ВОПРОСЫ РАСЧЕТА БЕЗЖЕЛЕЗНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ

В. С. ВОРОНИН

Физический институт им. П. Н. Лебедева

При расчете безжелезных сверхпроводящих магнитных систем в первую очередь возникает задача нахождения конфигурации токов, создающих внутри некоторой заданной области, свободной от токов, магнитное поле заданной формы. Эта задача имеет, в принципе, множество решений, если на распределение плотности тока вне заданной области не накладывать никаких ограничений. Однако, практический интерес представляют такие распределения, которые имеют возможно более простую конфигурацию при минимальном общем количестве проводников с током (сверхпроводников).

Для нахождения таких конфигураций в общем случае удобно исходить из следующей задачи: найти распределение плотности поверхностного тока на некоторой гладкой замкнутой поверхности по заданной форме внутреннего магнитного поля. Предположение о поверхностном распределении тока, как легко показать, обеспечивает существование единственного распределения для любого (гармонического) внутреннего поля и любой гладкой поверхности, причем внешнее поле также определяется единственным образом [1].

При математической формулировке данной задачи удобно ввести скалярные потенциалы внутреннего и внешнего поля ψ_i и ψ_e; потенциал внутреннего поля мы будем считать заданным. Эти потенциалы должны удовлетворять уравнению Лапласа и граничному условию у токовой поверхности S:

$$\left.\frac{\partial\psi_e}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\right|_S . \qquad (1)$$

Потенциал внутреннего поля всегда можно представить в виде потенциала двойного (дипольного) слоя, расположенного на поверхности S с плотностью σ [2]:

$$\psi_1(p)=\int_s \sigma(Q)\frac{\cos(\bar{r}_{pQ}, \bar{n}_Q)}{r^2_{pQ}}.dSQ. \qquad (2)$$

Вне поверхности интеграл (2) удовлетворяет уравнению Лапласа и условию (1), то есть представляет поле токовой поверхности. Плотность поверхностного тока $\bar{i}$ связана с плотностью двойного слоя (плотностью магнитного момента) простой формулой:

$$\bar{i}(p_0)=c\,\mathrm{rot}\,\sigma(p_0), \quad p_0 \in s, \qquad (3)$$

то есть линиями тока являются линии σ=const. а условие непрерывности $\mathrm{div}\,\bar{i}=0$ выполняется автоматически. Таким образом, задачу можно свести к определению одной скалярной функции точки поверхности, σ, реализующей представление (2), которую можно найти, решая известное интегральное уравнение для задачи Дирихле [2]:

$$-2\pi\sigma(p)+\int_s \frac{\cos(\bar{r}_{pq}\bar{n}_Q)}{r^2_{pQ}}\sigma(Q)dS_Q=\psi_1(d), \quad p_1Q \in s. \qquad (5)$$

Граничную функцию ψ_1 можно считать известной. Зная дипольную плотность, по формуле (3) легко найти распределение плотности тока, а по формуле (2) — внешнее поле в любой точке; компоненты напряженности внешнего поля у токовой поверхности, которая определяет допустимую плотность тока для сверхпроводника, находятся по формулам:

$$B^{(e)}_n\Big|_s=\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\Big|_s \quad ; \quad B^{(e)}_\sigma\Big|_s=\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\Big|_s+4\pi\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}. \qquad (5)$$

Поскольку для любой замкнутой поверхности существует распределение тока, создающее внутри магнитное поле любой формы, форма поверхности может быть достаточно простой. Для магнитных систем циклических ускорителей удобно располагать проводники на поверхности, обладающей симметрией вращения. В этом случае, разлагая азимутальную зависимость в ряд Фурье, для амплитуд фурье-компонент получим из уравнения (4) одномерные интегральные уравнения, ядра которых содержат универсальные функции, зависящие только от числа N азимутальных вариаций. Эти функции являются эллиптическими интегралами N-го порядка и выражаются через полные эллиптические интегралы E и K, для которых имеются подробные таблицы. Для этих уравнений составлена программа решения на ЭВМ (БЭСМ-4), для поверхности вращения любой формы и для произвольной формы заданного магнитного поля. Если форма магнитного поля задана только в средней плоскости, удобно в общем случае представить его в виде суммы членов вида:

$$B_z/_{z\ 0}=\rho^n\cos(N\varphi+\beta\ln\rho), \qquad (6)$$

для которых потенциал, входящий в правые части уравнений, находится по формуле:

$$\psi = \mathrm{Re}\left\{ z\rho^{\nu} e^{iN\varphi} {}_2F_1 \left(-\frac{N+\nu}{2};\ \frac{N-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{\rho^2} \right) \right\} \qquad (7)$$

для поля со спиральной фокусировкой радиальный показатель ν является комплексной величиной: $\nu = n + i\beta$.

Для кольцевых магнитных систем с относительно малой шириной кольца можно пренебречь его кривизной, другими словами, считать, что токи расположены на бесконечной цилиндрической поверхности, а магнитное поле зависит периодически от продольной координаты y. В этом случае для амплитуды каждой из фурье-компонент

$$\sigma = \sigma_k(x,z)\cos Hy, \qquad \varphi = \psi_k(x,z)\cos Hy \qquad (8)$$

также получим одномерное уравнение, содержащее всего одну универсальную функцию

$$-2\pi\sigma_k(x,z) + \int_L 2\frac{(x-x')n_{x'} + (z-z')nz'}{(x-x')^2 + (x-z')^2} \cdot Huk_1(k_u)\sigma_k(x',z')ds_L = \psi'_k(x'z), \quad (9)$$

где L—сечение поверхности плоскостью y=const, H— внешняя нормаль, $u = \sqrt{(x-x')^2 + (x-z')^2}$. Для этого уравнения также составлена программа решения на ЭВМ, а для поверхности с круговым сечением найдены аналитические решения.

Полученные уравнения позволяют сравнительно просто находить конфигурацию сверхпроводящих обмоток для безжелезных магнитных систем со сложной формой поля. При больших плотностях тока, допускаемых сверхпроводящими материалами, толщина обмотки не превышает единиц см, и для систем больших размеров предположение о поверхностном распределении тока оправдывается с хорошей точностью. При необходимости толщину обмотки можно учесть, разбив ее на некоторое число достаточно тонких слоев, каждый из которых будет создавать часть общего поля.

Расход сверхпроводящего материала на данную магнитную систему зависит от выбора формы токовой поверхности, так как напряженность поля в месте расположения обмотки превышает напряженность рабочего поля, особенно в тех местах, где поверхность имеет большую кривизну, что приводит к снижению допустимой плотности тока и, следовательно, к увеличению объема материала. Для нахождения оптимального варианта производится расчет конфигураций проводников для ряда форм поверхности. Расчеты показывают, что во многих случаях наиболее выгодна конфигурация с вертикальными и горизонтальными размерами одного порядка. Для магнитных систем, поле которых, кроме азимутально-симметричной компоненты, должно содержать азимутальную или спиральную вариацию с малой длиной волны (изохронный циклотрон, спиральный кольцевой фазотрон), вариационную часть поля выгоднее создавать обмотками, расположенными ближе к средней плоскости, чем обмотки азимутально-симметричной компоненты.

На рис. 1 в качестве примера приведен результат расчета конфигурации сверхпроводящей обмотки безжелезной магнитной системы протонного кольцевого фазотрона радиального типа на диапазон энергий от 0,2 до 10 Гэв (один элемент периодичности). Форма поля в средней плоскости описывается выражением:

$$B_z(\rho,\varphi)=58\,\text{кэ}\left(\frac{\rho}{50\,\text{м}}\right)^{80}\left[\cos(50\varphi)+0{,}03\right]. \qquad (10)$$

Максимальная напряженность магнитного поля внутри вакуумной камеры 50 кэ, с внутренней стороны обмотки — 60 кэ, с наружной стороны — 65 кэ (обмотка из NbTi). Обмотка расположена на поверхности овального сечения шириной 2 м и высотой 60 см.

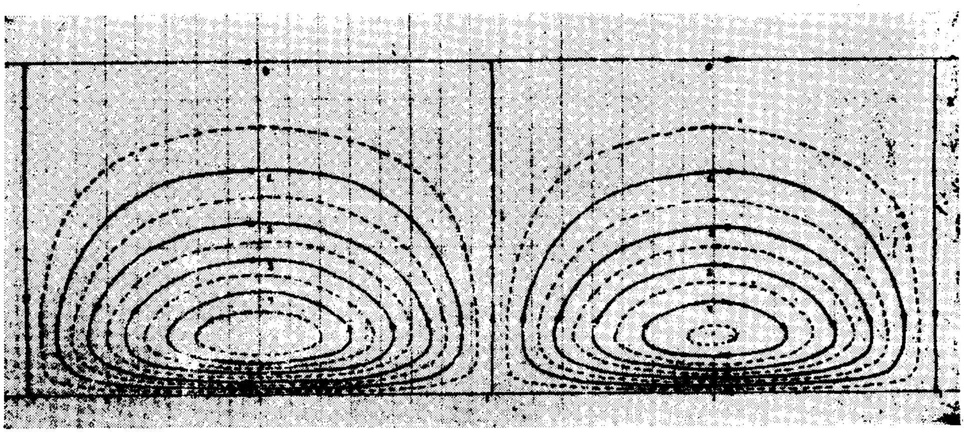

Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **В. С. Владимиров**, Уравнения математической физики, Изд-во «Наука», 1967.
2. **Р. Курант, Д. Гильберт**, Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, изд. 2-е, 1951.

ДИСКУССИЯ

Яблоков: Можно ли с помощью Вашего метода расчитывать поле, возрастающее в вертикальном направлении?

Воронин: Рассмотренный метод пригоден для полей любой конфигурации. Наличие плоскости симметрии необязательно.

Дойников: Можно ли учесть влияние толщины обмотки?

Воронин: Для учета толщины обмотки рассмотренный метод нужно применить несколько раз.

Елян: Каким образом производится разбиение контура обмотки на частичные области?

Воронин: Разбиение производится произвольно.