

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique Théorique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Thomas Cailleteau

Thèse dirigée par **Aurélien Barrau**

Préparée au sein du

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie

et de l'école doctorale de Physique

Etude des perturbations cosmologiques et dérivation des observables en Gravité Quantique à Boucles

Thèse soutenue publiquement le **6 septembre 2012**,
devant le jury composé de :

Mr, Gilles Henri

IPAG, Président du jury

Mr, Eric Huguet

APC, Rapporteur

Mr, David Polarski

Lab. Charles Coulomb Montpellier, Rapporteur

Mr, Karim Noui

LMPT, Examineur

Mr, Jean-Philippe Uzan

IAP, Examineur

Mr, Aurelien Barrau

LPSC, Directeur de thèse



Table des matières

Remerciements	iii
Liste des publications	vii
Conventions et constantes	ix
Introduction	xi
 I Vers une nouvelle théorie de la gravitation	 1
1 La Mécanique Classique	3
1.1 La mécanique newtonienne	4
1.2 La formulation lagrangienne	5
1.3 La transformation de Legendre	7
1.4 La formulation hamiltonienne	9
1.5 Les tenseurs	9
1.6 Dérivée de Lie et quantités invariantes	10
1.7 Les formes différentielles	12
1.8 La structure symplectique	14
1.9 Les contraintes en mécanique	17
1.10 L'intégrale invariante de Poincaré-Cartan et le principe de moindre action	19
1.11 Changement de variables : équations de Hamilton-Jacobi	22
1.12 Les équations de Maxwell en théorie des champs	23
1.13 Observations sur la mécanique classique	26
 2 Mécanique Quantique et Relativité	 27
2.1 La Relativité Restreinte	27
2.1.1 Existence naturelle d'une vitesse limite	27
2.1.2 Transformations de Lorentz	28
2.1.3 Métrique de Minkowski	28
2.1.4 Quadri-vecteurs impulsion et force	28
2.1.5 Groupe de Poincaré	29
2.2 La Mécanique Quantique	31
2.2.1 Procédure de première quantification	31
2.2.2 Seconde quantification : Théorie quantique des Champs	34
2.2.3 Théorie quantique des Champs en espace courbe	35
2.2.4 Observations sur la Mécanique Quantique	36
2.3 La Relativité Générale	37
2.3.1 Les principes et leur conséquences	37
2.3.2 La dérivée covariante, la connexion et la courbure	38
2.3.3 Les équations d'Einstein	40
2.3.4 Observations sur la relativité générale	41
 3 La Gravité Quantique	 43
3.1 Les théories de Yang-Mills et les holonomies	44
3.2 Le formalisme ADM	47
3.3 Définition des variables d'Ashtekar	49
3.4 Couplage à la matière	52
3.5 La quantification	53
3.6 Observations sur la Gravité Quantique à Boucles	58

II	La Cosmologie Quantique : vers une explication de notre univers.	59
4	Le modèle standard de la Cosmologie	61
4.1	Brève introduction historique du modèle standard Λ -CDM	61
4.2	Description d'un univers homogène et isotrope	62
4.2.1	La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	62
4.2.2	Dynamique de l'univers : l'équation de Friedmann	63
4.2.3	Évolution du facteur d'échelle $a(t)$	63
4.2.4	L'horizon de l'univers	64
4.2.5	Les problèmes observationnelles du modèle de Big Bang chaud	64
4.2.6	Le modèle standard de l'inflation	65
4.3	Résumé : histoire de notre univers dans le modèle $\Lambda - CDM$	68
5	La Cosmologie Quantique à Boucles	69
5.1	Introduction	69
5.2	La cosmologie usuelle sous le formalisme de la Gravité Quantique à Boucles	70
5.3	La quantification pour la Cosmologie Quantique à Boucles	72
5.3.1	Au niveau cinématique	72
5.3.2	Au niveau dynamique : corrections d'holonomie et d'inverse-volume	73
5.4	La Cosmologie Quantique à Boucles de manière effective	74
5.4.1	Application des corrections d'inverse volume	75
5.4.2	Application des corrections d'holonomie	76
5.5	Les effets possibles observables	79
6	Les perturbations cosmologiques	81
6.1	Introduction	81
6.2	Invariance de jauge	82
6.3	Fluctuations quantiques d'un champ scalaire durant l'inflation	82
6.4	Les perturbations de la métrique	86
6.5	Les perturbations scalaires	86
6.6	Les perturbations vectorielles	89
6.7	Les perturbations tensorielles	90
6.8	Étude des différents spectres	91
7	Perturbations générales en Cosmologie Quantique à Boucles	95
7.1	Perturbations des variables canoniques	96
7.2	Transformation de jauge dans le formalisme canonique	102
7.3	Commentaires	104
III	Corrections d'holonomie et perturbations cosmologiques	105
8	Perturbations tensorielles et doubles corrections	107
9	Corrections d'holonomie et spectre tenseur	117
10	Observation du rebond	131
11	Perturbations vectorielles et Anomalies	145
12	Perturbations scalaires et Anomalies	161
13	Invariance de jauge et équation de Hamilton-Jacobi	181
IV	Conclusion	199
V	Appendice	219

Remerciements

J'avais décidé de faire quelque chose de sérieux, mais il s'avère que ce n'est plus vraiment le cas, donc prenez le avec humour.

Thomas Cailleteau

Je commencerai ainsi par remercier ces profs qui, tout au long de mes années d'études, m'ont permis d'être docteur : tout d'abord Melle Moreau, Mr Legall et Asmaa Abada en qui j'ai une très grande gratitude, et ensuite (si jamais vous, lecteur ou lectrice, lisez ces remerciements et vous vous sentez concerné(e) dans ces 3 petits points, alors sans hésitations c'est que vous l'êtes et je ne vous ai pas oublié!).

Je remercie Serge Kox, directeur du LPSC, de m'avoir accueilli au laboratoire. Grand homme que cet homme là, permettant de maintenir le BIDUL et toute la convivialité entre thésards au sein du labo.

Je remercie Laurent Derome, directeur du groupe DARC, d'avoir accepté au sein de son groupe un thésard, électron libre un peu beaucoup loin du rayonnement cosmique, ainsi que d'avoir accepté d'en être son tuteur. Je remercie d'ailleurs tous les membres du groupe, qui s'est renouvelé pendant ma thèse : merci donc à Michel, David, Jean-Steph, Fernando et William, mais aussi Myriam, Céline et Cécile pour la partie féminine ... même si elles ne font pas partie du groupe.

Je m'adresserai ensuite aux membres de mon jury qui ont accepté de venir, bien que le sujet divergeait du leur de par de nombreux (moult parfois) côtés. Un très grand merci ainsi à Gilles Henri pour avoir accepté de présider, et pour avoir quand même été présent malgré l'incident ; à Eric Huguet et David Polarski pour avoir endossé le rôle de rapporteurs, et à Karim Noui et Jean-Philippe Uzan pour être venus en tant qu'examinateurs. Vous avez apparemment aimé lire mon manuscrit, ce qui fait énormément plaisir : merci à vous tous pour votre intérêt et vos questions, en espérant pouvoir plus interagir avec vous par la suite.

Et maintenant (*big drum roll*), des remerciements plus ciblés sur la partie 'gravité quantique' : Je tiens à remercier des plus chaleureusement celui qui a été, pour le lucky guy que je suis, THE directeur de thèse et ami : Aurelien, j'ai passé trois merveilleuses (je devrais utiliser d'autres adjectifs mielleux, mais bon, je ne tiens pas à vous faire pleurer devant tant de bons sentiments style soap-opera, vous risqueriez de mouiller les pages et par conséquent d'abîmer cet ouvrage de légende que vous tenez entre les mains... ou pas) années où j'ai beaucoup appris à tes côtés, grâce à tes connaissances et ta curiosité, me laissant libre de travailler comme je le souhaitais, tout en veillant à ce que tout aille bien. Merci de m'avoir poussé à voyager pour dispenser la bonne parole de la LQC, mais aussi pour apprendre plus (je ne dirais pas que tu m'as déporté en Pologne, cela ne serait pas des plus correctes, mais presque et ce fût des plus profitables). Tu m'as offert, littéralement et pas, un temps incroyable, de haute valeur, de grande estime. Bref, je n'arriverai pas à dire en peu de mots ce que je devrais dire en beaucoup, mais merci (ah si, tient, ce fut facile pourtant).

Merci ensuite à Julien, le 'co-directeur' et aussi ami, pour avoir été présent et avoir beaucoup interagi (oh Pu%\$#tain, je viens de penser que j'ai oublié de te remercier lors de ma soutenance!) : par tes réflexions et ton aide, merci de m'avoir fait découvrir, avec Aurelien, les richesses du CMB et de la gravité quantique. Nous sommes bien partis, nous trois, pour faire un bon bout de chemin ensemble. Ça promet !

Merci à Jakub, mon aîné en LQC, pour m'avoir accueilli, hébergé à Krakow, et pour nos interactions qui ont été fructueuses en LQC. *Nostrovia* !

Je remercie ma PhDMate Alexia, pour ces moments passés ensemble, pour m'avoir aidé au début de ma thèse et pour son amitié (sincèrement désolé pour le regard bovin).

Merci enfin à Francesca, pour ces moments devant un café ou thé (pas toujours le même, of course) à discuter de gravitation quantique et pour s'être penchée sur mon travail alors que nous n'avons pas eu le temps de regarder plus la spin foam cosmology. Je n'oublie pas et j'espère que l'on pourra continuer plus tard.

Merci d'autre part à Big BenJ, grand par la taille et par ses profondes connaissances en physique, pour m'avoir éclairé sur de nombreux points auxquels je n'avais pas prêté plus attention, et qui m'a permis de m'interroger lors de grandes discussions sur les fondamentaux en physique. De même, merci à Mahfoud pour sa

philosophie de vie et sa bonne volonté. J'en tire aussi de profonds enseignements que je vais tenter de mettre en application. Merci à Emmanuelle, Françoise et toutes les personnes de l'administration, toujours là quand il y a besoin d'aide.

Je tiens à remercier toute la clique des *prépas déjantés* et les personnes liées pour les bons, que dis-je, incroyables moments de folie passés en votre compagnie (et il y en aura d'autres) : Adrien, Alexandre, Anaïs, Christophe et Christophe, Damien, Gloglo, Marine, Momo, Sophie, Spontex et Tanguy ; ainsi que My Venulk Caroline, Sylvain, Damien, Marthe et Bruno, pour ces années de Magistère pendant lesquelles on a bien rit, notamment chez Mickey ; puis Benjamin, Nicolas, Pierre et Virgile pour les discussions physico-mathématiques et autres conneries lyonnaises.

Qu'aurait-été ma vie grenobloise sans mes colocs et amis thésards ? Je tiens ainsi à remercier grandement Manu et ses soirées jeux, Pierrot (j'ai jamais aussi bien mangé au petit-déj) et enfin Tom et ses découvertes littéraires, qui, et j'en suis sûr, verra d'autres sens à mes mots. De super moments passés dans la coloc, et une superbe affiche de thèse en prime, y'a de quoi les embrasser.

Merci aussi à Julien et Élise, et au 33DC, Justiiiiinnee et Véro de Bouin de Tréal (mais de la zone tampon, faut pas déconner), the girls you never forget, et Simon, moins fille quand même, Mylène et Morgane, Gab et Paulo.

Merci à Jubillourd, Fafat, Nico et Florence, Grand Nico et Isa pour les moments passés ensembles durant ces 3 années, mais aussi aux autres thésards du labo et membres du BIDUL : Mathieu, Guillaume et Guillaume, Lilian (tu rames et moi j'ai pourtant chaud le matin), Mariya, Henri-Emmanuel, Tomas, Fouad, Quentin, Sandra, sans oublier les anciens stagiaires, F.X., Arnaud et Linda.

Plus sérieusement pour terminer, avec peu de mots car personnel, je tenais à exprimer la gratitude infinie que j'ai pour mes parents, mon frère, mes grand-parents et pour le reste de ma famille (je dois quand même citer Céline, avec Manu, pour son soutien sans failles et qui m'a rendu la vie à Grenoble plus facile).

Bref, parce que j'en ai trop dit (bien que vous souhaiteriez continuer à vous rincer l'oeil sur les remerciements alors que vous devriez sincèrement lire jusqu'à la toute fin la suite de ce manuscrit), et parce que j'en ai ma claque de toutes ces bilveusés puisque vous savez déjà que je ne vous remercierai jamais assez, à tous ceux que j'ai cité et à ceux que j'ai oublié, je vous dis

à la revoyure !

Et si jamais tu te sens vraiment oublié(e), sache que tu ne l'es pas, tu es présent(e) dans les 3 petits points

→ ...

D'am Mamm-gozh ha d'am kerentiad,

Liste des publications

Les travaux présentés dans cette thèse ont donné lieu à plusieurs articles de recherche dont voici la liste :

Articles publiés durant la thèse

- T. Cailleteau, A. Barrau, F. Vidotto & J. Grain, Phys. Rev. D **86** 087301 (2012)
Consistency of holonomy-corrected scalar, vector and tensor perturbations in loop quantum cosmology
- T. Cailleteau & A. Barrau, Phys. Rev. D **85** 123534 (2012)
Gauge invariance in Loop Quantum Cosmology : Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki equations for scalar perturbations
- T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau & J. Grain, Class. Quantum Grav. **29** 095010 (2012)
Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology
- J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau & J. Grain, Class. Quantum Grav. **29** 085009 (2012)
Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology
- A. Barrau, X. Cao, J. Diaz-Polo, J. Grain & T. Cailleteau, Phys. Rev. Lett. **107** 251301 (2011)
Probing Loop Quantum Gravity with Evaporating Black Holes
- J. Grain, A. Barrau, T. Cailleteau & J. Mielczarek, Phys. Rev. D **82** 123520 (2010)
Observing the Big Bounce with Tensor Modes in the Cosmic Microwave Background : Phenomenology and Fundamental LQC Parameters
- J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain & A. Barrau, Phys. Rev. D **81** 104049 (2010)
Inflation in loop quantum cosmology : dynamics and spectrum of gravitational waves
- J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau & A. Gorecki, Phys. Rev. D **81** 024040 (2010)
Fully LQC-corrected propagation of gravitational waves during slow-roll inflation

Articles précédents

- T. Cailleteau, P. Singh & K. Vandersloot, Phys. Rev. D **80** 124013 (2009)
Non-singular Ekpyrotic/Cyclic model in Loop Quantum Cosmology
- T. Cailleteau, A. Cardoso, K. Vandersloot & D. Wands, Phys. Rev. Lett. **101** 251302 (2008)
Singularities in Loop Quantum Cosmology

Conventions et constantes

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière	$c = 2.99 \times 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Planck	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Newton	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Constantes et unités de Planck

Energie	$1 \text{ GeV} = 1.6 \times 10^{-10} \text{ J}$
Température	$1 \text{ GeV} = 1.16 \times 10^{13} \text{ K}$
Masse	$1 \text{ GeV} = 1.78 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Longueur	$1 \text{ GeV}^{-1} = 1.97 \times 10^{-16} \text{ m}$
Temps	$1 \text{ GeV}^{-1} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ s}$
Masse de Planck	$M_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2.17 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Longueur de Planck	$\ell_{Pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.61 \times 10^{-35} \text{ m}$
Temps de Planck	$t_{Pl} = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ s}$

Tenseurs et dérivations

Tenseur de Lorentz	$\eta_{\mu\nu}$
Tenseur métrique	$g_{\mu\nu}$
Tenseur de Riemann	$R_{\mu\nu\rho\sigma}$
Dérivation directe	$\partial_\nu \Psi^\mu = \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial x^\nu}$
Dérivation covariante	$\Psi^\mu_{;\nu} = \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \Psi^\lambda$

Nous utiliserons la convention d'Einstein sur la répétition des indices telle que

$$x^i \cdot A_i \equiv \sum_i x^i \cdot A_i.$$

Les indices latin iront généralement de 1 à n , voire $2n$, où $n \in \mathbb{N}$, et les indices grecques de 0 à 3.

Introduction

Si j'ai vu plus loin que les autres, c'est parce que j'ai été porté sur des épaules de géants.

Newton.

Newton, référant à Galilée, montrait déjà qu'on ne construit jamais ex nihilo. Toujours à partir d'une élaboration précédente. Dans le domaine des sciences, comme dans celui des arts, en philosophie comme en ingénierie, les grandes avancées ont presque toujours été dictées par la capacité à intégrer dans un même corpus des éléments disparates des paradigmes précédents. C'est une situation à laquelle nous faisons face en physique depuis près d'un siècle. La Mécanique Quantique et la Relativité Générale sont les deux piliers de la science de la Nature, mais elles ne sont pas conciliées. Le cadre, le fond, le fixe de l'une est, justement, le champ dynamique de l'autre. L'enjeu d'une gravitation quantique est en un sens celui de l'unification. Mais, plus profondément encore, c'est celui de la cohérence. Dans certaines circonstances, les petits trous noirs ou l'univers primordial, la physique convoquée doit être à la fois quantique et relativiste. Dans ces situations, le recours à une théorie quantique de l'espace-temps n'est pas un luxe lié au fantasme unificateur, mais une nécessité conceptuelle. Il existe de nombreuses approches pour tenter de résoudre ce problème extraordinairement difficile. La théorie des cordes est certainement la plus développée. La géométrie non-commutative est sans doute la plus élégante. Nous nous intéresserons pourtant ici à la Gravitation Quantique à Boucles. Elle présente deux avantages considérables : elle est modeste, simple si l'on veut, dans la mesure où elle ne se fonde que sur les grands principes bien compris de la théorie d'Einstein d'une part et de la théorie de Shrödinger, Heisenberg et Pauli d'autre part, et elle conduit à des prédictions claires. D'un point de vue heuristique ce second point est fondamental. Pour progresser sur cette voie si délicate, il est indispensable de confronter le modèle à des observations, ce qui fait aujourd'hui globalement défaut à ce champ de recherche. C'est pourquoi cette thèse a été dédiée à l'étude de possibles conséquences observationnelles de la gravitation quantique à boucles. Étant donné que les petits trous noirs n'ont encore jamais été observés, nous nous sommes focalisés sur l'univers primordial. Dans ce cadre, la théorie fait émerger une image radicalement novatrice : le Big Bang disparaît et se trouve remplacé par un grand rebond. Ce sont les conséquences de ce nouveau scénario que nous avons cherché à comprendre. Plus de cent chercheurs travaillent aujourd'hui à plein temps sur la gravitation quantique à boucles qui vient de fêter ses vingt-cinq ans. Cet axe d'étude est en pleine effervescence et ce travail s'inscrit dans le renouveau apporté par les boucles au problème de la quantification du champ gravitationnel. Nous entendons ainsi apporter quelques éléments de réponse aux conséquences cosmologiques de la proposition.

L'intérêt de ce sujet vient ainsi à mon sens de la possibilité de corroborer avec les observations une théorie quantique de la gravitation utilisant la formulation des théories de Yang-Mills dont la quantification a rencontré un évident succès dans l'explication des processus de la physique des particules. La procédure de quantification nécessite cependant des moyens différents mais elle reste dans l'esprit de la quantification à la Dirac, qui a d'ailleurs développé la théorie des contraintes, largement utilisée dans ce formalisme. Ces différences dans la quantification vont alors amener des effets nouveaux permettant de résoudre les problèmes inhérents à la relativité générale comme la singularité du Big Bang et la définition des conditions initiales. La présence d'un rebond dans l'évolution de l'univers, par l'utilisation des holonomies et par la quantification de la théorie, permettant en plus d'amener naturellement une inflation, rend ainsi très intéressant un tel modèle. C'est dans ce contexte attrayant que nous avons ainsi décidé de regarder l'influence des corrections d'holonomie sur la cosmologie, à travers l'étude des perturbations du fond diffus cosmologique représentant une véritable empreinte du passé.

La première partie de ce manuscrit va alors consister à introduire les fondements de la physique qui ont permis l'élaboration de la théorie de la gravité quantique à boucles. Dans les deux premiers chapitres, nous avons ainsi présenté les principes, notions et outils de la mécanique classique, quantique et des théories de relativité qui ont permis dans le troisième chapitre de décrire la construction de la gravité quantique à boucles. Cette théorie, par la définition de nouvelles variables, les variables d'Ashtekar, reliées à la métrique et à la courbure de l'espace-temps, va alors pouvoir se ramener à une théorie similaire à celles de Yang-Mills, et l'action de la relativité générale sous cette formulation mènera à un hamiltonien. Il sera nécessaire alors de développer une procédure permettant la quantification d'une théorie invariante par changement de coordonnées, et on verra ainsi l'utilisation d'un nouvel objet, l'holonomie qui permettra d'évaluer la connexion sur une partie de l'espace. De façon non triviale, cette théorie mènera à un espace-temps discrétisé.

Cette thèse se portant sur l'étude des perturbations dans un modèle d'univers homogène et isotrope, nous avons consacré la seconde partie à l'introduction des concepts utiles pour comprendre la théorie des perturbations dans cet univers. Nous avons ainsi commencé dans le premier chapitre par évoquer les notions connues de cosmologie, avant de s'intéresser dans le second chapitre aux modifications apportées par l'application de la gravité quantique à boucles à l'univers. En utilisant la formulation due aux variables d'Ashtekar, on verra dans ce second chapitre qu'il est de même possible de décrire l'univers classique, mais aussi qu'appliquer les méthodes de quantification développées par la gravité quantique à boucles va permettre l'obtention d'une nouvelle théorie quantique de la cosmologie, la Cosmologie Quantique à Boucles. Cette théorie va alors être fondamentalement différente de celle de Wheeler et de DeWitt, et aura alors des conséquences physiques nouvelles : la singularité du Big Bang n'existera plus et il sera possible de propager la fonction d'onde de l'univers à travers la singularité initiale. Cependant, nous ne nous sommes pas intéressés aux expressions purement quantiques des équations du mouvement : nous avons dans la suite utiliser des fonctions que l'on appelle corrections, et qui encodent les effets quantiques de la théorie de manière effective. Il existe deux corrections principales, la correction d'holonomie qui apparaît par le fait d'utiliser les holonomies de la connexion d'Ashtekar, ainsi que la correction d'inverse-volume donnée lors de la quantification d'un terme inversement lié à un opérateur contenant 0 dans son spectre de valeurs propres. Introduire ces corrections dans l'hamiltonien classique de la relativité générale va alors définir une théorie effective de la Cosmologie Quantique à Boucles, dont les équations d'évolution vont permettre une description des effets globaux de ces corrections : le Big Bang sera bien remplacé par un rebond, qui, sous certaines conditions, va amener à une phase d'inflation naturelle. Nous avons cherché à appliquer cette théorie aux perturbations cosmologiques, et les chapitres suivants donneront le formalisme de la théorie des perturbations dans le cadre de la cosmologie usuelle, ainsi que dans celui de l'approche effective de la Cosmologie Quantique à Boucles : en prenant le cas classique, les équations du mouvement pour les différents types de perturbations seront obtenues et leurs spectres dérivés dans les deux approches.

Finalement, durant ma thèse, nous nous sommes intéressés à l'influence que pourraient avoir les corrections de la Cosmologie Quantique à Boucles sur la forme des spectres de puissance des différentes perturbations : cela permettra alors de comprendre quelles seraient les conséquences physiques de ce genre de modèle et voir s'il n'est pas possible de les tester. Dans la dernière partie, nous avons ainsi traité les différents travaux effectués pendant la thèse, en commençant dans le premier chapitre par évoquer celui utilisant les deux corrections disponibles : dans un modèle particulier faisant intervenir de façon ad hoc une phase inflationnaire, des études ont montré les différents effets sur le spectre des corrections prises séparément, menant à de grandes différences avec le cas classique. Afin de connaître leurs effets combinés et voir s'ils ne peuvent pas se compenser, nous avons regardé qu'elle serait la forme du spectre des perturbations tensorielles dans le cas d'une inflation standard et sous ces corrections. Cette étude a montré que le spectre, dans la partie infrarouge, présentait une large déviation par rapport au spectre classique, correspondant à l'influence des corrections d'inverse-volume, alors que dans sa partie ultraviolette, à cause des corrections d'holonomie, une légère pente était présente qui pouvait être reliée à un des paramètres fondamentaux de la théorie. Cependant, dans ce travail, les corrections n'avaient pas été prises en compte pour l'évolution du fond, rendant ce modèle très restrictif mais néanmoins intéressant pour voir l'action des deux corrections combinées sur les équations du mouvement. Nous avons alors décidé par la suite de ne considérer que l'influence des corrections d'holonomie en tenant compte de leur action sur le fond, les corrections d'inverse-volume ayant déjà été étudiées. Pour le scénario d'un rebond suivi d'une phase d'inflation, nous avons dans le second chapitre dérivé de manières analytique et numérique les spectres de puissance pour le cas des perturbations tensorielles et obtenu une forme caractéristique : à la limite infrarouge, le spectre était supprimé en k^2 , et aux échelles intermédiaires présentait des oscillations avant de redonner dans le régime ultraviolet le spectre classique. Ce spectre étant spécifique d'un univers à rebond avec inflation, nous l'avons approximé par une fonction rendant compte de ses caractéristiques, et étudié ensuite si une expérience future permettrait de l'observer : une analyse de Fisher a été réalisée, montrant qu'il existe un large espace de paramètres permettant au modèle à rebond d'être observé. Néanmoins, à l'heure actuelle, seul le spectre en température est bien mesuré, et nous avons alors décidé de regarder l'influence des corrections d'holonomie sur un tel spectre, en cherchant à dériver celui des perturbations scalaires. Cependant, les contraintes introduites ici amènent dans le cas des perturbations scalaires, et vectorielles, des termes supplémentaires que l'on sait

non-physiques, rendant alors la dynamique mal définie, et il a fallu au préalable régulariser la théorie par l'introduction de contre-termes : en commençant par le cas des vecteurs et ensuite celui des scalaires, nous avons enlevé ces termes en modifiant l'hamiltonien de ces perturbations, et regardé alors qu'elles étaient les modifications apportées sur les équations du mouvement. Ces équations étant plus compliquées et suscitant encore quelques interrogations, nous n'avons pas cherché à les résoudre ici. Nous avons plutôt terminé notre travail par l'application d'une méthode utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi à la Cosmologie Quantique à Boucles, qui s'est avérée par la suite prometteuse dans l'obtention de variables physiques observables ainsi que de leurs équations du mouvement puisque la démarche utilisée simplifie alors grandement les calculs. Une étude sur les possibles tests de la théorie par l'évaporation des trous noirs en gravité quantique à boucles a également été menée mais ne sera pas explicitée dans ce manuscrit.

En résumé, nous avons donc étudié différentes approches des effets cosmologiques de la gravité quantique à boucles et construit une algèbre close, non perturbative et s'appliquant à tous les modes cosmologiques. Ces travaux ouvrent de nouvelles pistes mais beaucoup reste encore à faire avant une éventuelle détection fiable de ces effets.

Première partie

Vers une nouvelle théorie de la
gravitation

Chapitre 1

La Mécanique Classique, fondation de la Physique moderne

Les mathématiques sont une grammaire de la nature ; c'est les godasses de la technique. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.

Jean-Marie Souriau

Introduction

Par définition, la mécanique est un domaine des sciences qui permet de rendre compte du mouvement de tout système matériel sous l'action d'une force. Elle permet ainsi une description de nombreux phénomènes physiques comme la dynamique d'une particule, de milieux rigides ou bien continus, ainsi que d'autres champs comme la gravitation et l'électromagnétisme comme on pourra le voir.

Parallèlement, les mathématiques se sont développées et enrichies de manière faramineuse, en interaction constante avec la physique, et ces nombreux développements appliqués aux problèmes de physique ont énormément aidé à notre compréhension des phénomènes. La mécanique possède deux points de vue principaux, la **mécanique lagrangienne** et la **mécanique hamiltonienne**. La mécanique lagrangienne est dans un sens plus fondamentale puisqu'elle est basée sur des principes variationnels, plus simples à manipuler et ayant permis le développement de théories nouvelles qui incorporent les principes de relativité. D'un autre côté, la mécanique hamiltonienne peut aussi être considérée comme plus fondamentale dans le sens où le formalisme est essentiellement fondé sur la notion d'énergie, et heureusement, ces deux approches sont souvent équivalentes. Cependant, alors que la mécanique quantique s'est développée à partir du formalisme hamiltonien, la relativité générale a quant à elle utilisé le formalisme lagrangien, et jusqu'à l'avènement d'une théorie quantique complète de la gravitation, la réunion de ces deux théories reste actuellement un des problèmes majeurs de la physique moderne. Durant toute sa construction, la mécanique a souffert bien des changements, parfois incroyables, pour finalement bouleverser notre compréhension du monde. Or l'enseignement que l'on en donne, certes excellent mais trop compartimenté à mon avis, n'amène pas forcément ce recul permettant d'apprécier pleinement la construction même des théories de relativité, ou les conséquences presque incroyables de simples postulats. C'est ainsi qu'il m'a semblé bon dans ces premiers chapitres de commencer par rappeler les (r)évolutions de la mécanique au cours du temps (de la mécanique classique jusqu'à la relativité générale en passant par la mécanique quantique), en montrant les postulats et les points forts de cette description, ainsi que quelques ouvertures.

La raison d'être de ce premier chapitre est d'amener à tout lecteur un semblant de point de vue global sur la mécanique, en commençant par évoquer un formalisme qui me paraît novateur dans la compréhension plus profonde de la mécanique, la **mécanique symplectique**. Au cours des prochains chapitres, des concepts mathématiques et non forcément connus de prime abord, comme la *structure symplectique*, les *crochets de Poisson*, *l'équation d'Hamilton-Jacobi*, ... vont apparaître, ainsi que d'autres notions mathématiques, et ce chapitre est ainsi une tentative d'introduction qui se veut pédagogique, permettant finalement de poser les bases nécessaires notamment à la construction d'une théorie quantique de la gravitation. On va ainsi voir que les notions, comme l'**action**, sont en fait inhérentes à l'espace des variables que l'on considère et qu'elles vont apparaître simplement. Ce domaine étant vaste, de nombreux détails sont passés sous silence, mais j'encourage tout lecteur souhaitant aller plus loin à lire les ouvrages [2] à [15] dont je me suis très fortement inspiré pour écrire cette description.

1.1 La mécanique newtonienne

Comme toute théorie physique et mathématique, la mécanique se fonde sur des postulats et des principes que l'expérience tente de vérifier.

Principe d'équivalence de Galilée

Nombreux sont ceux qui ont contribué au développement historique de la mécanique. Par ses travaux novateurs, il est communément admis qu'un des pères fondateurs de la mécanique est **Galileo Galilei**. Il fût un des premiers à rendre compte de la dynamique d'un objet via son observation sur la **chute libre** des corps :

observation sur la chute libre : *Dans un champ de pesanteur, sans frottements, deux corps de compositions différentes et lâchés d'une même hauteur arriveront au sol au même instant.*

Lois du mouvement de Newton

En se basant entre autre chose sur cette réflexion, **Isaac Newton** en 1687 a décrit mathématiquement le comportement d'un corps dans un champ de pesanteur via ses 3 lois du mouvement, correspondant à 3 principes

1. **le principe d'inertie :** Le mouvement d'un corps isolé est rectiligne et uniforme. Son référentiel définit un référentiel inertiel (galiléen).
2. **le principe d'action et de réaction.**
3. **le principe fondamental de la dynamique :** Soit un corps de masse m (constante) : l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen de coordonnées (t, x^a) est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit :

$$\sum_i \vec{F}_i = m_i \vec{a} = m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (1.1)$$

Dans l'expression $\vec{F} = m_i \vec{a}$, la masse qui entre en jeu est la **masse inertielle** qui n'a aucun lien avec la gravitation : elle rend simplement compte de l'effort qu'il faut faire pour accélérer ou décélérer un objet. Par contre, la masse s'exprimant dans le poids $\vec{P} = m_g \vec{g}$ est bien celle qui rend compte de l'attraction gravitationnelle.

Principe d'équivalence de Newton

Dans ce formalisme, on peut ainsi définir un nouveau principe d'équivalence respectant l'observation sur la chute des corps par Galilée :

Principe d'équivalence de Newton : *Aucune expérience locale ne peut distinguer un système sans rotation, en chute libre, d'un système en mouvement non-accéléré dans un espace sans gravitation.*

Lorsqu'un objet est en rotation, il subira des forces d'inerties et son référentiel ne sera alors plus inertiel. Un objet en chute libre ne sait pas s'il est soumis à la gravité ou non. Ce principe implique que $m_i = m_g$, mais l'implication inverse n'est pas vraie, par exemple si on ne considère cette relation vraie que pour des couplages à l'ordre zéro en masse.

Principe de relativité

Cependant, il existe un principe sous-jacent encore plus important. En effet, les lois de Newton ne sont pas valables uniquement à Cambridge à l'époque de Newton mais sont aussi valables n'importe quand et n'importe où. Ce principe s'appelle le **principe de relativité** :

Principe de relativité : *Toute loi physique s'exprime de manière identique dans tout référentiel inertiel, et donc doit être indépendante du système de coordonnées utilisé.*

Par changement de référentiel, les équations du mouvements doivent conserver la même forme. Pour passer d'un référentiel inertiel R de coordonnées (t, x) à un autre référentiel inertiel R' de coordonnées (t', x') , en translation rectiligne uniforme à la vitesse V l'un par rapport à l'autre, on pourrait intuitivement penser qu'il suffit de faire un changement de coordonnées donné par les **transformations de Galilée**

$$t' = t, \quad x' = x + Vt, \quad (1.2)$$

laissant les équations de Newton invariantes sous cette transformation. Les transformations de Galilée désignent ainsi une tentative de groupe de transformations qui permet de lier les systèmes de coordonnées de deux référentiels galiléens, c'est-à-dire en mouvement relatif uniforme.

Repère absolu

Cette relation suppose implicitement une croyance en un **espace absolu** : tout corps se meut dans un espace fixe où le temps est partout identique. Les longueurs mesurées sont ainsi indépendantes du mouvement, et le temps s'écoule partout de la même manière pour tout observateur. La mesure des distances et des intervalles temporels est donc indépendante du mouvement de l'observateur.

Limites du formalisme newtonien : les équations de Maxwell

Ainsi, avec ces principes, la mécanique newtonienne est capable de décrire beaucoup de situations physiques, comme le tir d'un projectile, ou bien de confirmer des lois empiriques, comme celles de **Johannes Kepler** avec la dynamique d'un corps céleste autour d'un autre corps massif. Cependant, l'étude de l'électromagnétisme ainsi que les lois en résultant, exprimées par les équations de **James C. Maxwell** au début des années 1860, vont mettre en porte-à-faux cette théorie. En effet, supposer que les équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz sont compatibles avec les équations de Newton mène à des contradictions : comme l'accélération est invariante sous une transformation de Galilée, en regardant l'égalité entre les forces de Lorentz des référentiels R et R' précédents, on voit que le champ magnétique est invariant par changement de référentiel. Cela semble impossible puisqu'une charge immobile dans R ne crée pas de champ magnétique, tandis que dans R' , cette même charge à la vitesse $-\vec{V}$ devrait en créer un d'après les équations de Maxwell.

De plus, en utilisant le principe de relativité, les équations de propagation $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0$ dans R et $\Delta \vec{E}' - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t'^2 \vec{E}' = 0$ dans R' ont toutes deux pour solution une onde électromagnétique se propageant à la même vitesse $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$, et cela, quels que soient les référentiels. Or, sur une ligne droite, selon la mécanique newtonienne tout observateur suivant un photon lui attribuera une vitesse plus petite que celui qui s'en éloigne en sens inverse. Ainsi, en profitant du mouvement de la Terre sur elle-même, il devrait être possible de voir qu'un photon, lâché à une distance d d'un observateur et arrivant de l'Est, arrivera plus vite qu'un photon lâché à une même distance mais venant d'une autre des directions. Des expériences très précises mettant en jeu des interféromètres ont été réalisées, notamment par **Albert Michelson** et **Edward Morley**, et ont montré que la vitesse de la lumière était la même, quelle que soit la direction : cela était bien prévue par la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, mais la tension avec la mécanique classique persistait néanmoins. Pour palier ce problème, des physiciens et mathématiciens comme **Henri Poincaré** sont arrivés à la conclusion que, si les équations de Maxwell n'étaient pas fausses puisqu'on les vérifiaient, les transformations de Galilée devaient être erronées, et que pour résoudre cette incompatibilité, il fallait perdre la notion d'espace-temps absolu et admettre que les objets pouvaient se contracter. Sous cette contraction des longueurs, la théorie de l'électromagnétisme donnait des solutions plus simples mais était par nature toujours en contradiction avec les concepts de la mécanique newtonienne. Il aura fallu attendre 1905 pour qu'**Albert Einstein** remette en cause la notion d'espace et de temps absolus et fasse progresser la compréhension de l'espace et du temps vers un objet mixte, l'espace-temps.

1.2 La formulation lagrangienne

Newton a certes posé les bases de la mécanique, mais il a aussi développé avec **Gottfried Leibniz** tout un formalisme mathématique se basant sur des déplacements infinitésimaux, amenant alors le concept d'équation différentielle comme (1.1) à travers le **calcul infinitésimal**. Ce formalisme a ainsi permis aux théories physiques de devenir prédictives¹, la position d'un objet à un temps $t + dt$ étant ainsi connue, mais a aussi permis la définition d'objets mathématiques fondamentaux en mécanique : le lagrangien en est un exemple. C'est ainsi qu'à partir du calcul, une branche des mathématiques s'est développée, la **géométrie différentielle** dont l'une des principales préoccupations est de pouvoir écrire les dérivées partielles de fonctions, les intégrales, *etc*, mais avec le souci constant de définir des opérations et des objets qui soient indépendants du système de coordonnées choisi. La géométrie différentielle est donc un cadre naturel pour la mécanique qui souhaite respecter le principe de relativité. Un autre des enjeux de ce domaine mathématique, qui va se révéler très utile pour la mécanique comme on va le voir par la suite, est de pouvoir faire des calculs différentiels sur un espace autre que l'espace euclidien \mathbb{R}^n , c'est-à-dire sur une **variété différentiable** quelconque que l'on définit comme suit :

¹Les résultats d'existence et d'unicité du **théorème de Cauchy-Lipschitz** traduit en fait ce déterminisme.

Variété différentiable

Definition 1. Une **variété différentiable** (ou 'manifold' en anglais) M de dimension réelle n , est un espace topologique tel qu'il existe un recouvrement (appelé **atlas**) de M par des ensembles ouverts U_α (appelé **cartes**), indicées par α , et des difféomorphismes (applications bijectives et C^∞) : $\tau_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, donnant les **coordonnées** $q_\alpha = \tau_\alpha(q) = (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n$ d'un point pour une carte spécifique $q \in U_\alpha$. On parlera par la suite de (q^1, \dots, q^n) comme étant un **système de coordonnées locales** ou de **coordonnées généralisées**.

Un exemple est la Terre, une 2-sphère qui localement ressemble à \mathbb{R}^3 pour laquelle on définit des cartes, comme les relevés topographiques, les cartes routières, que l'on réunit dans des atlas, comme les guides routiers de France ou les atlas IGN. Sur ces cartes, on peut définir différents systèmes de localisation : un quadrillage, des noms de routes, en fonction des longitudes et latitudes, etc.



Espace tangent

Definition 2. Soit une courbe paramétrée γ sur M (une **trajectoire**) $\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow \gamma(t) \in M$, le **vecteur tangent** V à la courbe γ est l'opérateur différentiel qui agit sur les fonctions et détecte leur variation au premier ordre. Il s'écrit pour un point $q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ sur la courbe paramétrée $\gamma(t)$:

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad V(f) \doteq \frac{df}{dt}(\gamma(t)) = \left(\frac{dq^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) f = \left(V^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right) f. \quad (1.3)$$

(V^1, \dots, V^n) sont les composantes de V . Les vecteurs $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial q^i}$, $i = 1..n$, forment une base de l'espace vectoriel des vecteurs tangents au point q . On note $T_q M$ cet espace vectoriel appelé **espace tangent au point q** , de dimension n . L'ensemble des espaces tangents est noté $TM \doteq \cup_{q \in M} T_q M$ de rang n , et appelé **espace fibré tangent** ou **espace tangent**².

En physique, on parle d'**espace des phases**. Par exemple, pour un oscillateur harmonique amorti, l'espace tangent a pour composante la position de l'oscillateur q et sa vitesse \dot{q} , et une trajectoire dans cet espace des phases permet de connaître les caractéristiques dynamiques de l'oscillateur.

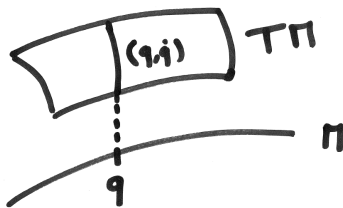


FIG. 1.1 – Espace tangent à la variété M .

Produit scalaire

Definition 3. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, un **produit scalaire** ou **métrique**, noté $g(\cdot, \cdot)$, est une application telle que pour deux vecteurs U et V de E ,

$$(U, V) \in E \times E \rightarrow g(U, V) \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

est bilinéaire, symétrique ($g(U, V) = g(V, U)$) et non-dégénérée : $g(U, U) = 0 \Rightarrow U = 0$.

En mécanique quantique, on définira un **espace de Hilbert** pour les fonctions d'ondes, dont le produit scalaire, positif, entre deux de ces fonctions, permettra de donner un sens physique à ces fonctions : la probabilité d'être dans un état particulier.

Variété Riemannienne

Definition 4. Une **métrique Riemannienne** g sur une variété M est un choix de produit scalaire, défini positif, dans chaque espace tangent $T_q M$, $q \in M$. On dit alors que (M, g) est une **variété Riemannienne** et que g est la **métrique**, ou plus généralement le **tenseur métrique**³. Dans un système de coordonnées locales $q = (q^1, \dots, q^n)$, g s'écrit comme

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) dq^i \otimes dq^j, \quad (1.5)$$

²Par exemple, la bande de Möbius ou bien le cylindre pour le cercle [3].

³La notion de tenseur sera expliquée peu après.

avec les composantes $g_{ij}(q)$ du tenseur métrique g formant une matrice inversible et symétrique en tout point $q \in M$. Elles sont données par le produit scalaire des vecteurs tangents de la base

$$g_{ij}(q) = g\left(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j}\right). \quad (1.6)$$

La métrique g donne la distance entre deux points infinitésimalement proches sur toute variété plate ou courbe, et on note aussi cet élément de longueur

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.7)$$

Par exemple, sur \mathbb{R}^n avec $g_{ij} = \delta_{ij}$, $ds^2 = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ est la **métrique euclidienne** et (\mathbb{R}^n, g) l'**espace euclidien** de dimension n . Cette métrique est définie positive permettant ainsi de définir la norme d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ selon $g(u, u) \geq 0$.

Definition 5. On parle de **variété pseudo-Riemannienne** lorsque le produit scalaire n'est plus défini positif. Cela apparaît quand la signature n'est pas la même pour toutes les composantes.

Par exemple, sur \mathbb{R}^4 avec les coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) , la métrique $g = -dt \otimes dt + dx^i \otimes dx_i$ s'appelle la **métrique de Lorentz**, et (\mathbb{R}^4, g) est l'**espace de Minkowski** qui modélise un espace-temps plat en relativité restreinte. Avec cette métrique, il n'est ainsi plus possible de définir la norme d'un vecteur comme précédemment puisque cette norme peut être positive, négative ou nulle.

Une métrique pseudo-Riemannienne g sur une variété M sera très utile puisqu'elle permet de définir notamment la notion de distance, d'aire et de volume. C'est une structure importante qui intervient dans la formulation de toute théorie physique.

Expression du lagrangien

On considère le cas simple d'une particule sur Terre, subissant une force découlant d'un potentiel $V(q)$ sous la forme d'un gradient⁴. On va notamment considérer l'action du champ de pesanteur $V = m_g g z$, dont la force d'attraction est le **poids** \vec{P} qui s'écrit $P_i = \partial_i V$. Il est ainsi possible de montrer qu'après multiplication par le vecteur vitesse $v^i = \dot{q}^i$, $i = 1..3$, on peut écrire l'équation (1.1) comme étant

$$E_i(L) \doteq \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (1.8)$$

pour laquelle on a défini une fonction L ,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v^i v_i - V. \quad (1.9)$$

T est l'énergie cinétique et $v_i v^i$ le produit scalaire sur \mathbb{R}^3 . Cette formulation de l'équation (1.1) permet de ne pas tenir compte des forces de contraintes, intrinsèques à tout objet et n'intervenant pas dans la dynamique d'un corps.

L'équation (1.8) ressemble étrangement à une solution d'un principe variationnel très utilisé en physique, notamment en optique⁵, et il est tout naturel de chercher l'**action du système** comme étant une fonction scalaire \mathcal{S} . Ainsi, pour un point quelconque de coordonnées $q(s^a) = q^i(s^a)$, $i = 1..3$, $a = 0..3$, dans l'espace des configurations M décrivant l'état (position, valeur d'un paramètre, etc) du système étudié, il existe une fonction (densité) appelée **lagrangien** $L[q(s^a), \partial_i q(s^a)]$, qui permet de décrire ce système via le **principe variationnel de Hamilton**

$$\delta \mathcal{S} = \delta \left(\int_{\Sigma} d^4 s \cdot L[q(s^a), \partial_i q(s^a)] \right) = 0. \quad (1.10)$$

Toute solution physique est donnée par l'extrémisation de cette action et s'obtient alors en résolvant les **équations d'Euler-Lagrange** (1.8), découlant de l'annulation du **vecteur d'Euler-Lagrange** $E_i(L)$.

Un fait intéressant [5] est donné pour une particule libre classique, se déplaçant dans un référentiel inertiel : le lagrangien doit être proportionnel à la vitesse de la particule au carré $L = a v^2$. Poser $a = \frac{m_i}{2}$ permet alors de donner un sens réel à la masse (inertielle) comme étant un degré interne de la particule qui montre sa capacité à se mouvoir.

1.3 La transformation de Legendre

La dynamique d'un système est ainsi donnée par le lagrangien, mais il est aussi possible de l'exprimer différemment via la **transformée de Legendre** : elle fait appel au gradient du lagrangien. Or ce gradient définit un nouvel espace, l'espace cotangent.

⁴Par définition, le gradient appartient à l'espace dual de l'espace tangent.

⁵Maupertuis a lui même travaillé sur l'expression de la mécanique sous sa forme lagrangienne.

espace cotangent

Definition 6. Une **forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire sur E à valeur dans \mathbb{R} . L'espace des formes linéaires est appelé **espace dual** et est noté E^* .

Definition 7. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction, sa **différentielle** (ou gradient) en un point $q \in M$ est une forme linéaire sur l'espace tangent $T_q M$, notée $df : T_q M \rightarrow \mathbb{R}$, qui s'exprime au point q selon

$$(df)_q = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \quad (1.11)$$

df représente la variation infinitésimale de la fonction f au point $q \in M$ dans la direction du vecteur dq^i et, étant linéaire, $df \in T_q^* M$.

En tout point $q \in M$, une **forme linéaire**, aussi appelée **1-forme**, **vecteur cotangent** ou **forme Pfaffienne**, s'écrit

$$\alpha = \alpha_i dq^i \in T_q^* M, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les composantes de α . Les vecteurs dq^i , pour $i = 1..n$, forment une base de l'espace vectoriel $T_q^* M$ des vecteurs cotangents au point q (espace dual de $T_q M$), appelé **espace cotangent au point q** et de dimension n . La collection des espaces cotangents $T^* M \doteq \cup_{q \in M} T_q^* M$ est appelé le **fibré cotangent**. Une section $\alpha \in C^\infty(M, T^* M)$ de ce fibré est une **1-forme** ou **vecteur contravariant** sur M , que l'on peut aussi appeler **champ de vecteurs cotangents**. L'ensemble $T^* M$ possède la structure naturelle d'une variété différentiable de dimension $2n$: l'information sur les n coordonnées et les n vecteurs tangents y est contenue.

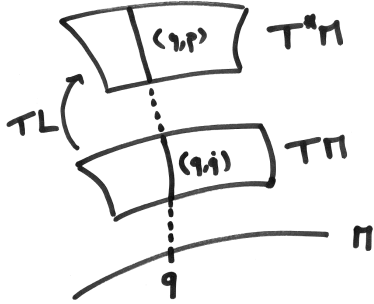


FIG. 1.2 – Espace cotangent à M .

La base (dq^1, \dots, dq^n) de $T^* M$ est appelée **base duale** de la base $\left(\frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}\right)$ de $T_q M$, dont leurs vecteurs vérifient la relation

$$dq^i \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_{ij}, \quad (1.13)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Proposition 1. Si

$$\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(t) \in M$$

est une courbe paramétrée et $\alpha \in T^* M$ une 1-forme, alors on définit l'**intégrale de α sur la courbe γ** par le membre de droite de l'expression suivante qui est une intégrale ordinaire

$$\int_\gamma \alpha \doteq \int_\gamma \alpha_i dq^i = \int_0^1 \alpha_i(\gamma(t)) \left(\frac{dq^i}{dt} \right) dt. \quad (1.14)$$

On observe que $\int_\gamma \alpha \in \mathbb{R}$ ainsi définie ne dépend ni du paramétrage de la courbe γ , ni du choix des coordonnées $(q^i)_i$ sur M .

Expression de la transformée de Legendre

On va ici se placer dans le cas simple d'un espace à 1 dimension pour illustrer graphiquement la notion de la **transformation de Legendre**. $L(v)$ (Le lagrangien), fonction d'une unique variable v (la vitesse), est définie de manière continue pour tous points $(v, L(v))$, et en chacun de ces points, il est possible de définir sa dérivée par

$$p(v) \doteq \frac{dL(v)}{dv}. \quad (1.15)$$

La transformée de Legendre est une manière de décrire la fonction $L(v)$ et de reproduire entièrement son graphique seulement en fonction de p , et sans aucunes références à v : p sera la variable indépendante dont les valeurs seront utilisées pour construire la courbe, comme illustré sur la figure Fig.(1.3). Mais

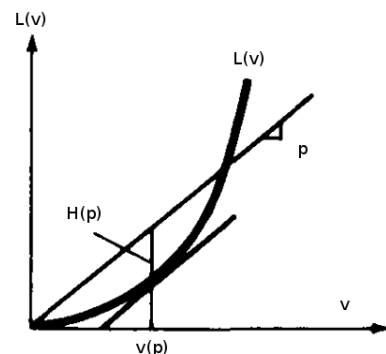


FIG. 1.3 – Schématisation de la transformée de Legendre à 1D [4].

comme les valeurs de v sans celles de $L(v)$ ne sont pas suffisantes pour définir la courbe, les valeurs de p seules ne suffisent pas. Il est alors nécessaire de construire une fonction $H(p)$ telle que la courbe soit décrite par $(p, H(p))$, et son expression est simplement donnée par

$$H(p) = p v - L(v). \quad (1.16)$$

Dans le cas général d'un système à plusieurs dimensions, les solutions physiques sont ainsi obtenues dans l'espace cotangent T_q^*M par la donnée de $(q, p, t, H(q, p, t))$.

1.4 La formulation hamiltonienne

Dans l'espace des phases $(q(t), \dot{q}(t)) \in T_q M$, résoudre les équations de la dynamique avec des conditions initiales spécifiques y détermine une unique trajectoire. Mais l'espace tangent n'est pas le seul espace (ou variété) sur lequel les équations du mouvement ont une forme simple. En effet, bien que les équations sur $T_q M$ donnent une expression explicite pour \dot{q}^a , les équations d'Euler-Lagrange font intervenir les dérivées secondes de $q(t)$. En revanche, un changement de variables faisant passer de (q^a, \dot{q}^a) à (q^a, p_a) , où les p_a correspondent aux *moments conjugués*, permettra aux équations du mouvement de faire intervenir explicitement les dérivées premières de ces nouvelles variables (q, p) , appelées **variables canoniques**. Cela revient simplement à effectuer une **transformée de Legendre** en définissant les **moments conjugués** p_a selon

$$p_a \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \quad (1.17)$$

et la fonction $H(q, p, t)$

$$H(q, p, t) \doteq p_a \dot{q}^a - L(q, p, t) \quad (1.18)$$

que l'on appelle **fonction hamiltonienne** ou **hamiltonien**. Cette fonction joue en fait un rôle important en mécanique puisque pour un système classique, comme un oscillateur harmonique, $p_a = \dot{q}_a$ et H n'est autre que l'**énergie** du système. Les équations d'Euler-Lagrange correspondent dans la formulation hamiltonienne aux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Ce sont les **équations canoniques d'Hamilton**, et les solutions physiques sont alors les projections de $(q(t), p(t)) \in T_q^* M$ sur l'espace des configurations $q(t) \in M$. Comme les équations d'Euler-Lagrange, les équations canoniques d'Hamilton sont des équations différentielles du premier ordre, mais dans un nouveau jeu de $2n$ nouvelles coordonnées $(q(t), p(t)) \in T_q^* M$, pouvant être traitées indépendamment les unes des autres, et qui cependant contiennent les mêmes informations qu'initialement. On parle alors de **formalisme canonique**.

1.5 Les tenseurs

Il est possible de généraliser les notions de vecteurs et de matrices à des objets à plusieurs dimensions, les **tenseurs**. On a vu que la métrique était un tenseur appartenant à l'espace $T_q^* M \otimes T_q^* M$. Plus généralement [22] :

Définition 8. L'espace $(T_p M)_s^r$ est l'**espace des tenseurs** du type (r, s) sur $T_p M$: un tenseur sur cet espace est dit **r fois contravariants et s fois covariants**. C'est l'espace des applications linéaires

$$\underbrace{T_q^* M \otimes \dots \otimes T_q^* M}_r \otimes \underbrace{T_q M \otimes \dots \otimes T_q M}_s \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

où, par définition, $(T_p M)_0^1 = T_p M$ et $(T_p M)_1^0 = T_p^* M$. Un **champ tensoriel** du type (r, s) est une application

$$\begin{aligned} t : M &\rightarrow (TM)_s^r \\ p &\rightarrow t_p \in (T_p M)_s^r \end{aligned}$$

où $(TM)_s^r = \cup_{p \in M} (T_p M)_s^r$ est le **fibré tensoriel** du type (r, s) . L'ensemble des champs tensoriels du type (r, s) est appelé $\mathcal{T}_s^r(M)$, et sur une carte de M de coordonnées locales (q^1, \dots, q^n) , on peut représenter $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ dans les bases duales (∂_i) et (dx^i) selon

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\partial_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\partial_{i_r}) \otimes (dx^{j_1}) \otimes \dots \otimes (dx^{j_s}). \quad (1.21)$$

Les fonctions $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ s'appellent les composantes de t par rapport aux coordonnées (q^1, \dots, q^n) .

En physique, il est utile d'utiliser les tenseurs puisque ce sont des objets à plusieurs composantes, donc pouvant contenir beaucoup d'informations; on manipule des vecteurs et des matrices dont le formalisme commun passe par celui des tenseurs, mais c'est surtout parce que l'on connaît leurs règles de transformation sous un changement de référentiel que l'on va s'intéresser à leur utilisation. En effet, sous n'importe quel changement de coordonnées $(q^1, \dots, q^n) \rightarrow (q'^1, \dots, q'^n)$, les composantes de t se transforment toujours selon

$$(t')_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial q^{i_1}}{\partial q'^{k_1}} \dots \frac{\partial q^{i_r}}{\partial q'^{k_r}} \frac{\partial q^{l_1}}{\partial q'^{j_1}} \dots \frac{\partial q^{l_s}}{\partial q'^{j_s}} t_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}. \quad (1.22)$$

En relativité restreinte, lorsque l'on prend en compte l'espace-temps, on se rend compte qu'en définissant un vecteur à 4 composantes, un **quadri-vecteur**, ce vecteur permet de définir des équations du mouvement qui sont invariantes par changement de coordonnées, et donc respectent le principe de relativité.

1.6 Dérivée de Lie et quantités invariantes

En géométrie différentielle, on va se placer sur des espaces abstraits. Il est alors intéressant de définir des dérivées d'un objet relatives à la variation d'un autre objet. C'est ainsi que l'on va définir la dérivée de Lie et en profiter pour introduire des notions d'invariance, très importantes en physique.

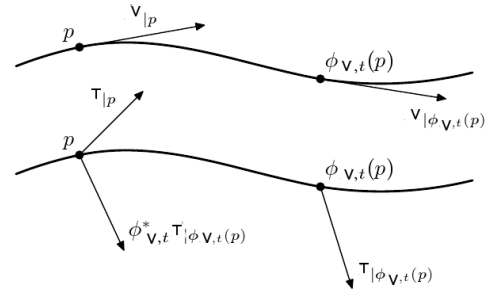
La dérivée de Lie

Lors d'un changement de position infinitésimal d'un tenseur sur une variété, il faut non seulement tenir compte du changement de coordonnées, mais aussi du fait que le tenseur a lui aussi été modifié. Ces deux effets doivent être combinés pour pouvoir évaluer la valeur d'un champ de tenseur en un point donné après une telle transformation infinitésimale. Cette transformation du tenseur suivant une trajectoire, caractérisée par la donnée d'un vecteur, est alors définie par la **dérivée de Lie**.

Définition 9. Soit $V \in \mathcal{X}(M)$, un vecteur dans un champ de vecteurs. Soit Φ_t le flot de V , la propagation d'une solution $q(t)$ le long de V , définissant une trajectoire $\gamma(t)$ à partir d'un point initial. Pour un tenseur $T \in \mathcal{T}(M)$, l'ensemble de tous les types de tenseurs, on définit la **dérivée de Lie** de T par rapport à V , $\mathcal{L}_V T$ par :

$$\mathcal{L}_V T \doteq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^* T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_t^* T - T]. \quad (1.23)$$

Schématiquement, on compare la déformation de T le long d'un chemin $\gamma(t)$, entre le point $T(t)$ et $T(t + dt) = \Phi_t^* T(t)$, comme illustré sur la figure Fig.(1.4).



Proposition 2. Cet objet a ainsi quelques propriétés utiles, notamment :

1. $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$,
2. $\mathcal{L}_X f = Xf = df(X)$ pour $f \in \mathcal{F}(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$,
3. $\mathcal{L}_X Y = XY - YX \doteq [X, Y]$ pour $Y \in \mathcal{X}(M)$,
4. $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_Y$, $\mathcal{L}_{\lambda X} = \lambda \mathcal{L}_X$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
5. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \doteq \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$,
6. $\mathcal{L}_X \circ df = d \circ \mathcal{L}_X f$ sur les fonctions $f \in \mathcal{F}(M)$.

FIG. 1.4 – Schématisation de la dérivée de Lie [12].

Pour un système de coordonnées locales (q^1, \dots, q^n) , définissant les bases duales $(\partial_i)_{i=1}^n$ et $(dq^i)_{i=1}^n$ de $T_p M$ et $T_p^* M$, et une fonction $f \in \mathcal{F}(M)$, les relations

$$\mathcal{L}_V f = V^i \partial_i f, \quad \mathcal{L}_V W = [V^i \partial_i, W^j \partial_j] = (V^i \partial_i W^j - W^i \partial_i V^j) \partial_j, \quad (1.24)$$

$$\mathcal{L}_V dq^i = d(\mathcal{L}_V q^i) = d(V^j \delta_j^i) = d(V^i) = \partial_j (V^i) dq^j = V_{,j}^i dq^j, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{L}_V \partial_i = [V, \partial_i] = -V_{,i}^j \partial_j, \quad (1.26)$$

permettent de définir la transformation d'un tenseur $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$ de type (r, s) sous l'action d'un vecteur V par

$$(\mathcal{L}_V T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = (\mathcal{L}_V T)(dq^{i_1}, \dots, dq^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}). \quad (1.27)$$

Par exemple, pour un tenseur $(2, 2)$, sa dérivée de Lie sous l'action d'un vecteur $V = V^i \partial_i$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_V A_{kl}^{ij} = V^m A_{kl,m}^{ij} - V_{,m}^i A_{kl}^{mj} - V_{,m}^j A_{kl}^{im} + V_{,k}^m A_{ml}^{ij} + V_{,l}^m A_{km}^{ij}. \quad (1.28)$$

Application de la dérivée de Lie : les équations d'Euler-Lagrange

L'évolution temporelle d'une fonction $F(q^a, \dot{q}^a)$ au cours du temps est donnée par

$$\frac{dF}{dt}(q^a, \dot{q}^a) = \frac{\partial F}{\partial q^a} \dot{q}^a + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^a} \ddot{q}^a, \quad (1.29)$$

et on peut définir le vecteur d'évolution lagrangien par

$$\Delta_L \doteq \frac{d}{dt} = \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \ddot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. \quad (1.30)$$

En choisissant une 1-forme (un covecteur) telle que

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} dq^a \equiv p_a dq^a, \quad (1.31)$$

les équations du mouvement via les équations d'Euler-Lagrange peuvent alors se réécrire de manière géométrique, ne dépendant ainsi pas du système de coordonnées :

$$\mathcal{L}_{\Delta_L} \theta_L - dL = 0. \quad (1.32)$$

Dans cette équation, Δ , L et θ_L sont purement géométriques : un champ de vecteur, une 1-forme et une fonction. Ils ont valeur dans l'espace tangent plutôt que dans l'espace des coordonnées. L'équation (1.32) est utile pour prouver des théorèmes et obtenir des résultats généraux.

Symétries et vecteurs de Killing

Pour un problème donné, il existe des quantités invariantes suivant la direction d'un vecteur V . Par construction, la dérivée de Lie d'une telle quantité suivant cette direction V sera nulle, et la dérivée de Lie permet alors d'avoir accès aux **symétries** du système : ces symétries seront ainsi données par les directions d'un champ de vecteurs, suivant lesquelles la dérivation de Lie est nulle.

Definition 10. (champ de vecteur de Killing) Un champ vectoriel K tel que $\mathcal{L}_K G = 0$ est appelé **champ de Killing** pour la quantité G et est ainsi très utile pour trouver des quantités conservées.

Par exemple, si un système est invariant par translation dans le temps, le vecteur de Killing est donné par ∂_t , et la quantité G conservée associée sera telle que $\mathcal{L}_{\partial_t} G = \mathcal{L}_{\Delta_L} G = 0$. Elle s'écrit alors

$$G = \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - L, \quad (1.33)$$

et dans le cas de la particule vue plus haut, elle correspond à l'énergie $G = H = E = T + V$, montrant que si les équations du mouvement restent inchangées par une translation dans le temps, alors son énergie sera conservée.

Théorème de Noether

Plus généralement, dans le cas où une intégrale fondamentale comme l'action (1.10) est invariante sous un groupe spécial de transformations continues (par exemple les transformations de coordonnées ou de paramètres), le lagrangien correspondant doit vérifier certaines conditions qui peuvent être exprimées de manière très concise en terme du vecteur d'Euler-Lagrange $E_j(L)$ vu dans l'équation (1.8). La formulation résultante de ces conditions est habituellement appelée **Théorèmes de Noether**, en hommage à **Émilie Noether**. Ces théorèmes sont d'une importance considérable en théorie des champs puisqu'ils établissent l'existence et la nature précise de certaines lois de conservation qui résultent de l'impératif d'invariance. Les quantités conservées sont appelées les charges et courants de Noether, et sont constantes le long d'une courbe d'extrémisation de l'intégrale, c'est à dire qui satisfait les équations d'Euler-Lagrange $E_j(L) = 0$.

Pour un groupe de transformations à r paramètres w^s , indépendants entre eux et tels que les nouvelles coordonnées s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} y^j &= x^j + \xi_s^j(t, x^h) w^s + \frac{1}{2!} \xi_{st}^j(t, x^h) w^s w^t + \dots = x^j + \delta x^j, \\ t' &= t + \zeta_s(t, x^h) w^s + \frac{1}{2!} \zeta_{st}(t, x^h) w^s w^t + \dots = t + \delta t, \end{aligned}$$

les r quantités [8] appelées **courants de Noether**

$$G_s = -L \zeta_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} (\xi_s^j - \dot{x}^j \zeta_s) = H \zeta_s - p_j \xi_s^j, \quad (1.34)$$

sont des quantités conservées données par les r relations

$$E_j(L)(\xi_s^j - \dot{x}^j \zeta_s) = -\frac{dG_s}{dt}. \quad (1.35)$$

Cette définition est générale et s'applique à tous les groupes : si par exemple on regarde un système invariant par translation dans le temps, alors $\xi^j = 0$ et $\zeta = 1$ redonnent bien $G = H$ donnée par l'équation (1.33).

1.7 Les formes différentielles

En mécanique, on peut utiliser un langage plus vaste incorporant les tenseurs, moins répandu mais tout aussi fondamental. En se plaçant dans l'espace cotangent, les variables canoniques q^a et les moments conjugués p_a peuvent être traités de manière indépendante, amenant ainsi plus de libertés. L'utilisation du gradient a conduit à la définition d'une 1-forme qui fait partie d'un ensemble plus grand d'outils mathématiques, les **formes différentielles**. On va voir dans ce qui suit comment ces formes différentielles permettent en fait une description plus riche de la mécanique, notamment en expliquant la provenance du principe variationnel.

Les formes différentielles

L'intérêt des formes différentielles, ou **p-forme**, est de trouver quels sont les objets que l'on peut intégrer sur une variété de dimension n , tels que le résultat soit indépendant du système de coordonnées choisi.

Definition 11. En un point $q \in M$, un tenseur $T \in \mathcal{T}_0^p(M)$ de degré p est appelé **p-formes** s'il est **antisymétrique**, i.e. s'il change de signe par permutation quelconque de vecteurs $V_i \leftrightarrow V_j$. On note λ_q^p l'espace des p -formes au point q .

Sur ces p -formes, il est possible alors de définir des opérations, des 'produits' et des 'dérivées'. On définit ainsi les opérations suivantes :

Le produit tensoriel

Definition 12. (produit tensoriel) On appelle \otimes l'opération définissant le **produit tensoriel**, telle que par exemple pour deux 1-formes $\alpha, \beta \in T_q^*M$ et deux vecteurs $V_1, V_2 \in T_qM$, on note $\alpha \otimes \beta$ le tenseur de degré 2 défini par

$$(\alpha \otimes \beta)(V_1, V_2) = \alpha(V_1)\beta(V_2). \quad (1.36)$$

Le produit extérieur

Definition 13. (produit extérieur) On appelle \wedge l'opération définissant le **produit extérieur**, telle que par exemple pour deux 1-formes $\alpha, \beta \in T_q^*M$ et deux vecteurs $V_1, V_2 \in T_qM$, on note $\alpha \wedge \beta$ la **2-forme** définie par

$$\alpha \wedge \beta \doteq \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad \in \Lambda_q^2, \quad (1.37)$$

avec

$$(\alpha \wedge \beta)(V_2, V_1) = \alpha(V_2)\beta(V_1) - \alpha(V_1)\beta(V_2) = -(\alpha \wedge \beta)(V_1, V_2), \quad (1.38)$$

$$\alpha \wedge \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta \wedge \alpha = -\alpha \wedge \beta. \quad (1.39)$$

Si (q^1, \dots, q^n) est un système de coordonnées, (dq^1, \dots, dq^n) une base de T_q^*M , on pose

$$dq^{\mu_1} \wedge dq^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_p} = \sum \epsilon(\sigma) dq^{\mu_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes dq^{\mu_{\sigma_p}} = \begin{vmatrix} dq^1 & \dots & dq^n \\ \vdots & & \vdots \\ dq^1 & \dots & dq^n \end{vmatrix} \quad (1.40)$$

qui est une p -forme et $\epsilon(\sigma)$ est la signature des permutations.

La collection $\Lambda^p \doteq \cup_{q \in M} \Lambda_q^p$ est un espace fibré vectoriel sur M , l'espace fibré des p -formes. Par convention, Λ^0 est l'espace des 0-formes, c'est à dire des fonctions. Une section $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ de ce fibré est ainsi une p -forme sur M ou champ de tenseurs antisymétriques de degré p , et s'écrit dans la base (1.40) :

$$\omega(q) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_p} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(q) dq^{\mu_1} \wedge dq^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_p}. \quad (1.41)$$

Les fonctions $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(q)$ sont les composantes de ω dans cette base telles que $\omega_q(\partial_{\mu_1}, \dots, \partial_{\mu_p}) = \omega_{\mu_1, \dots, \mu_p}(q)$. Si ω^k est une k -forme et ω^l est une l -forme sur \mathbb{R}^n , alors leur produit extérieur sera une $(k+l)$ -forme. Il est ainsi possible de définir l'intégrale d'une p -forme, indépendante du système de coordonnées choisi.

Definition 14. Si (q^1, \dots, q^n) est un système de coordonnées sur une variété M orientée de dimension p , et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ est une p -forme qui s'écrit $\omega(q) = \omega_q(q) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$, on définit

$$\int_M \omega \doteq \int \omega_q(q) (dq^1 \dots dq^n). \quad (1.42)$$

La dérivée extérieure

Definition 15. (dérivée extérieure) Sur une variété M de dimension n , $\forall p \in (0, \dots, n)$ on définit une opération différentielle d'ordre 1 qui généralise la différentielle d'une fonction. Cette opération est appelée **dérivée extérieure** d , et on la définit selon

$$\begin{aligned} d : C^\infty(\Lambda^p) &\rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1}) \\ \beta = (\beta_{i_1 \dots i_p}) dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} &\rightarrow (d\beta)(q) = \left(\frac{\partial \beta_{i_1 \dots i_p}}{\partial q^{i_{p+1}}} \right) dq^{i_{p+1}} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Cette opération est ainsi indépendante du système de coordonnées choisi. Sur \mathbb{R}^3 , pour $p = 0$, d correspond au **gradient**, $p = 1$ au **rotationnel** et $p = 2$ à la **divergence**. A cause de l'antisymétrie, l'opérateur d vérifie :

$$\forall \omega \in C^\infty(\Lambda^p) \quad d(d\omega) = 0. \quad (1.44)$$

La formule de Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré

Un des corollaires les plus importants de la propriété précédente est la formule de *Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré*, qui permet de retrouver facilement la formule de Green-Riemann ou bien celle d'Ostrogradskii,

Proposition 3. Si $K \subset M$ est un domaine orienté de dimension p , on note ∂K son bord orienté, et si $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p-1})$ est à support compact (*c-a-d* nulle en dehors d'un ensemble compact), alors

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega. \quad (1.45)$$

On dit qu'une p -forme $\omega \in C^\infty(\Lambda^p)$ est **fermée** si

$$d\omega = 0. \quad (1.46)$$

Pour $p \geq 1$, une p -forme est **exacte** s'il existe $\alpha \in C^\infty(\Lambda^{p-1})$ telle que

$$\omega = d\alpha. \quad (1.47)$$

Ces deux notions sont reliées par le **lemme de Poincaré** : Si $M = \mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$, alors

$$d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in C^\infty(\Lambda^{p-1}), \omega = d\alpha. \quad (1.48)$$

La dérivée intérieure

Definition 16. (dérivée intérieure) Soit V un champ de vecteurs (vitesse par exemple) sur M , et ω une k -forme. On définit la **dérivée intérieure** $i_V \omega$ de ω par V , une $(k-1)$ -forme, par la relation :

$$i_V \omega = \omega(V, \cdot). \quad (1.49)$$

La formule de Cartan

Une formule importante est la **formule de Cartan** qui permet de relier la dérivée de Lie d'une forme à ses dérivées intérieure et extérieure.

Proposition 4. (formule de Cartan) Soit $X \in \mathcal{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X. \quad (1.50)$$

La forme Volume et la forme Aire

Sur une variété Riemannienne (M, g) de dimension n , on note $(e_1, \dots, e_n) \in T_q M$ une base orthonormée de l'espace tangent, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in T_q^* M$ la base duale qui est une base orthonormée de l'espace dual $T_q^* M = \Lambda_q^1$. Par conséquent, $(\alpha^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{\mu_p})_{\mu_1 < \dots < \mu_p}$ forme une base des p -formes $\in \Lambda_q^p$. La métrique g induit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda_q^p}$ sur chaque espace des p -formes Λ_q^p , $q \in M$, $p \in \mathbb{N}$: la base $(\alpha^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{\mu_p})_{\mu_1 < \dots < \mu_p}$ est une base orthonormée de Λ_q^p . En particulier, comme $\dim(\Lambda_q^n) = 1$, alors on appelle $\mu_{vol} \doteq \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ la **forme volume associée à la métrique** g . Dans un système de coordonnées (q^1, \dots, q^n) , la forme volume s'écrit

$$\mu_{vol} = \sqrt{\det(g(q))} (dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n), \quad (1.51)$$

avec $\det(g(q)) = |g_{ij}(q)|$ le déterminant de la matrice des composantes de g .

Par exemple, sur \mathbb{R}^3 , la forme volume $\mu_{vol} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ en coordonnées cartésiennes s'écrit en coordonnées sphériques $\mu_{vol} = r^2 \sin(\theta) dr \wedge d\theta \wedge d\phi$ et on a bien le volume défini par

$$V = \int_{V(M)} \mu_{vol}. \quad (1.52)$$

remarque : un objet f multiplié par n fois $\sqrt{\det(g)}$ sera appelé une **densité de poids** $+n$.

En ce qui concerne l'aire d'une surface S de métrique induite h et de coordonnées locales σ^1, σ^2 , elle est simplement donnée par

$$A = \int_{S(M)} \sqrt{h} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2. \quad (1.53)$$

1.8 La structure symplectique

Une **structure symplectique** sur une variété est une **2-forme différentielle non dégénérée** et **close**. L'espace $T_q^* M$ possède **naturellement** une telle structure. Sur une variété symplectique, comme c'est le cas pour une variété Riemannienne, il existe un isomorphisme naturel entre les champs de vecteurs et les 1-formes, comme illustré précédemment. On va ainsi voir [9] que

- un champ de vecteurs sur une variété symplectique correspondant à la différentielle d'une fonction est appelé **champ de vecteur hamiltonien**.
- un champ vectoriel sur une variété détermine un **flux de trajectoires**, *i.e.* un groupe de difféomorphismes à un paramètre.
- un flux de trajectoires d'un champ de vecteur hamiltonien sur une variété symplectique préserve la structure symplectique de l'espace des phases.
- un ensemble de champs de vecteurs sur une variété, comme les champs de vecteurs hamiltoniens sur une variété symplectique, forment une algèbre de Lie dont l'opération entre différents éléments est appelée **crochets de Poisson**.

Une variété symplectique

Definition 17. Soit M une variété différentielle de dimension $2n$. Une **structure symplectique** sur M est une 2-forme différentielle ω , fermée et non-dégénérée, telle que

$$\forall (V, W \in T_q M) \quad d\omega = 0 \quad (1.54)$$

et

$$\forall V \neq 0, \exists W \quad \omega(V, W) \neq 0. \quad (1.55)$$

La paire (M^{2n}, ω) est appelée **variété symplectique**.

La géométrie d'un espace symplectique est comparable à celle d'un espace euclidien, même si quelques différences existent néanmoins.

La matrice symplectique

Un des avantages du formalisme hamiltonien est de traiter sur un pied d'égalité les $2n$ variables (q, p) . Dans un souci de consistance, on va les renommer ξ^i , telles que les indices (i, j) vont de 1 à $2n$, et les indices (a, b) de 1 à n . Les n premiers indices seront les q et les n suivant seront les p :

$$\begin{aligned} \xi^i &= q^i, & i &\in \{1 \dots n\}, \\ \xi^i &= p_{i-n}, & i &\in \{(n+1) \dots 2n\}. \end{aligned}$$

Il est maintenant possible de réécrire les équations d'Hamilton (1.19) dans la forme unifiée $\dot{\xi}^i = f^i(\xi)$, de sorte que ces équations s'écrivent $f^i(\xi) = \partial^i H$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^i = \frac{\partial H}{\partial \xi^{i+n}}, & i = 1 \dots n, \\ \dot{\xi}^i = -\frac{\partial H}{\partial \xi^{i-n}}, & i = (n+1) \dots 2n, \end{cases}$$

ou de forme équivalente

$$\dot{\xi}^i = \omega^{ij} \partial_j H, \quad \omega_{ij} \dot{\xi}^i = \partial_j H. \quad (1.56)$$

On a ainsi introduit ce que l'on appelle la $2n \times 2n$ **matrice symplectique** Ω , de composantes ω^{ij} , donnée par

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0_n & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0_n \end{bmatrix}, \quad (1.57)$$

ayant comme propriétés

$$\Omega^+ = -\Omega, \quad \Omega^2 = -\mathbb{1}, \quad \Omega^t = -\Omega. \quad (1.58)$$

L'espace cotangent T_q^*M est bien une *variété de transport* puisque les équations canoniques d'Hamilton (1.56) étant des équations différentielles du premier ordre, les trajectoires ne se croisent pas sur T_q^*M . Les équations (1.56) définissent un champ de vecteurs sur T_q^*M dont les composantes sont les $2n$ fonctions $\omega^{ij} \partial_j H$. Les solutions $\xi^i(t)$ sont les courbes intégrales de ce champ de vecteur que l'on va appeler **champ de vecteurs dynamique**, ou Δ comme pour T_qM . Au même titre que les équations d'Euler-Lagrange établissent un champ de vecteur sur T_qM , les équations canoniques d'Hamilton établissent un champ de vecteur sur T_q^*M . Pour $f(q, p, t)$ une fonction dynamique, il est possible de regarder son évolution le long d'une trajectoire, sans résoudre les équations du mouvement, puisque la dérivée temporelle est donnée par la dérivée de Lie le long du champ de vecteur dynamique :

$$\mathcal{L}_\Delta f \doteq \frac{df}{dt} = (\partial_i f) \dot{\xi}^i + \partial_t f = (\partial_i f) \omega^{ij} \partial_j H + \partial_t f. \quad (1.59)$$

Les crochets de Poisson

Le terme comportant ω^{ij} dans l'équation (1.59) est très important et est appelé **crochets de Poisson** de f avec H . En général, pour deux fonctions dynamiques $f, g \in \mathcal{F}(T^*M)$, leurs crochets de Poisson sont définis par :

$$\{f, g\} \doteq (\partial_i f) \omega^{ij} (\partial_j g) \doteq \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a}, \quad (1.60)$$

dont les propriétés sont les mêmes que celles des crochets de Lie : bilinéaire, antisymétrique et satisfaisant l'identité de jacob⁶. De plus, ils satisfont aussi la **règle de Leibniz** $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$. Bilinéarité, antisymétrie et identité de jacob⁶ sont les propriétés d'une structure algébrique importante : l'**algèbre de Lie**. L'espace des fonctions dynamiques $\mathcal{F}(T^*M)$ est ainsi une *algèbre de Lie* sous les crochets de Poissons, et la dynamique hamiltonienne peut être étudiée de manière fructueuse du point de vue de ces algèbres qui jouent un rôle important dans les transitions en mécanique quantique. L'équation (1.59) se réécrit alors en terme des crochets de Poisson

$$\mathcal{L}_\Delta f = \frac{df}{dt} = \{f, H\} + \partial_t f. \quad (1.61)$$

En appliquant cette relation aux coordonnées locales ξ^i , on obtient la relation $\dot{\xi}^i = \{\xi^i, H\}$ qui est une autre manière d'écrire les équations canoniques d'Hamilton (1.56). Pour finir, ces crochets de Poisson satisfont les relations :

$$\begin{aligned} \{\xi^i, f\} &= \omega^{ij} \partial_j f, \\ \text{soit encore} \quad \{q^a, f\} &= \frac{\partial f}{\partial p_a}, \quad \{p_a, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q^a}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \{\xi^i, \xi^j\} &= \omega^{ij}, \\ \text{soit encore} \quad \{q^a, p_b\} &= -\{p_b, q^a\} = \delta_b^a, \quad \{q^a, q^b\} = \{p_a, p_b\} = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

⁶ $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$

Structure symplectique sur l'espace cotangent

Les équations canoniques d'Hamilton sont des équations différentielles sur l'espace cotangent T^*M , dont le vecteur d'évolution est donné par

$$\Delta_H = \dot{\xi}^i \partial_i = \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \dot{p}^a \frac{\partial}{\partial p^a} = \frac{\partial H}{\partial p^a} \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a} \frac{\partial}{\partial p^a}. \quad (1.64)$$

La transformée de Legendre envoie tout objet géométrique de TM vers un objet géométrique similaire sur T^*M , en particulier Δ_L vers Δ_H . Plus important, elle envoie θ_L qui n'est pas une 1-forme vers θ_0 ,

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} dq^a \rightarrow \theta_0 = p_a dq^a. \quad (1.65)$$

La transformée de Legendre et θ_L dépendent de L d'une telle manière que θ_L est tout le temps envoyée vers la même 1-forme canonique θ_0 sur T^*M . On peut alors écrire l'expression géométrique des équations canoniques d'Hamilton, indépendantes du système de coordonnées locales selon

$$i_{\Delta} \omega = dH, \quad (1.66)$$

similaire à l'équation (1.32). Cependant, l'écrire en terme de (q, p) requiert une expression explicite de ω .

Proposition 5. *Le fibré cotangent T^*M possède une structure symplectique naturelle. Dans le jeu de coordonnées (q, p) décrit auparavant, la structure symplectique est donnée par la formule*

$$\omega = dp_a \wedge dq^a, \quad (1.67)$$

où ω est exacte et dont la 1-forme primitive s'écrit $\alpha_0 = p_a dq^a$.

Pour le moment, tout ce formalisme pourrait paraître abstrait et sans grand intérêt si ce n'est dans la formulation, mais les notions explicitées auparavant vont permettre en fait d'exprimer la mécanique d'un point de vue plus fondamental et les propriétés vues ici vont avoir de grandes conséquences physiques, en particulier pour la Gravité Quantique à Boucles, ou *Loop Quantum gravity* (LQG) en anglais. Notamment, chaque hamiltonien détermine de façon **unique** son propre champ de vecteur dynamique Δ . Par contre, s'il existe pour un même système deux champs de vecteurs Δ_1 et Δ_2 associés à deux hamiltoniens H_1 et H_2 respectivement, alors

$$i_{\Delta_1} \omega - i_{\Delta_2} \omega = 0 \Leftrightarrow d(H_1 - H_2) = 0 \Leftrightarrow H_1 - H_2 = \text{const}, \quad (1.68)$$

montrant que la dynamique sur T^*M détermine la fonction hamiltonienne seulement à une constante près, et reflète ainsi l'indétermination sur l'énergie. On peut de même généraliser en disant que, de la même manière, toute autre variable dynamique f détermine de façon unique un champ de vecteurs X_f à travers une 1-forme df suivant

$$i_{X_f} \omega \doteq df. \quad (1.69)$$

Un champ de vecteurs $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ associé via l'équation (1.69) à une fonction dans $\mathcal{F}(T^*M)$ est appelée **champ de vecteur hamiltonien** (X_f est hamiltonien en fonction de f).

Il est maintenant possible de relier l'expression de ω aux crochets de Poisson. En considérant deux variables $f, g \in \mathcal{F}(T^*M)$ et leur champ de vecteurs hamiltoniens respectifs X_f et X_g , en utilisant l'équation (1.59), la dérivée temporelle d'une fonction f le long du mouvement s'écrit

$$\mathcal{L}_{X_g} f = \{f, g\} = i_{X_g} df = i_{X_f} i_{X_g} \omega = \omega(X_g, X_f), \quad (1.70)$$

donnant la relation générale liant crochets de Poisson et ω

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f). \quad (1.71)$$

Remarques : L'équation (1.71) est la définition intrinsèque des crochets de Poisson, ne se référant pas à des coordonnées quelconques. L'équation (1.70) est à la base de la version hamiltonienne du théorème de Noether, et il peut être montré que l'identité de Jacobi est une conséquence de la fermeture de ω , i.e. $d\omega = 0$.

On a ainsi vu que sur le fibré cotangent, il existait une structure naturelle, riche, appelée **structure symplectique** et qui s'écrit $\omega = dp_a \wedge dq^a$. De plus, il est facile de voir que :

Proposition 6. Théorème de Liouville : *Le flot hamiltonien préserve la forme symplectique ω et donc préserve la forme symplectique μ_{vol} :*

$$\mathcal{L}_{\Delta_H} \omega = d \circ (i_{\Delta_H} \omega) + i_{\Delta_H} \circ (d\omega) = d \circ (dH) = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\Delta_H} \mu_{vol} = 0. \quad (1.72)$$

En raison de l'invariance de cette 2-forme⁷, il est possible de construire une fonction scalaire, ou plus particulièrement une action, qui est une intégrale sur un volume, très utile en physique et dont l'utilisation va permettre de caractériser en grande partie le système physique étudié.

⁷ $\mathcal{L}_{\Delta_H} \omega = 0$ car $d\omega = 0$ et $d \circ d = 0$

Le groupe symplectique

A une structure euclidienne est associée un groupe de transformations linéaires qui préserve cette structure. Dans un espace symplectique, le groupe symplectique joue un rôle analogue.

Definition 18. Une transformation linéaire $S : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ d'un espace symplectique M^{2n} dans lui-même est appelée *symplectique* si elle préserve la structure des crochets de Poisson, et donc ω défini par l'équation (1.67) :

$$[SV, SW] = [V, W], \quad \forall V, W \in M^{2n}. \quad (1.73)$$

L'ensemble de toutes les transformations symplectiques de M^{2n} est appelé **groupe symplectique**, dénoté $Sp(2n)$, de déterminant égal à 1.

Matrices symplectiques

Proposition 7. Soit $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ un système de coordonnées symplectiques. Soit $S : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ une transformation linéaire d'un espace symplectique. Cette transformation est symplectique si et seulement si sa matrice satisfait la relation

$${}^t S \Omega S = \Omega, \quad (1.74)$$

où Ω est donnée par la matrice (1.57), et ${}^t S$ est la transposée de S .

Une analogie pourrait être faite avec les transformations sous les matrices de Lorentz, pour lesquelles on a

$${}^t \Lambda g \Lambda = g,$$

où $g = \text{diag}(-1, \mathbb{I}_3)$ alors qu'ici $\Omega = \text{antidiag}(-\mathbb{I}, \mathbb{I})$.

Théorème de Darboux

Proposition 8. Soit ω une 2-forme différentielle non-dégénérée et fermée, au voisinage d'un point $q \in M^{2n}$. Alors dans tout le voisinage de q , il est possible de choisir un système de coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tel que la 2-forme ω puisse s'écrire de manière standard

$$\omega = \sum_{i=1..n} dp_i \wedge dq_i. \quad (1.75)$$

Ce théorème est intéressant puisque pour un système physique, avoir cette expression pour la 2-forme ω en quelque sorte déterminer la physique qui y est présente : on peut déjà le voir avec la 1-forme θ_0 donnée par l'équation (1.65) donnant les équations canoniques d'Hamilton (1.66)

1.9 Les contraintes en mécanique

On a ainsi vu qu'en mécanique classique, il existe des outils mathématiques intéressants du point de vue de l'invariance sous un changement quelconque, naturellement présents dans les espaces considérés. Cependant, il reste encore à introduire une autre notion, celle de **contrainte**, qui sera nécessaire pour bien cerner le concept de covariance de tout système, relativiste ou non. Cette notion sera ainsi utile pour introduire quelques caractéristiques de relativité puisque la relativité générale correspond à un système totalement contraint.

En physique, il existe des équations supplémentaires donnant des relations entre les différentes variables, et on décrit ainsi un système en utilisant plus de variables que nécessaire. Ces équations sont appelées **contraintes**. Un exemple illustrant cette notion de contrainte est le cas d'un pendule de longueur l dans le plan (x, y) : dans ce plan, il y a deux variables, x et y , mais on peut exprimer le problème simplement en fonction de l'angle avec la verticale puisqu'il existe la contrainte $x^2 + y^2 = l^2$ qui permet de diminuer le nombre de variables.

Une contrainte est généralement notée $\phi(q^a, p_a) = 0$ et doit donc être une quantité conservée au cours du mouvement. Par le théorème de Noether, les quantités conservées \mathcal{O} sont associées à la présence de symétries dans le système considéré. Afin de les observer, on peut regarder l'action d'une telle quantité dépendante des variables de l'espace des phases en lui associant un flux, au même titre que les équations d'Hamilton définissent un flux d'évolution sous l'action de l'hamiltonien. On définit alors selon un paramètre λ le flux hamiltonien associé

$$\delta_\lambda q^a = \frac{dq^a}{d\lambda} = \{q^a, \mathcal{O}(\lambda)\}, \quad \delta_\lambda p_a = \frac{dp_a}{d\lambda} = \{p_a, \mathcal{O}(\lambda)\}, \quad (1.76)$$

et la transformation précédente, donnant la quantité conservée dans l'équation (1.34), se traduit ainsi par une variation infinitésimale des coordonnées donnée par

$$\delta_{(\zeta, \xi)} x^j = \{x^j, G_s(\xi, \zeta)\}, \quad (1.77)$$

$$\delta_{(\zeta, \xi)} p_i = \{p_i, G_s(\xi, \zeta)\}. \quad (1.78)$$

Ce flux n'a *a priori* aucun sens physique en général. Ses solutions sont des trajectoires dans l'espace des phases, le long desquelles l'hamiltonien est inchangé : \mathcal{O} étant une quantité conservée, cela se traduit soit sous la forme de l'équation (1.35), soit également dans le formalisme hamiltonien par

$$\{\mathcal{O}, H\} = 0. \quad (1.79)$$

Il en va ainsi de même pour le cas des contraintes, puisqu'étant des quantités conservées, il existe alors des symétries qui leur sont liées. En mécanique, les contraintes sont incorporées dans les équations en utilisant des **multiplicateurs de Lagrange** : pour un système de $2n$ variables canoniques avec k contraintes $\phi_i \approx 0$ (la contrainte étant une fonction, elle n'est pas nulle partout et l'utilisation de \approx signifie que si la contrainte est nulle alors on considère bien des solutions qui sont physiques, et non plus seulement mathématiques), alors l'**hamiltonien total** est donné par l'hamiltonien originel plus les contraintes multipliées par les multiplicateurs de Lagrange λ^i :

$$H = H_{init} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \phi_i. \quad (1.80)$$

Résoudre les équations canoniques d'Hamilton aura alors comme conséquence que les solutions seront dépendantes des k multiplicateurs de Lagrange, arbitraires, montrant que l'évolution n'est ainsi plus donnée par une unique solution déterminée par les conditions initiales, mais dépendra aussi du choix des λ^i : il existera différentes solutions mathématiques résultantes des symétries mais dont les conséquences physiques seront identiques. La méthode pour tenir compte des contraintes a été initialement développée par Dirac et est appelée **procédure de Dirac**.

Une situation intéressante pour la mécanique classique et l'électromagnétisme se présente notamment quand une variable est présente dans le lagrangien mais pas sa dérivée temporelle. Cette variable n'est pas réellement dynamique et peut être traitée comme un multiplicateur de Lagrange.

Système totalement contraint

Lors de l'amélioration de la mécanique classique par les théories de relativité, il faut prendre en compte le fait que pour tout changement de coordonnées, comprenant aussi le 'temps', les équations du mouvement résultantes doivent rester inchangées. En mécanique, il est possible de faire une **reparamétrisation** du temps : on peut ainsi considérer t non plus comme un paramètre d'évolution mais comme une variable canonique, avec un moment conjugué p_t . L'évolution se fera ainsi en fonction d'un paramètre s telle que, par exemple, l'action des équations de Newton (1.1) s'écrive

$$S = \int ds L(q, \dot{q}, t, \dot{t}) = \int ds \dot{t} \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} - V(q) \right), \quad (1.81)$$

où \dot{q} et \dot{t} sont les variations de q et t par rapport à s . Dans ce lagrangien, à l'inverse de ce qui a été écrit précédemment, la coordonnée t n'apparaît pas, alors que sa dérivée y est pourtant présente. Cette variable t est alors considérée comme une **coordonnée cyclique**. Les moments conjugués associés sont alors donnés par

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, \quad (1.82)$$

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = - \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} + V(q) \right). \quad (1.83)$$

On peut définir une contrainte $\phi(q, t)$ à partir de l'équation (1.83) pour laquelle on voit que

$$\phi(q, t) = p_t + \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} + V(q) \right) = 0, \quad (1.84)$$

et l'hamiltonien donné par la transformée de Legendre s'écrit

$$H_c = p_t \dot{t} + p_q \dot{q} - L = p_t \dot{t} + \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} + V(q) \dot{t} \right) \quad (1.85)$$

$$= \dot{t} \cdot \phi(q, t). \quad (1.86)$$

De cette manière, on peut se rendre compte que l'hamiltonien est nul ($H_c = 0$) et est en fait une contrainte proportionnelle à $\phi(q, t)$. H est appelée **contrainte hamiltonienne**. On peut voir dès à présent que tout système physique, s'écrivant en fonction des variables (t, q) comme ici, aura non plus un hamiltonien mais des contraintes. Cela sera ainsi le cas pour toute théorie invariante par reparamétrisation du temps, comme en relativité où les solutions ne dépendront pas du système de coordonnées choisi et où t sera considéré comme une

variable dans l'espace-temps de coordonnées x^μ . Quand on utilise des contraintes, on voit que l'hamiltonien total est composé de l'hamiltonien du système et des contraintes avec leur multiplicateur de Lagrange. Cet hamiltonien total génère tous les flux possibles du système, venant de l'évolution temporelle ou bien des symétries s'il y en a. Si l'hamiltonien disparaît, alors l'hamiltonien total n'est qu'une combinaison linéaire des contraintes, ce qui est le cas ici. Ainsi,

$$H_{tot} = H_c = N(t) \cdot \phi(q, p_q, t, p_t, s), \quad (1.87)$$

où $N(t)$ est appelée **lapse function** en anglais, et vaut ici $N(t) = \frac{dt}{ds}$. La dérivée temporelle de N n'apparaît pas, montrant que N correspond bien à un multiplicateur de Lagrange : il permet de redéfinir arbitrairement le temps que l'on choisit en fonction du paramètre d'évolution s . Les équations d'évolution résultantes de la contrainte hamiltonienne donnée par l'équation (1.87) sont alors données par :

$$\dot{q} = \frac{dq}{ds} = \{q, H_{tot}\} = N \frac{p_q}{m}, \quad \dot{p}_q = 0, \quad (1.88)$$

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \{t, H_{tot}\} = N, \quad \dot{p}_t = 0. \quad (1.89)$$

Dans notre cas, en mécanique classique, prendre N comme étant constante revient à prendre t proportionnel à s , et redonne les équations de Newton. L'hamiltonien originel représentant l'énergie E du système est bien donné par

$$H = E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + V(q), \quad (1.90)$$

avec

$$\dot{p}_t = \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow p_t = \text{constante}. \quad (1.91)$$

D'après les équations (1.83) et (1.85), on peut alors exprimer p_t et H comme étant

$$\begin{cases} p_t = -H = H_c - H, \\ H_c = p_t + H. \end{cases} \quad (1.92)$$

En mécanique classique, p_t est une constante et on peut considérer que $H_c \equiv H + \text{constante}$ sans être nul : on redéfinit simplement l'énergie du système à une constante près. En relativité, cela sera différent car on parlera réellement de contraintes et H sera vraiment nul quand on considèrera des solutions physiques. Dans un tel système, tout se passera comme s'il n'y avait pas une 'évolution temporelle' puisque l'on utilisera des contraintes. On peut cependant définir comme précédemment un flux qui sera le semblant de 'dynamique' que le système verra.

Ainsi, en mécanique classique, l'évolution du système se fait de façon relative par rapport à une observable t dont on doit prendre en compte l'évolution au même titre que les autres variables canoniques q^i . En relativité, ce problème d'évolution relative par rapport à une des variables canoniques est très importante puisque, sous un changement de coordonnées, les équations de la dynamique doivent être inchangées. Or, en mécanique quantique, le temps est un paramètre extérieur et il sera essentiel et délicat de tenir compte de ce fait dans la création d'une théorie quantique de la gravitation.

On peut retenir ici que dans toute théorie invariante par changement de coordonnées comprenant la variable t , il existera un hamiltonien nul et l'évolution sera alors donnée par des contraintes.

1.10 L'intégrale invariante de Poincaré-Cartan et le principe de moindre action

Dans ce qui suit, on va s'intéresser aux trajectoires possibles d'un système en fonction d'une variable temporelle t que l'on distingue, comme en mécanique classique, des variables canoniques q^a . On va surtout se placer dans un espace à $2n+1$ dimensions, de coordonnées (p_a, q_a, t) , $a = 1..n$, mais un lien avec un système relativiste sera aussi donné et on va étendre la dimension de l'espace à $2n+2$ en incorporant le moment conjugué à la variable temporelle.

Proposition 9. Soit M^{2n+1} une variété différentielle de dimension $2n+1$ et α une 1-forme sur M . A chaque point $q \in M$, il existe une direction, c'est à dire une ligne droite dans l'espace tangent $T_q M$, ayant pour propriété que l'intégrale de α le long du bord d'un 'carré infinitésimal contenant cette direction' est égale à 0 :

$$d\alpha(V, W) = 0, \quad \forall W \in T_q M. \quad (1.93)$$

En supposant de plus que la 2-forme $d\alpha$ soit non-singulière, la direction de V est alors déterminée de façon unique. On l'appelle la **direction de vorticité** de la forme α . Les courbes intégrales du champ de directions de vorticité sont appelées **lignes de vorticité** ou **lignes caractéristiques** de la forme α (lignes grises sur la figure Fig.(1.5)).

Le Théorème de Stokes, défini d'abord en mécanique des fluides, peut être généralisé pour un espace de dimensions $n > 3$. Il permet ainsi de parler de **flux de trajectoires** possibles pour un système mécanique, généré par exemple par le champ de vecteur $(\Delta_H, 1)$ comme on va le voir, où Δ_H est donné par l'équation (1.64).

Proposition 10. Lemme de Stokes multi-dimensionnel :
Soit γ_1 une courbe fermée définissant une surface sur M , les lignes de vorticités sortantes de cette surface forment un **tube de vortacité**, comme illustré sur la figure Fig.(1.5). Les intégrales d'une 1-forme α le long de deux courbes encerclant le même tube de vortacité sont les mêmes : $\oint_{\gamma_1} \alpha = \oint_{\gamma_2} \alpha$, si $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, où σ est une partie du tube de vortacité entre les courbes γ_1 et γ_2 .

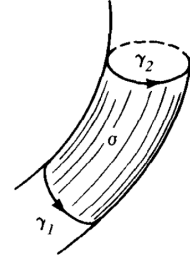


FIG. 1.5 – Tube de vortacité entre deux surfaces γ_1 et γ_2 [4].

Les équations de Hamilton

Toutes les propositions basiques de la mécanique hamiltonienne proviennent directement du lemme de Stokes. En prenant au départ \mathbb{R}^{2n+2} comme variété pour M^{2n+2} , avec les coordonnées (p_a, q_a, t, p_t) , $a = 1..n$, on construit une 1-forme :

$$\alpha_c = p_a dq^a + p_t dt. \quad (1.94)$$

Or, dans le cas général, pour des systèmes même non relativistes, on peut exprimer l'hamiltonien comme étant donné par la contrainte hamiltonienne, conduisant à la relation entre H_c , H et p_t selon l'équation (1.92). En utilisant cette relation, α_c peut s'écrire aussi⁸

$$\alpha_c = p_a dq^a + [H_c(q^a, p_a, t, p_t) - H(q^a, p_a)] dt = p_a dq^a - H(q^a, p_a) dt = \alpha. \quad (1.95)$$

La forme α correspond donc à la forme α_c pour laquelle on ne considère plus t comme une variable canonique, mais comme un paramètre d'évolution extérieur. Dans le cas de la mécanique classique, on se replace ainsi sur un espace à $2n + 1$ dimensions.

Proposition 11. Les lignes de vortacité de la forme $\alpha = p_a dq^a - H dt$ sur l'espace des phases étendu (p, q, t) de dimension $2n + 1$ possède une unique projection sur l'axe t , i.e. ces lignes sont données par les fonctions $p = p(t)$ et $q = q(t)$. Ces fonctions satisfont le système d'équations différentielles canoniques pour la fonction hamiltonienne H si on la considère comme étant l'hamiltonien :

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^a}, \quad \frac{dq^a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}. \quad (1.96)$$

Les lignes de vortacité de la forme $p_a dq^a - H dt$ sont les courbes du flux de trajectoires dans l'espace étendu, i.e. les courbes intégrales des équations canoniques (1.96). La différentielle de la forme α est donnée par

$$d\alpha = dp_a \wedge dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a} dp_a \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q^a} dq^a \wedge dt, \quad (1.97)$$

dont un vecteur propre de la matrice définie par $d\alpha$ dans les coordonnées (p, q, t) est $(-\frac{\partial H}{\partial q^a}, \frac{\partial H}{\partial p_a}, 1)$ de valeur propre 0, comme illustré sur la figure Fig.(1.6). Autrement dit, lorsque l'on considère des fonctions $F(t, q, p)$ définissant un champ de vecteur d'évolution Δ tel que

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial q^a} \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{\partial H}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial q^a}, \quad (1.98)$$

alors ce champ vérifie

$$(d\alpha)(\Delta) = 0 \quad (1.99)$$

et est appelé aussi **champ de vecteur nul de ω** .

⁸La forme particulière de α provient des travaux d'optiques pour lesquels on peut entre autre citer les noms de *Maupertuis* et *Huygens*, mais elle apparaît naturellement en relativité [13].

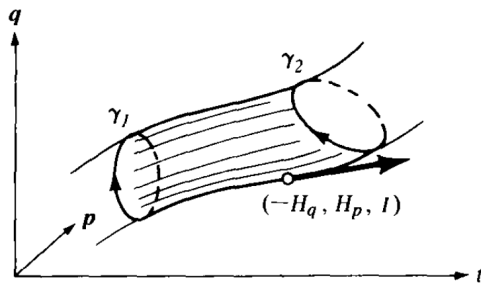


FIG. 1.6 – Tube de vortacité entre deux surfaces γ_1 et γ_2 pour $(\Delta_H, 1)$ [4].

En appliquant maintenant le théorème de Stokes sur la forme α , on obtient :

Proposition 12. *En supposant que les deux courbes γ_1 et γ_2 entourent le même tube de vorticité des équations (1.96), alors les intégrales de la forme $\alpha = p_a dq^a - H dt$ le long de ces courbes sont les mêmes :*

$$\oint_{\gamma_1} p_a dq^a - H dt = \oint_{\gamma_2} p_a dq^a - H dt. \quad (1.100)$$

La forme $p dq - H dt$ est appelée **intégrale invariante de Poincaré-Cartan**.

Cela signifie qu'à tout moment, pour tous les points de la trajectoire, la forme α est invariante. De même, il est possible de montrer, en utilisant le théorème précédent, qu'en se situant sur les plans $t = \text{constant}$, la 2-forme $\omega = dp_i \wedge dq^i$ est une intégrale invariante du flux de trajectoire entre t_0 et t_1 :

$$\oint_{\gamma} p dq = \int \int_{\sigma} dp \wedge dq = \int \int_{(\phi_{t_0}^{t_1})_{\sigma}} dp \wedge dq. \quad (1.101)$$

Application : le principe de moindre action de Hamilton

Dans l'espace T_q^*M , on considère une courbe connectant les points $x^0 = (p_0, q^0, t)$ et $x^1 = (p_1, q^1, t)$. Les courbes intégrales des équations de Hamilton sont les seules extr males de $\int p dq - H dt$ dans la classe des courbes γ reliant les points x^0 et x^1 :

$$\delta \int_{\gamma} \left(p \frac{dq}{dt} - H \right) dt = p \delta q|_0^1 + \int_{\gamma} \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt. \quad (1.102)$$

Connaissant la transformée de Legendre, et donc la relation entre lagrangien et hamiltonien, ce principe redonne le **principe de moindre action** donné initialement par Lagrange en faisant intervenir le lagrangien par $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$,

$$\int_{\gamma} (p dq - H dt) = \int_{\gamma} (p \dot{q} - H) dt = \int_{\gamma} L dt. \quad (1.103)$$

En particulier, pour un hamiltonien indépendant du temps, donc conservé, s'écrivant $H(p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, q) = h$, parmi toutes les courbes $q = \gamma(t)$ connectant deux points x^0 et x^1 , la trajectoire des équations de la dynamique (1.96) est un extremum de l'intégrale de l'action 'réduite'

$$\int_{\gamma} p \cdot dq = \int_{\gamma} p \dot{q} \cdot dt = \int_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t) \dot{q}(t) \cdot dt, \quad (1.104)$$

qui correspond au principe de moindre action de Maupertuis.

L'action d'un système

En mécanique classique, la fonction **action** $S(q, t)$ est ainsi donnée par l'intégrale

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_{\gamma} L dt = \int \alpha, \quad (1.105)$$

et sa différentielle (pour un point initial fixe) est égale à

$$dS = p dq - H dt, \quad (1.106)$$

où $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ et $H = p \dot{q} - L$ sont définis à l'aide des vitesses \dot{q} sur la trajectoire γ . Il faut de plus veiller à ce qu'une trajectoire dans l'espace des phases n'intersecte pas une autre trajectoire pour que l'extrémisation de cette fonction soit correcte.

Dans le cas d'un système relativiste, il faut tenir compte des $2n + 2$ variables canoniques (q^a, p_a, t, p_t) , et la fonction action est définie de même par

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int \alpha_c, \quad (1.107)$$

de contrainte hamiltonienne

$$H_c(q^a, p_a, t, p_t) = 0. \quad (1.108)$$

On vient ainsi de voir que pour un système, relativiste ou non, par les propriétés de l'espace des phases, le principe de moindre action intervient naturellement quelles que soient les coordonnées choisies.

1.11 Changement de variables : équations de Hamilton-Jacobi

La nature invariante de la relation entre la 1-forme $\alpha = pdq - Hdt$ et ses lignes de trajectoire pose la question de réécrire les équations du mouvement dans n'importe quel système de $2n + 1$ coordonnées dans l'espace T_q^*M . La méthode utilisant des fonctions génératrices pour des transformations canoniques et développée par Hamilton et Jacobi, est la plus performante des méthodes disponibles pour l'intégration des équations différentielles de la dynamique. L'idée sous-jacente de la méthode d'Hamilton-Jacobi consiste à ce que, sous une transformation canonique de coordonnées, la forme des équations du mouvement reste préservée selon les équations d'Hamilton (1.96). Ainsi, si on réussit à trouver une transformation canonique qui réduit la fonction hamiltonienne sous une forme telle que les équations peuvent être intégrées, alors on peut aussi intégrer les équations canoniques originales. Cela revient à déterminer un nombre suffisamment large de solutions à l'équation de Hamilton-Jacobi dont la fonction génératrice de la transformation canonique désirée en fait partie. On peut remarquer que cette méthode utilise la structure des coordonnées de l'espace des phases T_q^*M . En utilisant la propriété de l'équation (1.106), on voit directement que $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t)$ et $p = \frac{\partial S}{\partial q}$. La fonction action satisfait l'équation non linéaire, différentielle, du premier ordre, qui est appelée **équation de Hamilton-Jacobi** pour la fonction génératrice action S

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \quad (1.109)$$

Elle établit en fait une relation entre les trajectoires de systèmes mécaniques (rayons lumineux, donnés par H) et les équations différentielles partielles (les fronts d'onde), et aura permis à **Erwin Schrödinger** de formuler sa fameuse équation.

Définition d'une transformation canonique

Dans le formalisme lagrangien, on ne considère que les transformations sur M l'espace des configurations. Un des avantages du formalisme hamiltonien est d'autoriser des transformations sur T^*M qui mélangent les variables canoniques q et p , tout en préservant la nature hamiltonienne des équations du mouvement. La transformation $(q^\alpha, p_\alpha) \rightarrow (Q^\alpha, P_\alpha)(q, p, t)$ est alors une **transformation canonique** si elle préserve la structure symplectique

$$\omega = dp_a \wedge dq^a = dP_a \wedge dQ^a, \quad (1.110)$$

et donc les crochets de Poisson. En d'autres termes,

$$\{Q^a, P_b\} = \delta_b^a \quad \text{et} \quad \forall f, g \quad \{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}. \quad (1.111)$$

Il existe alors une fonction $K(Q, P, t) \in \mathcal{F}(T^*M)$ telle que

$$\dot{Q}^a = \frac{\partial K}{\partial P_a} \quad \dot{P}_a = -\frac{\partial K}{\partial Q^a}, \quad (1.112)$$

servant d'hamiltonien pour les nouvelles variables. Cette transformation détruit la nature de T^*M dans le sens où les nouvelles coordonnées Q^a ne sont plus uniquement fonction des coordonnées q^a et donc ne correspondent plus aux coordonnées sur M . Elles peuvent cependant à terme simplifier grandement le problème.

Définition des fonctions génératrices F

Pour une **fonction génératrice** F , il existe plusieurs transformations canoniques possibles. Néanmoins, connaissant son **type**, cette fonction mène à une classification complète des transformations canoniques et permet de spécifier une transformation canonique locale en donnant son type et sa fonction génératrice.

La 2-forme ω étant exacte, il existe une 1-forme $\theta_0 = p_a dq^a$ dont la dérivée extérieure est ω . Si on considère de même cette 1-forme construite dans le nouveau jeu de coordonnées obtenu par une transformation canonique $\theta_1 = P_a dQ^a$, la dérivée extérieure de θ_1 est de même ω par l'équation (1.110), et on a ainsi

$$d(\theta_0 - \theta_1) \doteq d(p_a dq^a - P_a dQ^a) = 0, \quad (1.113)$$

qui est une autre manière de prouver la canonicité de la transformation. D'après le **lemme de Poincaré** (1.48), il existe une fonction $F \in \mathcal{F}(T^*M)$ telle que

$$p_a dq^a - P_a dQ^a \doteq dF. \quad (1.114)$$

Après quelques manipulations, il est possible d'obtenir dans le cas général une relation liant F , la fonction génératrice, et les 2 hamiltoniens H et K , s'écrivant :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -H + K - \frac{\partial Q^a}{\partial t} P_a. \quad (1.115)$$

Cette équation est très utile pour la classification des transformations canoniques. Il est ainsi possible de définir 4 types de fonctions génératrices⁹

$$\begin{aligned} F_1(q, Q, t), & \quad F_2(q, P, t), \\ F_3(p, Q, t), & \quad F_4(p, P, t), \end{aligned} \quad (1.116)$$

telles que si le Jacobien de la transformation de coordonnées est non-nul, $\det \frac{\partial(Q, q)}{\partial(p, q)} \neq 0$, alors

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (1.117)$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (1.118)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \quad (1.119)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (1.120)$$

L'équation (1.109) correspond au cas où $F = S(Q, q)$ et $K = 0$, ayant comme conséquence la conservation des Q^a et P_a lors du mouvement : plus particulièrement, les Q^a sont les intégrales premières du système (comme par exemple l'énergie dans le cas d'une invariance par translation dans le temps, le moment cinétique, *etc*). Des 4 types, on va surtout utiliser par la suite la fonction $F_1(q, Q)$, utile pour obtenir une équation d'Hamilton-Jacobi, mais aussi $F_2(q, P)$ pour la théorie des perturbations canoniques, notamment dans le cas des perturbations scalaires en cosmologie.

1.12 Les équations de Maxwell en théorie des champs

On a entraperçu le fait que pour concilier mécanique newtonienne et électromagnétisme, il fallait se placer dans l'espace-temps à 4 dimensions de la relativité restreinte, l'espace de Minkowski. Puisque l'on a tous les éléments nécessaires sauf cette notion d'espace-temps, on va ici présenter l'électromagnétisme en utilisant ce qui a été vu précédemment, et cela permettra de faire un lien avec la construction de la gravitation quantique à boucles.

Soit (M, g) une variété Lorentzienne de dimension 4, on peut montrer que les équations de Maxwell en présence de sources s'écrivent de façon géométrique, en faisant intervenir seulement deux champs de 1-formes (des sections du fibré Λ^1), A et \mathcal{J} , qui représentent respectivement le **champ électromagnétique** (par le potentiel vecteur A_μ tel que $A = A_\mu dx^\mu$), et la **densité des charges électriques**. Les formes différentielles du champ et des charges $A, \mathcal{J} \in C^\infty(\Lambda^1)$ sont alors reliées par la relation

$$\mathcal{J} = d^* dA, \quad (1.121)$$

où d^* est l'opération adjointe de d . En utilisant leurs propriétés¹⁰, montrées par exemple par l'équation (1.44), il existe des 2-formes $F \doteq dA \in C^\infty(\Lambda^2)$, telles que $dF \doteq 0$, mais aussi $d^* \mathcal{J} = 0$. Les équations de Maxwell sont ainsi retrouvées par l'équation (1.121) dans un espace de Minkowski puisque

– $F = dA$ s'écrit

$$\vec{E} = \text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}(\vec{A}). \quad (1.122)$$

– $\mathcal{J} = d^* F$ s'écrit

$$\vec{J} = \text{rot}(\vec{B}) - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \rho = \text{div}(\vec{E}). \quad (1.123)$$

– $dF = 0$ s'écrit

$$\text{div}(\vec{B}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{E}) = 0. \quad (1.124)$$

– $d^* \mathcal{J} = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0, \quad \text{conservation de la charge} \quad (1.125)$$

où ρ est la densité volumique de charge, \vec{J} le courant associé, et E et B sont respectivement les champs électriques et magnétiques. Ces deux champs n'ont un réel sens physique qu'uniquement à travers le tenseur F , au contraire

⁹Ces fonctions génératrices sont liées entre elles, par exemple $F_1(q, Q, t) + PQ = F_2(q, P, t)$.

¹⁰Pour d^* , $d^* d^* = 0$

du quadrivecteur potentiel A_μ . Le tenseur $F = dA$ étant une 2-forme, on l'écrit $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.126)$$

et on appelle $F_{\mu\nu}$ le **champ tenseur électromagnétique**. Cette formulation de façon géométrique est très simple et va permettre une écriture commune pour toute théorie de connexions, où ici les champs A_μ peuvent être aussi vues comme des 1-formes de connexion sur un fibré et F comme une **2-forme de courbure**.

Il est intéressant pour comprendre l'origine de la gravité quantique à boucles de voir que l'électromagnétisme, sans le savoir au départ de sa construction, est en fait une théorie possédant des contraintes, et donc recourra à des multiplicateurs de Lagrange dans sa réécriture. Le lagrangien pour une particule libre comme le photon est donné par

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.127)$$

et les équations du mouvement sont données par les **identités de Bianchi**

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.128)$$

soit encore les équations (1.122) à (1.125). Les variables canoniques ne seront plus les positions et impulsions, mais les 4 champs continus contenus dans le potentiel quadrivecteur A_μ . En utilisant l'expression de $F_{\mu\nu}$ donnée par l'équation (1.126), on remarque que les dérivées spatiales de A_0 interviennent bien dans le lagrangien, mais qu'il n'est présent aucun terme dépendant de sa dérivée temporelle : le moment conjugué π^0 de A_0 est donc nul, montrant que A_0 n'est en fait pas une variable canonique mais un multiplicateur de Lagrange. Il existe alors dans cette théorie une contrainte. D'autre part, on parle de champs continus. Les équations d'Euler-Lagrange ne seront plus données par des dérivées partielles mais par des **dérivées fonctionnelles**. Les moment conjugués des champs spatiaux seront alors donnés par

$$E^a = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_a} = F^{0a} \quad (1.129)$$

et représentent le champ électrique donné dans l'équation (1.122) avec la composante A^0 correspondant ainsi au potentiel V . L'espace tangent est ainsi pourvu de la structure symplectique

$$\omega = dA_a(x) \wedge dE^a(x), \quad (1.130)$$

au même titre que les (q^a, p_b) précédent, et leurs crochets de Poisson sont alors donnés par

$$\{A_b(x), E^a(y)\} = \delta_b^a \delta^3(x - y) \quad (1.131)$$

pour lesquels la variable x agit comme un 'indice continu' qui labellise les variables aux différents points de l'espace. Les crochets de Poisson des champs ont la même définition que ceux utilisés en mécanique, mais avec comme différence l'utilisation de dérivées fonctionnelles ainsi qu'une intégrale sur les variables spatiales. L'hamiltonien est de plus donné, par définition, par :

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} [E^a E^b + B^a B^b] \delta_{ab} - A_0 \partial_a E^a \right), \quad (1.132)$$

où $B^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}F_{bc}$ est le champ magnétique, fonction des dérivées spatiales de A_a . On a vu que π^0 , le moment conjugué de A_0 , était tout le temps nul. Sa dérivée temporelle, nulle aussi, est alors donnée par

$$\dot{\pi}^0 = 0 = \{A_0, H\} = \partial_a E^a, \quad (1.133)$$

indiquant que dans ce système, il existe une contrainte donnée par la **loi de Gauss** dans le vide

$$\partial_a E^a = \text{div}(E) = 0. \quad (1.134)$$

E^a ne peut ainsi pas être choisi librement, puisqu'il doit être de divergence nulle. Les contraintes étant les générateurs des symétries, on peut alors regarder leur action sur le système. Cependant, les variables étant dépendantes de l'endroit où on les considère, on peut choisir d'intégrer les contraintes pour regarder leur effet global selon

$$G[\lambda] = \int d^3x \cdot \lambda(x) \cdot \partial_a E^a(x), \quad (1.135)$$

où λ est une fonction \mathcal{C}^∞ locale : cette équation n'est qu'une sommation des contraintes existant en tout point de l'espace, mais est mieux définie et plus facile à manipuler puisque l'on ne traite plus maintenant des distributions (via les deltas de Dirac), mais des fonctions de l'espace. De plus, λ est arbitraire mais correspond exactement à A_0 , et calculer les crochets de Poisson de $G(\lambda)$ avec l'hamiltonien permet de voir qu'ils sont

bien nuls, indiquant que les orbites (trajectoires) générées par la contrainte laissent la théorie invariante. Ces contraintes sont elles-aussi invariantes sous la dynamique et on les appelle **contraintes de première classe**. Cela va se traduire par une **liberté de jauge**, la liberté de redéfinir certaines variables par une fonction que l'on va spécifier en calculant les crochets de Poisson de cette contrainte avec les variables. Ces orbites vont être définies par l'information sur les crochets de Poisson suivant

$$\delta_\lambda E^a = \{E^a, G[\lambda]\} = 0, \quad \delta_\lambda A_a = \{A_a, G[\lambda]\} = \partial_a \lambda. \quad (1.136)$$

Le long des orbites, cette contrainte ne va pas modifier le champ électrique, mais le potentiel vecteur peut être modifié par le gradient d'une fonction quelconque, ce qui correspond bien à la liberté de jauge usuelle $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$ laissant le tenseur $F_{\mu\nu}$ invariant, et donc la physique associée. La **contrainte de Gauss** est ainsi un générateur d'une transformation de jauge qui s'exprime dans le formalisme hamiltonien par les crochets de Poisson¹¹. D'autre part, la contrainte générée par $\pi^0 = 0$ n'a pour incidence que la possible redéfinition de A_0 par une fonction quelconque, ce qui est attendu puisque A_0 est un multiplicateur de Lagrange et est donc arbitraire. Pour finir, dans le formalisme hamiltonien, les équations de Maxwell seront données par l'étude des équations du mouvement de A_a et E^a telles que

$$\dot{A}_a = \{A_a, H\} = E_a + \partial_a A_0, \quad (1.138)$$

$$\dot{E}^a = \{E^a, H\} = \epsilon^{abc} \partial_b B_c. \quad (1.139)$$

Il n'existe ici pas de choix unique pour les solutions des équations du mouvement puisqu'elles vont dépendre du choix de A_0 : on parle alors d'un **choix de jauge**, dont on peut citer comme jauges usuelles en électromagnétisme la jauge de Lorenz, ou bien celle de Coulomb. Cette liberté de jauge est ainsi cruciale pour retrouver les degrés de liberté physiques du photon qui sont au nombre de deux et qui correspondent aux hélicités : en partant des 4 composantes de A^μ , les caractéristiques de A^0 et l'action de la contrainte de Gauss vont contraindre les expressions pour retrouver les deux degrés de liberté finaux.

D'autre part, les interactions entre particules, fermions ou bosons, sont rendues possibles par le couplage de deux champs différents ou non entre eux, et la constante de couplage donnera, comme pour la masse, une propriété intrinsèque supplémentaire à la particule. Pour le photon, décrit par le quadri-potentiel vecteur, il n'existe pas de termes en $A_\mu A_\nu$, montrant que les photons n'interagissent pas entre eux. Dans le cas de l'électrodynamique, avec l'**équation de Dirac**, l'interaction est donnée dans le lagrangien par un terme supplémentaire possible, $-e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi$ où e est la charge de l'électron,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi. \quad (1.140)$$

Or, associer deux lagrangiens ne va plus permettre à la théorie d'être invariante sous les transformations globales associées à chaque particules prises séparément. En effet dans ce formalisme, on a vu juste précédemment que pour retrouver les degrés de liberté physiques à partir des objets mathématiques avec plus de composantes que nécessaire, il était important de considérer les symétries. L'interaction étant locale, il va falloir que la théorie complète soit invariante localement, telle qu'ici par exemple, les transformations¹²

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad \Psi \rightarrow e^{-ie\lambda(x)} \Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow e^{ie\lambda(x)} \bar{\Psi} \quad (1.141)$$

laissent le Lagrangien (1.140) invariant. Suivant le théorème de Noether, à chaque symétrie globale est associée une charge conservée. Ici, pour le cas de l'électron, cette charge correspond à la symétrie $\lambda(x) = \text{constante}$ et est la charge électrique e . Pour compenser le fait que l'on ait effectué une transformation de jauge tout en souhaitant que la théorie reste invariante sous cette transformation, il est nécessaire de redéfinir les dérivées usuelles en dérivées dites covariantes selon

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.142)$$

La densité lagrangienne de l'électrodynamisme est alors donnée par

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.143)$$

¹¹On peut aussi le voir comme dans le cas de l'impulsion générant les translations selon

$$x' = x + \lambda = Tx = \exp[-i\lambda p]x = \left(1 - i\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right)x,$$

avec ici

$$\delta_\lambda X = \left(\exp \left[-G[\lambda, E^a = \frac{\delta}{\delta A_a}, A_a = \frac{\delta}{\delta E^a}] - \mathbb{I} \right] X. \quad (1.137)$$

¹²La composante A_0 a été gardée pour la généralisation.

pour laquelle on a défini maintenant

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{ie}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=0}. \quad (1.144)$$

Plus particulièrement, les transformations (1.141) sont caractéristiques d'une transformation du groupe $U(1)$: A_μ , à valeur dans ce groupe, va alors commuter avec A_ν permettant de retrouver la non-interaction entre photons.

Ces observations sont ainsi génériques à toute théorie possédant des contraintes générant des symétries, appelées **symétries de jauge**, et pour laquelle les solutions des équations du mouvement vont alors contenir des paramètres arbitraires. Cependant en physiques, les observables pertinentes pour étudier un système sont souvent données par des variables qui seront **invariantes de jauge**, pour lesquelles les équations du mouvement restent identiques quel que soit le choix des paramètres utilisés, et dont les résultats donneront alors la bonne description.

1.13 Observations sur la mécanique classique

Classiquement, la formulation lagrangienne de la mécanique est ainsi fondée sur l'observation de l'existence de principes variationnels derrière toute loi fondamentale mettant en jeu un équilibre des forces. On peut ainsi appliquer ce formalisme à de nombreux autres domaines de la physique et voir que cela convient à la description de nombreux phénomènes.

En partant de ce postulat, la mécanique newtonienne seule permet de montrer que si on considère une particule ayant une position $q(t)$ dans l'espace à un temps t , se déplaçant avec une vitesse $v = \dot{q}(t)$ dans un référentiel inertiel, alors

- les équations du mouvement sont données par un lagrangien : il faut, pour avoir la dynamique d'une particule, lui fournir une fonction sur le fibré tangent TM correspondant à l'espace des phases.
- si de plus le système présente des symétries, concrètes ou abstraites, il existe alors des quantités conservées comme par exemple l'énergie, le moment cinétique, et bien d'autres possibilités.
- il existe un espace dual, défini par le fibré cotangent T^*M sur lequel le lagrangien est remplacé par un hamiltonien. Les équations du mouvement y sont équivalentes, mais la structure mathématique du formalisme hamiltonien est beaucoup plus riche.
- il existe naturellement sur T^*M une structure symplectique correspondant à des formes différentielles, indépendant du système de coordonnées, tenseurs d'ordre $(r, 0)$, et donc répondant ainsi parfaitement au principe de relativité.
- cette structure avec la dynamique donnée par l'hamiltonien, ou plus particulièrement le moment conjugué p_t , permet de définir un principe variationnel donnant une action, qui est bien dépendante du lagrangien comme suggérées par les équations d'Euler-Lagrange.
- pour que la particule (autre que le photon) se mette en mouvement, il faut la doter d'une quantité intrinsèque à la particule : sa masse inertielle. Son mouvement devra aussi tenir compte de forces induites par des potentiels, notamment attractif comme la gravitation. On a ainsi une définition physique de la notion de masse répondant au principe d'équivalence newtonien.

Pour cela, il suffit de doter l'espace tangent $TM = \mathbb{R}^{2n}$ de coordonnées (q, \dot{q}) , d'une simple fonction donnant la dynamique, le **lagrangien**. Ce lagrangien rend de plus compte des couplages entre différents phénomènes et permet de définir toute une structure mathématique riche, très utile pour comprendre la dynamique du système. Par la suite, c'est en se basant sur cette structure mathématique (qui n'est bien sûr pas apparue directement mais après beaucoup d'étapes de compréhension) que se sont formées les autres théories, plus complètes et donnant une meilleure description des phénomènes physiques, la mécanique classique n'en étant en fait qu'un cas limite. On va ainsi voir que pour mieux comprendre notre monde, il va être nécessaire de remettre en question cette première approche, et construire dans le prochain chapitre, des théories plus fondamentales, les théories relativistes et quantiques.

Chapitre 2

La Mécanique moderne

Look deep, deep into nature, and then you will understand everything better.

Albert Einstein, 1951

Introduction

Dans ce chapitre, les théories de relativité restreinte et générale, avec la mécanique quantique, vont être présentées de manière succincte, puisque l'on suppose les concepts abordés ici déjà connus. On va ainsi se contenter d'introduire les notions utiles pour la suite, avec toujours cependant quelques ouvertures, notamment en relativité restreinte pour laquelle on pourra voir que les équations du mouvements des particules libres sont en fait déjà encodées dans la théorie. Le lecteur plus intéressé pourra consulter les ouvrages [16] à [24].

2.1 La Relativité Restreinte

La relativité restreinte est la première théorie à s'être fondée sur des symétries (de l'espace-temps). Elle a ainsi défini la notion de **théorie de jauge** pour laquelle l'action doit être invariante sous l'action d'un groupe de symétrie. On va alors voir dans ce paragraphe que le simple fait d'avoir un espace-temps homogène et isotrope permet d'obtenir des équations contraignant les phénomènes qui y sont présents.

2.1.1 Existence naturelle d'une vitesse limite

Dans la construction de la mécanique classique par Newton, aux échelles de vitesses envisagées, le principe fondamental de la dynamique et les transformations de Galilée ont été posés de manière assez intuitive. Ce faisant, il existe diverses possibilités pour questionner la robustesse des hypothèses qui y ont été faites. L'électromagnétisme, en ce qui la concerne, met en jeux des vitesses très importantes comme pour le photon. Elle ne dit rien quant au principe d'équivalence mais respecte le principe de relativité, ainsi que la notion de force : en appliquant une force sur un électron, la **force de Lorentz**, celui-ci se mettra alors en mouvement. La mécanique classique et l'électromagnétisme diffèrent ainsi sur le choix des transformations de coordonnées : les équations de Maxwell sont invariantes par **transformations de Lorentz** et non pas sous les transformations de Galilée, et une possibilité est donc la remise en cause des transformations de Galilée.

Einstein, en 1905, proposa une solution à ce problème en se basant sur 'trois' postulats : le principe de relativité, le principe de causalité et le fait que le module de la vitesse de la lumière dans le vide soit indépendant de l'état de mouvement de la source. Cependant, cette dernière assertion est en fait une conséquence naturelle des 2 autres postulats et des propriétés d'homogénéité et d'isotropie de l'espace et du temps. Ainsi, pour deux référentiels en translation rectiligne uniforme selon un axe Ox à la vitesse V l'un par rapport à l'autre, les transformations de coordonnées, dites **transformations de Lorentz**,

1. définies dans un **espace-temps homogène et isotrope**,
2. ayant une **structure de groupe**¹,
3. respectant le **principe de relativité**,
4. respectant le **principe de causalité** : quel que soit le référentiel, un événement survenant avant un autre sera toujours considéré comme antérieur,

¹L'élément neutre s'obtient avec $V = 0$, l'inverse avec $-V$, et l'associativité avec le fait que, puisque l'espace étant homogène, les transformations sont linéaires.

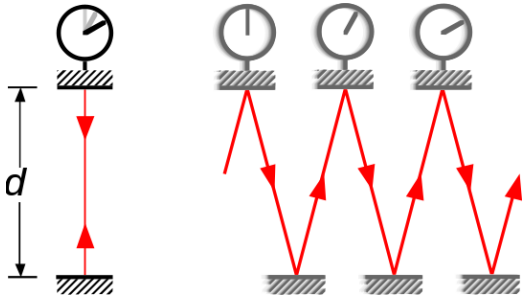


FIG. 2.1 – trajet d'un rayon lumineux entre deux miroirs dans un train en translation, selon un passager et selon un observateur extérieur.

mènent naturellement à l'apparition d'une **vitesse limite** c , qui est la vitesse de la lumière dans le vide [16]. Il est possible d'arriver à cette même conclusion en observant le trajet d'un photon se réfléchissant dans un miroir situé dans un train en mouvement, comme illustré dans la figure Fig.(2.1). Cela signifie que pour un mobile en translation à vitesse \vec{V} par rapport à un référentiel $R(t, r)$, dans son référentiel propre $R'(\tau, l)$, le temps τ s'écoule plus lentement et il voit les longueurs contractées selon

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}, \quad d\vec{l} = \frac{d\vec{r}'}{\sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}}, \quad (2.1)$$

ce qui est *a priori* contre-intuitif à notre échelle. L'existence de cette vitesse limite est ainsi une grande nouveauté correspondant à l'apparition d'une 'constante de structure' de l'espace-temps².

Il n'y a alors plus de notion d'**action instantanée** de la part d'une force, montrant l'incompatibilité de la relativité restreinte avec la mécanique newtonienne.

2.1.2 Transformations de Lorentz

Les transformations dans les deux approches font intervenir des fonctions hyperboliques et ont pour expression ($\mu = 0..3$)

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.2)$$

où Λ_{ν}^{μ} est la **matrice de Lorentz** (ici selon une direction et sans tenir compte des rotations)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (2.3)$$

2.1.3 Métrique de Minkowski

Pour rendre compte de deux référentiels inertiels en translation, on voit qu'il faut se placer dans un espace-temps à 4 dimensions et que même la composante temporelle est affectée par la transformation. Une base e_{μ} de cet espace définit une métrique $g_{\mu\nu} = e_{\mu} e_{\nu}$, et par changement de coordonnées,

$$g'_{\mu\nu} = e'_{\mu} e'_{\nu} = (\Lambda_{\mu}^{\alpha} e_{\alpha})(\Lambda_{\nu}^{\beta} e_{\beta}) = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

La seule possibilité pour la métrique est la **métrique de Minkowski** notée $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \mathbb{1}_3)$, tenseur de rang 2, donnant alors la relation caractérisant la matrice de Lorentz

$${}^t \Lambda \eta \Lambda = \eta. \quad (2.5)$$

2.1.4 Quadrivecteurs impulsion et force

En s'aidant notamment de l'équation (2.1), il est possible de définir alors un nouveau principe fondamental de la dynamique. Pour une force \vec{F} s'exerçant sur un mobile, le quadrivecteur force peut être défini à partir de l'impulsion via

$$K^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau}, \quad (2.6)$$

ces deux quadrivecteurs s'écrivant

$$P^{\mu} = m\gamma(V) \begin{pmatrix} c \\ \vec{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ m\gamma(V) \vec{V} \end{pmatrix}, \quad K^{\mu} = \gamma(V) \begin{pmatrix} \frac{\vec{F} \cdot \vec{V}}{c} \\ \vec{F} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où E est l'énergie du mobile donnée par la fameuse équation d'Einstein

$$E = \gamma mc^2 \Leftrightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.8)$$

et $E_0 = mc^2$ la masse du mobile au repos, c'est à dire dans son référentiel propre. L'équation (2.8) est le résultat de la relativité restreinte qui est le moins robuste puisque la composante P^0 à été postulée comme étant $\gamma(v)m$

²Il existe d'autres visions possibles.

facteur d'une vitesse que l'on a choisi comme étant c . Cependant, les observations montrent que ce choix est tout à fait valide : l'équation de l'énergie est alors considérée comme correcte et redonne bien, dans le cas des petites vitesses, l'expression de l'énergie pour la mécanique newtonienne. D'autre part, ce lien entre masse et énergie cinétique montre la possibilité de création de masse à partir d'énergie, ce qui est bien observé dans le cadre des accélérateurs de particules.

L'apparition de tenseurs en relativité restreinte est ainsi naturelle. Elle est liée à la prise en considération d'une 4^{ème} dimension forçant l'utilisation de quadrivecteurs comme P^μ et de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. L'équation (2.6) est alors invariante sous une transformation de Lorentz et se réduit à l'équation classique dans le cas des petites vitesses. Une autre propriété importante de la relativité restreinte provient du produit $P^\mu P_\mu$ qui est un scalaire, invariant donc sous les transformations de Lorentz, et vaut

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^4. \quad (2.9)$$

Cette propriété va permettre une compréhension profonde de la physique présente sur un espace-temps plat puisque la détermination de l'existence de particules y est liée, comme on peut le voir juste après.

2.1.5 Groupe de Poincaré

Les transformations de Lorentz générales sont données par $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + X^\mu$ où les X^μ traduisent une translation, et forment un groupe, le **groupe de Poincaré**. Ce groupe de symétries de l'espace-temps est en fait très important puisqu'il détermine une grande partie de la physique sur un espace de Minkowski. Il est déterminé par 10 générateurs : les 6 paramètres de $\Lambda_{\mu\nu}$ (3 rotations et 3 boosts) ainsi que les 4 paramètres de translation de X^μ , satisfaisant l'algèbre

$$[X_\mu, X_\nu] = 0, \quad [X_\mu, \Lambda_{\nu\sigma}] = i(\eta_{\mu\nu} X_\sigma - \eta_{\mu\sigma} X_\nu), \quad (2.10)$$

$$[\Lambda_{\mu\nu}, \Lambda_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} \Lambda_{\sigma\nu} - \eta_{\nu\rho} \Lambda_{\sigma\mu} - \eta_{\mu\sigma} \Lambda_{\rho\nu} + \eta_{\nu\sigma} \Lambda_{\rho\mu}). \quad (2.11)$$

Il existe en physique une correspondance assez extraordinaire :

Les particules élémentaires sont associées aux représentations irréductibles du groupe de Poincaré.

En trouvant les **Casimirs** ($\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$) de l'algèbre tels que $[a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{C}_2, X_\mu] = [a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{C}_2, \Lambda_{\mu\nu}] = 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, et en cherchant leurs valeurs propres (c_1, c_2) sur les états du système, on va pouvoir définir et classer les particules élémentaires : chaque particule sera ainsi désignée par un couple (c_1, c_2) pour lequel il est possible de donner un sens physique. Comme on vient de le voir, un des Casimirs n'est autre que le produit des quadrivecteurs énergie-impulsion entre eux $P^2 = P^\mu P_\mu$, et le second est le produit $W^\mu W_\mu$ où W^μ est le **pseudo-vecteur de Pauli-Lubansky** [17] :

$$\mathcal{C}_1 = P^\mu \cdot P_\mu, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{C}_2 = W^\mu \cdot W_\mu, \quad W_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\nu\rho} X^\sigma. \quad (2.13)$$

En considérant une particule de masse non-nulle dans son référentiel au repos $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$, on peut montrer que $c_1 = m^2$ et $c_2 = -m^2 s(s+1)$ où s est le **spin** de la particule, issu d'un moment. Pour une particule de masse nulle, en se plaçant dans son référentiel tel que $P^\mu = (p^0, 0, 0, p^0)$, $W^\mu = \lambda P^\mu$ où λ est l'**hélicité** de la particule. En considérant les propriétés de transformations pour le cas de scalaires, vecteurs, champs fermioniques, sous un changement infinitésimal des coordonnées, il est possible de leur associer des particules définies par leur masse, leur spin ou leur hélicité. Comme en mécanique classique sauf pour le photon, pour que la particule puisse avoir un mouvement, on a supposé qu'elle devait être massive. On peut ainsi voir que pour un champ scalaire ϕ , défini au sens de la relativité restreinte comme étant invariant par transformation de Lorentz, de masse non-nulle, on observe la correspondance $P_\mu \rightarrow \partial_\mu$ et l'équation $P^2 \phi = m^2 \phi$ redonne l'équation de Klein-Gordon, avec obligatoirement $s = 0$ comme attendu par la physique des particules. On peut ainsi trouver à partir des Casimirs du Groupe de Poincaré que la propagation des particules libres physiques dans un espace de Minkowski peut être entre autre³ donnée par [17]

1. pour un **champ scalaire** ϕ : $\forall m$, son spin est nul $s = 0$ et il doit obéir à⁴

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad \text{équation de Klein-Gordon} \quad (2.14)$$

2. pour un **champ fermionique** ψ : $\forall m$, son spin est $s = \frac{1}{2}$ et il doit obéir à

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad \text{équation de Dirac} \quad (2.15)$$

$$(\square + m^2) \psi = 0. \quad (2.16)$$

Cela correspond au cas des protons et des électrons.

³Il existe d'autres équations qui sont *a priori* des solutions mathématiques mais non physiques.

⁴Rappel du **D'Alembertien** $\square = -\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_x^2$ dans la métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \mathbb{1}_3)$.

3. pour un **champ vectoriel** A^μ :

– si $m \neq 0$ alors il est de spin $s = 1$ et obéit à, en notant $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad \text{équation de Proca} \quad (2.17)$$

$$(\square + m^2) A^\mu = 0. \quad (2.18)$$

Cela correspond au cas des bosons de jauge W^\pm pour l'interaction électrofaible.

– si $m = 0$ alors il est d'hélicité $\lambda = \pm 1$ et obéit à, en notant $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \text{équation de Maxwell} \quad (2.19)$$

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.20)$$

Cela correspond au cas des photons.

Dans ce formalisme, sous les transformations de Lorentz et non plus celle de Galilée, les équations de Maxwell pour le photon apparaissent naturellement mettant ainsi fin au paradoxe entre les deux théories classiques, la mécanique et l'électromagnétisme.

Afin d'obtenir l'équation de Dirac, il a été fait l'hypothèse que les composantes du champ fermionique formaient un *espace vectoriel linéaire* permettant la construction d'une représentation du groupe de Poincaré. Cette hypothèse, mathématiquement simple, possède en fait une conséquence physique hautement non-triviale : elle correspond à un **principe de superposition** et pourrait être corrélée à l'apparition de la notion de **dualité onde-corpuscule**, à la base de la mécanique quantique.

Une simple remarque sur le spin : on traite le cas de particules pour lesquelles on a fait l'hypothèse que le spin était donné par la valeur de la représentation dans laquelle on se plaçait. Le spin apparaît par la valeur propre de la norme du moment correspondant aux rotations et boosts dans la matrice de Lorentz : dans le langage de **Dirac** $J^2|etat > = \hbar s(s+1)|etat >$ où \vec{J} est le moment, et \hbar la constante de Planck. L'existence du spin, qui peut être vu comme une **charge de Lorentz** puisqu'invariant sous ces transformations, est introduit ici après compréhension de la mécanique quantique, mais on peut remarquer qu'il est présent lui aussi de part la structure de l'espace-temps.

En d'autres termes, les particules pouvant exister en relativité restreinte possèdent déjà quelques aspects quantiques, ou tout du moins sont compatibles avec les idées issues de la **première quantification**, telles le **principe de correspondance de la mécanique quantique** :

$$E \rightarrow i\hbar\partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\partial}. \quad (2.21)$$

En effet, dans un espace de Minkowski, toute particule X , même le photon, doit ainsi satisfaire une équation de Klein-Gordon, dans les bonnes unités,

$$(\square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2})X = 0. \quad (2.22)$$

Celle-ci peut se comprendre par l'application de l'équation (2.21) à la définition (2.8) de l'énergie en relativité restreinte, ce qui est bien le cas comme on peut le voir dans les équations du mouvement. Il est possible d'observer que le principe de correspondance est simplement donné par

$$P^\mu = \begin{pmatrix} p_t \\ \vec{p} \end{pmatrix} \rightarrow -i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_a \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

où on a montré par l'équation (1.92) que pour toute théorie à contraintes, comme c'est le cas en relativité, $H_c = E + p_t \approx 0$ pour les solutions physiques. Ici, nous n'avons fait qu'effleurer la mécanique quantique. Les théories importantes comme l'**électrodynamique quantique** (QED) ou bien la **chromodynamique quantique** (QCD) pour l'interaction forte, ne découlent évidemment pas de la relativité restreinte mais celle-ci constitue un guide précieux pour invalider beaucoup de théories incorrectes.

On voit ainsi que les effets relativistes ne s'appliquent pas qu'aux objets ayant une vitesse proche de celle de la lumière, ni ayant des énergies élevées, mais qu'ils s'appliquent aussi aux objets quantiques. Mécanique classique, quantique et relativité restreinte sont ainsi très liées et permettent de définir une première approche à la notion de champs qui composent notre monde. Il est de plus possible d'étendre ces observations au cas du spin $s = 2$, correspondant en théorie au **graviton**, mais dès lors des incompatibilités apparaissent : même si dans cette théorie on voit que l'espace-temps spécifie un tant soit peu la physique qui doit y être présente, il existe toujours des distorsions avec la mécanique newtonienne résultant de l'absence de la gravitation en relativité restreinte. Il va falloir attendre 1915 pour qu'Einstein lui-même développe pour cela la théorie de la relativité générale.

2.2 La Mécanique Quantique

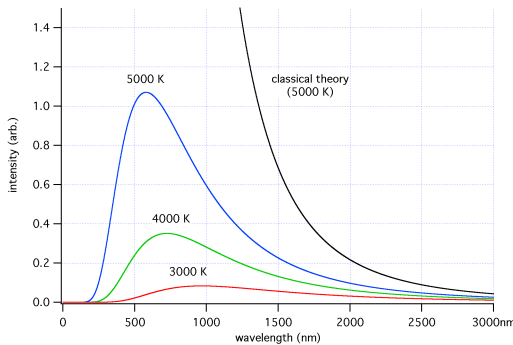


FIG. 2.2 – Intensité du rayonnement en fonction de sa fréquence et de la température du corps noir.

la fréquence de cette lumière était liée elle-aussi à l'énergie E des photons par la relation de Planck. Cette observation montrait pour la première fois la notion de **dualité onde-corpuscule**.

En 1923, **Louis de Broglie** supposa que ce qui avait été ainsi postulé pour le photon pouvait être aussi postulé pour tous les autres types de particules, comme l'électron. Cette hypothèse fut confirmée par l'expérience de diffraction d'un flux d'électrons sur 2 trous⁵, donnant un résultat identique aux photons et montrant que les électrons pouvaient eux aussi être interprétés en termes d'ondes.

Ainsi, chaque particule peut être considérée comme une onde
– d'énergie

$$E = h\nu, \quad (2.24)$$

– et de moment⁶

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.25)$$

Ces réflexions ont alors permis la construction d'une théorie donnant une description très fidèle des phénomènes microscopiques par la présence de quanta.

2.2.1 Procédure de première quantification

En mécanique quantique,

- l'état d'un système est représenté par un vecteur dans l'**espace de Hilbert**. Mathématiquement, un espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe, équipé d'un produit interne faisant intervenir le conjugué d'une variable, et devant être complet⁷. On note $|\Psi\rangle$ un élément de cet espace, et $\langle\Psi|$ les éléments duaux tels que le produit interne entre deux états soit donné par

$$\langle\Psi_2|\Psi_1\rangle^* = \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle. \quad (2.26)$$

En mécanique quantique, les espaces de Hilbert sont souvent de dimension infinie. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'espace de Hilbert est composé de toutes les fonctions complexes de carré sommable $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M)$, fonction soit de x soit de p mais pas des deux en même temps.

- les observables sont représentées par des **opérateurs auto-adjoints**, souvent simplement hermitiens, tels que

$$A^\dagger = A, \quad \text{et} \quad \langle\Psi_2|A\Psi_1\rangle = \langle A^\dagger\Psi_2|\Psi_1\rangle. \quad (2.27)$$

En général, deux opérateurs ne commutent pas et on ne peut pas mesurer leur observable simultanément, ce dont témoignent les **incertitudes d'Heisenberg**. Les opérateurs, comme par exemple celui donnant la position d'une particule, auront de plus un **spectre de valeurs discrètes possibles**, et non plus continu comme dans le cas classique.

⁵Donnant le prix nobel en 1937 à George Thomson et Joseph Davisson.

⁶Donné par les équations de la relativités restreinte.

⁷Toute suite de Cauchy dans cet espace converge vers un point de cet espace.

- l'évolution d'un tel système peut être donnée selon deux⁸ points de vue : une évolution unitaire d'un vecteur dans un espace de Hilbert, la **vision de Schrödinger**, ou bien en gardant l'état fixé et considérant que ce sont les observables qui évoluent selon des équations du mouvement, la **vision d'Heisenberg**.

La mécanique quantique est différente de la mécanique classique. Il n'est pas nécessaire de partir d'un système classique pour le quantifier, mais c'est généralement la procédure adoptée. Il n'y a cependant pas de correspondance simple entre une théorie classique et une théorie quantique : il existe des théories classiques sans contrepartie quantique bien définie (multiples possibilités), ou bien des théories quantiques sans aucune analogie classique. Dans de nombreuses situations, il sera utile de se ramener à un exemple que l'on sait résoudre, et on va ainsi regarder le cas simple de l'oscillateur harmonique de pulsation ω et de masse m à une dimension subissant un potentiel quadratique. Son lagrangien s'écrit alors

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad (2.28)$$

donnant les équations du mouvement

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.29)$$

Pour faire la transition vers la mécanique quantique, il est plus utile d'utiliser l'espace cotangent et son hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad (2.30)$$

avec $\{x, p\} = 1$ dont les solutions correspondent à des fonctions sinusoïdales que l'on peut exprimer selon

$$x(t) = x_0 e^{i(\omega t + \alpha_0)}. \quad (2.31)$$

Dans la représentation de Schrödinger

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on considère la vision de Schrödinger et l'utilisation d'une **fonction d'onde** évoluant dans le temps $\Psi(x, t)$, représentant les différentes composantes du vecteur d'état $|\Psi\rangle$ telle que sur, la base des positions, $|\Psi(t)\rangle = \int dx \Psi(x, t) |x\rangle$. La **quantification canonique** revient à promouvoir les crochets de Poisson des variables en commutateurs d'observables, notées \hat{x} , selon la relation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\{x, p\} = i\hbar. \quad (2.32)$$

Pour les états représentés par des fonctions d'ondes dépendant de x et t , \hat{x} agit par multiplication et \hat{p} agit par dérivation, respectant la relation (2.32)

$$\hat{x}\Psi(x, t) = x\Psi(x, t), \quad \hat{p}\Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t). \quad (2.33)$$

L'opérateur hamiltonien est obtenu en regardant l'action des opérateurs précédents dans l'hamiltonien classique, et s'écrit ici

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \quad (2.34)$$

L'équation du mouvement est alors donnée par l'équation de Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\partial_t\Psi \quad (2.35)$$

qui s'obtient [18] de même en partant de l'équation de Hamilton-Jacobi (1.109).

Comme l'hamiltonien est ici indépendant du temps, la solution est une superposition de fonctions labellisées par un entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \Psi_n(x, t) \quad \text{telles que} \quad \Psi_n(x, t) = H_n(\sqrt{\omega}x) e^{-\frac{1}{2}\omega x^2 - iE_n t}, \quad (2.36)$$

où H_n est un polynôme de Hermite de degré n et E_n est une valeur propre de l'énergie,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (2.37)$$

On parle de mécanique quantique puisque le spectre des opérateurs est discret et fait intervenir des quanta. Ici, l'énergie minimale est $E_0 = \frac{\hbar}{2}\omega$, mais rien n'empêche de renormaliser l'énergie par $V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{\hbar}{2}\omega$ donnant les

⁸Il existe aussi le point de vue de l'interaction, mais nous ne nous sommes pas intéressés ici aux autres formalismes de la mécanique quantique (comme celui de Böhm).

mêmes solutions : cela correspond à l'invariance par redéfinition de l'énergie vue précédemment. Les coefficients c_n sont ainsi reliés à la probabilité $P_n = c_n^* c_n$ d'observer un système décrit par la fonction d'onde Ψ_n telle que

$$1 = \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \sum_n P_n = \int dx |\Psi(x, t)|^2. \quad (2.38)$$

Une remarque peut ainsi être faite : il est connu que la notion d'espace de Hilbert est reliée à la conservation de la probabilité et donc à la présence d'un temps externe en fonction duquel est conservé la probabilité. On peut alors se poser la question si le concept d'espace de Hilbert est toujours nécessaire lorsque l'on cherche à quantifier une théorie covariante.

Il existe aussi une autre manière de résoudre les équations, consistant à introduire les **opérateurs de création et d'annihilation**, \hat{a}^\dagger et \hat{a} , tels que

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}). \quad (2.39)$$

Suivant cette définition, ces opérateurs vérifient la relation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (2.40)$$

et l'hamiltonien est alors donné par

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (2.41)$$

Cette approche est reliée à la **seconde quantification** où on définira un opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, d'état propre $|n\rangle$, représentant le nombre n de particules de cet état dans un nouvel espace, l'**espace de Fock**, et d'énergie E_n . Il existe ainsi un état ne possédant pas de particules, l'**état du vide** $|0\rangle$, défini par

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad (2.42)$$

tel que l'état à n particules $|n\rangle$ est donné par $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$. La fonction d'onde dans cette base s'écrit maintenant

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t} |n\rangle. \quad (2.43)$$

Dans la représentation de Heisenberg

Dans cette représentation, les états sont fixés et les opérateurs évoluent dans le temps tels qu'il existe un **opérateur unitaire d'évolution**⁹

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle = \mathcal{P}e^{-i \int^t H dt} |\Psi(0)\rangle \quad (2.44)$$

où \mathcal{P} est l'ordonnancement, ou **Path order** en anglais. Dans le cas où l'hamiltonien ne dépend pas du temps, alors $U(t) = e^{-iHt}$. Pour passer de la représentation de Schrödinger pour un opérateur \hat{A} indépendant du temps, à la représentation d'Heisenberg, il suffit de considérer la relation $\langle \Psi_2(t) | \hat{A} | \Psi_1(t) \rangle = \langle \Psi_2 | \hat{A}(t) | \Psi_1 \rangle$, impliquant que par ce changement de représentation,

$$\hat{A}(t) = U^\dagger(t) \hat{A} U(t), \quad (2.45)$$

évoluant selon l'équation du mouvement de Heisenberg

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = i[H, \hat{A}(t)]. \quad (2.46)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation sont alors donnés dans cette représentation par

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega t} \hat{a}(0), \quad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger(0), \quad (2.47)$$

et le nombre de particules $\hat{n}(t) = \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) = \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0)$, est alors conservé au cours du temps.

⁹Unitaire $U^\dagger U = 1$.

2.2.2 Seconde quantification : Théorie quantique des Champs

Lorsque l'on considère l'utilisation de champs qui dépendent non plus d'un ensemble discret de variables (q^i, p_j) , mais plutôt d'un ensemble de variables continues $(\phi(x^\mu), \pi(x^\mu))$ telles que $\{\phi(x^\mu), \pi(y^\mu)\} \propto \delta^4(x^\mu - y^\mu)$, le formalisme quantique est donné par la **théorie quantique des champs**. Cette quantification consiste simplement à exprimer des champs continus dans le formalisme hamiltonien en termes d'opérateurs de création et d'annihilation continus. On va alors quantifier des champs définis sur un espace-temps plat, celui de Minkowski décrivant des particules relativistes. Cependant, passer à un espace-temps courbe va amener quelques changements sur les notions de 'vide' et de 'particules' qui vont devoir être traitées avec attention. Alors qu'en mécanique quantique, ondes et particules sont des notions complémentaires avec différents domaines de prédilection, en théorie quantique des champs, ce sont les champs qui sont fondamentaux, et les particules ne sont que des notions approximatives utiles en certaines circonstances.

On va s'intéresser au cas de l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire $\phi(x^\mu)$, de densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.48)$$

redonnant l'équation (2.14) comme équation du mouvement. On peut ainsi voir que ce formalisme est identique à celui de l'oscillateur harmonique dont les variables ne sont plus x et t , mais des champs $\phi(x, t)$ et $\pi(x, t) = \dot{\phi}$ à valeur sur tout l'espace. $\phi(x^\mu)$ n'étant pas une fonction d'onde, dans la représentation de Schrödinger, on devrait définir une fonctionnelle d'onde complexe $\Psi[\phi(x^\mu)]$ qui représenterait l'amplitude de probabilité de trouver le champ dans cette configuration. On va cependant préférer la représentation de Heisenberg pour laquelle on va promouvoir ϕ au rang d'opérateur quantique.

Ainsi, une solution à l'équation de Klein-Gordon est l'onde plane

$$\phi(x^\mu) = \phi_0 e^{ik_\mu x^\mu} = \phi_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.49)$$

de vecteur d'onde

$$k^\mu = (\omega, \vec{k}), \quad (2.50)$$

dont la fréquence doit satisfaire la relation (de l'énergie)

$$\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2. \quad (2.51)$$

Par rapport à l'oscillateur harmonique, il existe plusieurs solutions possibles pour les oscillations, dépendant du nombre d'onde \vec{k} et du signe de la racine carrée. Cependant, il est possible d'écrire les solutions les plus générales en construisant une base complète et orthonormale. Pour cette notion d'orthonormalité, on définit un produit scalaire dans l'espace des solutions de l'équation de Klein-Gordon, défini comme une intégrale sur une hypersurface Σ ,

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^3x = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.52)$$

Ce produit scalaire est bien indépendant de l'hypersurface sur laquelle on utilise l'intégrale (on peut le voir en prenant le théorème de Stokes et l'équation de Klein-Gordon), et est construit à partir de la **condition de wronskien** qui normalise correctement les solutions des l'équation de Klein-Gordon,

$$\phi \cdot \partial_t \phi^* - \phi^* \cdot \partial_t \phi = i. \quad (2.53)$$

Ainsi construit, le produit scalaire a comme propriété

$$(f, g) = -(f^*, g) = (f, g)^*. \quad (2.54)$$

Sous ce produit scalaire, un ensemble de mode orthogonaux est alors donné par

$$f_{\vec{k}}(x^\mu) = \frac{e^{i\mathbf{k}_\mu \mathbf{x}^\mu}}{\sqrt{(2\pi)^2 2\omega}}, \quad (2.55)$$

la normalisation provenant de la condition de Wronskien, tels que $(f_{\vec{k}_1}, f_{\vec{k}_2}) = \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$. Dans la suite, on va imposer que les modes physiques aient toujours une fréquence positive, et pour considérer ceux de fréquence négative, on va utiliser le complexe conjugué $f_{\vec{k}}^* = f_{-\vec{k}}$. On promeut alors les variables classiques comme des opérateurs sur l'espace de Hilbert, et on impose les relations de commutations

$$[\phi, \phi] = [\pi, \pi] = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.56)$$

Le delta de Dirac demande que les opérateurs à un temps donné commutent partout, excepté aux points spatiaux de coïncidence : cela découle de la demande de causalité (les opérateurs décorrélés spatialement ne peuvent pas

s'influencer les uns les autres). Classiquement, les solutions pouvaient être données dans la base (2.55), il va en être de même pour les opérateurs : en notant $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ et $\hat{a}_{\vec{k}}$ les coefficients de l'expansion en mode des opérateurs de champs, on peut écrire

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int d^3k \left[\hat{a}_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(t, \vec{x}) + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger f_{\vec{k}}^*(t, \vec{x}) \right] \quad (2.57)$$

où ces coefficients obéissent aux mêmes relations de commutation que les opérateurs d'annihilation et de création, et ce, grâce à la condition de Wronskien, avec cependant une différence due à la présence de plusieurs modes possibles,

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.58)$$

De même que pour l'oscillateur harmonique, il existe un vide donné par l'équation $\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \forall \vec{k}$, et dans une base de Fock, le nombre de modes excités à la fréquence $\omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}$, et donc le nombre de particules de moment k_i , s'obtient lui aussi par la relation $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$, tel que

$$\hat{n}_{\vec{k}_i} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j\rangle. \quad (2.59)$$

Une remarque sur l'utilisation de la représentation de Fock peut être ainsi faite. On cherche des états qui respectent l'invariance de Poincaré et qui rendent compte d'une énergie positive. Or les états du vide correspondent et permettent ainsi de choisir cette représentation de Fock, qui n'en est qu'une parmi tant d'autres. L'hamiltonien du système s'écrit alors

$$H = \int d^3k \left[\hat{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \delta(0) \right] \hbar \omega_k, \quad (2.60)$$

dont le terme en delta est appelé **énergie de point zéro**. Il est très important en théorie quantique des champs¹⁰ puisqu'il signifie que, même mesuré sur l'état du vide, l'énergie est infinie (ou au moins dépendant du cut-off ultraviolet) à cause de l'intégration. Cependant, ce problème peut être partiellement résolu par des méthodes de régularisation supprimant ces divergences de la théorie, et la rendant physiquement mesurable. Cette théorie appliquée à l'électrodynamisme donne une description quantique qui est en grande concordance avec les observations. Il est aussi possible de l'appliquer à des théories de jauge non-abéliennes, les **théorie de Yang-Mills**, qui remportent un grand succès lorsque l'on regarde les interactions électrofaible et forte. Cependant, les théories de Yang-Mills se placent dans le cadre de la relativité restreinte, et la gravitation n'est pas encore prise en compte. La relativité générale, que l'on verra par la suite, montre que l'espace-temps n'est plus plat, et une tentative de description des particules dans un tel espace est donnée par la **théorie quantique des champs en espace courbe**. Elle essaye d'incorporer les enseignements vues précédemment dans un espace-temps plus général, et ce afin d'obtenir une théorie viable en présence de gravitation. Le problème de la gravitation quantique est plus complexe encore.

2.2.3 Théorie quantique des Champs en espace courbe

En anticipant la suite, on utilise à la place de la métrique de Minkowski une métrique $g_{\mu\nu}$, dynamique, telle que la densité lagrangienne du champ scalaire précédent s'écrive maintenant

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2 \right), \quad (2.61)$$

dont les équations d'Euler-Lagrange redonnent l'équation (2.14) comme équation du mouvement, avec un terme supplémentaire $-\xi R \phi$. On parle de **couplage minimal** à la courbure R lorsque $\xi = 0$. De même que précédemment, on impose les relations

$$[\phi, \phi] = [\pi, \pi] = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.62)$$

et en considérant une hypersurface Σ spatiale (de normal n^μ , de métrique q_{ab} de déterminant q , labellisée par un temps t constant), on définit un produit scalaire sur Σ

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma d^3x \sqrt{q} n^\mu (\phi_1 D_\mu \phi_2^* - \phi_2 D_\mu \phi_1^*). \quad (2.63)$$

Comme dans un espace plat, on pourrait choisir un jeu de modes de fréquence positive et négative formant une base des solutions, développer chaque solution en terme de ces modes et interpréter les coefficients selon des opérateurs de création et d'annihilation. Or à cause de l'invariance par changement de coordonnées, il n'est pas

¹⁰Ce terme a été cependant observé pour la première fois dans un papier de cosmologie par Yakov Zel'dovich.

possible de distinguer des modes de fréquences particulières (positive ou négative), mais il existe toujours une base possible de solution $f_i(x^\mu)$ telle que

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*), \quad (2.64)$$

avec \hat{a}_i et \hat{a}_i^\dagger vérifiant les relations (2.58). On peut définir un vide $|0_f\rangle$ tel que $\hat{a}_i|0_f\rangle = 0$, et aussi $\hat{n}_{fi} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Cependant, cette base n'est pas unique. Il existe d'autres bases possibles comme par exemple $g_i(x^\mu)$ telle que

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*), \quad (2.65)$$

similaire, mais de vide $|0_g\rangle$ avec ici $\hat{b}_i|0_g\rangle = 0$ et $\hat{n}_{gi} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$. En passant d'un espace plat à un espace courbe, on perd l'existence d'un ensemble privilégié de modes : dans un espace plat, il était possible de prendre un ensemble de modes particuliers en demandant qu'ils soient de fréquence positive par rapport à la composante temporelle, or ici le temps n'est pas défini de façon non équivoque à cause des possibles changements de coordonnées. On peut toutefois passer d'une base à une autre en effectuant des **transformations de Bogoliubov**, implémentées par deux matrices α_{ij} et β_{ij} qui définissent les **coefficients de Bogoliubov**, avec alors

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*), \quad f_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* g_j - \beta_{ij} g_j^*). \quad (2.66)$$

Ces matrices satisfont leurs propres conditions de normalisation

$$\sum_j (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij}, \quad \sum_j (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0. \quad (2.67)$$

D'autre part, il est intéressant de remarquer que le nombre de g-particules dans le f-vide est donné par

$$\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2, \quad (2.68)$$

et qu'il n'a aucune raison d'être nul : un vide 'vide' d'un certain point de vue est rempli de particules pour autre point de vue, et les vides ne vont donc pas forcément coïncider. Cela est dérangement pour la définition d'une particule puisqu'un détecteur en mouvement ne verra pas les mêmes particules que celui possédant un mouvement différent. C'est l'**effet Unruh** [19].

2.2.4 Observations sur la Mécanique Quantique

Le monde est fondamentalement quantique. Cette théorie est devenue nécessaire à la compréhension des interactions fondamentales que sont l'électromagnétisme et les forces faible et forte, et sa complexification via la théorie quantique des champs a permis la construction d'un modèle effectif pour les particules dont des prédictions ont été observées avec une grande précision. Elle inclut les idées de la relativité restreinte, les modèles relativistes devant émerger de cette théorie fondamentale à la limite classique, et donne un cadre permettant l'unification de l'interaction faible avec l'interaction électromagnétique.

Cependant, il existe des limites au modèle standard des particules élémentaires, notamment :

- beaucoup de propriétés intrinsèques des particules comme les nombres quantiques sont introduits arbitrairement (de même pour les masses et les constantes de couplage),
- le nombre de familles n'est pas une prédiction du modèle,
- il ne permet pas d'expliquer l'essentiel de la masse de l'univers,
- les constantes de couplage ne convergent pas vers une valeur unique,
- il est difficile d'expliquer la masse des neutrinos (mécanisme de see-saw),
- la gravitation n'est pas incluse : une quantification perturbative de la gravitation aboutit à une théorie non-renormalisable.

Il est intéressant de noter que les fondements et postulats de la mécanique quantique sont mathématiques et moins bien motivés que ceux, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, de la mécanique relativiste. La mécanique pouvant être exprimée dans un langage unificateur qu'est la géométrie différentielle, il existe des tentatives de quantification dans ce formalisme connues sous le nom de **quantification géométrique**, qui essaye de garder une ressemblance avec le formalisme de la mécanique quantique.

Il est ainsi difficile de concilier gravitation et mécanique quantique. Par exemple, si on regarde au niveau classique l'évolution d'une particule comme un neutron ultra-froid dans le potentiel gravitationnel terrestre, classiquement, on s'attendrait à ce que son évolution ne dépende pas de sa masse en vertu du principe d'équivalence, mais

quantiquement, il en est tout autrement : dans le potentiel $V = m_g g z$, l'équation de Schrödinger pour ce neutron en chute libre, d'énergie E , peut se réécrire

$$-\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + m_g g z \Psi(z) = E \Psi. \quad (2.69)$$

Dans cette équation faisant intervenir un objet quantique dans un champ de gravité classique, on remarque que les termes en m ne se simplifient pas, violant ainsi le principe de Galilée puisque l'on peut mesurer la masse de l'objet quantique en regardant sa chute dans le champ de gravitation. Cela a été réalisé par l'expérience **GRANIT** [20]. L'interprétation la plus simple consiste à considérer que l'universalité de la chute libre est bien respectée et que l'effet en question est indépendant de la gravitation puisque la masse intervient déjà dans l'étalement du paquet d'onde pour une particule libre.

La gravitation étant un effet physique important, il est nécessaire d'en tenir compte pour l'obtention d'une théorie plus fondamentale de la physique. Cependant, appliquer la théorie quantique des champs directement à la gravitation amène de nouvelles difficultés, notamment conceptuelles comme la définition du vide, mais aussi des problèmes de renormalisation. Même si ce domaine est encore en développement, on va par la suite adopter l'idée qu'il faut d'abord définir un cadre quantique propice à la gravitation avant de regarder son interaction avec les autres forces existantes. Avant cela, il est nécessaire de connaître exactement ce qu'est la gravitation. Le prochain paragraphe va alors permettre d'introduire la gravité via son aspect simplement géométrique.

2.3 La Relativité Générale

La mécanique newtonienne permet de comprendre comment un objet se déplace quand il est soumis à des forces comme la force de gravitation, et la relativité restreinte permet de comprendre quelles sont les lois pour passer d'un référentiel à un autre lorsque ceux-ci sont en mouvement relatif à une vitesse V . La relativité générale n'est pas motivée par des résultats empiriques (sauf peut-être pour l'avancée du périhélie de Mercure) mais par la contradiction entre la gravitation newtonienne et les principes fondamentaux de l'espace-temps formulés par la relativité restreinte. Elle va ainsi permettre de concilier ces deux théories par la considération d'un espace-temps courbe. De même que pour les paragraphes précédents, cette introduction sera très brève.

2.3.1 Les principes et leur conséquences

Le principe d'équivalence d'Einstein

En relativité générale, la structure de l'espace-temps est généralisée en se basant sur le principe d'équivalence, découlant directement de l'universalité de la chute libre,

Principe d'équivalence d'Einstein : *En tout point d'espace-temps, il est possible de choisir un système de coordonnées **localement inertiel** tel que, dans une région suffisamment petite, les lois de la physique prennent la même forme que celles pour un système de coordonnées cartésiennes non-accélééré en l'absence de gravitation.*

Suivant cet énoncé, les lois dans ces référentiels inertiels doivent alors être localement lorentziennes comme en relativité restreinte.

Le principe de covariance généralisé

Comme il n'existe pas de référentiel privilégié, d'après le principe de relativité, ces lois doivent s'écrire de façon identique quel que soit le référentiel choisi. Il est alors nécessaire d'obtenir une formulation **covariante** des équations, et le **principe de covariance généralisé** impose ainsi que les lois de la physique soient invariantes sous les changements de coordonnées de l'espace-temps. Les difféomorphismes de l'espace-temps étant le groupe de jauge de la relativité générale, les quantités physiques observables doivent alors être invariantes par difféomorphismes. En relativité restreinte, l'utilisation de tenseurs a permis l'obtention d'équations covariantes, et il en sera de même en relativité générale, mais suivant une utilisation plus générale du concept de tenseur.

L'espace-temps courbe

De plus, le champ gravitationnel n'est pas uniforme partout, comme on peut le constater sur Terre où il n'est vectoriellement homogène nulle part, et deux référentiels infinitésimalement proches ne sont donc plus équivalents puisque le choix du système de coordonnées localement inertiel va différer. D'un point de vue géométrique, cela signifie donc que l'espace-temps en présence de gravitation n'est plus plat, et possède une courbure liée au champ gravitationnel. Comme il dépend des objets se mouvant dans l'espace-temps, la courbure de l'espace-temps est elle-aussi dynamique : un corps massif en mouvement va donc modifier la courbure de l'espace-temps, qui va elle-même modifier le mouvement de tous les corps présents, et cette dynamique va

alors être encodée dans les **équations d'Einstein**. D'autre part, la mesure d'une distance entre deux points est donnée par la métrique $g_{\mu\nu}$ qui doit ainsi varier d'un point à un autre. En langage mathématique : l'espace-temps forme une variété pseudo-riemannienne, et en se basant sur les résultats de la relativité restreinte, il doit avoir 4 dimensions tel que la métrique soit de signature $(-, +, +, +)$ (variété lorentzienne). On va ainsi voir que $g_{\mu\nu}$ ne décrit pas seulement les propriétés métriques et causales de l'espace-temps mais aussi le champ gravitationnel. Elle devient alors un élément dynamique, liée par les équations d'Einstein au tenseur énergie-impulsion décrivant le contenu en matière et énergie de l'univers.

2.3.2 La dérivée covariante, la connexion et la courbure

Toutes les équations physiques demandent de comparer la valeur d'un champ (généralement vectoriel ou tensoriel) en un point avec sa valeur en un autre point. C'est très exactement ce que permet la notion de dérivée en espace plat, mais les choses ne se passent plus aussi simplement en espace courbe. En particulier la dérivée usuelle d'un vecteur ne forme pas un tenseur. Cela peut se voir du point de vue géométrique par le fait que le résultat dépend du chemin suivi ou du point de vue analytique à cause des termes de dérivation seconde des coordonnées qui apparaissent lors d'un changement de coordonnées. Ces dérivées secondes sont nulles dans le cas d'un espace plat mais ne le sont plus dans un espace courbe. Il faudra donc construire un nouvel objet, la dérivée covariante, qui permet de s'affranchir de ces difficultés et qui se comporte effectivement de manière tensorielle. Celle-ci utilisera un autre objet important, le coefficient de connexion. Il s'agit, en général, d'un élément additionnel qui doit être 'donné' en même temps que l'espace considéré. Il encode la manière dont les points voisins sont connectés et permet donc le calcul de dérivées. Néanmoins, suivant des hypothèses raisonnables (absence de torsion et compatibilité métrique), la connexion peut s'exprimer en fonction des dérivées de la métrique. Reste à évaluer la courbure elle-même : c'est à cette fin qu'est construit le tenseur de Riemann. Intuitivement, il peut être vu comme indiquant la différence de variation d'un vecteur suivant le chemin selon lequel on l'évalue entre deux points voisins. Plus profondément, on peut le comprendre comme le 'champ moteur' de la dynamique en espace courbe : il renseigne directement sur l'accélération de la séparation des géodésiques.

La connexion affine et dérivée covariante

On va ainsi chercher un objet qui, via un tenseur, permettra à tout observateur d'évaluer la courbure en un endroit de l'espace-temps. Mathématiquement, une **connexion affine** (linéaire) ∇ sur une variété différentiable M est une application qui associe à un couple de champs vectoriels $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ un champ vectoriel $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ telle que

1. $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ est \mathbb{R} -bilinéaire en X et Y ,
2. pour $f \in \mathcal{F}(M)$, $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ et $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y$,

Pour connaître la façon dont se propage un vecteur quelconque, on définit son action sur la base des vecteurs de $\mathcal{U} \subset M$, un ouvert de M de coordonnées locales (q^1, \dots, q^m) , telle que

$$\nabla_{\partial_i} (\partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (2.70)$$

Les m^3 symboles $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ sont les **symboles de Christoffel** de la connexion ∇ (dans la carte $(\mathcal{U}, q^1, \dots, q^m)$). Cette connexion donne une information 'locale' car elle s'exprime dans le référentiel dans lequel on se situe. Sous un changement de coordonnées, $(q^1, \dots, q^m) \rightarrow (q'^1, \dots, q'^m)$, les symboles de Christoffel se réécrivent selon

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \frac{\partial q^i}{\partial q'^a} \frac{\partial q^j}{\partial q'^b} \frac{\partial q'^c}{\partial q^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 q^k}{\partial q'^a \partial q'^b} \cdot \frac{\partial q'^c}{\partial q^k}, \quad (2.71)$$

montrant que les Γ_{ij}^k ne se transforment pas comme un tenseur. On va pouvoir définir un objet mathématique, la **dérivée covariante** ∇X qui, à partir d'un champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(M)$, va donner un champ tensoriel $\nabla X \in \mathcal{T}_1(M)$. Pour un vecteur $X = \xi^i \partial_i$ dans un système de coordonnées, on nomme les composantes de cette dérivée ∇X par $\nabla X = (D_j \xi^i) dx^j \otimes \partial_i$, avec

$$D_j \xi^i = \xi^i_{;j} = \partial_j \xi^i + \Gamma_{jk}^i \xi^k. \quad (2.72)$$

Les $\partial_j \xi^i$ ne se transforment pas comme un tenseur, tandis qu'il suit de la définition de ∇X que les $\xi^i_{;j}$ sont bien les composantes du tenseurs $\nabla X \in \mathcal{T}_1(M)$. Appliquer cette définition à tous types de tenseurs de composantes $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} = T(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_r}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_r})$ permet de montrer son application générale

$$D_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r, k} + \sum_{m=1}^r \Gamma_{kl}^{i_m} T^{i_1 \dots l \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} - \sum_{m=1}^s \Gamma_{km}^{j_l} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots l \dots j_r}. \quad (2.73)$$

D'autre part, la dérivée covariante est reliée à la dérivée de Lie par la relation

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (2.74)$$

qui va permettre de relier la dérivée de Lie aux crochets de Poisson.

Notion de géodésique et trajectoire

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\gamma : I \rightarrow M : t \rightarrow \gamma(t)$ un chemin. Le champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(M)$ est appelé **autoparallèle** le long de γ si

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0, \quad (2.75)$$

que l'on note parfois $\frac{dX}{dt} = 0$. Le champ vectoriel $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ est appelé la **dérivée covariante** de X le long de γ . Pour un système de coordonnées donné, avec $X = \xi^i \partial_i$ et $\dot{\gamma} = \frac{dq^i}{dt} \partial_i$,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dq^j}{dt} \right) \partial_i, \quad (2.76)$$

montrant que $\nabla_{\dot{\gamma}} X$ ne dépend des valeurs de X que le long de γ . En géométrie, une courbe γ est appelée une **géodésique** si $\dot{\gamma}$ est autoparallèle le long de γ , *i.e.* $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Cette notion est importante en physique puisque l'on s'attend à ce qu'un corps suive une trajectoire telle que les vecteurs vitesses y soient tangents en tous points, et donc que $\dot{\gamma}$ soit autoparallèle le long de γ . Dans le système de coordonnées $\gamma(t) = (q^i)_{i=1}^m$, cette condition s'exprime selon

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = 0, \quad (2.77)$$

qui est l'**équation des géodésiques**, donnant ici les trajectoires de corps libres. Cette équation correspond ainsi au principe fondamental de la dynamique d'un corps dans un espace-temps courbe, donc soumis à la gravitation qui n'est plus une force : elle est universelle et ne dépend pas de la masse de la particule, comme voulu par le principe d'équivalence. Les corps vont alors suivre les géodésiques qui tiennent compte de la déformation de l'espace-temps, encodée dans les symboles de Christoffel Γ_{jk}^i , comme pour les forces inertielles ¹¹ dont fait partie la force de Coriolis.

Courbure et torsion d'une connexion affine, identités de Bianchi

Pour ∇ une connexion sur M , on définit la **torsion** de ∇ comme étant l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) \doteq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \end{aligned} \quad (2.78)$$

et la **courbure** de ∇ est l'application trilinéaire

$$\begin{aligned} F : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow F(X, Y, Z) \doteq \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned} \quad (2.79)$$

avec $T(X, Y) = -T(Y, X)$ et $F(X, Y, Z) = -F(Y, X, Z)$. Dans un système de coordonnées donné, les composantes du tenseur de torsion sont données par

$$T_{ij}^k = dx^k(T(\partial_i, \partial_j)) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k. \quad (2.80)$$

Si la torsion est nulle, alors $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ et une telle connexion est appelée **symétrique**. En relativité générale, le tenseur de courbure est le **tenseur de Riemann** dont les composantes s'écrivent

$$R_{jkl}^i = dx^i(F(\partial_j, \partial_k)\partial_l) = dx^i([D_j, D_k]\partial_l) = \Gamma_{lj, k}^i - \Gamma_{kj, l}^i + \Gamma_{lj}^n \Gamma_{kn}^i - \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ln}^i. \quad (2.81)$$

qui, une fois contracté avec le tenseur métrique, permet d'obtenir deux quantités importantes en relativité générale, le **tenseur de Ricci** et le **scalaire de Riemann**

$$R_{jl} = R_{jil}^i = \Gamma_{lj, i}^i - \Gamma_{ij, l}^i + \Gamma_{lj}^n \Gamma_{in}^i - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{ln}^i \quad \text{et} \quad R = R_i^i. \quad (2.82)$$

La connexion pseudo-Riemannienne

On a ainsi défini un tenseur permettant d'évaluer la courbure le long du trajet, le tenseur de Riemann, qui est considéré comme dynamique en relativité générale. Cependant, nous n'avons exprimé pour le moment que la courbure en fonction de la connexion, sans avoir les moyens de connaître son évolution. Ce que l'on observe est la mesure des distances entre deux points proches, et ce via le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ qui donne l'élément de longueur

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.83)$$

¹¹Pour le cas d'une particule de masse m soumise à une force F , l'équation des géodésiques s'écrit simplement

$$m \nabla_{\dot{q}} \dot{q} = F \leftrightarrow \ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k = \frac{F^i}{m}$$

Selon la courbure, la distance entre deux points dans l'espace-temps va changer : par exemple, sur un plan ou sur une sphère, la distance entre deux même points ne sera la même. C'est la métrique qui va ainsi permettre de connaître la géométrie de l'espace-temps, dynamique. Dans la construction de la théorie, pour retrouver les résultats en espace-temps plat, on demande que la connexion soit une **connexion métrique**, c'est à dire $\nabla g = 0$, et sans torsion $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. On peut alors montrer que la seule connexion possible est la **connexion riemannienne** ou **connexion de Levi-Civita** sur (M, g) et que pour tous systèmes de coordonnées, la forme générale de la connexion pour les espaces Riemanniens, s'écrit

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}[g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}]. \quad (2.84)$$

Un tenseur de courbure pour une connexion sans torsion va alors vérifier les **identités de Bianchi**

$$\sum_{cycl(j,k,l)} R_{jkl}^i = 0, \quad \sum_{cycl(k,l,m)} R_{jkl}^i{}_{;m} = 0, \quad (2.85)$$

et possède aussi les propriétés

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = R_{klij}, \quad R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i. \quad (2.86)$$

2.3.3 Les équations d'Einstein

Einstein, dans sa tentative de construction d'une nouvelle théorie de la gravitation, a amené une nouvelle compréhension de notre monde : la gravitation n'est plus une simple force, mais est dictée par la courbure de l'espace-temps, qui elle-même est influencée par le contenu en matière et énergie de l'univers. La dynamique d'un tel système devant être vérifiée dans tous les référentiels, les équations doivent ainsi être tensorielles. Ce sont les équations d'Einstein, supposant que la courbure de l'espace-temps, donnée par $G^{\mu\nu}$, doit être proportionnelle au contenu en matière-énergie du système, donné par le **tenseur d'énergie-impulsion** $T^{\mu\nu}$, selon

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (2.87)$$

$T^{\mu\nu}$ est le flux de la $\mu^{\text{ème}}$ composante de la quadri-impulsion suivant la direction ν , et doit s'annuler en l'absence de contenu. Il peut se décomposer selon

- T^{00} la densité d'énergie,
- T^{0i} le flux d'énergie à travers la surface unitaire suivant la direction i ,
- T^{ii} le flux de la $i^{\text{ème}}$ composante d'impulsion dans la direction i par unité de surface,
- T^{ij} le flux de la $i^{\text{ème}}$ composante d'impulsion dans la direction j par unité de surface et contenant les termes de cisaillement,
- T^{i0} la densité de la $i^{\text{ème}}$ composante d'impulsion,

et est donc de rang 2 puisque l'on parle de densités. Il doit de plus être de divergence nulle, donnant la condition de conservation de l'énergie

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (2.88)$$

montrant que ce tenseur est symétrique¹² $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

Concernant le tenseur $G^{\mu\nu}$, il rend compte de la géométrie de l'espace-temps et doit donc être construit avec les objets disponibles pour décrire la variété. On demande donc à ce qu'il soit

- une indication de la courbure, nul dans un espace-temps plat,
- construit avec le tenseur de Riemann R , l'objet géométrique concordant avec le premier point,
- linéaire en tenseur de Riemann, afin d'avoir la théorie la plus simple,
- symétrique et de rang 2 à cause du tenseur énergie-impulsion et de l'équation d'Einstein,
- de divergence nulle.

Cette dernière condition $G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, liée aux identités de Bianchi, garantit le fait que $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ et permet ainsi de laisser libre le choix du système de coordonnées, et donc de respecter le principe de covariance généralisé. En effet, les équations d'Einstein, au nombre de dix, servent à donner l'évolution de la géométrie de l'espace-temps, et il est alors nécessaire de donner dix conditions initiales pour $g_{\mu\nu}$. Cependant, la conservation du tenseur énergie-impulsion doit nécessairement imposer 4 lois de conservation, indépendamment de la géométrie, amenant une sous-détermination de la théorie. Les quatre degrés de liberté qui disparaissent par application de cette condition de divergence nulle sur $G_{\mu\nu}$ se répercutent sur $g_{\mu\nu}$ et correspondent ainsi à la liberté sur

¹²Par exemple,

$$\begin{aligned} T^{0j} &= (\text{flux d'énergie}) = (\text{densité d'énergie}) * (\text{vitesse moyenne du flux d'énergie})^j \\ &= (\text{densité de masse}) * (\text{vitesse moyenne du flux de masse})^j = (\text{densité de moment}) = T^{j0} \end{aligned}$$

le système de coordonnées. Cette condition représente une **condition d'invariance de jauge**. Il existe un unique tenseur respectant les conditions précédentes, le **tenseur d'Einstein** donné par

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.89)$$

où Λ est une constante apparaissant naturellement dans la construction, reliée à la **constante cosmologique**. La relativité générale doit posséder à la limite en champ faible la même forme que la mécanique newtonienne, notamment on doit être capable de retrouver l'équation de Poisson. Cela permet de fixer la constante de proportionnalité entre $G_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ comme étant

$$\kappa = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}, \quad (2.90)$$

où \mathcal{G} est la **constante de Newton**.

Cette démarche a été celle suivie par Einstein, mais il est aussi possible de la dériver à partir d'une formulation lagrangienne, comme l'a fait initialement **David Hilbert** en donnant une action pour la relativité générale. Cette action doit se comporter comme une quantité scalaire sous un changement de coordonnées, et il est assez simple de trouver une densité lagrangienne telle que $\mathcal{S} = \int_{\Sigma} d\mu \mathcal{L}$. Il existe la forme volume donnée par l'équation (1.51) et qui a été montrée comme étant une quantité conservée par difféomorphisme¹³ : la mesure $d\mu$ est ainsi donnée dans notre cas par $d^4x\sqrt{-g}$.

L'autre scalaire auquel on puisse penser et encodant la courbure est simplement donné par le scalaire de Riemann R , tel que l'action finale s'écrit

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^4x \cdot \sqrt{-g} \cdot R + \mathcal{S}_{mat}. \quad (2.91)$$

Dans ce formalisme, avec le principe variationnel, les équations d'Einstein sont alors obtenues par la variation de l'action selon la métrique

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Leftrightarrow G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.92)$$

Cette action d'Einstein-Hilbert n'est cependant pas la seule action possible, et il existe d'autres formulations possibles donnant les mêmes résultats, comme l'action de Plebanski.

2.3.4 Observations sur la relativité générale

La relativité générale en tant que théorie géométrique donne ainsi une nouvelle conception de l'espace-temps, non plus absolu comme en mécanique newtonienne, mais évolutive pour laquelle le champ dynamique correspond au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Cette absence d'espace-temps fixe se nomme '**invariance de fond**', et correspond à l'invariance de l'action sous l'effet de difféomorphismes. Cette théorie est vérifiée avec une grande précision dans notre système solaire, donnant notamment l'explication de la déviation de l'avancée du périhélie de Mercure, ou plus simplement au quotidien permettant l'utilisation des systèmes de positionnement par satellites de manière assez précise, mais aussi dans le cas de champs forts avec l'observation des étoiles à neutron, via notamment les pulsars binaires¹⁴, corroborant les effets non-perturbatifs prédits par la théorie.

Cependant, les hypothèses qui ont été faites dans sa construction sont discutables, et il est nécessaire de chercher à améliorer notre compréhension de la gravitation puisque elle présente certains défauts comme la présence d'une singularité de l'espace-temps en cosmologie. Des théories 'classiques' gardant les idées fondamentales de la relativité générale, comme l'invariance de fond, ont ainsi été développées afin de résoudre ces problèmes (théories $f(R)$, scalaire-tenseur,...). Néanmoins, le travail effectué par Einstein a permis une grande avancée scientifique, et afin d'avoir une meilleure compréhension de la gravitation, une démarche logique est alors de regarder quels pourraient être ses aspects quantiques.

¹³Un changement de coordonnée peut être vu comme une transformation infinitésimale donnée par $\delta q = \{q, H(\delta t)\}$ et le théorème de Liouville (1.72) peut s'appliquer.

¹⁴Une étoile à neutrons en rotation constituant l'une des horloges les plus précises possibles, la rotation d'un tel astre, en champ fort, autour d'un compagnon massif dans un système binaire serré, constitue un test idéal pour les théorie des gravitation étendue (type scalaire-tenseur).

Chapitre 3

La Gravité Quantique à Boucles

Introduction

La relativité générale dans sa conception ignore complètement la physique quantique qui devient importante lors de la mise en jeux de grandes énergies, et elle va donc nécessairement ne plus donner une description physique dans certains régimes. Notamment,

- il existe dans cette théorie des singularités, comme le **Big Bang**, où le continuum se déchire et où l'espace-temps cesse d'exister, montrant que cette théorie cesse d'être prédictive.
- il en va de même dans le cas des **Trous Noirs** qui émettent un rayonnement de température proportionnelle à \hbar , la **température de Hawking** [25], et pour lesquels l'approximation semi-classique menant à l'expression de cette température devient invalide à la fin du processus d'évaporation.
- la gravité se couple universellement avec toutes les formes d'énergie. En théorie quantique des champs, on s'attend à ce que cette théorie soit renormalisable, ce qui n'est actuellement pas le cas. Il n'y a ainsi pas pour le moment de cadre théorique pour une possible **unification**¹ de toutes les interactions.
- il n'y a pas besoin d'atteindre le niveau de l'échelle de Planck pour voir des effets quantiques apparaître, et une théorie de l'univers qui ne fait nullement référence à \hbar ne peut être correcte.

D'autre part, en électrodynamique classique, pour le cas de l'atome d'hydrogène, les états d'énergie minimum ne sont pas limités et peuvent prendre une valeur nulle, rendant la matière instable car l'électron pourra alors tomber sur le noyau. L'application des principes quantiques, en raison de la valeur non-nulle de la constante de Planck, montre que l'état d'énergie minimal doit nécessairement avoir une valeur finie non nulle, $-me^4/2\hbar^2 \approx -13.6\text{eV}$. Ce résultat contraint la 'trajectoire' des électrons autour de ce noyau, et on espère ainsi qu'en faisant intervenir l'aspect quantique de la gravitation, comme pour le cas de l'atome d'hydrogène, les différents problèmes pourront être résolus. La gravitation sous son aspect quantique prendra place au moins aux échelles de Planck, mais des effets quantiques pourront aussi se faire ressentir aux échelles classiques. Quantifier la gravitation reviendra ainsi à quantifier la géométrie de l'espace-temps et une attention toute particulière devra être portée sur la notion de temps.

Le lagrangien de la relativité générale est donné via l'action d'Einstein-Hilbert (2.91). En examinant cette équation, on remarque que comme dans le cas de électromagnétisme, il existe des multiplicateurs de Lagrange cachés : les composantes de la métrique g^{00} et g^{0a} sont présentes sans leur dérivée temporelle et vont s'exprimer selon la lapse fonction N et un vecteur similaire, le shift vecteur N^a telles que $g^{00} = \frac{1}{N^2}$ et $g^{0a} = \frac{N^a}{N^2}$. Cela implique donc que seules les composantes spatiales de la métrique doivent être considérées comme variables de configuration g^{ab} , de moments conjugués P_{ab} liés à la **courbure extrinsèque**. Ces multiplicateurs de Lagrange vont ainsi être associés comme dans le cas de l'électromagnétisme à des contraintes, et l'hamiltonien total ne sera en fait qu'une combinaison linéaire de ces contraintes, comme dans l'exemple en mécanique classique Sec.(1.9). Il y aura la **contrainte de Difféomorphismes** liée au shift vecteur N^a et dont le flux généré sera associé aux difféomorphismes spatiaux, mais aussi la **contrainte hamiltonienne** qui représente l'invariance de la théorie sous le choix de toutes les déformations possibles de l'hypersurface spatiale suivant N , différent en tous ses points. Il y a ainsi 6 degrés de liberté donnés par la métrique spatiale, et 4 contraintes qui vont au final nous laisser avec seulement 2 degrés de liberté, comme dans la théorie de Maxwell.

¹Demander l'unification résulte plus d'une démarche historique (Maxwell unifiant l'électrodynamisme et le magnétisme, ou bien le modèle de Glashow-Salam-Weinberg pour la force électrofaible) et esthétique que d'une nécessité conceptuelle.

3.1 Les théories de Yang-Mills et les holonomies

Cette partie termine l'introduction des notions mathématiques et physiques utiles dans la compréhension et la construction d'une théorie quantique de la gravitation. Comme on le verra par la suite, il existe des nouvelles variables, appelées **variables d'Ashtekar** qui font de la relativité générale une théorie proche d'une théorie de Yang-Mills (voir [26]), mais avec quelques subtilités, rendant possible l'application de certaines méthodes de quantification.

Les théories de Yang-Mills

Les **théories de Yang-Mills** sont une généralisation de la théorie de l'électromagnétisme, dont le groupe de transformation est abélien, à des groupes de transformations non-abéliens. Étonnement, jusqu'au groupe $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, on a été capable de décrire via de telles théories les interactions faibles (via $SU(2)$ faisant apparaître naturellement les bosons Z, W^\pm) et fortes (via $SU(3)$ pour la chromodynamique quantique et l'utilisation des gluons). Hélas, la généralisation la plus simple à $SU(5)$ pour la grande unification ne fonctionne pas. Le modèle standard de la physique des particules ainsi construit permet de décrire grâce aux théories de Yang-Mills les interactions physiques observées, mais toutes les tentatives pour briser des groupes plus compliqués se sont avérées jusqu'alors infructueuses.

Dans le cas des équations de Maxwell, on utilisait des quadri-vecteurs, mais il est possible de généraliser en utilisant des potentiels vecteurs A_μ composés d'une collection de matrices, éléments d'une algèbre (ayant comme opération les crochets de Poisson ou plutôt les commutateurs). Le potentiel vecteur peut ainsi s'écrire selon

$$A_\mu = \sum_i A_\mu^i T^i, \quad (3.1)$$

où les A_μ^i sont ses composantes dans la base des matrices T^i des générateurs de l'algèbre. De même que pour l'équation (1.142), il est possible de définir une dérivée covariante pour des transformations internes dans le groupe, et non plus pour des transformations de coordonnées dans l'espace-temps, telle que

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} + \frac{i}{2} g \cdot A_\mu^i \cdot T^i, \quad (3.2)$$

où g , comme e , est une constante de couplage. On a ainsi obtenu la **dérivée covariante de Yang-Mills**. Dans le cas général, les matrices T^i satisfont des relations de commutation propres au groupe considéré, telles que

$$[T^i, T^k] = i \cdot f^{jkl} \cdot T^l, \quad (3.3)$$

où les f^{jkl} sont les constantes de structure de l'algèbre qui, une fois connues, permettent de la caractériser complètement. Une algèbre très utile pour la suite² est l'algèbre $su(2)$ formée à partir du groupe $SU(2)$. Une base est donnée par les matrices de Pauli σ^i , hermitiennes,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

qui satisfont les relations de commutations avec les constantes de structure $f^{ijk} = 2\epsilon^{ijk}$

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (3.5)$$

D'autre part, en électromagnétisme, le groupe des transformation de jauge est $U(1)$, abélien, et les champs commutent $[A_\mu, A_\nu] = 0$. On a vu que l'on pouvait définir le champ tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$, aussi appelé tenseur de Faraday, comme s'écrivant $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, et cette expression est assez similaire à celle donnée pour le tenseur de Riemann par l'équation (2.81). Il existe ainsi une construction géométrique commune au tenseur de Faraday et au tenseur de Riemann, à travers un formalisme mathématique, le **calcul de Cartan** appliqué aux formes différentielles, très employé en gravité quantique à boucles. Sur un fibré, on définit une 1-forme de connexion $\omega \in \Lambda^1$ à partir de la définition de la connexion donnée par l'équation (2.70),

$$\nabla_X \partial_j = \omega_j^i(X) \partial_i \quad \rightarrow \quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k, \quad (3.6)$$

ainsi qu'une 2-forme de courbure F_j^i en lien avec l'équation (2.79)

$$F(X, Y) \partial_j = F_j^i(X, Y) \partial_i, \quad (3.7)$$

Ces formes doivent satisfaire les **équations de structure de Cartan**

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = F_j^i, \quad (3.8)$$

²Les variables de Ashtekar sont fondées sur des potentiel vecteurs à valeur dans $su(2)$.

permettant de définir l'expression des courbures (1.144) et (2.81). Ce formalisme simplifie beaucoup les calculs et donne un cadre commun à la relativité générale et aux théories de Yang-Mills pour lesquelles on voit les potentiels vecteurs comme des connexions sur un fibré particulier. Ainsi dans les théories de Yang-Mills, la courbure est obtenue selon

$$[D_\mu, D_\nu] = -\frac{g}{2} F_{\mu\nu}^i T^i, \quad (3.9)$$

dont l'expression de $F_{\mu\nu}^i$ dans le cas général est alors donnée par

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k, \quad (3.10)$$

similaire à l'équation (1.144). De même que dans l'équation (1.128), les équations du mouvement sont alors données par la relation

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.11)$$

et le lagrangien, comme dans l'équation (1.127), est donné maintenant en utilisant la trace

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Le champ conjugué au potentiel vecteur A_a^i est alors comme auparavant le champ électrique $E_i^a = F_i^{0a}$, et la loi de Gauss trouvée dans l'équation (1.133) est alors donnée par

$$D_a E^a = 0. \quad (3.13)$$

La contrainte de Gauss est maintenant définie par l'expression $G[\lambda^i] = \int d^3x \cdot \lambda^i \cdot (D_a E^a)^i$, générant une transformation de jauge

$$\{A_a^i, G[\lambda^c]\} = \partial_a \lambda^i + g\epsilon^{ijk} A_a^j \lambda^k = (D_a \lambda)^i, \quad (3.14)$$

et les variables canoniques étant des éléments d'un algèbre, soient des matrices, on peut écrire de manière générale cette transformation selon

$$A'_a = G_\lambda A_a G_\lambda^{-1} + G_\lambda \partial_a G_\lambda^{-1} = G_\lambda D_a G_\lambda^{-1} \quad \text{et} \quad E'^a = G_\lambda E^a G_\lambda^{-1}, \quad (3.15)$$

avec $G_\lambda = \exp[-i\lambda^a T_a]$ les matrices de la représentation du groupe, de générateurs T_a . Cette transformation est plus compliquée que dans le cas de l'électromagnétisme puisque dans les théories de Yang-Mills, à la différence de l'électromagnétisme, le tenseur de Faraday se transforme lui aussi sous une transformation de jauge, et les champs électromagnétiques correspondant ne seront donc plus des observables adéquats. Cependant, il est toujours possible de construire des observables qui soient invariantes de jauge, dont des exemples sont les **holonomies**.

Les holonomies

En électromagnétisme, selon la vision de *Faraday*, le champ électromagnétique peut être perçu comme un ensemble de lignes remplissant tout l'espace et reliant 2 objets chargés entre eux. Cependant, la grande découverte de *Faraday* et *Maxwell* a été de comprendre que ce champ est une entité autonome dont la structure peut être déterminée indépendamment des charges électriques : en l'absence de ces charges, on peut tout de même imaginer que ces lignes, dites *de Faraday*, soient toujours présentes et forment des courbes fermées dans l'espace, des *boucles*. Le champ électromagnétique est alors vu à travers la propagation d'une déformation de ces lignes dont la forme varie sous l'action des lignes voisines ainsi que des charges électriques, comme une vague se propageant dans l'océan, et la lumière n'est rien d'autre qu'un des mouvements ondulatoires rapides des lignes de champs. Ces déformations sont variables et régies par les *équations de Maxwell*, qui représentent en un point de l'espace le vecteur tangent à une ligne de *Faraday*.

En considérant un espace rempli de telles boucles, il est alors possible de regarder quelles propriétés on peut en tirer. Sur une **courbe fermée** \mathcal{C} , de surface S et de normale \vec{n} , d'après le théorème de Stokes, la circulation du potentiel vecteur est donnée par

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{s} \cdot \vec{A} = \int_S d^2x (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a \cdot \vec{n}_a = \int_S d^2x (\epsilon^{abc} F_{bc} \cdot \vec{n}_a). \quad (3.16)$$

montrant que la circulation du potentiel vecteur sur une courbe fermée permet d'obtenir le champ tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$. Le faire sur toutes les courbes présentes permet alors de connaître la valeur des champs électromagnétiques en tout point de l'espace. L'équation (3.16) a pu être exprimée en fonction de $F_{\mu\nu}$ grâce à l'absence de termes non-linéaires dans l'expression, et on voit ainsi directement que la généralisation aux théories de Yang-Mills va s'avérer plus compliquée. D'autre part, sous une transformation de jauge, le terme

supplémentaire est un gradient $\partial_\mu \lambda$ qui n'aura aucun effet sur la valeur de la circulation quand on considère une courbe fermée : son intégrale donnera une différence de deux même termes puisque le point initial correspond au point final, et le résultat sera alors invariant de jauge. Dans le cas d'une théorie de Yang-Mills, les transformations de jauge sont beaucoup plus compliquées et la circulation du potentiel vecteur le long d'une courbe fermée ne sera pas un invariant. Il faut donc une notion plus élaborée de circulation d'un potentiel vecteur, ce qui est le cas des **holonomies**, qui correspondent à l'exponentiation de l'équation précédente pour des boucles fermées. On cherche ainsi un outil qui permettrait de voir quelle est l'évolution d'un champ, en regardant comment un objet est déformé quand on le déplace sur ce champ. On a déjà vu en relativité générale qu'il existait le transport parallèle, et on pourrait utiliser cette notion le long d'un chemin fermé et voir ce que cela apporterait sur la connaissance du champ. Ainsi, si par exemple on propage auto-parallèlement le champ électrique $E^a = E_i^a T^i$ le long d'une courbe $\gamma^a(t)$, alors selon l'équation (2.75), sa dérivée covariante de Yang-Mills doit être nulle :

$$\dot{\gamma}^a(t) D_a E^b = 0, \quad (3.17)$$

où $\dot{\gamma}^a(t) = \frac{d\gamma^a}{dt}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe. On a ainsi l'équation résultante qui s'exprime selon

$$\dot{\gamma}^a(t) \partial_a E^b(t) = -ig \dot{\gamma}^a(t) A_a(t) E^b(t), \quad (3.18)$$

où A_a et E^b sont évalués au même point de la courbe. Après intégration de cette équation, on obtient

$$E^b(t) = E^b(0) - ig \int_0^t ds \cdot \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) E^b(s), \quad (3.19)$$

et on peut encore utiliser cette solution par itération sur un chemin intermédiaire $\dot{\gamma}^a(s)$ en remplaçant $E^b(s)$ par son expression, et avoir ainsi comme en théorie des champs

$$E^b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-ig)^n \int_{t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 \dots dt_n \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) A_{a_1}(t_1) \dots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) A_{a_n}(t_n) \right) E^b(0) \quad (3.20)$$

$$= U(A, \gamma)(t) E^b(0). \quad (3.21)$$

$U(A, \gamma)$ est appelé **propagateur parallèle**, correspondant à une matrice dont prendre la trace permettra d'obtenir un scalaire, donc invariant sous toute transformation de jauge et pouvant s'écrire

$$U(A, \gamma)(t) = \mathcal{P} \left[\exp \left(-ig \int_0^t ds \cdot \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) \right) \right] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \mathcal{P} \left(\int_0^t ds \cdot \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) \right)^n. \quad (3.22)$$

Il propage parallèlement la solution du point $\gamma^a(0)$ au point $\gamma^a(t)$, et lorsque ces deux points correspondent, donc quand on propage la solution sur un chemin fermé, $U(A, \gamma)$ est alors appelé une **holonomie** ou **boucle de Wilson**.

Dans le cas de l'électromagnétisme, le groupe est $U(1)$ et les potentiels vecteurs commutent : \mathcal{P} n'a alors aucune incidence sur le résultat et on retrouve la notion usuelle d'une exponentielle. Ainsi, dans le cas d'un groupe abélien, le propagateur n'est que l'exponentielle de la circulation du potentiel vecteur le long d'une courbe, et on a alors réussi via une exponentiation à généraliser la notion de circulation dans le cas d'une théorie de Yang-Mills. Une conséquence importante est donnée par le **théorème de Giles** que l'on peut résumer selon

Proposition 13. (Théorème de Giles) *Connaissant la trace des holonomies le long de toutes les boucles présentes sur une variété, pour un potentiel vecteur donné, il est alors possible de construire à partir de ces traces des objets invariants de jauge pour ce potentiel vecteur.*

Plus particulièrement, les observables devront être invariantes sous la contrainte de Gauss et sous une autre contrainte, telles que leur addition soit la contrainte des difféomorphismes (spatiaux). Les holonomies ainsi construites seront invariantes sous cette contrainte et représenteront des observables possibles pour toute théorie invariante par difféomorphismes : elles ne dépendent pas du chemin choisi. Les traces des holonomies vont ainsi aider à la construction d'observables qui seront fonctions des connexions, et ce résultat va être intéressant quand on s'intéressera à la gravitation au niveau quantique sous la représentation des boucles.

En électromagnétisme et pour les théories de Yang-Mills, on a vu qu'il était possible de considérer le champ tenseur électromagnétique F comme une 2-forme de courbure. La construction de la gravité quantique à boucles s'est inspirée de celle amenant aux théories de Yang-Mills, afin d'exprimer la relativité générale en terme de potentiels et de champs électriques, et à l'aide du calcul de Cartan pour des formes différentielles, on va pouvoir construire cette théorie comme une théorie de connexions.

3.2 Le formalisme ADM

On souhaite quantifier la relativité générale. Les procédures de quantification établies dans le formalisme canonique sont rigoureuses et bien décrites, et il va être important de connaître par la suite l'hamiltonien de la relativité générale. On a vu auparavant que pour toute théorie invariante par reparamétrisation du temps, il y avait l'apparition de contraintes, et cela va être le cas ici. De plus, en mécanique quantique, la variable temporelle joue le rôle d'un paramètre externe, ce qui ne l'est pas en relativité générale, et on va ainsi choisir une métrique qui va permettre de définir la notion de 'temps', tout en gardant une liberté sur cette variable par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. On va ainsi se placer dans le *formalisme ADM*, développé initialement en 1959 par **Richard Arnowitt**, **Stanley Deser** et **Charles W. Misner**.

Ce formalisme correspond à la décomposition de l'espace-temps en choisissant de définir les coordonnées comme composées d'une coordonnée $t \in \mathbb{R}$ représentant le temps, et de 3 autres $x^a \in \Sigma$ représentant l'espace. La variété M est ainsi définie par $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, et on appelle usuellement Σ_t l'**hypersurface spatiale** au temps t , ayant une topologie quelconque. Ce faisant, on brise la notion de covariance qui traite indifféremment espace et temps comme une même entité, puisque l'on choisit explicitement les variables. On verra par la suite que l'apparition de contraintes va permettre de rétablir finalement cette covariance, et permettra de même de définir une notion d'hamiltonien. On parlera ainsi de la relativité générale en terme de formalisme canonique (hamiltonien), et non plus covariant (lagrangien).

Décomposition de l'espace-temps

La direction du temps est caractérisée par un vecteur t^μ dont les trajectoires sont les courbes paramétrées par t , et telles que chaque hypersurface spatiale est labellisée par $t = \text{constante}$. On définit n^μ comme étant le vecteur normal à Σ_t selon $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = s$ où s est la signature de la métrique [27] : pour $s = -1$ (Lorentzien), on a la signature $(-, +, +, +)$ et pour $s = 1$ (Euclidien), on a la signature $(+, +, +, +)$. Dans la suite, on va surtout se placer dans le cas lorentzien, et on fera surtout apparaître s quand il le sera nécessaire.

On peut ainsi définir la métrique spatiale sur Σ_t , $a = 1..3$,

$$q_{ab} = g_{ab} - s n_a n_b, \quad (3.23)$$

et le vecteur t^μ peut être décomposé en deux composantes [28], normale et tangente à Σ_t selon

$$t^a = N n^a + N^a. \quad (3.24)$$

Comme on l'a vu précédemment, N est la **lapse fonction** permettant de définir un choix pour l'évolution de la composante temporelle. N^a est le **shift vecteur** et permet de même de définir un choix pour l'évolution des composantes spatiales. Ce sont ainsi un scalaire et un vecteur définis sur Σ_t qui reflètent la liberté de choisir les composantes de la métrique et correspondent aux multiplicateurs de Lagrange. De plus, on peut définir la métrique de l'espace-temps pour cette décomposition par l'élément de longueur

$$ds^2 = s \cdot N^2 dt^2 + q_{ab}(N^a dt + dx^a)(N^b dt + dx^b). \quad (3.25)$$

On définit la **courbure extrinsèque** comme étant

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab}, \quad (3.26)$$

qui est très proche de la dérivée temporelle de la métrique spatiale

$$\dot{q}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t q_{ab} = 2NK_{ab} + \mathcal{L}_{N^c} q_{ab}. \quad (3.27)$$

La courbure extrinsèque montre comment l'hypersurface spatiale est incurvée par rapport à l'espace-temps, et comment ainsi sa métrique y évolue. Par exemple si on prend une feuille de papier dépliée, sa courbure (intrinsèque) est nulle, mais si on en fait un cylindre, sa courbure (extrinsèque) ne l'est pas. Métrique spatiale et courbure extrinsèque vont ainsi être les variables permettant la construction de la formulation hamiltonienne de la gravité. Les variables de configuration sont ainsi q_{ab} , et leurs moments conjugués P^{ab} , liés à la valeur de K_{ab} selon l'équation (3.27), et l'action d'Einstein-Hilbert (2.91) peut alors s'écrire

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x (P^{ab} \dot{q}_{ab} - [N^a \mathcal{H}_a + |N| \mathcal{H}]), \quad (3.28)$$

de crochets de Poisson

$$\{q_{ab}(t, x), P^{cd}(t, x')\} = 2\kappa \delta_c^a \delta_d^b \delta^3(x - x'). \quad (3.29)$$

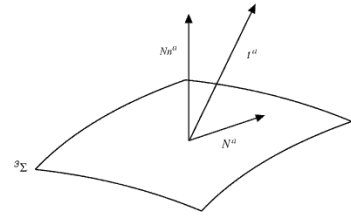


FIG. 3.1 – Décomposition ADM [14].

L'hamiltonien total est bien donné par une somme de (densités de) contraintes, H_a la **contrainte de moments**, H la **contrainte hamiltonienne**, tel que

$$H_{tot} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x (N^a \mathcal{H}_a + |N| \mathcal{H}), \quad (3.30)$$

où les densités de contraintes sont bien sûr des fonctions compliquées des variables canoniques, fonctions du temps.

L'algèbre des déformations dans le formalisme ADM.

En électrodynamisme, il y a conservation de la charge si et seulement si la contrainte de Gauss est préservée au cours du temps. En relativité générale, dans le formalisme canonique, il va en être de même impliquant alors la conservation de l'énergie du système :

$$\text{Conservation des contraintes dans le temps} \Leftrightarrow \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0.$$

L'évolution étant donnée par les crochets de Poisson avec l'hamiltonien total, les contraintes doivent alors satisfaire la relation

$$\{H_{tot}, H_{tot}\} = \{H_a + H, H_a + H\} = 0 \rightarrow \{H_a, H_a\} + \{H, H\} + \{H_a, H\} + \{H, H_a\} = 0. \quad (3.31)$$

On a ainsi l'obligation que les différents crochets de Poisson doivent être soit nuls, soit proportionnels à une combinaison linéaire des contraintes existantes

$$\{H, H_a\} = aH + bH_a, \quad \{H_a, H_a\} = cH + dH_a, \quad \text{etc} \quad (3.32)$$

telles que l'équation (3.31) soit vérifiée. On parle ainsi de **contraintes de première classe** lorsqu'en prenant les crochets de Poisson entre deux contraintes, le résultat est une combinaison linéaire des contraintes. Il est ainsi possible de calculer les crochets de Poisson entre les différentes contraintes intégrées $\vec{H}[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x N^a H_a$, et l'ensemble des crochets de Poisson permettra de donner l'algèbre des difféomorphismes dont les éléments seront les contraintes : elle permettra de voir comment se déforme l'hypersurface spatiale au cours de déplacements successifs. On obtient ainsi l'**algèbre des déformations** donnée selon

$$\{\vec{H}[N^a], \vec{H}[N^b]\} = -\kappa \vec{H}[\mathcal{L}_{N^a} N^b], \quad (3.33)$$

$$\{\vec{H}[N^a], H[N]\} = -2\kappa H[\mathcal{L}_{N^a} N], \quad (3.34)$$

$$\{H[N_1], H[N_2]\} = s \cdot 2\kappa \vec{H}[q^{ab}(N_1 \cdot N_{2,b} - N_2 \cdot N_{1,b})] \quad (3.35)$$

Par rapport à une algèbre de Lie donnée par l'équation (3.3), on peut remarquer que l'équation (3.35) fait intervenir dans l'argument la variable canonique q^{ab} , et la constante de structure pour ces crochets de Poisson n'en est donc plus une puisqu'elle est devenue dynamique.

Ce qu'il faut retenir ici est que cette algèbre sera à la base de celle exprimée avec les variables d'Ashtekar, où on a tenu compte ici, fait important, de la signature de l'espace-temps. L'action de cette algèbre sera un peu plus explicitée lorsque l'on utilisera les variables d'Ashtekar amenant une autre contrainte. Deux relations en fonction des contraintes expriment le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ donné par l'équation (2.89) : en considérant ici le cas du vide, elles s'écrivent

$$G_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = \frac{sH}{2\sqrt{\det(q)}}, \quad G_{\mu\nu} n^{\mu} q_a^{\nu} = -\frac{sH_a}{2\sqrt{\det(q)}}. \quad (3.36)$$

Lorsque les contraintes sont nulles, on a alors défini ce que l'on appelle la **surface des contraintes** et les solutions des équations du mouvement analogues aux équations d'Einstein, sont alors physiques : on parle usuellement de *système on-shell*. En effet, si on considère le shift vecteur comme dépendant des variables de l'espace des phases, alors pour tout crochets de Poisson d'une quantité F avec la contrainte de difféomorphisme, il existe un terme supplémentaire donné par $\{F, N^a\} \mathcal{H}_a$ qui peut très bien être non nul en dehors de la surface de contrainte. On ne pourra alors pas définir l'action de (3.33) comme étant une simple dérivée de Lie sur l'hypersurface spatiale, donc un difféomorphisme, sauf lorsque la contrainte est nulle.

Les deux équations précédentes sont des projections sur des directions orthogonales à l'hypersurface spatiale, et il faut aussi regarder $\{H[N], P^{\mu\nu}\}$ contenant les projections spatiales pour être sûr que $G_{\mu\nu} = 0$. Il est de plus

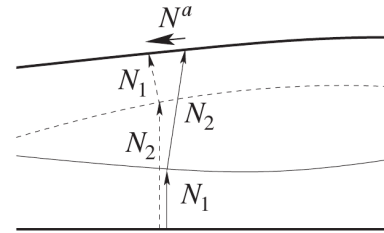


FIG. 3.2 – Illustration de l'action de deux contraintes hamiltoniennes successives donnée par l'équation (3.35) [51].

possible de faire le même raisonnement une fois la matière ajoutée et obtenir les équations $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, et dans le formalisme canonique, la covariance de la théorie sera alors maintenue par la conservation des contraintes dans le temps. Ce formalisme ADM a d'abord été utilisé par la **géomérodynamique** dont la quantification a conduit à l'équation de Wheeler-DeWitt, insatisfaisante, et c'est sur ces bases que se fondera la gravité quantique à boucles.

3.3 Définition des variables d'Ashtekar

Définition des triades

En chaque point d'une hypersurface spatiale, il est possible de définir un repère par un champ de vecteurs tridimensionnel, les **triades** $e_a^i \partial_a$, dont leurs covecteurs, appelés **cotriades** $e_a^i dx^a$ telles que $e_a^i e_b^j = \delta_a^b$ et $e_a^i e_b^j = \delta_a^b$, permettent d'exprimer la métrique spatiale selon

$$q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}. \quad (3.37)$$

Les indices $a, b = 1..3$ sont les indices spatiaux de l'hypersurface courbe, alors que les indices $i, j = 1..3$ sont des indices *internes* correspondant à un espace-temps plat de métrique³ δ_{ij} . La métrique ainsi définie est invariante sous les rotations locales $SO(3)$: $e_a^i \rightarrow O_j^i e_a^j$, et sachant qu'il existe un double recouvrement de $SO(3)$ par $SU(2)$, les cotriades peuvent être vues comme des 1-formes à valeur dans $su(2)$. Elles possèdent ainsi 3 degrés de liberté rotationnels supplémentaires qui vont se traduire par l'apparition d'une nouvelle contrainte, la **contrainte de Gauss**⁴. On parle alors d'**espace des phases étendu** en ayant rajouté des degrés de liberté supplémentaires. Dans la suite, on se situera sur cet espace, dans lequel les solutions seront physiques lorsque la contrainte de Gauss sera nulle. On voit par l'équation (3.37) que la donnée des cotriades permet de définir la métrique spatiale et on va pouvoir définir une des variables d'Ashtekar qui utilisent cette formulation. Comme précédemment, il faut introduire la courbure extrinsèque, donnée par l'équation (3.26), pour définir le moment conjugué de la métrique spatiale. On introduit ainsi une 1-forme K_a^i à valeur dans $su(2)$ qui permet de définir dans cette formulation la courbure extrinsèque comme étant :

$$K_{ab} \doteq K_{(a}^i e_{b)}^j \delta_{ij}. \quad (3.38)$$

On va de plus introduire la **densité de triades** E_i^a de poids +1, définie selon

$$E_i^a \doteq \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k = \sqrt{\det(q)} e_i^a, \quad (3.39)$$

qui permet de reconstruire la métrique spatiale par la relation

$$\det(q) \cdot q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}, \quad (3.40)$$

et de déterminant

$$\det(E_i^a) = \det E = \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} E_i^a E_j^b E_k^c. \quad (3.41)$$

K_{ab} étant symétrique, elle doit nécessairement satisfaire la contrainte

$$\mathcal{G}_j \doteq \epsilon_{jkl} K_a^k E_l^a = 0, \quad (3.42)$$

et dans ce jeu de variables, l'action (3.28) s'écrit⁵

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left(2E_j^a \dot{K}_a^j - [\Lambda^j G_j + N^a H_a + NH] \right), \quad (3.43)$$

où Λ^i est un nouveau multiplicateur de Lagrange. L'espace des phases étendu de coordonnées (K_a^i, E_i^a) est ainsi équipé d'une structure symplectique de crochets de Poisson

$$\{K_a^i(x), E_j^b(y)\} = \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x - y). \quad (3.44)$$

D'autre part, on peut voir qu'il existe une transformation canonique ne modifiant pas les crochets de Poisson : pour un paramètre γ non nul, cette transformation s'obtient par le changement de variables $(K, E) \rightarrow (\gamma K, \frac{E}{\gamma})$, et une conséquence importante est que la contrainte (3.42) n'est pas modifiée par cette transformation :

$$\mathcal{G}_j \doteq \epsilon_{jkl} K_a^k E_l^a = \epsilon_{jkl} (\gamma K_a^k) (\frac{E_l^a}{\gamma}) = 0. \quad (3.45)$$

³On parle de métrique de Cartan-Killing sur $su(2)$.

⁴On peut directement le voir en se rappelant les caractéristiques de l'équation (3.13) où il va falloir redéfinir une nouvelle dérivée covariante.

⁵On peut montrer que le terme canonique s'écrit $P^{ab} \dot{q}_{ab} = 2E_i^a \dot{K}_a^i$.

On parle alors d'une **transformation de Weyl** qui consiste à faire une 'homothétie' sur la métrique, ici $q_{ab} \rightarrow \frac{q_{ab}}{\gamma^2}$. Cette transformation va apporter une nouvelle liberté sur la théorie et $\gamma \in C^*$, une constante, est appelée **paramètre de Barbero-Immirzi**. Pour différentes valeurs de γ , la procédure de quantification vue après va mener à des résultats différents, et donc à des théories différentes.

Dans cet espace de phase, on possède certes toute l'information de la relativité générale, mais cette théorie n'est pas similaire à une théorie de Yang-Mills. Pour ce faire, il est nécessaire de définir une contrainte de Gauss faisant intervenir une nouvelle connexion, variable conjuguée de la densité de triades, donnant alors une dérivation covariante comme dans l'équation (3.2). Cette connexion est appelée **connexion d'Ashtekar**.

Il faut introduire en plus une information donnée par la contrainte de Gauss qui s'obtient en définissant une connexion conjuguée à la densité de triades par la définition d'une nouvelle dérivée covariante, la **connexion d'Ashtekar**.

Dérivée covariante et connexion d'Ashtekar

En relativité générale, on a introduit la dérivée covariante pouvant s'appliquer sur des tenseurs. Ici, on va étendre la notion de dérivée covariante spatiale, D_a , agissant sur les indices a, b , à des tenseurs ayant des indices dans $so(3)$ et qui sera compatible avec les triades. On introduit alors la notion de **connexion de spin** Γ_a^k en demandant que la dérivée covariante soit métrique, $D_a e_b^j = 0$, et de façon identique à l'équation (2.72), elle s'écrit alors pour la densité de triades E_j^a

$$D_a E_j^a \doteq \partial_a E_j^a + \epsilon_{jk}^l \Gamma_a^k E_l^a = 0. \quad (3.46)$$

Le fait que cette dérivée soit métrique permet de trouver une expression pour la connexion de spin selon les triades et cotriades,

$$\Gamma_a^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_k^b \left[\partial_b e_a^j - \partial_a e_b^j + e_j^c e_a^l \partial_b e_c^l \right], \quad (3.47)$$

soit encore en termes des densités de triades E_i^a et de leur dual :

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} E_j^b \left[\partial_a E_b^k - \partial_b E_a^k + E_k^c E_a^l \partial_c E_b^l - E_a^k \frac{\partial_b (\det E_i^a)}{\det E_i^a} \right]. \quad (3.48)$$

Sous la transformation précédente, on peut voir directement que $(\gamma)\Gamma = \Gamma$.

Que cherche-t-on ? On a vu dans les théories de Yang-Mills que l'on pouvait avoir une dérivée covariante de la forme $D_a E^b = \partial_a E^b + \epsilon A E$ où A est une connexion formant une structure symplectique avec le champ électrique E^a ($\{A, E\}$). D'autre part, dans le formalisme ADM, on a vu que la variable canonique était la métrique spatiale q^{ab} , donnée ici par la densité de triades E_i^a , et que son moment conjugué P_{ab} était lié à la courbure extrinsèque K_{ab} . On va donc chercher une connexion A_a^i , la connexion d'Ashtekar, qui soit la variable conjuguée à la densité de triades E_i^a , devant contenir l'information sur K_a^i . On va alors regarder la dérivée covariante et la contrainte \mathcal{G}_j donnée par l'équation (3.45), telle qu'après modifications,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j &= 0 + \epsilon_{jkl} (\gamma) K_a^k (\gamma) E_l^a = \partial_a ((\gamma) E_j^a) + \epsilon_{jk}^l [\Gamma_a^k + (\gamma) K_a^k] ((\gamma) E_l^a) \\ &= (\gamma) D_a ((\gamma) E_j^a). \end{aligned} \quad (3.49)$$

On voit ainsi que l'équation (3.49) correspond à une contrainte de Gauss, non intégrée. Elle suggère comme connexion, dans le cas général,

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i \quad (3.50)$$

qui, avec la densité de triade, possède étonnement une structure symplectique (A_a^i, E_j^b) , de crochets de Poisson

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \kappa \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x - y). \quad (3.51)$$

Ce sont ces deux variables, que l'on appelle **variables d'Ashtekar** à valeur dans $su(2)$ (en fait $so(3)$), introduites en 1986 par **Abhey Ashtekar**, et A_a^i est appelée **connexion d'Ashtekar**. En définissant $\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i$, elles s'écrivent

$$A(\tau) = A_a^i \tau_i dx^a \quad \text{et} \quad E(\tau) = E_i^a \tau^i \partial_a, \quad (3.52)$$

et permettent de définir la formes de courbure

$$F_{ab}^k \doteq 2\partial_{[a} A_{b]}^k + \epsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j \quad (3.53)$$

donnée par les **équations de structure de Cartan** pour la courbure⁶

$$F = dA + A \wedge A = dA^i T_i + \frac{1}{2} [T_i, T_j] A^i \wedge A^j = (F_{ab}^k T_k) dx^a \wedge dx^b. \quad (3.54)$$

⁶La démonstration de la théorie en utilisant principalement les formes a été faite de manière complète dans [13].

L'action d'Einstein-Hilbert pour ces variables est alors donnée par

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left(2E_a^i \dot{A}_a^i - [\lambda^j \mathcal{G}_j + N^a \mathcal{H}_a + N \mathcal{H}] \right), \quad (3.55)$$

où les densités de contraintes sont alors

1. la **densité de contrainte de Gauss**

$$\mathcal{G}_j = D_a E_j^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jk}^l A_a^k E_l^a, \quad (3.56)$$

2. la **densité de contrainte de moments**

$$\mathcal{H}_a = F_{ab}^j E_j^b, \quad (3.57)$$

3. la **densité de contrainte hamiltonienne**

$$\mathcal{H} = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E_i^a|}} \left[F_{ab}^k \epsilon_k^{ij} - 2(1 + \gamma^2) K_a^{[i} K_b^{j]} \right]. \quad (3.58)$$

La contrainte de Gauss génère des transformations de jauge de $su(2)$ sur les variables, comme dans le cas des théories de Yang-Mills :

$$\delta_G A_a^i = \{A_a^i, G[\lambda]\} = D_a \lambda^i \quad \delta_G E_i^a = \{E_i^a, G[\lambda]\} = [E, \lambda]_i^a. \quad (3.59)$$

La contrainte de moments génère des orbites qui sont liées aux difféomorphismes spatiaux puisqu'elle est constituée en partie de termes qui en sont responsables. La contrainte qui générera des difféomorphismes spatiaux purs est donnée par une combinaison linéaire de la contrainte de moments avec la contrainte de Gauss, et on parle ainsi de **contrainte de Difféomorphismes**

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{H}_a - A_a^i (D_b E_i^b). \quad (3.60)$$

Pour voir que cette contrainte est bien liée aux difféomorphismes spatiaux, on peut intégrer cette contrainte avec un champ de vecteurs test N^a telle que $D[N^a] = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x N^a \mathcal{D}_a$, regarder les crochets de Poisson de cette contrainte avec une fonction dépendant des coordonnées canoniques $f(E, A)$ et voir que l'on obtient :

$$\{D[N^a], f(E, A)\} \sim \mathcal{L}_{N^a} f. \quad (3.61)$$

L'orbite générée par la contrainte dans l'espace des phases est simplement proportionnelle à la dérivée de Lie le long de N^a . La contrainte hamiltonienne quant à elle génère l'évolution temporelle en terme de la composante 't' des coordonnées. Ce choix de coordonnées n'a *a priori* aucun sens physique privilégié. La relativité générale est un système totalement contraint et l'hamiltonien total H_{tot} sera alors donné par une combinaison linéaire de toutes les contraintes utilisant des multiplicateurs de Lagrange

$$H_{tot} = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x [\lambda^j \mathcal{G}_j + N^a \mathcal{D}_a + N \mathcal{H}] = G[\lambda] + D[N^a] + H[N]. \quad (3.62)$$

Les équations d'Hamilton données à partir de cette équation (3.62) redonneront exactement les équations d'Einstein comme dans le formalisme ADM. On voit ainsi que la relativité générale écrite en terme des variables d'Ashtekar est une théorie de jauge à valeur dans $su(2)$, invariante de fond, similaire à une théorie de Yang-Mills, avec un hamiltonien total proportionnel à 3 autres contraintes supplémentaire et devant être nul lorsque l'on considère des solutions physiques. La relativité générale étant une théorie de l'espace-temps, même sous cette formulation, elle va rester très différente d'une théorie de Yang-Mills : il va falloir développer une nouvelle méthode de quantification qui tiendra compte de l'invariance de fond.

Remarque sur le paramètre de Barbero-Immirzi

Ce paramètre met en évidence une liberté supplémentaire dans le choix des variables. Cependant, dans la théorie classique, il est possible de montrer [29] que la contrainte hamiltonienne est invariante vis-à-vis de ce paramètre. En effet, l'équation (3.58) peut s'écrire en utilisant les propriétés de symétries et la définition de la connexion d'Ashtekar A_a^i :

$$H = \epsilon_k^{ij} \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} (2\partial_a \Gamma_b^k + \epsilon_{mn}^k (\Gamma_a^m \Gamma_b^n - K_a^m K_b^n)) + H_\gamma, \quad (3.63)$$

où H_γ contient tous les termes en γ . Ce terme est en fait proportionnel à la contrainte de Gauss, et peut ainsi se réécrire comme la dérivée covariante de la courbure extrinsèque, symétrique $K_{ab} = K_{ba}$, multipliée par un symbole de Levi-Civita, antisymétrique,

$$H_\gamma \sim \epsilon^{abc} D_a K_{bc} = 0, \quad (3.64)$$

montrant que dans le cas classique, il est nécessairement nul. Dans le cas d'un univers homogène et isotrope, la contrainte de Gauss sera automatiquement satisfaite et les équations classiques de la cosmologie, comme l'**équation de Friedmann**, seront bien retrouvées. Le paramètre γ ne va apparaître dans la théorie effective que par l'intermédiaire des corrections issues lors de la procédure de quantification de la cosmologie quantique à boucles.

L'algèbre des contraintes

Pour étudier l'algèbre résultante des variables d'Ashtekar, on va comme auparavant intégrer les contraintes, données alors par l'équation (3.62). Deux contraintes de Gauss vont donner la relation

$$\{G[\lambda], G[\mu]\} = G[\lambda_j \mu_k \epsilon^{jk}], \quad (3.65)$$

et regarder l'effet consécutif de deux de ces contraintes sur une variable est équivalent à évaluer l'action de cette contrainte sur la variable avec comme argument le commutateur des fonctions tests. Dans le cas où on regarde les contraintes de Difféomorphisme, on obtient

$$\{D[N^a], D[M^b]\} = D[\mathcal{L}_{N^a} M^b], \quad (3.66)$$

et l'effet d'un difféomorphisme sur un autre va simplement correspondre à modifier la fonction test finale en combinant les deux fonctions tests considérées, indépendantes des variables canoniques. Cela revient alors à laisser l'espace fixe et à appliquer directement une combinaison des deux fonctions tests. En regardant son action sur la contrainte de Gauss, on a donc directement en appliquant l'argument précédent :

$$\{D[N^a], G[\lambda]\} = G[\mathcal{L}_{N^a} \lambda]. \quad (3.67)$$

De plus, la contrainte hamiltonienne n'a aucune influence sur la déformation due à la contrainte de Gauss

$$\{H[N], G[\lambda]\} = 0, \quad (3.68)$$

et de même qu'auparavant,

$$\{D[N^a], H[M]\} = H[\mathcal{L}_{N^a} M]. \quad (3.69)$$

Enfin, les crochets de Poisson entre deux hamiltoniens redonneront une contrainte de Difféomorphisme

$$\{H[N], H[M]\} = D[K^a] \quad (3.70)$$

où $K^a = \frac{E_i^a E^{bi}}{\det(q)} (N \partial_b M - M \partial_b N)$. Sans surprises, l'algèbre correspond bien à celle du formalisme ADM et va redonner les mêmes résultats. On peut remarquer que K^a n'est pas seulement une combinaison des dérivées des fonctions tests, mais fait intervenir les variables canoniques. Cela signifie que même si les crochets de Poisson de deux contraintes hamiltoniennes sont proportionnels à un difféomorphisme, le facteur de proportionnalité n'est plus une constante, mais une fonction. À l'inverse des constantes de structure vues pour les groupes précédents, le groupe des difféomorphisme va faire intervenir des **fonctions de structure**, dépendant du temps et complexifiant la manière de quantifier : une conséquence de la promotion des variables canoniques en tant qu'opérateurs est de risquer de compromettre la fermeture de l'algèbre. Il pourra alors exister des termes en plus dans le résultat des crochets de Poisson après quantification qui, à la limite classique, vont tendre vers 0, mais resteront présents au niveau quantique, pouvant fausser les résultats : on parle ainsi d'**anomalies**. Pour garder la cohérence de la physique sous-jacente au problème, on doit alors tout faire pour que l'algèbre reste fermée en faisant disparaître ces anomalies à l'aide de termes supplémentaires, les **contre-termes** que l'on utilisera par la suite.

3.4 Couplage à la matière

Dans les modèles que l'on considérera en **cosmologie quantique à boucles** ou **Loop Quantum Cosmology** (LQC) en anglais, on utilisera au départ comme champ de matière contenu dans l'univers, le champ le plus simple que l'on puisse considérer et qui en cosmologie usuelle s'est révélé avoir de grandes conséquences physiques, le **champ d'inflaton**. Il est cependant possible de définir d'autres champs [30]. Plus particulièrement, on écrit comme auparavant

$$S_{matter} = \int d^4x \sqrt{-\det(g)} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \quad (3.71)$$

permettant de définir le moment conjugué π de ce champ

$$\pi = \sqrt{\det(q)} \dot{\varphi}, \quad (3.72)$$

ainsi que la relation de crochets de Poisson

$$\{\varphi(x), \pi(y)\} = \delta^3(x - y). \quad (3.73)$$

On peut ainsi écrire la contrainte totale résultante en fonction des variables d'Ashtekar

$$H_{tot-matter} = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} (\pi^2 + \delta^{ij} E_i^a E_j^b \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi)) + N^a \pi \partial_a \varphi, \quad (3.74)$$

donnant la contribution du champ scalaire aux différents termes des contraintes

$$D_m[N^a] = \int d^3x N^a \pi \cdot \partial_a \varphi, \quad (3.75)$$

$$H_m[N] = \int_{\Sigma} d^3x N \left[\frac{\pi^2}{2\sqrt{\det E_i^a}} + \frac{E_i^a E_j^b}{2\sqrt{\det E_i^a}} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \sqrt{\det E_i^a} V(\varphi) \right]. \quad (3.76)$$

Il est de même possible de définir pour ce champ les densités d'énergie ρ et de pression P telles que

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\det E}} \frac{\delta H_{mat}}{\delta N}, \quad (3.77)$$

$$P = -\frac{1}{N} \frac{\delta H_{mat}}{\delta \sqrt{\det E}}. \quad (3.78)$$

On peut remarquer ici qu'il n'est pas fait allusion à la connexion A_a^i . Cela est pour le moment normal puisque la matière est constituée indépendamment de l'espace-temps, et seul son couplage va influencer la déformation de l'espace-temps en vertu des équations d'Einstein.

Une remarque peut aussi être faite à partir de ce que l'on a vu en relativité restreinte, où étudier le groupe de transformation via ses Casimirs permettait de trouver naturellement les champs qui doivent y être présents. Ici, la situation n'est pas aussi simple et la matière a été ajoutée de façon plus arbitraire.

Jusqu'à maintenant, en utilisant de nouvelles variables et au niveau 'classique', nous n'avons fait que réexprimer l'action de la relativité générale sous une forme similaire à un hamiltonien dans une théorie de Yang-Mills, pour laquelle il existe une procédure de quantification connue. Dans ce qui suit, on va chercher à comprendre ce qui fait de la gravité quantique à boucles une théorie différente dans la manière de quantifier, et montrer alors ses enseignements quant à la structure de notre espace-temps.

3.5 La quantification

La quantification des contraintes dans le cas du formalisme ADM se fait en utilisant les composantes de la métrique spatiale q_{ab} comme variables de configuration. Cela a amené à la fameuse **équation de Wheeler-DeWitt** pour le cas d'une fonction d'onde $\Phi[q_{ab}]$

$$\hat{H}\Phi[q_{ab}] = 0. \quad (3.79)$$

Cependant, l'espace de Hilbert nécessaire est très mal défini, notamment dans la définition du produit scalaire. En utilisant les variables d'Ashtekar, la fonction d'onde peut être fonction de la connexion $\Phi(A_a^i)$. On parle ainsi de la **représentation des connexions**, et les représentations similaires ont été utilisées lors de la quantification des théories de Maxwell et de Yang-Mills. Ici cependant, la métrique est associée aux densités de triades E_i^a , et le pendant naturel du travail de **Wheeler** et de **De Witt** aurait été de considérer la fonction d'onde $\Phi(E_i^a)$. Cela correspond à la première différence avec le cas habituel qui, notamment plus tard lors du choix des fonctions génératrices pour l'équation de Hamilton-Jacobi, va amener quelques différences subtiles. La prédiction principale de la gravité quantique à boucles, comme attendu pour une théorie quantique, va être la discrétisation du spectre des opérateurs géométriques, comme le volume ou l'aire, qui deviendra importante à l'échelle de Planck et négligeable à grande échelle, retrouvant ainsi une description continue de l'espace-temps.

La quantification non-perturbative de la relativité : le programme de Dirac

Nous passons ici en revue très rapidement les grandes étapes de la procédure de quantification dans la mesure où celle-ci n'est pas essentielle pour la dimension cosmologique.

Le programme de Dirac appliqué à la quantification canonique de systèmes généralement covariants peut se faire de deux manières : soit on commence par résoudre classiquement les contraintes, on identifie l'espace des phases réduit, et on quantifie la théorie en trouvant la représentation de l'algèbre des observables physiques dans l'espace de Hilbert, soit on procède d'abord à la quantification puis on résout les contraintes. Dans un système à 4 dimensions, il est difficile de trouver les vrais degrés de liberté de la relativité générale. En gravité quantique à boucles, on va ainsi d'abord quantifier et résoudre les contraintes ensuite. On procède ainsi par étapes :

1. obtention d'une représentation des variables de l'espace des phases de la théorie, promues en tant qu'opérateurs sur un espace de Hilbert cinématique, \mathcal{H}_{kin} , et satisfaisant la relation de commutation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \{q, p\}$.
2. promotion des contraintes en tant qu'opérateurs sur \mathcal{H}_{kin} .
3. caractérisation de l'espace des solutions des contraintes et définition du produit interne correspondant qui définit la notion de probabilités. On définit ainsi l'espace de Hilbert physique \mathcal{H}_{phys} .
4. obtention d'un ensemble complet d'observables invariantes de jauge, les observables de Dirac.

Exemple : la particule reparamétrisée

Un exemple simple [33] d'un tel programme est la particule reparamétrisée, non-relativiste, de masse m d'action (1.81) et de contrainte hamiltonienne (1.84). Il est possible d'appliquer ce programme tel que

1. l'espace de Hilbert cinématique dans ce cas là n'est autre que $\mathcal{H}_{kin} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, l'espace des fonctions de carré sommable pour des fonctions d'onde $\Psi(q, t)$, et on définit le produit interne par

$$\langle \phi, \psi \rangle \doteq \int dq dt \phi(\bar{q}, t) \psi(q, t). \quad (3.80)$$

2. la promotion des variables de l'espace des phases en opérateurs auto-adjoints satisfaisant la relation de commutation donne simplement $\hat{q} = q$, $\hat{t} = t$ de moments conjugués $\hat{p}_q = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, $\hat{p}_t = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$.
3. la contrainte (1.84) devient ici⁷

$$\hat{C} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q), \quad (3.81)$$

dont $\hat{C}|\Psi\rangle = 0$ n'est rien d'autre que l'équation de Schrödinger.

4. Les solutions sont ainsi les solutions de l'équation de Schrödinger que l'on peut caractériser par leurs conditions initiales définies à un temps t_0 : $\Psi(q) = \Psi(q, t = t_0)$, et l'espace de Hilbert physique est ainsi l'espace usuel $\mathcal{H}_{phys} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de produit interne

$$\langle \phi, \psi \rangle_p \doteq \int dq \phi(\bar{q}) \psi(q). \quad (3.82)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger, à cause de leur invariance par rapport à t , ne sont pas re-normalisables dans \mathcal{H}_{kin} au sens du produit scalaire donné par l'équation (3.80). Ceci est une propriété générique des solutions des contraintes lorsque ces contraintes ont un spectre continu.

5. Les observables doivent commuter avec les contraintes et pour le cas d'une particule libre $V(q) = 0$, il existe simplement deux observables indépendantes

$$\hat{O}_1 = \hat{q} - \frac{\hat{p}_q}{m}(\hat{t} - t_0), \quad \hat{O}_2 = \hat{p}_q, \quad (3.83)$$

les valeurs de q et p_q à $t = t_0 \in C$. On peut aussi remarquer que dans \mathcal{H}_{phys} , lorsque $\hat{t} = t_0$, ces observables se résument bien à la position pour \hat{O}_1 et au moment pour \hat{O}_2 .

Dans cet exemple, on a simplement reproduit la procédure standard de quantification, qui redonne bien l'équation de Schrödinger pour une particule non-relativiste. On voit ainsi que la dynamique, comme dans le cas classique, est bien contenue dans les contraintes quantiques et on pourra appliquer cette procédure au cas de la relativité générale.

⁷Dans le cas de systèmes plus compliqués, il faut aussi tenir compte de l'ordre dans lequel on applique les opérateurs, et cette étape est souvent non-triviale.

La Gravité Quantique à Boucles

Dans cette théorie, la première étape consiste à promouvoir les variables canoniques au rang d'opérateurs et à choisir un espace de Hilbert cinématique tel que les variables de configuration soient les connexions : on considère ainsi un espace contenant un ensemble de fonctionnelles $\Phi(A)$ qui sont de carré sommable par rapport à une certaine mesure. On définit la connexion comme un opérateur multiplicatif

$$\hat{A}_a^i \Phi(A) = A_a^i \cdot \Phi(A), \quad (3.84)$$

et les densités de triades comme des dérivées fonctionnelles

$$\hat{E}_i^a \Phi(A) = -i\kappa\gamma \frac{\delta}{\delta A_a^i} \cdot \Phi(A), \quad (3.85)$$

vérifiant les relations de commutation,

$$[\hat{A}_a^i, \hat{E}_j^b] = -i\hbar \cdot \kappa\gamma \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x-y). \quad (3.86)$$

On doit maintenant promouvoir les contraintes de Gauss et de Moment en termes d'équations entre opérateurs sur des états quantiques. Il est possible de montrer que ces contraintes, en tant qu'opérateurs, génèrent les mêmes symétries que classiquement, et on doit ainsi imposer l'invariance pour les fonctions d'ondes sous les contraintes : les états qui sont invariants sous ces deux contraintes sont les **états cinématiques**. En résumé, en commençant par un espace de Hilbert vierge, \mathcal{K} , la procédure de quantification doit alors passer par les différentes étapes suivantes :

$$\mathcal{K} \xrightarrow{G_j} \mathcal{K}_0 \xrightarrow{H_a} \mathcal{H}_{kin} \xrightarrow{H} \mathcal{H}. \quad (3.87)$$

Un des problèmes encore majeur à l'heure actuelle est la quantification de la contrainte hamiltonienne permettant de trouver les **états dynamiques**, et donc les observables physiques. D'une part, même au niveau classique, cette contrainte ne permet pas une action géométrique simple puisqu'elle génère l'évolution par rapport à une variable x^0 dans les équations d'Einstein, ce qui n'est pas visible facilement par son action sur les variables spatiales. D'autre part, l'opérateur résultant doit avoir une densité de $+1$. Mais il existe dans la contrainte hamiltonienne un terme avec au dénominateur $\sqrt{\det(q)}$, donc de densité -1 . Or, même si sur une variété de géométrie quelconque il existe le delta de Dirac de densité $+1$, il n'existe pas d'objet de densité $+2$ qui pourrait permettre de bien quantifier la contrainte (multiplier deux deltas de Dirac entre eux ne construira pas un tel objet). Une astuce permet néanmoins de passer outre ce problème : introduite par *Thomas Thiemann* en 1996, elle consiste à remarquer que les crochets de Poisson du volume

$$V = \int d^3x \sqrt{\det(q)} = \frac{1}{6} \int d^3x \sqrt{|E_i^a E_j^b E_k^c \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc}|} \quad (3.88)$$

avec la connexion A_a^i donnent

$$\{A_c^k, V\} = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det(q)}} \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc}, \quad (3.89)$$

permettant ainsi d'écrire la contrainte hamiltonienne (dans le cas ici où $\gamma = i$, H et H^a deviennent des fonctions polynomiales en A)

$$H[N] = \int d^3x N \{A_c^k, V\} F_{ab}^k \epsilon^{abc}. \quad (3.90)$$

Il serait alors possible de quantifier cette contrainte en passant par les commutateurs, mais A et E vont entraîner l'apparition de distributions, cf l'équation (3.86), rendant difficile une définition de leur opérateurs quantiques correspondants : par exemple, la présence en facteur des densités de triades E s'appliquant au même point va faire apparaître au niveau quantique des deltas de Dirac tels que $\delta(x-x) = \delta(0)$ une fois appliqués sur $\Phi(A)$, qui n'est pas une distribution bien définie. Dans le cas de la théorie quantique des champs, le fond étant fixé, on peut utiliser les techniques de régularisation permettant de passer outre ces problèmes. Or, pour une théorie nécessitant d'être invariante du fond, imposer la régularisation briserait cette invariance.

Ainsi, le fait de ne pas savoir comment travailler de façon mathématiquement rigoureuse avec des 'distributions' d'ondes $\Phi(A)$, dépendantes des connexions et invariantes sous toute transformation de jauge et de difféomorphismes, a mené au développement d'une représentation alternative appelée **représentation des boucles**. Dans une telle représentation, le produit interne nécessaire à la définition complète de l'espace de Hilbert va apparaître le plus simplement et naturellement possible et permettra de traiter le cas des distributions. Il sera donné à l'aide de la **mesure d'Ashtekar-Lewandowski** $d\mu_{AL}$, invariante sous les contraintes cinématiques.

La représentation des boucles et les réseaux de spin

Les travaux de **Lee Smollin** et de **Ted Jacobson** sur l'utilisation des holonomies avec les variables d'Ash-tekhar, ont amené **Lee Smollin** et **Carlo Rovelli** à explorer cette nouvelle représentation donnant son nom à la gravité quantique à boucles.

D'après le théorème de Giles, les traces des holonomies sur une 3-surface Σ constituent une base pour les fonctions de la connexion invariantes de jauge, ce qui en font des solutions possibles pour la contrainte de Gauss. On décompose ainsi un état sur cette base des holonomies en posant

$$\Phi[A] = \sum_{\gamma} \Phi[\gamma] h_{\gamma}[A] \quad (3.91)$$

où la somme est effectuée sur toutes les boucles fermées possibles. Les holonomies, qui sont des matrices, sont ainsi définies comme précédemment par

$$h_{\gamma}[A] = \text{Tr} \left(\mathcal{P} \left[\exp \left(- \oint_{\gamma} ds \dot{\gamma}^a(s) A_a^i(s) \tau_i \right) \right] \right) \in SU(2). \quad (3.92)$$

et utiliser les coefficients $\Phi[\gamma]$ consistera à travailler dans la **représentation des boucles**. Il est possible de voir l'analogie avec la représentation de moments en mécanique quantique pour laquelle la base des états est $\exp(ikx)$ labellisée par un nombre d'onde k et, avec l'expression $\Phi(x) = \int dk \Phi(k) \exp(ikx)$, on travaille ici avec les coefficients du développement $\Phi(k)$.

Les connexions étant des 1-formes, il est tout naturel de les intégrer sur un chemin appartenant à Σ , permettant de travailler avec des fonctions et non plus des distributions. Les autres opérateurs que l'on traite sont les densités de triades E_i^a et sont associées par définition à des 2-formes par l'équation (3.39). On s'attend alors à ce que leur intégration sur une 2-surface en fasse des opérateurs bien définis sur \mathcal{H}_{kin} , et on parle, après intégration, de **flux de densité de triades** $F_S^f(E)$, de fonction test $f^i \in SU(2)$ pour une surface $S \in \Sigma$ de co-normale n_a :

$$F_S^f[E] = \int_S d^2x \cdot n_a E_i^a f^i \in SU(2). \quad (3.93)$$

L'algèbre de ces variables canoniques est alors donnée par

$$\{A, E\} = \delta \rightarrow \{h_{\gamma}[A], F_S^f[E]\} = \kappa \gamma \cdot \text{Int}(\gamma, S) \cdot h_{\gamma} [A^i (f^i \tau_i)] \quad (3.94)$$

où $\text{Int}(\gamma, S) = 1$ si γ intercepte S , 0 sinon.

Pour l'algèbre $su(2)$, il y a une infinité de matrices possibles autre que celles de Pauli qui vérifient les relations de commutation $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$: ce sont des matrices $(2j+1) \times (2j+1)$, $j = \frac{1}{2}, 1, \dots$, qui sont appelées des **représentations** avec la relation pour les générateurs $T_i^{(j)}$ dans la représentation j

$$T_i^{(j)} T_i^{(j)} = -j(j+1)\mathbb{I}. \quad (3.95)$$

La représentation la plus compacte (utilisant les matrices de Pauli avec $j = \frac{1}{2}$) est appelée **représentation fondamentale**.

Il existe ainsi différentes représentations possibles pour construire une connexion et ses holonomies, et l'espace, au même titre que dans la théorie de Maxwell, est ainsi vu comme un ensemble de boucles labellisées par leur **spin** correspondant à la représentation utilisée sur la boucle pour définir la connexion : elles sont enchevêtrées les unes avec les autres et reliées au niveau de noeuds. Les holonomies étant des matrices, il est possible d'évaluer au niveau de ces noeuds l'action de ces matrices possédant un spin j différent pour chacune : on les 'contracte' en utilisant des objets appelés **intertwiners**, des produits tensoriels utilisant ϵ_{ijk} et δ_j^i , qui sont au final analogues aux **coefficients de Clebsch-Gordan**. Le résultat est ainsi appelé **réseau de spins** : un graphe avec des noeuds et des lignes *colorées* par les spins j indiquant la dimension des matrices pour les holonomies.

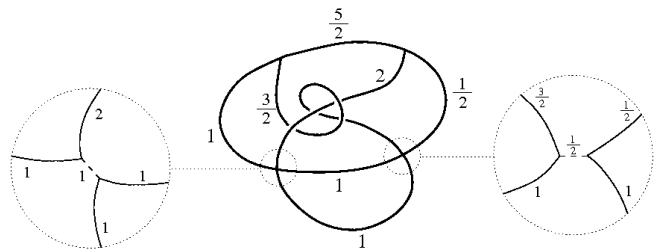


FIG. 3.3 – Exemple de réseau de spin [33]

On peut alors définir deux opérateurs géométriques :

- **l'opérateur d'aire** : en utilisant l'équation (1.53), pour une surface de métrique induite h_{ab}

$$h_{ab} = q_{ab} - \frac{n_a n_b}{n^2}, \quad (3.96)$$

où

$$n_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c}{\partial \sigma^2} \quad (3.97)$$

est la normale à la surface, de coordonnées locales σ^1, σ^2 , et l'aire en fonction des densités de triades s'exprime selon

$$A_S[E_i^a] = \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{E_i^a E_j^b \delta^{ij} n_a n_b}. \quad (3.98)$$

L'opérateur correspondant s'exprime en utilisant l'opérateur du flux des densités de triades, donnant ainsi finalement [13]

$$\hat{A}_\Sigma \Psi_s = 8\pi l_{Planck}^2 \gamma \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)} \Psi_s, \quad (3.99)$$

où $l_{Planck} = \sqrt{\frac{g\hbar}{c^3}} = 10^{-33}$ cm, est la longueur de Planck. Une aire est définie par le fait qu'une boucle transporte avec elle une surface dont la valeur de l'aire dépend de son spin. L'aire minimale n'est pas 0 mais Δl_{Planck}^2 avec $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma$, faisant intervenir le paramètre de Barbero-Immirzi. Une application possible est le calcul de l'entropie des trous noirs qui dépend classiquement de sa surface, et dont la loi est donnée par l'**équation de Hawking-Bekenstein**. Regarder le cas des trous noirs en gravité quantique à boucles permet de retrouver admirablement cette même loi, donnant ainsi la valeur possible $\gamma \approx 0.69$. Il serait néanmoins préférable que cette valeur particulière émerge pour des raisons plus fondamentales ou que le calcul de l'entropie ne fasse pas directement apparaître γ : ce sujet de recherche est actuellement activement étudié.

- **l'opérateur de volume** intervient au niveau des noeuds et en donne un sens physique : en chaque noeud, il existe un grain de volume dont la valeur est donnée par le nombre de liens le joignant.

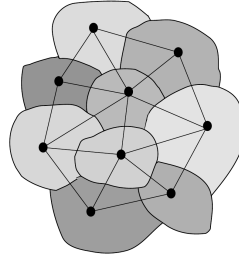


FIG. 3.4 – exemple d'espace fait de grains [31].

On peut ainsi voir l'espace-temps comme un ensemble de grains de volume, reliés par des boucles définissant des surfaces, comme sur la figure Fig.(3.5).

La dynamique de l'espace-temps

L'évolution 'temporelle' de la structure de l'espace-temps va être donnée par la condition sur la contrainte hamiltonienne $H\Psi = 0$: pour une 'portion' de l'espace Δ , la contrainte hamiltonienne peut ainsi s'écrire en fonction des holonomies selon

$$H_\Delta[N] = \sum_{\Delta} N(\Delta) \cdot \text{Tr}(h_i h_k \{h_k^{-1}, V\}) \quad (3.100)$$

et chaque action des holonomies sur une boucle va permettre la création de nouveaux noeuds, donc de nouveaux quantas de volumes, et complexifier alors l'espace-temps. On parle de **mousse de spin** (ou *spinfoam* en anglais), donnant la dynamique d'un réseau de spin que l'on représente par des polygones, comme indiqué sur la figure Fig.(3.5). Cette approche, développée notamment par **Carlo Rovelli** à Marseille, n'est pas encore achevée, des points restent encore à élucider : par exemple, certains des états physiques n'ont pas été obtenus, ou bien le paramètre de Barbero-Immirzi introduit une liberté encore mal comprise puisque la dynamique n'est pas définie de façon parfaitement non équivoque, *etc*. Dans la suite, nous allons surtout nous intéresser à son approximation semi-classique dans le but d'obtenir des prédictions cosmologiques.

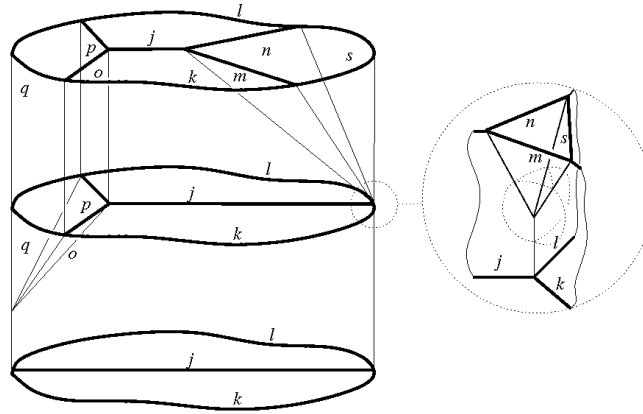


FIG. 3.5 – exemple de mousse de spin évoluant suivant l'axe vertical, avec l'action de la contrainte hamiltonienne [33].

3.6 Observations sur la Gravité Quantique à Boucles

Le champ gravitationnel est une entité physique fondamentale sur laquelle les autres champs évoluent. La construction des théories décrivant ces phénomènes est intéressante en ce sens qu'en cherchant à respecter les symétries présentes, il devient nécessaire de définir de nouvelles dérivées, les dérivées covariantes, qui amènent à l'existence d'une expression commune des tenseurs de courbure. Dans ce formalisme commun qu'est la géométrie différentielle, les théories de gravitation et de Yang-Mills généralisant les autres champs, peuvent être traitées ensemble d'une façon plus ou moins similaire lors des étapes de quantification.

La gravité quantique à boucles, une des approches possibles pour la gravitation, suppose que la relativité générale n'est pas à remettre en cause mais que la procédure usuelle de quantification ne lui est pas adaptée. Elle cherche simplement à donner un cadre quantique pour l'évolution de tous les champs, sans pour autant prétendre à l'unification des différentes forces.

Une conséquence importante est la discrétisation de l'espace-temps représenté par des grains de volume associés à une aire, et dont le spectre de mesure n'est plus continu mais discret. Le fait qu'il existe une aire minimale lui permet de ne pas posséder de divergence ultraviolette, faisant de cette théorie de gravité quantique une théorie bien définie. Des résultats intéressants ont été obtenus, notamment pour la thermodynamique des trous noirs [34]. D'autre part, on s'attend alors à ce qu'aux grandes échelles les résultats redonnent ceux du cas continu, l'étude de la limite classique étant aussi un point de recherche actuel.

Comme on vient de le voir, de nombreux aspects restent encore à développer. L'obtention d'une théorie quantique définitive de la gravitation n'est pas encore achevée, mais il existe cependant, en plus de la gravité quantique à boucles et de son extension à la théorie des Mousses de Spin, d'autres théories. On peut citer entre autres

- la **Théorie des cordes**. Cette approche propose une nouvelle théorie de gravité, basée sur l'introduction de dimensions supplémentaires sur lesquelles vivent des cordes, dont les modes propres de vibrations correspondent à des particules.
- la théorie **CDT** pour **Causal Dynamical Triangulation**, similaire à la théorie des Mousses de Spin, considérant l'espace-temps à l'échelle de Planck comme étant en perpétuel changement à cause des fluctuations quantiques.
- la **supergravité** essayant d'appliquer les avantages de la **supersymétrie** à une théorie non locale.
- la **GFT** pour **Group Field Theory** et la **géométrie non-commutative** où la quantification passe par le formalisme des groupes non-abéliens.

Certes il est nécessaire de proposer de nouvelles alternatives aux théories actuelles, puisque par définition elles s'avèreront un jour fausses, mais il est encore plus important de pouvoir les tester. Les modifications intéressantes prédites par de telles théories prennent place à l'échelle de Planck, donc aux très petites distances et grandes énergies, et il est difficile, voire impossible, à l'heure actuelle d'observer directement les phénomènes en résultants. Néanmoins, il est attendu que l'univers soit passé au moins un jour dans un régime quantique, de type Big Bang, avant de croître jusqu'à sa forme actuelle. Les effets agissant à l'échelle de Planck ont put alors laisser des empreintes, même infimes, mais qui en raison de cette croissance faramineuse, ont put être étirées jusqu'à atteindre une taille observable.

Deuxième partie

**La Cosmologie Quantique : vers une
explication de notre univers.**

Chapitre 4

Le modèle standard de la Cosmologie

Il est important de remarquer que la cosmologie est un champ de recherche singulier. En effet, au contraire des autres domaines de sciences, l'observateur est dans le système, ne peut reproduire l'expérience et, ne connaissant que l'état final correspondant à son époque, est obligé d'interpoler vers le passé pour comprendre l'histoire de l'univers. Cependant, des modèles cosmologiques n'en sont pas moins disponibles et permettent d'interpréter assez correctement les observations. Dans les prochains chapitres, on va introduire les notions de cosmologie nécessaires à la compréhension du travail effectué en cosmologie quantique à boucles, en se concentrant sur le calcul des spectres primordiaux, mais sans développer énormément le cadre dans lequel elles se situent. Il existe une très grande littérature sur la cosmologie et je ne citerai que les articles et livres sur lesquels je me suis basé. Pour approfondir, tout lecteur pourra consulter entre autre les références [35] à [38], ainsi que celles qui y sont données.

4.1 Brève introduction historique du modèle standard Λ -CDM

Lorsqu'en 1915 Einstein proposa sa théorie de la relativité générale, il considéra immédiatement des tests possibles dans notre système solaire (comme l'explication de l'avancée du périhélie de Mercure), et proposa aussi une description possible de notre univers. Cependant, bien qu'elle fût basée sur le **principe cosmologique**, formulé pour la première fois par l'astrophysicien **Edward Arthur Milne**,

Principe cosmologique : *L'univers dans son ensemble est homogène et isotrope (invariance par translation et rotation dans l'espace) sans qu'il ne puisse exister de point privilégié jouant un rôle particulier,*

les modèles considérés à l'époque devaient aussi être **statiques** ou **stationnaires**. Dans ses équations, Einstein considéra la constante Λ comme superflue puisqu'elle expliquait un univers en expansion, l'enleva¹ et trouva avec des physiciens comme **Willem De Sitter** des solutions cosmologiques statiques intéressantes, ne décrivant pas réellement notre univers. On peut aussi citer le cas du physicien allemand **Karl Schwarzschild**, qui en 1915 sur le front Russe, dans une tranchée et souffrant, trouva la première solution pour la métrique qui porte son nom [39], permettant de décrire la géométrie d'un **trou noir** statique, une singularité dans l'espace-temps possédant un horizon.

Quelques années plus tard, en 1922, des physiciens comme le russe **Alexander Friedmann**[40], en parallèle avec **Georges Lemaître**, **Howard Robertson** et **Arthur Walker**, tentèrent de relâcher la condition de stationnarité. Ils obtinrent des équations d'évolution pour l'univers qui furent approuvées par les observations sur l'expansion de l'univers par **Edwin Hubble** [41] en 1929. Dans ce modèle, l'univers s'expand à partir de la singularité du **Big Bang**. Dans les années 1940, ce modèle de l'univers fut raffiné par **George Gamow** [42] (ainsi que **Phillip Peebles** à Princeton) introduisant la notion de **nucléosynthèse primordiale** permettant d'expliquer la formation des noyaux lors d'une phase dominée par les photons, ainsi que la quantité d'hydrogène observée. On parle alors du **modèle du Big Bang chaud**. Une des conséquences d'un tel modèle est que les photons, produits peu de temps après le Big Bang, devraient pouvoir encore être observés sous la forme d'un fond homogène de radiation ayant un spectre de corps noir, dont la température actuelle se situerait autour de quelques degrés Kelvin, soit des longueurs d'onde correspondant aux ondes radio.

En 1964, deux radio-astronomes, **Arno Penzias** et **Robert Wilson**, utilisèrent une antenne dédiée aux communications pour faire des observations radio de la Voie Lactée et découvrirent un signal inattendu, homogène et isotrope, qu'ils attribuèrent à un bruit expérimental impossible à éliminer. Par chance, Penzias possédait un ami au MIT, Bernard Burke, qui avait suivi un séminaire donné par Peebles sur la nucléosynthèse primordiale et l'existence du fond relique, qui le mit en contact avec le groupe de Princeton. C'est ainsi que fût découvert le

¹sa 'plus grande erreur'!

fond diffus cosmologique² ou **CMB** en anglais pour 'Cosmic Microwave Background', ayant bien un spectre de corps noir aujourd'hui mesuré à la température $T_0 = 2.726\text{K}$. C'était la première fois qu'un modèle cosmologique a été vérifié expérimentalement, donnant une grande crédibilité au domaine de la cosmologie.

Il restait cependant quelques problèmes encore inexpliqués, comme le problème d'horizon ou de platitude qui, lorsque l'on remontait dans le temps vers le Big Bang, montraient que l'expansion de l'univers n'avait pas assez duré pour expliquer les observations. Ces problèmes furent résolus par l'introduction d'une phase d'expansion intensément accélérée de l'univers, que l'on appelle **inflation**, et dont les conséquences physiques ont bien été confirmées par des expériences comme **COBE** puis **WMAP**, par l'étude des anisotropies expliquées par les fluctuations quantiques du champ d'inflaton.

Aujourd'hui, le modèle standard de la cosmologie est considéré comme étant le modèle Λ - CDM où la constante cosmologique Λ , éventuellement associée à l'énergie du vide, serait responsable de l'accélération observée de l'univers, et **CDM** pour **Cold Dark Matter** correspondant à la masse manquante de l'univers et qui expliquerait entre autre les courbes de rotation des galaxies ou bien la forme de l'amas du Boulet, mais surtout l'amplitude du spectre de la matière.

4.2 Description d'un univers homogène et isotrope

4.2.1 La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

L'univers homogène et isotrope est le système physique dynamique le plus simple que l'on puisse imaginer puisqu'il est extrêmement symétrique. En prenant en compte ces considérations de symétrie, il est possible de déterminer les métriques qui lui siéent et qui correspondent aux **métriques de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (4.1)$$

ici en coordonnées sphériques. La variable t est le temps cosmologique, k est le facteur de courbure, étant nul dans le cas d'un espace plat, valant -1 si l'univers est ouvert (hyperbolique) ou $+1$ si l'univers est fermé (surface elliptique). Le facteur d'échelle $a(t)$ rend compte de l'expansion de l'univers permettant de définir la notion de **distance physique** ' $a(t)r$ ' à partir de la **distance comobile** r , et le rayon de courbure est alors donné par $R = \frac{a(t)}{\sqrt{|k|}}$. On définit de plus le **temps conforme** η tel que

$$dt = a(\eta)d\eta, \quad (4.2)$$

en choisissant $N = a(\eta)$ (le temps cosmologique est donné par $N = 1$), rendant la métrique (4.1) conforme à une métrique de Minkowski ds_M^2 décrivant une 4-hypersurface statique

$$ds^2 = a^2(\eta)ds_M^2 = -a^2(\eta)d\eta^2 + a(\eta)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (4.3)$$

L'univers étant en expansion, les longueurs d'onde subiront de façon similaire à l'**effet Doppler**, un décalage vers le rouge que l'on appelle **redshift** z , défini selon

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda(t)} = \frac{1}{a(t)}, \quad (4.4)$$

où on a normalisé le facteur d'échelle aujourd'hui à $a_0 = 1$. Cette variable est importante puisqu'elle permet de donner une notion d'évolution du facteur d'échelle en cosmologie. De même, le taux d'expansion de l'univers est donné par le **paramètre de Hubble** qui permet de définir la vitesse à laquelle s'écartent deux points dans l'univers,

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (4.5)$$

et dont la mesure actuelle, notamment par WMAP-7ans [43], donne

$$H_0 = 100 \cdot h \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \quad \text{avec} \quad h = 0.72 \pm 0.08. \quad (4.6)$$

Le tenseur énergie-impulsion est établi en fonction des propriétés du fluide cosmique, et on va ainsi considérer l'univers rempli du fluide le plus simple possible mais intéressant, un gaz idéal de particules sans interactions. Il peut ainsi s'écrire selon

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \rho u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

où u_μ est un quadrivecteur vitesse, et où la densité d'énergie du fluide est donnée par $\rho = -T_0^0$, et sa pression par $p = \frac{1}{3}T_i^i$. Il contient toutes les composantes possibles de l'univers comme la matière baryonique, les photons, neutrinos et autres composés invisibles.

²Dans la vie de tous les jours, le CMB est responsable d'un peu de la neige sur les téléviseurs cathodiques.

4.2.2 Dynamique de l'univers : l'équation de Friedmann

L'univers évolue avec le temps. Il passera par des phases d'expansion ou de contraction, avec des phases d'accélération ou de décélérations, ce dont rendra compte H et sa dérivée. Le facteur d'échelle $a(\eta)$, avec le paramètre de Hubble, permettent ainsi de comprendre la dynamique de l'univers dont les équations d'évolution sont données par les équations d'Einstein (2.87). En utilisant la métrique FLRW dans le cas d'un fluide parfait, la dynamique du facteur d'échelle est obtenue par l'**équation de Friedmann**

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (4.8)$$

ainsi que l'**équation de Raychaudhuri**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (4.9)$$

où on a utilisé l'**équation de conservation de l'énergie** obtenue à partir des identités de Bianchi

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (4.10)$$

Ces 3 équations sont considérées comme les équations clés de la cosmologie puisqu'elles permettent de rendre compte de l'évolution de l'univers en fonction d'un contenu en matière arbitraire. On définit souvent des variables sans dimensions qui représentent le rapport de chaque constituant sur la densité critique cosmologique que l'on nommera $\rho_{cc} = \frac{3H^2}{\kappa}$ (à ne pas confondre avec celle que l'on verra par la suite),

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad \Omega_m = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{cc}}, \quad (4.11)$$

où ρ_i sont les densités d'énergie pour les différents constituants de la matière et du rayonnement. L'équation de Friedmann sans dimension s'écrit ainsi

$$\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1, \quad (4.12)$$

et les différentes observations montrent qu'actuellement

$$\Omega_k = 0 \pm 0.01, \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0.73 \quad \Omega_{m 0} = 0.27. \quad (4.13)$$

Cela signifie qu'aujourd'hui, 73% de l'univers est constitué d'énergie noire responsable de son accélération, ainsi que d'environ 23% de matière noire non-relativiste, invisible et qui n'interagit que gravitationnellement, alors que la matière visible ne correspond qu'à 4%. On peut ainsi réécrire l'équation de Friedmann en terme des différentes densités d'énergie des constituants,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}(\rho_m + \rho_k + \rho_\Lambda), \quad (4.14)$$

où ρ_m représente la somme entre la matière non-relativiste (ρ_{NR}) et la matière relativiste comme les neutrinos et le rayonnement (ρ_R), avec

$$\rho_k = -\frac{3k}{\kappa a^2}, \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa}. \quad (4.15)$$

D'autre part, pression et densité d'énergie ne sont pas indépendantes mais sont reliées par une **équation d'état**

$$p = w\rho \quad (4.16)$$

caractérisée par un **paramètre d'état** w , tel que chaque type de constituant aura son propre paramètre d'état lui correspondant.

4.2.3 Évolution du facteur d'échelle $a(t)$

L'équation de conservation de l'énergie (4.10) permet ainsi de définir l'évolution de la densité d'énergie ρ_i pour chaque composante en fonction de $a(t)$ et de son paramètre d'état w_i

$$\rho_i(t) \sim a(t)^{-3(1+w_i)}. \quad (4.17)$$

Suivant la domination de telle ou telle composante, on arrive à connaître comment évolue le facteur d'échelle, puisque pour $w \neq -1$ l'équation de Friedmann (4.8) nous indique que

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (4.18)$$

Ainsi, lorsqu'il y a la

- **domination de la matière non-relativiste** ρ_{NR} :
 $w = 0$ et alors $\rho = a^{-3}$ avec $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ montrant bien que dans un univers en expansion $H > 0$, la matière contenue dans le volume $V = a^3(t)$ doit bien se diluer.
- **domination du rayonnement** ρ_R :
 $w = \frac{1}{3}$ et on obtient directement $\rho \sim a^{-4}$ et $a \sim t^{\frac{1}{2}}$. De même que pour la matière, il y a une dilution en a^3 , mais l'énergie étant proportionnelle à la fréquence, il faut tenir compte du redshift apportant un facteur $a(t)$ supplémentaire.
- **domination de la constante cosmologique** ρ_Λ :
 $w = -1$ et la densité d'énergie est indépendante du facteur d'échelle, avec le paramètre de Hubble constant. Dans ce cas là, l'univers subit une expansion appelée **expansion de De Sitter** caractérisée par un facteur d'échelle croissant en $a \sim e^{H_I t}$ où H_I est constant durant cette période.

Dans notre univers, en regardant les expressions des densités d'énergie, on voit suivant la valeur de $a(t)$ que l'univers est passé par une phase de domination par le rayonnement jusqu'à un certain moment z_{dec} où matière et rayonnement étaient en équilibre, avant de subir une phase de domination par la matière qui a cédé le pas à celle, actuelle, de domination par la constante cosmologique.

4.2.4 L'horizon de l'univers

Contenu de la finitude de la vitesse de la lumière, il existe une distance, l'**horizon des particules** d_H qui définit la distance maximale que la lumière a pu parcourir depuis le moment $a = 0$. Les photons, voyageant sur des métriques nulles, ont pu parcourir une distance depuis le Big Bang (à $\eta = \eta_0$ en temps conforme) égale à

$$d_H = a(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta. \quad (4.19)$$

Cette distance évolue différemment suivant l'époque à cause des différentes dominations. Tant que l'expansion de l'univers est régie par une loi en $a(t) \sim t^n$ avec $n < 1$, il est possible de relier cette distance causale au rayon de Hubble $R_H(t) = H^{-1} = a/\dot{a}$

$$d_H = \frac{n}{1-n} \cdot R_H, \quad (4.20)$$

et voir qu'une longueur physique λ n'est observable que si elle se trouve à l'intérieur de l'horizon $\lambda \leq H^{-1}$. Par la suite, nous n'utiliserons pas cette notion de longueur à cause des transformées de Fourier effectuées, mais nous utiliserons plutôt le **nombre d'onde** k qui s'exprime en fonction de la longueur physique $\lambda = 2\pi a/k$, tel que pour

$$\begin{aligned} \frac{k}{aH} \ll 1 &\longrightarrow \text{l'échelle de longueur } \lambda \text{ est en dehors de l'horizon,} \\ \frac{k}{aH} \gg 1 &\longrightarrow \text{l'échelle de longueur } \lambda \text{ est à l'intérieur de l'horizon.} \end{aligned}$$

Cette notion de longueur (mode) dans et en dehors de l'horizon est très importante puisque comme nous le verrons, lorsqu'un mode est trop grand, il se trouve figé dans son évolution.

4.2.5 Les problèmes observationnelles du modèle de Big Bang chaud

Le modèle du Big Bang chaud sans inflation est très intéressant puisque ses prédictions concordent avec les observations. Cependant, en comparant calculs et données, on se rend compte qu'il existe certaines incompatibilités nécessitant quelques hypothèses supplémentaires. Ces problèmes sont ainsi énumérés comme suit :

1. **Problème d'homogénéité** : les inhomogénéités, responsables de la formation des structures dans l'univers, sont instables à cause de la gravitation et donc devraient croître avec le temps. Or à grande échelle, l'univers observé est très homogène et isotrope, en accord avec le principe cosmologique. Il existe cependant de grandes déviations par rapport à cette homogénéité, illustrées par les galaxies, amas de galaxies. Pourquoi l'univers est-il donc si uniforme à grande échelle, alors qu'il existe des mécanismes capables de produire des agglomérations de matière ?
2. **Problème de l'horizon** (1) : en comparant deux points de deux régions quelconques sur la carte du fond diffus cosmologique, on observe seulement une infime anisotropie en température, de l'ordre de 10^{-5} . Cela implique que l'univers, au moment du découplage était thermalisé, au moins dans une région dont la taille

actuelle est celle de notre horizon observable, et donc que ces zones ont été à un moment en contact causal. Or, les distances en jeu sont trop grandes par rapport à la distance que peut parcourir un photon depuis le Big Bang et les échanges d'informations (énergie, chaleur,...) entre deux points ne peuvent se faire que dans un même cône de lumière. Comment se fait-il alors que l'univers ait thermalisé sur des échelles plus grandes que l'horizon ?

3. **Problème de l'horizon** (2) : on observe environ 10^{88} particules dans notre univers. Or, pour un horizon tel qu'il est aujourd'hui, il ne devrait exister qu'environ 10 particules. Comment se fait-il que l'univers soit si grand et contienne autant de particules ?
4. **Problème de la platitude** : il est possible de regarder l'évolution de la courbure telle que

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad \Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (4.21)$$

Cette équation montre que $\Omega - 1$ décroît au cours du temps. Pour que l'univers soit plat actuellement $\Omega_0 \sim 1$, il faudrait qu'au temps de Planck (10^{-43} s), donc proche du Big Bang,

$$\Omega - 1 = \mathcal{O}(10^{-64}), \quad (4.22)$$

donc que l'univers soit plus plat que maintenant. Tout changement infime dans les valeurs des paramètres impliquerait une physique grandement différente à notre époque. Ce problème est aussi appelé 'problème du fine-tuning' puisqu'il faut fixer les conditions initiales avec une très grande précision. Pourquoi faut-il que les conditions initiales soient si particulières pour que notre univers soit ainsi maintenant ?

5. **Problème des monopoles magnétiques** ou 'problème des reliquats exotiques' : lorsque l'univers était très dense et chaud, d'après les **Théories de Grande unification** (GUT), à cause de brisures de symétries, il devrait y avoir émergence de particules lourdes et stables, notamment les monopôles magnétiques. Or, durant la phase GUT, un grand nombre de ces particules auraient dû être produites lorsque la température était importante, et elles devraient avoir persisté, devenir dominantes et être observables à notre époque. Cependant aucune observation de telles particules n'a été faite, et seule une possible dilution importante et rapide pourrait leur donner une densité suffisamment faible pour ne pas être observées.

Pour passer outre ces problèmes, le modèle du Big Bang nécessite une modifications dans ses hypothèses : l'univers a du subir une période primordiale pendant laquelle les longueurs physiques λ ont évolué plus rapidement que l'horizon H^{-1} : ainsi, deux photons que nous observons aujourd'hui, émis d'une même surface mais apparemment causalement déconnectés dans deux zones de ciel, ont la même température puisqu'ils ont pu dans le passé être en contact causal, expliquant ainsi la grande homogénéité et isotropie de l'univers. Proposée par **Alan Guth**, l'**inflation** est une phase d'expansion adiabatique³ très rapide de l'univers en un temps très court.

4.2.6 Le modèle standard de l'inflation

L'inflation se produit quand les échelles de distance physiques $\lambda \sim a$ évoluent plus rapidement que le rayon de Hubble H^{-1} . Cela implique donc que pour qu'il y ait inflation,

$$\text{inflation} \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{H^{-1}} \right) = \ddot{a} > 0 \iff (\rho + 3p) < 0 \quad (4.23)$$

où on a utilisé l'équation de Raychaudhuri (4.9) et le fait que, durant cette période, la constante cosmologique ne pouvait pas être dominante, ce qui aurait impliqué qu'elle n'ait cessé de l'être depuis lors. On voit ainsi que cette expansion accélérée ne peut se faire que pour des fluides de paramètre d'état $w < -\frac{1}{3}$, et qu'elle n'a pas pu exister durant des périodes de domination du rayonnement ou de la matière. Elle a donc dû nécessairement se produire avant la phase de nucléosynthèse primordiale pour laquelle le modèle est en accord avec les observations d'aujourd'hui.

Nombre d'e-fold N

On définit le **nombre d'e-fold** N entre le début de l'inflation a_i et la fin de l'inflation a_f selon

$$N = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = H_I(t_f - t_i), \quad (4.24)$$

³Les équations usuelles de la cosmologie peuvent ainsi être utilisées lors d'une transition entre deux phases de domination.

permettant de rendre compte de la croissance rapide du facteur d'échelle lors de cette période : il montre littéralement 'de combien le facteur d'échelle a grimpé la fonction exponentielle'. Pour résoudre le problème de l'horizon et les autres, les contraintes conduisent à chaque fois à un nombre d'e-fold similaire, au moins $N \sim 60$, qui correspond donc à une inflation longue.

Le champ d'inflaton φ

La manière la plus simple de produire une équation d'état $w = -1$ est de considérer un champ scalaire pour lequel le terme potentiel domine par rapport au terme cinématique. On va ainsi considérer le cas du **champ d'inflaton** φ , donnant lieu à une expansion de De Sitter dans un espace de métrique FLRW (4.1), plat $k = 0$. Son lagrangien est donné via l'action

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \quad (4.25)$$

dont les équations d'Euler-Lagrange nous donnent l'équation de Klein-Gordon en temps cosmologique

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + \partial_\varphi V(\varphi) = 0. \quad (4.26)$$

On remarque qu'il existe maintenant un terme de friction $3H\dot{\varphi}$ qui va intervenir lors de l'expansion de l'univers. Les expressions des densités d'énergie ρ_ϕ et de pression p_ϕ sont obtenues par l'exploitation du tenseur d'énergie-impulsion correspondant,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat} - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.27)$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\mu \phi + g^{\mu\alpha} \mathcal{L}, \quad (4.28)$$

tel que pour un tel champ,

$$T_{00} = \rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2a^2}, \quad (4.29)$$

$$T_{ii} = p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) - \frac{(\nabla \varphi)^2}{6a^2}. \quad (4.30)$$

Dans la suite, on va regarder l'effet de perturbations quantiques $\delta\varphi(\vec{x}, t)$ autour de la solution correspondant à un univers homogène et isotrope $\bar{\varphi}(t)$ dont la densité d'énergie et de pression pour ce fond correspondent à

$$T_{00} = \rho_{\bar{\varphi}} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{2} + V(\bar{\varphi}), \quad (4.31)$$

$$T_{ii} = p_{\bar{\varphi}} = \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{2} - V(\bar{\varphi}). \quad (4.32)$$

Lorsque l'équation suivante est vérifiée

$$V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2, \quad (4.33)$$

l'énergie potentielle domine sur l'énergie cinétique, et ce fluide vérifie alors la relation

$$p_\varphi \simeq -\rho_\varphi. \quad (4.34)$$

Dans ce cas là, si le champ d'inflaton domine sur les autres composantes, alors il mènera à une phase d'inflation.

Les conditions de roulement lent (Slow-roll)

Imposer les conditions, avec $V' = \partial_\varphi V$ et $V'' = \partial_\varphi^2 V$,

1. condition 1 :

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \implies \frac{(V')^2}{V} \ll H^2, \quad (4.35)$$

2. condition 2 :

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \implies V'' \ll H^2, \quad (4.36)$$

dont fait partie la condition (4.33), a pour conséquence une descente du potentiel lente pour ce champ : on parle alors de conditions de **roulement lent**, ou **slow-roll** en anglais. Dans ce régime, l'équation de Friedmann correspondante est alors donnée selon

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\varphi), \quad (4.37)$$

et l'équation de Klein-Gordon est donnée par

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi). \quad (4.38)$$

Il sera utile pour la suite de définir des **paramètres de slow-roll** tels qu'en temps cosmologique

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (4.39)$$

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right) = \frac{1}{3} \frac{V''}{H^2}, \quad (4.40)$$

$$\delta = \eta - \epsilon = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}, \quad (4.41)$$

ou en temps conforme

$$\epsilon = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 4\pi G \frac{\varphi'^2}{\mathcal{H}^2}, \quad (4.42)$$

$$\delta = \eta - \epsilon = 1 - \frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'}. \quad (4.43)$$

Le paramètre ϵ permet de regarder de combien varie le paramètre de Hubble durant l'inflation, et en utilisant entre autre l'équation de Raychaudhuri (4.9), il est nécessaire d'avoir $\epsilon \ll 1$ et $|\eta| \ll 1$ pour que l'inflation ait lieu :

$$\text{inflation} \iff \epsilon < 1 \text{ et } \eta < 1.$$

De plus, comme on va regarder des équations au premier ordre en perturbations, il est possible de voir que durant l'inflation $\epsilon, \eta = \mathcal{O}(\epsilon^2, \eta^2)$, et donc que ces paramètres peuvent être considérés comme constant. Le nombre d'e-fold est alors donné, en notant φ_i and φ_f les valeurs du champ au début et à la fin de l'inflation, par

$$N \simeq -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (4.44)$$

La fin de l'inflation se produit lorsque l'énergie potentielle du champ d'inflaton devient plus petite que son énergie cinétique. L'énergie du champ, qui se met à osciller dans son potentiel, est alors transférée du champ aux particules selon le mécanisme de **reheating** responsable de la création des particules présentes aujourd'hui, et dont nous ne parlerons pas dans la suite.

4.3 Résumé : histoire de notre univers dans le modèle $\Lambda - CDM$

La cosmologie et l'astrophysique sont des domaines très complexes puisqu'elles utilisent toutes les théories physiques, aussi bien celle des particules que la physique des plasma, en passant par la physique nucléaire et la chimie. Appliquer notamment la thermodynamique à l'univers permet d'obtenir une expression pour sa température T , qui évolue suivant le facteur d'échelle au même titre que lors d'une dilution

$$T(t) \sim \frac{1}{a(t)}. \quad (4.45)$$

En remontant vers le Big Bang, on voit ainsi que les températures en jeu devaient être colossales, et appliquer les théories physiques qui correspondent aux différentes échelles d'énergie permet ainsi de caractériser l'univers lors de son évolution. Selon le modèle standard [37], l'histoire de notre univers peut être succinctement décrit par :

- $T \approx 10^{26} \text{K}$: GUT , $z = 10^{32}$, $E = 10^{16} \text{TeV}$: à cette température, seule l'interaction gravitationnelle n'était pas unifiée aux trois autres interactions. Lorsque la température diminue, les théories **GUT** (Grand Unified Theory) prédisent qu'un mécanisme de type Higgs brisa la symétrie pour aboutir au groupe de symétrie du modèle standard de la physique des particules $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.
- $T \approx 10^{16} \text{K}$: brisure électrofaible, $z = 10^{16}$, $E = 1 \text{TeV}$: à cette échelle d'énergie ($\sim 300 \text{GeV}$), le mécanisme de Higgs est censé avoir brisé la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$ pour différencier les interactions électromagnétiques et faible.
- $T \approx 10^{13} \text{K}$: transition de phase quark-hadrons, $z = 10^{13}$, $E = 1 \text{GeV}$: jusqu'à ce qu'il ait atteint cette température, l'univers était composé d'un plasma de particules (plasma de quarks, gluons, photons, électrons, etc) en constante interaction. À 10^{13}K , les quarks ont été confinés par l'interaction forte sous forme de hadrons (dont les nucléons).
- $T \approx 10^{10} \text{K}$: nucléosynthèse primordiale, $z = 10^{10}$, $E = 1 \text{MeV}$: à partir des nucléons formés, les premiers noyaux sont alors créés en commençant par les plus légers (deutérium, tritium). En effet, aux alentours de 10^{11}K , les protons et les neutrons ont commencé à interagir lors de collisions : $n + p \rightarrow D + \gamma$, puis vers 10^9K , ce sont les éléments plus lourds (${}^3\text{He}$ et ${}^4\text{He}$) qui se sont formés jusqu'au lithium (${}^6\text{Li}$ et ${}^7\text{Li}$). C'est au cours de la nucléosynthèse primordiale que les neutrinos se sont découplés, se propageant librement depuis lors. Ils forment un rayonnement de fond dont la température actuelle est de 1.96K [44].
- $T \approx 65\,000 \text{K}$: égalité rayonnement-matière : jusqu'à ce qu'il ait atteint cette température, la dynamique de l'univers était donnée par les particules relativistes. La transition a eu lieu autour de $t \approx 310\,000$ ans après la singularité initiale. Par la suite, l'univers a subi une phase de domination par la matière.
- $T_{dec} = 3\,700 \text{K}$: recombinaison, $z \sim 1\,100$, $E = 0.3 \text{eV}$: la valeur de la température au moment du découplage est donnée par l'équation d'équilibre thermique d'ionisation de Saha, qui correspond à une énergie inférieure à celle d'ionisation de l'hydrogène (13.6eV). Ceci s'explique par le fait que les photons sont 10^{10} fois plus nombreux que les électrons. Ainsi, même avec une énergie moyenne du milieu inférieure au seuil de réaction, il restait suffisamment de photons pour ioniser la matière. À $T = 3\,700 \text{K}$, l'équilibre thermique est rompu et les électrons commencent à se coupler aux baryons pour former les premiers atomes neutres : c'est la recombinaison. Les photons qui interagissaient par diffusion Thomson avec les électrons acquièrent un libre parcours moyen plus grand que la taille de l'univers : c'est le découplage et on parle de **surface de dernière diffusion**. Les photons qui sont issus de cette surface sont ainsi appelés **fond diffus cosmologique**.
- $T \approx 15 \text{K}$: formation des grandes structures, $z = 10$, $E = 0.01 \text{eV}$: suivant les observations actuelles, les galaxies sont regroupées en amas, eux-même formant des super-amas le long de filaments plus denses, mais le processus de formation de ces super-structures n'est pas encore parfaitement compris à ce jour. Les simulations à N corps permettent d'expliquer les observations concernant la formation de ces grandes structures en considérant de plus la présence de matière noire froide, autrement dit non-relativiste, lors du découplage.
- $T \approx 2.725 \text{K}$: aujourd'hui, $z = 0$, $E = 0.0002 \text{eV}$: l'univers que nous observons est actuellement fortement inhomogène à petite échelle et contient des galaxies réunies en amas et en super-amas. Il est en expansion accélérée et le fond diffus cosmologique possède une température de $2.725 \pm 0.001 \text{K}$.

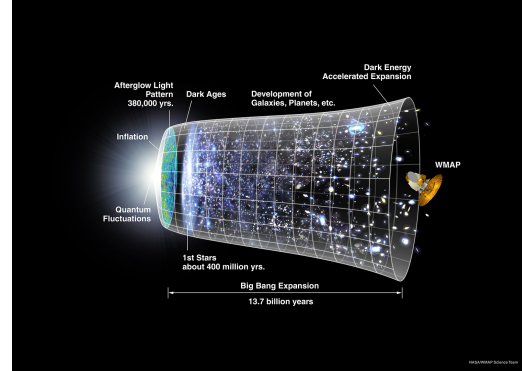


FIG. 4.1 – Résumé de l'histoire de notre univers en fonction de l'évolution du facteur d'échelle.

Chapitre 5

La Cosmologie Quantique à Boucles

L'univers moderne, tel que la machine et l'homme en étaient arrivés à le comprendre, n'avait pas besoin de Créateur. Il n'avait pas de place en réalité pour un Créateur. Ses règles de fonctionnement n'autorisaient que très peu de bricolage et ne souffraient aucune révision majeure. Il n'avait jamais eu de début, et n'aurait jamais de fin. Il ne connaissait que des cycles d'expansion et de contraction, aussi suivis et aussi bien réglés que les saisons de l'Ancienne Terre.

Dan Simmons, *Les cantiques d'Hyperion, la chute d'Hyperion*

5.1 Introduction

Appliquer les notions de la relativité générale à un modèle d'univers homogène et isotrope conduit à une description suffisamment fiable pour expliquer les observations. Cependant, et pour des raisons similaires à celles annoncées précédemment, la description de l'univers à l'échelle de Planck par le modèle standard est erronée et il est nécessaire d'incorporer les aspects quantiques. Il est possible de le faire de manière perturbative, redonnant les théories attendues à la limite basse énergie, mais les descriptions effectives résultantes ne vont généralement pas permettre de donner une évolution déterministe lors du passage à travers la singularité. Les approches non-perturbatives comme celle de la gravité quantique à boucles sont fondées sur des idées plus profondes et on s'attend à ce que leurs équations pour la dynamique restent bien définies lors de l'ère de Planck, permettant à la fonction d'onde de l'univers de passer à travers la singularité et de rendre compte d'une évolution déterministe. Ce faisant, cette simple réflexion engendre de nouvelles questions puisqu'elle autorise l'existence d'un 'avant' la prétendue singularité :

- La première et la plus naturelle : qu'y a-t-il de l'autre côté ? Comment la singularité classique est-elle résolue ?
- Comment émerge notre univers classique de la théorie quantique ?
- Si on considère un scénario faisant intervenir un rebond, alors l'univers est en contraction avant la singularité et les anisotropies, évoluant en fonction du facteur d'échelle selon $a^{-6}(\eta)$, vont croître et dominer dans les équations d'Einstein. Comment une nouvelle théorie de la gravitation va-t-elle prendre en compte l'évolution de ces anisotropies ?
- Doit-on encore introduire des principes, conditions à la limite au moment du Big Bang, ou bien les équations quantiques d'Einstein se suffisent-elles à elles-mêmes ? Cette question fait référence aux conditions initiales de l'univers, inconnues, obligeant la détermination de la fonction d'onde de l'univers à partir de ses caractéristiques actuelles, par exemple le '**no boundary proposal**' introduit par **Hartle** et **Hawking**.
- Un fait intéressant a été remarqué par Carlo Rovelli [45] : en mécanique statistique, il est possible de montrer qu'un système va pouvoir être décrit en fonction d'un degré de liberté physique qui va jouer naturellement le rôle de variable temporelle. L'émergence du temps est une interrogation très importante dans la construction d'une théorie quantique de la gravitation : mécanique quantique (temps externe) et relativité (variable quelconque) n'ont pas le même rapport au temps. À partir des caractéristiques de la fonction d'onde de l'univers, une variable spécifique va-t-elle se détacher en fonction de laquelle l'évolution des quantités physiques va pouvoir être définie ?

Cependant, le modèle standard classique permet de décrire relativement bien l'univers 10^{-36} secondes après la singularité, montrant que les effets quantiques doivent uniquement être important durant ce très court laps de temps et rapidement cesser d'agir ensuite. En particulier dans un scénario de rebond, ces effets vont agir comme une nouvelle force répulsive qui est complètement négligeable lorsque la courbure de l'espace-temps est faible, mais qui croît rapidement dans le régime de Planck jusqu'à totalement dominer l'effet de la gravitation créé par une densité de matière de l'ordre de $10^{97} \text{ kg.m}^{-3}$. Dans le cas où cette force de répulsion est suffisamment importante, elle pourrait être responsable de l'existence d'une phase inflationnaire.

Le défi de cette nouvelle approche est ainsi d'importer les corrections quantiques qui vont permettre une description de l'univers à l'échelle de Planck, et redonner ensuite les résultats attendus par le modèle standard de la cosmologie avec, pourquoi pas, la possibilité de légères modifications qui autoriseraient l'observation des effets quantiques. Des critiques ont par ailleurs été faites quant à la validité de la théorie ici présentée puisqu'elle ne découle pas vraiment de la gravité quantique à boucles comme c'est le cas pour la cosmologie vis à vis de la relativité générale. Elle ne fait que s'en inspirer. L'approche cosmologique issue de la gravité quantique à boucles est appelée **Spin Foam cosmology**, plus fondamentale mais plus difficile à mettre en œuvre. La gravité quantique à boucles décrit localement l'espace-temps, et l'univers étant homogène et isotrope, on peut regarder comment agissent les effets quantiques et les incorporer dans la théorie classique, permettant alors une approche effective qui va permettre de faire ressortir les caractéristiques principales des effets quantiques : on parle alors de la théorie de la **Cosmologie Quantique à Boucles**, dont des descriptions sont par exemple données dans les références [14] et [47], et les détails plus techniques dans [46] et [51].

5.2 La cosmologie usuelle sous le formalisme de la Gravité Quantique à Boucles

En cosmologie quantique à boucles, on considère un espace-temps homogène et isotrope régi par la métrique FLRW (4.3) tel que l'hypersurface spatiale Σ soit de topologie \mathbb{R}^3 . N'étant ainsi pas compact, de nombreuses intégrales spatiales faisant intervenir des champs homogènes vont alors diverger. Cependant, en raison de cette même homogénéité, il est possible de regarder une cellule fiducielle \mathcal{V} , définie par les coordonnées comobiles et de de métrique non-dynamique ${}^0q_{ab}$. Cette cellule sera ainsi de volume fini défini

$$v_0 = \int_{\mathcal{V}} d^3x \sqrt{{}^0q}. \quad (5.1)$$

Il est maintenant possible de faire de la physique dans le volume physique observé V_0 , donné par $V_0 = a^3 v_0$, lui aussi fini à $a(t)$ fixé. Il est nécessaire de veiller une fois les calculs finis à ce que les résultats physiques ne dépendent pas du choix de ce volume. Dans cette cellule, on définit les triades ${}^0e_i^a = \delta_i^a$, donnant un repère métrique de l'hypersurface spatiale, et les co-triades ${}^0e_a^i = \delta_a^i$ (aussi notée ${}^0w_a^i$) permettant de définir de même qu'en gravité quantique à boucles les variables de connexion et de densité de triades. Pour un univers plat $k = 0$, la partie homogène \bar{X} d'une variable X définissant le **fond** est donnée par

$$\bar{X} = \frac{1}{V_0} \int d^3x \cdot X, \quad (5.2)$$

et les variables d'Ashtekar homogènes, dépendant uniquement du temps t (ici, non pas le temps cosmologique mais le temps défini par la métrique ADM (3.25)) s'écrivent comme

$$\bar{A}_a = \gamma \bar{k}(t) \delta_a^i \tau_i \quad \text{et} \quad \bar{E}^a = \bar{p}(t) \delta_i^a \tau^i. \quad (5.3)$$

La connexion de spin Γ_a^i , donnée par l'équation (3.47), ne fait intervenir que des dérivées spatiales des densités de triades, sa composante homogène est nécessairement nulle. Dans la littérature, la connexion est définie selon $\bar{c} = \gamma \bar{k}$ et les variables sont ensuite normalisées pour que les contraintes ne fassent plus finalement intervenir l'information sur la cellule fiducielle. Cela n'est qu'une convention. Nous adopterons celle donnée par **Martin Bojowald** pour laquelle les intégrations spatiales sur les variables homogènes feront intervenir V_0 et seront régularisées naturellement ensuite, et ce afin de garder une certaine lisibilité dans les calculs.

Selon ce choix, les variables d'Ashtekar sont symétriques et satisfont automatiquement les contraintes de Gauss (3.56) et de moments (3.57), et donc de Difféomorphisme $D[\bar{N}^a] = 0$. Elles possèdent de plus une relation de crochets de Poisson donnée par l'équation (3.51) et permettent de définir la structure symplectique sous-jacente pour la partie homogène selon

$$\frac{1}{\kappa \gamma} \int_{\Sigma} d^3x \dot{A}_a^i E_i^a = \frac{3}{\kappa} \left(\int_{V_0} d^3x \right) \dot{\bar{k}} \bar{p} \quad \rightarrow \quad \Omega_{grav} = \frac{3V_0}{\kappa} d\bar{k} \wedge d\bar{p}. \quad (5.4)$$

Les nouveaux crochets de Poisson correspondant pour les variables du fond (\bar{k}, \bar{p}) sont alors donnés par

$$\{\bar{k}, \bar{p}\} = \frac{\kappa}{3V_0}. \quad (5.5)$$

Ainsi, la contrainte hamiltonienne totale classique réunissant la partie gravitationnelle (3.58) de variables (\bar{k}, \bar{p}) et la partie matière (3.76) correspondant à un champ scalaire de variables $(\bar{\varphi}, \bar{\pi})$, sera donnée par

$$H_{RG}^{(0)}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{V_0} d^3x \bar{N} \left[-6\sqrt{\bar{p}} \bar{k}^2 + 2\kappa \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}} + \bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi}) \right) \right], \quad (5.6)$$

où la matière homogène possède les crochets de Poisson

$$\{\bar{\varphi}, \bar{\pi}\} = \frac{1}{V_0}. \quad (5.7)$$

La plupart du temps, on utilisera le temps conforme et la métrique sera celle donnée par la suite par l'équation (4.3) : nous utilisons ainsi la convention

$$\dot{} = \partial_\eta. \quad (5.8)$$

En comparant cette métrique à celle du formalisme ADM donnée par l'équation (3.25), il est possible alors de regarder l'expression des différents éléments que l'on va utiliser en fonction du facteur d'échelle. Ainsi, utiliser les définitions données précédemment en temps conforme permet d'obtenir les relations

$$\bar{N} = \sqrt{\bar{p}} = a(\eta), \quad \bar{N}^a = 0, \quad (5.9)$$

$$e_a^i = a(\eta)\delta_a^i, \quad e_i^a = \frac{1}{a(\eta)}\delta_i^a, \quad (5.10)$$

$$\bar{p} = a^2(\eta). \quad (5.11)$$

Dans le formalisme hamiltonien, les équations du mouvement pour une variable homogène \bar{X} sont données par les crochets de Poisson $\{\bar{X}, H_{RG}^{(0)}\}$. Pour être plus rigoureux, il serait cependant nécessaire de tenir compte de l'effet des perturbations sur l'évolution du fond et c'est ce que l'on appelle l'**effet de back-reaction**. Malheureusement, cette approche s'avère être très compliquée et nous n'en tiendrons pas compte dans la suite. En considérant l'évolution du fond comme étant découplée de celle des perturbations, les équations du mouvement des variables $(\bar{k}, \bar{p}, \bar{\varphi}, \bar{\pi})$ sont données en temps conforme par les équations

$$\dot{\bar{p}} = \frac{d\bar{p}}{d\eta} = \{\bar{p}, H_{RG}^{(0)}[\bar{N}]\} = 2\bar{p}\bar{k}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\bar{k}} = \frac{d\bar{k}}{d\eta} = \{\bar{k}, H_{RG}^{(0)}[\bar{N}]\} = -\frac{1}{2}\bar{k}^2 + \frac{\kappa}{2} \left(-\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^2} + \bar{p}V(\bar{\varphi}) \right), \quad (5.13)$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\eta} = \{\bar{\varphi}, H_{RG}^{(0)}[\bar{N}]\} = \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}, \quad (5.14)$$

$$\dot{\bar{\pi}} = \frac{d\bar{\pi}}{d\eta} = \{\bar{\pi}, H_{RG}^{(0)}[\bar{N}]\} = -\bar{p}^2 \partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}), \quad (5.15)$$

et il est possible d'en tirer les équations classiques vues au chapitre précédent. En utilisant l'équation (5.11) donnant la relation entre le facteur d'échelle et \bar{p} , on voit directement que l'équation (5.12) correspond exactement à la définition du paramètre de Hubble, $\mathcal{H} = \bar{k}$:

$$\frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}} = \frac{\dot{a}}{a} = \bar{k} \quad \rightarrow \quad \bar{k} = \mathcal{H}. \quad (5.16)$$

L'équation (5.13) n'est ainsi rien d'autre que l'équation de Raychaudhuri pour un champ scalaire, donnée par l'équation (4.9) : les équations (3.77) et (3.78) avec ces variables redonnent bien les expressions de la densité d'énergie et de pression trouvées précédemment :

$$\rho = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}), \quad (5.17)$$

$$P = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\bar{\varphi}). \quad (5.18)$$

Combiner les équations (5.14) et (5.15) redonne finalement l'équation de Klein-Gordon en temps conforme

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 2\bar{k}\dot{\bar{\varphi}} + \bar{p}\partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}) = 0, \quad (5.19)$$

et il ne reste plus que l'équation de Friedmann qui est simplement retrouvée en utilisant les définitions précédentes mais aussi en utilisant le fait que N étant un multiplicateur de Lagrange, non dynamique,

$$\dot{p}_N = \{p_N, H_{tot}\} = -\frac{\delta H_{tot}}{\delta N} = 0 \rightarrow \mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3}\bar{p}\rho. \quad (5.20)$$

Cela termine ainsi la démonstration que, dans ce formalisme, toutes les équations usuelles de la cosmologie sont bien retrouvées.

5.3 La quantification pour la Cosmologie Quantique à Boucles

Comme pour les **modèles de quantification des mini-super-espace**, la réduction des variables est faite au niveau classique à cause des symétries, mais les méthodes de quantification utilisées seront celles de la gravité quantique à boucles : cette quantification est inéquivalente à celle généralement adoptée dans les théories de cosmologie quantique. Elle va donc mener à des prédictions sensiblement différentes. Usuellement, lorsque l'on effectue la quantification à la *Wheeler-DeWitt* pour la métrique FLRW, on se place dans la représentation p, φ et on pose \hat{p} et $\hat{\varphi}$ comme multiplicateur sur les états, avec

$$\hat{c}\Psi = i\hbar\gamma\frac{\kappa}{3}\frac{\partial\Psi}{\partial p}, \quad \hat{p}_\varphi\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}. \quad (5.21)$$

La version quantique de la contrainte hamiltonienne est appelée l'**équation de Wheeler-De Witt**. Dans le cas d'un champ scalaire sans masse, il est possible d'utiliser ce champ comme variable 'temps' et d'avoir le volume de l'univers comme observable de Dirac. Cependant, même si à grande échelle, on retrouve bien les prédictions de la relativité générale version quantique, la singularité initiale est toujours présente et ne disparaît pas de façon tout à fait générique par la quantification.

Dans la suite, on ne souhaite pas s'étendre sur les détails de la quantification et très peu d'étapes seront données. On va simplement tâcher de montrer comment apparaissent les modifications qui permettront de rendre compte des deux effets quantiques principaux, nouveaux, inhérents à l'étude de l'univers par la gravité quantique à boucles. Les caractéristiques de ces effets pourront ainsi être décrits en terme de fonctions mathématiques, que l'on nomme **correction d'inverse-volume** et **correction d'holonomie**, et qui pourront être introduites à la main dans les équations classiques conduisant à la théorie effective que l'on va étudier.

5.3.1 Au niveau cinématique

Afin de respecter au mieux les symétries d'un univers homogène et isotrope, mais aussi parce que c'est le motif possédant des directions orthogonales le plus simple que l'on puisse construire, on va considérer une partie de l'univers comme étant contenue dans une cellule fiducielle représentée par un cube (voir figure Fig.(5.1)). En cosmologie quantique à boucles, les variables de configuration sont les holonomies $h_e(A)$, considérée ici sur des lignes droites parallèles aux arêtes du cube et véhiculant le spin le plus simple possible $j = \frac{1}{2}$, ainsi que les flux des densités de triades $F_S^f[E]$ pour des 2-surfaces S , parallèles elles-aussi aux surfaces du cube¹. Un rapide calcul permet de montrer que pour le système de variables homogènes $(\bar{A}_a^i, \bar{E}_i^a)$ et en utilisant la définition de l'holonomie donnée par l'équation (3.92), l'holonomie, prise sur une arête e de longueur μ pour la métrique q_{ab} et dans la direction k , peut s'écrire

$$h_e(A) \doteq \mathcal{P} \exp \int_e A = e^{\mu\gamma\bar{k}\tau_k} = \cos\left(\frac{1}{2}\mu\gamma\bar{k}\right) \mathbb{1}_2 + 2\sin\left(\frac{1}{2}\mu\gamma\bar{k}\right) \tau_k. \quad (5.22)$$

De même, le flux de densité de triade défini par l'équation (3.93), pour ce chemin, est donné par

$$F_S^f[E] = \int_S d^2x \cdot n_a E_i^a f^i \sim \bar{p} A(S, f), \quad (5.23)$$

où $A(S, f)$ est l'aire d'une cellule élémentaire. L'holonomie est ici composée d'une somme de fonctions élémentaires $\mathcal{N}_\mu(\bar{k}) \doteq e^{\frac{i}{2}\mu\gamma\bar{k}}$ dépendant de \bar{k} , des **fonctions presque périodiques**² puisque μ est dynamique. On peut de plus utiliser \bar{p} comme variable représentative du flux de densité de triade, et ce à cause de l'homogénéité et de l'isotropie. Les variables quantiques élémentaires utilisées sont alors données par les opérateurs $\hat{\mathcal{N}}_\mu(\bar{k})$ et $\hat{\bar{p}}$ dont les relations de commutation sont dictées par les crochets de Poisson issus de l'équation (3.94)

$$\{\mathcal{N}_\mu(\bar{k}), \bar{p}\} = \frac{\kappa\gamma}{3} \frac{i\mu}{2} \mathcal{N}_\mu(\bar{k}). \quad (5.24)$$

Les états quantiques, vérifiant la contrainte de Gauss et de Difféomorphisme, sont représentés par des fonctions presque périodiques $\Psi(\bar{k})$ de la connexion \bar{k} , comme étant une combinaison linéaire et **discrète** d'ondes planes

$$\Psi(\bar{k}) = \sum_n \alpha_n e^{\frac{i}{2}\mu_n \bar{k}}. \quad (5.25)$$

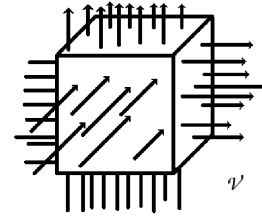


FIG. 5.1 – Cellule élémentaire où les spins $j = \frac{1}{2}$ sont transportés parallèlement aux arêtes de la cellule [47].

¹On peut faire l'analogie avec la cristallographie avec des mailles cubiques centrées.

²On parle de fonctions cylindriques.

Ces états n'étant pas des intégrales $\int d\mu \alpha(\mu) e^{\frac{i}{2}\mu\gamma\bar{k}}$ mais une somme discrète, l'espace de Hilbert correspondant \mathcal{H}_{kin}^{grav} n'est plus celui utilisé pour la quantification à la Wheeler-DeWitt, $L^2(\mathbb{R}, d\bar{k})$, et les solutions prédites par la cosmologie quantique à boucles sont ainsi dès le départ différentes. Une base orthonormale de \mathcal{H}_{kin}^{grav} est donnée par les fonctions $\mathcal{N}_\mu(\bar{k})$ satisfaisant les relations

$$\langle \mathcal{N}_\mu | \mathcal{N}_{\mu'} \rangle = \delta_{\mu, \mu'} \quad (5.26)$$

où, malgré l'utilisation des ondes planes, il apparaît le delta de Kronecker au lieu d'un Dirac. Les actions des opérateurs sont données de plus par

$$\hat{\mathcal{N}}_\mu(\bar{k})\Psi(\bar{k}) = \exp\left(\frac{i}{2}\mu\gamma\bar{k}\right)\Psi(\bar{k}) \quad \text{et} \quad \hat{p}\Psi(\bar{k}) = -i\frac{\kappa\gamma\hbar}{3}\frac{d}{d\bar{k}}\Psi(\bar{k}). \quad (5.27)$$

Il serait possible de définir ici l'opérateur \hat{k} en considérant la dérivée de \mathcal{N}_μ par rapport à μ , mais $\Psi(\bar{k})$ possédant un spectre discret en μ_n , il n'est pas possible de définir $\hat{k}\Psi = -i\frac{d\Psi}{d\mu}$: cette absence de continuité va rendre la cosmologie quantique à boucles différente de l'approche de Wheeler et DeWitt, puisqu'elle brise une hypothèse du théorème d'unicité de Stones-VonNeumann³, et cela apparaît fondamentalement en raison de l'invariance de fond de la théorie [52].

D'autre part, \hat{p} étant un opérateur auto-adjoint, il est utile et plus facile de prendre la représentation dans laquelle il est diagonal, et d'utiliser les fonctions $\Psi(\mu)$. L'action des holonomies est alors plus simple puisqu'elle correspond à une translation, et \hat{p} à une multiplication :

$$\hat{\mathcal{N}}_\alpha\Psi(\mu) = \Psi(\mu + \alpha), \quad \hat{p}\Psi(\mu) = \frac{\kappa\gamma\hbar}{6}\mu\Psi(\mu). \quad (5.28)$$

Dans cette représentation, l'action de la contrainte hamiltonienne sur la partie cinématique n'a pas été encore définie. L'opérateur \hat{k} n'étant pas défini, on se rend compte en étudiant la contrainte donnée par l'équation (5.6), qu'il va falloir exprimer $F_{ab}^k \propto \bar{k}^2$ en terme d'opérateurs fiables, les holonomies.

5.3.2 Au niveau dynamique : corrections d'holonomie et d'inverse-volume

Les contraintes de Gauss et de Difféomorphisme étant vérifiées, il ne reste qu'à quantifier la contrainte hamiltonienne, et plus particulièrement les termes en F_{ab}^k et E_i^a en fonction des opérateurs de flux et des holonomies.

Correction d'holonomie

En raison de la géométrie du système, on va considérer une plaquette carré \square_{ij} comme pour la figure Fig.(5.3.2), de longueur d'arête μ . Par ce choix de configuration, après avoir obtenu l'expression de $h_{\square_{ij}}$, il est maintenant possible d'exprimer simplement F_{ab}^k en terme des holonomies

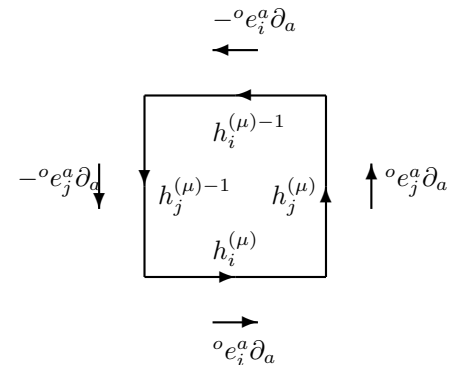
$$F_{ab}^k = -2 \lim_{Ar_{\square} \rightarrow 0} Tr \left(\frac{h_{\square_{ij}} - \mathbb{1}}{Ar_{\square}} \tau^k \right) \frac{{}^0e_a^i {}^0e_b^j}{\gamma^2}. \quad (5.29)$$

où Ar_{\square} est l'aire de la plaquette, proportionnelle à μ^2 et $h_{\square_{ij}}$ est l'holonomie autour de cette plaquette

$$h_{\square_{ij}} = h_i^{-1} h_i^{-1} h_j h_i. \quad (5.30)$$

L'aire minimale en gravité quantique à boucles n'est pas nulle mais Δl_{pl}^2 avec $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma$, et la limite $\mu \rightarrow 0$ n'est ainsi pas dans l'essence de la théorie mère. Une première approche a été alors de considérer la limite $\mu \rightarrow \sqrt{\Delta}$ qui correspond au μ_0 -**scheme**, mais cela présente des défauts comme le fait que la densité maximale d'énergie possible évoluait avec le volume fiduciel. En fait, la définition de l'aire donnée par l'équation (3.98) montre qu'elle doit nécessairement être proportionnelle à \bar{p} et donc au facteur d'échelle au carré : les distances physiques évoluent elles-aussi en fonction de la dynamique de l'univers. Une plaquette possède ainsi une aire $Ar_{\square} = \mu^2 \cdot \bar{p}$, qui correspond à l'aire minimale : dans ce modèle, tous les spins sont identiques et valent $j = \frac{1}{2}$. Dans cette nouvelle approche, appelée $\bar{\mu}$ -**scheme** en anglais, la longueur d'une arête devrait donc plutôt être donnée par

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{\bar{p}}} l_{pl}. \quad (5.31)$$



Plaquette \square_{ij} ,
parallèle à une surface du cube [54].

³Le théorème d'unicité de Stone-VonNeumann montre que pour un système de nombre fini de degrés de liberté, toutes les représentations quantiques sont équivalentes.

Cependant, ce choix est encore très controversé et nous noterons en toute généralité

$$\bar{\mu} = \delta \cdot \bar{p}^\beta \quad \text{avec} \quad \beta \in [-\frac{1}{2}, 0]. \quad (5.32)$$

D'autre part, connaissant l'expression d'une holonomie donnée par l'équation (5.22), il est possible de calculer $h_{\square_{ij}}$ en utilisant la définition (5.30). Après quelques calculs faisant notamment intervenir les relations de l'algèbre $su(2)$, on obtient la relation

$$Tr[\tau_k(h_{\square_{ij}} - \mathbb{1})] = -\frac{\epsilon_{ijk}}{2} \sin^2(\mu\gamma\bar{k}). \quad (5.33)$$

permettant de montrer que, dans la limite où $\mu \rightarrow \bar{\mu}$, quelque soit la valeur de β ,

$$\hat{F}_{ab}^k \Psi(\mu) = \epsilon_{ij}^{k0} e_a^i e_b^j \left(\frac{\widehat{\sin^2(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}}{(\bar{\mu}\gamma)^2} \right) \Psi(\mu) \quad (5.34)$$

est un opérateur bien défini dans la théorie : \hat{F}_{ab}^k fait ainsi intervenir des fonctions presque périodiques, comme une composition de $\mathcal{N}_{\bar{\mu}}(\bar{k})$. Pour ce qui nous intéresse, il n'est pas utile de poursuivre plus loin dans la quantification de F_{ab}^k , et ce que l'on montre ici est que l'utilisation des holonomies en cosmologie quantique à boucles a pour conséquence de donner un opérateur de connexion \hat{k} comme étant un sinus cardinal. Au niveau effectif, on va alors considérer les équations classiques (de la relativité générale), tenir compte des effets des opérateurs quantiques par des corrections fidèles, et en regarder les effets premiers. La première correction possible est la **correction d'holonomie** qui consiste, comme on vient de le voir, à remplacer \bar{k} selon

$$\bar{k} \longrightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma}. \quad (5.35)$$

Correction d'inverse-volume

Au niveau quantique, l'équation de Wheeler-DeWitt correspondante peut s'écrire, en considérant l'hamiltonien de matière,

$$\hat{H}\Psi(\mu, \phi) = \left[\left(N \frac{\widehat{EE}}{\sqrt{\det E}} \right) \left(\frac{\widehat{\sin^2(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}}{(\bar{\mu}\gamma)^2} \right) + \hat{H}_{mat} \right] \Psi(\mu, \phi) = 0. \quad (5.36)$$

Le point souligné par cette notation est la définition de l'opérateur $\left(N \frac{\widehat{EE}}{\sqrt{\det E}} \right)$. En effet, cet opérateur se comporte comme l'inverse d'une densité de triades à une puissance quelconque, \bar{p}^{-n} , et est dans la théorie mal défini, notamment à la limite classique. Il est cependant possible d'utiliser une astuce pour quantifier cette divergence [53, 55] qui consiste à utiliser l'expression de $\{A, V\}$ donnée par l'équation (3.89), et au niveau effectif, le spectre obtenu pourra être reproduit par une correction de la forme

$$\alpha(\bar{p}, \delta E) = 1 + \beta \left(\frac{l_{Pl}^2}{\bar{p}} \right)^n + \mathcal{O}(\bar{p}, \delta E), \quad (5.37)$$

avec β et n des nombres positifs. Cette correction α est appelée **correction d'inverse-volume** et est considérée comme étant la seconde des corrections majeures à apporter à la contrainte hamiltonienne, en faisant le remplacement

$$\frac{1}{\sqrt{\det E}} \longrightarrow \frac{\alpha(\bar{p}, \delta E)}{\sqrt{\det E}}. \quad (5.38)$$

Commentaire

Il est ainsi possible de voir qu'à grande échelle, lorsque \bar{p} est grand, l'évolution est celle de la relativité générale, alors qu'au niveau du régime de Planck, \bar{p} petit, les expressions des corrections vont amener des différences qui vont encoder les modifications géométriques dues aux effets quantiques.

Par un traitement purement quantique, dans le cas de modèles résolubles avec rebond, il a été trouvé que la fonction d'onde de l'univers donnée par une équation semblable à (5.36) pouvait se propager à travers ce qui apparaît classiquement comme la singularité du Big Bang, montrant que cette théorie quantique de la gravitation pouvait être définie dans le régime de Planck (voir figure Fig.(5.2)).

5.4 La Cosmologie Quantique à Boucles de manière effective

Au niveau effectif, l'ajout de corrections dans les contraintes va nécessairement modifier l'expression des équations du mouvement, et les observables en résultant vont par conséquent amener des modifications dans la description du modèle standard. Dans ce qui suit, on va surtout s'intéresser à la correction d'holonomie, et dans une moindre mesure à la correction d'inverse-volume, afin de voir comment la dynamique est modifiée.

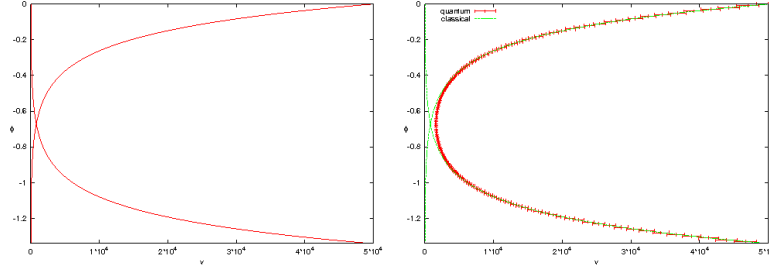


FIG. 5.2 – Dans un univers $k = 0, \Lambda = 0$ en contraction puis en expansion, évolution d’une fonction d’onde de l’univers dans le cas d’une quantification à la Wheeler-DeWitt (à gauche), et de la Cosmologie Quantique à Boucles (à droite). [47]

5.4.1 Application des corrections d’inverse volume

Lorsque l’on considère la correction d’inverse-volume, on s’emploie à effectuer la transformation donnée par l’équation (5.38), ce qui n’est possible que pour la contrainte hamiltonienne puisque les autres contraintes ne font pas intervenir de terme en $(\det E)^{-n}$. On va ainsi pour la partie homogène modifier la contrainte hamiltonienne de la gravité par une correction $\bar{\alpha}$, et de la matière par une correction $\bar{\nu}$, telles que la contrainte totale s’exprime selon

$$H_{tot,IV}^{(0)}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{V_0} d^3x \bar{N} \left[-6\bar{\alpha}\sqrt{\bar{p}}\bar{k}^2 + 2\kappa \left(\bar{\nu} \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}} + \bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi}) \right) \right]. \quad (5.39)$$

Équations du mouvement

Les équations d’évolution des variables homogènes sont données de façon similaire aux équations (5.12) à (5.15), mais en raison de la dépendance des corrections en $\bar{p}(\eta)$, elles devront maintenant tenir compte des dérivées partielles de ces corrections. Un calcul simple montre que dans ce cas

$$\dot{\bar{p}} = 2\bar{p}\bar{\alpha}\bar{k} \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} = \bar{\alpha}\bar{k} \quad (5.40)$$

permettant de définir le paramètre de Hubble modifié $\mathcal{H} = \bar{\alpha}\bar{k}$. Pour la matière (un champ scalaire), on obtient

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\nu} \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}, \quad (5.41)$$

telle que maintenant densité d’énergie et pression s’écrivent

$$\rho = \bar{\nu} \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}), \quad P = \bar{\nu} \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\bar{\varphi}), \quad (5.42)$$

ainsi que l’équation de Klein-Gordon⁴

$$\ddot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{\varphi}} \left(2\bar{k} \frac{\bar{\nu}}{\bar{\alpha}} - \frac{\dot{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}} \right) + \bar{p}\bar{\nu}\partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}) = 0. \quad (5.43)$$

L’équation de Friedman, en temps conforme, s’écrit alors

$$\frac{\delta M}{\delta N} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}^2 = \bar{\alpha} \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho, \quad (5.44)$$

et on voit que la correction d’inverse-volume, introduite comme un facteur multiplicatif pour la contrainte hamiltonienne gravitationnelle, agit en conséquence comme un facteur multiplicatif dans l’équation de Friedmann.

Conséquences cosmologiques des corrections d’inverse-volume

Si on raisonne en temps cosmologique, l’équation (5.44) s’écrit

$$H^2 = \bar{\alpha} \frac{\kappa}{3} \rho = \bar{\alpha} \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2\bar{\nu}} + V \right) \quad (5.45)$$

et lorsque le facteur d’échelle est très grand et sa dérivée non-nulle, la correction $\bar{\alpha}$ étant proche de 1, on retrouve bien la dynamique classique attendue. Lorsque l’on s’intéresse à l’échelle de Planck, le Big Bang n’est pas résolu.

⁴En anticipant sur la suite, lorsque l’on considère des corrections identiques pour la matière et la gravitation, $\bar{\Omega} = \bar{\nu} = \bar{\alpha}$, on obtiendra toujours des équations pour une variable X similaires à l’équation (5.43)

$$\ddot{X} + \dot{X} \left(2\mathcal{H} - \frac{\dot{\bar{\Omega}}}{\bar{\Omega}} \right) + V(\bar{\Omega}) \cdot X = 0$$

5.4.2 Application des corrections d'holonomie

Lorsque l'on considère la correction d'holonomie, on s'emploie à effectuer la transformation donnée par l'équation (5.35). Seules les contraintes hamiltoniennes sont non-nulles et la contrainte totale s'écrit

$$H_{tot,holo}^{(0)}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{V_0} d^3x \bar{N} \left[-6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 + 2\kappa \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}} + \bar{p}^{\frac{3}{2}} V(\bar{\varphi}) \right) \right]. \quad (5.46)$$

Par la suite, la correction d'holonomie va apparaître dans de nombreux termes, et tout en conservant une forme en sinus cardinal, on va utiliser dans le cas général la notation

$$\bar{k} \longrightarrow \mathbb{K}[n] = \frac{\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{n\bar{\mu}\gamma} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{K}[n=0] = \bar{k}, \quad (5.47)$$

où n est un entier pour que la correction puisse être comme initialement décomposable sur une base $\mathcal{N}_\mu = \exp[\frac{1}{2}\mu\gamma\bar{k}]$. En utilisant l'équation (5.32), on peut montrer que

$$\beta = \frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{p}}, \quad (5.48)$$

et on définit les relations importantes pour la suite

$$\bar{p} \frac{\partial \mathbb{K}[n]}{\partial \bar{p}} = \beta (\bar{k} \cdot \cos(n\bar{\mu}\gamma\bar{k}) - \mathbb{K}[n]), \quad (5.49)$$

ainsi que

$$\frac{\partial \mathbb{K}[n]}{\partial \bar{k}} = \cos(n\bar{\mu}\gamma\bar{k}). \quad (5.50)$$

Ce terme allant intervenir constamment par la suite, on pose

$$\Omega \doteq \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}), \quad (5.51)$$

découlant majoritairement de l'équation (5.50).

Équations du mouvement

De même que pour les cas précédents, il est possible de trouver des équations d'évolution pour les variables homogènes similaires aux équations (5.12) à (5.15). Les variables étant fonctions de $\bar{\mu} = f(\bar{p}(\eta))$ et de \bar{k} , il sera nécessaire de tenir compte de leurs dérivées partielles, compliquant grandement les équations comme pour $\dot{\bar{k}}$, mais heureusement les résultats se simplifieront aussi très facilement. La modification n'étant perceptible que sur $\dot{\bar{p}}$ et $\dot{\bar{k}}$, un calcul simple permet de montrer que

$$\dot{\bar{p}} = 2\bar{p}\mathbb{K}[2] \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} = \mathbb{K}[2] \quad (5.52)$$

permettant de définir le paramètre de Hubble modifié $\mathcal{H} = \mathbb{K}[2]$, et

$$\dot{\bar{k}} = \bar{k}\mathbb{K}[2] - \frac{\kappa}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^2}. \quad (5.53)$$

Concernant la matière, on obtient

$$\dot{\bar{\varphi}} = \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}, \quad (5.54)$$

et l'équation de Klein-Gordon possède la même forme que classiquement,

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 2\mathbb{K}[2] \dot{\bar{\varphi}} + \bar{p} \partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}) = 0, \quad (5.55)$$

avec pour ces corrections, une modification qui n'est due uniquement qu'à l'expression de \mathcal{H} . Dans cette équation, comme celles que l'on verra plus tard pour les perturbations, on se rendra compte que les équations avec les corrections d'holonomie seront très proches de celles obtenues dans le cas classique, à la différence que le paramètre de Hubble aura une évolution différente au niveau de l'échelle de Planck, et que des termes supplémentaires apparaîtront.

D'autre part, l'expression de la densité d'énergie correspond exactement à celle trouvée classiquement par l'équation (5.17), et en utilisant sa définition (3.77), on peut montrer qu'il existe une **première équation de Friedmann**⁵ donnée par

$$\mathbb{K}[1]^2 = \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho. \quad (5.56)$$

⁵Lorsque \bar{p} devient grand, $\bar{\mu} \rightarrow 0$ et $\mathbb{K}[1] \rightarrow \bar{k} = \mathcal{H}$.

En utilisant l'équation (5.56) précédente et la définition (3.77) de la densité d'énergie à l'aide de la dérivée de la contrainte⁶, il est possible d'établir la **seconde équation de Friedmann** donnée par

$$\mathcal{H}^2 = \mathbb{K}[2]^2 = \frac{\kappa}{3} \bar{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (5.57)$$

où on a défini une nouvelle densité critique, ρ_c s'écrivant

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa \gamma^2} \frac{1}{\bar{\mu}^2 \bar{p}}. \quad (5.58)$$

Dans le cas où $\rho_c \rightarrow +\infty$, on retrouve les équations classiques dans notre univers, pour lequel la densité d'énergie est très faible en comparaison de ρ_c , constante, valant

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa \gamma^2 \Delta} \sim 10^{97} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (5.59)$$

Cette densité d'énergie critique dépend de la valeur du paramètre de Barbero-Immirzi, et la dynamique de l'univers observée va pouvoir ainsi contraindre sa valeur. Une des équations de Raychaudhuri très utile pour la suite est donnée en combinant les équations (5.49), (5.50) et (5.53)

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{d\mathbb{K}[2]}{d\eta} = \mathbb{K}[2]^2 - \Omega \frac{\kappa}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^2}, \quad (5.60)$$

et il est aussi possible de voir que

$$\Omega = 1 - 2 \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (5.61)$$

s'annulant lorsque $\rho = \rho_c/2$.

Conséquences cosmologiques des corrections d'holonomies

Les corrections d'holonomies, par rapport aux corrections d'inverse-volume, vont amener un scénario plus novateur, ayant la possibilité d'éclaircir certains points obscurs du modèle standard de la cosmologie. Les points essentiels sont :

1. l'existence d'un **grand rebond**, **Big Bounce** en anglais.

L'équation de Friedmann modifiée (5.58) est une des 'révolutions' engendrées par la cosmologie quantique à boucles. En effet, le terme de droite $\frac{\kappa}{3} \rho$ est toujours positif, impliquant en relativité générale que \dot{a} n'est jamais nul : l'univers soit s'étend pour toujours à partir du *Big Bang*, soit se contracte jusqu'au *Big Crunch*. Mais dans l'équation (5.58), \dot{a} peut en plus devenir nulle lorsque $\rho = \rho_c$ engendrant ainsi l'apparition d'un rebond quantique : dans le passé de cet événement, l'univers se contracte tandis que dans le futur il s'expand. Une force répulsive est ainsi créée et va avoir comme conséquence de 'repousser' la matière en amenant un univers en expansion, comme illustré par la figure Fig.(5.3). Cette force est ainsi due à la nature quantique de la géométrie. En cosmologie quantique à boucles, il est alors possible d'obtenir une succession de ces phases de contraction et d'expansion, et pourquoi pas d'obtenir un univers dit *cyclique*, sans singularités.

Une curieuse analogie peut être faite avec ce qui se passe lors des effondrements des étoiles sur elles-mêmes : lorsque le noyau approche une certaine densité critique, une nouvelle force répulsive entre en jeu stoppant l'effondrement et menant alors aux étoiles à neutrons et aux naines blanches, stables. Cette force est une conséquence de la statistique de Fermi-Dirac et elle est associée à la nature quantique de la matière.

Ce phénomène n'est rendu possible qu'à cause du signe négatif présent dans le terme correctif. Cette résolution de la singularité n'est pas triviale puisque par exemple, en théorie des branes, l'équation de Friedmann reçoit elle aussi une correction en ρ^2 , mais elle est accompagnée d'un signe positif ne permettant pas au bounce de se produire. On peut aussi voir qu'à cause de la fonction $\sin(\bar{k})$, la courbure \bar{k} peut être infinie sans que les équations ne divergent, permettant ainsi d'avoir une théorie effective bien définie au niveau du rebond.

D'autre part, une telle résolution d'une singularité ne contredit pas les théorèmes standards sur les singularités élaborés par Penrose et Hawking. En effet, ces théorèmes ne sont pas applicables en cosmologie quantique à boucles car les équations d'Einstein classiques sont modifiées par les corrections dues à la géométrie quantique dans la théorie. Il en va de même pour les théorèmes plus récents dus à Borde, Guth et Vilenkin [48] : ils ne réfèrent pas aux équations d'Einstein mais sont motivés par le scénario d'une inflation éternelle. Cependant, en cosmologie quantique à boucles, la phase pré-Rebond de contraction ne permet plus un tel scénario. Les différents travaux sur la résolution des singularités dans cette théorie [49, 50] pourraient montrer que de telles théorèmes existeraient aussi en cosmologie quantique à boucles.

⁶Dans notre écriture, il faut diviser cette définition par V_0 pour ne pas avoir de référence à la cellule fiducielle.

2. l'existence d'une **phase d'inflation** naturellement présente : en considérant l'univers primordial constitué d'un champ scalaire, puisque c'est le modèle le plus simple que l'on puisse construire, l'évolution sera régie par l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\varphi} + 2\mathbb{K}[2] \dot{\varphi} + \bar{p}\partial_{\bar{\varphi}}V(\bar{\varphi}) = 0, \quad (5.62)$$

et se fera de concert avec le fond à cause du paramètre de Hubble. Cependant, dans le scénario précédent, l'univers avant le bounce était en contraction, $\mathcal{H} = \mathbb{K}[2] < 0$ va alors jouer comme un terme d'anti-friction : quelles que soient les conditions initiales pour le champ, la dynamique engendrée par le fond va nécessairement le faire monter sur son potentiel, possiblement assez haut. Dans la phase d'expansion, le terme comportant le paramètre de Hubble va jouer de nouveau un rôle de friction, et on pourra alors retrouver un comportement slow-roll pour ce champ qui, suivant sa valeur au moment du bounce, pourrait engendrer une longue phase d'inflation. L'inflation est alors naturellement engendrée par un champ scalaire qui redonne, après le rebond, le comportement décrit dans le modèle standard de la cosmologie, et ce, sans qu'il ne soit nécessaire de recourir à des conditions initiales artificielles. Le scénario d'un tel champ scalaire est appelé **scénario en aileron de requin**, ou **shark fin scenario**, et son évolution est donnée par la figure Fig.(5.4).

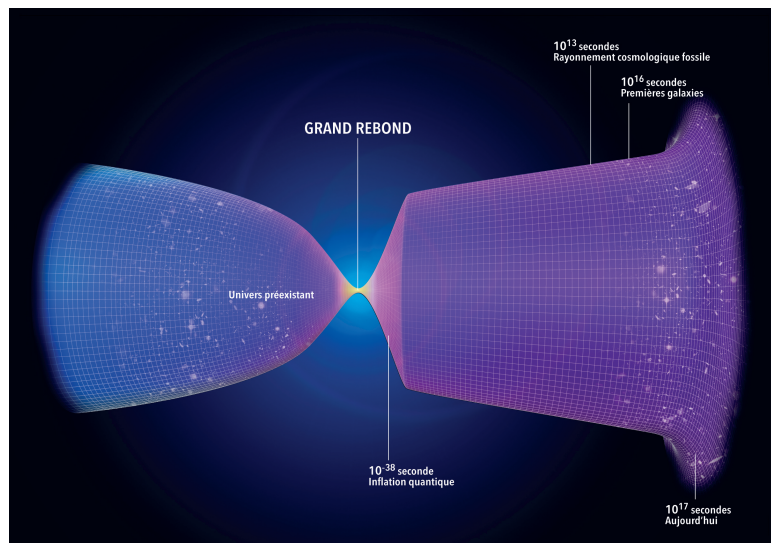


FIG. 5.3 – évolution de l'univers à travers un rebond (©Bruno Bourgeois).

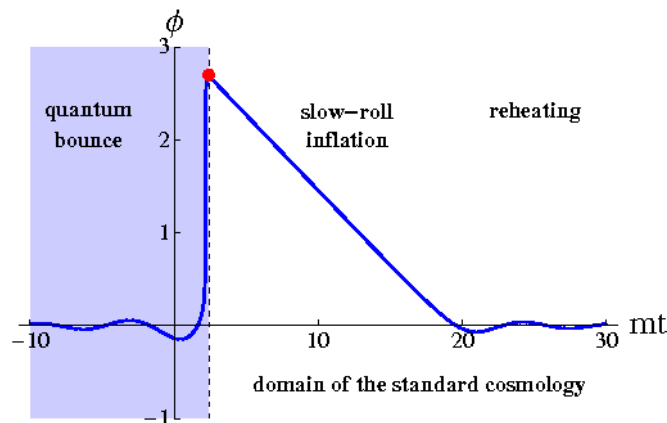


FIG. 5.4 – évolution du champ scalaire en fonction du temps dans un univers en rebond [56]

La physique étant différente à l'échelle de Planck, on peut s'attendre à ce que les effets quantiques engendrent des modifications observables. La discrétisation de l'espace-temps et une nouvelle description de la physique proche d'une pseudo-singularité sont les deux caractéristiques importantes d'une théorie quantique de la gravitation qui permettraient de penser à de nouveaux effets possibles que l'on pourrait tester.

5.5 Les effets possibles observables

L'énergie de Planck (10^{19}GeV) est de 15 ordres de grandeur au dessus des capacités des accélérateurs actuels de particules, et d'environ 8 ordres de grandeur par rapport à la plus énergétique des particules observées du rayonnement cosmique. La longueur de Planck est de 20 ordres plus basse que le rayon d'un proton, et en terme de temps de Planck (10^{-44}s), de plus de 20 ordres de grandeur au delà de la précision donnée par les horloges atomiques disponibles. Des expériences directes en laboratoire sont donc inenvisageables pour tester les effets quantiques recherchés. Cependant, grâce à la cosmologie et l'astrophysique mettant en jeu des phénomènes de très hautes énergies, comme les supernovae, trous noirs et autres objets exotiques, il est éventuellement envisageable d'étudier leurs caractéristiques pour en tirer des informations sur leur possible structure quantique.

Les sursauts gamma : brisure de l'invariance de Lorentz ?

On vient de le voir, dans une théorie quantique de gravitation, on s'attend à ce que l'espace-temps ait une forme granulaire, fait de quanta de volume à l'échelle de Planck. Il a été émis l'idée qu'en ce propageant sur cette structure granulaire, les rayons lumineux, de longueur d'onde λ , devaient être eux aussi affectés par ces effets quantiques, même s'ils ont un impact extrêmement faible. Pour ces rayons lumineux, $\lambda \sim 10^{-12}\text{ m}$ et on peut naturellement s'attendre à ce qu'un effet quantique ait une action $l_{\text{planck}}/\lambda \sim 10^{-23}$ plus faible sur ces longueurs d'onde. Cependant, une supernova émettant un sursaut gamma se situe à une distance d'environ 10^{25}m de nous, soit 10^{37} longueur d'ondes, donnant la possibilité aux effets quantiques d'agir éventuellement suffisamment longtemps pour modifier la propagation de ce rayon lumineux, et ainsi être visibles. Il a notamment été postulé dans certains modèles [57] que la relation de dispersion pour des photons serait modifiée selon

$$c^2 p^2 = E^2 \left[1 + \chi \frac{E}{E_{\text{planck}}} + \mathcal{O} \left(\frac{E^2}{E_{\text{planck}}^2} \right) \right], \quad (5.63)$$

avec χ de l'ordre de l'unité, et $E = h\nu$ l'énergie d'un photon de fréquence ν . Suivant cette relation, des photons de différentes énergies et donc de différentes longueurs d'onde devraient arriver à des temps différents dans un détecteur. Un léger retard dans l'arrivée des photons a été observé [58] pour la supernova GRB 050910, mais les mécanismes mis en jeu pour les phénomènes astrophysiques, comme les supernovae ou les étoiles à neutron responsables de sursauts gamma, ne sont pas connus précisément et il reste encore beaucoup de libertés possibles dans la compréhension de ces objets. Ainsi, ces photons ont pu être émis au centre de l'objet et n'en sont sortis qu'à des temps différents à cause de mécanismes internes, amenant un décalage dans l'ordre d'arrivée. Cette idée sur la modification de la relation de dispersion est très arbitraire et ne peut pas se déduire rigoureusement de la théorie mère. Dans le cas d'un *toy model* [59] en cosmologie quantique à boucles, des calculs similaires ont été effectués, et le résultat attendu est de même une modification de cette relation de dispersion, telle que pour une onde polarisée de fréquence ν et de nombre d'onde k

$$\nu_{\pm} \sim |k| (1 \mp 2\chi l_{\text{planck}} |k|) + \mathcal{O}(k^3). \quad (5.64)$$

La correction apportée dépend dans ce cas du signe de l'hélicité de l'onde donnant à l'espace-temps quantique un aspect biréfringent. Par rapport à la relation (5.63), l'équation (5.64) est plus restrictive puisqu'elle fait intervenir en plus la polarisation de l'onde, et donc contraint mieux les effets quantiques. Si ce modèle s'avère théoriquement correcte, il est déjà invalidé par les mesures faites en radioastronomie pour lesquelles l'étude de sources radio [60] émettant des ondes polarisées dans un large panel de longueur d'onde a montré que la polarisation ne change pas avec la longueur d'onde, impliquant $\chi < 10^{-3}$. Paradoxalement, dans ce modèle, les équations de Maxwell apparaissant ne sont pas invariantes de Lorentz, et il faudrait le raffiner pour vraiment en avoir une meilleure compréhension.

La brisure de l'invariance de Lorentz est un sujet longuement débattu. Il existe cependant des arguments en sa défaveur, apportés notamment par Carlo Rovelli [13] : si un observateur mesure la longueur minimale de la théorie, alors un autre observateur subissant un boost devrait mesurer une longueur plus petite à cause des contractions de Lorentz, et cela rendrait la théorie quantique incohérente. Cependant cette réflexion ne tient justement pas compte des enseignements de la mécanique quantique : ce ne sont pas les valeurs propres du spectre de l'opérateur de mesure qui devraient subir les contractions de Lorentz, mais leurs valeurs moyennes. Le spectre étant alors inchangé, l'existence d'une valeur minimale ne brise ainsi pas l'invariance de Lorentz. A l'heure actuelle, si cette brisure devait se produire, il n'y en a pour le moment aucune évidence, et il est nécessaire de chercher un autre moyen d'observer les effets quantiques.

Les perturbations cosmologiques

L'étude des sursauts gamma, même si potentiellement intéressante, n'est pas suffisante pour contraindre le modèle. Nous allons plutôt nous intéresser à ce qui s'est passé lorsque l'univers était dans un état de très haute énergie, à l'ère de Planck durant laquelle les effets quantiques ont pu vraiment dominer et modifier l'évolution que l'on connaît habituellement. Aujourd'hui, ces effets sont potentiellement observables par l'étude du fond diffus cosmologique, et nous allons surtout nous focaliser par la suite sur les perturbations qui encodent en fait le passé de notre univers.

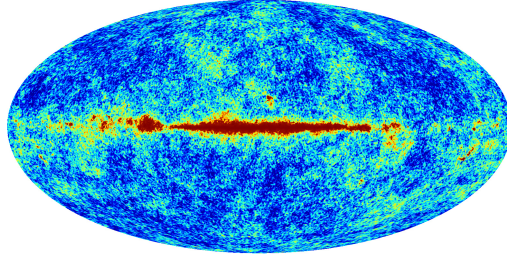


FIG. 5.5 – Fond diffus cosmologique attendu par le satellite PLANCK.

Chapitre 6

Les perturbations cosmologiques

A l'origine, il y a le silence. Un seul point de lumière au centre de la table. Puis au premier cube posé, la basse se met en route. La gimmick démarre. Et au fur et à mesure qu'on ajoute des cubes et des étoiles, un monde sonore entre en vie. Un coeur bat, des connexions s'établissent. Une galaxie est née.

Arthur de Pas, *Reactable*

6.1 Introduction

Dans le modèle cosmologique actuel, notre univers a subi une phase inflationnaire primordiale l'ayant rendu homogène en grande partie, et qui est paradoxalement à l'origine des inhomogénéités observées. Une explication plausible quant à l'origine de la formation des structures au sein de l'univers serait l'apparition de petites perturbations dans le champ d'inflaton, qui auraient crû au cours du temps pour initier ces structures : une fois l'univers arrivé dans la phase de domination par la matière, les inhomogénéités, de l'ordre de $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$, auraient été amplifiées par effondrement gravitationnel et ont put ainsi former les structures actuellement observables. Ces perturbations quantiques dans le champ de matière ont eu des conséquences sur la métrique, et les équations d'évolution de ces perturbations sont alors données par les équations de la relativité générale. Généralement, dans toute théorie linéaire des perturbations cosmologiques, la croissance de ces petites inhomogénéités de matière, de longueur d'onde plus petite que le rayon de Hubble ($\lambda < H^{-1}$), est donnée par une équation newtonienne en temps cosmologique¹

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta_{\vec{k}} + 3H\frac{d}{dt}\delta_{\vec{k}} + v_s^2\frac{k^2}{a^2}\delta_{\vec{k}} = \frac{\kappa}{2}\rho_M\delta_{\vec{k}} \quad (6.1)$$

où $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ est le carré de la vitesse du son dans le milieu, et où les perturbations ont été écrites sur une base d'onde planes

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \delta_{\vec{k}(t)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (6.2)$$

Une des propriétés les plus utiles de l'inflation, en dehors de la résolution des différents problèmes cosmologiques, est la génération des spectres de densité de perturbations en température, mais aussi en polarisation permettant de sonder les effets des ondes gravitationnelles (avec le mode B). Durant l'inflation, la longueur d'onde d'une fluctuation quantique devient plus grande que le rayon de Hubble et son amplitude devient alors 'gelée' à cause de la perte de causalité entre les différents modes. Cela se verra par le terme de friction $H\dot{\Phi}$ qui devient dominant. De plus, selon la théorie quantique des champs, un espace vide n'est pas totalement vide et possède une énergie : il est rempli de fluctuations quantiques de tous les champs possibles et de toutes longueurs d'onde possibles, et l'inflation va successivement geler les différents modes. Une fois l'inflation terminée, le rayon de Hubble en croissant plus vite que le facteur d'échelle, des modes vont ré-entrer dans le rayon de Hubble : cela se produit durant les périodes de domination par la matière ou le rayonnement, générant les perturbations de matière (et de température) observées $\delta\rho$ via l'équation de Poisson. Leur spectre de puissance va ainsi posséder une signature distincte de l'inflation, que l'on peut observer par l'étude du fond diffus cosmologique. Ainsi, pour comprendre l'existence des structures de l'univers à travers le scénario de l'inflation, il faut retenir que

- les fluctuations quantiques du champ d'inflaton sont excitées durant l'inflation et étirées jusqu'aux échelles cosmologiques,
- ces fluctuations, par les équations de la relativité générale, vont induire des perturbations sur la métrique qui vont de même être portées jusqu'aux échelles cosmologiques,

¹Rappel : la convention prise dans ce manuscrit est d'utiliser $\dot{} \doteq \partial_\eta$, la dérivée en **temps conforme**.

- la gravité agit comme un 'messenger' puisqu'elle communique aux baryons les perturbations générées par un mode qui est devenu plus petit que l'échelle de l'horizon une fois l'inflation terminée. Les photons, jusqu'au moment du découplage, vont interagir avec la matière et contenir eux-aussi cette information sur les perturbations. Observer les photons du fond diffus cosmologique permettra alors de contraindre l'évolution des perturbations durant l'inflation.

Les équations considérées par la suite étant similaires, nous allons commencer par regarder l'exemple des perturbations pour un champ scalaire, et introduire ensuite les différents types de perturbations de la métrique ainsi que les spectres de puissance correspondant.

Nous nous sommes basés sur les références [26] et [61] où tous les calculs présentés ici peuvent y être trouvés, ainsi que celles vues au chapitre Chap.4.

6.2 Invariance de jauge

En relativité générale, choisir une jauge consiste à choisir un système de coordonnées, et donc un choix de paramétrisation des hypersurfaces spatiales. Une transformation entre deux choix de coordonnées est appelée **transformation de jauge** et est donnée par la **dérivée de Lie** correspondante. En physique, on est souvent intéressé par des quantités seulement dépendantes des caractéristiques physiques du système, et non pas du choix de mesure de l'observateur. On parle alors de **quantités invariantes de jauge**.

Dans le cas d'un changement infinitésimal de coordonnée généré par un champ de vecteur ξ^μ

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (6.3)$$

une quantité Q quelconque sera transformée au premier ordre selon

$$\tilde{Q} = Q + \mathcal{L}_{\xi^\mu} Q^{(0)}, \quad (6.4)$$

et toute quantité invariante de jauge doit alors satisfaire la condition

$$\mathcal{L}_{\xi^\mu} Q^{(0)} = 0. \quad (6.5)$$

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Stewart-Walker. Comme on le verra par la suite, il en existe une infinité puisque toutes combinaisons de quantités invariantes de jauge donnent aussi des quantités invariantes de jauge. En cosmologie, on souhaite comparer deux espace-temps proches : celui donné par la métrique FLRW et celui perturbé. Le meilleur moyen est donc d'obtenir ces quantités invariantes de jauge, et pour ce faire, il existe deux façons possibles de procéder :

- Soit on identifie les combinaisons des perturbations qui donnent des quantités invariantes de jauge : l'inconvénient est de devoir passer souvent par des difficultés techniques importantes, mais les résultats seront physiques,
- Soit on choisit une jauge dans laquelle on fait les calculs : plus simple pour les calculs, mais des libertés de jauge non physiques peuvent apparaître et ne pas permettre une bonne compréhension des résultats.

Dans la suite, nous allons utiliser la première façon et obtenir directement ces quantités par une méthode canonique. Nous allons cependant regarder auparavant qu'elles sont leurs expressions habituelles en cosmologie et voir leur sens physique, et leur évolution sera obtenue à partir des équations du mouvement des perturbations.

6.3 Fluctuations quantiques d'un champ scalaire durant l'inflation

On va s'intéresser à l'évolution des perturbations d'un champ scalaire quelconque χ , dans le cadre d'une évolution de type inflationnaire, et obtenir ainsi les définitions des différents vides que l'on va rencontrer.

champ scalaire non massif durant une inflation de De Sitter

On s'intéresse au cas d'un fond de De Sitter, $a \sim e^{H_I t}$ où H_I est constant. La résolution des équations étant plus simple dans l'espace de Fourier, on va regarder les modes de Fourier du champ scalaire χ , définis selon

$$\delta\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_{\mathbf{k}}(t). \quad (6.6)$$

La dynamique d'un champ scalaire dans la métrique FLRW étant donnée par l'équation (4.26), les variables dans l'espace de Fourier auront leur évolution dictée par l'équation analogue

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta\chi_{\mathbf{k}} + 3H \frac{d}{dt} \delta\chi_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2} \delta\chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.7)$$

dont une étude qualitative permet de montrer que

- pour des longueurs d'onde à l'intérieur de l'horizon $\lambda \ll H^{-1}$, le nombre d'onde correspondant satisfait la relation $k \gg aH$. Pour ces modes, il est alors possible de négliger le terme de friction $3\mathcal{H}\frac{d}{dt}\delta\chi_{\mathbf{k}}$ tel que

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\chi_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.8)$$

Cette équation du mouvement est similaire à celle d'un oscillateur harmonique dont la fréquence va varier avec le temps à cause du terme en a^2 , et dont les solutions donneront des fluctuations qui devraient osciller pour des modes à l'intérieur de l'horizon.

- pour des longueurs d'onde plus grandes que l'échelle de l'horizon, $\lambda \gg H^{-1}$, le nombre d'onde correspondant satisfait la relation $k \ll aH$ et le terme k^2/a^2 peut être négligé tel que

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\chi_{\mathbf{k}} + 3H\frac{d}{dt}\delta\chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.9)$$

montrant que des modes superhorizons doivent être constants ($\frac{d}{dt}\chi_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{a} \rightarrow 0$).

En résumé, il est donc possible que des modes de longueurs d'ondes $\lambda \sim a/k$, initialement à l'intérieur de l'horizon, oscillent jusqu'à ce qu'ils atteignent une taille de l'ordre du rayon de Hubble, et se figent ensuite. D'autre part, en se plaçant en temps conforme, le facteur d'échelle devra évoluer en conséquence selon

$$a(\eta) = -\frac{1}{\mathcal{H}_i\eta} \quad (\eta < 0). \quad (6.10)$$

Dans cette formulation, il est possible de ramener l'équation (6.7) à une équation de type Schrödinger en effectuant le changement de variable

$$\delta\chi_{\mathbf{k}} = \frac{u_{\mathbf{k}}}{a}, \quad (6.11)$$

tel que le champ lié $u_{\mathbf{k}}$ évolue selon

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)u_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.12)$$

L'équation (6.12) correspond à une particule d'énergie $E(k) = k^2$ dans un potentiel effectif dépendant du temps de la forme $V(\eta) = \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2}{\eta^2}$ et se déplaçant dans un espace plat. Il est alors possible de formuler son action selon

$$\delta S_{\mathbf{k}} = \int d\eta \left[\frac{1}{2}\dot{u}_{\mathbf{k}}^2 - \frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)u_{\mathbf{k}}^2 \right], \quad (6.13)$$

qui est l'action d'un simple oscillateur harmonique de masse $\frac{\ddot{a}}{a}$ évoluant dans le temps, et de relations de commutations canoniques

$$u_{\mathbf{k}}^* \cdot \partial_{\eta} u_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}} \cdot \partial_{\eta} u_{\mathbf{k}}^* = -i. \quad (6.14)$$

Pour un mode k fixé, on voit que dans différents régimes dépendant de la valeur de $a(\eta)$, l'équation (6.12) va donner différentes solutions, et ce mode pourra être caractérisé par la donnée de $|k\eta|$ puisque

$$\frac{k}{a\mathcal{H}_i} = -k\eta. \quad (6.15)$$

Plus précisément, ce mode correspondra

1. à un **mode subhorizon** $k \gg a\mathcal{H}_i$ lorsque $|k\eta| \gg 1$, et l'équation (6.12) se simplifie en

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} + k^2 u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.16)$$

de solution une onde plane

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (6.17)$$

Cette solution (6.17) est la solution correspondant à un **vide de Minkowski**, c-a-d pour un **espace plat**, ce qui est plutôt cohérent, puisqu'à la **limite ultraviolette**, pour des longueurs d'onde plus petites que l'échelle de l'horizon, on s'attend à ce qu'un espace-temps plat soit une bonne approximation, et donc que les modes ayant cette taille oscillent à l'intérieur sans empreinte de courbure.

2. à un **mode superhorizon** $k \ll a\mathcal{H}_i$ lorsque $|k\eta| \ll 1$, et l'équation (6.12) se simplifie en

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} - \frac{\ddot{a}}{a} u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.18)$$

de solution

$$u_{\mathbf{k}} = B(k)a(\eta) \quad (k \ll a\mathcal{H}_i). \quad (6.19)$$

La constante d'intégration $B(k)$ s'obtient par la continuité des solutions des modes sub et superhorizon, telle que

$$|u_{\mathbf{k}}| \sim \frac{\mathcal{H}_i}{\sqrt{2k^3}} \quad \text{pour des modes superhorizon.} \quad (6.20)$$

On vient de voir qu'il était possible de caractériser par des arguments heuristiques la solution pour tous les modes, mais il existe néanmoins une solution analytique à l'équation (6.12),

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\eta} \right). \quad (6.21)$$

Cette solution correspond au **vide de Bunch-Davies** et redonne dans les différentes limites les solutions obtenues précédemment. Par la suite, nous déciderons de prendre comme condition initiale pour la perturbation du champ, soit un mode correspond à un espace plat (comme maintenant) et donc un vide de Minkowski, soit de prendre un vide de Bunch-Davies correspondant à l'absence de particules dans un espace de type De Sitter, comme dans le cas de l'inflation.

Champ scalaire massif durant une inflation de De Sitter

Il est de même possible de refaire une analyse similaire dans le cas cette fois-ci d'un champ scalaire de masse m_χ et de potentiel $V(\chi) = \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2$, qui est plus intéressant. L'équation de Klein-Gordon issue de l'équation (4.26) est alors donnée comme l'équation (6.12) selon

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} + [k^2 + V(\eta)] u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.22)$$

où $V(\eta)$ est le potentiel effectif de la particule qui tient compte de m_χ^2 , et tel que pour une évolution de De Sitter

$$V(\eta) = (m_\chi^2 - 2\mathcal{H}_i^2) a^2(\eta) = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{m_\chi^2}{\mathcal{H}_i^2} - 2 \right). \quad (6.23)$$

En notant

$$\nu_\chi^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{\mathcal{H}_i^2} \right), \quad (6.24)$$

l'équation (6.22) peut se réécrire sous la forme

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2} \left(\nu_\chi^2 - \frac{1}{4} \right) \right] u_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.25)$$

dont la solution générique pour ν_χ réelle s'écrit [62] comme combinaison linéaire de fonctions évoluées

$$u_{\mathbf{k}} = \sqrt{-\eta} \left[c_1(k) H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\eta) + c_2(k) H_{\nu_\chi}^{(2)}(-k\eta) \right], \quad (6.26)$$

où $H_{\nu_\chi}^{(1)}$ et $H_{\nu_\chi}^{(2)}$ sont respectivement les fonctions de Hankel du premier et second ordre. Si de plus, on impose que dans le régime ultraviolet $k \gg aH$ ($-k\eta \gg 1$) telle que la solution corresponde à une solution en onde plane $e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$ comme on l'attend à très petite échelle, alors avec

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}, \quad H_{\nu_\chi}^{(2)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}, \quad (6.27)$$

$c_2(k) = 0$ et $c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\chi + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}$ par la condition de wronskien. La solution exacte devient alors

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\chi + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\eta} H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\eta), \quad (6.28)$$

et avec

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{2/\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu_\chi - \frac{3}{2}} \left(\frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} \right) x^{-\nu_\chi}, \quad (6.29)$$

les modes superhorizon sont donnés par

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \simeq \frac{\mathcal{H}_k}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a\mathcal{H}_i} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\chi} \quad \text{modes superhorizon.} \quad (6.30)$$

où \mathcal{H}_k est la valeur du paramètre de Hubble quand un certain mode k sort de l'horizon. Par analogie avec la définition des paramètres de slow-roll, on définit pour ce champ un paramètre $\eta_\chi = (m_\chi^2/3\mathcal{H}_i^2) \ll 1$, tel que

$$\frac{3}{2} - \nu_\chi \simeq \eta_\chi \quad (6.31)$$

qui rendra compte de l'évolution de l'amplitude du spectre.

Définition du spectre de Puissance

L'équation (6.22) est linéaire et correspond donc à celle d'un champ libre. Les observables associées au champ sont donc toutes déterminées par sa fonction de corrélation à deux points, *i.e.* toute l'information se trouve dans le spectre de puissance défini non plus en prenant la moyenne sur les configurations classiques $\langle \chi_{\mathbf{k}} \chi_{-\mathbf{k}} \rangle$, mais en prenant la valeur moyenne quantique $\langle 0 | \hat{\chi}_{\mathbf{k}} \hat{\chi}_{-\mathbf{k}} | 0 \rangle$. Dans les modèles d'inflation à un champ, le spectre primordial a donc nécessairement une statistique gaussienne puisqu'il n'y a pas de corrélations non-aléatoires entre les fluctuations des différentes longueurs d'onde.

Il est nécessaire avant tout d'identifier l'état du champ $|0\rangle$ à considérer, et les modes associés solutions de l'équation (6.22). Une des forces de l'inflation est que son autocoherence impose le choix de l'état $|0\rangle$ puisque, pour les temps η tels que $|k\eta| \gg 1$, *i.e.* pour les échelles k à l'intérieur du rayon de Hubble, le terme dépendant explicitement du temps dans l'équation (6.22) est négligeable et il existe alors des solutions, de norme positive asymptotiquement, de la forme $e^{-ik\eta}$ dans ce régime. Les quanta créés par les opérateurs de création associés à ces modes se comportent alors comme des particules sans masse habituelles. Si ces modes contiennent n particules à ces temps, alors en remontant dans le passé l'énergie des fluctuations du champ diverge comme n/a^4 et dépasse rapidement celle du champ classique homogène $\bar{\chi}$: les conditions de réalisation de l'inflation cessent d'être vérifiées. L'état du champ \hat{u} est donc nécessairement le vide associé aux modes solutions de l'équation (6.22), vérifiant la condition aux limites $u \propto e^{-ik\eta}$ pour $|k\eta| \gg 1$ [63], et ces solutions peuvent être exprimées à l'aide des fonctions de Hankel.

La composante \mathbf{k} du champ $\hat{\chi}$ peut se décomposer sur des opérateurs de création et d'annihilation $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}}$

$$\hat{\chi}_{\mathbf{k}} = \chi_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} + \chi_k^*(\eta) \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (6.32)$$

vérifiant la relation de commutation canonique

$$[\hat{\chi}_{\mathbf{k}}(\eta), \partial_\eta \hat{\chi}_{\mathbf{k}}(\eta)] = i, \quad (6.33)$$

et où

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1. \quad (6.34)$$

Par convention, on choisit de définir le spectre de puissance tel que pour un vide donné

$$\langle 0 | \chi(\mathbf{x}, \eta) \chi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \eta) | 0 \rangle = \int \frac{k^2}{2\pi^2} dk \cdot e^{ikr} |\chi_k|^2 = \int d\ln k \cdot \frac{\sin(kr)}{kr} \cdot P_\chi(k), \quad (6.35)$$

permettant d'obtenir l'expression pour ce spectre

$$P_\chi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\chi_k|^2. \quad (6.36)$$

Plus rigoureusement, dans un fond quasi De Sitter

Durant l'inflation, le paramètre de Hubble n'est pas exactement constant mais change avec le temps selon $\dot{H} = -\epsilon H^2$ (expansion quasi De Sitter), où ϵ est le paramètre de slow-roll. Pour une telle évolution du fond, pour de faible valeur de ϵ ,

$$a(\eta) = -\frac{1}{H} \frac{1}{\eta(1-\epsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{1}{\eta^2} (2+3\epsilon). \quad (6.37)$$

En posant $m_\chi^2/H^2 = 3\eta_\chi$ et en considérant de faibles valeurs de η_χ et ϵ , on pose

$$\nu_\chi \simeq \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\chi. \quad (6.38)$$

Les modes superhorizon étant quasiment gelés, il est intéressant pour connaître les caractéristiques de l'inflation de regarder ces modes, donc des échelles de distances plus grandes que celle de l'horizon. Leur spectre est alors donné selon

$$\mathcal{P}_{\delta\chi}(k) = \left(\frac{\mathcal{H}_k}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\chi}. \quad (6.39)$$

On définit l'**indice spectral** $n_{\delta\chi}$ indiquant justement comment la pente du spectre évolue

$$n_{\delta\chi} - 1 = \frac{d\ln \mathcal{P}_{\delta\chi}}{d\ln k} = 3 - 2\nu_\chi = 2\eta_\chi - 2\epsilon. \quad (6.40)$$

On peut voir que dans le cas d'un spectre en inflation slow-roll, il est quasiment invariant d'échelle, avec seulement une faible pente (**tilt** en anglais) influencée par la masse du champ ainsi que par l'inflation via le paramètre ϵ , et on remarque que l'amplitude des fluctuations des modes superhorizon ne dépend (presque) pas de la valeur de la fluctuation lorsque ce mode sort de l'horizon et devient gelé.

On parle de

- **spectre bleu** si $n_{\delta\chi} > 1$ (le plus de puissance est dans la zone ultraviolet)
- **spectre rouge** si $n_{\delta\chi} < 1$ (le plus de puissance est dans la zone infrarouge)

6.4 Les perturbations de la métrique

Le champ d'inflaton étant un champ scalaire, il va subir des perturbations lors de l'inflation suivant le scénario précédemment esquissé, époque où on le considère comme dominant par rapport aux autres composantes possibles. Il va induire des perturbations dans le tenseur énergie-impulsion et donc dans la métrique, et réciproquement via les équations d'Einstein, des perturbations dans la métrique vont induire des perturbations dans la matière.

$$\delta\varphi \Longleftrightarrow \delta T_{\mu\nu} \Longleftrightarrow \left[\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta(g_{\mu\nu} R) \right] = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \Longleftrightarrow \delta g_{\mu\nu}. \quad (6.41)$$

On va s'intéresser aux quantités qui seront invariantes de jauge puisqu'elles représenteront les degrés de liberté physiques du système. En relativité générale, il existe 6 degrés de liberté qui vont se répartir dans les perturbations. On va ainsi considérer

1. les perturbation du champ de matière, l'inflaton, telles que $\varphi(\mathbf{x}, t) = \bar{\varphi}(t) + \delta\varphi(\mathbf{x}, t)$
2. les perturbations de la métrique $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ pouvant être décomposées selon
 - des **perturbations scalaires** possédant 2 degrés de liberté scalaires,
 - des **perturbations vectorielles** possédant 2 degrés de liberté vectoriels et apparaissant lorsque les champs présentent de la vorticité : ce n'est pas le cas avec le champ d'inflaton,
 - des **perturbations tensorielles** possédant 2 degrés de liberté tensoriels, qui sont les vrais degrés de liberté de la métrique en ce sens qu'ils sont présents même lorsque l'on considère un espace vide.

On va considérer par la suite des perturbations au premier ordre, donc linéaires, et chaque type de perturbations va alors évoluer indépendamment des autres : les équations vont être découplées, et on va pouvoir étudier chaque type de perturbation séparément. Bien sûr, cela n'est vrai que jusqu'à un certain point et il faudrait considérer, pour être plus rigoureux, une interaction aux ordres suivants entre les différentes perturbations.

6.5 Les perturbations scalaires

Dans le cas des perturbations scalaires (ϕ, B, ψ, E) , la métrique perturbée s'écrit sous la forme suivante

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i + ((1 - 2\psi)\delta_{ij} + E_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (6.42)$$

avec

$$E_{ij} = 2\partial_i \partial_j E, \quad \text{ou encore} \quad E_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E, \quad (6.43)$$

et

$$B_i = \partial_i B. \quad (6.44)$$

Les équations étant plus simples dans l'espace de Fourier, il est utile pour la suite de noter que

$$E_{ij} = -2 \left(\frac{k_i k_j}{k^2} \right) k^2 E, \quad \text{ou encore} \quad E_{ij} = \left(\frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E, \quad (6.45)$$

et

$$B_i = -i \frac{k_i}{k} B. \quad (6.46)$$

Sous une transformation de jauge

Lorsque l'on s'intéresse aux perturbations scalaires, le champ de transformation de jauge ξ^μ que l'on considère est composé uniquement de scalaires, ξ et ξ^0 tels que

$$\xi^\mu = (\xi^0, \partial^a \xi). \quad (6.47)$$

Sous un changement induit par ξ^μ , on peut montrer que les perturbations scalaires se transforment selon

$$\tilde{\phi} = \phi + \xi^0 + \frac{\dot{a}}{a} \xi^0, \quad (6.48)$$

$$\tilde{B} = B - \xi^0 + \dot{\xi} \quad (6.49)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \frac{\dot{a}}{a} \xi^0; \quad (6.50)$$

$$\tilde{E} = E + \xi, \quad (6.51)$$

et pour le champ d'inflaton

$$\tilde{\delta\varphi} = \delta\varphi + \dot{\phi} \xi^0. \quad (6.52)$$

Connaissant leur évolution sous une transformation infinitésimale, il est facile ici de combiner les différentes perturbations afin d'en tirer des quantités invariantes de jauge $\tilde{Q} = Q$.

Quantités invariantes de jauge

Les potentiels de Bardeen

En étudiant les équations (6.48) à (6.51) avec (6.52), on définit des potentiels invariants de jauge, les **potentiels de Bardeen** [64] selon

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta} \left[(B - \dot{E}) a \right], \quad (6.53)$$

$$\Psi = \psi - \frac{\dot{a}}{a} (B - \dot{E}), \quad (6.54)$$

concernant la métrique, et de même pour la matière

$$\delta\varphi^{(\text{GI})} = \delta\varphi + \dot{\phi} (B - \dot{E}), \quad (6.55)$$

avec la perturbation de la densité d'énergie invariante de jauge donnée par

$$\delta\rho^{(\text{GI})} = \delta\rho + \dot{\rho} (B - \dot{E}). \quad (6.56)$$

La perturbation de courbure comobile \mathcal{R}

La courbure intrinsèque d'une hypersurface spatiale Σ de temps conforme η constant est donnée par

$$^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi, \quad (6.57)$$

où ψ est généralement appelée **perturbation de la courbure**. En considérant une transformation de jauge nous faisant nous placer sur l'hypersurface d'un observateur comobile, l'expansion étant isotrope et le flux d'énergie mesuré par cet observateur étant nul, on choisit $\delta\phi_{\text{com}} = 0$ telle que

$$\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (6.58)$$

est invariante de jauge. Cette variable est appelée **la perturbation de courbure comobile** \mathcal{R} et représente le potentiel gravitationnel sur une hypersurface comobile où $\delta\phi = 0$ (\mathcal{R} est reliée à ψ et $\delta\varphi$)

$$\mathcal{R} = \psi|_{\delta\phi=0}. \quad (6.59)$$

La perturbation de courbure sur des tranches d'espace de densité d'énergie constante ζ

Dans le cas où on se place sur une hypersurface telle que la densité d'énergie mesurée est uniforme, sans perturbations $\delta\rho = 0$, alors la quantité

$$\zeta = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \quad (6.60)$$

est la **la perturbation de courbure sur des tranches d'espace de densité d'énergie constante** ζ , elle aussi invariante par construction, et elle représente de même le potentiel gravitationnel pour des hypersurfaces de densité d'énergie uniforme (ζ est reliée à ψ et $\delta\rho$)

$$\zeta = \psi|_{\delta\rho=0}. \quad (6.61)$$

Les variables de Mukhanov-Sasaki

Si on choisit une jauge telle que par ce choix, on se situe sur une hypersurface spatiale plate, donc sans courbure $\psi_{\text{flat}} = \psi + \mathcal{H}\delta\tau = 0$, alors la quantité

$$Q = \delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{H}} \psi \equiv \frac{\dot{\phi}}{\mathcal{H}} \mathcal{R} \quad (6.62)$$

est la perturbation du champ d'inflaton dans cette jauge, invariante par construction, appelée v la **variable de Mukhanov-Sasaki** [65] [66] sous sa forme

$$v = aQ = \sqrt{p} Q. \quad (6.63)$$

Elle représente le potentiel de l'inflaton sur des hypersurfaces spatiales plates.

$$Q = \delta\phi|_{\delta\psi=0}. \quad (6.64)$$

Les fluctuations quantiques du champ d'inflaton sont étroitement liées aux perturbations de la métrique, non seulement à cause des équations d'Einstein, mais aussi par soucis de l'invariance de jauge. Il n'existe en fait qu'un unique degré de liberté possible pour le cas des perturbations scalaires, donné par la combinaison de $\delta\varphi$ et de ψ : en jauge longitudinale quand $E = B = 0$, il existe une contrainte $\psi = \phi$, diminuant de 1 le nombre de degré de liberté. Ce degré de liberté physique est ainsi donné par l'une ou l'autre des quantités invariante de jauge précédentes, dont il faut étudier le spectre pour en tirer des conséquences physiques.

Spectre de puissance primordial pour les perturbations scalaires

Lorsqu'un mode sort de l'horizon, il devient gelé. Cependant, l'horizon croît avec le temps et un tel mode peut alors très bien ré-entrer et générer des perturbations qui sont transmises aux baryons et aux photons par l'action de la gravité : par exemple, une perturbation du potentiel gravitationnel induit une perturbation dans la densité d'énergie grâce à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho. \quad (6.65)$$

Avant le découplage, les photons interagissent énormément avec la matière et les perturbations vont alors se communiquer aux photons. Cela va induire une distribution anisotrope de la température de ces photons, dont la perturbation de température $\delta T/T$ est reliée à la perturbation du potentiel gravitationnel. Le spectre en résultant est actuellement très bien mesuré et son étude permet de tester les modèles qui ont prédit une forme particulière dépendant des paramètres cosmologiques. C'est une des manières privilégiées de tenter de comprendre l'histoire de l'univers, et d'en tirer les valeurs des paramètres dans le cadre du modèle standard de la cosmologie, le modèle Λ -CDM.

Les équations d'évolution pour les perturbations

En utilisant les équations d'Einstein pour les potentiels de Bardeen (6.53) précédents et dans le cas d'un champ scalaire comme matière, les équations du mouvement concernant la métrique sont données par

$$\ddot{\Psi} + \mathcal{H}(2\dot{\Psi} + \dot{\Phi}) + \Phi(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2) = \frac{\kappa}{2} \left(\dot{\bar{\varphi}} \delta \dot{\varphi}^{GI} - \bar{p} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi^{GI} \right), \quad (6.66)$$

$$\Delta \Psi - 3\mathcal{H}(\dot{\Psi} + \mathcal{H} \cdot \Phi) = \frac{\kappa}{2} \left(\dot{\bar{\varphi}} \delta \dot{\varphi}^{GI} - \dot{\bar{\varphi}}^2 \Phi + \bar{p} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi^{GI} \right), \quad (6.67)$$

$$\dot{\Psi} + \mathcal{H} \cdot \Phi = \frac{\kappa}{2} \bar{\varphi} \delta \varphi^{GI}, \quad (6.68)$$

avec en plus la partie non-diagonale des équations imposant la condition

$$\Delta(\Phi - \Psi) = 0 \rightarrow \Phi = \Psi. \quad (6.69)$$

Une combinaison des équations précédentes permet de donner l'équation de mouvement pour le potentiel Φ telle que, avec ici $c_s^2 = 1$,

$$\ddot{\Phi} + 2 \left(\mathcal{H} - \frac{\ddot{\bar{\varphi}}}{\dot{\bar{\varphi}}} \right) \dot{\Phi} - c_s^2 \nabla^2 \Phi + 2 \left(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \frac{\ddot{\bar{\varphi}}}{\dot{\bar{\varphi}}} \right) \Phi = 0. \quad (6.70)$$

Concernant les perturbations de matière, la dynamique est de même donnée par l'équation de Klein-Gordon perturbée

$$\delta \ddot{\varphi}^{GI} + 2\mathcal{H} \delta \dot{\varphi}^{GI} - \nabla^2 \delta \varphi^{GI} - \left(\dot{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H}^2 \right) \Phi + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \delta \varphi^{GI} = \dot{\varphi}^{GI} (3\dot{\Psi} + \dot{\Phi}) - 2a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Phi. \quad (6.71)$$

Si maintenant on introduit les quantités correspondant aux variables de Mukhanov-Sasaki

$$v \equiv a \delta \varphi^{GI} + z \Psi, \quad (6.72)$$

$$z \equiv a \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{\mathcal{H}}, \quad (6.73)$$

telles que $v = aQ = \sqrt{\bar{p}}Q = z \cdot \mathcal{R}$, alors l'équation (6.70) peut se réécrire selon

$$\ddot{v} - \nabla^2 v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0, \quad (6.74)$$

qui découle de l'action

$$\delta S = \int d\eta \left[\frac{1}{2} \dot{v}^2 - \frac{1}{2} \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z} \right) v^2 \right] \quad (6.75)$$

d'un champ scalaire de potentiel variable avec le temps. On a ainsi retrouvé dans ce jeu de variables invariants de jauge une équation de la forme (6.12) qui, de la même manière que pour les exemples précédents, peut se résoudre sachant qu'ici à la fin de l'inflation, $z = a\dot{\bar{\varphi}}/H = a\sqrt{2\epsilon}m_{\text{Pl}}$. Le spectre de puissance primordial de \mathcal{R} pour les modes superinflations est ainsi donné par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_{\mathbf{k}}}{z} \right|^2 = \frac{1}{2m_{\text{Pl}}^2 \epsilon} \left(\frac{\mathcal{H}_k}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \equiv A_{\mathcal{R}}^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \quad (6.76)$$

d'amplitude $A_{\mathcal{R}}^2$, où on a introduit

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon. \quad (6.77)$$

Le spectre attendu est ainsi quasiment invariant d'échelle dans le cas des perturbations scalaires. Dans le cas des modes superinflations, il est possible de remarquer que

$$\dot{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} \simeq \dot{\zeta}_{\mathbf{k}} \simeq 0, \quad (6.78)$$

montrant que quel que soit le mode considéré, le spectre va quasiment être constant : deux modes très proches subiront la même évolution et seront régis par quasiment les mêmes équations, tels que leurs valeurs de $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ ne peuvent être elles aussi que similaires.

6.6 Les perturbations vectorielles

Dans le cas des perturbations vectorielles, S_a et F_a , la métrique perturbée s'écrit habituellement sous la forme suivante

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + 2S_a d\eta dx^a + (\delta_{ab} + F_{ab}) dx^a dx^b], \quad (6.79)$$

avec

$$F_{ab} = F_{a,b} + F_{b,a} \quad \text{TF :} \quad F_{ab} = -\frac{i}{k}(k_a F_b + k_b F_a). \quad (6.80)$$

Ces perturbations doivent de plus être de divergence nulle, donc transverses

$$\partial^a S_a = 0, \quad \partial^a F_a = 0. \quad (6.81)$$

Les variables invariantes de jauge sont de même obtenues sous une transformation de jauge générée cette fois-ci par le vecteur

$$\xi^\mu = (0, \xi^i), \quad (6.82)$$

telles que

$$\delta F^i = \xi^i, \quad \delta S^i = \dot{\xi}^i, \quad (6.83)$$

et la variable invariante de jauge la plus simple pour la métrique peut s'écrire alors

$$\sigma^i = S^i - \dot{F}^i. \quad (6.84)$$

Le tenseur énergie-impulsion du fluide parfait perturbé et générant de la vorticité est donné par l'expression

$$(\delta T_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -a^2((\rho + p)v^i + \rho S^i) \\ -a^2((\rho + p)v^i + \rho S^i) & 2a^2 p(\pi_{,j}^{(i)} + F_{,j}^{(i)}) \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

où π^i et v^i sont de même de divergence nulle, la perturbation v^i étant reliée à la perturbation de la quadri-vitesse d'un observateur comobile selon

$$(\delta u^\mu) = (0, \frac{v^i}{a}). \quad (6.86)$$

On définit une autre quantité invariante de jauge

$$V^i = v^i + S^i \quad (6.87)$$

permettant de donner dans le cas usuel, les équations du mouvement

$$-\frac{1}{2a^2} \Delta \sigma^i = \kappa(\rho + p)V^i, \quad (6.88)$$

$$-\frac{1}{2a^4} \partial_\eta (a^2 \sigma^i) = \kappa p \pi^i, \quad (6.89)$$

   Δ est le laplacien spatial. La combinaison $(\rho + p)V^i$, invariante de jauge, intervient dans le tenseur énergie-impulsion, et pour un fluide sans terme de cisaillement anisotropique, $\pi^i = 0$, ou bien si l'univers est dominé par de la matière sans pression $p = 0$, elle correspond en principe à une observable physique. Il faut cependant remarquer que dans le cas d'un champ scalaire composant le fluide, il n'existe pas de terme de vorticité $v^i = 0$, ni de cisaillement $\pi^i = 0$, et ces perturbations ne sont plus physiques, uniquement de jauge [67]. Dans le cas à où il n'existerait que de la vorticité (par exemple si on considérait en plus un champ électromagnétique), quel que soit le mode de Fourier considéré $\sigma_{\mathbf{k}}^i$, l'équation (6.89) donne alors comme solution

$$\partial_t (a^2 \sigma_{\mathbf{k}}^i) = 0 \rightarrow \sigma_{\mathbf{k}}^i = \frac{C_{\mathbf{k}}^i}{a^2}, \quad (6.90)$$

où C_k^i est une constante par rapport au temps, qui, une fois les équations (6.88) et (6.90) combinées, permet de donner la solution pour la vorticité

$$V_k^i \sim \frac{k^2 C_k^i}{a^{1-3w}}. \quad (6.91)$$

Les perturbations de la métrique ainsi que la vorticité du fluide sont en fait diluées lors de l'expansion de l'univers jusqu'à devenir négligeables : c'est la raison pour laquelle généralement on ne les prend que très peu en compte en cosmologie. Cependant, dans le cas d'un univers en contraction dominé par la matière $w = 0$, V_k^i croît tandis que le facteur d'échelle décroît, et le cas de l'approche perturbative est dans ce cas là sujette à caution puisqu'elle peut devenir incohérente à partir d'un certain point dans la valeur des perturbations.

6.7 Les perturbations tensorielles

Dans le cas des perturbations tensorielles h_{ab} , il est possible de montrer que la métrique s'écrit habituellement sous la forme

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\delta_{ab} + h_{ab}) dx^a dx^b], \quad (6.92)$$

avec $|h_{ij}| \ll 1$. Ces perturbations correspondent aux ondes gravitationnelles qui se propagent sur une trame de métrique FLRW et, comme pour la métrique, possèdent 6 degrés de liberté dont 2 seulement sont physiques : ce tenseur est de trace et de divergence nulles

$$\delta^{ab} h_{ab} = 0 \quad \text{et} \quad \partial^a h_{ab} = 0. \quad (6.93)$$

Le tenseur h_{ab} étant invariant de jauge, les degrés de liberté restant sont les polarisations de ces ondes, généralement indiquées par $\lambda = +, \times$ qui correspondent à l'orientation des axes de symétrie des oscillations de l'onde, voir figure Fig.(6.1). Ses composantes h_+ et h_\times sont donc les 2 degrés de liberté physiques et on peut décomposer les perturbations sur une base telle que le tenseur h_{ab} s'écrive

$$h_{ab} = h_+ e_{ab}^+ + h_\times e_{ab}^\times, \quad (6.94)$$

où e^+ et e^\times sont les tenseurs de polarisation,

$$e^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e^\times = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

vérifiant les propriétés suivantes

$$e_{ab} = e_{ba}, \quad k^a e_{ab} = 0, \quad e_{aa} = 0, \quad (6.96)$$

$$e_{ab}(-\mathbf{k}, \lambda) = e_{ab}^*(\mathbf{k}, \lambda), \quad \sum_\lambda e_{ab}^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{ab}(\mathbf{k}, \lambda) = 4. \quad (6.97)$$

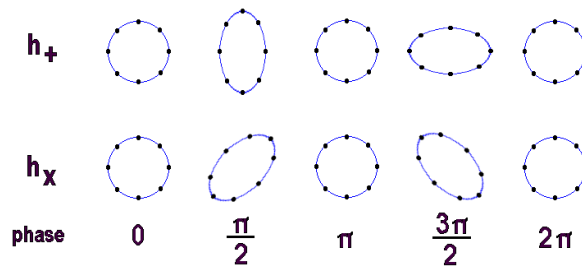


FIG. 6.1 – polarisation correspondant aux ondes gravitationnelles.

Dans le cas du champ d'inflaton, il n'existe pas de termes sources générant des perturbations tensorielles : les équations du mouvement, données par les équations d'Einstein perturbées, sont en fait les même pour h_+ et h_\times que l'on note par la suite uniquement h , et s'écrivant dans l'espace de Fourier

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}\dot{h}_{\mathbf{k}} + \mathbf{k}^2 h_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.98)$$

Un simple changement de variable

$$v_{\mathbf{k}} = a \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{2}} h_{\mathbf{k}} \quad (6.99)$$

permet de ramener l'équation (6.98) à celle d'un champ scalaire non massif, que l'on va faire évoluer dans un espace quasiment de De Sitter.

$$\ddot{v}_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right) v_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.100)$$

La résolution d'un tel système ayant déjà été donnée dans la section Sec.(6.3), les modes tensorielles superhorizon évoluent selon

$$|v_{\mathbf{k}}| = \left(\frac{\mathcal{H}_k}{2\pi}\right) \left(\frac{k}{a\mathcal{H}_k}\right)^{\frac{3}{2}-\nu_T}, \quad (6.101)$$

où

$$\nu_T \simeq \frac{3}{2} - \epsilon. \quad (6.102)$$

Pour ces modes, le spectre de puissance est défini par

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} |h_{\mathbf{k}}|^2 = 4 \times \frac{2}{m_{pl}^2} \frac{k^3}{2\pi^2} |v_{\mathbf{k}}|^2, \quad (6.103)$$

dont l'expression pour les modes superhorizon s'obtient par la relation

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{8}{m_{Pl}^2} \left(\frac{\mathcal{H}_k}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T} \equiv A_T^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T}, \quad (6.104)$$

la variable n_T correspondant à l'**indice spectral** donnant la pente du spectre selon

$$n_T = \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} = 3 - 2\nu_T = -2\epsilon. \quad (6.105)$$

Comme dans le cas des perturbations scalaires, ce spectre est lui aussi presque invariant d'échelle, l'amplitude A_T^2 de chacun des modes ne dépendant que de la valeur du paramètre de Hubble au moment où ces modes sortent de l'horizon durant l'inflation.

Le modèle de l'inflation prédit que dans un régime de roulement lent, les perturbations de densité et les ondes gravitationnelles doivent avoir un spectre de puissance quasiment invariant d'échelle, en $k^{-2\epsilon}$. Chaque spectre est caractérisé par son amplitude et son indice spectral, mais il est possible de lier le spectre scalaire ($z = a \frac{\varphi'}{H}$) à ce spectre tensoriel ($z = a$) par une relation de consistance. Pour cela, on définit le **rapport d'amplitude scalaire-tenseur**

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{1}{100} A_T^2}{\frac{4}{25} A_{\mathcal{R}}^2} = \frac{\frac{1}{100} 8 \left(\frac{H}{2\pi m_{Pl}}\right)^2}{\frac{4}{25} (2\epsilon)^{-1} \left(\frac{H}{2\pi m_{Pl}}\right)^2} = \epsilon. \quad (6.106)$$

qui implique une relation de cohérence entre l'amplitude des spectres et leurs indices spectraux selon

$$\frac{T}{S} = -\frac{n_T}{2}, \quad (6.107)$$

et dans le cas d'une inflation slow-roll, cette relation est obligatoirement satisfaite : cela va ainsi correspondre à une signature distinctive de l'inflation que l'on va chercher à observer.

6.8 Étude des différents spectres

Les spectres considérés ici correspondent aux spectres des perturbations évalués à la fin de l'inflation, donnant alors les conditions initiales pour les perturbations générées par la suite, et il est alors possible d'obtenir les spectres angulaires mesurés aujourd'hui découlant des spectres primordiaux.

Jusqu'au moment du découplage, rayonnement et matière interagissaient et l'information sur les perturbations était ainsi transmise aux photons. A partir de la dernière surface de diffusion, de tels photons vont ainsi voyager à travers l'univers, subissant des effets physiques comme l'effet Doppler résultant de la dilution de l'espace-temps, et une partie de ce rayonnement va finalement nous parvenir sous la forme d'un fond diffus cosmologique presque isotrope.

Ainsi, la température T_0 d'un photon observée aujourd'hui selon une direction \mathbf{e} peut être reliée à sa température T_E au moment de son émission, telle que

$$T_0 \sim T_E [1 + \Theta_0(\mathbf{e})], \quad (6.108)$$

où $\Theta(\mathbf{e}, \Phi, \Psi, E, h_{ij}, \dots)$ est appelé **contraste de température**, dépendant des perturbations de la métrique. Plus généralement, Θ contient les contributions de presque tous les phénomènes agissant sur le photon

- *L'effet Sachs-Wolfe propre* indiquant qu'une zone plus dense sera plus chaude, et qu'un photon émis dans un puit de potentiel possèdera un décalage spectral gravitationnel supplémentaire.
- *L'effet Sachs-Wolfe intégré* dépendant de l'histoire du photon entre son émission et sa réception, et qui rendra notamment compte des effets d'un champ gravitationnel dépendant du temps dans lequel évolue le photon.
- *L'effet Doppler* traduisant un décalage spectral dû au fait que l'émetteur et le récepteur n'ont pas la même vitesse.

D'autre part, la diffusion Thomson va polariser ce rayonnement dans la direction perpendiculaire au plan de diffusion, et les perturbations via cette diffusion vont alors pouvoir induire des modifications sur cette polarisation : les perturbations tensorielles vont générer une polarisation B , dite magnétique, tandis que toutes les polarisations vont générer une polarisation E , dite électrique. Observer les spectres en température et en polarisation permettra alors d'obtenir de nombreuses informations sur les perturbations cosmologiques, ce que se proposent de faire les nouvelles expériences sur le fond diffus cosmologique.

En cosmologie observationnelle, on va vouloir comparer deux directions différentes. On va pour cela utiliser la fonction de corrélation à deux points qui ne dépend que de l'angle entre ces deux directions. Il va être commode alors de la développer sur une base de polynômes de Legendre

$$\langle \theta(\eta_0, e_1) \theta(\eta_0, e_2) \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(e_1, e_2), \quad (6.109)$$

permettant de définir le spectre de puissance angulaire C_l , fonction d'un multipôle l correspondant à une échelle angulaire. Pour un champ de température gaussien, cette fonction caractérise complètement la distribution de température. Le fond diffus cosmologique ayant été émis en tous points de l'univers, un point quelconque va voir ce rayonnement arriver dans un angle solide de 4π : une sphère autour de lui. On va donc décomposer le contraste de température sur une base d'harmoniques sphériques Y_{lm} , ce qui correspond à effectuer une transformée de Fourier sur une sphère, et obtenir ainsi

$$\hat{\Theta}(\eta_0, k) = 4\pi \sum_{lm} \hat{\Theta}_l(k) Y_{lm}^*(\vec{k}) Y_{lm}(e). \quad (6.110)$$

Les spectres angulaires seront alors donnés par la relation

$$(2l+1)^2 C_l^{XY} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \sum_{m=-2}^2 X_l^{(m)*}(\eta_0, k) Y_l^{(m)}(\eta_0, k), \quad (6.111)$$

où X et Y prennent les valeurs Θ , E ou B , et on peut regarder les 4 spectres théoriques attendus donnés par la figure Fig.(6.2).

Il existe en cosmologie de nombreux paramètres physiques rendant compte des caractéristiques de notre univers et des phénomènes qui devraient s'y être produits : valeur de la courbure, profondeur optique, *etc.* À chaque jeu de paramètres correspond un scénario cosmologique dont les caractéristiques, comme la durée de l'inflation, peuvent être déterminées connaissant les relations du modèle. Il est ainsi possible de voir l'influence de chaque paramètre sur la forme des spectres et de comprendre alors l'évolution de l'univers en comparant les spectres théoriques aux spectres mesurés, donnés par exemple en observant directement $\Theta_{obs} \sim \frac{\delta T}{T} \Big|_{\eta_0}$. Cette méthode, conjointement avec d'autres observations astrophysiques, permet ainsi de contraindre les différents modèles existants, et à ce jour, le modèle Λ -CDM semble être le plus juste.

Pour plus de précision techniques, j'encourage tout lecteur à consulter la référence [26].

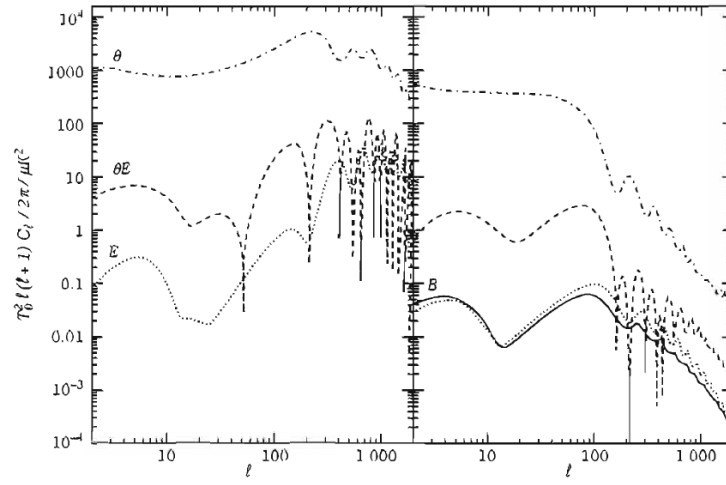


FIG. 6.2 – Spectres $T - T$, $T - E$, $E - E$ et $B - B$ induits par les modes scalaires (à gauche) et tensoriels (à droite) pour un modèle inflationnaire [26].

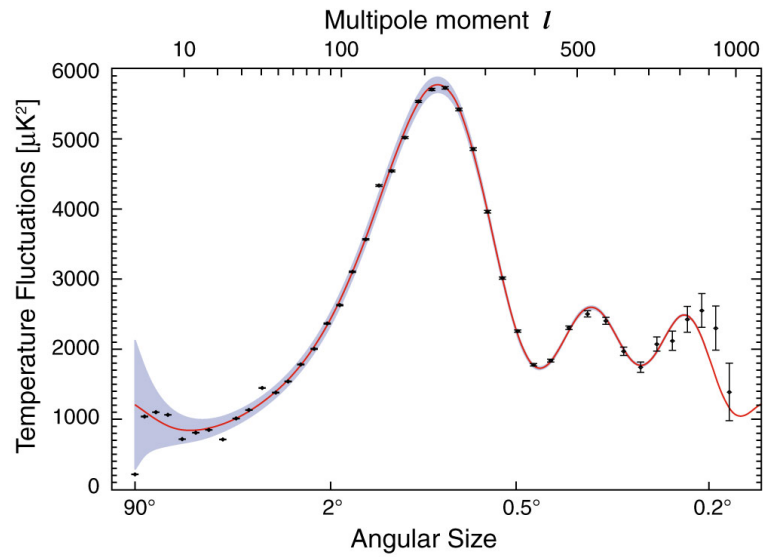


FIG. 6.3 – Spectre $T - T$, WMAP-7years

Chapitre 7

Perturbations générales en Cosmologie Quantique à Boucles

Dans la suite, la théorie des perturbations cosmologiques va être exprimée selon la formulation de la cosmologie quantique à boucles. Ce chapitre sera alors très important puisqu'il permettra de comprendre tous les travaux effectués durant cette thèse, en montrant les aspects physiques et techniques.

Historiquement, les calculs étant plus simples pour ces perturbations, les perturbations tensorielles [69], en parallèle avec les perturbations vectorielles [70], ont été d'abord étudiées avec les corrections issues de la gravité quantique à boucles. Ce n'est que bien plus tard, une fois l'approche développée, que cette démarche a été appliquée réellement au cas des perturbations scalaires. La difficulté dans l'obtention des spectres de puissance ne provient pas vraiment de la procédure mise en œuvre pour générer les équations du mouvement, mais plutôt de celle menant à une algèbre des contraintes close. En effet, modifier les contraintes C_i , de Gauss, de Difféomorphisme et Hamiltonienne, par les corrections de la théorie va très certainement modifier leur algèbre telle que maintenant il va exister des termes supplémentaires dans les crochets de Poisson

$$\{C_i, C_j\} = f_{ij}^k(A, E)C_k + \mathcal{A}_{ij}. \quad (7.1)$$

Ces termes \mathcal{A}_{ij} sont appelées **anomalies**. Les contraintes ainsi modifiées vont définir un nouveau champ de vecteurs rendant compte de l'évolution du système qui n'est plus tangent à la surface des contraintes. Les solutions engendrées ne respecteront ainsi plus les caractéristiques physiques, comme la covariance des équations ou les symétries présentes initialement, et les résultats après quantification ne seront alors plus cohérents avec les solutions attendues à la limite classique. La première étape dans une théorie effective est alors de chercher à supprimer ces anomalies : $\mathcal{A}_{ij} = 0$. Une procédure [29] mise en place en cosmologie quantique à boucles dans le cas des corrections d'inverse-volume consiste à ajouter des contre-termes adéquats aux contraintes, et obtenir ainsi des contraintes corrigées. Utiliser ces nouvelles contraintes permettra alors d'obtenir finalement des solutions qui pourront correspondre à des solutions physiques : les corrections quantiques seront bien présentes et la limite classique redonnera correctement les bonnes équations.

En cosmologie, toutes les composantes perturbées de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$ sont dynamiques et sont considérées comme les variables de configuration. Cela n'est cependant pas le cas en gravité quantique à boucles puisque les variables concernent uniquement la métrique spatiale, à partir de laquelle sont construites les variables d'Ashtekar. Dans le formalisme ADM, les perturbations des composantes g_{00} et g_{0i} seront alors encodées dans la lapse fonction, δN , ainsi que dans le shift vecteur, δN^i . Afin d'obtenir les variables usuelles invariantes de jauge dans le formalisme canonique, il ne faut plus seulement regarder les combinaisons possibles des variables d'Ashtekar perturbées, mais faire aussi intervenir par une procédure adéquate les transformations induites sur les multiplicateurs de Lagrange. Une telle procédure a été développée dans le cadre de la cosmologie quantique à boucles [71] mais peut cependant se généraliser à toute théorie s'exprimant dans le formalisme canonique. Elle a ainsi pu être appliquée au cas des corrections d'inverse-volume pour les perturbations scalaires, permettant l'obtention d'un spectre de puissance [55] modifié rendant compte des effets quantiques amenés par la théorie effective. En s'inspirant des références citées auparavant, on va maintenant introduire le formalisme des perturbations cosmologiques considérées du point de vue canonique, sans chercher à appliquer tel ou tel type de perturbation, sauf dans certains exemples.

7.1 Perturbations des variables canoniques

En gravité quantique à boucles, les variables sont les variables d'Ashtekar (A, E) pour la gravité, et (φ, π) dans le cas d'un champ scalaire comme celui de l'inflaton. De même qu'en relativité générale, il est possible de considérer ces variables comme pouvant être perturbées selon

$$A_a^i = \bar{A}_a^i + \delta A_a^i, \quad E_i^a = \bar{E}_i^a + \delta E_i^a, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi, \quad \pi = \bar{\pi} + \delta\pi, \quad (7.2)$$

avec

$$\delta_b^a = E_i^a E_b^j \Leftrightarrow E_b^j = \frac{1}{\bar{p}} \delta_b^j - \frac{1}{\bar{p}^2} \delta E_i^a \delta^{ij} \delta_{ab}, \quad (7.3)$$

Les variables homogènes, constituant le fond, sont données par les équations (5.3) et leur évolution est issue de la contrainte totale donnée par l'équation (5.6). Les perturbations n'étant pas homogènes, elles vont aussi dépendre par ailleurs des variables d'espaces, telles que maintenant leurs crochets de Poisson sont donnés par des distributions

$$\{\delta K_a^i(\eta, x), \delta E_j^b(\eta, y)\} = \kappa \delta_j^i \delta_a^b \delta(x - y) \quad (7.4)$$

et

$$\{\delta\varphi(\eta, x), \delta\pi(\eta, y)\} = \delta(x - y). \quad (7.5)$$

On s'intéresse à une théorie linéaire des perturbations dans laquelle l'évolution des perturbations est donc obtenue par des équations du mouvement au premier ordre dans les perturbations. Or, dans le formalisme canonique, ce sont les crochets de Poisson d'une perturbation avec la contrainte totale qui permettent d'obtenir ces équations, faisant ainsi intervenir une dérivée fonctionnelle par rapport à la perturbation conjuguée. La contrainte totale étant 'polynômiale' dans ses perturbations, une dérivation va diminuer son ordre de 1. Les équations du mouvement devant être linéaires, il est nécessaire que le résultat issu des crochets de Poisson soit lui aussi d'ordre 1, montrant alors qu'il est suffisant de considérer l'expression des contraintes perturbées jusqu'au second ordre uniquement.

Il va ainsi être nécessaire de regarder le déterminant des densités de triades $\det(E_i^a)$ à l'ordre 2 puisque l'on fera intervenir ses formes $\sqrt{\det E}$ et $\frac{1}{\sqrt{\det E}}$, mais aussi la perturbation de la connexion de spin $\delta\Gamma_a^i$ en utilisant sa définition donnée par l'équation (3.48). On va ainsi considérer le fait que

$$\det E_i^a = \bar{p}^3 \left[1 + \frac{\delta E_d^d}{\bar{p}} + \frac{1}{2\bar{p}^2} \delta_a^i \delta E_i^a \delta_b^j \delta E_j^b - \frac{1}{2\bar{p}^2} \delta_a^i \delta E_j^a \delta_b^j \delta E_i^b \right] \quad (7.6)$$

et

$$\delta\Gamma_a^i = \frac{1}{2\bar{p}} \cdot X_{ca}^{ijb} \cdot \partial_b \delta E_j^c + \frac{1}{2\bar{p}^2} Y_{abc}^{ijkl} \delta E_j^b \partial_k \delta E_l^c \quad (7.7)$$

où

$$X_{ca}^{ijb} = \epsilon_c^{ij} \delta_a^b - \epsilon_c^{ib} \delta_a^j + \epsilon^{ijb} \delta_{ca} + \epsilon_a^{ib} \delta_c^j. \quad (7.8)$$

On peut exprimer Y_{abc}^{ijkl} de façon similaire à X_{ca}^{ijb} , mais son expression, en plus d'être longue, ne nous sera pas utile. Ici, il n'a pas encore été fait allusion au type de la perturbation que l'on considère, mais déjà, suivant ses caractéristiques possibles (divergence ou trace nulle, symétrie), on peut observer que $\delta\Gamma_a^i$ aura son terme $\frac{1}{2\bar{p}} \cdot X_{ca}^{ijb} \cdot \partial_b \delta E_j^c$ de modifié : cette remarque est importante puisque c'est dans ce terme uniquement qu'est encodé en quelque sorte l'information sur le type de la perturbation.

Par ailleurs, en utilisant l'expression de la métrique la plus généralement perturbée, ainsi que la définition de la densité de triade, la perturbation δE_i^a est donnée par

$$\delta E_i^a = \bar{p} \left[-2\psi \delta_i^a + (\delta_i^a \partial^d \partial_d - \partial^a \partial_i) E - c_1 \partial^a F_i - c_2 \partial_i F^a - \frac{1}{2} h_i^a \right], \quad (7.9)$$

telle que

$$\delta_a^i \delta E_i^a = 0 \quad \text{pour les perturbations tensorielles et vectorielles.} \quad (7.10)$$

$$\partial^i \delta E_i^a = \partial_a \delta E_i^a = 0 \quad \text{pour les perturbations tensorielles.} \quad (7.11)$$

Concernant l'expression de δK_a^i (et de façon similaire $\delta\pi$), son obtention n'est pas si simple. En effet, dans la théorie effective, les expressions des contraintes perturbées vont devoir être modifiées par des corrections quantiques, changeant ainsi l'évolution temporelle entre deux tranches d'hypersurface. En conséquence, les perturbations de la courbure extrinsèque vont elles aussi être modifiées puisqu'elles dépendent de la dynamique de l'espace-temps et il serait possible alors d'obtenir leur expression en utilisant directement leur définition donnée par l'équation (3.26). Cependant, dans le formalisme canonique, il existe une approche plus rapide consistant à regarder la courbure extrinsèque en fonction de la métrique spatiale et de sa dérivée temporelle, comme dans l'équation (3.27). La densité de triades étant liée à la métrique spatiale, on va ainsi regarder les équations du mouvement modifiées pour δE_i^a et en tirer facilement l'expression de δK_a^i .

Expression des densités de contrainte perturbées

En gravité quantique à boucles, les contraintes s'expriment selon

$$D_{grav}[N^a] = \frac{1}{\kappa\gamma} \int_{\Sigma} d^3x N^a \left[\left(\partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j \right) E_j^b - A_a^j \partial_b E_j^b \right], \quad (7.12)$$

$$D_{mat}[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x N^a \pi \partial_a \varphi, \quad (7.13)$$

$$H_{grav}[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x N \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E_i^a}} \left[F_{ab}^k \epsilon_k^{ij} - 2(1 + \gamma^2) K_a^{[i} K_b^{j]} \right], \quad (7.14)$$

$$F_{ab}^k = \partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \epsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j, \quad (7.15)$$

$$H_{mat}[N] = \int_{\Sigma} d^3x N \left[\frac{\pi^2}{2\sqrt{\det E_i^a}} + \frac{E_i^a E_j^b}{2\sqrt{\det E_i^a}} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \sqrt{\det E_i^a} V(\varphi) \right], \quad (7.16)$$

et il faudra par la suite tenir compte des perturbations de la lapse function et du shift vecteur

$$N = \bar{N} + \delta N \quad \text{et} \quad N^a = \bar{N}^a + \delta N^a, \quad (7.17)$$

telles que les contraintes perturbées, au second ordre, soient données par

$$H[N] = \int_{\Sigma} d^3x \left[\bar{N} (\mathcal{H}^0 + \mathcal{H}^2) + \delta \bar{N} \mathcal{H}^1 \right], \quad (7.18)$$

$$D[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x \left[\bar{N}^a (\mathcal{D}^0 + \mathcal{D}^2) + \delta \bar{N}^a \mathcal{D}^1 \right]. \quad (7.19)$$

En comparant la métrique perturbée pour chaque type de correction avec la métrique ADM de même perturbée, on voit que

- pour les perturbations tensorielles,

$$\delta N = 0 \quad \text{et} \quad \delta N^a = 0, \quad (7.20)$$

montrant directement que les densités de contrainte au premier ordre n'auront pas d'implications sur la dynamique,

- pour les perturbations vectorielles,

$$\delta N = 0 \quad \text{et} \quad \delta N^a = S^a, \quad (7.21)$$

montrant directement que la densité de contrainte hamiltonienne au premier ordre n'aura pas d'implications sur la dynamique,

- pour les perturbations scalaires

$$\delta N = \bar{N} \phi \quad \text{et} \quad \delta N^a = \partial^a B, \quad (7.22)$$

montrant que toutes les densités vont intervenir dans la dynamique.

Les perturbations tensorielles et vectorielles exprimées ici sont de trace nulle, impliquant que des termes tels $\delta_a^i \delta E_i^a$ et $\delta_a^i \delta K_a^i$ présents dans les densités de contrainte vont disparaître. Pour ces mêmes perturbations, les perturbations des multiplicateurs de Lagrange, N et N^a , sont en partie nulles, indiquant que certaines densités de contrainte d'ordre 1 n'influenceront pas l'évolution des variables. Les perturbations scalaires sont les perturbations les plus générales puisqu'aucun terme ne peut disparaître à cause de leurs propriétés : il faut tenir compte de toutes les densités de contrainte et de tous les termes présents à l'intérieur des expressions des densités. Lorsque l'on va incorporer les corrections quantiques, on va modifier ces densités de contrainte et chercher des contre-termes qui rendront les crochets de Poisson entre les contraintes fermés. Il y a ainsi deux manières de procéder :

1. soit on regarde les propriétés des perturbations et on simplifie les contraintes, permettant alors aux contre-termes ajoutés d'avoir une expression très simple. C'est la démarche qui a été entreprise initialement et dont l'enseignement nous a amené à la seconde possibilité.
2. soit on regarde le cas général, qui correspond en fait à étudier le cas des perturbations scalaires, et on obtient alors les équations générales permettant de trouver les expressions des contre-termes. On peut de plus se ramener au premier cas en mettant à zéro les contre termes qui n'intervenaient pas dans la résolution des anomalies.

Les contraintes modifiées par l'ajout de contre-termes dans la première démarche ne seront pas identiques à celles de la seconde et amèneront une dynamique totalement différente. Cette seconde approche nous semble la plus justifiée puisqu'elle ne fait pas de distinctions sur les perturbations et donne une algèbre close dans tous les cas.

D'autre part, on va donner l'expression des densités de contrainte de Difféomorphisme uniquement à l'ordre 1 puisque $\bar{N}^a = 0$. Cela est due à une propriété commune à toutes les perturbations, et l'argument concernant le cas des perturbations tensorielles et vectorielles pourraient être repris. Cependant, cela touche uniquement la partie homogène du shift vecteur qui intervient dans l'expression de toutes les variables, même non-perturbées, n'ayant par là même aucune conséquence sur la clotûre de l'algèbre lorsque l'on regarde les perturbations. On va ainsi donner l'expression des différentes densités dont on aura besoin par la suite.

Densités de contrainte de Difféomorphisme

Lorsque l'on considère les contraintes de Difféomorphisme, on ne va s'intéresser qu'à l'ordre 1 en densité. En utilisant la définition de cette contrainte et en exploitant les propriétés de symétries de X_{ca}^{ijb} , cette densité s'écrit ainsi dans le cas général

$$\mathcal{D}_{grav} = \bar{p}\partial_a\delta K_a^d - \bar{p}\partial_a\delta K_a^d - \bar{k}\partial_d\delta E_a^d. \quad (7.23)$$

De même, on va considérer la matière comme étant un champ scalaire, et sa densité est donnée par

$$\mathcal{D}_{mat} = \bar{\pi}\partial_a\delta\varphi. \quad (7.24)$$

Ces expressions ne seront intéressantes que dans le cas des perturbations vectorielles et scalaires puisqu'elles n'interviendront pas dans le cas des perturbations tensorielles pour lesquelles $\delta N^a = 0$.

Densités de contrainte hamiltoniennes

Concernant la partie gravitationnelle, dans le cas général, tous les ordres en densité doivent intervenir pour la contrainte hamiltonienne perturbée. Sans tenir compte des propriétés des perturbations, il est possible d'obtenir :

- la densité de contrainte à l'ordre 0 donnée par l'expression classique

$$2\kappa \cdot \mathcal{H}^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}}\bar{k}^2, \quad (7.25)$$

- la densité de contrainte à l'ordre 1 donnée par l'expression

$$2\kappa \cdot \mathcal{H}^{(1)} = -4\sqrt{\bar{p}}\delta K_a^d - \frac{\bar{k}^2}{\sqrt{\bar{p}}}\delta E_d^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\partial^j\partial_c\delta E_j^c, \quad (7.26)$$

Cette expression est la même quelque soit le type de perturbation considéré : le terme $\partial^j\partial_c\delta E_j^c$ apparaît à cause de $\delta\Gamma_a^i$ et va donc faire intervenir X_{ca}^{ijb} . Cependant, à cause des symétries présentes, le résultat sera unique.

- la densité de contrainte à l'ordre 2, donnée par l'expression

$$2\kappa \cdot \mathcal{H}^{(2)} = \sqrt{\bar{p}}(\delta_i^b\delta K_a^i\delta_j^a\delta K_b^j - \delta_i^a\delta K_a^i\delta_j^b\delta K_b^j) - 2\frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{p}}}\delta K_a^i\delta E_i^a \quad (7.27)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\bar{k}^2}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\delta_a^j\delta E_i^a\delta_b^i\delta E_j^b + \frac{1}{4}\frac{\bar{k}^2}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\delta_a^i\delta E_i^a\delta_b^j\delta E_j^b + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}Z_{ab}^{cidj} \cdot (\partial_c\delta E_i^a)(\partial_d\delta E_j^b), \quad (7.28)$$

$$+ 1\frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}Y_{bdc}^{kjl}\epsilon_k^{ab} \cdot \partial_a(\delta E_j^d\partial_i\delta E_l^c), \quad (7.29)$$

avec Z_{ab}^{cidj} qui ne dépend que l'expression de X_{ca}^{ijb} par l'équation (7.8)

$$Z_{ab}^{cidj} = \frac{1}{4}\epsilon_k^{ef}\epsilon_{mn}^k X_{be}^{mjd} X_{af}^{nic} - \epsilon_k^{ie} X_{be}^{kjd} \delta_a^c - \epsilon_k^{ci} X_{ba}^{kjd} + \frac{1}{2}\delta_a^i \epsilon_k^{ce} X_{be}^{kjd}. \quad (7.30)$$

Cette densité a été obtenue à l'aide des équations (7.6) et (7.7) introduites dans la contrainte hamiltonienne donnée par l'équation (3.63), en se souvenant qu'elle ne dépend pas du paramètre de Barbero-Immirzi.

Le terme correspondant à l'équation (7.29) ne va pas être pris en compte puisqu'il va correspondre à un terme de bord, n'ayant aucune influence sur les dérivations fonctionnelles considérées par la suite. On peut ainsi l'oublier et voir qu'une intégration par partie est simplement donnée ici par

$$\int d^3x A\partial_a B = [AB]_{a,\partial\Sigma} - \int d^3x B\partial_a A = 0 - \int d^3x B\partial_a A. \quad (7.31)$$

D'autre part, ces contraintes sont les plus générales possibles, et seul le terme $Z_{ab}^{cidj}(\partial_c\delta E_i^a)(\partial_d\delta E_j^b)$ va changer suivant le type de perturbation considéré : si la perturbation est symétrique, sans trace, ou bien si elle fait intervenir des dérivées spatiales, etc, les densités de contrainte au second ordre seront alors vraiment différentes, au contraire de celles du premier ordre. On peut ainsi voir que

$$\rightarrow \delta_{ab} \delta^{ij} \delta^{cd} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \quad \text{perturbations tensorielles} \quad (7.32)$$

$$Z_{ab}^{cidj} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \rightarrow 0 \quad \text{perturbations vectorielles} \quad (7.33)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d \delta^{ij} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \quad \text{perturbations scalaires} \quad (7.34)$$

Concernant la matière, la contrainte hamiltonienne possède différentes contributions suivant les termes cinétique, potentiel et spatial, et on peut la décomposer selon

$$H_M[\bar{N}] = \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left[\left(\mathcal{H}_{\pi}^{(0)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(0)} \right) + \left(\mathcal{H}_{\pi}^{(2)} + \mathcal{H}_{\nabla}^{(2)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(2)} \right) \right], \quad (7.35)$$

$$H_M[\delta N] = \int_{\Sigma} d^3x \delta N \left[\mathcal{H}_{\pi}^{(1)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(1)} \right]. \quad (7.36)$$

Les différentes densités de contrainte sont alors données par

– à l'ordre 0 pour les variables du fond

$$\mathcal{H}_{\pi}^{(0)} = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}}, \quad (7.37)$$

$$\mathcal{H}_{\varphi}^{(0)} = \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}), \quad (7.38)$$

– à l'ordre 1

$$\mathcal{H}_{\pi}^{(1)} = \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}}, \quad (7.39)$$

$$\mathcal{H}_{\varphi}^{(1)} = \bar{p}^{3/2} \left[V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \right], \quad (7.40)$$

– à l'ordre 2

$$\mathcal{H}_{\pi}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\delta \pi^2}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^{3/2}} \left[\frac{(\delta_c^j \delta E_j^c)^2}{8\bar{p}^2} + \frac{\delta_c^k \delta_d^j \delta E_j^c \delta E_k^d}{4\bar{p}^2} \right], \quad (7.41)$$

$$\mathcal{H}_{\nabla}^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} \delta^{ab} \partial_a \delta \varphi \partial_b \delta \varphi, \quad (7.42)$$

$$\mathcal{H}_{\varphi}^{(2)} = \frac{1}{2} \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi^2 + \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} + \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \left[\frac{(\delta_c^j \delta E_j^c)^2}{8\bar{p}^2} - \frac{\delta_c^k \delta_d^j \delta E_j^c \delta E_k^d}{4\bar{p}^2} \right]. \quad (7.43)$$

Anomalies et équations du mouvement par les crochets de Poisson

Lorsque l'on s'intéresse aux équations du mouvement et à la clôture de l'algèbre, on va considérer les crochets de Poisson de toutes les variables présentes dans le modèle

$$\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{\bar{k}, \bar{p}} + \{\cdot, \cdot\}_{\delta K, \delta E} + \{\cdot, \cdot\}_{\bar{\varphi}, \bar{\pi}} + \{\cdot, \cdot\}_{\delta \varphi, \delta \pi} \quad (7.44)$$

où

$$\{\cdot, \cdot\}_{\bar{k}, \bar{p}} := \frac{\kappa}{3V_0} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \right], \quad (7.45)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\delta K, \delta E} := \kappa \int_{\Sigma} d^3x \left[\frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} - \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \right], \quad (7.46)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\bar{\varphi}, \bar{\pi}} := \frac{1}{V_0} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\pi}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\pi}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\varphi}} \right], \quad (7.47)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\delta \varphi, \delta \pi} := \int_{\Sigma} d^3x \left[\frac{\delta \cdot}{\delta \delta \varphi} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta \pi} - \frac{\delta \cdot}{\delta \delta \pi} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta \varphi} \right]. \quad (7.48)$$

Résolution des anomalies

Dans le cas classique, aucune modification n'est apportée aux contraintes et on peut alors calculer les crochets de Poisson à l'ordre 2 que l'on peut séparer selon

– les crochets de Poisson entre les contraintes de Difféomorphismes

$$\{D_{grav}[N_1^a], D_{grav}[N_2^a]\} = 0, \quad (7.49)$$

$$\{D_{mat}[N_1^a], D_{mat}[N_2^a]\} = 0, \quad (7.50)$$

$$\{D_{grav}[N_1^a], D_{mat}[N_1^a]\} = 0, \quad (7.51)$$

– les crochets de Poisson entre les contraintes de Difféomorphismes et Hamiltonienne

$$\{H_{grav}[N], D_{grav}[N^a]\} = -H_{grav}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (7.52)$$

$$\{H_{grav}[N], D_{mat}[N^a]\} = 0, \quad (7.53)$$

et

$$\{H_{mat}[N], D_{grav+mat}[N^a]\} = -H_{mat}(\delta N^a \partial_a \delta N), \quad (7.54)$$

– les crochets de Poisson entre les contraintes hamiltoniennes

$$\{H_{grav}[N_1], H_{grav}[N_2]\} = D_{grav} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \quad (7.55)$$

$$\{H_{mat}[N_1], H_{mat}[N_2]\} = D_{mat} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \quad (7.56)$$

et

$$\{H_{grav}[N_1], H_{mat}[N_2]\} - (N_1 \leftrightarrow N_2) = 0. \quad (7.57)$$

Cependant, l'algèbre que l'on cherche à clore est celle correspondant aux contraintes 'totales'

$$H_{(m+g)} = H_{mat} + H_{grav}, \quad (7.58)$$

$$D_{(m+g)} = D_{mat} + D_{grav}, \quad (7.59)$$

et dans le cas classique, elle correspond à l'algèbre suivante

$$\{D_{(m+g)}[N_1^a], D_{(m+g)}[N_2^a]\} = 0, \quad (7.60)$$

$$\{H_{(m+g)}[N], D_{(m+g)}[N^a]\} = -H_{(m+g)}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (7.61)$$

$$\{H_{(m+g)}[N], H_{(m+g)}[M]\} = D_{(m+g)} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta M - \delta N) \right]. \quad (7.62)$$

On peut la comparer à celle obtenue dans le formalisme ADM, donnée par les équations (3.33) à (3.35), et voir que, sans surprises, dans le cas Lorentzien de la cosmologie quantique à boucles, les crochets de Poisson sont exactement identiques à ceux de la relativité générale, à un signe près. Ce signe n'est pas un problème puisqu'il vient du choix que l'on a fait de prendre la connexion d'Ashtekar A_a^i comme variable de configuration, et la densité de triades E_i^a comme moment conjugué, impliquant le changement de signe dans la définition des crochets de Poisson.

Dans les calculs précédents, aucune hypothèse n'a été faite sur le type des perturbations considérées. Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie de Z_{ab}^{cdj} conduisent exactement aux mêmes termes dans les crochets de Poisson : simplement avec la définition de Z_{ab}^{cdj} qui rend compte de toutes les perturbations possibles, les différents termes qui en sont issus vont se simplifier.

Lorsque les contraintes seront corrigées par une fonction quelconque $f(\bar{k}, \bar{p})$ et perturbées, leurs crochets de Poisson vont être modifiés et il sera nécessaire d'introduire des contre-termes. Par exemple, dans le cas d'une contrainte hypothétique de la forme

$$\mathcal{H} = f(\bar{k}, \bar{p}) \delta E_i^a \delta K_a^i + \text{autres termes}, \quad (7.63)$$

les crochets de Poisson pourraient donner

$$\{H[N_1], H[N_2]\} = H[N_2 - N_1] + \mathcal{A}_1 \quad (7.64)$$

avec

$$\mathcal{A}_1 = \int d^3x \delta E_i^a \partial_a \partial^i (\delta N_2 - \delta N_1) \cdot \mathcal{F}_1(f, \partial_{\bar{k}} f, \partial_{\bar{p}} f, \dots). \quad (7.65)$$

Il existe alors une anomalie \mathcal{A}_1 avec la fonction \mathcal{F}_1 qui ne peut s'annuler. On va ainsi tenter de résoudre cette anomalie par l'introduction de contre-termes, ici α , donnant une contrainte modifiée indexée par Q

$$\mathcal{H}_Q = (f(\bar{k}, \bar{p}) + \alpha) \delta E_i^a \delta K_a^i + \text{autres termes}, \quad (7.66)$$

telle que maintenant

$$\{H_Q[N_1], H_Q[N_2]\} = H_Q[N_2 - N_1] + \mathcal{A}_2 \quad (7.67)$$

avec

$$\mathcal{A}_2 = \int d^3x \delta E_i^a \partial_a \partial^i (\delta N_2 - \delta N_1) \cdot \mathcal{F}_2(f, \partial_{\bar{k}} f, \partial_{\bar{p}} f, \alpha, \partial_{\bar{k}} \alpha, \partial_{\bar{p}} \alpha, \dots). \quad (7.68)$$

Chercher à satisfaire $\mathcal{F}_2 = 0$ va permettre de donner une expression pour α en fonction de $f(\bar{k}, \bar{p})$, et résoudra ainsi le problème d'anomalie. La contrainte ainsi modifiée aura une algèbre close permettant à la théorie effective d'être cohérente avec le système physique initial. Dans la suite, on pourra aussi voir que pour les mêmes raisons que dans le cas classique, les anomalies ne vont pas dépendre de $Z_{ab}^{cidx} \cdot (\partial_c \delta E_i^a)(\partial_d \delta E_j^b)$, et l'expression des contre-termes sera générique à tous types de perturbations.

Obtention des équations d'évolution des perturbations

Dans ce formalisme, ce qui nous intéresse surtout est de pouvoir trouver les équations du mouvement des perturbations qui incorporeront les corrections quantiques. Les perturbations de la métrique sont données à travers l'expression des multiplicateurs de Lagrange, mais aussi dans l'expression de δE_i^a . On va ici décrire la démarche conduisant aux équations du mouvement, en illustrant le cas des perturbations tensorielles qui correspond au cas le plus simple. Pour une variable perturbée quelconque, sans corrections,

$$\delta X = \{\delta N, \delta N^a, \delta E_i^a, \delta K_a^i, \delta \varphi, \delta \pi\}, \quad (7.69)$$

l'équation d'évolution est donnée par

$$\delta \dot{X} \doteq \{\delta X, H_{(m+g)}[N] + D_{(m+g)}[N^a]\}, \quad (7.70)$$

avec obligatoirement $\dot{p}_N = \dot{p}_{N^a} = 0$.

Dans le cas des perturbations tensorielles, la contrainte totale est donnée uniquement par la contrainte hamiltonienne $\mathcal{H}_{(m+g)}^{(0)} + \mathcal{H}_{(m+g)}^{(2)}$ dans laquelle on a tenu compte de $\delta_a^i \delta E_i^a = \delta_a^i \delta K_a^i = 0$ et $\partial_a \delta E_i^a = \partial^i \delta E_i^a = 0$.

La densité de triades perturbée étant donnée par

$$\delta E_i^a = -\frac{1}{2} \bar{p} h_a^i, \quad (7.71)$$

l'équation $\delta \dot{E}_i^a$ constitue de ce fait une équation différentielle du premier ordre en la perturbation, proportionnelle¹ à δK_a^i : appliquer l'équation (7.70) pour trouver l'équation du mouvement de δE_i^a

$$\dot{E}_i^a = \{\delta E_i^a, H_{tot}[\bar{N}]\} = -\frac{1}{2} \left(\dot{p} h_a^i + \bar{p} \dot{h}_a^i \right) = - \left[\bar{p} \delta K_b^j \delta^{ab} \delta_{ij} - \bar{k} \delta E_i^a \right] \quad (7.72)$$

va donner l'expression pour δK_a^i qui, dans le cas classique, s'écrit

$$\delta K_a^i = \frac{1}{2} \dot{h}_a^i + \frac{\bar{k}}{2} h_a^i, \quad (7.73)$$

où on a utilisé l'équation (5.12) pour le fond. Dans le formalisme canonique, connaître l'expression de la métrique spatiale et des contraintes conduit naturellement à l'expression de δK_a^i , comme suggéré précédemment. Et c'est une fois son expression connue que regarder l'équation d'évolution de $\delta \dot{K}_a^i$ va nous permettre d'obtenir l'équation différentielle du second ordre pour les perturbations. Dans le cas classique, utiliser l'équation (7.70) pour δK_a^i , permet de retrouver ici l'équation du mouvement pour les ondes gravitationnelles

$$\ddot{h}_a^i + 2\bar{k} \dot{h}_a^i - \nabla^2 h_a^i = 0, \quad (7.74)$$

et comparer cette équation avec l'équation classique (6.98), avec maintenant $\bar{k} = \mathcal{H}$ le paramètre de Hubble en temps conforme, montre bien que dans ce formalisme, on retrouve les équations classiques. On peut procéder de la même manière pour la matière où, dans le cas d'un champ scalaire, regarder $\delta \dot{\varphi}$ et $\delta \dot{\pi}$ redonnera bien l'équation de Klein-Gordon perturbée.

Dans le cas des perturbations tensorielles, δN et δN^a étant nuls, il n'y a pas d'autres équations disponibles. Cependant, cela n'est pas le cas lorsque l'on considère les perturbations scalaires pour lesquelles l'équation d'évolution $\delta \dot{K}_a^i$ ne va donner que l'équation (6.66). Les équations (6.67), (6.68) et (6.69) sont en fait obtenues à partir des conditions $\dot{p}_N = \dot{p}_{N^a} = 0$ impliquant les relations

$$\dot{p}_N = \frac{\delta H_{(m+g)}}{\delta N} = 0, \quad \text{et} \quad \delta \dot{p}_{N^a} = \frac{\delta D_{(m+g)}}{\delta N^a} = 0. \quad (7.75)$$

¹Généralement, les indices i et a peuvent être interchangés pour la forme des perturbations que l'on considère ici.

On voit ainsi que dans ce formalisme, les résultats classiques concernant les perturbations peuvent de nouveau être obtenus ici sans passer directement par les équations d'Einstein, ce qui peut simplifier un tant soit peu les calculs. Lorsque l'on va incorporer les corrections d'inverse-volume ou d'holonomies, la modification des contraintes va alors pouvoir se répercuter sur l'équation (7.70), générant alors des modifications dans toutes les équations du mouvement : c'est de cette façon que l'on va pouvoir étudier l'influence des corrections sur l'évolution des perturbations.

Cependant, les équations ne correspondent pas forcément à celles de variables invariantes de jauge, et on va voir que de telles variables peuvent elles-aussi s'obtenir en regardant une transformation infinitésimale, générée dans le formalisme canonique par les contraintes à l'aide des crochets de Poisson.

7.2 Transformation de jauge dans le formalisme canonique

En relativité générale, la forme des transformations de jauge d'un champ est donnée par la dérivée de Lie et correspond à un changement de coordonnées. Après quantification, on s'attend en gravité quantique à ce que l'espace-temps ne soit plus représenté par une variété continue, et il n'est alors pas facile d'intuiter l'analogie des transformations de jauge classiques données par l'équation (6.3). Il existe cependant un avantage dans la formulation canonique : les transformations de jauge peuvent directement être exprimées à partir des crochets de Poisson des champs avec les contraintes, comme pour les équations (1.77), et classiquement, les résultats obtenus avec la dérivée de Lie sont bien reproduits. Cette approche peut être généralisée à toute théorie effective de la gravitation, comme la cosmologie quantique à boucles en regardant en plus les corrections issues de la théorie quantique. Modifier les contraintes par des corrections quelconques aura pour conséquence une modification des équations du mouvement pour les différentes quantités, mais aussi de la forme des variables invariantes de jauge, amenant de nouveaux effets que l'on cherche à comprendre et à observer.

Par ailleurs, certaines composantes de la métrique jouant le rôle de multiplicateurs de Lagrange ne sont pas des variables de l'espace des phases dynamique, et seules les transformations de jauge pour la métrique spatiale via les variables d'Ashtekar vont être déterminées directement. Cependant, ces variables dans leurs équations du mouvement vont dépendre de ces multiplicateurs de Lagrange par les contraintes qui sont eux même reliés aux perturbations à travers les équations (7.21) et (7.22). Il est possible dans le formalisme canonique de trouver indirectement [71] la forme des transformations de N et N^a , et de construire alors les variables invariantes de jauge de la relativité générale. Dans ce qui suit, nous allons illustrer la démarche en ne s'intéressant qu'à l'expression de ces variables pour les perturbations scalaires.

Une transformation de jauge est générée selon

$$q' = q + \delta_{\epsilon^\mu} q, \quad \text{où} \quad \delta_{\epsilon^\mu} q = \{q, H_{tot}[\epsilon^\mu]\}, \quad (7.76)$$

et utilise les mêmes contraintes que pour déterminer l'évolution dynamique ($\epsilon = dt$). Cependant, elle n'influence pas la dynamique et les équations du mouvement pour q' doivent aussi être donnée par une équation similaire à celles pour q

$$(q')^\cdot = \{q', H_{tot}[N'^\mu]\}. \quad (7.77)$$

Cela implique [51] que les multiplicateurs de Lagrange doivent eux aussi être perturbés $N'^\mu = N^\mu + \delta_\epsilon N^\mu$ pour que le formalisme reste correct. Dans le cas général, il est possible de décomposer ϵ^μ sur une hypersurface spatiale, de normale n^a et de vecteurs tangents s_i^a , selon

$$\epsilon^a = \epsilon^0 n^a + \epsilon^i s_i^a. \quad (7.78)$$

En se plaçant dans le formalisme ADM, on va s'intéresser à une évolution selon le champ de vecteur d'évolution $t^a = Nn^a + N^a$, et une transformation de jauge selon ce vecteur est alors donnée par [72] :

$$\epsilon^a = \frac{\epsilon^0}{N} t^a + \left(\epsilon^i - \frac{N^i}{N} \epsilon^0\right) s_i^a \doteq \xi^0 t^a + \xi^i s_i^a. \quad (7.79)$$

Dans le choix quelconque de coordonnées (t, x^i) de la métrique ADM (3.25), ξ^0 correspond à la perturbation dt et ξ^i à dx^i . Lorsque l'on considère le cas des scalaires, la transformation peut être générée par le vecteur

$$\xi^\mu = (\xi_0, \partial^a \xi) \quad (7.80)$$

qui, dans notre cas avec $\bar{N}^a = 0$, implique que sous cette transformation de jauge

$$\epsilon_0 = \delta N = \bar{N} \xi_0, \quad \epsilon^a = \delta N^a = \partial^a \xi. \quad (7.81)$$

En considérant une théorie des perturbations linéaires, dans le cas où le vecteur de la transformation infinitésimale est donc du premier ordre dans sa transformation, les contraintes génératrices des transformations de jauge doivent être du second ordre pour les mêmes raisons liées à l'évolution d'une perturbation, et leur densité

devra alors être du premier ordre. On considère une transformation de jauge d'une quantité X de l'espace des phases comme étant générée selon

$$\delta_{[\xi_0, \xi]} X \doteq \{X, H^{(2)}[\bar{N}\xi_0] + D^{(2)}[\partial^a \xi]\} \quad (7.82)$$

où, dans cette notation,

$$H^{(2)}[\delta N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N \left[\mathcal{H}_{grav}^{(1)} + 2\kappa(\mathcal{H}_{\pi}^{(1)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(1)}) \right], \quad (7.83)$$

$$D^{(2)}[\delta N^a] = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^a \left[\mathcal{D}_{grav}^{(1)} + \kappa(\mathcal{D}_{\varphi}^{(1)}) \right]. \quad (7.84)$$

Cette démarche correspond exactement à celle utilisée en relativité générale, où on peut montrer [71] que

$$\{\bar{X} + \delta X, D[\xi^a]\} = \mathcal{L}_{\xi^a}(\bar{X} + \delta X), \quad (7.85)$$

la contrainte de Difféomorphisme étant l'analogue de la dérivée de Lie dans le formalisme canonique.

Les transformations de jauge sont finalement données par les densités de contrainte au premier ordre dans les perturbations alors que les équations du mouvement des variables invariantes de jauge seront par conséquent² données par les densités au second ordre dans les perturbations.

Une conséquence importante dans la détermination des variables invariantes de jauge est l'expression de la variation de la dérivée temporelle d'une perturbation dans le formalisme canonique. Lorsque l'on a abordé les potentiels de Bardeen (6.53), on a vu que leur construction faisait intervenir des dérivées temporelles des perturbations. Dans ce formalisme, il existe [71] une relation liant la transformation de jauge de la dérivée d'une perturbation $\delta\dot{X}$ à la dérivée temporelle de la transformation de jauge de cette variable, selon

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}(\delta\dot{X}) - (\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta X)^\cdot = \{\delta X, \{H_{tot}[N] + D_{tot}[N^a], H_{tot}[\bar{N}\xi_0] + D_{tot}[\partial_a \xi]\}\}. \quad (7.86)$$

En utilisant l'algèbre (7.60) dont la seule contribution au premier ordre dans les crochets de Poisson est donnée par

$$\{H_{tot}[N], H_{tot}[\bar{N}\xi_0]\} = D_{tot}[\partial^a \xi_0] + \mathcal{O}(2), \quad (7.87)$$

la relation (7.86) devient

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}(\delta\dot{X}) - (\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta X)^\cdot = \delta_{[0, \xi_0]}\delta X. \quad (7.88)$$

Lorsque l'on modifiera les contraintes par les corrections quantiques, l'algèbre déformée va induire une modification de l'équation précédente, et les effets quantiques vont alors se répercuter sur la forme des variables de jauge, en plus des équations du mouvement.

Dans le cas des perturbations scalaires, en temps conforme et dans le cas classique avec les variables d'Ashtekar, il est simple de voir que sous cette formulation, les différentes variables se transforment selon

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta K_a^i = \partial^i \partial_a (\xi_0 + \bar{k}\xi) - \frac{\bar{k}^2}{2} \xi_0 \delta_a^i + \frac{\kappa}{2} \left[\bar{p}V(\bar{\varphi}) - \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{2} \right] \xi_0 \delta_a^i, \quad (7.89)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta E_i^a = 2\bar{k}\bar{p}\xi_0 \delta_i^a + \bar{p}(\delta_i^a \Delta \xi - \partial^a \partial_i \xi), \quad (7.90)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta \varphi = \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}} \xi_0, \quad (7.91)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta \pi = \bar{\pi} \Delta \xi - \bar{p}^2 \partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}) \xi_0, \quad (7.92)$$

alors que pour les variables du fond, (\bar{k} , \bar{p} , $\bar{\varphi}$ et $\bar{\pi}$), les transformations de jauge sont du second ordre : le fond est alors considéré comme invariant.

La détermination de la forme des transformations de δN et δN^a , donc de ϕ et B intervenant dans les potentiels de Bardeen, doit ainsi se faire en demandant que la forme des équations du mouvement soit elle-aussi conservée sous une transformation de jauge. En utilisant les équations (7.89) à (7.92), on voit que sous l'action de ξ^μ donnée par l'équation (7.80), les différentes perturbations se transforment selon

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\phi = \dot{\xi}_0 + \bar{k}\xi_0, \quad (7.93)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\psi = -\bar{k}\xi_0, \quad (7.94)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}E = \xi, \quad (7.95)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}B = -\xi_0 + \dot{\xi}, \quad (7.96)$$

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}\delta \varphi = \bar{\varphi}\xi_0, \quad (7.97)$$

qui correspondent bien aux transformations dans le cas classique, et dont la combinaison permet de redonner les potentiels de Bardeen usuels ainsi que les autres quantités invariantes de jauge introduites dans le chapitre précédent.

²Cela est montré dans le chapitre Chap.(13) utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi pour obtenir ces variables.

7.3 Commentaires

Le formalisme présenté ici n'est ainsi qu'une réécriture de la cosmologie usuelle dans le formalisme canonique, en terme de nouvelles variables, les variables d'Ashtekar. Les perturbations de ces variables sont ainsi reliées aux perturbations de la métrique, mais aussi du champ, et regarder les équations du mouvement redonne bien les équations attendues pour les perturbations cosmologiques. Dans ce formalisme, l'algèbre des contraintes est naturellement close, aucune anomalie n'apparaît : utiliser les variables de la métrique ADM (3.25) à partir desquelles la gravité quantique à boucles est construite, donne une algèbre close et les équations de conservation sont respectées. La détermination des variables invariantes de jauge, comme les équations du mouvement, ne se fait non plus par la dérivée de Lie mais par les crochets de Poisson, et il est possible de montrer que ces deux approches sont équivalentes.

Cependant la formulation présentée ici n'est en rien quantique puisque notre intérêt va se porter sur le côté effectif de la théorie. Après quantification, nous avons vu que deux corrections majeures de la théorie ressortaient et pouvaient être décrites qualitativement par des fonctions reproduisant la forme des spectres des opérateurs de courbure et de triade-inverse. Ces corrections correspondent à la fonction $f(\bar{k}, \bar{p}, \delta E)$ présentée plus avant dont l'action dans les contraintes classiques va avoir tendance à briser la fermeture de l'algèbre. La méthode proposée pour rétablir une algèbre close est l'introduction de contre-termes dans les contraintes, telle l'équation (7.66), dont l'expression obtenue en considérant la nouvelle anomalie comme étant nécessairement nulle va par conséquent modifier les contraintes et clore l'algèbre. Ces contraintes ainsi obtenues peuvent alors être utilisées pour trouver les solutions physiques tenant compte des corrections quantiques, et vont à la limite classique redonner les bons résultats. Cette méthode vantant l'utilisation de contre-termes est toute-fois discutable sur ses conséquences physiques, mais on verra qu'elle est tout à fait correcte.

Jusqu'à maintenant, les résultats ont surtout été obtenus en considérant le cas des corrections d'inverse-volume, et malgré l'existence d'une procédure générique à toutes corrections, le cas des corrections d'holonomie a été peu regardé. Cela peut s'expliquer par le fait que ces corrections sont plus complexes, en ce sens qu'il ne faut plus tenir compte uniquement de la variable \bar{p} intervenant de manière compliquée dans les corrections, mais aussi de \bar{k} qui rend les équations des anomalies et du mouvement plus difficiles à manipuler.

Durant la thèse, en suivant la démarche ainsi développée, nous avons regardé l'impact des corrections d'holonomies sur les perturbations tensorielles, vectorielles puis scalaires. Naturellement, le cas le plus intéressant pour comprendre l'influence des corrections quantiques est celui des perturbations scalaires que nous avons développé plus avant : ce cas est le plus 'conservatif' puisqu'il garde une expression des contraintes qui n'est pas modifiée à cause des conditions de divergence et de trace nulles de certaines perturbations.

Ainsi s'achève l'introduction à la Gravité Quantique à Boucles et son application à la cosmologie par la Cosmologie Quantique à Boucles.

Troisième partie

Corrections d'holonomie et perturbations cosmologiques

Chapitre 8

Influence des deux corrections sur les perturbations tensorielles en Cosmologie Quantique à Boucles

Introduction

Dans le cas des perturbations tensorielles, des études ont été réalisées par notre groupe afin de regarder l'influence des corrections d'holonomie [73][74] et d'inverse-volume [75], prises séparément, sur la forme du spectre de puissance. En première approximation, nous avons considéré le cas où l'évolution de l'univers dans sa phase d'expansion devait subir une phase d'inflation dictée par le modèle slow-roll et cela nous a alors permis d'obtenir une expression analytique pour ces spectres. En nous basant sur les travaux de Bojowald *et al* [69], nous avons montré que les corrections d'holonomies engendraient une légère pente dépendant du paramètre de Barbero-Immirzi γ , donnant un spectre bleu ou rouge suivant la valeur de ce paramètre, mais aussi une évolution en k^2 (pour une raison différente de celle vue par la suite) dans la partie infrarouge où les corrections d'inverse-volume prévoient, elles, une forte déviation par rapport au cas classique.

Connaissant les caractéristiques de ces deux corrections sur la forme du spectre, nous avons voulu savoir dans ce premier travail si combiner les corrections d'inverse-volume (données par $\bar{\alpha} = S$ et $\bar{\nu} = D$ ici) et d'holonomie pour ces perturbations pouvaient amener une compensation des effets quantiques et redonner le spectre classique, ou bien quelque chose de complètement différent.

Pour ce faire, nous nous sommes de même basés sur l'article [69] et avons redérivé les équations du mouvement pour les variables du fond et pour les perturbations. L'expression des densités de contraintes utilisée ici ne présente aucun contre-terme mais il a été fait le remplacement $\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}$ [2] dans l'équation classique (7.27) : cela est due à une étude [70] préliminaire dans le cas des perturbations vectorielles qui a montré que dans ce cas là, les anomalies pouvaient être simplement résolues en imposant le choix $n = 2$ précédent. L'idée que les perturbations tensorielles sont trop restrictives dans l'expression de leurs contraintes était déjà présente ici, et on va dans cette étude s'intéresser finalement au premier cas où l'algèbre est close en ayant fait un choix sur les corrections, mais sans avoir eu recours aux contre-terme.

Les équations intéressantes obtenues correspondent à l'équation de Friedmann modifiée

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho \left(S - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (8.1)$$

ainsi que l'équation du mouvement pour les perturbations

$$\ddot{h}_k + \left(2\mathcal{H} - \frac{\dot{S}}{S} \right) \dot{h}_k + (S^2 k^2 + M^2(a)) h = 0. \quad (8.2)$$

Dans cette équation, les corrections dues aux holonomies sont encodées dans le terme $M^2(a)$, ainsi que dans l'évolution du paramètre de Hubble. Après un changement de variable de la forme

$$\Phi_k = a(\eta) \frac{h_k}{\sqrt{S}}, \quad (8.3)$$

l'équation d'évolution de Φ_k a été obtenue et résolue dans le cas particulier d'une inflation slow-roll. Les spectres tenant compte des deux corrections ont pu alors être dérivés dans les différents régimes.

PHYSICAL REVIEW D **81**, 024040 (2010)

Fully loop-quantum-cosmology-corrected propagation of gravitational waves during slow-roll inflation

J. Grain^{*}*Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud 11, CNRS, Bâtiments 120-121, 91405 Orsay Cedex, France*T. Cailleteau,[†] A. Barrau,[‡] and A. Gorecki[§]*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS, IN2P3, 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

(Received 15 October 2009; published 28 January 2010)

The cosmological primordial power spectrum is known to be one of the most promising observable to probe quantum gravity effects. In this article, we investigate how the tensor power spectrum is modified by loop-quantum-gravity corrections. The two most important quantum terms, holonomy and inverse volume, are explicitly taken into account in a unified framework. The equation of propagation of gravitational waves is derived and solved for one set of parameters.

DOI: [10.1103/PhysRevD.81.024040](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.024040)

PACS numbers: 04.60.Pp, 04.60.Bc, 98.80.Cq, 98.80.Qc

I. INTRODUCTION

The inflationary scenario is currently the favored paradigm to describe the first stages of the evolution of the Universe (see, e.g., [1] for a recent review). Although still debated, it has received many experimental confirmations, including from the WMAP 5-year results [2], and solves most cosmological paradoxes.

On the other hand, a fully quantum theory of gravity is necessary to investigate situations where general relativity (GR) breaks down. The big bang is an example of such a situation where the backward evolution of a classical space-time comes to an end after a finite amount of time. Among the theories willing to reconcile the Einstein gravity with quantum mechanics, loop quantum gravity (LQG) is appealing as it is based on a nonperturbative quantization of 3-space geometry (see, e.g., [3] for an introduction). Loop quantum cosmology (LQC) is a finite, symmetry reduced model of LQG suitable for the study of the whole Universe as a physical system (see, e.g., [4]).

In this article, we consider the influence of LQC corrections to general relativity on the production and propagation of gravitational waves during inflation. We first derive the equation of propagation of gravity waves with both holonomy and inverse-volume corrections. This equation is then reexpressed with the *commonly used* cosmological variables. It is finally solved for a specific set of parameters and the primordial power spectrum is derived. The aim of this work is to conclude our previous studies [5,6] where, respectively, only holonomy and only inverse-volume corrections were considered. By combining both terms, we show that the inverse-volume correction dominates over

the holonomy one and dictates the overall shape of the tensor spectrum.

Quite a lot of work has already been devoted to gravitational waves in LQC [7]. Our approach assumes the background to be described by the standard slow-roll inflationary scenario whereas LQC corrections are taken into account to compute the propagation of tensor modes. This approach is heuristically justified (to decouple the physical effects) and intrinsically plausible (as, on the one hand, the LQC-driven superinflation can only be used to set the proper initial conditions to a standard inflationary stage if the horizon *and* flatness problems are both to be solved [8] and as, on the other hand, it seems that the quantum bounce can trigger on a standard inflationary phase [9]). In addition, very few studies so far have taken into account both the holonomy and the inverse-volume corrections. This latter term is somehow more speculative than the former one as it was shown to exhibit a fiducial cell dependence (see, e.g., [10]). For the sake of completeness it is however obviously worth considering the fully corrected propagation of gravitational waves.

II. EQUATION OF PROPAGATION FOR THE GRAVITON

The derivation of the equation of propagation of gravitational waves with both holonomy and inverse-volume corrections extensively uses the material developed in [11]: notations, conventions, and framework of this work are the same and will not be explicitly restated. We begin by considering a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker universe with a spatial metric q_{ab} which will be perturbed to account for gravitational waves. Hereafter, N and N^a are, respectively, the lapse function and the shift function. The metric components read as follows:

$$g_{00} = -N^2 + q_{ab}N^aN^b = -a^2(\eta), \quad (1)$$

^{*}julien.grain@ias.u-psud.fr[†]cailleteau@lpsc.in2p3.fr[‡]aurelien.barrau@cern.ch[§]gorecki@lpsc.in2p3.fr

$$g_{0a} = q_{ab}N^b = 0, \quad (2)$$

$$g_{ab} = q_{ab} = a^2(\eta)(\delta_{ab} + h_{ab}). \quad (3)$$

As usual in the formalism of LQC, we use the Ashtekar variables for an homogeneous and isotropic background: the connection \bar{A}_a^i , and the triad density \bar{E}_i^a . They can be written as a function of two other variables (\bar{k}, \bar{p}) as

$$\begin{aligned} \bar{E}_i^a &= \bar{p}\delta_i^a, & \bar{A}_a^i &= \bar{K}_a^i + \bar{\Gamma}_a^i & \bar{K}_a^i &= \bar{k}\delta_a^i, \\ \bar{\Gamma}_a^i &= 0, & \bar{N}^a &= 0, & \bar{N} &= \sqrt{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Hamilton-Jacobi equations will be used to determine the perturbed part of the Ashtekar variables. The Hamiltonian constraint reads as

$$\begin{aligned} H[N] &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x N |\det E|^{-(1/2)} E_j^a E_k^b \\ &\quad \times (\epsilon_{ijk} F_{ab}^i - 2(1 + \gamma^2) K_{[b}^i K_{a]}^j), \end{aligned} \quad (5)$$

where $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^{ijk} A_a^j A_b^k$ is the field strength. The Hamiltonian for a matter field Φ is given by

$$\begin{aligned} H_{\text{matter}} &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \frac{p_{\Phi}^2 + E_i^a E_j^b \partial_a \Phi \partial_b \Phi}{\sqrt{|\det E_j^c|}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{|\det E_j^c|} V(\Phi) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

With Eq. (4) and these Hamiltonians, the background is described by

$$H_G^{\text{fond}}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} [-6\sqrt{\bar{p}} k^2], \quad (7)$$

and

$$H_{\text{matter}}[\bar{N}] = \int_{\Sigma} d^3x \left(\frac{1}{2} \frac{p_{\Phi}^2}{\bar{p}^{(3/2)}} + \bar{p}^{(3/2)} V(\Phi) \right). \quad (8)$$

Perturbing the canonical variables (and going through the appropriate Poisson bracket) leads to:

$$\begin{aligned} H_G[\bar{N}] &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left[-6\sqrt{\bar{p}} \bar{k}^2 - \frac{\bar{k}^2}{2\bar{p}^{3/2}} (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^e \delta_d^f) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\bar{p}} (\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_c^e \delta_d^f) - \frac{2\bar{k}}{\sqrt{\bar{p}}} (\delta E_j^c \delta K_c^j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{p}^{3/2}} (\delta_{cd} \delta^{jk} E_j^c \delta^{ef} \partial_e \partial_f E_k^d) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

where only the tensor perturbations (i.e. gravitational waves) are considered in δE_i^a .

This classical Hamiltonian is to be modified by quantum corrections. Because loop quantization is based on holonomies, i.e. exponentials of the connection rather than direct connection components, one needs to substitute in the gravitational sector

$$\bar{k} \rightarrow \frac{\sin(m\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{m\bar{\mu}\gamma}, \quad (10)$$

where $\bar{\mu}$ is a new parameter related to the action of the fundamental Hamiltonian on a lattice state. In addition, because of inverse powers of the densitized triad which, when quantized, becomes an operator with zero in the discrete part of its spectrum, the matter and gravitational Hamiltonians must be modified by introducing the function

$$\alpha(\bar{p}, \delta E_i^a) = 1 + \lambda q^n = 1 + \lambda \left(\frac{l_{\text{Pl}}^2}{\bar{p}} \right)^n. \quad (11)$$

At a semiclassical level, i.e. $q \ll 1$, the same parametric form of α can be used in both the matter Hamiltonian and the gravitational Hamiltonian. However, the two positive and real valued constants λ and n may differ from one sector to another. In the following, (S, λ_s, s) and (D, λ_d, d) will therefore denote (α, λ, n) for the gravitational sector and the matter sector, respectively. With these two corrections, the Hamiltonians read

$$H_g^{\text{eff}}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} S(\bar{p}) \left[-6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin \bar{\mu} \gamma \bar{k}}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 \right], \quad (12)$$

$$H_{\text{matter}}[\bar{N}] = \int_{\Sigma} d^3x \left(\frac{1}{2} D(q) \frac{p_{\Phi}^2}{\bar{p}^{(3/2)}} + \bar{p}^{(3/2)} V(\Phi) \right), \quad (13)$$

with H_G^{eff} the effective gravitational Hamiltonian describing the homogeneous background. The equations of motion for (\bar{k}, \bar{p}) , i.e. the background equations, can be obtained in the Hamiltonian formalism

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}} &= \{\bar{p}, H_G^{\text{eff}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]\}; \dot{\bar{k}} \\ &= \{\bar{k}, H_G^{\text{eff}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]\}, \end{aligned} \quad (14)$$

leading to

$$\dot{\bar{p}} = 2 \cdot \bar{p} \cdot S(\bar{p}, \delta E) \cdot \left(\frac{\sin(2\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{2\bar{\mu}\gamma} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}} &= \frac{\kappa}{3V_0} \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} - \bar{p} \frac{\partial S}{\partial \bar{p}} \cdot \left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 \\ &\quad - \frac{S}{2} \left[\left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

The same modification is applied to the perturbed gravitational Hamiltonian. Denoting H_G^{phen} the effective perturbed quantum-corrected gravitational Hamiltonian, it reads with both holonomy and inverse-volume corrections

FULLY LOOP-QUANTUM-COSMOLOGY-CORRECTED ...

PHYSICAL REVIEW D **81**, 024040 (2010)

$$\begin{aligned}
H_G^{\text{Phen}}[N] = & \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} S(\bar{p}, \delta E_i^a) \left[-6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 \right. \\
& - \frac{1}{2\bar{p}^{3/2}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) \\
& + \sqrt{\bar{p}} (\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_c^c \delta_d^d) - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \\
& \times (\delta E_j^c \delta K_c^j) - \frac{1}{\bar{p}^{3/2}} (\delta_{cd} \delta^{jk} E_j^c \delta^{ef} \partial_e \partial_f E_k^d) \Big].
\end{aligned} \quad (17)$$

We now turn to the equation of motion of the graviton. The perturbed densitized triad is

$$\delta E_i^a = -\frac{1}{2} \bar{p} h_i^a. \quad (18)$$

As has been done for the homogeneous canonical variables, it is possible to define the equation of motion for the perturbations:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{E}_i^a &= \{\delta E_i^a, H_G^{\text{Phen}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]\} \\
&= -\{\delta K_b^j(x), \delta E_i^a(y)\} \frac{\delta}{\delta(\delta K_b^j)} (H_G^{\text{Phen}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]), \\
\delta \dot{K}_a^i &= \{\delta K_a^i, H_G^{\text{Phen}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]\} \\
&= \{\delta K_a^i(x), \delta E_j^b(y)\} \frac{\delta}{\delta(\delta E_j^b)} (H_G^{\text{Phen}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]).
\end{aligned}$$

This leads to

$$\delta \dot{E}_i^a = -\frac{1}{2} (\dot{\bar{p}} h_i^a + \bar{p} \dot{h}_i^a) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
&= -S(\bar{p}, \delta E) \cdot \left[\bar{p} \cdot \delta K_c^l \cdot \delta_a^c \cdot \delta_i^b - \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \delta E_i^a \right].
\end{aligned} \quad (20)$$

By combining those equations and using the expression of $\dot{\bar{p}}$, one obtains the expression of δK_a^i as a function of \dot{h}_a^i and of \dot{h}_a^i . The expression of δK_a^i is

$$\delta K_a^i = \frac{1}{2S} \dot{h}_a^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \dot{h}_a^i. \quad (21)$$

The equation of motion will lead to another derivative with respect to η . The Hamilton-Jacobi equation for the perturbed connection can now be used to find the final equation of propagation for gravitational waves:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{K}_a^i &= \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{h}_a^i}{S} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial \eta} \cdot \dot{h}_a^i + \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \dot{h}_a^i \right. \\
&\quad \left. + \dot{h}_a^i \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \right] \\
&= \{\delta K_a^i(x), \delta E_j^b(y)\} \frac{\delta}{\delta(\delta E_j^b)} (H_G^{\text{Phen}}[\bar{N}] + H_{\text{matter}}[\bar{N}]).
\end{aligned}$$

As

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H_G^{\text{Phen}}}{\delta(\delta E_j^b)} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3(x) \cdot \bar{N} \cdot \frac{\delta S}{\delta(\delta E_j^b)} [\dots] \\
&+ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3(x) \bar{N} S \left[-\frac{2}{2\bar{p}^{(3/2)}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 \right. \\
&\times (\delta E_l^c \cdot \delta_b^l \cdot \delta_c^j) - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \delta K_b^j \\
&\left. - \frac{2}{\bar{p}^{(3/2)}} (\delta_{bd} \cdot \delta^{jk} \cdot \delta_{ef} \partial_e \partial_f (\delta E_k^d)) \right],
\end{aligned}$$

where [...] stands for the term beginning with $[-6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 - \dots]$ in (17), one obtains (with $\delta^{ef} \partial_e \partial_f (\delta E_k^d) = \nabla^2 (\delta E_k^d) = -\frac{1}{2} \bar{p} \cdot \nabla^2 h_k^d$)

$$\begin{aligned}
\{\delta K_a^i, \delta E_j^b\} \frac{\delta H_G^{\text{Phen}}}{\delta(\delta E_j^b)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} \frac{\delta S}{\delta(\delta E_j^b)} [\dots] \\
&+ \frac{1}{2} S \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 \dot{h}_a^i \right. \\
&\left. - \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \right. \\
&\left. \times \left(\frac{\dot{h}_a^i}{S} + \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \dot{h}_a^i \right) + \nabla^2 h_a^i \right]
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\ddot{h}_a^i}{S} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial \eta} \dot{h}_a^i + \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \dot{h}_a^i + \dot{h}_a^i \frac{\partial}{\partial \eta} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \right] - \kappa \frac{\delta H_{\text{matter}}[\bar{N}]}{\delta(\delta E_j^b)}.
\end{aligned} \quad (23)$$

After quite a lot of algebra, the equation of motion of the graviton can be derived:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[\ddot{h}_a^i + 2S \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \dot{h}_a^i \left(1 - \frac{\bar{p}}{S} \frac{\partial S}{\partial \bar{p}} \right) \right. \\
&\quad \left. - S^2 \nabla^2 h_a^i + S^2 T_Q h_a^i \right] + S \mathcal{A}_a^i = \kappa S \Pi_{Q_a}^i,
\end{aligned} \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned}
T_Q &= -2 \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{p}} \right) (\bar{\mu} \gamma)^2 \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^4, \\
\Pi_{Q_a}^i &= \frac{1}{3V_0} \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) \cos(2\bar{\mu} \gamma \bar{k}) + \frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)}, \\
\mathcal{A}_a^i &= \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} \frac{\delta S}{\delta(\delta E_i^a)} [\dots] \\
&\quad - \bar{p} \frac{\partial S}{\partial \bar{p}} \cos(2\bar{\mu} \gamma \bar{k}) \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 h_a^i.
\end{aligned}$$

As usual, requiring an anomaly-free constraint algebra in the presence of quantum corrections requires \mathcal{A}_a^i to vanish. It should be noticed that the inverse-volume correction is involved in each term, through the S and D factors, whereas the holonomy correction is only involved in the h_a^i term, in T_Q and in $\Pi_{Q_a}^i$.

It is worth studying a bit more into the details of this $\Pi_{Q_a}^i$ source term as it seems to have been misunderstood in several works. In particular, it has often been either neglected or miscomputed. Without holonomy and inverse-volume correction, this term reads as

$$\Pi_a^i = \left[\frac{1}{3V_0} \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) + \frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)} \right], \quad (25)$$

with, in this case,

$$\begin{aligned}
E_i^a &= \bar{p} \delta_i^a, \quad \delta E_i^a = -\frac{1}{2} \bar{p} h_i^a, \\
\det E &= \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c.
\end{aligned} \quad (26)$$

At the zeroth order in gravitational perturbation, one can show that

$$\bar{H}_{\text{matter}} = \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left(\frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^{(3/2)}} + \bar{p}^{(3/2)} V(\phi) \right), \quad (27)$$

and the nonlinear H_{matter} is given by

$$\begin{aligned}
H_{\text{matter}} &= \bar{H}_{\text{matter}} + \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \frac{1}{4\sqrt{\bar{p}}} \delta E_i^a \delta E_j^b \delta_a^j \delta_b^i \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^3} - V(\phi) \right),
\end{aligned} \quad (28)$$

thus leading to

$$\frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)} = \frac{\bar{N}}{2} \frac{\delta E_j^b}{\sqrt{\bar{p}}} \delta_a^j \delta_b^i \left(\frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^3} - V(\phi) \right). \quad (29)$$

Restricting to the first order in perturbation, the derivative with respect to \bar{p} can be evaluated and one finally obtains

$$\frac{1}{3V_0} \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} = -\frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)}. \quad (30)$$

This easily establishes that classically $\Pi_a^i = 0$. However, when LQC corrections are taken into account the source

term may not vanish anymore (because of the derivative of D with respect to \bar{p} for the inverse-volume correction and because of the cosine term for the holonomy one).

When only inverse-volume corrections are considered, the source term is still given by Eq. (25) but the matter Hamiltonian now reads

$$\begin{aligned}
H_{\text{matter}} &= \bar{H}_{\text{matter}} + H_{\text{matter}}^{(\delta)} \\
&= \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left[\left(D(\bar{p}, \delta E_i^a) \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^{(3/2)}} + \bar{p}^{(3/2)} V(\phi) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{\bar{p}}} \delta E_i^a \delta E_j^b \delta_a^j \delta_b^i \left(D(\bar{p}, \delta E_i^a) \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^3} - V(\phi) \right) \right],
\end{aligned} \quad (31)$$

which leads, at the leading order, to

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)} &= \bar{N} \left[\frac{\delta E_j^b}{2\sqrt{\bar{p}}} \delta_a^j \delta_b^i \left(\frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\bar{p}^3} - V(\phi) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{p_\phi^2}{2\bar{p}^{(3/2)}} \frac{\delta D}{\delta(\delta E_i^a)} \right],
\end{aligned} \quad (32)$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3V_0} \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} &= \bar{N} \frac{1}{3} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) \left[-\frac{3}{4} \frac{D}{\bar{p}^{(5/2)}} p_\phi^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sqrt{\bar{p}} V(\phi) + \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \frac{p_\phi^2}{2} \frac{1}{\bar{p}^{(3/2)}} \right].
\end{aligned} \quad (33)$$

We finally obtain

$$\begin{aligned}
\Pi_{Q_a}^{i(IV)} &= \frac{1}{3V_0} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) \frac{\partial H_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} + \frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta(\delta E_i^a)} \\
&= \frac{p_\phi^2}{2\bar{p}^{(3/2)}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} + \frac{\delta D}{\delta(\delta E_i^a)} \right].
\end{aligned} \quad (34)$$

However, because of the anomaly-free condition (see Eq. (27) of [11]), this term is vanishing. This means that, at the leading order, $\Pi_{Q_a}^{i(IV)} = 0$.

Considering now the holonomy correction alone, one can expand the cosine term in $\Pi_{Q_a}^i$ and show that

$$\Pi_{Q_a}^{i(\text{holo})} = -2\bar{\mu} \gamma \sin^2(\bar{\mu} \gamma \bar{k}) \frac{1}{3V_0} \frac{\partial \bar{H}_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right).$$

Considering simultaneously the two types of corrections and using the explicit expression of the matter Hamiltonian, one obtains the full LQC source term

$$\Pi_{Q_a}^{i(\text{LQC})} = -2\bar{\mu} \gamma \sin^2(\bar{\mu} \gamma \bar{k}) \frac{1}{3V_0} \frac{\partial \bar{H}_{\text{matter}}}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right), \quad (35)$$

FULLY LOOP-QUANTUM-COSMOLOGY-CORRECTED ...

as expected from the vanishing inverse-volume source term.

III. SCHRÖDINGER EQUATION FOR THE FOURIER MODES

The energy density and the pressure of the cosmological fluid can be written as

$$\rho = \frac{1}{V_0 \bar{p}^{(3/2)}} \frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta \bar{N}}, \quad p = -\frac{1}{\bar{N} V_0} \frac{\delta H_{\text{matter}}[\bar{N}]}{\delta (\sqrt{|\det E|})}. \quad (36)$$

With the Hamiltonian constraint, one obtains

$$0 = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x S \left[-6\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2 \right] + \frac{\delta H_{\text{matter}}}{\delta \bar{N}}, \quad (37)$$

which finally leads to

$$\rho = \frac{3}{\kappa} \frac{S}{\bar{p}} \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^2. \quad (38)$$

Defining \mathcal{H} as the Hubble parameter with respect to the conformal time ($\mathcal{H} = a^{-1} da(\eta)/d\eta$), we obtain the quantum Friedmann equations

$$\mathcal{H}^2 = S^2 \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right)^2 = S^2 \frac{\bar{p}}{S} \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \bar{\mu}^2 \gamma^2 \frac{\kappa}{3} \frac{\bar{p}}{S} \rho \right), \quad (39)$$

which lead, with $\rho_c = 3/(\kappa \bar{\mu}^2 \gamma^2 \bar{p})$, to

$$\mathcal{H}^2 = a^2 \frac{\kappa}{3} \rho \left(S - \frac{\rho}{\rho_c} \right). \quad (40)$$

This equation, which has already been found in [12], includes all the LQC corrections and shows that the holonomy term, leading to the bounce, is the most important one as far as the background is concerned. This conclusion will be radically modified for perturbations.

The equation of motion for the graviton can now be reexpressed in terms of the commonly used cosmological variables. By taking into account Eq. (38) and $\bar{\mu}^2 \bar{p} = l_{\text{PL}}^2$, one obtains

$$S^2 T_Q = -2 \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{p}} \right) (S \bar{\mu} \gamma)^2 \left(\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right)^4 = \frac{\kappa}{3} \frac{a^2}{\rho_c} \rho^2. \quad (41)$$

The multiplicative factor of \dot{h}_a^i in Eq. (24) can be reexpressed as a function of the Hubble parameter

$$2S \left(\frac{\sin(2\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{2\bar{\mu} \gamma} \right) \left(1 - \frac{\bar{p}}{S} \frac{\partial S}{\partial \bar{p}} \right) = 2\mathcal{H} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{\dot{a}} \frac{\dot{S}}{S} \right). \quad (42)$$

Finally, the source term can be explicitly computed

$$\Pi_{Q_a}^i = \frac{\dot{h}_a^i}{S} \frac{\rho}{\rho_c} \frac{\bar{p}}{2} \left[\rho - \frac{\dot{\Phi}^2}{D(q)a^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\dot{D}}{D} \frac{a}{\dot{a}} \right) \right].$$

PHYSICAL REVIEW D **81**, 024040 (2010)

As in [11], we use the effective parametrization $S = 1 + \lambda_s(q)^{-(s/2)}$ with $q = (a/l_{\text{PL}})^2$. The equation of propagation can now be written as

$$\ddot{h} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(S)}{\partial \ln(a)} \right) \dot{h} - (S^2 \nabla^2 + M^2(a))h = 0, \quad (43)$$

with

$$M^2(a) = \kappa \frac{\rho}{\rho_c} a^2 \left(\frac{2}{3} \rho - \frac{\dot{\Phi}^2}{D(q)a^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\dot{D}}{D} \frac{a}{\dot{a}} \right) \right). \quad (44)$$

This can be usefully expressed as an equation for the spatial Fourier transform h_k of h

$$\ddot{h}_k + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{\dot{a}} \frac{\dot{S}}{S} \right) \dot{h}_k + (S^2 k^2 - M^2(a))h_k = 0. \quad (45)$$

The variables are changed according to $\phi_k = h_k a / \sqrt{S}$, leading to a Schrödinger-like equation

$$\ddot{\phi}_k + \left\{ S^2 k^2 - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + M^2(a) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{S}}{S} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{S}}{S} \right) \right\} \phi_k = 0. \quad (46)$$

IV. POWER SPECTRUM

The main question to address is to investigate if one correction, either holonomy or inverse volume, dominates over the other as far as the production of gravitational waves during inflation is concerned. The system describing the dynamics is

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= a^2 \frac{\kappa}{3} \rho \left(S - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \\ 0 &= \ddot{\Phi}_k + 2 \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{\dot{a}} \frac{\dot{D}}{D} \right) \dot{\Phi}_k + a^2 D V_{,\Phi}(\Phi), \\ 0 &= \ddot{\phi}_k + \left\{ S^2 k^2 - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + M^2(a) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{S}}{S} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{S}}{S} \right) \right\} \phi_k, \end{aligned}$$

which is unfortunately much too difficult to be analytically solved. We therefore turn to the approach developed in [5,6]. The background evolution is assumed to be classical ($D \approx 1$) with the scale factor given by the usual slow-roll approximation $a(\eta) = l_0 |\eta|^{-1-\epsilon}$. In this case, the effective Schrödinger equation $[\frac{d^2}{d\eta^2} + E_k(\eta) - V(\eta)]\phi_k(\eta) = 0$, reads, to first order in λ_s , as

$$E_k(\eta) = S^2 k^2 = \left[1 + 2\lambda_s \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^s |\eta|^{s(1+\epsilon)} \right] k^2, \quad (47)$$

J. GRAIN *et al.*

$$\begin{aligned}
V(\eta) = & \frac{2+3\epsilon}{\eta^2} + \frac{6}{\kappa} \frac{1}{\rho_c} \frac{(1+4\epsilon)}{l_0^2} |\eta|^{-2(1-\epsilon)} \\
& + \lambda_s \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^s \left[-\frac{12}{\kappa} \frac{1}{\rho_c} \frac{(1+4\epsilon)}{l_0^2} |\eta|^{s-2+\epsilon(s+2)} \right. \\
& + s(1+2\epsilon) |\eta|^{s(1+\epsilon)-2} \\
& \left. - \frac{1}{2} s(s-1+\epsilon(2s-1)) |\eta|^{s(1+\epsilon)-2} \right]. \quad (48)
\end{aligned}$$

To implement initial conditions, we consider the limit $\eta \rightarrow -\infty$ where the adiabatic vacuum holds. Of course, if higher order terms in λ_s were to be included, the vacuum would not be the same anymore. However, we have checked that the adiabaticity condition would still be fulfilled in the relevant wave number range.

It is possible to solve analytically this equation, at least for one set of parameters: $s = 2$ and $\epsilon = 0$. It becomes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \phi_k}{d\eta^2} + \left[\left(1 + 2\lambda_s \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^2 \eta^2 \right) k^2 - \frac{2}{\eta^2} \left(1 - \frac{3}{\kappa} \frac{1}{\rho_c} \frac{1}{l_0^2} \right) \right. \\
\left. - \lambda_s \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^2 \left[-\frac{12}{\kappa} \frac{1}{\rho_c} \frac{1}{l_0^2} + 1 \right] \right] \phi_k = 0. \quad (49)
\end{aligned}$$

By appropriate changes of variables, this equation can be turned into a Whittaker equation. The solution can be expressed with Kummer functions and the Wronskian condition $\phi_k \partial_\eta \phi_k^+ - \phi_k^+ \partial_\eta \phi_k = 16i\pi/M_{\text{PL}}^2$ allows one to normalize the modes. The field is then given at the end of inflation by

$$\begin{aligned}
\phi_k(c) = & \frac{2\sqrt{2}\pi}{M_{\text{PL}}(k\sqrt{2Z})^{1/4}} e^{(i/2)\pi a} e^{-(i/2)c} c^{(1/4)+\mu} \\
& \times U\left(\frac{1}{2} + \mu - \nu, 1 + 2\mu, ic\right), \quad (50)
\end{aligned}$$

and the resulting primordial tensor power spectrum is

$$P_T(k) = \frac{16}{M_{\text{PL}}^2} k^{3-2\mu} H_0^2 (\sqrt{2Z})^{-2\mu} \left| \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} e^{-(i/2)\pi\nu} \right|^2, \quad (51)$$

with

$$\begin{aligned}
a = & \frac{1}{2} + \mu - \nu = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{8\gamma^2 l_{\text{PL}}^2}{9l_0^2}} \\
& + \frac{i}{\sqrt{32Z}k^2} \left(k^2 - Z \left(1 - 4 \frac{\gamma^2 l_{\text{PL}}^2}{l_0^2} \right) \right), \quad (52)
\end{aligned}$$

$$b = 1 + 2\mu = 1 + \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{8\gamma^2 l_{\text{PL}}^2}{9l_0^2}}, \quad (53)$$

$$\nu = -\frac{i}{\sqrt{32Z}k^2} \left(k^2 - Z \left(1 - 4 \frac{\gamma^2 l_{\text{PL}}^2}{l_0^2} \right) \right), \quad (54)$$

PHYSICAL REVIEW D **81**, 024040 (2010)

where $Z = (l_{\text{PL}}/l_0)^2 \lambda_s$ and $\gamma^2 = 3/(\kappa \rho_c l_{\text{PL}}^2)$. The ultra-violet limit of this spectrum can be easily derived and leads to

$$P_T^{\text{UV}}(k) = 16\pi^3 \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{Z}{k^2} (1 - 4\epsilon) \right) k^{-(4/3)\omega}, \quad (55)$$

with $\omega = \gamma^2 l_{\text{PL}}^2 / l_0^2$. On the other hand, the infrared limit is given by

$$P_T^{\text{IR}}(k) = 16\pi^3 \left(\frac{l_{\text{PL}}}{l_0} \right)^2 (Z(1 - 4\omega))^{-(3/2)} k^3 e^{\pi\sqrt{(Z/8)((1-4\omega/k))}}. \quad (56)$$

Those results show that the $k \rightarrow +\infty$ limit of the power spectrum is in agreement with the general relativistic behavior with the addition of a slight tilt. The ultraviolet spectrum is nearly asymptotically scale invariant. This is not surprising as both the holonomy correction (encoded in the $k^{-(4/3)\omega}$ term) and the inverse-volume correction [encoded in the $(1 + \frac{3}{2} \frac{Z}{k^2} (1 - 4\epsilon))$ term], taken individually, lead to this behavior. The infrared limit is more interesting as, in this case, the holonomy and inverse-volume corrections lead to very different spectra. The result obtained here shows that the power spectrum is exponentially divergent, in exact agreement with the limit obtained with the inverse-volume correction alone. This proves that, under the standard inflationary background evolution hypothesis, the inverse-volume term strongly dominates over the holonomy one. This is to be contrasted with the background evolution in the very remote past where the holonomy term alone leads to the replacement of the singularity by a bounce.

V. CONCLUSION

This work derives the fully LQC-corrected equation of motion for gravitational waves. This equation is expressed in terms of cosmological variables and is explicitly solved for a given set of parameters in a standard inflationary background. It is shown that the spectrum remains exponentially infrared divergent, as for a pure inverse-volume correction. This reinforces the use of primordial gravitational waves as a strong probe of loop quantum gravity effects. The next step is naturally to build a fully consistent model which includes all the corrections for both the perturbations and the background.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Hublot-Genève company.

FULLY LOOP-QUANTUM-COSMOLOGY-CORRECTED ...

- [1] A. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008).
- [2] E. Komatsu *et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330 (2009).
- [3] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004); Living Rev. Relativity **1**, 1 (1998); L. Smolin, arXiv:hep-th/0408048v3; T. Thiemann, Lect. Notes Phys. **631**, 41 (2003); A. Perez, arXiv:gr-qc/0409061v3.
- [4] M. Bojowald, Living Rev. Relativity **11**, 4 (2008).
- [5] J. Grain and A. Barrau, Phys. Rev. Lett. **102**, 081301 (2009); A. Barrau and J. Grain, arXiv:0805.0356v1.
- [6] J. Grain, A. Barrau, and A. Gorecki, Phys. Rev. D **79**, 084015 (2009).
- [7] E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, Phys. Rev. D **77**, 023510 (2008); **79**, 023508 (2009); J.

PHYSICAL REVIEW D **81**, 024040 (2010)

- Mielczarek and M. Szydlowski, Phys. Lett. B **657**, 20 (2007); J. Mielczarek, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11** (2008) 011; Phys. Rev. D **79**, 123520 (2009); D. Mulryne and N. Nunes, Phys. Rev. D **74**, 083507 (2006); M. Shimano and T. Harada, Phys. Rev. D **80**, 063538 (2009).
- [8] S. Tsujikawa, P. Singh, and R. Maartens, Classical Quantum Gravity **21**, 5767 (2004).
- [9] J. Mielczarek, arXiv:0908.4329v1.
- [10] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).
- [11] M. Bojowald and G. M. Hossain, Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008).
- [12] G. Calcagni and G. M. Hossain, Adv. Sci. Lett. **2**, 184 (2009).

Conclusion

Dans le cas particulier où on regarde l'univers uniquement dans sa phase d'expansion et subissant une inflation slow-roll, il existe une résolution analytique simple des équations conduisant au spectre de puissance. D'autre part, nous n'avons pas non plus considéré de correction quantique sur la matière comme dans les travaux précédents : cela nous a ainsi permis de comparer ce spectre avec ceux obtenus par les études précédentes.

Les résultats obtenus pour l'expression analytique des spectres dans les équations (55) et (56) de l'article montrent une domination des corrections d'inverse-volume à la limite infrarouge, et des corrections d'holonomies à la limite ultraviolette, tels que le spectre est finalement donné par la figure Fig.(8.1).

Ainsi, aux grandes échelles, une divergence exponentielle est toujours présente, et aux petites échelles il existe une très légère pente dépendant du paramètre de Barbero-Immirzi : cette signature caractéristique du spectre pourrait alors être comparée avec les observations. Cependant, en cosmologie, il existe l'échelle de longueur correspondant au rayon de Hubble telle qu'au delà de cette longueur, il n'est plus possible de faire des observations : cela va se traduire par l'existence d'un nombre d'onde k_{min} en dessous duquel le spectre ne pourra pas être mesuré. Les effets quantiques étant très importants aux grandes échelles, il se pourrait qu'ils ne soient finalement pas visibles s'ils sont à des nombres d'onde plus petits que k_{min} , et le spectre classique serait alors essentiellement obtenu. Néanmoins, il serait toujours possible de mesurer la pente du spectre qui caractériserait alors la valeur du paramètre γ .

Ce travail prospectif s'est surtout révélé important pour comprendre l'action conjuguée des différentes corrections, ce qui n'avait jamais été regardé auparavant. On voit en effet par l'équation (12) dans l'article qu'elles n'agissent pas de la même manière : regarder la correction d'inverse-volume revient à multiplier la contrainte par une fonction corrective, alors que la correction d'holonomie va transformer les termes en \bar{k} et \bar{k}^2 à l'intérieur de ces contraintes. Cela va alors se répercuter dans le calculs des crochets de Poisson et donc dans l'équation (8.1) où S est en facteur de la partie classique, alors que la correction d'holonomie va donner un terme supplémentaire en ρ^2 . Les travaux suivant ont cependant invalidé l'utilisation des corrections d'holonomies dans cette approche, mais il est tout de même intéressant de voir que l'équation du mouvement pour les perturbations fait apparaître un terme en $S^2 \nabla^2 h$, soit après transformée de Fourier $S^2 k^2 h$, provenant ici du terme $S \cdot \partial \delta E \partial \delta E$ dans la contrainte, mais aussi un terme spécifique $\left(2\mathcal{H} - \frac{\dot{S}}{S}\right)$ en facteur de \dot{h} , comme pour l'équation de Klein-Gordon (5.43) avec $\bar{\alpha} = \bar{\nu}$.

Ce premier travail a surtout eu l'avantage d'être une introduction au formalisme de la cosmologie quantique à boucles, en nous permettant de nous familiariser avec l'utilisation des contraintes et des crochets de Poisson, mais aussi avec la forme spécifique des corrections d'inverse-volume et d'holonomie. Elle se place néanmoins dans un cadre vraiment très restrictif en raison des hypothèses faites sur l'évolution de l'univers et l'absence de correction sur le fond, et ne correspond pas exactement à une situation physique réelle même si la forme globale des spectre s'est révélée être correcte par la suite.

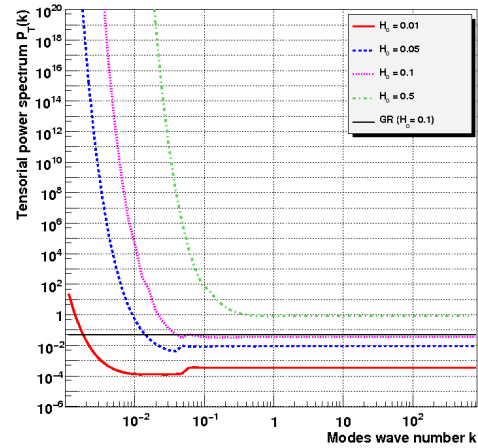


FIG. 8.1 – Spectres de Puissance obtenu pour différentes valeurs du paramètre de Hubble initial.

Chapitre 9

Etude de l'influence des corrections d'holonomie sur le spectre des perturbations tensorielles

Introduction

L'étude des perturbations en cosmologie quantique à boucles ayant surtout été réalisée jusqu'à maintenant avec les corrections d'inverse-volume, nous avons voulu regarder le cas des perturbations tensorielles en considérant uniquement les corrections d'holonomie en prenant réellement en compte l'existence du rebond dans l'obtention des spectres analytiques et numériques. Une telle étude avait déjà été partiellement réalisée pour un potentiel non-massif [76], donnant des solutions exactement résolubles. Les spectres analytique et numérique obtenus dans ce modèle présentent une forme en k^2 avec en plus des oscillations, et redonnent dans la limite ultraviolette un comportement classique.

On souhaitait de plus tenir compte de l'existence d'une phase inflationnaire, et cela a été directement possible en considérant dans notre cas le scénario de l'*aileron de requin* [56] où un large jeu de paramètres permet d'amener une inflation slow-roll standard. Cela n'était *a priori* pas évident puisque, dans le cas du vide, on s'est rendu compte que les effets répulsifs induits par une géométrie quantique menaient certes à une phase de superinflation, mais elle n'était pas suffisamment importante pour amener ensuite une phase d'inflation.

En se basant sur ces travaux ainsi que sur [69], nous avons commencé par regarder un peu plus en détails les caractéristiques du scénario de l'*aileron de requin*, avant de nous intéresser à proprement parler aux spectres de puissance prenant en compte l'existence d'un rebond suivi d'une inflation. Le modèle analytique développé est simpliste mais il nous a permis de jouer sur différents paramètres afin de comprendre la physique se cachant derrière la forme du spectre : la largeur du rebond $\Delta\eta$ ainsi que la valeur des corrections d'holonomies qui agissaient, par $M(a)$ dans l'équation (8.2), et finalement ϵ le premier paramètre de slow-roll. Les observables ont ainsi été corrélées aux paramètres effectifs, que nous avons ensuite corrélé aux paramètres fondamentaux de la théorie. Spectre analytique et spectre numériques ont pu ensuite être comparés.

PHYSICAL REVIEW D **81**, 104049 (2010)**Inflation in loop quantum cosmology: Dynamics and spectrum of gravitational waves**Jakub Mielczarek^{*}*Astronomical Observatory, Jagiellonian University, 30-244 Kraków, Orla 171, Poland*Thomas Cailleteau[†]*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS, IN2P3 53, av. des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*Julien Grain[‡]*Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud 11, CNRS, Bâtiments 120-121, 91405 Orsay Cedex, France*Aurelien Barrau[§]*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS, IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

(Received 27 March 2010; published 28 May 2010)

Loop quantum cosmology provides an efficient framework to study the evolution of the Universe beyond the classical Big Bang paradigm. Because of holonomy corrections, the singularity is replaced by a “bounce.” The dynamics of the background is investigated into the details, as a function of the parameters of the model. In particular, the conditions required for inflation to occur are carefully considered and are shown to be generically met. The propagation of gravitational waves is then investigated in this framework. By both numerical and analytical approaches, the primordial tensor power spectrum is computed for a wide range of parameters. Several interesting features could be observationally probed.

DOI: 10.1103/PhysRevD.81.104049

PACS numbers: 04.60.Pp, 04.60.Bc, 98.80.Cq, 98.80.Qc

I. INTRODUCTION

Loop quantum gravity (LQG) is a nonperturbative and background-independent quantization of general relativity. Based on a canonical approach, it uses Ashtekar variables, namely, $SU(2)$ valued connections and conjugate densitized triads. The quantization is obtained through holonomies of the connections and fluxes of the densitized triads (see, e.g., [1] for an introduction). Basically, loop quantum cosmology (LQC) is the symmetry reduced version of LQG (although it is fair to underline that the relations with the full theory are still to be investigated into the details). While predictions of LQC are very close to those of the old quantum geometrodynamics theory in the low curvature regime, there is a dramatic difference once the density approaches the Planck scale: the big bang is replaced by a big bounce due to huge repulsive quantum geometrical effects (see, e.g., [2] for a review). Among the successes of LQC, one can cite: the excellent agreement between the trajectories obtained in the full quantum theory and the classical Friedman dynamics as far as the density is much below the Planck scale, the resolution of past and future singularities, the “stability” of states which remain sharply peaked even after many cycles (in the $k =$

1 case), and the fact that initial conditions for inflation are somehow naturally met. The latter point is especially appealing as the inflationary scenario is currently the favored paradigm to describe the first stages of the evolution of the Universe (see, e.g., [3] for a recent review). Although still debated, it has received many experimental confirmations, including from the WMAP 7-Years results [4], and solves most cosmological paradoxes. It is rather remarkable that, as will be explained in this paper, the canonical quantization of general relativity naturally leads to inflation without any fine tuning. Inflation would have been unavoidably predicted by LQC, independently of its usefulness in the cosmological paradigm.

Two main quantum corrections are expected from the Hamiltonian of LQG when dealing with a semiclassical approach, as will be the case in this study mostly devoted to potentially observable effects. The first one comes from the fact that loop quantization is based on holonomies, i.e. exponentials of the connection rather than direct connection components. The second one arises for inverse powers of the densitized triad, which when quantized become an operator with zero in its discrete spectrum thus lacking a direct inverse. As the status of “inverse volume” corrections is not clear due to the fiducial volume cell dependence, this work focuses on the holonomy term only and derives, for the first time in a fully consistent way, the entire dynamics up to the explicit computation of the tensor power spectrum. The background evolution is first studied and a specific attention is paid to the investigation of the

^{*}jakub.mielczarek@uj.edu.pl[†]cailleteau@lpsc.in2p3.fr[‡]julien.grain@ias.u-psud.fr[§]aurelien.barrau@cern.ch

inflationary stage following the bounce. Then, analytical formulas are given for the primordial tensor spectrum for either a pure de Sitter or a slow-roll inflation. Finally, numerical results are given for many values of the parameters of the model.

II. BACKGROUND DYNAMICS

In general, many different evolutionary scenarios are possible within the framework of LQC. However, all of them have a fundamental common feature, namely, the cosmic bounce. As we will show, the implementation of a suitable matter content also generically leads to a phase of inflation. This phase is nearly mandatory in any meaningful cosmological scenario since our current understanding of the growth of cosmic structures requires—among many other things—inflation in the early universe. It is therefore important to study the links between the inflationary paradigm and the LQC framework, as emphasized, e.g., in [5].

The demonstration that a phase of superinflation can occur due to quantum gravity effects was one of the first great achievements of LQC [6]. This result was based on the so-called inverse volume corrections. It has however been understood that such corrections exhibit a fiducial cell dependence, making the physical meaning of the associated results harder to understand. As reminded in the introduction, other corrections also arise in LQC, due to so-called holonomy terms, which do not depend on the fiducial cell volume. Those corrections lead to a dramatic modification of the Friedmann equation which becomes

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (1)$$

where ρ is the energy density, ρ_c is the critical energy density, H is the Hubble parameter, and $\kappa = 8\pi G$. In principle, ρ_c can be viewed as a free parameter of theory. However, its value is usually determined thanks to the results of area quantization in LQG. Then,

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2 \gamma^3} m_{\text{Pl}}^4 \approx 0.82 m_{\text{Pl}}^4, \quad (2)$$

where value $\gamma \approx 0.239$ has been used, as obtained from the computation of the entropy of black holes [7]. Should the inverse volume corrections be included, this would modify the background dynamics by some additional factors.

As it can easily be seen from Eq. (1), a general prediction associated with models including holonomy corrections is a bounce which occurs for $\rho = \rho_c$. The appearance of this ρ^2 term with the correct negative sign is a highly nontrivial and appealing feature of this framework which shows that the repulsive quantum geometrical effects become dominant in the Planck region. The very quantum nature of spacetime is capable of overwhelming the huge gravitational attraction. The dynamics of models with holonomy corrections was studied in several articles [5,8–10].

In this paper we further perform a detailed and consistent study of a universe filled with a massive scalar field in this framework. The global dynamics of such models was firstly studied in Ref. [8]. Recently, it was pointed out in Ref. [9] that the “standard” slow-roll inflation is triggered by the preceding phase of quantum bounce. This general effect is due to the fact that the universe undergoes contraction before the bounce, resulting in a negative value of the Hubble factor H . Since the equation governing the evolution of a scalar field in a Friedmann-Robertson-Walker universe is

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (3)$$

the negative value of H during the prebounce phase acts as an *antifriction* term leading to the amplification of the oscillations of field ϕ . In particular, when the scalar field is initially at the bottom of the potential well with some small nonvanishing derivative $\dot{\phi}$, then it is driven up the potential well as a result of the contraction of the universe. This situation is presented in Fig. 1.

To some extent, it is therefore reasonable to say that the LQC framework solves both the two main “problems” of the big bang theory: the singularity (which is regularized and replaced by a bounce) and the initial conditions for inflation (which are naturally set by the antifriction term).

However, this *shark fin* evolution (see caption of Fig. 1) is not the only possible one. In particular, a nearly *symmetric* evolution can also take place, as studied in Ref. [10]. Those different scenarios can be distinguished by the fraction of kinetic energy at the bounce. When the energy density at the bounce is purely kinetic, the evolution of the field is symmetric. When a small fraction of potential energy is introduced, which is the general case, the symmetry is broken and the field behaves as in the *shark fin* case. It is however important to underline that we consider only scenarios where the contribution from the potential is subdominant at the bounce, as it would otherwise be

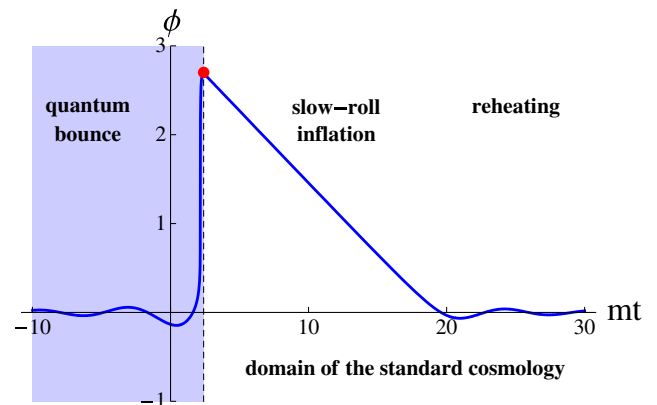


FIG. 1 (color online). Shark fin-type evolution of a scalar field for $m = 10^{-3} m_{\text{Pl}}$. The (red) dot represents the point where the initial conditions in classical cosmology are usually set.

INFLATION IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: DYNAMICS ...

necessary to include quantum backreaction effects [11]. The effective dynamics would then be more complicated and could not be anymore described by Eq. (1).

In order to perform qualitative studies of the dynamics of the model, it is useful to introduce the variables

$$x := \frac{m\phi}{\sqrt{2\rho_c}} \quad \text{and} \quad y := \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2\rho_c}}. \quad (4)$$

Since the energy density of the field is constrained ($\rho \leq \rho_c$), the inequality

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (5)$$

has to be fulfilled. The x^2 term corresponds to the potential part while the y^2 corresponds to the kinetic term. The case $x^2 + y^2 = 1$ corresponds to the bounce, when the energy density reaches its maximum.

In Fig. 2, exemplary evolutionary paths in the $x - y$ phase plane are shown. For all the presented cases, the evolution begins at the origin (in the limit $t \rightarrow -\infty$), and then evolves (dashed line) to the point on the circle $x^2 + y^2 = 1$. Finally, the field moves back to the origin for $t \rightarrow +\infty$ (solid line). However, the shapes of the intermediate paths are different. The $x = 0$ case corresponds to the *symmetric* evolution which was studied in Ref. [10] (if the bounce is set at $t = 0$, the scale factor is an even function of time and the scalar field is an odd function). In this case, the field is at the bottom of the potential well exactly at the bounce ($H = 0$). This is however a very special choice of initial conditions. In the case $x = \sqrt{2}/2$, the potential term and kinetic term contribute equally at the bounce. In this case, both deflation and inflation occur. However one observes differences in their duration. The third case, $x = 1$, corresponds to the domination of the potential part at the bounce. In this case, symmetric phases of deflation and inflation also occur

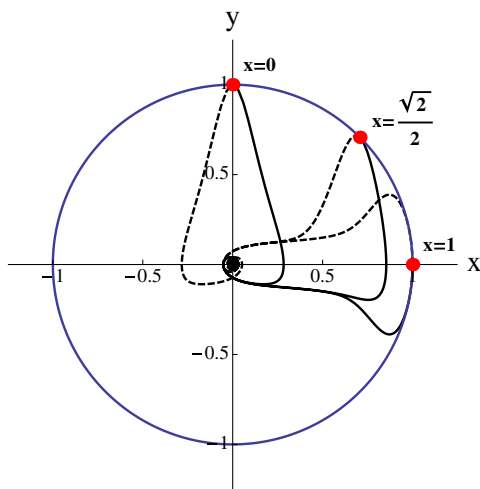


FIG. 2 (color online). Exemplary phase trajectories of the scalar field with $m = m_{\text{Pl}}$.

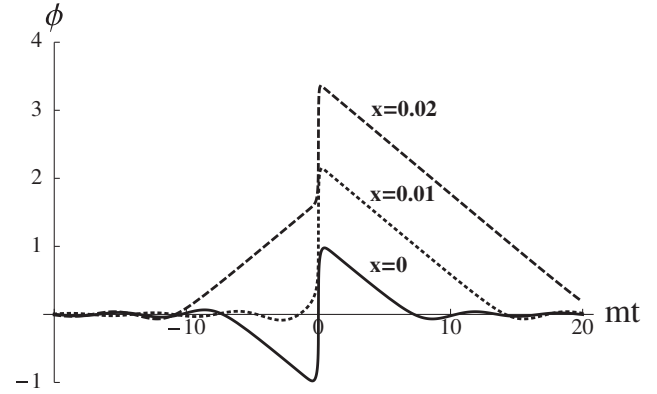
PHYSICAL REVIEW D **81**, 104049 (2010)

FIG. 3. Time evolution of the scalar field. Different evolutionary scenarios leading to a slow-roll inflation phase are displayed. The bottom (solid) line represents the symmetric case. The middle (dotted) line represents the shark fin-type evolution mostly investigated in this paper. The top (dashed) line corresponds to a larger fraction of potential energy. For all curves $m = 0.01m_{\text{Pl}}$.

(both the scale factor and the field being this time even functions). However in this situation, as well as in $x = \sqrt{2}/2$ case, the effect of quantum backreaction should be taken into account. The dynamics can therefore significantly differ from the one computed with Eq. (1).

In Fig. 3 we show some exemplary evolutions of the scalar field for different contributions from the potential part at the bounce. In Fig. 4, the corresponding evolutions of the scale factor are displayed. It can easily be seen that the value of ϕ_{max} increases with the fraction of potential energy at the bounce. Since the total energy density is constrained, ϕ_{max} must satisfy

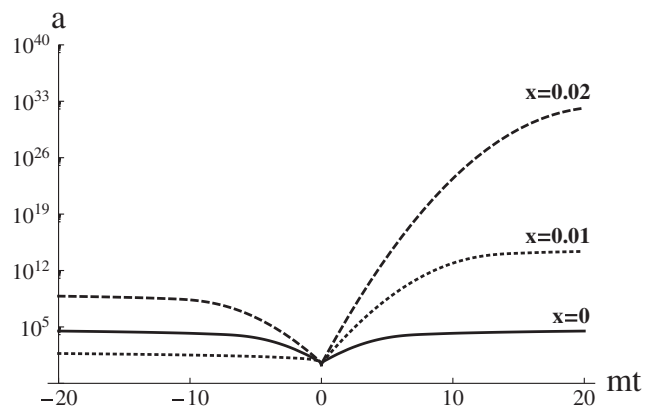


FIG. 4. Time evolution of the scale factor. Different evolutionary scenarios leading to a slow-roll inflation phase are displayed. The bottom (solid) line represents the symmetric case. The middle (dotted) line represents the shark fin-type evolution. The top (dashed) line corresponds to a larger fraction of potential energy. For all curves $m = 0.01m_{\text{Pl}}$.

$$|\phi_{\max}| \leq \frac{\sqrt{2\rho_c}}{m}. \quad (6)$$

The values of ϕ_{\max} associated with different evolutionary scenarios were computed in [5,9,10]. The conclusion of those studies is that the necessary conditions for inflation are generically met. Only in the case of a *symmetric* evolution does the value of ϕ_{\max} become too small in some cases. In particular, for $m = 10^{-6}m_{\text{Pl}}$ one obtains $\phi_{\max} = 2.1m_{\text{Pl}}$ for a symmetric evolution. The corresponding number of e-folds can be computed with $N \simeq 2\pi \frac{\phi^2}{m_{\text{Pl}}^2}$, which gives $N \simeq 28$. By introducing a small fraction of potential energy (as in the *shark fin* case), the number of e-folds can be appropriately increased. In addition to the usual arguments, this requirement is also set by the recent WMAP 7-Years results [4]. Based on those observations, the value of the scalar spectral index was indeed measured to be $n_s = 0.963 \pm 0.012$. As for a massive slow-roll inflation the relation

$$n_s = 1 - \frac{1}{\pi} \frac{m_{\text{Pl}}^2}{\phi^2} \quad (7)$$

holds, one obtains $\phi_{\text{obs}} = 2.9 \pm 0.5m_{\text{Pl}}$. Since the consistency relation $\phi_{\max} > \phi_{\text{obs}}$ must be fulfilled, the symmetric evolution with $m = 10^{-6}m_{\text{Pl}}$ (for which $\phi_{\max} = 2.1m_{\text{Pl}} < \phi_{\text{obs}}$) is not favored by the WMAP 7-Years observations. As already mentioned, higher values of ϕ can be easily reached if some contribution from the potential term is introduced (this supports the *shark fin* scenario). The number of e-folds will therefore be naturally increased in this way. However it remains bounded by above: since $N \simeq 2\pi \frac{\phi^2}{m_{\text{Pl}}^2}$, Eq. (6) leads to the constrain:

$$N \leq \frac{4\pi\rho_c}{m^2 m_{\text{Pl}}^2}. \quad (8)$$

The value of the parameter ρ_c can be fixed by Eq. (2). However, this expression is based on the computation of the area gap as performed in LQG. This, in general, can be questioned [12]. In particular, in the framework of reduced phase space quantization of LQC, the value of ρ_c remains a free parameter [13]. Moreover, a particular value of the Barbero-Immirzi parameter (imposed by black hole entropy considerations) has been used. Therefore, the value of ρ_c can, in general, differ and it is worth investigating how the variation of ρ_c can alter the dynamics of the model. In particular, we have studied how the *shark fin* scenario can be modified by different choices of ρ_c . In Fig. 5, the evolution of the field is displayed as a function of the value of the critical energy density. As expected, the larger ρ_c , the higher the maximum value reached by the field. It can be seen that ϕ_{\max} approaches the usually required value $\sim 3m_{\text{Pl}}$ for $\rho_c \sim m_{\text{Pl}}^4$, making the whole scenario quite natural.

III. GRAVITATIONAL WAVES IN LQC

Although quite a lot of work has already been devoted to gravitational waves in LQC [14], this study aims at treating, for the first time, the problem in a fully self-consistent way with an explicit emphasis on the investigation of the spectrum that can be used as an input to study possible experimental signatures.

The equation for tensor modes in LQC is given (see, e.g., [15]) by

$$\frac{d^2}{d\eta^2} h_a^i + 2aH \frac{d}{d\eta} h_a^i - \nabla^2 h_a^i + m_Q^2 h_a^i = 0, \quad (9)$$

where h_a^i are gravitational perturbations, η is the conformal time, and the factor due to the holonomy corrections is given by

$$m_Q^2 := 16\pi G a^2 \frac{\rho}{\rho_c} \left(\frac{2}{3}\rho - V \right). \quad (10)$$

This factor acts as an effective mass term. For convenience we introduce the variable

$$u = \frac{ah_{\otimes}}{\sqrt{16\pi G}} = \frac{ah_{\otimes}}{\sqrt{16\pi G}}, \quad (11)$$

where $h_1^1 = -h_2^2 = h_{\otimes}$, $h_2^1 = h_1^2 = h_{\otimes}$. Then, performing the Fourier transform

$$u(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} u_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (12)$$

one can rewrite the equation as

$$\frac{d^2}{d\eta^2} u_{\mathbf{k}}(\eta) + [k^2 + m_{\text{eff}}^2] u_{\mathbf{k}}(\eta) = 0, \quad (13)$$

where $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ and

$$m_{\text{eff}}^2 := m_Q^2 - \frac{a''}{a} = a^2 \frac{\kappa}{2} \left[p - \frac{1}{3}\rho \right]. \quad (14)$$

It is worth underlining that the final expression of m_{eff} has no explicit dependence upon the critical energy density ρ_c . In Eq. (14), both m_Q^2 and a''/a depend on ρ_c . However since

$$\frac{a''}{a} = a^2 \left[\frac{2\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) - \frac{\kappa}{2} (\rho + p) \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_c} \right) \right], \quad (15)$$

the factors depending on ρ_c cancel out precisely. This is perhaps not a coincidence and this could exhibit the conservation of classical symmetries while introducing the quantum corrections.

The next step consists in quantizing the Fourier modes $u_{\mathbf{k}}(\eta)$. This follows the standard canonical procedure. Promoting this quantity to be an operator, one performs the decomposition

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\eta) = f_{\mathbf{k}}(\eta) \hat{b}_{\mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}}^*(\eta) \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (16)$$

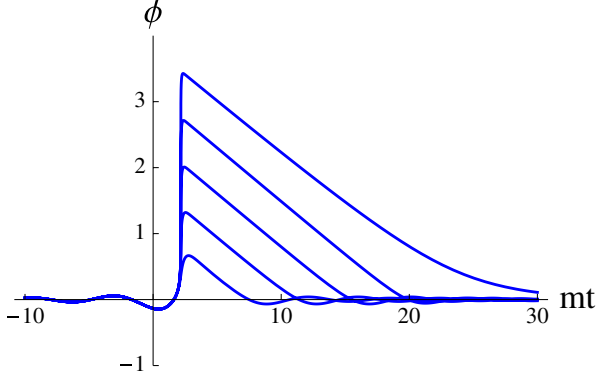


FIG. 5 (color online). The shark fin-type evolution of the scalar field for $m = 10^{-3}m_{\text{Pl}}$. Curves from bottom to top were computed for $\rho_c = 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1$, and $100[m_{\text{Pl}}^4]$, respectively.

where $f_k(\eta)$ is the so-called mode function which satisfies the same equation as $u_{\mathbf{k}}(\eta)$, namely, Eq. (13). The creation ($\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$) and annihilation ($\hat{b}_{\mathbf{k}}$) operators fulfill the commutation relation $[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$.

The problem is now shifted to the resolution of a Schrödinger-like Eq. (13) which can be used to compute the observationally relevant quantities. In particular, the correlation function for tensor modes is given by

$$\langle 0 | \hat{h}_b^a(\mathbf{x}, \eta) \hat{h}_a^b(\mathbf{y}, \eta) | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k, \eta) \frac{\sin kr}{kr}, \quad (17)$$

where \mathcal{P}_T is the tensor power spectrum and $|0\rangle$ is the vacuum state. In our case, \mathcal{P}_T can be written as

$$\mathcal{P}_T(k, \eta) = \frac{64\pi G}{a^2(\eta)} \frac{k^3}{2\pi^2} |f_k(\eta)|^2. \quad (18)$$

This spectrum is the fundamental observable associated with gravitational wave production. As will be shown in the next sections, very substantial deviations from the usual shape are to be expected within the LQC framework.

IV. ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE POWER SPECTRUM

In this section we perform analytical studies of gravitational wave creation in the scenario previously described. In particular, we derive approximate formulas for the tensor power spectrum at the end of inflation. In the next section we will compare this result with numerical computations.

In the considered model, the evolution is split into three parts: contraction, bounce, and slow-roll inflation. For this model, the effective mass square is defined as follows

$$m_{\text{eff}}^2(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \eta < \eta_i - \Delta\eta. \\ k_0^2 & \text{for } \eta_i - \Delta\eta < \eta < \eta_i. \\ -(\nu^2 - \frac{1}{4}) \frac{1}{\eta^2} & \text{for } \eta > \eta_i. \end{cases} \quad (19)$$

Basically, the phenomenological parameters entering the model are therefore:

- (i) η_i —the beginning of the inflation.
- (ii) $\Delta\eta$ —the width of the bounce.
- (iii) k_0 —which is approximately equal to the value of m_{eff} at the bounce (when $H = 0$). It can therefore be related with the energy scale of the bounce.
- (iv) ν —which is related to slow-roll parameter ϵ by $\nu = \sqrt{\frac{2}{4} + 3\epsilon} = \frac{3}{2} + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, where $\epsilon \ll 1$.

For the considered model, we have $k_0^2 \geq 0$. This comes from the fact that we consider the particular shark fin-type of evolution where the bounce is dominated by the kinetic energy term. Therefore when $y \gg x$ [see Eq. (4)], Eq. (14) simplifies to $m_{\text{eff}}^2 = a^2 \kappa \dot{\phi}^2 / 6 \geq 0$, leading to $k_0^2 \approx m_{\text{eff}}^2(t = t_{\text{bounce}}) \geq 0$.

A matching should be performed between the three considered phases. It can be done, as displayed in Fig. 6, with transition matrices defined as follows:

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} f_k(\eta) & f_k^*(\eta) \\ \partial_\eta f_k(\eta) & \partial_\eta f_k^*(\eta) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

where the Wronskian condition implies

$$W(f_k(\eta), f_k^*(\eta)) := \det \mathbf{M} = i. \quad (21)$$

The inverse of the transition matrix is then given by

$$\mathbf{M}^{-1} := -i \begin{bmatrix} \partial_\eta f_k^*(\eta) & -f_k^*(\eta) \\ -\partial_\eta f_k(\eta) & f_k(\eta) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

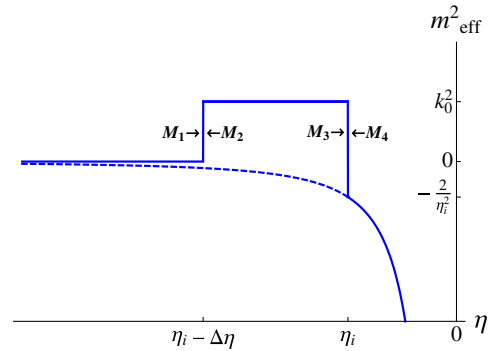


FIG. 6 (color online). Evolution of the effective mass used in the analytical approximation [Eq. (19)]. On this plot, ϵ is set to zero as an example. The dashed line represents the case without a bounce. The points where the transfer matrices are computed in our model are also indicated.

The three first transition matrices are

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{e^{-ik(\eta_i - \Delta\eta)}}{\sqrt{2k}} & \frac{e^{ik(\eta_i - \Delta\eta)}}{\sqrt{2k}} \\ -i\sqrt{\frac{k}{2}}e^{-ik(\eta_i - \Delta\eta)} & i\sqrt{\frac{k}{2}}e^{ik(\eta_i - \Delta\eta)} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\Omega(\eta_i - \Delta\eta)}}{\sqrt{2\Omega}} & \frac{e^{i\Omega(\eta_i - \Delta\eta)}}{\sqrt{2\Omega}} \\ -i\sqrt{\frac{\Omega}{2}}e^{-i\Omega(\eta_i - \Delta\eta)} & i\sqrt{\frac{\Omega}{2}}e^{i\Omega(\eta_i - \Delta\eta)} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\Omega\eta_i}}{\sqrt{2\Omega}} & \frac{e^{i\Omega\eta_i}}{\sqrt{2\Omega}} \\ -i\sqrt{\frac{\Omega}{2}}e^{-i\Omega\eta_i} & i\sqrt{\frac{\Omega}{2}}e^{i\Omega\eta_i} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

where

$$\Omega = \sqrt{k^2 + k_0^2}. \quad (26)$$

In the last region, mode functions can be written as

$$f_k(\eta) = \alpha_k g_k(\eta) + \beta_k g_k^*(\eta), \quad (27)$$

where

$$g_k(\eta) = \sqrt{-\eta} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{i\pi(2\nu+1)/4} H_\nu^{(1)}(-k\eta), \quad (28)$$

$H_\nu(x)$ being a Hankel function of the first kind. The mode functions $g_k(\eta)$ correspond to another decomposition of the field $\hat{u}_k(\eta)$ in the form:

$$\hat{u}_k(\eta) = g_k(\eta) \hat{a}_k + g_k^*(\eta) \hat{a}_{-k}^\dagger. \quad (29)$$

The creation (\hat{a}_k^\dagger) and annihilation (\hat{a}_k) operators fulfill the commutation relation $[\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Because decompositions (16) and (29) are equivalent, based on Eq. (27) and on the Wronskian conditions for the mode functions f_k and g_k , one obtains:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_k \\ \hat{b}_{-k}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k^* \\ \beta_k & \alpha_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{a}_{-k}^\dagger \end{bmatrix}, \quad (30)$$

which corresponds to a Bogoliubov transformation with coefficients α_k and β_k . Because of the commutation relation of the creation and annihilation operators we have $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$. It is clear from Eq. (30) that if $\beta_k \neq 0$ particles are created from the vacuum, just because $\hat{b}_k|0\rangle = \beta_k^* \hat{a}_{-k}^\dagger|0\rangle$. By matching the three regions, the unknown coefficients α_k and β_k can be determined:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} &= \mathbf{M}_4^{-1} \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_4^{-1} \begin{bmatrix} \frac{e^{ik(\Delta\eta - \eta_i)} (\Omega \cos[\Delta\eta\Omega] - ik \sin[\Delta\eta\Omega])}{\sqrt{2k\Omega}} \\ \frac{e^{ik(\Delta\eta - \eta_i)} (-ik \cos[\Delta\eta\Omega] - \Omega \sin[\Delta\eta\Omega])}{\sqrt{2k}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

where \mathbf{M}_4 is given by

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} g_k(\eta) & g_k^*(\eta) \\ \partial_\eta g_k(\eta) & \partial_\eta g_k^*(\eta) \end{bmatrix}_{\eta=\eta_i}, \quad (32)$$

the mode function g_k being given by Eq. (28). In the special case corresponding to a de Sitter inflation ($\epsilon = 0$ and $\nu = \frac{3}{2}$), the mode functions given by Eq. (28) simplify to the Bunch-Davies vacuum

$$g_k(\eta)|_{\nu=3/2} = g_k^{\text{B-D}}(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right). \quad (33)$$

In general, the amplitude of the mode function during inflation can be written as

$$|f_k|^2 = |g_k|^2 |\alpha_k - \beta_k|^2 + 4\Re(\alpha_k^* \beta_k g_k^*) \Re g_k. \quad (34)$$

As we are interested in the spectrum at the end of inflation ($\eta \rightarrow 0^-$), the approximation

$$H_\nu^{(1)}(x) \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \quad (35)$$

holds and, based on this, one can easily see that for a slow-roll inflation ($\epsilon \ll 1$):

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{\Re g_k(\eta)}{\Im g_k(\eta)} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (36)$$

Therefore, the leading order contribution from Eq. (34) becomes

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} |f_k|^2 = |g_k|^2 |\alpha_k - \beta_k|^2. \quad (37)$$

With this approximation, the tensor power spectrum at the end of inflation takes the form

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{-2\epsilon} |\alpha_k - \beta_k|^2. \quad (38)$$

The coefficients α_k and β_k are computed from Eq. (31). Since the resulting expression for $|\alpha_k - \beta_k|^2$ is very long, it is not explicitly given here. It exhibits the correct ultra-violet (UV) behavior, namely, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k - \beta_k|^2 = 1$. Therefore, the UV spectrum simplifies to

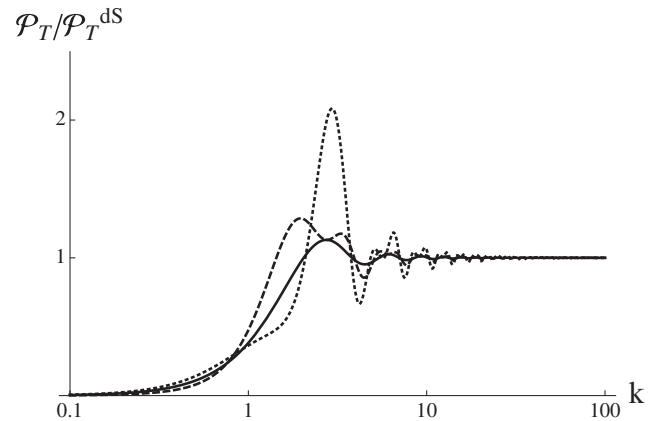


FIG. 7. Analytical tensor power spectra, normalized to the non-LQC-corrected spectrum, for three different values of k_0 in the $\epsilon = 0$ case. The parameters are: $k_0 = 0$ (solid line), $k_0 = 1.5$ (dashed line), $k_0 = 3$ (dotted line), $\eta_i = -1$, and $\Delta\eta = 1$.

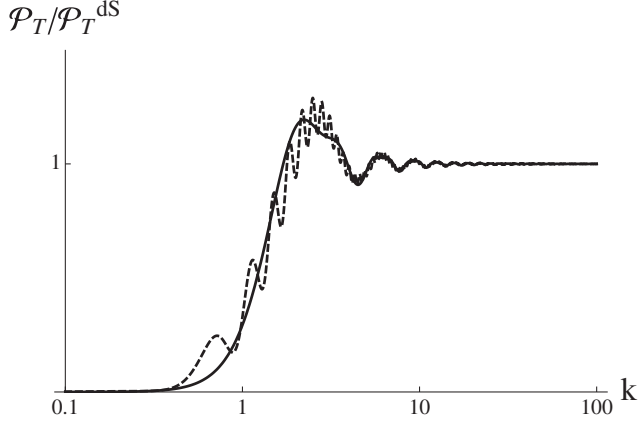


FIG. 8. Analytical tensor power spectra, normalized to the non-LQC-corrected spectrum, for two different values of $\Delta\eta$ in the $\epsilon = 0$ case. The parameters are: $\Delta\eta = 0$ (solid line), $\Delta\eta = 10$ (dashed line), $k_0 = 1$, and $\eta_i = -1$.

$$\mathcal{P}_T(k \rightarrow \infty) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}. \quad (39)$$

In Fig. 7, spectra, as obtained from Eq. (38), are displayed for different values of k_0 and normalized to the usual non-LQC corrected spectrum. In Fig. 8, the width of the bounce $\Delta\eta$ is varied. In both cases, ϵ is vanishing.

The main features that can be drawn from those plots are the following:

- (i) The power is suppressed in the infrared (IR) regime. This is a characteristic feature associated with the bounce.
- (ii) The UV behavior agrees with the standard general relativistic picture.
- (iii) Damped oscillations are superimposed with the spectrum around the “transition” momentum k_* between the suppressed regime and the standard regime.
- (iv) The first oscillation behaves like a “bump” that can substantially exceed the UV asymptotic value.
- (v) The parameter k_0 basically controls the amplitude of the oscillations whereas $\Delta\eta$ controls their frequency.

V. NUMERICAL INVESTIGATION OF THE POWER SPECTRUM

To perform a more detailed analysis, we have also fully numerically solved the system of coupled differential equations which leads to both the evolution of the modes and of the background:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} = -H \frac{df_k}{dt} - \left[\frac{k^2}{a^2} + \frac{\kappa}{6} (3p - \rho) \right] f_k, \quad (40)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \kappa (\rho + p) \left(2 \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \right), \quad (41)$$

$$\frac{da}{dt} = Ha, \quad (42)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi_\phi}{a^3}, \quad (43)$$

$$\frac{d\pi_\phi}{dt} = -a^3 \phi, \quad (44)$$

where

$$\rho = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} + \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad \text{and} \quad p = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (45)$$

are, respectively, the energy density and pressure of the scalar field whereas π_ϕ is the momentum.

To compute the evolution of the modes, the initial condition was assumed to be the Minkowski vacuum

$$f_k = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (46)$$

This approximation is valid for the subhorizontal modes. Therefore, in the numerical computations we have evolved only modes that were subhorizontal at the initial time.

In Fig. 9, the analytical spectrum Eq. (38) evaluated as explained in the previous section is compared with the full numerical computation. The overall agreement is very good with slight deviations due to subtle dynamical effects. The UV tilt associated with the slow-roll parameter is perfectly recovered. The values of parameters H , k_0 , and ϵ were determined from the evolution of the background. In turn, the parameters η_i and $\Delta\eta$ were fixed to fit the numerical data.

The mass of the scalar field is, of course, the key physical parameter of this model. The canonically chosen value (around $10^{-6} m_{\text{Pl}}$) may not be especially meaningful

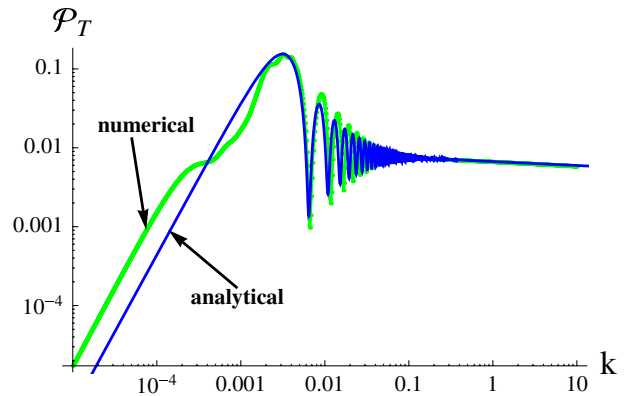


FIG. 9 (color online). Comparison of numerical and analytical spectra [Eq. (38)] for $m = 10^{-2} m_{\text{Pl}}$. In the IR region the spectra behave as $\mathcal{P}_T \propto k^2$ while in the UV region they behave as $\mathcal{P}_T \propto k^{-2\epsilon}$, where $\epsilon \ll 1$ is the slow-roll parameter. Here: $H = 0.037 m_{\text{Pl}}$, $\epsilon = 0.0246$, $k_0 = 0.037 m_{\text{Pl}}$, $\eta_i = -750$, and $\Delta\eta = 10$.

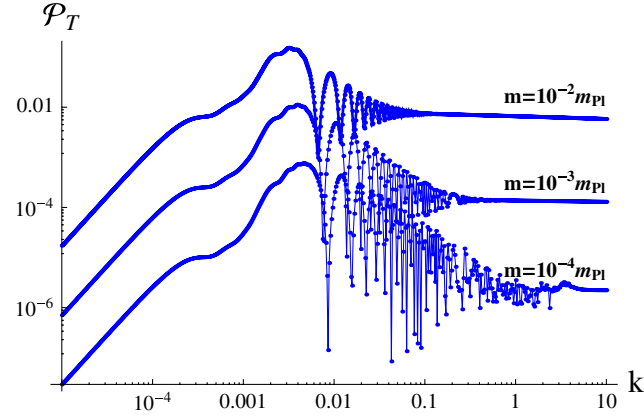


FIG. 10 (color online). Numerically computed power spectra for $m = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2} m_{\text{Pl}}$ (from bottom to top in the UV range).

in this approach as the standard requirements of inflation are substantially modified by the specific history of the Hubble radius. This value is nonetheless still the mostly preferred one.

In Fig. 10, the spectra computed for three different mass values are displayed. As expected, the UV value of the spectrum scales as m^2 , since during inflation $\mathcal{P}_T \sim H^2 \sim m^2$. It is also clear that the region of oscillations becomes broader while lowering the value of m .

In Fig. 11, we show how the spectrum is modified by different choices of ρ_c . It is clear that increasing ρ_c leads to an amplification of the spectrum. The dependence is however not very strong. As it was shown in Section II, the increase of ρ_c leads to an increase of the field displacement ϕ_{max} . This dependence was shown to be rather weak. Since $\mathcal{P}_T \sim H^2 \sim m^2 \phi^2$, the increase of ϕ due to the dependence upon ρ_c will result in an amplification of the power spectrum. This is in agreement with the numerical results. From Fig. 11, it can also be noticed that increasing ρ_c amplifies the oscillatory structure.

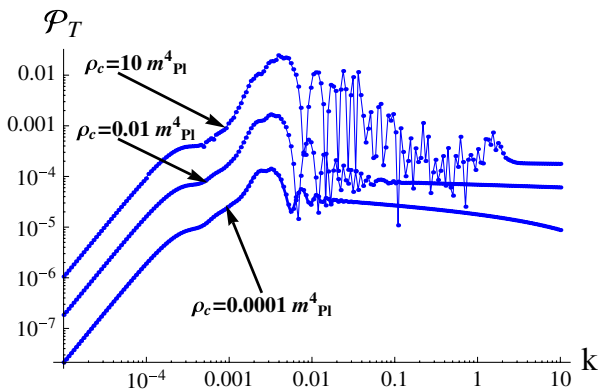


FIG. 11 (color online). Numerically computed power spectra for $\rho_c = 10^{-4}, 10^{-2}, 10 m_{\text{Pl}}^4$ (from bottom to top in the UV range) with $m = 10^{-3} m_{\text{Pl}}$.

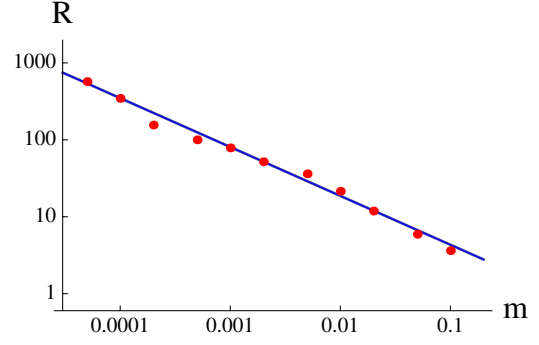


FIG. 12 (color online). Ratio defined by Eq. (47) as a function of inflaton mass in Planck units. Dots are values obtained from the numerical computations. The straight line is the fit given by Eq. (48).

The numerical investigations performed for this work have shown that the quantity R defined as

$$R := \frac{\mathcal{P}_T(k = k_*)}{\mathcal{P}_T^{\text{standard}}(k = k_*)}, \quad (47)$$

basically evolves as

$$R \simeq \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m} \right)^{0.64}, \quad (48)$$

where k_* is the position of the highest peak in the power spectrum and $\mathcal{P}_T^{\text{standard}}(k)$ is a standard inflationary power spectrum [see e.g. Eq. (39)] which overlaps with $\mathcal{P}_T(k)$ for $k \rightarrow \infty$. The function (48) was obtained by fitting the numerical data in the mass range $m = 5 \times 10^{-5} m_{\text{Pl}} \dots 10^{-1} m_{\text{Pl}}$. Because of numerical instabilities, it was not possible to perform computations for lower values of the inflaton mass. The numerically obtained values of R together with the approximation given by Eq. (48) are given in Fig. 12. This parametrization is useful for phenomenological purposes. Interestingly, R can become very high for low values of the mass of the field. This partially compensates for the lower overall normalization of the spectrum and can become a very specific feature of the model. In particular, for the mass $m \approx 10^{-6} m_{\text{Pl}}$ (which is the value preferred by some estimations), extrapolating the relation (48) leads to $R \approx 8000$. If the relation still holds in this range, the effect is very significant, and could have important observational consequences.

Finally, to make basic studies easier, we performed a rough parametrization of the full spectrum:

$$\mathcal{P}_T = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \frac{\left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}}{1 + (k_*/k)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (k/k_*)^2} \right], \quad (49)$$

leading to

$$\mathcal{P}_T^{\text{ds}} = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \frac{1}{1 + (k_*/k)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (k/k_*)^2} \right], \quad (50)$$

in the specific case of de Sitter inflation. In both cases, the

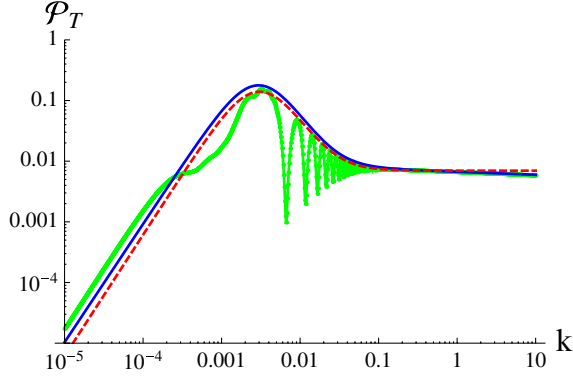


FIG. 13 (color online). Comparison of the numerical spectrum for $m = 10^{-2}m_{\text{Pl}}$ with formulas (49) and (50). The solid (blue) line corresponds to (49) while the dashed (red) line corresponds to (50).

classical behavior is recovered in the limit $k \rightarrow \infty$. The point for introducing the R factor the way it was done becomes clear when calculating the value of the spectra at $k = k_*$. For a modified de Sitter spectrum [Eq. (50)], we get

$$\mathcal{P}_T^{\text{ds}}(k = k_*) = R \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (51)$$

Thanks to the relation (48), the number of the free parameters can be decreased in a phenomenological analysis.

As shown on Fig. 13, this formula correctly reproduces the main features, namely, the IR power suppression, the bump, and the UV limit. Oscillations are missed but due to momentum integration there is little hope that they can

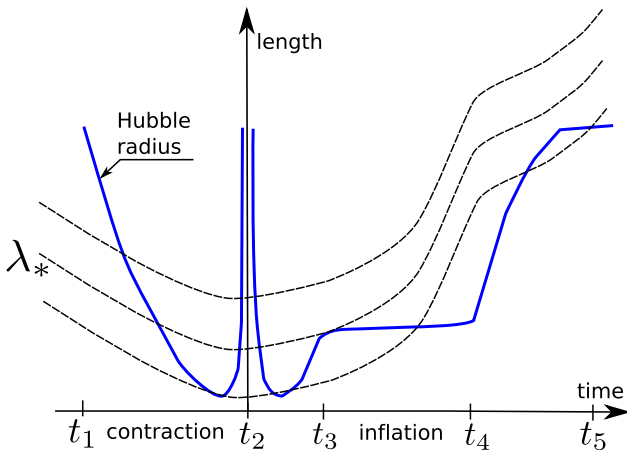


FIG. 14 (color online). Schematic picture of evolution of the Hubble radius (solid line) and of the different length scales (dashed lines) for the considered model of the universe. Different times are distinguished: t_1 time when the initial conditions are set; t_2 bounce ($H = 0$); t_3 beginning of inflation; t_4 end of inflation; t_5 -present epoch of dark energy domination.

observationally be seen on a cosmological microwave background (CMB) spectrum.

To conclude this section, we have schematically represented the evolution of the Hubble radius ($R_H := 1/|H|$), together with the physical modes, in Fig. 14. This helps to understand the shape of the obtained spectra.

We consider the modes that are initially (at time t_1) shorter than the Hubble radius. For those modes, the normalized solution is given by the Minkowski vacuum $f_k = e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$. Therefore, the initial power spectrum takes the form $\mathcal{P}_T \sim k^3 |f_k|^2 \sim k^2$. Starting from the largest scales, the modes cross the Hubble radius. This is possible since the Hubble radius undergoes contraction faster than any particular length scale. While crossing the horizon, the shape of the spectrum becomes *frozen* in the initial $\mathcal{P}_T \sim k^2$ form. Then, the modes evolve through the bounce (at time t_2) until the beginning of inflation (at time t_3). The main consequence of the transition of modes through the bounce is the appearance of additional oscillations in the spectrum. This issue was studied in detail in Ref. [16], where the spectrum at time t_3 was calculated for the symmetric bounce model. After the bounce, modes with wavelengths shorter than λ_* start to reenter the Hubble radius. The superhorizon modes $\lambda > \lambda_*$ ($k < k_*$) hold the k^2 spectrum, with, however, some oscillatory features due to the bounce. Modes with $\lambda < \lambda_*$ ($k > k_*$) cross the horizon again during the phase of inflation. For them, the spectrum agrees with the standard slow-roll inflation spectrum $\mathcal{P}_T \sim k^{-2\epsilon}$ where $\epsilon \ll 1$. The small tilt is due to a slow increase of the Hubble radius. Contributions from different modes are then slightly different. At the end of inflation (at time t_4) the spectrum is therefore suppressed ($\mathcal{P}_T \sim k^2$) for $k < k_*$ and exhibits the inflationary shape ($\mathcal{P}_T \sim k^{-2\epsilon}$) for $k > k_*$. The spectrum is also modified by the oscillations due to the bounce. This corresponds to the computations of this paper. The particular mode with wavelength λ_* (wave number k_*) should be studied in more detail. The size of this mode overlaps with the size of the Hubble radius at the beginning of inflation: $k_* \simeq a(t_3)H(t_3)$. The physical length λ_* at the scale factor $a(t)$ is therefore equal to $\lambda_*(t) \simeq a(t)/[a(t_3)H(t_3)]$. This scale grows with the cosmic expansion and it is crucial, from the observational point of view, to determine its present size (at time t_5). The case drawn in Fig. 14 corresponds to a present size of λ_* greater than the size of the horizon. This is indeed rather unlikely that the present value of λ_* is below the size of horizon just because the spectrum of scalar perturbations should then exhibit deviations from the nearly scale invariant inflationary prediction. Up to now, there is no observational evidence for such deviations. A remaining possibility would however be that the (slight) observed lack of power in the CMB spectrum of anisotropies could be due to the effects of the bounce. However, the present size of λ_* would then be comparable with the size of horizon. This leads to the question: why should those

two scales overlap right now? This is rather unnatural, and would lead to a new coincidence problem. However, as it was estimated in Ref. [9], these two scales can indeed overlap in the standard inflationary scenario for quite natural values of the parameters. There is therefore a glimpse of hope that the scale λ_* is at least not too much bigger than the size of horizon. This could allow us to see some UV features due to the bounce as the oscillations also affect slightly the inflationary part of the spectrum. These are however secondary effects and it is not clear whether they were not smoothed away during the radiation domination era. Moreover, in the region where those effects could be expected, errors due to the *cosmic variance* become significant. This is an unavoidable observational limitation which cannot be bettered, even by the improvement of resolution of the future CMB experiments.

Another limitation in studying the effects of LQC comes from the fact that the derived modifications can also appear in other bouncing cosmologies. In particular, within the model of quintom bounce, the discussed effects of suppression and oscillations were also pointed out [17,18]. The amplitude of tensor perturbations at the peak was, however, not predicted to be as high as in LQC. An additional amplification on the very large scales was also predicted in the quintom model. Despite these differences, at the observationally accessible low scales, the effects due to the LQC bounce and the quintom bounce are mostly indistinguishable. Therefore, complementary observational methods have to be proposed to distinguish between such models. A possible distinction could be given e.g. from the analysis of non-Gaussianity production within LQC.

VI. CONCLUSIONS

This study establishes the full background dynamics in bouncing models with holonomy corrections. Although this has already been claimed before, we confirm that due to the sudden change of sign of the Hubble parameter, inflation is nearly unavoidable. In this paper, we have considered a particular model of inflation where the content of the universe is dominated by a massive scalar field. We have investigated the details by both analytical and numerical studies the primordial power spectrum of gravitational waves. It exhibits several characteristic features, namely, a $\mathcal{P}_T \propto k^2$ IR power suppression, oscillations, and a bump at k_* . In the UV regime, the standard inflationary spectrum $\mathcal{P}_T \propto k^{-2\epsilon}$ is recovered. The primordial tensor power spectrum transforms into *B*-type CMB polarization. The performed investigations therefore open the window

for observational tests of the model, in particular, through the amplification which occurs while approaching $k \rightarrow k_*$. The observed structures correspond to the UV region in the spectrum. If the present scale $\lambda_* \sim 1/k_*$ is not much larger than the size of horizon, then the effects of the bounce should be, in principle, observable. In particular, one should expect amplification, rather than suppression of the *B*-type polarization spectrum at the low multipoles. The suppression for $k < k_*$ becomes dominant at the much larger scale, probably far above the horizon. While the *B*-type polarization has not been detected yet, there are huge efforts in this direction. Experiments such as PLANCK [19], BICEP [20], or QUIET [21] are (partly) devoted to the search of the *B* mode. Even with present observational constraints, one can already exclude some evolutionary scenarios and possible values of the parameters; in particular, the inflaton mass m and position of the bump k_* in the spectrum. We address this interesting issue elsewhere [22]. There are also still several points to study around this model:

- (i) How is the scenario modified when quantum back-reaction is taken into account (in particular when the potential energy of the field is not negligible at the bounce)?
- (ii) How is the power spectrum modified by inverse-volume terms in this framework? Although the background dynamics should not be fundamentally altered, the spectrum could be significantly modified.
- (iii) How do those results compare with models dealing with *classical* bounces (see, e.g., [23])? If the IR power suppression is probably a generic feature of bounces, the detailed features are model-dependent.

Together with the known success of LQC (The singularity resolution, the correct low-energy behavior, etc.), the facts that (1) inflation naturally occurs and (2) observational features can be expected from the model, are strong cases for loop cosmology. Those two points are the main results of this paper.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Hublot-Genève company. J. M. has been supported by the Astrophysics Poland-France Fund and by Polish Ministry of Science and Higher Education Grant No. N N203 386437. J. G. acknowledges financial support from the Groupement d'Intérêt Scientifique (GIS) 'consortium Physique des 2 Infinis (P2I)'.

INFLATION IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: DYNAMICS ...

PHYSICAL REVIEW D **81**, 104049 (2010)

- [1] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004); Living Rev. Relativity **1**, 1 (1998); L. Smolin, [arXiv:hep-th/0408048v3](#); T. Thiemann, Lect. Notes Phys. **631**, 41 (2003); A. Perez, [arXiv:gr-qc/0409061v3](#).
- [2] M. Bojowald, Living Rev. Relativity **11**, 4 (2008); A. Ashtekar, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 707 (2009).
- [3] A. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008).
- [4] E. Komatsu *et al.*, [arXiv:1001.4538v1](#) [Astrophys. J. Suppl. Ser. (to be published)].
- [5] A. Ashtekar and D. Sloan, [arXiv:0912.4093](#).
- [6] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **89**, 261301 (2002).
- [7] K. A. Meissner, Classical Quantum Gravity **21**, 5245 (2004).
- [8] P. Singh, K. Vandersloot, and G. V. Vereshchagin, Phys. Rev. D **74**, 043510 (2006).
- [9] J. Mielczarek, Phys. Rev. D **81**, 063503 (2010).
- [10] D. W. Chiou and K. Liu, Phys. Rev. D **81**, 063526 (2010).
- [11] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **100**, 221301 (2008); [arXiv:1002.2618](#).
- [12] P. Dzierzak, J. Jezierski, P. Malkiewicz, and W. Piechocki, Acta Phys. Pol. B **41**, 717 (2010).
- [13] P. Malkiewicz and W. Piechocki, Phys. Rev. D **80**, 063506 (2009).
- [14] D. Mulryne and N. Nunes, Phys. Rev. D **74**, 083507 (2006); J. Mielczarek and M. Szydlowski, Phys. Lett. B **657**, 20 (2007); E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, Phys. Rev. D **77**, 023510 (2008); J. Mielczarek, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11** (2008) 011; E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, Phys. Rev. D **79**, 023508 (2009); J. Grain and A. Barrau, Phys. Rev. Lett. **102**, 081301 (2009); A. Barrau and J. Grain, [arXiv:0805.0356v1](#); J. Mielczarek, Phys. Rev. D **79**, 123520 (2009); M. Shimano and T. Harada, Phys. Rev. D **80**, 063538 (2009); J. Grain, A. Barrau, and A. Gorecki, Phys. Rev. D **79**, 084015 (2009); J. Grain, [arXiv:0911.1625](#); A. Barrau, [arXiv:0911.3745](#); J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau, and A. Gorecki, Phys. Rev. D **81**, 024040 (2010).
- [15] M. Bojowald and G. M. Hossain, Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008).
- [16] J. Mielczarek, Phys. Rev. D **79**, 123520 (2009).
- [17] Y. F. Cai and X. Zhang, J. Cosmol. Astropart. Phys. **06** (2009) 003.
- [18] Y. F. Cai, T. t. Qiu, J. Q. Xia, and X. Zhang, Phys. Rev. D **79**, 021303 (2009).
- [19] G. Efstathiou *et al.* (Planck Collaboration), [arXiv:astro-ph/0604069](#).
- [20] H. C. Chiang *et al.*, Astrophys. J. **711**, 1123 (2010).
- [21] D. Samtleben (f. t. Q. Collaboration), Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **122**, 1353 (2007).
- [22] J. Grain *et al.*, (unpublished).
- [23] F. T. Falciano, M. Lilley, and P. Peter, Phys. Rev. D **77**, 083513 (2008).

Conclusion

Dans cette étude, nous avons bien observé la présence de l'inflation. Le fait qu'elle apparaisse naturellement en cosmologie quantique à boucles, sans 'ajustement fin' nécessaire est une des grandes forces de ce modèle. L'approche analytique a permis de voir les caractéristiques principales d'un spectre sous l'action d'un rebond :

- le spectre dans la limite infrarouge évolue en k^2 : cela peut se comprendre par le fait que les grandes distances, dans un univers en contraction, sortent de l'horizon avec le spectre du vide de Minkowski, se figent et ne subissent pas ensuite l'inflation.
- le spectre dans la limite ultraviolette est bien quasiment invariant d'échelle comme attendu.
- entre ces deux régimes, le spectre présente des oscillations : au niveau du rebond, tous les modes sont en contact causal et oscillent plus ou moins longtemps suivant la largeur de ce rebond.
- suivant la valeur des corrections au moment du rebond, l'amplitude du spectre sera changée et la première oscillation, correspondant à l'oscillation la plus importante. Elle pourrait alors être beaucoup plus grande que la valeur du spectre à la limite ultraviolette et avoir peut-être une conséquence observable.

L'étude numérique a permis l'obtention d'un spectre similaire, avec cependant une différence dans la limite infrarouge où on peut observer un léger décalage entre la pente en k^2 et la première oscillation : cela est du à l'existence dans la dynamique de l'univers d'une phase de superinflation [77] [78]. Il pourrait ici s'agir d'une caractéristique permettant de distinguer un rebond 'quantique' d'un rebond 'classique' [79]. On a pu ainsi confirmer ce qui avait été observé par le modèle analytique, et voir aussi que suivant la masse du champ d'inflaton, l'amplitude du spectre dans sa partie classique correspondait bien à une évolution en m^2 , comme dans une inflation slow-roll. L'étude faite par [76] n'a considéré que le rebond puisque le champ de matière est non-massif, et ce spectre a été courbé sous l'action de l'inflation, ce que corrobore finalement notre travail.

La forme du spectre de puissance étant compliquée, nous avons décidé pour une étude future d'en utiliser une description effective. Nous avons alors défini une fonction approximative qui encode ses caractéristiques aux limites ultraviolette et infrarouge, et seule la plus grande des oscillations est prise en compte, comme illustré sur la figure Fig.(13) de l'article. On a ainsi paramétré le spectre par l'amplitude R de la première oscillation par rapport à la valeur du spectre à la limite classique, et par le nombre d'onde correspondant à la position de cette amplitude k_* , tels que son expression soit donnée par

$$\mathcal{P}_T = \frac{\mathcal{P}_T^{STD}}{1 + \left(\frac{k_*}{k}\right)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + \left(\frac{k}{k_*}\right)^2} \right], \quad (9.1)$$

avec \mathcal{P}_T^{STD} l'expression du spectre de puissance standard. Puisqu'il est possible de rattacher les caractéristiques du spectre aux paramètres fondamentaux de la théorie, comparer ce spectre primordial avec les observations nous renseignera sur la physique prédite par ce modèle.

Chapitre 10

Observations possibles du rebond par les perturbations tensorielles en Cosmologie Quantique à Boucles

Introduction

Actuellement, les modes B n'ont jamais pu être observés lors d'une étude du fond diffus cosmologique, mais des limites ont été obtenues sur les amplitudes du spectre. Le spectre en température des photons est, quant à lui, très bien mesuré par WMAP, et aussi très bien décrit par le modèle Λ -CDM.

Dans le travail précédent, on a vu que le rebond induisait une évolution en k^2 pour les petites valeurs de nombres d'onde, ainsi que des oscillations dans le spectre primordial. La question de l'existence de ces structures dans celui en température reste ouverte puisque l'équation du spectre scalaire tenant compte des corrections d'holonomies n'ayant pas encore été dérivée, sa forme reste hypothétique. Le spectre de puissance des perturbations tensorielles dans ce modèle de rebond ayant pu être dérivé par le travail précédent, nous avons voulu savoir si des expériences futures comme le projet CORE avaient une chance de pouvoir détecter les effets dus au bounce. Nous avons pour cela considéré en première approche le spectre primordial donné par l'approximation (9.1) précédente, et regarder l'influence sur les spectres attendus de l'amplitude R et de la position k_* de la première oscillation. Nous avons ainsi intégré cette composante primordiale avec celle donnant les effets de lentille gravitationnelle, et les spectres obtenus ont alors été paramétrés par le jeu de paramètres

$$\theta_i = k_*, R, n_T, T/S, \tau, \quad (10.1)$$

les autres paramètres étant donnés par les paramètres cosmologiques mesurés par WMAP-7ans.

L'étape suivante a alors consisté à regarder quel serait l'espace des valeurs de R et de k_* qui permettrait à une expérience d'observer les effets du rebond. Pour cela, une *analyse de Fisher*¹ a alors été réalisée et nous a permis de regarder le rapport signal-sur-bruit attendu en fonction de ces paramètres. Nous avons ainsi obtenu les gammes de valeurs qui pourraient être observées, et étudié alors quelles seraient les conséquences sur les possibles valeurs des paramètres fondamentaux comme la masse du champ d'inflaton ou bien la valeur de son énergie potentielle au moment du bounce.

Avec les arguments précédents, il est aussi envisageable que les perturbations scalaires subissent les caractéristiques du rebond et voient une partie de leur spectre supprimée pour de faibles valeurs du nombre d'onde. Le spectre en température actuellement observé ne permet pas de conclure sur la présence de cette suppression, mais on peut cependant penser que k_* devrait être plus petit que celui correspondant au rayon de Hubble : suivant cette hypothèse, nous avons alors dérivé des contraintes sur la valeur des paramètres en utilisant les données actuelles.

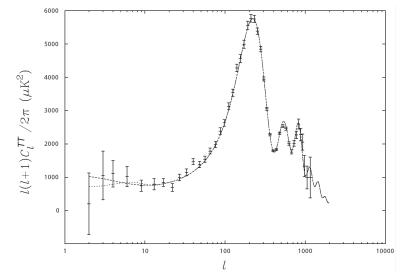


FIG. 10.1 – Spectre de puissance en température avec les données de WMAP-7ans, pour le modèle du rebond (pointillés) et pour la prédiction du modèle standard (tirets) : les barres d'erreur pour les petites valeurs de k étant grande à cause de la **variance cosmique**, on ne peut rien conclure sur la validité du modèle du rebond par rapport au modèle standard [77].

¹Voir les références [80], [81] et [82] pour plus de détails.

PHYSICAL REVIEW D **82**, 123520 (2010)

Observing the big bounce with tensor modes in the cosmic microwave background: Phenomenology and fundamental loop quantum cosmology parameters

Julien Grain^{*}

*Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud, UMR8617, F-91405 Orsay, France
CNRS, F-91405 Orsay, France*

Aurélien Barrau[†] and Thomas Cailleteau[‡]

*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS, IN2P3,
53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

Jakub Mielczarek[§]

Astronomical Observatory, Jagiellonian University, 30-244 Kraków, Orla 171, Poland

(Received 3 September 2010; revised manuscript received 6 November 2010; published 20 December 2010)

Cosmological models where the standard big bang is replaced by a bounce have been studied for decades. The situation has, however, dramatically changed in the past years for two reasons: first, because new ways to probe the early Universe have emerged, in particular, thanks to the cosmic microwave background, and second, because some well grounded theories—especially loop quantum cosmology—unambiguously predict a bounce, at least for homogeneous models. In this article, we investigate into the details the phenomenological parameters that could be constrained or measured by next-generation *B*-mode cosmic microwave background experiments. We point out that an important observational window could be opened. We then show that those constraints can be converted into very meaningful limits on the fundamental loop quantum cosmology parameters. This establishes the early Universe as an invaluable quantum gravity laboratory.

DOI: 10.1103/PhysRevD.82.123520

PACS numbers: 98.80.Es, 04.60.Bc, 98.70.Vc, 98.80.Qc

I. INTRODUCTION

The big-bang paradigm is unquestionably a major achievement of contemporary science. However, in parallel to its successes it raises some very fundamental questions. Among them are of course the dark matter and dark energy issues. Nevertheless, the big-bang singularity remains, in itself, one of the greatest puzzles of the whole approach. It is a nearly unavoidable prediction of general relativity where the theory is, precisely, not correct anymore. Solving the singularity by replacing the big bang by a big bounce is one of the main achievements of loop quantum cosmology (LQC) [1] as a symmetry reduced version of the loop quantum gravity scheme to nonperturbatively quantize general relativity in a background invariant way [2].

Moreover, if the Universe is assumed to be filled with a scalar field described by a self-interaction potential well, the contracting phase—preceding the big bounce—can set the field in the appropriate conditions for a phase of slow-roll inflation to start just after the bounce. In the specific (and simple) case of a massive scalar field, and in the framework of an effective LQC universe, only a tiny amount of potential energy at the bounce is necessary for a long enough phase of inflation to be *naturally* generated

[3–5]. In effective LQC, it is therefore possible both to solve the big-bang singularity and to generate the specific conditions necessary for inflation to take place. Finally, and this is the key point addressed by this paper, such a model can, in principle, be tested: The quantum fluctuations leading to the cosmological perturbations observed in the cosmic microwave background (CMB) anisotropies, though still stretched to astronomical size by inflation, experienced the influence of the contraction phase and of the bounce. As a consequence, the statistical properties of cosmological perturbations are potentially distorted as compared to the standard inflationary prediction. This finally translates into distortions in the angular power spectra of CMB anisotropies.

Up to now, only corrections to tensor modes of the cosmological perturbations have been rigorously derived in LQC [6], potentially leaving a footprint on the CMB *B* mode. Although not yet detected and marginally within the aims of the Planck satellite, the measurement of *B*-mode polarization will be the core of the future CMBPol/B-Pol missions [7]. We therefore investigate a possible detection of the big bounce using future *B*-mode measurements, by considering first the phenomenological aspects and then turning to the fundamental parameters.

Our paper is organized as follows. In Sec. II, we describe how the *B*-mode power spectrum is distorted in a {bouncing + inflationary} universe as compared to the standard prediction from inflation and argue that this distortion can be parametrized by two phenomenological

^{*}julien.grain@ias.u-psud.fr

[†]aurelien.barrau@cern.ch

[‡]cailleteau@lpsc.in2p3.fr

[§]jakub.mielczarek@uj.edu.pl

parameters (denoted k_* and R) encoding the properties of the bounce. The question of a possible detection of the bounce with the B -mode angular power spectrum translates into the determination of specific values of the two phenomenological parameters describing the distorted shape of the tensor power spectrum. Then, Sec. III is devoted to a brief presentation of the Fisher analysis we have used to define the signal-to-noise ratio associated with the cosmological parameters shaping the B -mode power spectrum. We apply this approach to the specific case of k_* and R , assuming the experimental characteristics of the future CMBPol/B-Pol missions, and present our numerical results in Sec. IV. In Sec. V, the range of phenomenological parameters leading to a possible detection is translated into possible values of the more fundamental LQC parameters. We finally discuss our results and conclude in Sec. VI.

II. CMB B MODE WITH A BOUNCE

A. Primordial power spectrum for tensor modes

Many articles [8] have been devoted to the study of gravitational waves in LQC. We focus in this paper on the simplest (and, in our opinion, most convincing) scenario (essentially developed in Refs. [3,4]): a universe filled with a single massive scalar field. This accounts impressively well for the observed Universe: Before the bounce, the Hubble parameter is negative (therefore acting as an antifriction term) and makes the field climb up its potential. After the bounce, the Hubble constant becomes positive (therefore a friction term) and naturally leads to a standard phase of slow-roll inflation. It is remarkable that inflation naturally occurs without any fine-tuning.

The main characteristics of a “bouncy” power spectrum for tensor modes are the following:

- (i) The IR part is k^2 suppressed. This is due to the freezing of very large-scale modes in the Minkowski vacuum. Those modes indeed exit the horizon long *before* the bounce and naturally exhibit a quadratic spectrum.
- (ii) The UV part is identical to the standard prediction. Small scales indeed experience a history basically similar to that of the big-bang scenario: They exit the horizon during inflation and reenter later, leading to the standard nearly scale-invariant spectrum.
- (iii) Intermediate scales, around $k \approx k_*$, exhibit both a bump of amplitude R and damped oscillations. This is mostly due to the fact that all modes are inevitably in causal contact at the bounce (the Hubble parameter vanishes, therefore leading to an infinite Hubble radius).

Those characteristics have been fully determined by numerically solving the equations of motion of tensor perturbations with LQC corrections propagating in a {bouncing + inflationary} universe [4]. It is worth underlining that those equations of motion, as obtained in

Ref. [6], are derived from an algebra which is anomaly-free at all orders and can be safely used throughout the entire history of the bouncing universe. This may not be true anymore with scalar perturbations.

In our previous work [4], two possible phenomenological descriptions of the primordial tensor power spectrum have been proposed. The first, and more complicated, description introduces three phenomenological parameters to approximate the shape of the time-dependent effective mass of gravity waves propagating in the LQC universe. It captures all the detailed characteristics of the primordial power spectrum. The interested reader is referred to Sec. 4 of Ref. [4] for a detailed discussion.

The second, and simpler one, is summarized by the following equation:

$$\mathcal{P}_T = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \frac{(k/aH)^{n_T}}{1 + (k_*/k)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (k/k_*)^2} \right], \quad (1)$$

where H is the Hubble constant at horizon crossing *after* the bounce. It is more than enough to compute potentially observable effects. In the above formula,

$$\mathcal{P}_T^{\text{STD}} \equiv \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_T}$$

stands for the power spectrum corresponding to the standard inflationary universe, while

$$\frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_T^{\text{STD}}} = \frac{1}{1 + (k_*/k)^2} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (k/k_*)^2} \right]$$

corresponds to the LQC corrections. This spectrum is completely determined by four parameters: R and k_* , encoding the LQC corrections, the spectral index n_T , and the normalization, given by the tensor-to-scalar ratio T/S defined in the UV limit. In the following, the values chosen for T/S correspond to an amplitude of the scalar perturbations given by the WMAP 7-yr best fit, i.e., $\mathcal{A}_S \approx 2.49 \times 10^{-9}$. Though this value assumes a power-law shape for the scalar power spectrum (which is not guaranteed in a bouncy universe), this is only a matter of convention and any change in \mathcal{A}_S can be reabsorbed in a new convention for T/S . Nevertheless, this choice makes sense in the UV limit and allows us to remain consistent with the standard B -mode parametrization. The damped oscillations are approximated by an envelope function, and k_* is simply interpreted as the wave number associated with the modes crossing out the horizon when the phase of slow-roll inflation starts. This parameter will therefore decrease as the number of e -folds of inflation increases.

B. B -mode angular power spectrum

The B -mode angular power spectrum is made of two components:

OBSERVING THE BIG BOUNCE WITH TENSOR MODES IN ...

- (i) the primordial part, due to gravity waves produced in the early Universe, denoted $C_\ell^{B,\text{prim}}$ in the following, and
- (ii) the secondary component, due to lensing converting E mode into B mode, denoted $C_\ell^{B,\text{lens}}$.

1. Primordial component

The shape of the primordial part of C_ℓ^B is driven both by the phenomenological parameters describing the primordial tensor power spectrum [k_* , R , n_T , and T/S if one uses Eq. (1) to parametrize \mathcal{P}_T] and by standard cosmological parameters (in particular, Ω_Λ , Ω_{CDM} , Ω_k , and the optical depth to reionization τ).

First of all, to understand qualitatively how LQC modifies the B -mode angular power spectrum, $C_\ell^{B,\text{LQC}}$ can be roughly approximated by

$$C_\ell^{B,\text{LQC}} = \frac{C_\ell^{B,\text{STD}}}{1 + (\ell_*/\ell)} \left[1 + \frac{4R - 2}{1 + (\ell/\ell_*)} \right]. \quad (2)$$

In the above, $\ell_* = k_*/k_H$, where $k_H \sim 2.3 \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ is the Hubble wave number today, and $C_\ell^{B,\text{STD}}$ stands for the B -mode power spectrum as obtained without LQC corrections (i.e., the B mode obtained by assuming the standard power law for the primordial tensor power spectrum parametrized with n_T and T/S). From this simple parametrization, two regimes can easily be identified, depending on the value of k_*/k_H . For $k_*/k_H > 1$, the LQC B -mode power spectrum exhibits

- (i) a suppression of power for $\ell < \ell_*$ and
- (ii) a bump around $\ell \sim \ell_*$ and
- (iii) coincides with the standard inflationary prediction for $\ell > \ell_*$.

For $k_*/k_H < 1$, the IR suppression corresponds to length scales which are much greater than the observable scales, and the LQC-corrected B -mode power spectrum

- (i) exhibits a boost of power at large angular scales corresponding to the tail of the bump in \mathcal{P}_T and
- (ii) coincides with the standard inflationary prediction at intermediate and small angular scales.

To perform a more detailed analysis, the phenomenological spectra presented in Sec. II A have then been used as inputs for the primordial tensor perturbations and then converted into observable C_ℓ^B spectra by using CAMB [9]. Figure 1 gives an example of how the angular power spectrum is distorted due to the bounce by using Eq. (1) as an input for the tensor spectrum and assuming two different values of the “transition” length scale $k_* = 10^{-4}$ and 10^{-2} Mpc^{-1} . These numerically computed B -mode power spectra are not fundamentally different from the zeroth order approximation of C_ℓ^B given in Eq. (2), although they show some slightly different features.

In Fig. 2, the resulting B -mode spectra with and without the damped oscillations are displayed for the same values

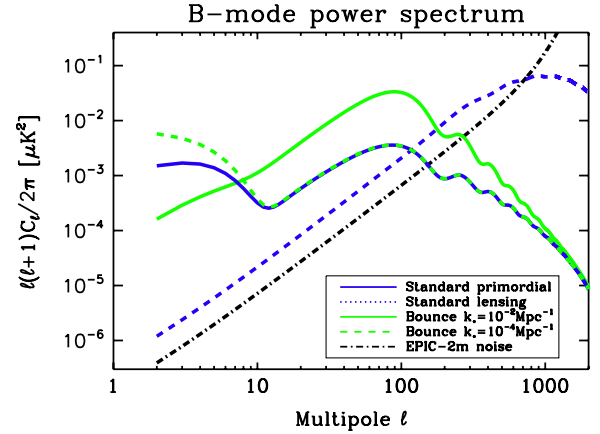
PHYSICAL REVIEW D **82**, 123520 (2010)

FIG. 1 (color online). Standard (blue curve) and typical bounce-modified (green curve) C_ℓ^B spectra for two values of k_* . Other cosmological parameters are given by WMAP 7-yr best fit plus $R = 10$, $n_T = -0.012$, $T/S = 0.05$, and $\tau = 0.087$.

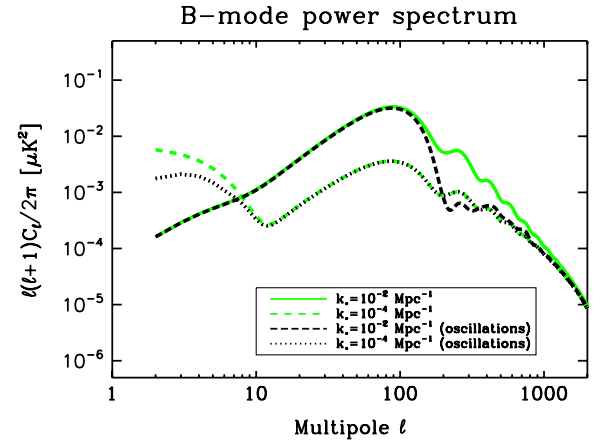


FIG. 2 (color online). B -mode power spectrum computed with (black curves) and without (green curves) oscillations in the bouncy primordial power spectrum of tensor modes for two values of k_* . (Other cosmological parameters are as in Fig. 1.)

of the transition length scale k_* . For $k_* < k_H$, neglecting the damped oscillations in \mathcal{P}_T leads to an overestimation of the boost at a large angular scale. For $k_* > k_H$, using Eq. (1) results in an overestimation of the power just after the bump located at ℓ_* . The effects of oscillations are always small (the IR suppression and the bump at k_* are by far the more important observational features) and can be accounted for in Eq. (1) by just considering an effective bump R_{eff} slightly smaller than R for $k > k_*$.

In Fig. (3), the primordial B -mode power spectrum is shown for different values of Ω_Λ , Ω_{CDM} , and Ω_k and for two values of k_* . For $k_* > k_H$, the main effect is a shift in the overall power spectrum without changing its shape. For $k_* < k_H$, varying the parameters leads to a shift in ℓ for multipoles greater than ~ 10 and to a slight suppression of power for $\ell < 10$.

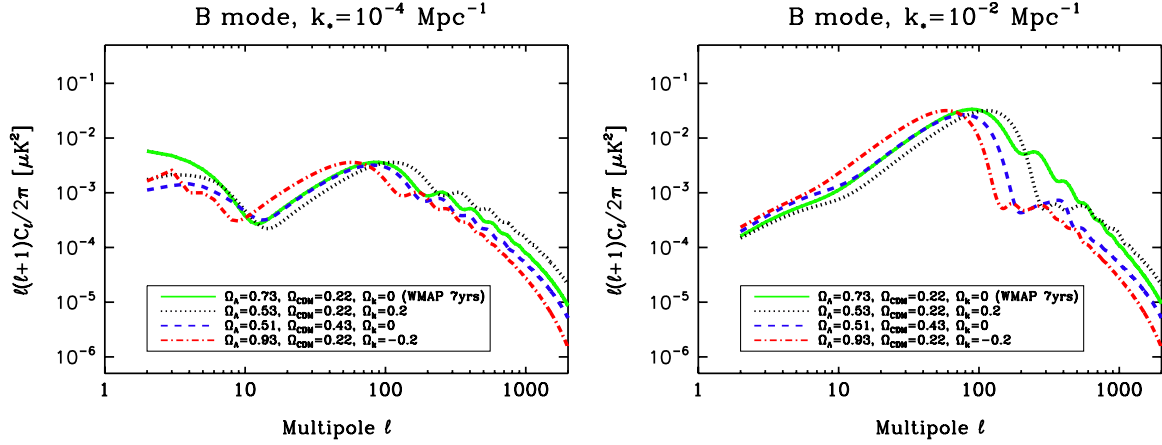


FIG. 3 (color online). B -mode power spectrum computed for different values of Ω_Λ , Ω_{CDM} , and Ω_k and for $k_* = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ (left panel) and $k_* = 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$ (right panel). Other cosmological parameters are $k_* = 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$, $R = 10$, $n_T = -0.012$, $T/S = 0.05$, and $\tau = 0.087$.

Finally, the primordial part of the B -mode angular power spectrum is also shaped by the optical depth to reionization τ . The associated impact can be inferred from the simple expression given by Eq. (2) and is similar to what happens in the standard case. Reionization leads first to a boost of power at large angular scales, roughly scaling as $(1 - e^{-\tau})^2$, and second to a slight suppression at smaller angular scales scaling as $e^{-2\tau}$.

2. Lensing component

The lensing part of the CMB B mode being given by the convolution of the E -mode power spectrum with the deflection field power spectrum, its computation implicitly assumes that the primordial power spectrum of scalar perturbations is known. Unfortunately, the LQC-corrected scalar power spectrum is still being debated, and the exact shape of the secondary component of the B mode cannot be *a priori* safely computed. However, this secondary compo-

nent will be considered as a nuisance parameter (i.e., as an additional noise) spoiling the primordial component used to estimate the cosmological parameters. As a consequence, a reasonable estimate of the lensing B mode is sufficient to investigate the detectability of LQC parameters by using the CMB signal generated by primordial gravity waves.

The lensing B mode without LQC correction is fixed by our theoretical knowledge of the deflection field and by our *observational* knowledge of the temperature (denoted T mode hereafter) and E -mode angular power spectra of the CMB. Any strong modifications of the lensing B -mode power spectrum therefore implicitly assume strong distortions of the T -mode and E -mode angular power spectra. As those spectra are well measured, it is not worth considering a substantial modification of the lensing component. This would anyway be a subdominant effect when compared to other uncertainties.

Some $C_\ell^{B,\text{lens}}$ spectra are displayed in Fig. 4. One is simply derived from the standard inflationary prediction, the amplitude and spectral index of the scalar perturbations being fixed to their WMAP 7-yr best fit values, and the others are obtained by boosting the primordial scalar power spectrum for wave numbers smaller than the Hubble scale. It clearly shows that as long as unrealistic values of the boost (e.g., 10 000) are not considered, the shape of the lensing-induced B -mode power spectrum can safely be fixed to its standard prediction.

III. DETECTING THE BOUNCE: THE STRATEGY

A. Parametrizing the B -mode power spectrum

In view of the previous results, the primordial component of the B -mode angular power spectrum is determined by the five following parameters: k_* , R , n_T , T/S , and τ , denoted θ_i hereafter. The other cosmological parameters

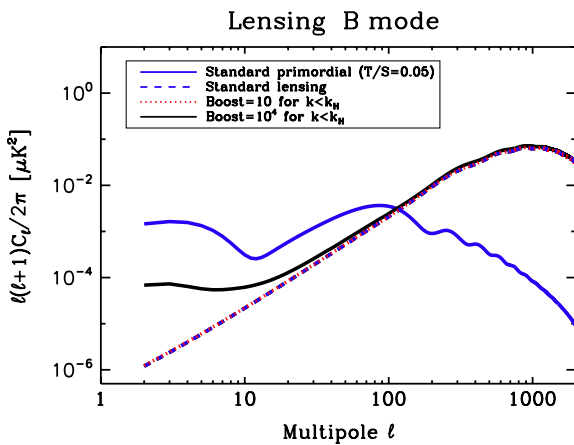


FIG. 4 (color online). Lensing-induced B mode assuming that scalar perturbations might be boosted for $k < k_H$.

will be fixed to the WMAP 7-yr best fit, and the lensing-induced B mode will be fixed to its standard prediction. We will also neglect the effect of damped oscillations. The effect of oscillations on $C_\ell^{B,\text{prim}}$ can anyway be recasted in the “language” of Eq. (1) by introducing an effective bump R_{eff} . Using Eq. (1) to parametrize the primordial tensor power spectrum therefore provides a reliable description of the physics at play in LQC in all cases by considering that the detectable values of R are to be interpreted as an effective bump.

Although k_* , R , n_T , and T/S can be translated into fundamental LQC parameters and specific initial conditions, we first leave them free as “generic phenomenological parameters” so that they can be used to study different bouncing scenarios (see, e.g., [10] for a recent “classical bounce” investigation). Even if it was explicitly derived in a LQC framework, our parametrization is indeed quite general.

B. Fisher analysis

In this framework, the question of a potential detection of the bounce in the B -mode anisotropies translates into specific values for R and k_* . To forecast the errors on the determination of those two parameters, we used a Fisher analysis method, as described in Ref. [11]. (See also last part of Ref. [11] for a more elaborated approach.) The (5×5) Fisher matrix reads

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_\ell \frac{1}{\Delta_\ell^2} \left. \frac{\partial C_\ell^B}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i=\bar{\theta}_i} \left. \frac{\partial C_\ell^B}{\partial \theta_j} \right|_{\theta_j=\bar{\theta}_j}, \quad (3)$$

where $C_\ell^B = C_\ell^{B,\text{prim}} + C_\ell^{B,\text{lens}}$ stands for the {primordial + lensing} B -mode spectrum and Δ_ℓ is the error on the B -mode power spectrum recovery. We consider only the sampling and noise variance, i.e.,

$$\Delta_\ell^2 = \frac{2}{(2\ell + 1)f_{\text{sky}}} \left(C_\ell^B + \frac{N_\ell}{B_\ell^2} \right),$$

where B_ℓ^2 and N_ℓ are the power spectra of the Gaussian beam and the instrumental noise of the experiment, respectively, and f_{sky} is the fraction of the sky used in the analysis. For a CMBPol/B-Pol-like mission, we relied on the experimental specifications of experimental probe of inflationary cosmology EPIC-2m [12] with an 8 arcmin beam, a noise level of $2.2 \mu\text{K-arcmin}$, and a foreground separation accurate enough for a CMB power spectrum estimation using 70% of the sky.

To investigate the influence of degeneracies between parameters, the signal-to-noise ratio (SNR) for the θ_i parameters is computed in three different ways, performing partial marginalization. We first assume a complete *ignorance* of the other four parameters, which results in $\text{SNR} = \theta_i / \sqrt{[F^{-1}]_{ii}}$. Then we assume a perfect *knowledge* of the other parameters leading to $\text{SNR} = \theta_i / \sqrt{[F_{ii}]^{-1}}$.

Finally, we consider that only one parameter is known. If it is the j th one, this translates to $\text{SNR} = \theta_i / \sqrt{[\mathcal{F}^{-1}]_{ii}}$, with \mathcal{F} the (4×4) block of the Fisher matrix built by discarding the j th row and column. We finally search for the values of $\theta_i \equiv k_*$ and R such that $\text{SNR} > 1$ (3) to define the 1σ (3σ) detectable values of these two parameters.

IV. DETECTING THE BOUNCE: PHENOMENOLOGICAL PARAMETERS

A. Detecting the transition length scale k_*

The value of k_* is first varied from 10^{-6} to 1 Mpc^{-1} . The fiducial values for the other four parameters are $\{R, n_T, T/S, \tau\} = \{100, 0, 0.05, 0.087\}$ from which four classes of models are generated by varying the parameters one by one:

- (i) class A: $R \in [10, 10\,000]$;
- (ii) class B: $n_T \in [-0.1, 0]$;
- (iii) class C: $T/S \in [10^{-4}, 10^{-1}]$;
- (iv) class D: $\tau \in [0, 0.15]$.

As shown in Fig. 5, which displays the SNR for k_* under different partial marginalizations, k_* is poorly degenerate with T/S and τ . (The dashed horizontal lines stand for 1σ , 2σ , and 3σ detections.) However, it is strongly degenerate first with R for $k_* < 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$, second with n_T for $10^{-3} < k_* < 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, and third with R and T/S for $k_* > 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. (As demonstrated in the next section, k_* is equally degenerate with T/S and R for $k_* > 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ because R and T/S are strongly degenerate in this regime.) The (k_*, n_T) degeneracy does not affect the potential detection of k_* as the fully marginalized SNR is already greater than 3 in the range where this degeneracy is dominant. However, comparing the solid-black and solid-

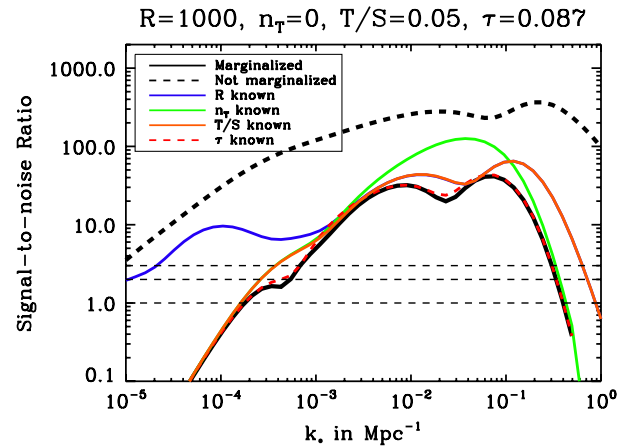


FIG. 5 (color online). SNR for k_* by performing partial marginalization. This shows that k_* is mainly degenerate with R except for the tiny range $k_* \sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, where the main degeneracy is with the tensor spectral index. Horizontal lines stand for 1σ , 2σ , and 3σ detection (from bottom to top).

blue curves shows that the range of 1σ -detectable values of k_* is enhanced from $[1.5 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}] \text{ Mpc}^{-1}$ to $[3 \times 10^{-6}, 9 \times 10^{-1}] \text{ Mpc}^{-1}$ if the (k_*, R) degeneracy is broken. As a consequence, breaking this degeneracy could greatly enhance the potential of detection.

In Figs. 6 and 7, the fully marginalized SNR for k_* is shown for four values of R and four values of T/S , respectively. In both cases, this signal-to-noise ratio first increases with k_* as long as $k_* < 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$ and then decreases for higher values of k_* . Higher values of k_* indeed translate into a boost of the B -mode power for higher values of ℓ , and the LQC distortion of C_ℓ^B is therefore located at multipoles with a smaller cosmic variance, explaining why the SNR first increases with k_* . However, when k_* becomes greater than $\sim 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$, the bump is shifted to $\ell > 100$ and the B -mode power is strongly suppressed for $\ell < 100$. As a consequence, for such high

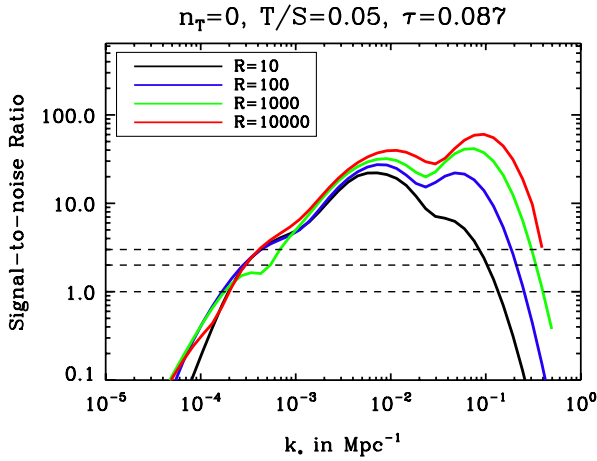


FIG. 6 (color online). Fully marginalized SNR for k_* with $R = 10, 10^2, 10^3$, and 10^4 . (Horizontal lines are as in Fig. 5.)

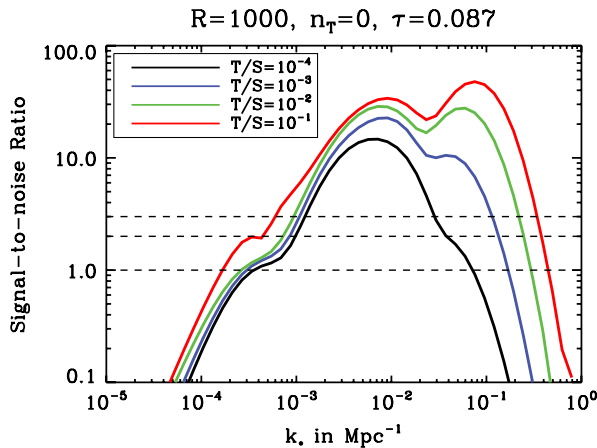


FIG. 7 (color online). Fully marginalized SNR for k_* with $T/S = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$, and 10^{-1} . (Horizontal lines are as in Fig. 5.)

values of k_* , the primordial part at large angular scales is hardly detectable because of its very faint power, and the boost at higher multipoles is completely masked by the lensing-induced B mode, thus explaining why the SNR decreases for those higher values of k_* .

Moreover, our numerical investigations show that the shape of the SNR displayed in Figs. 6 and 7 is the same for all the considered models, which allows us to safely derive a range of detectable values of k_* . The 1σ and 3σ limits for a detection of k_* are given in Table I. As one should have expected, the detection becomes possible for $k_* \geq k_H$. Nevertheless, a detection of $k_* < k_H$ is still possible as the tail of the bump may affect the B -mode power spectrum shape at large angular scales. As previously stated, this latter possibility clearly requires to break the (k_*, R) degeneracy. On the one hand, in the marginalized case, the minimum detectable value of k_* is affected by the values of T/S and only very mildly depends on R , n_T , and τ . On the other hand, the maximum detectable value of k_* depends on both T/S and R but does not depend on the specific values of n_T and τ .

B. Detecting the bump R

Studying R is more intricate as additional degeneracies have to be considered. Our fiducial model is given by $\{k_*, n_T, T/S, \tau\} = \{10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}, 0, 0.05, 0.087\}$, and R is varied from 1 to 10^5 . As for k_* , we built four classes of models by varying each parameter:

- (i) class A: $k_* [\text{Mpc}^{-1}] \in [10^{-5}, 10^{-2}]$;
- (ii) class B: $n_T \in [-0.1, 0]$;
- (iii) class C: $T/S \in [10^{-4}, 10^{-1}]$;
- (iv) class D: $\tau \in [0, 0.15]$.

In Fig. 8, R is shown to be degenerate with different cosmological parameters. Depending on the value of k_* , R is either mainly degenerate with k_* (for low k_* values) or with T/S (for high k_* values). It was already clear from Fig. 5 that the (k_*, R) degeneracy is broken for $10^{-3} < k_* < 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. However, R starts to be strongly degenerate with T/S for $k_* > 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$. This explains first why the marginalized SNR decreases for higher values of R and second why k_* appeared to be equally degenerate with T/S and R (see Fig. 5). The transition from the (k_*, R) -degeneracy regime to the $(T/S, R)$ -degeneracy regime occurs when k_* becomes close to the current Hubble scale. We stress that for $k_* \sim 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$, the dichotomy between the (k_*, R) - and $(T/S, R)$ -degeneracy regimes is not meaningful as R is here equally degenerate with k_* , T/S , and n_T . Nevertheless, such an intricate situation corresponds to a very narrow range of k_* (see the bottom-right panel of Fig. 8).

Because of this k_* -dependent degeneracy, *meaningful* results concerning the detection of R also necessarily depend on k_* . For each class of model, we provide results for $k_* = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$, and 10^{-2} Mpc^{-1} , as summarized in Table II. If degeneracies are indeed broken

TABLE I. Ranges of detectable values of k_* in Mpc^{-1} by assuming complete ignorance (upper part) and perfect knowledge (lower part) of the other cosmological parameters.

Full marginalization			
Model		1σ	3σ
(A)	R		
	10^4	$[1.5 \times 10^{-4}, 6 \times 10^{-1}]$	$[5 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-1}]$
	10	$[1.5 \times 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-1}]$	$[3 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-2}]$
(B)	n_T		
	0	$[1.2 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}]$	$[2.5 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-1}]$
	-0.1	$[1.2 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}]$	$[2.5 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-1}]$
(C)	T/S		
	10^{-1}	$[1.2 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-1}]$	$[6 \times 10^{-4}, 2.5 \times 10^{-1}]$
	10^{-4}	$[3 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-2}]$	$[1.2 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-2}]$
(D)	τ		
	0.15	$[1.2 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}]$	$[3 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-1}]$
	0.01	$[2 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}]$	$[4 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-1}]$
No marginalization			
Model		1σ	3σ
(A)	R		
	10^4	All range accessible	$[2 \times 10^{-6}, 1]$
	10	$[2 \times 10^{-5}, 1]$	$[6 \times 10^{-5}, 7 \times 10^{-1}]$
(B)	n_T		
	0	$[9 \times 10^{-6}, 1]$	$[\times 10^{-5}, 1]$
	-0.1	$[9 \times 10^{-6}, 1]$	$[2 \times 10^{-5}, 1]$
(C)	T/S		
	10^{-1}	$[9 \times 10^{-6}, 1]$	$[10^{-5}, 1]$
	10^{-4}	$[9 \times 10^{-6}, 6 \times 10^{-1}]$	$[2 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-1}]$
(D)	τ		
	0.15	$[10^{-5}, 1]$	$[2 \times 10^{-5}, 1]$
	0.01	$[10^{-5}, 1]$	$[2 \times 10^{-5}, 1]$

(i.e., no marginalization over $\{k_*, n_T, T/S, \tau\}$), the SNR increases for higher values of R . This remains true if marginalization is performed for $k_* \leq k_H$ [i.e., in the (k_*, R) -degeneracy regime], allowing us to derive a lowest detectable value of R . In the remaining cases [i.e., in the $(T/S, R)$ -degeneracy regime], the SNR *decreases* for higher values of R , leading to upper limits on R . As can be concluded from Table II, a detection of R requires one to break the degeneracies if $k_* \leq k_H$, while a detection up to a couple of thousands is possible *without* breaking the degeneracies if $k_* \geq k_H$.

V. DETECTING THE BOUNCE: COSMOLOGICAL INTERPRETATION

A. Fundamental parameters of the LQC universe

Let us now translate those constraints into constraints on the fundamental parameters of LQC. Interestingly, it can be shown that the fundamental parameters (describing either the field itself, the initial conditions, or the LQC corrections) are quite simply related with the observable parameters previously defined, i.e., k_* , R , n_T , and T/S . To derive the following relations, we took into account the LQC corrections for the background dynamics (which

leads to the bounce) and for the propagation of gravitational waves [4].

First of all, the bump amplitude is well approximated by $R \approx (m_{\text{Pl}}/m_\phi)^{0.64}$ (see our detailed analysis presented in [4]) with $m_{\text{Pl}} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV the Planck mass and m_ϕ the inflaton mass, i.e.,

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2.$$

Second, by computing the expansion of the Universe since the time when k_* crossed the horizon and rewriting the different terms entering this ratio [in particular, the number of e -folds during inflation being given by $N_{\text{inf}} \approx (4\pi/m_{\text{Pl}}^2) \int_0^{\phi_{\text{max}}} (V/V') d\phi$], one can show that the transition scale k_* is given by

$$k_* = \frac{\frac{4\pi^{3/2}}{\sqrt{3}} \frac{m_\phi}{m_{\text{Pl}}} \phi_{\text{max}}}{\exp\left(2\pi \frac{\phi_{\text{max}}^2}{m_{\text{Pl}}^2} \frac{T_{\text{RH}}}{T_{\text{eq}}} \left(\frac{g_{\text{RH}}}{g_{\text{eq}}}\right)^{1/3} (1 + z_{\text{eq}})\right)}, \quad (4)$$

where ϕ_{max} is the maximum value of the field, m_ϕ is its mass, T_{RH} and g_{RH} are the reheating temperature and the corresponding number of degrees of freedom, respectively, and $T_{\text{eq}} \simeq 0.75$ eV, $z_{\text{eq}} \simeq 3196$, and $g_{\text{eq}} \simeq 3.9$ are the temperature, red shift, and degrees of freedom at matter-radiation equality, respectively (see, e.g., Sec. 3.4.4 of

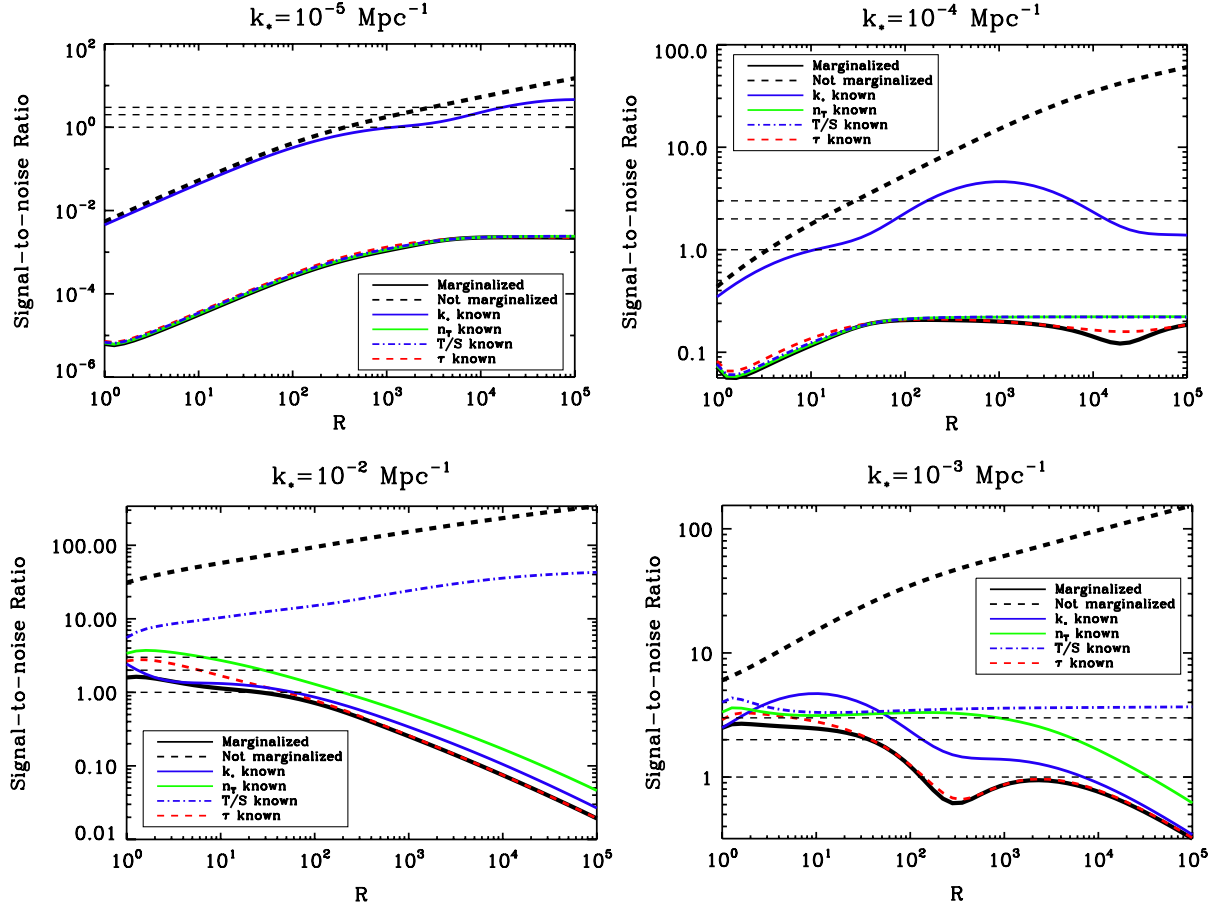


FIG. 8 (color online). SNR for R in the class A model (see the text) with different marginalization options. (Horizontal lines are as in Fig. 5.)

Ref. [13]). In addition, numerical investigations have shown that ϕ_{\max} can be straightforwardly related with the “initial conditions” or, more precisely, with the physical conditions at the bounce:

$$\phi_{\max} \approx \phi_{\text{bounce}} + m_{\text{Pl}} = \left(\frac{\sqrt{2\rho_c}}{m_\phi} \right) x + m_{\text{Pl}}. \quad (5)$$

In this expression, ϕ_{bounce} , ρ_c , and $x^2 = V(\phi_{\text{bounce}})/\rho_c$ correspond, respectively, to the value of the scalar field, the total energy density, and the fraction of potential energy at the bounce. The value of the total energy density at the bounce could be considered as a free parameter of the theory. However, if the Barbero-Immirzi parameter is taken at the value required to recover the Bekenstein black hole entropy, i.e., $\gamma \approx 0.239$, this leads to $\rho_c \approx 0.82 m_{\text{Pl}}^4$. The number of e -folds during inflation is given by ρ_c and by the ratio x/m_ϕ , through

$$N_{\text{inf}} \approx \frac{2\pi}{m_{\text{Pl}}^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_c}}{m_\phi} \right) x + m_{\text{Pl}} \right]^2.$$

For the above-given value of ρ_c , a minimum amount of 60 e -folds during inflation is achieved if $x \geq 1.64 m_\phi/m_{\text{Pl}}$.

It is worth noticing that the number of fundamental parameters is smaller than the number of phenomenological ones [$T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3}$ acting as a unique effective parameter] which leads to a kind of consistency relations for the LQC parameters. Moreover, the $(k_*, R, T/S)$ degeneracies being partially broken by restricting the cosmological interpretation to LQC, the detection of a LQC-induced bounce is *a priori* more likely than the general detection of a bounce. However, we adopt a conservative approach and keep track of the different degeneracies appearing at the phenomenological level by using the fully marginalized limits derived on k_* and R .

B. Detecting fundamental parameters

1. Probing the model with future B-mode experiments

As previously explained, the LQC corrections to scalar modes are not yet known. As a first hypothesis, we therefore assume that the temperature spectrum (the one which is very well measured by WMAP and is about to be still improved by Planck) is not affected. In this case, nearly no constraint can be put with current data and the study is purely prospective. The question we want to answer is

OBSERVING THE BIG BOUNCE WITH TENSOR MODES IN ...

PHYSICAL REVIEW D **82**, 123520 (2010)TABLE II. Range of detectable values of R . Because of degeneracies, the range of detectability mainly depends on T/S and k_* .

(k_*, R) -degeneracy regime ($k_* < k_H$)					
		$k_* = 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$		$k_* = 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$	
Model		Marg. $1\sigma(3\sigma)$	Not marg. $1\sigma(3\sigma)$	Marg. $1\sigma(3\sigma)$	Not marg. $1\sigma(3\sigma)$
(A)		No det.	$>3 \times 10^2 (>3 \times 10^3)$	No det.	$>3 (>30)$
(B)	n_T				
	0	No det.	$>200 (1200)$	No det.	$>1.3 (15)$
	-0.1	No det.	$>300 (3000)$	No det.	$>2 (30)$
(C)	T/S				
	10^{-1}	No det.	$>400 (1000)$	No det.	$>3.5 (30)$
	10^{-4}	No det.	$>1100(10^5)$	No det.	$>10 (700)$
(D)	τ				
	0.15	No det.	$>200 (1500)$	No det.	$>2 (15)$
	0	No det.	$>200 (1500)$	No det.	$>2 (15)$
$(T/S, R)$ -degeneracy regime ($k_* > k_H$)					
		$k_* = 10^{-3} \text{ Mpc}^{-1}$		$k_* = 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$	
Model		Marg. $1\sigma(3\sigma)$	Not marg. $1\sigma(3\sigma)$	Marg. $1\sigma(3\sigma)$	Not marg. $1\sigma(3\sigma)$
(A)		<100 (no det.)	>1 at 6σ	<25 (no det.)	>1 at 30σ
(B)	n_T				
	0	<200 and $[600, 10^4](30)$	>1 at 8σ	<100 (no det.)	>1 at 40σ
	-0.1	<100 (no det.)	>1 at 6σ	<8 (no det.)	>1 at 30σ
(C)	T/S				
	10^{-1}	<200 and $[500, 10^4](<2)$	>1 at 6σ	<100 (no det.)	>1 at 40σ
	10^{-4}	No det.	$>1.2 (20)$	No det.	$>6 (20)$
(D)	τ				
	0.15	$<10^4 (20)$	>1 at 8σ	$<100 (3)$	>1 at 40σ
	0	<150 and $[300, 22\,000] (<60)$	>1 at 8σ	<2 and $[4100] \text{ (no det.)}$	>1 at 40σ

then the following: In which range should the fundamental parameters lie for the LQC effects to be detected through the B -mode spectrum modifications? The amplitude of the expected bump is set by the mass of the field, and the value of the transition scale k_* is set by both the mass of the field and the initial conditions. From the observational viewpoint, k_* is by far the most important parameter. We will therefore translate the detectable range of k_* into detectable regions in the (m_ϕ, ϕ_{\max}) and (m_ϕ, x) planes.

The first estimate can be very easily obtained. Basically, the IR suppression predicted by the model becomes observable when k_* is high enough (otherwise, the suppression occurs only on superhorizon scales). This translates into an upper limit on ϕ_{\max} and therefore into an upper limit on x . By assuming the usual $m_\phi \approx 10^{-6}$ value, the numerical analysis leads to $x < 2 \times 10^{-6}$: The bounce can be discriminated from the standard prediction when x is very small. It means that the LQC effects appear in the B -mode spectrum when the universe is strongly dominated by kinetic energy at the bounce. This is a consistent conclusion as backreaction effects should anyway be added when the potential energy becomes important.

From the detection viewpoint, a more refined estimate can be obtained by using the details of the previous analy-

sis. In this case we require not only that the features of the {bouncing + inflationary} model differ from that standard prediction but also that they can be detected *by themselves*. This is by far more constraining. In this case, the effects become observable when k_* lies within a restricted interval. For a fixed value of m_ϕ , the lower (upper) bound on k_* can still be translated into an upper (lower) limit on ϕ_{\max} (except for a tiny parameter space corresponding to unrealistically small values of ϕ_{\max}) and therefore into an upper (lower) limit on x . On the opposite, for a fixed value of x , the lower (upper) bound on k_* is translated into a lower (upper) limit on m_ϕ . Translating “detectable k_* ” into “detectable (m_ϕ, ϕ_{\max}, x) ” is, however, plagued by two types of uncertainties. First of all, neither the reheating temperature nor the number of degrees of freedom are known. We will therefore let T_{RH} vary from 10^{10} to 10^{16} and g_{RH} vary from its standard model value to its supersymmetry value. Second, the detectable range of k_* depends on the values of the other cosmological parameters. From the fully marginalized 1σ detection presented in Table I, we define three possible ranges of detectable values of k_* :

- (i) pessimistic: $[3 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-2}] \text{ Mpc}^{-1}$,
- (ii) intermediate: $[2 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-1}] \text{ Mpc}^{-1}$, and
- (iii) optimistic: $[1.5 \times 10^{-4}, 6 \times 10^{-1}] \text{ Mpc}^{-1}$.

We stress out that this last uncertainty is mainly associated with the upper bound on k_* . This means that the lower (upper) limit on $x(m_\phi)$ will be mainly affected by uncertainties on other cosmological parameters than the

transition scale, especially R and T/S . (We recall that the above defined detectable ranges account for the different degeneracies. In particular, this range is greatly broadened if the degeneracies with either R , T/S , or both are broken.

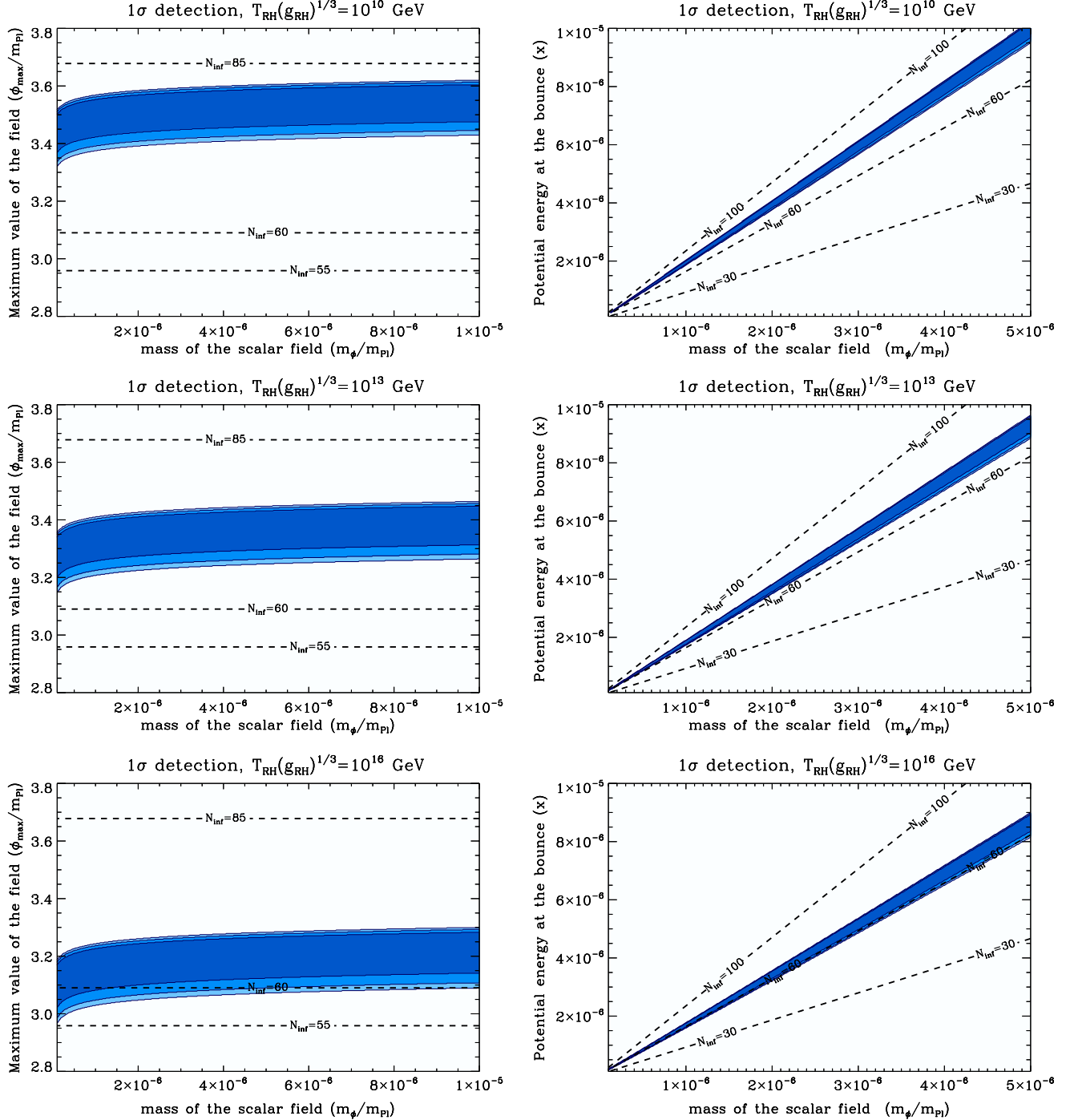


FIG. 9 (color online). 1σ detection of (ϕ_{\max}, m_ϕ) (left panel) and (x, m_ϕ) (right panel) as would be obtained from a detection of k_* in the B -mode power spectrum by assuming three different values of the “reheating parameter,” i.e., $T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3} = 10^{10}, 10^{13}$, and 10^{16} GeV. Three ranges of detectable k_* are considered (see the core of the text), and lighter to darker blue runs from the most optimistic to the less optimistic case.

OBSERVING THE BIG BOUNCE WITH TENSOR MODES IN ...

PHYSICAL REVIEW D **82**, 123520 (2010)

This considerably widens the achievable region of LQC-parameter space. However, as our “translation” is solely based on the potential detection of k_* , conservative forecasts should incorporate our “ignorance” of, e.g., R .)

Our numerical results are summarized in Fig. 9. It displays the detectable regions in the (m_ϕ, ϕ_{\max}) and (m_ϕ, x) planes for different values of the reheating parameters: $T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3} = 10^{10}$, 10^{13} , and 10^{16} GeV. Lighter to darker blue goes from the most optimistic to the most pessimistic ranges of detectable k_* .

The left panels of this figure clearly show that the results do not depend a lot on the choice of the detectable k_* range. The conclusions are therefore robust with respect to changes of R , n_T , T/S , and τ .

The detection region for (m_ϕ, x) lies between two straight lines. Their slopes are fixed, first, by T_{eq} , g_{eq} , z_{eq} , and $T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3}$ and, second, by $k_{*,\max}$ for the lower line and $k_{*,\min}$ for the upper line, with $k_{*,\max(\min)}$ the upper (lower) bound of the detectable values of k_* . On defining

$$\Delta_{\text{RH}} = \frac{4\pi^{3/2}}{T_{\text{eq}} \left(\frac{g_{\text{RH}}}{g_{\text{eq}}} \right)^{1/3} (1 + z_{\text{eq}}) \sqrt{3}},$$

the transition scale is recast as a function of m_ϕ and x as follows:

$$k_* = \frac{\Delta_{\text{RH}} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_c}}{m_{\text{Pl}}} \right) x + m_\phi \right]}{\exp \left[\frac{2\pi}{m_{\text{Pl}}^2} \left(\left(\frac{\sqrt{2\rho_c}}{m_\phi} \right) x + m_{\text{Pl}} \right)^2 \right]}.$$

Except in a very narrow range, a variation of either x or m_ϕ would mostly influence k_* via the exponential. We can therefore approximate the numerator by a constant, dubbed μ_{x,m_ϕ} , to get

$$x \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m_\phi} \right) \approx \frac{m_{\text{Pl}}^2}{\sqrt{2\rho_c}} \left[\sqrt{\frac{\ln(\mu_{x,m_\phi} \Delta_{\text{RH}}/k_*)}{2\pi}} - 1 \right]. \quad (6)$$

As Δ_{RH} decreases for higher values of $T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3}$, this roughly explains why the slope of the detectable region in the (m_ϕ, x) plane shifts down for higher reheating temperatures. Moreover, the logarithmic dependence of this detectable region with $T_{\text{RH}}(g_{\text{RH}})^{1/3}$ underlines the robustness of our results.

Finally, a detection of k_* essentially constrains the values of the ratio (x/m_ϕ) , explaining why a wide band in the (m_ϕ, x) plane is *a priori* detectable, including large values of x and m_ϕ . Nevertheless, the fact that arbitrary small values of x can be detected means, once again, that the LQC effects appear when the universe is strongly dominated by kinetic energy at the bounce. (Moreover, and as explained before, $m_\phi \sim 10^{-6} m_{\text{Pl}}$ being favored, this translates into a detectable value of $x \sim 10^{-6}$.)

Let us summarize our results. Calling $\alpha(\Delta_{\text{RH}}, k_*)$ the right-hand side of Eq. (6), a *detection* of the LQC-induced bounce is obtained if

$$x \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m_\phi} \right) \in [\alpha(\Delta_{\text{RH}}, k_{*,\max}), \alpha(\Delta_{\text{RH}}, k_{*,\min})].$$

However, *discriminating* between the standard inflationary prediction and the LQC prediction requires only that

$$x \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{m_\phi} \right) \leq \alpha(\Delta_{\text{RH}}, k_{*,\min}).$$

(We recall here that higher values of k_* lead to smaller values of α .)

It should also be pointed out that k_* can also be directly related to ϕ_{obs} (the value of the field when the pivot mode crossed the horizon), which is itself related with the tilt of the scalar spectrum [14]. The results based on this method are basically the same.

2. Constraining the parameters with available data

Most of the corrections to the spectrum are *not* due to subtle LQC effects on the propagation of physical modes but to the bounce in itself. Unless some quite surprising cancellation occurs, it is therefore reasonable to assume that scalar modes are in fact modified in a quite similar way. Under this assumption, one can already use the current data to constrain the model. As no k^2 infrared suppression is observed in the scalar power spectrum, it means that $x > 2 \times 10^{-6}$. Stated otherwise, most of the parameter space of the theory is in agreement with the data. This is important as it was demonstrated that most of the parameter space also leads to a long enough inflation phase (with more than 60 e -folds; see [5]).

VI. CONCLUSION

In this article, we have carefully investigated how next-generation B -mode CMB experiments could probe big bounce footprints. Under very general assumptions, it was demonstrated that, as far as phenomenological parameters are concerned, a substantial parameter space could be investigated. Furthermore, it was pointed out that this also makes quantum gravity effects possibly observable, especially in the LQC framework.

Remarks

Recently, a similar and independent study has been released [15]. It relies on the use of k_* and m_ϕ as *cosmological parameters* and can be viewed as a kind of “mixing” of the *phenomenological* and *fundamental* approaches here developed. Moreover, the number of e -folds is set to a fixed value of 60. This turns out to break the $(T/S, R)$ degeneracy—those two phenomenological parameters being both unambiguously determined by m_ϕ

GRAIN *et al.*

only—and one should therefore consider our analysis as more conservative. The latter is based on scalar perturbations with a parametrization involving a jump at a given transition wave number but no additional bump. From a joint likelihood analysis on temperature CMB power spectrum from WMAP 7-yr matter power spectrum from SDSS and SNIa “Union” compilation, a similar upper limit on the transition scale of the order of $2.44 \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$ has been derived.

Second, the cosmological interpretation in terms of a bouncing universe induced by LQC obviously depends on the robustness of the underlying model. In particular, such a bouncing scenario is achieved by considering a homogeneous universe only, and the bounce may not survive in models incorporating inhomogeneous degrees of freedom. Such an open question is still debated. Nevertheless, the above presented study remains relevant

PHYSICAL REVIEW D **82**, 123520 (2010)

for two reasons: First of all, the phenomenological results displayed in Sec. IV, though apparently motivated by LQC, apply to any models predicting a tensor power spectrum with a shape identical to the here-assumed one. Second, though previous studies pinned down that the bounce may not survive to inhomogeneities [16], some recent studies based on the dipole approximation of loop quantum gravity suggest the opposite [17].

ACKNOWLEDGMENTS

Some of the results in this paper have been derived by using the CAMB package [9]. J.G. acknowledges support from the Groupement d’Intérêt Scientifique (GIS) “consortium Physique des 2 Infinis (P2I).” J.M. has been supported by the Polish Ministry of Science and Higher Education Grant No. N203 386437.

-
- [1] M. Bojowald, *Living Rev. Relativity* **11**, 4 (2008); A. Ashtekar, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 707 (2009).
 - [2] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004); *Living Rev. Relativity* **1**, 1 (1998); L. Smolin, [arXiv:hep-th/0408048v3](#); T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* **631**, 41 (2003); A. Perez, [arXiv:gr-qc/0409061v3](#); P. Dona and S. Speziale, [arXiv:1007.0402v1](#).
 - [3] J. Mielczarek, *Phys. Rev. D* **81**, 063503 (2010).
 - [4] J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **81**, 104049 (2010).
 - [5] A. Ashtekar and D. Sloan, *Phys. Lett. B* **694**, 108 (2010).
 - [6] M. Bojowald and G. M. Hossain, *Phys. Rev. D* **77**, 023508 (2008).
 - [7] CMBPol: <http://cmbpol.uchicago.edu/>; B-Pol: <http://www.b-pol.org/index.php>.
 - [8] D. Mulryne and N. Nunes, *Phys. Rev. D* **74**, 083507 (2006); J. Mielczarek and M. Szydlowski, *Phys. Lett. B* **657**, 20 (2007); E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, *Phys. Rev. D* **77**, 023510 (2008); J. Mielczarek, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2008) 011; *Phys. Rev. D* **79**, 123520 (2009); E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, *Phys. Rev. D* **79**, 023508 (2009); J. Grain and A. Barrau, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 081301 (2009); A. Barrau and J. Grain, [arXiv:0805.0356v1](#); M. Shimano and T. Harada, *Phys. Rev. D* **80**, 063538 (2009); J. Grain, A. Barrau, and A. Gorecki, *Phys. Rev. D* **79**, 084015 (2009); J. Grain, *AIP Conf. Proc.* **1241**, 600 (2010); A. Barrau, [arXiv:0911.3745](#); J. Grain, T. Cailleteau, A. Barrau, and A. Gorecki, *Phys. Rev. D* **81**, 024040 (2010).
 - [9] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538**, 473 (2000).
 - [10] F. T. Falciano, M. Lilley, and P. Peter, *Phys. Rev. D* **77**, 083513 (2008); Y.-S. Piao, B. Feng, and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **69**, 103520 (2004); Y.-F. Cai, T.-T. Qiu, J.-Q. Xia, and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **79**, 021303 (2009).
 - [11] L. Verde, H. Peiris, and R. Jimenez, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **01** (2006) 019; D. Baumann *et al.*, *AIP Conf. Proc.* **1141**, 10 (2009); F. Stivoli, J. Grain, S. Leach, M. Tristram, C. Baccigalupi, and R. Stompor, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **408**, 2319 (2010).
 - [12] J. Bock *et al.*, [arXiv:0805.4207v1](#).
 - [13] E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **180**, 330 (2009).
 - [14] J. Mielczarek, M. Kamionka, A. Kurek, and M. Szydlowski, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2010) 1007.
 - [15] Y.-Z. Ma, W. Zhao, and M. L. Brown, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10** (2010) 007; J. Liu, Y.-F. Cai, and H. Li, [arXiv:1009.3372](#).
 - [16] J. Brunneman and T. Thiemann, *Classical Quantum Gravity* **23**, 1395 (2006).
 - [17] M. V. Battisti, A. Marcianò, and C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **81**, 064019 (2010). M. V. Battisti and A. Marcianò, [arXiv:1010.1258v1](#).

Conclusion

En conclusion, ce travail nous a permis d'observer l'existence d'un large espace des paramètres pour k_* et R qui rendrait le modèle testable par de futures observations. Cela laisse donc présager qu'une expérience aura une probabilité non-nulle de pouvoir mesurer un spectre sur lequel les effets quantiques seraient observables. Cependant, seules les perturbations tensorielles ont ici été prises en compte. Le spectre en température étant très bien mesuré, il serait plus intéressant de regarder l'influence des corrections d'holonomies sur le spectre de puissance primordial correspondant aux perturbations scalaires. Or, pour ces perturbations, l'algèbre donnée par les contraintes modifiées n'est pas close et il est nécessaire de faire disparaître les anomalies. L'approche qui considère l'ajout de contre-termes ayant obtenu de bons résultats pour les corrections d'inverse-volume, il serait possible de l'utiliser et faire de même pour le cas des corrections d'holonomie. Une démarche progressive va alors consister à regarder d'abord le cas perturbations vectorielles, et ensuite de complexifier en regardant celui des perturbations scalaires.

Chapitre 11

Résolution des anomalies dans le cas perturbations vectorielles.

Introduction

Les travaux précédents se basent tous sur une expression identique des contraintes dans le cas des corrections d'holonomie [69]. Cette contrainte, qui s'écrit uniquement en fonction des densités de contraintes d'ordre 0 et 2, a d'abord été exprimée dans le cas des perturbations vectorielles [70] pour lesquelles on a utilisé la correspondance

$$\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}[n]. \quad (11.1)$$

Cette modification va alors engendrer une anomalie qui a été annulée par le choix $n = 2$ dans le sinus cardinal. Cependant, ce choix est très restrictif et aurait pu ne pas marcher. D'ailleurs, lorsque l'on essaye de procéder de façon similaire avec les perturbations scalaires, on se rend compte qu'il n'est possible d'annuler l'anomalie que jusqu'à un certain ordre en \bar{k} , ce qui est insatisfaisant dans le régime non-perturbatif au moment du rebond. Heureusement, cette méthode n'est pas la seule existante, et il est possible d'ajouter des contre-termes comme expliqué dans un chapitre précédent : l'algèbre est alors close à tous les ordres.

Nous avons ici cherché à remédier au problème des anomalies introduit par la correspondance (11.1) en ayant recours aux contre-termes dans le cas des perturbations vectorielles. La contrainte hamiltonienne gravitationnelle est alors donnée par

$$S_{grav}^Q[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \left[\bar{N}(C^{(0)} + C^{(2)}) \right], \quad (11.2)$$

où

$$C^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}} (\mathbb{K}[1])^2, \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} C^{(2)} = & -\frac{1}{2\bar{p}^{3/2}} (\mathbb{K}[1])^2 (1 + \alpha_1) (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) + \sqrt{\bar{p}} (\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_c^c \delta_d^d) \\ & - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} (\mathbb{K}[v_1]) (1 + \alpha_2) (\delta E_j^c \delta K_c^j), \end{aligned} \quad (11.4)$$

faisant intervenir les contre-termes α_1 et α_2 , et un paramètre libre v_1 .

Il peut être montré qu'en cosmologie quantique à boucles, la contrainte de Difféomorphisme ne peut subir aucune modification due aux corrections. Cependant, par soucis de généralité, nous avons souhaité voir si cela s'avérait génériquement correcte. On a ainsi considéré la contrainte de Difféomorphisme comme s'écrivant

$$D_{grav}^Q[N^a] = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c \left[-\bar{p}(\partial_k \delta K_c^k) - (\mathbb{K}[v_2]) \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d) \right], \quad (11.5)$$

et les anomalies pourront être annulées par les termes en α_1 et α_2 , mais aussi par le choix possible des paramètres v_1 et v_2 . Le travail effectué a alors consisté à calculer les crochets de Poisson et trouver les équations régissant l'expression des contre-termes précédents, en considérant le cas d'un champ scalaire, et nous avons finalement observé comment était modifiée l'algèbre, et par conséquent les équations du mouvement.

Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology

Jakub Mielczarek¹, Thomas Cailleteau², Aurelien Barrau²
and Julien Grain³

¹ Astronomical Observatory, Jagiellonian University, 30-244 Kraków, Orla 171, Poland

² Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, CNRS/IN2P3, INPG 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

³ Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud 11, CNRS Bâtiments 120-121, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail: jakubm@fuw.edu.pl

Received 10 July 2011, in final form 25 February 2012

Published 28 March 2012

Online at stacks.iop.org/CQG/29/085009

Abstract

We investigate vector perturbations with holonomy corrections in the framework of loop quantum cosmology. Conditions to achieve anomaly freedom for these perturbations are found at all orders. This requires the introduction of counter-terms in the Hamiltonian constraint. We also show that anomaly freedom requires the diffeomorphism constraint to hold its classical form when scalar matter is added although the issue of a vector matter source, required for full consistency, remains to be investigated. The gauge-invariant variable and the corresponding equation of motion are derived. The propagation of vector modes through the bounce is finally discussed.

PACS numbers: 98.80.Jk, 04.60.Pp

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

In the canonical formulation of general relativity, the Hamiltonian is a sum of constraints. In particular, within the Ashtekar framework [1], the Hamiltonian is a sum of three constraints:

$$H_G[N^i, N^a, N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x (N^i C_i + N^a C_a + NC) \approx 0, \quad (1)$$

where $\kappa = 8\pi G$, (N^i, N^a, N) are Lagrange multipliers, C_i is called the Gauss constraint, C_a is the diffeomorphism constraint and C is the Hamiltonian constraint. The sign ' \approx ' means equality on the surface of constraints (i.e. weak equality). One can also define the corresponding smeared constraints as follows:

$$\mathcal{C}_1 = G[N^i] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x N^i C_i, \quad (2)$$

$$\mathcal{C}_2 = D[N^a] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x N^a C_a, \quad (3)$$

$$\mathcal{C}_3 = S[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x N C, \quad (4)$$

that is, such that $H_G[N^i, N^a, N] = G[N^i] + D[N^a] + S[N]$. The Hamiltonian is a total constraint which is vanishing for all multiplier functions (N^i, N^a, N) .

Because $H_G[N^i, N^a, N] \approx 0$ at all times, the time derivative of the Hamiltonian constraint is also weakly vanishing, $\dot{H}_G[N^i, N^a, N] \approx 0$. The Hamiltonian equation $\dot{f} = \{f, H_G[M^i, M^a, M]\}$ therefore leads to

$$\{H_G[N^i, N^a, N], H_G[M^i, M^a, M]\} \approx 0, \quad (5)$$

which, when explicitly written, means

$$\{G[N^i] + D[N^a] + S[N], G[M^i] + D[M^a] + S[M]\} \approx 0. \quad (6)$$

Due to the linearity of the Poisson bracket, one can straightforwardly find that condition (5) is fulfilled if the smeared constraints belong to a first class algebra

$$\{\mathcal{C}_I, \mathcal{C}_J\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) \mathcal{C}_K. \quad (7)$$

In (7), the $f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a)$ are structure functions which, in general, depend on the phase space (Ashtekar) variables (A_b^j, E_i^a) . The algebra of constraints is fulfilled at the classical level due to general covariance. To prevent the system from escaping the surface of constraints, leading to an unphysical behavior, the algebra must also be closed at the quantum level. In addition, it was pointed out in [2] that the algebra of quantum constraints should be strongly closed (*off-shell* closure). This means that relation (7) should hold in the whole kinematical phase space, and not only on the surface of constraints (*on-shell* closure). This should remain true after promoting the constraints to quantum operators.

Loop quantum gravity (LQG) [3] is a promising approach to quantize gravity, based on a canonical formalism parametrized by Ashtekar variables. The methods of LQG applied to cosmological models are known as loop quantum cosmology (LQC) [4]. In LQC, quantum gravity effects are introduced by holonomies of Ashtekar connection. This replacement is necessary because connection operators do not exist in LQG. Rewriting classical constraints in terms of holonomies leads to two types of quantum corrections: the so-called inverse-volume and holonomy corrections. Because the constraints are quantum modified, the corresponding Poisson algebra might not be closed:

$$\{\mathcal{C}_I^Q, \mathcal{C}_J^Q\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) \mathcal{C}_K^Q + \mathcal{A}_{IJ}. \quad (8)$$

Here, \mathcal{A}_{IJ} stands for the anomaly term which can appear due to the quantum modifications. For consistency (closure of algebra), \mathcal{A}_{IJ} is required to vanish. The condition $\mathcal{A}_{IJ} = 0$ implies some restrictions on the form of the quantum corrections. In this paper, we will study this requirement to find a consistent way for introducing quantum holonomy corrections to the vector perturbations.

The question of the construction of an anomaly-free algebra of constraints is especially interesting to address inhomogeneous LQC. Perturbations around the cosmological background are indeed responsible for structure formation in the Universe. This gives a chance to link quantum gravity effects with astronomical observations. In the particular case of the flat FLRW background, the Ashtekar variables can be decomposed as follows:

$$A_a^i = \gamma \bar{k} \delta_a^i + \delta A_a^i \quad \text{and} \quad E_i^a = \bar{p} \delta_i^a + \delta E_i^a, \quad (9)$$

where \bar{k} and \bar{p} parametrize the background phase space, and γ is the so-called Barbero–Immirzi parameter.

The issue of anomaly freedom for the algebra of cosmological perturbations was extensively studied for inverse-volume corrections. It was shown that this requirement can be fulfilled for first-order perturbations. This was derived for scalar [5, 6], vector [7] and tensor perturbations [8]. It is worth mentioning that, for the tensor perturbations, the anomaly freedom is automatically satisfied. Based on the anomaly-free scalar perturbations, predictions for the power spectrum of cosmological perturbations were also performed [9]. This gave a chance to put constraints on some parameters of the model using observations of the cosmic microwave background radiation [10].

The aim of this paper is to address the issue of anomaly freedom for the holonomy-corrected vector perturbations in LQC. It was shown in [7], that these perturbations can be anomaly free up to the fourth order in the canonical variable \bar{k} . This, however, is not sufficient to perform the analysis of the propagation of vector modes through the cosmic bounce. Vector perturbations with *higher order holonomy corrections* were also recently studied [11]. It was shown there that, in this case, an anomaly-free formulation can be found for the gravitational sector. In this paper, we apply a different method, which is based on the introduction of counter-terms in the Hamiltonian constraint. We show that the anomaly-freedom conditions for vector modes with holonomy corrections can be fulfilled in this way. The method is similar to the one used by Bojowald *et al* in the case of cosmological perturbations with inverse-volume corrections. As we will see, the counter-terms do not introduce any higher order holonomy corrections. This way of fulfilling the anomaly freedom is therefore different from what was done in [11], where higher order terms were involved. Moreover, in [11], the issue of anomaly freedom was studied for the gravity sector only and the formulation suffers from ambiguities. In our study, scalar matter is introduced. The presence of this matter term fixes the ambiguity associated with the holonomy correction. It should be underlined that without a vector matter source, one cannot rigorously prove the anomaly cancellation. However, as will be shown in the next sections, our approach is meaningful as the equations derived are, as in [7], compatible with the vector matter assuming $\pi_a = 0$ but $V_a \neq 0$.

Holonomy corrections arise while regularizing classical constraints, when expressing the Ashtekar connection in terms of holonomies. In particular, the regularization of the curvature of the Ashtekar connection F_{ab}^i leads to the factor $\left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma}\right)^2$, which simplifies to \bar{k}^2 in the classical limit $\bar{\mu} \rightarrow 0$. However, the Ashtekar connection does not appear only because of F_{ab}^i ; in the classical perturbed constraints, terms linear in \bar{k} are also involved. In principle, such terms should be holonomy corrected. However, there is no direct expression for them, analogous to the regularization of the F_{ab}^i factor. Nevertheless, one can naturally expect that \bar{k} factors are corrected by the replacement⁴

$$\bar{k} \rightarrow \frac{\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{n\bar{\mu}\gamma}, \quad (10)$$

where n is some unknown integer. It should be an integer because, when quantizing the theory, the $e^{i\gamma\bar{k}}$ factor is promoted to be the shift operator acting on the lattice states. If n was not an integer, the action of the operator corresponding to $e^{in\gamma\bar{k}}$ would be defined in a different basis. Another issue is related with the choice of $\bar{\mu}$, which corresponds to the so-called *lattice refinement*. Models with a power-law parametrization $\bar{\mu} \propto \bar{p}^\beta$ were discussed in detail in the literature. While, in general, $\beta \in [-1/2, 0]$, it was pointed out that the choice $\beta = -1/2$ is favored [13]. This particular choice is called the $\bar{\mu}$ -scheme (new quantization scheme). Studies in this paper are performed for the general power-law case $\bar{\mu} \propto \bar{p}^\beta$.

⁴ This was derived rigorously e.g. for the Bianchi II model [12].

For the sake of simplicity, we use the notation

$$\mathbb{K}[n] := \begin{cases} \frac{\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{n\bar{\mu}\gamma} & \text{for } n \in \mathbb{Z}/\{0\}, \\ \bar{k} & \text{for } n = 0, \end{cases} \quad (11)$$

for the holonomy correction function. The introduction of holonomy corrections is therefore performed by replacing $\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}[n]$. However, factors \bar{k}^2 are simply replaced by $\mathbb{K}[1]^2$, because they arise from the curvature of the Ashtekar connection. For the linear terms, the integers are parameters to be fixed.

2. Vector perturbations with holonomy corrections

Vector modes within the canonical formulation were studied in [7]. It was shown there that

$$\delta E_i^a = -\bar{p}(c_1 \partial^a F_i + c_2 \partial_i F^a), \quad (12)$$

where $c_1 + c_2 = 1$ and the divergence-free condition $\delta_a^i \delta E_i^a = 0$ is fulfilled. The values of c_1 and c_2 depend on the gauge choice. However, due to the Gauss constraint, only symmetric variables are invariant under internal rotations. This is the case for $\delta E^{(a)}_{(i)}$, which is consequently independent of the specific choices of c_1 and c_2 , and should be preferred. The perturbation of the shift vector is parametrized as $\delta N^a = S^a$.

We consider the quantum holonomy-corrected Hamiltonian constraint given by

$$S^Q[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N}(C^{(0)} + C^{(2)})], \quad (13)$$

where

$$C^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[1])^2, \quad (14)$$

$$C^{(2)} = -\frac{1}{2\bar{p}^{3/2}}(\mathbb{K}[1])^2(1 + \alpha_1)(\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) + \sqrt{\bar{p}}(\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_c^c \delta_d^d) \\ - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}(\mathbb{K}[v_1])(1 + \alpha_2)(\delta E_j^c \delta K_c^j). \quad (15)$$

Holonomy corrections were introduced by replacing $\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}[n]$. Two counter-term functions α_1 and α_2 , whose interest will be made clear later, were also added. In the classical limit $\mathbb{K}[n] \rightarrow \bar{k}$, and $\alpha_i = \alpha_i(\bar{p}, \bar{k}) \rightarrow 0$, with $i = 1, 2$. We have assumed here that α_i are functions of the background variables only, and that v_1 is an integer to be fixed. The Hamiltonian constraint (13) corresponds to the one investigated in [7], while setting $\alpha_i = 0$. However, as we will show, it is necessary to introduce these additional factors, which vanish in the classical limit. These factors can, of course, also be viewed as contributions from the two counter-terms

$$S_{C1} = -\frac{\alpha_1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \frac{\bar{N}}{2\bar{p}^{3/2}} (\mathbb{K}[1])^2 (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j), \quad (16)$$

$$S_{C2} = -\frac{\alpha_2}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \frac{2\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}} (\mathbb{K}[v_1]) (\delta E_j^c \delta K_c^j) \quad (17)$$

to the holonomy-corrected Hamiltonian constraint.

A similar method of counter-terms was successfully applied for perturbations with inverse-volume corrections. In that case, it was possible to fix the counter-terms so as to make the algebra anomaly free. In this paper, we follow the same path so as to find explicit expressions for α_1 and α_2 .

For the sake of completeness, we also introduce holonomy corrections to the diffeomorphism constraint, as follows:

$$D^Q[N^a] = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c [-\bar{p}(\partial_k \delta K_c^k) - (\mathbb{K}[v_2]) \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d)], \quad (18)$$

where v_2 is an unknown integer. It is worth emphasizing here that within LQG, the diffeomorphism constraint is fulfilled at the classical level while constructing the diffeomorphism-invariant spin network states. If LQC was really derived from the full LQG theory, the classical form of the diffeomorphism constraint should therefore be used. However, at this early stage of the understanding of LQC, it might be safe to allow for some generalizations by introducing the holonomy correction also to the diffeomorphism constraint. This hypothesis was already studied in [14] in the case of holonomy-corrected scalar perturbations. It was assumed there that the holonomy correction function was given by $\mathbb{K}[2]$. In this work, we prefer to keep a more general expression $\mathbb{K}[v_2]$ with a free v_2 parameter. We will investigate whether this additional modification can help to fulfil the anomaly-freedom conditions.

In order to investigate the algebra of constraints, the Poisson bracket has to be defined. We start with the gravity sector for which the Poisson bracket can be decomposed as follows:

$$\{\cdot, \cdot\} = \frac{\kappa}{3V_0} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \right) + \kappa \int_{\Sigma} d^3x \left(\frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} - \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \right). \quad (19)$$

The algebra of constraints (13) and (18) shall now be investigated. Using the Poisson bracket (19), we find

$$\{S^Q[N_1], S^Q[N_1]\} = 0, \quad (20)$$

$$\{D^Q[N_1^a], D^Q[N_2^a]\} = 0, \quad (21)$$

$$\{S^Q[N], D^Q[N^a]\} = \frac{\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}} \mathcal{B} D^Q[N^a] + \frac{\bar{N}}{\kappa \sqrt{\bar{p}}} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d) \delta E_k^d \mathcal{A}, \quad (22)$$

where $\mathcal{B} := (1 + \alpha_2) \mathbb{K}[v_1] + \mathbb{K}[v_2] - 2\mathbb{K}[2]$ and \mathcal{A} is the anomaly function which, for reasons that shall be made clear later, is decomposed into two parts $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, where

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{B} \mathbb{K}[v_2], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 = & 2\mathbb{K}[2] \bar{p} \frac{\partial \mathbb{K}[v_2]}{\partial \bar{p}} - \frac{1}{2} (\mathbb{K}[1])^2 \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}) - 2\mathbb{K}[1] \bar{p} \frac{\partial \mathbb{K}[1]}{\partial \bar{p}} \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}) \\ & + (1 + \alpha_2) \mathbb{K}[v_1] \mathbb{K}[v_2] - \frac{1}{2} \mathbb{K}[1]^2 (1 + \alpha_1). \end{aligned} \quad (24)$$

This decomposition was made such that, in the classical limit ($\bar{\mu} \rightarrow 0$), both contributions to the anomaly vanish separately. Using the relation

$$\bar{p} \frac{\partial \mathbb{K}[n]}{\partial \bar{p}} = (\bar{k} \cos(n \bar{\mu} \gamma \bar{k}) - \mathbb{K}[n]) \beta, \quad (25)$$

the second contribution can be rewritten as

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 = & -2\beta \mathbb{K}[2] \mathbb{K}[v_2] + (1 + \alpha_2) \mathbb{K}[v_1] \mathbb{K}[v_2] + (2\beta - 1/2) (\mathbb{K}[1])^2 \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}) \\ & - \frac{1}{2} (\mathbb{K}[1])^2 (1 + \alpha_1). \end{aligned} \quad (26)$$

The full anomaly term is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & 2(1 + \alpha_2) \mathbb{K}[v_1] \mathbb{K}[v_2] - \frac{1}{2} (\mathbb{K}[1])^2 (1 + \alpha_1) - 2(1 + \beta) \mathbb{K}[2] \mathbb{K}[v_2] + \mathbb{K}[v_2]^2 \\ & + (2\beta - 1/2) (\mathbb{K}[1])^2 \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}). \end{aligned} \quad (27)$$

tel-00749162, version 2 - 7 Nov 2012

kept at its classical form. The value $v_1 = 2$ obtained in this case was also used to fix the ambiguity for the holonomy-corrected tensor perturbations [8]. If the holonomy-modified diffeomorphism constraint is used, the ambiguity cannot be fixed anymore due to the infinite number of solutions to equation (31).

As we have shown, the modification of the diffeomorphism constraint does not help with satisfying the anomaly-freedom conditions in the absence of counter-terms. In this case, the anomaly freedom can be fulfilled up to the fourth order in x . In the semi-classical limit $x \ll 1$, the anomaly cancellation up to the fourth order might be a good approximation. However, when approaching the bounce, where $x = \frac{\pi}{2}$, contributions from higher order terms become significant, and the effects of the anomaly cannot be neglected anymore. Studies of vector perturbations during the bounce phase cannot be performed in such a setup. In order to study vector perturbations through the bounce, the anomaly cancellation at all orders is required. This probably makes the introduction of counter-terms mandatory.

3.2. The general case

Let us consider the general case with non-vanishing counter-terms. In this case, the requirement $\mathcal{A} = 0$ can be translated into a relation between the two counter-terms α_1 and α_2 :

$$\alpha_1 = -1 + 4(1 + \alpha_2) \frac{\mathbb{K}[v_1]\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[1]^2} - 4(1 + \beta) \frac{\mathbb{K}[2]\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[1]^2} + 2 \frac{\mathbb{K}[v_2]^2}{\mathbb{K}[1]^2} + (4\beta - 1) \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}). \quad (32)$$

With this choice for the α_1 function, the anomaly is removed. However a significant ambiguity remains. Namely, the function α_2 together with the parameters v_1 and v_2 remains undetermined. A particularly interesting case corresponds to the choice $\alpha_2 = 0$. This determines α_1 . Of course, this also works the other way round: one can set $\alpha_1 = 0$ and derive the correct expression for α_2 . Therefore, two special cases, heuristically motivated, where one of the counter-terms is vanishing, are worth studying:

$$\alpha_1 = -1 + 4 \frac{\mathbb{K}[v_1]\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[1]^2} - 4(1 + \beta) \frac{\mathbb{K}[2]\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[1]^2} + 2 \frac{\mathbb{K}[v_2]^2}{\mathbb{K}[1]^2} + (4\beta - 1) \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}), \quad (33)$$

$$\alpha_2 = 0, \quad (34)$$

and

$$\alpha_1 = 0, \quad (35)$$

$$\alpha_2 = -1 + \frac{1}{4} \frac{(\mathbb{K}[1])^2}{\mathbb{K}[v_1]\mathbb{K}[v_2]} + (1 + \beta) \frac{\mathbb{K}[2]}{\mathbb{K}[v_1]} - \frac{1}{2} \frac{\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[v_1]} - (\beta - 1/4) \frac{(\mathbb{K}[1])^2 \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\mathbb{K}[v_1]\mathbb{K}[v_2]}. \quad (36)$$

To conclude, at least one counter-term is necessary to fulfil the anomaly-freedom conditions for the gravity sector.

3.3. The $\mathcal{B} = 0$ case

Another possible way to fix the ambiguity in the choice of the α_1 and α_2 functions could be to set $\mathcal{B} = 0$. With this restriction, the anomaly cancellation is fulfilled by imposing $\mathcal{A}_2 = 0$ as $\mathcal{A}_1 \propto \mathcal{B} = 0$. As mentioned earlier, both \mathcal{A}_2 and \mathcal{A}_1 separately tend to zero in the classical limit, making this decomposition meaningful.

In this case, the Poisson bracket between the Hamiltonian and diffeomorphism constraints is just $\{S^Q[N], D^Q[N^a]\} = 0$. The conditions $\mathcal{B} = 0$ and $\mathcal{A}_2 = 0$ can be translated into expressions for the α_1 and α_2 functions:

$$\alpha_1 = -1 + 4(1 - \beta) \frac{\mathbb{K}[2]\mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[1]^2} - 2 \frac{\mathbb{K}[v_2]^2}{\mathbb{K}[1]^2} + (4\beta - 1) \cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}), \quad (37)$$

$$\alpha_2 = -1 + \frac{2\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[v_2]}{\mathbb{K}[v_1]}. \quad (38)$$

The expressions for α_1 and α_2 are parametrized by the integers v_1 and v_2 only. However, the dependence upon v_1 vanishes when α_2 is used in the Hamiltonian constraint.

The derived expressions for α_1 and α_2 do contain $\mathbb{K}[n]$ functions in the denominators. In principle, α_1 and α_2 could therefore diverge for some values of \bar{k} . However, in the counter-terms S_{C1} and S_{C2} , α_1 is multiplied by $\mathbb{K}[1]^2$ and α_2 by $\mathbb{K}[v_1]$. The subsequent cancellation prevents any physical divergence from occurring.

4. Introducing matter

We have shown that the gravity sector of the vector perturbations with holonomy corrections can be made anomaly free. We will now extend this result by introducing the scalar matter. The matter Hamiltonian does not depend on the Ashtekar connection and is therefore not subject to holonomy corrections. Furthermore, for vector perturbations, $\delta N = 0$. The matter Hamiltonian is perturbed up to the second order as follows:

$$H_m[N] = \bar{H}_m + \delta H_m = \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (C_m^{(0)} + C_m^{(2)}), \quad (39)$$

where

$$C_m^{(0)} = \bar{p}^{3/2} \left[\frac{1}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}) \right]. \quad (40)$$

The value of $C_m^{(2)}$ is given by

$$C_m^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\delta \pi^2}{\bar{p}^{3/2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} \delta^{ab} \partial_a \delta \varphi \partial_b \delta \varphi + \frac{1}{2} \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^{3/2}} - \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \right) \frac{\delta_c^k \delta_d^j \delta E_j^c \delta E_k^d}{4 \bar{p}^2}, \quad (41)$$

where we have used the condition $\delta_a^i \delta E_i^a = 0$. The matter diffeomorphism constraint is given by

$$D_m[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x \delta N^a \bar{\pi} (\partial_a \delta \varphi). \quad (42)$$

The total Hamiltonian and diffeomorphism constraints are

$$S_{\text{tot}}[N] = S^Q[N] + H_m[N], \quad (43)$$

$$D_{\text{tot}}[N^a] = D^Q[N^a] + D_m[N^a]. \quad (44)$$

The resulting Poisson brackets are the following:

$$\{S_{\text{tot}}[N_1], S_{\text{tot}}[N_1]\} = 0, \quad (45)$$

$$\{D_{\text{tot}}[N_1^a], D_{\text{tot}}[N_2^a]\} = 0, \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
\{S_{\text{tot}}[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} &= \frac{\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}} \mathcal{B} D^0[N^a] + \frac{\bar{N}}{\kappa \sqrt{\bar{p}}} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d) \delta E_k^d \mathcal{A} \\
&+ [\cos(v_2 \bar{\mu} \gamma \bar{k}) - 1] \frac{\sqrt{\bar{p}}}{2} \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\bar{\varphi}) \right) \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \partial_c (\delta N^a) \delta_a^j \delta E_j^c \\
&+ \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}^{3/2}} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\partial_a \delta N^a) \delta \pi - \bar{p}^{3/2} V_{\varphi}(\bar{\varphi}) \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\partial_a \delta N^a) \delta \varphi.
\end{aligned} \quad (47)$$

Anomaly freedom requires $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{A} = 0$, $v_2 = 0$ (classical diffeomorphism constraint) and also $\delta\varphi = 0 = \delta\pi$. The latter conditions $\delta\varphi = 0 = \delta\pi$ are due to the fact that metric scalar perturbations are not considered. Consistently, scalar field perturbations are vanishing too. In fact, one could set $\delta\varphi = 0 = \delta\pi$ from the very beginning but, without assuming this, it can be shown that the condition $\delta\varphi = 0 = \delta\pi$ in fact resulting from the anomaly freedom.

The associated counter-terms are given by (37) and (38) with $v_2 = 0$. Two non-vanishing counter-terms are required in contrast to the gravity sector, where only one counter-term was sufficient to fulfil the anomaly-freedom conditions. The integer v_1 remains undetermined, but the dependence upon this parameter cancels out in the Hamiltonian constraint. Namely, applying the counter-terms (37) and (38) with $v_2 = 0$, we find that the anomaly-free Hamiltonian constraint is given by

$$S_{\text{free}}^Q[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N} (C_{\text{free}}^{(0)} + C_{\text{free}}^{(2)})], \quad (48)$$

where

$$C_{\text{free}}^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[1])^2, \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{free}}^{(2)} &= -\frac{1}{2\bar{p}^{3/2}} [4(1 - \beta)\mathbb{K}[2]\bar{k} - 2\bar{k}^2 + (4\beta - 1)\mathbb{K}[1]^2] (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) \\
&+ \sqrt{\bar{p}} (\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_c^k \delta_d^j) - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} (2\mathbb{K}[2] - \bar{k}) (\delta E_j^c \delta K_c^j).
\end{aligned} \quad (50)$$

The gravitational diffeomorphism constraint holds its classical form ($v_2 = 0$). This is in agreement with LQG expectations. Interestingly, this can also be obtained here as a result of anomaly freedom.

The obtained anomaly-free Hamiltonian (48) is determined up to the choice of the $\bar{\mu}$ functions. There are no other remaining ambiguities. The $\bar{\mu}$ function appears in definition of the $\mathbb{K}[n]$ function. Because of this, there is also an explicit appearance of the factor β in equation (50). The choice $\beta = -1/2$ is preferred by various considerations [13]. Recently, this value was shown to be required also by the conditions on the anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections [15]. For this choice of the β parameter, the remaining freedom is a parameter of proportionality in relation $\bar{\mu} \propto \bar{p}^{-1/2}$. This parameter can be written as $\sqrt{\Delta}$, so $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta/\bar{p}}$. The parameter Δ has interpretation of physical area, around which the elementary holonomy is defined. It is expected that $\Delta \sim l_{\text{Pl}}^2$, where l_{Pl} is the Planck length. However, determination of the accurate value of Δ is subject to empirical verifications.

It is worth noting about the Hamiltonian constraint (48) that the effective holonomy corrections, due to the counter-terms, are no longer *almost periodic functions*, defined as follows [16]:

$$f(\bar{k}) = \sum_n \xi_n e^{i\bar{\mu}\gamma\bar{k}n}. \quad (51)$$

In this expression, n runs over a finite number of integers and $\xi_n \in \mathbb{C}$. This does not lead to any problem at the classical level. However, difficulties may appear when going to the quantum theory on lattice states. This is because the quantum operator corresponding to \bar{k} does not exist

in contrast to the $\mathbb{K}[n]$ functions, which are almost periodic functions. This problem does not exist if the gravitational sector, without any matter content, is considered alone. However, the diffeomorphism constraint then has to be holonomy corrected, as studied previously. In such a case, the background terms in the anomaly-free gravitational Hamiltonian are almost periodic functions. The loop quantization can therefore be directly performed.

5. Gauge-invariant variable

The coordinate transformation $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ generates a tensor-gauge transformation. In the case of vector modes, the coordinate transformation is parametrized by the shift vector $N^a = \xi^a$, where $\xi^a_{,a} = 0$. Therefore, the resulting gauge transformation is generated by the diffeomorphism constraint $\delta_\xi f = \{f, D^Q[\xi^a]\}$. The corresponding transformations for the canonical variables are

$$\delta_\xi(\delta E_i^a) = \{\delta E_i^a, D^Q[\xi^a]\} = -\bar{p}\partial_i\xi^a, \quad (52)$$

$$\delta_\xi(\delta K_a^i) = \{\delta K_a^i, D^Q[\xi^a]\} = \mathbb{K}[v_2]\partial_a\xi^i. \quad (53)$$

Based on the equation of motion $\dot{E}_i^a = \{E_i^a, H_G\}$, and definition (12), one finds the expression of δK_a^i . The dot means differentiation with respect to the conformal time, since we have chosen $\bar{N} = \sqrt{\bar{p}}$. Using equations (52) and (53) one finds

$$\delta_\xi F^a = \xi^a, \quad (54)$$

$$\delta_\xi S^a = \dot{\xi}^a + (2\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[v_1](1 + \alpha_2) - \mathbb{K}[v_2])\xi^a. \quad (55)$$

Based on this, one can define a gauge-invariant variable

$$\sigma^a := S^a - \dot{F}^a - \underbrace{(2\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[v_1](1 + \alpha_2) - \mathbb{K}[v_2])}_{=-\mathcal{B}} F^a, \quad (56)$$

such that $\delta_\xi\sigma^a = 0$.

6. Equations of motion

In this section, we derive the equation of motion for the gauge-invariant variable found in the previous section.

For the sake of completeness, we recall that the equations of motion for the background part are

$$\dot{\bar{p}} = \bar{N}2\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[2]), \quad (57)$$

$$\dot{\bar{k}} = -\frac{\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}} \left[\frac{1}{2}(\mathbb{K}[1])^2 + \bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (\mathbb{K}[1])^2 \right] + \frac{\kappa}{3V_0} \left(\frac{\partial \bar{H}_m}{\partial \bar{p}} \right), \quad (58)$$

where $\bar{H}_m = V_0 \bar{N} C_m^{(0)}$ and $\bar{N} = \sqrt{\bar{p}}$. For a free scalar field, an analytical solution to these equations can be found [17]:

$$\bar{p} = \left(\frac{1}{6} \gamma^2 \Delta \pi_\varphi^2 \kappa + \frac{3}{2} \kappa \pi_\varphi^2 t^2 \right)^{1/3}. \quad (59)$$

This solution represents a symmetric bounce.

The diffeomorphism constraint $\frac{\delta}{\delta N^a} D_{\text{tot}}[N^a] = 0$ leads to the equation

$$\bar{p}(\partial_k \delta K_a^k) + (\mathbb{K}[v_2])\delta_a^k (\partial_d \delta E_k^d) = \kappa \bar{\pi} \partial_a (\delta \varphi). \quad (60)$$

Using the symmetrized variables

$$\begin{aligned}\delta K_{(a)}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left[(2\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[v_1](1 + \alpha_2))(F_{a,}^i + F_{,a}^i) + (F_{a,}^i + F_{,a}^i) - (S_{a,}^i + S_{,a}^i) \right] \\ &= -\frac{1}{2}(\sigma_{a,}^i + \sigma_{,a}^i) + \frac{1}{2}\mathbb{K}[v_2](F_{a,}^i + F_{,a}^i),\end{aligned}\quad (61)$$

and

$$\delta E_{(a)}^{(i)} = -\bar{p} \frac{1}{2} (F_{a,}^i + F_{,a}^i), \quad (62)$$

equation (60) can be rewritten as

$$-\frac{\bar{p}}{2} \nabla^2 \sigma_a = \kappa \bar{\pi} \partial_a (\delta \varphi). \quad (63)$$

Because $\delta \varphi = 0$ (from the anomaly-free condition), the symmetric diffeomorphism constraint simplifies to the Laplace equation $\nabla^2 \sigma_a = 0$. Since, the spatial slice is flat ($\Sigma = \mathbb{R}^3$) there are no boundary conditions on σ_a . This restricts the possible solutions of the Laplace equation to $\sigma_a = b_a + d_{a,c}^c$, where b_a and $d_{a,c}^c$ are sets of constants. However, because σ_a is a perturbation (there is no contribution from the zero mode),

$$\int_{\Sigma} d^3x \sigma_a = 0, \quad (64)$$

as required from the consistency of the perturbative expansion. This is also the reason why the first-order perturbation of the Hamiltonian is vanishing, $\int_{\Sigma} C^{(1)} d^3x = 0$. Condition (64) implies $b_a = 0$ and $d_{a,c}^c = 0$, which leads to $\sigma_a = 0$. This shows that our gauge-invariant variable σ_a is identically equal to zero in the absence of the vector matter, in agreement with earlier studies [18]. This can also be proved by expanding σ_a into Fourier modes.

In order to have non-vanishing (physical) vector modes σ_a , a source term in equation (63) therefore has to be present. With ‘vector matter’, this reads as [7]

$$-\frac{1}{2\bar{p}} \nabla^2 \sigma_a = 8\pi G(\rho + P)V_a, \quad (65)$$

where ρ and P are the energy density and pressure of the vector matter and V_a is a matter perturbation vector. If $(\rho + P)V_a \neq 0$ then $\sigma_a \neq 0$, so physical vector perturbations are expected. However, it should be pointed out that proving that the formulation remains anomaly free in the presence of the vector matter remains an open issue. This could be checked, e.g., by introducing an electromagnetic field in the Hamiltonian formulation [19]. We leave this problem to be analyzed elsewhere.

Due to the Gauss constraint, we introduce the symmetrized variable

$$\mathfrak{S}_a^i := \sigma_{a,}^i + \sigma_{,a}^i. \quad (66)$$

The equation of motion for this variable reads as

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \mathfrak{S}_a^i - \frac{1}{2} (2\mathbb{K}[2] + \mathcal{B}) \mathfrak{S}_a^i + \mathcal{A} F_{(a)}^{(i)} = \kappa \bar{p} \delta T_a^{(i)}, \quad (67)$$

where

$$\delta T_a^i = \frac{1}{\bar{p}} \left[\left(\frac{1}{3V_0} \frac{\partial \bar{H}_m}{\partial \bar{p}} \right) \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) + \frac{\delta H_m}{\delta E_i^a} \right]. \quad (68)$$

For the scalar matter $\delta T_a^i = 0$. The same holds for tensor modes [20] (the reasons are the same because $\delta_a^i \delta E_i^a = 0$ and $\delta N = 0$). When imposing the anomaly-freedom conditions $\mathcal{A} = 0$ and $\mathcal{B} = 0$, equation (67) simplifies to

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \mathfrak{S}_a^i - \frac{1}{2} \underbrace{(2\mathbb{K}[2])}_{=\frac{1}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{d\eta}} \mathfrak{S}_a^i = 0, \quad (69)$$

with fully determined coefficients. Of course, without vector matter, as discussed above, the variable \mathfrak{S}_a^i is equal to zero and equation (69) is trivially satisfied. However, the presence of a non-vanishing contribution from V_a allows for non-trivial solutions of equation (69). In such a case, equation (69) leads to

$$\mathfrak{S}_a^i = \frac{\text{const}}{\bar{p}} = \frac{\text{const}}{a^2}. \quad (70)$$

For a symmetric bounce driven by a free-scalar field

$$\mathfrak{S}_a^i \propto \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\gamma^3 l_{\text{Pl}}^2 + t^2\right)^{1/3}}. \quad (71)$$

The evolution is smooth through the bounce. The amplitude of the perturbations grows during the contraction and decreases in the expanding phase. The maximum amplitude is reached at the transition point (bounce). Moreover, this evolution is independent of the length of the considered mode, as can be seen by performing a Fourier transform of the function σ_a . Because of this, there is a significant difference with respect to tensor and scalar perturbations. For the scalar and tensor perturbations, the evolution is different depending on whether the mode length is shorter or longer than the Hubble horizon. In particular, on super-horizon scales, the amplitude of the scalar and tensor perturbations is *frozen*. In contrast, for the vector modes there is no such effect. Therefore, in an expanding Universe, the amplitude of vector modes decreases with respect to the super-horizon tensor and scalar perturbations. The contribution from vector modes becomes negligible during the expansion phase. However, the situation reverses in the contracting phase, before the bounce. Then, the amplitude of the vector perturbations grows with respect to the super-horizon tensor and scalar perturbations. Therefore, on very large scales the vector perturbations can play an important role, e.g. leading to the generation of large-scale magnetic fields [21]. This could lead to a new tool to explore physics of the (very) early Universe.

7. Summary and conclusions

In this paper, we have studied the issue of anomaly cancellation for vector modes with holonomy corrections in LQC. Our strategy is based on the introduction of counter-terms in the holonomy-corrected Hamiltonian constraint. In our study, we have also introduced possible holonomy corrections to the diffeomorphism constraint. We have shown, first, that the anomaly cancellation cannot be achieved without counter-terms. Holonomy corrections to the diffeomorphism constraint do not help significantly to fulfil the anomaly-freedom conditions, that are anyway satisfied up to the fourth order in the canonical variable \bar{k} . Then, we have studied the anomaly issue for the gravitational sector with two counter-terms. We have shown that the conditions of anomaly freedom can be met with at least one non-vanishing counter-term. The resulting effective holonomy corrections are almost periodic functions, only if the diffeomorphism constraint is holonomy corrected. Subsequently, we have investigated the issue of anomaly cancellation when a matter scalar field is added. In this case, the closure conditions are more restrictive and fully determine the form of the resulting Hamiltonian constraint. Moreover, this requires that the diffeomorphism constraint holds its classical form, in agreement with LQG expectations. Because of this, the effective holonomy corrections, which take into account contributions from the counter-terms, are no longer almost periodic functions. We have found the gauge-invariant variable and the corresponding equation of motion. The solution to this equation was also given. We have analyzed this solution for the symmetric bounce model to point out that the vector perturbations pass smoothly through the

bounce, where their amplitude reaches its maximum but finite value. The work performed here for scalar matter should be extended to vector matter to fully address the considered issue.

In [15], we address the related issue of anomaly freedom for scalar perturbations with holonomy corrections. This is most important from the observational viewpoint.

Acknowledgments

TC and JM were supported from the Astrophysics Poland–France (Astro–PF). JM has been supported by Polish Ministry of Science and Higher Education grant no. N203 386437 and by Foundation of Polish Science award START.

References

- [1] Ashtekar A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2244
- [2] Nicolai H, Peeters K and Zamaklar M 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** R193 (arXiv:hep-th/0501114)
- [3] Ashtekar A and Lewandowski J 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** R53 (arXiv:gr-qc/0404018)
- Rovelli C 2004 *Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Rovelli C 1998 *Living Rev. Rel.* **1** 1
- Smolin L 2004 arXiv:hep-th/0408048v3
- Thiemann T 2003 *Lect. Notes Phys.* **631** 41
- Perez A 2004 arXiv:gr-qc/0409061v3
- Dona P and Speziale S 2010 arXiv:1007.0402V1
- [4] Bojowald M 2008 *Living Rev. Rel.* **11** 4
- Ashtekar A 2009 *Gen. Rel. Grav.* **41** 707
- [5] Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2008 *Phys. Rev. D* **78** 063547 (arXiv:0806.3929 [gr-qc])
- [6] Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2009 *Phys. Rev. D* **79** 043505 (arXiv:0811.1572 [gr-qc])
- Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2010 *Phys. Rev. D* **82** 109903 (erratum)
- [7] Bojowald M and Hossain G M 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** 4801 (arXiv:0709.0872 [gr-qc])
- [8] Bojowald M and Hossain G M 2008 *Phys. Rev. D* **77** 023508 (arXiv:0709.2365 [gr-qc])
- [9] Bojowald M and Calcagni G 2010 arXiv:1011.2779 [gr-qc]
- [10] Bojowald M, Calcagni G and Tsujikawa S 2011 arXiv:1101.5391 [astro-ph.CO]
- [11] Li Y and Zhu J Y 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 045007 (arXiv:1102.2720 [gr-qc])
- [12] Ashtekar A and Wilson-Ewing E 2009 *Phys. Rev. D* **80** 123532 (arXiv:0910.1278 [gr-qc])
- [13] Nelson W and Sakellariadou M 2007 *Phys. Rev. D* **76** 104003 (arXiv:0707.0588 [gr-qc])
- Nelson W and Sakellariadou M 2007 *Phys. Rev. D* **76** 044015 (arXiv:0706.0179 [gr-qc])
- Corichi A and Singh P 2008 *Phys. Rev. D* **78** 024034 (arXiv:0805.0136 [gr-qc])
- Sakellariadou M 2009 *J. Phys.: Conf. Ser.* **189** 012035 (arXiv:0810.5356 [gr-qc])
- [14] Wu J P and Ling Y 2010 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP05(2010)026 (arXiv:1001.1227 [hep-th])
- [15] Cailleteau T, Mielczarek J, Barrau A and Grain J 2011 arXiv:1111.3535 [gr-qc]
- [16] Ashtekar A, Bojowald M and Lewandowski J 2003 *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 233 (arXiv:gr-qc/0304074)
- [17] Mielczarek J, Stachowiak T and Szydlowski M 2008 *Phys. Rev. D* **77** 123506 (arXiv:0801.0502 [gr-qc])
- [18] Langlois D 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 389–407
- [19] Bojowald M and Das R 2007 *Phys. Rev. D* **75** 123521 (arXiv:0710.5721 [gr-qc])
- [20] Mielczarek J 2009 *Phys. Rev. D* **79** 123520 (arXiv:0902.2490 [gr-qc])
- [21] Battefeld T J and Brandenberger R 2004 *Phys. Rev. D* **70** 121302 (arXiv:hep-th/0406180)

Conclusion

En considérant uniquement la partie gravitationnelle, l'algèbre obtenue a pour expression

$$\{S_{grav}^Q[N_1], S_{grav}^Q[N_1]\} = 0, \quad \{D_{grav}^Q[N_1^a], D^Q[N_2^a]\} = 0, \quad (11.6)$$

$$\{S_{grav}^Q[N], D_{grav}^Q[N^a]\} = \frac{\bar{N}}{\sqrt{p}} \mathcal{B} D_{grav}^Q[N^a] + \frac{\bar{N}}{\kappa \sqrt{p}} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d) \delta E_k^d \mathcal{A}. \quad (11.7)$$

On observe ainsi un terme $\frac{\bar{N}}{\sqrt{p}} \mathcal{B} D^Q[N^a]$ en plus de l'anomalie. Cette unique anomalie est une fonction de α_1 et α_2 et peut s'écrire aussi avec le terme \mathcal{B} , et plusieurs cas de figures sont alors possibles pour annuler cette anomalie. Cependant, lorsque l'on tient compte de la matière, d'autres anomalies apparaissent et imposent notamment le choix $v_2 = 0$ et $\mathcal{B} = 0$: le premier montre bien que la contrainte de Difféomorphisme ne peut pas être modifiée, et le second provient du fait que dans le résultat $\{S_{(m+g)}[N], D_{(m+g)ot}[N^a]\}$, seule la contrainte de Difféomorphisme gravitationnelle intervient alors qu'il aurait fallu en plus celle de la matière. Les contre-terme sont alors donnés par

$$\alpha_1 = -1 + 4(1 - \beta) \frac{\mathbb{K}[2]\bar{k}}{\mathbb{K}[1]^2} - 2 \frac{\bar{k}^2}{\mathbb{K}[1]^2} + (4\beta - 1), \quad (11.8)$$

$$\alpha_2 = -1 + \frac{2\mathbb{K}[2] - \bar{k}}{\mathbb{K}[v_1]}, \quad (11.9)$$

donnant des contraintes qui ne vont dépendre que de $\mathbb{K}[1]$ et de $\mathbb{K}[2]$, et non plus de $\mathbb{K}[v_1]$. D'autre part, les contraintes vont dépendre du facteur β intervenant dans l'expression de $\bar{\mu}$, mais ici rien ne nous spécifie la valeur qu'il doit avoir. Il a ensuite été possible de trouver les variables invariantes de jauge, régies par les équations du mouvement qui sont exactement celles trouvées classiquement si la matière n'était pas scalaire.

Cette méthode nous a ainsi premièrement permis de voir qu'il n'était pas nécessaire de corriger la contrainte de Difféomorphisme, comme attendu dans la théorie. Ensuite, nous n'avons ici considéré que les contre-terme pour les termes en $\mathbb{K}[n]$ qui modifient la contrainte. Il aurait aussi été possible d'en mettre à chaque terme composant la contrainte, notamment le terme en $\delta K \delta K$, et voir s'il n'était pas possible de trouver d'autres expressions pour les contre-terme, mais nous avons pensé que c'était suffisant dans un premier temps de procéder comme nous l'avons fait. L'anomalie ainsi obtenue ne nous donnait qu'une seule équation pour deux inconnues, et il a fallu prendre en compte la matière pour avoir réellement toutes les conditions nécessaires : ces contre-terme ont alors donné une algèbre qui ne dépendait pas de v_1 , montrant qu'il n'existe ainsi ici qu'une unique solution pour ce modèle.

Un point important est l'utilisation de la matière : pour que des perturbations vectorielles soient générées, il est nécessaire de prendre en compte un fluide présentant de la vorticité. Or, le champ que l'on a considéré jusqu'à présent est le champ d'inflaton. Il a été utile pour résoudre les anomalies mais ne va pas donner un sens physique aux perturbations vectorielles. Quoiqu'il en soit, ce travail est une pr miss  à celui plus intéressant pour les observations et qui concerne les perturbations scalaires.

Chapitre 12

Résolution des anomalies dans le cas perturbations scalaires.

Introduction

En suivant la démarche entreprise dans le travail précédent, nous nous sommes intéressés au cas des perturbations scalaires en présence d'un champ d'inflaton. Ce champ étant scalaire, les résultats obtenus seront alors cohérents avec la théorie classique, et les conséquences de notre travail auront bien un sens physique. Nous n'avons pas corrigé la contrainte de Difféomorphisme, mais il est possible de montrer que le faire reviendrait exactement à prendre son argument nul, et donc à ne finalement pas mettre de correction. Comme nous l'avons expliqué, les perturbations scalaires n'ont pas de propriétés de divergence et de trace nulles : les contraintes seront celles correspondant au cas général et comporteront tous les termes initiaux. On va alors regarder les densités de contraintes hamiltoniennes à tous les ordres et introduire les corrections d'holonomies par la correspondance (11.1). Contrairement au cas des perturbations vectorielles, afin d'être le plus général possible, nous avons considéré des contre-termes en face de chacun des termes dans les densités de contraintes : cela va grandement compliquer les calculs et aussi les expressions des anomalies, mais aura pour avantage d'avoir définitivement les expressions générales. Nous avons ainsi introduits 9 contre-termes, 10 si on compte celui introduit dans la matière. Il existera cependant 13 équations pour les anomalies rendant le système sur-contraint : fort heureusement, il existe bien une solution, et elle est unique.

Ce travail suit exactement la même démarche que celle entreprise pour les perturbations vectorielles : une fois les expressions des contraintes obtenues par la résolution des anomalies, les expressions pour les variables de jauge ainsi que leurs équations du mouvement ont été déterminées, en particulier l'équation de Mukhanov-Sasaki.

Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology

Thomas Cailleteau¹, Jakub Mielczarek^{2,3}, Aurelien Barrau¹
and Julien Grain⁴

¹ Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, CNRS/IN2P3, INPG, 53 av. des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

² Astronomical Observatory, Jagiellonian University, 30-244 Kraków, Orla 171, Poland

³ Theoretical Physics Department, National Centre for Nuclear Research, Hoża 69, 00-681 Warsaw, Poland

⁴ Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud 11, CNRS Bâtiments 120-121, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail: cailleteau@lpsc.in2p3.fr, jakubm@fuw.edu.pl, barrau@lpsc.in2p3.fr and julien.grain@ias.u-psud.fr

Received 5 December 2011, in final form 13 March 2012

Published 12 April 2012

Online at stacks.iop.org/CQG/29/095010

Abstract

Holonomy corrections to scalar perturbations are investigated in the loop quantum cosmology framework. Due to the effective approach, modifications of the algebra of constraints generically lead to anomalies. In order to remove those anomalies, counter terms are introduced. We find a way to explicitly fulfill the conditions for anomaly freedom and we give explicit expressions for the counter terms. Surprisingly, the $\bar{\mu}$ -scheme naturally arises in this procedure. The gauge-invariant variables are found and equations of motion for the anomaly-free scalar perturbations are derived. Finally, some cosmological consequences are discussed qualitatively.

PACS numbers: 04.60.Pp, 04.60.Bc

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Loop quantum gravity (LQG) is a tentative non-perturbative and background-independent quantization of general relativity (GR) [1]. Interestingly, it has now been demonstrated that different approaches, based on canonical quantization of GR, on covariant quantization of GR and on formal quantization of geometry lead to the very same LQG theory. Although this is rather convincing, a direct experimental probe is still missing. One can easily argue that cosmology is the most promising approach to search for observational features of LQG or, more specifically, to its symmetry-reduced version, loop quantum cosmology (LQC) [2].

Much effort has been devoted to the search of possible footprints of LQC in cosmological tensor modes (see [3]). At the theoretical level, the situation is easier in this case as the

algebra of constraints is automatically anomaly free. But, as far as observations are concerned, scalar modes are far more important. They have already been observed in great detail by WMAP [4] and are currently even better observed by the Planck mission. The question of a possible modification of the primordial scalar power spectrum (and of the corresponding TT C_l spectrum) in LQC is therefore essential in this framework.

Gravity is described by a set of constraints. However, for the (effective) theory to be consistent, it is mandatory that the evolution generated by the constraints remains compatible with the constraints themselves. This is always true if their mutual Poisson brackets vanish when evaluated in fields fulfilling the constraints, i.e. if they form a first-class algebra. This means that the evolution and the gauge transformations are associated with vector fields that are tangent to the manifold of null constraints. This obviously holds at the classical level. However, when quantum modifications are added, the anomaly freedom is not anymore automatically ensured. Possible quantum corrections must be restricted to those which close the algebra. This means that, for consistency reasons, the Poisson brackets between any two constraints must be proportional to one constraint of the algebra. This paper is devoted to the search for such an algebra for scalar perturbations.

Our approach will follow the one developed by Bojowald *et al* in [5]. There are two main quantum corrections expected from LQC: inverse volume terms, basically arising for inverse powers of the densitized triad, which when quantized become an operator with zero in its discrete spectrum thus lacking a direct inverse, and holonomy corrections coming from the fact that loop quantization is based on holonomies, rather than direct connection components. In [5], the authors focused exclusively on inverse volume corrections. Here, we extend with work to the holonomy corrections. Scalar perturbations with holonomy corrections have been studied in [6]. However, the issue of anomaly freedom was not really addressed. Recently, a new possible way of introducing holonomy corrections to the scalar perturbations was proposed in [7]. Although it was interestingly shown that the formulation is anomaly free, the approach is based on the choice of the longitudinal gauge and the extension of the method to the gauge-invariant case is not straightforward. In contrast, the approach developed in our paper does not rely on any particular choice of gauge and the gauge-invariant cosmological perturbations are easily constructed.

The theory of anomaly-free scalar perturbations developed in this paper is obtained on a flat FRW background, such that the line element is given by

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2\partial_a B d\eta dx^a + ((1 - 2\psi)\delta_{ab} + 2\partial_a \partial_b E) dx^a dx^b], \quad (1)$$

where ϕ , ψ , E and B are scalar perturbation functions. The matter content is assumed to be a scalar field. This will allow us to investigate the generation of scalar perturbations during the phase of cosmic inflation while taking into account the quantum gravity effects.

Our analysis of the scalar perturbations is performed in the Hamiltonian framework developed in [5, 8]. As was shown there, the background variables are $(\bar{k}, \bar{p}, \bar{\varphi}, \bar{\pi})$, while the perturbed variables are $(\delta K_a^i, \delta E_i^a, \delta\phi, \delta\pi)$. The Poisson bracket for the system can be decomposed as follows:

$$\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_{\bar{k}, \bar{p}} + \{\cdot, \cdot\}_{\delta K, \delta E} + \{\cdot, \cdot\}_{\bar{\varphi}, \bar{\pi}} + \{\cdot, \cdot\}_{\delta\phi, \delta\pi}, \quad (2)$$

where

$$\{\cdot, \cdot\}_{\bar{k}, \bar{p}} := \frac{\kappa}{3V_0} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \right], \quad (3)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\delta K, \delta E} := \kappa \int_{\Sigma} d^3x \left[\frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} - \frac{\delta \cdot}{\delta \delta E_i^a} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta K_a^i} \right], \quad (4)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\bar{\varphi}, \bar{\pi}} := \frac{1}{V_0} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\pi}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\pi}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\varphi}} \right], \quad (5)$$

$$\{\cdot, \cdot\}_{\delta\varphi, \delta\pi} := \int_{\Sigma} d^3x \left[\frac{\delta \cdot}{\delta \delta\varphi} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta\pi} - \frac{\delta \cdot}{\delta \delta\pi} \frac{\delta \cdot}{\delta \delta\varphi} \right]. \quad (6)$$

Here, V_0 is the volume of the fiducial cell and $\kappa = 8\pi G$.

The holonomy corrections are introduced by the replacement $\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}[n]$ in the classical Hamiltonian. We follow the notation introduced in [9], where

$$\mathbb{K}[n] := \begin{cases} \frac{\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{n\bar{\mu}\gamma} & \text{for } n \in \mathbb{Z}/\{0\}, \\ \bar{k} & \text{for } n = 0, \end{cases} \quad (7)$$

for the correction function. In cases where \bar{k} appears quadratically, the integer n is fixed to 2 (see [9]). In the other cases, the integers remain to be fixed from the requirement of anomaly freedom. The coefficient γ is the Barbero–Immirzi parameter and $\bar{\mu} \propto \bar{p}^\beta$ where $-1/2 \leq \beta \leq 0$. In what follows, the relation

$$\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[n] = [\bar{k} \cos(n\bar{\mu}\gamma\bar{k}) - \mathbb{K}[n]]\beta \quad (8)$$

will be useful.

The organization of the paper is as follows. In section 2, the holonomy-corrected gravitational Hamiltonian constraint is defined. We calculate the Poisson bracket of the Hamiltonian constraint with itself and with the gravitational diffeomorphism constraint. In section 3, scalar matter is introduced. The Poisson brackets between the total constraints for the system under consideration are calculated. In section 4, the conditions for anomaly freedom are solved and the expressions for the counter terms are derived. Based on this, in section 5, equations of motion for the scalar perturbations are derived. The system of equations is then investigated in the case of the longitudinal gauge. Finally, gauge-invariant variables are found and the equations for the corresponding Mukhanov variables are derived. In section 6, we summarize our results and draw out some conclusions.

2. Scalar perturbations with holonomy corrections

The holonomy-modified Hamiltonian constraint can be written as

$$H_G^Q[N] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N}(\mathcal{H}_G^{(0)} + \mathcal{H}_G^{(2)}) + \delta N \mathcal{H}_G^{(1)}], \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{(0)} &= -6\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[1])^2, \\ \mathcal{H}_G^{(1)} &= -4\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)\delta_j^c \delta K_c^j - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}}(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2)\delta_c^j \delta E_j^c + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}(1 + \alpha_3)\partial_c \partial^j \delta E_j^c, \\ \mathcal{H}_G^{(2)} &= \sqrt{\bar{p}}(1 + \alpha_4)\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_k^c \delta_j^d - \sqrt{\bar{p}}(1 + \alpha_5)(\delta K_c^j \delta_j^c)^2 \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}(\mathbb{K}[s_2] + \alpha_6)\delta E_j^c \delta K_c^j - \frac{1}{2\bar{p}^{3/2}}(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_7)\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j \\ &\quad + \frac{1}{4\bar{p}^{3/2}}(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_8)(\delta E_j^c \delta_c^j)^2 - \frac{1}{2\bar{p}^{3/2}}(1 + \alpha_9)\delta^{jk}(\partial_c \delta E_j^c)(\partial_d \delta E_k^d). \end{aligned}$$

The standard holonomy corrections are parametrized by two integers s_1 and s_2 . The α_i are counter terms, which are introduced to remove anomalies. Those factors are defined so that

they vanish in the classical limit ($\bar{\mu} \rightarrow 0$). The counter terms could be, in general, functions of all the canonical variables.

In principle, one could also consider other terms that are indeed allowed in the general case, e.g. $M_{ij}^{abcd} \partial_a \delta K_b^i \partial_c \delta K_d^j$ multiplied by some new anomaly terms. Such terms are not present in the classical Hamiltonian but may however appear at the quantum level. In this study, we have only considered counter terms depending on functions which may be present at the classical level and which depend on the gravitational background variables only.

In our approach, the diffeomorphism constraint holds the classical form

$$D_G[N^a] = \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^c [\bar{p} \partial_c (\delta_k^d \delta K_d^k) - \bar{p} (\partial_k \delta K_c^k) - \bar{k} \delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d)]. \quad (10)$$

In general, the diffeomorphism constraint could also be holonomy corrected. This possibility was studied, e.g., in [6]. Because the underlying LQG maintains diffeomorphism covariance and because the isotropic LQC (about which the scalar perturbation theory is developed) is obtained by solving the diffeomorphisms classically, one can justifiably assume that diffeomorphism constraints and their algebra retain the classical form. Due to this, in this paper, the diffeomorphism constraint is not modified by the holonomies. It is worth stressing that the classicality of the diffeomorphism constraint is also imposed by the requirement of anomaly cancellation. Namely, if one replaces $\bar{k} \rightarrow \mathbb{K}[n]$ in (10), the condition $n = 0$ would anyway be required by the introduction of scalar matter. Indeed, the Poisson bracket $\{H_M^Q, D_G^Q\}$ leads to an anomaly term proportional to $(\cos(n\bar{\mu}\gamma\bar{k}) - 1)$, which is vanishing only for $n = 0$. In fact, the same condition was obtained for vector modes with holonomy corrections [9].

Let us now calculate the possible Poisson brackets for the constraints $H_G^Q[N]$ and $D_G[N^a]$.

2.1. The $\{H_G^Q, D_G\}$ bracket

Using the definition of the Poisson bracket (2), we derive

$$\begin{aligned} \{H_G^Q[N], D_G[N^a]\} &= -H_G^Q[\delta N^a \partial_a \delta N] + \mathcal{B} D_G[N^a] \\ &+ \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^a (\partial_a \delta N) \mathcal{A}_1 + \frac{\bar{N} \sqrt{\bar{p}} \bar{k}}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^a (\partial_i \delta K_a^i) \mathcal{A}_2 \\ &+ \frac{\bar{N}}{\kappa \sqrt{\bar{p}}} \int_{\Sigma} d^3x \delta N^i (\partial_a \delta E_i^a) \mathcal{A}_3 + \frac{\bar{N}}{2\kappa \sqrt{\bar{p}}} \int_{\Sigma} d^3x (\partial_a \delta N^a) (\delta E_i^b \delta_b^i) \mathcal{A}_4, \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$\mathcal{B} = \frac{\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}} [-2\mathbb{K}[2] + \bar{k}(1 + \alpha_5) + \mathbb{K}[s_2] + \alpha_6], \quad (12)$$

and

$$\mathcal{A}_1 = 2\bar{k}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) + \alpha_2 - 2\mathbb{K}[1]^2, \quad (13)$$

$$\mathcal{A}_2 = \alpha_5 - \alpha_4, \quad (14)$$

$$\mathcal{A}_3 = -\mathbb{K}[1]^2 - \bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[1]^2 - \frac{1}{2} \alpha_7 + \bar{k}(-2\mathbb{K}[2] + \bar{k}(1 + \alpha_5) + 2\mathbb{K}[s_2] + 2\alpha_6), \quad (15)$$

$$\mathcal{A}_4 = \alpha_8 - \alpha_7. \quad (16)$$

The functions $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4$ are the first anomalies coming from the effective nature of the Hamiltonian constraint. Later, we will set them to zero so as to fulfill the requirement of anomaly freedom. This will lead to constraints on the form of the counter terms.

Besides the anomalies, the $\{H_G^Q, D_G\}$ bracket contains the $-H_G^Q[\delta N^a \partial_a \delta N]$ term, which is expected classically. There is also an additional contribution from the diffeomorphism constraint $\mathcal{B} D_G[N^a]$. This term is absent in the classical theory. This is however consistent as, for $\bar{\mu} \rightarrow 0$, the \mathcal{B} function tends to zero.

2.2. The $\{H_G^Q, H_G^Q\}$ bracket

The next bracket is as follows:

$$\begin{aligned} \{H_G^Q[N_1], H_G^Q[N_2]\} = & (1 + \alpha_3)(1 + \alpha_5)D_G \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right] \\ & + \frac{\bar{N}}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) (\partial_i \delta K_a^i) (1 + \alpha_3) \mathcal{A}_5 \\ & + \frac{\bar{N}}{\kappa \bar{p}} \int_{\Sigma} d^3x (\delta N_2 - \delta N_1) (\partial^i \partial_a \delta E_i^a) \mathcal{A}_6 + \frac{\bar{N}}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3x (\delta N_2 - \delta N_1) (\delta_i^a \delta K_a^i) \mathcal{A}_7 \\ & + \frac{\bar{N}}{\kappa \bar{p}} \int_{\Sigma} d^3x (\delta N_2 - \delta N_1) (\delta_a^i \delta E_i^a) \mathcal{A}_8, \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$\mathcal{A}_5 = \alpha_5 - \alpha_4, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6 = & (1 + \alpha_9)(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) - (1 + \alpha_3)(\mathbb{K}[s_2] + \alpha_6) + \mathbb{K}[2](1 + \alpha_3) \\ & - 2\mathbb{K}[2]\bar{p} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \bar{p}} + \frac{1}{2} \left(\mathbb{K}[1]^2 + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[1]^2 \right) \frac{\partial \alpha_3}{\partial \bar{k}} - \bar{k}(1 + \alpha_3)(1 + \alpha_5), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_7 = & 4\mathbb{K}[2]\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) - \left(\mathbb{K}[1]^2 + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[1]^2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{k}} (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) \\ & + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha_5 - \frac{1}{2}\alpha_4 \right) (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) - 2(\mathbb{K}[s_2] + \alpha_6)(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) \\ & + 2\mathbb{K}[2](\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_8 = & \frac{1}{2} (\mathbb{K}[s_2] + \alpha_6)(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) - (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_7) \\ & + \frac{3}{2} (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)(\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_8) - \frac{1}{2} \mathbb{K}[2](\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) \\ & + \mathbb{K}[2]\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) - \frac{1}{4} \left(\mathbb{K}[1]^2 + 2\bar{p} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[1]^2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{k}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (21)$$

The $\mathcal{A}_5, \dots, \mathcal{A}_8$ are the next four anomalies. Moreover, the diffeomorphism constraint is multiplied by the factor $(1 + \alpha_3)(1 + \alpha_5)$.

2.3. The $\{D_G, D_G\}$ bracket

The Poisson bracket between the diffeomorphism constraints is as follows:

$$\{D_G[N_1^a], D_G[N_2^a]\} = 0. \quad (22)$$

3. Scalar matter

In this section, we introduce scalar matter. The scalar matter diffeomorphism constraint is

$$D_M[N^a] = \int_{\Sigma} \delta N^a \bar{\pi} (\partial_a \delta \varphi). \quad (23)$$

The scalar matter Hamiltonian can be expressed as

$$H_M^Q[N] = H_M[\bar{N}] + H_M[\delta N], \quad (24)$$

where

$$H_M[\bar{N}] = \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} [(\mathcal{H}_{\pi}^{(0)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(0)}) + (\mathcal{H}_{\pi}^{(2)} + \mathcal{H}_{\nabla}^{(2)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(2)})], \quad (25)$$

$$H_M[\delta N] = \int_{\Sigma} d^3x \delta N [\mathcal{H}_{\pi}^{(1)} + \mathcal{H}_{\varphi}^{(1)}]. \quad (26)$$

The factors in equations (25) and (26) are

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\pi}^{(0)} &= \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}}, \\ \mathcal{H}_{\varphi}^{(0)} &= \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}), \\ \mathcal{H}_{\pi}^{(1)} &= \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta^j \delta E_j^c}{2\bar{p}}, \\ \mathcal{H}_{\varphi}^{(1)} &= \bar{p}^{3/2} \left[V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \right], \\ \mathcal{H}_{\pi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{\delta \pi^2}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^{3/2}} \left[\frac{(\delta^j \delta E_j^c)^2}{8\bar{p}^2} + \frac{\delta_c^k \delta^j \delta E_j^c \delta E_k^d}{4\bar{p}^2} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nabla}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} (1 + \alpha_{10}) \delta^{ab} \partial_a \delta \varphi \partial_b \delta \varphi, \\ \mathcal{H}_{\varphi}^{(2)} &= \frac{1}{2} \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi^2 + \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi \frac{\delta^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \end{aligned} \quad (28)$$

$$+ \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \left[\frac{(\delta^j \delta E_j^c)^2}{8\bar{p}^2} - \frac{\delta_c^k \delta^j \delta E_j^c \delta E_k^d}{4\bar{p}^2} \right]. \quad (29)$$

Here, we have introduced the counter term α_{10} in the factor $\mathcal{H}_{\nabla}^{(2)}$. Thanks to this, the Poisson bracket between two matter Hamiltonians takes the following form:

$$\{H_M^Q[N_1], H_M^Q[N_2]\} = (1 + \alpha_{10}) D_M \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (30)$$

As will be explained later, the appearance of the front factor $(1 + \alpha_{10})$ will allow us to close the algebra of total constraints. In principle, other prefactors could have been expected; however, they do not help removing anomalies.

3.1. Total constraints

The total Hamiltonian and diffeomorphism constraints are as follows:

$$H_{\text{tot}}[N] = H_G^Q[N] + H_M^Q[N], \quad (31)$$

$$D_{\text{tot}}[N^a] = D_G[N^a] + D_M[N^a]. \quad (32)$$

The Poisson bracket between two total diffeomorphism constraints is vanishing:

$$\{D_{\text{tot}}[N_1^a], D_{\text{tot}}[N_2^a]\} = 0. \quad (33)$$

The bracket between the total Hamiltonian and diffeomorphism constraints can be decomposed as follows:

$$\{H_{\text{tot}}[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} = \{H_M^Q[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} + \{H_G^Q[N], D_G[N^a]\} + \{H_G^Q[N], D_M[N^a]\}. \quad (34)$$

The first bracket in sum (34) is given by

$$\{H_M^Q[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} = -H_M^Q[\delta N^a \partial_a \delta N]. \quad (35)$$

The second contribution to equation (34) is given by (11), while the last contribution is vanishing:

$$\{H_G^Q[N], D_M[N^a]\} = 0. \quad (36)$$

The Poisson bracket between the two total Hamiltonian constraints can be decomposed in the following way:

$$\begin{aligned} \{H_{\text{tot}}[N_1], H_{\text{tot}}[N_2]\} &= \{H_G^Q[N_1], H_G^Q[N_2]\} + \{H_M[N_1], H_M[N_2]\} \\ &+ [\{H_G^Q[N_1], H_M[N_2]\} - (N_1 \leftrightarrow N_2)]. \end{aligned} \quad (37)$$

The contribution from the last brackets can be expressed as

$$\begin{aligned} \{H_G^Q[N_1], H_M[N_2]\} - (N_1 \leftrightarrow N_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\delta N_2 - \delta N_1) \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\bar{\varphi}) \right) (\partial_c \partial^j \delta E_j^c) \mathcal{A}_9 \\ &+ 3 \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\delta N_2 - \delta N_1) \left(\frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^2} - \bar{p} V_{\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi \right) \mathcal{A}_{10} \\ &+ \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\delta N_2 - \delta N_1) (\delta_j^c \delta K_j^c) \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\bar{\varphi}) \right) \bar{p} \mathcal{A}_{11} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\delta N_2 - \delta N_1) (\delta_c^j \delta E_j^c) \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} \right) \mathcal{A}_{12} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} (\delta N_2 - \delta N_1) (\delta_c^j \delta E_j^c) V(\bar{\varphi}) \mathcal{A}_{13}, \end{aligned} \quad (38)$$

where

$$\mathcal{A}_9 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \bar{k}}, \quad (39)$$

$$\mathcal{A}_{10} = \mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_1] - \alpha_1, \quad (40)$$

$$\mathcal{A}_{11} = -\frac{\partial}{\partial \bar{k}} (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) + \frac{3}{2} (1 + \alpha_5) - \frac{1}{2} (1 + \alpha_4), \quad (41)$$

$$\mathcal{A}_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{k}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) + 5(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) - 5\mathbb{K}[2] + \mathbb{K}[s_2] + \alpha_6, \quad (42)$$

$$\mathcal{A}_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{k}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) + \mathbb{K}[s_1] + \alpha_1 - \mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_2] - \alpha_6. \quad (43)$$

The functions $\mathcal{A}_9, \dots, \mathcal{A}_{13}$ are the last five anomalies.

4. Anomaly freedom

The requirement of anomaly freedom is equivalent to the conditions $\mathcal{A}_i = 0$ for $i = 1, \dots, 13$.

Let us start from the condition $\mathcal{A}_9 = 0$. Since α_3 cannot be a constant, this condition implies $\alpha_3 = 0$. The condition $\mathcal{A}_{10} = 0$ gives $\alpha_1 = \mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_1]$. Using this, the condition $\mathcal{A}_1 = 0$ can be written as $\alpha_2 = 2\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}\mathbb{K}[2]$. The conditions $\mathcal{A}_2 = 0$ and $\mathcal{A}_5 = 0$ are equivalent and lead to $\alpha_4 = \alpha_5$. Based on this, the requirement $\mathcal{A}_{11} = 0$ leads to

$$1 + \alpha_4 = \frac{\partial \mathbb{K}[2]}{\partial \bar{k}} = \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}) =: \Omega. \quad (44)$$

For the sake of simplicity, we have defined here the Ω -function. With the use of this, the condition $\mathcal{A}_6 = 0$ leads to

$$\alpha_6 = \mathbb{K}[2](2 + \alpha_9) - \mathbb{K}[s_2] - \bar{k}\Omega. \quad (45)$$

So equation (42) simplifies to

$$\mathcal{A}_{12} = \alpha_9 \mathbb{K}[2]. \quad (46)$$

Therefore, requiring $\mathcal{A}_{12} = 0$ is equivalent to the condition $\alpha_9 = 0$. Furthermore, $\mathcal{A}_4 = 0$ gives $\alpha_7 = \alpha_8$. The expression for α_7 can be derived from the condition $\mathcal{A}_3 = 0$. Namely, using equation (45), one obtains

$$\alpha_7 = 2(2\beta - 1)\mathbb{K}[1]^2 + 4(1 - \beta)\bar{k}\mathbb{K}[2] - 2\bar{k}^2\Omega. \quad (47)$$

The condition $\mathcal{A}_{13} = 0$ is fulfilled by using the expressions derived for α_1 , α_2 and α_6 . The last two anomalies (20) and (21) can be simplified to

$$\mathcal{A}_7 = 2(1 + 2\beta)(\Omega\mathbb{K}[1]^2 - \mathbb{K}[2]^2), \quad (48)$$

$$\mathcal{A}_8 = \bar{k}(1 + 2\beta)(\mathbb{K}[2]^2 - \Omega\mathbb{K}[1]^2). \quad (49)$$

The anomaly-freedom conditions for those last terms, $\mathcal{A}_7 = 0$ and $\mathcal{A}_8 = 0$, are fulfilled if and only if $\beta = -1/2$.

It is also worth noting that the function \mathcal{B} given by equation (12) is equal to zero when the expression obtained for α_6 is used. There is finally no contribution from the diffeomorphism constraint in the $\{H_G^Q, D_G\}$ bracket.

Using the anomaly-freedom conditions given above, the bracket between the total Hamiltonian constraints simplifies to

$$\{H_{\text{tot}}[N_1], H_{\text{tot}}[N_2]\} = \Omega D_{\text{tot}} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{P}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right] + (\alpha_{10} - \alpha_4) D_M \left[\frac{\bar{N}}{\bar{P}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (50)$$

The closure of the algebra of total constraints implies the last condition $\alpha_{10} = \alpha_4 = \Omega - 1$.

To summarize, the counter terms allowing the algebra to be anomaly free are uniquely determined, and are given by

$$\alpha_1 = \mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_1], \quad (51)$$

$$\alpha_2 = 2\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}\mathbb{K}[2], \quad (52)$$

$$\alpha_3 = 0, \quad (53)$$

$$\alpha_4 = \Omega - 1, \quad (54)$$

$$\alpha_5 = \Omega - 1, \quad (55)$$

$$\alpha_6 = 2\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_2] - \bar{k}\Omega, \quad (56)$$

$$\alpha_7 = -4\mathbb{K}[1]^2 + 6\bar{k}\mathbb{K}[2] - 2\bar{k}^2\Omega, \quad (57)$$

$$\alpha_8 = -4\mathbb{K}[1]^2 + 6\bar{k}\mathbb{K}[2] - 2\bar{k}^2\Omega, \quad (58)$$

$$\alpha_9 = 0, \quad (59)$$

$$\alpha_{10} = \Omega - 1. \quad (60)$$

It is straightforward to check that the counter terms $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ are vanishing in the classical limit ($\bar{\mu} \rightarrow 0$), as expected.

Those counter terms are defined up to the two integers s_1 and s_2 , which appear in (51) and (56). However, in Hamiltonian (9), the factor α_1 appears with $\mathbb{K}[s_1]$ and the factor α_6 appears with $\mathbb{K}[s_2]$. Namely, we have $\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1 = \mathbb{K}[2]$ and $\mathbb{K}[s_2] + \alpha_6 = 2\mathbb{K}[2] - \bar{k}\Omega$. Therefore, the final Hamiltonian will not depend on the parameters s_1 and s_2 . No ambiguity remains to be fixed.

Moreover, the anomaly cancellation requires

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad (61)$$

which fixes the functional form of the $\bar{\mu}$ factor. The fact that anomaly freedom requires $\beta = -1/2$ is a quite surprising result. The exact value of β is highly debated in LQC. The only *a priori* obvious statement is that $\beta \in [-1/2, 0]$. The choice $\beta = -1/2$ is called the $\bar{\mu}$ -scheme (new quantization scheme) and is preferred by some authors for physical reasons [10]. Our result seems to show that the $\bar{\mu}$ -scheme is embedded in the structure of the theory and this gives a new motivation for this particular choice of quantization scheme. The quantity $\bar{\mu}^2 \bar{p}$ can be interpreted as the physical area of an elementary loop along which the holonomy is calculated. Because, in the $\bar{\mu}$ -scheme, $\bar{\mu}^2 \propto \bar{p}^{-1}$, the physical area of the loop remains constant. This elementary area is usually set to be the area gap Δ derived in LQG. Therefore, in the $\bar{\mu}$ -scheme,

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{\bar{p}}}. \quad (62)$$

4.1. Algebra of constraints

Taking into account the previous conditions of anomaly freedom, the non-vanishing Poisson brackets for the gravity sector are as follows:

$$\{H_G^Q[N], D_G[N^a]\} = -H_G^Q[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (63)$$

$$\{H_G^Q[N_1], H_G^Q[N_2]\} = \Omega D_G \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (64)$$

This clearly shows that the *gravity sector is anomaly free*. The remaining non-vanishing brackets are as follows:

$$\{H_M[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} = -H_M[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (65)$$

$$\{H_M[N_1], H_M[N_2]\} = \Omega D_M \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (66)$$

The algebra of total constraints therefore takes the following form:

$$\{D_{\text{tot}}[N_1^a], D_{\text{tot}}[N_2^a]\} = 0, \quad (67)$$

$$\{H_{\text{tot}}[N], D_{\text{tot}}[N^a]\} = -H_{\text{tot}}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (68)$$

$$\{H_{\text{tot}}[N_1], H_{\text{tot}}[N_2]\} = D_{\text{tot}} \left[\Omega \frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (69)$$

Although the algebra is closed, there are however modifications with respect to the classical case, due to presence of the factor Ω in equation (69). Therefore, not only the dynamics, as a result of the modification of the Hamiltonian constraint, is modified but the very structure of the

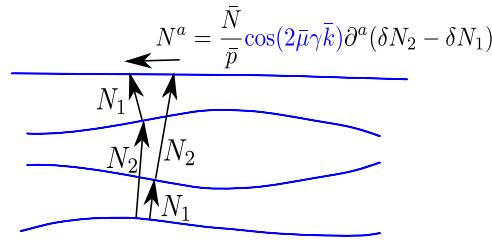


Figure 1. Pictorial representation of the hypersurface deformation algebra (69).

spacetime itself is also *deformed*. This is embedded in the form of the algebra of constraints. The hypersurface deformation algebra generated by (69) is pictorially represented in figure 1.

As $\Omega \in [-1, 1]$, the shift vector

$$N^a = \Omega \frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \quad (70)$$

appearing in (69) can change sign in time.

In order to see when this might happen, let us express the parameter Ω as

$$\Omega = \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}) = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}, \quad (71)$$

where ρ is the energy density of the matter field and

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa\gamma\bar{\mu}^2\bar{p}} = \frac{3}{\kappa\gamma\Delta}. \quad (72)$$

In the low-energy limit, $\rho \rightarrow 0$, the classical case ($\Omega \rightarrow 1$) is correctly recovered. However, while approaching the high-energy domain, the situation drastically changes. Namely, for $\rho = \rho_c/2$, the shift vector (70) becomes null. At this point, the maximum value of the Hubble parameter is also reached. The maximum allowed energy density is $\rho = \rho_c$ and corresponds to the bounce. Then the shift vector (70) fully reverses with respect to the low-energy limit. One can interpret this peculiar behavior as a geometry change. Namely, when the universe is in its quantum stage ($\rho > \rho_c/2$), the effective algebra of constraints shows that the space is Euclidian. At the particular value $\rho = \frac{\rho_c}{2}$, the geometry switches to the Minkowski one [11]. This will become even clearer when analyzing the Mukhanov equation in section 5. The consequences of this have not yet been fully understood, but it is interesting to note that this model naturally exhibits properties related to the Hartle–Hawking no-boundary proposal [12].

5. Equations of motion

Once the anomaly-free theory of scalar perturbations with holonomy corrections is constructed, the equations of motion for the canonical variables can be derived. This can be achieved through the Hamilton equation

$$\dot{f} = \{f, H[N, N^a]\}, \quad (73)$$

where the Hamiltonian $H[N, N^a]$ is the sum of all constraints

$$H[N, N^a] = H_G^Q[N] + H_M[N] + D_G[N^a] + D_M[N^a]. \quad (74)$$

5.1. Background equations

Based on the Hamilton equation (73), the equations for the canonical background variables are as follows [13]:

$$\dot{\bar{k}} = -\frac{\bar{N}}{2\sqrt{\bar{p}}} \mathbb{K}[1]^2 - \bar{N}\sqrt{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \mathbb{K}[1]^2 + \frac{\kappa}{2} \sqrt{\bar{p}} \bar{N} \left[-\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}) \right], \quad (75)$$

$$\dot{\bar{p}} = 2\bar{N}\sqrt{\bar{p}} \mathbb{K}[2], \quad (76)$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{N} \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}^{3/2}}, \quad (77)$$

$$\dot{\bar{\pi}} = -\bar{N}\bar{p}^{3/2} V_{,\varphi}(\bar{\varphi}). \quad (78)$$

In the following, we choose the time to be conformal by setting $\bar{N} = \sqrt{\bar{p}}$. The ‘ \cdot ’ then means differentiation with respect to conformal time η .

Equations (77) and (78) can be now combined into the Klein–Gordon equation

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 2\mathbb{K}[2]\dot{\bar{\varphi}} + \bar{p}V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) = 0. \quad (79)$$

Equation (76), together with the background part of the Hamiltonian constraint

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial H}{\partial \bar{N}} = \frac{1}{2\kappa} [-6\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[1])^2] + \bar{p}^{3/2} \left[\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}) \right] = 0, \quad (80)$$

leads to the modified Friedmann equation

$$\mathcal{H}^2 = \bar{p}^{\frac{\kappa}{3}} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right). \quad (81)$$

Another useful expression is

$$3\mathbb{K}[1]^2 = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^2} + \bar{p}V(\bar{\varphi}). \quad (82)$$

Here \mathcal{H} stands for the conformal Hubble factor

$$\mathcal{H} := \frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}} = \mathbb{K}[2]. \quad (83)$$

The energy density and pressure of the scalar field are given by

$$\rho = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\varphi), \quad (84)$$

$$P = \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} - V(\varphi). \quad (85)$$

For the purpose of further considerations, we also derive the relation

$$\kappa \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^2} \right) = \bar{k}\mathbb{K}[2] - \dot{\bar{k}}, \quad (86)$$

which comes from equation (75) combined with (80).

5.2. Equations for the perturbed variables

The equations for the perturbed parts of the canonical variables are as follows:

$$\delta \dot{E}_i^a = -\bar{N} \left[\sqrt{\bar{p}} \Omega \delta K_c^j \delta_j^a - \sqrt{\bar{p}} \Omega (\delta K_c^j \delta_j^c) \delta_i^a - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (2\mathbb{K}[2] - \bar{k}\Omega) \delta E_i^a \right] \\ + \delta N (2\mathbb{K}[2] \sqrt{\bar{p}} \delta_i^a) - \bar{p} (\partial_i \delta N^a - (\partial_c \delta N^c) \delta_i^a), \quad (87)$$

$$\delta \dot{K}_a^i = \bar{N} \left[-\frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (2\mathbb{K}[2] - \bar{k}\Omega) \delta K_a^i \right. \\ - \frac{1}{2\bar{p}^{3/2}} (-3\mathbb{K}[1]^2 + 6\bar{k}\mathbb{K}[2] - 2\bar{k}^2\Omega) \delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i \\ + \frac{1}{4\bar{p}^{3/2}} (-3\mathbb{K}[1]^2 + 6\bar{k}\mathbb{K}[2] - 2\bar{k}^2\Omega) (\delta E_j^c \delta_c^j) \delta_a^i + \frac{\delta^{ik}}{2\bar{p}^{3/2}} \partial_a \partial_d \delta E_k^d \Big] \\ + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (3\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}\mathbb{K}[2]) \delta_a^i \delta N + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} (\partial_a \partial^i \delta N) \right] \\ + \delta_c^i (\partial_a \delta N^c) + \kappa \delta N \frac{\sqrt{\bar{p}}}{2} \left[-\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^3} + V(\bar{\varphi}) \right] \delta_a^i \\ + \kappa \bar{N} \left[-\frac{\bar{\pi} \delta \pi}{2\bar{p}^{5/2}} \delta_a^i + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{2} \delta \varphi \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}} \delta_a^i + \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} + \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \right) \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{4\bar{p}^2} \delta_a^i \right. \\ \left. + \left(\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} - \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \right) \frac{\delta_c^i \delta_a^j \delta E_j^c}{2\bar{p}^2} \right], \quad (88)$$

$$\delta \dot{\varphi} = \delta N \left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{p}^{3/2}} \right) + \bar{N} \left(\frac{\delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \right), \quad (89)$$

$$\delta \dot{\pi} = -\delta N (\bar{p}^{3/2} V_{,\varphi}(\bar{\varphi})) + \bar{\pi} (\partial_a \delta N^a) \\ - \bar{N} \left[-\sqrt{\bar{p}} \Omega \delta^{ab} \partial_a \partial_b \delta \varphi + \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi + \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \right]. \quad (90)$$

5.3. Longitudinal gauge

As an example of application, we will now derive the equations in the longitudinal gauge. In this case, the E and B perturbations are set to zero. The line element (1) therefore simplifies to

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\phi) d\eta^2 + (1 - 2\psi) \delta_{ab} dx^a dx^b], \quad (91)$$

where ϕ and ψ are two remaining perturbation functions and a is the scale factor. From the metric above, one can derive the lapse function, the shift vector and the spatial metric:

$$N = a\sqrt{1 + 2\phi}, \quad (92)$$

$$N^a = 0, \quad (93)$$

$$q_{ab} = a^2 (1 - 2\psi) \delta_{ab}. \quad (94)$$

The lapse function can be expanded for the background and perturbation part as $N = \bar{N} + \delta N$, where

$$\bar{N} = \sqrt{\bar{p}} = a, \quad (95)$$

$$\delta N = \bar{N}\phi. \quad (96)$$

Using equation (94), the perturbation of the densitized triad is expressed as

$$\delta E_i^a = -2\bar{p}\psi\delta_i^a. \quad (97)$$

The time derivative of this expression will also be useful and can be written as

$$\delta \dot{E}_i^a = -2\bar{p}(2\mathbb{K}[2]\psi + \dot{\psi})\delta_i^a. \quad (98)$$

Let us now find the expression for the perturbation of the extrinsic curvature δK_a^i in terms of the metric perturbations ϕ and ψ . For this purpose, one can apply expression (97) to the left-hand side of (87). The resulting equation can be solved for δK_a^i , leading to

$$\delta K_a^i = -\delta_a^i \frac{1}{\Omega} (\dot{\psi} + \bar{k}\Omega\psi + \mathbb{K}[2]\phi). \quad (99)$$

The time derivative of this variable is given by

$$\delta \dot{K}_a^i = \delta_a^i \frac{1}{\Omega} \left[-\ddot{\psi} - \dot{\bar{k}}\Omega\psi + \dot{\psi} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \bar{k}\Omega \right) + \phi\mathbb{K}[2]\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \phi\dot{\mathbb{K}}[2] - \mathbb{K}[2]\dot{\phi} \right]. \quad (100)$$

Applying (100) to the left-hand side of (88), the equation containing the diagonal part as well as the off-diagonal contribution is easily obtained. The off-diagonal part leads to

$$\partial_a \partial^i (\phi - \psi) = 0. \quad (101)$$

This translates into $\psi = \phi$. In what follows, we will therefore consider ϕ only. The diagonal part of the discussed equation can be expressed as

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \dot{\phi} \left[3\mathbb{K}[2] - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] + \phi \left[\dot{\mathbb{K}}[2] + 2\mathbb{K}[2]^2 - \mathbb{K}[2]\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] \\ = 4\pi G\Omega \left[\dot{\bar{\phi}}\delta\phi - \bar{p}\delta\varphi V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

One can now use the diffeomorphism constraint

$$\kappa \frac{\delta H[N, N^a]}{\delta(\delta N^c)} = \bar{p}\partial_c (\delta_k^d \delta K_d^k) - \bar{p}(\partial_k \delta K_c^k) - \bar{k}\delta_c^k (\partial_d \delta E_k^d) + \kappa\bar{\pi}(\partial_c \delta\varphi) = 0. \quad (103)$$

With the expressions for δK_a^i and δE_i^a , it can be derived that

$$\partial_c [\dot{\phi} + \phi\mathbb{K}[2]] = 4\pi G\Omega\dot{\bar{\phi}}\partial_c \delta\varphi. \quad (104)$$

The next equation comes from the perturbed part of the Hamiltonian constraint:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H[N, N^a]}{\delta(\delta N)} = \frac{1}{2\kappa} \left[-4\sqrt{\bar{p}}\mathbb{K}[2]\delta_j^c \delta K_c^j - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (3\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}\mathbb{K}[2]) \delta_c^j \delta E_j^c + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial_c \partial^j \delta E_j^c \right] \\ + \frac{\bar{\pi}\delta\pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} + \bar{p}^{3/2} \left[V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta_c^j \delta E_j^c}{2\bar{p}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Using the expressions for δK_a^i and δE_i^a , this can be rewritten as

$$\Omega\nabla^2\phi - 3\mathbb{K}[2]\dot{\phi} - [\dot{\mathbb{K}}[2] + 2\mathbb{K}[2]^2]\phi = 4\pi G\Omega [\dot{\bar{\phi}}\delta\phi + \bar{p}\delta\varphi V_{,\varphi}(\bar{\varphi})]. \quad (106)$$

The last equality comes from (89) and (90):

$$\delta\ddot{\phi} + 2\mathbb{K}[2]\delta\dot{\phi} - \Omega\nabla^2\delta\varphi + \bar{p}V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi + 2\bar{p}V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\dot{\phi} - 4\dot{\bar{\phi}}\dot{\phi} = 0. \quad (107)$$

Equations (102), (104) and (106) can be now combined into

$$\ddot{\phi} + 2 \left[\mathcal{H} - \left(\frac{\ddot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} + \epsilon \right) \right] \dot{\phi} + 2 \left[\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \left(\frac{\ddot{\bar{\phi}}}{\bar{\phi}} + \epsilon \right) \right] \phi - c_s^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad (108)$$

with the quantum correction

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = 3\mathbb{K}[2] \left(\frac{\rho + P}{\rho_c - 2\rho} \right), \quad (109)$$

and the squared velocity

$$c_s^2 = \Omega. \quad (110)$$

The squared velocity of the perturbation field ϕ is equal to Ω . Because $-1 \leq \Omega \leq 1$, the speed of perturbations is never super-luminal. However, for $\Omega < 0$, perturbations become unstable ($c_s^2 < 0$). This corresponds to the energy density regime $\rho > \frac{\rho_c}{2}$, where the phase of super-inflation is expected.

At the point $\rho = \frac{\rho_c}{2}$, the velocity of the perturbation field ϕ is vanishing. Therefore, perturbations do not propagate anymore when approaching $\rho = \frac{\rho_c}{2}$, where the Hubble factor reaches its maximal value. Moreover, at this point, the quantum correction $\epsilon \rightarrow \infty$. Because of this, equation (108) diverges and cannot be used to determine the propagation of the perturbations. However, as shown in the next section, the equation for the gauge-invariant Mukhanov variable does not exhibit such a pathology.

It is interesting to note that the equations of motion derived in this subsection are the same as those found in [7]. This is quite surprising, because they were derived following independent paths. In this approach, we have introduced the most general ‘sine’ form for the holonomy corrections to the Hamiltonian, parametrized by some unknown integers. Then, by adding counter terms, anomalies in the algebra of constraints were removed. It has been argued that one could obviously also add other functions agreeing with the classical limit. On the other hand, the method proposed in [7] is based on the diagonal form of the metric in the longitudinal gauge. This enables one to introduce holonomy corrections in almost the same way as in the case of a homogeneous model but with an argument which depends on the spatial position also. It was then shown that a system defined in this way stays on-shell, that is, is free of anomalies. Nevertheless, it is possible to show that starting from the Hamiltonian constraint given in [7] and performing a Taylor expansion around \bar{K}_a^i and \bar{E}_i^a , one obtains exactly the same Hamiltonian constraint (9) with our values for the counter terms (51)–(60). The non-trivial equivalence of both approaches may suggest uniqueness in defining a theory of scalar perturbations with holonomy corrections in an anomaly-free manner.

5.4. Gauge-invariant variables and Mukhanov equation

Considering the scalar perturbations, there is only one physical degree of freedom. As was shown in [14], this physical variable combines both the perturbation of the metric and the perturbation of matter. The classical expression on this gauge-invariant quantity is

$$v = a(\eta) \left(\delta\varphi^{\text{GI}} + \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathcal{H}} \Psi \right), \quad (111)$$

and its equation of motion is given by

$$\ddot{v} - \nabla^2 v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0, \quad (112)$$

where

$$z = a(\eta) \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathcal{H}}. \quad (113)$$

In the canonical formalism with scalar perturbations, the gauge transformation of a variable X under a small coordinate transformation

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu, \quad \xi^\mu = (\xi^0, \partial^a \xi) \quad (114)$$

is given by (see [8] for details)

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} X \doteq \{X, H^{(2)}[\bar{N}\xi^0] + D^{(2)}[\partial^a \xi]\}, \quad (115)$$

and it is straightforward to see that, classically,

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} v = 0. \quad (116)$$

This means that v is diffeomorphism invariant and can be taken as an observable.

Taking into account the holonomy corrections introduced in this paper, the Ω function will modify the gauge transformations of the time derivative of a variable X , so that

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \dot{X} - (\delta_{[\xi^0, \xi]} X)^\cdot = \Omega \cdot \delta_{[0, \xi^0]} X. \quad (117)$$

Using this relation and gauge transformations of the metric perturbations

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \psi = -\mathbb{K}[2]\xi^0, \quad (118)$$

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \phi = \dot{\xi}^0 + \mathbb{K}[2]\xi^0, \quad (119)$$

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} E = \xi, \quad (120)$$

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} B = \dot{\xi}, \quad (121)$$

one can define the gauge-invariant variables (Bardeen potentials) as

$$\Phi = \phi + \frac{1}{\Omega}(\dot{B} - \ddot{E}) + \left(\frac{\mathbb{K}[2]}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)(B - \dot{E}), \quad (122)$$

$$\Psi = \psi - \frac{\mathbb{K}[2]}{\Omega}(B - \dot{E}), \quad (123)$$

$$\delta\varphi^{\text{GI}} = \delta\phi + \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\Omega}(B - \dot{E}). \quad (124)$$

The normalization of these variables was set such that, in the longitudinal gauge ($B = 0 = E$), we have $\Phi = \phi$, $\Psi = \psi$ and $\delta\varphi^{\text{GI}} = \delta\phi$. It is possible to define the analogous of the Mukhanov variable (111):

$$v := \sqrt{\bar{p}} \left(\delta\varphi^{\text{GI}} + \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathbb{K}[2]} \Psi \right). \quad (125)$$

Writing the equations for Ψ and $\delta\varphi^{\text{GI}}$, which are

$$\ddot{\Psi} + 2 \left[\mathcal{H} - \left(\frac{\ddot{\bar{\phi}}}{\dot{\bar{\phi}}} + \epsilon \right) \right] \dot{\Psi} + 2 \left[\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \left(\frac{\ddot{\bar{\phi}}}{\dot{\bar{\phi}}} + \epsilon \right) \right] \Psi - c_s^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (126)$$

and

$$\delta\ddot{\varphi}^{\text{GI}} + 2\mathbb{K}[2]\delta\dot{\varphi}^{\text{GI}} - \Omega\nabla^2\delta\varphi^{\text{GI}} + \bar{p}V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi^{\text{GI}} + 2\bar{p}V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\Psi - 4\dot{\bar{\varphi}}^{\text{GI}}\dot{\Psi} = 0, \quad (127)$$

one obtains the equation for variable (125):

$$\ddot{v} - \Omega\nabla^2 v - \frac{\ddot{z}}{z}v = 0, \quad (128)$$

$$z = \sqrt{\bar{p}} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathbb{K}[2]}, \quad (129)$$

which corresponds to the Mukhanov equation for our model. As we see, the difference between the classical and the holonomy-corrected case is the factor Ω in front of the Laplacian. This quantum contribution leads to a variation of the propagation velocity of the perturbation v .

This is similar to the case of the perturbation ϕ considered in the previous subsection. The main difference is that there is no divergence for $\rho = \rho_c/2$ and the evolution of perturbations can be investigated in the regime of high energy densities. It is once again worth noting that for $\rho > \rho_c/2$, Ω becomes negative and equation (128) changes from a hyperbolic form to an elliptic one. This basically means that the time part becomes indistinguishable from the spatial one. This can be interpreted as a transition from a Minkowskian geometry to an Euclidean geometry, as mentioned earlier.

Finally, it is also possible to define the perturbation of curvature \mathcal{R} such that

$$\mathcal{R} = \frac{v}{z}. \quad (130)$$

Based on this, one can now calculate the power spectrum of scalar perturbations. This opens new possible ways to study quantum gravity effects in the very early universe. Promising applications of the derived equations will be investigated elsewhere.

6. Summary and conclusions

In this paper, we have investigated the theory of scalar perturbations with holonomy corrections. Such corrections are expected because of quantum gravity effects predicted by LQG. They basically come from the regularization of the curvature of the connection at the Planck scale. Because of this, the holonomy corrections become dominant in the high-curvature regime. The introduction of ‘generic-type’ holonomy corrections leads to an anomalous algebra of constraints. The conditions of anomaly freedom impose some restrictions on the form of the holonomy corrections. However, we have shown that the holonomy corrections, in the standard form, cannot fully satisfy the conditions of anomaly freedom. In order to solve this difficulty, additional counter terms were introduced. Such counter terms tend to zero in the classical limit, but play the role of regularizers of anomalies in the quantum (high-curvature) regime. The method of counter terms was earlier successfully applied to cosmological perturbations with inverse-triad corrections [5].

We have shown that, thanks to the counter terms, the theory of cosmological perturbations with holonomy corrections can be formulated in an anomaly-free way. The anomaly freedom was shown to be fulfilled not only for the gravity sector but also when taking into account scalar matter. The requirements of anomaly freedom were used to determine the form of the counter terms. Furthermore, conditions for obtaining an anomaly-free algebra of constraints were shown to be fulfilled only for a particular choice of the $\bar{\mu}$ function, namely for the $\bar{\mu}$ -scheme (new quantization scheme). This quantization scheme was shown earlier to be favored because of the consistency of the background dynamics [10]. Our result supports these earlier claims.

In our formulation, the diffeomorphism constraint holds its classical form, in agreement with the LQG expectations. The obtained anomaly-free gravitational Hamiltonian contains seven holonomy modifications. It was also necessary to introduce one counter term into the matter Hamiltonian in order to ensure the closure of the algebra of total constraints. There is no ambiguity in defining the holonomy corrections after imposing the anomaly-free conditions. The only remaining free parameter of the theory is the area gap Δ used in defining the $\bar{\mu}$ function. This quantity can however be possibly fixed with the spectrum of the area operator in LQG. Based on the equations derived in this paper, it will also be possible to put observational constraints on the value of Δ and, hence, on the critical energy density ρ_c .

Based on the studied anomaly-free formulation, equations of motion were derived. As an example of application, we studied the equations in the longitudinal gauge. We have also found the gauge-invariant variables, which are holonomy-corrected versions of the

Bardeen potentials. Using this, we have derived the equation for the Mukhanov variable. This equation can be directly used to compute the power spectrum of scalar perturbations with quantum gravitational holonomy corrections. Similar considerations were studied in the case of inverse-triad corrections [15]. In that case, observational consequences have been derived and compared with CMB data [16, 17].

Acknowledgments

The authors would like to thank M Bojowald, G Calcagni and E Wilson-Ewing for the discussions. TC and JM were supported from the Astrophysics Poland-France (Astro-PF). JM has been supported by the Polish Ministry of Science and Higher Education grant no N203 386437 and by the Foundation of Polish Science award START.

References

- [1] Rovelli C 2004 *Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge University Press)
Thiemann T 2007 *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press)
Ashtekar A and Lewandowski J 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** R53
Perez A 2004 arXiv:gr-qc/0409061v3
Dona P and Speziale S 2010 arXiv:1007.0402v1
Rovelli C 2011 arXiv:1102.3660v5
- [2] Bojowald M 2005 *Living Rev. Rel.* **8** 11
Ashtekar A and Singh P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 213001
- [3] Bojowald M and Hossain G M 2008 *Phys. Rev. D* **77** 023508
Mulryne D and Nunes N 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083507
Mielczarek J and Szydlowski M 2007 *Phys. Lett. B* **657** 20
Copeland E J, Mulryne D J, Nunes N J and Shaeri M 2008 *Phys. Rev. D* **77** 023510
Mielczarek J 2008 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP11(2008)011
Mielczarek J 2009 *Phys. Rev. D* **79** 123520
Copeland E J, Mulryne D J, Nunes N J and Shaeri M 2009 *Phys. Rev. D* **79** 023508
Grain J and Barrau A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 081301
Shimano M and Harada T 2009 *Phys. Rev. D* **80** 063538
Grain J, Barrau A and Gorecki A 2009 *Phys. Rev. D* **79** 084015
Mielczarek J, Cailleteau T, Grain J and Barrau A 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104049
Calcagni G and Hossain G M 2009 *Adv. Sci. Lett.* **2** 184
- [4] Larson D *et al* 2011 *Astrophys. J. Suppl.* **192** 16
- [5] Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2008 *Phys. Rev. D* **78** 063547 (arXiv:0806.3929 [gr-qc])
- [6] Wu J P and Ling Y 2010 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP05(2010)026 (arXiv:1001.1227 [hep-th])
- [7] Wilson-Ewing E 2012 *Class. Quantum Grav.* **29** 085005 (arXiv:1108.6265 [gr-qc])
- [8] Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2009 *Phys. Rev. D* **79** 043505
Bojowald M, Hossain G M, Kagan M and Shankaranarayanan S 2010 *Phys. Rev. D* **82** 109903 (erratum) (arXiv:0811.1572 [gr-qc])
- [9] Mielczarek J, Cailleteau T, Barrau A and Grain J 2012 *Class. Quantum Grav.* **29** 085009 (arXiv:1106.3744)
- [10] Corichi A and Singh P 2008 *Phys. Rev. D* **78** 024034
Nelson W and Sakellariadou M 2007 *Phys. Rev. D* **76** 104003 (arXiv:0707.0588 [gr-qc])
- [11] Bojowald, M private discussion
- [12] Hartle J B and Hawking S W 1983 *Phys. Rev. D* **28** 2960
- [13] Ashtekar A, Pawłowski T and Singh P 2006 *Phys. Rev. D* **74** 084003 (arXiv: gr-qc/0607039)
- [14] Mukhanov V F, Feldman H A and Brandenberger R H 1992 *Phys. Rep.* **215** 203–333
- [15] Bojowald M and Calcagni G 2011 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP03(2011)032 (arXiv:1011.2779 [gr-qc])
- [16] Bojowald M, Calcagni G and Tsujikawa S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 211302 (arXiv:1101.5391 [astro-ph.CO])
- [17] Bojowald M, Calcagni G and Tsujikawa S 2011 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP11(2011)046 (arXiv:1107.1540 [gr-qc])

Conclusion

Ce travail a finalement présenté de nombreux intérêts : en plus d'être celui qui a le premier résolu le problème des anomalies pour les corrections d'holonomie, il va montrer des conséquences physiques importantes. La démarche ayant été la même que celle entreprise pour les perturbations vectorielles, certaines conclusions seront alors similaires à celles présentées auparavant, et confirmeront le travail précédent. On peut voir que

1. regarder conjointement les contraintes gravitationnelles et de matière permet de résoudre toutes les anomalies présentes : il a fallu cependant ajouter un contre-terme α_{10} dans la densité de contrainte de la matière au seconde ordre. Cela a permis de donner une expression non-équivoque pour tous les contre-termes qui, une fois introduits dans les contraintes leur permettent de ne plus dépendre de paramètres inconnus comme ici s_1 et s_2 .
2. deux contre-termes doivent être nuls : α_3 et α_9 , qui correspondent dans les contraintes aux seuls termes faisant intervenir des doubles dérivées spatiales de δE_i^a . Ces termes s'écrivent dans le cas général en fonction de X_{ab}^{ijk} et Z_{ab}^{ijk} , et leurs propriétés de symétries et d'antisymétries ont montré [83] qu'ils n'intervenaient pas dans la fermeture de l'algèbre : les contre-termes ainsi trouvés ne vont pas dépendre du choix des perturbations et seront alors les plus généraux possibles.
3. lorsque l'on a regardé le cas des perturbations vectorielles, nous avons exactement eu les mêmes équations pour les anomalies sauf que l'on a considéré uniquement $\alpha_6^S = \alpha_1^V$ et $\alpha_7^S = \alpha_2^V$ comme non nuls, et nous n'avons pas tenu compte de certains termes dans les contraintes ($\delta_a^i \delta E_i^a = 0, \dots$). Il est possible de montrer que les expressions des anomalies trouvées ici redonnent les expressions des anomalies pour les perturbations vectorielles.
4. aucune supposition n'a été faite sur la valeur de β dans l'expression de $\bar{\mu}$. Cependant, dans le cas des perturbations scalaires, les expressions des anomalies supplémentaires vont dépendre de β telles que la seule possibilité pour qu'elles soient nulles est de considérer $\beta = -\frac{1}{2}$. Cette valeur correspond à celle privilégiée par la théorie, et elle apparaît directement ici, donnant un argument supplémentaire en faveur du $\bar{\mu}$ -scheme.
5. l'algèbre des contraintes est donnée par

$$\{D_{(m+g)}[N_1^a], D_{(m+g)}[N_2^a]\} = 0, \quad (12.1)$$

$$\{H_{(m+g)}[N], D_{(m+g)}[N^a]\} = -H_{(m+g)}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (12.2)$$

$$\{H_{(m+g)}[N_1], H_{(m+g)}[N_2]\} = D_{(m+g)} \left[\Omega \frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \quad (12.3)$$

où la seule modification provient du terme Ω , présent dans l'expression $\delta K \delta K$ dans la contrainte hamiltonienne,

$$\Omega = \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}) = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}. \quad (12.4)$$

Lorsque Ω est positif, donc pour des densités d'énergie supérieures à $\rho_c/2$, on retrouve bien le cas Lorentzien ($s = -1$) que l'on observe habituellement. Cependant, lorsque l'on s'approche du rebond, il existe en $\rho_c/2$ un point particulier où la fonction s'annule et change de signe. On se retrouve alors avec une algèbre correspondant au cas Euclidien ($s = 1$). Cela se voit aussi dans les équations du mouvement pour lesquelles il existe le terme Ωk^2 . Les conséquences physiques de cette observation ne sont pas encore comprises, mais on peut penser [84] ici au '**no-boundary proposal**' de **James Hartle** et **Stephen Hawking**. Plus généralement, le recours à des métriques euclidiennes a été depuis longtemps une astuce en cosmologie quantique : la rotation de Wick améliore la convergence des intégrales de chemin, et permet une meilleure définition de la fonction d'onde de l'univers. Il est intéressant que ce processus souvent supposé de façon 'ad hoc' apparaisse naturellement ici. Cependant, dans ce principe c'est la métrique globale qui est influencée alors que dans notre cas, cela est du uniquement aux perturbations.

6. lorsque l'on va regarder les perturbations tensorielles, on va utiliser le fait que $\delta N = \delta N^a = 0$, donnant l'algèbre précédente totalement nulle, comme dans notre tout premier travail. Cependant, les contraintes maintenant utilisées sont totalement différentes de celles ayant permis les travaux précédents, et il va être nécessaire de refaire les études présentées dans les chapitres précédents avec ces nouveaux contre-termes.
7. une autre approche [85] plus conservative puisqu'elle utilise directement les perturbations dans les holonomies, a obtenu les même résultats que notre travail pour le cas des perturbations scalaires : l'algèbre est inchangée et faire un développement limité des contraintes de l'approche conservative redonne exactement les contraintes modifiées obtenues ici. Cependant, elle ne considère que le cas des variables diagonales alors que les perturbations ne le sont pas forcément : elle n'est pas invariante de jauge.
8. à cause de la déformation de l'algèbre via l'équation (12.3), la définition des variables invariantes de jauge va être elle-aussi modifiée : l'équation (7.88) dans notre cas est alors donnée par

$$\delta_{[\xi_0, \xi]}(\delta \dot{X}) - (\delta_{[\xi_0, \xi]} \delta X)^\cdot = \Omega \delta_{[0, \xi_0]} \delta X. \quad (12.5)$$

A priori sans grande conséquence, les variables invariantes de jauge usuelles vont maintenant faire intervenir des termes en Ω^n où $n \in \mathbb{Z}$, et leur expression en $\rho_c/2$ va alors être très différente du cas classique. De même, leurs équations du mouvement vont ressembler à celles obtenues classiquement, l'équation (126) de l'article analogue à l'équation (6.70), mais la présence des termes en Ω va avoir des effets très importants. Les solutions obtenues dans une étude préliminaire montre qu'elles peuvent diverger à cet instant, notamment à cause du fait que proche du rebond, $\Omega < 0$, donnant des solutions en exponentielles réelles.

Ce travail permet ainsi de considérer l'effet des corrections d'holonomies dans le cas général où on ne tient pas compte du type des perturbations. Les variables de jauge vont alors avoir une équation du mouvement similaire à celle de Mukhanov-Sasaki, mais avec des potentiels effectifs spécifiques à chaque type de perturbations. L'étape suivante sera ainsi de chercher à résoudre ces équations et trouver les solutions utiles dans l'obtention des spectres de puissance, afin de pouvoir comparer théorie et observations.

Chapitre 13

Invariance de jauge et équation de Hamilton-Jacobi

Enfin, il existe un dernier sujet auquel nous nous sommes intéressés et qui concerne plus une étude de mécanique analytique qu'une étude en cosmologie. Il existe une méthode permettant de dériver assez directement les variables invariantes de jauge dans le formalisme canonique. Elle utilise pour cela l'équation de Hamilton-Jacobi. Cette méthode a d'abord été appliquée dans le formalisme ADM [1], et nous avons trouvé intéressant de l'appliquer à celui de la cosmologie quantique à boucles : quelle que soit la contrainte, modifiée ou non, la procédure à suivre est la même, et peu de dérivations sont nécessaires. Dans la suite, nous avons surtout considéré le cas des perturbations scalaires.

En utilisant les variables d'Ashtekar dans l'espace de Fourier, on va décomposer les perturbations sur une base rendant compte de leur propriétés. On va ainsi définir deux nouvelles variables qui vont simplifier les calculs et qui correspondront en fait aux perturbations de la métrique (ψ, E)

$$\gamma_1 = 2\bar{p}\psi, \quad \gamma_2 = \bar{p}k^2 E. \quad (13.1)$$

Leurs moments conjugués π_i seront alors obtenus par l'utilisation d'une fonction génératrice, similaire à celles que l'on a introduite dans le premier chapitre, et la première étape consistera ainsi en un changement de variables $(A, E) \rightarrow (\gamma, \pi)$. Une fois les contraintes exprimées avec ces nouvelles variables, résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi reviendra ici à trouver une fonction génératrice S dont nous connaissons la forme, telle que maintenant

$$H\left(\gamma, \pi = \frac{\partial S}{\partial \gamma}, \eta, \frac{\partial S}{\partial \eta}\right) = 0, \quad D\left(\gamma, \pi = \frac{\partial S}{\partial \gamma}, \eta, \frac{\partial S}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (13.2)$$

Une fois cette fonction trouvée, il sera alors possible de définir les variables invariantes de jauge en utilisant les densités de contraintes au premier ordre, ainsi que leurs équations du mouvement par les densités du second ordre.

Il est cependant nécessaire pour que cette méthode marche d'avoir une algèbre auparavant close : certaines anomalies apparaîtront lorsque l'on considérera les crochets de Poisson des densités de contrainte au premier ordre, mais toutes les autres n'apparaîtront que si on calcule les crochets de Poisson entre les densités de contraintes au second ordre, ce qui n'est pas fait ici. Quoiqu'il en soit, combiner l'approche précédente avec cette méthode permet d'avoir une algèbre close et les équations du mouvement pour les variables invariantes de jauge.

Cette méthode a été appliquée aux corrections d'holonomies, redonnant exactement ce que nous avons trouvé au chapitre précédent. Elle a de même été appliquée aux corrections d'inverse-volume et l'expression des variables invariantes de jauge présente une légère différence avec celle obtenue dans des travaux précédents [55] : les variables invariantes de jauge ont une expression différente mais le terme en $s^2 k^2$ trouvé ici et dans [55] s'avère être le même, ne dénigrant en rien leurs travaux suivants. Nous avons aussi considéré le cas où les deux corrections étaient prises simultanément, et on retrouve le fait que les corrections n'agissent pas de la même façon : l'étude des crochets de Poisson pour les contraintes au premier ordre montre que dans ce cas, les contre-termes devraient être une multiplication des contre-termes trouvés séparément. Cependant, cela reste une hypothèse et il faudrait vraiment mener les calculs à leur terme.

Cette méthode est ainsi générique à toute théorie présentant des contraintes, et son application présente certains avantages : notamment pour le cas des perturbations scalaires avec les corrections d'holonomie, l'obtention des équations du mouvement pour les perturbations ont été longues et laborieuses à obtenir, et il en a été encore plus pour l'obtention de celles des variables invariantes de jauge. Or cette méthode s'est avérée être directe, propre et efficace, et a aussi permis de trouver une partie des anomalies : pour tout travail futur dans le formalisme canonique, elle pourrait ainsi s'avérer utile.

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

Gauge invariance in loop quantum cosmology: Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki equations for scalar perturbations

Thomas Cailleteau and Aurelien Barrau

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, CNRS/IN2P3, INPG 53, av. des Martyrs,
38026 Grenoble cedex, France

(Received 30 January 2012; published 20 June 2012)

Gauge invariance of scalar perturbations is studied together with the associated equations of motion. Extending the methods developed in Hamiltonian general relativity, the Hamilton-Jacobi equation is investigated into the details in the framework of loop quantum gravity. The gauge-invariant observables are built, and their equations of motions are reviewed both in the Hamiltonian and Lagrangian approaches. This method is applied to scalar perturbations with either holonomy or inverse-volume corrections.

DOI: [10.1103/PhysRevD.85.123534](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.123534)

PACS numbers: 98.80.Qc

I. INTRODUCTION

Loop quantum gravity (LQG) is a nonperturbative and background-independent quantization of general relativity [GR] (see [1] for reviews). Recently, it has been realized that different views, based on canonical quantization of GR, on covariant quantization of GR and on formal quantization of geometry lead to the very same LQG framework. Although other approaches are still much debated, this makes LQG a very promising model to address the outstanding question of quantum gravity.

The application of LQG ideas to the universe as a whole is called loop quantum cosmology [LQC] (see [2] for reviews). This is basically the symmetry-reduced version of the theory. So far, LQC proved to be interesting both as a model of the early Universe, solving the big bang singularity, and as a way of possibly testing LQG ideas. At the effective level, LQC modifies the usual paradigm by two main corrections: the inverse-volume terms, basically arising for inverse powers of the densitized triad, which when quantized become an operator with zero in its discrete spectrum thus lacking a direct inverse, and holonomy corrections coming from the fact that loop quantization is based on holonomies, rather than direct connection components.

To investigate the observational consequences of those LQC-induced modifications, it is most useful to construct rigorously gauge-invariant variables. It is well known, even in standard GR, that among the solutions of field equations for perturbed variables, some are unphysical modes corresponding to a mere coordinate transformations.

In this article, we basically extend the method introduced in [3]. We start with first order constraints in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric. Then, using a generating function, the variables (perturbations of the densitized triads and their conjugate momenta) are changed according to $(\delta K, \delta E) \rightarrow (\gamma_m, \pi_m)$. The first order constraints are reexpressed as functions of (γ_m, π_m) . The gauge-invariant variables (Q, P) are obtained thanks to a natural generating function S and the dynamics is derived through anomaly-free second order constraints in terms of

(Q, P) . Then, the Mukhanov variables v , R , and z are given. Finally, the method is applied to the case of LQC with both holonomy and inverse-volume corrections.

This approach exhibits several advantages:

- (i) the treatment is purely Hamiltonian with easy computations,
- (ii) the Mukhanov variables v and R are obtained directly and the equation of motion is easily found without using Bardeen potentials,
- (iii) it helps to construct an anomaly-free algebra by imposing relations on the Poisson brackets,
- (iv) the z variable can be found without ambiguity and in a quite simple way,
- (v) the generating functions are clearly defined, easy to handle and allow one to trace back deeply the origin of gauge invariance,
- (vi) it works for any kind of constraint theory.

The paper is organized as follows. In the two first sections, we introduce the framework of loop quantum cosmology and some elements of analytical mechanics useful to implement the Hamilton-Jacobi method. Then, we show the main steps of the proposed procedure and its application to the cases of holonomy and inverse-volume corrections.

II. LOOP QUANTUM COSMOLOGY FRAMEWORK

In general relativity, when the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) formalism is chosen, space-time is foliated into a family of spacelike 3-surfaces and the dynamics is given by constraints. The fundamental variables are the space metric q_{ab} , together with N , the lapse function, and N^a , the shift vector, which describe how the “leaves” of the foliation are welded together. The metric is written as

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt). \quad (1)$$

In the LQC formalism, the spatial metric is expressed in terms of triads e_a^i that are related to the spatial metric by

$$q_{ab} \doteq e_a^i e_b^i. \quad (2)$$

The first basic variable (for a detailed introduction, see [1]) is the Ashtekar connection:

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (3)$$

where γ is the Barbero-Immirzi parameter, Γ_a^i is the spin connection and K_a^i is the extrinsic curvature. The second one is the densitized triad:

$$E_i^a = (\det e_a^i) e_i^a. \quad (4)$$

The conjugate variables follow the symplectic structure

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \kappa \gamma \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x - y), \quad (5)$$

where $\kappa = 8\pi G$. The canonical Einstein-Hilbert action in this formalism reads as

$$S_{\text{EH}} = \int dt \left[\int \frac{d^3x}{\kappa \gamma} \dot{A}_a^i E_i^a - G[\Lambda^i] - D[N^a] - H[N] \right], \quad (6)$$

where $G[\Lambda^i]$ is the Gauss constraint, $D[N^a]$ is the diffeomorphism constraint, and $H[N]$ is the Hamiltonian constraint. The diffeomorphism constraint generates deformations of a spatial slice so that, when it is satisfied, spatial geometry does not depend on the choice of space coordinates. General covariance of the space-time geometry (including the time coordinate) is ensured by the Hamiltonian constraint. Finally, as a set of triad vectors can be rotated without changing the metric, there is an additional $\text{SO}(3)$ gauge freedom. Invariance of the theory under those rotations is guaranteed by the Gauss constraint. This latter constraint will be solved explicitly by the parametrization we use for the variables.

Taking into account perturbations in a FLRW universe, one has to deal with the perturbed spatial metric $\delta\gamma_{ab}$ such that

$$q_{ab} = a^2(\delta_{ab} + \delta\gamma_{ab}), \quad (7)$$

where $a(t)$ is the scale factor. The perturbed Ashtekar variables will then be related to the perturbed metric and it is straightforward to see that the background and perturbed densitized triad obeying $E_i^a = \bar{E}_i^a + \delta E_i^a$ are

$$\bar{E}_i^a = \bar{p} \delta_i^a = a^2 \delta_i^a, \quad (8)$$

and

$$\delta E_i^a = \frac{1}{2} \bar{p} (-\delta\gamma_i^a + \delta\gamma_d^d \cdot \delta_i^a). \quad (9)$$

On the other hand, the extrinsic curvature K_a^i is given by

$$K_a^i = \bar{K}_a^i + \delta K_a^i = \bar{k} \delta_a^i + \delta K_a^i. \quad (10)$$

The homogeneous and isotropic background (\bar{p}, \bar{k}) satisfies

$$\{\bar{k}, \bar{p}\} = \frac{\kappa}{3}, \quad (11)$$

and the perturbed part $(\delta E_i^a, \delta K_a^i)$ fulfills

$$\{\delta K_a^i(x), \delta E_j^b(y)\} = \kappa \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x - y). \quad (12)$$

In [3], the original variables are the spatial perturbed metric $\delta\gamma_{ab}$ and its conjugate momentum $\delta\pi^{ab}$. As δE_i^a is linear in $\delta\gamma$, as it can be seen in Eq. (9), it is possible to follow the same procedure, with only minor modifications due to the fact that now the fundamental variables are δE and δK .

The study of the homogeneous and isotropic universe is an important first step for any tentative theory of quantum cosmology. In the framework of LQC, this led to the famous replacement of the big bang by a big bounce. Investigating perturbations is the next logical step to probe possible deviations from the standard model. This has already been studied in many articles (see, e.g., [4]), especially for gravitational waves and subsequent consequences on the B -mode spectrum of the cosmological microwave background (CMB).

We now turn to the study of scalar perturbations of the metric $(\phi, \psi, B$ and $E)$ that are observationally relevant as they can be used to compute the well measured temperature CMB spectrum. The perturbed FLRW metric in conformal time can be written as

$$ds^2 = a^2(\eta) [-(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2\partial_a B \cdot dx^a d\eta + ((1 - 2\psi)\delta_{ab} + 2\partial_a \partial_b E) dx^a dx^b]. \quad (13)$$

Comparing this expression with Eq. (1), one obtains the perturbed lapse function and perturbed shift vector as

$$\delta N = \bar{N}\phi; \quad \delta N^a = \partial^a B. \quad (14)$$

Using the definition of the densitized triad, one can also see that

$$\delta E_i^a = \bar{p}(-2\psi \delta_i^a + (\delta_i^a \Delta - \partial_i \partial^a)E). \quad (15)$$

Starting from Eq. (15), all the useful equations will be derived using a clear algorithm.

III. HAMILTON-JACOBI EQUATION

This section is heavily based on [5].

A. Canonical transformations

When dealing with general transformations of coordinates, one has to consider the simultaneous transformations of independent coordinates and momenta, q_i and p_i to a new set Q_i and P_i , through (invertible) equations :

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad (16)$$

$$P_i = P_i(q, p, t). \quad (17)$$

These equations basically define a transformation from a point in the phase space to another one. In the Hamiltonian mechanics framework, only those transformations for which the new Q, P are canonical coordinates are interesting. This means that there exists a function $K(Q, P, t)$ such

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

that the equations of motion in the new set are in the Hamiltonian form:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (18)$$

Transformations for which Eqs. (18) are fulfilled are said to be *canonical*.

The function K plays the role of the Hamiltonian in the new coordinate set. For the treatment to be fully generic, for all systems with the same number of degrees of freedom, Eqs. (18) must be the equations of motion in the new coordinates and momenta whatever the initial form of H . No matter whether one deals with an harmonic oscillator or with a two-dimensional Keplerian problem. If Q_i and P_i are to be canonical coordinates, they must satisfy the “modified” Hamilton principle

$$\delta \int (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0, \quad (19)$$

whereas, as usual,

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (20)$$

Both equations will be satisfied if the integrands are connected by the relation:

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}, \quad (21)$$

and both sets verify the Poisson bracket:

$$\{q, p\} = \{Q, P\} = 1. \quad (22)$$

F is especially useful when mixing half of the old variables with the new variables and will then be considered as a bridge between the two sets of canonical variables. It is called the *generating function* of the transformation. One can define 4 such generating functions:

$$\begin{aligned} F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \\ F_4(p, P, t), \end{aligned} \quad (23)$$

with the following properties:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (24)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (25)$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (26)$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (27)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad (28)$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \quad (29)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad (30)$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (31)$$

In the particular case where, for instance,

$$F_3(p, Q, t) = -p \cdot Q, \quad (32)$$

Eq. (28) gives

$$q = Q, \quad P = p, \quad (33)$$

which corresponds to the identity transformation.

B. Hamilton-Jacobi equation

In order to solve a problem of mechanics, it is useful to formulate it with the best suited variables, for example, the angle-action variables. Then, one solves the Hamilton-Jacobi equation written thanks to a generating function S , which changes initial variables to new appropriate coordinates. The equation is basically given by

$$H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = \alpha_i. \quad (34)$$

For gravity, one has to deal with constraints, as introduced in the previous sections. General methods to solve the Hamilton-Jacobi equation in this case, with $\alpha_i = 0$, are given in [6].

IV. FIRST CHANGE OF VARIABLES (γ_m, π_m)

In this section, we show in some details the way to proceed in order to find easily the gauge-invariant quantities. This “algorithm” of resolution, originally used in [3] but not fully detailed, can be applied in many situations where perturbations are considered (see, for instance, [7]). The Hamilton-Jacobi framework has already been extensively studied and used in general relativity, as, e.g., in [7], but the method presented here focuses on the goal of directly deriving some gauge-invariant variables useful for observations.

It will now be detailed in the case of general relativity but expressed with variables that can be further used in the framework of loop quantum gravity, as investigated in the last section of this article.

A. New variables

Following [3], we define, from an appropriate generating function, two “new” variables γ and their conjugate momenta π , related to δK and δE , so that the equations are simplified. This is nothing else than reexpressing the perturbations E and ψ . Fundamentally, this does not bring any

new physical information as it is possible to obtain the very same results starting directly from ψ and E .

We will use the Fourier transformed variables such that, for instance,

$$\delta E_i^a(k, t) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} \delta E_i^a(x, t), \quad (35)$$

leading to

$$\delta E_i^a(k, t) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} \bar{p} \left(-2\psi(\delta_i^a) + \left(\delta_i^a - \frac{k_i k^a}{k^2} \right) k^2 E \right). \quad (36)$$

Working in Fourier space greatly simplifies most equations and can add some freedom. In our case, we define two vectors A^m ($m = 1, 2$) in the Fourier space such that

$$A_{ai}^1 = a \delta_i^a, \quad (37)$$

$$A_{ai}^2 = b \left(\delta_i^a - \frac{k_i k^a}{k^2} \right). \quad (38)$$

The variables a and b depend on the choice of the basis but, as we will show later, the final results do not depend on them. The scalar product of these vectors is proportional to $2k^2$. This is in sharp contrast with the situation studied in [3] where one had

$$A_L^1 = \delta_i^a, \quad (39)$$

$$A_L^2 = \frac{k_i k^a}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_i^a. \quad (40)$$

The difference is due to the choice of the perturbation: in our case we use E , whereas the “standard” μ was used in [3] leading to

$$\delta E_i^a(k, t) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} \bar{p} \left(-2\psi(\delta_i^a) + \left(\frac{k_i k^a}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_i^a \right) k^2 \mu \right).$$

It is easy to see that $A_L^1 \cdot A_L^2 = 0$. However, this is not in principle necessary and both approaches are strongly related and lead to the same results. Having defined these vectors, instead of working with ψ and E , we will use two other variables γ_m ($m = 1, 2$) such that

$$\delta E_i^a(k, t) = \gamma_1 A_{ai}^1 + \gamma_2 A_{ai}^2. \quad (41)$$

As suggested before, these new variables are just related with the perturbations through

$$a\gamma_1 = 2\bar{p}\psi, \quad (42)$$

$$b\gamma_2 = \bar{p}k^2 E. \quad (43)$$

Using Eq. (41), one can express them in terms of δE so that

$$a\gamma_1 = \frac{k_a k^i}{k^2} \delta E_i^a, \quad (44)$$

$$b\gamma_2 = -\frac{1}{2} \left(3 \frac{k_a k^i}{k^2} \delta E_i^a - \delta E_d^d \right). \quad (45)$$

Taking the trace of (41) indeed leads to

$$\delta E_d^d = 3a\gamma_1 + 2b\gamma_2, \quad (46)$$

and expressing γ_1 as a function of γ_2 in Eq. (41), one obtains:

$$\delta E_i^a = \frac{1}{3} \delta E_d^d \delta_i^a + b\gamma_2 \left(\frac{1}{3} \delta_i^a - \frac{k_i k^a}{k^2} \right). \quad (47)$$

This can be expressed as

$$\delta E_i^a = \frac{1}{3} \delta E_d^d A_L^1 - b\gamma_2 A_L^2, \quad (48)$$

by replacing $\delta\gamma_{ij}$ (as used in [3]) by δE_i^a . This is the first bridge between the two approaches. When solving this equation by multiplying by A_L^{2-1} , one naturally obtains Eqs. (44) and (45).

Furthermore, we can show that both approaches are in fact fully equivalent. Starting from one, for example, using μ , we can derive the expression of γ_m when E is used in terms of γ_m^L . This can be simply performed by using Eq. (9) which relates $\delta\gamma_{ij}$ with δE_i^a . To be consistent with [3], we redefine (due to our conventions) the variables as

$$\bar{p}\delta\gamma_i^a = \bar{p}\gamma_1^L A_L^1 + \bar{p}\gamma_2^L A_L^2. \quad (49)$$

Noticing that, from Eq. (9),

$$\bar{p}\delta\gamma_i^a = \delta E_d^d \delta_i^a - 2\delta E_i^a, \quad (50)$$

we can reexpress the approach of [3] as:

$$\gamma_1^L = \frac{1}{3} \delta\gamma_d^d, \quad (51)$$

$$\gamma_2^L = \frac{1}{2} \left(3 \frac{k_i k^a}{k^2} \delta\gamma_i^a - \delta_i^a \delta\gamma_i^a \right). \quad (52)$$

From Eqs. (9), (41), (49), and (50), it follows that

$$\bar{p}\delta\gamma_i^a = \bar{p}\gamma_1^L \delta_i^a + \bar{p}\gamma_2^L \left(\frac{k_i k^a}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_i^a \right) \quad (53)$$

$$= a\gamma_1 \delta_i^a + 2b\gamma_2 \frac{k_i k^a}{k^2}. \quad (54)$$

Taking the trace gives:

$$\bar{p}\gamma_1^L = a\gamma_1 + \frac{2b}{3} \gamma_2, \quad (55)$$

and Eq. (53) becomes

$$\bar{p}\gamma_2^L \left(\frac{k_i k^a}{k} - \frac{1}{3} \delta_i^a \right) = 2b\gamma_2 \left(\frac{k_i k^a}{k} - \frac{1}{3} \delta_i^a \right). \quad (56)$$

This leads to the expected equations:

$$2b\gamma_2 = \bar{p}\gamma_2^L, \quad (57)$$

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

$$a\gamma_1 = \bar{p}\left(\gamma_1^L - \frac{1}{3}\gamma_2^L\right). \quad (58)$$

Reexpressing them as functions of δE , with Eqs. (50)–(52) leads to Eqs. (44) and (45).

B. Generating function S_γ

In the framework of perturbed LQC, the canonical variables are δK and their conjugates δE . We have seen that it is possible to make a transformation from δE to γ_m . To this aim, we have to define the corresponding conjugate variables π_m of γ_m , which will depend on δK . As reminded above, there exists 4 generating functions allowing one to define new sets of variables. In our case, we define the momentum with a generating function S_γ such that

$$\pi_m \propto \frac{\partial S_\gamma}{\partial \gamma_m}, \quad (59)$$

where S_γ is then a function of γ_m . As γ is a function of δE , the momenta do not depend on δE and we can therefore set

$$S_\gamma = c\delta K_a^i A_{ai}^m \gamma_m, \quad (60)$$

where c is a constant. At this stage, we might consider two cases. First, one may chose to have γ_m as canonical coordinates and π_m as their conjugate momenta:

$$\delta K = q, \quad \delta E = p, \quad \gamma_m = Q, \quad \pi_m = P. \quad (61)$$

In this case, S_γ will be similar to a $f_1(q, Q)$ function and the conjugate momenta are

$$\pi_m = -\frac{\partial S_\gamma}{\partial \gamma_m} = -c\delta K_a^i A_{ai}^m. \quad (62)$$

In the second case, as γ_m are related to $\delta E = p$, one might want to have now π_m as canonical coordinates and γ_m as their conjugate momenta:

$$\delta K = q, \quad \delta E = p, \quad \gamma_m = P, \quad \pi_m = Q. \quad (63)$$

In this case, S_γ will be similar to a $f_2(q, P)$ function and the conjugate momenta are

$$\pi_m = \frac{\partial S_\gamma}{\partial \gamma_m} = c\delta K_a^i A_{ai}^m. \quad (64)$$

Comparing both cases, one can see that changing $c \rightarrow -c$ exchanges one case for the other one. From now on, we focus on the first case: the γ_m will be the canonical coordinates, and π_m their conjugate momenta. Nevertheless, considering either $\gamma = Q$ or $\gamma = P$, the algorithm naturally leads to the same correct gauge-invariant variables. In our choice, those variable are precisely the Mukhanov variables. Remaining as general as possible, one can finally write:

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

$$\pi_1 = -ac\delta K_a^d, \quad (65)$$

$$\pi_2 = -cb\left(\delta K_a^d - \frac{k^a k_i}{k^2} \delta K_a^i\right). \quad (66)$$

It is useful for the following computations to reexpress δK as a function of π_m such that

$$\delta K_a^i = a_a^i \pi_1 + b_a^i \pi_2, \quad (67)$$

where

$$a_a^i = a_1 \delta_a^i + a_2 \frac{k^i k_a}{k^2}, \quad (68)$$

$$b_a^i = b_1 \delta_a^i + b_2 \frac{k^i k_a}{k^2}. \quad (69)$$

Multiplying Eq. (67) by $-cA_{ia}^m$ leads to conditions on a_1 , b_1 , a_2 and b_2 through

$$\pi_m = -cA_{ia}^m(a_a^i \pi_1 + b_a^i \pi_2), \quad (70)$$

and, consequently,

$$\delta K_a^i = -\frac{1}{ca} \frac{k^i k_a}{k^2} \pi_1 + \frac{1}{2bc} \left(3 \frac{k^i k_a}{k^2} - \delta_a^i\right) \pi_2. \quad (71)$$

One can then multiply the previous equation by δE_i^a so as to obtain:

$$\begin{aligned} \delta K_a^i \delta E_i^a &= -\frac{\delta E_i^a}{ca} \frac{k^i k_a}{k^2} \pi_1 + \frac{\delta E_i^a}{2bc} \left(3 \frac{k^i k_a}{k^2} - \delta_a^i\right) \pi_2 \\ &= -\frac{1}{c} (\gamma_1 \pi_1 + \gamma_2 \pi_2). \end{aligned} \quad (72)$$

As explained in the next section, this might be interpreted as a conservation equation.

C. Poisson brackets

We now have defined the conjugate momenta π_m of γ_m . As for the original Ashtekar variables, these new ones will obey some Poisson bracket relations. Going through the computation leads to

$$\{\gamma_m, \pi_n\} = \kappa c \delta_{mn}. \quad (73)$$

The transformation can be said to be canonical as the variables have a symplectic structure such that the new Poisson bracket is related to the old one through

$$\{\gamma_m, \pi_n\} = \{\delta K_a^i(x), \delta E_i^a(x)\} \delta_{mn}. \quad (74)$$

In the next sections, we will consider a universe filled with matter, and, in particular, with a massive scalar field $\bar{\varphi}$, with its conjugate momentum $\bar{\pi}$, so that $\{\bar{\varphi}, \bar{\pi}\} = 1$, their perturbations being given by $\delta\varphi$ and $\delta\pi$. For simplicity and without any lack of generality, we therefore set $\kappa c = 1$. So,

$$\{\gamma_m, \pi_n\} = \delta_{mn}. \quad (75)$$

Using Eq. (72), we see that

$$\frac{\delta K_a^i \delta E_i^a}{\{\delta K_a^i(x), \delta E_i^a(x)\}} = -\frac{\gamma_m \pi_m}{\{\gamma_m, \pi_m\}}. \quad (76)$$

As we have chosen the γ_m , related to δE , as the canonical coordinates (instead of δK in the usual theory), this leads to the appearance of a minus sign in the previous equation.

The new set of symplectic variables, γ_m and π_m , is now well defined as

$$a\gamma_1 = \frac{k_a k^i}{k^2} \delta E_i^a, \quad (77)$$

$$b\gamma_2 = -\frac{1}{2} \left(3 \frac{k_a k^i}{k^2} \delta E_i^a - \delta E_d^d \right), \quad (78)$$

$$\pi_1 = -ac \delta K_d^d, \quad (79)$$

$$\pi_2 = -bc \left(\delta K_d^d - \frac{k^a k_i}{k^2} \delta K_a^i \right). \quad (80)$$

Their Poisson brackets are given by

$$\{\gamma_1, \pi_1\} = \{\gamma_2, \pi_2\} = 1, \quad (81)$$

$$\{\gamma_1, \pi_2\} = \{\gamma_2, \pi_1\} = 0. \quad (82)$$

As explained before, at this stage, nothing new emerges. This transformation is just useful to obtain simpler equations.

D. First order constraints in the term of (γ_a, π_a)

To use the new set of variables, we now have to reexpress the constraints in terms of γ_m and π_m . With the Ashtekar variables, for a universe filled with a massive scalar field φ (with conjugated momentum π), the diffeomorphism constraints in the ADM formalism reads as

$$D[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N}^a (\mathcal{D}^{(0)} + \mathcal{D}^{(2)}) + \delta N^a \mathcal{D}^{(1)}], \quad (83)$$

at first order in constraint densities. In fact, as in this case $\bar{N}^a = 0$, only the $\mathcal{D}^{(1)}$ term remains. Its gravitational and matter components are

$$\mathcal{D}_G^{(1)} = \frac{1}{\kappa} (-\bar{k} \delta_c^k \partial_d (\delta E_k^d) + \bar{p} \partial_c (\delta K_d^d) - \bar{p} \partial_d (\delta K_c^d)), \quad (84)$$

$$\mathcal{D}_M^{(1)} = \bar{\pi} (\partial_c \delta \varphi). \quad (85)$$

As far as the Hamiltonian constraints are concerned, one has

$$H[N] = \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N} (\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(2)}) + \delta N \mathcal{H}^{(1)}], \quad (86)$$

where the first order constraint densities are

$$\mathcal{H}_G^{(1)} = \frac{1}{2\kappa} \left(-4\sqrt{\bar{p}} \bar{k} \delta K_d^d - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} \bar{k}^2 \delta E_d^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial_c \partial^j \delta E_j^c \right), \quad (87)$$

$$\mathcal{H}_\pi^{(1)} = \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}}, \quad (88)$$

$$\mathcal{H}_\varphi^{(1)} = \bar{p}^{3/2} \left[V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta \varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}} \right]. \quad (89)$$

As in [3], we define $\gamma_0 = \delta \varphi$, and $\pi_0 = \delta \pi$, such that γ_a ($a = 0, 1, 2$) correspond to the old canonical coordinates “ q ” and $\{\gamma_a, \pi_a\} = 1$. The expressions of γ_a represent the “maximal” and “fundamental” decomposition of the perturbations. What was done so far is nothing else than a decomposition of the theory in terms of those perturbations. Gauge-invariant variables are derived from first order constraints. After a Fourier transformation, and using Eqs. (41) and (71), both first order constraints can now be expressed as functions of (γ_a, π_a) such that

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)}[\delta N] &= \delta N (\mathcal{H}_G^{(1)} + \mathcal{H}_M^{(1)}) \\ &= \frac{\delta N}{\sqrt{\bar{p}}} \left[\frac{2\bar{p} \bar{k}}{c\kappa} \frac{\pi_1}{a} + \dot{\bar{\varphi}} \pi_0 + \frac{b\gamma_2}{\kappa} (2\bar{k}^2 - \kappa \dot{\bar{\varphi}}^2) \right. \\ &\quad \left. + \bar{p}^2 V' \gamma_0 + \frac{a\gamma_1}{\kappa} \left(-k^2 + 3\bar{k}^2 - \frac{3}{2} \kappa \dot{\bar{\varphi}}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (90)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a] &= \delta N^a (\mathcal{D}_G^{(1)} + \mathcal{D}_M^{(1)}) \\ &= i\bar{p} (k_a \delta N^a) \left[-\dot{\bar{\varphi}} \gamma_0 + \frac{\bar{k}}{\bar{p}} \frac{a\gamma_1}{\kappa} + \frac{1}{c\kappa} \frac{\pi_2}{b} \right], \end{aligned} \quad (91)$$

where V' and V'' refer, respectively, to the first and second derivative with respect to the scalar field φ . The notation $\mathcal{H}^{(2)}[\delta N]$ and $\mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]$ are used, in agreement with most papers, to emphasize that those expressions are in fact second order ones due to δN and δN^a factors. We have also simplified the results by using the Friedmann equation (calculations are derived in the Appendix):

$$\bar{k}^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{2} + \bar{p} V \right), \quad (92)$$

and the fact that the equation of motion for the background variables reads as

$$\dot{\bar{\varphi}} = \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}. \quad (93)$$

We have thus expressed the first order constraint densities (90) and (91), as functions of the new set of symplectic coordinates (γ_a, π_a) . In the next section, we will show that it is possible to make a final transformation toward a new

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

set of coordinates (Q, P) , meaningful for cosmology and gauge invariance, using a generating function S and the Hamilton-Jacobi equations.

V. GAUGE TRANSFORMATION AND THE MUKHANOV-SASAKI EQUATION

To describe physical effects, one has to deal with gauge-invariant quantities. The goal of this section is to address the specific issue of gauge invariance within the canonical formalism.

A. Gauge invariance in the canonical formalism

In a canonical formulation, gauge transformations are directly generated by Poisson brackets of the fields with the constraints. In the covariant language, gauge transformations are studied as perturbation transformations under the coordinate change

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (94)$$

generated by vector fields ξ^μ . Under this coordinate transformation, any tensor field receives a correction given by its Lie derivative along ξ^μ . As defined in [8], the part of the transformation relevant for the scalar modes can be parametrized by two scalar functions ξ^0 and ξ such that

$$\xi^\mu = (\xi^0, \partial^\mu \xi). \quad (95)$$

Along this vector, a variable X will undergo a transformation given in the canonical formalism by

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} X = \{X, H^{(2)}[\bar{N}\xi^0] + D^{(2)}[\partial^a \xi]\}, \quad (96)$$

where

$$H^{(2)}[\delta N] = \int d^3x \mathcal{H}^{(2)}[\delta N], \quad (97)$$

$$D^{(2)}[\delta N^a] = \int d^3x \mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]. \quad (98)$$

It is easy to relate the canonical approach to the Lie derivative by noticing that

$$\{\bar{X} + \delta X, D[\xi^a]\} = \mathcal{L}_{\bar{\xi}}(\bar{X} + \delta X). \quad (99)$$

In the framework of LQC, using the densitized constraints (84)–(89) in Eq. (96), one expresses the transformations of basics variables as

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \delta E_i^a = 2\bar{p}\bar{k}\xi_0\delta_i^a - \bar{p}(\delta_i^a k^2 - k_a k^i)\xi, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \delta_{[\xi^0, \xi]} \delta K_i^a &= -\frac{1}{2}\bar{k}^2\xi_0\delta_a^i - k_a k^i(\xi_0 + \bar{k}\xi) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2}\left(-\frac{\dot{\phi}}{2} + \bar{p}V\right)\xi_0\delta_a^i, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \delta \varphi = \dot{\phi}\xi_0, \quad (102)$$

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} \delta \pi = -\bar{p}\dot{\phi}k^2\xi - \bar{p}^2V'\xi_0. \quad (103)$$

With these expressions and the definition of γ_m and π_m , it is easy to see that

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} H^{(2)}[\delta N] = \{H^{(2)}[\delta N], H^{(2)}[\bar{N}\xi^0] + D^{(2)}[\partial^a \xi]\} = 0,$$

$$\delta_{[\xi^0, \xi]} D^{(2)}[\delta N] = \{D^{(2)}[\delta N^a], H^{(2)}[\bar{N}\xi^0] + D^{(2)}[\partial^a \xi]\} = 0,$$

which means that the first order constraints (90) and (91) are gauge-invariant. Another way to see this is to compute directly the Poisson brackets:

$$\{H^{(2)}[\delta N_1], H^{(2)}[\delta N_2]\} = 0, \quad (104)$$

$$\{H^{(2)}[\delta N], D^{(2)}[\delta N^a]\} = 0, \quad (105)$$

$$\{D^{(2)}[\delta N_1^a], D^{(2)}[\delta N_2^a]\} = 0, \quad (106)$$

and replace the δN and δN^a by their ξ^μ equivalents. What is shown here has been noticed in [3]. As it will be emphasized in the next section, this means that to obtain gauge-invariant quantities, the algebra should not only be anomaly-free, but should also have null first order Poisson brackets.

B. Gauge invariance with the Hamilton-Jacobi equation

In the Hamilton-Jacobi equation, the momentum is expressed in terms of a generating function S and a new transformation is performed. As stated in [3], there are differences between the classical case where standard Hamiltonians are used, and the case studied here where we rely on constraints and reduce the phase space. In the latter case, the Hamilton-Jacobi-like equation has to be directly solved. As the total first order constraint (density) has to be null for all δN and δN^a , which play similar (although slightly different) roles, one can separate the equations and solve the two Hamilton-Jacobi-like expressions:

$$\mathcal{H}^{(2)}[\delta N]\left(\gamma_a, \pi_a = \frac{\partial S}{\partial \gamma_a}\right) = 0, \quad (107)$$

$$\mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]\left(\gamma_a, \pi_a = \frac{\partial S}{\partial \gamma_a}\right) = 0. \quad (108)$$

Because $\mathcal{H}^{(2)}[\delta N]$ and $\mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]$ are linear in (γ_a, π_a) in (90) and (91), the more “natural” generating function to consider is a quadratic function $S = f_2(\gamma_a = q, P_2)$ such that

$$S = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta + B_\alpha\gamma_\alpha P_2, \quad (109)$$

where $A_{\alpha\beta}$ is a 3×3 matrix. Taking into account the properties of the generating function, the conjugate variable of P_2 is given by

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = B_\alpha\gamma_\alpha. \quad (110)$$

To show where the gauge invariance of the new variables Q_2 and P_2 comes from, one can synthetically write that

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)}[\delta N] &= (\delta N)(E_a \pi_a + \Sigma_b \gamma_b) \\ &= (\delta N)((E_a A_{ab} + \Sigma_b) \gamma_b + E_a B_a P_2),\end{aligned}\quad (111)$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a] &= i \cdot (k_c \delta N^c)(M_a \pi_a + \Lambda_b \gamma_b) \\ &= i \cdot (k_c \delta N^c)((M_a A_{ab} + \Lambda_b) \gamma_b + M_a B_a P_2).\end{aligned}\quad (112)$$

As constraints they have to vanish, and considering P_2 and γ_a as independent, it is possible to find B_a and A_{ab} through 4 equations:

$$E_a B_a = 0, \quad M_a B_a = 0, \quad (113)$$

$$E_a A_{ab} + \Sigma_b = 0, \quad (114)$$

$$M_a A_{ab} + \Lambda_b = 0. \quad (115)$$

With the expression of Q_2 given in (110), and using Eq. (113), one can see that, with our choice of generating function:

$$\begin{aligned}\delta_{[\xi^0, \xi]} Q_2 &= B_a \delta_{[\xi^0, \xi]} \gamma_a \\ &= B_a \{ \gamma_a, \mathcal{H}^{(2)}(\bar{N} \xi_0) + \mathcal{D}^{(2)}(\partial^a \xi) \} \\ &= B_a \{ \gamma_a, (\bar{N} \xi_0)(E_a \pi_a + \Sigma_b \gamma_b) \} \\ &\quad + B_a \{ \gamma_a, (\partial^a \xi)(M_a \pi_a + \Lambda_b \gamma_b) \}, \\ &= (\bar{N} \xi_0) \cdot B_a E_a + (\partial^a \xi) \cdot B_a M_a = 0.\end{aligned}\quad (116)$$

This shows that Q_2 is basically gauge-invariant because of the relations (113) and not because of the anomaly freedom of the algebra. The gauge invariance can also be seen by expressing Q_2 in terms of $(\delta E, \delta \varphi)$, and using (100). Finally, it is possible to define a set of 3 new variables (Q_b, P_b) , and the function S by $S = \frac{1}{2} A_{ab} \gamma_a \gamma_b + B_{ab} \gamma_a P_b$. Making this choice and applying the procedure described above leads to simple equations showing that $Q_b \propto Q_2$. This means that there is a unique consistent choice for Q_2 and the previous case is therefore preferred.

As far as the generating function is concerned, we could also have chosen $S = f_1(\gamma_a = q, Q_1)$ and found the conjugate momentum P_1 . This would however have led to $P_1 = -Q_2$ and the situation would have been equivalent. Moreover, it is also possible to consider a generating function such that

$$S = f_{3,4}(p, \{Q, P\}) = \frac{1}{2} A_{ab} \pi_a \pi_b + B_a \pi_a P_{3,4}. \quad (117)$$

Following the same procedure would lead to some new gauge-invariant functions. However, they do not exhibit any interesting physical feature. In the following, we will therefore focus on the generating function given by

Eq. (109), leading to $Q = Q_2$ as a Mukhanov variable and $P = P_2$ as its momentum.

C. Anomaly freedom in the Hamilton-Jacobi approach

To be consistent, that is to ensure that the evolution generated by the constraints remains compatible with the constraints themselves, the theory must be anomaly-free. In our case, using the same synthetic formulation as in (111) and (112), one can compute the Poisson brackets:

$$\begin{aligned}\{H^{(2)}[\delta N_1], H^{(2)}[\delta N_2]\} &= 0, \\ \{H^{(2)}[\delta N], D^{(2)}[\delta N^a]\} &= (\delta N)(\delta N^a)(\Sigma_a M_a - E_a \Lambda_a), \\ \{D^{(2)}[\delta N_1^a], D^{(2)}[\delta N_2^a]\} &= 0.\end{aligned}$$

The total first order constraint $M^{(1)}[\delta N, \delta N^a]$ leads to

$$\{M^{(1)}[1], M^{(1)}[2]\} = [\delta N, \delta N^a](\Sigma_a M_a - E_a \Lambda_a). \quad (118)$$

To close algebra, that is to cancel anomalies, one has to require that

$$\Sigma_a M_a - E_a \Lambda_a = 0. \quad (119)$$

Using Eqs. (114) and (115):

$$(114) \times M_b = E_a A_{ab} M_b + \Sigma_a M_a = 0, \quad (120)$$

$$(115) \times E_b = M_a A_{ab} E_b + \Lambda_a E_a = 0. \quad (121)$$

Combining those equations with (119), the condition for anomaly freedom reads as

$$E_a A_{ab} M_b = M_a A_{ab} E_b, \quad (122)$$

which is fulfilled only if A_{ab} is a symmetric matrix, with thus only 6 unknown parameters. This corresponds to a fully solvable problem. The condition of anomaly freedom allows one to completely determine without ambiguity the equations of motion for the gauge-invariant variables.

D. Mukhanov equation in general relativity

As perturbations can, *a priori*, be analyzed through different choices of gauges (for instance, the *Newton gauge* where $B = E = 0$), it is useful to provide gauge-invariant quantities (related to γ_a , δN and δN^a) that are physically relevant to investigate observational consequences, the *Bardeen potentials* [9]:

$$\Phi = \phi + \frac{d}{d\eta}(B - \dot{E}) + \mathcal{H}(B - \dot{E}), \quad (123)$$

$$\Psi = \psi - \mathcal{H}(B - \dot{E}), \quad (124)$$

where \mathcal{H} is the *conformal Hubble parameter*. As we are dealing with a universe filled with a massive scalar field φ , it will also undergo gauge-invariant perturbations $\delta\varphi^{\text{GI}}$. Gravity and matter perturbations are of course linked and we shall focus on the linear order, as often in perturbation theory. As derived in [8] [this follows from the definition (96)]:

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

$$\delta\varphi^{\text{GI}} = \delta\varphi + \dot{\Phi}(B - \dot{E}). \quad (125)$$

When dealing with all the scalar perturbations, there are 2 degrees of freedoms. This equation generates a constraint and only 1 degree of freedom remains. Usually, the relevant variable used in cosmology is called the *Mukhanov-Sasaki variable* v , originally found in [10] and governed by the associated Mukhanov-Sasaki equation:

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + \Delta v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0, \quad (126)$$

where

$$v = a(\eta) \left[\delta\varphi^{\text{GI}} + \frac{\dot{\Phi}}{\mathcal{H}} \Phi \right], \quad (127)$$

$$z = a(\eta) \frac{\dot{\Phi}}{\mathcal{H}}. \quad (128)$$

When this variable is found, and after performing a Fourier transform, it is easy to compute the power spectrum of the *conserved curvature perturbation*. As reviewed, e.g., in [11]:

$$v = z \cdot R, \quad (129)$$

$$\mathcal{P}_R(k) = \frac{k^3}{\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2. \quad (130)$$

The spectral index is, for example, given by

$$n_s - 1 = \frac{d(\mathcal{P}_R)}{d(k)} \Big|_{k=k_*}. \quad (131)$$

This power spectrum $\mathcal{P}_R(k, \eta)$, typically representing the state of the universe at the end of inflation, is a mandatory input to compute observables, in particular, in the CMB).

VI. SECOND CHANGE OF VARIABLES (Q, P)

In order to compute physical effects, one needs gauge-invariant variables. We have shown that the generating function, defined in Eq. (109), will lead to such gauge-invariant observables. In the following, we will precisely show that Q and P are the Mukhanov variables fulfilling the correct equations of motion.

A. Expression of the gauge-invariant variables

Using the requirement (107) with $\kappa c = 1$ leads to conditions on A_{ab} and B_a , through (114). They can be written as

$$\mathcal{H}^{(2)}[\delta N] = 0 = 1 \cdot \xi + \gamma_0 \cdot \xi_0 + \gamma_1 \cdot \xi_1 + \gamma_2 \cdot \xi_2, \quad (132)$$

where

$$\xi = \frac{2\bar{p}\bar{k}}{a} B_1 + \dot{\Phi} B_0, \quad (133)$$

$$\xi_0 = A_{00} \dot{\Phi} + \frac{2\bar{p}\bar{k}}{a} A_{01} + \bar{p}^2 V', \quad (134)$$

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

$$\xi_1 = A_{01} \dot{\Phi} + \frac{2\bar{p}\bar{k}}{a} A_{11} + \frac{a}{\kappa} \left(-k^2 + 3\bar{k}^2 - \frac{3}{2} \kappa \dot{\Phi} \right), \quad (135)$$

$$\xi_2 = A_{02} \dot{\Phi} + \frac{2\bar{p}\bar{k}}{a} A_{21} + \frac{b}{\kappa} (2\bar{k}^2 - \kappa \dot{\Phi}). \quad (136)$$

Considering now Eq. (108), we are led to

$$\mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a] = 0 = 1 \cdot \Xi + \gamma_0 \cdot \Xi_0 + \gamma_1 \cdot \Xi_1 + \gamma_2 \cdot \Xi_2, \quad (137)$$

where

$$\Xi = B_2, \quad (138)$$

$$\Xi_0 = b \dot{\Phi} - A_{02}, \quad (139)$$

$$\Xi_1 = \frac{ab}{\kappa} \frac{\bar{k}}{\bar{p}} + A_{12}, \quad (140)$$

$$\Xi_2 = A_{22}. \quad (141)$$

This system is much simpler than in the ADM formalism and can be explicitly solved. Taking into account Eq. (108), one we can directly fix:

$$B_2 = A_{22} = 0, \quad A_{02} = b \dot{\Phi}, \quad A_{12} = -\frac{ab}{\kappa} \frac{\bar{k}}{\bar{p}}. \quad (142)$$

This choice for A_{02} and A_{12} leads to consider, in Eq. (107), only 3 equations for 5 unknown variables. One can check that the conditions (142), implemented in Eq. (136), make it vanish. This choice is therefore obviously correct. Moreover, as it will be made clear in the following, it is not necessary to determine all the coefficients of A_{ab} . Let us now focus on B_a . Equation (133) leads to a relation between the terms of B_a :

$$B_1 = -\frac{\dot{\Phi} a}{2\bar{p}\bar{k}} \cdot B_0. \quad (143)$$

B_0 will be kept as an irreducible degree of freedom and we will show that any gauge-invariant quantity will just be, at the end, proportional to the fundament B_0 choice.

The new variable Q defined in Eq. (110) can be expressed in terms of γ_a such that, finally, using $a\gamma_1 = -2\bar{p}\psi$, one obtains:

$$Q = B_0 \left(\delta\varphi - \frac{\dot{\Phi}}{2\bar{p}\bar{k}} \cdot a\gamma_1 \right) = B_0 \left(\delta\varphi + \frac{\dot{\Phi}}{\bar{k}} \psi \right), \quad (144)$$

which is similar to v in (127) if one chooses $B_0 = \sqrt{\bar{p}} = a(\eta)$. It can also be noticed that it is independent of the choice of the base. Of course, one can also choose to invert Eq. (143),

$$B_0 = -\frac{2\bar{p}\bar{k}}{a\dot{\Phi}} \cdot B_1, \quad (145)$$

and define the gauge-invariant variable as

$$Q = B_1 \left(-\frac{2\bar{p}}{a} \frac{\bar{k}}{\dot{\bar{\varphi}}} \gamma_0 + \gamma_1 \right) = -\frac{2\bar{p}B_1}{a} \left(\frac{\bar{k}}{\dot{\bar{\varphi}}} \delta\varphi + \psi \right), \quad (146)$$

which is a function of the perturbed curvature variable R :

$$Q = -\frac{2\bar{p}B_1}{a} R. \quad (147)$$

In the following, we will focus on the case for which $Q \propto v$ but the other choice would also be possible and the same method would lead to similar results. In the next step, we will keep B_0 free, until the last step, and derive the equations of motion for Q , and therefore for v , the Hamiltonian formulation and how to find the expression for z .

B. Hamiltonian expression and equations of motions

A general expression has been found for a gauge-invariant quantity Q which is related to the Mukhanov variables. As the generating functions S_γ and S are known, it is possible to find the Hamiltonian, and therefore the Lagrangian, from which the equation of motion for Q can be derived. The classical results can then be obtained elegantly in the canonical formalism. Considering γ_1 and γ_2 as pure gauge variables, as explained into the details in [6], we should avoid using any function explicitly depending on them as they do not contribute to the dynamics.

As we know the Hamiltonian as a function of $(\delta K, \delta E)$ and as we have derived the expression of the generating functions, it is possible to express the second order constraints, that are governing the dynamics of perturbations, in terms of the new set of variables (Q, P) . Using the notations of [3], the known variables can be inverted and one can easily find, with $B_0 = f(\bar{k}, \bar{p})$:

$$\delta\varphi = \frac{Q}{B_0} + [\gamma_1, \gamma_2], \quad (148)$$

$$\delta\pi = B_0 P + \frac{A_{00}}{B_0} Q + [\gamma_1, \gamma_2], \quad (149)$$

$$\pi_1 = \frac{A_{01}}{B_0} Q - \frac{a\dot{\bar{\varphi}}}{2\bar{p}k} B_0 P + [\gamma_1, \gamma_2], \quad (150)$$

$$\pi_2 = b \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{B_0} Q + [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (151)$$

To go further in studying the dynamics, let us notice that, as Q is gauge invariant,

$$\delta_{\delta N, \delta N^a} Q \doteq \{Q, H^{(2)}[\delta N] + D^{(2)}[\delta N^a]\} = 0. \quad (152)$$

The evolution of Q (and this is true for any gauge-invariant variable) is thus given by the second order constraint densities:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \{Q, \bar{N}(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(2)}) + \bar{N}^a(\mathcal{D}^{(0)} + \mathcal{D}^{(2)}) \\ &\quad + \mathcal{H}^{(2)}[\delta N] + \mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]\} \\ &= \{Q, \bar{N}\mathcal{H}^{(0)} + \bar{N}^a\mathcal{D}^{(0)}\} + \{Q, \mathcal{H}^{(2)}[\delta N] \\ &\quad + \mathcal{D}^{(2)}[\delta N^a]\} + \{Q, \bar{N}\mathcal{H}^{(2)} + \bar{N}^a\mathcal{D}^{(2)}\} \\ &= 0 + \delta_{\delta N, \delta N^a} Q + \{Q, \bar{N}\mathcal{H}^{(2)} + \bar{N}^a\mathcal{D}^{(2)}\}. \end{aligned} \quad (153)$$

So,

$$\dot{Q} = \{Q, \bar{N}\mathcal{H}^{(2)} + \bar{N}^a\mathcal{D}^{(2)}\}. \quad (154)$$

In our case, these constraint densities are, with $\bar{N}^a = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} &= \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\bar{p}} (\delta_k^c \delta_j^d \delta K_c^j \delta K_d^k - (\delta K_d^d)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta\pi^2}{\bar{p}^{3/2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}} \delta^{ab} \partial_a \delta\varphi \partial_b \delta\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta\varphi^2 + [\delta E_t^a]. \end{aligned} \quad (155)$$

As δE is related to γ_m through Eq. (41), we should not consider functions depending on it. Moreover, as

$$\frac{\partial S_\gamma}{\partial \eta} = f(\gamma_m, \dot{\gamma}_m), \quad (156)$$

one can write, after taking the Fourier transformation and using Eq. (71):

$$\begin{aligned} H^S &= \int d^3k \frac{\bar{p}}{2\kappa} \left[\frac{3}{2} \frac{\pi_2^2}{(bc)^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\pi_1}{a} \frac{\pi_2}{b} + \kappa \frac{\pi_0^2}{\bar{p}^2} \right. \\ &\quad \left. + \kappa(k^2 + \bar{p}V'')\gamma_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (157)$$

The c parameter enters the equation only quadratically, therefore the choice of the generating function S_γ (either $\gamma = P$ or $\gamma = Q$) does not enter the final result. However, we do not have yet expressed the Hamiltonian for the gauge-invariant variables. It is necessary to use Eqs. (148) in (157) and to add the relevant terms associated with the derivative with respect to time of the generating function,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \dot{A}_{00} \gamma_0^2 + \dot{B}_0 \gamma_0 P + f(\gamma_m, \dot{\gamma}_m) \\ &= \frac{1}{2} \dot{A}_{00} \left(\frac{Q}{B_0} \right)^2 + \frac{\dot{B}_0}{B_0} P Q. \end{aligned} \quad (158)$$

To avoid inconsistencies, \dot{Q} and \dot{P} terms should not be taken into account. The gauge-invariant Hamiltonian constraint for Q and P is thus:

$$\begin{aligned} H_{\text{GI}}^S &= \int \frac{d^3k}{2} \left[\left(B_0 \frac{P}{\sqrt{\bar{p}}} \right)^2 + \Gamma_{B_0} \left(\frac{\sqrt{\bar{p}} Q}{B_0} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + P Q \left(\frac{1}{\kappa c^2} \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{k} + 2 \frac{A_{00}}{\bar{p}} + 2 \frac{\dot{B}_0}{B_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (159)$$

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

where

$$\Gamma_{B_0} = \frac{\dot{A}_{00}}{\bar{p}} - 2\kappa\dot{\bar{\phi}}\frac{A_{01}}{a} + \frac{A_{00}^2}{\bar{p}^2} + k^2 + \bar{p}V'' + \frac{3\kappa}{2}\dot{\bar{\phi}}^2. \quad (160)$$

In order to recover the usual Hamiltonian formulation, the cross terms in P and Q in the previous equation should vanish. However, looking at (159), it is clear that this cross terms will give the expression of A_{00} , as a function of $\frac{\dot{B}_0}{B_0}$. Looking at Γ , we see that the square and the derivative with respect to time of A_{00} are involved. One should also notice that it is not really Q which enters the expression of the Hamiltonian, but rather $\chi = \frac{Q}{B_0} = \delta\varphi + \frac{\dot{\phi}}{k}\psi$. Its conjugate momentum is thus B_0P . Indeed, looking at the Poisson bracket, one sees that

$$\{Q, P\} = \{B_0\chi, P\} = \{\chi, B_0P\} = 1, \quad (161)$$

which is quite similar to the case $B_0 = 1$. Moreover, even if B_0 is not defined for now on, it is possible to find the general form of the equation of motion.

Thus, to cancel the cross term, we set

$$\frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{c^2\bar{p}\bar{k}} + 2\kappa\frac{A_{00}}{\bar{p}^2} + 2\frac{\dot{B}_0}{B_0} = 0 \quad (162)$$

and so

$$A_{00} = -\kappa\frac{\bar{p}}{2}\frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{\bar{k}} - \bar{p}\frac{\dot{B}_0}{B_0}. \quad (163)$$

With Eq. (134):

$$\frac{A_{01}}{a} = -\frac{1}{2\bar{k}}\left(\bar{p}V' - \kappa\frac{\dot{\bar{\phi}}^3}{2\bar{k}} - \bar{p}\frac{\dot{B}_0}{B_0}\dot{\bar{\phi}}\right). \quad (164)$$

Finally, with the expressions of A_{00} , A_{01} , and B_0 , one can see that the Hamiltonian is independent of a and b , which means that the result is also independent of the normalization choice for the vectors A_{ai}^m . One can also solve (135) to find A_{11} but this is physically unuseful. One can also study the equations of evolution: once δE is known, it is naturally possible to obtain the exact value of δK by studying $\delta\dot{E}$. This leads to valuable informations on π_a .

Taking into account Eqs. (163) and (164), it is now possible to refine the expression of the Hamiltonian (159) as

$$H_{\text{GI}}^S = \int \frac{d^3k}{2} \left[\left(B_0 \frac{P}{\sqrt{\bar{p}}} \right)^2 + \Gamma_{B_0} \left(\frac{\sqrt{\bar{p}}Q}{B_0} \right)^2 \right], \quad (165)$$

where Γ_{B_0} is finally given by

$$\Gamma_{B_0} = \Gamma + \left(\frac{\dot{B}_0}{B_0} \right)^2 - \frac{1}{\bar{p}} \frac{d}{d\eta} \left(\bar{p} \frac{\dot{B}_0}{B_0} \right), \quad (166)$$

$$= \Gamma - \left(\frac{\dot{B}_0}{B_0} \right)^2 - \frac{B_0^2}{\bar{p}} \frac{d}{d\eta} \left(\bar{p} \frac{\dot{B}_0}{B_0^3} \right), \quad (167)$$

the second equation being obtained by using the corresponding Lagrangian for $B_0 = 1$ and then setting $v = \sqrt{\bar{p}}Q$, with

$$\Gamma = k^2 + \bar{p}V'' + 3\kappa\dot{\bar{\phi}}^2 + 2\kappa\frac{\dot{\bar{\phi}}}{k}\bar{p}V' - \frac{1}{2}\left(\kappa\frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{k}\right)^2. \quad (168)$$

To establish this expression, we have used the Raychaudhuri equation (written in conformal time $\bar{N} = \sqrt{\bar{p}}$):

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{\bar{k}} = \bar{k}^2 - \frac{\kappa}{2}\dot{\bar{\phi}}^2, \quad (169)$$

and the Klein-Gordon equation:

$$\ddot{\bar{\phi}} + 2\bar{k}\dot{\bar{\phi}} + \bar{p}V' = 0. \quad (170)$$

The Hamilton equations thus lead to

$$\dot{Q} = \frac{\partial H_{\text{GI}}^S}{\partial P} = \left(\frac{B_0}{\sqrt{\bar{p}}} \right)^2 P, \quad (171)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H_{\text{GI}}^S}{\partial Q} = -\left(\frac{\sqrt{\bar{p}}}{B_0} \right)^2 \Gamma_{B_0} Q, \quad (172)$$

and the general equation of motion is given by

$$\ddot{Q} - 2\left(\frac{\sqrt{\bar{p}}}{B_0} \right) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{B_0}{\sqrt{\bar{p}}} \right) \dot{Q} + \Gamma_{B_0} Q = 0. \quad (173)$$

Reexpressing P in term of \dot{Q} with (171) leads to consider a Lagrangian such that

$$\mathcal{L} = \int \frac{d^3k}{2} \left(\frac{\bar{p}}{B_0^2} \right) [\dot{Q}^2 - \Gamma_{B_0} Q^2]. \quad (174)$$

The Euler-Lagrange equations lead to the same equation of motion as (173).

Classically, the Mukhanov equation is derived from the action:

$$\mathcal{S} = \int d\eta \int d^3k \frac{1}{2} \left[\dot{v}^2 + \left(-k^2 + \frac{\ddot{z}}{z} \right) v^2 \right]. \quad (175)$$

The variable v was here defined with $B_0 = \sqrt{\bar{p}}$. Remembering that $\bar{k} = \frac{\dot{p}}{2\bar{p}}$, using the Hamilton equations with (173), and the Euler-Lagrange equation [or directly by comparing Eqs. (174) and (175)], a clear correspondence between the equation of motion can be seen:

$$\ddot{v} + \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z} \right) v = 0, \quad (176)$$

$$\ddot{v} + (\Gamma - \dot{\bar{k}} - \bar{k}^2) v = 0. \quad (177)$$

With these equations, it is possible to recover z by simply solving:

$$\frac{\ddot{z}}{z} = -\Gamma + k^2 + \bar{k}^2 + \dot{\bar{k}}, \quad (178)$$

which is satisfied classically for

$$z = \frac{\sqrt{\bar{p}}\dot{\bar{\phi}}}{\bar{k}}. \quad (179)$$

This method allowed us to find gauge-invariant variables and their equations of evolution, starting from an anomaly-free algebra in an easy way. In loop quantum gravity, corrections to the classical theory are expected and this will change the expression for the constraints, leading to a modified algebra. The requirement of anomaly freedom is not necessary to obtain the gauge-invariant Q and P , only a vanishing Poisson bracket for the first order constraints is required. But, of course, full physical consistency can only be achieved if the algebra is closed. Thus, as in the previous sections where the case of general relativity expressed with Ashtekar variables was studied, we will consider in the following the effects of the two main corrections from LQC, that is the holonomy and the inverse-volume corrections. Moreover, an easier way to obtain the Mukhanov-Sasaki variable is to set first $B_0 = 1$ and then recover z when using ν so that the corresponding Lagrangian has the same form as in Eq. (175) from the modified Hamiltonian.

VII. APPLICATIONS

We now consider constraints modified with respect to the classical case. In the following, we focus only on the steps useful to find the associated gauge-invariant Mukhanov variables, without going into the details of the calculations. The missing steps can easily be rebuilt using the techniques given above.

We still consider a universe filled with a massive scalar field φ . The diffeomorphism constraint holds its classical form and, in all the following considerations, it will still be given by Eq. (83). Moreover, the expressions of γ_a and π_a do not rely on the shape of the constraints, but on the shape of the metric. In the following, expressions (77)–(80) will therefore be used. What will be modified are the Hamiltonian constraints where counter terms have been added in order to cancel the anomalies so as to have a closed algebra. In the following, we will give the expressions of the first and second orders for these constraints. The interested reader can refer to the appendix where, starting from the zeroth order constraints, the equations of motion for the background variables are derived. To be as general as possible, we will keep the same notation where a and b are unknown.

A. Inverse-volume case

Following [8], where anomaly freedom was found in the case of inverse-volume corrections ($\bar{\alpha}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\sigma}$), we introduce unknown functions (f , g , f_1 , f_2 , \dots , g_1 , g_2 , \dots) which will play the role of counter terms. We consider thus the Hamiltonian densities given by

$$\mathcal{H}_G^{(1)} = \frac{\bar{\alpha}}{2\kappa} \left[-4(1+f)\sqrt{\bar{p}}\bar{k}\delta K_d^d - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}}(1+g)\bar{k}^2\delta E_d^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\partial_c\partial^j\delta E_j^c \right], \quad (180)$$

$$\mathcal{H}_\pi^{(1)} = \bar{\nu} \left[(1+f_1)\frac{\bar{\pi}\delta\pi}{\bar{p}^{3/2}} - (1+f_2)\frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}}\frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}} \right], \quad (181)$$

$$\mathcal{H}_\varphi^{(1)} = \bar{p}^{3/2} \left[(1+f_3)V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi + V(\bar{\varphi})\frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}} \right]. \quad (182)$$

In this case, the Friedmann equation is

$$\bar{\alpha}\bar{k}^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^2} + \bar{p}V \right), \quad (183)$$

and, by definition,

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\nu} \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}. \quad (184)$$

Going ahead as in the classical case, Eq. (108) gives the relation between B_0 and B_1 such that

$$B_1 = -\frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{a}{2\bar{p}} \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{\bar{\alpha}\bar{k}} B_0. \quad (185)$$

Setting $B_0 = 1$, the gauge-invariant Mukhanov-like variable is then

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \delta\varphi + \frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{\bar{\alpha}\bar{k}} \psi. \quad (186)$$

Proceeding as before to solve the Hamilton-Jacobi-like equations, Eq. (136) has to be fulfilled, which can be expressed here as

$$\xi_2 = \frac{b}{\kappa} \left[-\bar{\alpha}\bar{k}^2(2f+g) + \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{\bar{\nu}}(2f_1-f_2) \right]. \quad (187)$$

In our approach, this condition is satisfied if

$$g = -2f, \quad (188)$$

$$f_2 = 2f_1. \quad (189)$$

We have thus recovered exactly the relations given in [8] so as to have an anomaly-free algebra. This is of course not surprising as Eq. (187) is related to the condition of anomaly freedom that was pointed out in Eq. (119).

In [8], the second order of the corrections $\alpha(\bar{p}, \delta E_i^a)$ and $\nu(\bar{p}, \delta E_i^a)$ also had to be taken into account, but as they are proportional to δE and thus to γ_1 and γ_2 , we do not need to consider these terms. So,

$$(\alpha^{(2)}, \nu^{(2)}) = f(\gamma_1, \gamma_2) \rightarrow \text{ignored}. \quad (190)$$

The second order constraint density with $\bar{N}^a = 0$ can thus be written as

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} = & \frac{\bar{\alpha}}{2\kappa} \sqrt{\bar{p}} (\delta_k^c \delta_j^d \delta K_c^j \delta K_d^k - (\delta K_d^d)^2) \\ & + \frac{\bar{\nu}}{2} (1+g_1) \frac{\delta\pi^2}{\bar{p}^{3/2}} + \frac{\bar{\sigma}}{2} (1+g_5) \sqrt{\bar{p}} k^2 \delta\varphi^2 \\ & + \frac{1}{2} (1+g_6) \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta\varphi^2 + [\delta E_i^a]. \end{aligned} \quad (191)$$

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

In this case, the cross term PQ are vanishing if one imposes the following condition on A_{00} :

$$A_{00} = -\kappa \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{v}} \right)^2 \frac{\bar{p}}{2\bar{k}} \frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{1}{(1+g_1)}. \quad (192)$$

The Hamiltonian can therefore be written as

$$H_{\text{GI}}^S = \int \frac{d^3k}{2} \left[\bar{v}(1+g_1) \left(\frac{P}{\sqrt{\bar{p}}} \right)^2 + \Gamma_{\text{IV}} (\sqrt{\bar{p}}Q)^2 \right], \quad (193)$$

where

$$\Gamma_{\text{IV}} = \kappa \left[k^2 \bar{\sigma}(1+g_5) + \kappa(1+g_6) \bar{p} V'' + \frac{\dot{A}_{00}}{\bar{p}} - 2\bar{\alpha} \frac{A_{01}}{a} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{v}} + \frac{3}{2} \bar{\alpha} \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{v}} \right)^2 + \bar{v}(1+g_1) \frac{A_{00}^2}{\bar{p}^2} \right]. \quad (194)$$

Let us define now

$$v = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{v}(1+g_1)}} Q, \quad (195)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\bar{v}(1+g_1)}{\bar{p}}} \frac{d}{d\eta} \left(\sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{v}(1+g_1)}} \right), \quad (196)$$

where ϵ is the Hubble parameter in the classical limit. The Lagrangian can be written as

$$\mathcal{L}_{\text{GI}}^S = \int \frac{d^3k}{2} \left(\dot{v}^2 + \left(-s^2 k^2 + \frac{\ddot{z}}{z} \right) v^2 \right), \quad (197)$$

where

$$\frac{\ddot{z}}{z} = -\bar{v}(1+g_1) \Gamma_{\text{IV}} + s^2 k^2 + \epsilon^2 + \frac{d\epsilon}{d\eta}, \quad (198)$$

and

$$s^2 = \bar{\sigma} \bar{v}(1+g_1)(1+g_5) = \bar{\sigma} \bar{v}(1+g_1+g_5). \quad (199)$$

Classically, the conserved curvature perturbation is given by

$$R = \psi + \frac{\bar{k}}{\bar{\phi}} \delta\varphi = \frac{v}{z}. \quad (200)$$

In the case of inverse-volume corrections, from the previous equation and considering Eq. (195), one can naturally suggest in our approach:

$$z = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{v}(1+g_1)}} \frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\alpha} \bar{k}}, \quad (201)$$

which is close but not exactly similar to the expression given in [12]. In fact, the propagation speed for the perturbations derived in [12] is given by

$$s_{\text{paper}}^2 = \bar{\alpha}^2 (1-f_3), \quad (202)$$

whereas, in our case, it is given by Eq. (199). Nevertheless, it is possible to mix the equations for the anomalies found in [8] and derive the expressions:

$$\bar{\alpha}^2 = \bar{\sigma} \bar{v} \quad \text{and} \quad f_3 + g_1 + g_5 = 0. \quad (203)$$

It shows that, at least for the propagation speed for the perturbations, results (199) and (202) are exactly the same. In this study, we have given some arguments to establish the function z . Although it would, in principle, be possible to check its consistency, using Eq. (198), this would lead to lengthy calculations that have not yet been carried out. It is however clear that our choice is associated with a correct Lagrangian. It might be that both solutions are physically equivalent. We let this question opened for future studies.

B. Ω -LQC model—holonomy corrections

We now focus on the case of holonomy corrections and we use the notations of [13].

The first order corrected constraints, with counter terms α_i not yet fixed but introduced to close the algebra, are given by

$$\mathcal{H}_G^{(1)} = \frac{1}{2\kappa} \left(-4\sqrt{\bar{p}} (\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) \delta K_d^d - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) \delta E_d^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial_c \partial^j \delta E_j^c \right), \quad (204)$$

$$\mathcal{H}_\pi^{(1)} = \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}}, \quad (205)$$

$$\mathcal{H}_\varphi^{(1)} = \bar{p}^{3/2} \left[V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta\varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}} \right], \quad (206)$$

where we use the notation ($n \neq 0$):

$$\mathbb{K}[n] \doteq \frac{\sin(n\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{n\bar{\mu}\gamma}. \quad (207)$$

One also has to deal with the Klein-Gordon equation,

$$\bar{\pi} = \bar{p} \dot{\bar{\phi}}, \quad (208)$$

$$\ddot{\bar{\phi}} = -\bar{p} \partial_{\bar{\varphi}} V(\bar{\varphi}) - 2\mathbb{K}[2] \dot{\bar{\phi}}, \quad (209)$$

and the Raychaudhuri equation,

$$\dot{\bar{k}} = \bar{k} \mathbb{K}[2] - \Omega \frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{2}, \quad (210)$$

with

$$\Omega \doteq \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}). \quad (211)$$

Moreover, holonomy corrections lead to a modified Friedmann equation. The energy density ρ is basically defined through

$$\mathbb{K}[1]^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{2} + \bar{p} V(\bar{\varphi}) \right) = \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho, \quad (212)$$

and the Friedmann equation is given by

$$\mathcal{H}^2 = \mathbb{K}[2]^2 = \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (213)$$

where

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa \gamma^2 \bar{\mu}^2 \bar{p}} \quad (214)$$

is the critical energy density. Applying the same procedure as previously, one can derive the relation between B_0 and B_1 :

$$B_1 = -\frac{a \dot{\bar{\phi}}}{2\bar{p}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)} B_0. \quad (215)$$

The related gauge-invariant variable is then (with the usual choice $B_0 = 1$):

$$Q = \delta\varphi + \frac{\dot{\bar{\phi}}}{(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)} \psi. \quad (216)$$

In this case, the condition (136) reads as

$$0 = 2\bar{k}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) - 2\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2, \quad (217)$$

which is again a necessary condition appearing when $\{H_G^Q, D_G^Q\}$ is considered and which has to be fulfilled to have an anomaly-free algebra. By this procedure, we have two unknown counter terms α_1 and α_2 , and the previous equation gives a relation between them:

$$\alpha_2 = 2\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1). \quad (218)$$

In [13], the anomaly was removed with $\alpha_1 = \mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[s_1]$ and thus $\alpha_2 = 2\mathbb{K}[1]^2 - 2\bar{k}\mathbb{K}[2]$ which will be used in the following. The second order Hamiltonian constraint density is thus modified so that

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} = & \frac{\sqrt{\bar{p}}}{2\kappa} \cdot \Omega \cdot (\delta_k^c \delta_j^d \delta K_c^j \delta K_d^k - (\delta K_d^d)^2) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\delta \pi^2}{\bar{p}^{3/2}} + \frac{1}{2} \bar{p}^{3/2} V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi}) \delta\varphi^2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot \Omega \cdot \sqrt{\bar{p}} \delta^{ab} \partial_a \delta\varphi \partial_b \delta\varphi + [\delta E_i^a]. \end{aligned} \quad (219)$$

One obtains

$$A_{00} = -\Omega \kappa \frac{\bar{p}}{2} \frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{\mathbb{K}[2]}, \quad (220)$$

and

$$\frac{A_{01}}{a} = -\frac{1}{2\mathbb{K}[2]} \left(\bar{p} V' - \Omega \kappa \frac{\dot{\bar{\phi}}^3}{2\mathbb{K}[2]} \right), \quad (221)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\Omega = & \Omega k^2 + \bar{p} V'' - \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\mathbb{K}[2]} \dot{\bar{\phi}}^2 + 3\kappa \Omega \dot{\bar{\phi}}^2 \\ & + 2\kappa \Omega \bar{p} V' \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathbb{K}[2]} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega \kappa \dot{\bar{\phi}}}{\mathbb{K}[2]} \right)^2. \end{aligned} \quad (222)$$

The Mukhanov equation in conformal time ($\bar{N} = \sqrt{\bar{p}}$), remembering that $\mathbb{K}[2] = \frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}}$, is

$$\ddot{Q} + 2\mathbb{K}[2]\dot{Q} + \Gamma_\Omega Q = 0. \quad (223)$$

As previously, it is possible to find z through

$$-\frac{\ddot{z}}{z} = \Gamma_\Omega - \Omega \cdot k^2 + \mathbb{K}[2]^2 + \frac{d\mathbb{K}[2]}{d\eta}, \quad (224)$$

which is fulfilled for

$$z = \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\mathbb{K}[2]} \dot{\bar{\phi}}. \quad (225)$$

This corresponds exactly to what was found, following another path based on the Bardeen potentials, in [13]. As in the previous case, we have recovered the Mukhanov Lagrangian.

C. General case: Inverse-volume and holonomy corrections

In this section, we will not address the issue of anomaly freedom for the case where both corrections are taken into account. We will just focus on defining the Mukhanov variable by the method previously developed. Naturally, it will be expressed as a function of the counter terms. We will see that this case can be solved as if corrections were mostly independent, as suggested in [12].

In this case, the first order constraint densities can be defined, as in the previous cases, by

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{(1)} = & \frac{\bar{\alpha}}{2\kappa} \left[-4\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) \delta K_d^d \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (\mathbb{K}[1]^2 + \alpha_2) \delta E_d^d + \frac{2}{\bar{p}} \partial_c \partial_j \delta E_j^c \right], \end{aligned} \quad (226)$$

for the gravitational sector and,

$$\mathcal{H}_\pi^{(1)} = \bar{\nu}(1 + f_1) \frac{\bar{\pi} \delta \pi}{\bar{p}^{3/2}} - \bar{\nu}(1 + f_2) \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}}, \quad (227)$$

$$\mathcal{H}_\varphi^{(1)} = \bar{p}^{3/2} \left[(1 + f_3) V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \delta\varphi + V(\bar{\varphi}) \frac{\delta E_d^d}{2\bar{p}} \right], \quad (228)$$

for the matter sector.

The Friedmann-like equation is given by

$$\bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^2} + \bar{p} V \right), \quad (229)$$

with the definition:

$$\dot{\bar{\phi}} = \bar{\nu} \frac{\bar{\pi}}{\bar{p}}. \quad (230)$$

Going ahead as previously, one obtains again a relation between B_0 and B_1 :

$$B_1 = -\frac{(1 + f_1)}{(1 + f)} \frac{a}{2\bar{p}} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\bar{\alpha}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)} B_0. \quad (231)$$

GAUGE INVARIANCE IN LOOP QUANTUM COSMOLOGY: ...

PHYSICAL REVIEW D **85**, 123534 (2012)

As a fully closed algebra has not yet been found, we are compelled to keep α_1 unknown. Using previous results from [12,13], it is however probable that the solution will soon be derived.

Setting $B_0 = 1$, the gauge-invariant Mukhanov-like variable is then

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \delta\varphi + \frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{\bar{\alpha}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)} \psi. \quad (232)$$

Following the same procedure as in the previous sections when solving the Hamilton-Jacobi-like equations, we have to fulfill, in particular, Eq. (136), which can be expressed here as

$$\xi_2 = \frac{b}{\kappa} [-\bar{\alpha}(2\bar{k}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) + \alpha_2 - 2\mathbb{K}[1]^2) + \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\bar{\varphi}}^2}{\bar{v}} (2f_1 - f_2)], \quad (233)$$

and vanishes for

$$2\bar{k}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1) + \alpha_2 - 2\mathbb{K}[1]^2 = 0, \quad (234)$$

$$f_2 = 2f_1. \quad (235)$$

This corresponds to conditions already found when holonomy or inverse-volume corrections were taken into account independently.

Previous works on tensor perturbations where both corrections were included have shown that the corrections act independently on the equations of motion. As the inverse-volume correction acts on the $\frac{1}{\sqrt{\det(E)}}$ terms and holonomy corrections act on the \bar{k} terms, a guess can be made: in the final algebra of constraints, it should be sufficient to simply multiply the algebra found for the holonomy case by the appropriate counter terms found for inverse-volume corrections. Of course, this assumption can be debated because of the derivative which will be implied, but at least at the first order, it seems to be correct.

At this stage, it is difficult to go much ahead. However, the previous results lead us to assume

$$z = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{p}(1+g_1)}} \frac{(1+f_1)}{(1+f)} \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{\bar{\alpha}(\mathbb{K}[s_1] + \alpha_1)}. \quad (236)$$

This remains to be fully demonstrated.

VIII. CONCLUSION

This article builds on the innovative ideas given in [3] and develops them so that they can be used in the framework of loop quantum cosmology. Going through successive changes of variables by using this kind of generating functions, we have set a scheme useful to study cosmological perturbations with complicated Hamiltonians: using our definition of gauge-invariant variables, the appropriate Mukhanov-Sasaki variables appear naturally and

directly. Both the cases of inverse-volume and of holonomy corrections were considered. In principle, it is also possible to study, in such an easy way, any other kind of correction that can be set up by constraints. Moreover, the Hamilton-Jacobi method is very general and can be used in different frameworks, in particular, in particle physics where gauge invariance plays a crucial role. Nevertheless, this work is not fully independent from the previous ones: the expressions for all the counter terms cannot be obtained directly from this method and a good procedure should be to first analyze the corrected constraints following the Hamilton-Jacobi approach, obtaining the expression of some Poisson brackets and fundamental gauge-invariant variables, and then performing the calculations for the remaining Poisson brackets. At this stage, the anomalies can be removed by choosing the appropriate counter terms and some new feature can appear (e.g. the $\bar{\mu}$ -scheme for the holonomies [13]). It is then possible to derive completely the equation of motion for the Mukhanov-Sasaki variables v where the Lagrangian is as in (197).

Several developments are expected. First, although reasonable, some guesses had to be made. They should be checked in details by going through the full exhaustive computation, in particular, by studying the equations of motion for the Bardeen potentials when inverse-volume corrections are taken into account.

Second, the method should be applied again when counter terms for the holonomy + inverse-volume case will have been found. This work is already on the way.

Finally, those gauge-invariant variables should now be used to investigate cosmological consequences at the observational level.

APPENDIX: EQUATIONS OF MOTION

In this appendix, we give an example of how to derive the equations of motion for the background variables when holonomy and inverse-volume corrections are taken into account together. The classical limit corresponds to $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ or $\mathbb{K}[n] \rightarrow \bar{k}$. At the lowest order, the diffeomorphism constraints are null, we therefore consider in the following only the Hamiltonian constraints which are given, for gravity and for matter, by

$$H_G^{(0)}[\bar{N}] = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x \bar{N} (-6\bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2 \sqrt{\bar{p}}), \quad (237)$$

and

$$H_M^{(0)}[\bar{N}] = \int d^3x \bar{N} \left(\bar{v} \frac{\bar{\pi}^2}{2\bar{p}^{3/2}} + \bar{p}^{3/2} V(\bar{\varphi}) \right). \quad (238)$$

The background variables are linked through

$$\{\bar{k}, \bar{p}\} = \frac{\kappa}{3}, \quad (239)$$

$$\{\bar{\varphi}, \bar{\pi}\} = 1. \quad (240)$$

For instance, the conformal Hubble parameter found with $\bar{p} = a^2(\eta)$ is given by

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}} = \frac{1}{2\bar{p}} \{ \bar{p}, H_G^{(0)}[\bar{N}] + H_M^{(0)}[\bar{N}] \}$$

$$= \frac{1}{2\bar{p}} \frac{\kappa}{3} \left[\frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{k}} \right] \quad (241)$$

$$= 0 - \frac{1}{2\bar{p}} \frac{\kappa}{3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\partial H_G^{(0)}[\bar{N}]}{\partial \bar{k}} + 0 \right) \quad (242)$$

$$= \frac{1}{2\bar{p}} \frac{\kappa}{3} \frac{\sqrt{\bar{p}}}{2\kappa} (-12\sqrt{\bar{p}} \bar{\alpha} \mathbb{K}[2]) \quad (243)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{\bar{p}}}{2\bar{p}} = \bar{\alpha} \mathbb{K}[2]. \quad (244)$$

Moreover, the energy density ρ is defined by

$$\rho \doteq \frac{1}{\bar{p}^{(3/2)}} \frac{\delta H_m}{\delta \bar{N}} = \frac{\bar{p}}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^3} + V, \quad (245)$$

and is linked to gravity through an equation of motion

$$\frac{\delta}{\delta \bar{N}} (H + D)_{\text{tot}}^{(0)} = 0, \quad (246)$$

which gives the Friedmann-like equation

$$\bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{\bar{p}}{2} \frac{\bar{\pi}^2}{\bar{p}^2} + \bar{p} V \right) = \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho. \quad (247)$$

Using the previous relations, the Friedmann equation is thus given by

$$\mathcal{H}^2 = (\bar{\alpha} \mathbb{K}[2])^2 = \bar{\alpha} (\bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2) \cdot \cos^2(\bar{\mu} \gamma \bar{k}) \quad (248)$$

$$= \bar{\alpha} (\bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2) (1 - (\bar{\mu} \gamma)^2 \mathbb{K}[1]^2) \quad (249)$$

$$= \bar{\alpha} \left(\frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho \right) \left(1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\rho}{\rho_c} \right) \quad (250)$$

$$= \frac{\kappa}{3} \bar{p} \rho \left(\bar{\alpha} - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (251)$$

where, as usual when using the holonomies within the $\bar{\mu}$ scheme, the critical energy density is defined by Eq. (214). Moreover, similarly, the Raychaudhuri equation is given by

$$\dot{\bar{k}} = \bar{\alpha} \bar{k} \mathbb{K}[2] - \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{p}} \right) \bar{\alpha} \mathbb{K}[1]^2 - \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\bar{\phi}}^2}{\bar{p}}. \quad (252)$$

-
- [1] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004); T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007); A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Classical Quantum Gravity* **21**, R53 (2004); A. Perez, arXiv:gr-qc/0409061v3; P. Doná and S. Speziale, arXiv:1007.0402v1; C. Rovelli, arXiv:1102.3660v5.
- [2] M. Bojowald, *Living Rev. Relativity* **11**, 4 (2008); A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
- [3] D. Langlois, *Classical Quantum Gravity* **11**, 389 (1994).
- [4] M. Bojowald and G. M. Hossain, *Phys. Rev. D* **77**, 023508 (2008); D. J. Mulryne and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* **74**, 083507 (2006); J. Mielczarek and M. Szydlowski, *Phys. Lett. B* **657**, 20 (2007); G. Calcagni and M. Cortes, *Classical Quantum Gravity* **24**, 829 (2007); E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, *Phys. Rev. D* **77**, 023510 (2008); J. Mielczarek, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2008) 011; *Phys. Rev. D* **79**, 123520 (2009); E. J. Copeland, D. J. Mulryne, N. J. Nunes, and M. Shaeri, *Phys. Rev. D* **79**, 023508 (2009); J. Grain and A. Barrau, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 081301 (2009); M. Shimano and T. Harada, *Phys. Rev. D* **80**, 063538 (2009); J. Grain, A. Barrau, and A. Gorecki, *Phys. Rev. D* **79**, 084015 (2009); J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **81**, 104049 (2010); M. Bojowald, G. Calcagni, and S. Tsujikawa, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2011) 046; *Phys. Rev. Lett.* **107**, 211302 (2011).
- [5] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley, Reading, MA, 2002).
- [6] J. Goldberg, E. T. Newmann, and C. Rovelli, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **32**, 2739 (1991).
- [7] M. Tanimoto, V. Moncrief, and K. Yasuno, *Classical Quantum Gravity* **20**, 1879 (2003).
- [8] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Phys. Rev. D* **79**, 043505 (2009); **82**, 109903(E) (2010).
- [9] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [10] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [11] J. Martin, *Lect. Notes Phys.* **669**, 199 (2005).
- [12] M. Bojowald and G. Calcagni, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2011) 032.
- [13] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 095010 (2012).

Conclusion

On voit ainsi que dans le formalisme canonique, les équations donnant et l'expression des variables invariantes de jauge et leur équation du mouvement, sont obtenues très facilement. Pour obtenir l'expression de ces variables, il suffit de ne considérer que le fait que les perturbations de la fonction Lapse δN et du shift vecteur δN^a sont elles aussi des multiplicateurs de Lagrange, ayant ainsi comme conséquence le fait que

$$\Pi_{\delta N} = \frac{\delta(H[N] + D[N^a])}{\delta(\delta N)} = \frac{\delta H^{(1)}[\delta N]}{\delta(\delta N)} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{(1)} = 0 \quad (13.3)$$

$$\Pi_{\delta N^a} = \frac{\delta(H[N] + D[N^a])}{\delta(\delta N^a)} = \frac{\delta D^{(1)}[\delta N^a]}{\delta(\delta N^a)} = 0 \Rightarrow \mathcal{D}^{(1)} = 0. \quad (13.4)$$

Les équations du mouvement ne concernent alors que les contraintes à l'ordre 2 dans les perturbations, et le fait que l'on doit ajouter $\frac{\partial S}{\partial \eta}$ pour avoir l'équation de la **forme classique** peut se comprendre par le fait d'utiliser la contrainte

$$H_{EOM}^{(2)} = H^{(2)}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + p_\eta \quad \text{with} \quad p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} \quad (13.5)$$

comme vu au premier chapitre, avec $\frac{\partial S}{\partial \eta}$ qui est du second ordre, donc n'intervenant pas dans l'obtention de l'expression des variables invariantes de jauge.

L'équation d'Hamilton-Jacobi a beaucoup été utilisée dans l'obtention d'une théorie quantique de la gravitation, et on voit ici qu'elle possède d'autres aspects très attrayant. Il est ainsi bon de connaître son existence et peut-être de l'utiliser dans des travaux futurs.

Quatrième partie

Conclusion

Conclusion et perspectives

Marty McFly :

Wait a minute, Doc. Ah... Are you telling me that you built a time machine... out of a DeLorean ?

Dr. Emmett Brown :

The way I see it, if you're gonna build a time machine into a car, why not do it with some style ?

Robert Zemeckis, *"Back to the future"*, 1985

La recherche d'une théorie quantique de la gravitation est devenue aujourd'hui un des enjeux majeurs de la physique. De nombreux modèles, comme la théorie des cordes ou bien la gravité quantique à boucles pour ne citer que les théories considérées comme les plus importantes, ont ainsi été proposés, donnant tous des interprétations et des conséquences physiques très différentes dont les effets apparaissent surtout à l'échelle de Planck. Cependant, même s'ils présentent des caractéristiques attrayantes, il est nécessaire de discriminer les modèles et utiliser éventuellement notre univers comme moyen de discrimination. Or, à nos échelles de longueur et d'énergie, il n'existe pas à l'heure actuelle d'expériences permettant une observation directe des effets quantiques prédits, mais il pourrait être possible de le faire indirectement avec l'étude du fond diffus cosmologique, des trous noirs ou bien des sursauts gamma.

Durant la thèse, nous nous sommes intéressés à la théorie de la gravité quantique à boucles, et plus particulièrement son application à la cosmologie : au contraire de la théorie des cordes, elle ne recourt pas à de lourdes hypothèses supplémentaires mais utilise simultanément les concepts de cette théorie avec ceux de la mécanique quantique, sans avoir à ajouter de nouveaux postulats. La gravité quantique à boucles n'a ainsi pas la prétention d'unifier les différentes forces observées mais plutôt de donner un cadre quantique à la gravitation dans lequel pourront évoluer tous les champs. Cette théorie est d'autant plus intéressante à regarder que sa construction utilise un formalisme commun avec celui des théories de jauge : considérer la gravitation non plus comme une entité géométrique mais comme un champ à part entière va donner une théorie similaire aux théories de Yang-Mills, pour lesquelles les procédures de quantification ont été largement développées.

L'objectif de ma thèse a ainsi été de regarder quels étaient les effets observables possibles prédits par la cosmologie quantique à boucles, en s'intéressant plus particulièrement aux corrections quantiques apportées par les holonomies. Depuis quelques années maintenant, la communauté s'est surtout concentrée sur l'étude des corrections d'inverse-volume, remettant à plus tard celle sur les corrections d'holonomie. Nous avons ainsi utilisé une théorie effective dans laquelle ont été incorporées ces corrections, et regardé quelles étaient les modifications apportées sur l'évolution des perturbations cosmologiques. Ces perturbations peuvent être en partie observées indirectement dans le fond diffus cosmologique, et l'étude des spectres de puissance va alors donner de précieuses indications sur l'existence ou non de tels effets quantiques. Nous aurons alors la possibilité de tester la validité de ces modèles, ou tout du moins de les contraindre.

Mon premier travail a ainsi consisté à regarder les effets des deux corrections de la cosmologie quantique à boucles sur l'évolution des perturbations tensorielles. Des travaux avaient étudié les effets des corrections prises séparément, mais en imposant l'évolution du fond comme étant celle d'un fond De Sitter : j'ai ainsi suivi la même démarche et vu que le spectre de puissance était modifié par les contributions des deux effets. Cependant, ce travail a été une introduction et un entraînement à ce qui a suivi.

Concernant les corrections d'holonomie, seules les équations du mouvement des perturbations vectorielles et tensorielles avaient été obtenues dans le cas d'une algèbre close, et à part dans une étude [56], le spectre de puissance pour les perturbations tensorielles n'avait jamais été regardé. Ce spectre ne tenait compte que de la présence du rebond, et nous avons alors cherché à l'améliorer en incorporant naturellement une phase inflationnaire. Les résultats obtenus ont alors donné un spectre spécifique à un modèle de rebond, mais possédant en plus les caractéristiques de l'inflation (et d'une superinflation) qui va apparaître naturellement.

Par certains arguments, il a été montré qu'un tel spectre primordial devrait être générique à tout modèle de rebond suivi d'une inflation, et nous avons alors décidé d'en étudier les conséquences observationnelles. Après

avoir regardé l'influence des différents paramètres sur la forme du spectre, nous avons tenté de savoir si une future expérience avait la possibilité de distinguer les effets quantiques du spectre angulaire obtenu dans le modèle standard. Il en a résulté comme conclusion qu'un large espace de paramètres pouvant signer un rebond était disponible et qu'il n'était pas impossible ainsi d'observer les effets quantiques.

Cependant, cette étude a porté sur les modes B générés par les perturbations tensorielles, non encore observés. Le spectre en température étant très bien mesuré, nous avons dans tous les travaux suivants chercher à obtenir le spectre de puissance pour les perturbations scalaires tenant compte des corrections d'holonomie. Par une démarche progressive, nous avons modifié les contraintes corrigées en ajoutant des contre-terme et vu comment ils permettaient de résoudre les anomalies dans le cas général, donnant ainsi de nouvelles contraintes. Pour ce faire, il a été impératif de considérer le cas où $\beta = -\frac{1}{2}$, favorisant ainsi le $\bar{\mu}$ -scheme : ce schéma est cohérent du point de vue de l'évolution des échelles de longueur en fonction du facteur d'échelle, et c'est celui que nous avons considéré par la suite.

D'autre part, ces contre-terme peuvent être appliqués à toutes les perturbations, permettant de penser que les travaux précédents ne sont en fait pas strictement valides et qu'il devient tout juste possible d'étudier les effets physiques des corrections d'holonomies. Pour ce faire, il est judicieux de regarder les variables invariantes de jauge, dont les expressions tiennent maintenant compte des corrections. Un travail, qui s'est avéré par la suite prospectif, a consisté à appliquer une méthode utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi, permettant avec les expressions des contraintes d'obtenir très facilement les variables invariantes de jauge ainsi que leurs équations du mouvement, telles qu'elles peuvent s'écrire en terme d'un lagrangien similaire à celui d'un oscillateur harmonique massif évoluant dans le temps. Dans toute étude future sur les perturbations dans le formalisme canonique, il va être recommandé d'utiliser cette méthode, notamment lorsque l'on regardera l'influence des deux corrections. Les modifications apportées par les termes en Ω ont finalement des conséquences importantes dans ce modèle : lorsque Ω devient négatif, on observe un changement de signature de la métrique effective. Dans ce régime, le temps n'existerait plus, et il n'y aurait alors pas d'évolution : on ne pourrait ainsi pas propager les solutions à travers le rebond. A l'heure actuelle, les conséquences ne sont que partiellement comprise et aucun avis définitif n'est encore consensuel.

Ce travail a ainsi permis de comprendre l'effet des corrections d'holonomies sur les perturbations cosmologiques, avec une algèbre des contraintes modifiée close. Les résultats donnés ici ont été retrouvés par une autre démarche, confirmant la solidité de notre approche. Il reste cependant encore beaucoup à faire si l'on souhaite étudier complètement les perturbations en cosmologie quantique à boucles. Ne serait-ce que pour le cas des corrections d'holonomie où il faut chercher à résoudre les équations modifiées :

- pour les perturbations scalaires

$$\ddot{v} - \Omega \Delta v - \frac{\ddot{z}}{z} v = 0, \quad \text{où} \quad z = \sqrt{\bar{p}} \frac{\dot{\bar{\phi}}}{\mathbb{K}[2]} \quad (13.6)$$

- pour les perturbations vectorielles, il faudrait tenir compte d'un fluide permettant d'avoir de la vorticité.
- pour les perturbations tensorielles

$$\ddot{h}_a^i + \dot{h}_a^i \left(2\mathbb{K}[2] - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) - \Omega \Delta h_a^i = 0 \quad (13.7)$$

qui peut se ramener à une forme similaire à l'équation de Mukhanov-Sasaki par le changement de variable

$$v = \frac{ah}{\sqrt{\Omega}}. \quad (13.8)$$

On voit d'ores et déjà les difficultés analytiques et numériques qui apparaissent, la fonction Ω évoluant avec le temps jusqu'à s'annuler. Des travaux préliminaires sur les perturbations tensorielles ont montré que les solutions divergeaient en $\Omega = 0$, correspondant au moment où $\rho = \rho_c/2$ donc près du rebond (la densité d'énergie croît très rapidement proche du rebond). Un travail est en cours afin d'obtenir analytiquement les solutions en ces instants. Il est de même possible de regarder le cas des perturbations scalaires, mais le potentiel effectif $\frac{\ddot{z}}{z}$ va diverger en de nombreux endroits, donnant le cas le plus compliqué à traiter.

Dans les études précédentes, nous n'avons pas considéré le cas des anisotropies, et il serait aussi important de voir leur implication sur la physique, notamment pour comprendre ce qui se passe quand une des directions est en contraction et les deux autres en expansion. Les équations ne vont pas réellement être plus compliquées mais plus nombreuses, et il est encore nécessaire de développer le formalisme pour les perturbations. Il faudrait aussi tenir compte des effets de back-reaction : cela est certes possible, mais va nécessiter beaucoup de travail supplémentaire, les équations du mouvement du fond et des perturbations étant alors énormément modifiées :

par exemple [86], il faudra tenir compte de terme en racine carré des densités d'énergies.

D'autre part, les corrections d'holonomie et les corrections d'inverse-volume vont avoir des conséquences différentes sur la forme des spectres, et il serait intéressant de regarder maintenant comment se transforment les équations d'évolution des variables invariantes de jauge sous l'action conjuguée des deux corrections : chaque correction va-t-elle avoir un effet découplé de l'autre correction ? Vont-elles se compenser ou bien s'additionner, défavorisant la théorie effective ? Comme souligné précédemment, il serait assez simple d'obtenir ces variables et ces équations par la méthode d'Hamilton-Jacobi (cela ayant été en fait partiellement fait dans le chapitre précédent), mais pour le moment, il vaut mieux étudier séparément les corrections afin d'avoir une idée de leurs influences sur le spectre. Une remarque peut cependant être faite puisque le terme Ω dans les équations provient du terme ' $\delta K \delta K$ ' dans la contrainte hamiltonienne : lorsque l'on considèrera l'action des deux corrections, on devrait observer la présence d'un terme $\alpha \Omega \delta K \delta K$ dont il faudra étudier l'influence à tous les moments de l'univers.

Durant cette thèse, nous avons ainsi développé le modèle permettant de tenir compte des corrections d'holonomie lors de l'étude des perturbations cosmologiques. La démarche menant à son élaboration s'est faite de manière progressive et logique, suivant les difficultés et les besoins que nous avons rencontrés. Nous avons ainsi dérivé les équations d'évolution des variables invariantes de jauge pour tous type de perturbations, mais il reste cependant encore beaucoup à faire avant de pouvoir peut-être observer un jours une empreinte de ces effets quantiques, et remonter ainsi dans le passé.

Autres articles publiés

Deux autres articles ont été réalisés durant cette thèse

et je souhaitais compléter ce manuscrit en les y incorporant.

Probing Loop Quantum Gravity with Evaporating Black Holes

A. Barrau^{*} and T. Cailleteau[†]

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS, IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

X. Cao[‡]

Ecole Polytechnique Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France

J. Diaz-Polo[§]

*Institute for Gravitation and the Cosmos & Physics Department Penn State, University Park, Pennsylvania 16802-6300, USA
and Department of Physics and Astronomy, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana 70803-4001, USA*

J. Grain^{||}

*Institut d'Astrophysique Spatiale, Universit Paris-Sud, CNRS Bâtiments 120-121, 91405 Orsay cedex, France
(Received 20 September 2011; published 16 December 2011)*

This Letter aims at showing that the observation of evaporating black holes should allow the usual Hawking behavior to be distinguished from loop quantum gravity (LQG) expectations. We present a full Monte Carlo simulation of the evaporation in LQG and statistical tests that discriminate between competing models. We conclude that contrarily to what was commonly thought, the discreteness of the area in LQG leads to characteristic features that qualify evaporating black holes as objects that could reveal quantum gravity footprints.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.251301

PACS numbers: 04.70.Dy, 04.60.Pp

Introduction.—Loop quantum gravity (LQG) is a promising framework to nonperturbatively quantize general relativity (GR) in a background invariant way (see [1] for introductory reviews). Interestingly, it has now been demonstrated that different approaches, based either on quantizations (covariant or canonical) of GR, or on a formal quantization of geometry lead to the very same LQG theory. As for any tentative theory of quantum gravity, experimental tests are, however, still missing. Trying to find possible observational signatures is obviously a key challenge. In this article we address the following question: could there be objects in the contemporary Universe whose observation would lead to a clear signature of LQG? Fortunately, the answer turns out to be positive. Although small black holes have not yet been directly observed, they could have been formed by different mechanisms in the early Universe (see, e.g., [2] for a recent review) or even by particle collisions. We do not review here the well-known possible production mechanisms, but instead we focus on how to use the evaporation of microscopic black holes to investigate the discriminating power of the emitted spectrum. Three different possible signatures will be suggested. Although one should be careful when pushing the limits of the LQG approach to black holes to the microscopic limit, our results rely on features of the area spectrum and are rather insensitive to small modifications in the theoretical framework.

Theoretical framework.—The state counting for black holes in LQG relies on the isolated horizon framework (see, e.g., [3] for an up-to-date detailed review). The

isolated horizon is introduced as a boundary of the underlying manifold before quantization. For a given area A of a Schwarzschild black hole horizon, the physical states arise from a punctured sphere whose punctures carry quantum labels (see, e.g., [4] for a detailed analysis). Two labels (j, m) are assigned to each puncture, j being a spin half-integer carrying information about the area and m being its corresponding projection carrying information about the curvature. They satisfy the conditions

$$A - \Delta \leq 8\pi\gamma\ell_p^2 \sum_{p=1}^N \sqrt{j_p(j_p + 1)} \leq A + \Delta, \quad (1)$$

where γ is the fundamental Barbero-Immirzi parameter of LQG, Δ is a “smearing” area and p labels the different punctures, and

$$\sum_{p=1}^N m_p = 0, \quad (2)$$

which corresponds to the requirement of a horizon with spherical topology. Many specific features of the entropy were derived in this framework [5]. Although the proportionality between the entropy and the area is indeed recovered (when choosing correctly the γ parameter) in the classical limit, the quantum structure still leaves a clear footprint at microscopic scales.

Long ago, Bekenstein and Mukhanov postulated that due to quantum gravitational effects the area of a black hole should be proportional to a fundamental area of the order of the Planck area [6] (the argument has recently

been updated in [7]). This led to the idea of possible exciting probes of quantum gravity through associated lines in the evaporation spectrum. However, following the pioneering work of Rovelli [8], it was soon realized that the situation is drastically different in LQG where the spacing of the energy levels decreases exponentially with the energy, therefore closing any hope for detection [9]. In (the first paper of) [5] a possible observational effect was suggested based on an exact computation of entropy and the observation of an effective discretization of it. In this Letter we readdress this issue and show that at least three different signatures can in fact be expected. Two of them are, as it could be expected, related with “Planck scale” black holes, whereas the last one works also for larger black holes.

Emission lines in the Planck regime.—We first consider the evaporation of a black hole in the deep quantum regime. To this aim, we have developed a dedicated and optimized algorithm. It is based on the ideas given in [3] and it was enhanced with an efficient numeration scheme using a breadth-first search. As the projection constraint is very time consuming, this improvement is mandatory to perform the computation up to high enough Planck areas. The evaporation is considered both according to the pure Hawking law and according to the LQG theory. In each case, we model the evaporation by expressing the probability of transition as the exponential of the entropy difference multiplied by the gray body factor. Arguments for the reliability and generality of this approach are given in [10]. As it can be seen from Fig. 1, some specific lines associated with the transitions occurring in the very last stages of the evaporation can be identified in the LQG spectrum, whereas the pure Hawking spectrum is naturally smooth. Two subtle points have to be taken into account. First, the usually assumed “optical limit” of the gray body factors induces a heavy distortion of the spectrum. The use of exact gray body factors, obtained by solving the quantum wave equations in the curved background of the black hole, is in this case mandatory. To be maximally conservative, we have used the very same gray body factors in the Hawking case and in the LQG case. Any difference, as could be possibly expected due to an LQG-inspired metric modification (see, e.g., [11]), would only make the discrimination between models easier. We have also assumed that the Hawking evaporation stops at the same mass as expected in LQG (namely $0.4M_{\text{Pl}}$), once again to be as conservative as possible. Second, even if one focuses on the “high energy” emission, say above $0.15M_{\text{Pl}}$, the contribution from states with a lower temperature is far from being negligible. We have therefore pushed the computation of the area states, together with their multiplicity, up to $200A_{\text{Pl}}$ to ensure that the number of missed quanta remain smaller than a few percent.

Several Monte Carlo simulations were carried out to estimate the circumstances under which the discrimination

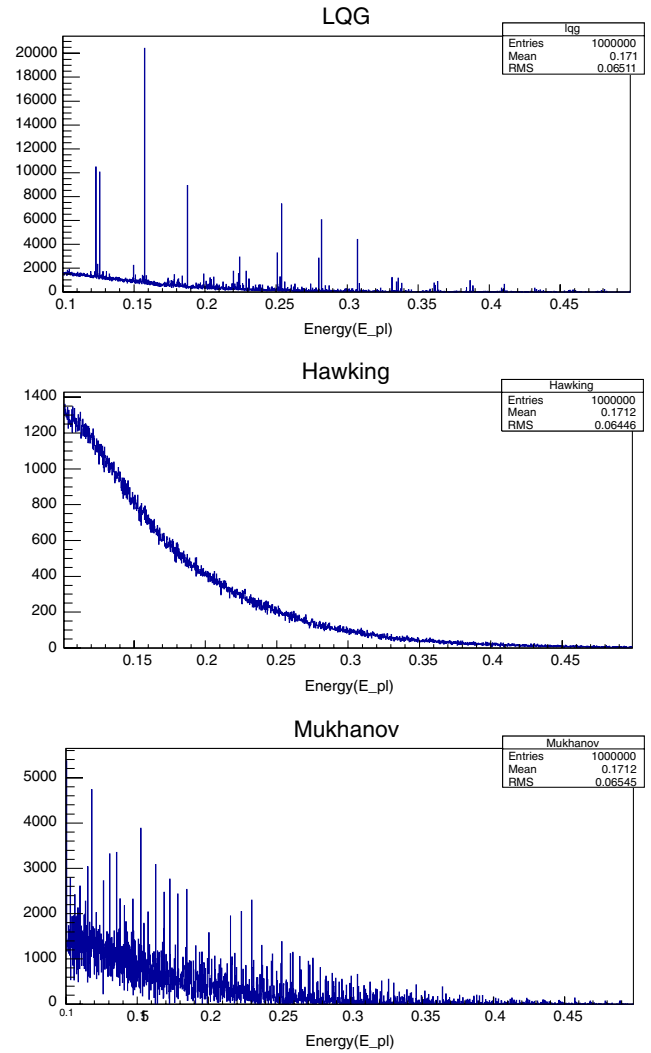


FIG. 1 (color online). Spectrum of emitted particles in LQG, in the pure Hawking case, and in the Mukhanov-Bekenstein approach, from top to bottom.

between LQG and the standard behavior is possible. At each step, the energy of the emitted particle is randomly obtained according to the relevant statistics and to the (spin-dependent) gray body factor. Most simple statistical tests fail to capture the intricate nature of the specific LQG features. We have therefore chosen to use a (slightly improved) Kolmogorov-Smirnov (KS) test. The KS statistics quantifies the distance between the cumulative distribution functions of the distributions and can be used for a systematic study of possible discrimination (see, e.g., [12]). By investigating the KS excess as a function of the energy, we have optimized the relevant interval for each relative error. As this latter is assumed to be known, it is meaningful to use it as an input for the statistical procedure. Figure 2 shows the number of black holes that should be observed, for different confidence levels and as a function of the relative error on the energy reconstruction, to discriminate

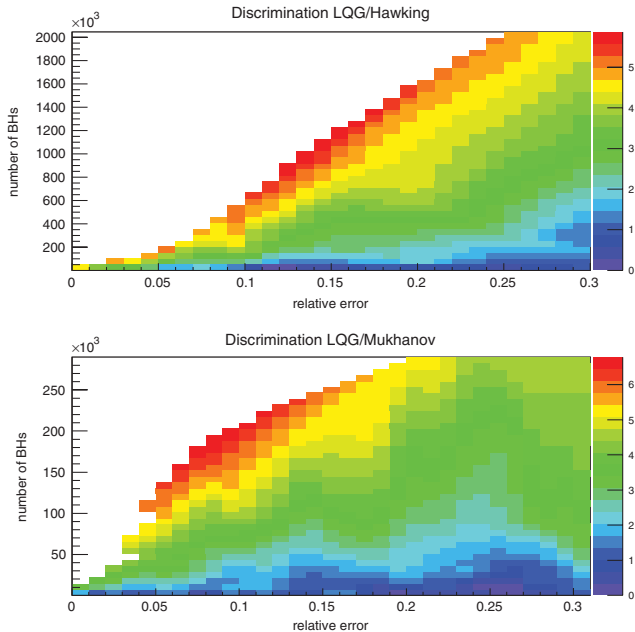


FIG. 2 (color). Number of evaporating black holes that have to be observed as a function of the relative error on the energy reconstruction of the emitted leptons for different confidence levels (the gray scale corresponds to the number of standard deviations). The first row corresponds to the discrimination between LQG and the Hawking hypothesis and the second row between LQG and the Mukhanov-Bekenstein hypothesis.

the models. Clearly with either enough black holes or a relatively small error, a discrimination is possible, therefore leading to a clear LQG signature. To still remain maximally conservative, we have only considered emitted leptons. For a detector located nearby the black hole, and due to the huge Lorentz factors, the electrons, muons, and taus can be considered as stable, whereas quarks do not have enough time to fragment into hadrons.

For the sake of completeness, we have finally implemented a KS test between the LQG spectrum and the Bekenstein-Mukhanov one. Once again, the discrimination is possible with an even smaller number of black holes as the lines are sitting at clearly different places.

Even if the Hawking and Mukhanov hypotheses are not expected to be reliable in the Planck era, this analysis shows that a discrimination between LQG and other tentative approaches is possible.

Low-energy emission in the Planck regime.—There is a second specific feature associated with the end point of the evaporation process. In LQG, the last transitions take place at definite energies, of the order of the Planck scale, associated with the final lines of the mass spectrum. On the other hand, in the usual Hawking picture, the most natural way to implement a minimal mass is to assume a truncation of the standard spectrum ensuring energy conservation. Even if no minimal mass is assumed, the spectrum has to be truncated to ensure that the black hole does

not emit more energy than it has. This is also the case in some string gravity models [13]. This leads to the important consequence that the energy of the emitted quanta will progressively decrease and asymptotically tend to zero. It is possible to distinguish this “low-energy” emission associated with the end point from the (much more numerous) “low-energy” particles emitted before (when the black hole temperature was lower) thanks to the dynamics of the process. For example, as soon as one considers γ rays with energies lower than 8×10^5 GeV, the “end point” emission will take place at least $100 \mu\text{s}$ after the initial emission, making both signals easily distinguishable. Those “relic” quanta will be emitted with mean energies decreased by a factor $1/4$ at each step (for scalars and fermions). The time interval between consecutive emissions will typically increase with decreasing energies as E^{-3} . At 100 TeV, the mean interval is around 1 s. This feature of the “standard” spectrum is therefore very different from the absence of low-energy particles expected in the LQG case.

This probe should, however, be considered with care as it is less reliable than the two other ones suggested in this Letter, being dependent on the specific assumption made for the evaporation end point in the Hawking case.

Peaks in the higher-mass regime.—Up to now, the analysis was mostly focused on lines associated with the discreteness of the area, as could be seen on Fig. 1. However, LQG specific features also lead to broader peaks in the spectrum, with a clear pseudoperiodicity, as shown in Fig. 3. Those peaks are associated with the “large scale” structure of the area spectrum. This periodicity has been discussed in much detail (see [3] and references therein). We have observed this behavior up to $200A_{\text{Pl}}$ with an exact computation of the area eigenvalues and we have checked it up to $400A_{\text{Pl}}$ with a dedicated Monte Carlo Markov chain

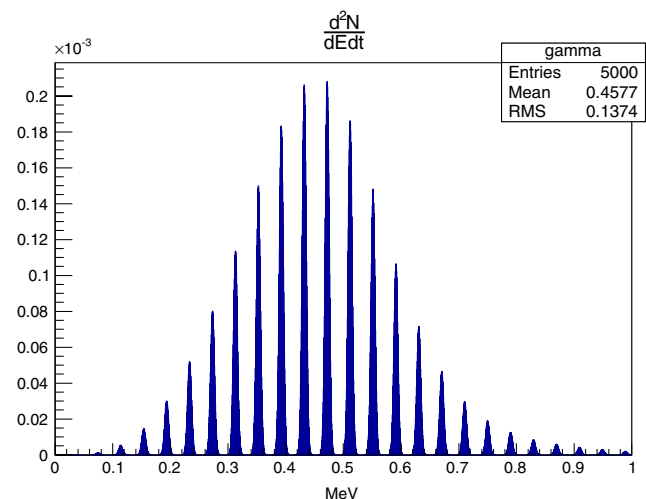


FIG. 3 (color online). Instantaneous spectrum of a ~ 100 keV black hole taking into account the LQG modulation of the entropy.

(MCMC) algorithm. Although some recent arguments suggest that this periodicity is damped for higher masses [14], they cannot rule out the possibility of a “revival” of the periodicity at larger areas (or even in the asymptotic limit), so it is relevant to study the possible observational effects that this periodicity would have in the macroscopic regime, in agreement with the assumption made in most of the literature on the subject. We here assume that it remains valid up to arbitrary large masses. This is not an unavoidable prediction of LQG but this is clearly a possibility that arises, to the best of our knowledge, only in this framework. This makes it a potentially interesting probe. The mean area gap dA between peaks can be shown to be independent of the scale. As, for a Schwarzschild black hole, $dA = 32\pi M dM$ and $T = 1/(8\pi M)$, this straightforwardly means that $dM/T = cte$ where dM refers to the mass gap between peaks. This is the key point for detection: in units of temperature, which is the natural energy scale for the emitted quanta, the mass gap does *not* decrease for increasing masses. Any observable feature associated with this pseudoperiodicity can therefore be searched for through larger black holes.

This opens up the question of a possible detection of LQG effects with evaporating primordial black holes (PBHs) in astrophysical circumstances. If PBHs were formed with a continuous mass spectrum $n_i(M_i)$, where the subscript i stands for initial values, it is now deformed according to $n(M) \propto M^2$ for $M < M_*$ and $n(M) \approx n_i(M)$ for $M > M_*$ where $M_* \approx 10^{15}$ g is the initial mass of a black hole whose lifetime is of the order of the age of the Universe. This is just due to the Hawking evaporation leading to $dM/dt \propto M^{-2}$. In such a case, it is easy to show that the peak structure of the instantaneous spectrum will be immediately washed out. The convolution of the individual spectra with the mass distribution will lead to a Hawking-like E^{-3} integrated spectrum. We have checked this expected behavior with a Monte Carlo simulation. It should also be pointed out that the peak structure of the “end-of-the-life” spectrum, which is superimposed with the lines, is *not* due to the pseudoperiodic structure of the entropy but to transitions to the last states, i.e., with the discreteness of the area eigenvalues.

However, this does not at all close the issue of observing LQG features with astrophysical PBHs. The continuous mass spectrum (typically scaling as $M^{-5/2}$) was a hypothesis historically associated with a possible high normalization of the primordial power spectrum (or a very blue tilt) which is ruled out by CMB observations. Realistic models for PBH formation are now associated with phase transitions (see, e.g., [15]) or other phenomena leading to black holes formed at a given mass M_c . If this mass is smaller than M_* , those black holes have already disappeared. If $M_c > M_*$, that is if the horizon mass at the formation time was larger than 10^{15} g, those black holes are evaporating so slowly that their mass has nearly not changed. As not only

the mass loss rate but also the area loss rate does decrease with the mass ($dA/dt \propto 1/M$), the peak structure exhibited in Fig. 3 should be observed from such black holes. In this case, the instantaneous spectrum, together with its peak structure, can directly be probed. If the mass is higher than typically 10^{17} g the black hole will emit only massless particles, that is photons ($\sim 12\%$) and neutrinos ($\sim 88\%$). The electromagnetic signal is not anymore contaminated by γ rays due to the decay of neutral pions as quarks cannot be emitted. Although the redshift integration will slightly smear out the structures, a very clean signature can therefore be expected as no mass integration is involved anymore in the possibly observed signal. In addition, one can show that the total number of photons received per second by a detector of area S can be written as $\Phi \sim 10^4 \frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_c} \left(\frac{10^{17} \text{ g}}{M}\right)^2 S$, where $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ is the “cosmological” critical density and ρ_{PBH} is the density of primordial black holes. This leads to a macroscopic signal for quite a large range of masses and densities.

Conclusion.—In this Letter, we have shown that the specific features of the area of black holes in loop quantum gravity can lead to observational signatures. Although detecting evaporating black holes is in itself a challenge, we have established that footprints of the underlying quantum gravity theory might indeed be observed in this way. This opens a possible new window to probe LQG.

We would like to thank Adeline Choyer with whom this study was initiated. This work was partially funded by the NSF Grants No. PHY0854743 and No. PHY0968871, the Eberly research funds of Penn State, and Spanish MICINN Grant No. ESP2007-66542-C04-01.

*aurelien.barrau@cern.ch

†thomas.cailleteau@lpsc.in2p3.fr

‡xiangyu.cao@polytechnique.edu

§jacobob@phys.lsu.edu

||grain@apc.univ-paris7.fr

- [1] C. Rovelli, [arXiv:1102.3660v5](#); C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004); C. Rovelli, *Living Rev. Relativity* **1**, 1 (1998); L. Smolin, [arXiv:hep-th/0408048v3](#); T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* **631**, 41 (2003); T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007); A. Perez, [arXiv:gr-qc/0409061v3](#); P. Dona and S. Speziale, [arXiv:1007.0402v1](#).
- [2] B. J. Carr *et al.*, *Phys. Rev. D* **81**, 104019 (2010).
- [3] I. Agullo *et al.*, *Phys. Rev. D* **82**, 084029 (2010).
- [4] A. Ashtekar, J. C. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998); A. Ashtekar, J. C. Baez, and K. Krasnov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4**, 1 (2000); A. Corichi, J. Diaz-Polo, and E. Fernandez-Borja, *Classical Quantum Gravity* **24**, 243 (2007); A. Corichi, J. Diaz-Polo, and E. Fernandez-Borja, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 181301 (2007).
- [5] J. Diaz-Polo and E. Fernandez-Borja, *Classical Quantum Gravity* **25**, 105007 (2008); I. Agulló, J. Díaz-Polo, and

- E. Fernández-Borja, *Phys. Rev. D* **77**, 104024 (2008); I. Agullo *et al.*, *Phys. Rev. D* **80**, 084006 (2009).
- [6] J. Bekenstein and V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **360**, 7 (1995).
- [7] G. Dvali, C. Gomez, and S. Mukhanov, [arXiv:1107.0870v1](#).
- [8] C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996).
- [9] C. Rovelli, *Helv. Phys. Acta* **69**, 582 (1996).
- [10] S. Massar and R. Parentani, *Nucl. Phys.* **B575**, 333 (2000).
- [11] E. Alesci and L. Modesto, [arXiv:1101.5792v1](#).
- [12] G. R. Shorack and J. A. Wellner, *Empirical Processes with Application to Statistics* (Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, 2009).
- [13] S. Alexeyev *et al.*, *Classical Quantum Gravity* **19**, 4431 (2002).
- [14] J. Fernando Barbero G. and E. J. S. Villaseñor, *Phys. Rev. D* **83**, 104013 (2011); X. Cao and A. Barrau, [arXiv:1111.1975v1](#); J. Fernando Barbero G. and E. J. S. Villaseñor, *Phys. Rev. D* **77**, 121502 (2008).
- [15] K. Jedamzik and J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **59**, 124014 (1999).

Consistency of holonomy-corrected scalar, vector, and tensor perturbations in loop quantum cosmology

Thomas Cailleteau, Aurélien Barrau, and Francesca Vidotto

*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, UJF, INPG, CNRS,
IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

Julien Grain

Institut d'Astrophysique Spatiale, Université Paris-Sud, CNRS Batiments 120-121, 91405 Orsay cedex, France
(Received 28 June 2012; published 16 October 2012)

Loop quantum cosmology yields two kinds of quantum corrections to the effective equations of motion for cosmological perturbations. Here we focus on the holonomy kind and we study the problem of the closure of the resulting algebra of constraints when a scalar field is considered in the matter Hamiltonian. Up to now, tensor, vector and scalar perturbations were studied independently, leading to different algebras of constraints. The structures of the related algebras were imposed by the requirement of anomaly freedom. In this article we show that the algebra can be modified by a very simple quantum correction, holding for all types of perturbations. The Mukhanov-Sasaki equations of motion are similarly modified by a simple term.

DOI: [10.1103/PhysRevD.86.087301](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.087301)

PACS numbers: 98.80.Jk, 98.80.Qc, 04.60.-m

I. INTRODUCTION

Loop quantum gravity (LQG) is a promising framework for a background-invariant non-perturbative quantization of general relativity—see Ref. [1] for introductory reviews. The theory can be derived from different paths, going from a formal quantization of geometry to covariant or canonical quantizations of general relativity, all yielding the same theory. In the canonical formulation, the loop quantization is obtained by choosing the holonomy of the gravitational connection and the flux of the densitized triad as basic variables. Loop quantum cosmology (LQC) is the symmetry reduced version of LQG. Although a rigorous complete derivation from the full theory is still missing, LQC utilizes key elements of LQG for studying quantum corrections of the cosmological dynamics. These corrections turn out to be negligible at low curvature, and important where the energy density approaches the Planck scale ρ_{Pl} . They give rise to a strong effective repulsive force which replaces the big bang by a big bounce (see e.g., Ref. [2] for a review).

As for any tentative theory of quantum gravity, experimental tests are still missing, and searching for observational signatures is obviously a key challenge. Cosmological perturbations, which are directly related to measurable spectra, provide the best link to observation. Here we consider the theory of *linear* cosmological perturbations in the Hamiltonian framework [3]. The theoretical analysis of these perturbations can be guided by a consistency requirement: the absence of anomalies that would jeopardize the closure of the effective constraint algebra. This requirement has been so far separately analyzed for scalar, vector, and tensor perturbations, leading to different corrections to the constraints. This work focuses on the issue of finding a unique self-consistent algebra of constraints making the approach consistent for any kind of perturbation. We

present a consistent constraint structure suitable for all types of perturbations, and leading to a simple modification of the gauge-invariant Mukhanov-Sasaki equation of motion. This shows the overall consistency of the theory and indicates that results of the analysis of the scalar perturbations must be taken into account to study tensor modes.

LQC generates two main classes of effective corrections to the constraints, called the inverse-volume corrections and the holonomy corrections [2]. The closure of the algebra of cosmological perturbations has been extensively studied for inverse-volume corrections. It was explicitly shown that closure can indeed be achieved. This was demonstrated for scalar [4,5], vector [6] and tensor modes [7]. Using the anomaly-free scalar perturbations, predictions for the power spectrum were also obtained [8]. This allowed to put constraints on some parameters of the model using observations of the cosmic microwave background radiation [9].

Here, we focus on the holonomy corrections—appearing because of the use of the holonomy of the Ashtekar connection. It is worth emphasizing that for tensor modes, the algebra is automatically anomaly-free. For this reason, several works were devoted to the phenomenology of holonomy-corrected tensor perturbations (see e.g., Ref. [10]). The anomaly-free algebra for vector modes was studied in Ref. [11] and recently fully derived, including matter, in Ref. [12]. The scalar algebra was obtained in Ref. [13].

II. THEORETICAL FRAMEWORK

LQC is formulated in the canonical language. Because of general covariance the canonical Hamiltonian is a combination of constraints \mathcal{C}_I . Consistency requires that the constraints are preserved under the evolution they generate. This is assured in the classical theory by the closure of the Poisson algebra of the constraints

$$\{C_I, C_J\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) C_K, \quad (1)$$

where C_I , $I = 1, 2, 3$, are the Gauss, diffeomorphism and Hamiltonian constraints and $f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a)$ are structure functions which, in general, depend on the phase space (Ashtekar) variables (A_b^j, E_i^a) . In LQC, quantum corrections can be studied as effective modifications of the Hamiltonian constraint. In doing so, anomalies generically appear: the modified constraints C_I^Q do not form a closed algebra anymore:

$$\{C_I^Q, C_J^Q\} = f^K_{IJ}(A_b^j, E_i^a) C_K^Q + \mathcal{A}_{IJ}. \quad (2)$$

The anomalous term \mathcal{A}_{IJ} can be removed by carefully adjusting the form of the quantum correction to the Hamiltonian constraint. This is achieved by adding suitable “counterterms” that vanish in the classical limit. The resulting deformed algebra can be phenomenologically very rich.

In the case of a *flat* Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker background, the Ashtekar variables can be decomposed as follows:

$$A_a^i = \gamma \bar{k} \delta_a^i + \delta A_a^i \quad \text{and} \quad E_i^a = \bar{p} \delta_i^a + \delta E_i^a, \quad (3)$$

where \bar{k} and \bar{p} parametrize the background phase space, and γ is the Barbero-Immirzi parameter. The variation of the connection receives contributions from the fluctuations of both the intrinsic and extrinsic curvature: $\delta A_a^i = \delta \Gamma_a^i + \gamma \delta K_a^i$.

III. PERTURBATIONS

Taking into account the form of the perturbed variables (3), we introduce a general expression for the variation of the spin connection as

$$\delta \Gamma_a^i = \frac{1}{2\bar{p}} X_{ca}^{ijb} \partial_b \delta E_j^c + \frac{1}{2\bar{p}^2} Y_{abc}^{ijkl} \delta E_j^b \partial_k \delta E_l^c, \quad (4)$$

where

$$X_{ca}^{ijb} = \epsilon_c^{ij} \delta_a^b - \epsilon_c^{ib} \delta_a^j + \epsilon^{ijb} \delta_{ca} + \epsilon_a^{ib} \delta_c^j. \quad (5)$$

Y_{abc}^{ijkl} has an expression similar to X_{ca}^{ijb} , but more complicated: it is not needed here explicitly, because it appears only as a boundary term in the second-order term of the Hamiltonian constraint (16) in a way that does not affect the equations of motion. The information about what kind of perturbations we consider (scalar, vector or tensor perturbations) is coded in the term $\frac{1}{2\bar{p}} X_{ca}^{ijb} \partial_b \delta E_j^c$.

The variation of the densitized triad can be decomposed as follows:

$$\delta E_i^a = \bar{p} \left[-2\psi \delta_i^a + (\delta_i^a \partial^d \partial_d - \partial^a \partial_i) E - c_1 \partial^a F_i - c_2 \partial_i F^a - \frac{1}{2} h_i^a \right], \quad (6)$$

where the first two terms ψ and E correspond to scalar modes, the terms with F_i and F^a to vector modes and the term with h_i^a to the tensor mode. Vector modes are transverse, and tensor modes are transverse and traceless. These conditions constrain δE_i^a and δK_a^i , as well as the lapse δN and the shift vector δN^a . In particular, vanishing trace implies

$$\delta_a^i \delta E_i^a = \delta_i^a \delta K_a^i = 0. \quad (7)$$

Tensor and vector perturbations satisfy this condition, so that in these cases the terms containing these expressions disappear from the constraints. The form of the metric in the case of vector and tensor modes implies that the variation of the lapse is zero: $\delta N = 0$. Therefore, some first-order constraints do not influence the perturbed dynamics.

For vector modes, the variation of the shift corresponds to one of the two degrees of freedom indicated with S_a and F_a : $\delta N^a = S^a$. For tensor modes instead, the transverseness, i.e., null divergence, implies

$$\partial^i \delta E_i^a = \partial_a \delta E_i^i = 0. \quad (8)$$

As above, the form of the metric for tensor modes implies $\delta N^a = 0$ for the shift, so that some further first-order terms do not contribute to the dynamics.

Scalar perturbations are the more general: no term disappears and all the constraints contribute to define the perturbed dynamics. We have

$$\delta N = \bar{N} \phi \quad \text{and} \quad \delta N^a = \partial^a B, \quad (9)$$

where \bar{N} is the unperturbed part of the lapse $N = \bar{N} + \delta N$ and ϕ and B are scalar fields.

If we turn on the quantum corrections by modifying the Hamiltonian constraint, anomalies appear and we have to add counterterms in order to make the Poisson algebra closed. In previous works, these counterterms were found considering separately the case of each kind of modes. The tensor and vector cases were simpler because of the vanishing of several terms in the constraints, as observed. The scalar case, on the other hand, is from this perspective the most general one, since all the constraint terms are present. It is indeed easy to see that the counterterms that adjust the Hamiltonian for the scalar case [13] work *also* for the vector and tensor cases, thus providing a general solution to the closure of the algebra. Therefore starting from the scalar case it is possible to define a unique closed algebra of modified constraints, with the most general counterterms, giving back correct counterterms for scalar and tensor perturbations when imposing transverseness and vanishing trace.

IV. CONSTRAINTS

We consider the algebra of the diffeomorphism and Hamiltonian constraints (see Ref. [2] for the expression of the constraints in terms of the variables (3)). In each constraint, gravity and matter—here modeled by a single scalar field with canonical variables (φ, π) —contribute.

A. Diffeomorphism constraint

The diffeomorphism constraint can be decomposed as

$$D[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N}^a(\mathcal{D}^{(0)} + \mathcal{D}^{(2)}) + \delta N^a \mathcal{D}^{(1)}]. \quad (10)$$

Since we are considering an FLRW background metric, the shift $N^a = \bar{N}^a + \delta N^a$ has zero \bar{N}^a . This implies that the diffeomorphism constraint can be considered at the first order.

Using the symmetry properties of (5) we can write the constraint for the gravitational part as

$$\kappa \mathcal{D}_g = \bar{p} \partial_a \delta K_a^d - \bar{p} \partial_d \delta K_a^d - \bar{k} \partial_d \delta E_a^d, \quad (11)$$

and for the matter part as

$$\mathcal{D}_m = \bar{\pi} \partial_a \delta \varphi. \quad (12)$$

Recall that for tensor modes $\delta N^a = 0$, therefore D_g and D_m play a role only for scalar and vector perturbations.

B. Hamiltonian constraint

We consider the gravitational part of the Hamiltonian constraint up to the second order

$$H[N] = \int_{\Sigma} d^3x [\bar{N}(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(2)}) + \delta N \mathcal{H}^{(1)}]. \quad (13)$$

Using again the symmetry properties of (5), the expansion of the constraint given in Ref. [2] gives

$$2\kappa \mathcal{H}^{(0)} = -6\sqrt{\bar{p}}\bar{k}^2, \quad (14)$$

at *zeroth order* and

$$2\kappa \mathcal{H}^{(1)} = -4\sqrt{\bar{p}}\delta K_a^d - \frac{\bar{k}^2}{\sqrt{\bar{p}}} \delta E_a^d + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial^j \partial_c \delta E_j^c, \quad (15)$$

at *first order*, for all kinds of perturbations. On the other hand, the *second order* turns out to be

$$\begin{aligned} 2\kappa \mathcal{H}^{(2)} = & -2 \frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{p}}} \delta K_a^i \delta E_i^a \\ & + \sqrt{\bar{p}} (\delta_i^b \delta K_a^i \delta_j^a \delta K_b^j - \delta_i^a \delta K_a^i \delta_j^b \delta K_b^j) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\bar{k}^2}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} (\delta_a^i \delta E_i^a \delta_b^j \delta E_j^b - 2 \delta_a^j \delta E_i^a \delta_b^i \delta E_j^b) \\ & + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} Y_{bdc}^{kjl} \epsilon_k^{ab} \partial_a (\delta E_j^d \partial_i \delta E_l^c) \\ & + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}} Z_{ab}^{cidj} (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \end{aligned} \quad (16)$$

and is different depending on the mode considered. The difference is only in the term Z_{ab}^{cidj} . Its explicit form reads

$$\begin{aligned} Z_{ab}^{cidj} = & \frac{1}{4} \epsilon_k^{ef} \epsilon_{mn}^k X_{be}^{mjd} X_{af}^{nic} - \epsilon_k^{ie} X_{be}^{kjd} \delta_a^c - \epsilon_k^{ci} X_{ba}^{kjd} \\ & + \frac{1}{2} \delta_a^i \epsilon_k^{ce} X_{be}^{kjd}. \end{aligned} \quad (17)$$

Imposing the conditions that define each mode and using (5), we obtain that the term $Z_{ab}^{cidj} (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b)$ in (16) is respectively

$$\delta_{ab} \delta^{ij} \delta^{cd} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \text{ for tensor modes,} \quad (18)$$

$$0 \text{ for vector modes,} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2} \delta_a^c \delta_b^d \delta^{ij} \cdot (\partial_c \delta E_i^a) (\partial_d \delta E_j^b) \text{ for scalar modes.} \quad (20)$$

This term is the only one that takes different forms when restricted to perturbations of the scalar, vector or tensor types. It follows that only the counterterms originating from this term will differ from one another for different types of perturbations.

V. QUANTUM CORRECTIONS

In the classical case, the algebra is closed

$$\{D_{(m+g)}[N_1^a], D_{(m+g)}[N_2^a]\} = 0, \quad (21)$$

$$\{H_{(m+g)}[N], D_{(m+g)}[N^a]\} = -H_{(m+g)}[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (22)$$

$$\{H_{(m+g)}[N_1], H_{(m+g)}[N_2]\} = D_{(m+g)} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right]. \quad (23)$$

D_g does not undergo corrections from quantum effects [14]. We add quantum corrections at an effective level by replacing in the Hamiltonian constraint

$$\bar{k} \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \quad (24)$$

as a result of the quantization of the holonomies [15]. The parameter $\bar{\mu}$, proportional to the ratio between the Planck length and the scale factor, carries the information on the scale at which quantum corrections become relevant. This yields the quantum-corrected Friedmann equations

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) = \frac{\mathcal{H}^2}{\bar{p}}, \quad (25)$$

where H and \mathcal{H} are the Hubble rate respectively in cosmic time and in conformal time, ρ is the energy density and $\rho_c \approx 0.4 \rho_{Pl}$ is the energy density at which a repulsive quantum-gravity force appears, removing the classical initial singularity [2]. The appearance of anomalies in the Poisson brackets when applying the holonomy correction,

BRIEF REPORTS

$$\left\{ H\left[N, \frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right], H\left[N, \frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right] \right\} = D[\partial^a N] + \mathcal{A}_i, \quad (26)$$

is contrasted by inserting counterterms α_i in $\mathcal{H}^{(1)}$ and $\mathcal{H}^{(2)}$ such that, for instance, (15) becomes in our case

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{(1)} = & -4\sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin(s_1 \bar{\mu}\gamma\bar{k})}{s_1 \bar{\mu}\gamma} + \alpha_1 \right) \delta_j^c \delta K_c^j \\ & - \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} \left(\left(\frac{\sin(\bar{\mu}\gamma\bar{k})}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 + \alpha_2 \right) \delta_c^j \delta E_j^c + \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \partial^j \partial_c \delta E_j^c. \end{aligned} \quad (27)$$

Requiring $\mathcal{A}_i = 0$ therefore leads to a system of equations which allows to find the expressions of the counter-terms. Fortunately, when taking into account all the other constraints, there is a unique solution in the case of holonomy corrections. For the explicit form of the resulting constraints, we refer the reader to the literature (see Ref. [13]). The same modified constraints have been found in Ref. [16], where the counterterms of Ref. [13] appear naturally after a Taylor expansion of the holonomies of the perturbed Ashtekar connection.

We are here interested in the structure of the resulting closed algebra.

VI. RESULTS

Remarkably, the resulting quantum-corrected algebra valid for *all* different kind of perturbations is obtained with a single structure modification (21)–(23). This appears in the last Eq. (23), which becomes

$$\begin{aligned} & \{H_{(m+g)}[N_1], H_{(m+g)}[N_2]\} \\ & = \Omega D_{(m+g)} \left[\frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

where

$$\Omega = \cos(2\bar{\mu}\gamma\bar{k}) = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}. \quad (29)$$

The single Ω factor represents the quantum correction. It goes to 1 in the classical limit. This simple correction appears also in the definition of the evolution of the perturbations using gauge-invariant observables.

A. Mukhanov-Sasaki equations of motion

Whatever the kind of perturbations, due to the modified constraints, the Poisson brackets

$$\frac{d}{d\eta}(\delta X) \doteq \{\delta X, H_{\text{modified}}[N] + D[N^a]\}, \quad (30)$$

therefore lead to a modified evolution in time or under small transformations, and so is the definition of gauge-invariant variables. Finally, using the Hamilton-Jacobi

PHYSICAL REVIEW D **86**, 087301 (2012)

equation [13,17], or merging the equations of motion for the different perturbations [13], the correction to the Mukhanov-Sasaki [18] equation of motion for gauge-invariant perturbations of scalar and tensor type $v_{S(T)}$ can be derived. In conformal time, this is given by

$$v_{S(T)}'' - \Omega \nabla^2 v_{S(T)} - \frac{z_{S(T)}''}{z_{S(T)}} v_{S(T)} = 0, \quad (31)$$

which reduces to the classical equation when $\Omega \rightarrow 1$. This equation holds for both scalar and tensor perturbations. Since we have considered the simple case of a scalar field, there is no vorticity and therefore there is no physical solution corresponding to vector perturbations.

For scalar perturbations, the Mukhanov variables in the quantum case are given by

$$v_S = \sqrt{\bar{p}} \left(\delta\varphi + \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}} \phi \right) \quad \text{and} \quad z_S = \sqrt{\bar{p}} \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}. \quad (32)$$

If we impose the divergence and the trace to be zero, we obtain for tensor modes

$$v_T = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\Omega}} h \quad \text{and} \quad z_T = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\Omega}}, \quad (33)$$

where h represents the two degrees of freedom of h_a^i . Inserting (33) into (31) we obtain the following form of the equations of motion for tensor perturbations:

$$h_a^{i''} + h_a^{i'} \left(2\mathcal{H} - \frac{\Omega'}{\Omega} \right) - \Omega \nabla^2 h_a^i = 0. \quad (34)$$

This equation is clearly different from what has been used in previous works because of the general expression for the effective constraints. It is not only obviously different from standard cosmology but also from first results obtained in LQC. This Ω term deforms the algebra and will inevitably lead to different observational consequences. The closure requirements modifies the equation of motion for *all* types of perturbations.

VII. CONCLUSIONS

We have presented a consistent framework for the study of perturbations in loop quantum cosmology. It is possible to write down a unique quantum-corrected algebra. This has a simple form, and the same quantum correction holds for all the different kinds of perturbations.

This simple correction also appears in the Mukhanov-Sasaki equation, and consists in the insertion of the single factor (29), which becomes relevant only when the matter energy density approaches the Planck scale.

We notice that there exist a small region in the strong quantum regime where Ω becomes negative. This yields a change of signature of the effective metric [13,19] associated to the appearance of divergences in the equation of motion of cosmological perturbations. As a consequence,

BRIEF REPORTS

new observable features could appear since the value of tensor modes would be higher than in the classical case. This has to be further investigated, possibly going beyond the effective treatment.

PHYSICAL REVIEW D **86**, 087301 (2012)

The existence of a single deformed closed algebra of constraints for all kind of perturbations, as exhibited in this work, is a strong case for the self-consistency of effective LQC.

-
- [1] C. Rovelli, [arXiv:1102.3660](#); *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004); T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* **631**, 41 (2003); *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007); R. Gambini and J. Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity* (Oxford University Press, New York, 2011).
 - [2] M. Bojowald, *Living Rev. Relativity* **8**, 11 (2005), <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2008-4/>; A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011); K. Banerjee, G. Calcagni, and M. Martín-Benito, *SIGMA* **8**, 016 (2012).
 - [3] D. Langlois, *Classical Quantum Gravity* **11**, 389 (1994).
 - [4] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Phys. Rev. D* **78**, 063547 (2008).
 - [5] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan, and S. Shankaranarayanan, *Phys. Rev. D* **79**, 043505 (2009); **82**, 109903(E) (2010).
 - [6] M. Bojowald and G.M. Hossain, *Classical Quantum Gravity* **24**, 4801 (2007).
 - [7] M. Bojowald and G.M. Hossain, *Phys. Rev. D* **77**, 023508 (2008).
 - [8] M. Bojowald and G. Calcagni, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2011) 032.
 - [9] M. Bojowald, G. Calcagni, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 211302 (2011).
 - [10] J. Mielczarek, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11** (2008), 011; J. Grain and A. Barrau, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 081301 (2009); J. Mielczarek, *Phys. Rev. D* **79**, 123520 (2009); J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **81**, 104049 (2010); J. Grain, A. Barrau, T. Cailleteau, and J. Mielczarek, *Phys. Rev. D* **82**, 123520 (2010).
 - [11] Y. Li and J. Y. Zhu, *Classical Quantum Gravity* **28**, 045007 (2011).
 - [12] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 085009 (2012).
 - [13] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 095010 (2012).
 - [14] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, and T. Thiemann, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **36**, 6456 (1995).
 - [15] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **74**, 084003 (2006).
 - [16] E. Wilson-Ewing, *Classical Quantum Gravity* **29**, 085005 (2012).
 - [17] T. Cailleteau and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **85**, 123534 (2012).
 - [18] V.F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
 - [19] M. Bojowald and G.M. Paily, [arXiv:1112.1899v1](#).

Cinquième partie

Appendice

Formule de Baker-Hausdorff

La formule de Baker-Hausdorff est utile ici lorsque l'on cherche à calculer l'holonomie sur un motif carré. Les commutateurs entre différentes matrices de Pauli vont intervenir.

$$Ln(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) - \frac{1}{24}[Y, [X, [X, Y]]] + \dots \quad (13.9)$$

Les symboles de Levi Civita

En physique, ces symboles sont très importants, et il est judicieux de faire un bref rappel sur ces outils. Pour (i, j, k) variant de 1 à 3, et en utilisant la convention d'Einstein (tout indice répété est sommé)

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(j-i)(k-i)(k-j)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 3!$$

Dérivation de l'expression du spectre de puissance

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{v}(\eta, \vec{x}) \hat{v}(\eta, \vec{x} + \vec{r}) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int d^3k \cdot d^3q \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} + \vec{r})} \cdot v_k^* v_q \delta(\vec{k} + \vec{q}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int d^3k \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} |v_k|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-ikr \cos(\theta)} \cdot |v_k|^2 \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot k^2 |v_k|^2 \int_0^\pi d\theta \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{ikr} e^{-ikr \cos(\theta)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k} \cdot k^3 \cdot |v_k|^2 \left(2 \frac{\sin(kr)}{kr} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k} \cdot \frac{\sin(kr)}{kr} \mathcal{P}_v(k) \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{P}_v(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2 \quad (13.10)$$

Bibliographie

- [1] D. Langlois, "Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation," *Class. Quant. Grav.* **11**, 389 (1994).
- [2] F. Faure, cours de geometrie différentielle,
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/index.html>
- [3] C. Nash, S. Sen, "Topology and Geometry for Physicists", London, Academic Press, 1992
- [4] V. I. Arnold, "Mathematical Methods Of Classical Mechanics", Springer, 1989
- [5] L. Landau, E. Lifchitz, "Volume 1 : Mécanique" , Mir, 1996.
- [6] M. Taylor, "partial differential equations", vol 1, Springer, 1996
- [7] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, "Introduction to Mechanics and Symmetry : A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems", Springer-Verlag, 1994
- [8] D. Lovelock, H. Rund, "Tensors, diferential forms and variational principles", Dover, 1989
- [9] J. José, E. Saletan, "Classical mechanics : a contemporary approach", Cambridge University Press, 1998
- [10] A. Cannas da Silva, "Lectures on Symplectic Geometry", Lecture Notes in Mathematics volume 1764, Springer-Verlag, 2001
- [11] J. M. Souriau, "Structure des systèmes dynamiques", Dunod, 1970
- [12] T. Masson, "Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions"
<http://science.thilucmic.fr/spip.php?article12>
- [13] C. Rovelli, "Quantum Gravity", Cambridge University, 2004
- [14] R. Gambini, J. Pullin, "A first course in Loop Quantum Gravity", Oxford University Press, 2011
- [15] J. C. Baez, J. P. Muniain, "Gauge, Fields, Knots and Gravity" ,World Scientific, 1994
- [16] C. Semay, B. Silvestre-Brac, "Relativité restreinte. Bases et applications", Dunod, 2005
- [17] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge University Press, 1996
- [18] L. Landau, E. Lifchitz, "Volume 3 : Mécanique Quantique" , Mir, 1996.
- [19] W. G. Unruh, "Notes on black hole evaporation," *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [20] G. Pignol, "Préparation de l'expérience GRANIT et recherche de nouvelles interactions avec les neutrons.",
<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/03/64/PDF/these.pdf>
- [21] J. Grain, "Relativité Générale et champs quantiques : quelques aspects de physique des trous noirs et de cosmologie en gravité de Lovelock, espaces de Sitter et dimensions supplémentaires",
http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/10/43/99/PDF/these_main.pdf
- [22] Ruth Durrer, cours de Relativité Générale,
<http://theory.physics.unige.ch/~durrer/courses.html>
- [23] S. Carroll, "Spacetime and Geometry : Introduction to General Relativity", Addison-Wesley L., 2003
- [24] A. Barrau, J. Grain, "Relativité Générale, cours et exercices corrigés", Dunod, 2011
- [25] S. W. Hawking, R. Penrose, "The nature of Space and Time", Princeton University Press, 1996
- [26] P. Peter, J. Uzan, "Cosmologie primordiale", Belin, 2005
- [27] T. Thiemann, "Modern Canonical Quantum General Relativity", Cambridge University Press, 2007
- [28] E.ourgoulhon, "3+1 formalism and bases of numerical relativity," gr-qc/0703035 [GR-QC].
- [29] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan and S. Shankaranarayanan, "Anomaly freedom in perturbative loop quantum gravity," *Phys. Rev. D* **78**, 063547 (2008)
- [30] G. Date and G. M. Hossain, "Matter in Loop Quantum Gravity," *SIGMA* **8**, 010 (2012) [arXiv :1110.3874 [gr-qc]].
- [31] C. Rovelli, "Loop quantum gravity : the first twenty five years," *Class. Quant. Grav.* **28**, 153002 (2011) [arXiv :1012.4707 [gr-qc]].

- [32] C. Kiefer, "Quantum gravity : General introduction and recent developments," *Annalen Phys.* **15**, 129 (2005) [gr-qc/0508120].
- [33] A. Perez, "Introduction to loop quantum gravity and spin foams," gr-qc/0409061.
- [34] A. Ghosh and A. Perez, "Black hole entropy and isolated horizons thermodynamics," *Phys. Rev. Lett.* **107**, 241301 (2011) [arXiv :1107.1320 [gr-qc]].
- [35] D. H. Lyth, A. R. Liddle, "The Primordial Density Perturbation : Cosmology, Inflation and the Origin of Structure", Cambridge University Press, 2009
- [36] A. Linde, "The Self-Reproducing Inflationary Universe", *Scientific American*, Vol. 271, No. 5, 1994
- [37] A. R. Liddle, D. H. Lyth, "Cosmological Inflation and Large-Scale Structure", Cambridge University Press, 2000
- [38] D. Langlois, "Lectures on inflation and cosmological perturbations," *Lect. Notes Phys.* **800**, 1 (2010) [arXiv :1001.5259 [astro-ph.CO]].
- [39] K. Schwarzschild, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit", Reimer, Berlin, 1916
- [40] A. Friedman, "Über die Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik*, **10**, 1922, "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes", *Zeitschrift für Physik*, **21**, 1924
- [41] E. Hubble, "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **15**, Issue 3, 1929
- [42] G. Gamow, R. A. Alpher, H. Bethe, "The Origin of Chemical Elements", *Phys. Rev.* **73**, 7 (1948)
- [43] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], "Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation," *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 18 (2011)
- [44] N. Y. Gnedin and O. Y. Gnedin, "Cosmological neutrino background revisited," *Astrophys. J.* **509**, 11 (1998) [astro-ph/9712199].
- [45] C. Rovelli, "Statistical mechanics of gravity and the thermodynamical origin of time," *Class. Quant. Grav.* **10**, 1549 (1993).
- [46] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, "Mathematical structure of loop quantum cosmology," *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 233 (2003) [gr-qc/0304074].
- [47] A. Ashtekar and P. Singh, "Loop Quantum Cosmology : A Status Report," *Class. Quant. Grav.* **28**, 213001 (2011) [arXiv :1108.0893 [gr-qc]].
- [48] A. Borde, A. H. Guth and A. Vilenkin, "Inflationary space-times are incomplete in past directions," *Phys. Rev. Lett.* **90**, 151301 (2003) [gr-qc/0110012].
- [49] T. Cailleteau, A. Cardoso, K. Vandersloot and D. Wands, "Singularities in loop quantum cosmology," *Phys. Rev. Lett.* **101**, 251302 (2008) [arXiv :0808.0190 [gr-qc]].
- [50] P. Singh and F. Vidotto, "Exotic singularities and spatially curved Loop Quantum Cosmology," *Phys. Rev. D* **83**, 064027 (2011) [arXiv :1012.1307 [gr-qc]].
- [51] M. Bojowald, "Canonical Gravity and Applications : Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity", Cambridge University Press, 2010
- [52] A. Ashtekar, "Some surprising implications of background independence in canonical quantum gravity," *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1927 (2009) [arXiv :0904.0184 [gr-qc]].
- [53] T. Thiemann, "Quantum spin dynamics (QSD)," *Class. Quant. Grav.* **15**, 839 (1998) [gr-qc/9606089].
- [54] J. Mielczarek, T. Stachowiak and M. Szydlowski, "Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology," *Phys. Rev. D* **77**, 123506 (2008) [arXiv :0801.0502 [gr-qc]].
- [55] M. Bojowald, G. Calcagni and S. Tsujikawa, "Observational test of inflation in loop quantum cosmology," *JCAP* **1111**, 046 (2011) [arXiv :1107.1540 [gr-qc]].
- [56] J. Mielczarek, "Possible observational effects of loop quantum cosmology," *Phys. Rev. D* **81**, 063503 (2010) [arXiv :0908.4329 [gr-qc]].
- [57] G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos and S. Sarkar, "Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts," *Nature* **393**, 763 (1998) [astro-ph/9712103].
- [58] M. Ackermann *et al.* [Fermi GBM/LAT Collaboration], "A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects," *Nature* **462**, 331 (2009) [arXiv :0908.1832 [astro-ph.HE]].
- [59] R. Gambini and J. Pullin, "Nonstandard optics from quantum space-time," *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999) [gr-qc/9809038].
- [60] R. J. Gleiser and C. N. Kozameh, "Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence," *Phys. Rev. D* **64**, 083007 (2001) [gr-qc/0102093].

- [61] A. Riotto, "Inflation and the theory of cosmological perturbations," hep-ph/0210162.
- [62] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, 1965
- [63] R. Parentani, "The Inflationary paradigm : Predictions for CMB," Comptes Rendus Physique **4**, 935 (2003) [astro-ph/0404022].
- [64] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, "Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe," Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).
- [65] V. F. Mukhanov, "Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations," Sov. Phys. JETP **67**, 1297 (1988) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94N7**, 1 (1988)].
- [66] M. Sasaki, "Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe," Prog. Theor. Phys. **76**, 1036 (1986).
- [67] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, "Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions," Phys. Rept. **215**, 203 (1992).
- [68] T. J. Battfeld and R. Brandenberger, "Vector perturbations in a contracting universe," Phys. Rev. D **70**, 121302 (2004) [hep-th/0406180].
- [69] M. Bojowald and G. M. Hossain, "Loop quantum gravity corrections to gravitational wave dispersion," Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008) [arXiv :0709.2365 [gr-qc]].
- [70] M. Bojowald and G. M. Hossain, "Cosmological vector modes and quantum gravity effects," Class. Quant. Grav. **24**, 4801 (2007) [arXiv :0709.0872 [gr-qc]].
- [71] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan and S. Shankaranarayanan, "Gauge invariant cosmological perturbation equations with corrections from loop quantum gravity," Phys. Rev. D **79**, 043505 (2009) [arXiv :0811.1572 [gr-qc]].
- [72] J. M. Pons, D. C. Salisbury and L. C. Shepley, "Gauge transformations in the Lagrangian and Hamiltonian formalisms of generally covariant theories," Phys. Rev. D **55**, 658 (1997) [gr-qc/9612037].
- [73] A. Barrau and J. Grain, "Holonomy corrections to the cosmological primordial tensor power spectrum," arXiv :0805.0356 [gr-qc].
- [74] J. Grain and A. Barrau, "Cosmological footprints of loop quantum gravity," Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 081301 [arXiv :0902.0145 [gr-qc]].
- [75] J. Grain, A. Barrau and A. Gorecki, "Inverse volume corrections from loop quantum gravity and the primordial tensor power spectrum in slow-roll inflation," Phys. Rev. D **79**, 084015 (2009) [arXiv :0902.3605 [gr-qc]].
- [76] J. Mielczarek, "Tensor power spectrum with holonomy corrections in LQC," Phys. Rev. D **79**, 123520 (2009) [arXiv :0902.2490 [gr-qc]].
- [77] J. Ribassin, thèse
- [78] J. Ribassin, E. Huguet and K. Ganga, "Simple fluid models for super-inflation in effective LQC and effects on the CMB B-modes," arXiv :1111.4661 [gr-qc].
- [79] L. R. Abramo, I. Yasuda and P. Peter, "Non singular bounce in modified gravity," Phys. Rev. D **81**, 023511 (2010) [arXiv :0910.3422 [hep-th]].
- [80] L. Verde, H. Peiris and R. Jimenez, "Optimizing CMB polarization experiments to constrain inflationary physics," JCAP **0601**, 019 (2006) [astro-ph/0506036].
- [81] D. Baumann *et al.* [CMBPol Study Team Collaboration], "CMBPol Mission Concept Study : Probing Inflation with CMB Polarization," AIP Conf. Proc. **1141**, 10 (2009) [arXiv :0811.3919 [astro-ph]].
- [82] F. Stivoli, J. Grain, S. M. Leach, M. Tristram, C. Baccigalupi and R. Stompor, "Maximum likelihood, parametric component separation and CMB B-mode detection in suborbital experiments," Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **408**, 2319 (2010) [arXiv :1004.4756 [astro-ph.CO]].
- [83] T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain and F. Vidotto, "Consistency of holonomy-corrected scalar, vector, and tensor perturbations in loop quantum cosmology " Phys. Rev. D **86**, 087301 (2012) [arXiv :1206.6736 [gr-qc]].
- [84] M. Bojowald and G. M. Paily, "Deformed General Relativity and Effective Actions from Loop Quantum Gravity," arXiv :1112.1899 [gr-qc].
- [85] E. Wilson-Ewing, "Holonomy Corrections in the Effective Equations for Scalar Mode Perturbations in Loop Quantum Cosmology," Class. Quant. Grav. **29**, 085005 (2012) [arXiv :1108.6265 [gr-qc]].
- [86] M. Bojowald, D. Brizuela, H. H. Hernandez, M. J. Koop and H. A. Morales-Tecotl, "High-order quantum back-reaction and quantum cosmology with a positive cosmological constant," Phys. Rev. D **84**, 043514 (2011) [arXiv :1011.3022 [gr-qc]].

Abstract

La relativité générale est la théorie rendant compte de la gravitation via une déformation de l'espace-temps. Son application à l'Univers permet, dans le modèle Λ -CDM, de bien rendre compte des observations cosmologiques. Cependant, à l'échelle de Planck, la théorie ne fonctionne plus et s'avère incohérente. Pour résoudre ce problème, il est sans doute essentiel de tenir compte des effets quantiques. Depuis près d'un siècle, concilier relativité générale et mécanique quantique est considéré comme une priorité de la physique théorique. La tâche s'avère néanmoins extraordinairement difficile et cette thèse est consacrée à l'une des pistes les plus sérieuses : la gravitation quantique à boucles.

Pour aller de l'avant dans cette démarche nécessaire mais complexe, des confrontations avec des données expérimentales seraient essentielles. Nous nous sommes ainsi intéressés aux perturbations cosmologiques générées dans ce cadre. Nous avons étudié en détails les conséquences phénoménologiques des corrections de cosmologie quantique à boucles aux modes tensoriels dans un modèle d'univers en rebond. Une analyse de Fisher a été développée pour comparer ces prédictions aux éventuelles futures observations. Pour les autres modes, nous nous sommes placés dans un formalisme spécifique incluant le calcul de contre-termes permettant de prévenir l'apparition d'anomalies dans la structure de l'algèbre des contraintes. Ce formalisme a été appliqué aux cas des perturbations vectorielles puis scalaires. Les équations du mouvement invariantes de jauges permettant de calculer les spectres ont alors été dérivées.

Abstract

General relativity describes gravity as a deformation of space-time. Applied to the Universe as a whole, it explains well cosmological observations in the Λ -CDM paradigm. However, at the Planck scale, the theory is not anymore self-consistent. It is most probably necessary to include quantum effects. For a century, this has been considered as one of the main challenges for theoretical physics. This is however an extremely difficult aim to reach and this thesis is devoted to one of the main proposals : Loop Quantum Gravity. To go ahead in the construction of any quantum theory of gravity, it would be most useful to compare predictions with observations. To this aim, we have studied cosmological perturbations in this framework. We have investigated into the details the phenomenological consequences of loop quantum cosmology corrections in a bouncing universe. A Fisher analysis was carried out to compare the predictions with future data. For the other modes, we have used a specific formalism to include counterterms that prevent anomalies from appearing in the algebra of constraints. This formalism was applied to vector and scalar perturbations. The gauge-invariant equations of motion leading to the calculation of measurable spectra were derived.