

Efectos cuánticos en modelos cosmológicos inflacionarios

Trombetta, Leonardo Giuliano

2016 03 29

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Efectos cuánticos en modelos cosmológicos inflacionarios

Tesis presentada para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas
por *Leonardo G. Trombetta*

Director de Tesis: Dr. Francisco D. Mazzitelli
Consejero de Estudios: Dr. Esteban Calzetta

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

Fecha de Defensa: 29 de Marzo de 2016

Resumen

La expansión del universo durante la etapa inflacionaria puede ser descripta en una primera aproximación con la métrica de De Sitter. El cálculo de las funciones de correlación cuánticas de los campos en esta geometría es importante para contrastar los modelos con las observaciones de precisión del fondo cósmico de microondas. En el caso de campos muy livianos comparados con la curvatura del espacio tiempo, estos cálculos están plagados con efectos infrarrojos, los cuales podrían estar indicando una falla en la teoría de perturbaciones. En este sentido, algunos cálculos no perturbativos han mostrado que las interacciones generan una masa dinámica, que tiene el efecto de regular las posibles divergencias infrarrojas. En esta tesis se estudian algunos aspectos de la teoría cuántica de campos en De Sitter mediante diversos métodos no perturbativos, con el objetivo de comprender los efectos infrarrojos asociados a campos livianos o no masivos en el universo temprano. Por un lado se considera la Acción Efectiva de dos partículas Irreducible (2PIEA) en la aproximación de Hartree, que si bien es exacta en el límite de N grande para un modelo con simetría $O(N)$, para un número finito de campos deja de ser completamente consistente. Para recuperar en parte algunas propiedades de la 2PIEA exacta, se deben imponer ciertas relaciones de consistencia en el proceso de renormalización, lo cual afecta las partes finitas de los contraterminos. Se ha prestado particular atención a este proceso, generalizándolo a espacios curvos para obtener las ecuaciones de evolución del valor medio del campo renormalizadas. Se estudió el potencial efectivo en la aproximación de Hartree, buscando las condiciones para la existencia de soluciones con ruptura espontánea de simetría. Resultados previos en la literatura muestran que estas soluciones no existen en el límite de N grande, así como tampoco para N finito con el esquema de renormalización usual. Por otro lado, adoptando la renormalización consistente, se encuentran soluciones con ruptura de simetría, cuya existencia sin embargo depende del punto de renormalización.

Luego, se consideraron las ecuaciones de Einstein Semiclásicas en la aproximación de Hartree, renormalizándolas con el método consistente. Se buscaron soluciones autoconsistentes de éstas ecuaciones en combinación con las ecuaciones del campo, estudiando si el efecto de los campos sobre la curvatura puede generar o no una restauración de la simetría. En particular se encontraron soluciones donde los efectos cuánticos son los responsables de la expansión acelerada del universo, en ausencia de constante cosmológica. Estos resultados también dependen del punto de renormalización.

Otro método no perturbativo muy poderoso proviene de formular la Teoría de Campos en el espacio De Sitter Euclídeo, el cual tiene la propiedad de ser compacto. Debido a esto, el campo admite una descomposición en modos discreta que pone en evidencia que las divergencias infrarrojas provienen de las contribuciones del modo constante, o modo cero. Es posible formular una teoría sin problemas infrarrojos tratando no perturbativamente al modo cero, y de manera perturbativa a los modos inhomogéneos. Las correcciones provenientes de éstos últimos son de orden superior en una expansión infrarroja. Consideramos la generalización de esta formulación a la teoría con simetría $O(N)$, calculando la masa dinámica y el potencial efectivo. Esto permite realizar una comparación adecuada con los resultados provenientes de la 2PIEA donde el límite de N grande permite obtener resultados más confiables.

Palabras clave: Teoría cuántica de campos, De Sitter, Efectos infrarrojos, Métodos no perturbativos, Cosmología.

Quantum effects in inflationary cosmological models

Abstract

The expansion of the Universe during the inflationary stage can be described, as a first approximation, with the De Sitter metric. It is important to calculate quantum correlation functions of fields living in this geometry in order to compare the different models with the high-precision observations of the Cosmic Microwave Background. For light fields compared to the space-time curvature, these calculations are plagued by infrared effects, which might be an indication of the breakdown of perturbation theory. In this regard, some non-perturbative calculations have shown that a mass is dynamically generated by the interactions, effectively regulating the possible infrared divergences. In this thesis, we study some aspects of the Quantum Field Theory in De Sitter space by means of non-perturbative methods, with the goal of better understanding the infrared effects associated with light and massless fields in the early Universe. On the one hand, we considered the Two-Particle Irreducible Effective Action (2PIEA) in the Hartree approximation, which, although being exact in the large- N limit of a model with $O(N)$ symmetry, in the case of a finite number of fields it is no longer fully consistent. In order to partially recover some properties of the exact 2PIEA, some consistency conditions must be imposed on the renormalization procedure, which in turn affects the finite parts of the counterterms. We focused on this process, generalizing it to curved backgrounds in order to find the renormalized evolution equation for the mean value of the field. We studied the Effective Potential, looking for the conditions for the existence of spontaneous-symmetry-breaking solutions. Previous results in the literature show that there are no such solutions in the large- N limit, as well as for finite N under the usual renormalization scheme. Nevertheless, we found that these solutions can exist when adopting the consistent renormalization scheme, although their existence is dependent on the renormalization point.

Then we studied the Einstein Semiclassical Equations in the Hartree approximation with the consistent renormalization procedure. We looked for self-consistent solutions of these equations together with the field equations, studying whether the quantum effects over the space-time curvature can induce a symmetry restoration or not. In particular, we found some solutions where the quantum effects are solely responsible for the accelerated expansion of the Universe, without the presence of a Cosmological Constant. This results are also dependent on the renormalization point chosen.

Another very powerful non-perturbative method comes from the formulation of the Quantum Field Theory in euclidean De Sitter space, which has the characteristic property of being compact. Due to this, the field has a discrete mode decomposition which allows to identify the contributions of the constant -or zero- mode, as the origin of the infrared divergences. It is then possible to formulate a theory with no infrared problems by treating the zero mode non-perturbatively, while dealing with the inhomogeneous modes perturbatively. The corrections coming from the latter are of higher order in an infrared expansion. We considered the generalization of this formulation to a model with $O(N)$ symmetry, calculating the dynamical mass and the Effective Potential. This allows for a comparison with the results obtained with the 2PIEA, for which the large- N limit is needed for the results to be trusted.

Keywords: Quantum Field Theory, De Sitter, Infrared effects, Non-perturbative methods, Cosmology.

Quiero agradecer a Diego Mazzitelli por haberme acompañado en este largo proceso y siempre haber estado dispuesto a ayudarme con lo que sea y enseñarme todo lo que sabe. A Diana López Nacir por ser un ejemplo a seguir y empujarme a que me esfuerce siempre un poco más. A Fernando Lombardo por estar presente con sus consejos y apoyo. A Paolo Creminelli por darme la posibilidad de visitar el ICTP en varias ocasiones y abrirme nuevas oportunidades.

A mis padres por el apoyo incondicional en todas las etapas de mi vida que fueron y serán. A mis familiares y amigos por siempre interesarse por mi trabajo con sus preguntas y dudas, y por proveer un, a veces muy necesario, cable a tierra.

A mi compañera en esta aventura, Flor, por todo su amor y su esfuerzo infinito. Por darme aliento en los momentos buenos y en los malos, y por estar dispuesta a acompañarme ida y vuelta hasta el fin del mundo.

Índice general

1. Introducción General	1
1.1. Problemas del modelo estándar del Big Bang	2
1.2. Modelos cosmológicos inflacionarios	3
1.3. Campos cuánticos en De Sitter	4
1.3.1. Métodos no perturbativos en De Sitter	6
1.4. En esta tesis	8
2. Teoría cuántica de campos en espacios curvos	11
2.1. Cuantización del campo escalar libre en espacios curvos	11
2.2. Acción Efectiva y $\langle T_{\mu\nu} \rangle$	13
2.3. Funciones de Green y vacío adiabático	14
2.3.1. Expansión Adiabática	17
2.4. Renormalización del $\langle T_{\mu\nu} \rangle$	19
2.5. Formalismo de Camino Temporal Cerrado o IN-IN	21
3. Efectos infrarrojos en De Sitter	25
3.1. Simetrías del espacio-tiempo de De Sitter	26
3.2. Divergencias infrarrojas	27
3.2.1. Campo libre masivo	28
3.2.2. Campo libre no masivo	30
3.2.3. Campo interactuante y correcciones perturbativas	32

4. Métodos no perturbativos en teoría cuántica de campos en espacios curvos: la aproximación de Hartree y la expansión 1/N	35
4.1. Formalismo de la Acción Efectiva Irreducible de 2 Partículas	36
4.1.1. Acción Efectiva 1PI	36
4.1.2. Acción Efectiva 2PI	38
4.1.3. Relación entre las acciones efectivas 1PI y 2PI	41
4.1.4. Relaciones de Consistencia	42
4.2. Aproximación de Hartree	43
4.2.1. Renormalización en espacios curvos generales	45
4.3. Potencial efectivo y parámetros renormalizados	50
4.3.1. Punto de renormalización en espacio-tiempo plano	51
4.3.2. Punto de renormalización en De Sitter	53
4.4. Límite de N grande en el modelo $O(N)$	57
4.5. Discusión	59
5. Ruptura espontánea de simetría en De Sitter	61
5.1. Potencial efectivo en la aproximación de Hartree en De Sitter	62
5.2. Ruptura espontánea de simetría	64
5.2.1. Caso $R_0 = 0$	65
5.2.2. Caso $R_0 > 0$	66
5.2.3. Restauración de simetría en el límite de N grande	69
5.3. Discusión	69
6. Ecuaciones de Einstein Semiclásicas y soluciones autoconsistentes en la apro- ximación de Hartree	71
6.1. Renormalización de las ecuaciones de Einstein semiclásicas en espacios curvos generales	71
6.2. Las ecuaciones semiclásicas de Einstein en De Sitter	77
6.2.1. Soluciones de De Sitter autoconsistentes	81

6.3. Discusión	87
7. Otros métodos no perturbativos en De Sitter	89
7.1. Inflación estocástica	90
7.1.1. El resultado de Starobinsky y Yokoyama	91
7.1.2. Equivalencia con la teoría de campos IN-IN	92
7.2. Espacio De Sitter euclídeo	94
7.2.1. Prolongación analítica y compactificación	95
7.2.2. Tratamiento no perturbativo del modo cero	96
7.2.3. Potential efectivo euclídeo	97
8. Más allá del límite infrarrojo en el espacio De Sitter euclídeo	101
8.1. Correcciones más allá del límite infrarrojo	102
8.1.1. Parte ultravioleta	103
8.1.2. Parte infrarroja	106
8.1.3. Resultado no masivo euclídeo en el límite de N grande	107
8.2. Comparación con la teoría cuántica de campos lorentziana	108
8.3. Discusión	110
9. Conclusiones y Perspectivas	113
A. Límite de coincidencia del propagador libre en De Sitter	119
B. Relaciones de consistencia 2PI	121
C. Relación entre los parámetros renormalizados y los de sustracción mínima	127
D. Derivadas funcionales de $\hat{Z}_f[\hat{J}]$	129
E. Integrales del propagador ultravioleta libre en el espacio de De Sitter euclídeo	131

F. Renormalización en espacio de De Sitter euclídeo	133
G. Comparación entre contratérminos lorentzianos y euclídeos	135
Bibliografía	137

Capítulo 1

Introducción General

En las últimas dos décadas la cosmología se ha vuelto una ciencia de precisión gracias a la mejora en la sensibilidad de las observaciones. Esto ha permitido descubrimientos fundamentales como el de las anisotropías en el fondo cósmico de microondas (CMB) [1] o el de la actual expansión acelerada del universo [2, 3]. Estos descubrimientos han cambiado nuestro entendimiento sobre la historia evolutiva del universo a gran escala, forzando cambios paradigmáticos en el modelo cosmológico precedente, el modelo del Big Bang.

El CMB es la radiación más antigua y lejana que podemos observar en el universo, y es por ello una importante ventana hacia sus primeros momentos. Su descubrimiento en los años 60 dio impulso a la teoría del Big Bang como una teoría física seria que explicase la evolución del universo a gran escala. Esta radiación tiene su origen en el momento en la historia térmica del universo en el cual el plasma primordial se enfrió lo suficiente para dar lugar a la recombinaión de los protones con los electrones que lo forman. Al ocurrir este proceso aproximadamente instantáneo, el universo se vuelve transparente a la radiación electromagnética, la cual luego viaja casi sin alteración hasta la actualidad salvo por el corrimiento al rojo de su espectro debido a la expansión del universo. Gracias a su origen térmico, el espectro de esta radiación es el de un cuerpo negro con una temperatura característica aproximadamente isótropa respecto de la dirección de observación. A partir de las mediciones de los satélites COBE y posteriormente WMAP y Planck de las pequeñas anisotropías presentes en la radiación cósmica de fondo, con una amplitud relativa menor a 10^{-5} [4], se abrieron nuevos interrogantes sobre el universo primordial.

1.1. Problemas del modelo estándar del Big Bang

El marco teórico que describe un espacio-tiempo dinámico es la Teoría de la Relatividad General (RG), cuyas predicciones seguimos confirmando observacionalmente aún cien años después de su formulación [5]. El universo es aproximadamente isótropo y homogéneo a escalas cosmológicas, y por lo tanto puede describirse por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker [6, 7]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala que describe la expansión, y K puede tomar los valores $-1, 0$ o 1 correspondientes a hipersuperficies de tiempo constante que sean espacialmente hiperbólicas, planas o esféricas respectivamente. Insertando esta métrica en las ecuaciones de Einstein y considerando como fuente a un fluido ideal de densidad ρ y presión p , se obtienen las denominadas ecuaciones de Friedmann,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.2a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3p), \quad (1.2b)$$

con G_N la constante de Newton y $\dot{\cdot} = d/dt$. Estas son las ecuaciones dinámicas para el factor de escala $a(t)$. El parámetro de Hubble se define como

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.3)$$

y es la escala característica de curvatura del espacio-tiempo.

Un concepto importante para entender la física en un universo en expansión es el del horizonte de partículas. Esta es la mayor distancia que puede haber viajado un rayo de luz ($ds^2 = 0$) desde un tiempo inicial $t = 0$ hasta un tiempo determinado t , y establece el tamaño de las regiones causalmente conectadas en el universo. En coordenadas comóviles el mismo se calcula

$$d_h = \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \sim \frac{1}{a(t)H(t)} \quad (1.4)$$

El modelo original del Big Bang contiene sólo componentes de materia y radiación como fuentes, y en consecuencia exhibe una expansión desacelerada durante toda su evolución. Por lo tanto, el horizonte d_h crece con el tiempo y así va incluyendo más y más regiones que no han estado previamente en contacto causal. Por esta razón, es de esperarse que en determinado momento de la historia del universo se observen grandes anisotropías a escalas mayores al tamaño del

horizonte en aquel entonces. En particular, en la época del CMB el horizonte era muy pequeño. Sin embargo, en el CMB estas grandes anisotropías no están presentes [1, 4, 8]. Esto se conoce como el problema del horizonte, e implica un alto grado de ajuste en las condiciones iniciales del plasma primordial para lograr el alto grado de isotropía observado.

Otro problema está relacionado con la componente de curvatura K en la densidad de energía. Definiendo $\Omega = \rho/\rho_c$, donde ρ incluye las componentes de materia y radiación, y $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ es la densidad crítica, la primera de las ecuaciones de Friedmann (1.2a) se escribe

$$\Omega + \Omega_K = 1 \quad (1.5)$$

donde $\Omega_K = -K/a^2H^2$ es la componente relativa de la densidad de energía debido a la curvatura. Las observaciones actuales del CMB indican que actualmente $|\Omega_K| < 0,01$ a 95 % CL [4]. Teniendo en cuenta nuevamente una expansión desacelerada, es decir, solamente con etapas dominadas por la materia o la radiación, $|\Omega_K|$ decrece con el tiempo. Esto correspondería a una curvatura inicialmente aún menor. Por lo tanto, nos encontramos nuevamente ante un problema de ajuste fino en las condiciones iniciales conocido como el problema de la planitud.

1.2. Modelos cosmológicos inflacionarios

Ambos problemas pueden ser solucionados si se asume que el universo ha tenido una etapa temprana de expansión acelerada [9]. Durante la misma, conocida como etapa inflacionaria, el universo se expande de manera quasi-exponencial, $a(t) \sim e^{Ht}$ con H aproximadamente constante. Esto implica que, por un lado, el horizonte de partículas d_h decrece durante el período inflacionario, indicando que el mismo era mucho mayor en el pasado. De esta forma, si inflación dura lo suficiente, aproximadamente unos 60 “e-folds”, todo el universo actualmente observable tuvo un origen común dentro de la misma región causal. Esto es suficiente para resolver el problema del horizonte. Por otro lado, este período inflacionario tiene el efecto de achicar $|\Omega_K|$. Nuevamente, si la inflación dura al menos unos 60 “e-folds”, resulta suficiente para resolver el problema de la planitud, desde un punto de vista de la naturalidad de las condiciones iniciales.

Las ecuaciones de Friedmann (1.2) nos dicen que para lograr un período de expansión acelerada, hace falta un tipo de fluido con presión negativa $p < -1/3$. En particular, para que $H \sim cte$, es necesario que $p \simeq -\rho$. Estas propiedades escapan las de los fluidos clásicos, sin embargo son posibles para un campo escalar, el inflatón, que rueda suficientemente lento por su potencial [10]. Una predicción interesante de estos modelos es que, durante este período, las fluctuaciones cuánticas de campos muy livianos, ya sea el inflatón u otros campos espectadores,

son amplificadas en amplitud mientras también aumentan en longitud de onda debido a la expansión. Cuando finalmente cruzan el horizonte de curvatura las mismas se vuelven clásicas y quedan congeladas. El espectro de dichas fluctuaciones es aproximadamente invariante de escala, siendo esta una predicción bastante genérica de los modelos inflacionarios. Posteriormente al período inflacionario, las mismas actúan como semilla de las perturbaciones en la densidad de energía en el universo y así a la eventual formación de estructura a gran escala que observamos hoy. En particular, estas perturbaciones dejan su huella en la superficie de última dispersión, donde nace el CMB. Por esta razón, el estudio en detalle sus anisotropías puede dar información sobre la etapa inflacionaria precedente.

Es importante entonces tener un buen entendimiento teórico de la física del inflatón y del mecanismo de generación y amplificación de sus fluctuaciones cuánticas para poder comparar con las observaciones cada vez más precisas del CMB. Como hemos mencionado, el marco teórico fundamental para la descripción de un espacio-tiempo dinámico como lo es el universo en expansión es la Relatividad General. Por otro lado, el inflatón es un campo cuántico interactuante que naturalmente se describe con la Teoría Cuántica de Campos. La formulación de esta última en un fondo curvo requiere de ciertos cuidados, por ejemplo en relación a la ambigüedad en la definición del estado de vacío, o a la renormalización de la teoría.

A los fines del estudio de la evolución de las fluctuaciones cuánticas del inflatón, la etapa inflacionaria puede describirse en una primera aproximación por el espacio-tiempo de De Sitter, el cual exhibe una expansión exactamente exponencial y eterna. Esto es particularmente cierto en modelos donde las fluctuaciones provienen de campos espectadores distintos a aquel que produce la expansión, y por lo tanto está justificado ignorar el efecto de las mismas sobre la evolución del espacio-tiempo de fondo. Los objetos de interés son las funciones de correlación de un campo escalar con una masa pequeña con respecto a H en el límite de tiempos largos, las cuales luego pueden ser relacionadas con observables vinculados a la estadística de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo.

1.3. Campos cuánticos en De Sitter

La teoría de campos en el espacio-tiempo de De Sitter tiene una larga historia desde los primeros desarrollos de la teoría cuántica de campos en espacios curvos [11, 12], pero recientemente ha recobrado interés gracias a su rol en los modelos inflacionarios del universo temprano, así como también como posible descripción de la actual etapa de expansión acelerada del uni-

verso. Para estudiar las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar ϕ en De Sitter, se busca calcular las funciones de correlación cuánticas. La dependencia temporal de la métrica fuerza el uso de la formulación de camino temporal cerrado de la teoría de campos, también conocida como IN-IN, para poder calcular valores de expectación en lugar de amplitudes de transición. Esta es una herramienta necesaria para estudiar situaciones fuera del equilibrio tanto en el caso cosmológico como también en espacio plano.

El espacio-tiempo de De Sitter tiene la cualidad de poseer tantas simetrías como el espacio-tiempo de Minkowski, ya que se trata de uno de los espacio-tiempos máximamente simétricos con curvatura constante, en este caso positiva. El parche de coordenadas relevante para la cosmología es el que describe un espacio en expansión,

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\vec{x}^2 \quad (1.6)$$

donde las secciones de tiempo constante son espacialmente planas, y H es constante. Su gran número de isometrías permite definir un vacío invariante para un campo escalar masivo. Si, por otro lado, se tiene un campo libre no masivo y mínimamente acoplado a la curvatura, no existe ningún vacío invariante de De Sitter [13, 14]. Este hecho se manifiesta en las funciones de correlación del campo, las cuales muestran una dependencia explícita con el tiempo. Por ejemplo la función de dos puntos de un campo libre con $m = 0$, que a tiempos largos comparados con H^{-1} es [15]

$$\langle \phi(t)^2 \rangle = \frac{H^3 t}{4\pi^2}, \quad (1.7)$$

donde se observa un crecimiento divergente con el tiempo cósmico t . Esto parece indicar que las fluctuaciones del campo ϕ crecen indefinidamente a tiempos largos, como consecuencia de la acumulación de modos del campo que continuamente salen del horizonte de curvatura H^{-1} debido a la expansión del universo. De ser así, las fluctuaciones del campo producirán un efecto sobre la evolución del espacio-tiempo de fondo que ya no puede despreciarse. En teoría de campos se conocen varios ejemplos de divergencias infrarrojas, como ser la amplificación de fluctuaciones a temperatura finita cerca del punto crítico [15], o en la emisión de fotones de muy baja energía en procesos de Electrodinámica Cuántica. En algunos casos, estas divergencias están asociadas a efectos físicos, pero en otros casos simplemente indican una falla del método utilizado.

Volviendo al caso de un campo en De Sitter, si este deja de ser estrictamente no masivo y en cambio tiene una pequeña masa m , el resultado recupera la invariancia de De Sitter esperada

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2}. \quad (1.8)$$

La masa en este caso actúa como regulador de la divergencia, y el problema queda aparentemente bajo control. Sin embargo, un campo libre es de poco interés práctico, por lo que se deben incluir términos de interacción. Una función de correlación típica entonces recibe correcciones provenientes de las interacciones, las cuales se calculan mediante la expansión perturbativa usando el formalismo IN-IN. Considerando por ejemplo auto-interacciones del tipo $\lambda\phi^4$, un simple conteo de potencias [15] indica que un diagrama de Feynman genérico con una cantidad L de loops que contribuye a las funciones de correlación, posee un factor de la forma

$$\sim \left(\frac{\lambda H^4}{4\pi^2 m^4} \right)^L. \quad (1.9)$$

Por lo tanto, tanto si la masa del campo es menor a $m^2 \sim \sqrt{\lambda} \frac{H^2}{2\pi}$, las correcciones se hacen más y más importantes a mayor número de loops, lo cual invalida el cálculo perturbativo. En el caso no masivo, se tiene nuevamente un crecimiento con el tiempo cósmico que empeora loop a loop, por lo tanto esta ruptura se da a tiempos largos. Para una revisión exhaustiva de estos y otros posibles efectos infrarrojos ver [16].

Resulta fundamental en este contexto estudiar los efectos infrarrojos en De Sitter, es decir, efectos que se vuelven importantes a tiempos largos o equivalentemente para masas pequeñas comparadas con la escala de Hubble H . La posible falla de la teoría de perturbaciones, o más dramático aún, de la teoría semicásica, indica la necesidad de realizar un análisis con otro tipo de métodos que permitan capturar al menos parte de la física no perturbativa. Por ejemplo, se espera que la presencia de la auto-interacción del campo genere una masa dinámica m_{dyn} , aún cuando el campo es clásicamente no masivo, regulando así las divergencias infrarrojas [17, 18]. Si esto es así, la teoría semicásica seguiría siendo válida, pero los métodos perturbativos son insuficientes.

Vale destacar que, por un lado, no todos los modelos inflacionarios se basan en campos livianos en comparación a la curvatura. Un ejemplo son los modelos que utilizan al Higgs en el rol del inflatón, los cuales requieren un acoplamiento con la curvatura muy grande $\xi \gg 1$ [19, 20], por lo que adquieren una masa mayor a H y entonces son insensibles a estos problemas. Por otro lado, la importancia de estos efectos sobre los observables inflacionarios es disputada en algunos trabajos [21, 22].

1.3.1. Métodos no perturbativos en De Sitter

Uno de los enfoques posibles para estudiar los efectos infrarrojos en De Sitter está basado en la acción efectiva irreducible de 2 partículas (2PIEA) [23], el cual permite realizar una

resumación de subconjuntos infinitos de diagramas de Feynman de la teoría usual mediante un reordenamiento de la expansión perturbativa. Esta técnica ha sido utilizada en el espacio plano para estudiar, por ejemplo, la teoría de campos a temperatura finita y sus transiciones de fase [24, 25, 26]. Considerando nuevamente a la teoría $\lambda\phi^4$, la acción efectiva 2PI tiene dos contribuciones al orden más bajo no trivial, una local y la otra no local. La segunda contribución es técnicamente muy difícil de tratar, más aún en el caso de un fondo dependiente del tiempo como es el caso de la teoría en De Sitter. Esto lleva a considerar la llamada aproximación de Hartree, es decir, conservar sólo la parte local, la cual de todas formas contiene información no perturbativa sobre la masa generada dinámicamente [27, 28],

$$m_{dyn}^2 = \frac{\sqrt{3\lambda}H^2}{4\pi} + \mathcal{O}(\lambda), \quad (1.10)$$

donde se considera que $m = 0$ clásicamente. La naturaleza no perturbativa de este resultado se manifiesta en la dependencia no analítica en la constante de acoplamiento λ .

La aproximación de Hartree es ampliamente usada, a pesar que debido a la ausencia de un parámetro de expansión pequeño sufre de ciertas dificultades. Éstas involucran la necesidad de incorporar nuevos contratérminos que luego deben ser fijados mediante ciertas relaciones de consistencia [29], y la posterior ambigüedad en la determinación de sus partes finitas. Algunos resultados físicos calculados en esta aproximación exhiben una sensibilidad al esquema de renormalización [30, 31]. Por otra parte, si en lugar de un campo se consideran N campos en un modelo con simetría $O(N)$, la aproximación de Hartree se vuelve exacta en el límite de N grande, y este tipo de problemas desaparecen.

Otro método no perturbativo en De Sitter se es el modelo de inflación estocástica [32, 17, 33]. En éste, el efecto de las fluctuaciones cuánticas que continuamente salen del horizonte sobre los modos de longitud de onda mucho mayor, es modelado mediante un término de ruido estocástico en una ecuación tipo Langevin. De esta manera, pueden calcularse valores de expectación mediante una función de densidad de probabilidad para valores del campo a tiempos largos. Luego, a partir de la función de correlación de dos puntos para el modo constante se calcula la masa dinámica, que en el caso $m = 0$ en la teoría $\lambda\phi^4$ es

$$m_{dyn}^2 = \frac{\sqrt{\lambda}H^2}{8\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}. \quad (1.11)$$

Este resultado es exacto al orden infrarrojo más bajo, y es considerado un punto de referencia para los cálculos no perturbativos. Sin embargo, no ha sido posible reproducirlo aún puramente desde la teoría de campos en el formalismo IN-IN. Igualmente, es notable que la aproximación

de Hartree, a pesar de sus problemas, dé un resultado con la misma dependencia en la constante de acoplamiento y con otro coeficiente numérico que solo difiere en un $\sim 15\%$.

Si el resultado estocástico es de confiar, es de vital importancia determinar la equivalencia entre dicho método y la teoría de campos IN-IN. En este sentido hay varios intentos de llegar a la formulación estocástica partiendo de la integral de camino IN-IN y realizando una separación entre modos de longitud de onda corta y larga mediante una función ventana dependiente del tiempo [34, 35]. Por otro lado, se ha demostrado la equivalencia a nivel diagramático entre ambas formulaciones para un campo masivo al orden más bajo en la expansión infrarroja [36, 37, 38]. De todas formas, no queda claro aún si sus resultados estocásticos no perturbativos para el caso exactamente no masivo pueden ser obtenidos puramente desde la teoría de campos IN-IN, o si es posible incorporar correcciones más allá del límite infrarrojo en la teoría estocástica.

Más recientemente, el resultado de inflación estocástica fue reproducido formulando la teoría de campos en el espacio De Sitter euclídeo [39], es decir, realizando una continuación analítica al tiempo imaginario. A diferencia del espacio plano, la versión euclídea de De Sitter es compacta y esto permite expandir el campo en una suma discreta de modos. Así, es posible ver que el modo constante, también llamado modo cero, es el único responsable por la divergencia infrarroja. Más aún, por ser constante se lo puede tratar exactamente de manera no perturbativa incluso en el caso $m = 0$. La masa dinámica calculada de esta forma coincide con el resultado estocástico (1.11).

La ventaja del formalismo euclídeo por sobre el de inflación estocástica es la posibilidad de incluir correcciones al resultado infrarrojo, tratando de forma perturbativa la contribución de los modos no constantes [40]. A pesar de ello, la equivalencia entre el formalismo euclídeo y la teoría de campos IN-IN en De Sitter tampoco ha sido aún establecida con rigurosidad. Un acercamiento fue realizado a nivel diagramático para el caso masivo [41].

1.4. En esta tesis

La tesis esta organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos de la teoría cuántica de campos en espacios curvos, describiendo las dificultades presentes en comparación con la formulación usual en espacio plano. Luego en el capítulo 3 se muestra en detalle el origen de los efectos infrarrojos en De Sitter a partir de los cálculos perturbativos en la teoría de campos IN-IN.

El capítulo 4 comienza con un resumen del formalismo de la acción efectiva 2PI y su relación

con la acción efectiva usual (o 1PI). En éste, tanto el valor medio del campo $\bar{\phi}$ como el propagador exacto G son considerados como grados de libertad independientes. Describiremos ciertas relaciones que aseguran la consistencia de los resultados en presencia de este grado de libertad adicional. Luego, nos concentraremos en la aproximación de Hartree, para la cual es necesaria la introducción de nuevos contratérminos para que dichas relaciones puedan satisfacerse [29].

Presentamos un estudio de la renormalización al nivel de las ecuaciones de movimiento para $\bar{\phi}$ y G generalizándola a espacios curvos arbitrarios, publicado originalmente en [30]. Según el esquema sustracción utilizado durante este proceso, los contratérminos admiten una parte finita, la cual debe ser cuidadosamente determinada por las condiciones de renormalización. Nuestros resultados indican que la elección del punto de renormalización es relevante a la hora de estudiar las soluciones semicásicas de la teoría. En el límite de N grande, donde se tiene un parámetro de expansión que permite justificar la truncación de la acción efectiva 2PI a nivel local, se recuperan resultados independientes del esquema de renormalización.

Posteriormente, siguiendo con el análisis descripto en la Ref. [30], en el capítulo 5 se especializan las ecuaciones del valor medio del campo y de la masa dinámica obtenidas en la aproximación de Hartree para el caso particular del espacio-tiempo de De Sitter. A partir de éstas se estudia el potencial efectivo. Las ambigüedades provenientes del proceso de renormalización tienen consecuencias físicas, como por ejemplo la existencia de soluciones con ruptura espontánea de la simetría Z_2 de la teoría clásica. Por otro lado, en el límite de N se observa la esperada restauración de la simetría [42, 43].

En el capítulo 6 volvemos a considerar espacios curvos generales en la aproximación de Hartree de la acción efectiva 2PI, haciendo foco en la renormalización de las Ecuaciones de Einstein Semicásicas (EES), que tienen como fuente al valor de expectación del tensor de energía-momento del campo cuántico. Se demuestra la renormalizabilidad de estas ecuaciones con el mismo conjunto de contratérminos que renormalizan las ecuaciones de movimiento. Esto incluye el hecho de que, en espacios curvos, existen divergencias que son proporcionales a términos cuadráticos en la curvatura. Con las EES renormalizadas, se buscan soluciones auto-consistentes en De Sitter, resolviendo simultáneamente para $\bar{\phi}$, m_{dyn}^2 y H , tanto para los casos con y sin ruptura espontánea de simetría. Este capítulo se basa en resultados publicados en [31].

El capítulo 7 presenta el formalismo de inflación estocástica y la formulación de la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo. Estos métodos no perturbativos alternativos son aplicables sólamente en el espacio-tiempo de De Sitter, y son particularmente aptos para

el estudio de los efectos infrarrojos.

En el capítulo 8 consideramos las correcciones ultravioletas a los resultados de orden infrarrojo más bajo de la teoría euclídea, analizando la renormalización y además generalizando el análisis al modelo con simetría $O(N)$. En este contexto, calculamos la masa dinámica a segundo orden en la expansión infrarroja, así como la función de 2-puntos para puntos separados. Verificamos que el resultado para la masa dinámica en el límite de N grande es compatible con los resultados obtenidos a partir de la acción efectiva 2PI en ese límite, incluyendo la restauración de la simetría. Sin embargo, observamos que para campos no masivos, el comportamiento para puntos separados sigue teniendo problemas a tiempos largos. Los resultados presentados en este capítulo están siendo preparados para su publicación [44].

Finalmente, en el capítulo 9 se discuten las conclusiones generales de los distintos temas tratados en la tesis.

Capítulo 2

Teoría cuántica de campos en espacios curvos

La teoría de campos en espacios curvos generaliza la teoría de campos usual al considerar campos cuánticos en una métrica de fondo curva $g_{\mu\nu}$, la cual es tratada clásicamente. La dinámica de estos campos es afectada por la curvatura del espacio-tiempo, mientras que ésta a su vez es afectada por la presencia de los campos cuánticos mediante las EES

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_\psi, \quad (2.1)$$

donde Λ la constante cosmológica. En el miembro derecho se ha reemplazado el tensor de energía-momento clásico $T_{\mu\nu}$ por el valor de expectación cuántico $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle$. Aquí y en el resto de esta tesis utilizaremos la signatura $(-, +, \dots, +, +)$ para la métrica, así como unidades para las cuales $\hbar = c = 1$.

En este capítulo delinearemos resumidamente algunos de los conceptos básicos detrás de esta generalización aplicada sobre la teoría de campos relativista, basándonos principalmente en [11]. Nuestro caso de interés es el de un campo escalar, por lo cual nos limitaremos al mismo.

2.1. Cuantización del campo escalar libre en espacios curvos

El primer paso es escribir una acción covariante para el campo escalar libre $\phi(x)$ de masa m en un espacio-tiempo general dado por la métrica $g_{\mu\nu}$. La forma más general en d dimensiones se escribe

$$S_{libre} = - \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) \phi^2 \right], \quad (2.2)$$

donde $g \equiv |\det g_{\mu\nu}|$, ξ es una constante de acoplamiento, y R es el escalar de curvatura de Ricci. El término $\xi R\phi^2$ es incluido como el único acoplamiento escalar local entre el campo escalar y el campo gravitacional, con las dimensiones adecuadas. La ecuación de movimiento obtenida al extremizar la acción (2.2) respecto de ϕ es

$$(-\square + m^2 + \xi R(x)) \phi(x) = 0 \quad (2.3)$$

donde $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$ es el operador de D'Alembert asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$.

Consideremos la cuantización del campo escalar libre en un espacio curvo general. Aquí seguiremos un procedimiento de cuantización canónica, con el fin de establecer las dificultades asociadas a la definición del estado de vacío en este contexto. Sin embargo, en el resto de la tesis recurriremos a la formulación de integral de camino de Feynman, la cual resulta más apropiada para la implementación de métodos no perturbativos a partir de técnicas de análisis funcional.

Comenzamos expandiendo el campo ϕ en el conjunto de modos ortonormales $u_k(x)$ que son solución de la ecuación (2.3),

$$\phi(x) = \sum_k \left[a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) \right] \quad (2.4)$$

donde a_k^\dagger y a_k son operadores de creación y destrucción respectivamente. La cuantización de la teoría puede ser implementada directamente imponiendo las relaciones de commutación estándar entre estos operadores. Luego, podemos definir un estado de vacío $|0\rangle$ como aquel que tiene la propiedad de ser aniquilado por todos los operadores a_k

$$a_k|0\rangle = 0, \quad \forall k \quad (2.5)$$

La construcción del espacio de Fock y los estados con un determinado contenido de partículas, etc., procede exactamente como en el caso del espacio de Minkowski. Sin embargo, en un espacio curvo existe una ambigüedad ineludible. Si bien en el espacio de Minkowski existe un conjunto natural de modos asociados a la simetría de dicho espacio, el grupo de Poincaré, el cual deja invariante al vacío definido por dichos modos, en un espacio-tiempo curvo arbitrario éste ya no es el caso. En general, puede no haber ninguna simetría. Por lo tanto no habrá un conjunto de coordenadas privilegiadas en las que separar la ecuación del campo y que lleve a un conjunto de modos naturales.

Para ilustrar este problema, consideremos un segundo conjunto completo y ortonormal de modos $\bar{u}_j(x)$, distintos a los $u_k(x)$, según los cuales el campo ϕ admite una descomposición

$$\phi(x) = \sum_j \left[\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x) \right], \quad (2.6)$$

la cual define un nuevo estado de vacío $|\bar{0}\rangle$

$$\bar{a}_j|\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall j \quad (2.7)$$

y un nuevo espacio de Fock. En general, el nuevo vacío no será aniquilado por los a_k originales

$$a_k|\bar{0}\rangle \neq 0 \quad (2.8)$$

lo que lleva a decir que el vacío de los modos $\bar{u}_j(x)$ tiene partículas en el modo $u_k(x)$. En otras palabras, puede no existir una definición natural de partícula. Por esta razón, es necesario un método para seleccionar aquellos modos que de alguna forma estén lo más cerca posible de los modos del espacio-tiempo de Minkowski en algún límite apropiado.

2.2. Acción Efectiva y $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

El valor de expectación del tensor de energía-momento $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ juega un papel importante en cualquier intento de modelar una dinámica autoconsistente del campo gravitatorio acoplado a campos cuánticos, ya que actúa como fuente de gravedad en las EES. Además, este es un objeto definido localmente que describe parte de la estructura del campo en un dado punto x . Al igual que en el espacio-tiempo de Minkowski, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ mostrará divergencias ultravioletas asociadas a los modos del campo con k grande, así como las tiene también cualquier otra magnitud cuadrática en el campo. Estas divergencias deberán ser regularizadas y tratadas de acuerdo al proceso de renormalización para extraer resultados finitos, el cual debe llevarse a cabo en el marco una teoría basada en las EES (2.1).

Clásicamente se tiene la acción

$$S = S_g + S_m, \quad (2.9)$$

donde

$$S_g = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.10)$$

es la acción gravitacional y S_m es la acción de la materia. Las ecuaciones de Einstein clásicas pueden derivarse mediante la condición

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (2.11)$$

la cual conduce a que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.12)$$

En el caso semicásico, consideramos por analogía que $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ se obtiene diferenciando funcionalmente la acción efectiva $\Gamma[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]$, es decir

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.13)$$

Hasta aquí ésta parece una definición razonable. Sin embargo, en el tratamiento usual de la teoría cuántica de campos la funcional generatriz de las funciones de n -puntos conectadas, $W[J]$ (a partir de la cual se obtiene $\Gamma[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]$ como su transformada de Legendre), se define de la siguiente manera,

$$e^{iW_{\text{in-out}}[J]} \equiv \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle_J = Z_{\text{in-out}}[J], \quad (2.14)$$

donde $|0, \text{in}\rangle$ y $|0, \text{out}\rangle$ son los estados de vacío asintóticos a tiempos $t = -\infty$ y $t = +\infty$ respectivamente. Como hemos discutido previamente, cuando el espacio-tiempo es curvo en general no existe un estado de vacío privilegiado en ausencia de un conjunto de simetrías de la métrica. En particular, para espacio-tiempos no estáticos, como el caso cosmológico, $|0, \text{in}\rangle \neq |0, \text{out}\rangle$. Por lo tanto con esta definición lo que se obtiene no es un auténtico valor de expectación, sino un elemento de matriz IN-OUT

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma_{\text{in-out}}[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}. \quad (2.15)$$

Si bien éste no es un valor de expectación, resulta suficiente para llevar adelante el proceso de renormalización. Por lo tanto primero discutiremos dicho proceso, y dejaremos para la sección (2.5) al final del capítulo la descripción de un formalismo alternativo que permite obtener verdaderos valores de expectación.

2.3. Funciones de Green y vacío adiabático

Las divergencias de los valores de expectación en el estado de vacío de las magnitudes cuadráticas en el campo $\phi(x)$ pueden estudiarse en el límite de coincidencia $x' \rightarrow x$ de la función de dos puntos del campo $\langle \phi(x)\phi(x') \rangle$, la cual puede calcularse a partir de la función de Green. La ecuación para la función de Green $G(x, x')$ en d dimensiones del campo ϕ se obtiene a partir de la ecuación (2.3) y se escribe

$$[-\square + m^2 + \xi R] G(x, x') = -i \frac{\delta^d(x - x')}{\sqrt{-g}}, \quad (2.16)$$

Las distintas funciones de Green se obtienen imponiendo diversas condiciones de contorno a las soluciones de (2.16), y cada una da una combinación distinta de valores de expectación de dos campos en el estado de vacío. Algunas son

$$G_>(x, x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle, \quad (2.17)$$

$$G_<(x, x') = \langle \phi(x')\phi(x) \rangle, \quad (2.18)$$

conocidas como las funciones de Wightman, mientras el producto ordenado temporalmente

$$G_F(x, x') = \langle T(\phi(x)\phi(x')) \rangle, \quad (2.19)$$

es el propagador de Feynman, y el ordenado anti-temporalmente

$$G_D(x, x') = \langle \tilde{T}(\phi(x)\phi(x')) \rangle, \quad (2.20)$$

el de Dyson. Otra función útil es el valor de expectación del anticomutador

$$G_1(x, x') = \langle \{\phi(x), \phi(x')\} \rangle, \quad (2.21)$$

llamada función elemental de Hadamard, la cual no es estrictamente una función de Green, ya que satisface la ecuación de movimiento (2.3) en vez de la ecuación (2.16).

Los valores de expectación en el estado de vacío del producto de dos operadores de campo libre, necesarios para construcción de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ y otras magnitudes de interés, pueden calcularse a partir de los diversos propagadores. En particular nos será útil $\langle \phi^2(x) \rangle$, el cual se obtiene tomando el siguiente límite de coincidencia $x' \rightarrow x$

$$\langle \phi^2(x) \rangle = \frac{1}{2}G_1(x, x) \equiv \frac{1}{2}[G_1] = \text{Re}[G_F]. \quad (2.22)$$

Para que las divergencias en $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ puedan eliminarse, es necesario que las mismas sean proporcionales a magnitudes geométricas independientemente del estado cuántico, y por lo tanto puedan absorberse en la renormalización de los parámetros del miembro derecho de las EES (2.1), Λ y G_N , y otros términos adicionales que resultan ser necesarios. Con este criterio en mente, el vacío físico debe pertenecer al conjunto de estados que den lugar a ese tipo de divergencias. Caso contrario, la teoría corre riesgo de ser no renormalizable.

Una forma de elegir dicho estado de vacío consiste en buscar el estado que más se parezca al vacío del espacio-tiempo de Minkowski. Para ello es natural pensar en una expansión en derivadas de la métrica, ya que a medida que el espacio-tiempo se parece más y más al de

Minkowski, la métrica se suaviza y sus derivadas se hacen más y más pequeñas. Una expansión de este tipo se expresa naturalmente en términos de magnitudes geométricas, como el tensor de curvatura, las cuales sirven de parámetro para medir la distancia al espacio-tiempo plano. Ésta es conocida como la expansión adiabática.

Al expandir adiabáticamente la ecuación del campo (2.3) a orden j , es decir con hasta j derivadas de la métrica, se obtienen soluciones $u_k^{AD(j)}(x)$ aproximadas a ese orden. En general podemos escribir una solución exacta $u_k(x)$ como

$$u_k(x) = \alpha_k^{AD(j)}(x) u_k^{AD(j)}(x) + \beta_k^{AD(j)}(x) u_k^{AD(j)*}(x), \quad (2.23)$$

donde $\alpha_k^{AD(j)}(x)$ y $\beta_k^{AD(j)}(x)$ deben ser uniformes al menos hasta orden adiabático j , pues $u_k^{AD(j)}(x)$ y $u_k^{AD(j)*}(x)$ son soluciones a ese orden. Suponiendo que en particular elegimos

$$\begin{aligned} \alpha_k^{AD(j)}(x') &= 1 + \mathcal{O}(AD(j+1)), \\ \beta_k^{AD(j)}(x') &= 0 + \mathcal{O}(AD(j+1)), \end{aligned} \quad (2.24)$$

para algún punto fijo x' , entonces valdrá para todo punto x . Las prescripciones (2.23) y (2.24) no definen únicamente a los modos exactos $u_k(x)$, pues la elección del punto x' donde igualarlos a las soluciones adiabáticas es arbitrario.

El vacío adiabático $|0^{AD(j)}\rangle$ se construye a partir de las soluciones aproximadas $u_k^{AD(j)}(x)$, y coincidirá a orden adiabático j con el vacío exacto $|0\rangle$ correspondiente a las soluciones exactas $u_k(x)$. Los modos exactos son los que se cuantizan, mientras que el vacío adiabático de orden j , siendo tan buen candidato como cualquier otro a estado de vacío, sólo es utilizado como modelo matemático para seleccionar un vacío exacto. Los vacíos físicos aceptables serán aquellos que coinciden con el vacío adiabático al menos a orden cuatro.

De esta manera se resuelve en parte la ambigüedad en la determinación del vacío [11], aunque por supuesto, no hay un único vacío de orden adiabático j , pues el procedimiento de igualar las soluciones aproximadas con las exactas (2.24) podría realizarse en cualquier punto del espacio-tiempo x' . Diferentes elecciones de x' conducen a distintos modos exactos, pero éstos diferirán sólo a orden adiabático superior a j . Por lo tanto todos los vacíos correspondientes serán iguales hasta orden adiabático j , mostrando un comportamiento similar para k grandes, pero diferiendo en los modos de baja energía. En particular, los estados de vacío asintóticos introducidos en (2.14) corresponden a elecciones particulares de x' .

La expansión adiabática es buena para algunas aplicaciones, como ser la renormalización de las divergencias ultravioletas, donde sólo importa el comportamiento a distancias pequeñas (k

grandes). En contraste, los modos de baja frecuencia exploran todo el espacio y son sensibles a la geometría, y por lo tanto a la construcción adiabática en particular.

2.3.1. Expansión Adiabática

Para estudiar las divergencias en los valores de expectación de magnitudes cuadráticas en el campo, el objeto básico de interés es la función de Green $G_F(x, x')$ en su límite $x' \rightarrow x$. Dado que sólo el comportamiento a distancias pequeñas es importante en ese caso, alcanza con calcularlo como un valor de expectación en el vacío adiabático de orden j

$$G_F^{AD(j)}(x, x') = \langle 0^{AD(j)} | T(\phi(x)\phi(x')) | 0^{AD(j)} \rangle, \quad (2.25)$$

lo que da la expansión adiabática de orden j del propagador exacto (2.19). Naturalmente las propiedades globales de ambos serán diferentes, pero su comportamiento local coincide y no depende del estado cuántico. Esta característica es importante para obtener las divergencias geométricas.

Existen varios métodos para calcular la expansión adiabática del propagador de Feynman, entre los que se destacan la técnica de tiempo propio [45] y la representación del espacio local de momentos [46]. Aquí nos limitaremos a considerar la representación más usada para la expansión adiabática del propagador de Feynman, conocida como la expansión de Schwinger-DeWitt,

$$G_F(x, x') = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x')}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty \frac{ids}{(is)^{\frac{d}{2}}} e^{[-im^2s + \sigma(x, x')/2is]} \sum_{j \geq 0} a_j(x, x')(is)^j, \quad (2.26)$$

donde $2\sigma(x, x')$ es el cuadrado de la distancia geodésica entre x y x' , mientras que

$$\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x') = -\frac{\det[\partial_\mu \partial_{\nu'} \sigma(x, x')]}{\sqrt{g(x)g(x')}} \quad (2.27)$$

es el determinante de Van Vleck. Los coeficientes del desarrollo $a_j(x, x')$ son puramente geométricos de orden adiabático $2j$ y satisfacen ciertas relaciones de recurrencia [11, 47]. Los primeros tres términos, escritos en las coordenadas normales de Riemann y^μ con origen en el punto x' hasta orden adiabático cuatro son

$$a_0(x, x') = 1, \quad (2.28a)$$

$$a_1(x, x') = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \nabla_\alpha R y^\alpha - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta, \quad (2.28b)$$

$$a_2(x, x') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 R^2 + \frac{1}{3} a_\lambda^\lambda, \quad (2.28c)$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta R + \frac{1}{120} \nabla_\alpha \nabla_\beta R - \frac{1}{40} \nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\alpha\beta} - \frac{1}{30} R_\alpha^\lambda R_{\lambda\alpha} \\
 &\quad + \frac{1}{60} R^\kappa_\alpha{}^\lambda_\beta R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Las magnitudes geométricas están evaluadas en x' . En esta representación, las divergencias del límite $x' \rightarrow x$ se encuentran en el límite inferior de la integral en s , para los primeros dos términos. En regularización dimensional, es posible realizar la integral en s y obtener el límite de coincidencia [...] del propagador. En términos de la función elemental de Hadamard G_1 , se lee [47]

$$\begin{aligned}
 [G_1] &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{\epsilon/2} \sum_{j \geq 0} [a_j] (m_{dyn}^2)^{1-j} \Gamma \left(j - 1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \\
 &\equiv \frac{1}{4\pi^2 \epsilon} \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] + 2T_F(m^2, \xi, R, \tilde{\mu}),
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde $\epsilon = d - 4$, μ es una escala de masa arbitraria introducida para mantener las unidades habituales y $\Gamma(x)$ es la función Gamma de Euler. Las divergencias asociadas al límite de coincidencia ahora corresponden a los polos en ϵ para los dos primeros ordenes adiabáticos. En la segunda línea aislamos dichos polos y definimos la parte finita T_F , la cual contiene los remanentes finitos de los ordenes uno y dos, así como las contribuciones del resto de la serie,

$$T_F(m^2, \xi_R, R, \tilde{\mu}) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \\ &- 2F(m, \{R\}) \end{aligned} \right\} \tag{2.31}$$

donde redefinimos $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ para absorber unos términos constantes, $\gamma_E - 1 + \log(R/4\pi\mu^2) = \log(R/\tilde{\mu}^2)$. En esta expresión, los ordenes adiabáticos mayores a dos están contenidos en la función $F(m^2, \{R\})$, la cual es independiente de ϵ y $\tilde{\mu}$. La dependencia en m^2 incluye también a sus derivadas, mientras que aquella en $\{R\}$ debe tomarse como una dependencia en invariantes de curvatura construidos a partir de contracciones del tensor de Riemann y sus derivadas. Esta

función satisface las siguientes propiedades

$$F(m^2, \{R\}) \Big|_{R_{\mu\nu\rho\sigma}=0} = 0, \quad (2.32a)$$

$$\frac{dF(m^2, \{R\})}{dm^2} \Big|_{R_{\mu\nu\rho\sigma}=0} = 0, \quad (2.32b)$$

$$\frac{dF(m^2, \{R\})}{dR} \Big|_{R_{\mu\nu\rho\sigma}=0} = 0. \quad (2.32c)$$

La expansión adiabática nos permite aislar el comportamiento del propagador proveniente de los modos ultravioletas, donde el principio de equivalencia nos asegura que éste será indistinguible al del espacio de Minkowski, para poder llevar a cabo el proceso de renormalización de manera general. Por otro lado, la función $F(m^2, \{R\})$ contiene la información que proviene de los modos de longitud de onda más grandes, que son sensibles a los efectos globales de la curvatura.

2.4. Renormalización del $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

Alternativamente a trabajar con la acción efectiva $\Gamma[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]$, puede trabajarse directamente con el valor de expectación del tensor de energía-momento. Esto es particularmente útil al considerar ejemplos concretos, donde es más sencillo calcular $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, que primero obtener $\Gamma[\bar{\phi}, g^{\mu\nu}]$ y luego diferenciarla funcionalmente. Si consideramos un campo escalar libre con acción (2.2), la expresión clásica de $T_{\mu\nu}(x)$ es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\phi) \Big|_{libre} = & (1 - 2\xi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - 2\xi\phi_{;\mu\nu}\phi + 2\xi g_{\mu\nu}\phi\Box\phi + \xi\phi^2 G_{\mu\nu} \\ & + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}\phi^{\lambda}\phi_{,\lambda} - \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}\phi^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. Notar que esta expresión es cuadrática en el campo $\phi(x)$ y sus derivadas. Para calcular $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ puede escribirse $\phi = \bar{\phi} + \varphi$ y tomarse valor de expectación. El resultado toma la siguiente forma [48]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{libre} + \langle T_{\mu\nu}^f \rangle, \quad (2.34)$$

donde [47, 49]

$$\langle T_{\mu\nu}^f \rangle = -\frac{1}{2}[G_{1;\mu\nu}] + \frac{(1 - 2\xi)}{4}[G_1]_{;\mu\nu} + \left(\xi - \frac{1}{4}\right)\frac{g_{\mu\nu}}{2}\Box[G_1] + \xi R_{\mu\nu}\frac{[G_1]}{2}. \quad (2.35)$$

En esta última expresión, las derivadas respecto de x y x' de la función de Hadamard de las fluctuaciones φ , es decir $G_1(x, x') = \langle \{\varphi(x), \varphi(x')\} \rangle$, se toman previamente al límite de coincidencia $x' \rightarrow x$. Este límite trae asociadas divergencias que deben ser regularizadas, para lo cual se utiliza el desarrollo de Schwinger-DeWitt (2.26) y se obtiene una expansión adiabática de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Esto evidencia que los términos de orden adiabático menor o igual que cuatro son divergentes, y que estas divergencias son proporcionales a cantidades de origen geométrico. Entonces, separando

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}, \quad (2.36)$$

las divergencias pueden ser absorbidas en la renormalización de las constantes del miembro derecho de la ecuación para la métrica, lo cual es posible gracias al carácter geométrico de las mismas.

De este análisis resulta que para absorber todas las divergencias, es necesario incluir términos nuevos cuadráticos en el tensor de curvatura en la acción gravitacional (2.10),

$$S_g = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa_B^{-1} (R - 2\Lambda_B) - \alpha_{1B} R^2 - \alpha_{2B} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \alpha_{3B} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right\}, \quad (2.37)$$

donde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de curvatura de Riemann, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$, y $\kappa_B = 8\pi G_N^B$, Λ_B , α_{iB} ($i = 1, 2, 3$) son los parámetros desnudos que deberán ser elegidos apropiadamente para cancelar las divergencias de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Con la inclusión de estos términos, las EES (originalmente (2.1)) resultan

$$\kappa_B^{-1} G_{\mu\nu} + \Lambda_B \kappa_B^{-1} g_{\mu\nu} + \alpha_{1B} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \alpha_{2B} {}^{(2)}H_{\mu\nu} + \alpha_{3B} H_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (2.38)$$

donde los nuevos tensores tienen las siguientes expresiones

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\square R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2R R_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

$${}^{(2)}H_{\mu\nu} = R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - 2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} - 4\square R_{\mu\nu} + 2R_{;\mu\nu} \\ & + 4R_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu} + 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Vale mencionar que en $d = 4$ dimensiones, el teorema generalizado de Gauss-Bonnet asegura que estos tensores no son todos independientes, y en consecuencia se tiene que $H_{\mu\nu} = -{}^{(1)}H_{\mu\nu} + 4{}^{(2)}H_{\mu\nu}$.

2.5. Formalismo de Camino Temporal Cerrado o IN-IN

Como hemos discutido en la sección (2.2), en la teoría de campos usual se define una acción efectiva $\Gamma_{\text{in-out}}[\bar{\phi}]$ que depende de una cantidad $\bar{\phi}$ que, en el espacio plano, es el valor medio del campo. En cambio, cuando el espacio-tiempo es curvo la cantidad $\bar{\phi}$ pasa a ser un elemento de matriz entre los vacíos $|0, \text{in}\rangle$ y $|0, \text{out}\rangle$, y entonces esta acción efectiva no es real ni causal y no sirve para estudiar problemas de valores iniciales. Este también es problema en espacio plano en situaciones fuera del equilibrio. De todas formas, a los fines de estudiar la renormalizabilidad de la teoría, incluso en espacios curvos, el formalismo usual IN-OUT, resulta suficiente.

Sin embargo, si uno está interesado en estudiar problemas de valores iniciales (cómo evolucionan el valor medio del campo o la métrica) hay que generalizar la noción de acción efectiva, y definir lo que se llama la acción efectiva de camino temporal cerrado (o CTP por sus siglas en inglés), también conocido como formalismo IN-IN. Este es un objeto bastante más complicado, que permite calcular valores de expectación en el estado $|0, \text{in}\rangle$. Para una presentación detallada ver [50, 51].

En la formulación habitual IN-OUT, se define la funcional generatriz

$$Z_{\text{in-out}}[J] = \langle \text{in}, 0 | 0, \text{out} \rangle_J \equiv e^{iW_{\text{in-out}}[J]}, \quad (2.42)$$

como la amplitud de persistencia del vacío en la evolución desde $t \rightarrow -\infty$ hasta $t \rightarrow +\infty$ en presencia de una fuente J . Luego la acción efectiva estándar $\Gamma[\bar{\phi}]$ se obtiene como la transformada de Legendre de $W_{\text{in-out}}[J]$. En cambio, en CTP se considera la persistencia del vacío en una evolución en dos tramos, primero desde $t \rightarrow -\infty$ hasta $t \rightarrow +\infty$ en presencia de una fuente J_+ , y luego de regreso desde $t \rightarrow +\infty$ hasta $t \rightarrow -\infty$ en presencia de J_- ,

$$Z_{\text{CTP}}[J_+, J_-] = \langle \text{in}, 0 | U_{J_+}(-\infty, +\infty) U_{J_-}(+\infty, -\infty) | 0, \text{in} \rangle \equiv e^{iW_{\text{CTP}}[J_+, J_-]}, \quad (2.43)$$

donde $U_J(t, t')$ es el operador evolución en presencia de la fuente J . Esta funcional generatriz puede representarse como una doble integral de camino mediante la introducción del conjunto de campos $\{\phi_+, \phi_-\}$,

$$Z_{\text{CTP}}[J_+, J_-] = \int \mathcal{D}\phi_+ \mathcal{D}\phi_- \exp \left[i \left(S[\phi_+] - S[\phi_-] + \int d^4x \sqrt{-g} [J_+ \phi_+ - J_- \phi_-] \right) \right], \quad (2.44)$$

con la condición de contorno $\phi_+(t, \vec{x})|_{t \rightarrow +\infty} = \phi_-(t, \vec{x})|_{t \rightarrow -\infty}$. Luego, tomando derivadas funcionales se pueden obtener valores de expectación, por ejemplo

$$\langle \text{in}, 0 | \phi(t, \vec{x}) | 0, \text{in} \rangle = \frac{\delta W_{\text{CTP}}[J_+, J_-]}{\delta J_+(x)} \Big|_{J_+=J_-=0} = -\frac{\delta W_{\text{CTP}}[J_+, J_-]}{\delta J_-(x)} \Big|_{J_+=J_-=0}, \quad (2.45)$$

en lugar de obtener elementos de matriz entre estados distintos como en la formulación IN-OUT. Una forma alternativa de implementar este formalismo es utilizando un solo campo pero extendiendo el dominio temporal sobre el cual se lo define, a la curva temporal cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$ [52]. Aquí, la rama \mathcal{C}_+ recorre el tiempo hacia adelante, mientras que \mathcal{C}_- lo recorre en sentido inverso. Luego, las integraciones temporales se extienden sobre todo el contorno

$$\int_{\mathcal{C}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{\mathcal{C}_+} - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{\mathcal{C}_-}, \quad (2.46)$$

donde el signo menos delante del segundo término se encarga de implementar los signos negativos delante de la acción $S[\phi_-]$ y el término de la fuente J_- en (2.44). Esta representación resulta más cómoda en manipulaciones formales de las integrales de camino, como las que se describirán en el capítulo 4.

De ahora en más, el símbolo $\langle \dots \rangle$ indica un valor de expectación IN-IN. A partir de los campos ϕ_+ y ϕ_- podemos construir los propagadores ordenados temporalmente en \mathcal{C} ,

$$\langle T_{\mathcal{C}} \phi_+(x) \phi_+(x') \rangle \equiv G_{++}(x, x') = G_F(x, x'), \quad (2.47a)$$

$$\langle T_{\mathcal{C}} \phi_+(x) \phi_-(x') \rangle \equiv G_{+-}(x, x') = G_<(x, x'), \quad (2.47b)$$

$$\langle T_{\mathcal{C}} \phi_-(x) \phi_+(x') \rangle \equiv G_{-+}(x, x') = G_>(x, x'), \quad (2.47c)$$

$$\langle T_{\mathcal{C}} \phi_-(x) \phi_-(x') \rangle \equiv G_{--}(x, x') = G_D(x, x'), \quad (2.47d)$$

donde identificamos los distintos propagadores (2.19), (2.18), (2.17) y (2.20) tiendo en cuenta que según el ordenamiento en \mathcal{C} , cualquier tiempo sobre la rama $-$ es posterior a cualquier tiempo en la rama $+$, y el recorrido en la rama $-$ va de tiempos mayores a tiempos menores.

En ciertos casos puede ser de utilidad pasar de la base de Wightman, donde tenemos los campos ϕ_+ y ϕ_- , a la llamada base de Keldysh con los campos ϕ_c y ϕ_{Δ} dados por el siguiente cambio de base

$$\begin{pmatrix} \phi_c \\ \phi_{\Delta} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_+ + \phi_-) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_+ - \phi_-) \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Las funciones de correlación entre estos nuevos campos son

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_c(x) \phi_c(x') \rangle & \langle \phi_c(x) \phi_{\Delta}(x') \rangle \\ \langle \phi_{\Delta}(x) \phi_c(x') \rangle & \langle \phi_{\Delta}(x) \phi_{\Delta}(x') \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_F(x, x') & G_<(x, x') \\ G_>(x, x') & G_D(x, x') \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G_1(x, x')}{2} & -iG_R(x, x') \\ -iG_A(x, x') & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

donde para llegar a la segunda igualdad hemos utilizado la relación $G_F + G_D = G_< + G_>$, e identificado los propagadores causales retardado y avanzado, respectivamente,

$$G_F(x, x') - G_<(x, x') = -iG_R(x, x'), \quad (2.50a)$$

$$G_F(x, x') - G_>(x, x') = -iG_A(x, x') = -iG_R(x', x). \quad (2.50b)$$

Una ventaja de utilizar esta base, es que la autocorrelación del campo ϕ_Δ es se anula por construcción, $\langle \phi_\Delta \phi_\Delta \rangle = 0$.

La presencia de los propagadores causales anuncia lo que será una propiedad general del formalismo CTP: las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de la acción efectiva CTP son reales y causales.

Capítulo 3

Efectos infrarrojos en De Sitter

Como ya hemos puntualizado, el espacio-tiempo de De Sitter es de interés tanto en la cosmología, por ser una buena aproximación a la etapa inflacionaria del universo temprano, como para el estudio de la teoría de campos en espacios curvos en general, por su gran número de simetrías que permite avanzar en los cálculos analíticos más allá que en la mayoría de los casos. En efecto, su alto grado de simetría permite definir de forma unívoca un vacío invariante, lo cual no es posible en general. Sin embargo, el tratamiento de campos cuánticos en esta geometría se encuentra con problemas cuando éstos son livianos o no masivos. Las funciones de correlación de un campo sin masa crecen indefinidamente con el tiempo cósmico, lo cual por un lado pone en duda el tratamiento semicásico dado que los efectos de backreaction pueden volverse importantes, mientras que por otro lado cuando el campo tiene una auto-interacción, se observa que dichos efectos empeoran orden a orden en la expansión en loops de la teoría de perturbaciones.

Existe consenso en que los efectos infrarrojos para campos no masivos tienen su origen en el hecho de que no existe un vacío invariante de De Sitter cuando la masa es estrictamente cero. Para campos masivos, por otra parte, existe un vacío invariante conocido como el vacío de Bunch-Davies. La presencia de una masa en este caso regula los efectos infrarrojos, pero sigue siendo un problema cuando la misma es suficientemente pequeña en relación a la curvatura, medida mediante la constante de Hubble H , y a la auto-interacción.

El objetivo de este capítulo es presentar este problema, el cual no es sino el problema central que nos interesa en esta tesis, para luego discutir en los capítulos posteriores las posibles soluciones y los métodos requeridos. Comenzaremos discutiendo sobre las propiedades del espacio-tiempo De Sitter y el propagador libre. Es en éste donde el origen del problema se hace

evidente. Luego calcularemos algunas funciones de correlación para establecer cómo la teoría de perturbaciones empeora la situación.

3.1. Simetrías del espacio-tiempo de De Sitter

El espacio-tiempo de De Sitter se caracteriza por tener tantas simetrías como el de Minkowski, es decir, 10 vectores de Killing. El otro caso es el del espacio-tiempo de anti-De Sitter. Juntos son los tres casos de curvatura escalar R constante, positiva, cero y negativa respectivamente, y se los conoce como geometrías maximamente simétricas. La métrica de De Sitter en el parche cosmológico o de Poincaré toma la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\vec{x}^2, \quad (3.1)$$

donde t es el tiempo cósmico y \vec{x} las coordenadas comóviles. El factor de escala $a(t) = e^{Ht}$ es exactamente exponencial, y H es constante, mientras que las hipersuperficies espaciales son planas. Estas coordenadas sólo cubren la mitad que se expande del espacio-tiempo de De Sitter. Esta métrica es conforme a la métrica plana, lo cual se hace explícito cambiando la coordenada temporal por el llamado tiempo conforme $\eta = \int dt/a(t)$. Así, la métrica se escribe

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2} [-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \quad (3.2)$$

con $\eta = -1/Ha(t)$. Si $-\infty < t < \infty$, entonces $-\infty < \eta < 0$. Una representación esquemática se da en la Figura 3.1a.

Otro conjunto de coordenadas interesantes son las denominadas coordenadas globales. Éstas, como su nombre lo indica, cubren todo el espacio-tiempo de De Sitter,

$$ds^2 = -dt^2 + H^{-2} \cosh(Ht)^2 d\Omega_3^2, \quad (3.3)$$

donde $d\Omega_3^2$ representa la métrica de una 3-esfera unitaria e indica el hecho que, en estas coordenadas, las hipersuperficies espaciales son cerradas ($K = 1$ en la ec. (1.1)) y por lo tanto, compactas. Estas coordenadas son representadas en la Figura 3.1b.

Las transformaciones de simetría de este espacio-tiempo están descriptas por el grupo de De Sitter, el cual tiene la misma cantidad de generadores que el grupo de Poincaré, quien describe las simetrías del espacio-plano. La invariancia ante este grupo de simetría, de ahora en más invariancia de De Sitter, juega un rol muy importante en el estudio de los campos cuánticos en esta geometría. En efecto, a diferencia de lo que ocurre en un espacio-tiempo

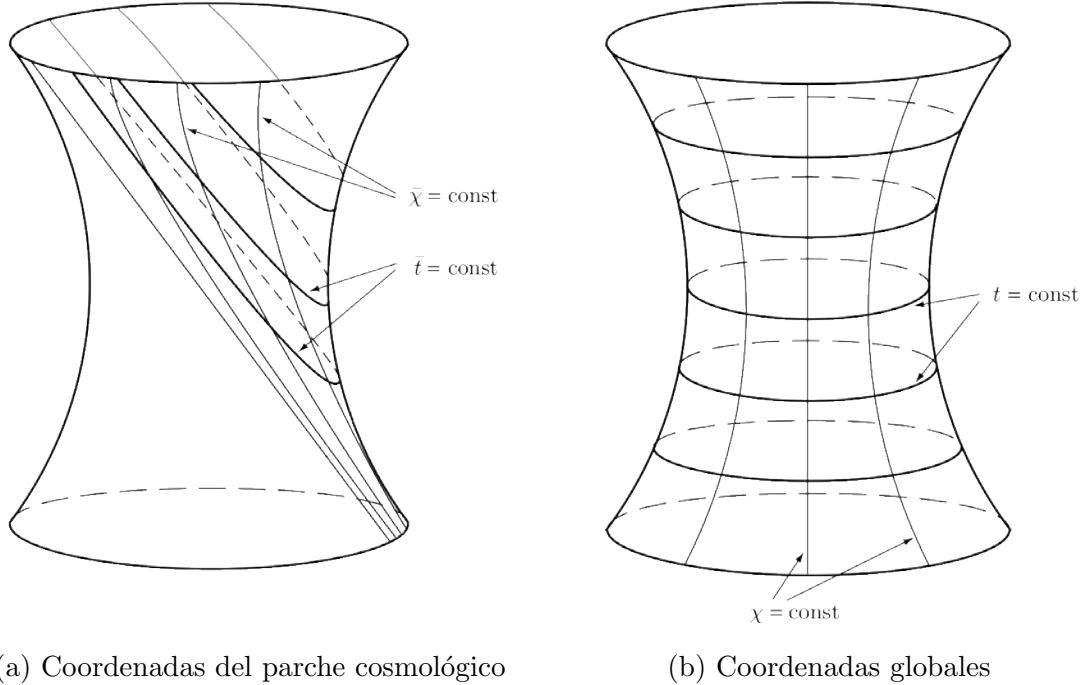


Figura 3.1: Representación de los distintos sistemas de coordenadas utilizados en el espacio-tiempo de De Sitter [7], el cual está representado como un hiperboloide embebido en un espacio-tiempo plano de 5 dimensiones.

curvo arbitrario donde no existe una definición unívoca de vacío, en De Sitter es posible definir un vacío invariante [13], conocido como el vacío de Bunch-Davies. Algunas técnicas buscan específicamente explotar estas simetrías, como ser la representación de momentos físicos [53]. Esperamos entonces que las ecuaciones del campo, los propagadores y las EES escritas en esta geometría sean invariantes, y por lo tanto existan soluciones que respeten esta simetría.

3.2. Divergencias infrarrojas

Los efectos infrarrojos se manifiestan en una primera instancia al estudiar los propagadores libres en De Sitter no masivos a tiempos largos, o cuando la masa del campo es mucho menor que la curvatura $m^2 \ll H^2$. Sin embargo, se puede argumentar que los campos libres son de poco interés práctico ya que los campos que utilizamos para la descripción de fenómenos naturales son interactuantes. Para incluir interacciones, el modelo prototípico de estudio es el de uno o varios (N) campos escalares con auto-interacción cuártica. En el caso de que sean más de uno, se considera en particular un modelo con simetría interna $O(N)$. La acción en general en d

dimensiones puede escribirse

$$S = - \int d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi_a (-\square + m^2 + \xi R) \phi_a + \frac{\lambda}{8N} (\phi_a \phi_a)^2 \right], \quad (3.4)$$

donde λ es la constante de acoplamiento y ϕ_a es un elemento de la representación adjunta del grupo $O(N)$, con $a = 1, \dots, N$, y está implícita la suma sobre índices repetidos. En el caso de estar considerando $N = 1$, típicamente se redefine por convención el término de interacción de la siguiente manera,

$$S_{int}(N = 1) \equiv - \int d^d x \sqrt{-g} \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.5)$$

El tratamiento perturbativo de las interacciones sólo parece agravar el problema, ya que las divergencias infrarrojas se vuelven peores orden a orden. En esta sección primero discutiremos el propagador libre, para luego realizar un conteo de potencias para cierto tipo de diagramas de Feynman para mostrar la invalidez del tratamiento perturbativo.

3.2.1. Campo libre masivo

En general los propagadores son funciones de dos puntos, x y x' . Sin embargo, dadas las simetrías del espacio-tiempo de De Sitter, los propagadores $G(x, x')$ sólo pueden depender de una distancia invariante $y(x, x')$. Si consideramos la distancia entre dos puntos x y x' en coordenadas conformes,

$$\Delta x^2 = -(\eta - \eta')^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2, \quad (3.6)$$

la distancia invariante se define como

$$y(x, x') = \frac{\Delta x^2}{\eta \eta'}. \quad (3.7)$$

Luego, en términos de $y(x, x')$ la ecuación de Klein-Gordon (2.16) toma la siguiente forma

$$a(x)^4 H^2 \left[4y \left(1 - \frac{y}{4} \right) \frac{d^2}{dy^2} - 2d \left(1 - \frac{y}{2} \right) \frac{d}{dy} + \frac{m^2 + d(d-1)H^2}{H^2} \right] G(y(x, x')) = -i\delta^d(\Delta x). \quad (3.8)$$

Las soluciones de esta ecuación son bien conocidas y pueden escribirse en términos de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ [11]

$$G(y(x, x')) = \frac{H^{d-2}}{(4\pi\mu^2)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2} + \nu_d\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2} - \nu_d\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} {}_2F_1\left(\frac{d-1}{2} + \nu_d, \frac{d-1}{2} - \nu_d; \frac{d}{2}; 1 - \frac{y}{4}\right), \quad (3.9)$$

donde $\nu_d^2 = \frac{(d-1)^2}{4} - \frac{m^2}{H^2} - \xi d(d-1)$ y $R = d(d-1)H^2$. Las las diferentes condiciones de contorno asociadas a las distintos propagadores CTP (2.47) se obtienen respectivamente a partir de las siguientes prescripciones [37]

$$\Delta x_F^2(x, x') = -(|\eta - \eta'| - i\epsilon)^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2, \quad (3.10a)$$

$$\Delta x_<^2(x, x') = -(\eta - \eta' + i\epsilon)^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2, \quad (3.10b)$$

$$\Delta x_>^2(x, x') = -(\eta - \eta' - i\epsilon)^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2, \quad (3.10c)$$

$$\Delta x_D^2(x, x') = -(|\eta - \eta'| + i\epsilon)^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2. \quad (3.10d)$$

Consideremos ahora la varianza del campo,

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{[G_1]}{2}. \quad (3.11)$$

Este límite de coincidencia puede evaluarse fácilmente a partir de (3.9) en $y = 0$ ($x = x'$). Por un lado, la invariancia de De Sitter asegura que el resultado no dependa del punto x , mientras que mantener $d \neq 4$ permite regular la divergencia ultravioleta usual asociada a este límite,

$$[G_1] = \frac{2H^{d-2}}{(4\pi\mu^2)^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2} + \nu_d\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2} - \nu_d\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu_d\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu_d\right)}, \quad (3.12)$$

donde hemos utilizado propiedades de la función ${}_2F_1$ para evaluar la expresión en términos de funciones Gamma. A partir de comparar esta expresión, expandiéndola en $\epsilon = d - 4$ al tiempo que se mantiene R fijo, con la expansión adiabática de la ecuación (2.30) y (2.31), se despeja la función $F_{ds}(m^2, R)$ para el espacio-tiempo de De Sitter. Dejamos el detalle de dicha comparación para el Apéndice A, cuyo resultado es

$$F_{ds}(m^2, R) = R f(m^2/R) = -\frac{R}{2} \left\{ \left(\frac{m^2}{R} + \xi - \frac{1}{6} \right) \left[\ln\left(\frac{R}{12m^2}\right) + g(m^2/R + \xi) \right] - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{18} \right\}, \quad (3.13)$$

con

$$g\left(\frac{\mathcal{M}^2}{R}\right) \equiv \psi_+ + \psi_- = \psi\left(\frac{3}{2} + \nu_4\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu_4\right), \quad (3.14)$$

donde $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ es la función DiGamma y $\nu_4 = \sqrt{9/4 - \mathcal{M}^2/H^2}$. A partir de ahora podemos y usar intercambiablemente R o H mediante su relación para $d = 4$, $R = 12H^2$. También hemos definido

$$\mathcal{M}^2 \equiv m^2 + \xi R, \quad (3.15)$$

dado que en De Sitter se tiene $R = cte$ y entonces el acomplamiento entre el campo y la curvatura actúa efectivamente como una masa. La función F_{dS} tiene todas las propiedades esperadas, es decir, es independiente de ϵ y $\tilde{\mu}$, y satisface los límites apropiados (2.32).

En el límite infrarrojo $\mathcal{M}^2 \ll H^2$ la función g tiene la siguiente dependencia en la masa,

$$g\left(\frac{\mathcal{M}^2}{R}\right) \simeq -\frac{3H^2}{\mathcal{M}^2} + \frac{11}{6} - 2\gamma_E + \frac{49}{108} \frac{\mathcal{M}^2}{H^2}. \quad (3.16)$$

Esto muestra la presencia de una divergencia asociada al límite $\mathcal{M}^2 \rightarrow 0$, es decir una divergencia infrarroja en $\langle\phi^2\rangle$. A diferencia de la divergencia ultravioleta, la divergencia infrarroja no puede ser absorbida en el proceso de renormalización, y por lo tanto tiene implicancias físicas. En efecto, ésta indica una amplificación de las fluctuaciones cuánticas cuando el campo es liviano. Al orden más bajo infrarrojo, la varianza del campo renormalizada resulta

$$\langle\phi^2\rangle_{IR} \simeq \frac{3H^2}{8\pi^2\mathcal{M}^2}. \quad (3.17)$$

Es claro que a partir de este resultado no es posible definir el límite no masivo.

3.2.2. Campo libre no masivo

Para llegar al resultado (3.17) se hizo una suposición fuerte que deja de ser válida en el límite $\mathcal{M} \rightarrow 0$, la existencia de un vacío invariante de De Sitter [13, 14]. En efecto, es posible definir un propagador no masivo para un campo libre, pero éste no será constante en el límite de coincidencia, sino que por el contrario dependerá del tiempo. En este caso resulta imprescindible recurrir al formalismo IN-IN.

Consideremos los propagadores CTP en la base de Keldysh (2.49), $G_1(x, x')$ y $G_R(x, x')$, usando una representación en el espacio de momento comóvil \vec{k} y el tiempo conforme

$$\langle\phi_c(\eta_1, \vec{x}_1)\phi_c(\eta_2, \vec{x}_2)\rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} G_1^{(0)}(k, \eta_1, \eta_2), \quad (3.18)$$

$$\langle\phi_c(\eta_1, \vec{x}_1)\phi_\Delta(\eta_2, \vec{x}_2)\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} G_R^{(0)}(k, \eta_1, \eta_2), \quad (3.19)$$

donde la invariancia ante traslaciones espaciales asegura una dependencia sólo en $k = |\vec{k}|$, y el supraíndice (0) en los propagadores es indicativo de que son no masivos.

Resolviendo la ecuación de Klein-Gordon sin masa (sin asumir que la solución sólo depende

de y), se encuentra la siguiente forma para los propagadores [15]

$$\begin{aligned} G_1^{(0)}(k, \eta_1, \eta_2) &= \frac{H^2}{k^3} \left[(1 + k^2 \eta_1 \eta_2) \cos [k(\eta_1 - \eta_2)] + k(\eta_1 - \eta_2) \sin [k(\eta_1 - \eta_2)] \right] \\ &\simeq \frac{H^2}{k^3} (1 + \mathcal{O}[(k\eta_i)^2]), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde en la segunda línea aproximamos la expresión para modos de longitud de onda muy grande comparada con el horizonte de Hubble, $k/aH = -k\eta \ll 1$, o también denominados modos superhorizonte. Notar que esta condición es equivalente a estudiar tiempos largos $\eta \rightarrow 0^-$. De manera similar para el propagador retardado tenemos

$$\begin{aligned} G_R^{(0)}(k, \eta_1, \eta_2) &= \theta(\eta_1 - \eta_2) \frac{H^2}{k^3} \left[(1 + k^2 \eta_1 \eta_2) \sin [k(\eta_1 - \eta_2)] - k(\eta_1 - \eta_2) \cos [k(\eta_1 - \eta_2)] \right] \\ &\simeq \theta(\eta_1 - \eta_2) \frac{H^2}{3} (\eta_1^3 - \eta_2^3) (1 + \mathcal{O}[(k\eta_i)^2]). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es importante notar la diferencia de comportamiento entre ambos propagadores para modos infrarrojos. El primero escalea como k^{-3} mientras que el retardado como k^0 , por lo cual los efectos infrarrojos estarán dominados por el primero. En efecto, si ahora volvemos al espacio de posiciones y consideramos la varianza del campo evaluando (3.18) en puntos espaciales y tiempos coincidentes, $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ y $\eta_1 = \eta_2 = \eta$,

$$\langle \phi^2(\eta) \rangle \simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{H^2}{2p^3} = \frac{H^2}{4\pi^2} \log \left(\frac{\Lambda_{UV}}{\Lambda_{IR}} \right), \quad (3.22)$$

donde Λ_{UV} es un cutoff ultravioleta y Λ_{IR} uno infrarrojo. Ambos son en momento físico $p = -k\eta$. De aquí podemos ver que la varianza crece con el tiempo, en efecto, si consideramos la dependencia a tiempos largos $\eta \rightarrow 0^-$, la misma tiene una contribución divergente

$$\langle \phi^2(\eta) \rangle \simeq \frac{H^2}{4\pi^2} \log \left(-\frac{1}{H\eta} \right) = \frac{H^2}{4\pi^2} \log(a(t)) = \frac{H^3 t}{4\pi^2}, \quad (3.23)$$

donde en las últimas dos igualdades volvimos al tiempo cósmico.

Por completitud, podemos recuperar el resultado para el campo masivo en este formalismo. En este caso los propagadores ahora toman una forma diferente. Directamente en el límite de modos superhorizonte,

$$G_1^{(\mathcal{M})}(k, \eta_1, \eta_2) = \frac{H^2}{k^3} (k^2 \eta_1 \eta_2)^{\epsilon_0}, \quad (3.24)$$

$$G_R^{(\mathcal{M})}(k, \eta_1, \eta_2) = \theta(\eta_1 - \eta_2) \frac{H^2}{3} (\eta_1^{3-\epsilon_0} \eta_2^{\epsilon_0} - \eta_1^{\epsilon_0} \eta_2^{3-\epsilon_0}), \quad (3.25)$$

donde $\epsilon_0 = \mathcal{M}^2/3H^2$. Volviendo a calcular la varianza se obtiene que,

$$\langle \phi^2 \rangle \sim \int \frac{dp}{p} \left(\frac{H}{p} \right)^{-2\epsilon_0} \sim \frac{3H^2}{2\mathcal{M}^2} \left(\frac{\Lambda_{UV}}{H} \right)^{2\epsilon_0}, \quad (3.26)$$

donde evaluamos $\Lambda_{IR} \rightarrow 0$. Obviamente la divergencia ultravioleta asociada con $\Lambda_{UV} \rightarrow \infty$ debe ser compensada con un contratérmino de manera usual. Este resultado muestra como la presencia de una masa regula la divergencia infrarroja.

3.2.3. Campo interactuante y correcciones perturbativas

Empecemos por considerar la acción (3.4) para $N = 1$ (es decir, con la normalización de λ dada por (3.5)) en el formalismo IN-IN. La acción de interacción en términos de los campos ϕ_+ y ϕ_- es

$$S_{int}(\phi_+) - S_{int}(\phi_-) = - \int d^d x \sqrt{-g} \frac{\lambda}{4!} (\phi_+^4 - \phi_-^4) = - \int d^d x \sqrt{-g} \frac{\lambda}{12} (\phi_c^3 \phi_\Delta + \phi_c \phi_\Delta^3), \quad (3.27)$$

donde en la segunda igualdad pasamos a la base de Keldysh (2.48). A estos vértices hay que complementarlos con la siguiente regla de Feynman,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{d\eta}{H^4 \eta^4} (2\pi)^3 \delta^3(p), \quad (3.28)$$

con p la suma de los momentos entrantes al vértice. Consideremos como ejemplo las correcciones de loop a la varianza del campo provenientes del conjunto particular de diagramas de Feynman formados por una cadena de tadpoles, como se muestra en la Figura 3.2. Existen por supuesto

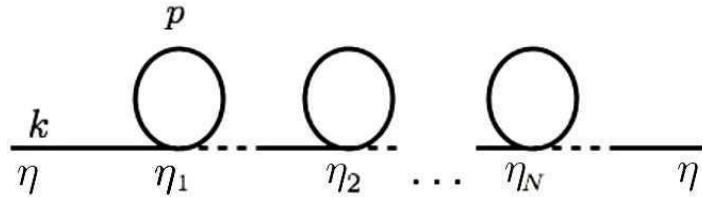


Figura 3.2: Clase de diagramas con la contribución más infrarroja a ${}^{(L)}G_1(k, \eta, \eta)$. Las líneas sólidas corresponden al campo ϕ_c , mientras que aquellas intermitentes al campo ϕ_Δ

otras contribuciones a un determinado número de loops $L > 1$, pero esta contribución es la que exhibe el comportamiento infrarrojo más divergente. La contribución a 1-loop toma la siguiente forma,

$${}^{(1)}G_1(k, \eta, \eta) = -\lambda \int_{-\infty}^0 \frac{d\eta'}{H^4 \eta'^4} G_1(k, \eta, \eta') G_R(k, \eta', \eta) \Lambda(\eta'), \quad (3.29)$$

donde $\Lambda(\eta')$ es un factor de loop dado por la siguiente expresión,

$$\Lambda(\eta') = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} G_1(k, \eta', \eta') \simeq \frac{3H^2}{2\mathcal{M}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\mu}{H}\right)^{2\epsilon_0}, \quad (3.30)$$

con μ alguna escala no infrarroja. Se puede ver entonces que la corrección a 1-loop, en el límite infrarrojo, toma la forma

$${}^{(1)}G_1(k, \eta, \eta) = \frac{\lambda H^2}{2(2\pi)^2 \mathcal{M}^2} G_1(k, \eta, \eta) \left(\frac{\mu}{H}\right)^{2\epsilon_0} \log(-k\eta), \quad (3.31)$$

donde lo importante es notar que es proporcional a $G_1(k, \eta, \eta)$, con un factor que va como $\lambda H^2/\mathcal{M}^2$. Si ahora considerasemos la contribución equivalente a L -loops, veríamos que esa misma factorización se da a cada loop. Por lo tanto, tendríamos un resultado del tipo

$${}^{(L)}G_1(k, \eta, \eta) = G_1(k, \eta, \eta) \left[\frac{\lambda H^2}{2(2\pi)^2 \mathcal{M}^2} \left(\frac{\mu}{H}\right)^{2\epsilon_0} \log(-k\eta) \right]^L. \quad (3.32)$$

Es decir, el factor de esta corrección a L -loops va como

$$\left(\frac{\lambda H^2}{4\pi^2 \mathcal{M}^2} \right)^L, \quad (3.33)$$

y por lo tanto las divergencias infrarrojas empeoran loop a loop. Es más, para valores de masa $\mathcal{M}^2 \lesssim \lambda H^2$ la teoría de perturbaciones directamente no es válida, siendo cada corrección de loop más grande que la anterior.

Este análisis muestra que el tratamiento perturbativo resulta insuficiente para el estudio de los efectos cuánticos en De Sitter en el límite infrarrojo. Por lo tanto, es necesario recurrir a métodos que permitan capturar, aunque sea en parte, los efectos no perturbativos. Más específicamente, al realizar una resumación (ver por ejemplo [15], donde se logra apelando a técnicas del grupo de renormalización dinámico) se obtiene una contribución a la auto-energía que cambia la masa efectiva que aparece en la ecuación del propagador. Este efecto se conoce como "generación dinámica de masa", y tiene como consecuencia que el propagador no exhiba divergencias infrarrojas, tal como sucede con campos masivos.

En el próximo capítulo y los dos subsiguientes, consideraremos el formalismo de la acción efectiva 2PI [23], una reformulación muy difundida de la teoría de campos con varias aplicaciones en general. Posteriormente, en los capítulos 7 y 8 discutiremos otro tipo de métodos no perturbativos que surgen de las propiedades particulares del espacio-tiempo de De Sitter, y que son especialmente aptos para investigar los efectos infrarrojos. Éstos son, el formalismo de inflación estocástica [17] y la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo [39, 40]. Por supuesto, existen otros métodos no perturbativos como ser el grupo de renormalización dinámico [54], que no discutiremos en esta tesis.

Capítulo 4

Métodos no perturbativos en teoría cuántica de campos en espacios curvos: la aproximación de Hartree y la expansión $1/N$

En este capítulo nos ocuparemos del formalismo de la acción efectiva 2PI, y en particular consideraremos la aproximación de Hartree. Esta es una truncación local de la acción efectiva 2PI en la cual la masa del propagador se obtiene como una solución autoconsistente de la ecuación resumada de la masa dinámica, y es positiva. Se trata, sin embargo, de una truncación no sistemática y por lo tanto debe implementarse un procedimiento de renormalización consistente para recuperar ciertas propiedades de la teoría exacta [29].

Primero generalizaremos la renormalización consistente a espacios curvos generales, prestando particular atención a la elección del punto de renormalización. Luego, definiremos los parámetros renormalizados a partir del potencial efectivo, para finalmente obtener la ecuación para la masa dinámica en términos de los mismos.

Los resultados presentados en este capítulo a partir de la subsección 4.2.1 en adelante, están basados en la Ref. [30].

4.1. Formalismo de la Acción Efectiva Irreducible de 2 Partículas

Este es un formalismo dentro de la teoría cuántica de campos originalmente desarrollado en [23], usualmente abreviado 2PI por sus siglas en inglés, que representa una generalización del concepto de acción efectiva usual o 1PI. En éste último, la acción efectiva $\Gamma[\bar{\phi}]$ se calcula como una funcional del valor medio del campo $\bar{\phi} = \langle \phi \rangle$. En contraste, en el formalismo 2PI las funciones de 1 y 2 puntos, $\bar{\phi}$ y $G(x, x') = \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle$ ($\varphi = \phi - \bar{\phi}$) respectivamente, son consideradas como grados de libertad independientes. Se obtiene así una acción efectiva $\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G]$ como funcional de ambas.

El resultado de este proceso es la resumación de un subconjunto infinito de diagramas de Feynman (todos los reducibles de 2 partículas) a costa de tener una ecuación de movimiento adicional asociada al nuevo grado de libertad. Es esta resumación la que le da potencialidad a este formalismo para estudiar efectos no perturbativos.

A continuación repasaremos primero la construcción de la Acción Efectiva 1PI, para luego generalizar el proceso y así obtener la Acción Efectiva 2PI. En todo lo que sigue, la utilización del formalismo IN-IN se deja implícita mediante la inclusión del subíndice \mathcal{C} en las integrales temporales, indicando que las mismas están definidas sobre el camino temporal cerrado \mathcal{C} , ec. (2.46), así como también se entiende que todas las funciones del tiempo están también definidas sobre \mathcal{C} . Por último, los propagadores se entienden como el valor de expectación del producto $T_{\mathcal{C}}$ -ordenado de dos campos.

4.1.1. Acción Efectiva 1PI

El concepto de la acción efectiva se basa en la idea de promediar el efecto que las fluctuaciones cuánticas tienen sobre la evolución del valor medio del campo. Para ello se plantea una separación del campo en valor medio y fluctuación, $\phi = \bar{\phi} + \varphi$, y luego se resuelve la integral de camino sobre la fluctuación φ . El resultado es una funcional $\Gamma[\bar{\phi}]$ que cumple el rol de una funcional de acción, es decir, su condición de extremo lleva a las ecuaciones de movimiento semicuánticas para el valor medio del campo $\bar{\phi}$.

Comenzando con una acción clásica $S[\phi]$, la funcional generatriz de las funciones de correlación cuánticas es,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \left(S[\phi] + \int_{\mathcal{C}} d^4x \sqrt{-g} J_a(x) \phi_a(x) \right) \right] = e^{iW[J]}, \quad (4.1)$$

donde el índice a representa cualquier tipo de índice asociado a la representación de algún grupo de simetría interna y la suma sobre indices repetidos esta implícita. Tener en cuenta que todas las funcionales tienen una dependencia en $g^{\mu\nu}$ que no se denota explícitamente. La segunda igualdad define a la funcional generatriz de los diagramas conectados $W[J] = -i \log(Z[J])$, de manera que el valor medio del campo en presencia de una fuente extrema J es,

$$\bar{\phi}[J] = \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi \exp [i(S[\phi] + \int_x J_a \phi_a)]}{\int \mathcal{D}\phi \exp [i(S[\phi] + \int_x J_a \phi_a)]} = \langle \phi \rangle_J, \quad (4.2)$$

donde abreviamos $\int_C d^4x \sqrt{-g} = \int_x$. Se define la acción efectiva como la transformada de Legendre de $W[J]$,

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int_C d^4x \sqrt{-g} J_a(x) \bar{\phi}_a(x), \quad (4.3)$$

de donde también resulta que,

$$J_a[\bar{\phi}] = -\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_a}. \quad (4.4)$$

Eventualmente, evaluando en $J = 0$ se obtienen las ecuaciones de movimiento para los $\bar{\phi}_a$,

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_a} = 0. \quad (4.5)$$

Hasta aquí sólo se ha reformulado el problema original en términos de otra variable. La acción efectiva contiene la información completa de la teoría cuántica a través de las funciones vértice irreducibles de una partícula,

$$\left. \frac{\delta^n \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_{a_1}(x_1) \dots \delta \bar{\phi}_{a_n}(x_n)} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}^*}, \quad (4.6)$$

donde $\bar{\phi}^*$ es la solución de (4.5).

Para sacar provecho de estas manipulaciones, es necesario encontrar una representación para la acción efectiva que nos permita calcularla de forma perturbativa. El procedimiento estándar consiste en expandir (4.3) en la fluctuación φ y luego realizar las integraciones funcionales sobre la misma. El resultado es

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\bar{\phi}] - \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln(A^{-1})] + \Gamma_1[\bar{\phi}], \quad (4.7)$$

donde $\Gamma_1[\bar{\phi}]$ es $-i$ veces la suma de los diagramas de vacío 1PI con propagador A_{ab}^{-1} , definido por

$$iA_{ab}(x, x') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(x')} \frac{1}{\sqrt{-g'}} \bigg|_{\phi=\bar{\phi}}, \quad (4.8)$$

y vértices dados por la acción de interacción desplazada $S_{int}^F[\bar{\phi}, \varphi]$, obtenida de colectar los términos de orden cúbico o mayores en φ que surgen de expandir $S[\bar{\phi} + \varphi]$. Estos diagramas son aquellos que permanecen conectados al cortarles una línea interna, de ahí su nombre de irreducibles de una partícula, o 1PI.

Esta representación de la acción efectiva nos da la interpretación de que la misma consiste en una parte clásica corregida por efectos cuánticos. El segundo término de (4.7) involucra la corrección a 1-loop, mientras que las correcciones de dos o más loops están contenidas en $\Gamma_1[\bar{\phi}]$.

A modo de ejemplo, en el caso de la teoría $\lambda\phi^4$ dada por la acción (3.4) con $N = 1$ (recordar el cambio de definición de λ respecto al caso $O(N)$) los elementos que debemos utilizar para construir $\Gamma_1[\bar{\phi}]$ son el propagador A^{-1} (para $N = 1$ no tenemos índices ab) que satisface

$$\left(-\square + m^2 + \xi R + \frac{\lambda}{2} \bar{\phi}^2 \right) A^{-1}(x, x') = -i \frac{\delta^d(x - x')}{\sqrt{-g}}, \quad (4.9)$$

y los vértices provenientes de la acción de interacción desplazada,

$$S_{int}^F[\bar{\phi}, \varphi] = -\frac{\lambda}{6} \int_C d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} \varphi^4 + \bar{\phi} \varphi^3 \right]. \quad (4.10)$$

Entonces, las primeras contribuciones a $\Gamma_1[\bar{\phi}]$ son como las que se muestran en la Figura 4.1.

$$\Gamma_1 = -i \left(\begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 1 loop} \\ + \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 2 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 3 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 4 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 5 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 6 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 7 loops} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagrama 1PI de 8 loops} \\ + \end{array} \left. \dots \right)$$

Figura 4.1: Primeros diagramas de vacío irreducibles de una partícula que contribuyen a la acción efectiva 1PI en la teoría $\lambda\phi^4$. Éstos se construyen con los vértices dados por (4.10) y utilizando en las líneas internas el propagador A^{-1} que satisface (4.9).

4.1.2. Acción Efectiva 2PI

Con el fin de generalizar los conceptos anteriores para incluir a la función de 2-puntos exacta $G_{ab}(x, x')$ como un grado de libertad independiente a $\bar{\phi}_a$, además de una fuente local $J_a(x)$ se

introduce una fuente no local $K_{ab}(x, x')$,

$$\begin{aligned} Z[J, K] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \left(S[\phi] + \int_x J_a(x) \phi_a(x) + \frac{1}{2} \iint_{x, x'} \phi_a(x) K_{ab}(x, x') \phi_b(x') \right) \right] \\ &= e^{iW[J, K]}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde ahora el valor medio del campo y la función de 2-puntos se determinan a partir de $W[J, K]$ mediante las siguientes relaciones,

$$\bar{\phi}_a = \frac{\delta W[J, K]}{\delta J_a}, \quad (4.12)$$

$$G_{ab}(x, x') = 2 \frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{ab}(x, x')} - \bar{\phi}_a(x) \bar{\phi}_b(x'). \quad (4.13)$$

En este caso, la acción efectiva 2PI es la doble transformada de Legendre de $W[J, K]$,

$$\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = W[J, K] - \int_x J_a(x) \bar{\phi}_a(x) - \frac{1}{2} \iint_{x, x'} K_{ab}(x, x') [G_{ab}(x, x') + \bar{\phi}_a(x) \bar{\phi}_b(x')]. \quad (4.14)$$

Luego, variando la expresión anterior respecto de $\bar{\phi}_a$ y $G_{ab}(x, x')$ respectivamente obtenemos

$$\frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}_a(x)} = -J_a(x) - \frac{1}{2} \int_{x'} [K_{ab}(x, x') + K_{ba}(x', x)] \bar{\phi}_b(x'), \quad (4.15)$$

$$\frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G]}{\delta G_{ab}(x, x')} = -\frac{1}{2} K_{ab}(x, x'), \quad (4.16)$$

de donde las ecuaciones de movimiento se obtienen nuevamente anulando las fuentes externas $J = 0$ y $K = 0$. Volviendo a la acción efectiva, combinando las expresiones anteriores puede expresarse como,

$$\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = -i \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \tilde{S} \right] \right\}, \quad (4.17)$$

donde el exponente se lee,

$$\tilde{S} \equiv S[\phi] + \int_x J_a(x) \varphi_a(x) - \frac{1}{2} \iint_{x, x'} K_{ab}(x, x') [\phi_a(x) \phi_b(x') - \bar{\phi}_a(x) \bar{\phi}_b(x') - G_{ab}(x, x')]. \quad (4.18)$$

Por un lado podemos reescribir este exponente realizando algunas manipulaciones y luego usando las relaciones anteriores para $J_a[\bar{\phi}, G]$ y $K_{ab}[\bar{\phi}, G]$,

$$\tilde{S} = S[\bar{\phi} + \varphi] - \int_x \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta \bar{\phi}_a(x)} \varphi_a(x) + \iint_{x, x'} \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta G_{ab}(x, x')} \left[G_{ab}(x, x') - \frac{1}{2} \varphi_a(x) \varphi_b(x') \right], \quad (4.19)$$

mientras que por otro lado expandimos la acción clásica en φ ,

$$S[\bar{\phi} + \varphi] = S[\bar{\phi}] + \int_x \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_a(x)} \Bigg|_{\phi=\bar{\phi}} \varphi_a(x) + \frac{1}{2} \iint_{x,x'} \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(x')} \Bigg|_{\phi=\bar{\phi}} \varphi_a(x) \varphi_b(x') + S_{int}^F[\bar{\phi}, \varphi]. \quad (4.20)$$

Posteriormente reemplazando en (4.17) podemos sacar algunos términos fuera del logaritmo,

$$\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = S[\bar{\phi}] + \iint_{x,x'} \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta G_{ab}(x, x')} G_{ab}(x, x') - i \ln \left\{ \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \Delta \tilde{S} \right] \right\}, \quad (4.21)$$

donde ahora el exponente del último término es,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{S} = & \int_x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta \bar{\phi}_a(x)} \right) \varphi_a(x) + \iint_{x,x'} \varphi_a(x) \left(\frac{i}{2} A_{ab}(x, x') - \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta G_{ab}(x, x')} \right) \varphi_b(x') \\ & + S_{int}^F[\bar{\phi}, \varphi]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente podemos expresar el argumento del logaritmo en (4.17), llegando a

$$\begin{aligned} \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = & S[\bar{\phi}] + \frac{i}{2} \text{Tr}(AG) \\ & - i \ln \left\{ \left(\int \mathcal{D}\varphi e^{i \frac{1}{2} \varphi^a i G_{ab}^{-1} \varphi^b} \right) \times \left(\frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \left[\frac{1}{2} \varphi^a i G_{ab}^{-1} \varphi^b + S_{int}^F[\bar{\phi}, \varphi] \right]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \frac{1}{2} \varphi^a i G_{ab}^{-1} \varphi^b}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

es decir

$$\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = S[\bar{\phi}] + \frac{i}{2} \text{Tr}(AG) + \frac{i}{2} \text{Tr}[\ln(G^{-1})] + \Gamma_2[\bar{\phi}, G], \quad (4.24)$$

donde el tercer y cuarto término corresponden al logaritmo de cada uno de los factores dentro del logaritmo de la segunda línea de la expresión anterior respectivamente. El último término $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ es $-i$ veces la suma de los diagramas de vacío irreducibles de dos partículas, con propagador G y vértices dados por S_{int}^F . Estos diagramas, conocidos como 2PI, son todos aquellos que permanecen conectados luego de cortarles dos líneas internas.

Nuevamente tomamos como ejemplo a la teoría $\lambda \phi^4$ con $N = 1$, para la cual los primeras contribuciones a $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ se muestran en la Figura 4.2.

De aquí en adelante utilizaremos una parametrización para la acción efectiva 2PI alternativa a (4.24) pero consistente con [29], ya que luego a partir de la sección 4.1.4 utilizaremos algunos resultados de dicha referencia. Ésta es

$$\Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = S_0[\bar{\phi}] + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(G^{-1}) + \frac{i}{2} \text{Tr}(G_0^{-1}G) + \Gamma_{int}[\bar{\phi}, G], \quad (4.25)$$

$$\Gamma_2 = -i \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \right)$$

Figura 4.2: Primeros diagramas de vacío irreducibles de dos partículas que contribuyen a la acción efectiva 2PI en la teoría $\lambda\phi^4$. Éstos se construyen con los vértices dados por (4.10) y utilizando en las líneas internas el propagador exacto G . Notar que estos diagramas son un subconjunto de aquellos de la Fig. 4.1 (los de la segunda línea de dicha figura son 1PI).

donde S_0 es la parte cuadrática de la acción clásica S sin ningún contratérmino y

$$i(G_0^{-1})_{ab}(x, x') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S_0[\bar{\phi}]}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(x')} \frac{1}{\sqrt{-g'}}. \quad (4.26)$$

La parte definida como de interacción esta dada por

$$\Gamma_{int}[\bar{\phi}, G] = S_{int}[\bar{\phi}] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\delta^2 S_{int}}{\delta \bar{\phi} \delta \bar{\phi}} G \right] + \Gamma_2[\bar{\phi}, G], \quad (4.27)$$

donde $S_{int} = S - S_0$, distinta a S_{int}^F , y la funcional $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ es aquella definida anteriormente.

4.1.3. Relación entre las acciones efectivas 1PI y 2PI

Consideremos las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de la acción efectiva 2PI, pidiendo la condición de extremo respecto a variaciones de $\bar{\phi}$ o G ,

$$\frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}_a} = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G]}{\delta G_{ab}} = 0. \quad (4.29)$$

Podemos comprobar que a partir de la acción efectiva 2PI y de estas ecuaciones podemos recuperar la acción efectiva 1PI. En efecto, resolviendo la ecuación (4.29), obtendremos al propagador exacto G como funcional de $\bar{\phi}$, $G[\bar{\phi}]$. Si ahora reemplazamos esta solución en la acción efectiva 2PI, obtenemos una funcional solo de $\bar{\phi}$ que podemos identificar con la acción efectiva 1PI,

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G[\bar{\phi}]]. \quad (4.30)$$

Para convencernos de esta relación, podemos comprobar que la solución del sistema de ecuaciones (4.28) y (4.29) extremiza (4.30), en efecto,

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_a(x)} = \frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G[\bar{\phi}]]}{\delta \bar{\phi}_a(x)} + \iint_{x', x''} \frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G[\bar{\phi}]]}{\delta G_{bc}(x', x'')} \frac{\delta G_{bc}(x', x'')}{\delta \bar{\phi}_a(x)} = 0. \quad (4.31)$$

Esto muestra la equivalencia entre ambas formulaciones del problema exacto. La diferencia surge, sin embargo, al considerar truncaciones de las expansiones diagramáticas de las acciones efectivas, dado que en un caso los diagramas involucran al propagador libre G_0 , mientras que en otro al propagador exacto G . De esta forma, cada diagrama 2PI de la expansión de $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ contiene una resumación de un subconjunto infinito de los diagramas 1PI de la expansión de $\Gamma_1[\bar{\phi}]$. Estos son precisamente aquellos diagramas que visten al propagador.

4.1.4. Relaciones de Consistencia

Como se ha discutido en la subsección anterior, ambas formulaciones 1PI y 2PI son equivalentes. Sin embargo en el segundo caso se tiene un grado de libertad adicional respecto al primero. Esto conduce a ciertas relaciones de consistencia que reflejan la redundancia de esta descripción, que pueden ser expresadas en términos de las funciones de 2 y 4 puntos. En el formalismo 2PI hay varias formas de construir estas funciones según se tomen variaciones funcionales de la acción efectiva 2PI con respecto de $\bar{\phi}$ o G , pero que en última instancia no pueden ser independientes. En el caso particular de teorías con simetría Z_2 , es decir $\phi \rightarrow -\phi$, se ha mostrado en [29] que estas relaciones toman la siguiente forma,

$$\frac{\delta^2 \Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}_a(x) \delta \bar{\phi}_b(x')} \bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0} = 2 \frac{\delta \Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]}{\delta G_{ab}(x, x')} \bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0}, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_a(x_1) \delta \bar{\phi}_b(x_2) \delta \bar{\phi}_c(x_3) \delta \bar{\phi}_d(x_4)} \bigg|_{\bar{\phi}=0} &= 2 \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]}{\delta G_{ab}(x_1, x_2) \delta G_{cd}(x_3, x_4)} \bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0} + \text{perms}(a, b, c, d) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\delta^4 \Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]}{\delta \bar{\phi}_a(x_1) \delta \bar{\phi}_b(x_2) \delta \bar{\phi}_c(x_3) \delta \bar{\phi}_d(x_4)} \bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $\bar{G} = G[\bar{\phi}]$ es la solución de (4.29). Estas relaciones se derivan de las relaciones exactas entre las acciones efectivas 1PI y 2PI descriptas anteriormente (ver Apéndice B).

En una dada truncación sistemática de $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$, las relaciones de consistencia se satisfacen hasta el orden relevante de expansión, con posibles violaciones de orden superior. Por otra parte, como veremos en la próxima sección, por diversas razones podría ser de interés algún tipo de truncación que no cuente con un parámetro pequeño que controle la expansión. En este caso, las relaciones de consistencia podrían no satisfacerse y nos encontraríamos ante un problema

para definir los observables de la teoría. ¿Cuál sería la definición correcta de la función de 2-puntos si hay dos formas no equivalentes de calcularla? Esto conduce a la conclusión de que es imperativo forzar de alguna manera la validez de estas relaciones de consistencia en la ausencia de una expansión sistemática. Veremos que un paso crucial del procedimiento consistente de renormalización de [29] es imponer estas relaciones en un determinado punto de renormalización (que elegimos $\bar{\phi} = 0$), para lo cual es necesaria la introducción de más de un contratérmino diferente por cada parámetro de la acción clásica de partida.

4.2. Aproximación de Hartree

Aunque estemos considerando un esquema en el cual hay una resumación infinita de diagramas, no podemos calcular la acción efectiva completa porque todavía tendríamos que hacer una suma infinita de los diagramas 2PI de vacío en el término Γ_2 . Por lo tanto, debemos recurrir a algún tipo de aproximación. Al orden más bajo podemos descartar completamente el término Γ_2 , lo que corresponde a la aproximación de 1-loop y en este caso no hay diferencia con la acción efectiva 1PI. Esto es porque los diagramas de vacío 2PI comienzan a 2-loops, y es a partir de este orden en adelante que la acción efectiva 2PI da resultados no triviales comparada con la acción efectiva 1PI. Con la acción desplazada dada por la ecuación (4.10), existen dos diagramas que contribuyen a 2-loops. Estos son la doble burbuja y el atardecer y se muestran en la Figura 4.3.

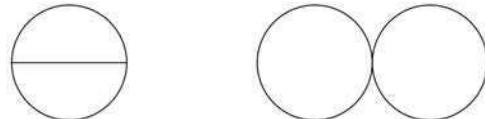


Figura 4.3: Diagramas de vacío 2PI a 2-loops: el “atardecer” (a la izquierda) y la “doble burbuja” (a la derecha).

La aproximación de Hartree consiste en conservar sólamente la contribución local (diagrama de la doble burbuja). Este diagrama, al estar construido con el propagador exacto, contiene una suma infinita de los diagramas denominados “daisy” y super-“daisy” (margarita en inglés) de la teoría perturbativa estándar. En el caso de un solo campo, es decir $N = 1$, ambos diagramas de la Figura 4.3 son del mismo orden. Dado el carácter no sistemático de esta truncación, las relaciones de consistencia dejan de satisfacerse en general. Por otro lado, en el caso de un modelo con simetría $O(N)$ esta aproximación resulta exacta en el límite de $N \rightarrow \infty$, ya que el

diagrama no local resulta de orden superior en $1/N$ con respecto al diagrama local. En ese caso las relaciones de consistencia se cumplen automáticamente orden a orden. Por el momento nos concentraremos en el caso $N = 1$, volviendo sobre el modelo $O(N)$ sobre el final del capítulo.

La acción efectiva 2PI en la aproximación de Hartree toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G] = & - \int_C d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \bar{\phi} (-\square + m_{B2}^2 + \xi_{B2} R) \bar{\phi} + \frac{1}{4!} \lambda_{B4} \bar{\phi}^4 \right] + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(G^{-1}) \\ & - \frac{1}{2} \int_C d^d x \sqrt{-g} \left[-\square + m_{B0}^2 + \xi_{B0} R + \frac{1}{2} \lambda_{B2} \bar{\phi}^2 \right] G(x, x) \\ & - \frac{\lambda_{B0}}{8} \int_C d^d x \sqrt{-g} G^2(x, x), \end{aligned} \quad (4.34)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento del valor medio del campo y del propagador exacto, obtenidas extremizando esta acción respecto de variaciones de $\bar{\phi}$ y G respectivamente, toman la siguiente forma en la misma aproximación

$$\left(-\square + m_{B2}^2 + \xi_{B2} R + \frac{\lambda_{B4}}{6} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_{B2}}{2} [G] \right) \bar{\phi}(x) = 0, \quad (4.35)$$

$$\left(-\square + m_{B0}^2 + \xi_{B0} R + \frac{\lambda_{B2}}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_{B0}}{2} [G] \right) G(x, x') = -i \frac{\delta^d(x - x')}{\sqrt{-g'}}, \quad (4.36)$$

donde $[G] = [G_1]/2 = \langle \varphi^2 \rangle$. Aquí es importante remarcar que dado el carácter local de estas ecuaciones (la ausencia de integrales espacio-temporales), se pierde la distinción entre el formalismo de camino temporal cerrado (o IN-IN) y el formalismo usual IN-OUT [48]. En consecuencia, la ecuación del propagador es válida de forma independiente para cualquiera de los propagadores del formalismo IN-IN (2.47).

Estas ecuaciones contienen divergencias provenientes del límite de coincidencia $[G] = G(x, x)$ del propagador, las cuales deberán tratadas mediante el proceso de renormalización. En la acción efectiva 2PI (4.34) hemos incorporado varios contratérminos diferentes asociados a un mismo parámetro de la acción clásica, lo cual es denotado mediante distintos subíndices en los parámetros desnudos que indican la cantidad de potencias de $\bar{\phi}$ en el término correspondiente en (4.34). En la referencia [29], los autores desarrollaron un procedimiento de renormalización consistente en espacio plano, el cual toma esta ambigüedad y la explota para ajustar cómo cada diagrama contribuye a la cancelación de las divergencias. Esto a su vez resulta un punto crucial para lograr que el procedimiento de renormalización respete la validez de las relaciones de consistencia de la teoría, al menos cerca del punto de renormalización. Nuevamente, en el caso del límite de N grande del modelo $O(N)$, dichos contratérminos resultan naturalmente iguales.

En la próxima subsección, generalizaremos dicho procedimiento a espacios curvos generales. Para ello, se fijará la relación entre los diferentes contratérminos imponiendo la validez de las relaciones de consistencia para las funciones de 2 y 4-puntos.

Previo a discutir la renormalización, vale destacar que estas ecuaciones son similares a aquellas obtenidas al considerar una aproximación Gaussiana al nivel de las ecuaciones del valor medio del campo [55], que también pueden obtenerse a partir de un principio variacional [56, 57]. En ese caso, el punto de partida es la ecuación de movimiento clásica para ϕ , que luego es separado entre un campo medio $\bar{\phi} = \langle \phi \rangle$ y una fluctuación $\varphi = \phi - \bar{\phi}$. Luego, tomando el valor de expectación de la ecuación clásica del campo uno obtiene un par de ecuaciones acopladas para $\bar{\phi}$ y φ , o equivalentemente para $\bar{\phi}$ y el propagador de las fluctuaciones $G(x, x')$. Finalmente, bajo la suposición de que los estados son Gaussianos, es decir, que las funciones de n -puntos pueden expresarse en términos de la función de 2-puntos

$$\langle \varphi^3 \rangle = 0, \quad (4.37a)$$

$$\langle \varphi^4 \rangle = 3\langle \varphi^2 \rangle^2, \quad (4.37b)$$

las ecuaciones resultantes son similares a (4.35) y (4.36). Sin embargo, la diferencia es que en este caso no hay una interpretación diagramática para cada una de las contribuciones que admite distintos contratérminos, así como tampoco se tienen relaciones de consistencia para fijarlos. Por lo tanto, en este enfoque resultaría poco natural el uso de diferentes contratérminos.

4.2.1. Renormalización en espacios curvos generales

A continuación analizaremos la renormalización de las ecuaciones (4.35) y (4.36) en la aproximación de Hartree en presencia de una métrica de fondo general. Utilizaremos la siguiente parametrización de las constantes desnudas:

$$m_{Bi}^2 = m^2 + \delta m_i^2, \quad (4.38a)$$

$$\xi_{Bi} = \xi + \delta \xi_i, \quad (4.38b)$$

$$\lambda_{Bi} = \lambda + \delta \lambda_i, \quad (4.38c)$$

que corresponde a un esquema de sustracción mínima (es decir, los contratérminos δm_i^2 , $\delta \xi_i$ y $\delta \lambda_j$ ($i = 0, 2, j = 0, 2, 4$) sólo contienen divergencias y ninguna parte finita). Como se mencionó en la sección anterior, con el fin de fijar los diferentes contratérminos dentro de este nivel de aproximación, imponemos las relaciones de consistencia (4.32) y (4.33) en los diferentes núcleos

2PI de 2 y 4 puntos. Estos núcleos son calculados a partir de las derivadas funcionales de $\Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]$ evaluadas en $\bar{\phi} = 0$, quien, comparando entre (4.25) y (4.34), se lee

$$\begin{aligned}\Gamma_{int}[\bar{\phi}, G] &= - \int_{\mathcal{C}} d^d x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\delta m_2^2 + \delta \xi_2 R) \bar{\phi}^2 + \frac{1}{4!} (\lambda + \delta \lambda_4) \bar{\phi}^4 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} d^d x \sqrt{-g} \left[\delta m_0^2 + \delta \xi_0 R + \frac{1}{2} (\lambda + \delta \lambda_2) \bar{\phi}^2 \right] G(x, x) \\ &\quad - \frac{1}{8} \int_{\mathcal{C}} d^d x \sqrt{-g} (\lambda + \delta \lambda_0) G^2(x, x),\end{aligned}\quad (4.39)$$

donde usamos que la inversa del propagador libre G_0^{-1} en (4.25) se define como

$$G_0^{-1} = i (-\square + m^2 + \xi R). \quad (4.40)$$

Luego de tomar algunas derivadas funcionales vemos que los núcleos de 2-puntos en $\bar{\phi} = 0$ estan dados por

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(x')} \right|_{\bar{\phi}=0} = -\sqrt{-g} \left[\delta m_2^2 + \delta \xi_2 R + \frac{1}{2} (\lambda + \delta \lambda_2) [G] \right] \delta^d(x - x'), \quad (4.41)$$

$$\left. 2 \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta G(x, x')} \right|_{\bar{\phi}=0} = -\sqrt{-g} \left[\delta m_0^2 + \delta \xi_0 R + \frac{1}{2} (\lambda + \delta \lambda_0) [G] \right] \delta^d(x - x'). \quad (4.42)$$

Por lo tanto, la condición (4.32) implica que

$$\delta m_0^2 = \delta m_2^2 \equiv \delta m^2, \quad (4.43a)$$

$$\delta \xi_0 = \delta \xi_2 \equiv \delta \xi, \quad (4.43b)$$

$$\delta \lambda_0 = \delta \lambda_2. \quad (4.43c)$$

Dado que ambos contraterminos de masa son iguales, así como también lo son ambos contraterminos de acompañamiento con la curvatura, podemos obviar los subíndices en esos casos de aquí en adelante.

Pasamos ahora a la segunda relación de consistencia (4.33). Esta ecuación relaciona a los núcleos de 4 puntos en $\bar{\phi} = 0$, dos de los cuales pueden ser calculados tomando derivadas de $\Gamma_{int}[\bar{\phi}, G]$:

$$\left. \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \right|_{\bar{\phi}=0} = -(\lambda + \delta \lambda_4) \int_x \delta_{1x} \delta_{2x} \delta_{3x} \delta_{4x}, \quad (4.44)$$

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta G_{12} \delta G_{34}} \right|_{\bar{\phi}=0} = -\frac{1}{4} (\lambda + \delta \lambda_0) \int_x \delta_{1x} \delta_{2x} \delta_{3x} \delta_{4x}, \quad (4.45)$$

donde utilizamos $\phi_i \equiv \bar{\phi}(x_i)$ a modo de abreviación notacional, así como también

$$\int_x \delta_{1x} \delta_{2x} \delta_{3x} \delta_{4x} = \int_C d^d x \sqrt{-g} \delta^d(x_1 - x) \delta^d(x_2 - x) \delta^d(x_3 - x) \delta^d(x_4 - x). \quad (4.46)$$

La otra cantidad que debe ser especificada es la cuarta derivada funcional de la acción efectiva 1PI. Su valor en $\bar{\phi} = 0$ es fácilmente interpretado como la constante de acoplamiento renormalizada λ_R , ya que el potencial efectivo es proporcional a la acción efectiva en un valor constante de $\bar{\phi}$. Por lo tanto

$$\left. \frac{\delta^4 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \right|_{\bar{\phi}=0} = -\lambda_R \int_x \delta_{1x} \delta_{2x} \delta_{3x} \delta_{4x}, \quad (4.47)$$

Es importante tener en cuenta que, dado que la acción efectiva 1PI depende de la geometría de fondo, en general, no es posible imponer estas relaciones de consistencia exactamente para cualquier métrica arbitraria. Esperamos una situación análoga en el espacio-tiempo de Minkowski si, por ejemplo, el valor medio del campo dependiese del tiempo. Sin embargo, en ese caso, con el fin de definir los parámetros renormalizados, uno todavía puede imponer las relaciones de consistencia para algún valor particular y constante del campo. Esto es suficiente para fijar los contratérminos. Luego, una vez hechas finitas las ecuaciones, se espera una desviación de las relaciones de consistencia dependiente del tiempo, pero pequeña. Más precisamente, se espera que cualquier desviación sea del mismo orden que las contribuciones despreciadas en la aproximación considerada para Γ_2 . La elección correspondiente en nuestro caso sería considerar un espacio-tiempo con curvatura constante como punto de renormalización en el cual imponer las relaciones de consistencia. Volveremos sobre este punto importante en la próxima sección.

Reemplazando los ingredientes anteriores en la segunda relación de consistencia (4.33) podemos fijar el contratérmino que falta. Aquí es importante tener en cuenta las propiedades de simetría de los núcleos al evaluar las permutaciones. La relación resultante es

$$\delta\lambda_4 - 3\delta\lambda_2 = 2(\lambda - \lambda_R). \quad (4.48)$$

En este punto se puede ver más claramente las consecuencias de este truncamiento “arbitrario” de la acción efectiva 2PI, es decir la aproximación de Hartree, al insistir en el cumplimiento de las propiedades válidas para la teoría exacta.

Con estas relaciones podemos ahora volver a las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador. En lugar de usar la ecuación del propagador de Feynman $G_F(x, x')$, o cualquiera de los propagadores de camino temporal cerrado, consideraremos la ecuación para la función elemental de Hadamard $G_1(x, x')$ (2.21). Esta contiene la misma información pero resulta más

cómoda en lo que sigue, así como también en la renormalización de las EES que estudiaremos en el capítulo 6. Entonces, en lugar de (4.42) tenemos

$$\left(-\square + m_{B0}^2 + \xi_{B0}R + \frac{\lambda_{B2}}{2}\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_{B0}}{4}[G_1] \right) G_1(x, x') = 0. \quad (4.49)$$

La renormalizabilidad de las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador significa que se puedan hacer finitas mediante una elección adecuada de contratérminos. Si este es el caso, las ecuaciones resultantes pueden expresarse en términos de una masa dinámica finita más un término de acoplamiento con la curvatura renormalizado, es decir,

$$\left(-\square + m_{dyn}^2 + \xi_R R - \frac{1}{3}\lambda_R \bar{\phi}^2 \right) \bar{\phi}(x) = 0, \quad (4.50)$$

$$(-\square + m_{dyn}^2 + \xi_R R) G_1(x, x') = 0. \quad (4.51)$$

La masa dinámica m_{dyn}^2 es una función escalar dependiente de las coordenadas espacio-temporales, determinada por una ecuación autoconsistente

$$m_{dyn}^2 + \xi_R R = m^2 + \delta m^2 + (\xi + \delta\xi)R + \frac{1}{2}(\lambda + \delta\lambda_2)\bar{\phi}^2 + \frac{1}{4}(\lambda + \delta\lambda_2)[G_1], \quad (4.52)$$

dado que m_{dyn}^2 también entra en el miembro derecho a través de $[G_1]$. En esta expresión ya hemos utilizado las relaciones entre los contratérminos requeridas por las relaciones de consistencia. Las divergencias provienen de $[G_1]$, y deben ser canceladas mediante una elección adecuada de los contratérminos δm^2 , $\delta\xi$ and $\delta\lambda_2$.

Con el fin de exponer y aislar las divergencias, utilizamos la expansión de Schwinger-DeWitt para $[G_1]$, ec. (2.30), evaluándola para una masa variable m_{dyn} y acoplamiento con la curvatura ξ_R . Insertando dicha expansión en (4.52) se obtiene,

$$\begin{aligned} m_{dyn}^2 + \xi_R R &= m^2 + \delta m^2 + (\xi + \delta\xi)R + \frac{1}{2}(\lambda + \delta\lambda_2)\bar{\phi}^2 + \frac{1}{16\pi^2\epsilon}(\lambda + \delta\lambda_2) \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda + \delta\lambda_2)T_F. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aquí, demandando que la parte divergente se cancele con las contribuciones de los contratérminos sin dejar remanente finito (sustracción mínima), obtenemos las siguientes ecuaciones independientes

$$m_{dyn}^2 + \xi_R R = m^2 + \xi R + \frac{1}{2}\lambda\bar{\phi}^2 + \frac{1}{2}\lambda T_F, \quad (4.54)$$

$$0 = \left\{ \delta m^2 + \delta\xi R + \frac{1}{2}\delta\lambda_2\bar{\phi}^2 + \frac{1}{16\pi^2\epsilon}(\lambda + \delta\lambda_2) \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] + \frac{1}{2}\delta\lambda_2 T_F \right\}. \quad (4.55)$$

Estas determinan los contratérminos δm^2 , $\delta\xi$ y $\delta\lambda_2$, a los que de ahora en más nos referiremos como contratérminos de sustracción mínima. Usando la primera ecuación para $m_{dyn}^2 + \xi_R R$ y remplazarlo en la segunda, llegamos a una expresión que depende de los contratérminos y de las constantes finitas

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\delta m^2 + \frac{m^2}{16\pi^2\epsilon} (\lambda + \delta\lambda_2) \right] + \left[\delta\xi + \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) (\lambda + \delta\lambda_2) \right] R \\ &+ \frac{1}{2} \left[\delta\lambda_2 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} (\lambda + \delta\lambda_2) \right] (\bar{\phi}^2 + T_F), \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde cada corchete debe anularse independientemente dadas las dependencias en las distintas variables $\bar{\phi}$, m_{dyn}^2 y R . Los contratérminos resultantes son

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{m^2}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} \right), \quad (4.57a)$$

$$\delta\xi = -\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{(\xi - \frac{1}{6})}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} \right), \quad (4.57b)$$

$$\delta\lambda_2 = -\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} \right), \quad (4.57c)$$

y los parámetros desnudos (4.38) quedan

$$m_B^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} = m^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \right)^n, \quad (4.58a)$$

$$\xi_B - \frac{1}{6} = \frac{(\xi - \frac{1}{6})}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} = \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \right)^n, \quad (4.58b)$$

$$\lambda_{B2} = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \right)^n. \quad (4.58c)$$

Notar que tanto los contratérminos como los parámetros desnudos tienen una estructura de polos no trivial. Esto es evidencia del carácter no perturbativo de la acción efectiva 2PI. Expandingo estas expresiones en λ permitiría en principio comparar con los resultados perturbativos usuales.

Una vez hecha finita, la ecuación para la masa dinámica es

$$\begin{aligned} m_{dyn}^2 + \xi_R R &= m^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right. \\ &\left. + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R - 2F(m_{dyn}^2, \{R\}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde hemos utilizado la expresión explícita para T_F dada por la ecuación (2.31). Esto concluye la prueba de que el proceso de renormalización consistente puede implementarse en espacios curvos generales, al menos en la medida en la que sea válido descartar los efectos del campo cuántico sobre la métrica de fondo. Un análisis completo debe incluir también la renormalización de las EES. Postergaremos este punto hasta el capítulo 6.

Volviendo a la ecuación (4.59), esta es una ecuación autoconsistente para $m_{dyn}^2(\bar{\phi}, R)$ cuyo resultado luego debe ser reemplazado en la ecuación del campo (4.50), para finalmente resolver para $\bar{\phi}$. Sin embargo, en la aproximación de Hartree (4.50) tiene una dependencia explícita con la constante de acoplamiento renormalizada λ_R como consecuencia de las relaciones de consistencia (4.48), mientras que (4.59) depende sólo de la constante de acoplamiento de sustracción mínima λ . En la siguiente sección discutiremos como reescribir los resultados utilizando únicamente los parámetros renormalizados.

4.3. Potencial efectivo y parámetros renormalizados

El potencial efectivo es una cantidad útil para investigar el efecto de las fluctuaciones cuánticas sobre la evolución del valor medio del campo $\bar{\phi}$. Éste se relaciona con la acción efectiva 1PI (4.3) de la siguiente manera

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = -\frac{\Gamma[\bar{\phi}]}{\Omega} \Bigg|_{\bar{\phi}=const.}, \quad (4.60)$$

donde Ω es el volumen del espacio-tiempo, y es en general una cantidad divergente. Normalmente, el potencial efectivo es más simple de calcular que la acción efectiva. En efecto, por su definición el potencial efectivo interviene a través de su derivada en la ecuación de movimiento (4.5) que se obtiene al extremizar la acción efectiva 1PI. Por lo tanto, puede ser identificado en la ecuación (4.50),

$$\frac{dV_{eff}}{d\bar{\phi}} = \left(m_{dyn}^2 + \xi_R R - \frac{1}{3} \lambda_R \bar{\phi}^2 \right) \bar{\phi}. \quad (4.61)$$

Como hemos mencionado, la ecuación renormalizada para el valor medio del campo (4.50), al ser combinada con la solución de la ecuación de la masa dinámica (4.59), dependerá de una mezcla de parámetros finitos asociados a la sustracción mínima m^2 , ξ y λ , y de parámetros renormalizados ξ_R y λ_R (este último viniendo de la relación de consistencia a través de la ecuación del campo), así como tambien depende de la escala de regularización $\tilde{\mu}$. Los parámetros renormalizados son justamente aquellos que caracterizan al potencial efectivo V_{eff} y en general no serán iguales a los parámetros de sustracción mínima. Ambos conjuntos de parámetros estarán

relacionados entre sí mediante $\tilde{\mu}$. Es conveniente entonces expresar la ecuación para m_{dyn}^2 , (4.59), en términos de uno solo de estos conjuntos de parámetros. Dado que las relaciones de consistencia toman una forma particularmente simple solamente cuando $\bar{\phi} = 0$, vamos a utilizar esa elección como punto de renormalización. También es necesario fijar la geometría de fondo a una de curvatura constante R_0 .

4.3.1. Punto de renormalización en espacio-tiempo plano

En esta subsección vamos a elegir el espacio-tiempo de Minkowski como el punto de renormalización, para el cual $R_0 = 0$. Con estas condiciones, los parámetros renormalizados se definen como

$$m_R^2 \equiv \left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=0} = m_{dyn}^2(\bar{\phi} = 0, R = 0), \quad (4.62a)$$

$$\xi_R \equiv \left. \frac{d^3 V_{eff}}{dR d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=0} = \left. \frac{dm_{dyn}^2}{dR} \right|_{\bar{\phi}=0, R=0} + \xi_R, \quad (4.62b)$$

$$\lambda_R \equiv \left. \frac{d^4 V_{eff}}{d\bar{\phi}^4} \right|_{\bar{\phi}=0, R=0} = 3 \left. \frac{d^2 m_{dyn}^2}{d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=0} - 2\lambda_R. \quad (4.62c)$$

La definición (4.62c) es la misma que (4.47). A partir de estas definiciones y de las ecuaciones (4.61) y (4.59), es sencillo llegar a expresiones que relacionan los parámetros renormalizados m_R^2 , ξ_R y λ_R con aquellos de sustracción mínima m^2 , ξ y λ y $\tilde{\mu}$ (ver Apéndice C). Éstas son

$$m_R^2 = \frac{m^2}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}, \quad (4.63a)$$

$$\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right)}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}, \quad (4.63b)$$

$$\lambda_R = \frac{\lambda}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}. \quad (4.63c)$$

Utilizando estas relaciones es posible encontrar combinaciones útiles de parámetros de sustracción mínima que sean independientes de $\tilde{\mu}$:

$$\frac{\left(\xi_B - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_B} = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right)}{\lambda} = \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_R}, \quad (4.64)$$

y

$$\frac{m_B^2}{\lambda_{B2}} = \frac{m^2}{\lambda} = m_R^2 \left(\frac{1}{32\pi^2} + \frac{1}{\lambda_R} \right) \equiv \frac{m_R^2}{\lambda_R^*}, \quad (4.65)$$

donde hemos introducido λ_R^* como un atajo notacional, con la propiedad de $\lambda_R^* \rightarrow \lambda_R$ para $\lambda_R \ll 1$.

Se debe tener en cuenta que, aunque en principio m^2 podría tomar valores negativos, el parámetro m_R^2 es positivo por construcción. Esto es así porque m_R^2 es una solución de la ecuación de la masa dinámica en el espacio de Minkowski para $\bar{\phi} = 0$, la cual se basa en la existencia de un propagador estable para las fluctuaciones (ver la ec. (2.30)). Por lo tanto, estas ecuaciones nos dicen que en este caso m^2 también debe ser positiva, siempre que λ_R^* y λ sean positivos. Esto es una consecuencia de haber definido los parámetros renormalizados en el espacio-tiempo de Minkowski, y como veremos más adelante, esta restricción se puede relajar tomando el punto de renormalización en el espacio-tiempo de De Sitter.

En cualquier caso, vale la pena señalar que las relaciones de consistencia imponen restricciones no triviales a los parámetros finitos de la teoría. Estas restricciones no se consideran en el enfoque de otros autores [58], quienes trabajando con sustracción mínima, asumen desde el principio que $\delta\lambda_4 = 3\delta\lambda_2$. Por un lado, dado que estamos trabajando con una aproximación a la acción efectiva, se podría argumentar que no es necesario imponer que las relaciones de consistencia se cumplan exactamente en el punto de renormalización, sino sólo utilizarlas para fijar la proporcionalidad entre los contraterminos, porque de todas formas no se espera que se sigan cumpliendo más allá de ese punto. Esto es, en principio, correcto. Sin embargo, a menos que se especifique un conjunto de condiciones de renormalización, la interpretación de los parámetros finitos no está clara y las ecuaciones son dependientes de $\tilde{\mu}$, como sucede en la Ref. [58]. Más aún, si asumimos que $\delta\lambda_4 = 3\delta\lambda_2$ y luego definimos las condiciones de renormalización a partir del potencial efectivo (como lo estamos haciendo), resulta que la ecuación de la masa dinámica no puede ser enteramente escrita en términos de sólo parámetros renormalizados, y por lo tanto es dependiente de $\tilde{\mu}$. Esto se puede ver fácilmente teniendo en cuenta que es debido a la combinación en el miembro derecho de la ecuación (4.48) que sea λ_R y no λ que aparezca en la ecuación (4.50). Viéndolo al revés, si se imponen las relaciones de consistencia, la relación $\delta\lambda_4 = 3\delta\lambda_2$ implica que $\lambda = \lambda_R$, lo que da una elección particular del parámetro $\tilde{\mu}$. Nuestro análisis muestra que, tomando el espacio-tiempo de Minkowski como el punto de renormalización, la elección $m^2 < 0$ no es compatible con las relaciones de consistencia. Aparecerán restricciones similares cuando se considere una definición más general de los parámetros renormalizados.

Las relaciones anteriores entre los parámetros pueden ser utilizadas para reescribir la ecuación para m_{dyn}^2 solamente en términos de los parámetros renormalizados. Luego de un poco de álgebra se llega a

$$m_{dyn}^2 = m_R^2 + \frac{\lambda_R^*}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left\{ \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{m_R^2} \right) - 2F(m_{dyn}^2, \{R\}) \right\} \quad (4.66)$$

Este resultado muestra que m_{dyn}^2 puede ser completamente expresada en términos de los parámetros renormalizados, mostrando de forma manifesta la invarianza ante cambios de la escala de regularización $\tilde{\mu}$. En consecuencia, ambas ecuaciones de $\bar{\phi}$ y del propagador mostrarán también estas propiedades. También puede verse que en el caso de un campo libre, $\lambda_R \rightarrow 0$, y por lo tanto $\lambda_R^* \rightarrow 0$, la masa dinámica se reduce a la masa renormalizada, $m_{dyn}^2 \rightarrow m_R^2$.

Por último, a partir de los parámetros renormalizados es posible definir los contratérminos de manera alternativa, consistentes con un esquema de sustracción no mínima,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{m}^2 &= m_B^2 - m_R^2 = \frac{m_B^2 \left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_B^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}{1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}} - m_R^2 = -\frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \frac{m^2}{\left(1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} \right)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \\ &= -m_B^2 \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde aquí hemos usado las ecuaciones (4.58a) y (4.63a) para m_B^2 y m^2 , respectivamente, y luego la ecuación (4.65). De manera similar obtenemos

$$\delta \tilde{\xi} \equiv \xi_B - \xi_R = -\left(\xi_B - \frac{1}{6} \right) \frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right], \quad (4.68)$$

$$\delta \tilde{\lambda} \equiv \lambda_{B2} - \lambda_R = -\lambda_B \frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]. \quad (4.69)$$

Además de los polos en ϵ , estos contratérminos contienen un término finito dependiente de $\tilde{\mu}$. En estas expresiones, se recuperan los resultados conocidos a 1-loop reemplazando $m_B^2 \rightarrow m_R^2$, $\xi_B \rightarrow \xi_R$ y $\lambda_{B2} \rightarrow \lambda_R$ en los miembros derechos.

4.3.2. Punto de renormalización en De Sitter

Hasta aquí hemos fijado las relaciones de consistencia en el espacio de Minkowski mediante la definición de los parámetros renormalizados en $R_0 = 0$, y esto fue suficiente para mostrar, por ejemplo, que las ecuaciones renormalizadas pueden ser expresadas de una forma manifestamente independiente de $\tilde{\mu}$. Sin embargo, estamos fijando las relaciones de consistencia en una métrica

de fondo inadecuada para estudiar un problema cosmológico. En este caso, la métrica de interés es del tipo Friedmann-Robertson-Walker, por lo que resultaría más natural tomar como punto de renormalización el espacio-tiempo de De Sitter con una curvatura escalar R_0 , que también satisface la condición de tener una curvatura constante. Entonces, se podrían fijar las relaciones de consistencia en un tiempo dado, haciendo coincidir R_0 al valor correspondiente de R (que depende del factor de escala $a(t)$) en ese tiempo. A medida que pasa el tiempo, las relaciones de consistencia se violarían de forma incremental. Por supuesto, incluso si estamos estudiando las ecuaciones en De Sitter, para el cual R es independiente del tiempo, el empalme puede hacerse de forma exacta sólo si R y $\bar{\phi}$ están fijados de antemano. Sin embargo, este no es el caso que estamos considerando aquí, ya que nuestro objetivo es analizar la dependencia de la masa dinámica y potencial efectivo con estas dos variables. Por lo tanto, lo más natural es imponer las relaciones de consistencia en un punto de renormalización determinado. Otro punto a favor de la generalización a De Sitter es que, como se ha visto en la subsección anterior, el punto de renormalización en Minkowski no permite ciertos valores de los parámetros de sustracción mínima que pueden ser de interés, como por ejemplo $m^2 < 0$. El objetivo de esta subsección es generalizar los resultados anteriores al caso en que se toma el punto de renormalización para una métrica de De Sitter fija.

Comenzamos considerando la relación de consistencia para las funciones de 4-puntos (4.33), lo cual da una nueva definición de λ_R

$$\left. \frac{\delta^4 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} = -\lambda_R \int_x \delta_{1x} \delta_{2x} \delta_{3x} \delta_{4x}, \quad (4.70)$$

donde la notación $R = R_0$ implica que implícitamente estamos evaluando en el espacio-tiempo de De Sitter. También evitamos utilizar una notación nueva para λ_R . La relación de consistencia para las funciones de 2-puntos (4.32) se mantiene sin cambios. Las definiciones de los parámetros renormalizados deben ser adaptadas a esta situación evaluando el potencial efectivo en $R = R_0$,

$$m_R^2 + \xi_R R_0 \equiv \left. \frac{d^2 V_{eff}}{d \bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} = m_{dyn}^2(\bar{\phi}=0, R=R_0) + \xi_R R_0, \quad (4.71a)$$

$$\xi_R \equiv \left. \frac{d^3 V_{eff}}{dR d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} = \left. \frac{dm_{dyn}^2}{dR} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} + \xi_R, \quad (4.71b)$$

$$\lambda_R \equiv \left. \frac{d^4 V_{eff}}{d\bar{\phi}^4} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} = 3 \left. \frac{d^2 m_{dyn}^2}{d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0, R=R_0} - 2\lambda_R. \quad (4.71c)$$

Estas redefiniciones conducen a la generalización de las ecuaciones (4.63) que relacionan los parámetros de sustracción mínima con los renormalizados, con una dependencia explícita en R_0 ,

$$m_R^2 = \frac{m^2 + \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[R_0 \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} - F_{dS}(m_R^2, R_0) \right]}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}, \quad (4.72a)$$

$$\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{\lambda}{16\pi^2} \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0}}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}, \quad (4.72b)$$

$$\lambda_R = \frac{\lambda}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right) \right]}. \quad (4.72c)$$

Aquí aparece la función F_{dS} asociada a la parte finita del propagador en De Sitter, que por el momento no precisamos especificar. Las ecuaciones originales en el espacio de Minkowski se recuperan facilmente para $R_0 \rightarrow 0$, lo cual anula todos los términos que involucran a la función F_{dS} o sus derivadas, de acuerdo con las propiedades (2.32). Siguiendo el procedimiento delineado en el espacio de Minkowski, podemos combinar estas ecuaciones para encontrar relaciones independientes de $\tilde{\mu}$ entre los parámetros de sustracción mínima y los renormalizados, por ejemplo

$$\frac{m_B^2}{\lambda_{B2}} = \frac{m^2}{\lambda} = \frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R_0}{32\pi^2} \quad (4.73)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\left(\xi_B - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_B} &= \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right)}{\lambda} \\ &= \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_R} + \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)}{32\pi^2} \left[\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \frac{R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right] + \frac{1}{16\pi^2} \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \\ &\equiv \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_R} + J(R_0, m_R^2, \xi_R), \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde en la última línea estamos definiendo la función $J(R_0, m_R^2, \xi_R)$, la cual se anula para $R_0 \rightarrow 0$.

Utilizamos las ecuaciones (4.72) para reescribir la ecuación de la masa dinámica (4.59) en

términos de los nuevos parámetros renormalizados y de F_{dS} ,

$$m_{dyn}^2 = m_R^2 + \frac{\lambda_R^*}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left\{ \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{m_R^2} \right) \right. \\ \left. + (m_{dyn}^2 - m_R^2) \left[2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{m_R^2} \right] \right. \\ \left. + 2 \left[F_{dS}(m_R^2, R_0) + \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} (R - R_0) - F(m_{dyn}^2, \{R\}) \right] \right\}. \quad (4.75)$$

Nuevamente, el resultado correspondiente al punto de renormalización en el espacio de Minkowski (4.66) se recupera fácilmente en el límite $R_0 \rightarrow 0$. Finalmente, definimos los contratérminos asociados a los parámetros renormalizados en De Sitter,

$$\delta \tilde{m}^2 \equiv m_B^2 - m_R^2 = -\frac{m_B^2}{32\pi^2} \frac{m_R^2}{\left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right)} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) - 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right], \quad (4.76a)$$

$$\delta \tilde{\xi} \equiv \xi_B - \xi_R = -\frac{(\xi_B - \frac{1}{6})}{32\pi^2} \frac{\left\{ (\xi_R - \frac{1}{6}) \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] + 2 \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \right\}}{\left[\frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + J \right]}, \quad (4.76b)$$

$$\delta \tilde{\lambda} \equiv \lambda_{B2} - \lambda_R = -\frac{\lambda_{B2} \lambda_R}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right] \quad (4.76c)$$

Nuevamente se recuperan fácilmente los resultados conocidos a 1-loop, reemplazando $m_B^2 \rightarrow m_R^2$, $\xi_B \rightarrow \xi_R$, $\lambda_{B2} \rightarrow \lambda_R$, y $R_0 \rightarrow 0$ en los miembros derechos.

Podemos sacar algunas conclusiones de estos resultados usando la expresión explícita para F_{dS} dada en la ecuación (3.13), aún manteniendo la métrica de fondo sin especificar. Combinando las ecuaciones (4.72a) y (4.72b), llegamos a las siguientes expresiones

$$\mathcal{M}_R^2 - \frac{R_0}{6} = \frac{m^2 + (\xi - \frac{1}{6}) R_0 - \frac{\lambda R_0}{576\pi^2}}{1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{R_0}{12\tilde{\mu}^2} \right) + g(y_0) \right]}, \quad (4.77a)$$

$$\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) = \frac{(\xi - \frac{1}{6}) + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[y_0 - \frac{1}{6} - (y_0 - \frac{1}{6})^2 g'(y_0) - \frac{1}{18} \right]}{1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{R_0}{12\tilde{\mu}^2} \right) + g(y_0) + (y_0 - \frac{1}{6}) g'(y_0) \right]}, \quad (4.77b)$$

$$\lambda_R = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{R_0}{12\tilde{\mu}^2} \right) + g(y_0) + (y_0 - \frac{1}{6}) g'(y_0) \right]}, \quad (4.77c)$$

donde la función g está dada por (3.14). Aquí estamos utilizando la notación $y_0 = \mathcal{M}_R^2/R_0 = m_R^2/R_0 + \xi_R$. También podemos reexpresar las ecuaciones (4.73) y (4.75), llegando a

$$\frac{m_B^2}{\lambda_{B2}} = \frac{m^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} (\mathcal{M}_R^2 - \xi_R R_0) + \frac{(\mathcal{M}_R^2 - \frac{R_0}{6})}{32\pi^2}. \quad (4.78)$$

y

$$\frac{(\xi_B - \frac{1}{6})}{\lambda_B} = \frac{(\xi - \frac{1}{6})}{\lambda} = \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + \frac{1}{32\pi^2} \left[\left(y_0 - \frac{1}{6} \right)^2 g'(y_0) - \left(y_0 - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{18} \right]. \quad (4.79)$$

En Minkowski la primera relación implicaba que el parámetro m^2 no podía ser negativo, mientras que en De Sitter la misma se modifica de manera tal que esto se vuelve posible, aunque no bajo condiciones generales. Más específicamente, juntando las dos relaciones (4.78) y (4.79) de arriba encontramos que

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{m^2}{R_0} + \xi \right) = \frac{y_0}{\lambda_R} + \frac{1}{32\pi^2} \left[\left(y_0 - \frac{1}{6} \right)^2 g'(y_0) + \frac{1}{18} \right] + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_R} \right). \quad (4.80)$$

Luego, considerando que la aproximación de Hartree demanda que $y_0 > 0$, en cuyo caso puede verse que $g'(y_0) > 0$, se puede concluir que el término entre corchetes en el miembro derecho debe ser definido positivo, y por lo tanto la combinación de parámetros de sustracción mínima dada por $m^2 + \xi R_0$ debe ser positiva cuando $\lambda_R \geq \lambda$. Queremos enfatizar la importancia de este resultado. La validez de las relaciones de consistencia (que involucran tanto partes divergentes como partes finitas) prohíbe que simultáneamente $\lambda = \lambda_R$ y $m^2 + \xi R_0 < 0$, como se ha asumido en la literatura al analizar la ruptura espontánea de simetría en De Sitter bajo la aproximación de Hartree [58]. Como consecuencia de este resultado, uno debe permitir que $\lambda_R < \lambda$, haciendo inevitable recurrir al potencial efectivo para fijar la parte finita de la relación de consistencia (4.48).

4.4. Límite de N grande en el modelo $O(N)$

En el límite de $N \rightarrow \infty$, la única contribución a $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ es aquella del diagrama de la doble-burbuja, mientras que las contribuciones no locales son de orden superior en una expansión en $1/N$. Entonces, la acción efectiva 2PI toma una forma local tal como sucede en la aproximación de Hartree ($N = 1$), pero difiere de ésta en un factor 3 en la contribución de dicho diagrama (último término de (4.34)). Por lo tanto, las ecuaciones (exactas en este límite) para el valor

medio del campo y el propagador son

$$\left(-\square + m_B^2 + \xi_B R + \frac{\lambda_B}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_B}{2} [G] \right) \bar{\phi}(x) = 0, \quad (4.81)$$

$$\left(-\square + m_B^2 + \xi_B R + \frac{\lambda_B}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_B}{2} [G] \right) G(x, x') = -i \frac{\delta^d(x - x')}{\sqrt{-g}}. \quad (4.82)$$

El factor del término con $\bar{\phi}^2$ en la primera ecuación difiere con el caso de Hartree, y esto resulta en que ahora ambas ecuaciones (4.81) y (4.82) tengan los mismos coeficientes entre sí (comparar con (4.35) y (4.36)). Siendo que en este caso se tiene un parámetro pequeño que controla de manera sistemática la truncación de la acción efectiva 2PI, las relaciones de consistencia se satisfacen exactamente orden a orden en $1/N$. Por lo tanto, no es necesaria la introducción de contraterminos adicionales. También vale destacar que las condiciones de estado Gaussiano (4.37) ya nos son válidas en límite $N \rightarrow \infty$, sino que ahora se tiene

$$\langle \varphi^3 \rangle = 0, \quad (4.83a)$$

$$\langle \varphi^4 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle^2. \quad (4.83b)$$

Siguiendo con las ecuaciones, en términos de $\bar{\phi}$ y G_1 ahora se tiene [55]

$$(-\square + m_{dyn}^2 + \xi_R R) \bar{\phi}(x) = 0, \quad (4.84)$$

$$(-\square + m_{dyn}^2 + \xi_R R) G_1(x, x') = 0, \quad (4.85)$$

donde $m_{dyn}^2 + \xi_R R$ satisface la misma ecuación autoconsistente que en la aproximación de Hartree con $N = 1$, ec. (4.59). La diferencia en cambio está en la primera ecuación (4.51). En efecto, en el caso de Hartree se tenía un término extra en la ecuación (4.50), cuyo origen está vinculado con la diferencia mencionada entre (4.35) y (4.36), pero más importantemente con la imposición de las relaciones de consistencia. Esta diferencia se traslada al potencial efectivo, cuya derivada en este caso es

$$\frac{dV_{eff}}{d\bar{\phi}} = (m_{dyn}^2 + \xi_R R) \bar{\phi}, \quad (4.86)$$

donde la ausencia del término proporcional a λ_R en comparación a (4.61) tiene consecuencias importantes en De Sitter, como discutiremos en los próximos capítulos.

Una observación final es que aquí ya no se tiene la necesidad de definir los parámetros renormalizados para luego poder escribir las ecuaciones del valor medio del campo (4.84) y de

la masa dinámica (4.59) en términos de un sólo conjunto de parámetros (sean los de sustracción mínima o los renormalizados). Esto nuevamente se debe a la ausencia en (4.84) del término explícito con λ_R .

4.5. Discusión

Hemos considerado un solo campo escalar auto-interactuante con simetría Z_2 en espacios curvos, utilizando un método no perturbativo basado en la acción efectiva 2PI. En la aproximación local o de Hartree de la acción efectiva 2PI, el formalismo reproduce la aproximación Gaussiana, la cual también derivada utilizando un principio variacional [56, 57] o una resumación de una clase particular de diagramas de Feynman. Sin embargo, al considerarla en el contexto de la acción efectiva 2PI, existen ciertas relaciones de consistencia que, si bien son satisfechas automáticamente en la teoría exacta, pueden no cumplirse para ciertas aproximaciones (como cuando la aproximación no es una expansión sistemática en potencias de un parámetro pequeño). Este hecho es bien conocido en espacio plano, y la validez de las relaciones de consistencia debe ser forzada mediante la inclusión de más de un contratérmino para cada constante de masa o acoplamiento en la teoría [29]. Nuestro primer objetivo ha sido mostrar que este “procedimiento de renormalización consistente” puede ser aplicado a las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador en espacios curvos generales. Varios cálculos explícitos fueron realizados previamente en el espacio-tiempo plano usado como regulador un cutoff en momentos (ver, por ejemplo, [25]). Este método también fue utilizado en espacios curvos, para realizar cálculos numéricos en el marco de la teoría de campos fuera del equilibrio [59] o para calcular correcciones cuánticas a los modelos inflacionarios [60]. Dado que el uso de un cutoff en momentos viola la covarianza de la teoría regularizada [61], hemos utilizado regularización dimensional.

El procedimiento de renormalización consistente ha sido parcialmente extendido a espacio-tiempos curvos en algunos trabajos recientes [58], donde la renormalización de las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador han sido analizadas. Nuestros resultados son más completos que aquellos de la Ref. [58]. Hemos incluido la expansión adiabática completa del propagador, hemos escrito las ecuaciones renormalizadas en términos de los parámetros renormalizados definidos a partir del potencial efectivo, y hemos mostrado explícitamente que, cuando se expresan en términos de estos parámetros físicos, las ecuaciones son independientes de la escala regularización $\tilde{\mu}$ introducida por la regularización dimensional.

En este procedimiento, hemos considerado dos posibilidades a la hora de elegir el punto de renormalización en la cual se definen los parámetros renormalizados, y por ende donde se imponen las relaciones de consistencia. Primero en el espacio-tiempo de Minkowski y luego en un espacio-tiempo de De Sitter con curvatura escalar R_0 .

Una conclusión relevante es que la aproximación de Hartree y la aplicación de las relaciones de consistencia imponen restricciones sobre los parámetros de sustracción mínima de la teoría. Por un lado, la combinación renormalizada $m_R^2 + \xi_R R_0$ debe ser positiva. Por otro lado, la definición de la constante de acoplamiento renormalizada λ_R en términos de la derivada cuarta del potencial efectivo junto con la relación de consistencia para la función de 4-puntos implican relaciones entre los parámetros de sustracción mínima y los renormalizados independientes de $\tilde{\mu}$. De ellas, está claro que algunas de las opciones de parámetros de sustracción mínima pueden no ser compatibles con las relaciones de consistencia. En particular, no se puede tomar $\lambda = \lambda_R$, $\xi = 0$ y $m^2 < 0$ simultáneamente.

Capítulo 5

Ruptura espontánea de simetría en De Sitter

En este capítulo nos interesa discutir las condiciones bajo las cuales es posible encontrar soluciones al conjunto de ecuaciones del valor medio del campo y de la masa dinámica en De Sitter, en las cuales la simetría clásica Z_2 se rompe espontáneamente, $\bar{\phi} \neq 0$. Esto es interesante por ejemplo para los modelos inflacionarios, donde el campo rueda por el potencial hasta llegar a un mínimo. Por lo tanto, la existencia de mínimos no triviales del potencial efectivo es de gran relevancia. Por otra parte, en la teoría de campos en espacio plano es sabido que los efectos de temperatura finita sobre el potencial pueden conducir a una restauración de la simetría [15, 24, 25, 26]. Se cree que en los espacio-tiempos curvos, los efectos de la curvatura pueden cumplir un rol similar. Otro punto relevante es si la transición de fase es de primer o segundo orden.

La aproximación de Hartree tiene sus limitaciones para el estudio de estas situaciones. En espacio plano, se sabe que ésta predice erróneamente una transición de fase de segundo orden, debido a que siempre hay un mínimo en $\bar{\phi} = 0$. En el caso del espacio-tiempo de De Sitter, veremos que el hecho de haber considerado distintos puntos de renormalización abre nuevas posibilidades.

Por otro lado, se ha mostrado que en De Sitter, la teoría no admite ruptura espontánea de la simetría en el límite de N grande [42]. No queda claro si esto es una propiedad general, o un artificio de dicho límite. Algunos argumentos basados en el formalismo de inflación estocástica parecen extender esta conclusión a todo N , pero en el límite infrarrojo [62, 63]. Estas cuestiones están vinculadas a la generación dinámica de masa.

Los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en la Ref. [30].

5.1. Potencial efectivo en la aproximación de Hartree en De Sitter

Para analizar la posibilidad de ruptura espontánea de simetría, aplicamos los resultados anteriores al espacio-tiempo de De Sitter, cuyas simetrías permiten considerar soluciones para $\bar{\phi}$ y $\langle \varphi^2 \rangle = [G]$ constantes. Además, como se verá de inmediato, en De Sitter la ecuaciones dependen sólo de la combinación

$$\mathcal{M}_{dyn}^2 \equiv m_{dyn}^2 + \xi_R R. \quad (5.1)$$

El potencial efectivo puede obtenerse por integración de (4.61),

$$V_{eff}(\bar{\phi}, R) = \frac{1}{2} \int \mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}^2, R) d\bar{\phi}^2 - \frac{1}{12} \lambda_R \bar{\phi}^4. \quad (5.2)$$

Para poder calcularlo debemos resolver para la masa dinámica como función de $\bar{\phi}$ y R . Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue nos basamos en la ecuación de la masa dinámica con el punto de renormalización en De Sitter, (4.75), a partir de la cual es posible recuperar su contraparte con el punto de renormalización en Minkowski, (4.66), tomando $R_0 \rightarrow 0$.

Comenzamos fijando en la ecuación (4.75) la métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ a De Sitter, es decir, $F(m_{dyn}^2, \{R\}) = F_{dS}(m_{dyn}^2, R)$ usando la expresión (3.13). Además, considerando el límite infrarrojo, usamos la expansión (3.16) para masas pequeñas $\mathcal{M}_{dyn}^2 \ll H^2$. Con todas estas consideraciones, la ecuación para \mathcal{M}_{dyn}^2 entonces toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{dyn}^2 = & m_R^2 + \xi_R R + \frac{\lambda_R^*}{2} \bar{\phi}^2 \\ & + \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left\{ \frac{R^2}{24\mathcal{M}_{dyn}^2} - \frac{R}{6} [\kappa + \log(R/12m_R^2)] - \xi_R R - \frac{5R}{36} \right. \\ & - (m_R^2 + \xi_R R) \left[2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})R_0}{m_R^2} \right] \\ & + 2 \left[F_{dS}(m_R^2, R_0) + \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} (R - R_0) \right] \\ & \left. + \left[\kappa + \log(R/12m_R^2) - \frac{49}{54} + 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})R_0}{m_R^2} \right] \mathcal{M}_{dyn}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde hemos agrupado potencias de \mathcal{M}_{dyn}^2 en el miembro derecho, y definimos $\kappa = 11/6 - 2\gamma_E$. La función F_{dS} y sus derivadas que no fueron especificadas en la expresión anterior están

evaluadas en m_R^2 y R_0 , y son las que corresponden la elección del punto de renormalización. Esta ecuación puede inmediatamente llevarse a la siguiente forma

$$A_{dS} \frac{\mathcal{M}_{dyn}^4}{R^2} + \left[B_{dS} - \frac{\lambda_R \bar{\phi}^2}{2R} \right] \frac{\mathcal{M}_{dyn}^2}{R} + C_{dS} = 0, \quad (5.4)$$

es decir, una ecuación cuadrática para \mathcal{M}_{dyn}^2/R , donde los coeficientes dependen de los distintos parámetros renormalizados, de $\bar{\phi}$ y de R ,

$$A_{dS} = 1 - \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left[\kappa + \log(R/12m_R^2) - \frac{49}{54} + 2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})R_0}{m_R^2} \right], \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} B_{dS} = & - \left(\frac{m_R^2}{R} + \xi_R \right) + \frac{\lambda_R^*}{32\pi^2} \left\{ \frac{\kappa}{6} + \frac{1}{6} \log(R/12m_R^2) + \xi_R + \frac{5}{36} \right. \\ & + (m_R^2 + \xi_R R) \left[2 \frac{dF_{dS}}{dm^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})R_0}{m_R^2} \right] \\ & \left. - 2 \left[F_{dS}(m_R^2, R_0) + \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} (R - R_0) \right] \right\}, \quad (5.5b) \end{aligned}$$

$$C_{dS} = - \frac{\lambda_R^*}{768\pi^2}, \quad (5.5c)$$

Aquí C_{dS} es siempre negativo, mientras que en principio A_{dS} y B_{dS} pueden tener cualquier signo. Se puede ver que, para tener una solución $\mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}, R)$ real y positiva para todo $\bar{\phi}$, es necesario que $A_{dS} > 0$, mientras que no hay restricciones sobre B_{dS} . Las soluciones son

$$\mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}, R) = \frac{-(R B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2}) \pm \sqrt{\left[R B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2} \right]^2 - 4R^2 A_{dS} C_{dS}}}{2A_{dS}}, \quad (5.6)$$

donde sólo una de las ramas da una solución positiva, mientras que la otra rama da una solución negativa. Cual rama es la apropiada depende del signo de B_{dS} . Por el momento mantenemos ambas.

Con esta solución podemos volver a (5.2) e integrar para obtener el potencial efectivo. El resultado es

$$\begin{aligned} V_{eff}(\bar{\phi}, R) = & \mp \frac{2R^2 \left(B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2R} \right) \sqrt{\left(B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2R} \right)^2 - 4A_{dS} C_{dS}}}{8A_{dS} \lambda_R^*} + \frac{\frac{\lambda_R^*}{2} \bar{\phi}^4 - 2B_{dS} R \bar{\phi}^2}{8A_{dS}} \\ & \pm \frac{C_{dS} R^2 \ln \left[\sqrt{\left(B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2R} \right)^2 - 4A_{dS} C_{dS}} + B_{dS} - \frac{\lambda_R^* \bar{\phi}^2}{2R} \right]}{\lambda_R^*} - \frac{\lambda_R \bar{\phi}^4}{12}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

Esta es una función tanto de $\bar{\phi}$ como de R , que está bien definida para todo $\bar{\phi}$ siempre y cuando $A_{ds} > 0$.

5.2. Ruptura espontánea de simetría

El potencial efectivo tiene un extremo en $\bar{\phi}_* = 0$, que es la solución trivial de (4.50) para $\bar{\phi}$ constante. Es inmediato comprobar que éste debe ser un mínimo, dado que

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}_*=0} = \mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}_* = 0, R) > 0. \quad (5.8)$$

donde la condición de positividad se desprende de la aproximación de Hartree. Nos interesa investigar si existen otros mínimos que rompan la simetría Z_2 , es decir, para $\bar{\phi}_* \neq 0$. Según la ecuación (4.50), esto sucede cuando

$$\bar{\phi}_*^2 = \frac{3}{\lambda_R} \mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}, R). \quad (5.9)$$

Usando (5.6) esta condición puede reexpresarse como una ecuación cuadrática para $\bar{\phi}_*^2$, cuyas soluciones son

$$\bar{\phi}_*^2 = \frac{3R}{\lambda_R} \left[\frac{-B_{ds} \pm \sqrt{B_{ds}^2 - 4 \left(A_{ds} - \frac{3\lambda_R^*}{2\lambda_R} \right) C_{ds}}}{2 \left(A_{ds} - \frac{3\lambda_R^*}{2\lambda_R} \right)} \right]. \quad (5.10)$$

Como se mencionó más arriba, en la aproximación de Hartree el potencial efectivo tiene siempre un mínimo en $\bar{\phi}_* = 0$. Por lo tanto para que exista otro mínimo en $\bar{\phi}_* \neq 0$, debe haber un máximo en algún punto intermedio. Por esta razón, debemos considerar ambas ramas de (5.10), y buscar bajo qué condiciones ambas soluciones son reales y positivas. Antes que nada, puede verse que $A_{ds} - 3\lambda_R^*/2\lambda_R < 0$ si λ_R es suficientemente pequeño ($0 < \lambda_R < 1$ es suficiente en general). En ese caso, las condiciones son que buscamos son $B_{ds}^2 - 4(A_{ds} - 3\lambda_R^*/2\lambda_R)C_{ds} > 0$ y $B_{ds} > 0$. Éstas pueden juntarse en una sola

$$B_{ds} - 2\sqrt{\left(\frac{3\lambda_R^*}{2\lambda_R} - A_{ds} \right) |C_{ds}|} > 0. \quad (5.11)$$

Observar que la imposición de que $B_{ds} > 0$ selecciona la rama superior en (5.6) y (5.7).

Entonces ahora podemos buscar valores de los parámetros para los cuales se satisfagan simultáneamente las condiciones para que el potencial esté bien definido, $A_{ds} > 0$, y para que haya ruptura de simetría (5.11). Los coeficientes A_{ds} , B_{ds} y C_{ds} dependen de m_R^2 , ξ_R , λ_R , R y R_0 .

5.2.1. Caso $R_0 = 0$

Comencemos por el caso $R_0 = 0$, es decir, con el punto de renormalización en el espacio de Minkowski. Graficamos en la Figura 5.1 las regiones en el plano $\lambda_R m_R^2 / R$ para las cuales cada una de estas condiciones se cumple, considerando tanto el caso mínimamente acoplado $\xi_R = 0$, así como también $\xi_R < 0$. El caso $\xi_R > 0$ es cualitativamente similar al caso mínimamente acoplado, salvo una leve reducción de la región donde es posible la ruptura de simetría. En todos los casos consideramos $|\xi_R| \ll 1$ de manera que $\mathcal{M}^2 \ll H^2$.

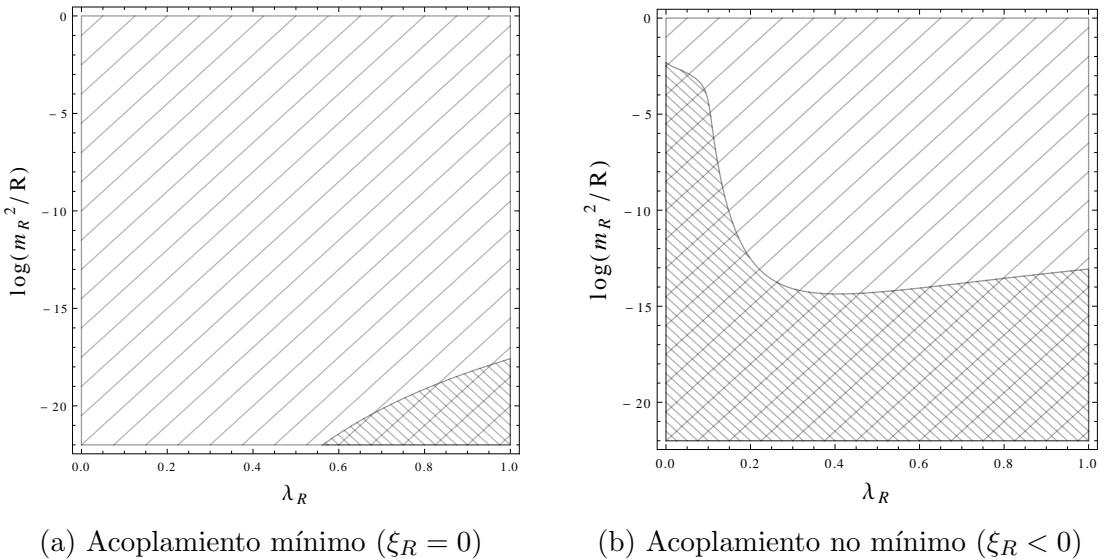


Figura 5.1: Estos gráficos muestran aquellas regiones para las cuales el potencial efectivo esta bien definido para todo $\bar{\phi}$ (rayas de baja densidad) y donde las condiciones para la existencia de soluciones con ruptura de simetría se cumplen (rayas de alta densidad), como funciones de λ_R (eje horizontal) y $\log(m_R^2/R)$ (eje vertical), para $\xi_R = 0$ y $\xi_R = -5 \times 10^{-3}$. La primera condición se cumple siempre en ambos casos, mientras que la ruptura espontánea de simetría existe para m_R^2/R pequeña. La región de ruptura de simetría del primer gráfico se mueve aún más hacia abajo y hacia la derecha al incrementar ξ_R a valores positivos.

En la Figura 5.2 se muestran varias curvas del potencial efectivo para valores fijos de los parámetros pero variando los valores de R . Se puede ver que el potencial efectivo siempre tiene un mínimo en $\bar{\phi} = 0$, mientras que a veces también puede tener otro mínimo para $\bar{\phi} \neq 0$. Remarcamos que fue necesario tomar valores de m_R^2 más de 20 órdenes de magnitud por debajo de R para poder ver el mínimo con ruptura de simetría. Por lo tanto, este mínimo puede entenderse como una peculiaridad del acercamiento al límite no masivo. También vale

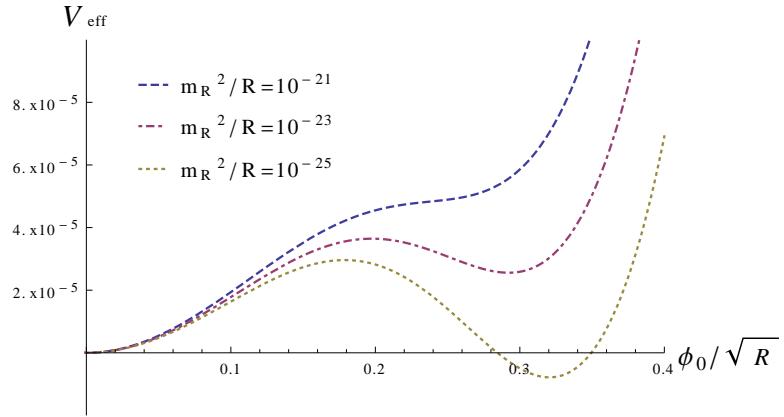


Figura 5.2: Potencial efectivo para diferentes valores de m_R^2/R . En todos los casos $\xi_R = 0$ y $\lambda_R = 0,6$. Siempre hay un mínimo para $\bar{\phi} = 0$, mientras que también puede o no haber un mínimo para $\bar{\phi} \neq 0$ con un máximo en el medio, dependiendo del valor de m_R^2/R .

mencionar que este no es el típico escenario de ruptura de simetría que exhibe una restauración al incrementar el valor de R , como se discute en general en la literatura, dado que aquí la dependencia con R es justamente la opuesta.

Es importante tener en cuenta que la razón por la cual están permitidas las soluciones con $\bar{\phi}_* \neq 0$ es la presencia del término con λ_R en (4.50), el cual viene como una consecuencia de imponer las relaciones de consistencia 2PI. Por el contrario, tanto en la expansión $1/N$ como en la aproximación Gaussiana usual, la ausencia de dicho término requiere que $\mathcal{M}_{dyn}^2 = 0$ para que $\bar{\phi}_* \neq 0$, y en tal caso no existe un vacío invariante de De Sitter y la ruptura de simetría no es posible [55].

5.2.2. Caso $R_0 > 0$

El análisis procede igual que en el caso anterior, pero ahora con un parámetro nuevo a tener en cuenta, R_0 . Empecemos por considerar $R = R_0$, que resulta la manera más natural de fijar su valor. El primer hecho interesante es que la ecuación de la masa dinámica (5.3) no depende explícitamente de ξ_R cuando $R = R_0$, sino solo a través de la combinación $y_0 = m_R^2/R_0 + \xi_R$. Para ver esto es necesario reemplazar explícitamente la función F_{dS} y sus derivadas evaluadas

en m_R^2 y R_0 ,

$$\begin{aligned}
 y - \frac{1}{6} &= \frac{R_0}{R} \left(y_0 - \frac{1}{6} \right) + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left(1 - \frac{R_0}{R} \right) + \frac{\lambda_R \bar{\phi}^2}{2R} \\
 &+ \frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left\{ \left(y - \frac{1}{6} \right) \left[\ln \left(\frac{R}{R_0} \right) + g(y) - g(y_0) - \left(y_0 - \frac{1}{6} \right) g'(y_0) \right] \right. \\
 &\left. - \left(1 - \frac{R_0}{R} \right) \left(y_0 - \frac{1}{6} \right) + \left(y_0 - \frac{1}{6} \right)^2 g'(y_0) \right\}, \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

donde también se utiliza la variable $y = \mathcal{M}_{dyn}^2/R$. Esto simplifica el análisis ya que deja sólo dos parámetros libres, y_0 y λ_R . En la Figura 5.3 se muestra el plano λ_R - $\log(y_0)$, en donde se puede observar que, si bien existe una región en la cual el potencial efectivo está bien definido (rayas de baja densidad), las condiciones de ruptura de simetría no se cumplen. Enfatizamos que en este caso con $R = R_0$, no hay ningún otro parámetro libre, ya que todas las combinaciones de m_R^2/R_0 y ξ_R para las cuales $y_0 > 0$ fueron tenidas en cuenta. Este es un resultado importante, que muestra la ausencia de ruptura de simetría en la aproximación de Hartree en De Sitter, si uno fija las relaciones de consistencia en la misma geometría. Esto resulta natural al menos para ejemplos en los cuales la backreaction puede ser despreciada.

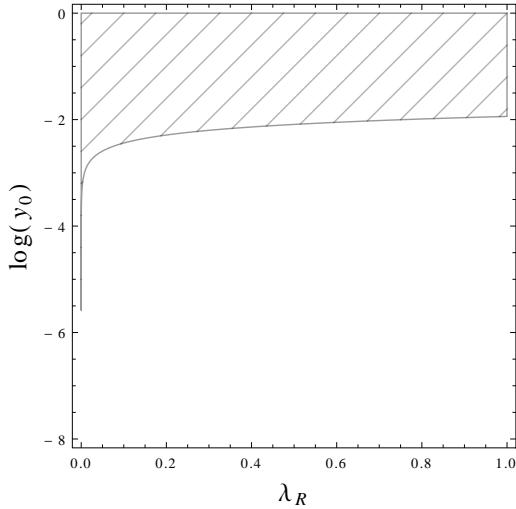


Figura 5.3: Este gráfico muestra en el caso $R = R_0$, la región en la cual el potencial efectivo está bien definido para todo $\bar{\phi}$ (rayas de baja densidad) en el plano λ_R - $\log(y_0)$. No hay región en la que se cumplan las condiciones de ruptura de simetría. No hay ningún otro parámetro libre.

Finalmente, consideramos el caso con $R \neq R_0$. Mostramos en la Figura 5.4 gráficos en el

plano $\log(R/R_0)$ - $\log(m_R^2/R_0)$ de las regiones de interés para ξ_R y λ_R fijos. Observar que estos gráficos están en un plano diferente en el espacio de parámetros en contraste a los gráficos que analizamos anteriormente. En el caso con acoplamiento mínimo, las dos regiones se superponen sólo para $R \gg R_0$ y con valores de m_R^2/R_0 en una pequeña ventana. En particular, esto implica que en límite de masas pequeñas $m_R^2 \ll R_0, R$, no es posible la ruptura de simetría. Más aún, el potencial efectivo no está bien definido para todo $\bar{\phi}$. Esto es diferente a lo que hemos visto en la Figura 5.1a para el caso $R_0 = 0$, donde la situación era $R_0 < m_R^2 \ll R$, es decir, el límite de espacio plano era tomado primero. Es bien sabido que los límites no masivo y de espacio plano en De Sitter no comutan. Si ahora permitimos que $\xi_R \neq 0$, nos encontramos con una situación

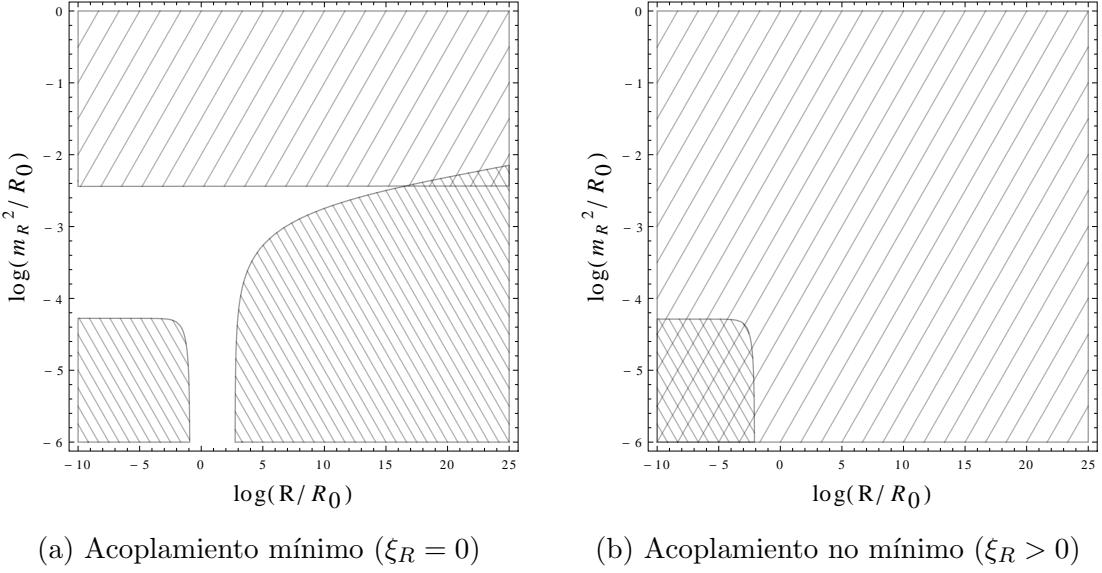


Figura 5.4: Estos gráficos muestran aquellas regiones para las cuales el potencial efectivo esta bien definido para todo $\bar{\phi}$ (rayas de baja densidad) y donde las condiciones para la existencia de soluciones con ruptura de simetría se cumplen (rayas de alta densidad), como funciones de $\log(R/R_0)$ (eje horizontal) y $\log(m_R^2/R_0)$ (eje vertical), para $\lambda_R = 0,1$. Para $\xi_R = 0$ ambas regiones se superponen sólo para $R \gg R_0$ y con m_R^2/R_0 en un rango limitado, mientras que para $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$ el potencial efectivo esta bien definido en todas partes y existe ruptura de simetría para R/R_0 y m_R^2/R_0 pequeños. Los gráficos no cambian cualitativamente al variar λ_R .

diferente. Ambas regiones se superponen para ciertos valores de los parámetros, permitiendo un potencial bien definido con ruptura de simetría. Algunos ejemplos de dicho potencial se muestran en la Figura 5.5 para diferentes valores de R/R_0 . La ruptura espontánea de simetría ocurre para valores pequeños de R/R_0 y luego la simetría se restaura para valores mayores de dicho cociente.

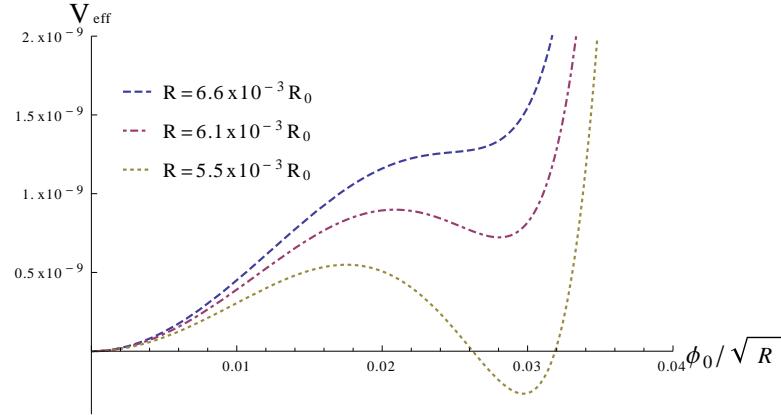


Figura 5.5: Potencial efectivo para $m_R^2/R_0 = 10^{-5}$, $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$ y $\lambda_R = 0,1$; para diferentes valores de R/R_0 . La ruptura espontánea de simetría se observa para valores pequeños de R/R_0 , mientras que para valores mayores la simetría se restaura. El valor crítico en este caso es

$$R/R_0 \sim 6,5 \times 10^{-3}.$$

5.2.3. Restauración de simetría en el límite de N grande

Como se ha discutido en el capítulo anterior, las ecuaciones del valor medio del campo en el límite de N grande difieren de aquellas en la aproximación de Hartree con $N = 1$. En particular, la condición para tener un extremo del potencial en $\bar{\phi}_* \neq 0$, según la ecuación (4.86), resulta

$$\mathcal{M}_{dyn}^2(\bar{\phi}_*, R) = 0. \quad (5.13)$$

Luego, al insertar esta condición en la ecuación para el propagador (4.85), se tiene

$$\square G_1(x, x') = 0. \quad (5.14)$$

Sin embargo, como mencionamos en el capítulo 3, es bien sabido que no existe un propagador invariante de De Sitter para un campo escalar mínimamente acoplado y sin masa [13, 14]. Por lo tanto, un $\bar{\phi} \neq 0$ constante no puede ser una solución de las ecuaciones (4.84) y (4.85).

Con este argumento, se descarta la existencia de soluciones con ruptura de simetría en De Sitter en el límite de N grande [42, 55]. Permanece como pregunta abierta si la restauración de simetría se da para todo N .

5.3. Discusión

En este capítulo nos hemos concentrado en el espacio-tiempo de De Sitter. Para esta métrica determinada, hemos escrito la forma explícita la ecuación de la masa dinámica en la approxima-

ción de Hartree. Luego, hemos hallado la solución autoconsistente de dicha ecuación en el límite infrarrojo y calculado el potencial efectivo a partir de la misma. Posteriormente hemos realizado un análisis del potencial efectivo para diferentes valores de la curvatura del espacio-tiempo de De Sitter R , de los parámetros renormalizados y de la curvatura R_0 asociada al punto de renormalización. Este análisis es de alguna manera análogo al realizado en [24] para un campo escalar auto-interactuante a temperatura finita, donde el punto de renormalización es elegido para un valor finito de la temperatura fijo.

Nuestros resultados muestran que la simetría Z_2 puede romperse espontáneamente cuando se utiliza la renormalización consistente, aunque no en condiciones generales. Esto debe contrastarse con los resultados previos obtenidos usando una renormalización estándar de la teoría, como puede verse fácilmente a partir de las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador. En efecto, cuando las relaciones de consistencia no son tenidas en cuenta y no se permite la presencia de diferentes contratérminos, las ecuaciones (4.50) y (4.51) son aquellas del límite de N grande. Por lo tanto no es posible hallar ruptura espontánea de simetría utilizando la renormalización estándar.

De todas formas, estos resultados no son concluyentes sobre la existencia o no de la ruptura espontánea de la simetría Z_2 . No está claro si la existencia de soluciones con $\bar{\phi} \neq 0$ es un artefacto de la aproximación de Hartree o no. Es plausible que la inclusión del diagrama del "atardecer" en el cálculo de la acción efectiva 2PI restaure la simetría Z_2 . Para abordar esta cuestión hay varias complicaciones técnicas a ser resueltas. Por un lado, el uso del formalismo de camino temporal cerrado, o IN-IN, será inevitable al considerar los términos no locales en la acción efectiva 2PI. Por otra parte, la inclusión de diagramas de mayor número de loops en la acción efectiva 2PI involucra algunos puntos sutiles en la renormalización, incluso en espacio-tiempo plano [25], que tendrán su contrapartida en espacios curvos.

Por último, es importante demostrar que este procedimiento de renormalización consistente puede ser extendido en espacio-tiempos curvos generales para hacer finito también al sector de gravedad de la teoría. Este es el principal objetivo del próximo capítulo.

Capítulo 6

Ecuaciones de Einstein Semiclásicas y soluciones autoconsistentes en la aproximación de Hartree

Hasta ahora nos hemos ocupado de las ecuaciones del valor medio del campo y de la masa dinámica, obtenidas a partir de la acción efectiva 2PI en la aproximación de Hartree. Éstas dan la dinámica de $\bar{\phi}$ y G para una elección dada de la métrica $g_{\mu\nu}$. Sin embargo, estas ecuaciones no tienen en cuenta el efecto del campo cuántico sobre la geometría de fondo. Con el fin de evaluar si esta backreaction es importante o no, tenemos que hacer frente a las EES en el contexto de la acción efectiva 2PI. Primero, se debe verificar que el procedimiento de renormalización consistente es aplicable también a dichas ecuaciones. Luego, se puede estudiar como la dinámica conjunta de la métrica clásica y el campo cuántico puede modificar las conclusiones sobre la posibilidad de ruptura espontánea de simetría.

En este capítulo se presentan los resultados publicados en [31].

6.1. Renormalización de las ecuaciones de Einstein semiclásicas en espacios curvos generales

En el capítulo 2 hemos discutido como definir el valor de expectación del tensor de energía-momento que entra en el miembro derecho de las EES (2.38), a partir de la variación de la acción efectiva 1PI respecto de la métrica (2.13). Aquí, generalizamos esa definición considerando en

su lugar la acción efectiva 2PI,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, G, g^{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (6.1)$$

Siguiendo la discusión del capítulo 2, una definición correcta del valor de expectación requiere la utilización del formalismo IN-IN. Sin embargo, a los fines de la renormalización, esto no es indispensable. Asimismo, como se ha mencionado en el capítulo 4, en la aproximación de Hartree los resultados son equivalentes en los formalismos IN-OUT e IN-IN.

El procedimiento de renormalización involucra el cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ y la regularización de sus divergencias. Éstas pueden ser de dos tipos, independientes del campo $\bar{\phi}$ y por lo tanto sólo geométricas, como en el caso del campo libre discutido en el capítulo 2, o por el contrario dependientes de $\bar{\phi}$ y relacionado con las autointeracciones. Para que las EES sean renormalizables en el contexto de la renormalización consistente, las divergencias no geométricas deben ser canceladas completamente con la misma elección de contratérminos que para las ecuaciones de campo y el propagador.

Vamos a seguir el procedimiento habitual y definir el tensor de energía-momento renormalizado como en (2.36), donde el cuarto orden adiabático se entiende como la expansión que contiene hasta cuatro derivadas de la métrica y hasta dos derivadas del valor medio del campo [47]. Nuestro objetivo es mostrar que con la misma elección de contratérminos que para las ecuaciones de campo y del propagador, la cantidad $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}$ solo contiene divergencias geométricas que pueden absorberse en las constantes gravitacionales desnudas.

El valor de expectación $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ puede calcularse de manera similar al caso libre (2.34) [48]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{B,libre} + \langle T_{\mu\nu}^f \rangle \Big|_B + \left[\frac{\lambda_{B2}}{32} [G_1]^2 - \frac{\lambda_{B4}}{4!} \bar{\phi}^4 \right] g_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

donde los términos nuevos entre corchetes provienen de la autointeracción (3.5), y donde el subíndice B indica que los parámetros en esas expresiones son los desnudos. Notar en particular que la contribución cuadrática en $[G_1]$ se interpreta como proveniente del valor de expectación $\langle \varphi^4 \rangle$, recordando que en la aproximación de Hartree (con $N = 1$) los valores de expectación de productos de campos se pueden escribir en términos $\langle \varphi^2 \rangle = [G_1]/2$, usando que los estados son Gaussianos (4.37).

Para la renormalización es útil separar en las expresiones para $T_{\mu\nu}(\bar{\phi})|_{B,libre}$ y $\langle T_{\mu\nu}^f \rangle$ los

acoplamientos entre partes renormalizadas y contratérminos de sustracción no mínima (4.76),

$$T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{B,libre} = T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{R,libre} + \delta\tilde{\xi}(-\bar{\phi}_{;\mu\nu}^2 + g_{\mu\nu}\square\bar{\phi}^2 + \bar{\phi}^2 G_{\mu\nu}) - \frac{\delta\tilde{m}^2}{2}\bar{\phi}^2 g_{\mu\nu} \quad (6.3)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^f \rangle \Big|_B = \langle T_{\mu\nu}^f \rangle \Big|_R + \frac{\delta\tilde{\xi}}{2} \left(-[G_1]_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square[G_1] + R_{\mu\nu}[G_1] \right), \quad (6.4)$$

donde el subíndice R indica que ahora los parámetros son los renormalizados. Notar que, si bien no hay divergencias en $T_{\mu\nu}(\bar{\phi})|_{R,libre}$, la cantidad $\langle T_{\mu\nu}^f \rangle|_R$ todavía tiene divergencias provenientes del límite de coincidencia de G_1 y el de sus derivadas (ver ec. (2.35)).

Aquí es importante recordar que la función de 2-puntos $G_1(x, x')$ que aparece en estas expresiones está dada por una ecuación autoconsistente, en virtud del tratamiento no perturbativo de la acción efectiva 2PI. En la aproximación de Hartree, ésta satisface la ecuación (4.51), que implica que en este caso la función de 2-puntos es aquella de un campo libre con masa m_{dyn}^2 y acoplamiento con la curvatura ξ_R .

Ahora estamos listos para demostrar que los contratérminos elegidos anteriormente para renormalizar las ecuaciones del campo y de la masa dinámica también cancelan las divergencias no geométricas de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Las expresiones que involucran a $[G_1]$ y sus derivadas pueden expresarse en términos de m_{dyn}^2 y de las constantes desnudas usando que la masa dinámica se define mediante la igualdad entre las ecuaciones (4.49) y (4.51), que en una forma más conveniente se lee

$$\frac{\lambda_{B2}}{4}[G_1] = m_{dyn}^2 - \delta\tilde{\xi}R - m_B^2 - \frac{\lambda_{B2}}{2}\bar{\phi}^2. \quad (6.5)$$

Con este reemplazo, junto con (6.3), (6.4) y (6.2) tenemos

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle = & T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{R,libre} + \langle T_{\mu\nu}^f \rangle \Big|_R + \frac{(3\lambda_{B2} - \lambda_{B4})}{4!}\bar{\phi}^4 g_{\mu\nu} \\ & + \frac{2\delta\tilde{\xi}}{\lambda_{B2}} \left[-m_{dyn;\mu\nu}^2 + g_{\mu\nu}\square m_{dyn}^2 + G_{\mu\nu}m_{dyn}^2 \right] + \frac{m_{dyn}^4}{2\lambda_{B2}}g_{\mu\nu} - m_{dyn}^2 \frac{m_B^2}{\lambda_B}g_{\mu\nu} \\ & + \frac{\delta\tilde{\xi}^2}{\lambda_{B2}} {}^{(1)}H_{\mu\nu} - 2\delta\tilde{\xi} \frac{m_B^2}{\lambda_{B2}}G_{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{2} \frac{m_B^2}{\lambda_B}g_{\mu\nu} \\ & + (m_R^2 - m_{dyn}^2) \frac{\bar{\phi}^2}{2}g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Aquí el término proporcional a $\bar{\phi}^4$ ya es finito dada la relación (4.48) entre los contratérminos, y es por lo tanto igual a $\lambda_R \bar{\phi}^4 g_{\mu\nu}/12$. Los términos de la segunda línea contienen las divergencias no geométricas que deberán cancelarse con aquellas de $\langle T_{\mu\nu}^f \rangle|_R$, mientras que aquellos de la

tercera línea contienen divergencias puramente geométricas. Por último, el término de la cuarta línea es finito.

Vale enfatizar que las divergencias en la ecuación (6.6) son proporcionales a polos simples en ϵ . De hecho, a partir de la definición de $\delta\tilde{\xi} = \xi_B - \xi_R$ y de las relaciones (4.79) es sencillo ver que

$$\frac{\delta\tilde{\xi}}{\lambda_{B2}} = \left(\frac{1}{\lambda_R} - \frac{1}{\lambda_{B2}} \right) \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) + J, \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\xi}^2}{\lambda_{B2}} &= \lambda_{B2} \left[\frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + J \right]^2 - 2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + J \right] \\ &\quad + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})^2}{\lambda_{B2}}, \end{aligned} \quad (6.7b)$$

con J definido en (4.79), las cuales son expresiones exactas. Observar que λ_{B2}^{-1} contiene sólo un polo simple,

$$\frac{1}{\lambda_{B2}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{16\pi^2\epsilon}. \quad (6.8)$$

Ahora expandimos $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ hasta el cuarto orden adiabático. Usaremos las expresiones explícitas del límite de coincidencia de G_1 y sus derivadas dados en la referencia [47]. La expansión adiabática hasta orden cuatro de $\langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle \equiv \langle T_{\mu\nu}^f \rangle|_R$ es

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad4} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{m_{dyn}^2}{\mu^2} \right)^{\epsilon/2} \left[\frac{1}{2} m_{dyn}^4 g_{\mu\nu} \Gamma \left(-2 - \frac{\epsilon}{2} \right) + m_{dyn}^2 \left\{ \frac{1}{2} [\Omega_1] g_{\mu\nu} + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R_{\mu\nu} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \Gamma \left(-1 - \frac{\epsilon}{2} \right) + \left\{ \frac{1}{2} [\Omega_2] g_{\mu\nu} + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R_{\mu\nu} [\Omega_1] - [\Omega_{1;\mu\nu}] \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. \left(\frac{1}{2} - \xi_R \right) [\Omega_1]_{;\mu\nu} + \left(\xi_R - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \square [\Omega_1] \right\} \Gamma \left(-\frac{\epsilon}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde las expresiones para $[\Omega_1]$, $[\Omega_2]$ y $[\Omega_{1;\mu\nu}]$ pueden encontrarse en el Apéndice A de [47]. Notar que aquí, sin embargo, estas contribuciones están expresadas en términos de ξ_R en lugar de ξ_B . Expandiendo para $\epsilon \rightarrow 0$, reagrupando los términos geométricos para formar los tensores

apropiados y separando la parte divergente llegamos a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{T}_{\mu\nu} \rangle_{ad4} &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \left\{ -\frac{1}{2}m_{dyn}^4 g_{\mu\nu} + 2m_{dyn}^2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) G_{\mu\nu} + \frac{1}{90} \left[{}^{(2)}H_{\mu\nu} - H_{\mu\nu} \right] \right. \\
 &\quad - \left. \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2 {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left(g_{\mu\nu} \square m_{dyn}^2 - m_{dyn;\mu\nu}^2 \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{m_{dyn}^4}{64\pi^2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] + \frac{m_{dyn}^2}{16\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) G_{\mu\nu} \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1}{90} \left({}^{(2)}H_{\mu\nu} - H_{\mu\nu} \right) - \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2 {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left(g_{\mu\nu} \square m_{dyn}^2 - m_{dyn;\mu\nu}^2 \right) \right] \left[1 + \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

Remplazando la ecuación (6.10) en la ecuación (6.6) se puede verificar que se cancelan las divergencias no geométricas en (6.6) (aquellas que involucran a m_{dyn}^2). Este resultado muestra la renormalizabilidad de las EES dentro del procedimiento de renormalización consistente.

Para completar el análisis, escribimos la expresión completa para el orden adiabático cuatro, la cual separamos en su parte divergente y convergente:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con}, \tag{6.11}$$

con

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div} &= \frac{1}{90} \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \left({}^{(2)}H_{\mu\nu} - H_{\mu\nu} \right) - 2\delta\tilde{\xi} \left[\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R_0}{32\pi^2} \right] G_{\mu\nu} \\
 &\quad + \delta\tilde{\xi} \left[\frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)}{\lambda_R} + J \right] {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \frac{\delta\tilde{m}}{2} \left[\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R_0}{32\pi^2} \right] g_{\mu\nu} - \frac{m_R^4}{64\pi^2} g_{\mu\nu}, \tag{6.12}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con} &= T_{\mu\nu}(\bar{\phi}) \Big|_{R,libre} + \frac{\lambda_R}{12} \bar{\phi}^4 g_{\mu\nu} + \left(\frac{m_R^2}{2} - m_{dyn}^2 \right) \left[\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right] g_{\mu\nu} \\
 &+ \frac{m_{ph}^4}{64\pi^2} \left[\frac{32\pi^2}{\lambda_R^*} + \frac{1}{2} + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \frac{R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{dS}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right] g_{\mu\nu} \\
 &+ \frac{1}{16\pi^2} \left[2m_{dyn}^2 G_{\mu\nu} - \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \square m_{dyn}^2 - 2m_{dyn;\mu\nu}^2 \right] \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \\
 &+ \frac{1}{32\pi^2} \left\{ -\frac{m_{ph}^4}{2} g_{\mu\nu} + 2m_{dyn}^2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) G_{\mu\nu} + \frac{1}{90} ({}^{(2)}H_{\mu\nu} - H_{\mu\nu}) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2 {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 2 \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) (g_{\mu\nu} \square m_{dyn}^2 - m_{dyn;\mu\nu}^2) \right\} \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{m_R^2} \right) \\
 &- \frac{m_{dyn}^2}{16\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) G_{\mu\nu} + (m_R^2 - m_{dyn}^2) \frac{\bar{\phi}^2}{2} g_{\mu\nu} + \frac{m_R^4}{64\pi^2} g_{\mu\nu}. \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Como se esperaba, la parte divergente contiene divergencias puramente geométricas. La parte convergente es finita, depende del campo, y puede ser escrita en términos de los parámetros renormalizados (y por lo tanto independiente de $\tilde{\mu}$). Hemos incluído la contribución finita $-\frac{m_R^4}{64\pi^2} g_{\mu\nu}$ en $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div}$ para asegurar el límite correcto a 1-loop del contratérmino de la constante cosmológica.

Ahora podemos sumar y restar $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}$ en el miembro derecho de las EES (2.38),

$$\begin{aligned}
 \kappa_B^{-1} (G_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu}) + \alpha_{1B} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \alpha_{2B} {}^{(2)}H_{\mu\nu} + \alpha_{3B} H_{\mu\nu} = \\
 [\langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}] + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con}, \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

donde la cantidad entre corchetes en el miembro derecho se identifica según (2.36) como $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$, es decir, el valor de expectación renormalizado del tensor de enegía-momento. Para completar la renormalización absorbemos $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div}$ en una redefinición de las constantes gravitacionales

desnudas del miembro izquierdo,

$$\kappa_B^{-1} = \kappa_R^{-1} + \frac{m_B^2}{8\pi^2} \left\{ \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] - \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \right\}, \quad (6.15a)$$

$$\Lambda_B \kappa_B^{-1} = \Lambda_R \kappa_R^{-1} - \frac{m_B^2 m_R^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) - \frac{dF_{dS}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right] - \frac{m_R^4}{64\pi^2}, \quad (6.15b)$$

$$\alpha_{1B} = \alpha_{1R} - \frac{(\xi_B - \frac{1}{6})}{16\pi^2} \left\{ \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] - \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \right\}, \quad (6.15c)$$

$$\alpha_{2B} = \alpha_{2R} + \frac{1}{1440\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right], \quad (6.15d)$$

$$\alpha_{3B} = \alpha_{3R} - \frac{1}{1440\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]. \quad (6.15e)$$

Estos son consistentes con los resultados conocidos de 1-loop [47] al sustituir los parámetros desnudos en el lado derecho (en los contratérminos) por los renormalizados y fijar $R_0 \rightarrow 0$, lo que justifica la elección de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div}$ en (6.12). La relación entre los parámetros desnudos de la parte gravitacional y aquellos renormalizados es dependiente de $\tilde{\mu}$. En el capítulo 4 hemos visto que lo mismo ocurre al calcular los contratérminos asociados a los parámetros renormalizados del campo (4.76).

Finalmente, las EES renormalizadas son

$$\kappa_R^{-1} G_{\mu\nu} + \Lambda_R \kappa_R^{-1} g_{\mu\nu} + \alpha_{1R} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + \alpha_{2R} {}^{(2)}H_{\mu\nu} + \alpha_{3R} H_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con}, \quad (6.16)$$

las cuales, como era de esperar, pueden ser expresadas en términos de sólo los parámetros renormalizados. Esto concluye la prueba de la renormalización consistente de las EES en el contexto de la aproximación de Hartree a la acción efectiva 2PI, en espacios curvos generales. Este resultado se complementa con aquellos del capítulo 4, donde se probó la renormalizabilidad de las ecuaciones del valor medio del campo y de la masa dinámica en este mismo contexto.

6.2. Las ecuaciones semicásicas de Einstein en De Sitter

En esta sección aplicamos los resultados anteriores al espacio-tiempo de De Sitter y calculamos explícitamente el tensor de energía-momento renormalizado y las EES. Posteriormente, consideramos las ecuaciones del campo y la masa dinámica en conjunto con las EES para analizar la existencia de soluciones autoconsistentes con y sin ruptura espontánea de simetría.

En De Sitter todas las cantidades geométricas son proporcionales a $g_{\mu\nu}$, con un factor de proporcionalidad que sólo depende de R y el número de dimensiones d :

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{d} g_{\mu\nu}, \quad (6.17a)$$

$$G_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2} \right) R g_{\mu\nu}, \quad (6.17b)$$

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{d} \right) R^2 g_{\mu\nu}, \quad (6.17c)$$

$${}^{(2)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{2d} \left(1 - \frac{4}{d} \right) R^2 g_{\mu\nu}, \quad (6.17d)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{d(d-1)} \left(1 - \frac{4}{d} \right) R^2 g_{\mu\nu}. \quad (6.17e)$$

Lo mismo sucede con cualquier otro tensor de segundo rango, por ejemplo

$$[G_{1;\mu\nu}] = \frac{1}{d} [\square G_1] g_{\mu\nu}. \quad (6.18)$$

La invarianza de De Sitter también implica que cualquier escalar invariante es constante, y en particular que $[G_1]$ es independiente del punto espacio-temporal. El tensor de energía-momento también será proporcional a $g_{\mu\nu}$. En efecto, de la expresión general (6.2) junto con las ecuaciones (2.33) y (2.35), y usando (6.17), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= \left[-\frac{m_B^2}{2} \bar{\phi}^2 - \frac{\lambda_{B4}}{4!} \bar{\phi}^4 + \xi_B \bar{\phi}^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2} \right) R - \frac{1}{2d} [\square G_1] - \frac{m_B^2}{4} [G_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [\square G_1] + \xi_B \frac{[G_1]}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2} \right) R - \frac{\lambda_{B2}}{8} \bar{\phi}^2 [G_1] - \frac{\lambda_{B2}}{32} [G_1]^2 \right] g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nuevamente utilizando la ecuación (6.5) para simplificar la expresión y escribiendo $d = 4 + \epsilon$, llegamos a

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= \left\{ -\frac{m_B^2}{2} \bar{\phi}^2 - \frac{\xi_B}{4} \bar{\phi}^2 R - \frac{\lambda_{B4}}{4!} \bar{\phi}^4 - \frac{1}{8} \left[m_B^2 + \frac{\lambda_{B2}}{2} \bar{\phi}^2 \right] [G_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{4+\epsilon} - 1 \right) \left[\xi_B \bar{\phi}^2 R - \frac{1}{2} \left(m_{dyn}^2 - \delta \tilde{\xi} R \right) [G_1] \right] \right\} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Aquí todavía no podemos poner $\epsilon \rightarrow 0$ en el denominador, ya que esta multiplicado tanto por parámetros desnudos como por $[G_1]$, que contienen polos en ϵ que pueden conducir a términos

finitos en dicho límite. Luego de algunas manipulaciones y de descartar los términos de $\mathcal{O}(\epsilon)$, resulta

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= \left\{ \frac{1}{2} \left[\delta \tilde{m}^2 + \left(1 + \frac{\epsilon}{4+\epsilon} \right) \delta \tilde{\xi} R \right] \left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{4}{4+\epsilon} \right) \frac{\epsilon \delta \tilde{\xi}}{8} \left(\frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + J \right) R^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right) (m_R^2 - m_{dyn}^2) \\ &- \left. \frac{1}{4} (m_{dyn}^2 + \xi_R R) \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_R}{12} \bar{\phi}^4 + \frac{1}{128\pi^2} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right]^2 \right\} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para calcular el valor de expectación renormalizado, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}$ necesitamos evaluar $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}$ (dado en la ecuación (6.11)) en De Sitter. Para ello, utilizamos las expresiones geométricas en d dimensiones (6.17). Separando nuevamente el resultado en $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con}$ se tiene,

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{div} &= \left\{ \frac{1}{64\pi^2} \frac{R^2}{2160} + \frac{1}{2} \left[\delta \tilde{m}^2 + \left(1 + \frac{\epsilon}{4+\epsilon} \right) \delta \tilde{\xi} R \right] \left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{4}{4+\epsilon} \right) \frac{\epsilon \delta \tilde{\xi}}{8} \left(\frac{(\xi_R - \frac{1}{6})}{\lambda_R} + J \right) R^2 - \frac{m_R^4}{64\pi^2} \right\} g_{\mu\nu}, \quad (6.22) \\ \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ad4}^{con} &= \left\{ \frac{m_R^2}{2} \left[\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} + \frac{m_R^2}{32\pi^2} \right] + \frac{m_{dyn}^2}{64\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right. \\ &+ \frac{m_{dyn}^4}{64\pi^2} \left[\frac{32\pi^2}{\lambda_R^*} + \frac{1}{2} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{ds}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right] \\ &- \frac{m_{dyn}^2}{64\pi^2} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{m_R^2} \right) - \frac{m_{dyn}^2 R}{32\pi^2} \frac{dF_{ds}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} \\ &- \left. m_{dyn}^2 \left[\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right] - \left(m_{dyn}^2 + \frac{\xi_R}{2} R \right) \frac{\bar{\phi}^2}{2} + \frac{\lambda_R}{12} \bar{\phi}^4 \right\} g_{\mu\nu}. \quad (6.23) \end{aligned}$$

Notar que el primer término de la ecuación (6.22) es finito y es el origen de la anomalía de traza [11]. Este término será relevante a la hora de buscar soluciones autoconsistentes en De Sitter, como ya sucede en el caso de campos libres [64]. Juntando todo, el valor de expectación

renormalizado resulta

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = & -\frac{1}{64\pi^2} \left\{ m_{dyn}^2 \left[\left(\frac{32\pi^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6})R_0}{m_R^2} - 2 \frac{dF_{dS}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \right) (m_{dyn}^2 - m_R^2) - 16\pi^2 \bar{\phi}^2 \right. \right. \\
 & - \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{m_R^2} \right) - 2R \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} - 2m_R^2 \frac{dF_{dS}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} \Big] \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + \frac{R^2}{2160} \right\} g_{\mu\nu}. \right. \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Para hacer contacto con el resultado conocido a 1-loop, podemos usar la ecuación (4.75) para llegar a una expresión más familiar [47]

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = & -\frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2m_{dyn}^2 \left[F_{dS}(m_R^2, R_0) - R_0 \frac{dF_{dS}}{dR} \Big|_{m_R^2, R_0} - m_R^2 \frac{dF_{dS}}{dm_{dyn}^2} \Big|_{m_R^2, R_0} - F_{dS}(m_{dyn}^2, R) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 + \frac{R^2}{2160} \right\} g_{\mu\nu}. \tag{6.25}
 \end{aligned}$$

Fijando $R_0 \rightarrow 0$ y usando (3.13) para $F_{dS}(m_{dyn}^2, R)$, se obtiene una expresión que es exactamente la misma que en el cálculo a 1-loop [47], en la medida que aquí se reemplace $m_{dyn}^2 = m_R^2 + \lambda_R \bar{\phi}^2/2$, en lugar de que m_{dyn}^2 sea una solución de la ecuación autoconsistente (4.75). Más aún, es sencillo ver que se satisface el límite de campo libre usual [11], ya que $m_{dyn}^2 \rightarrow m_R^2$ cuando $\lambda_R \rightarrow 0$.

Finalmente, escribimos las EES en De Sitter. En el miembro derecho tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{con} = & \left[-\frac{1}{4} (m_{dyn}^2 + \xi_R R) \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda_R}{12} \bar{\phi}^4 \right] g_{\mu\nu} \\
 & - \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 32\pi^2 \left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right) (m_{dyn}^2 - m_R^2) \right. \\
 & \left. - m_R^4 + \frac{R^2}{2160} - \frac{1}{2} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right]^2 \right\} g_{\mu\nu}, \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

mientras que en el izquierdo tenemos $G_{\mu\nu} + \Lambda_R g_{\mu\nu} = (-R/4 + \Lambda_R) g_{\mu\nu}$. Los tensores cuadráticos ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$, ${}^{(2)}H_{\mu\nu}$ y $H_{\mu\nu}$ se anulan para $d = 4$, por lo que no aparecen aquí. Sin embargo, debido a las divergencias que los parámetros desnudos α_{iB} , con $i = 1, 2, 3$, tienen en $d \rightarrow 4$, queda un remanente finito proporcional a R^2 en el miembro derecho de las EES en dicho límite, que como mencionamos es la anomalía de traza. Entonces, factorizando el $g_{\mu\nu}$ presente en ambos lados,

nos queda una ecuación escalar (y algebraica) para el único grado de libertad de la métrica, R ,

$$\begin{aligned} M_{pl}^2 \left(-\frac{R}{4} + \Lambda_R \right) &= -\frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{R^2}{2160} + 32\pi^2 \left(\frac{m_R^2}{\lambda_R^*} + \frac{(\xi_R - \frac{1}{6}) R_0}{32\pi^2} \right) (m_{dyn}^2 - m_R^2) - m_R^4 \right. \\ &\quad \left. + 16\pi^2 (m_{dyn}^2 + \xi_R R) \bar{\phi}^2 - 64\pi^2 \frac{\lambda_R}{12} \bar{\phi}^4 - \frac{1}{2} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde M_{pl} es la masa de Planck, con $\kappa_R = 8\pi/M_{pl}^2 = 8\pi G_N$.

6.2.1. Soluciones de De Sitter autoconsistentes

Para estudiar la relevancia del efecto de backreaction, es decir, si los campos cuánticos afectan la dinámica de la métrica de fondo, se deben resolver simultáneamente las ecuaciones del valor medio del campo (4.50), la ecuación de la masa dinámica (4.75) y las EES (6.27) de forma autoconsistente para $\bar{\phi}$, m_{dyn}^2 y la curvatura escalar de De Sitter R . Este es un sistema cerrado de ecuaciones algebraicas dado un conjunto predefinido de parámetros m_R^2 , ξ_R , λ_R y Λ_R , cuyas soluciones físicamente interesantes en un escenario cosmológico son aquellas con R y $\mathcal{M}_{dyn}^2 = m_{dyn}^2 + \xi_R R$ ambos positivos. La inclusión de las EES (6.27) pone un nuevo parámetro en juego, a saber, la constante cosmológica Λ_R , así como una nueva escala de masa M_{pl}^2 . En el análisis presentado en el capítulo anterior, R era considerado fijo (es decir, como un parámetro) y el potencial efectivo y sus mínimos fueron estudiados con el fin de encontrar los valores de los parámetros restantes m_R^2 , ξ , λ_R y R_0 para los cuales existen soluciones con ruptura espontánea de simetría. Haber considerado a R como fijo tiene sentido bajo el supuesto de que el efecto del campo cuántico sobre la métrica de fondo es pequeño, y por lo tanto es posible desacoplar las EES de las ecuaciones del campo y de la masa dinámica. Si este es el caso, el valor de R se vuelve efectivamente independiente de $\bar{\phi}$ y M_{dyn}^2 , y viene dado simplemente por el parámetro Λ_R .

El objetivo de esta sección es encontrar algunos ejemplos de soluciones autoconsistentes de las tres ecuaciones para los tres grados de libertad. Con este fin, tomamos como punto de partida algunos conjuntos de valores de los parámetros m_R^2 , ξ , λ_R y R_0 que permitan tanto soluciones simétricas como aquellas con ruptura de simetría, según el análisis del capítulo anterior. Luego, buscamos soluciones de $\bar{\phi}$, m_{dyn}^2 y R para diversos valores de Λ_R y analizamos cómo éstos difieren de la solución clásica (definida como aquella en ausencia de backreaction, o $M_{pl}^2 \rightarrow \infty$). Si esta diferencia es pequeña, entonces la backreaction puede ser ignorada, de lo contrario, debe tenerse en cuenta.

Un punto adicional de discusión es si los parámetros R_0 y Λ_R deben estar relacionados o no. Si esto llegara a ser el caso, una manera sensata de fijar uno dado el otro sería utilizar la solución clásica $R_0 = 4\Lambda_R$.

Fase simétrica

Como se discutió anteriormente, el potencial efectivo siempre tiene un mínimo en $\bar{\phi} = 0$ como consecuencia de la restricción impuesta por la aproximación de Hartree $\mathcal{M}_{dyn}^2 > 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones fijando $\bar{\phi} = 0$ en (5.6) para obtener \mathcal{M}_{dyn}^2 como una función sólo de R y luego reemplazamos en la EES (6.27) para obtener una ecuación de la forma

$$\Lambda_R = I_s(R). \quad (6.28)$$

donde I_s depende también de los parámetros m_R^2 , ξ_R , λ_R y R_0 . El subíndice s se refiere al caso simétrico. Los resultados numéricos se muestran más adelante.

Fase con ruptura espontánea de la simetría

El mínimo no simétrico del potencial está dado por la ecuación (5.9), cuyas soluciones $\bar{\phi}_*^2(R)$ son (5.10). Ambas ramas dan una solución con $\mathcal{M}_{dyn}^2 > 0$, la menor correspondiente a un máximo y la mayor a un mínimo del potencial. Según el análisis descripto en el capítulo anterior, la condición sobre los coeficientes A_{ds} , B_{ds} y C_{ds} para la existencia de soluciones con ruptura de simetría esta expresada en la desigualdad (5.11).

Nuevamente, reemplazar $\bar{\phi}(R)$ y $\mathcal{M}_{dyn}^2(R)$ en la EES da una ecuación de la forma

$$\Lambda_R = I_{rs}(R). \quad (6.29)$$

El subíndice rs se refiere a la ruptura de simetría. Notar que en general $I_{rs}(R)$ es diferente a $I_s(R)$.

Resultados numéricos

En lo que sigue se presentan los resultados numéricos en términos de la desviación relativa $(R - R_{cl})/R_{cl}$ de las soluciones de la backreaction R con respecto a la solución clásica $R_{cl} = 4\Lambda_R$ como función de Λ_R , tanto para la fase simétrica como para aquella con ruptura de simetría, cuando existe.

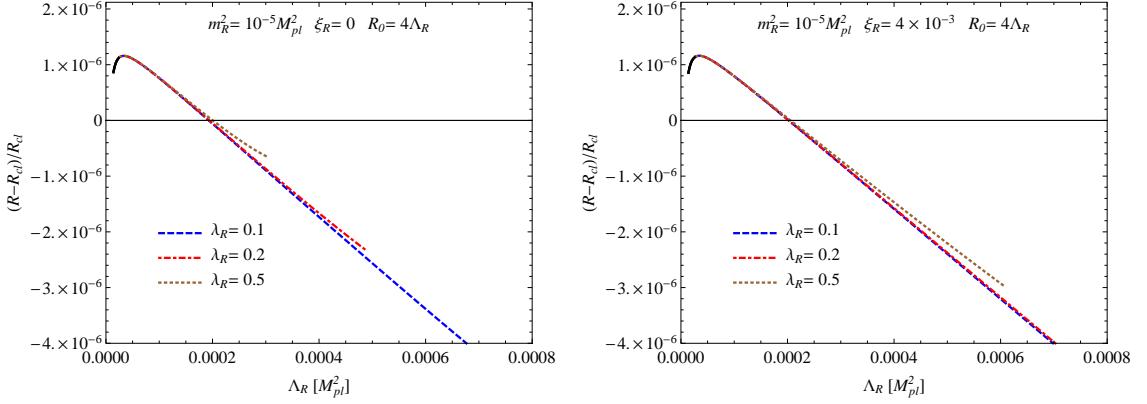


Figura 6.1: Desviación relativa de la solución a la backreaction para la curvatura del espacio-tiempo de De Sitter con respecto a la solución clásica, $(R - R_{cl})/R_{cl}$, como función de Λ_R para diferentes valores de la constante de acoplamiento λ_R . Los parámetros fijos son $R_0 = 4\Lambda_R$, $m_R^2 = 10^{-5}M_{pl}^2$. El panel de la izquierda corresponde a $\xi_R = 0$ y el de la derecha a $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$. Todas las curvas corresponden a la fase simétrica (la única posible cuando $R_0 = 4\Lambda_R$). De abajo hacia arriba: $\lambda_R = 0,1$ (línea de guiones azul), $\lambda_R = 0,2$ (línea de puntos y guiones roja), $\lambda_R = 0,5$ (línea punteada marrón). Notar que para valores suficientemente pequeños de Λ_R las curvas son continuadas por líneas sólidas negras, indicando las regiones donde $\mathcal{M}_{dyn}^2 \geq R/10$.

Analicemos en primer lugar el caso en que $R_0 = 4\Lambda_R$. Esto significa que los parámetros renormalizados se definen en el valor de la curvatura escalar del espacio-tiempo de De Sitter que la teoría habría tenido en ausencia de backreaction. Es notable que en este caso no existen soluciones con ruptura espontánea de simetría. A modo de ejemplo, en la Figura 6.1 hemos representado la desviación relativa para diferentes valores de la constante de acoplamiento λ_R , de abajo hacia arriba: $\lambda_R = 0,1, 0,2$ y $0,5$, con todas las curvas correspondiendo a la fase simétrica, y $m_R^2 = 10^{-5}M_{pl}^2$. En el panel de la izquierda se tiene acoplamiento mínimo con la curvatura $\xi_R = 0$, mientras que en el panel de la derecha su valor es $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$. Es interesante ver que, debido a las correcciones cuánticas, la curvatura escalar R puede ser tanto mayor como menor al valor clásico dependiendo del valor de Λ_R . Notar que hay ciertos valores de Λ_R no existen soluciones. Por un lado, se puede ver que la aproximación $\mathcal{M}_{dyn}^2 \ll R$ se rompe para valores suficientemente pequeños de Λ_R . Para hacer esto explícito, en la Figura 6.1 y en lo que sigue, se usan líneas sólidas negras cuando $\mathcal{M}_{dyn}^2 \geq R/10$. Por otro lado, dado que sólo estamos considerando casos donde el potencial efectivo para $\bar{\phi}$ está bien definido, existe una cota mínima (dependiente de λ_R) para la suma $m_R^2/R + \xi_R$ según se ha discutido en los capítulos anteriores, la cual se viola para valores suficientemente grandes de Λ_R .

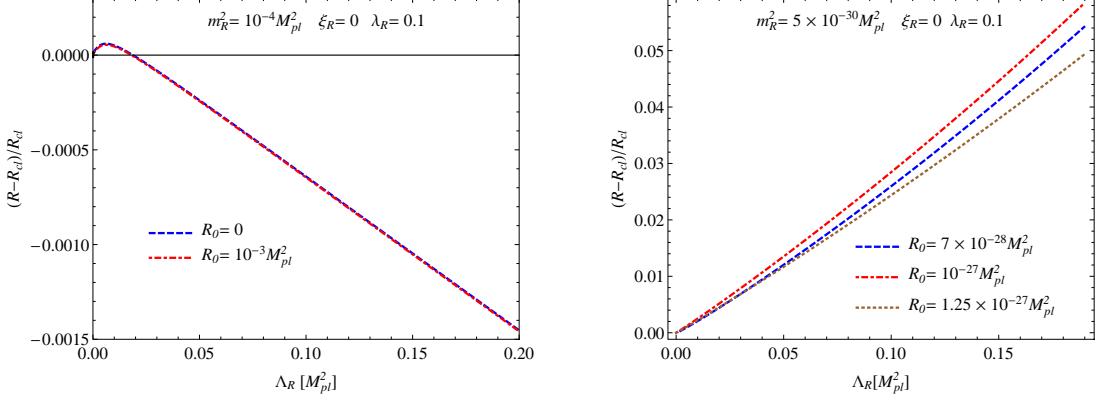


Figura 6.2: Lo mismo que en la Figura 6.1, pero para valores diferentes de la curvatura escalar R_0 asociada con el punto de renormalización. Panel izquierdo: soluciones simétricas para $R_0 = 0$ (línea de guiones azul) y $R_0 = 10^{-3} M_{pl}^2$ (línea de puntos y guiones roja) con parámetros fijos $m_R^2 = 10^{-4} M_{pl}^2$, $\xi_R = 0$, y $\lambda_R = 0.1$. Las curvas son prácticamente indistinguibles, mostrando que las soluciones no dependen fuertemente de R_0 . Panel derecho: soluciones con ruptura de la simetría para $R_0 = 7 \times 10^{-28} M_{pl}^2$ (línea de guiones azul), $R_0 = 10^{-27} M_{pl}^2$ (línea de puntos y guiones roja), y $R_0 = 1,25 \times 10^{-27} M_{pl}^2$ (línea punteada marrón) donde los parámetros fijos son $m_R^2 = 5 \times 10^{-30} M_{pl}^2$, $\xi_R = 0$, y $\lambda_R = 0.1$. En este caso, los valores de R_0 fueron elegidos para estar en el rango en el cual existen las soluciones con ruptura de simetría.

Analizemos ahora los casos donde R_0 es considerado fijo e independiente de Λ_R . En la Figura 6.2, el panel de la izquierda corresponde a la fase simétrica, mientras que el panel de la derecha a la fase con ruptura de simetría. Se puede ver que la backreaction es más significativa en la fase con ruptura (por ejemplo, la desviación es del 1% para $\Lambda_R \simeq 0,04 M_{pl}^2$, $R_0 \simeq 10^{-27} M_{pl}^2$ y $m_R^2 = 5 \times 10^{-30} M_{pl}^2$), mientras que en la fase simétrica la solución se mantiene más cerca de la clásica. La diferencia entre la backreaction y las soluciones clásicas puede volverse importante para valores grandes de la constante cosmológica (no mostrado en la Figura). En efecto, se puede mostrar que la solución de la backreaction para R se anula en el límite de Λ_R grande (superplanckiano). Sin embargo, adoptando una perspectiva de teorías de campos efectivas, nos restringimos aquí a valores subplanckianos.

Dado que en general la solución con ruptura de simetría sólo es posible para una elección adecuada de los parámetros, los valores de R_0 en el panel de la derecha fueron elegidos cuidadosamente para que se encuentren dentro de la ventana estrecha donde existen estas soluciones, y que desaparezcan por debajo de un valor pequeño de Λ_R dependiente de los parámetros (de-

bajo de $10^{-3}M_{pl}^2$ en los ejemplos que se muestran). Es posible verificar que la aproximación $\mathcal{M}_{dyn}^2 \ll R$ se puede romper dependiendo de los valores de los parámetros. Para los valores considerados en el panel de la izquierda de la Figura 6.2, esto sucede para valores suficientemente pequeños de Λ_R , mientras que para aquellos en el panel derecho, la aproximación mantiene su validez.

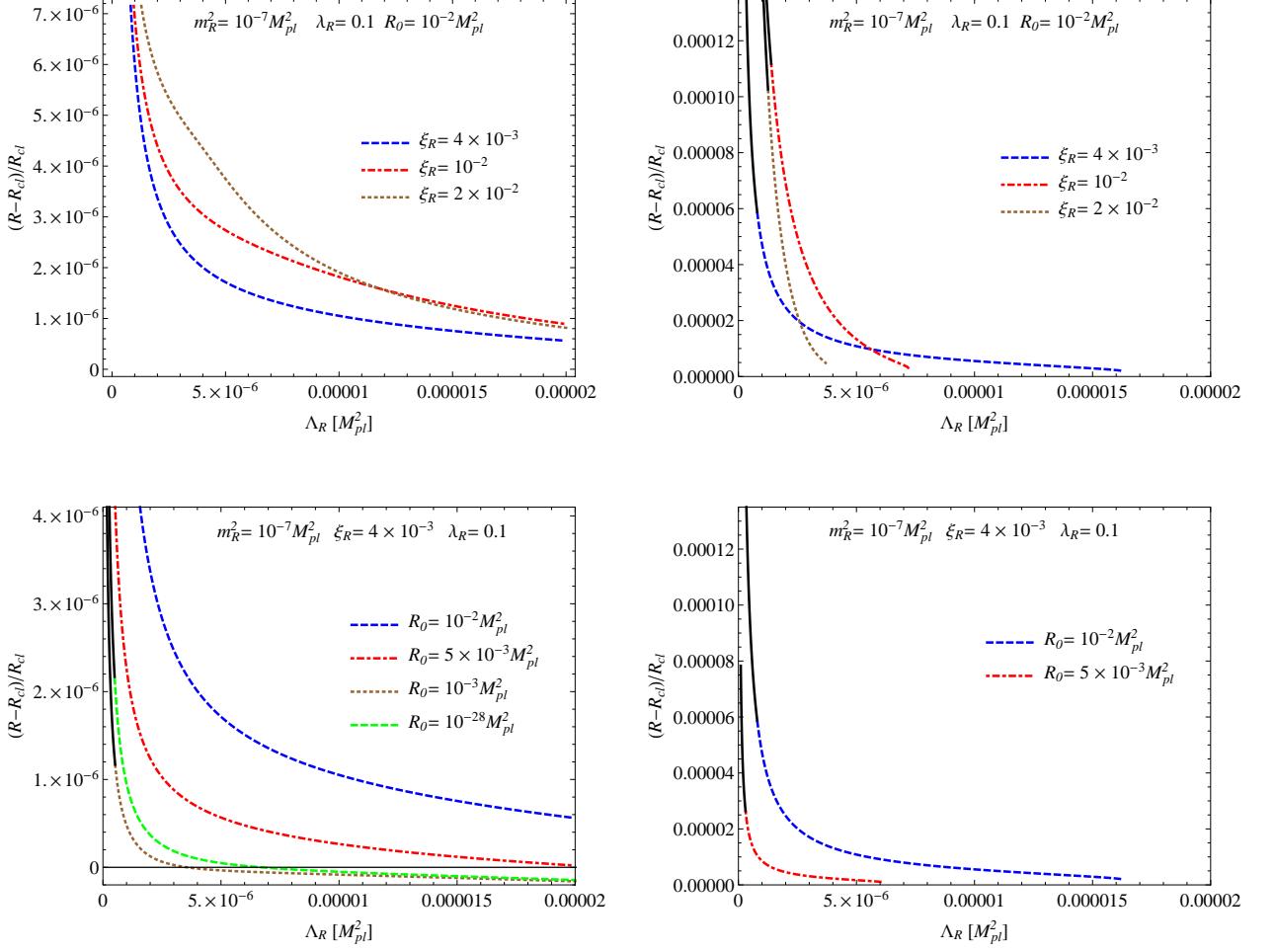


Figura 6.3: La desviación $(R - R_{cl})/R_{cl}$ vs. Δ_R para las soluciones a la backreaction correspondientes a las fases simétrica (a la izquierda) y con ruptura de simetría (a la derecha). Paneles superiores: tres curvas correspondientes a distintos valores del acoplamiento con la curvatura: $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$ (línea de guiones azul), $\xi_R = 10^{-2}$ (línea de puntos y guiones roja), y $\xi_R = 2 \times 10^{-2}$ (línea punteada marrón), donde los parámetros fijos son $m_R^2 = 10^{-7} M_{pl}^2$, $\lambda_R = 0,1$ y $R_0 = 10^{-2} M_{pl}^2$. Paneles inferiores: cuatro curvas diferentes mostrando la dependencia con el valor de R_0 para $m_R^2 = 10^{-7} M_{pl}^2$, $\xi_R = 4 \times 10^{-3}$, y $\lambda_R = 0,1$: $R_0 = 10^{-2} M_{pl}^2$ (línea de guiones azul), $R_0 = 5 \times 10^{-3} M_{pl}^2$ (línea de puntos y guiones roja), $R_0 = 10^{-3} M_{pl}^2$ (línea punteada marrón), y $R_0 = 10^{-28} M_{pl}^2$ (línea de guiones verde). Notar que no existen soluciones con ruptura de simetría para los últimos dos valores de R_0 .

La backreaction para el caso de un acoplamiento no mínimo con la curvatura se ilustra en la Figura 6.3, donde la izquierda (derecha) los paneles se corresponden con las soluciones simétricas (con ruptura de simetría). Los paneles superiores muestran la dependencia de las

soluciones con el acoplamiento a la curvatura ξ_R , mientras que en los paneles inferiores dicho acoplamiento ξ_R es fijo y se consideran diferentes valores de R_0 . En particular, a partir de la Figura de la parte inferior izquierda, se puede ver que en el caso simétrico, el efecto de las correcciones cuánticas puede aumentar o disminuir el valor de la curvatura escalar R del espacio-tiempo de De Sitter con respecto a la clásica, dependiendo del valor de Λ_R . En la fase simétrica hay soluciones autoconsistentes para valores grandes de Λ_R , mientras que en la fase con ruptura de simetría sólo existen soluciones para Λ_R por debajo de una cota superior (que depende de los parámetros). Se debe tener en cuenta que también hay un límite superior para R_0 por debajo del cual, bajo nuestras aproximaciones, no existe ninguna solución con ruptura de simetría sin importar el valor de Λ_R . Por otro lado, se puede comprobar que la aproximación $\mathcal{M}_{dyn}^2 \ll R$ deja de ser válida para valores suficientemente pequeños de Λ_R en la fase con ruptura de simetría, así como también en el caso simétrico, pero sólo cuando R_0 es menor a cierto valor crítico que depende de los parámetros. Sin embargo, como se puede ver a partir de los ejemplos considerados en las dos Figuras de los paneles de la izquierda, para valores más grandes de R_0 , hay soluciones simétricas donde en cambio la aproximación deja de valer para valores grandes de Λ_R , mientras sigue siendo válida todo el camino hasta $\Lambda_R \rightarrow 0$. En estos últimos casos, se puede concluir que existe una divergencia de la desviación relativa en este límite, lo que indica que a medida que $R_{cl} \rightarrow 0$, la curvatura escalar R va a un valor positivo finito. Por lo tanto, para este conjunto de parámetros el efecto de la backreaction es crucial para determinar la curvatura del espacio-tiempo.

6.3. Discusión

En el capítulo 4 mostramos que en la aproximación de Hartree a la acción efectiva 2PI, el procedimiento de renormalización consistente introducido en [29] en el espacio-tiempo plano puede generalizarse a espacio-tiempos curvos para hacer finitas las ecuaciones del valor medio del campo y de la masa dinámica. En este capítulo nuestro primer objetivo ha sido mostrar que esto puede extenderse también a las EES, renormalizando el sector gravitacional de la teoría. Es decir, hemos demostrado que el mismo conjunto de contráterminos se puede utilizar para renormalizar las EES (junto con los contráterminos gravitacionales habituales que son necesarios incluso para los campos libres). A fin de mantener la covarianza de la teoría regularizada, hemos utilizado el método de regularización dimensional.

En la sección 6.2, hemos aplicado nuestros resultados al espacio-tiempo de De Sitter. Hemos considerado la forma explícita de las ecuaciones de valor medio y de la masa dinámica,

calculadas en los capítulos previos, junto con la EES para esta métrica en particular, encontrando algunas soluciones de De Sitter autoconsistentes. La resolución numérica simultánea de las ecuaciones algebraicas resultantes nos permitió analizar la aparición de ruptura espontánea de simetría y, al mismo tiempo, evaluar el efecto de las fluctuaciones cuánticas en la métrica clásica. Las conclusiones importantes de nuestro análisis son, por un lado, que cuando $\Lambda_R = 4R_0$ no se encuentran soluciones con ruptura de simetría, y por otro lado, que el efecto de la backreaction depende en gran medida del valor de la curvatura escalar en el punto de renormalización R_0 . Encontramos soluciones autoconsistentes en las cuales la backreaction es importante y soluciones en las que no lo es, en función de los valores de los parámetros. En particular, hemos encontrado soluciones de De Sitter autoconsistentes en ausencia de constante cosmológica $\Lambda_R = 0$, donde los efectos cuánticos desempeñan un papel crucial.

En cuanto a los efectos infrarrojos, como se puede observar en la ecuación (6.25), no aparecen contribuciones peligrosas en el valor de expectación renormalizado del tensor de energía-momento en De Sitter. Esto es en parte debido a la generación de masa dinámica proveniente de la resumación no perturbativa del formalismo 2PI, que tiene como consecuencia la regularización de las divergencias infrarrojas del propagador. Al nivel del valor de expectación del tensor de energía-momento, que depende del propagador y sus derivadas, es de notar también que los términos potencialmente peligrosos aparecen suprimidos por un factor m_{dyn}^2 .

Capítulo 7

Otros métodos no perturbativos en De Sitter

Hasta aquí nos hemos focalizado en un método no perturbativo en particular de la teoría de campos, a saber, la acción efectiva 2PI. Dicho método resulta muy poderoso ya que permite realizar ciertas resumaciones infinitas de diagramas de Feynman. Otro método no perturbativo, también en el contexto de la teoría de campos usual, es el del grupo de renormalización dinámico [54]. En este último, se define una acción efectiva parcial integrando los modos de longitud de onda hasta cierto cutoff en momentos, y luego se estudia la evolución de las constantes renormalizadas al variar dicho valor de cutoff.

En ambos casos, estos métodos permiten capturar algunos efectos no perturbativos como ser la generación dinámica de masa en De Sitter, pero su rango de aplicaciones no se restringe a este espacio-tiempo en particular. Sin embargo, estos métodos también tienen sus limitaciones, como ser que, en general, resulta técnicamente muy complicado ir más allá del límite de N -grande. Por esta razón, la relevancia de los resultados obtenidos para el caso de interés, $N = 1$, queda todavía sin ser esclarecida. Como hemos visto, los intentos de aplicar el método de la acción efectiva 2PI a $N = 1$, nos han forzado a realizar truncaciones no sistemáticas y luego tratar de remendarlas mediante la imposición de las relaciones de consistencia. Las conclusiones obtenidas en dicho caso muestran una fuerte dependencia de los resultados con el punto de renormalización.

En éste capítulo presentaremos otro tipo de métodos no perturbativos que nacen del caso de estudio en particular, el espacio-tiempo de De Sitter, y que están particularmente adaptados para estudiar el problema infrarrojo. Estos métodos son el formalismo de inflación estocástica

[32, 17], y la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo [39, 40]. En ambos casos, la equivalencia de estos métodos con aquellos basados en la teoría de campos IN-IN convencional todavía se debate abiertamente en la literatura, si bien se ha logrado cierto progreso en el caso de un campo masivo.

Posteriormente en el capítulo 8, discutiremos nuestro análisis de la equivalencia entre el formalismo euclídeo y los resultados obtenidos con la acción efectiva 2PI en el límite de N grande. En particular, estudiaremos el caso no masivo, el cual escapa a los intentos conocidos en la literatura de establecer una equivalencia.

7.1. Inflación estocástica

En esta sección discutiremos el formalismo de inflación estocástica [32, 17], mediante la cual se plantea el problema de la evolución de los modos de longitud de onda muy larga a tiempos largos en la situación inflacionaria a través de una formulación estocástica.

Debido a la expansión quasi-exponencial del Universo durante la etapa inflacionaria, los modos del campo salen continuamente del horizonte y se vuelven clásicos (para un análisis en detalle ver [65]). Mirando uno de esos modos ϕ con longitud de onda mucho mayor que el horizonte, se tiene una variable clásica independiente de \vec{x} , y la interacción de este grado de libertad con los modos cuánticos de longitud de onda menor es descripto de manera efectiva mediante una fuente de ruido estocástico ξ en una ecuación de tipo Langevin,

$$\dot{\phi} + \frac{\partial_\phi V}{3H} = \xi(t), \quad (7.1)$$

con las condiciones $\langle \xi(t) \rangle = 0$ y $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta(t - t')$. La segunda implica una estadística Gaussiana para el ruido.

En esta interpretación, la pregunta a hacerse no es cuál es la evolución temporal de $\phi(t)$, ya que en cada realización del ruido estocástico, la historia será diferente. En cambio, hay cantidades que representan propiedades estadísticas del ensamble de realizaciones del sistema, como ser la varianza $\langle \phi(t)^2 \rangle$. En esta situación, la cantidad útil que debemos conocer es la función de distribución de probabilidad del campo $\rho(\phi, t)$, la cual satisface una ecuación de Fokker-Planck en virtud de (7.1),

$$\frac{\partial \rho(\phi, t)}{\partial t} = \frac{1}{3H} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\rho(\phi, t) \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{H^3}{8\pi^2} \frac{\partial^2 \rho(\phi, t)}{\partial \phi^2}. \quad (7.2)$$

La solución general puede ser difícil de hallar, sin embargo estamos interesados en el comportamiento a tiempos largos. Para ello podemos suponer que el sistema alcanzará un estado estacionario y por lo tanto $\partial_t = 0$. Es sencillo entonces resolver (7.2) y llegar a

$$\rho(\phi) = \mathcal{N} e^{-\frac{8\pi^2}{3H^4}V(\phi)}, \quad (7.3)$$

donde \mathcal{N} es un factor de normalización que se encarga de que $\rho(\phi)$ se comporte como una densidad de probabilidad, es decir, $\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \rho(\phi) = 1$. Con este resultado es posible calcular valores de expectación a tiempos largos de distintos observables que sean una función del campo $\mathcal{O}(\phi)$,

$$\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \mathcal{O}(\phi) \rho(\phi). \quad (7.4)$$

7.1.1. El resultado de Starobinsky y Yokoyama

El resultado interesante de Starobinsky y Yokoyama surge al analizar la varianza de un campo no masivo, que, como hemos visto, en su tratamiento habitual en la teoría de campos perturbativa en De Sitter exhibe divergencias infrarrojas. En este caso el potencial del campo contiene únicamente el término de auto-interacción (3.5), y por lo tanto la varianza de ϕ puede calcularse a partir de (7.4) como la siguiente integral,

$$\langle \phi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \phi^2 \rho(\phi) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \phi^2 e^{-\frac{8\pi^2}{3H^4} \frac{\lambda}{4!} \phi^4}}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{8\pi^2}{3H^4} \frac{\lambda}{4!} \phi^4}}, \quad (7.5)$$

donde en la segunda igualdad el denominador viene del factor de normalización \mathcal{N} . Estas integrales pueden calcularse exactamente, conduciendo al famoso resultado,

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{3}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \frac{H^2}{\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{3H^4}{8\pi^2 \mathcal{M}_{dyn}^2}, \quad (7.6)$$

el cual, por comparación con el resultado proveniente de la teoría de campos en el formalismo IN-IN para un campo masivo (3.17), nos permite definir una masa dinámica [17],

$$\mathcal{M}_{dyn}^2 = \frac{\sqrt{\lambda} H^2}{8\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}. \quad (7.7)$$

Este resultado, de carácter no perturbativo, muestra que a pesar de la ausencia de una masa en el potencial clásico, la auto-interacción del campo genera una masa de forma dinámica. La dependencia de ésta con la constante de acoplamiento es no analítica, en particular va como $\sqrt{\lambda}$, lo cual explica la imposibilidad de hallarlo en una expansión perturbativa ordinaria en potencias λ .

7.1.2. Equivalencia con la teoría de campos IN-IN

Este tratamiento parece suficientemente sencillo, pero deja planteados varios interrogantes. La primera pregunta que surge es sobre su validez, dado que esencialmente se está reemplazando un problema cuántico con infinitos grados de libertad por un problema estocástico clásico con un solo grado de libertad. ¿Es posible demostrar la equivalencia entre ambos tratamientos? ¿En qué límite o régimen de validez? Por otro lado, se espera que los resultados provenientes del formalismo de inflación estocástica capturen solamente la parte más infrarroja del comportamiento. La siguiente pregunta es entonces si es posible calcular correcciones de forma sistemática al resultado estocástico más allá del límite infrarrojo. Este tipo de preguntas han sido planteadas en la literatura e investigadas por diversos autores. A continuación repasaremos brevemente algunos argumentos presentados en [36, 38] en relación a la equivalencia.

Primero, se puede mostrar que los observables de la teoría estocástica pueden obtenerse a partir de la funcional generatriz

$$Z = \int D\xi e^{-\frac{1}{2} \int dt \xi^2 \frac{4\pi^2}{H^3}} \int D\phi \delta(\dot{\phi} + \partial_\phi V/3H - \xi), \quad (7.8)$$

a partir de la cual pueden definirse unas reglas de Feynman estocásticas. Luego, se busca llegar a reglas equivalentes partiendo de la integral funcional de la teoría de campos IN-IN, tomando el límite infrarrojo de forma apropiada. Para ello, primero se reescribe (7.8) introduciendo un campo auxiliar ψ e integrando sobre el ruido ξ ,

$$Z = \int D\phi D\psi e^{-i \int dt \left\{ \frac{1}{2}(\phi, \psi) G_0^{-1} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{\partial_\phi V_{int}}{3H^3} \psi \right\}}, \quad (7.9)$$

donde aquí se ha definido,

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{G_1(t, t')}{2} & -iG_R(t, t') \\ -iG_A(t, t') & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

y además se tiene que

$$\frac{\partial_\phi V_{int}}{3H^3} \psi = \frac{\lambda}{3!} \frac{\psi \phi^3}{3H^3}. \quad (7.11)$$

A partir de esta representación para Z es posible leer las siguientes reglas de Feynman para definir la teoría de perturbaciones en λ , representadas en la Figura 7.1.

Por otro lado, en el formalismo IN-IN de la teoría de campos en la base de Keldysh (2.48), la matriz de propagadores tiene la forma (2.49), y los vértices de interacción están dados por

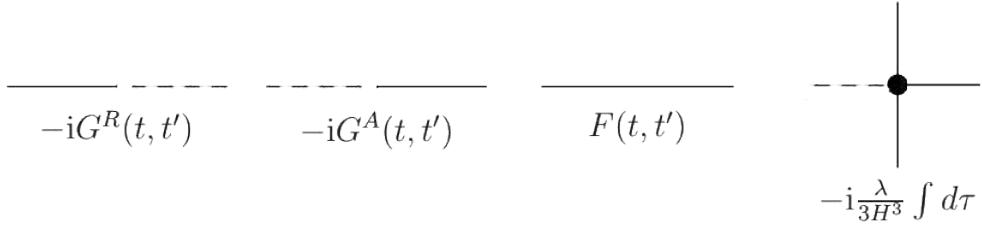


Figura 7.1: Reglas de Feynman de la teoría estocástica derivadas a partir de (7.9).

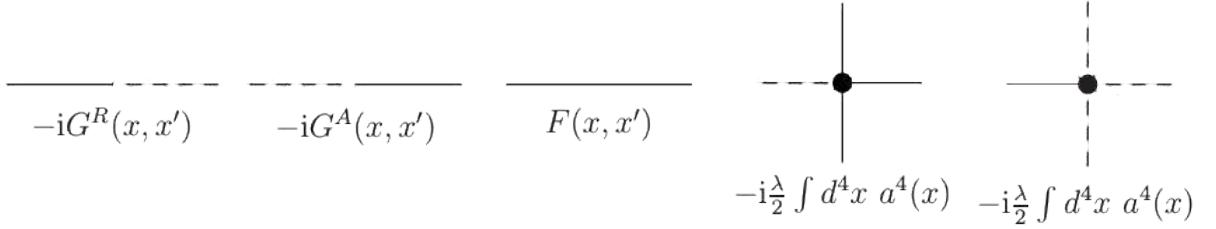


Figura 7.2: Reglas de Feynman de la teoría de campos IN-IN en la base de Keldysh.

(3.27). Las reglas de Feynman asociadas son aquellas representadas en la Figura 7.2. Aquí ya comienzan a verse algunas similitudes, como la estructura de la matriz de propagadores, pero también aparecen algunas diferencias, como la dependencia espacial en los propagadores y en las integrales del caso IN-IN, así como la presencia de un vértice de interacción adicional que no vemos en el caso estocástico.

Aquí es donde el análisis se centra en el límite infrarrojo $\mathcal{M}^2 \ll H^2$. Por un lado, puede mostrarse que en dicho límite la dependencia de los propagadores con las coordenadas espaciales \vec{x} desaparece, quedando solamente una dependencia temporal,

$$\frac{1}{2}G_1^{(\mathcal{M})}(x, x') \simeq \frac{3H^4}{4\pi^2\mathcal{M}^2}e^{-\frac{\mathcal{M}^2}{3H}|t-t'|}, \quad (7.12)$$

$$G_R^{(\mathcal{M})}(x, x') = G_A^{(\mathcal{M})}(x', x) = \frac{H^2}{4\pi}\Theta(t-t')\Theta\left((\eta-\eta')^2 - |\vec{x}-\vec{x'}|^2\right)e^{-\frac{\mathcal{M}^2}{3H}|t-t'|}. \quad (7.13)$$

Además puede observarse que el propagador retardado está suprimido con respecto al propagador estadístico por un factor H^2/\mathcal{M}^2 , como ya hemos visto anteriormente. Por esta razón, los diagramas que contienen vértices del tipo $\lambda\phi_c\phi_\Delta^3$ estarán suprimidos respecto a aquellos con vértices $\lambda\phi_c^3\phi_\Delta$.

Los pasos finales involucran un análisis de las integrales que aparecen en los diagramas de

Feynman. En [38] se prueba que, en el límite infrarrojo, estas integrales se reducen $\int d^4x \rightarrow \int dt$. Este es un punto para nada trivial, el cual no reproduciremos aquí. La equivalencia diagramática (perturbativa) queda entonces establecida para campos masivos $\mathcal{M}^2 > 0$ en el límite infrarrojo. Sin embargo, el caso de mayor interés, $\mathcal{M} = 0$, queda fuera del análisis por las mismas razones que en la teoría de campos en el formalismo IN-IN, los problemas infrarrojos.

Otros intentos en la literatura [33, 34, 35] buscan reducir la teoría de campos en el formalismo IN-IN al formalismo estocástico, separando el campo en modos de longitud de onda menor y mayor que el horizonte $\phi_<$ y $\phi_>$. Luego, el ruido estocástico ξ aparece a causa de una función ventana dependiente del tiempo. Estas técnicas se asemejan a aquellas de la mecánica cuántica de sistemas abiertos, también aplicable a la teoría cuántica de campos.

Actualmente quedan varias preguntas sin responder en relación al formalismo de inflación estocástica y su validez para estudiar los efectos infrarrojos en De Sitter. Por ejemplo, queda todavía por ser establecida la equivalencia con la teoría de campos en el formalismo IN-IN en el caso de un campo no masivo $\mathcal{M} = 0$. Éste es, sin duda, el caso de mayor interés en el contexto de los problemas infrarrojos. Otras preguntas abiertas incluyen: ¿Qué tipo de resumación, en términos de la teoría de perturbaciones usual, está implícita en el resultado estocástico no perturbativo? ¿Se podrá llevar a cabo la misma resumación con el método de la acción efectiva 2PI o algún otro método no perturbativo de la teoría de campos en el formalismo IN-IN? ¿Cómo pueden calcularse correcciones más allá del límite infrarrojo de forma sistemática en la teoría estocástica?

7.2. Espacio De Sitter euclídeo

Otra técnica no perturbativa en De Sitter proviene de definir la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo. En esta sección seguiremos el desarrollo no perturbativo inicialmente propuesto en [39], y posteriormente extendido en [40] para incluir correcciones perturbativas más allá del límite infrarrojo. En particular, haremos una generalización al caso de un campo con simetría $O(N)$ [44]. En lo que queda de este capítulo consideraremos la primera contribución a la masa dinámica en el límite infrarrojo. Dejamos para el capítulo 8 el cálculo de las correcciones más allá de este límite, tanto a la masa dinámica como a la función de 2-puntos general, y la comparación con los resultados obtenidos en la teoría de campos lorentziana en el formalismo 2PI.

7.2.1. Prolongación analítica y compactificación

El espacio de De Sitter euclídeo se obtiene a partir del espacio-tiempo de De Sitter lorentziano en coordenadas globales (3.3) mediante una continuación analítica $t \rightarrow -i(\tau - \pi/2H)$, seguido de una compactificación en el tiempo imaginario $\tau = \tau + 2\pi/H$. La métrica que resulta tiene signatura euclídea y corresponde a una d -esfera de radio H^{-1}

$$ds^2 = H^{-2} [d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\Omega^2], \quad (7.14)$$

donde $\theta = H\tau$. La acción euclídea correspondiente a (3.4) para un campo escalar en el modelo $O(N)$ se escribe

$$S_E = \int d^d x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \phi_a (-\square + \mathcal{M}^2) \phi_a + \frac{\lambda}{8N} (\phi_a \phi_a)^2 \right], \quad (7.15)$$

donde ya utilizamos que, al estar en De Sitter, el parámetro de masa relevante es $\mathcal{M}^2 = m^2 + \xi d(d-1)H^2$. En d dimensiones, la constante de acoplamiento del campo tiene unidades de H^{4-d} , y por lo tanto puede ser expresada como $\lambda = \mu^{4-d} \lambda_4$, con λ_4 una constante adimensional y μ una escala con unidades de masa.

Dado que este espacio es compacto, podemos expandir al campo en una suma discreta de modos

$$\phi_a(x) = \sum_{\vec{L}} \phi_{\vec{L},a} Y_{\vec{L}}(x), \quad (7.16)$$

donde $Y_{\vec{L}}(x)$ son los armónicos esféricos en d dimensiones, etiquetados por el vector de índices $\vec{L} = (L, L_{d-1}, \dots, L_1)$, con $L \geq L_{d-1} \geq \dots \geq |L_1|$. Éstos satisfacen la ecuación,

$$\square Y_{\vec{L}}(x) = -H^2 L(L+d-1) Y_{\vec{L}}(x), \quad (7.17)$$

y las relaciones de ortogonalidad

$$\int_x Y_{\vec{L}}(x) Y_{\vec{L}'}^*(x) = H^{-d} \delta_{\vec{L}\vec{L}'}, \quad (7.18)$$

donde hemos introducido el atajo notacional $\int_x = \int d^d x \sqrt{g}$. Insertando esta expansión en la parte libre de la acción (7.15) y usando las propiedades (7.17) y (7.18) se puede obtener una expansión para el propagador libre euclídeo (en la fase simétrica),

$$\begin{aligned} G_{ab}^{(\mathcal{M})}(x, x') &= \delta_{ab} G^{(\mathcal{M})}(x, x') \\ &= \delta_{ab} H^d \sum_{\vec{L}} \frac{Y_{\vec{L}}(x) Y_{\vec{L}}^*(x')}{H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde el superíndice indica la masa. Se puede mostrar [40] que en efecto éste es el propagador en el vacío de Bunch-Davies (3.9) en tiempo imaginario, es decir, donde ahora la distancia invariante $y(x, x')$ está definida sobre la esfera (7.14). Los propagadores lorentzianos se recuperan realizando la continuación analítica inversa con la prescripción apropiada (3.10). Esto lleva a dos observaciones importantes, por un lado en el espacio euclídeo no hay distinción entre los distintos propagadores, sino que se tiene uno solo $G^{(\mathcal{M})}(x, x')$, por otro lado, el límite de coincidencia del propagador es igual tomado en el espacio euclídeo que en el lorentziano. Así mismo, no tiene sentido contemplar el formalismo IN-IN, ya que no hay una definición asintótica de los estados de vacío en el pasado y futuro.

7.2.2. Tratamiento no perturbativo del modo cero

La contribución a (7.19) para $\vec{L} = \vec{0}$, $G_0^{(\mathcal{M})} = |Y_0|^2 H^d / \mathcal{M}^2$, es claramente responsable por las divergencias infrarrojas en las funciones de correlación del campo escalar cuando $\mathcal{M}^2 \rightarrow 0$ descriptas en el capítulo 3 (ver ec. (3.17)). Esto motiva separar $\phi_a(x) = \phi_{0a} + \hat{\phi}_a(x)$ con el objetivo de tratar de forma especial al modo cero ϕ_{0a} , el cual es constante, distinguiéndolo de la parte inhomogénea $\hat{\phi}_a(x)$. De la misma manera, sepáramos el propagador en dos partes,

$$G^{(\mathcal{M})}(x, x') = G_0^{(\mathcal{M})} + \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x'), \quad (7.20)$$

donde ahora $\hat{G}^{(\mathcal{M})}$, al que llamamos propagador libre ultravioleta, tiene la propiedad de ser finito en el límite $\mathcal{M}^2 \rightarrow 0$. Vale destacar que esto, sin embargo, no es suficiente para resolver todos los problemas infrarrojos del propagador no masivo, ya que éste aún mantiene su comportamiento para puntos separados (decaimiento no exponencial a tiempos muy separados comparados con H^{-1} [66]). Si bien esto no importa en el espacio euclídeo donde la separación máxima está acotada gracias a la compactificación, puede ser relevante en vistas a la eventual continuación analítica para volver al espacio-tiempo lorentziano.

Consideremos ahora cómo se separa la parte de interacción de la acción euclídea (7.15),

$$S_E \Big|_{int} = \frac{\lambda V_d}{8N} |\phi_0|^4 + \tilde{S}_{int}[\phi_{0a}, \hat{\phi}_a], \quad (7.21)$$

donde \tilde{S}_{int} es la acción de interacción entre los modos cero y ultravioletas, y V_d es el volumen total del espacio De Sitter euclídeo en d dimensiones, que gracias a su compactificación resulta finito e igual a la hipersuperficie de una d -esfera

$$V_d = \int d^d x \sqrt{g} = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) H^d} = \frac{1}{|Y_0|^2 H^d}. \quad (7.22)$$

Con el fin de calcular las funciones de correlación cuánticas de la teoría, definimos la funcional generatriz en presencia de las fuentes J_{0a} y $\hat{J}_a(x)$,

$$\begin{aligned} Z[J_0, \hat{J}] &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 \int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-S_E - \int_x (J_{0a}\phi_{0a} + \hat{J}_a\hat{\phi}_a)} \\ &= \exp \left(-\tilde{S}_{int} \left[\frac{\delta}{\delta J_0}, \frac{\delta}{\delta \hat{J}} \right] \right) Z_0[J_0] \hat{Z}_f[\hat{J}]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

En la segunda línea se definen las funcionales generatrices $\hat{Z}_f[\hat{J}]$, asociada a una teoría libre con propagador ultravioleta $\hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')$; y $Z_0[J_0]$, correspondiente a una teoría que involucra solamente al modo cero, incluyendo el término de auto-interacción $\sim \lambda|\phi_0|^4$. Esta última resulta equivalente a un problema unidimensional de mecánica cuántica ordinaria. Esta parte da la contribución más importante en el límite infrarrojo, y puede ser calculada de manera exacta en varios casos de interés [39]. Es precisamente aquí donde se está realizando una resumación no perturbativa. Por otra parte, la interacción entre ambos sectores puede tratarse de manera perturbativa, lo que proveé correcciones más allá del límite infrarrojo [40].

7.2.3. Potential efectivo euclídeo

Como ya mencionamos, el potencial efectivo da información valiosa sobre el efecto que las fluctuaciones cuánticas tienen sobre el campo medio de fondo $\bar{\phi}$. Estamos interesados particularmente en la generación dinámica de masa a partir de los efectos cuánticos. Para estudiar este problema desde el punto de vista del formalismo euclídeo, analizamos primero el potencial efectivo para relacionar su parte cuadrática, es decir la masa dinámica, con la varianza del modo cero.

Comenzamos definiendo la acción efectiva en este caso,

$$\Gamma[\bar{\phi}_0, \hat{\phi}] = W[J_0, \hat{J}] - \int_x \left(\bar{\phi}_{0a} J_{0a} + \hat{\phi}_a(x) \hat{J}_a(x) \right), \quad (7.24)$$

con $W[J_0, \hat{J}] = -\log(Z[J_0, \hat{J}])$ la funcional generatriz de los diagramas conectados, y donde

$$\bar{\phi}_{0a} = \frac{\delta W[J_0, \hat{J}]}{\delta J_{0a}}, \quad (7.25)$$

$$\hat{\phi}_a = \frac{\delta W[J_0, \hat{J}]}{\delta \hat{J}_a}, \quad (7.26)$$

define a los campos “clásicos”. El potencial efectivo se obtiene al evaluar la acción efectiva en un campo constante, es decir $\hat{\phi} = 0$, lo cual a su vez requiere que $\hat{J} = 0$, y luego dividiendo por

el volumen del espacio V_d . Entonces

$$V_d V_{eff}(\bar{\phi}_0) = \Gamma[\bar{\phi}_0, 0] = W[J_0, 0] - \bar{\phi}_{0a} J_{0a}. \quad (7.27)$$

Con el fin de calcular el término cuadrático de $V_{eff}(\bar{\phi}_0)$ como función de $\bar{\phi}_0$, realizamos la siguiente expansión,

$$\Gamma[\bar{\phi}_0, 0] = \Gamma[0, 0] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta \bar{\phi}_{0a} \delta \bar{\phi}_{0b}} \bigg|_{\bar{\phi}_0=0} \bar{\phi}_{0a} \bar{\phi}_{0b} + \dots, \quad (7.28)$$

donde el término lineal se anula en $\bar{\phi}_0 = 0$, como puede apreciarse al diferenciar (7.27) con respecto a $\bar{\phi}_0$,

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta \bar{\phi}_{0a}} = -J_{0a}, \quad (7.29)$$

y teniendo en cuenta que, en la fase simétrica, el campo medio $\bar{\phi}_0$ se anula sí y sólo sí $J_0 = 0$. Tomando otra derivada a la expresión anterior pero ahora respecto de J_0 , obtenemos

$$\delta_{ab} = -\frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta J_{0b} \delta \bar{\phi}_{0a}} = -\frac{\delta \bar{\phi}_{0c}}{\delta J_{0b}} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta \bar{\phi}_{0c} \delta \bar{\phi}_{0a}}, \quad (7.30)$$

donde hemos usado la regla de la cadena para la segunda igualdad. Por otra parte, diferenciando (7.25) con respecto a J_0 , se tiene

$$\frac{\delta \bar{\phi}_{0c}}{\delta J_{0b}} = \frac{\delta^2 W[J_0, 0]}{\delta J_{0b} \delta J_{0c}}, \quad (7.31)$$

lo cual, reemplazado en la expresión previa conduce a la conclusión de que

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta \bar{\phi}_{0a} \delta \bar{\phi}_{0b}} = -\left(\frac{\delta^2 W[J_0, 0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}}\right)^{-1}. \quad (7.32)$$

Ahora debemos evaluar para $\bar{\phi}_0 = 0$ ($J_0 = 0$),

$$\frac{\delta^2 W[J_0, 0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \bigg|_{J_0=0} = -\frac{1}{Z[0, 0]} \frac{\delta^2 Z[J_0, 0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \bigg|_{J_0} = -\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle, \quad (7.33)$$

permitiéndonos identificar a la función de 2-puntos exacta correspondiente al modo cero $\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle$. En la fase simétrica, cualquier tensor de segundo rango con respecto a los índices internos del grupo $O(N)$ es proporcional a la identidad δ_{ab} . Por lo tanto, la expresión anterior puede ser invertida fácilmente,

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}_0, 0]}{\delta \bar{\phi}_{0a} \delta \bar{\phi}_{0b}} = \delta_{ab} \frac{N}{\langle \phi_0^2 \rangle}, \quad (7.34)$$

donde hemos expresado el resultado en términos de la varianza de módulo $|\phi_0|$, es decir $\langle \phi_0^2 \rangle = \delta_{ab} \langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle$. Finalmente, reemplazamos esta última expresión en la ecuación (7.28) y dividimos por V_d , obteniendo el potencial efectivo a orden cuadrático,

$$V_{eff}(\bar{\phi}_0) = V_0 + \frac{1}{2} \frac{N}{V_d \langle \phi_0^2 \rangle} |\bar{\phi}_0|^2 + \mathcal{O}(|\bar{\phi}_0|^4). \quad (7.35)$$

Este es un resultado exacto de la teoría euclídea válido para todo N y λ , que muestra que la masa dinámica está dada por la inversa de la varianza de modo cero.

Al primer orden infrarrojo, la interacción entre el modo cero y los modos ultravioletas puede ser despreciada en (7.23), y por lo tanto se tiene que

$$\langle \phi_0^2 \rangle_0 = \delta_{ab} \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \bigg|_{J_0=0} = \frac{\int d^N \phi_0 \phi_0^2 e^{-V_d \left[\frac{\lambda}{8N} \phi_0^4 + \frac{M^2}{2} \phi_0^2 \right]}}{\int d^N \phi_0 e^{-V_d \left[\frac{\lambda}{8N} \phi_0^4 + \frac{M^2}{2} \phi_0^2 \right]}}. \quad (7.36)$$

Para el caso $M = 0$ esto puede calcularse de forma exacta, dando como resultado una masa dinámica a primer orden infrarrojo igual a,

$$\mathcal{M}_{dyn,0}^2 = \sqrt{\frac{N\lambda}{2V_d}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma \left[\frac{N}{4} \right]}{\Gamma \left[\frac{N+2}{4} \right]}, \quad (7.37)$$

donde aquí Γ es la función Gamma de Euler. Para $N = 1$, se recupera el resultado de [39], que se corresponde con el que se obtiene a partir del formalismo estocástico (7.7),

$$\mathcal{M}_{dyn,0}^2 \bigg|_{N=1} = \frac{\sqrt{3\lambda} H^2}{8\pi} \frac{\Gamma \left[\frac{1}{4} \right]}{\Gamma \left[\frac{3}{4} \right]}, \quad (7.38)$$

donde aquí evaluamos $d = 4$, y por lo tanto $V_4 = 8\pi^2/3$. Al comparar con (7.7), tener en cuenta que allí la definición del acoplamiento λ es aquella de $N = 1$, dada por (3.5), mientras que aquí estamos usando la definición de $O(N)$ dada por (3.4) (cambia un factor 3).

En el próximo capítulo calcularemos correcciones perturbativas más allá del límite infrarrojo en vistas a una comparación con resultados no perturbativos provenientes del formalismo de la acción efectiva 2PI de la teoría lorentziana.

Capítulo 8

Más allá del límite infrarrojo en el espacio De Sitter euclídeo

Como hemos visto, el formalismo euclídeo permite recuperar el resultado estocástico, pero a diferencia de éste, además permite calcular correcciones más allá del límite infrarrojo de manera sistemática. La situación en relación a la equivalencia entre el formalismo euclídeo y la teoría de campos lorentziana en el formalismo IN-IN es similar al caso estocástico, es decir, se ha hecho progreso únicamente en el caso masivo [41]. Por otra parte, el caso no masivo sigue sin estar contemplado en dichos análisis. Resulta de importancia avanzar en esa dirección.

Con esta meta en mente, en este capítulo consideramos el cálculo de correcciones más allá del límite infrarrojo a la función de 2-puntos del campo en el formalismo euclídeo hasta segundo orden. Esto incluye la varianza del modo cero, necesaria para calcular la masa dinámica, como también la función de 2-puntos de los modos inhomogéneos con puntos separados. En particular, mantendremos la generalidad en N .

Desde el punto de vista de los métodos no perturbativos de la teoría cuántica de campos lorentziana en el formalismo IN-IN, no esperamos que la aproximación de Hartree para un único campo ($N = 1$), discutida en los capítulos precedentes, coincida con el resultado euclídeo en el caso no masivo. En efecto, se sabe que la masa dinámica calculada en esta aproximación difiere del resultado estocástico (y por lo tanto del euclídeo en el límite infrarrojo), aunque es notable que la diferencia sea sólo de un 15 % [17]. Por otra parte, la acción efectiva 2PI da resultados no perturbativos confiables el límite de $N \rightarrow \infty$. Este será entonces nuestro punto de comparación entre los formalismos euclídeo y lorentziano.

Los resultados aquí presentados están siendo preparados para su publicación [44].

8.1. Correcciones más allá del límite infrarrojo

Las correcciones al resultado infrarrojo provienen de expandir perturbativamente la exponencial de la acción de interacción \tilde{S}_{int} en la expresión (7.23). La auto-interacción del modo cero ya fue tenida en cuenta de manera no perturbativa en $Z_0[J_0]$. La expresión explícita para la parte de interacción es

$$\tilde{S}_{int} = \frac{\lambda}{8N} \int d^d x \sqrt{g} \left[2A_{abcd} \phi_{0a} \phi_{0b} \hat{\phi}_c \hat{\phi}_d + 4\delta_{ab} \delta_{cd} \phi_{0a} \hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_d + \delta_{ab} \delta_{cd} \hat{\phi}_a \hat{\phi}_b \hat{\phi}_c \hat{\phi}_d \right], \quad (8.1)$$

donde A_{abcd} es el tensor totalmente simétrico de cuarto rango

$$A_{abcd} = \delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}. \quad (8.2)$$

Aquí no incluimos a los términos lineales en $\hat{\phi}$ que aparecen al separar los términos de masa y de interacción de la acción completa, ya que estos se anulan dado que $\int d^d x \sqrt{g} Y_L(x) = 0$ para $L > 0$, gracias a la ortogonalidad de los armónicos esféricos (7.18).

La primera corrección a la funcional generatriz viene de expandir la exponencial a orden lineal, manteniendo de \tilde{S}_{int} el término con exactamente dos potencias de ϕ_0 y dos de $\hat{\phi}$, es decir, el primer término de (8.1). El orden siguiente tiene dos contribuciones, la primera proveniente del cuadrado de este mismo término, y la segunda proveniente del último término de (8.1) a orden lineal. Considerando estas correcciones hasta segundo orden a la funcional generatriz, llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} Z[J_0, \hat{J}] &= Z_0[J_0] \hat{Z}_f[\hat{J}] - \frac{\lambda}{4N} A_{abcd} \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \int_x \frac{\delta^2 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_c(x) \delta \hat{J}_d(x)} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{16N^2} A_{abcd} A_{efgh} \frac{\delta^4 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b} \delta J_{0e} \delta J_{0f}} \iint_{x,x'} \frac{\delta^4 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_c(x) \delta \hat{J}_d(x) \delta \hat{J}_g(x') \delta \hat{J}_h(x')} \\ &- \frac{\lambda}{8N} Z_0[J_0] \delta_{ab} \delta_{cd} \int_x \frac{\delta^4 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x) \delta \hat{J}_b(x) \delta \hat{J}_c(x) \delta \hat{J}_d(x)}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Aquí hemos seguido el procedimiento usual en teoría cuántica de campos haciendo los reemplazos $\phi_{0a} \rightarrow \delta/\delta J_{0a}$ y $\hat{\phi}_a(x) \rightarrow \delta/\delta \hat{J}_a(x)$. Como discutimos previamente, para estudiar la generación de masa dinámica, necesitamos la varianza del modo cero. Sin embargo, puede resultar valioso también analizar el comportamiento de la función de 2-puntos completa para puntos separados, ya que contiene información adicional sobre la parte no-local, inaccesible si

uno se queda sólo con la masa dinámica. La función de 2-puntos del campo completo ϕ se separa en las siguientes contribuciones,

$$\langle \phi_a(x)\phi_b(x') \rangle = \langle \phi_{0a}\phi_{0b} \rangle + \langle \hat{\phi}_a(x)\hat{\phi}_b(x') \rangle, \quad (8.4)$$

donde el término cruzado se anula por ortogonalidad. Llamaremos a cada uno de los términos parte infrarroja y parte ultravioleta respectivamente. A continuación calcularemos ambas hasta segundo orden a partir de (8.3), comenzando por la segunda.

8.1.1. Parte ultravioleta

Para calcular la parte ultravioleta de la función de dos puntos de $\hat{\phi}$, tomamos dos derivadas funcionales de $Z[J_0, \hat{J}]$ con respecto a $\hat{J}_a(x)$ y evaluamos para $\hat{J} = 0$,

$$\langle \hat{\phi}_a(x)\hat{\phi}_b(x') \rangle = \left. \frac{1}{Z[0,0]} \frac{\delta^2 Z[J_0, \hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x) \delta \hat{J}_b(x')} \right|_{J_0, \hat{J}=0} \quad (8.5)$$

donde aquí el factor $Z[0,0]^{-1}$ se ocupa de la normalización de la teoría interactuante,

$$\begin{aligned} Z[0,0]^{-1} &= 1 + \frac{\lambda}{4N} (N+2) \langle \phi_0^2 \rangle_0 V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] \\ &+ \frac{\lambda}{8} (N+2) V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]^2 + \frac{\lambda^2}{16N^2} (N+2)^2 \langle \phi_0^2 \rangle_0^2 V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]^2 \\ &- \frac{\lambda^2 \langle \phi_0^2 \rangle_0^4}{32N^2} \left[(N+2)^2 V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]^2 + 2(N+8) \iint_{x,x'} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')^2 \right] \end{aligned} \quad (8.6)$$

donde $[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]$, el límite de coincidencia del propagador ultravioleta libre de masa \mathcal{M} , es independiente de x por invarianza de De Sitter. Para llegar a esta expresión hemos usado que $A_{abcd} \delta_{cd} = (N+2) \delta_{ab}$, así como también las expresiones (D.1) y (D.2) para escribir las derivadas de $\hat{Z}_f[\hat{J}]$ en términos de propagadores libres, apoyándonos en el hecho de que se trata de una funcional generatriz libre (Apéndice D). Por otra parte, para las derivadas de $Z_0[J_0]$ tenemos

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \right|_{J_0=0} = \langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle_0 = \delta_{ab} \frac{\langle \phi_0^2 \rangle_0}{N}, \quad (8.7)$$

$$\left. \frac{\delta^4 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b} \delta J_{0c} \delta J_{0d}} \right|_{J_0=0} = A_{abcd} \frac{\langle \phi_0^4 \rangle_0}{N(N+2)}, \quad (8.8)$$

donde $\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle_0$ es la función de 2-puntos exacta del modo cero al orden más bajo infrarrojo. Decimos exacta porque incluye la auto-interacción del modo cero de forma no perturbativa.

Por conveniencia, en la última igualdad hemos expresado el resultado en términos de la traza de éstas funciones con respecto a los índices internos del grupo $O(N)$, asumiendo estar en la fase simétrica. En general, cualquiera de las funciones de n -puntos “trazadas” del modo cero al orden más bajo infrarrojo pueden ser expresadas mediante integrales ordinarias,

$$\langle \phi_0^{2p} \rangle_0 = \frac{\int d^N \phi_0 \phi_0^{2p} e^{-V_d \left[\frac{\lambda}{8N} \phi_0^4 + \frac{\mathcal{M}^2}{2} \phi_0^2 \right]}}{\int d^N \phi_0 e^{-V_d \left[\frac{\lambda}{8N} \phi_0^4 + \frac{\mathcal{M}^2}{2} \phi_0^2 \right]}} , \quad (8.9)$$

si $n = 2p$ es par, mientras que se anulan si n es impar.

Volviendo al cálculo de la función de 2-puntos de los modos ultravioletas, aprovechamos que no es necesario aquí diferenciar respecto de J_0 , para entonces evaluar desde un principio en $J_0 = 0$ y así simplificar un poco los cálculos. Luego, la derivada segunda de $Z[J_0, \hat{J}]$ necesaria para la ecuación (8.5) es

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z[0, \hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x) \delta \hat{J}_b(x')} \bigg|_{\hat{J}=0} &= \frac{\delta^2 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x) \delta \hat{J}_b(x')} \bigg|_{\hat{J}=0} - \frac{\lambda}{4N} (N+2) \langle \phi_0^2 \rangle_0 \int_z \frac{\delta^4 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_{abcd}^4(x, x', z, z)} \bigg|_{\hat{J}=0} \\ &+ \frac{\lambda^2}{32N^3} \left[(N+4) \delta_{cd} \delta_{ef} + 4 \frac{A_{cdef}}{(N+2)} \right] \iint_{y,z} \frac{\delta^6 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_{abcdef}^6(x, x', y, y, z, z)} \bigg|_{\hat{J}=0} \\ &- \frac{\lambda}{8N} \delta_{cd} \delta_{ef} \int_z \frac{\delta^6 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_{abcdef}^6(x, x', z, z, z, z)} \bigg|_{\hat{J}=0} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Nuevamente hemos utilizado (D.1), (D.2) y las expresiones análogas (D.3) y (D.4) para reemplazar las derivadas de $\hat{Z}_f[\hat{J}]$ en la expresión (8.10), y luego hemos multiplicado por (8.6), manteniendo los términos al orden apropiado. El resultado es

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_a(x) \hat{\phi}_b(x') \rangle = \delta_{ab} &\left\{ \begin{aligned} &\hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x') - \frac{\lambda(N+2)}{2N^2} \langle \phi_0^2 \rangle_0 \int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') \\ &- \left[\frac{\lambda}{2N} (N+2) [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] - \frac{\lambda^2}{8N^3} (N+2)^2 V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] (\langle \phi_0^4 \rangle_0 - \langle \phi_0^2 \rangle_0^2) \right] \\ &\times \int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') \\ &+ \frac{\lambda^2}{4N^3} (N+8) \langle \phi_0^4 \rangle_0 \int_{y,z} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, y) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(y, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por un lado, esta expresión aún debe ser renormalizada mediante la inclusión de contratérminos, debido a las divergencias presentes en $[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]$. Los detalles del proceso son relegados al Apéndice

F. Separando

$$[\hat{G}^{(\mathcal{M})}] = [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{div} + [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{ren}, \quad (8.12)$$

se puede ver que es posible hacer finita a la ecuación (8.11) con un contratérmino de masa de la siguiente forma

$$\delta\mathcal{M}^2 = -\frac{\lambda}{2N}(N+2)[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{div}. \quad (8.13)$$

Por otro lado, las integrales de los propagadores ultravioletas libres en el espacio euclídeo que aparecen en (8.11) pueden ser expresados en términos de las derivadas con respecto de la masa de un único propagador. Esto se muestra en el Apéndice E, y el resultado es

$$\int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') = -\frac{\partial \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial \mathcal{M}^2}, \quad (8.14)$$

$$\iint_{y,z} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, y) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(y, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial (\mathcal{M}^2)^2}, \quad (8.15)$$

y por lo tanto luego de la renormalización, la ecuación (8.11) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_a(x) \hat{\phi}_b(x') \rangle = \delta_{ab} & \left\{ \begin{aligned} & \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x') + \frac{\lambda(N+2)}{2N^2} \langle \phi_0^2 \rangle_0 \frac{\partial \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial \mathcal{M}^2} \\ & + \left[\frac{\lambda}{2N}(N+2)[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{ren} - \frac{\lambda^2}{8N^3}(N+2)^2 V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{ren} (\langle \phi_0^4 \rangle_0 - \langle \phi_0^2 \rangle_0^2) \right] \\ & \times \frac{\partial \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial \mathcal{M}^2} \\ & + \frac{\lambda^2}{8N^3}(N+8) \langle \phi_0^4 \rangle_0 \frac{\partial^2 \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial (\mathcal{M}^2)^2} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Este resultado podría corresponder a la expansión de un propagador ultravioleta libre con respecto a una masa dependiente de λ en el caso que los coeficientes de los diferentes términos guarden la relación apropiada entre sí. Esto se puede verificar en el límite de N grande, como veremos hacia el final de la sección.

Un punto a considerar es que, sin embargo, a menos que podamos resumir todas las contribuciones, un resultado como (8.16) depende de los propagadores ultravioletas libres evaluados en la masa clásica \mathcal{M} . Al considerar el caso no masivo $\mathcal{M} = 0$, la presencia de los propagadores $\hat{G}^{(0)}(x, x')$ (y sus derivadas) en puntos separados no asegura un buen comportamiento a tiempos muy separados en comparación a H^{-1} [66]. De todas formas, esto no afecta el cálculo de la varianza del campo, para el cual debe tomarse el límite de coincidencia.

8.1.2. Parte infrarroja

Ahora nos concentraremos en calcular la parte infrarroja de la función de 2-puntos, es decir, la varianza del modo cero. Para ello, tomamos dos derivadas de la functional generatriz $Z[J_0, \hat{J}]$ con respecto a J_0 y evaluamos para $J_0 = 0$,

$$\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle = \frac{1}{Z[0, 0]} \frac{\delta^2 Z[J_0, \hat{J}]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \bigg|_{J_0, \hat{J}=0}. \quad (8.17)$$

Al igual que antes, es útil primero poner $\hat{J} = 0$ y luego derivar,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z[J_0, \hat{J}]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \bigg|_{J_0, \hat{J}=0} = \frac{\delta_{ab}}{N} \left\{ \begin{aligned} & \langle \phi_0^2 \rangle_0 \left[1 - \frac{\lambda}{8} (N+2) V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]^2 \right] - \frac{\lambda}{4N} (N+2) \langle \phi_0^4 \rangle_0 V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] \\ & + \frac{\lambda^2}{32N^2} \langle \phi_0^6 \rangle_0 \left[(N+2)^2 V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]^2 + 2(N+8) \iint_{x,x'} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')^2 \right] \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

donde nuevamente hemos utilizado (8.7) y (8.8) y el caso análogo,

$$\delta_{cd} \delta_{ef} \frac{\delta^6 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b} \delta J_{0c} \delta J_{0d} \delta J_{0e} \delta J_{0f}} \bigg|_{J_0=0} = \delta_{ab} \frac{\langle \phi_0^6 \rangle_0}{N}. \quad (8.19)$$

En el último término de (8.18) podemos reemplazar $\int_{x'} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')^2 = -\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]/\partial \mathcal{M}^2$ en virtud de (8.14). Esto muestra que, además de $[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]$, ahora tenemos otra cantidad divergente $\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]/\partial \mathcal{M}^2$, la cual separamos de manera similar

$$\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} = \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{div} + \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{fin}, \quad (8.20)$$

y luego procedemos a renormalizar siguiendo los detalles del Apéndice F. Concluimos que el resultado puede hacerse finito si se introduce un contratérmino para compensar esta divergencia, a saber

$$\delta \lambda = -\frac{\lambda^2}{2N} (N+8) \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{div}. \quad (8.21)$$

Finalmente, podemos escribir la varianza del modo cero a segundo orden en correcciones ultravioletas,

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle &= \delta_{ab} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle \phi_0^2 \rangle_0}{N} + \frac{\lambda}{4N^2} (N+2) [\langle \phi_0^2 \rangle_0^2 - \langle \phi_0^4 \rangle_0] V_d [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{ren} \\ + \frac{\lambda^2}{32N^3} (N+2)^2 [\langle \phi_0^6 \rangle_0 - 3\langle \phi_0^2 \rangle_0 \langle \phi_0^4 \rangle_0 + 2\langle \phi_0^2 \rangle_0^3] V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{ren}^2 \\ - \frac{\lambda^2}{16N^3} (N+8) [\langle \phi_0^6 \rangle_0 - \langle \phi_0^2 \rangle_0 \langle \phi_0^4 \rangle_0] V_d \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{fin} \end{array} \right\} \\ &= \frac{\delta_{ab}}{V_d \mathcal{M}_{dyn}^2 (IR)} \tag{8.22}
 \end{aligned}$$

Estas correcciones pueden interpretarse como una corrección a la masa dinámica \mathcal{M}_{dyn}^2 . Como hemos mencionado anteriormente, en el límite de N grande las correcciones a la parte ultravioleta podrán también ser interpretadas como una corrección a una cierta masa dinámica ultravioleta $\mathcal{M}_{dyn}^2(UV)$. Lo que es más, ésta será igual a la masa dinámica que se lee de la varianza del modo cero, y por lo tanto el propagador completo se corresponde a un propagador libre en De Sitter con masa \mathcal{M}_{dyn}^2 . Esta es justamente la situación en el espacio lorentziano en el límite de N grande, donde la resumación provista por el formalismo 2PI conduce a una ecuación autoconsistente para la masa dinámica.

8.1.3. Resultado no masivo euclídeo en el límite de N grande

Aquí consideramos en particular el caso en el cual el parámetro de masa es nulo $\mathcal{M} = 0$. Sabemos que este es el caso en el cual la teoría perturbativa usual tiene problemas, según lo discutido en el capítulo 3. Las funciones de n -puntos del modo cero al orden más bajo infrarrojo pueden calcularse exactamente

$$\langle \phi_0^{2p} \rangle_0 = \frac{\int_0^\infty d\phi_0 \phi_0^{N-1+2p} e^{-\frac{V_d \lambda}{8N} \phi_0^4}}{\int_0^\infty d\phi_0 \phi_0^{N-1} e^{-\frac{V_d \lambda}{8N} \phi_0^4}} = 2^{\frac{3p}{2}} \left(\frac{N}{V_d \lambda} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma \left[\frac{N+2p}{4} \right]}{\Gamma \left[\frac{N}{4} \right]}. \tag{8.23}$$

Como se observa en esta expresión, estas funciones exhiben un escaleo del tipo $\phi_0 \sim \lambda^{-1/4}$. Dado que siempre tenemos valores de expectación de potencias pares de ϕ_0 en los distintos resultados calculados más arriba, esto conduce a un incremento en un factor $1/\sqrt{\lambda}$ por cada ϕ_0^2 en los diferentes términos de la expansión perturbativa. Esto tiene el efecto de generar una expansión perturbativa en potencias de $\sqrt{\lambda}$, en lugar de λ . Esta dependencia no analítica es una clara

indicación de la naturaleza no perturbativa de los resultados obtenidos con este tratamiento. Vale remarcar que, si $\mathcal{M} \neq 0$, las funciones anteriores recuperan la analiticidad en λ , y por lo tanto se tiene en ese caso una expansión perturbativa usual en potencias de λ .

Ahora tomamos el límite de $N \rightarrow \infty$ en los resultados euclídeos (8.16) y (8.22), evaluándolos en el caso no masivo según (8.23),

$$\langle \hat{\phi}_a(x) \hat{\phi}_b(x') \rangle = \delta_{ab} \left\{ \begin{array}{l} \hat{G}^{(0)}(x, x') + \left(\frac{\partial \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_0 \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2V_d}} + \frac{\lambda}{4} [\hat{G}^{(0)}]_{ren} \right] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial (\mathcal{M}^2)^2} \right)_0 \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2V_d}} \right]^2 \end{array} \right\}, \quad (8.24)$$

$$\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle = \delta_{ab} \left[\sqrt{\frac{2}{V_d \lambda}} - \frac{1}{2} [\hat{G}^{(0)}]_{ren} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{V_d \lambda}{2}} [\hat{G}^{(0)}]_{ren}^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2V_d}} \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,fin} \right]. \quad (8.25)$$

Lo primero a comprobar en estos resultados es que, al orden de precisión con el que hemos hecho el cálculo, la parte ultravioleta (8.24) es compatible con un propagador ultravioleta libre. Esto se desprende del hecho que dos veces el coeficiente que acompaña a la derivada segunda de $\hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')$ respecto de \mathcal{M}^2 , coincide con el cuadrado del coeficiente de la derivada primera. Esto permite definir una masa dinámica ultravioleta, la cual conocemos a orden λ ,

$$\mathcal{M}_{dyn}^2(UV) = \sqrt{\frac{\lambda}{2V_d}} + \frac{\lambda}{4} [\hat{G}^{(0)}]_{ren}. \quad (8.26)$$

En segundo lugar, ésta masa coincide a su vez con la masa dinámica que se calcula a partir de la varianza del modo cero. Ambas observaciones permiten concluir que, al orden calculado, el resultado en el límite $N \rightarrow \infty$ del propagador completo $\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle + \langle \hat{\phi}_a(x) \hat{\phi}_b(x') \rangle$ es compatible con un propagador en De Sitter libre con masa \mathcal{M}_{dyn}^2 . Esperamos que esta propiedad se mantenga a todo orden en λ , como precisamente sucede en la teoría de campos lorentziana en el límite de N grande, según se lee de la ec. (4.85) (allí está escrita para un espacio-tiempo curvo general, por lo que la conclusión también es válida en De Sitter en particular). Sólo faltaría comprobar si las masas dinámicas euclídea y lorentziana coinciden, al menos hasta el orden de precisión en λ con el que conocemos el resultado euclídeo.

8.2. Comparación con la teoría cuántica de campos lorentziana

En esta sección calcularemos la masa dinámica en a partir del formalismo 2PI lorentziano en el límite de $N \rightarrow \infty$. Para llevarla a una expresión comparable con los resultados euclídeos,

debemos expresar el resultado en términos de los parámetros de sustracción mínima. Como hemos discutido en el capítulo 4, esto es posible sin problemas en el límite de N grande del modelo $O(N)$, a diferencia de lo que ocurre en la aproximación de Hartree para $N = 1$.

Consideremos la ecuación de la masa dinámica, aún sin renormalizar, que se obtiene de combinar (4.85) con (4.82),

$$\mathcal{M}_{dyn}^2 = \mathcal{M}^2 + \delta\mathcal{M}^2 + \frac{(\lambda + \delta\lambda)}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{(\lambda + \delta\lambda)}{2} [G^{(\mathcal{M}_{dyn})}], \quad (8.27)$$

donde separamos $m_B^2 + \xi_B R \equiv \mathcal{M}_B^2 = \mathcal{M}^2 + \delta\mathcal{M}^2$ y $\lambda_B = \lambda + \delta\lambda$.

Según la discusión llevada a cabo en el capítulo 7 posteriormente a la definición del propagador euclídeo en De Sitter (7.19), el límite de coincidencia de éste es igual al límite de coincidencia de los propagadores lorentzianos. Esta observación crucial nos permite, sin pérdida de generalidad, expresar $[G^{(\mathcal{M}_{dyn})}]$ en la ecuación anterior haciendo uso de (7.20) con $x \rightarrow x'$, es decir

$$[G^{(\mathcal{M}_{dyn})}] = \frac{1}{V_d \mathcal{M}_{dyn}^2} + [\hat{G}^{(\mathcal{M}_{dyn})}], \quad (8.28)$$

donde hemos expresado $G_0^{(\mathcal{M})} = 1/V_d \mathcal{M}_{dyn}^2$. Luego, expandiendo para $\mathcal{M}_{dyn}^2 \ll H^2$, tenemos

$$[G^{(\mathcal{M}_{dyn})}] = \frac{1}{V_d \mathcal{M}_{dyn}^2} + [\hat{G}^{(0)}] + \mathcal{M}_{dyn}^2 \frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \bigg|_{\mathcal{M}=0} + \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{M}_{dyn}^4}{H^4}\right). \quad (8.29)$$

Reemplazando esta expresión en (8.27) obtenemos la ecuación autoconsistente para \mathcal{M}_{dyn}^2 . Separando $[\hat{G}^{(0)}]$ y $\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \bigg|_{\mathcal{M}=0}$ en sus partes divergentes y finitas según (8.12) y (8.20), la renormalización procede como se ha descripto en el capítulo 4. Los contratérminos necesarios son

$$\delta\mathcal{M}^2 = -\frac{\lambda}{2} \left[\frac{[\hat{G}^{(0)}]_{div} + \mathcal{M}^2 \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div}}{1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div}} \right], \quad (8.30a)$$

$$\delta\lambda = -\frac{\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div}}{\left[1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div} \right]}. \quad (8.30b)$$

Vale destacar que estos contratérminos coinciden, al ser evaluados en $d = 4$, con los utilizados en la aproximación de Hartree (4.57). Por otro lado, al ser expandidos en λ al orden más bajo, también coinciden con aquellos del cálculo euclídeo (8.13) y (8.21), en la medida que

estos últimos sean expandidos para masas pequeñas y $N \rightarrow \infty$. Algunos detalles de estas comparaciones se dan en el Apéndice G.

La ecuación para la masa dinámica renormalizada entonces queda

$$\mathcal{M}_{dyn}^2 = \mathcal{M}^2 + \frac{\lambda}{2} \bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{V_d \mathcal{M}_{dyn}^2} + [\hat{G}^{(0)}]_{ren} + \mathcal{M}_{dyn}^2 \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,fin} \right].$$

Esta es una ecuación algebraica cuadrática para \mathcal{M}_{dyn}^2 , tal como las que hemos analizado en el capítulo 5. La solución positiva en la fase simétrica ($\bar{\phi} = 0$) es

$$\mathcal{M}_{dyn}^2 = \frac{-\mathcal{M}^2 - \frac{\lambda}{2} [\hat{G}^{(0)}]_{ren} + \sqrt{\left(\mathcal{M}^2 + \frac{\lambda}{2} [\hat{G}^{(0)}]_{ren} \right)^2 + \frac{2\lambda}{V_d} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,fin} \right]}}{2 \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,fin} \right]}. \quad (8.31)$$

Finalmente para comparar con el resultado euclídeo, consideremos el caso no masivo $\mathcal{M} = 0$ y calculemos $1/V_d \mathcal{M}_{dyn}^2$ a partir de la masa dinámica (8.31). Dado que el cálculo euclídeo en ese caso resulta perturbativo en $\sqrt{\lambda}$, hacemos una expansión del resultado lorentziano al orden apropiado en λ . Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_d \mathcal{M}_{dyn}^2} &= \sqrt{\frac{2}{V_d \lambda}} - \frac{1}{2} [\hat{G}^{(0)}]_{ren} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{V_d \lambda}{2}} [\hat{G}^{(0)}]_{ren}^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2V_d}} \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,fin} \\ &+ \mathcal{O}(\lambda). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Este resultado coincide con la varianza del modo cero obtenida en el formalismo euclídeo para $N \rightarrow \infty$ y $\mathcal{M} = 0$, ec. (8.25).

8.3. Discusión

La teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo permite recuperar el resultado de inflación estocástica para campos no masivos al tratar el modo cero de manera no perturbativa [39]. A diferencia del tratamiento estocástico, el formalismo euclídeo admite correcciones sistemáticas provenientes de los modos ultravioletas, tratados de forma perturbativa [40]. Esto resulta prometedor, sin embargo por el momento los intentos de probar la equivalencia entre la teoría de campos euclídea y la teoría de campos IN-IN se basan en el caso masivo [41]. Es de gran interés establecer si esta equivalencia es válida en el caso no masivo, lo que permitiría a su

vez darle confianza a los resultados estocásticos, cuya equivalencia con la teoría IN-IN tampoco ha sido demostrada en ese caso.

Una manera de comprobar en parte la equivalencia es comparar con resultados conocidos provenientes de la teoría de campos IN-IN. Allí, los resultados no perturbativos más confiables son aquellos en el límite de N grande. Por esta razón, en este capítulo hemos generalizado la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo al modelo con simetría $O(N)$. A partir de esto hemos considerado las correcciones ultravioletas a los resultados de orden infrarrojo más bajo, analizando la renormalización. En este contexto, calculamos la masa dinámica a segundo orden en la expansión infrarroja, así como la función de 2-puntos para puntos separados. Verificamos que el resultado para la masa dinámica en el límite de N grande es compatible con los resultados obtenidos a partir de la acción efectiva 2PI en ese límite, incluyendo la restauración de la simetría. Nuestros resultados son válidos para todo N , hasta la segunda corrección en $\sqrt{\lambda}$ (caso no masivo).

Sin embargo, observamos que para campos no masivos, el comportamiento para puntos separados sigue teniendo problemas a tiempos largos. Esto último se debe a que estamos expandiendo los propagadores ultravioletas alrededor del caso no masivo. Si pudieramos realizar una resumación a todo orden, recuperaríamos un propagador masivo (como sucede en el caso de $N \rightarrow \infty$). Queda como pregunta abierta si es posible redefinir la parte perturbativa de este formalismo, para resumir cierta clase de contribuciones para esquivar este problema. Una vez resuelto, debería ser factible realizar la continuación analítica de los resultados para volver al espacio-tiempo de De Sitter lorentziano, y comprobar si éstos satisfacen o no las ecuaciones de Schwinger-Dyson correspondientes. Si este fuera el caso, se podrían obtener resultados no perturbativos más allá del límite $N \rightarrow \infty$ con un método técnicamente más accesible que los que se están desarrollando actualmente [54].

Capítulo 9

Conclusiones y Perspectivas

En este capítulo final resumiremos los resultados de esta tesis, exhibidos principalmente en los capítulos 4, 5, 6 y 8, y discutiremos también su relación con trabajos previos en estos temas.

El estudio de la teoría de campos en el espacio-tiempo de De Sitter es gran de interés por varias razones, entre las cuales se destacan sus aplicaciones cosmológicas tanto en la evolución del Universo temprano como para describir la aceleración cósmica actual. En el primer caso, es importante entender los efectos infrarrojos y su rol en las predicciones de los modelos inflacionarios. En general, estas se basan en resultados provenientes de la teoría de campos perturbativa. Sin embargo, para campos con masa $\mathcal{M}^2 \ll H^2$ los efectos infrarrojos podrían invalidar dicho tratamiento. En relación al problema de la energía oscura, los efectos cuánticos también podrían ser relevantes para dilucidar el origen de la constante cosmológica.

Para estudiar el problema infrarrojo es necesario un tratamiento no perturbativo. Se espera que las interacciones generen una masa dinámica que regule las divergencias infrarrojas [17, 18]. Dentro de la teoría de campos en el formalismo IN-IN, uno de los métodos no perturbativos más ampliamente desarrollados es el de la acción efectiva 2PI [23], donde cada orden en la expansión en loops contiene una resumación de subconjunto infinito de diagramas de Feynman de la teoría perturbativa usual. Para el modelo con simetría $O(N)$ en el límite de $N \rightarrow \infty$, la acción efectiva 2PI toma una forma local que resuma todos los diagramas tipo daisy y super-daisy de la teoría perturbativa estándar. Aquí, los efectos no perturbativos se condensan en una ecuación autoconsistente para la masa dinámica. Avanzar más allá en la expansión en $1/N$ involucra el cálculo de contribuciones no locales, las cuales son técnicamente muy complejas.

Es importante investigar si las predicciones del caso $N \rightarrow \infty$, como ser la ausencia de soluciones con ruptura de simetría en De Sitter [42], se extienden a valores finitos de N y en

particular al caso $N = 1$. Para ello, una posibilidad es considerar la aproximación de Hartree que consiste en truncar la acción efectiva 2PI a nivel local, en espíritu similar al límite de N grande. Esta es, sin embargo, una truncación no controlada por ningún parámetro pequeño. Para corregir en parte esta situación se impone la validez de las relaciones de consistencia de la acción efectiva 2PI exacta durante el proceso de renormalización. Esto demanda la introducción de más de un contratérmino por cada parámetro de la acción clásica. Este procedimiento ha sido extensivamente estudiado en el espacio-plano [29], donde estos métodos son aplicados, por ejemplo, en el estudio de las transiciones de fase a temperatura finita [24, 25, 26].

La generalización de este procedimiento al espacio-tiempo de De Sitter fue realizada sólo de manera parcial en la literatura [58]. En general se ha ignorado la diferencia entre los parámetros de sustracción mínima y los renormalizados. Nuestro primer objetivo ha sido mostrar que el procedimiento de “renormalización consistente” puede ser aplicado a las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador en espacios curvos generales [30]. Si bien varios cálculos explícitos que fueron realizados previamente en el espacio-tiempo plano utilizan como regulador un cutoff en momentos (ver, por ejemplo, [25]), esto es problemático en espacios curvos. Por esta razón, utilizamos regularización dimensional con el fin de mantener la covarianza de la teoría regularizada, mediante la utilización de la expansión adiabática completa del propagador. Luego, hemos escrito las ecuaciones renormalizadas en términos de los parámetros físicos definidos a partir del potencial efectivo, y hemos mostrado explícitamente que, cuando se expresan en términos de estos parámetros físicos, las ecuaciones son independientes de la escala $\tilde{\mu}$ introducida por la regularización dimensional. A la hora de fijar las relaciones de consistencia, éstas deben ser establecidas en un espacio-tiempo de curvatura constante R_0 , y por lo tanto nos encontramos ante la elección del valor de R_0 . Analizando los casos $R_0 = 0$ y $R_0 > 0$, hemos visto que los parámetros de sustracción mínima enfrentan diferentes restricciones. Este análisis es de alguna manera análogo al realizado en [24] para un campo escalar auto-interactuante a temperatura finita, donde el punto de renormalización es elegido para un valor finito de la temperatura fijo, pero consideramos que en el caso de De Sitter, esta discusión fue pasada por alto en los trabajos previos del tema.

Una conclusión relevante de nuestro trabajo es que la aproximación de Hartree y la aplicación de las relaciones de consistencia imponen restricciones sobre los parámetros de sustracción mínima de la teoría. Por un lado, la masa renormalizada m_R^2 debe ser positiva. Por otro lado, la definición del la constante de acoplamiento renormalizada λ_R en términos de la derivada cuarta del potencial efectivo junto con la relación de consistencia para la función de 4-puntos implican relaciones entre los parámetros de sustracción mínima y los renormalizados independientes de

$\tilde{\mu}$. De estas relaciones, está claro que algunas elecciones de parámetros de sustracción mínima pueden no ser compatibles con las relaciones de consistencia. En particular, no es posible tomar $\lambda = \lambda_R$, $\xi = 0$ y $m^2 < 0$ simultáneamente, como han hecho otros autores en la literatura [58].

Nuestro siguiente objetivo ha sido extender el procedimiento de renormalización consistente de la aproximación de Hartree a las ecuaciones de Einstein semicásicas (EES) [31]. Para ello, hemos mostrado que en espacios curvos generales, el mismo conjunto de contratérminos que permitieron renormalizar de forma consistente las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador, sirven para renormalizar las EES (junto con los contratérminos gravitacionales habituales que son necesarios incluso para los campos libres). En cuanto a los efectos infrarrojos, los términos potencialmente peligrosos en el valor de expectación renormalizado del tensor de energía-momento en De Sitter (6.25) aparecen suprimidos por un factor m_{dyn}^2 . Por lo tanto, la generación de masa dinámica proveniente de la resumación no perturbativa del formalismo 2PI, que tiene como consecuencia la regularización de las divergencias infrarrojas del propagador, también regula la fuente de las EES.

En el espacio-tiempo de De Sitter, hemos calculado el potencial efectivo en el límite infrarrojo con la finalidad de investigar la existencia de ruptura espontánea de simetría. Primero nos hemos focalizado en el caso en el cual la backreaction puede ser despreciada [30]. Nuestros resultados muestran que la simetría Z_2 puede romperse espontáneamente cuando se utiliza la renormalización consistente, aunque no en condiciones generales. Esto debe contrastarse con los resultados previos obtenidos usando una renormalización estándar de la teoría, como puede verse fácilmente a partir de las ecuaciones del valor medio del campo y del propagador. En efecto, cuando las relaciones de consistencia no son tenidas en cuenta y no se permite la presencia de diferentes contratérminos, las ecuaciones (4.50) y (4.51) se vuelven (4.84) y (4.85) [55]. En este caso, la ausencia de un vacío invariante de De Sitter para campos no masivos prohíbe la existencia de soluciones con ruptura de simetría. Lo mismo ocurre en el límite de N grande del modelo $O(N)$, donde las relaciones de consistencia se satisfacen automáticamente orden a orden en una expansión en $1/N$ y por lo tanto no hay necesidad de contratérminos adicionales. Las ecuaciones son nuevamente (4.84) y (4.85) [55] y el mismo argumento se aplica [42, 55].

Para investigar si estas conclusiones cambian al permitir la backreaction, hemos considerado la forma explícita de las ecuaciones de valor medio, la masa dinámica y las EES, con el fin de buscar soluciones autoconsistentes en De Sitter [31]. La resolución numérica simultánea de estas ecuaciones nos permitió analizar la aparición de ruptura espontánea de simetría y, al mismo tiempo, evaluar el efecto que las fluctuaciones cuánticas tiene sobre la métrica clásica. Hemos encontrado que no hay ruptura de simetría cuando se fija el punto de renormalización

a partir de la constante cosmológica según la relación clásica $\Lambda_R = 4R_0$, pero pueden existir bajo otras condiciones. Otra conclusión importante de nuestro análisis es que la importancia de la backcreation depende en gran medida del valor de la curvatura escalar en el punto de renormalización R_0 . En particular, hemos encontrado soluciones de De Sitter autoconsistentes en ausencia de constante cosmológica $\Lambda_R = 0$, donde los efectos cuánticos desempeñan un papel crucial. Estas soluciones son relevantes para el problema de la energía oscura. Por esta razón, sería importante analizar la factibilidad fenomenológica de las mismas, comparando los parámetros con las cotas extraídas de las observaciones cosmológicas y astronómicas. Esto queda pendiente para posibles trabajos futuros.

Para comprobar si los resultados obtenidos son válidos más allá de la aproximación de Hartree sería necesario incluir el diagrama del "atardecer" en el cálculo de la acción efectiva 2PI. Para abordar esta cuestión hay varias complicaciones técnicas a ser resueltas. Por un lado, el uso del formalismo de camino temporal cerrado, o IN-IN, será inevitable al considerar los términos no locales en la acción efectiva 2PI. Por otra parte, la inclusión de diagramas de mayor número de loops en la acción efectiva 2PI involucra algunos puntos sutiles en la renormalización, incluso en espacio-tiempo plano [25], que tendrán su contrapartida en espacios curvos. Otro método no perturbativo dentro del contexto de la teoría de campos IN-IN que fue aplicado a De Sitter de forma exitosa en la literatura es el del grupo de renormalización dinámico [54]. Ignorando la interacción del campo por encima de cierto cutoff en momentos (físicos, no comóviles), los autores han podido calcular la primera corrección en $1/N$ a la masa dinámica. Estos resultados son prometedores, pero es importante ir más allá del límite infrarrojo y considerar la influencia de los modos de longitud de onda menor.

Una alternativa completamente distinta involucra otros métodos no perturbativos que nacen del caso de estudio en particular, el espacio-tiempo de De Sitter, y que están particularmente adaptados para estudiar el problema infrarrojo. Estos métodos son el formalismo de inflación estocástica [17], y la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo [39, 40]. En ambos casos, la equivalencia de estos métodos con aquellos basados en la teoría de campos IN-IN convencional todavía se debate abiertamente en la literatura, si bien se ha logrado cierto progreso en el caso de campos masivos.

En inflación estocástica, los modos del campo salen continuamente del horizonte y se vuelven clásicos. La interacción entre los modos de longitud de onda mucho mayor que el horizonte y los modos cuánticos es descripta de manera efectiva mediante una fuente de ruido estocástico ξ en una ecuación de tipo Langevin. A partir de una función de densidad de probabilidad, obtenida al resolver la ecuación de Fokker-Planck correspondiente, pueden calcularse las funciones de

correlación del campo en el límite infrarrojo. El resultado más relevante en la literatura en relación al problema infrarrojo en De Sitter proviene del cálculo de la masa dinámica para un solo campo no masivo ($N = 1$), ec. (7.7), a partir de este formalismo. Interesantemente, éste difiere del resultado para $N \rightarrow \infty$ meramente en un 15 %. Por otro lado, la desventaja principal de este enfoque es la dificultad de calcular correcciones más allá del límite infrarrojo de manera sistemática. Además, los intentos de probar su equivalencia con la teoría de campos en el formalismo IN-IN se limitan por el momento al caso masivo [34, 35, 36, 38].

La teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo es otra opción interesante. Dadas las simetrías del espacio-tiempo de De Sitter en coordenadas globales en d dimensiones, al realizar una prolongación analítica al tiempo imaginario, es necesario compactificarlo, teniendo como resultado una d -esfera euclídea. Definiendo la teoría de campos en esta esfera es posible recuperar el resultado de inflación estocástica para campos no masivos al tratar el modo constante (que ahora es discreto gracias a la compactificación) de manera no perturbativa [39]. A diferencia del tratamiento estocástico, el formalismo euclídeo si admite correcciones sistemáticas provenientes de los modos ultravioletas, tratados de forma perturbativa. Esto resulta prometedor, sin embargo por el momento los intentos de probar la equivalencia entre la teoría de campos euclídea y la teoría de campos lorentziana en el formalismo IN-IN se basan en el caso masivo [41]. Es de gran interés establecer si esta equivalencia es válida en el caso no masivo, lo que permitiría a su vez darle confianza a los resultados estocásticos, cuya equivalencia con la teoría de campos lorentziana tampoco ha sido demostrada en ese caso.

Una manera de comprobar en parte la equivalencia sería comparar con resultados conocidos provenientes de la teoría de campos en el formalismo IN-IN. Allí, los resultados no perturbativos más confiables son aquellos en el límite de N grande. Por esta razón, en nuestro trabajo más reciente [44] hemos generalizado la teoría de campos en el espacio de De Sitter euclídeo al modelo con simetría $O(N)$. A partir de esto hemos considerado las correcciones ultravioletas a los resultados de orden infrarrojo más bajo, analizando la renormalización. En este contexto, calculamos la masa dinámica a segundo orden en la expansión infrarroja, así como la función de 2-puntos para puntos separados. Nuestros resultados eucídeos son válidos para todo N . Verificamos que el resultado para la masa dinámica en el límite de N grande es compatible con los resultados obtenidos a partir de la acción efectiva 2PI en ese límite, incluyendo la restauración de la simetría.

Sin embargo, observamos que para campos no masivos, el comportamiento para puntos separados sigue teniendo problemas a tiempos largos. Esto último se debe a que estamos expandiendo los propagadores ultravioletas alrededor del caso no masivo. Si pudiéramos realizar

una resumación a todo orden, recuperaríamos un propagador masivo (como sucede en el caso de $N \rightarrow \infty$). Queda como pregunta abierta si es posible redefinir la parte perturbativa de este formalismo, para resumir cierta clase de contribuciones para esquivar este problema. Una vez resuelto, debería ser factible realizar la continuación analítica de los resultados para volver al espacio-tiempo de De Sitter lorentziano, y comprobar si éstos satisfacen o no las ecuaciones de Schwinger-Dyson correspondientes.

En general, la equivalencia de estos métodos alternativos con la teoría de campos IN-IN en el caso no masivo sigue siendo una pregunta abierta. Nuestros resultados en el espacio de De Sitter euclídeo son prometedores en vistas a progresar en esa dirección [44]. Sin embargo, aún se deben sortear las otras dificultades mencionadas. Otro punto interesante es la posibilidad de implementar una estrategia similar directamente en la teoría de campos lorentziana en el formalismo IN-IN. En este caso, la principal dificultad yace en la definición del "modo cero" en el espacio-tiempo de De Sitter lorentziano donde se tiene un continuo de modos. Luego, la implementación de una resumación no perturbativa de las contribuciones provenientes de dicho modo debe ser implementada. Finalmente, las correcciones provenientes del resto de los modos ultravioletas se deben tratar perturbativamente.

Otras preguntas interesantes incluyen la posibilidad de aplicar algunas de estas técnicas más allá del espacio-tiempo de De Sitter, pasando al caso de mayor interés cosmológico, donde la expansión es quasi-exponencial. Por un lado, esto introduce la dificultad de que las magnitudes de interés, como ser la masa dinámica, pasarían a depender del tiempo. Por otro lado, esto simultáneamente daría una solución al problema infrarrojo. En efecto, si el período inflacionario tiene un fin, esto le pone un límite al crecimiento de las fluctuaciones cuánticas de los campos no masivos. De hecho, este mecanismo es el responsable de generar las perturbaciones primordiales en el Universo temprano. Hasta dónde los problemas infrarrojos deben o no ser tratados con los métodos no perturbativos en el contexto inflacionario dependerá fuertemente del modelo particular considerado.

Apéndice A

Límite de coincidencia del propagador libre en De Sitter

Aquí proveemos algunos detalles del cálculo de la función $F(m_{dyn}^2, \{R\})$ para el espacio-tiempo de De Sitter, ec. (3.13). Debemos expandir el propagador coincidente para $d \rightarrow 4$, es decir $\epsilon \rightarrow 0$, mientras se mantiene fijo R , y por esta razón reescribimos $\nu_d^2 = \frac{(d-1)^2}{4} - \frac{m_{dyn}^2}{H^2} - \xi_R d(d-1)$ como $\tilde{\nu}_d^2 = \frac{(d-1)^2}{4} - \left(\frac{m_{dyn}^2}{R} + \xi_R \right) d(d-1)$. Entonces, expandiendo (3.12) para $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} [G_1] &= \frac{R}{96\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu_4\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu_4\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu_4\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu_4\right)} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \frac{13}{6} + \gamma_E + \ln\left(\frac{R}{48\pi\mu^2}\right) + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu_4\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu_4\right) \right. \\ &+ \left. 2 \left[\psi\left(\frac{1}{2} - \nu_4\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \nu_4\right) + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu_4\right) - \psi\left(\frac{3}{2} - \nu_4\right) \right] \frac{d\tilde{\nu}_n}{dn} \Big|_{n=4} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

donde $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ es la función DiGamma, μ es una escala de masa arbitraria introducida para mantener las unidades usuales cuando $d \neq 4$. Notar que a pesar de que $\nu_4 = \tilde{\nu}_4$, sus derivadas no coinciden $d\nu_d/d(d)|_{d=4} \neq d\tilde{\nu}_d/d(d)|_{d=4}$. De ahora en adelante ϵ puede ser evaluado en 0 en aquellos términos no divergentes. Utilizando las propiedades de las funciones Gamma y DiGamma podemos simplificar el pre-factor y la expresión entre corchetes, obteniendo

$$[G_1] = \frac{R}{96\pi^2} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \nu_4^2 \right) \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{13}{6} + \gamma_E + \ln\left(\frac{R}{48\pi\mu^2}\right) + \psi_+ + \psi_- \right] - 4\nu_4 \frac{d\tilde{\nu}_n}{dn} \Big|_{n=4} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

donde usamos la notación abreviada $\psi_{\pm} \equiv \psi\left(\frac{3}{2} \pm \nu_4\right)$. Ahora, reemplazando las expresiones de ν_4 y $d\tilde{\nu}_d/d(d)|_{d=4}$ obtenemos

$$\begin{aligned} [G_1] &= \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \left[\frac{2}{\epsilon} - \frac{13}{6} + \gamma_E + \ln \left(\frac{R}{48\pi\mu^2} \right) + \psi_+ + \psi_- \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{4} + \frac{7}{6} (m_{dyn}^2 + \xi_R R) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

o, reordenando un poco la expresión y sustituyendo $\gamma_E - 1 + \ln(R/48\pi\mu^2) \rightarrow \ln(R/12\tilde{\mu}^2)$,

$$\begin{aligned} [G_1] &= \frac{1}{4\pi^2\epsilon} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] + \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\ln \left(\frac{R}{12\tilde{\mu}^2} \right) + \psi_+ + \psi_- \right] - \frac{R}{18} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En esta forma, esta expresión puede compararse directamente con la primera línea de (2.30). La función $F(m_{dyn}^2, \{R\})$ en el espacio-tiempo de De Sitter resulta,

$$\begin{aligned} F_{ds}(m_{dyn}^2, R) &= -\frac{1}{2} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \left[\ln \left(\frac{R}{12m_{dyn}^2} \right) + \psi_+ + \psi_- \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R + \frac{R}{36}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde $R = 12H^2$. Esta función tiene todas las propiedades esperadas, es decir, se escribe sólo en términos de los parámetros renormalizados, es independiente de ϵ y $\tilde{\mu}$, y satisface los límites apropiados (2.32a), (2.32b) y (2.32c). A la hora de verificar dichos límites es útil tener en cuenta que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\psi_+ + \psi_- + \ln \left(\frac{R}{12m_{dyn}^2} \right) \right] = 0, \quad (\text{A.6a})$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \left[\frac{1}{R} + \left(\psi'_+ - \psi'_- \right) \frac{d\tilde{\nu}_4}{dR} \right] = \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{18}. \quad (\text{A.6b})$$

Apéndice B

Relaciones de consistencia 2PI

En este apéndice repasaremos brevemente la derivación de las relaciones de consistencia de la acción efectiva 2PI que permiten establecer la relación entre los diferentes contratérminos. Estas son las ecuaciones (4.32) y (4.33). Empecemos por recordar que la acción efectiva 1PI completa se obtiene evaluando la acción efectiva 2PI, también completa, en la solución $\bar{G}(\bar{\phi})$ a la ecuación del propagador,

$$\Gamma_{1PI}[\bar{\phi}] = \Gamma_{2PI}[\bar{\phi}, \bar{G}(\bar{\phi})]. \quad (\text{B.1})$$

De la ecuación (4.25) tenemos que la ecuación del propagador es, formalmente,

$$\frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta G_{12}} \bigg|_{\bar{G}} = -\frac{i}{2} \bar{G}_{12}^{-1} + \frac{i}{2} G_{0,12}^{-1} + \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta G_{12}} \bigg|_{\bar{G}} = 0, \quad (\text{B.2})$$

o, equivalentemente

$$\bar{G}_{12}^{-1}(\bar{\phi}) = G_{0,12}^{-1} - \bar{\Sigma}_{12}(\bar{\phi}), \quad (\text{B.3})$$

donde definimos la auto-energía

$$\bar{\Sigma}_{12}(\bar{\phi}) \equiv 2i \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta G_{12}} \bigg|_{\bar{G}}. \quad (\text{B.4})$$

La primera derivada funcional de $\Gamma_{1PI}[\bar{\phi}]$ con respecto a $\bar{\phi}$, la cual igualada a cero da la ecuación del campo, puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(1)} &= \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1} \bigg|_{\bar{\phi}} = \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta \phi_1} + \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta G_{ab}} \bigg|_{\bar{G}} \frac{\delta \bar{G}_{ab}}{\delta \phi_1} = \frac{\delta \Gamma_{2PI}}{\delta \phi_1} \\ &= iG_{0,1a}^{-1} \phi_a + \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta \phi_1} \bigg|_{\bar{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde en la tercera igualdad hemos usado que (B.2).

Como fue mencionado en el capítulo 4, existen varias definiciones posibles de las funciones de n -puntos en este contexto. Para la teoría $\lambda\phi^4$ es suficiente si nos concentramos en las funciones de dos y cuatro puntos.

Por un lado, tenemos las funciones de dos y cuatro puntos que se obtienen tomando derivadas funcionales de $\Gamma_{1PI}[\bar{\phi}]$ con respecto a $\bar{\phi}$:

$$\Gamma_{12}^{(2)} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\bar{\phi}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_{1234}^{(4)} = \left. \frac{\delta^4 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \right|_{\bar{\phi}}. \quad (\text{B.7})$$

Derivando funcionalmente la ecuación (B.5), obtenemos las siguientes expresiones para la función de 2-puntos

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\bar{\phi}} = iG_{0,12}^{-1} + \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\bar{G}} + \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \frac{\delta \bar{G}_{ab}}{\delta \phi_2}. \quad (\text{B.8})$$

Usando que

$$\frac{\delta \bar{G}_{12}}{\delta \phi_3} = \frac{\delta}{\delta \phi_3} (\bar{G}_{1a} \bar{G}_{ab}^{-1} \bar{G}_{b2}) = \frac{\delta \bar{G}_{12}}{\delta \phi_3} + \frac{\delta \bar{G}_{12}}{\delta \phi_3} + \bar{G}_{1a} \bar{G}_{b2} \frac{\delta \bar{G}_{ab}^{-1}}{\delta \phi_3}, \quad (\text{B.9})$$

y que, a partir de la ecuación (B.3) se tiene

$$\frac{\delta \bar{G}_{12}}{\delta \phi_3} = \bar{G}_{1a} \bar{G}_{b2} \frac{\delta \bar{\Sigma}_{ab}}{\delta \phi_3}, \quad (\text{B.10})$$

podemos escribir

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\bar{\phi}} = iG_{0,12}^{-1} + \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\bar{G}} + \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \bar{G}_{ac} \bar{G}_{bd} \frac{\delta \bar{\Sigma}_{cd}}{\delta \phi_2}. \quad (\text{B.11})$$

Luego, se puede mostrar que

$$\frac{\delta \bar{\Sigma}_{12}}{\delta \phi_3} = 2i \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_3 \delta G_{12}} \right|_{\bar{G}} + 2i \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta G_{12} \delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \frac{\bar{G}_{ab}}{\delta \phi_3} \quad (\text{B.12})$$

$$= 2i \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_3 \delta G_{12}} \right|_{\bar{G}} + \frac{i}{2} \bar{\Lambda}_{12,ab} \bar{G}_{ac} \bar{G}_{bd} \frac{\delta \bar{\Sigma}_{cd}}{\delta \phi_3}, \quad (\text{B.13})$$

donde $\bar{\Lambda}_{12,34}$ se define como

$$\bar{\Lambda}_{12,34} \equiv 4 \left. \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta G_{12} \delta G_{34}} \right|_{\bar{G}}. \quad (\text{B.14})$$

Por lo tanto, $\delta\bar{\Sigma}_{12}/\delta\phi_3$ satisface una ecuación autoconsistente. De manera similar, se puede definir una función vértice de 4-puntos como la solución autoconsistente de la siguiente ecuación

$$\bar{V}_{12,34} = \bar{\Lambda}_{12,34} + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_{12,ab}\bar{G}_{ac}\bar{G}_{bd}\bar{V}_{cd,34}, \quad (\text{B.15})$$

o, expresada en forma matricial

$$\bar{V} = \bar{\Lambda} + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}\bar{G}^2\bar{V} = \bar{\Lambda} + \frac{i}{2}\bar{V}\bar{G}^2\bar{\Lambda}, \quad (\text{B.16})$$

donde la última igualdad se desprende de las propiedades de simetría de \bar{V} (que son las misma de $\Gamma_{12,34}^{(4)}$) y $\bar{\Lambda}$.

Para obtener la función de 4-puntos se deben tomar dos derivadas adicionales, sin embargo, esto se vuelve rápidamente inmanejable. Por lo tanto, consideremos el caso en el cual la teoría exhibe una simetría interna Z_2 , es decir, es invariante ante $\phi \rightarrow -\phi$. En este caso, las funciones de n -puntos con n impar se anulan al ser evaluadas en $\bar{\phi} = 0$, por ejemplo

$$\left. \frac{\delta\bar{\Sigma}_{12}}{\delta\phi_3} \right|_{\bar{\phi}=0} = 2i \left. \frac{\delta^2\Gamma_{int}}{\delta\phi_3\delta G_{12}} \right|_{\bar{\phi}=0} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Teniendo esto en cuenta, la función de 4-puntos resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_{1234}^{(4)} &= \left. \frac{\delta^4\Gamma_{int}}{\delta\phi_1\delta\phi_2\delta\phi_3\delta\phi_4} \right|_{\bar{G}} + \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_1\delta\phi_2\delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \bar{G}_{ac}\bar{G}_{db}\frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{cd}}{\delta\phi_3\delta\phi_4} \\ &+ \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_1\delta\phi_3\delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \bar{G}_{ac}\bar{G}_{db}\frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{cd}}{\delta\phi_2\delta\phi_4} + \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_1\delta\phi_4\delta G_{ab}} \right|_{\bar{G}} \bar{G}_{ac}\bar{G}_{db}\frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{cd}}{\delta\phi_2\delta\phi_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

A partir de la ecuación (B.13) y explotando la simetría Z_2 , obtenemos una ecuación autoconsistente

$$\frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{12}}{\delta\phi_3\delta\phi_4} = 2i \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_3\delta\phi_4\delta G_{12}} \right|_{\bar{G}} + \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_{12,ab}\bar{G}_{ac}\bar{G}_{bd}\frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{cd}}{\delta\phi_3\delta\phi_4} \quad (\text{B.19})$$

cuya solución puede ser expresada en términos de la función $\bar{V}_{12,34}$, solución de (B.15),

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2\bar{\Sigma}_{12}}{\delta\phi_3\delta\phi_4} &= 2i \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_3\delta\phi_4\delta G_{12}} \right|_{\bar{G}} + \frac{i}{2}\bar{V}_{12,ab}\bar{G}_{ac}\bar{G}_{bd}2i \left. \frac{\delta^3\Gamma_{int}}{\delta\phi_3\delta\phi_4\delta G_{cd}} \right|_{\bar{G}} \\ &= i \left(\Lambda_{34,12} + \frac{i}{2}\bar{V}_{12,ab}\bar{G}_{ac}\bar{G}_{bd}\Lambda_{34,cd} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donde hemos definido

$$\Lambda_{12,34} \equiv 2 \frac{\delta^3 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta G_{34}} \Bigg|_{\bar{G}} . \quad (\text{B.21})$$

Luego, la función de 4-puntos puede ser escrita como

$$\Gamma_{1234}^{(4)} = \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \Bigg|_{\bar{G}} + \frac{i}{2} \left[\Lambda_{12,ab} \bar{G}_{ac} \bar{G}_{db} \Lambda_{cd,34} + \frac{i}{2} \Lambda_{12,ab} \bar{G}_{ac} \bar{G}_{db} \bar{V}_{cd,ef} \bar{G}_{eh} \bar{G}_{if} \Lambda_{hi,34} + perm \right],$$

o, de forma matricial

$$\Gamma^{(4)} = \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi^4} \Bigg|_{\bar{G}} + \frac{i}{2} \left[\Lambda \bar{G}^2 \Lambda^\dagger + \frac{i}{2} \Lambda \bar{G}^2 \bar{V} \bar{G}^2 \Lambda^\dagger + perm \right]. \quad (\text{B.22})$$

En la teoría exacta se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \Bigg|_{\bar{\phi}=0} = 2 \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta G_{12}} \Bigg|_{\bar{\phi}=0} \quad (\text{B.23})$$

La cual es la primera relación de consistencia (4.32) que hemos usado. Diferenciando con respecto a G obtenemos

$$\frac{\delta^3 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta G_{34}} \Bigg|_{\bar{\phi}=0} = 2 \frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta G_{12} \delta G_{34}} \Bigg|_{\bar{\phi}=0}, \quad (\text{B.24})$$

es decir

$$\Lambda_{12,34} = \bar{\Lambda}_{12,34}. \quad (\text{B.25})$$

Dado esto, la función de 2-puntos (B.11) resulta

$$\Gamma_{12}^{(2)} = i G_{0,12}^{-1} + 2 \frac{\delta \Gamma_{int}}{\delta G_{12}} \Bigg|_{\bar{\phi}=0} = i \bar{G}_{12}^{-1}, \quad (\text{B.26})$$

donde hemos utilizado la ecuación del propagador (B.2) para llegar a la última igualdad.

De manera similar, pero ahora para la función de 4-puntos (B.22), usando (B.25) y (B.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)} &= \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi^4} \Bigg|_{\bar{G}} + \frac{i}{2} \left[\bar{\Lambda} \bar{G}^2 \bar{\Lambda}^\dagger + \frac{i}{2} \bar{\Lambda} \bar{G}^2 \bar{V} \bar{G}^2 \bar{\Lambda}^\dagger + perm \right] \\ &= \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi^4} \Bigg|_{\bar{G}} + \frac{i}{2} \bar{V} \bar{G}^2 \bar{\Lambda}^\dagger + perm \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi^4} \Bigg|_{\bar{G}} + [\bar{V} - \bar{\Lambda} + perm] \quad (\text{B.28})$$

o, más explícitamente

$$\Gamma_{1234}^{(4)} = \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \Bigg|_{\bar{G}} + [\bar{V}_{12,34} - \bar{\Lambda}_{12,34} + \bar{V}_{13,24} - \bar{\Lambda}_{13,24} + \bar{V}_{14,23} - \bar{\Lambda}_{14,23}] . \quad (\text{B.29})$$

Esta última ecuación es la segunda relación de consistencia que estabamos buscando. Para poder implementarla, es necesario considerar otra relación válida en la teoría exacta:

$$\Gamma_{12,34}^{(4)}(\bar{\phi} = 0) = \bar{V}_{12,34}(\bar{\phi} = 0), \quad (\text{B.30})$$

entonces se puede reescribir la expresión anterior como

$$\Gamma_{1234}^{(4)} = 2 \left[\frac{\delta^2 \Gamma_{int}}{\delta G_{12} \delta G_{34}} \Bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0} + \text{perms}(2, 3, 4) \right] - \frac{1}{2} \frac{\delta^4 \Gamma_{int}}{\delta \phi_1 \delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \Bigg|_{\bar{G}, \bar{\phi}=0} , \quad (\text{B.31})$$

donde hemos aprovechado las propiedades de simetría de $\Gamma_{1234}^{(4)}$. Esta es la segunda relación de consistencia que hemos utilizado (4.33).

Apéndice C

Relación entre los parámetros renormalizados y los de sustracción mínima

En esta sección resumimos el cálculo de los parámetros renormalizados a partir del potencial efectivo con el punto de renormalización en el espacio-tiempo de Minkowski. Obtenemos su relación con los parámetros de sustracción mínima.

Para m_R^2 usamos (4.62a) junto con (4.59) y (2.32a), dando

$$m_R^2 = m^2 + \frac{\lambda}{32\pi^2} m_R^2 \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \quad (\text{C.1})$$

o, equivalentemente

$$m_R^2 = \frac{m^2}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}. \quad (\text{C.2})$$

Luego, para ξ_R , vemos de la ecuación (4.62b) que debemos imponer la condición $dm_{dyn}^2/dR|_0 = 0$. Para ello, tomamos la derivada de (4.62a) respecto de R ,

$$\begin{aligned} \frac{dm_{dyn}^2}{dR} + \xi_R &= \xi + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \left[\frac{dm_{dyn}^2}{dR} + \xi_R - \frac{1}{6} \right] \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \frac{1}{m_{dyn}^2} \frac{dm_{dyn}^2}{dR} - 2 \frac{dF}{dR} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ahora podemos evaluar para $\bar{\phi} = 0$ y $R = 0$, usando (4.62a) y (2.32c), e imponer la condición

mencionada anteriormente. Esto lleva a

$$\xi_R = \xi + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \quad (C.4)$$

o, con un poco de álgebra

$$\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right)}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}. \quad (C.5)$$

Finalmente para λ_R debemos tomar dos derivadas de (4.59) respecto de $\bar{\phi}$,

$$\begin{aligned} \frac{dm_{dyn}^2}{d\bar{\phi}} &= \lambda \bar{\phi} + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \frac{1}{m_{dyn}^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{dF(m_{dyn}^2, \{R\})}{dm_{dyn}^2} \right\} \frac{dm_{dyn}^2}{d\bar{\phi}}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Antes de tomar la segunda derivada, evaluamos esta expresión para $\bar{\phi} = 0$ y $R = 0$, ya que será necesaria luego,

$$\frac{dm_{dyn}^2}{d\bar{\phi}} \bigg|_0 \left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] = 0 \quad (C.7)$$

lo cual implica $\frac{dm_{dyn}^2}{d\bar{\phi}}|_0 = 0$. Ahora, volviendo a derivar

$$\begin{aligned} \frac{d^2m_{dyn}^2}{d\bar{\phi}^2} &= \lambda + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{m_{dyn}^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \left[m_{dyn}^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \frac{1}{m_{dyn}^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{dF(m_{dyn}^2, \{R\})}{dm_{dyn}^2} \right\} \frac{d^2m_{dyn}^2}{d\bar{\phi}^2} + [\dots] \frac{dm_{dyn}^2}{d\bar{\phi}}, \end{aligned} \quad (C.8)$$

y luego evaluando para $\bar{\phi} = 0$ y $R = 0$, y usando el resultado previo junto con (4.62c), finalmente llegamos a

$$\lambda_R = \frac{\lambda}{\left[1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right]}. \quad (C.9)$$

Apéndice D

Derivadas funcionales de $\hat{Z}_f[\hat{J}]$

Usando que $\hat{Z}_f[\hat{J}]$ es la funcional generatriz de una teoría libre, es fácil evaluar sus derivadas funcionales en $\hat{J} = 0$ en términos del propagador ultravioleta libre $\hat{G}(x, x')$. En este apéndice obviamos el superíndice (m) en el propagador para mantener una notación manejable. Lo que nos interesa aquí es seguir el detalle de los índices del grupo $O(N)$. Las expresiones útiles son

$$\frac{\delta^2 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x_1) \delta \hat{J}_b(x_2)} \bigg|_{\hat{J}=0} = \hat{G}^{(m)}(x_1, x_2) \delta_{ab}, \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x_1) \delta \hat{J}_b(x_2) \delta \hat{J}_c(x_3) \delta \hat{J}_d(x_4)} \bigg|_{\hat{J}=0} &= \hat{G}^{(m)}(x_1, x_2) \hat{G}^{(m)}(x_3, x_4) \delta_{ab} \delta_{cd} \\ &+ \hat{G}^{(m)}(x_1, x_3) \hat{G}^{(m)}(x_2, x_4) \delta_{ac} \delta_{bd} \\ &+ \hat{G}^{(m)}(x_1, x_4) \hat{G}^{(m)}(x_2, x_3) \delta_{ad} \delta_{bc} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

En el caso de la derivada sexta, no es necesario escribir la expresión más general posible para seis puntos diferentes, ya que solo necesitamos algunos casos particulares en los cuales algunos

de los puntos están evaluados en coincidencia. Los dos casos necesarios son

$$\begin{aligned}
 & \left[(N+4)\delta_{cd}\delta_{ef} + 4\frac{A_{cdef}}{(N+2)} \right] \iint_{x,x'} \frac{\delta^6 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_{abcdef}^6(x_1, x_2, x, x, x', x')} \Big|_{\hat{J}=0} \\
 &= N \left[(N+2)^2 V_d^2 [\hat{G}]^2 + 2(N+8) \iint_{x,x'} \hat{G}(x, x')^2 \right] \delta_{ab} \hat{G}(x_1, x_2) \\
 & \quad + 4(N+2)^2 \delta_{ab} V_d [\hat{G}] \int_x \hat{G}(x_1, x) \hat{G}(x, x_2) \\
 & \quad + 8(N+8) \delta_{ab} \iint_{x,x'} \hat{G}(x_1, x) \hat{G}(x', x_2) \hat{G}(x, x') \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \delta_{cd}\delta_{ef} \int_x \frac{\delta^6 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_{abcdef}^6(x_1, x_2, x, x, x, x)} \Big|_{\hat{J}=0} &= N(N+2) \delta_{ab} V_d [\hat{G}]^2 \hat{G}(x_1, x_2) \\
 & \quad + 4(N+2) \delta_{ab} [\hat{G}] \int_x \hat{G}(x_1, x) \hat{G}(x, x_2) \tag{D.4}
 \end{aligned}$$

Apéndice E

Integrales del propagador ultravioleta libre en el espacio de De Sitter euclídeo

El propagador ultravioleta libre en el espacio de De Sitter euclídeo admite la siguiente expansión en armónicos esféricos

$$\hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x') = H^d \sum_{\vec{L} \neq 0} \frac{Y_{\vec{L}}(x) Y_{\vec{L}}^*(x')}{H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2}. \quad (\text{E.1})$$

Entonces se tiene, por ejemplo

$$\int_x \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x) = H^d \sum_{\vec{L} \neq 0} \frac{\left(\int_x Y_{\vec{L}}(x) Y_{\vec{L}}^*(x) \right)}{H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2} = \sum_{\vec{L} \neq 0} \frac{1}{H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2}, \quad (\text{E.2})$$

donde hemos usado las relaciones de ortogonalidad de los armónicos esféricos en d dimensiones (7.18).

En el cálculo de las correcciones a la parte ultravioleta de la función de 2-puntos a segundo orden aparece, por un lado, la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') &= H^{-2d} \sum_{\vec{L} \neq 0, \vec{L}' \neq 0} \left[\frac{Y_{\vec{L}}(x) \left(\int_z Y_{\vec{L}}^*(z) Y_{\vec{L}'}(z) \right) Y_{\vec{L}'}^*(x')}{[H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2][H^2 L'(L'+d-1) + \mathcal{M}^2]} \right] \\ &= H^{-d} \sum_{\vec{L} \neq 0} \frac{Y_{\vec{L}}(x) Y_{\vec{L}}^*(x')}{[H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2]^2}, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

donde nuevamente hemos expandido y luego integrado usando la ortogonalidad. Aquí se puede hacer la observación que

$$\frac{1}{[H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2]^2} = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^2} \left[\frac{1}{H^2 L(L+d-1) + \mathcal{M}^2} \right], \quad (\text{E.4})$$

y por lo tanto, bajo el supuesto que se pueden intercambiar la derivada y la serie, se concluye que

$$\int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') = -\frac{\partial \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial \mathcal{M}^2}. \quad (\text{E.5})$$

De manera similar, se puede mostrar que

$$\iint_{y,z} \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, y) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(y, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, x')}{\partial (\mathcal{M}^2)^2}. \quad (\text{E.6})$$

Apéndice F

Renormalización en espacio de De Sitter euclídeo

El proceso de renormalización se lleva a cabo incluyendo dos contratérminos en la acción, $\int_x \delta\mathcal{M}^2 \phi_a \phi_a / 2$ y $\int_x \delta\lambda (\phi_a \phi_a)^2 / 8N$. Es válido asumir que su dependencia en λ será como en el caso perturbativo usual, es decir $\delta\mathcal{M}^2 \sim \lambda$ y $\delta\lambda \sim \lambda^2$, y por lo tanto al segundo orden en las correcciones ultravioletas necesitamos considerar términos con $\delta\mathcal{M}^2$, $(\delta\mathcal{M}^2)^2$ y $\delta\lambda$. Esto lleva a las siguientes nuevas contribuciones a la funcional generatriz (8.3),

$$\begin{aligned}
\Delta Z[J_0, \hat{J}] = & Z_0[J_0] \hat{Z}_f[\hat{J}] \frac{V_d \delta\mathcal{M}^2}{2} \left(\langle \phi_0^2 \rangle_0 - \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \delta_{ab} \right) \\
& + Z_0[J_0] \hat{Z}_f[\hat{J}] \left[\frac{V_d \delta\lambda}{8N} \langle \phi_0^4 \rangle_0 + \frac{V_d^2 (\delta\mathcal{M}^2)^2}{4} \left(\langle \phi_0^2 \rangle_0^2 - \frac{\langle \phi_0^4 \rangle_0}{2} \right) \right] \\
& - \hat{Z}_f[\hat{J}] \frac{V_d^2 (\delta\mathcal{M}^2)^2}{4} \langle \phi_0^2 \rangle_0 \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \delta_{ab} \\
& + \hat{Z}_f[\hat{J}] \left(\frac{V_d^2 (\delta\mathcal{M}^2)^2}{8} - \frac{V_d \delta\lambda}{8N} \right) \frac{\delta^4 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b} \delta J_{0c} \delta J_{0d}} \delta_{ab} \delta_{cd} \\
& + Z_0[J_0] \frac{\delta\mathcal{M}^2}{2} \left[\hat{Z}_f[\hat{J}] N V_d[\hat{G}^{(\mathcal{M})}] - \int_x \frac{\delta^2 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_a(x) \delta \hat{J}_b(x)} \delta_{ab} \right] \\
& + \frac{\lambda}{4N} \frac{V_d \delta\mathcal{M}^2}{2} A_{abcd} \int_x \frac{\delta^2 \hat{Z}_f[\hat{J}]}{\delta \hat{J}_c(x) \delta \hat{J}_d(x)} \left[\frac{\delta^4 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b} \delta J_{0e} \delta J_{0f}} - \langle \phi_0^2 \rangle_0 \frac{\delta^2 Z_0[J_0]}{\delta J_{0a} \delta J_{0b}} \delta_{ab} \right].
\end{aligned}$$

Rastreando estos términos en el cálculo de ambas partes untravioleta e infrarroja de la función de 2-puntos conduce a las siguientes nuevas contribuciones,

$$\begin{aligned} \Delta \left(\langle \hat{\phi}_a(x) \hat{\phi}_b(x') \rangle \right) = \delta_{ab} & \left[-1 + \frac{\lambda}{4N^2} (N+2) V_d (\langle \phi_0^4 \rangle_0 - \langle \phi_0^2 \rangle_0^2) \right] \delta \mathcal{M}^2 \\ & \times \int_z \hat{G}^{(\mathcal{M})}(x, z) \hat{G}^{(\mathcal{M})}(z, x'), \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

a ser agregada a (8.11), y

$$\begin{aligned} \Delta (\langle \phi_{0a} \phi_{0b} \rangle) = \frac{\delta_{ab}}{N} & \left\{ \frac{V_d \delta \mathcal{M}^2}{2} (\langle \phi_0^2 \rangle_0^2 - \langle \phi_0^4 \rangle_0) \right. \\ & + (\langle \phi_0^6 \rangle_0 - \langle \phi_0^2 \rangle_0 \langle \phi_0^4 \rangle_0) \left[\frac{V_d^2 (\delta \mathcal{M}^2)^2}{8} - \frac{V_d \delta \lambda}{8N} + \frac{\lambda}{8N} (N+2) \delta \mathcal{M}^2 V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] \right] \\ & \left. + (\langle \phi_0^2 \rangle_0^3 - \langle \phi_0^2 \rangle_0 \langle \phi_0^4 \rangle_0) \left[\frac{V_d^2 (\delta \mathcal{M}^2)^2}{4} + \frac{\lambda}{4N} (N+2) \delta \mathcal{M}^2 V_d^2 [\hat{G}^{(\mathcal{M})}] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

a ser agregadas al paso anterior a (8.22) (no mostrado), el cual es igual a (8.22) pero removiendo las etiquetas *ren* y *fin*.

Con estas contribuciones provenientes de los contratérminos, es sencillo ver que las elecciones (8.13) y (8.21) para éstos conducen a resultados finitos. El resultado son las expresiones renormalizadas (8.16) y (8.22).

Apéndice G

Comparación entre contratérminos lorentzianos y euclídeos

Primero veamos que los contratérminos obtenidos en 2PI cuando $N \rightarrow \infty$ en d dimensiones, (8.30), coinciden con los utilizados en la aproximación de Hartree (4.57). Para esto es necesario explicitar las partes divergentes en sustracción mínima cuando $d = 4$. De la expansión de Schwinger-DeWitt (2.30) se obtiene que en ese caso

$$[\hat{G}^{(0)}]_{div} + \mathcal{M}^2 \left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div} = [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{div} = \frac{(\mathcal{M}^2 - 2H^2)}{8\pi^2\epsilon}, \quad (G.1)$$

y

$$\left(\frac{\partial [\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial \mathcal{M}^2} \right)_{0,div} = \frac{1}{8\pi^2\epsilon}. \quad (G.2)$$

Utilizando la segunda, es inmediato ver que (8.30b) coincide con (4.57c). Por otro lado, el contratérmino $\delta\mathcal{M}^2$, (8.30a), debe compararse con la combinación $\delta m^2 + 12\delta\xi H^2$, con δm^2 y $\delta\xi$ dados por (4.57a) y (4.57b) respectivamente. Mediante (G.1), éstas coinciden.

En segundo lugar, comparemos nuevamente los contratérminos (8.30), pero esta vez con aquellos que provienen del cálculo euclídeo, (8.13) y (8.21). Para ello, notemos que al expandir los primeros en λ al orden más bajo equivale simplemente a aproximar los denominadores por

la unidad,

$$\delta\mathcal{M}^2 = -\frac{\lambda}{2} \left[[\hat{G}^{(0)}]_{div} + \mathcal{M}^2 \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial\mathcal{M}^2} \right)_{0,div} \right], \quad (\text{G.3})$$

$$\delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial\mathcal{M}^2} \right)_{0,div}. \quad (\text{G.4})$$

Para llevar los contratérminos euclídeos a la misma forma, consideramos el límite de $\mathcal{M}^2 \ll H^2$, lo que lleva a reemplazar

$$[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]_{div} \simeq [\hat{G}^{(0)}]_{div} + \mathcal{M}^2 \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial\mathcal{M}^2} \right)_{0,div}, \quad (\text{G.5})$$

y

$$\left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial\mathcal{M}^2} \right)_{div} \simeq \left(\frac{\partial[\hat{G}^{(\mathcal{M})}]}{\partial\mathcal{M}^2} \right)_{0,div}, \quad (\text{G.6})$$

en (8.13) y (8.21) (estas expansiones son exactas si $d = 4$, en virtud de (G.1) y (G.2)). Finalmente, sólo resta tomar $N \rightarrow \infty$.

Bibliografía

- [1] C. L. Bennett et. al. 4-Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results, *Astrophys. J.* **464**, L1-L4 (1996).
- [2] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [arXiv:astro-ph/9805201].
- [3] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [arXiv:astroph/9812133].
- [4] Planck Collaboration. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics* **571**, A16 (2014).
- [5] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [6] S. Weinberg. *Cosmology* (2008).
- [7] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press (2005).
- [8] G. Hinshaw et. al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *ApJS* **208**, 19 (2013).
- [9] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [10] A. D. Linde, *Physics Letters B* **108**, 389 (1982).
- [11] N. D. Birrell & P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, reprint edition edition (1984).
- [12] L. Parker & D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge University Press (2009).

- [13] B. Allen, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985).
- [14] B. Allen & A. Folacci, Phys. Rev. D **35**, 3771 (1987).
- [15] C. P. Burgess, R. Holman, L. Leblond & S. Shandera, J. Cosmol. Astropart. Phys., **2010**(10), 017 (2010).
- [16] D. Seery, Class. Quantum Grav. **27**, 124005 (2010) [arXiv:1005.1649 [astro-ph.CO]].
- [17] A. A. Starobinsky & J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50**, 6357 (1994).
- [18] R. P. Woodard, J. Phys. Conf. Ser. **68**, 012032 (2007); S. P. Miao & R. P. Woodard ; Phys. Rev. D **74**, 044019 (2006); R. P. Woodard, arXiv:astro-ph/0502556; T. Brunier, V. K. Onemli & R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **22**, 59 (2005); T. Prokopec, O. Tornkvist & R. Woodard, Phys. Rev. Lett. **89**, 101301 (2002).
- [19] F. L. Bezrukov, A. Magnin & M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **675**, 88, (2009).
- [20] F. Bezrukova & M. Shaposhnikov, JHEP **0907**, 089 (2009).
- [21] L. Senatore & M. Zaldarriaga, JHEP **1301**, 109 (2013).
- [22] T. Tanaka & Y. Urakawa, Classical Quantum Gravity **30**, 233001 (2013).
- [23] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **10**, 2428 (1974).
- [24] U. Reinosa & Z. Szép, Phys. Rev. D **83**, 125026 (2011).
- [25] G. Markó, U. Reinosa & Z. Szép, Phys. Rev. D **86**, 085031 (2012).
- [26] G. Markó, U. Reinosa & Z. Szép, Phys. Rev. D **87**, 105001 (2013).
- [27] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117**, 175 (1982).
- [28] A. Vilenkin & L. H. Ford, Phys. Rev. D **26**, 1231 (1982).
- [29] J. Berges, Sz. Borsányi, U. Reinosa & J. Serreau, Annals of Physics **320**, 344 (2005).
- [30] D. L. López Nacir, F. D. Mazzitelli & L. G. Trombetta, Phys. Rev. D **89**, 024006 (2014).
- [31] D. L. López Nacir, F. D. Mazzitelli & L. G. Trombetta, Phys. Rev. D **89**, 084013 (2014).
- [32] A. A. Starobinsky, Lect. Notes Phys. **246**, 107 (1986).

- [33] N. C. Tsamis & R. P. Woodard, Nucl. Phys. **B724**, 295 (2005) [arXiv:gr-qc/0505115].
- [34] L. P. Levasseur, Phys. Rev. D **88**, 083537 (2013).
- [35] L. P. Levasseur & E. McDonough, Phys. Rev. D **91**, 063513 (2015).
- [36] G. Rigopoulos, arXiv:1305.0229 [astro-ph, physics:gr-qc, physics:hep-th] (2013), arXiv: 1305.0229.
- [37] B. Garbrecht, G. Rigopoulos & Y. Zhu, Phys. Rev. D **89**, 063506 (2014).
- [38] B. Garbrecht, F. Gautier, G. Rigopoulos & Yi Zhu, Phys. Rev. D **91**, 063520 (2015).
- [39] A. Rajaraman, Phys. Rev. D **82**, 123522 (2010) [arXiv:1008.1271 [hep-th]].
- [40] M. Beneke & P. Moch, Phys. Rev. D **87**, 064018 (2013).
- [41] A. Higuchi, D. Marolf & I. A. Morrison, Phys. Rev. D **83**, 084029 (2011).
- [42] J. Serreau, Phys. Rev. Lett. **107**, 191103 (2011).
- [43] J. Serreau, Physics Letters B **730**, 271 (2014).
- [44] D. L. López Nacir, F. D. Mazzitelli & L. G. Trombetta, en preparación.
- [45] B. S. DeWitt, *The Dynamical Theory of Groups and Fields*, New York, Gordon and Breach (1965).
- [46] T. S. Bunch & L. Parker, Phys. Rev. D **20**, 10 (1979).
- [47] J. P. Paz and F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **37**, 2170 (1988).
- [48] S. A. Ramsey and B. L. Hu, Phys. Rev. D **56**, 661 (1997) [arXiv:gr-qc/9706001].
- [49] S. M. Chistensen, Phys. Rev. D **14**, 2490 (1976).
- [50] E. Calzetta and B. L. Hu, “Nonequilibrium Quantum Field Theory, Cambridge University Press (2008).
- [51] J. Berges, AIP Conf. Proc. **739** 3, (2005).
- [52] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola & J. P. Paz, Phys. Rev. D **50**, 2848 (1994).

- [53] R. Parentani and J. Serreau, Phys. Rev. D **87**, 045020 (2013). [arXiv:1212.6077 [hep-th]]; ibidem, arXiv:1302.3262 [hep-th].
- [54] F. Gautier & J. Serreau, Phys. Rev. D **92**, 105035 (2015).
- [55] F. D. Mazzitelli and J. P. Paz, Phys. Rev. D **39**, 2234 (1989).
- [56] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **32**, 1389 (1985).
- [57] P. M. Stevenson & R. Tarrach, Phys. Lett. **B176**, 436 (1986); P. M. Stevenson, B. Alles & R. Tarrach, Phys. Rev. D **35**, 2407 (1987); P. M. Stevenson, Z. Phys. C **35**, 467 (1987).
- [58] T. Arai, Class. Quant. Grav. **29**, 215014 (2012); ibidem, Phys. Rev. D **86**, 104064 (2012); ibidem, arXiv:1304.5631 [hep-th].
- [59] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman & S. P. Kumar, Phys. Rev. D **57**, 2166 (1998).
- [60] L. Senatore and M. Zaldarriaga, JHEP 1012, 008 (2010).
- [61] M. Elías & F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **91**, 124051 (2015).
- [62] J. Serreau, Phys. Lett. B **730**, 271 (2014).
- [63] G. Lazzari and T. Prokopec, arXiv:1304.0404 [hep-th]; T. Prokopec, JCAP **1212**, 023 (2012)[arXiv:1110.3187v2 [gr-qc]].
- [64] S. Wada, T. Azuma, Phys. Lett. B **132**, 313 (1983).
- [65] F. C. Lombardo & D. López Nacir, Phys. Rev. D **72**, 063506 (2005).
- [66] S. Hollands, Ann. H. Poincaré **13**, 1039 (2012) [arXiv:1105.1996 [gr-qc]].