and the Strong Subadditivity of the Covariant Holographic Entanglement Entropy. *Class. Quant. Grav.*, **31** (22), 225007, 2014. [260](#)
- [258] Harlow, D. TASI Lectures on the Emergence of Bulk Physics in AdS/CFT. *PoS*, **TASI2017**, 002, 2018. [261](#)
- [259] Jafferis, D. L., Lewkowycz, A., Maldacena, J., Suh, S. J. Relative entropy equals bulk relative entropy. *JHEP*, **06**, 004, 2016. [261](#)
- [260] Faulkner, T., Lewkowycz, A. Bulk locality from modular flow. *JHEP*, **07**, 151, 2017. [261, 262](#)
- [261] Benedetti, V., Casini, H., Martinez, P. J. Mutual information of generalized free fields. *Phys. Rev. D*, **107** (4), 046003, 2023. [262](#)
- [262] Leutheusser, S., Liu, H. Causal connectability between quantum systems and the black hole interior in holographic duality, 10 2021. [262](#)
- [263] Leutheusser, S., Liu, H. Emergent times in holographic duality, 12 2021.
- [264] Leutheusser, S., Liu, H. Subalgebra-subregion duality: emergence of space and time in holography, 12 2022. [262](#)
- [265] Witten, E. Gravity and the crossed product. *JHEP*, **10**, 008, 2022. [262](#)
- [266] Chandrasekaran, V., Penington, G., Witten, E. Large N algebras and generalized entropy, 9 2022. [262](#)
- [267] Casini, H., Testé, E., Torroba, G. Holographic rg flows, entanglement entropy and the sum rule. *Journal of High Energy Physics*, **2016** (3), 1–28, 2016. [262](#)
- [268] Jenkins, A. Topics in theoretical particle physics and cosmology beyond the standard model. Other thesis, 5 2006. [263](#)

-
- [269] Loebbert, F. The Weinberg-Witten theorem on massless particles: An Essay. *Annalen Phys.*, **17**, 803–829, 2008. [263](#)
 - [270] Witten, E. Dyons of Charge $e \theta/2\pi$. *Phys. Lett. B*, **86**, 283–287, 1979. [269](#), [271](#)
 - [271] Adler, S. L., Bardeen, W. A. Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation. *Phys. Rev.*, **182**, 1517–1536, 1969. [274](#)
 - [272] Peskin, M. E., Schroeder, D. V. An Introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. [274](#)
 - [273] Bhardwaj, L., Bottini, L. E., Fraser-Taliente, L., Gladden, L., Gould, D. S. W., Platschorre, A., *et al.* Lectures on Generalized Symmetries, 7 2023. [277](#)

Publicaciones

Publicaciones directamente asociadas a la tesis:

1. V. Benedetti, H. Casini y J. M. Magan, “Generalized symmetries of the graviton,” JHEP **05**, 045 (2022) [arXiv:2111.12089 [hep-th]].
2. V. Benedetti, H. Casini y J. M. Magan, “Generalized symmetries and Noether’s theorem in QFT,” JHEP **08**, 304 (2022) [arXiv:2205.03412 [hep-th]]
3. V. Benedetti, H. Casini y P. J. Martinez, “Mutual information of generalized free fields,” Phys. Rev. D **107**, no.4, 046003 (2023) [arXiv:2210.00013 [hep-th]].
4. V. Benedetti, H. Casini y J. M. Magan, “Charges in the UV completion of neutral electrodynamics,” JHEP **06** (2023), 095 [arXiv:2212.11291 [hep-th]].
5. V. Benedetti, P. Bueno y J. M. Magan, “Generalized Symmetries For Generalized Gravitons,” Phys. Rev. Lett. **131**, 111603 (2023) [arXiv:2305.13361 [hep-th]].
6. V. Benedetti, H. Casini y J. M. Magan, “ABJ anomaly as a U(1) symmetry and Noether’s theorem,” [arXiv:2309.03264 [hep-th]].

Otras publicaciones relacionadas durante el doctorado:

7. V. Benedetti, H. Casini, “Entanglement entropy of linearized gravitons in a sphere,” Phys. Rev. D **101**, no.4, 045004 (2020) [arXiv:1908.01800 [hep-th]].
8. V. Benedetti, L. Daguerre, “Entanglement entropy of a Rarita-Schwinger field in a sphere,” Phys. Rev. D **108**, no.8, 086015 (2023) [arXiv:2307.00057 [hep-th]].

Agradecimientos

Durante esta etapa de mi vida descubrí que es imposible alcanzar cualquier objetivo o superar cualquier obstáculo sin la gente que nos acompaña. Por eso me gustaría agradecerle a quienes considero que hicieron esto posible:

Principalmente a Horacio, mi director y amigo, por darme esta oportunidad, por todo lo que me enseña durante estos años y por tantas cosas más que no puedo poner en palabras. No puedo imaginarme un mejor director.

A Javi por tantas horas haciendo física juntos, por nunca rendirse conmigo, y por ser una fuente inagotable de consejos.

A Pablo por confiar repetidamente en mi.

A Lucas y Guido por todo lo que aprendimos juntos.

A Pedro por ser mi psicólogo personal, y por soportarme muchas horas todos los días.

A Nair que me acompaña en esta aventura desde el comienzo.

A Mauro y Sofi, sin quienes posiblemente no hubiese superado emocionalmente los primeros años de este doctorado.

A Mica y Ale que desde que los conozco se han vuelto parte de mi familia.

A mis amigos de siempre Apu, Chaco, Churro, Steve y Tomi por enseñarme que la amistad de verdad sobrevive cualquier distancia.

A mis abuelos, tíos y primos por haber colaborado en este proyecto a la distancia siempre que pudieron.

A mi papá, por acompañarme incondicionalmente e impulsarme siempre cumplir mis sueños, por ser mi compañero de vida y por los desafíos que hemos superado juntos y los que nos quedan por delante.

A mi mamá, por ser mi apoyo para nunca rendirme, por haberme ayudado siempre en todas mis decisiones, por haberme querido hasta el infinito y más allá, y principalmente por haber sido mi mamá.

