

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présenté par

Jérémie UNTERBERGER

Sujet:

**Symétries dynamiques schrödingériennes et
singularités locales des champs gaussiens
fractionnaires**

Soutenue le 06 décembre 2010

devant le jury composé de :

| | | | |
|----------------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------|
| M. Valentin Ovsienko | Chargé de Recherches | Université Lyon I | Rapporteur |
| M. Michel Ledoux | Professeur | Université Toulouse III | Rapporteur |
| M. Pierre Vallois | Professeur | Université Nancy I | Président |
| M. Malte Henkel | Professeur | Université Nancy I | Examineur |
| M. Michel Bauer | Directeur de Recherches | CEA | Examineur |
| M. Massimiliano Gubinelli | Professeur | Université Paris Dauphine | Examineur |
| M. Volodya Roubtsov | Professeur | Université d'Angers | Examineur |

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Résumé et liste d'articles | 7 |
| 0.1 | Symétries dynamiques schrödingériennes | 8 |
| 0.2 | Singularités locales des processus gaussiens | 9 |
| 0.3 | Liste de publications | 12 |
| 0.3.1 | Analyse harmonique sur les groupes de Lie | 12 |
| 0.3.2 | Physique mathématique | 12 |
| 0.3.3 | Probabilités | 13 |
| 0.3.4 | Comptes-rendus de conférences et de l'Académie des Sciences | 14 |
| 1 | Symétries dynamiques schrödingériennes | 15 |
| 1.1 | Présentation générale | 15 |
| 1.2 | Résultats algébriques | 19 |
| 1.2.1 | Graduations, déformations | 20 |
| 1.2.2 | Plongement conforme | 20 |
| 1.2.3 | Représentation coadjointe | 21 |
| 1.2.4 | Modules de Verma | 23 |
| 1.2.5 | Représentations coinduites | 23 |
| 1.2.6 | Représentations vertex | 24 |
| 1.2.7 | Etude cohomologique | 27 |
| 1.3 | Formes normales schrödingériennes | 28 |
| 1.3.1 | Covariance générale sous le groupe de Schrödinger-Virasoro | 30 |
| 1.3.2 | Un détour par la dimension finie: les opérateurs de Hill | 31 |
| 1.3.3 | Orbites de $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ sous SV | 34 |
| 1.3.4 | Solution et problème du problème classique associé . . | 35 |
| 1.3.5 | Solution et monodromie du problème quantique | 36 |
| 1.4 | Structures poissonniennes | 37 |
| 2 | Singularités locales des champs gaussiens | 43 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Présentation générale | 43 |
| 2.2 | Description des principaux résultats | 48 |
| 2.3 | Outils analytiques | 51 |
| 2.3.1 | Définition du brownien fractionnaire analytique et approximation analytique du brownien fractionnaire . . . | 51 |
| 2.3.2 | Etude des noyaux de convolution | 54 |
| 2.3.3 | Chemin rugueux associé au brownien fractionnaire analytique | 58 |
| 2.3.4 | Aire et volume de Lévy du brownien fractionnaire d'indice $> 1/4$ | 59 |
| 2.3.5 | Résolution approchée d'équations différentielles stochastiques | 60 |
| 2.3.6 | Théorème central limite pour l'aire de Lévy renormalisée | 63 |
| 2.4 | Ordre normal de Fourier | 65 |
| 2.4.1 | Aire de Lévy régularisée du brownien fractionnaire . . . | 66 |
| 2.4.2 | L'algorithme de mise en ordre normal de Fourier . . . | 70 |
| 2.4.3 | Régularisation de domaine | 79 |
| 2.4.4 | Renormalisation à la BPHZ: une esquisse | 82 |
| 2.4.5 | De la théorie constructive des champs au calcul stochastique fractionnaire | 84 |

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : mathématiques

Symétries dynamiques schrödingeriennes et singularités locales des champs gaussiens fractionnaires

Jérémie UNTERBERGER ¹

*Institut Elie Cartan de Nancy, Laboratoire de Mathématiques - Université
Nancy I - B.P. 239 - 54506 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex*

Nous présentons dans ce mémoire les deux axes de recherche principaux développés de 2000 à 2010, autour de la physique mathématique et de la théorie des processus stochastiques.

Le premier a pour objet l'algèbre de Lie de dimension infinie, dite de *Schrödinger-Virasoro*, introduite dans les années 1990 dans le cadre de travaux sur l'invariance géométrique en physique statistique hors-équilibre. L'étude de sa cohomologie et de ses représentations aboutit à des généralisations non triviales de résultats obtenus antérieurement pour l'algèbre de Virasoro et ses extensions semi-directes par modules de densité. L'algèbre de Schrödinger-Virasoro se réalise en tant que symétries d'une famille naturelle d'opérateurs de Schrödinger dépendant du temps; la classification des formes normales de ces opérateurs sous son action permet de déterminer la monodromie. Elle peut également être vue comme quotient d'une extension de l'algèbre de Poisson sur le tore. Les deux points de vue font apparaître des structures hamiltoniennes originales.

Le deuxième concerne – dans une optique essentiellement probabiliste – les propriétés fines des intégrales itérées de chemins multidimensionnels de faible régularité Hölder, lorsque les intégrales ordinaires (ou celles de Young) divergent. Dans le cadre de la théorie des chemins rugueux ou *rough paths*, introduite par T. Lyons à la fin des années 1990, nous construisons une régularisation des intégrales itérées à l'aide d'une combinatoire d'algèbre de Hopf sur les arbres s'inspirant de travaux classiques d'A. Connes et D. Kreimer. L'analyse multi-échelles utilisée pour démontrer la convergence provient de l'étude des graphes de Feynman en théorie des champs et de leur renormalisation. En guise d'application, nous obtenons un calcul stochastique pour un brownien fractionnaire B d'indice de Hurst quelconque. Nous définissons également une approximation analytique de B permettant de réduire les problèmes de convergence d'objets limites construits à partir de B ou encore du brownien fractionnaire analytique (liés à la résolution d'équations différentielles stochastiques) à l'étude, par déformation de contour complexe, des singularités locales d'opérateurs de convolution à noyau fractionnaire.

¹jeremie.unterberger@iecn.u-nancy.fr

Chapitre 0

Résumé et liste d'articles

Bien que ma thèse de doctorat ainsi que les travaux des années 2000-2002 aient porté essentiellement sur l'analyse sur les groupes de Lie semi-simples (en particulier, l'étude des distributions sphériques, avec applications à des formules de type Plancherel ou Paley-Wiener), mes investigations se sont tournées à partir de 2000 et plus particulièrement à partir de 2003 vers d'autres domaines.

Une collaboration avec des physiciens de Nancy (notamment au travers d'un groupe de travail commun au laboratoire de mathématiques et à l'équipe de physique théorique du Laboratoire de Physique des Matériaux) m'a conduit à m'intéresser jusqu'à maintenant à des problèmes mathématiques motivés par l'étude de la physique statistique hors-équilibre, qui font l'objet de la première partie de ce mémoire. C'est un travail autour d'algèbres de Lie de dimension infinie liées aux symétries des équations de Schrödinger, qui fait intervenir théorie des représentations, cohomologie des algèbres de Lie, structures de Poisson, théorie spectrale des opérateurs, géométrie non relativiste, supersymétrie... ainsi que quelques notions qui sont plus du domaine de la physique, comme la théorie conforme des champs ou l'invariance de théories lagrangiennes.

A partir de 2006–2007, en parallèle, je me suis également intéressé aux singularités locales des champs gaussiens fractionnaires et plus généralement aux chemins rugueux (“rough paths”), avec des applications au calcul stochastique pour le brownien fractionnaire multidimensionnel. Le lien avec la première partie du mémoire est (pour l'instant du moins) indirect et se fait plutôt au travers d'outils empruntés à la physique, notamment à la théorie quantique des champs, même si (d'un point de vue formel) l'étude des singularités locales et les méthodes complexes se retrouvent également en théorie conforme des champs. Une petite partie de ces travaux concerne plus spécifiquement des matrices de Toeplitz dites de Fisher-Hartwig liées au principe d'invariance du brownien fractionnaire et apparaissant également de manière naturelle dans un certain nombre de modèles de physique statistique; ces travaux ne seront pas abordés dans le mémoire.

0.1 Physique mathématique: algèbre de Schrödinger-Virasoro et symétries dynamiques schrödingériennes

Mon travail s'est focalisé sur une algèbre de Lie dite de *Schrödinger-Virasoro*. Il s'agit d'une algèbre de Lie de dimension infinie, \mathfrak{sv} , produit semi-direct de l'algèbre de Virasoro de charge centrale nulle $\text{Vect}(S^1)$ (autrement connue en tant qu'algèbre de champs de vecteurs sur le tore) par une algèbre de Lie nilpotente de rang 2 de dimension infinie. L'introduction de cette algèbre par M. Henkel (Laboratoire de Physique des Matériaux de l'université Nancy I) en 1994 était motivée par la recherche d'une invariance d'échelle locale en physique statistique hors-équilibre, par analogie avec ce qui existe à l'équilibre au point critique, en dimension 2. Dans le cas d'un exposant dynamique $z = 2$ qui apparaît dans un certain nombre de modèles physiques, explorés notamment par M. Henkel et ses collaborateurs, la géométrie sous-jacente est la géométrie non relativiste, qui se formalise à l'aide des variétés de Newton-Cartan (cf. travaux de C. Duval et collaborateurs). L'algèbre \mathfrak{sv} peut être introduite comme algèbre de symétries dans ce contexte.

Une analyse assez poussée des propriétés cohomologiques de l'algèbre \mathfrak{sv} (déformations, extensions centrales...), de ses extensions supersymétriques et de ses représentations a été menée en collaboration avec C. Roger, du département de mathématiques de l'université Lyon I, et M. Henkel [9, 10]. On obtient des généralisations non triviales de résultats obtenus antérieurement pour l'algèbre de Virasoro et ses extensions semi-directes par modules de densité. L'algèbre de Virasoro (ainsi que ses supersymétrisations, qui sont des extensions par produit semi-direct de superalgèbres de contact) apparaissent également comme quotients d'algèbres de Poisson sur le tore ou le supertore. Un article est consacré à l'étude de représentations vertex [13]; il prolonge des travaux classiques menés à partir des années 80 sur les représentations de l'algèbre de Lie de Virasoro dans le contexte de la théorie conforme des champs.

Un des points de vue les plus prometteurs est celui des réalisations de \mathfrak{sv} comme algèbre de symétries de familles d'équations physiques, en particulier d'opérateurs de Schrödinger dépendant périodiquement du temps. Les orbites de cette action sur le sous-espace des opérateurs de potentiel au plus quadratique en espace (du type oscillateurs harmoniques généralisés) sont de codimension finie; nous avons obtenu une classification à la Kirillov de ces orbites, ainsi que des formes normales. La résolution explicite de ces opérateurs à l'aide des invariants d'Ermakov-Lewis introduits en physique quantique peut se réinterpréter dans ce cadre; la combinaison des outils algébriques, géométriques et analytiques permet en fin de compte de déterminer la monodromie de ces opérateurs [15]. Dans un travail en collaboration avec C. Roger [19], nous montrons – en utilisant la réalisation de \mathfrak{sv} comme quotient d'une algèbre de Poisson comme ci-dessus – que l'action de \mathfrak{sv} sur l'espace général des opérateurs de Schrödinger est hamiltonienne pour une certaine structure de Poisson obtenue comme projection d'une structure à la Kirillov-Kostant-Souriau.

Une monographie sur l'ensemble de ces résultats est en préparation avec C. Roger et devrait être soumise très prochainement [29].

Perspectives.

Les perspectives les plus immédiates concernent les réalisations physiques de \mathfrak{sv} évoquées dans le paragraphe précédent. Les structures hamiltoniennes non triviales exhibées augurent de l'existence de systèmes intégrables sous-jacents qu'il s'agit de découvrir. Des généralisations à des équations de Schrödinger en plusieurs dimensions d'espace ou à des systèmes de particules sont par ailleurs envisageables. L'invariance sous \mathfrak{sv} de familles d'équations apparaît également dans le contexte de la mécanique des fluides [55] (équation d'Euler) et n'a pas été étudiée à l'heure actuelle de manière approfondie.

Le point de vue physique statistique, laissé de côté bien qu'à l'origine du projet, se doit de retrouver sa place. Une possibilité naturelle serait d'explorer – en lien avec des modèles explicites de physique statistique – des versions dynamiques des champs libres gaussiens ou de l'équation de Löwner stochastique (cf. travaux récents de Werner, Lawler, Schramm, Sheffield et Duplantier [62, 63, 64, 74, 75]).

Mentionnons par ailleurs le développement récent de travaux concernant la correspondance AdS/CFT (anti-De Sitter/théorie conforme des champs) dans un cadre non relativiste, dans laquelle l'algèbre de Lie de Schrödinger (sous-algèbre de Lie de dimension maximale de \mathfrak{sv}) joue un rôle central [32, 31]. Ces travaux récents ont conduit des physiciens travaillant en gravitation et en théorie des cordes à redécouvrir \mathfrak{sv} . Il est probable que l'étude développée ici trouve des prolongements dans ce cadre.

0.2 Probabilités: singularités locales des processus gaussiens et chemins rugueux

La thématique développée le plus récemment concerne les propriétés fines des intégrales itérées de chemins multidimensionnels de faible régularité Hölder, en particulier des trajectoires d'une famille de processus gaussiens auto-similaires appelés *brownien fractionnaire*, et dépendant d'un indice de régularité $H \in]0, 1[$ (dit de Hurst). Les résultats classiques (Coutin-Qian [90], Alos, Cheridito, Mazet, Nualart [76, 77, 86]), basés sur des approximations de type analyse numérique ou sur le calcul de Malliavin, montrent que ces intégrales itérées (à partir desquelles la théorie des *chemins rugueux* ou *rough paths* due à Lyons, Victoir, Friz, Gubinelli... [98, 100, 112, 114] permet de construire un calcul stochastique) divergent dès que $H \leq 1/4$. Nos résultats font appel à l'analyse complexe, ainsi qu'à des concepts algébriques (algèbres de Hopf notamment) et physiques (diagrammes de Feynman et renormalisation en théorie quantique des champs). Dans un premier article [14], nous introduisons une approximation analytique du brownien fractionnaire, définie sur le demi-plan supérieur. Cette approximation, qui est une alternative à la classique approximation linéaire par morceaux, se prête bien au calcul des singularités, et permet notamment d'obtenir un théorème central limite [22] pour l'erreur sur l'aire de Lévy associée au schéma d'Euler ($H > 1/4$) ou [18] pour l'aire de Lévy renormalisée ($H < 1/4$) à l'aide de déformations de contour analytique. Nous introduisons dans la même optique [16, 25] un nouveau processus autosimilaire, Γ , appelé *brownien frac-*

tionnaire analytique, à valeurs complexes, vivant sur le demi-plan supérieur fermé $\bar{\Pi}^+$, pour lequel les mêmes outils permettent de définir un calcul stochastique pour H quelconque et de résoudre des équations différentielles dirigées par Γ sur un ouvert de $\bar{\Pi}^+$.

Dans les travaux les plus récents [21, 23, 24], nous introduisons une méthode générale de régularisation d'intégrales itérées permettant de définir des chemins rugueux au-dessus d'un chemin H -Hölder quelconque. La construction, explicite (à la différence de celle de Lyons et Victoir [113]), repose sur un *algorithme* que nous appelons *mise en ordre normal de Fourier* et qui apparaît tout à fait naturel lorsqu'on fait appel aux structures combinatoires d'algèbre de Hopf sous-jacentes, ainsi que sur un choix a priori largement arbitraire de *schéma de régularisation*. On montre en particulier qu'un chemin rugueux est caractérisé *algébriquement* par des *données d'arbres* ("tree data") arbitraires. Le schéma de régularisation que nous présentons ici est une *régularisation de domaine de Fourier*. Il repose sur une *analyse multi-échelles*, outil classique en théorie des champs, en particulier pour la renormalisation des intégrales de Feynman, qui peut être exploité plus en profondeur (cf. perspectives ci-dessous). Ce schéma, réécrit dans le cas particulier du brownien fractionnaire, permet d'obtenir un chemin rugueux régulier, vivant dans les chaos gaussiens d'indice 2, 3, ...

Deux articles [17, 20] portent par ailleurs sur l'utilisation des matrices de Toeplitz. Le principe d'invariance donne un résultat à la Donsker sur la convergence vers le brownien fractionnaire de sommes convenablement renormalisées des valeurs d'un processus gaussien stationnaire à temps discret, dont la covariance (à décroissance polynomiale) est une matrice de Toeplitz. Avec A. Boettcher et d'autres coauteurs, nous étudions la limite asymptotique (spectre, vecteurs propres...) de matrices de Toeplitz explicites (dites de Fisher-Hartwig) pour lesquelles ce principe d'invariance est vérifié.

Perspectives.

1. (régularisation des chemins rugueux)

Les travaux sur la régularisation par ordre normal de Fourier n'en sont qu'à leur début. Les applications potentielles à l'étude des équations différentielles ou aux dérivées partielles dirigées par un brownien fractionnaire de faible indice de Hurst sont claires; tous les résultats obtenus précédemment pour $H > 1/4$ ou $H > 1/2$ concernant les solutions des équations différentielles ou aux dérivées partielles stochastiques (existence, finitude des moments, densité, théorèmes ergodiques [84, 79, 103]...) sont susceptibles de s'étendre à H quelconque. Un prolongement naturel de ces travaux consisterait à définir une intégrale de Skorokhod relative au brownien fractionnaire d'indice quelconque, qui devrait permettre d'obtenir une formule d'Itô du type (terme d'espérance nulle+trace).

Dans des travaux en cours, nous approfondissons la construction elle-même dans plusieurs directions.

Avec L. Foissy, de l'université de Reims, nous réinterprétons l'algorithme sous-jacent de mise en ordre normal de Fourier en termes intrinsèquement algébriques [26]; il découle d'un isomorphisme explicite entre deux

algèbres de Hopf. Par ailleurs, nous avons soumis un article donnant un chemin rugueux renormalisé pour le brownien fractionnaire [28], en utilisant – en guise de schéma de régularisation – l’algorithme de renormalisation de Bogolioubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann (BPHZ) bien connu en théorie quantique des champs et en combinatoire. Les intégrales itérées sont interprétées comme diagramme de Feynman et renormalisées en conséquence à l’aide d’une analyse multi-échelles déjà à l’œuvre dans la régularisation de domaine de Fourier (celle-ci pouvant être vue comme une ébauche de renormalisation). Ces travaux ont été présentés lors de colloques internationaux au printemps 2010 (workshop du trimestre “Combinatorics and Control” en avril à Madrid, conférence “Renormalization: algebraic, geometric and probabilistic aspects” en juin à Lyon). Il est probable que les travaux des algébristes et combinatoriciens puissent aider à développer un calcul stochastique pour le brownien fractionnaire de manière plus systématique.

Dans un autre article soumis, en collaboration avec J. Magnen, du Laboratoire de Physique Théorique de l’Ecole Polytechnique [27], nous montrons comment obtenir une aire de Lévy au-dessus du brownien fractionnaire d’indice de Hurst $< 1/4$ – ou de champs gaussiens fractionnaires plus généraux que nous appelons *champs gaussiens multi-échelle* – comme limite des aires de Lévy naturelles au-dessus de processus non gaussiens, obtenus par pénalisation singulière de la mesure gaussienne. Cette mesure pénalisée s’interprète naturellement, dans le langage de la théorie quantique des champs, comme une interaction singulière proportionnelle au carré de l’aire de Lévy divergente naïve. La démonstration de la convergence repose sur les outils classiques de la théorie constructive des champs, notamment un développement en cluster et une renormalisation du propagateur, ainsi que sur la mise en ordre normal de Fourier, naturelle dans le cadre d’une analyse multi-échelles. Ce travail doit être étendu au cas des intégrales itérées d’ordre supérieur, pour lequel les travaux combinatoires précédents seront de toute évidence utiles. De plus, il est probable que cette même pénalisation singulière s’obtienne par limite d’échelle à partir de constructions probabilistes plus standard, comme par exemple des marches aléatoires avec des contraintes trajectorielles.

Il serait par ailleurs naturel d’essayer d’étendre les constructions ci-dessus au cas des surfaces rugueuses indexées par \mathbb{R}^D , $D \geq 2$ au lieu de \mathbb{R} , dans le but par exemple de résoudre des équations aux dérivées partielles stochastiques dirigées par un drap brownien fractionnaire.

2. (outils analytiques pour le brownien fractionnaire)

L’approximation analytique et l’étude des singularités locales (déjà utilisée dans deux articles) trouveront, nous le pensons, leur place parmi les principaux outils dans l’étude du brownien fractionnaire. Quant au brownien fractionnaire analytique, il serait intéressant d’en trouver des applications dans des domaines comme la physique ou peut-être la finance mathématique.

3. (matrices de Toeplitz)

Un travail en préparation porte sur la définition et les premières propriétés d'un *brownien fractionnaire aléatoire* (processus stochastique en milieu aléatoire) obtenu par limite d'échelle à partir d'une matrice de covariance de Toeplitz elle-même issue d'un brownien fractionnaire.

Enfin, une connaissance plus poussée de la résolution spectrale des matrices de Fisher-Hartwig (apparaissant dans nombre de problèmes de physique statistique) aurait des applications immédiates, par exemple à l'étude du modèle sphérique avec interaction non locale.

0.3 Liste de publications

0.3.1 Analyse harmonique sur les groupes de Lie

- en collaboration avec N. B. Andersen. *Harmonic analysis on $SU(n, n)/SL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}_+^*$* , J. Lie Theory **10**, 311–322 (2000).
- en collaboration avec F. Ricci. *Solvability of invariant sublaplacians on spheres and group contractions*, Rend. Mat. Acc. Lincei **9** (12), 27–42 (2001).
- *Hypergeometric functions of second kind and spherical functions on an ordered symmetric space*, J. Funct. Anal. **188**, 137–155 (2002).
- en collaboration avec N. B. Andersen. *An application of shift operators to ordered symmetric spaces*, Ann. Inst. Fourier **52** (1), 275–288 (2002).

0.3.2 Physique mathématique

- en collaboration avec M. Henkel. *Schrödinger invariance and space-time symmetries*, Nucl. Phys. **B660**, 407–435 (2003).
- en collaboration avec C. Roger. *The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study*, Ann. Henri Poincaré **7**, 1477–1529 (2006).
- en collaboration avec M. Henkel. *Supersymmetric extensions of Schrödinger-invariance*, Nucl. Phys. **B746**, 155–201 (2006).
- en collaboration avec M. Henkel, R. Schott et S. Stoimenov. *On the dynamical symmetric algebra of ageing: Lie structure, representations and Appell systems*, Quantum Probab. White Noise Anal. **20**, 233–240 (2007).
- *On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro algebra*, Nucl. Phys. **B823** (3), 320–371 (2009).
- en collaboration avec C. Roger. *A Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro algebra on a space of periodic time-dependent Schrödinger operators in $(1 + 1)$ -dimensions*. A paraître dans: Journal of Nonlinear Mathematical Physics.

- *A classification of periodic time-dependent generalized harmonic oscillators using a Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro group.* A paraître dans: *Confluentes Mathematicae*.
- en collaboration avec C. Roger. *The Schrödinger-Virasoro algebra. Mathematical structure of dynamical Schrödinger symmetries.* Monographie en préparation.

0.3.3 Probabilités

- *Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst exponent $H > 1/4$: a rough path method by analytic extension,* *Ann. Prob.* **37** (2), 565–614 (2009).
- en collaboration avec S. Tindel. *The rough path associated to the multidimensional analytic fractional Brownian motion with any Hurst parameter.* Preprint arXiv:0810.1408. A paraître dans: *Collectanea Mathematica*.
- en collaboration avec A. Böttcher et S. Grudsky. *Asymptotic pseudo-modes of Toeplitz matrices,* *Operators and Matrices* **2**, 525–541 (2008).
- *A central limit theorem for the rescaled Lévy area of two-dimensional Brownian motion with Hurst index $H < 1/4$.* Preprint arXiv:0808.3458.
- en collaboration avec A. Böttcher, S. Grudsky et E. A. Maksimenko. *The first order asymptotics of the extreme eigenvectors of certain Hermitian Toeplitz matrices,* *Integr. Equ. oper. theory* **63**, 165–180 (2009).
- *A rough path over multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index by Fourier normal ordering,* *Stoch. Proc. Appl.* **120** (8), 1444–1472 (2010).
- en collaboration avec A. Neuenkirch et S. Tindel. *Discretizing the fractional Lévy area,* *Stoch. Proc. Appl.* **120** (2), 223–254 (2010).
- *Hölder-continuous rough paths by Fourier normal ordering,* *Comm. Math. Phys.* **298** (1), 1–36 (2010).
- *Moment estimates for solutions of linear stochastic differential equations driven by analytic fractional Brownian motion.* Preprint arXiv:0905.0782. A paraître dans: *Elect. Comm. Prob.*
- en collaboration avec L. Foissy. *Ordered forests, permutations and iterated integrals.* Preprint arXiv:1004.5208. Soumis à: *Journal of Algebra*.
- en collaboration avec J. Magnen. *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (I) The Lévy area of fractional Brownian motion with Hurst index $\alpha \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$.* Preprint arXiv:1006.1255. Soumis à: *Ann. Henri Poincaré*.
- *A renormalized rough path over fractional Brownian motion.* Preprint arXiv:1006.5604. Soumis.

0.3.4 Comptes-rendus de conférences et de l'Académie des Sciences

- *Prolongement analytique des séries de Fourier sur un groupe compact*, C. R. A. S. Paris **324** (I), 1089–1092 (1997).
- en collaboration avec M. Henkel, A. Picone et M. Pleimling. *Local scale invariance and its applications to strongly anisotropic critical phenomena*, Mathematical Physics Frontiers, Nova Science, New York (2004).
- *The Schrödinger-Virasoro Lie algebra: a mathematical structure between conformal field theory and non-equilibrium dynamics*, Journal of Physics, Conference Series **40**, 156 (2006).

Chapitre 1

Symétries dynamiques schrödingeriennes

1.1 Présentation générale

Il est connu que l'étude mathématique des symétries et la physique statistique ou quantique font bon ménage; les mathématiciens inventent un langage par et pour la physique, qui devient en mûrissant une théorie mathématique à part entière; inversement, les intuitions des physiciens, souvent en avance sur le langage mathématique de leur époque, sont confirmées au bout de quelques dizaines d'années par le développement d'une théorie mathématique qui finit par les dépasser. Les travaux pionniers de W. Werner, G. Lawler et O. Schramm [62, 63, 64, 75] sur l'équation de Löwner stochastique (SLE) en sont une éclatante illustration: vingt ans après l'invention de la théorie conforme des champs par les physiciens Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [33], leur théorie, mélangeant probabilités et invariance conforme, permet de confirmer de manière spectaculaire les prédictions de la physique statistique au sujet des phénomènes critiques bidimensionnels à l'équilibre (modèle d'Ising, percolation critique...); mais elle les dépasse largement, forçant les physiciens à renouveler leur approche conceptuelle [54].

Les travaux développés dans cette partie, beaucoup plus modestes, se veulent une étude mathématique de symétries qui, nous l'espérons, devraient jouer un rôle dans l'étude des phénomènes critiques en physique statistique hors équilibre.

Rappelons brièvement quelques principes de l'invariance conforme. L'algèbre de Lie du groupe des transformations conformes locales d'une variété riemannienne de dimension $d \geq 2$ est définie par des équations algébriques, dont on montre qu'elles conduisent en dimension $d \geq 3$ à une algèbre de dimension finie (contenant translations, rotations et transformations spéciales de type homographique). La dimension deux est tout à fait à part à cet égard, puisque les transformations conformes locales sont tout simplement des changements de coordonnées holomorphes ou antiholomorphes. Une complexification de l'algèbre de Lie correspondante conduit au produit direct $\text{Vect}(S^1) \oplus \overline{\text{Vect}(S^1)}$, où $\text{Vect}(S^1)$ (appelée: *algèbre de Virasoro sans charge centrale*), resp. $\overline{\text{Vect}(S^1)} \simeq \text{Vect}(S^1)$, agissent sur la coordonnée z , resp. \bar{z} . Les transformations holomorphes locales sont engendrées par les

champs de vecteurs $\ell_n := -z^{n+1}\partial_z$ ($n \in \mathbb{Z}$); leurs crochets de Lie s'écrivent $[\ell_n, \ell_m] = (n - m)\ell_{n+m}$. Alternativement, posant $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on peut voir ℓ_n comme extension au plan complexe du champ de vecteurs $e^{in\theta}\partial_\theta$ sur le cercle unité. On a obtenu de la sorte l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle, d'où la notation $\text{Vect}(S^1)$. C'est l'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes C^∞ du cercle préservant l'orientation, noté $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$ ou $\text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Comme en théorie de jauge, l'invariance – dite *invariance locale* – est brisée sous l'effet d'anomalies. Celles-ci s'interprètent dans notre contexte en remarquant que les transformations conformes locales changent la géométrie. L'hypothèse de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov était que ces anomalies puissent s'obtenir simplement en remplaçant $\text{Vect}(S^1)$ par son extension centrale $\mathfrak{vir} \simeq \text{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}K$, munie du crochet de Lie $[\ell_n, \ell_m] = (n - m)\ell_{n+m} + \frac{1}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}K$. Dans une représentation irréductible de \mathfrak{vir} , K agit comme une constante c , appelée *charge centrale*. La théorie conforme des champs consiste à considérer les champs invariants sous \mathfrak{vir} (ou: *champs primaires*) comme des opérateurs covariants, les corrélateurs $\langle \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) \rangle$ (ou: *fonctions à n points*) étant donnés par l'évaluation d'un produit opératoire $\langle 0 | \Phi_1(z_1) \dots \Phi_n(z_n) | 0 \rangle$ pour un certain état quantique $|0\rangle$, appelé *état vide*. Le succès de la théorie conforme des champs provient de sa capacité prédictive pour les modèles unitaires minimaux [43, 46]. Ces représentations de \mathfrak{vir} sont des modules de Verma dégénérés, obtenus seulement pour certaines valeurs discrètes de c ; chaque vecteur nul (i.e. orthogonal à tout le module) implique des contraintes sur les fonctions à n points sous la forme d'équations différentielles, permettant en principe de déterminer celles-ci de manière générale. Certains de ces modèles ont été identifiés à des modèles de physique statistique connus, notamment le modèle d'Ising à température critique, correspondant à $c = \frac{1}{2}$.

Si l'on considère maintenant la physique statistique hors équilibre, le concept d'invariance locale n'y joue pour l'instant aucun rôle. En revanche, toute une batterie de modèles physiques a été développée [50, 51, 52, 53], mettant en évidence l'invariance de modèles dynamiques – qu'il s'agisse d'une évolution à l'équilibre, d'une transition vers l'équilibre ou d'une évolution irréversible, à la manière des systèmes de particules en interaction à la Liggett [65] en présence d'états absorbants – sous des sous-groupes du *groupe de Schrödinger* $Sch(d)$. Il s'agit du groupe de Lie des symétries conservant projectivement l'équation de Schrödinger libre $(-2i\mathcal{M}\partial_t - \Delta_{\mathbf{r}})\psi = 0$, où \mathcal{M} est la masse, et $\Delta_{\mathbf{r}} = \partial_{r_1}^2 + \dots + \partial_{r_d}^2$ est le laplacien en d dimensions d'espace. L'hypothèse sous-jacente est l'existence d'un régime d'échelle dans lequel l'invariance sous les dilatations anisotropes non conformes $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (\lambda^2 t, \lambda \mathbf{r})$ se vérifie. Outre les transformations galiléennes (translations, rotations d'espace, et déplacements à vitesse constante), ainsi que cette dilatation anisotrope, le groupe de Schrödinger contient des transformations homographiques en temps couplées à des transformations dépendant du temps, affines en espace.

Or il se trouve que le groupe de Schrödinger se plonge dans un groupe de Lie de dimension infinie, dit *groupe de Schrödinger-Virasoro*, que nous noterons SV . Dans toute la suite nous nous restreindrons à une seule dimension d'espace ($d = 1$). L'algèbre de Lie $\mathfrak{sv} = \text{Lie}(SV) = \langle L_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}} \ltimes \langle Y_m, M_p \rangle_{m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}}$ du groupe de Schrödinger-Virasoro en dimension $(1+1)$

est un produit semi-direct $\text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}_\infty$, où \mathfrak{h}_∞ est une algèbre de Lie nilpotente de rang 2, de dimension infinie. Le crochet de Lie s'écrit sur les générateurs ci-dessus

$$[L_n, L_p] = (n - p)L_{n+p} \quad (1.1)$$

$$[L_n, Y_m] = \left(\frac{n}{2} - m\right)Y_{n+m}, \quad [L_n, M_p] = -pM_{n+p} \quad (1.2)$$

$$[Y_m, Y_{m'}] = (m - m')M_{m+m'}, \quad [Y_m, M_p] = 0, \quad [M_n, M_p] = 0. \quad (1.3)$$

Ces relations s'exponentient aisément, permettant de définir SV comme un produit semi-direct $\text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \ltimes H_\infty$, où $H_\infty \simeq C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est une variété linéaire munie de la structure de groupe de type Heisenberg suivante:

$$(\alpha_2, \beta_2) \cdot (\alpha_1, \beta_1) = \left(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{2}(\alpha'_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha'_2) \right). \quad (1.4)$$

Une famille de réalisations naturelles de \mathfrak{sv} (dites *réalisations schrödingériennes*) comme champs de vecteurs projectifs s'obtient en extrapolant les formules donnant les générateurs des symétries infinitésimales de l'équation de Schrödinger libre; on obtient:

$$\begin{aligned} d\pi_\lambda(L_n) &= -t^{n+1}\partial_t - \frac{1}{2}(n+1)t^n r \partial_r - \frac{1}{4}\mathcal{M}r^2(n+1)nt^{n-1} - \lambda(n+1)t^n, \\ d\pi_\lambda(Y_{m+\frac{1}{2}}) &= -t^{m+\frac{1}{2}}\partial_r - \mathcal{M}(m+\frac{1}{2})t^{m-\frac{1}{2}}r, \quad d\pi_\lambda(M_p) = -\mathcal{M}t^p. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le paramètre λ (égal à $1/4$ pour les solutions de l'équation de Schrödinger) s'interprète comme dimension d'échelle du champ invariant. On retrouve l'algèbre de Lie $\mathfrak{sch}(1) = \text{Lie}(Sch(1))$ en considérant $\langle L_{-1}, L_0, L_1 \rangle \ltimes \langle Y_{\pm\frac{1}{2}}, M_0 \rangle \subset \mathfrak{sv}$.

En considérant des séries de Laurent en les générateurs précédents, on obtient par complétion des champs fonctionnels $\mathcal{L}_f, \mathcal{Y}_g, \mathcal{M}_h$ indexés par des fonctions C^∞ périodiques (on utilise dans ce cas des lettres calligraphiques pour éviter toute confusion), ce qui donne les formules suivantes:

$$d\pi_\lambda(\mathcal{L}_f) = -f(t)\partial_t - \frac{1}{2}f'(t)r\partial_r - \frac{\mathcal{M}}{4}f''(t)r^2 - \lambda f'(t); \quad (1.6)$$

$$d\pi_\lambda(\mathcal{Y}_g) = -g(t)\partial_r - \mathcal{M}g'(t)r, \quad d\pi_\lambda(\mathcal{M}_h) = -\mathcal{M}h(t). \quad (1.7)$$

La définition géométrique de \mathfrak{sv} semble moins claire que celle de \mathfrak{vir} , même si elle est liée à la géométrie des variétés de Newton-Cartan (cf. [29] ou articles de C. Duval cités dans la bibliographie pour plus de détails). Mentionnons simplement qu'une *variété de Newton-Cartan* est une variété M munie (i) d'une *structure galiléenne* (θ, γ) – θ étant une 1-forme fermée, et γ un 2-tenseur symétrique positif *contravariant* dont le noyau est engendré par θ – et (ii) d'une connexion ∇ préservant cette structure. La géométrie sous-jacente est celle de la mécanique newtonienne; pour la variété plate $M = \mathbb{R}^{1,d-1} \simeq \{(t, \mathbf{r}) \mid t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}\}$, on a $\theta = dt$ et $\gamma = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{r_i} \otimes \partial_{r_i}$, donnant par restriction à une feuille $t = \text{Cste}$ une structure riemannienne

sur l'espace. En élargissant l'hypothèse restrictive (ii), on obtient successivement le groupe de Schrödinger (en considérant les automorphismes *projectifs* de la structure galiléenne), puis le groupe de Schrödinger-Virasoro en supposant simplement que $\nabla\theta = \mu\theta$, $\nabla\gamma = -\mu\gamma$ pour une fonction quelconque μ . Toutes ces affirmations s'entendent pour une réalisation telle que $\mathcal{M} = 0$; le cas $\mathcal{M} \neq 0$ s'obtient par extension (centrale pour le groupe de Schrödinger).

Si le lien avec la physique statistique est encore à construire (peut-être via une équation de Löwner stochastique dynamique, ou un champ libre gaussien dépendant du temps dont la construction est suggérée dans [74] – ou encore l'équation d'Euler [55]) –, en revanche, l'algèbre \mathfrak{sv} apparaît naturellement dans un certain nombre de contextes justifiant son étude, que nous nous proposons de présenter maintenant:

1. Un théorème difficile de classification dû à O. Mathieu [69] montre qu'il n'existe que 3 familles d'algèbres de Lie \mathbb{Z} -graduées simples à croissance polynomiale: en dimension finie, on retrouve la classification de Dynkin des diagrammes de racines; en dimension infinie, on a les algèbres de Kac-Moody d'une part, l'algèbre $\text{Vect}(S^1)$ ou \mathfrak{vir} de l'autre. Il est donc naturel de considérer (pour aller plus loin dans la théorie algébrique) les algèbres de Lie de type $\text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}$. Le cas où \mathfrak{h} est un $\text{Vect}(S^1)$ -module de type module de densités (en particulier, \mathfrak{h} commutatif) a été largement étudié par V. Ovsienko et C. Roger [71]. Le cas $\mathfrak{sv} \simeq \text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}_\infty$ est en quelque sorte l'étape suivante dans cet ordre d'idées. L'étude des représentations de \mathfrak{sv} et de ses généralisations (ainsi que de la cohomologie), menée avec C. Roger dans [9], s'appuie tout naturellement sur les travaux antérieurs. Les deux grandes familles de représentations [68] de $\text{Vect}(S^1)$ (représentations de plus haut poids – ou modules de Verma – d'un côté, modules de densités de l'autre) s'étendent à \mathfrak{sv} ; l'extension de la première famille s'avère décevante, alors que la deuxième (obtenue par coinduction grâce à la structure de prolongement de Cartan sous-jacente) est plus riche en structure que dans le cas de $\text{Vect}(S^1)$, et agit naturellement comme symétries de familles d'équations physiques telles que, par exemple, les opérateurs de Schrödinger ou de Dirac-Lévy Leblond. On retrouve en particulier une extension affine de la réalisation schrödingérienne déjà mentionnée. On peut également construire des représentations vertex à l'aide d'opérateurs covariants sous ces représentations coinduites, en utilisant le formalisme de la théorie conforme des champs [13]. La construction est encore en partie inachevée, puisque les champs massifs introduits en §1.2.6 ont une existence conjecturale.

La représentation coadjointe apparaît curieusement isolée dans le schéma.

2. L'étude de la cohomologie de \mathfrak{sv} à l'aide des outils développés par Fuks [44] fait apparaître 3 familles de déformations de \mathfrak{sv} , dont on étudie également les extensions centrales [9].
3. L'action par reparamétrisations de \mathfrak{sv} sur le sous-espace affine $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff} = \{-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_{r^2} + V_0(t) + V_1(t)r + V_2(t)r^2\}$ d'opérateurs de Schrödinger dépendant périodiquement du temps est l'un des points clé du chapitre [15]. La chose est bien connue dans le cas de l'action du groupe de

Virasoro sur l'espace des opérateurs de Hill (ou opérateurs de Sturm-Liouville périodiques sur la droite). L'action (équivalente à l'action coadjointe) est hamiltonienne pour la structure de Poisson de Kirillov-Kostant-Souriau, qui est la plus simple d'une hiérarchie de structures de Poisson compatibles associées à des systèmes intégrables tels que l'équation de Korteweg-De Vries. La classification des orbites sous l'action de Vir est reliée directement à la monodromie des opérateurs de Hill, ainsi qu'au comportement des solutions.

Le même schéma appliqué à l'action de \mathfrak{sv} sur l'espace $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ fait apparaître 5 types d'orbites dont on donne des représentants. L'étude est une sorte de "quantification" de travaux dûs à A. A. Kirillov; la nouveauté réside dans l'existence de résonances entre la partie quadratique et la partie linéaire du potentiel. Ces formes normales permettent de déterminer l'opérateur de monodromie (de dimension infinie dans ce cas) des opérateurs de Schrödinger, grâce à un invariant du mouvement [60] dû à Ermakov et Lewis, permettant de résoudre explicitement l'équation. L'idée d'associer étude des orbites et invariant du mouvement s'avère très fructueuse. On démontre également au passage que l'action est hamiltonienne pour une certaine structure de Poisson sur $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$.

Il serait a priori intéressant de généraliser cette étude à plusieurs dimensions d'espace ou à des systèmes de particules (autrement dit, à des équations de Schrödinger vectorielles).

4. Le dernier point de vue tourne autour de la géométrie de Poisson. Il s'avère que l'algèbre \mathfrak{sv} est un sous-quotient de l'algèbre de Poisson sur le tore, ou de sa quantification naturelle, l'algèbre des symboles pseudo-différentiels formels sur la droite. Ce point de vue peut se replacer dans un cadre supersymétrique; on obtient de la sorte une large classe de supersymétrisations de l'algèbre \mathfrak{sv} du type $\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}$, où \mathfrak{k} est une superalgèbre de contact [10]. Il permet également d'obtenir une nouvelle structure de Poisson sur l'espace affine $\mathcal{S}^{aff} := \{-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2 + V(t, r)\} \supset \mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ des opérateurs de Schrödinger dépendant périodiquement du temps [19], sans rapport apparent avec celle obtenue en 3. L'action de \mathfrak{sv} sur \mathcal{S}^{aff} apparaît en fait comme une action hamiltonienne, projection de l'action coadjointe de l'algèbre des courants sur l'algèbre de Lie des symboles pseudo-différentiels, la structure de Poisson provenant de la forme de Kirillov-Kostant-Souriau. Ces résultats proviennent de l'invariance de l'équation de Schrödinger libre sous une algèbre de Lie de dimension doublement infinie dont \mathfrak{sv} est une sorte de "trace", et suggèrent l'existence de systèmes intégrables sous-jacents, encore à définir.

1.2 Résultats algébriques

Les résultats présentés dans cette section renvoient essentiellement aux deux articles [9, 13].

1.2.1 Graduations, déformations

La structure de graduation est fondamentale dans la classification d'O. Mathieu dont il a été question plus haut. Elle est également fondamentale pour l'étude des représentations (remarquons simplement que la graduation est donnée par les racines dans le cas des algèbres de Lie simples de dimension finie). L'algèbre \mathfrak{sv} est naturellement équipée de deux graduations linéairement indépendantes, δ_1 et δ_2 , données sur les générateurs par

$$\delta_1(L_n) = n, \quad \delta_1(Y_m) = m, \quad \delta_1(M_p) = p; \quad (1.8)$$

$$\delta_2(L_n) = n, \quad \delta_2(Y_m) = m - \frac{1}{2}, \quad \delta_2(M_p) = p - 1. \quad (1.9)$$

Alors que δ_1 est donnée par l'action adjointe de $-L_0$, δ_2 est une dérivation extérieure. Ces graduations existent également sur $\mathfrak{sv}(0)$, variante de \mathfrak{sv} obtenue en faisant varier l'indice m des générateurs (Y_m) dans \mathbb{Z} au lieu de $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Par ailleurs, les deux algèbres, \mathfrak{sv} et $\mathfrak{sv}(0)$, appartiennent à la famille d'algèbres $\mathfrak{sv}_\varepsilon$, resp. $\mathfrak{sv}_\varepsilon(0)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ définie par les mêmes crochets que \mathfrak{sv} , à l'exception de l'action adjointe de la partie Virasoro sur la partie nilpotente:

$$[L_n, L_p] = (n-p)L_{n+p}, \quad [Y_m, Y_{m'}] = (m-m')M_{m+m'}, \quad [Y_m, M_p] = 0, \quad [M_n, M_p] = 0 \quad (1.10)$$

comme auparavant, mais

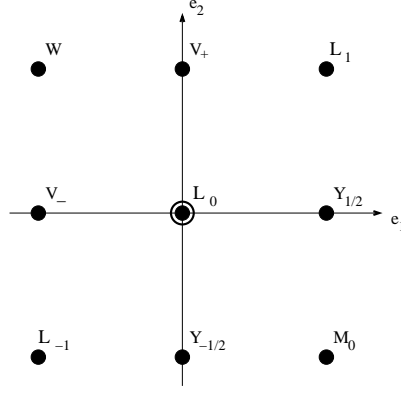
$$[L_n, Y_m] = \left(\frac{(1+\varepsilon)n}{2} - m \right) Y_{n+m}, \quad [L_n, M_p] = (\varepsilon n - p)M_{n+p}. \quad (1.11)$$

1.2.2 Plongement conforme

Comme démontré dans [3], l'algèbre de Schrödinger complexifiée $\mathfrak{sch}(d)_\mathbb{C} = \text{Lie}(\text{Sch}(d))_\mathbb{C}$ se plonge dans l'algèbre conforme $\mathfrak{conf}(d+2)_\mathbb{C}$ complexifiée en $(d+2)$ dimensions. L'idée est naturelle puisqu'une transformation de Fourier formelle en le paramètre de masse, $f(\mathcal{M}) \mapsto \hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)$, envoie l'équation de Schrödinger $(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2)\psi = 0$ sur l'équation $(-2\mathcal{M}\partial_\zeta\partial_t - \partial_r^2)\psi = 0$, qui est (à un changement de coordonnées complexe près) l'équation de Dirichlet en dimension 3, elle-même invariante sous les transformations conformes. Il suffit en fait pour cela (en dimension $d = 1$ en tout cas) de remarquer que $\mathfrak{sch}(1)_\mathbb{C}$ ¹ est isomorphe à une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{conf}(3)_\mathbb{C}$, et de trouver un plongement explicite. Celui-ci, assez simple, respecte le degré des champs de vecteurs lorsqu'on considère les réalisations comme symétries schrödingériennes, resp. conformes de $\mathfrak{sch}(d)$, resp. $\mathfrak{conf}(d+2)$. Le diagramme de racines de $\mathfrak{conf}(3)$ est de type B_2 , engendré par les deux racines positives e_1, e_2 , et l'on trouve le diagramme suivant (cf. Fig. 1.1).

Il est naturel d'espérer prolonger ce schéma de manière naturelle en obtenant une algèbre de Lie contenant 5 familles de générateurs (M, Y, L, V, W) placées sur des diagonales successives, qui serait une extension de $\mathfrak{sch}(1)$ contenant à la fois $\mathfrak{conf}(3)$ et \mathfrak{sv} . Le sens de la question n'est pas très clair a

¹ou plus précisément $\mathfrak{sch}(1)_\mathbb{C} \oplus \langle N_0 \rangle$, où $N_0 = -t\partial_t - \zeta\partial_\zeta$ est un deuxième générateur de la sous-algèbre de Cartan (symétrie invisible sur l'équation de Schrödinger de départ puisque ne préservant pas \mathcal{M}).

Figure 1.1: Diagramme de racines de $\mathfrak{conf}(3) \supset \mathfrak{sch}(1)$.

priori. On va en fait chercher un plongement dans l'algèbre de Poisson $\mathcal{A}(S^1)$ des fonctions sur le tore. Formellement, $\mathcal{A}(S^1) = \mathbb{C}[q, q^{-1}] \otimes \mathbb{C}[p, p^{-1}]$ (les variables p et q étant conjuguées), avec le crochet de Lie-Poisson $\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p}$. L'algèbre de Virasoro se plonge de manière naturelle dans $\mathcal{A}(S^1)$ par l'application $\ell_n \mapsto q^{n+1}p$, vu comme limite semi-classique de $t^{n+1}\partial_t$.

Rappelons ici la définition des modules de densité de $\text{Vect}(S^1)$: soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}_\lambda \simeq \langle z^m dz^{-\lambda} \rangle_{m \in \mathbb{Z}}$ est le $\text{Vect}(S^1)$ -module défini par

$$\ell_n.(z^m dz^{-\lambda}) = (\lambda n - m)z^{n+m} dz^{-\lambda} \quad (1.12)$$

et s'identifie donc à l'espace des $(-\lambda)$ -densités formelles. On remarque aussitôt que, sous l'action adjointe de $\text{Vect}(S^1) \subset \mathfrak{sv}$, $\langle L_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$, $\langle Y_m \rangle_{m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}}$, $\langle M_p \rangle_{p \in \mathbb{Z}}$ sont isomorphes respectivement à \mathcal{F}_1 , $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$, \mathcal{F}_0 . Il est donc naturel – plus précisément – de chercher à plonger $\mathfrak{conf}(3)$ et \mathfrak{sv} dans $\tilde{\mathcal{A}}(S^1) := \mathbb{C}[q, q^{-1}] \otimes \mathbb{C}[p^{\frac{1}{2}}, p^{-\frac{1}{2}}]$ (dite *algèbre de Poisson étendue*); mais c'est impossible car $[Y, M] = 0$ alors que $[f_1(q)p^{\frac{1}{2}}, f_2(q)]$ est en général non nul, de la forme $f_3(q)p^{-\frac{1}{2}}$. Néanmoins, notons $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq -\frac{1}{2})} = \langle f(q)p^\kappa, \kappa \leq -\frac{1}{2} \rangle$ et de même $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq 1)} = \langle f(q)p^\kappa, \kappa \leq 1 \rangle$. Alors

$$\mathfrak{sv} \simeq \tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq 1)} / \tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq -\frac{1}{2})} \quad (1.13)$$

apparaît comme sous-quotient de $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)$. Ce genre de construction ne se généralise malheureusement pas lorsqu'on cherche à plonger simultanément $\mathfrak{conf}(3)$.

Le résultat final négatif ne doit pas faire oublier la définition poissonnienne (1.13) de \mathfrak{sv} , qui, elle, s'avérera très fructueuse (d'où l'intérêt du paragraphe).

1.2.3 Représentation coadjointe

L'étude de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie est naturelle lorsqu'on cherche à exhiber des structures de Poisson, et, au-delà, des systèmes intégrables. En ce sens, la représentation coadjointe étendue de \mathfrak{vir} est à la source de l'équation intégrable de Korteweg-De Vries, elle-même étage

inférieur d'une énorme famille de systèmes intégrables [47]; de plus, elle s'identifie à l'action par reparamétrisation de \mathfrak{vir} sur les opérateurs de Hill, qui jouera un grand rôle dans la section 1.3. Malheureusement l'étude des orbites coadjointes de \mathfrak{sv} (sans lien apparent avec des systèmes intégrables, qu'on verrait plutôt apparaître en lien avec son action sur les opérateurs de Schrödinger, cf. section 1.4) s'avère décevante. Voyons les résultats.

On identifie un élément de \mathfrak{sv}_c^* à un triplet $\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in (C^\infty(S^1))^3$ de la façon suivante:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \mathcal{L}_{f_0} + \mathcal{Y}_{f_1} + \mathcal{M}_{f_2} \right\rangle = \sum_{i=0}^2 \int_{S^1} (\gamma_i f_i)(z) dz, \quad (1.14)$$

et on note

$$\mathcal{G}_{(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)} := \{X \in \mathfrak{sv} \mid \text{ad}_c^* X. \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0\} \quad (1.15)$$

la sous-algèbre d'isotropie de $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathfrak{sv}_c^*$.

La structure de produit semi-direct mélange les composantes suivant $\text{Vect}(S^1)$ avec les composantes suivant la partie nilpotente \mathfrak{h}_∞ . On montre par exemple que, si $\mathcal{L}_{f_0} + \mathcal{Y}_{f_1} + \mathcal{M}_{f_2} \in \mathcal{G}_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2}$, alors

$$cf_0''' + 2f_0'\gamma_0 + f_0\gamma_0' = -\frac{3}{2}\gamma_1 f_1' - \frac{1}{2}\gamma_1' f_1 + \gamma_2 f_2'. \quad (1.16)$$

Le générateur central M_0 est toujours dans la sous-algèbre d'isotropie. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, on retrouve bien entendu l'équation de degré 3 bien connue donnant les sous-algèbres d'isotropie dans l'étude des orbites coadjointes de l'algèbre de Virasoro. Excluant ces cas, ainsi que des cas pathologiques, on trouve essentiellement les résultats suivants:

1. Si γ_2 ne s'annule jamais, alors

$$\mathcal{G}_{(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)} = \{\mathcal{L}_{f_0} + \mathcal{Y}_{f_1} + \mathcal{M}_{f_2}, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \quad (1.17)$$

où:

$$\begin{cases} f_0 = f_0(\lambda) = \lambda\gamma_2^{-1} \\ f_1 = f_1(\lambda, \mu) = -\frac{\lambda}{2}\gamma_2^{-1}\gamma_1 - \mu\gamma_2^{-\frac{1}{2}} \\ f_2 = f_2(\lambda, \mu, \nu) = \frac{3}{2}c\lambda\gamma_2^{-4}(\gamma_2')^2 - \lambda\gamma_2^{-3}(\frac{\gamma_1^2}{2} + c\gamma_2'') + \lambda\gamma_2^{-2}\gamma_0 - \frac{\mu}{2}\gamma_2^{-\frac{3}{2}}\gamma_1 + \nu \end{cases} \quad (1.18)$$

2. si γ_2 a seulement des zéros isolés, alors $\mathcal{G}_{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2}$ se réduit à $\langle M_0 \rangle$.

3. si $\gamma_2 \equiv 0$, et γ_1 ne s'annule jamais, alors

$$\mathcal{G}_{\gamma_0, \gamma_1, 0} = \{\mathcal{L}_{f_0} + \mathcal{Y}_{f_1}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \oplus \langle M_h, h \in C^\infty(S^1) \rangle \simeq \mathbb{R} \ltimes (\mathbb{R} \oplus C^\infty(S^1)), \quad (1.19)$$

où $f_0 = \lambda\gamma_1^{-2/3}$ et $f_1 = \mu\gamma_1^{-1/3} + \lambda K(\gamma_1, \gamma_0)$, K étant une expression différentielle compliquée en γ_1 et γ_0 .

4. finalement, si $\gamma_2 \equiv 0$ et γ_1 a seulement des zéros isolés, alors $\mathcal{G}_{\gamma_0, \gamma_1, 0} = \langle M_h, h \in C^\infty(S^1) \rangle \simeq C^\infty(S^1)$.

1.2.4 Modules de Verma

Les modules de Verma d'une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ telle que \mathfrak{g}_0 soit commutative sont par définition les induites à \mathfrak{g} du prolongement trivial à $\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_n)$ d'un caractère de \mathfrak{g}_0 . Considérons \mathfrak{sv} ou son extension centrale $\tilde{\mathfrak{sv}}$ obtenue par le prolongement trivial du cocycle de Virasoro sur la partie $\text{Vect}(S^1)$ (cf. §1.2.7). Dans notre cas, seule la graduation δ_1 donne une sous-algèbre \mathfrak{g}_0 commutative; on obtient $\mathfrak{sv}_0^{\delta_1} = \langle L_0, M_0 \rangle \simeq \mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{sv}_+^{\delta_1} = \langle L_n, Y_m, M_p \rangle_{n, p \geq 0, m \geq 1/2}$. Soit $\mathbb{C}_{h, \mu} = \mathbb{C}\psi$ le caractère de \mathfrak{g}_0 défini par: $L_0\psi = h\psi$, $M_0\psi = \mu\psi$, et $\mathcal{V}_{h, \mu} \cong \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{sv}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{sv}_+^{\delta_1})} \mathbb{C}_{h, \mu}$ le module de Verma correspondant. La graduation de \mathfrak{sv} induit naturellement une graduation du module $\mathcal{V}_{h, \mu}$. Si l'on se restreint à \mathfrak{vir} , h s'identifie au poids conforme du module de Verma ainsi construit. Sous certaines conditions algébriques sur h , les modules de Verma de \mathfrak{vir} sont dégénérés, et le module irréductible quotient donne la célèbre série discrète [43, 46], à laquelle il a été fait allusion dans l'introduction. La dégénérescence de ces modules se voit en calculant à chaque niveau les déterminants de Kac, donnés par le déterminant de la forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur le sous-espace de $\mathcal{V}_{h, \mu}$ de niveau n (rappelons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est l'unique forme bilinéaire sur $\mathcal{V}_{h, \mu}$ telle que $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ et $X_n^* = X_{-n}$ si $X = L, Y$ ou M , et que le module de Verma est dégénéré si et seulement si l'un de ces déterminants est nul). On a malheureusement le résultat négatif suivant pour \mathfrak{sv} :

Théorème 1.1 *Pour tout n , le déterminant de Kac de niveau n de $\mathcal{V}_{h, \mu}$ est donné par une puissance de μ .*

Par conséquent (sauf cas triviaux, ou modules de Verma de \mathfrak{vir} complétés trivialement à $\tilde{\mathfrak{sv}}$), les modules de Verma de \mathfrak{sv} sont tous non dégénérés.

1.2.5 Représentations coinduites

Après ces deux résultats négatifs, passons à l'étude beaucoup plus intéressante de la deuxième grande famille de représentations de \mathfrak{sv} . On utilise cette fois-ci la deuxième graduation, δ_2 .

Définition 1.1 (représentations coinduites) *Soit $d\rho$ une représentation de $\mathfrak{sv}_0 = \langle L_0, Y_{\frac{1}{2}}, M_1 \rangle$ à valeurs dans un module \mathcal{H}_ρ ; elle s'étend à $\mathfrak{sv}_+ := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{sv}_i$ en posant $d\rho(\sum_{i > 0} \mathfrak{sv}_i) = 0$. Soit $\mathfrak{fsv} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{sv}_i \subset \mathfrak{sv}$ la sous-algèbre des champs de vecteurs polynomiaux (ou formels). Le \mathfrak{fsv} -module formel de ρ -densités est défini comme le module coinduit*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_\rho &= \text{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{sv}_+)}(\mathcal{U}(\mathfrak{fsv}), \mathcal{H}_\rho) \\ &= \{ \phi : \mathcal{U}(\mathfrak{fsv}) \rightarrow \mathcal{H}_\rho \text{ linéaire} \mid \\ &\quad \phi(U_0 V) = d\rho(U_0) \cdot \phi(V), \quad U_0 \in \mathcal{U}(\mathfrak{sv}_+), V \in \mathcal{U}(\mathfrak{fsv}) \} \end{aligned} \tag{1.20}$$

avec l'action naturelle à droite de $\mathcal{U}(\mathfrak{sv})$,

$$(d\tilde{\rho}(U).\phi)(V) = \phi(VU), \quad U, V \in \mathcal{U}(\mathfrak{sv}). \quad (1.21)$$

Cette définition très formelle s'explique facilement à l'aide de la structure de prolongement de Cartan de \mathfrak{sv} [30, 9]. On obtient:

Théorème 1.2 *Soit $f \in \mathbb{R}[t]$, la représentation coinduite $d\tilde{\rho}$ de \mathfrak{sv} est donnée par l'action des opérateurs différentiels matriciels suivants sur les fonctions:*

$$\begin{aligned} d\tilde{\rho}(\mathcal{L}_f) &= \left(-f(t)\partial_t - \frac{1}{2}f'(t)r\partial_r - \frac{1}{4}f''(t)r^2\partial_\zeta \right) \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_\rho} \\ &+ f'(t)d\rho(L_0) + \frac{1}{2}f''(t)r d\rho(Y_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}f'''(t)r^2 d\rho(M_1); \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$d\tilde{\rho}(\mathcal{Y}_f) = (-f(t)\partial_r - f'(t)r\partial_\zeta) \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_\rho} + f'(t)d\rho(Y_{\frac{1}{2}}) + f''(t)r d\rho(M_1); \quad (1.23)$$

$$d\tilde{\rho}(\mathcal{M}_f) = -f(t)\partial_\zeta \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_\rho} + f'(t) d\rho(M_1). \quad (1.24)$$

Les formules du théorème ci-dessus s'étendent immédiatement à $f \in \mathbb{R}[t, t^{-1}]$, et donnent une représentation de \mathfrak{sv} appelée *module de ρ -densités*. En restreignant à $\text{Vect}(S^1)$, on retrouve bien entendu les modules de $(-\lambda)$ -densités.

Cette famille de représentations semble omniprésente dans un contexte physique. Sans souci d'exhaustivité, on retrouve comme cas particulier: la réalisation schrödingérienne (pour laquelle \mathcal{H}_ρ est un caractère, trivial sur $Y_{\frac{1}{2}}$ et M_1); la linéarisation de l'action affine par reparamétrisation de \mathfrak{sv} sur des espaces d'opérateurs de Schrödinger ou de Dirac-Lévy Leblond avec potentiel dépendant périodiquement du temps; une large classe d'actions covariantes sur des opérateurs de vertex définis en §1.2.6. En revanche, il est facile de voir que la représentation coadjointe n'est pas de type coinduite. On a donc construit 3 types de représentations naturelles de \mathfrak{sv} : les modules de Verma; les représentations coinduites; et la représentation coadjointe, pour l'instant isolée.

1.2.6 Représentations vertex

On construit en [13] des opérateurs primaires, covariants sous l'action coadjointe de \mathfrak{sv} , ou plus précisément, de $\tilde{\mathfrak{sv}}$. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{sv}}$ s'obtient à partir de \mathfrak{sv} en lui adjoignant une famille de générateurs $\langle N_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$ qui se comportent comme des 0-densités sous l'action adjointe de $\text{Vect}(S^1)$; plus précisément, $\tilde{\mathfrak{sv}} \simeq \text{Vect}(S^1) \ltimes \tilde{\mathfrak{h}}$, où $\tilde{\mathfrak{h}} = \langle N_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}} \ltimes \mathfrak{h}$, avec les crochets de Lie $[L_n, N_p] = -pN_{n+p}$, $[N_n, N_p] = 0$, $[N_n, Y_p] = Y_{n+p}$, $[N_n, M_p] = 2M_{n+p}$. On généralise facilement la construction coinduite du paragraphe §1.2.5 à $\tilde{\mathfrak{sv}}$ en étendant une représentation $d\rho$ de $(\langle L_0 \rangle \oplus \langle N_0 \rangle) \ltimes \langle Y_{\frac{1}{2}}, M_1 \rangle$. L'invariance sous les générateurs N apparaît de manière naturelle dans les exemples construits, et permet de contraindre plus fortement les fonctions à n points. Nous négligerons ce point ici pour simplifier.

Un *champ* $\rho - \mathfrak{sv}$ -primaire est un opérateur $\Phi(t, r, \zeta) \in \mathbb{C}\{t, t^{-1}, r, \zeta\}$, série de Laurent en t et série formelle en r, ζ , covariant sous la représentation coinduite $d\tilde{\rho}$. L'action de \mathfrak{sv} sur le champ Φ peut se réécrire en DPO (*développement en produits opératoriels*, traduction de OPE, *operator product expansion*) relativement à la coordonnée t ; les opérateurs $d\rho(Y_{\frac{1}{2}})$, $d\rho(M_1)$ font apparaître notamment des termes en $O(\frac{1}{(t_1-t_2)^3})$ et en $O(\frac{1}{(t_1-t_2)^4})$ dans le DPO de $L(t_1).\Phi(t_2, r_2, \zeta_2)$. De tels champs primaires peuvent être construits à partir d'un *boson libre* $a(t)$ et d'un *superboson libre* (\bar{b}^+, \bar{b}^-) . Par définition, les champs bosoniques $a(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^{-n-1}$ et $\bar{b}^\pm = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{b}_n^\pm t^{-n-\frac{1}{2}}$ vérifient les DPO suivants:

$$a(t_1).a(t_2) \sim \frac{1}{(t_1 - t_2)^2}; \quad \bar{b}^\pm(t_1).\bar{b}^\mp(t_2) \sim \pm \frac{1}{t_1 - t_2}. \quad (1.25)$$

De manière équivalente, $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$ et $[\bar{b}_n^+, \bar{b}_m^-] = \delta_{n+m,0}$.

Définition 1.2 *Soit*

$$L = \frac{1}{2} \{ : a^2 : + (: \bar{b}^+ \partial \bar{b}^- : - : \bar{b}^- \partial \bar{b}^+ :) \}, \quad Y = : a \bar{b}^+ :, \quad M = \frac{1}{2} : (\bar{b}^+)^2 : \quad (1.26)$$

On vérifie sans peine que les composantes des champs L, Y, M introduits ci-dessus définissent une représentation de l'algèbre \mathfrak{sv} .

Soit maintenant

$$\Phi_{j,k}^{(0),0} = \sum_{m=0}^n \binom{m}{j} \zeta^m : (\bar{b}^-)^{j-m} (\bar{b}^+)^{k+m} : \quad (j, k \geq 0). \quad (1.27)$$

La forme de ce champ a été choisie en cohérence avec le DPO caractéristique d'un opérateur primaire,

$$M(t_1).\Phi(t_2) = \frac{1}{2} : (\bar{b}^+)^2 : (t_1).\Phi(t_2) \sim \frac{\partial_\zeta \Phi(t_2)}{t_1 - t_2} + O(\frac{1}{(t_1 - t_2)^2}). \quad (1.28)$$

L'action itérée des champs L, Y, M sur $\Phi_{j,k}^{(0),0}$ permet (cf. [13], Théorème 3.2.4) de construire un champ vectoriel $\Phi_{j,k} = (\Phi_{j,k}^{(0)}, \dots, \Phi_{j,k}^{[j/2]})$, dit *champ polynomial*, tel que $\Phi_{j,k}^{(0),0} = \Phi_{j,k}^{(0)}(r=0)$. On peut permuter librement les variables $a, \bar{b}^\pm, \partial \bar{b}^-$ dans les expressions polynomiales du type

$$P := : (\bar{b}^-)^j (\bar{b}^+)^k (\partial \bar{b}^-)^l a^m : , \quad (1.29)$$

ce qui permet de faire agir sur P des opérateurs de dérivation $\partial_{\bar{b}^\pm}, \partial_{\partial \bar{b}^-}, \partial_a$. Alors les formules de récurrence suivantes définissent le champ $\Phi_{j,k}$:

- $\Phi_{j,k}^{(\mu+1)} = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{b}^-}^2 \Phi_{j,k}^{(\mu)}, \quad \mu = 1, \dots, [j/2];$
- $\Phi_{j,k}^{(\mu)} = \exp r(a \partial_{\bar{b}^-} + \partial \bar{b}^+ \partial_a) . \Phi_{j,k}^{(\mu)}(r=0).$

Le champ $\Phi_{j,k}$ est covariant sous l'action de \mathfrak{sv} coinduite à partir d'une représentation $d\rho : \langle L_0 \rangle \ltimes \langle Y_{\frac{1}{2}}, M_1 \rangle \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}, \mathbb{R}^{\lfloor j/2 \rfloor + 1})$ définie par :

$$\rho(L_0) = - \left[\frac{j+k}{2} \text{Id} - \sum_{\mu=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \mu E_{\mu}^{\mu} \right] \quad (1.30)$$

$$\rho(Y_{\frac{1}{2}}) = 0 \quad (1.31)$$

$$\rho(M_1) = \sum_{\mu=0}^{\lfloor j/2 \rfloor - 1} E_{\mu+1}^{\mu} \quad (1.32)$$

où E_{ν}^{μ} est la matrice élémentaire dont l'unique coefficient non nul est $(E_{\nu}^{\mu})_{\mu,\nu} = 1$.

Ces formules se généralisent lorsqu'on remplace $\phi_{j,k} := (\bar{b}^-)^j (\bar{b}^+)^k$: par ${}_{\alpha}\phi_{j,k} := (\bar{b}^-)^j (\bar{b}^+)^k V_{\alpha}$: , où $V_{\alpha} := \exp \alpha \int a$ est l'opérateur de vertex de poids conforme $\alpha^2/2$.

Cette construction est peut-être intéressante mathématiquement, mais a priori décevante d'un point de vue physique, puisque les champs ainsi construits sont *polynomiaux* en la variable non physique ζ . En d'autres termes, le champ $\int \Phi_{j,k}(t, r, \zeta) e^{i\mathcal{M}\zeta} d\zeta$, obtenu formellement comme transformée de Fourier inverse de $\Phi_{j,k}$, est une distribution de support 0 en la variable de masse \mathcal{M} . Dans la dernière partie de l'article [13], nous énonçons la conjecture suivante :

Conjecture 1.3 *Les séries $\psi_{2d}^{\Xi} := \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{\Xi^{-j-d-\frac{3}{2}}}{j!} \Phi_{2j+2d+1, 2d+1}^{(0)}$ ou $\psi_{2d-1}^{\Xi} := \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{\Xi^{-j-\frac{2d-1}{2}-1}}{j!} \Phi_{2j+2d, 2d}^{(0)}$, resp. $\tilde{\psi}_{2d}^{\Xi} := \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{\Xi^{-j-d-\frac{1}{2}}}{j!} \Phi_{2j+2d, 2d+1}^{(0)}$, définies et analytiques pour $|\Xi|$ assez grand, s'étendent analytiquement quand $\Xi \rightarrow 0$ en un champ scalaire ψ_{2d} , ψ_{2d-1} , resp. $\tilde{\psi}_{2d}$, covariant sous la représentation schrödingérienne $d\pi_{d-\frac{1}{2}}$, resp. $d\pi_d$.*

La conjecture s'appuie sur le calcul des fonctions à 2 points $\langle \psi_{2d}^{\Xi} \psi_{2d}^{\Xi} \rangle$ ou $\langle \psi_{2d-1}^{\Xi} \psi_{2d-1}^{\Xi} \rangle$, resp. $\langle \tilde{\psi}_{2d}^{\Xi} \tilde{\psi}_{2d}^{\Xi} \rangle$, dont on démontre facilement (cf. [13], th. 5.1) qu'elles s'écrivent comme le noyau de la chaleur $t^{1-2d} e^{-\mathcal{M}r^2/2t}$, resp. $t^{-2d} e^{-\mathcal{M}r^2/2t}$, multiplié par une fonction qui tend vers 1 quand $\Xi \rightarrow 0$, ainsi que sur le calcul explicite d'une fonction à 3 points dans le cas particulier de ψ_{-1}^{Ξ} (cf. th. 5.3). Ce dernier calcul est intéressant en soi puisque la covariance sous le groupe de Schrödinger (contrairement au cas conforme) ne suffit pas à fixer les fonctions à 3 points, cf. [50] ou [13], Théorème A.3. La formule obtenue (avant inversion de Fourier),

$$\langle 0 \mid \prod_{j=1}^3 \psi_{-1}^{\Xi}(t_j, r_j, \zeta_j) \mid 0 \rangle \rightarrow_{\Xi \rightarrow 0} C \left[\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (t_i - t_j) \right] \left[\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (2(\zeta_i - \zeta_j)(t_i - t_j) - (r_i - r_j)^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

rappelle curieusement (au préfacteur en t près néanmoins) le résultat qu'on obtiendrait si le champ ψ_{-1} était covariant sous le groupe conforme en 3 dimensions sur $\mathbb{R}^{2,1}$ muni de la pseudo-norme $\|(t, r, \zeta)\|^2 = 2\zeta t - r^2$.

1.2.7 Etude cohomologique

A toute algèbre de Lie \mathfrak{g} et tout \mathfrak{g} -module M , on peut associer un complexe de cochaînes $(C^n(\mathfrak{g}, M), d^n)_{n \geq 0}$, appelé complexe de Chevalley-Eilenberg. Par définition, $C^n(\mathfrak{g}, M)$ est l'espace des applications n -linéaires totalement antisymétriques à valeurs dans M . Rappelons brièvement que: l'espace $H^1(\mathfrak{g}; M)$ classe les dérivations de \mathfrak{g} à valeurs dans M modulo les dérivations intérieures; $H^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ classe les extensions centrales de \mathfrak{g} ; $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ classe les déformations infinitésimales du crochet de Lie de \mathfrak{g} . Nous déterminons certains de ces espaces en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{h}_\infty \rightarrow \text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}_\infty \rightarrow \text{Vect}(S^1) \rightarrow 0$, ainsi que les résultats de Fuks [44] et Ovsienko-Roger [71] donnant par exemple $H^i(\text{Vect}(S^1), \text{Vect}(S^1))$ ou $H^i(\text{Vect}(S^1), \mathcal{F}_\lambda)$. Les démonstrations sont techniques. Nous ne donnons qu'un aperçu des résultats, sans démonstration. Dans le théorème suivant, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sv}$ ou $\mathfrak{sv}(0)$ indifféremment.

Théorème 1.3 1. (dérivations extérieures) $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}^3$ est engendré par 3 cocycles, $c_1 : L_n \rightarrow M_n, Y_m \rightarrow 0, M_p \rightarrow 0$; $c_2 : L_n \rightarrow nM_n, Y_m \rightarrow 0, M_p \rightarrow 0$; et $c_3 : L_n \rightarrow 0, Y_m \rightarrow Y_m, M_p \rightarrow 2M_p$, qui s'identifie à la graduation $2(\delta_1 - \delta_2)$.

2. (déformations) $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}^3$ est engendré par 3 cocycles (les composantes manquantes sont implicitement supposées nulles):

$$\begin{aligned} c_1 : (L_n, Y_m) &\rightarrow -\frac{n}{2}Y_{n+m}, & (L_n, M_m) &\rightarrow -nM_{n+m}; \\ c_2 : (L_n, Y_m) &\rightarrow Y_{n+m}, & (L_n, M_m) &\rightarrow 2M_{n+m}; \\ c_3 : (L_n, L_m) &\rightarrow (m-n)M_{n+m} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ces trois cocycles engendrent trois familles de déformations véritables de \mathfrak{sv} . Les cocycles λc_1 ($\lambda \in \mathbb{R}$) donnent naissance à la famille de déformations \mathfrak{sv}_λ ou $\mathfrak{sv}_\lambda(0)$ décrite en §1.2.1. Les cocycles λc_2 ($\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) permettent d'interpoler entre les algèbres \mathfrak{sv} et $\mathfrak{sv}(0)$.

3. (extensions centrales)

Pour $\lambda \neq -3, -1, 1$, $H^2(\mathfrak{sv}_\lambda(0), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ est engendré par le cocycle de Virasoro (de manière explicite, le crochet de Lie des générateurs de $\tilde{\mathfrak{sv}}_\lambda(0) \simeq \mathfrak{sv}_\lambda(0) \oplus \mathbb{R}K$ sont égaux à ceux de $\mathfrak{sv}_\lambda(0)$, à l'exception de la relation $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m,0}n(n^2-1)K$).

Pour $\lambda = -3, -1$, $H^2(\mathfrak{sv}_\lambda(0), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ est engendré par le cocycle de Virasoro et par un cocycle indépendant de la forme (en n'écrivant que les composantes non nulles) $c(L_n, Y_m) = \delta_{n+m}^0$ pour $\lambda = -3$, ou $c(L_n, Y_m) = n^2\delta_{n+m}^0$ pour $\lambda = -1$.

Pour $\lambda = 1$, $H^2(\mathfrak{sv}_1(0), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ est engendré par le cocycle de Virasoro et par deux cocycles indépendants, c_1 et c_2 , définis par (les autres composantes s'annulant encore une fois)

$$\begin{aligned} c_1(L_n, Y_m) &= n^3\delta_{n+m}^0; \\ c_2(L_n, M_m) &= c_2(Y_n, Y_m) = n^3\delta_{n+m}^0. \end{aligned}$$

En fait ce résultat découle de la structure très particulière de $\mathfrak{sv}_1(0)$ qui est isomorphe à une tensorisation de l'algèbre de Virasoro par une algèbre associative et commutative, $\mathfrak{sv}_1(0) \simeq \text{Vect}(S^1) \otimes \mathbb{R}[\eta]/(\eta^3 = 0)$.

Enfin, le calcul de la cohomologie de \mathfrak{sv}_λ fait apparaître les résultats suivants:

Pour $\lambda \neq 1, -3$, $H^2(\mathfrak{sv}_\lambda, \mathbb{R})$ est engendré par le cocycle de Virasoro.

Pour $\lambda = 1$ ou -3 , $H^2(\mathfrak{sv}_\lambda, \mathbb{R})$ est engendré par le cocycle de Virasoro et par un cocycle indépendant, c_1 , de la forme (en n'écrivant que les composantes non nulles) $c_1(Y_p, Y_q) = p^3 \delta_{p+q}^0$, $c_1(L_p, M_q) = p^3 \delta_{p+q}^0$ pour $\lambda = 1$, et $c_1(Y_p, Y_q) = \frac{\delta_{p+q}^0}{p}$ (cocycle non local) pour $\lambda = -3$.

1.3 Formes normales et monodromie des oscillateurs harmoniques périodiques en temps

Présentons maintenant l'application la plus intéressante (à l'heure actuelle) de \mathfrak{sv} à l'étude d'un problème physique: en l'occurrence, la classification des opérateurs de Schrödinger dépendant du temps, obtenue dans notre article [15].

Soit $t \mapsto H(t)$ une famille continue d'opérateurs autoadjoints tels que $\lambda_1(t) \in \mathbb{R}$ soit pour tout t une valeur propre isolée. On note $\phi_1(t)$ un vecteur propre correspondant de l'hamiltonien instantané $H(t)$. Une généralisation du théorème de Born-Fock (1928) permet de construire une suite $(\psi_n(t))_{n \geq 1}$ de solutions approchées de l'équation avec condition initiale

$$2i\varepsilon \partial_t \psi(t) = H(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \phi_1(t_0) \quad (1.35)$$

telle que (sans trop préciser pour quelle norme) $\psi - \psi_n = O(\varepsilon^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On construit pour cela une suite d'opérateurs $(H^{(0)} = H, H^{(1)}, \dots, H^{(n)}, \dots)$ telle que $\psi_n(t)$ soit vecteur propre de $H^{(n)}(t)$. L'opérateur $H^{(n)}$ est appelé *invariant d'ordre n* en raison de l'identité $[H^{(n)}, 2i\varepsilon \partial_t - H] = O(\varepsilon^{n+1})$. Si l'on considère t comme un temps macroscopique, proportionnel au temps microscopique $s = t/\varepsilon$ caractéristique des phénomènes physiques sous-jacents, l'équation (1.35) se réécrit: $2i\partial_s \psi^\varepsilon(s) = H(\varepsilon s)\psi^\varepsilon(s)$. L'hamiltonien $s \mapsto H(\varepsilon s)$ varie très lentement; l'approximation dite *adiabatique* consiste simplement à voir les fonctions propres de l'hamiltonien instantané comme solutions approchées de (1.35). L'approche permet par exemple d'étudier l'évolution d'un système dans un champ magnétique en rotation lente.

Dans certains cas très spéciaux, on sait construire un *invariant exact*, i.e. un opérateur I tel que $[I, 2i\partial_t - H] = 0$, ce qui rend l'approche adiabatique inutile (on prendra dans la suite $\varepsilon = 1$). L'existence d'un invariant exact de spectre discret permet alors (cf. [60]) de résoudre plus ou moins explicitement l'équation (1.35). En effet (si l'on suppose pour simplifier que les valeurs propres $(\lambda_n(t))_{n \geq 1}$ de I sont sans multiplicité) le spectre de I est alors indépendant du temps, et une base de solutions de l'équation (1.35) s'obtient en multipliant les fonctions propres de l'*invariant* (et non de l'hamiltonien instantané) par une phase dépendant du temps. Nous donnons ci-dessous l'exemple des oscillateurs harmoniques dépendant du temps.

Notons qu'une autre méthode de résolution utilisant une écriture explicite de ces opérateurs à l'aide d'opérateurs de création et d'annihilation a été trouvée indépendamment par G. Hagedorn [48].

Proposition 1.4 (invariant d'Ermakov-Lewis) [60]

Soit $H(t) = -\partial_x^2 + V_2(t)x^2$ un hamiltonien quadratique quelconque, et $\sqrt{\xi}$ une solution positive de l'équation de Pinney-Milne

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{\xi}) + V_2 \cdot \sqrt{\xi} - (\sqrt{\xi})^{-3} = 0. \quad (1.36)$$

Alors:

1.

$$\mathcal{EL}(\xi) := \frac{1}{2\xi} \left[x^2 + (i\xi\partial_x + \frac{1}{2}\dot{\xi}x)^2 \right]$$

est un invariant exact, conjugué pour tout t fixé à l'oscillateur harmonique.

2. Soient $h_n(t)$ les fonctions propres de $\mathcal{EL}(\xi)(t)$. Si $\psi(t_0) = \sum_{n \geq 0} c_n h_n(t_0)$, alors

$$\psi(t) = \sum_{n \geq 0} c_n \exp \left(-i(n + 1/2) \int_0^t \frac{du}{\xi(u)} \right) h_n(t) \quad (1.37)$$

est solution de l'équation de Schrödinger $(-2i\partial_t + H(t))\psi = 0$ avec condition initiale $\psi(t_0)$.

La classe d'opérateurs de Schrödinger qui nous intéresse est la suivante.

Définition 1.5 Soit $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff} := \{-2i\partial_t - \partial_x^2 + V_2(t)x^2 + V_1(t)x + V_0(t)\}$, avec $V_0, V_1, V_2 \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, l'espace des opérateurs de Schrödinger avec potentiel 2π -périodique en temps et au plus quadratique en espace.

L'espace affine $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ est un sous-espace de l'espace affine

$$\mathcal{S}^{aff} := \{-2i\partial_t - \partial_x^2 + V(t, x)\} \quad (1.38)$$

des opérateurs de Schrödinger en $(1+1)$ dimensions dépendant périodiquement du temps auquel nous reviendrons en §1.4.

On notera de manière générale $V(t) = V_2(t)x^2 + V_1(t)x + V_0(t)$, resp. $H(t) = -\partial_x^2 + V(t)$ le potentiel, resp. l'hamiltonien associé à un opérateur de Schrödinger dans $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$.

La question principale que l'on se pose est la suivante: le potentiel étant périodique, il existe (par la théorie de Floquet) un opérateur borné $M : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dit *opérateur de monodromie* tel que $\psi(t + 2\pi) = M\psi(t)$ pour tout t et pour toute solution de l'équation de Schrödinger $(-2i\partial_t + H(t))\psi = 0$. Comment déterminer M en fonction de V ?

Bien que la proposition ci-dessus permette de résoudre de manière assez explicite l'équation de Schrödinger, la solution (1.37) ne donne la monodromie que si ξ (solution de (1.36)) peut être choisie à la fois *périodique* et *positive*. Or les deux conditions sont incompatibles sauf dans le cas *elliptique* (cf. infra), ce qui laisse de côté beaucoup de cas intéressants. Si l'on abandonne la condition de positivité (afin d'avoir la périodicité), alors $\mathcal{EL}(\xi)$ n'est plus conjugué à l'oscillateur harmonique, mais à l'un des 3 opérateurs modèles autoadjoints suivants (auxquels nous adjoignons l'oscillateur harmonique pour être complets).

Définition 1.6 (opérateurs modèles) *Ils sont de 4 types:*

1. *Oscillateur harmonique:* $\Delta^+ \equiv \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2) = a^*a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-\partial_x + x)(\partial_x + x) + \frac{1}{2}$, de spectre discret $\text{Spec}(\Delta^+) = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$
2. *Répulseur harmonique:* $\Delta^- \equiv \frac{1}{2}(-\partial_x^2 - x^2)$, de spectre $\text{Spec}(\Delta^-) = \mathbb{R}$. Les fonctions propres généralisées sont des fonctions hypergéométriques confluentes.
3. *Laplacien :* $\Delta^0 \equiv -\frac{1}{2}\partial_x^2$ de spectre $\text{Spec}(\Delta^0) = \mathbb{R}_+$. Les fonctions propres généralisées sont les exponentielles $e^{\pm i\sqrt{k}x}$.
4. *Opérateur d'Airy :* $-\frac{1}{2}(\partial_x^2 - x)$, de spectre \mathbb{R} . Les fonctions propres généralisées sont les translatées de la fonction d'Airy $Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(\frac{t^3}{3} + xt) dt$.

Ces résultats d'analyse sur les opérateurs de Schrödinger, très classiques, sont à replacer dans le cadre général décrit dans [34]; le 2e cas utilise (par exemple) la représentation métaplectique, qui permet de conjuguer Δ^- avec l'opérateur d'Euler.

Le groupe de Schrödinger-Virasoro agit de manière naturelle sur l'espace $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ (cf. paragraphe suivant), définissant des orbites qu'on sait classifier, et permettant de définir des formes normales explicites (cf. §1.3.3). En reliant les données orbitales obtenues par des outils algébriques à l'opérateur d'évolution obtenu en adaptant la méthode d'Ermakov-Lewis aux opérateurs modèles ci-dessus, on détermine la monodromie de manière explicite (cf. §1.3.5). Notons que G. Hagedorn, M. Loss et J. Slawny [49] ont obtenu l'opérateur de monodromie à *une phase près* par des méthodes semi-classiques, en utilisant l'opérateur d'évolution classique associé. Notre résultat est plus précis puisqu'il donne la phase, mais il est surtout intéressant, à notre avis, parce qu'il relie de manière harmonieuse et originale des notions d'algèbre, de géométrie et d'analyse.

1.3.1 Covariance générale sous le groupe de Schrödinger-Virasoro

La proposition suivante explique pourquoi le groupe de Schrödinger-Virasoro intervient naturellement dans l'étude des opérateurs de Schrödinger.

Théorème 1.4 (cf. [70])

Soit $D := -2i\partial_t + H(t) = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V(t, x)$ un opérateur de Schrödinger. On suppose qu'un groupe à un paramètre de transformations du type

$$\psi(t, x) \mapsto \tilde{\psi}(t, x) = \exp(i f_g(g^{-1}(t, x))) \psi(g^{-1}(t, x))$$

préserve l'espace des solutions de D .

Alors le générateur infinitésimal appartient à $d\pi_{1/4}(\mathfrak{sv})$.

Le groupe d'invariance d'un opérateur de Schrödinger quelconque apparaît ainsi comme une sous-algèbre de l'algèbre de Schrödinger-Virasoro, dans sa réalisation schrödingérienne.

Lemme 1.7 1. *L'espace affine*

$$\mathcal{S}^{aff} := \{D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V(t, x)\}$$

est préservé par $\sigma_\mu(SV)$, où (μ) étant un paramètre quelconque

$$\sigma_\mu(g).D = \pi_{\mu+1}(g)D\pi_\mu(g)^{-1}.$$

On obtient l'action

$$\sigma_\mu(\phi; 0).D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + \phi'(t)V(\phi(t), x\sqrt{\phi'(t)}) + \frac{1}{2}\Theta(\phi)(\theta)x^2 + 2i(\mu - \frac{1}{4})\frac{\phi''(t)}{\phi'(t)}, \quad (1.39)$$

$$\sigma_\mu(1; (\alpha, \beta)).D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V(t, x - \alpha(t)) - 2x\alpha''(t) - (2\beta'(t) - \alpha(t)\alpha''(t)) \quad (1.40)$$

où $\Theta(\phi) = \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2$ est la dérivée schwarziennne de ϕ .

Le sous-espace affine

$$\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff} := \{D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V_2(t)x^2 + V_1(t)x + V_0(t)\}$$

des opérateurs de Schrödinger au plus quadratiques en espace est également stable sous l'action de SV .

2. *Le sous-espace*

$$\mathcal{S}_{=2}^{aff} := \{D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V_2(t)x^2\} \subset \mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$$

est préservé par $\sigma_{1/4}(\text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$. La représentation restreinte est équivalente à la réalisation usuelle du groupe de Virasoro sur l'espace des opérateurs de Hill.

La dernière remarque, fondamentale, nécessite une explication assez longue.

1.3.2 Un détour par la dimension finie: les opérateurs de Hill

Un opérateur de Hill est par définition un opérateur sur la droite de la forme $\partial_t^2 + u(t)$, où $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Proposition 1.8 1. Soit $\pi_\lambda(\phi) : \psi \mapsto (\phi')^\lambda \psi \circ \phi$. Alors $\sigma(\phi) \cdot (\partial_t^2 + u) := \pi_{3/2}(\phi) \circ (\partial_t^2 + u) \circ \pi_{-1/2}(\phi)$ s'écrit $\partial_t^2 + (\phi')^2 u \circ \phi + \frac{1}{2}t(\phi)$. La représentation σ est équivalente à la représentation coadjointe de \mathfrak{vir} sur $\mathfrak{vir}_{\frac{1}{2}}^*$, où $\mathfrak{vir}_{\frac{1}{2}}^* \subset \mathfrak{vir}^*$ est l'hyperplan affine de coordonnée $\frac{1}{2}$ le long du générateur central.

2. Soit $\text{Stab}_u := \{\phi \in \text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \mid \sigma(\phi)(\partial_t^2 + u) = \partial_t^2 + u\}$ le stabilisateur (ou: sous-groupe d'isotropie) de l'opérateur de Hill $\partial_t^2 + u$ sous l'action du groupe de Virasoro. Alors son algèbre de Lie, dite sous-algèbre d'isotropie

$$\text{Lie}(\text{Stab}_u) = \{\xi \in \text{Vect}(S^1) \mid \frac{1}{2}\xi''' + 2u\xi' + u'\xi = 0\} \quad (1.41)$$

est de dimension 1 ou 3.

3. Soit $I_u(\xi) := \xi\xi'' - \frac{1}{2}\xi'^2 + 2u\xi^2$. Alors $I_u(\xi)$ est une constante du mouvement si $\xi \in \text{Lie}(\text{Stab}_u)$.

4. Considérons l'équation de Hill $(\partial_t^2 + u)\psi(t) = 0$. Si (ψ_1, ψ_2) est une base de solutions de cette équation, alors $\xi := a_{11}\psi_1^2 + 2a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{22}\psi_2^2$ satisfait l'équation

$$\frac{1}{2}\xi''' + 2u\xi' + u'\xi = 0.$$

Si ξ est périodique, alors $\xi \in \text{Lie}(\text{Stab}(u))$.

L'opérateur de monodromie est dans ce cas une matrice M dans $SL(2, \mathbb{R})$ définie à conjugaison près. On distingue $|\text{Tr}(M)| < 2$ (cas *elliptique*), $|\text{Tr}(M)| > 2$ (cas *hyperbolique*) et $|\text{Tr}(M)| = 2$ (cas *unipotent*). La matrice M est alors conjuguée respectivement à une rotation, une matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ ou une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut relever M dans le revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ en suivant l'évolution d'un couple de solutions indépendantes le long d'une période. Un principe géométrique général implique que les classes de conjugaison de la monodromie relevée classifient les orbites. Ce principe s'explique de manière agréable en utilisant le dernier point de la Proposition 1.8. Dans le cas elliptique par exemple, choisissant une base de solutions (ψ_1, ψ_2) dans laquelle M est une rotation, il est naturel d'écrire $\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\xi(t)} \begin{pmatrix} \cos \omega(t) \\ \sin \omega(t) \end{pmatrix}$. La fonction ξ est alors périodique, et donc $\xi \in \text{Lie}(\text{Stab}_u)$; la fonction d'angle $t \mapsto \omega(t)$ est monotone (on trouve: $\omega'(t) = \frac{W}{\xi(t)}$, où W est le Wronskien), et donc $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\xi(t)}$. Dans le cas elliptique comme dans le cas hyperbolique, les valeurs propres de la matrice de monodromie s'écrivent $\exp \pm i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\xi(t)}$ – où $\int \frac{dt}{\xi(t)}$ est une intégrale régularisée par déformation de contour complexe si ξ s'annule –, pour un stabilisateur normalisé de sorte que $I_u(\xi) = 2$ (cf. [15], Lemme 2.3.5). La condition de normalisation implique que ξ est imaginaire pur dans le cas hyperbolique, d'où des valeurs propres réelles.

Proposition 1.9 (classification des invariants coadjoints et des orbites)
(cf. A. Kirillov [59])

Soit $\xi \in \text{Lie}(\text{Stab}_u)$ pour un certain opérateur de Hill $\partial_t^2 + u$. Alors la classe de conjugaison de ξ appartient à l'un des trois types suivants:

1. *Cas I:* ξ est conjugué par un difféomorphisme ϕ à une constante. Alors $\phi'^{-1} \cdot \xi \circ \phi \in \text{Lie}(\text{Stab}_{\partial_t^2 + \alpha})$. Le sous-groupe d'isotropie $\text{Stab}_{\partial_t^2 + \alpha}$ est:
 - (i) ou isomorphe à $\widetilde{SL}^{(n)}(2, \mathbb{R})$, relèvement à n feuillets de $SL(2, \mathbb{R})$ (si $\alpha = \frac{n^2}{4}, n \in \mathbb{N}^*$);
 - (ii) ou isomorphe au sous-groupe de rotation engendré par ∂_t .
2. *Cas II:* ξ est conjugué au champ de vecteurs $a \sin nt(1 + \alpha \sin nt)\partial_t$, $0 \leq \alpha < 1$. La matrice de monodromie est hyperbolique. L'invariant $I_u(\xi)$ est < 0 .
3. *Case III:* ξ est conjugué à $\pm(1 + \sin nt)(1 + \alpha \sin nt)\partial_t$, $0 \leq \alpha < 1$. La matrice de monodromie est unipotente. L'invariant $I_u(\xi)$ est nul.

Le lien avec les invariants d'Ermakov-Lewis est donné par le lemme élémentaire suivant:

Lemme 1.10 1. Soit ξ une solution (périodique ou pas) de l'équation d'isotropie $\frac{1}{2}\xi''' + 2u\xi' + u'\xi = 0$. Alors $\zeta := \sqrt{\xi}$ est une solution de l'équation de Pinney-Milne

$$\zeta'' + u(t)\zeta - \frac{I_u(\xi)/2}{\zeta^3} = 0.$$

En particulier, si $\xi = \psi_1^2 + \psi_2^2$, (ψ_1, ψ_2) étant une base de solutions de l'équation de Hill $(\partial_t^2 + u)\psi(t) = 0$ de Wronskien W , cf. Proposition 1.8, et $\zeta := \sqrt{\xi}$, alors

$$\zeta'' + u(t)\zeta - \frac{W^2}{\zeta^3} = 0.$$

2. Soit $\xi \in \text{Stab}_u$ et $\phi \in \text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Alors $\tilde{\xi} := \phi'^{-1}\xi \circ \phi$ stabilise $\partial_t^2 + \tilde{u} := \phi_*(\partial_t^2 + u)$ et $\tilde{\zeta} := \sqrt{\tilde{\xi}}$ vérifie l'équation de Pinney-Milne transformée

$$\tilde{\zeta}'' + \tilde{u}\tilde{\zeta} - \frac{W^2}{\tilde{\zeta}^3} = 0.$$

Les invariants d'Ermakov-Lewis des oscillateurs harmoniques dépendant du temps sont donc en lien étroit avec les données orbitales, et se transforment de manière covariante sous l'action du groupe de Virasoro.

Cette remarque fondamentale pour la suite se généralise à l'espace $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ tout entier. Rappelons que la représentation restreinte de $\text{Diff}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \subset \text{SV}$ sur $\mathcal{S}_{=2}^{aff}$ est équivalente à la représentation usuelle du groupe de Virasoro sur l'espace des opérateurs de Hill, l'identification se faisant tout simplement en remplaçant le potentiel u de l'opérateur de Hill par le coefficient V_2 de la partie quadratique de l'opérateur de Schrödinger. On démontre en fait qu'un

opérateur de Schrödinger $D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + V_2(t)x^2 + V_1(t)x + V_0(t) \in \mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ générique possède une sous-algèbre d'isotropie de dimension 2, engendrée par M_0 et un *invariant* de la forme $\mathcal{L}_\xi + \mathcal{Y}_{\delta_1} + \mathcal{M}_{\delta_2}$ qu'on peut fixer – à l'addition près de λM_0 , $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque M_0 agit trivialement – en demandant que $I_{V_2}(\xi) = 2$. L'opérateur suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{EL}(D) := & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{4}(\xi')^2 x^2 - \xi \partial_x^2 + \frac{i}{2} \xi' (x \partial_x + \partial_x x) \right. \right. \\ & \left. \left. + (-2\delta_1(-i\partial_x) + (V_1\xi + 2\delta_1')x) + 2(\delta_2 + \frac{1}{2}V_0\xi) \right] \end{aligned} \quad (1.42)$$

est alors un invariant (cf. [15], Théorème 4.4).

On peut définir une application $I : D \mapsto (\xi, \delta_1, \delta_2)$ qui à D générique associe un invariant. L'application I est essentiellement injective (plus précisément, elle est injective sur les opérateurs de type II; en revanche, si $D = -2i\partial_t - \partial_x^2 + \alpha x^2 + \gamma$, alors $I(D) = I(\tau_a D)$, où τ_a est une translation spatiale quelconque). La représentation $\sigma_{1/4}$ de SV sur $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$, vue au travers de l'action sur l'invariant associé, devient simplement l'action adjointe, dont on démontre qu'elle est hamiltonienne pour la structure de Poisson suivante:

Théorème 1.5 (cf. [15], th. 4.7)

Soit $\Omega \simeq C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R}^4)$ la variété linéaire des fonctions C^∞ vectorielles 2π -périodiques $\mathbf{X}(\tau) := (p, q, E, t)(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, avec structure de Poisson singulière définie par:

$$\{p(\tau), q(\tau')\} = \delta(\tau - \tau'), \quad \{E(\tau), t(\tau')\} = \delta(\tau - \tau'). \quad (1.43)$$

Si $(\xi, \delta_1, \delta_2) \in \mathfrak{sv}$, on définit $\Phi := \Phi(\xi, \delta_1, \delta_2)$ comme la fonctionnelle suivante sur Ω ,

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \mathbf{X} \rangle = & \oint \left\{ \xi(t(\tau))E(\tau) + \frac{1}{2}\xi'(t(\tau))p(\tau)q(\tau) \right. \\ & \left. + \delta_1(t(\tau))p(\tau) - \delta_1'(t(\tau))q(\tau) + \delta_2(t(\tau)) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Alors l'action sur $\Phi(\xi, \delta_1, \delta_2)$ du champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction

$$H(f, g, h) := -(f(t)E + \frac{1}{2}f'(t)pq + \frac{1}{4}f''(t)q^2) - (g(t)p + g'(t)q) - h(t) \quad (1.45)$$

coïncide avec l'action adjointe de $\mathcal{L}_f + \mathcal{Y}_g + \mathcal{M}_h \in \mathfrak{sv}$.

1.3.3 Orbites de $\mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$ sous SV

En utilisant la classification de Kirillov (cf. Proposition 1.9) et en considérant l'action assez simple de la partie nilpotente $\mathfrak{h}_\infty \subset \mathfrak{sv}$, il vient (cf. [15], Théorème 2.4.2):

Théorème 1.6 (classification des orbites par le stabilisateur) Si $D \in \mathcal{S}_{\leq 2}^{aff}$, on note $G_D \subset SV$ le stabilisateur de D dans le groupe de Schrödinger-Virasoro.

Il existe 5 classes différentes d'orbites:

(i) : Hill type I; forme normale : $D_{\alpha,\gamma} := -2i\partial_t - \partial_x^2 + \alpha x^2 + \gamma$ (potentiel constant). Le sous-groupe d'isotropie est un sous-groupe d'un revêtement du groupe de Schrödinger, génériquement commutatif, de dimension 2. Si $\alpha = n^2/4$, alors $G_D \simeq \widetilde{SL}^{(n)}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathcal{H}_1$ est isomorphe à un revêtement à n feuillets du groupe de Schrödinger.

(i)bis : forme normale : $-2i\partial_t - \partial_x^2 + n^2 x^2 + C \cos(nt - \sigma/2)x + \gamma$ (cas résonant). Le sous-groupe d'isotropie est commutatif, de dimension 3.

(ii) : Hill type II; forme normale :

$$-2i\partial_t - \partial_x^2 + \frac{n^2}{4} \left[\frac{1 + 6\alpha \sin nt + 4\alpha^2 \sin^2 nt}{(1 + \alpha \sin nt)^2} \right] x^2 + \gamma, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

Le sous-groupe d'isotropie est commutatif, de dimension 2.

(iii) : Hill type III; forme normale :

$$-2i\partial_t - \partial_x^2 + v_{n,\alpha} x^2 + \gamma, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$$v_{n,\alpha} = \frac{n^2}{4} \left[\frac{(\alpha - 1)^2 + 2\alpha(3 - \alpha) \sin nt + 4\alpha^2 \sin^2 nt}{(1 + \alpha \sin nt)^2} \right]$$

Le sous-groupe d'isotropie est commutatif, de dimension 3.

(iii)bis :

$$-2i\partial_t - \partial_x^2 + v_{n,\alpha} x^2 + C(1 + \alpha \sin nt)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - n\frac{t}{2}\right)x + \gamma$$

(cas résonant). Le sous-groupe d'isotropie est commutatif, de dimension 2.

Remarque: les cas résonants (i)bis et (iii)bis sont tous les deux 'unipotents' (l'invariant I est nul).

On a trouvé ainsi essentiellement tous les sous-groupes de Lie du groupe de Schrödinger, ainsi que ses revêtements à n feuillets.

1.3.4 Solution et problème du problème classique associé

Il n'est pas inutile de regarder le problème classique associé à l'opérateur de Schrödinger $-2i\partial_t - \partial_x^2 + V_2(t)x^2$. L'hamiltonien classique $H = \frac{1}{2}(p^2 + V_2(t)x^2)$ sur l'espace des phases correspond à l'équation du mouvement $x''(t) + V_2(t)x(t) = 0$: on retrouve l'équation de Hill. L'invariant d'Ermakov-Lewis a une limite classique,

$$\mathcal{E}_{cl}(\xi)(x) := \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\xi} + \xi(x' - \frac{1}{2} \frac{\xi'}{\xi} x) \right]^2, \quad (1.46)$$

qui est un invariant du mouvement. Cet invariant – de manière très étrange d'ailleurs – est apparemment inconnu dans ce contexte; il permet de résoudre facilement l'équation de Hill et de bien comprendre la monodromie.

On normalise le stabilisateur ξ de sorte que $I_{V_2}(\xi) = 2$ (cas I, II); ξ est réel / purement imaginaire pour une monodromie elliptique (type I, $\alpha > 0$) /

hyperbolique (type I, $\alpha < 0$; type II). Par convention, ξ est choisi purement imaginaire dans le cas où $I_{V_2}(\xi) = 0$ (unipotent type III).

Soit

$$(I) \quad T := \int_0^{2\pi} \frac{du}{\xi(u)} \in \mathbb{R} \text{ ou } i\mathbb{R}$$

$$(II, III) \quad T := \int_{\Gamma} \frac{du}{\xi(u)} \in i\mathbb{R}$$

où Γ est un contour complexe évitant les zéros, soit alternativement par au-dessus et par en-dessous (II) / soit par au-dessus (III).

Lemme 1.11 (solution et monodromie du problème classique) 1. *(Cas elliptique, type I, $\alpha > 0$):*

$$x_1(t) = \sqrt{\xi(t)} \cos \int_0^t \frac{du}{\xi(u)}, \quad x_2(t) = \sqrt{\xi(t)} \sin \int_0^t \frac{du}{\xi(u)}.$$

La monodromie est elliptique, et les valeurs propres $\exp \pm iT$, $T = \int_0^{2\pi} \frac{du}{\xi(u)}$, de module 1.

2. *(Cas hyperbolique, type I, $\alpha < 0$ ou type II): la monodromie est hyperbolique, de valeurs propres réelles $\exp \pm iT$.*

3. *(Cas unipotent, type I, $\alpha = 0$ ou type III):*

$$x_1(t) = \sqrt{\xi(t)}, \quad x_2(t) = \sqrt{\xi(t)} \int_0^t \frac{du}{\xi(u)}.$$

La monodromie est unipotente.

1.3.5 Solution et monodromie du problème quantique

Nous revenons maintenant au problème quantique initial. Le schéma est le suivant. On choisit ξ comme dans le paragraphe précédent. On sait conjuguer explicitement l'opérateur $\mathcal{EL}(\xi)$ à l'un des 4 opérateurs modèles, ce qui permet d'obtenir un système orthonormal complet de fonctions propres éventuellement généralisées $(\psi^k)_{k \in \Sigma}$, où Σ est le spectre de $\mathcal{EL}(\xi)$. En multipliant les fonctions $\psi^k(t, x)$ par une phase convenablement choisie, on démontre qu'on obtient une solution de l'équation de Schrödinger (dans le cas où le spectre est continu, aucun théorème ne permet a priori de dire qu'une telle construction aboutit, contrairement au cas évoqué au début de la section 1.3, cf. aussi Proposition 1.4). Enfin, la phase détermine la monodromie. Les calculs dans les cas résonants (i)bis, (iii)bis sont effectués en utilisant directement les formes normales trouvées. On trouve le résultat suivant pour la monodromie. Les fonctions h_n , resp. $\psi_{k,\pm}$, resp. $(h_{pair}^k, h_{impair}^k)$, resp. ψ_k , sont chaque fois des fonctions propres (généralisées) de l'invariant d'Ermakov-Lewis. Les notations sont celles du Théorème 1.6.

Théorème 1.7 (monodromie) 1. *(Cas elliptique, type (i) avec $\alpha > 0$): T est réel et l'opérateur modèle est l'oscillateur harmonique.*

Si $\psi(0, x) = \sum_{n \geq 0} c_n h_n(0, x)$, alors

$$\psi(2\pi, x) = \sum_{n \geq 0} c_n e^{-i(n+\frac{1}{2})T - i\pi\gamma} h_n(0, x). \quad (1.47)$$

L'opérateur de monodromie M est donc conjugué à l'opérateur de multiplication par $(e^{-i(n+\frac{1}{2})T - i\pi\gamma})_{n \geq 0}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

2. (Cas elliptique résonant (i)bis): T est purement imaginaire et l'opérateur modèle est le laplacien.

Si $\psi(0, x) = \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_+(k) \psi_{k,+}(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_-(k) \psi_{k,-}(0, x) dk$, alors

$$\psi(2\pi, x) = \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_+(k) e^{k'T - i\pi\gamma'} \psi_{k,+}(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_-(k) e^{k'T - i\pi\gamma'} \psi_{k,-}(0, x) dk \quad (1.48)$$

avec $k' = k + 3\left(\frac{C}{16n}\right)^2$, $\gamma' = \gamma + Cste$.

3. (Cas hyperbolique, type (i) $\alpha < 0$ ou type (ii)): T est purement imaginaire et l'opérateur modèle est le répulseur harmonique.

Si $\psi(0, x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_+(k) h_{pair}^k(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_-(k) h_{impair}^k(0, x) dk$ alors

$$\psi(2\pi, x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_+(k) e^{kT - i\pi\gamma} h_{pair}^k(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_-(k) e^{kT - i\pi\gamma} h_{impair}^k(0, x) dk. \quad (1.49)$$

4. (Cas unipotent, type (i) $\alpha = 0$ ou type (iii)): T est purement imaginaire et l'opérateur modèle est le laplacien.

Si $\psi(0, x) = \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_+(k) \psi_{k,+}(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_-(k) \psi_{k,-}(0, x) dk$, alors

$$\psi(2\pi, x) = \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_+(k) e^{kT - i\pi\gamma} \psi_{k,+}(0, x) dk + \int_{\mathbb{R}_+} \bar{c}_-(k) e^{kT - i\pi\gamma} \psi_{k,-}(0, x) dk. \quad (1.50)$$

5. (Cas unipotent résonant (iii)bis): T est purement imaginaire et l'opérateur modèle est l'opérateur d'Airy.

Si $\psi(0, x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_k \psi_k(0, x) dk$ alors

$$\psi(2\pi, x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{c}_k e^{kT - i\pi\gamma'} \psi_k(0, x) dk$$

avec $\gamma' = \gamma + Cste$.

Les constantes en 2. et 5. sont données par des intégrales explicites.

1.4 Structures poissonniennes et supersymétrisations

Nous présentons dans cette section les résultats contenus dans les articles [10, 19] et dans le compte-rendu de conférence [11].

Nous revenons désormais à la vision de \mathfrak{sv} comme sous-quotient de l'algèbre de Poisson étendue $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)$ introduite en §1.2.2. Ce point de vue se supersymétrise de manière naturelle (cf. [10]). Nous ne présenterons

que très partiellement et très brièvement les résultats de cet article assez technique et difficile à résumer. Au lieu de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)$, on considère la super-algèbre de Poisson étendue $\tilde{\mathcal{P}}^{(2|N)}$ sur le super-tore définie comme l'algèbre associative des superfonctions

$$f(p, q; \theta) := f(p, q; \theta^1, \dots, \theta^N) = \sum_{i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^N \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i,j,i_1,\dots,i_k} p^i q^j \theta^{i_1} \dots \theta^{i_k}, \quad (1.51)$$

le crochet de Poisson étant défini par

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - (-1)^{\delta(f)} \sum_{i=1}^N \partial_{\theta^i} f \partial_{\theta^i} g \quad (1.52)$$

avec $\delta(f(p, q) \theta^{i_1} \dots \theta^{i_k}) := k$.

On a plusieurs graduations sur cet espace, dont δ et $\mathbf{gra} : \tilde{\mathcal{P}}^{(2|N)} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ définie par

$$\mathbf{gra}(q^n p^m \theta^{i_1} \dots \theta^{i_k}) := m + k/2. \quad (1.53)$$

On note $\tilde{\mathcal{P}}_{\leq \kappa}^{(2|N)}$, $\kappa \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ le sous-espace vectoriel de $\tilde{\mathcal{P}}^{(2|N)}$ engendré par les éléments homogènes de graduation $\leq \kappa$, relativement à la *deuxième* graduation \mathbf{gra} . On obtient alors l'algèbre de Schrödinger-Neveu-Schwarz de niveau N , $\mathbf{sns}^{(N)}$, comme quotient $\mathbf{sns}^{(N)} = \tilde{\mathcal{P}}_{\leq 1}^{(2|N)} / \tilde{\mathcal{P}}_{\leq -1/2}^{(2|N)}$. Pour $N = 0$, on retrouve $\mathbf{sv} \simeq \text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}_\infty$. De manière générale, $\mathbf{sns}^{(N)}$ est un produit semi-direct $\mathfrak{g}^{(N)} \ltimes \mathfrak{h}^{(N)}$, où $\mathfrak{g}^{(N)}$ est la superalgèbre des champs de vecteurs de supercontact sur le supercercle $S^{(1|N)}$, i.e. préservant le noyau de la 1-forme $dq + \sum_{i=1}^N \theta^i d\theta^i$. En particulier, $\mathfrak{g}^{(1)}$ est isomorphe à l'algèbre de Neveu-Schwarz de la théorie superconforme des champs. Lorsque $N = 2$, $\mathbf{sns}^{(2)}$ contient $\mathbf{osp}(2|2) \ltimes \mathbf{sh}(2|2)$ (produit semi-direct de l'algèbre orthosymplectique par une superalgèbre de Heisenberg) dont une certaine réalisation laisse invariante l'équation de super-Schrödinger obtenue formellement (comme l'équation de Schrödinger libre à partir de l'équation de Dirichlet en dimension 3, cf. §1.2.2) par transformation de Fourier à partir d'un modèle supersymétrique sur $\mathbb{R}^{3|2}$ [42], appelé : *modèle (3|2)-supersymétrique*. Comme dans le cas de \mathbf{sch} et \mathbf{sv} , la réalisation de $\mathbf{osp}(2|2) \ltimes \mathbf{sh}(2|2)$ comme symétries d'une équation physique s'étend facilement en une réalisation de l'algèbre de dimension infinie $\mathbf{sns}^{(2)}$.

Revenons maintenant à \mathbf{sv} . On sait que l'équation de Schrödinger libre n'est invariante que sous la sous-algèbre de dimension finie \mathbf{sch} . Il y a néanmoins un moyen [11] de passer outre, qui permet (de manière très curieuse) de voir \mathbf{sv} dans sa réalisation schrödingérienne comme la partie différentielle de symboles pseudodifférentiels en r , dépendant du temps, laissant invariant l'équation de Schrödinger [19]. Pour cela il faut d'abord introduire l'algèbre des symboles pseudo-différentiels formels, $\Psi D := \mathbb{R}[r, r^{-1}][\partial_r, \partial_r^{-1}]$, ainsi que son extension double, $D\Psi D := \mathbb{R}[\xi, \xi^{-1}][\partial_\xi^{\frac{1}{2}}, \partial_\xi^{-\frac{1}{2}}]$. Ces algèbres associatives sont les quantifications naturelles de $\mathcal{A}(S^1)$ et $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)$ (cf. §1.2.2). On a alors un isomorphisme d'algèbres $\Theta : D\Psi D \rightarrow \Psi D$ défini par

$$\begin{aligned} \partial_\xi^{\frac{1}{2}} &\mapsto \partial_r, & \partial_\xi^{-\frac{1}{2}} &\mapsto \partial_r^{-1} \\ \xi &\mapsto \frac{1}{2} r \partial_r^{-1}, & \xi^{-1} &\mapsto 2 \partial_r r^{-1}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

d'inverse $\Theta^{-1} : \partial_r \mapsto \partial_\xi^{\frac{1}{2}}, r \mapsto 2\xi\partial_\xi^{\frac{1}{2}}$. Cet isomorphisme est obtenu formellement par conjugaison avec la transformation intégrale $\psi(r) \mapsto \tilde{\psi}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r^2/4\xi}}{\sqrt{\xi}} \psi(r) dr$ liée à l'équation de la chaleur. Il est donc naturel de voir ΨD et $D\Psi D$ comme agissant sur des espaces de fonctions différents et d'écrire pour préciser ΨD_r au lieu de ΨD , et $D\Psi D_\xi$ au lieu de $D\Psi D$.

Sous cette transformation non locale, l'opérateur de Schrödinger libre $\Delta_0 := -2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2$ devient un opérateur d'ordre 1, $-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_\xi$, invariant par conjugaison sous les transformations $\mathcal{X}_f^{(j)} := -f(t - 2i\mathcal{M}\xi)\partial_\xi^j$, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Par conséquent, l'équation de Schrödinger initiale est invariante sous $\Theta(\mathcal{X}_f^{(j)})$. Précisons que $\Theta((t - 2i\mathcal{M}\xi)^{-k})$, $k \geq 0$ doit être compris comme le développement en série en puissances *croissantes* de ξ/t , $\Theta((t - 2i\mathcal{M}\xi)^{-k}) := t^{-k}\Theta(1 + \frac{2ik\mathcal{M}\xi}{t} + \dots)$. Des calculs montrent que

$$\mathcal{X}_f^{(1)} = -f(t)\partial_r^2 + i\mathcal{M}f'(t)r\partial_r + \frac{1}{2}\mathcal{M}^2 f''(t)r^2 + O(\partial_r^{-1}); \quad (1.55)$$

$$\mathcal{X}_g^{(\frac{1}{2})} = -g(t)\partial_r + i\mathcal{M}g'(t)r + O(\partial_r^{-1}); \quad (1.56)$$

$$\mathcal{X}_h^{(0)} = -h(t) + O(\partial_r^{-1}). \quad (1.57)$$

Si l'on remplace $-2i\mathcal{M}\partial_t$ par ∂_r^2 dans la formule (1.6) donnant la réalisation schrödingerienne de \mathcal{L}_f , on retrouve ainsi la réalisation schrödingerienne de \mathfrak{sv} modulo un $O(\partial_r^{-1})$, ce qui n'est pas sans rappeler la définition du système intégrable associé à l'équation de Korteweg-De Vries à partir de la partie différentielle des puissances demi-entières de $\partial^2 + u$ [47]; le sens profond de cette remarque (s'il existe) est encore à découvrir. En projetant les $\mathcal{X}_f^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, \frac{1}{2}, 0$ dans l'algèbre quotient $D\Psi D_{(\leq 1)}/D\Psi D_{(\leq -\frac{1}{2})}$, on a ainsi prouvé en particulier que $\mathfrak{sv} \simeq D\Psi D_{(\leq 1)}/D\Psi D_{(\leq -\frac{1}{2})}$; comme ce dernier quotient s'identifie canoniquement à $\tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq 1)}/\tilde{\mathcal{A}}(S^1)_{(\leq -\frac{1}{2})}$, on a retrouvé le plongement de §1.2.2. La substitution $-2i\mathcal{M}\partial_t \rightarrow \partial_r^2$ n'est justifiée que si l'on fait agir ces opérateurs sur des fonctions qui sont dans le noyau de l'équation de Schrödinger libre; aussi, les générateurs (\mathcal{L}_f) de la composante $\text{Vect}(S^1) \subset \mathfrak{sv}$ jouent-ils un rôle à part dans la construction ci-dessous.

Cette remarque va nous permettre de comprendre une variante de la linéarisation naturelle \mathcal{S}^{lin} (cf. Théorème 1.9 ci-dessous) de l'action de \mathfrak{sv} sur $\mathcal{S}^{aff} := \{-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2 + V(t, r), V \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R})\}$ définie plus haut (cf. Lemme 1.7) comme une *action hamiltonienne*. Curieusement, on trouve ici l'action à gauche et à droite

$$\tilde{\sigma}_\mu(g).D := \pi_{\mu+2}(g)D\pi_\mu(g)^{-1}, \quad (1.58)$$

avec un décalage d'indice de 2 au lieu de 1. Cette action est très similaire à celle de σ_μ , mais ne préserve pas l'espace affine \mathcal{S}^{aff} . Pour être précis, soit

$$\mathcal{S}^{lin} := \{a(t)(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) + V_{-2}(t, r)\}. \quad (1.59)$$

Alors on a les formules suivantes, à comparer avec celles du Lemme 1.7:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\mu(\phi; 0) \cdot (a(t)(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) + V(t, r)) &= \phi'(t)a(\phi(t))(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) \\ &+ (\phi')^2(t)V(\phi(t), r\sqrt{\phi'(t)}) + a\left(2i\left(\mu - \frac{1}{4}\right)\mathcal{M}\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{1}{2}\mathcal{M}^2r^2\Theta(\phi)(t)\right) \\ \tilde{\sigma}_\mu(1; (\alpha, \beta)) \cdot (a(t)(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) + V(t, r)) &= a(t)(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) \\ &+ V(t, r - \alpha(t)) + a(-2\mathcal{M}^2r\alpha''(t) - \mathcal{M}^2(2\beta'(t) - \alpha(t)\alpha''(t))) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Les opérateurs $\Theta(\mathcal{X}_f^{(j)})$, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, appartiennent à l'algèbre des courants $\mathcal{L}(\Psi D_r) \simeq \Psi D_r[t, t^{-1}]$ au-dessus de ΨD . Encore une fois, on précise la variable pour plus de clarté, et on écrit $\mathcal{L}_t(\Psi D_r)$ au lieu de $\mathcal{L}(\Psi D_r)$. Des systèmes intégrables associés à des structures de Poisson sur cette algèbre de courant (étendue par le cocycle central de Kac-Moody, $(X, Y) \rightarrow \oint \text{Tr} \dot{X}(t)Y(t) dt$, où Tr est la trace d'Adler sur ΨD) ont été étudiés par A. G. Reiman et M. A. Semenov-Tyan-Shanskii [73]; on retrouve notamment la 2e équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP). Dans le même ordre d'idées, on peut signaler également le papier de V. Ovsienko et C. Roger [72] donnant des systèmes intégrables similaires à l'équation KP à partir de l'algèbre de lacets au-dessus de l'algèbre de Virasoro. Dans notre cas, cf. l'article que nous résumons ici [19], des calculs montrent que l'action de \mathfrak{sv} sur les opérateurs de Schrödinger est reliée à l'action coadjointe de $\mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$, où $\mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$ est une extension centrale de $\mathcal{L}_t((\Psi D_r)_{\leq 1})$ sans lien avec le cocycle de Kac-Moody.

Définition 1.12 Soit $\widetilde{\Psi D_{\leq 1}}$ l'extension centrale de $\Psi D_{\leq 1}$ associée au cocycle cc_3 ($c \in \mathbb{R}$), où $c_3 : \Lambda^2 \Psi D_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie

$$c_3(f\partial_r, g\partial_r^{-1}) = c_3(f\partial_r^{-1}, g\partial_r) = \frac{1}{2i\pi} \oint f'g dr \quad (1.61)$$

(les autres composantes étant identiquement nulles).

On peut démontrer au passage que l'espace $H^2(\Psi D_{\leq 1}; \mathbb{R})$ est de dimension ≥ 6 . On écrit un élément de l'algèbre des courants $\mathfrak{h} := \mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$ comme un couple $(D(t), h(t))$. Alors l'action coadjointe de $\Theta((D\Psi D_\xi)_{\leq \frac{1}{2}}) = \Theta(\langle \mathcal{X}_f^{(\kappa)}, f \in C^\infty, \kappa \leq \frac{1}{2} \rangle)$ sur \mathfrak{h}^* préserve la sous-variété $\{(V(t, r)\partial_r^{-2}, 1)\} \subset \mathfrak{h}^*$; l'action restreinte à cette sous-variété passe au quotient en une action de $\mathfrak{h}_\infty \subset \mathfrak{sv}$ qui coïncide avec l'action $\sigma_{1/4}$ par reparamétrisation sur les opérateurs de Schrödinger. Par conséquent, $\sigma_{1/4}|_{\mathfrak{h}_\infty}$ est une action hamiltonienne pour la structure de Poisson de Kirillov-Kostant-Souriau sur \mathfrak{h}^* .

Le résultat ci-dessus ne s'étend pas directement à $\mathfrak{sv} \simeq \text{Vect}(S^1) \ltimes \mathfrak{h}_\infty$, en raison du rôle particulier joué par les générateurs (\mathcal{L}_f) dans la construction (cf. remarque ci-dessus). Les dérivations $f(t)\partial_t$ n'appartenant pas à \mathfrak{h} , il est naturel de construire une algèbre produit semi-direct $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{g}_0 \simeq \text{Vect}(S^1)_t$ – où l'on précise encore une fois la variable –, qui contient $(D\Psi D_\xi)_{(\leq 1)} \simeq (D\Psi D_\xi)_1 \ltimes (D\Psi D_\xi)_{(\leq \frac{1}{2})}$ comme sous-algèbre de Lie. On fait agir \mathfrak{g}_0 sur \mathfrak{h} par dérivation de la manière suivante:

Théorème 1.8 (cf. [19], Théorème 5.1)

Soit $I : (D\Psi D_\xi)_{\leq 1} \simeq \text{Vect}(S^1)_\xi \ltimes (D\Psi D_\xi)_{\leq \frac{1}{2}} \hookrightarrow \mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1)_t \ltimes \mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$ l'application définie comme

$$I((0, D)) = (0, \Theta_t(D)); \quad (1.62)$$

$$I\left(-\frac{i}{2\mathcal{M}}f(-2i\mathcal{M}\xi)\partial_\xi, 0\right) = \left(-f(t)\partial_t, \frac{i}{2\mathcal{M}}(\mathcal{X}_f^{(1)})_{\leq 1}\right) \quad (1.63)$$

où

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}_f^{(1)})_{\leq 1} &= (\Theta(-f(t - 2i\mathcal{M}\xi)\partial_\xi))_{\leq 1} \\ &= i\mathcal{M}f'(t)r\partial_r + \frac{1}{2}\mathcal{M}^2 f''(t)r^2 - \left(\frac{1}{2}\mathcal{M}^2 f''(t)r + \frac{i}{6}\mathcal{M}^3 f'''(t)r^3\right)\partial_r^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (1.64)$$

est $\mathcal{X}_f^{(1)}$ privé de son terme d'ordre ∂_r^2 , i.e. la projection de $\mathcal{X}_f^{(1)}$ sur $\mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$.

Alors I est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

On a donc un plongement non diagonal de \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g} , avec

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{L}_f) = -f(t)\partial_t + \widetilde{\text{ad}}\left(-\frac{1}{2}f'(t)r\partial_r + \frac{i\mathcal{M}}{4}f''(t)r^2 + \dots\right). \quad (1.65)$$

Si l'on oublie les complications dues aux charges centrales, \mathcal{L}_f agit essentiellement comme $\frac{i}{2\mathcal{M}}\Theta(\mathcal{X}_f^{(1)}) = -f(t)\partial_t - \frac{1}{2}f'(t)r\partial_r + \frac{i\mathcal{M}}{4}f''(t)r^2 + \dots$, cf. éq. (1.55) et les explications qui suivent.

On obtient alors le résultat suivant:

Théorème 1.9 (cf. [19], Théorème 6.1) Soit $(\widetilde{\Psi D_r})_{\leq 1}$ l'extension centrale de $(\Psi D_r)_{\leq 1}$ associée au cocycle cc_3 avec $c = 2$; $\mathfrak{h} = \mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$ l'algèbre de lacets étendue correspondante, et $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1)_t \ltimes \mathcal{L}_t(\widetilde{(\Psi D_r)_{\leq 1}})$ l'extension par dérivations extérieures définie ci-dessus. Soit aussi \mathcal{N} le sous-espace affine $\text{Vect}(S^1)_t^* \ltimes \left\{([V_{-2}(t, r)\partial_r^{-2} + V_0(t)\partial_r^0] dt, a(t)dt)\right\} \subset \mathfrak{g}^*$ (dans cette formule, V_0 est supposé ne dépendre que de la variable t). Alors:

- (i) l'action coadjointe $\text{ad}_{\mathfrak{g}}^*$, restreinte à l'image $I((D\Psi D_\xi)_{\leq 1})$, préserve \mathcal{N} , et passe au quotient en une action de \mathfrak{sv} ;
- (ii) décomposons $d\tilde{\sigma}_0(X)(a(t)\Delta_0 + V(t, r))$, $X \in \mathfrak{sv}$ en $d\tilde{\sigma}_0^{op}(X)(a)\Delta_0 + d\tilde{\sigma}_0^{pot}(X)(a, V)$ (opérateur de Schrödinger libre dépendant seulement de a , plus un potentiel dépendant de (a, V)). Alors

$$\begin{aligned} &\text{ad}_{\mathfrak{g}}^*(\mathcal{L}_f) \cdot (v(t)dt^2; [V_{-2}(t, r)\partial_r^{-2} + V_0(t)\partial_r^0] dt, a(t)dt) \\ &= \left(\left[-\frac{1}{2}f''\left(\oint rV_{-2}dr\right) - (fv' + 2f'v)\right]dt^2; \right. \\ &\quad \left.[d\tilde{\sigma}_0^{pot}(\mathcal{L}_f)(a, V_{-2})\partial_r^{-2} + (-fV_0' - f'V_0 + af')\partial_r^0] dt, d\tilde{\sigma}_0^{op}(\mathcal{L}_f)(a)dt\right); \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned}
& \text{ad}_{\mathfrak{g}}^*(\mathcal{Y}_g). (v(t)dt^2; [V_{-2}(t, r)\partial_r^{-2} + V_0(t)\partial_r^0] dt, a(t)dt) \\
&= \left(-g' \left(\oint V_{-2} dr \right) dt^2; \left(d\tilde{\sigma}_0^{\text{pot}}(\mathcal{Y}_g)(a, V_{-2}) \right) \partial_r^{-2} dt, 0 \right); (1.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ad}_{\mathfrak{g}}^*(\mathcal{M}_h). (v(t)dt^2; [V_{-2}(t, r)\partial_r^{-2} + V_0(t)\partial_r^0] dt, a(t)dt) \\
&= \left(0; \left(d\tilde{\sigma}_0^{\text{pot}}(\mathcal{M}_h)(a, V_{-2}) \right) \partial_r^{-2} dt, 0 \right). \quad (1.68)
\end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on oublie la composante suivant ∂_r^0 dans \mathfrak{h}^* , et la composante suivant dt^2 dans $\text{Vect}(S^1)^*$, la restriction de l'action coadjointe de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}^*|_{\mathfrak{sv}}$ à \mathcal{N} coïncide avec l'action infinitésimale $d\tilde{\sigma}_0$ de \mathfrak{sv} sur $\mathcal{S}^{\text{lin}} = \{a(t)(-2i\mathcal{M}\partial_t - \partial_r^2) + V_{-2}(t, r)\}$.

Le terme $af'\partial_r^0$ dans l'éq. (1.66) montre que le sous-espace de \mathcal{N} avec coordonnée nulle $V_0 \equiv 0$ n'est pas stable par l'action de \mathfrak{sv} . Des formules analogues peuvent être trouvées pour les actions $d\tilde{\sigma}_\mu$ avec μ quelconque en modifiant légèrement la définition de l'isomorphisme Θ .

Chapitre 2

Singularités locales des champs gaussiens fractionnaires

2.1 Présentation générale

La problématique générale dans cette partie est la suivante. On se donne un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ irrégulier, c'est-à-dire, à variation non bornée. Est-il possible de définir une intégrale stochastique contre X , et, plus généralement, de résoudre des équations différentielles stochastiques dirigées par X ?

La question est bien connue dans le cas où X est un mouvement brownien, et se résout classiquement grâce à la théorie des martingales (elle-même liée à la propriété markovienne du brownien) si l'on intègre un processus adapté par rapport à la filtration brownienne; plus généralement, en intégrant des processus adaptés contre des semi-martingales, on reste dans la classe des semi-martingales, ce qui permet de résoudre dans cette même classe des équations différentielles stochastiques dirigées par le brownien.

A partir du moment où l'on sort du cadre brownien et de ses généralisations semi-martingales, la classe des processus adaptés ne présente plus d'intérêt particulier, et l'on dispose à l'heure actuelle de trois types d'outils essentiellement: (1) les intégrales symétriques à la Russo-Vallois [124] (extensions de l'intégrale de Stratonovich) pour des processus X unidimensionnels; (2) le calcul de Malliavin et l'intégrale de Skorohod dans le cadre gaussien [117]; (3) la toute récente mais déjà classique théorie des *chemins rugueux* ou *rough paths*, due à Terry Lyons [112, 114].

A part quelques brèves incursions dans le domaine du calcul de Malliavin, nous nous intéresserons essentiellement dans cette partie au dernier outil (3). La présentation ci-dessous s'inspire largement du livre de P. Friz et N. Victoir [98]. La théorie, d'inspiration géométrique et non probabiliste, permet de donner un sens à des intégrales généralisées $\int_s^t y_u dx_u$ pour des chemins (a priori déterministes) y, x d'exposant de Hölder $\alpha \in]0, 1[$, ou plus généralement à $\frac{1}{\alpha}$ -variation bornée, c'est-à-dire tels que

$\sup_{n \geq 1} \sup_{s=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=t} \sum_{j=0}^{n-1} |x_{t_{j+1}} - x_{t_j}|^{1/\alpha} < \infty$ (on peut reparamétriser

un chemin à $1/\alpha$ -variation bornée de façon à en faire un chemin α -Hölder, si bien que l'extension de la théorie du cadre Höldérien au cadre des q -variations est en général automatique). La définition donnée coïncide avec l'intégrale de Young (obtenue simplement comme limite de sommes de Riemann) lorsque $2\alpha > 1$; sous cette dernière hypothèse, $t \mapsto \int_s^t y_u dx_u$ étant alors lui-même un chemin à $1/\alpha$ -variation bornée, on peut itérer les intégrations et résoudre localement de manière unique une équation différentielle

$$dy_t = f(t, y_t) dx_t, \quad y_0 = z \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

si x est un chemin d -dimensionnel à $1/\alpha$ -variation bornée, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ est C^1 . Désignons par $\Omega_\alpha(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des chemins $x = (x(1), \dots, x(d)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ à $1/\alpha$ -variation bornée. Alors, de plus, l'application $x \mapsto y_f(x)$ (où $y_f(x)$ est l'unique solution de l'équation (2.1)), dite de *Itô-Lyons*, est continue de $\Omega_\alpha(\mathbb{R}^d)$ dans $\Omega_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

L'extension directe de l'intégrale de Young au cas $\alpha < \frac{1}{2}$ s'avère impossible: en effet, d'une part, les sommes de Riemann peuvent diverger; d'autre part, deux suites $(x_1^n)_{n \geq 1}$, $(x_2^n)_{n \geq 1}$ convergeant toutes deux vers le chemin x dans $\Omega_\alpha(\mathbb{R}^d)$, peuvent conduire à la limite à des intégrales différentes. Admettons provisoirement que $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$. Si l'on veut faire converger les sommes de Riemann associées à $\int_s^t f(x_u) dx_u$, où f est une 1-forme sur \mathbb{R}^d , un bref calcul utilisant la formule de Green-Riemann montre qu'il est nécessaire de donner un sens non ambigu aux intégrales d'aire $\int_s^t dx_u(i_1) \int_s^u dx_u(i_2)$ obtenues en intégrant le chemin x contre lui-même. En remarquant simplement que

$$\int_s^t dx_u(i) \int_s^u dx_u(i) = \frac{1}{2}(x_t(i) - x_s(i))^2, \quad (2.2)$$

on voit qu'il est naturel de demander que ces intégrales d'aire soient au plus de l'ordre de $|t - s|^{2\alpha}$. Introduisons la terminologie suivante: si $f = f_{ts}$ est une fonction réelle de deux variables telle que

$$\|f\|_{C_2^\alpha} := \sup_{s,t} \frac{|f_{ts}|}{|t - s|^\alpha} < \infty \quad (\alpha \in]0, +\infty[), \quad (2.3)$$

on dit que $f \in C_2^\alpha$ est un 1-*incrément* α -Hölder. Les intégrales d'aire doivent donc être des 1-incréments 2α -Hölder.

Plus généralement, si $\alpha \in]\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N}]$, il faut donner un sens à la famille d'intégrales itérées $((\mathbf{x}_{ts}^2(i_1, i_2))_{1 \leq i_1, i_2 \leq d}, \dots, (\mathbf{x}_{ts}^N(i_1, \dots, i_N))_{1 \leq i_1, \dots, i_N \leq d})$. Par hypothèse \mathbf{x}^n , $n = 2, \dots, N$ doit être un 1-incrément $n\alpha$ -Hölder. On note $\mathbf{x}_{ts}^1(i_1) = x_t(i_1) - x_s(i_1)$ l'incrément du chemin x entre s et t . Il est naturel de demander que la famille $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$, dite *rough path* ou *chemin rugueux* au-dessus de x , ou simplement *relèvement* de x , vérifie les deux propriétés de compatibilité suivantes:

(i) (*propriété multiplicative ou de Chen*)

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{ts}^k(i_1, \dots, i_k) - \mathbf{x}_{tu}^k(i_1, \dots, i_k) - \mathbf{x}_{us}^k(i_1, \dots, i_k) \\ &= \sum_{k_1+k_2=k} \mathbf{x}_{tu}^{k_1}(i_1, \dots, i_{k_1}) \mathbf{x}_{us}^{k_2}(i_{k_1+1}, \dots, i_k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

(ii) (*propriété géométrique ou de shuffle*)

$$\mathbf{x}_{ts}^{n_1}(i_1, \dots, i_{n_1}) \mathbf{x}_{ts}^{n_2}(j_1, \dots, j_{n_2}) = \sum_{\mathbf{k} \in \text{Sh}(\mathbf{i}, \mathbf{j})} \mathbf{x}_{ts}^{n_1+n_2}(k_1, \dots, k_{n_1+n_2}) \quad (2.5)$$

où $\text{Sh}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est l'ensemble des “shuffles” de \mathbf{i} et \mathbf{j} , i.e. des permutations de la liste concaténée (\mathbf{i}, \mathbf{j}) préservant l'ordre des listes \mathbf{i} et \mathbf{j} .

Si x est régulier, les intégrales itérées de x contre lui-même,

$$\mathbf{x}_{ts}^k(i_1, \dots, i_k) := \int_s^t dx_{t_1}(i_1) \int_s^{t_1} dx_{t_2}(i_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} dx_{t_k}(i_k) \quad (2.6)$$

vérifient (2.4) et (2.5): la famille $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$ – pour N quelconque – est alors appelée *relèvement canonique de x* .

Lorsque $n = 2$, ces deux propriétés s'interprètent simplement en remarquant (lorsque x est un chemin régulier bidimensionnel) que

$$\begin{aligned} \int_s^t dx_v(1) \int_s^v dx_v(2) - \int_s^u dx_v(1) \int_s^v dx_v(2) - \int_u^t dx_v(1) \int_s^v dx_v(2) \\ = \left(\int_u^t dx_v(1) \right) \left(\int_s^u dx_v(2) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

(cf. Fig. 2.1)

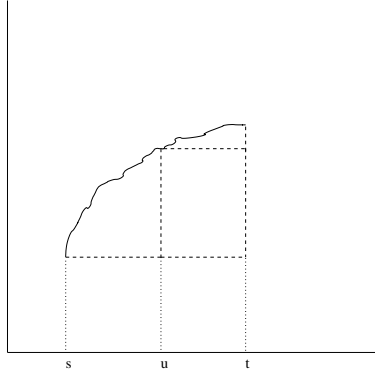


Figure 2.1: Le défaut d'additivité de l'aire correspond au rectangle sur la figure.

et que (par le théorème de Fubini)

$$\int_s^t dx_v(1) \int_s^v dx_v(2) + \int_s^t dx_v(2) \int_s^v dx_v(1) = \left(\int_s^t dx_v(1) \right) \left(\int_s^v dx_v(2) \right). \quad (2.8)$$

Ce défaut d'additivité de l'aire disparaît si l'on considère $\mathbf{x} = (x(1), x(2), \mathbf{x}^2(1, 2))$ comme les coordonnées usuelles dans le groupe de Heisenberg $G^{(2)}$ muni du produit $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$. On a alors: $\mathbf{x}_{ts} = \mathbf{x}_{us} \cdot \mathbf{x}_{tu}$ et en particulier, $\mathbf{x}_{ts} = \mathbf{x}_{s0}^{-1} \cdot \mathbf{x}_{t0}$, de sorte que \mathbf{x}_{ts} apparaît comme incrément (multiplicatif) du chemin $t \mapsto \mathbf{x}_{t0}$. Dans le cas général, $t \mapsto \mathbf{x}_{t0}$ s'interprète de la même manière comme chemin à valeurs dans un groupe nilpotent $G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ de rang N qui est le *groupe de Carnot*

de rang N . Si l'on note $T\mathbb{R}^d = \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathbb{R}^d$ l'algèbre tensorielle sur \mathbb{R}^d vue comme algèbre de Lie, et $T^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ son quotient par l'idéal $\bigoplus_{n > N} T^n \mathbb{R}^d$, alors l'algèbre de Lie de $G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ peut être vue comme la sous-algèbre de Lie de $T^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par $T^1 \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$. Le groupe $G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ est naturellement muni d'une métrique sous-Riemannienne obtenue en considérant la longueur du chemin x sous-jacent; c'est un espace géodésique. Un chemin \mathbf{x} est α -Hölder pour la distance géodésique associée (dite de Carnot-Carathéodory) si et seulement si \mathbf{x}^n est un 1-incrément $n\alpha$ -Hölder pour tout $n \leq N$. Des arguments généraux sur les espaces métriques permettent alors de montrer que tout chemin α -Hölder à valeurs dans $G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ peut être approché au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ par des chemins $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ à variation bornée (relèvements canoniques des chemins sous-jacents $x_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, eux-mêmes à variation bornée), formant une suite bornée pour la norme α -Hölder. Soit $\alpha' < \alpha$. Le théorème d'Ascoli permet d'en déduire l'existence d'une sous-suite convergente pour la norme α' -Hölder. Autrement dit, tout chemin rugueux α -Hölder est limite en norme α' -Hölder de chemins réguliers. Notons que cet argument d'analyse fonctionnelle, assez abstrait, présente le défaut de ne pas donner une représentation explicite de la suite d'approximations (x_j) . La régularité perdue en passant de α à α' (aussi proche de α que l'on souhaite mais différent de α) est inévitable dans le cas général, et conduit à définir l'espace des *chemins rugueux géométriques* comme la complétion – pour la norme α -Hölder associée à la distance de Carnot-Carathéodory – des chemins réguliers.

Un théorème général due à T. Lyons et N. Victoir [113] montre que tout chemin α -Hölder x se relève en un chemin rugueux α -Hölder (ou α' -Hölder si $1/\alpha \in \mathbb{N}$), noté \mathbf{x} . La démonstration consiste à voir x comme une section du fibré principal quotient trivial $\mathbb{R} \times (\exp(\bigoplus_{n \geq 1} T^n(\mathbb{R}^d)) / \exp(\bigoplus_{n \geq 2} T^n(\mathbb{R}^d))) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et à trouver un relèvement de x en une section \mathbf{x} du fibré principal trivial $\mathbb{R} \times G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ possédant la bonne régularité Hölder. De telles sections existent (il en existe une infinité non dénombrable), mais la construction, loin d'être canonique, utilise l'axiome du choix. Néanmoins, dans un certain nombre de cas (notamment le brownien fractionnaire d'indice de Hurst $> 1/4$, cf. infra, ou encore des chemins aléatoires sur des fractals [78, 104]) on arrive à construire des approximations naturelles de x par une suite $(x^n)_{n \geq 1}$ de chemins réguliers dont les relèvements canoniques convergent au sens de la norme α -Hölder vers un objet qui est *ipso facto* un relèvement de x . Notons au passage qu'une suite de chemins rugueux $\mathbf{x}_j : \mathbb{R} \rightarrow G^{(N)}(\mathbb{R}^d)$ converge au sens de la norme α -Hölder si et seulement si les 1-incréments $\mathbf{x}_j^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ convergent au sens de la norme $\|\cdot\|_{C_2^{n\alpha}}$ pour tout $n \leq N$, ce qui fournit un moyen effectif pour démontrer la convergence.

Admettant l'existence d'un tel relèvement \mathbf{x} , on dispose de deux théories voisines pour définir les intégrales: la théorie de T. Lyons, développée également par Friz, Victoir, Lejay [112, 114, 98, 110, 111], et la théorie, plus récente, de M. Gubinelli [100, 101], développée aussi par S. Tindel et coauteurs [102, 93, 122], dite *théorie algébrique des chemins rugueux*. Dans les deux cas, il s'agit de "boîtes noires", réouvertes pour étendre la théorie à des cadres plus généraux que les équations différentielles (équations avec retard, équations de Volterra, équations aux dérivées partielles...) mais que nous nous contenterons essentiellement d'utiliser. Décrivons succinctement les arguments de Gubinelli pour $\alpha > 1/3$.

Le point de départ [100] est le complexe différentiel exact (dégénérescence de la cohomologie de Čech)

$$0 \rightarrow C_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \xrightarrow{\delta_1} C_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{j-1}} C_j(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \xrightarrow{\delta_j} \dots \quad (2.9)$$

où $C_j(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^d$, et $(\delta_n f)_{t_1, \dots, t_{n+1}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f_{t_1, \dots, \hat{t}_j, \dots, t_{n+1}}$. En particulier, tout cobord $h \in Z_3 := \text{Ker} \delta_3$ s'écrit simplement $h = \delta g$ où $g_{ts} := -h_{0ts}$; si $f \in C_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, alors $\delta f \in Z_2$ et donc (puisque $\delta \circ \delta = 0$) on a aussi $h = \delta(g + \delta f)$. En revanche, il y a *unicité* si l'on cherche un 1-incrément g dans $Z_2^{1+} = Z_2 \cap C_2^{1+}$, où C_2^{1+} est l'espace des 1-incréments de régularité Hölder > 1 ; en effet, si $\delta g_1 = \delta g_2$, alors $g_1 - g_2$ est l'incrément d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est 1^+ -Hölder et donc constante. On peut équiper $C_3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ de normes Hölder $\|\cdot\|_{C_3^\gamma}$ de sorte que $h_{tus} := g_{tu}^1 g_{us}^2$ soit $\alpha + \beta$ -Hölder si g^1 , resp. g^2 est α -, resp. β -Hölder. Un lemme joliment appelé *lemme de la couturière* assure l'existence d'un tel g dès que $h \in C_3^{1+}$; on note alors $g = \Lambda h$ et $\Lambda : C_3^{1+} \rightarrow C_2^{1+}$ est appelée *sewing map* (nous suggérons en français: *application cicatrisante*).

L'intégrale de Young s'explique facilement à l'aide de l'opérateur Λ . Soient $x \in C_1^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et $y \in C_1^\alpha(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n))$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $\delta(y_s \cdot \delta x_{ts})_{tus} = \delta y_{tu} \delta x_{us} \in C_3^{1+}$. Posons $g := \Lambda(\delta y_{tu} \delta x_{us})$; on a $\delta g = \delta(y_s \cdot \delta x_{ts})$, mais $g \in C_2^{1+}$, contrairement à $y_s \cdot \delta x_{ts}$ qui n'est que α -Hölder. L'intégrale de Young $\int_s^t y_{sv} dx_v$ s'identifie alors à $y_s \cdot \delta x_{ts} - g_{ts} = (\text{Id} - \Lambda \delta)(y_s \cdot \delta x_{ts})$, qui est l'incrément d'une fonction d'une variable: en effet, g étant un 1-incrément 1^+ -Hölder, $\sum_{i=0}^{n-1} g_{s+\frac{i+1}{n}(t-s), s+\frac{i}{n}(t-s)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et l'on retrouve donc bien que $\int_s^t y_v dx_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} y_{s+\frac{i}{n}(t-s)} (x_{s+\frac{i+1}{n}(t-s)} - x_{s+\frac{i}{n}(t-s)})$ est limite de sommes de Riemann.

L'argument s'étend pour $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ dès qu'on a choisi un chemin rugueux $(\delta x, \mathbf{x}^2)$ au-dessus de x . La propriété multiplicative s'écrit dans ce nouveau langage : $\delta(\mathbf{x}^2)_{tus} = \delta x_{tu} \delta x_{us}$. La fonction y doit être un chemin *contrôlé par x* , i.e. ses incréments doivent s'écrire: $\delta y_{ts} = \Phi_s \delta x_{ts} + g_{ts}$ où $\Phi_s \in C_1^\alpha$ et $g_{ts} \in C_2^{2\alpha}$. En effet (supposant provisoirement x régulier), on a alors

$$\begin{aligned} \Lambda \delta(y_s \cdot \delta x_{ts}) &= \Lambda(\delta x_{tu} \delta y_{us}) = \Lambda(\Phi_s \delta x_{tu} \delta x_{us}) + \Lambda(g_{us} \delta x_{tu}) \\ &= \Lambda(\Phi_s \delta(\mathbf{x}^2)_{tus}) + \Lambda(g_{us} \delta x_{tu}) \\ &= \Lambda \delta(-\Phi_s \mathbf{x}_{ts}^2) + \Lambda((\delta \Phi)_{tu} \mathbf{x}_{us}^2) + \Lambda(g_{us} \delta x_{tu}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Abandonnant l'hypothèse de régularité, tous les termes sont bien définis, sauf le premier – car $\Phi_s \mathbf{x}_{ts}^2 \in C_2^{2\alpha}$ seulement –, ce qui conduit à poser

$$\int_s^t y_v dx_v = y_s \delta x_{ts} + \Phi_s \mathbf{x}_{ts}^2 - \Lambda((\delta \Phi)_{tu} \mathbf{x}_{us}^2 + g_{us} \delta x_{tu}) \quad (2.11)$$

ou de manière équivalente

$$\int_s^t y_v dx_v = \sum_{i=0}^{n-1} y_{s+\frac{i}{n}(t-s)} (x_{s+\frac{i+1}{n}(t-s)} - x_{s+\frac{i}{n}(t-s)}) + \Phi_{s+\frac{i}{n}(t-s)} \mathbf{x}_{s+\frac{i+1}{n}(t-s), s+\frac{i}{n}(t-s)}^2. \quad (2.12)$$

Nous reviendrons sur cette construction lorsque nous définirons la régularisation par ordre normal de Fourier dans la section 2.4.

2.2 Description des principaux résultats

Rappelons que le *brownien fractionnaire d'indice de Hurst* $\alpha \in]0, 1[$ est le processus gaussien centré $(B_t^\alpha)_{t \in \mathbb{R}}$ de covariance

$$\mathbb{E} B_s^\alpha B_t^\alpha = \frac{1}{2}(|s|^{2\alpha} + |t|^{2\alpha} - |t - s|^{2\alpha}). \quad (2.13)$$

Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve le brownien ordinaire. L'intérêt de cette famille de processus indexée par α réside dans le fait que ce sont en quelque sorte les processus auto-similaires les plus simples; en d'autres termes, il y a égalité en loi entre $(B_{\lambda t}^\alpha, t \in \mathbb{R})$ et $(\lambda^\alpha B_t^\alpha, t \in \mathbb{R})$ si $\lambda > 0$. Ces processus sont de plus à accroissements stationnaires, c'est-à-dire que $(B_t - B_s, s, t \in \mathbb{R}) \stackrel{\text{loi}}{=} (B_{t+a} - B_{s+a}, s, t \in \mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En fait ces deux propriétés les caractérisent parmi tous les processus gaussiens centrés. Une application élémentaire du lemme de Kolmogorov-Centsov permet de montrer que, pour tout $\kappa < \alpha$, il existe une version de B^α dont les trajectoires sont p.s. κ -Hölder; on dira simplement que B^α est α^- -Hölder.

Dans la suite, on fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on considère un brownien fractionnaire multidimensionnel $B = (B(1), \dots, B(d))$ ($d \geq 2$) d'indice α , de composantes indépendantes et identiquement distribuées.

Le programme principal (réalisé en dernier) était de construire un calcul stochastique pour le brownien fractionnaire à l'aide de la théorie des chemins rugueux. Sans entrer dans les détails (cf. infra) rappelons que les résultats classiques dûs à L. Coutin et Z. Qian [90] permettent de définir un calcul stochastique par la méthode des chemins rugueux pour B lorsque $\alpha > 1/4$ et ne se prolongent pas au-delà de la barrière $\alpha = 1/4$. La même barrière apparaît lorsqu'on utilise l'intégrale symétrique à la Russo-Vallois ou l'intégrale de Skorokhod [76, 77, 83, 117]. Dans le cas unidimensionnel uniquement, cette dernière s'étend à un indice α quelconque [86], tandis que l'intégrale symétrique, définie seulement pour $\alpha > 1/6$, admet des généralisations qui s'étendent à un indice α arbitraire [99].

Le premier travail a consisté à définir des approximations de B plus commodés à utiliser lorsque $\alpha < 1/2$ que l'interpolation linéaire par morceaux, et permettant dans une certaine mesure des calculs exacts. L'approximation analytique de B construite en [14] consiste à voir $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ comme limite quand $\eta \rightarrow 0^+$ (au sens des chemins rugueux, au sens L^2 ou encore pour la convergence uniforme sur tout compact en probabilité) de la partie réelle d'un processus à valeurs complexes $(\Gamma_z)_{z=t+i\eta, \eta>0}$, défini et analytique sur le demi-plan supérieur $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. La covariance infinitésimale de Γ s'écrit: $\mathbb{E}[\Gamma'_z \Gamma'_w] = 0$, $\mathbb{E}[\Gamma'_z \overline{\Gamma'_w}] = c_\alpha(-i(z - \bar{w}))^{2\alpha-2}$. Si $z = s + i\frac{\eta}{2}$, $w = t + i\frac{\eta}{2}$, on obtient $c_\alpha(-i(t - s) + \eta)^{2\alpha-2}$, dont la partie réelle est une régularisation du noyau infinitésimal $\alpha(2\alpha - 1)|t - s|^{2\alpha-2}$ du brownien fractionnaire, mal défini (car non L^1_{loc}) dès que $\alpha \leq 1/2$. En intégrant le processus Γ' le long d'un chemin quelconque $\gamma :]0, 1[\rightarrow \Pi^+$ tel que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = z$, on obtient un processus analytique Γ . En considérant le processus conjugué $\bar{\Gamma}$ comme vivant sur le demi-plan inférieur $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z < 0\}$, on peut également voir B comme valeur au bord du processus $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dans la suite on considérera un processus multidimensionnel $\Gamma = (\Gamma(1), \dots, \Gamma(d))$, de composantes indépendantes et identiquement distribuées. La variance de l'aire de Lévy (intégrale itérée

d'ordre 2) du processus $(B_t^\eta)_{t \in \mathbb{R}} = (\operatorname{Re} \Gamma^{t+i\eta})_{t \in \mathbb{R}}$ se calcule explicitement à l'aide de fonctions hypergéométriques, et on vérifie la convergence au sens des chemins rugueux de l'aire lorsque $\eta \rightarrow 0^+$ si $\alpha > 1/4$, ainsi que sa divergence dès que $\alpha \leq 1/4$, ce qui permet de retrouver par une nouvelle méthode des résultats déjà connus.

Ces calculs de moments ont permis de comprendre les raisons des divergences en-dessous de la barrière $\alpha = 1/4$. Posons

$$K_\eta'^{\pm}(t, s) = (\pm i(t - s) + \eta)^{2\alpha-2}. \quad (2.14)$$

En faisant des déformations de contour, on montre que les itérées des noyaux $K_\eta'^{\pm}$ produisent des fonctions analytiques, ainsi que des fonctions puissance singulières et multiformes du même type que $K_\eta'^{\pm}$, ce qui donne de manière tout à fait générale un développement en puissances fractionnaires de η au voisinage de $\eta = 0^+$ des moments de toute distribution finie de B ou de ses intégrales itérées. La variance de l'aire de Lévy contient par exemple un terme en $O(\eta^{4\alpha-1})$, qui diverge quand $\alpha < 1/4$. Une analyse plus systématique [18] a permis de comprendre comment calculer les plus bas exposants en η , ainsi que de démontrer un théorème central limite pour l'aire de Lévy renormalisée par l'inverse de son écart-type; on obtient à la limite un brownien usuel, indépendant du brownien fractionnaire de départ. On a ainsi identifié de manière précise la divergence de l'aire de Lévy. Les mêmes outils permettent [22] d'établir un théorème central limite pour l'erreur du schéma d'Euler associé à l'aire de Lévy lorsque $\alpha > 1/4$. Il est clair que ces outils puissants doivent permettre d'obtenir de manière systématique des résultats asymptotiques précis pour des quantités appartenant, disons, à un chaos d'ordre fini, apparaissant par exemple dans la résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques.

A contrario, les intégrales itérées du processus Γ (appelé: *brownien fractionnaire analytique*) ne font pas intervenir de fonctions multiformes, et des déformations de contour permettent de montrer facilement leur convergence lorsque $\eta \rightarrow 0$. En adaptant la théorie algébrique des chemins rugueux à un cadre analytique, on obtient alors [16] un chemin rugueux au-dessus de Γ , ainsi qu'une résolution locale dans le demi-plan supérieur fermé $\bar{\Pi}^+ = \Pi^+ \cup \mathbb{R}$ d'équations différentielles stochastiques à coefficients analytiques dirigées par Γ . Des bornes faciles à obtenir sur la variance des intégrales itérées de Γ permettent [25] de contrôler les moments de tous ordres des équations différentielles stochastiques *linéaires* dirigées par Γ ; ce résultat, obtenu par un développement en série à la Chen, ne découle pas des estimées générales obtenues par Friz et Victoir [98], qui divergent dès que $\alpha \leq 1/3$.

Les travaux les plus récents se rapportent à la construction d'un chemin rugueux au-dessus d'un chemin multidimensionnel α -Hölder avec $\alpha \in]0, 1[$ quelconque. La méthode proposée, plus constructive que celle de T. Lyons et N. Victoir [113] qui repose sur des relèvements arbitraires de sections à valeurs dans des quotients du groupe de Carnot (et utilise notamment pour cela l'axiome du choix), est tout à fait adaptée par exemple au développement d'un calcul stochastique dans le cas où le chemin est un processus aléatoire.

La construction repose sur un algorithme combinatoire appelé *mise en ordre normal de Fourier* que l'on trouve expliqué en détail dans [23], ainsi que

dans [26], dans une perspective plus algébrique. Une simplification mineure de cet algorithme, adaptée au cas spécifique du brownien fractionnaire, conduit à la construction d'un chemin rugueux au-dessus de B dans [21]. Présentons-le très brièvement dans ce cas particulier.

L'idée est de décomposer chaque composante $B(i_j)$ en intégrales de Fourier, et de voir $\mathbf{B}_{ts}^n(i_1, \dots, i_n)$ comme $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathcal{P}^\sigma \mathbf{B}_{ts}^n(i_1, \dots, i_n)$, où Σ_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$, et \mathcal{P}^σ est le multiplicateur de Fourier

$$\mathcal{P}^\sigma : f = f(x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathcal{F}^{-1} \left((\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \mathbf{1}_{|\xi_{\sigma(1)}| \leq \dots \leq |\xi_{\sigma(n)}|} (\mathcal{F}f)(\xi_1, \dots, \xi_n) \right) (x_1, \dots, x_n). \quad (2.15)$$

Le terme $\mathcal{P}^{\text{Id}_n} \mathbf{B}^n$ se présente en *ordre normal de Fourier* (le terme *ordre normal* est emprunté à la théorie conforme des champs [37] et se rapporte d'habitude à des produits de Wick opératoriels). Les autres doivent avant toute régularisation être replacés en ordre normal de Fourier à l'aide du théorème de Fubini; le domaine d'intégration se représente alors par des *arbres enracinés*. Le codage des intégrales itérées par des arbres est classique [82, 101]. La combinatoire d'arbres a reçu un intérêt certain depuis la fin des années 1990 en raison des travaux de A. Connes et D. Kreimer et d'autres auteurs [87, 88, 89, 80, 81, 97] sur les structures d'algèbres de Hopf sous-jacentes, en lien avec l'algorithme de Bogolioubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann (BPHZ) [106] pour la renormalisation des diagrammes de Feynman en théorie quantique des champs. La même combinatoire est à l'oeuvre ici, et la terminologie (ainsi qu'une partie des notations) est essentiellement la même: coupures admissibles, opérateur de régularisation (ou renormalisation) \mathcal{R} , contre-termes... On montre en particulier que les chemins rugueux *formels* (i.e. satisfaisant les contraintes algébriques de Chen et shuffle mais pas nécessairement les propriétés de régularité Hölder) s'obtiennent en toute généralité à partir d'une famille indexée par des mesures de caractères $\phi_\nu^t(\cdot)$ d'une algèbre de Hopf d'arbres, s'interprétant comme *intégrales itérées* (ou plus précisément *intégrales squelettes*) *régularisées*, et appelées *données d'arbres* ("tree data"). Les contraintes algébriques sont alors automatiquement vérifiées, et il reste précisément à choisir une *régularisation* conduisant aux bonnes propriétés de régularité Hölder.

La régularisation (ou renormalisation) consiste, comme en théorie quantique des champs, à ôter des termes divergents, de manière – dans notre cas – à préserver les propriétés multiplicative et géométrique. Par exemple, la régularisation $\mathcal{R}\Gamma_{ts}^2(1, 2)$ de l'aire de Lévy d'un chemin Γ s'obtient en retirant un terme d'incrément, $[\delta(\mathbf{X}^2(1, 2))]_{ts} = \mathbf{X}^2(1, 2)_t - \mathbf{X}^2(1, 2)_s$, préservant ainsi la propriété de Chen puisque $\delta \circ \delta = 0$.

A défaut d'autres contraintes à définir, le choix d'une régularisation est toutefois beaucoup plus arbitraire qu'en théorie des champs, et nous présentons ici une famille assez simple de tels choix, que nous appelons *régularisation de domaine*, consistant à couper le domaine d'intégration de Fourier dans certaines directions. Dans le cas particulier du brownien fractionnaire, les intégrales itérées régularisées d'ordre n , $\mathcal{R}\mathbf{B}_{ts}^n(i_1, \dots, i_n)$, restent dans le chaos gaussien d'ordre n . Notons qu'une construction légèrement différente, donnant des formules plus simples – qui évitent notamment le re-

cours aux intégrales arborescentes –, inspirée par nos travaux mais entièrement redémontrée sans tout l’attirail algébrique, a été donnée récemment par D. Nualart et S. Tindel [120]; nous verrons plus loin qu’elle correspond – dans notre schéma général – à choisir des données d’arbres toutes nulles.

Au lieu de ces coupures commodées mais passablement arbitraires, on peut retirer des contre-terme de manière cohérente en suivant l’algorithme de renormalisation de BPHZ appliqué aux intégrales squelettes réécrites en termes de diagrammes de Feynman (cf. preprint [28], présenté brièvement en §2.4.4). Toutes ces constructions reposent sur une *analyse multi-échelles* en Fourier. Si l’on se restreint à la régularisation de domaine étudiée dans ce mémoire, celle-ci devient particulièrement apparente dans le cas de la construction pour un chemin quelconque, où la régularité Hölder se montre en utilisant l’équivalence des normes Hölder avec les normes d’espaces de Besov $B_{\infty,\infty}^{n\alpha}$.

Le principal enjeu actuellement consiste à dépasser ce point de vue algébrique en revenant à la question de départ: comment construire *explicitement* une famille d’approximations régulières Γ_ε d’un chemin α -Hölder Γ donné, dont les intégrales itérées naturelles convergent quand $\varepsilon \rightarrow 0$? La question revient en quelque sorte à essayer de court-circuiter la théorie des chemins rugueux. Un projet de longue haleine consiste à redéfinir le brownien fractionnaire comme un *champ gaussien en interaction* – au sens de la théorie des champs –. L’interaction, invisible sur le chaos d’ordre 1, doit régulariser les intégrales itérées dans les chaos d’ordre supérieur. Nous présentons brièvement ce projet (cf. preprint [27]) en §2.4.5. L’interaction quartique introduite dans cet article permet pour l’instant de définir une aire de Lévy pour $1/8 < \alpha < 1/4$, et plus généralement de construire un chemin rugueux pour $1/6 < \alpha < 1/4$.

2.3 Outils analytiques pour le brownien fractionnaire

Nous présentons dans cette section les travaux contenus dans les articles [14, 16, 18, 22, 25].

2.3.1 Définition du brownien fractionnaire analytique et approximation analytique du brownien fractionnaire

Soit $B = (B(1), \dots, B(d))$ un brownien fractionnaire d’indice de Hurst $\alpha \in]0, 1[$ à d composantes indépendantes et identiquement distribuées.

Supposons provisoirement que $\alpha > \frac{1}{2}$. On peut alors considérer la *dérivée* de B comme un processus à valeurs distributions, dont la covariance

$$\mathbb{E}[B'_s B'_t] = \partial_s \partial_t \mathbb{E}[B_s B_t] = \frac{|t - s|^{2\alpha-2}}{\alpha(2\alpha - 1)} \quad (2.16)$$

est un noyau de convolution L^1 correctement défini. Lorsque $\alpha < \frac{1}{2}$ – comme nous allons voir – on peut remplacer ce noyau par la valeur au bord d’un noyau de type hyperfonction.

Les noyaux singuliers de type puissance possèdent de bonnes propriétés de composition qui, à défaut de formules exactes (tous les moments s'expriment théoriquement à l'aide de fonctions hypergéométriques en plusieurs variables, mais les expressions deviennent rapidement trop compliquées pour être utilisables) permettent en fin de compte une compréhension semi-quantitative satisfaisante des singularités locales des intégrales itérées. On évite de cette manière le recours à des interpolations linéaires par morceaux qui camouflent la nature des singularités.

On notera par la suite $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ le demi-plan supérieur, et $\bar{\Pi}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$ son adhérence dans \mathbb{C} .

Définition 2.1 Soit $K'^{-} : \Pi^+ \times \Pi^- \rightarrow \mathbb{C}$ le noyau défini par

$$K'^{-}(z, \bar{w}) := \frac{\alpha(1-2\alpha)}{2 \cos \pi \alpha} (-i(z - \bar{w}))^{2\alpha-2}, \quad (2.17)$$

et $K'^{+} : \Pi^- \times \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$ son conjugué complexe.

Les fonctions puissance sont définies sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ en faisant appel à la détermination usuelle du logarithme complexe; on vérifie que l'argument des fonctions puissance dans les noyaux K'^{\pm} est de partie réelle positive.

Fixons $\eta > 0$ et considérons $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x + i\frac{\eta}{2}, w = y + i\frac{\eta}{2}$: alors le noyau

$$K'_\eta{}^{-}(x, y) := K'^{-}(z, \bar{w}) = \frac{\alpha(1-2\alpha)}{2 \cos \pi \alpha} (-i(x - y) + \eta)^{2\alpha-2} \quad (2.18)$$

tend quand $\eta \rightarrow 0^+$ (à une constante près) vers la distribution $-e^{-i\pi\alpha}(x - y)_+^{2\alpha-2} - e^{i\pi\alpha}(x - y)_-^{2\alpha-2}$ [45] où par définition (fixant y)

$$\langle (x - y)_+^{2\alpha-2}, \phi \rangle = -\langle \frac{(x - y)^{2\alpha-1}}{2\alpha - 1} \mathbf{1}_{x > y}, \phi' \rangle = \frac{1}{1 - 2\alpha} \int_y^\infty \phi'(x) (x - y)^{2\alpha-1} dx \quad (2.19)$$

si $\alpha < \frac{1}{2}$, et similairement pour $(x - y)_-^{2\alpha-2}$.

Bien qu'on ne puisse définir en général le produit de deux distributions, l'existence même d'un calcul stochastique pour B (en tout cas pour $1/4 < \alpha < 1/2$) montre qu'on peut comprendre une intégrale $\int Y_s dB_s$ comme $\int Y_s B'_s ds$ (en un sens limite à définir).

Les noyaux $K'_\eta{}^{\pm}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont de type positif puisque leur transformée de Fourier est positive: en effet [95],

$$\mathcal{F}(x \mapsto (\mp i(x - y) + \eta)^{2\alpha-2})(\xi) = C_\alpha e^{-\eta|\xi|} \mathbf{1}_{\xi \gtrless 0} \cdot |\xi|^{1-2\alpha}. \quad (2.20)$$

Une autre façon de démontrer la positivité de $K'_\eta{}^{\pm}$ est de remarquer que

$$\sum_{k=0}^\infty f_k(z) \overline{f_k(w)} = \frac{\alpha(1-2\alpha)}{2 \cos(\pi\alpha)} (-i(z - \bar{w}))^{2\alpha-2} \quad (2.21)$$

où $(f_k)_{k \geq 0}$ sont les fonctions analytiques définies sur Π^+ par

$$f_k(z) = a_k \left[\frac{z + i}{2i} \right]^{2\alpha-2} \left[\frac{z - i}{z + i} \right]^k, \quad (2.22)$$

avec

$$a_k = 2^{\alpha-1} \left[\frac{\alpha(1-2\alpha)}{2\cos(\pi\alpha)} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{(2-2\alpha)(2-2\alpha+1)\dots(2-2\alpha+(k-1))}{k!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Cette décomposition en série du noyau K'^{-} suggère de considérer pour lui-même le processus $\Gamma'_z := \sum_{k \geq 0} f_k(z) \xi_k$ – où les $(\xi_k)_{k \geq 0}$ sont des gaussiennes complexes centrées réduites indépendantes –, de covariance K'^{-} . La transformation de Cayley $\Phi : \Pi^+ \xrightarrow{\sim} D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, définie par $z \mapsto \zeta := \frac{z-i}{z+i}$ (qui est un biholomorphisme) envoie essentiellement Γ'_z sur une série entière aléatoire, dont il est facile de voir (grâce au lemme de Borel-Cantelli) qu'elle est de rayon de convergence égal à 1 p.s. Le processus Γ' est donc défini et analytique sur Π^+ , d'où son nom: *brownien fractionnaire analytique* [16]. On a la proposition suivante:

Proposition 2.2 1. Si $z \in \Pi^+$ et $\gamma :]0, 1[\rightarrow \Pi^+$ est un chemin continu quelconque tel que $\gamma(0) = 0$ and $\gamma(1) = z$, on pose $\Gamma_z := \int_\gamma \Gamma'_u du$. Alors Γ est un processus analytique sur Π^+ . De plus, si z tend vers $t \in \mathbb{R}$ en restant dans Π^+ , la variable aléatoire Γ_z converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée Γ_t .

2. La famille $\{\Gamma_t; t \in \mathbb{R}\}$ définit un processus gaussien centré à valeurs complexes, dont la fonction de covariance est donnée par: $\mathbb{E}[\Gamma_s \Gamma_t] = 0$ et

$$\mathbb{E}[\Gamma_s \bar{\Gamma}_t] = \frac{e^{-i\pi\alpha \operatorname{sgn}(s)} |s|^{2\alpha} + e^{i\pi\alpha \operatorname{sgn}(t)} |t|^{2\alpha} - e^{i\pi\alpha \operatorname{sgn}(t-s)} |s-t|^{2\alpha}}{4\cos(\pi\alpha)}. \quad (2.24)$$

Les chemins de ce processus sont p.s. κ -Hölder pour tout $\kappa < \alpha$.

3. La partie réelle de $\{\Gamma_t; t \in \mathbb{R}\}$ est un brownien fractionnaire indexé par \mathbb{R} .

Si l'on voit le processus complexe conjugué $\bar{\Gamma}$ comme vivant sur $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ au lieu de Π^+ , autrement dit, si l'on pose $\Gamma_{t-i\eta} := \bar{\Gamma}_{t+i\eta}$, alors B apparaît comme valeur au bord de l'hyperfonction $(\Gamma, -\bar{\Gamma}) \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, autrement dit, $B_t := \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \Gamma(t+i\eta) + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \Gamma(t-i\eta)$ au sens des distributions.

Intéressons-nous un instant à la convergence de $(\Gamma_{t+i\eta})_{t \in \mathbb{R}}$ vers $(\Gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$:

Lemme 2.3 Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $z, z' \in \bar{\Pi}^+ = \Pi^+ \cup \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}|\Gamma(z) - \Gamma(z')|^2 \leq C|z - z'|^{2\alpha}. \quad (2.25)$$

Cette majoration implique – grâce au lemme de Kolmogorov-Centsov et à l'hypercontractivité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck – qu'il existe pour tout $\kappa < \alpha$ une version de Γ qui est uniformément κ -Hölder sur tout voisinage de l'origine dans $\bar{\Pi}^+$ (on dira pour simplifier que Γ est α^- -Hölder). Cette idée que des estimées de variance impliquent l'höldérianité de processus dans un chaos gaussien fini reservira souvent par la suite.

Comme Γ est analytique sur Π^+ , cette assertion n'a d'intérêt qu'au voisinage de l'axe réel. Inversement, notons qu'une fonction continue $f : \bar{\Pi}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f|_{\Pi^+}$ est analytique et $f|_{\mathbb{R}}$ est κ -Hölder n'est pas nécessairement uniformément κ -Hölder au voisinage de l'axe réel (nous reviendrons là-dessus en §2.3.3).

Considérons maintenant le processus analytique réel $(B_t^\eta; t \in \mathbb{R}) = (\Gamma_{t+i\frac{\eta}{2}}, t \in \mathbb{R})$, appelé *approximation analytique du brownien fractionnaire*. Le lemme précédent implique pour tout $T > 0$ et $\kappa < \alpha$ la convergence de $(B_t^\eta)_{t \in [0, T]}$ vers $(B_t)_{t \in [0, T]}$ dans $L^2(\Omega; C_1^\kappa([0, T]))$, où C_1^κ est l'espace de Banach des fonctions κ -Hölder $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_{C_1^\kappa([0, T])} = \sup_{[0, T]} |f| + \sup_{s, t \in [0, T]} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\kappa}. \quad (2.26)$$

Remarquons par ailleurs qu'on a convergence optimale (au sens de Kühn et Linde [109]) de la série $2\operatorname{Re} \sum_{k \geq 0} f_k(z) \xi_k$ définissant le brownien fractionnaire $B_t = 2\operatorname{Re} \Gamma_t$, en ce sens que

$$N^{-\varepsilon + \alpha} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in K} |B_t - 2\operatorname{Re} \sum_{k \leq N} f_k(t) \xi_k| \right] \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.27)$$

pour tout compact $K \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$.

Voyons maintenant les propriétés limite des noyaux régularisés $K_\eta'^{\pm}$ et de leurs compositions quand $\eta \rightarrow 0^+$.

2.3.2 Etude des noyaux de convolution

Considérons l'opérateur de convolution

$$K_{[a, b]}'^{\pm}(\eta) : f \mapsto (K_{[a, b]}'^{\pm}(\eta)f)(x) = \int_a^b K_\eta'^{\pm}(x - u)f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Le noyau $K_\eta'^{\pm}$ est régulier mais des singularités apparaissent quand $\eta \rightarrow 0^+$. On s'intéressera aussi à l'opérateur de convolution $K_{[a, b]}^{*, \pm}(\eta)$ défini de la même manière à partir du noyau intégré

$$K_\eta^{*, \pm}(x, y) = -\frac{1}{4 \cos \pi \alpha} (\pm i(x - y) + \eta)^{2\alpha}. \quad (2.29)$$

On a le lemme suivant:

Lemme 2.4 *Soit $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $t \mapsto t^\beta f(t)$ ($\beta > -1$) soit L_{loc}^1 , et ϕ la fonction*

$$\phi : z \mapsto \int_0^t (-i(z - u))^{2\alpha - 2} u^\beta f(u) du, \quad (2.30)$$

définie a priori sur Π^+ .

1. Si f est analytique sur un voisinage complexe U de $s \in]0, t[$, alors ϕ s'étend analytiquement à un voisinage complexe $U' \subset U$ de s ; de plus, $\sup_{U'} |\phi| \leq C \sup_{U \cup [0, t]} |f|$.

2. Si f est analytique dans un voisinage complexe V de 0, alors ϕ s'écrit dans un voisinage $V' \subset V$ de 0

$$\phi(z) = z^{\beta+2\alpha-1}F(z) + G(z), \quad (2.31)$$

où F et G sont analytiques; de plus,

$$\max(\sup_{V'} |F|, \sup_{V'} |G|) \leq C \sup_{V \cup [0,t]} |f|. \quad (2.32)$$

Les itérées de ces opérateurs de convolution apparaissent naturellement lorsqu'on considère des intégrales itérées du brownien fractionnaire. Par exemple, on s'attend a priori (par un argument d'homogénéité naïf) à ce que la fonction $h^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} : (y, u) \mapsto K'_{[0,t], \varepsilon_1}(\eta) (x \mapsto K_{\eta}^{*, \varepsilon_2}(x, y)) (u)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ ait un comportement singulier sur la diagonale $y = u$ similaire au noyau puissance $(\pm i(y - u))^{4\alpha-1}$, mais en fait tout dépend du signe relatif de ε_1 et ε_2 :

Lemme 2.5 (cf. [18], Lemme 1.10)

1. Soit, pour $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ avec $\beta_2 > -1$,

$$I_-(\beta_1, \beta_2; 0, t)(a, b) := \int_0^t (-i(u - a))^{\beta_1} (-i(u - b))^{\beta_2} du, \quad (2.33)$$

définie a priori, pour tout nombre complexe fixé b avec $\text{Im } b \leq 0$, comme une fonction analytique de a sur Π^- . Nous nous restreignons à $0 < \text{Re } a < t$ et $0 < \text{Re } b < t$, $\text{Im } b \leq 0$. Soit $\Omega_t^- := \{a \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re } a < t, \text{Im } a < \text{Im } b\}$. Sur ce domaine, on a

$$I_-(\beta_1, \beta_2; 0, t)(a, b) = \frac{i}{\beta_1 + \beta_2 + 1} [\Phi(\beta_1, \beta_2; t)(a, b) - \Phi(\beta_1, \beta_2; 0)(a, b)] \quad (2.34)$$

avec, pour $s \in [0, t]$,

$$\Phi(\beta_1, \beta_2; s)(a, b) = (-i(s - b))^{\beta_1 + \beta_2 + 1} {}_2F_1(-\beta_1, -\beta_1 - \beta_2 - 1; -\beta_1 - \beta_2; \frac{a - b}{s - b}). \quad (2.35)$$

La fonction $a \mapsto \Phi(\beta_1, \beta_2; 0)(a, b)$, resp. $a \mapsto \Phi(\beta_1, \beta_2; t)(a, b)$ donnée par l'expression ci-dessus se prolonge analytiquement au domaine $\{0 < c < |a/b| < C\} \cap \{0 < \text{Re } a < t\}$, resp. $\{0 < c < |\frac{t-b}{t-a}| < C\} \cap \{0 < \text{Re } a < t\}$, où $c < 1$, $C > 1$ sont des constantes arbitraires. Les deux fonctions s'étendent analytiquement à tout le domaine $\{0 < \text{Re } a < t\}$.

2. Soit, sous les mêmes hypothèses,

$$I_+(\beta_1, \beta_2; 0, t)(a, b) := \int_0^t (+i(u - a))^{\beta_1} (-i(u - b))^{\beta_2} du, \quad (2.36)$$

avec initialement $\text{Im } b \leq 0$, $a \in \Pi^+$. Alors:

$$\begin{aligned} I_+(\beta_1, \beta_2; 0, t)(a, b) = & \frac{i}{\beta_1 + \beta_2 + 1} \left[e^{i\pi\beta_1} \Phi(\beta_1, \beta_2; t)(a, b) - e^{-i\pi\beta_1} \Phi(\beta_1, \beta_2; 0)(a, b) \right] \\ & - \frac{\Gamma(\beta_2 + 1)\Gamma(-\beta_1 - \beta_2 - 1)}{\Gamma(-\beta_1)} \cdot 2 \sin \pi\beta_2 \cdot (i(b - a))^{\beta_1 + \beta_2 + 1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Les expressions de $\Phi(\beta_1, \beta_2; 0)$, resp. $\Phi(\beta_1, \beta_2; t)$ en-dehors des domaine précisés ci-dessus font intervenir les exposants singuliers (ou, en d'autres termes, la monodromie) de la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1$ en 1 et ∞ . Les formules du lemme s'étendent elles-mêmes analytiquement au domaine coupé $(\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup (t + \mathbb{R}_+)))^2$. Finalement, on a démontré que la fonction $I_-(\beta_1, \beta_2; 0, t)$, initialement définie sur $\Pi^- \times \Pi^-$, s'étend sur le plan entier moins deux demi-droites partant des extrémités 0 et t du domaine d'intégration; de plus, on a son comportement près des deux points singuliers (cf. [18], formule (1.36))

$$\Phi(\beta_1, \beta_2; 0)(a, b) \sim C_1(\max(a, b))^{\beta_1 + \beta_2 + 1} + C_2 a^{\beta_1 + 1} b^{\beta_2} 1_{a < b} + C_3 b^{\beta_2 + 1} a^{\beta_1} 1_{a > b} \quad (2.38)$$

si a ou b est proche de 0, et une formule similaire pour $\Phi(\beta_1, \beta_2; t)(a, b)$ lorsque a ou b est proche de t . Les mêmes résultats sont valables pour I_+ lorsqu'on ôte le terme supplémentaire en $(i(b - a))^{\beta_1 + \beta_2 + 1}$, qui, lui, est multiforme et potentiellement singulier lorsque $a \rightarrow b$; on trouve notamment $O(\eta^{4\alpha - 1})$ lorsque $a - b = i\eta$, $\beta_1 = 2\alpha - 2$, $\beta_2 = 2\alpha$ (cf. calculs ci-dessous relatifs à la variance de l'aire de Lévy).

Une conséquence immédiate de ce lemme est que la fonction $h^{\varepsilon, -\varepsilon}(y, z)$ est (contre toute attente) un noyau régulier, alors que $h^{\varepsilon, \varepsilon}$ comporte un terme avec une singularité locale d'exposant $4\alpha - 1$ mais (observation essentielle) qui reste dans la même famille de noyaux puissance. On voit là en germe la possibilité d'étudier de manière générale les exposants singuliers d'intégrales itérées de B^η ; autrement dit – on suppose $\alpha \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ pour éviter des singularités logarithmiques éventuelles –, si $P(\eta)$ est une expression polynomiale quelconque en les intégrales itérées de B^η , $\mathbb{E}P(\eta)$ s'écrit $\sum_{j=1}^J C_j \eta^{\alpha_j} (1 + O(\eta))$ pour des exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_J$ non congrus modulo \mathbb{Z} , qu'on sait déterminer. La régularité de $h^{\varepsilon, -\varepsilon}$ peut se démontrer simplement par déformation de contour, ainsi que le lemme plus général suivant:

Définition 2.6 (intégrales itérées analytiques) Soient $s, t > 0$ et f_1, \dots, f_n ($n \geq 1$) n fonctions analytiques définies sur un voisinage de la bande $U = \{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq s\}$. Une intégrale itérée analytique est une intégrale de la forme

$$\int_0^t dx_1 f_1(x_1 + i\eta_1) \Gamma'_{x_1 + i\eta_1}(i_1) \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n f_n(x_n + i\eta_n) \Gamma'_{x_n + i\eta_n}(i_n), \quad (2.39)$$

où $\eta_1, \dots, \eta_n > 0$ et $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d$.

Lemme 2.7 Soit $s, t > 0$ et f_1, \dots, f_n (resp. g_1, \dots, g_n) n fonctions analytiques (resp. anti-analytiques) définies sur un voisinage de U (resp. \bar{U}). Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\varepsilon, \eta) := \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t dx_1 f_1(x_1 + i\varepsilon_1) \Gamma'_{x_1 + i\varepsilon_1}(i_1) \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \right. \right. \\ \left. \int_0^{x_{n-1}} dx_n f_n(x_n + i\varepsilon_n) \Gamma'_{x_n + i\varepsilon_n}(i_n) \right) \left(\int_0^t dy_1 g_1(y_1 - i\eta_1) \overline{\Gamma}_{y_1 + i\eta_1}(j_1) \right. \\ \left. \left. \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n g_n(y_n - i\eta_n) \overline{\Gamma}_{y_n + i\eta_n}(j_n) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

admet une limite finie quand $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ tendent vers 0.

Voyons tout de suite une application élémentaire de ces résultats à l'étude des singularités de l'aire de Lévy de Γ ou de B . On notera

$\mathcal{A}_{ts}^\eta = \int_s^t dB_{x_1}^\eta(1) \int_s^{x_1} dB_{x_2}^\eta(2)$ l'aire de Lévy du processus $(B^\eta(1), B^\eta(2))$ (stricto sensu l'aire de Lévy est l'antisymétrisation de cette quantité).

Par définition

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathcal{A}_{ts}^\eta)^2] &= \\ 2\mathbb{E} \left(\int_s^t d\Gamma_{x_1+i\frac{\eta}{2}}(1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{x_2+i\frac{\eta}{2}}(2) \right) &\left(\int_s^t d\bar{\Gamma}_{y_1+i\frac{\eta}{2}}(1) \int_s^{y_1} d\bar{\Gamma}_{y_2+i\frac{\eta}{2}}(2) \right) \\ + 2\text{Re } \mathbb{E} \left(\int_s^t d\Gamma_{x_1+i\frac{\eta}{2}}(1) \int_s^{x_1} d\bar{\Gamma}_{x_2+i\frac{\eta}{2}}(2) \right) &\left(\int_s^t d\bar{\Gamma}_{y_1+i\frac{\eta}{2}}(1) \int_s^{y_1} d\Gamma_{y_2+i\frac{\eta}{2}}(2) \right) \\ &=: \mathcal{V}_1(\eta) + \mathcal{V}_2(\eta). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le premier terme dans le membre de droite s'écrit (en utilisant la stationnarité des accroissements)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1(\eta) &= C \int_0^{t-s} dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{t-s} dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \\ &\quad (-i(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha-2} (-i(x_2 - y_2) + \eta)^{2\alpha-2} \\ &= C' \int_0^{t-s} dx_1 \int_0^{t-s} dy_1 (-i(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha-2} \\ &\quad [(-i(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha} - (-ix_1 + \eta)^{2\alpha} - (iy_1 + \eta)^{2\alpha}] \end{aligned} \quad (2.42)$$

et le second

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(\eta) &= C' \int_0^{t-s} dx_1 \int_0^{t-s} dy_1 (-i(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha-2} \\ &\quad [(i(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha} - (ix_1 + \eta)^{2\alpha} - (-iy_1 + \eta)^{2\alpha}] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Le terme \mathcal{V}_1 ne fait intervenir que $-ix_1$ et $+iy_1$; en faisant une déformation de contour envoyant x_1 , resp. y_1 loin de l'axe réel dans le demi-plan supérieur, resp. inférieur, on transforme la singularité sur la diagonale $x_1 = y_1$ en une singularité ponctuelle en $x_1 = y_1 = 0$ qui est intégrable. De manière explicite, si x_1 se déplace le long du contour $[0, i(t-s)] \cup [i(t-s), (t-s) + i(t-s)] + [(t-s) + i(t-s), t-s]$ et y_1 sur le contour conjugué, les intégrales sur les parties horizontales sont régulières, alors que les intégrales les plus singulières (sur les parties verticales) sont de la forme

$$\int_0^{t-s} dx'_1 \int_0^{t-s} dy'_1 (x'_1 + y'_1 + \eta)^{2\alpha-2} (f(x'_1, y'_1) + \eta)^{2\alpha} \quad (2.44)$$

où $f(x'_1, y'_1) = x'_1, y'_1$ ou $x'_1 + y'_1$. Cette déformation de contour est en revanche impossible pour le terme \mathcal{V}_2 en raison de la multiformité des fonctions puissance, et le lemme 2.5 montre en fait qu'il diverge en $O(\eta^{4\alpha-1})$ dans la limite $\eta \rightarrow 0$ si $\alpha < 1/4$.

2.3.3 Chemin rugueux associé au brownien fractionnaire analytique

La convergence des intégrales itérées analytiques (qui sont en fait des intégrales itérées du brownien fractionnaire analytique) permet de construire un chemin rugueux au-dessus de Γ . L'article [16] montre en fait que l'on peut tout définir sur le demi-plan supérieur fermé $\bar{\Pi}^+$. Le travail essentiel a été de reformuler la théorie algébrique des chemins rugueux de M. Gubinelli, ainsi qu'un certain nombre de lemmes techniques (dont le lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey) dans le demi-plan. Les lignes suivantes se réfèrent à la version sur arXiv de l'article [16], la version publiée évitant le recours aux chemins rugueux.

En essayant de construire une application cicatrisante $\Lambda : Z_3^{1+}(\bar{\Pi}^+) \rightarrow Z_2^{1+}(\bar{\Pi}^+)$, où $Z_3^{1+}(\bar{\Pi}^+)$ est un espace de 2-incréments 1^+ -Hölder définis sur $(\bar{\Pi}^+)^3$, dont la restriction à $(\Pi^+)^3$ doit être analytique, on se heurte à un obstacle, à moins de rajouter une condition de continuité sous les translations par des vecteurs purement imaginaires près du bord du demi-plan supérieur, reliant de manière plus précise le comportement de ces fonctions sur Π^+ à celui sur \mathbb{R} . On a choisi dans [16] de considérer le sous-espace $Z_3^{1+}(\bar{\Pi}^+)$ des 2-incréments dont la norme β -multiparamétrique sur tout ouvert relativement compact $U \subset \bar{\Pi}^+$

$$\|h\|_{C_j^{m,\beta}} := \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{s_1, s_2, \dots, s_j \in U} \frac{|h_{s_1+i\varepsilon, \dots, s_j+i\varepsilon} - h_{s_1, \dots, s_j}|}{\varepsilon^\beta} \quad (2.45)$$

(ici $j = 3$) est finie pour un certain $\beta > 0$. Le lien entre ce type de conditions et l'höldérianité de la valeur au bord est connu dans le cadre classique des espaces de Hardy; par exemple, il est facile de voir (en utilisant la transformation de Fourier) que l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} |h(t+i\varepsilon) - h(t)|^2 dt = O(\varepsilon^{2\beta})$, pour h dans l'espace de Hardy du demi-plan supérieur, implique l'inégalité de type Hölder $\int_{\mathbb{R}} |h(t+\varepsilon) - h(t)|^2 dt = O(\varepsilon^{2\beta})$, ce qui motive la définition ci-dessus.

Afin de ne pas mélanger Γ et le processus conjugué $\bar{\Gamma}$, il est nécessaire de définir C_j^α comme un espace de fonctions α -Hölder sur $\bar{\Pi}^+$ et analytiques sur Π^+ . Soit, de manière plus générale, $X : \bar{\Pi}^+ \rightarrow \mathbb{C}^d$ un chemin analytique sur Π^+ , α -Hölder sur $\bar{\Pi}^+$, possédant un relèvement \mathbf{X}^n , $n = 1, \dots, N = \lfloor 1/\alpha \rfloor$, tel que \mathbf{X}^n soit à la fois $n\alpha$ -Hölder et de norme $\|\cdot\|_{C_2^{m,\alpha}}$ finie. On peut alors intégrer un chemin contrôlé par X au sens analytique, les hypothèses du lemme de la couturière complexe multi-paramétrique défini ci-dessus étant alors vérifiées.

Le brownien fractionnaire analytique entre dans ce cadre, ce qui implique la possibilité d'intégrer des processus contrôlés analytiques contre Γ et de résoudre localement les équations différentielles stochastiques du type

$$\begin{cases} dz_t = b(z_t)dt + \sigma(z_t)d\Gamma_t, \\ z_0 = a \in \mathbb{C}^n \end{cases}, \quad t \in \bar{\Pi}^+, \quad (2.46)$$

où b et σ sont des fonctions analytiques sur un voisinage de 0 dans \mathbb{C} .

Mais de telles équations différentielles peuvent également être résolues de manière trajectorielle sans utiliser la théorie des chemins rugueux, en se servant simplement de déformations de contour analytiques. Un des intérêts des calculs précédents consiste en la détermination de bornes explicites pour les moments (cf. également fin du paragraphe §2.3.5 ci-dessus).

2.3.4 Aire et volume de Lévy du brownien fractionnaire d'indice $> 1/4$

Comme nous venons de le voir, la variance de l'aire de Lévy

$$\mathcal{A}_{ts}^\eta := \int_s^t dB_{x_1}^\eta(1) \int_s^{x_1} dB_{x_2}^\eta(2) \quad (2.47)$$

converge quand $\eta \rightarrow 0$ si et seulement si $\alpha > 1/4$. On a en fait la formule exacte suivante:

Lemme 2.8 *Soit*

$$\mathcal{V}(\eta_1, \eta_2)_t = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t dB_{x_1}^{\eta_1}(1) \int_0^{x_1} dB_{x_2}^{\eta_2}(2) \right) \right]^2. \quad (2.48)$$

Alors:

1.

$$\mathcal{V}(\eta_1, \eta_2)_t = \frac{1}{4\alpha(1-2\alpha)\cos^2 \pi\alpha} \cdot \operatorname{Re} (\mathcal{V}_+(\eta_1, \eta_2)_t + \mathcal{V}_-(\eta_1, \eta_2)_t), \quad (2.49)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\pm(\eta_1, \eta_2)_t &= \int_0^t dx_1 \int_0^t dy_1 (-i(x_1 - y_1) + 2\eta_1)^{2\alpha-2} (\pm i x_1 + 2\eta_2)^{2\alpha} \\ &\quad - \int_0^t dx_1 \int_0^t dy_1 (-i(x_1 - y_1) + 2\eta_1)^{2\alpha-2} (\pm i(x_1 - y_1) + 2\eta_2)^{2\alpha} \\ &\quad + O(\eta_2^{2\alpha}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

2. $\mathcal{V}(\eta_1, \eta_2)_t \rightarrow C_\alpha t^{4\alpha}$ avec

$$C_\alpha = \frac{\alpha(2\alpha-1)}{2} \left[\frac{2\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{1}{(2\alpha-1)(4\alpha-1)} \right] \quad (2.51)$$

si $\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$ tendent conjointement vers 0, i.e. si $\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$ et de plus $\eta_1/\eta_2 \rightarrow 1$.

3.

$$\begin{aligned} &\int_0^t dx_1 \int_0^t dy_1 (-i(x_1 - y_1) + 2\eta_1)^{2\alpha-2} (-i(x_1 - y_1) + 2\eta_2)^{2\alpha} \\ &= 2\operatorname{Re} t I_-(2\alpha-2, 2\alpha; 0, t)(-i\eta_1, -i\eta_2) - \frac{2}{1-2\alpha} \\ &\operatorname{Im} \left\{ (-it + 2\eta_1)^{2\alpha-1} t (-it + 2\eta_2)^{2\alpha} - I_-(2\alpha-1, 2\alpha; 0, t)(-i\eta_1, -i\eta_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} (-it + 2\eta_1)^{2\alpha} (-it + 2\eta_2)^{2\alpha} + O(\eta_1 \eta_2)^{2\alpha} + O(\eta_1 + \eta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

On obtient en fait des formules tout à fait explicites pour $\mathcal{V}(\eta_1, \eta_2)_t$ dont nous donnons ici les termes les plus représentatifs. L'intérêt des formules ci-dessus va apparaître maintenant. Tout d'abord on a le critère de convergence suivant:

Lemme 2.9 *Supposons qu'il existe des constantes $C, C_1, \dots, C_I > 0$ et des couples d'exposants strictement positifs $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)})$ avec $\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} = 2\alpha$, tels que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, $\eta_1 > \eta_2 > 0$ avec $|s - t| \geq C\eta_1$,*

$$\mathbb{E} [\|\mathcal{A}_{t,s}^\eta - \mathcal{A}_{t,s}^{\eta_2}\|^2] \leq \sum_{i=1}^I C_i \eta_1^{2\alpha_i^{(1)}} |t - s|^{2\alpha_i^{(2)}} \quad (2.53)$$

Alors la série $\sum_{j \geq 1} (\mathcal{A}_{t,s}^{j-\beta} - \mathcal{A}_{t,s}^{(j+1)-\beta})$ converge p.s. au sens de la norme des $q/2$ -variations si $2\beta(\alpha - 1/q) > 1$ et $\beta\alpha_i^{(1)} > 1$, $i = 1, \dots, I$. Par conséquent, l'aire de Lévy régularisée $\mathcal{A}_{t,s}^\eta$ converge au sens de la norme des $q/2$ -variations lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Sous ces conditions, on obtient donc par passage à la limite un chemin rugueux au-dessus de B lorsque $\alpha > 1/3$. Maintenant, un calcul élémentaire donne la variance de $\mathcal{A}_{t,0}^{\eta_1} - \mathcal{A}_{t,0}^{\eta_2}$ comme une somme de termes qui sont de toute évidence de la forme (2.53) ci-dessus, plus des termes de seconde variation,

$$\mathcal{W}_\pm(\eta_1, \eta_2)_t = \mathcal{V}_\pm(\eta_1, \eta_1)_t - 2\mathcal{V}_\pm(\eta_1, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2})_t + \mathcal{V}_\pm(\eta_1, \eta_2)_t \quad (2.54)$$

qu'on peut estimer facilement à partir de l'expression ci-dessus de \mathcal{V}_\pm à l'aide de fonctions puissances et de fonctions hypergéométriques. On démontre alors l'existence d'exposants $(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)})$ comme ci-dessus, d'où le résultat.

Les calculs ci-dessus s'étendent sans difficultés majeures au cas des volumes (intégrales itérées d'ordre 3), et un mélange de calculs explicites et d'estimations donnent la convergence de ces volumes au sens de la norme des $q/3$ -variations lorsque $\alpha > 1/4$ et $q\alpha > 1$. On a ainsi construit un chemin rugueux au-dessus de B pour tout $\alpha > 1/4$.

2.3.5 Résolution approchée d'équations différentielles stochastiques

Bien que l'approximation analytique de B ait été conçue comme substitut aux interpolations linéaires par morceaux, elle peut également s'avérer utile lorsqu'on s'intéresse à la convergence de schémas numériques. La question générale est la suivante. On considère une équation différentielle stochastique dirigée par un brownien fractionnaire d -dimensionnel,

$$dY_t = \sum_{j=1}^d V_j(Y_t) dB_t(j), \quad Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.55)$$

où les champs de vecteurs $V_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont suffisamment réguliers. Pour simuler cette équation, on utilise un schéma numérique d'Euler d'ordre $N = \lfloor 1/\alpha \rfloor$ comme défini par exemple dans [98], chapitre X. Rappelons la définition. Soit \mathbf{B} un chemin rugueux au-dessus de B (dans la suite, on supposera que $\alpha > 1/4$ et que B est le chemin rugueux obtenu – comme dans le paragraphe précédent – comme limite du chemin rugueux canonique au-dessus de l'approximation analytique de B), et $D := \{0 = t_0 < \dots <$

$t_n = T\}$ une partition de $[0, T]$ en n sous-intervalles. Alors la solution approchée de (2.55) par le schéma d'Euler de rang N sur la partition D se définit récursivement comme

$$y_{t_k}^{Euler;D} := E_{\sigma}^{\mathbf{B}_{t_k, t_{k-1}}} \circ \dots \circ E_{\sigma}^{\mathbf{B}_{t_1, t_0}}(y_0) \quad (2.56)$$

où

$$E_{\sigma}^{\mathbf{B}_{t,s}}(y) := y + \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_j \leq d} [V_{i_1} \dots V_{i_j} \cdot Id](y) \cdot \mathbf{B}_{ts}^j(i_1, \dots, i_j), \quad (2.57)$$

$V_{i_1} \dots V_{i_j}$ étant vu comme produit de champs de vecteurs agissant en fin de compte sur la fonction identité $\text{Id} : y \mapsto y$. Si $\alpha > 1/2$ (de sorte que $N = 1$) il s'agit tout simplement du schéma d'Euler usuel; si $\alpha \in [1/3, 1/2]$, on l'appelle aussi schéma de Milstein. On peut montrer qu'il converge vers l'unique solution au sens des chemins rugueux définie par T. Lyons. Les critères généraux permettent d'obtenir l'existence et l'unicité globale de la solution dans le cas où σ est bornée, ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq N$ (une condition de type Lipschitz sur les dérivées d'ordre $N - 1$ suffit). Supposons $\alpha > 1/3$ et utilisons le schéma de Milstein. On sait alors montrer que l'erreur $\sup_{0 \leq k \leq n} |y_{t_k} - y_{t_k}^{Euler;D}|$ est en $O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{3\alpha-1}\right)$ si $t_k = \frac{kT}{n}$, $0 \leq k \leq n$ est la subdivision régulière de $[0, T]$. Seulement, pour des raisons pratiques (la loi de l'aire de Lévy étant inconnue), il est plus judicieux de remplacer l'aire de Lévy

$$\mathcal{A}_{ts} = \int_s^t (B_u(j) - B_s(j)) dB_u(i), \quad i \neq j \quad (2.58)$$

par son approximation par le schéma d'intégration d'Euler,

$$\mathcal{A}_{t,s}^n := \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{s+\frac{k}{n}(t-s)}(j) - B_s(j) \right) \left(B_{s+\frac{k+1}{n}(t-s)}(i) - B_{s+\frac{k}{n}(t-s)}(i) \right), \quad (2.59)$$

qui est, elle, facilement simulable. On obtient alors le résultat suivant pour l'erreur $Err_{t,s}^n := \mathcal{A}_{t,s} - \mathcal{A}_{t,s}^n$:

Lemme 2.10 *Il existe des constantes $c_1(\alpha), c_2(\alpha), c_3(\alpha)$ (connues explicitement) telles que*

$$\mathbb{E}|Err_{t,s}^n|^2 = \begin{cases} c_1 \cdot (t-s)^{4\alpha} \cdot n^{-4\alpha+1} & + & o(n^{-4\alpha+1}) & si & \alpha \in]1/4, 1/2[, \\ c_2 \cdot (t-s)^{4\alpha} \cdot n^{-4\alpha+1} & + & o(n^{-4\alpha+1}) & si & \alpha \in]1/2, 3/4[, \\ \frac{9}{128} \cdot (t-s)^{4\alpha} \cdot \log(n)n^{-2} & + & o(\log(n)n^{-2}) & si & \alpha = 3/4, \\ c_3 \cdot (t-s)^{4\alpha} \cdot n^{-2} & + & o(n^{-2}) & si & \alpha \in]3/4, 1[. \end{cases} \quad (2.60)$$

Théorème 2.1 (théorèmes limite pour l'erreur du schéma d'Euler)

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Alors:

1. *Cas $1/4 < \alpha \leq 3/4$: on a les théorèmes centraux limite suivants:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2\alpha-1/2} Err_{t,s}^n \stackrel{(d)}{=} \begin{cases} \sqrt{c_1}(t-s)^{2\alpha} \cdot Z & si & \alpha \in]1/4, 1/2[, \\ \sqrt{c_2}(t-s)^{2\alpha} \cdot Z & si & \alpha \in]1/2, 3/4[\end{cases} \quad (2.61)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\log(n))^{-1/2} Err_{t,s}^n \stackrel{(d)}{=} \frac{3}{4\sqrt{8}}(t-s)^{2\alpha} \cdot Z$$

si $\alpha = 3/4$.

2. Cas $\alpha > 3/4$: soient R_1 et R_2 deux processus de Rosenblatt indépendants. Alors il existe une constante $c_4(\alpha)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n Err_{t,s}^n \stackrel{(d)}{=} \sqrt{2c_4}(t-s)^{2\alpha} \cdot (R_1 - R_2).$$

Les processus de Rosenblatt sont des processus dans le chaos d'ordre 2 du mouvement brownien que nous ne définirons pas ici. Le changement de comportement autour de la valeur $\alpha = 3/4$ est classique et a également été observé pour des variations quadratiques à poids du brownien fractionnaire unidimensionnel par exemple [116]. Esquissons la preuve du théorème dans le cas $\alpha < 3/4$, où l'on obtient un théorème central limite. Elle repose sur la proposition suivante:

Proposition 2.11 [119]

Soit $p \geq 1$, et $(Z_n; n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires centrées appartenant au p -ème chaos d'un processus gaussien donné. Supposons que $\mathbb{E}Z_n^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$. Alors Z_n converge en loi vers une variable gaussienne centrée si et seulement si

$$\mathbb{E}Z_n^4 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 3. \quad (2.62)$$

Remarquons que $\mathbb{E}Z^4 = 3$ si Z est une variable gaussienne centrée réduite. Ce théorème est l'un des nombreux critères donnés dans une série d'articles [118, 119, 121] dûs à D. Nualart, G. Peccati et coauteurs, montrant la convergence d'une suite de variables aléatoires dans un chaos gaussien fixé vers une gaussienne (ou, sous certains critères de tension, d'une suite de processus vers le brownien) sous des conditions portant sur le 4e moment, ou sur la dérivée de Malliavin des (Z_n) par exemple. Ces critères sont à peu près équivalents à l'usage, en tout cas pour l'application que nous en faisons. Il est pratique d'interpréter la condition (2.62) en termes de *diagrammes connexes* (le mot provient de l'analyse des graphes de Feynman). Considérons pour fixer les idées $\mathbb{E}(\mathcal{A}_{t,s}^\eta)^4$. On a

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}_{t,s}(\eta))^4 = \prod_{j=1}^4 \left(\int_s^t dx_j \int_s^{x_j} dy_j \right) F^\eta(x_1, \dots, x_4; 1) F^\eta(y_1, \dots, y_4; 2), \quad (2.63)$$

où par définition $F^\eta(z_1, \dots, z_4; i) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^4 (B_{z_j}^\eta(i))' \right]$. La formule de Wick pour $F^\eta(x_1, \dots, x_4; 1) F^\eta(y_1, \dots, y_4; 2)$ donne 9 termes différents correspondant aux 3×3 appariements ("pairings") possibles des (x_j) d'un côté, et des (y_j) de l'autre. A chacun de ces termes correspond un diagramme à 4 sommets, $(1, \dots, 4)$, comme suit: on convient de relier i à j par une ligne continue, resp. en pointillés si x_i et x_j , resp. y_i et y_j , sont appariés. On trouve 6 diagrammes connexes, donnant une contribution à $\mathbb{E}Aire_{t,s}^4(\eta)$ notée $\mathbb{E} \left[(\mathcal{A}_{t,s}(\eta))^4 \right]_{(c)}$, (c) pour "connexe" (en d'autres termes, il s'agit en fait du cumulant d'ordre 4). La condition (2.62) est alors équivalente à la

condition: $\mathbb{E}[(\mathcal{A}_{t,s}(\eta))^{(c)}]_{(c)} \rightarrow_{\eta \rightarrow 0} 0$. Cette dernière condition se démontre en partie par des arguments élémentaires, et en partie en utilisant le lemme 2.4.

Dans un autre ordre d'idées, on considère dans [25] les équations différentielles *linéaires* dirigées par le brownien fractionnaire *analytique* Γ . La solution (Y_t) est obtenue comme limite de la somme (2.57) quand $N \rightarrow \infty$ (appelée: *série de Chen*). On démontre la convergence de la série grâce aux estimées suivantes sur les intégrales itérées de Γ :

Lemme 2.12 *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$ et $s, t \in \bar{\Pi}^+$, $\text{Var} \Gamma_{ts}^n(i_1, \dots, i_n) \leq C \frac{(C|t-s|)^{2n\alpha}}{n!}$.*

Corollaire 2.13 *Les moments de tous ordres de la solution (Y_t) de l'équation $dY_t = \sum_{j=1}^d V_j(Y_t) d\Gamma_t(j)$, où les champs de vecteurs V_1, \dots, V_d sont linéaires, sont finis; plus précisément, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe C_p tel que $\mathbb{E}|Y_t - Y_s|^{2p} \leq (C_p|t-s|)^{2p\alpha}$.*

Ce résultat étend des résultats analogues obtenus pour le brownien fractionnaire usuel B d'indice $\alpha > \frac{1}{2}$ [115]. Nous conjecturons (sur la base de calculs préliminaires) que $\text{Var} \mathbf{B}_{ts}^n(i_1, \dots, i_n) \leq \frac{(C|t-s|)^{2n\alpha}}{\Gamma(2n\alpha)}$ si $\alpha \in]1/4, 1/2[$ pour le chemin rugueux au-dessus de B obtenu par l'approximation analytique, ce qui permettrait d'étendre le corollaire ci-dessus à ce cadre.

2.3.6 Théorème central limite pour l'aire de Lévy renormalisée

On suppose dans ce paragraphe $\alpha < 1/4$. On définit $\tilde{\mathcal{A}}_{ts}^\eta = \eta^{\frac{1}{2}(1-4\alpha)} \mathcal{A}_{ts}^\eta$; à peu de choses près (cf. §2.3.2) il s'agit de la réduite de l'aire de Lévy. On a alors:

Théorème 2.2 (Théorème central limite) *Le processus $(B^\eta(1), B^\eta(2), \tilde{\mathcal{A}}^\eta)$ converge en loi vers $(B(1), B(2), \sqrt{C_{irr,1}}\delta W)$, où $\delta W_{ts} := W_t - W_s$ sont les incréments d'un brownien standard unidimensionnel indépendant de $B(1)$ et $B(2)$.*

Esquissons la démonstration. Elle comporte plusieurs étapes:

1. Soit $\phi_{t,0}^{(c)}(\eta; \lambda) := \log \mathbb{E}[e^{i\lambda \mathcal{A}_{t,0}(\eta)}]$ le log-cumulant de $\mathcal{A}_{t,0}^\eta$. Comme dans le paragraphe précédent, on peut représenter $\phi_{t,0}^{(c)}$ à l'aide de diagrammes connexes, qui sont ici des lignes polygonales fermées à $2n$ arêtes alternativement continues et en pointillés; le calcul donne

$$\phi_{t,0}^{(c)}(\eta; \lambda) = \sum_{N \geq 1} (-1)^N \frac{\phi_{2N}^{(c)}(\eta; 0, t)}{2N} \lambda^{2N},$$

où

$$\begin{aligned} \phi_{2N}^{(c)}(\eta; 0, t) = \\ \int_0^t dx_1 \dots \int_0^t dx_{2N} [K_\eta(x_1, x_2) K'_\eta(x_2, x_3) \dots K_\eta(x_{2N-1}, x_{2N})] K'_\eta(x_{2N}, x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } K_\eta(x_1, x_2) &= \mathbb{E} B_{x_1}^\eta B_{x_2}^\eta, \\ K'_\eta(x_1, x_2) &:= 2\text{Re } K'^{\pm}_\eta(x_1, x_2) = 2\text{Re } c_\alpha(\pm i(x_1 - x_2) + \eta)^{2\alpha-2}. \end{aligned}$$

2. En itérant le Lemme 2.5, il sort des fonctions analytiques (avec des singularités de type puissance aux extrémités des intervalles seulement), plus un seul terme multiforme non analytique, qui s'écrit (après intégration) $C_{irr,N} t \eta^{4N\alpha-1}$ (la constante $C_{irr,N}$ peut se calculer explicitement).
3. Comme nous venons de le dire, les autres termes dans $\phi_{2N}^{(c)}$ sont analytiques, mais avec des singularités de type puissance en certains points, dont il faut calculer les exposants. En principe, ils s'obtiennent grâce au Lemme 2.4. En fait (convenant d'intégrer successivement par rapport aux variables $x_{2N-1}, x_{2N-2}, \dots, x_1$ et finalement x_{2N}) la variable $b := x_{2N}$ ainsi que η restent comme paramètres dans les calculs, et le comportement des intégrales itérées s'obtient sur des domaines dépendant de la position de ces deux paramètres, ce qui complique sérieusement les calculs.

Pour faire court (et en simplifiant un peu), disons que les opérateurs de convolution $K'^{\pm}_{[0,t]}(\eta)$ préservent un espace de fonctions

$$f(\eta, b, t; u) := f_b(\eta, b, t; u) + f_\eta(\eta, b, t; u) \quad (2.64)$$

dites *analytiques admissibles*. La fonction f_b s'écrit comme une somme (finie) de termes du type $b^B u^U F(\frac{u}{b}, \frac{\eta}{b})$ sur chacun des trois domaines $(0 < |u| < 2|b|/3), (|b|/3 < |u| < 3|b|), (2|b| < |u|)$ séparément, les fonctions F étant holomorphes et bornées. De manière similaire, la fonction f_η s'écrit comme une somme de termes du type $\eta^H b^B u^U F(\frac{u}{\eta}, \frac{\eta}{b}, \frac{b}{t})$ ou $\eta^H b^B u^U F(\frac{u}{t}, \frac{\eta}{b}, \frac{b}{t})$ sur chacun des quatre domaines $(0 < |u| < 3\eta), (2\eta < |u| < 2t/3), (2\eta < |t-u| < 2t/3), (0 < |t-u| < 3\eta)$ séparément.

Le plus compliqué est de définir précisément ces domaines. Une généralisation du lemme 2.4 permet d'obtenir les exposants singuliers de type H, B, U de $K'^{\pm}_{[0,t]}(\eta)f$ ou $K^{*,\pm}_{[0,t]}(\eta)f$ en fonction de ceux de f , et de vérifier que tous ces termes analytiques donnent en fin de compte des termes réguliers en $O(1) + O(\eta^{2\alpha})$.

On trouve donc finalement: $\phi_{2N}^{(c)}(\eta; t) = C_{irr,N} t \eta^{4N\alpha-1} + C_{reg,N} t^{4N\alpha} + O(\eta^{2\alpha})$.

4. Des arguments de type combinatoire (inverses de ceux du point 1.) donnent facilement:

$$\mathbb{E}[(\mathcal{A}_{t_0}^\eta)^{2N}] = (2N-1)!! C_{irr,1}^N t^N \eta^{(4\alpha-1)N} (1 + O(\eta^{1-4\alpha})).$$

5. On montre que les moments de tous ordres des distributions finies de $\tilde{\mathcal{A}}^\eta$ et B^η convergent vers ceux de δW et B . L'idée ici, notamment, est que les diagrammes connexes provenant de l'évaluation de $\mathbb{E}[\mathcal{A}_{t_1, s_1}^\eta \dots \mathcal{A}_{t_{2N}, s_{2N}}^\eta]$ sont réguliers lorsque $[s_1, t_1] \cap \dots \cap [s_{2N}, t_{2N}] = \emptyset$. (Plus précisément, leur partie singulière est proportionnelle dans le cas général à $t \eta^{4N\alpha-1}$ multiplié par la *mesure de Lebesgue* de l'intersection $[s_1, t_1] \cap \dots \cap [s_{2N}, t_{2N}]$).

6. Des arguments de nature probabiliste (tension) impliquent la convergence en loi des processus.

Il est à remarquer que nous n'avons pas fait appel ici aux critères gaussiens de convergence de type théorème central limite mentionnés plus haut (cf. Proposition 2.11). Si l'on s'était restreint à l'étude du 4e moment, l'étape 3 (la plus pénible en pratique) aurait été plus courte, mais le schéma général moins clair. Mentionnons d'ailleurs ici qu'une démonstration beaucoup plus courte du Théorème 2.2 a été trouvée ultérieurement [91] en utilisant les critères de Nualart, Peccati et al. L'objectif dans l'article [18] (au-delà du théorème central limite) était aussi et peut-être surtout de montrer la puissance de l'outil analytique et de le développer suffisamment pour des applications ultérieures. De fait, il a été utilisé dans l'article ci-dessus [22], mais aussi d'ores et déjà dans [93].

2.4 Construction de chemins rugueux par ordre normal de Fourier

L'article [23] – reformulé de manière plus algébrique dans [26] – donne une approche générale pour construire des chemins rugueux au-dessus d'un chemin α -Hölder $\Gamma_t = (\Gamma_t(1), \dots, \Gamma_t(d))$, avec $\alpha \in]0, 1[$ quelconque; l'article [21] – présenté sommairement dans [24] – montre comment cette approche permet de construire un chemin rugueux au-dessus du brownien fractionnaire d'indice de Hurst quelconque. La construction repose sur un algorithme combinatoire appelé *mise en ordre normal de Fourier*. A l'origine, elle partait du constat que des estimées Hölder s'obtiennent de manière naturelle en Fourier, à condition de décomposer le domaine d'intégration en secteurs coniques sur lesquels les coordonnées de Fourier sont ordonnées. Au moins pour les intégrales itérées d'ordre le plus bas, il est apparu clairement qu'en recombinaison des intégrales itérées régularisées définies sur chaque secteur, on obtenait une quantité finie satisfaisant les propriétés algébriques (Chen et shuffle) demandées. En fait, la mise en ordre normal de Fourier permet en toute généralité de séparer le problème de construction de chemins rugueux en deux problèmes de nature totalement différente:

- le premier consiste à *régulariser les intégrales itérées arborescentes* ou plus précisément *les intégrales squelettes arborescentes* – restreintes aux secteurs de Fourier mentionnés ci-dessus –, qui sont des extensions combinatoires naturelles des intégrales itérées ordinaires, indexées par des arbres;
- le second consiste à montrer qu'on peut reconstruire de manière canonique un chemin rugueux à partir de ces intégrales régularisées sur chaque secteur, également appelées *données d'arbres* (“*tree data*”).

L'algorithme de mise en ordre normal de Fourier, explicité plus loin (cf. Théorème 2.28) permet en fait de construire *tous* les chemins rugueux *formels* au-dessus de Γ , i.e. toutes les fonctionnelles $\mathbf{\Gamma}$ vérifiant les propriétés de Chen et de shuffle, mais pas nécessairement les conditions de régularité Hölder. En ce sens il apparaît clairement que le problème initial est extrêmement *sous-déterminé*, et la question se pose de savoir quels sont les relèvements les plus “naturels” ou avec les “meilleures” propriétés.

Nous espérons être en mesure de répondre à cette question très bientôt dans le cas des champs gaussiens fractionnaires à l'aide de la construction physique évoquée dans l'Introduction générale. La prépublication [28] donne également une construction naturelle par *renormalisation* des intégrales squelettes du mouvement brownien fractionnaire; les résultats sont évoqués à la fin de cette section. Néanmoins, nous nous concentrons dans ce mémoire sur les résultats déjà acceptés, à savoir l'algorithme combinatoire de mise en ordre normal de Fourier, et la régularisation dite *régularisation de domaine*. Bien qu'un peu arbitraire, celle-ci a l'avantage d'être élémentaire et de ne pas faire appel aux outils de la théorie des champs ou de la renormalisation.

Nous commencerons par un exemple assez élémentaire mais permettant déjà d'entrevoir la combinatoire à l'oeuvre, ainsi que de comprendre comment fonctionne la régularisation de domaine: l'aire de Lévy du brownien fractionnaire (§2.4.1). La sous-section 2.4.2 est consacrée à l'algorithme de mise en ordre normal de Fourier dans le cas général. La régularisation de domaine est introduite en §2.4.3. Finalement, la renormalisation des intégrales squelettes et l'approche du calcul stochastique pour le brownien fractionnaire à l'aide de la théorie constructive des champs, renvoyant resp. aux preprints [28] et [27], sont évoquées brièvement en §2.4.4 et §2.4.5.

2.4.1 Aire de Lévy régularisée du brownien fractionnaire

Rappelons que les chemins rugueux obtenus par relèvement canonique des approximations (linéaire par morceaux ou analytique) du brownien fractionnaire ne permettent d'obtenir à la limite une aire de Lévy pour B que lorsque $\alpha > 1/4$. Le but dans cette section est d'explicitier – dans le cas du brownien fractionnaire – une méthode générale de régularisation, dite *régularisation par ordre normal de Fourier*, introduite en [21] et [23]. Nous utiliserons pour l'exposition l'approximation analytique de B . L'équation (2.20) implique l'écriture suivante:

$$\Gamma'_{t+i\frac{\eta}{2}} = \sqrt{c_\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\eta\xi/2} e^{it\xi} |\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha} W(d\xi), \quad (2.65)$$

et donc

$$(B_t^\eta)' = \sqrt{c_\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta|\xi|/2} e^{it\xi} |\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha} W(d\xi), \quad (2.66)$$

où $W(d\xi)$ est un bruit blanc complexe, obtenu en considérant un brownien complexe $(W(\xi), \xi \geq 0)$ indexé par \mathbb{R}_+ , et son conjugué $W(-\xi) = \overline{W(\xi)}$.

On trouve en intégrant

$$B_t^\eta = \sqrt{c_\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta|\xi|/2} \frac{e^{it\xi} - 1}{i\xi} |\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha} W(d\xi), \quad (2.67)$$

ce qui redonne la représentation harmonisable bien connue du mouvement brownien fractionnaire lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Rappelons maintenant une remarque essentielle, à laquelle il a été fait allusion lors de la présentation générale du chapitre ¹: soit $\mathbf{x} = (\delta x, \mathbf{x}^2)$

¹On notera de manière générale $\delta y_{ts} := y_t - y_s$ les *incrément*s d'une fonction d'une variable $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ (cf. présentation générale du chapitre).

un chemin rugueux au-dessus d'un chemin x d -dimensionnel de régularité Hölder $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, et $h(i, j) = -h(j, i)$, $1 \leq i, j \leq d$ des fonctions 2α -Hölder. Alors $(\delta x, \mathbf{x}^2(i, j) - \delta h(i, j))$ est également un chemin rugueux. Autrement dit, *on préserve la propriété de Chen en retirant un incrément*. La portée de cette remarque s'étend en fait de manière considérable, comme nous allons le voir peu à peu. L'idée dans ce paragraphe est de définir des fonctions $h(i, j)^\eta = -h(j, i)^\eta$, régulières pour tout $\eta > 0$, telles que l'aire de Lévy régularisée $\mathcal{RB}^{2,\eta}(i, j) := \mathbf{B}^{2,\eta}(i, j) - \delta h^\eta(i, j)$ converge en norme 2α -Hölder lorsque $\eta \rightarrow 0^+$. Ces fonctions peuvent s'interpréter comme des *contre-terms* par analogie avec la renormalisation des graphes de Feynman.

Nous allons pour cela décomposer

$$\mathcal{A}_{ts}^\eta := \mathbf{B}_{ts}^{2,\eta}(1, 2) = \int_s^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1 \int_s^{u_1} (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2 \quad (2.68)$$

en somme de deux termes: un terme de bord, noté $\mathcal{A}_{ts}^\eta(\partial)$, et un incrément δG_{ts}^η . L'idée naïve consiste à décomposer \mathcal{A}_{ts}^η en

$$\mathcal{A}_{ts}^\eta = -(B_t^\eta(1) - B_s^\eta(1)) \cdot B_s^\eta(2) + \int_s^t (B^\eta)'_{u_1}(1) \cdot B_{u_1}^\eta(2) du_1. \quad (2.69)$$

Le deuxième terme est un *incrément* qui diverge quand $\eta \rightarrow 0$ si $\alpha \leq 1/4$; mais comme nous venons de le voir, nous pouvons le retirer. Néanmoins cette idée ne marche pas car le premier terme n'est que α -Hölder. Nous allons modifier cette décomposition à l'aide des deux outils suivants.

Définition 2.14 (Intégration formelle) *On note: $\int^t e^{i\xi x} dx := \frac{e^{i\xi t}}{i\xi}$.*

L'intérêt de cette définition est que chaque intégration formelle produit un facteur de convergence en $1/|\xi|$, contrairement au cas de l'intégrale définie $\int_{s_0}^t$ où $s_0 \in \mathbb{R}$ est fixé. D'une certaine manière, la primitive formelle $\int^t e^{i\xi x} dx$ peut se comprendre comme l'intégrale définie $\int_{\pm i\infty}^t e^{i\xi x} dx$, ou encore comme $\lim_{s_0 \rightarrow \pm\infty} \int_{s_0}^t e^{i\xi x} dx$ au sens des distributions.

Définition 2.15 (Projecteurs de Fourier) *Si $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ (l'espace de Schwartz des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à décroissance rapide), on pose*

$$\mathcal{P}_{1,2}^+(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = \int \int_{|\xi_1| \leq |\xi_2|} d\xi_1 d\xi_2 \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2) e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \quad (2.70)$$

et

$$\mathcal{P}_{1,2}^-(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = \int \int_{|\xi_1| \geq |\xi_2|} d\xi_1 d\xi_2 \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2) e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)}. \quad (2.71)$$

La définition ci-dessus s'étend facilement au produit tensoriel complété, et on peut donc définir $\mathcal{P}_{1,2}^+ \mathcal{A}_{ts}^\eta$.

L'idée clé de la régularisation par ordre normal de Fourier est de définir de deux manières différentes la décomposition en termes de bord/incrément

de $\mathcal{P}_{1,2}^+ \mathcal{A}_{ts}^\eta$, resp. $\mathcal{P}_{1,2}^- \mathcal{A}_{ts}^\eta$ en utilisant le théorème de Fubini: on part des formules

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{1,2}^+ \mathcal{A}_{ts}^\eta &= \mathcal{P}_{1,2}^+ \int_s^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1 \int_s^{u_1} (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2, \\ \mathcal{P}_{1,2}^- \mathcal{A}_{ts}^\eta &= \mathcal{P}_{1,2}^- \int_s^t (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2 \int_{u_2}^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Définition 2.16 (décomposition) *Soient*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial) &= -\mathcal{P}_{1,2}^+ \int_s^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1 \int^s (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2, \\ G_t^{\eta,+} &= \mathcal{P}_{1,2}^+ \int_s^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1 \int^{u_1} (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2\end{aligned}\quad (2.73)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ts}^{\eta,-}(\partial) &= \mathcal{P}_{1,2}^- \int_s^t (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2 \int^t (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1, \\ G_t^{\eta,-} &= -\mathcal{P}_{1,2}^- \int_s^t (B^\eta)'_{u_2}(2) du_2 \int^{u_2} (B^\eta)'_{u_1}(1) du_1.\end{aligned}\quad (2.74)$$

On a bien: $\mathcal{P}_{1,2}^+ \mathcal{A}^\eta = \mathcal{A}^{\eta,+}(\partial) + \delta G^{\eta,+}$, $\mathcal{P}_{1,2}^- \mathcal{A}^\eta = \mathcal{A}^{\eta,-}(\partial) + \delta G^{\eta,-}$ et $\mathcal{A}^\eta = \mathcal{P}_{1,2}^+ \mathcal{A}^\eta + \mathcal{P}_{1,2}^- \mathcal{A}^\eta$. Les termes $G^{\eta,\pm}$ sont des cas particuliers d'*intégrales squelettes*, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants.

Etudions séparément les deux termes $\mathcal{A}^{\eta,+}(\partial)$ et $G^{\eta,+}$ (les deux autres termes se traitent de manière identique par symétrie).

1. Terme de bord

On calcule:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial) &= -c_\alpha \delta \left[u \mapsto \int dW_{\xi_1}(1) |\xi_1|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{iu\xi_1 - \eta|\xi_1|/2} \right. \\ &\quad \left. \int_{|\xi_2| \geq |\xi_1|} dW_{\xi_2}(2) |\xi_2|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{is\xi_2 - \eta|\xi_2|/2} \right]_{ts}\end{aligned}\quad (2.75)$$

On notera de manière générale $f \lesssim g$ s'il existe une constante C telle que $f \leq Cg$, f et g étant des fonctions d'un nombre arbitraire de variables.

Lemme 2.17 *Soit $F(u) = \int dW_\xi e^{iu\xi} a(\xi)$ avec $|a(\xi)|^2 \lesssim |\xi|^{-1-2\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$: alors*

$$\mathbb{E}|F(u_1) - F(u_2)|^2 \lesssim |u_1 - u_2|^{2\beta}. \quad (2.76)$$

Démonstration: On coupe l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}$ en

$$\int_{[-\frac{1}{|u_1-u_2|}, \frac{1}{|u_1-u_2|}]} + \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{|u_1-u_2|}, \frac{1}{|u_1-u_2|}]}$$

et on majore $|e^{iu_1\xi} - e^{iu_2\xi}|$ par $|u_1 - u_2||\xi|$ sur le premier intervalle et par 2 sur le second. \square

Les arguments standard déjà évoqués permettent d'en déduire que F est β^- -Hölder.

En prenant une variance partielle par rapport à ξ_2 de $\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial)$, on se ramène au lemme ci-dessus avec $|a(\xi_1)|^2 \lesssim |\xi_1|^{-1-4\alpha}$. Par conséquent, uniformément en s et en η ,

$$\mathbb{E}|\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial)|^2 \lesssim |t - s|^{4\alpha} \quad (2.77)$$

Le terme de bord ne nécessite donc pas de régularisation et nous poserons simplement: $\mathcal{R}\mathcal{A}^{\eta,\pm}(\partial) = \mathcal{A}^{\eta,\pm}(\partial)$.

2. Terme d'incrément G

On trouve par calcul direct

$$G_t^{\eta,+} = c_\alpha \int dW_{\xi_1}(1) \frac{|\xi_1|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\xi_1 + \xi_2} e^{it\xi_1 - \eta|\xi_1|/2} \cdot \int_{|\xi_2| \geq |\xi_1|} dW_{\xi_2}(2) |\xi_2|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{it\xi_2 - \eta|\xi_2|/2}.$$

On effectue le changement de variables: $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1, \xi = \xi_1 + \xi_2)$. En prenant une variance partielle par rapport à ξ_1 , on se ramène encore une fois au lemme 2.17 avec $|a(\xi)|^2 \lesssim \frac{1}{\xi^2} \int_{|\xi - \xi_1| > |\xi|/2} |\xi_1|^{1-2\alpha} |\xi - \xi_1|^{-1-2\alpha} d\xi_1$ (faire un dessin), avec une divergence possible quand $|\xi_1| \rightarrow \infty$.

Si $\alpha > 1/4$, alors $|a(\xi)|^2 \lesssim |\xi|^{-1-4\alpha}$, et donc $\delta G^{\eta,+}$ vérifie lui aussi l'estimée (2.77). En revanche, $|a(\xi)|^2$ diverge quand $\eta \rightarrow 0$ si $\alpha \leq 1/4$ (on retrouve bien entendu la barrière habituelle en $\alpha = 1/4$). Seulement, comme δG est un *incrément*, on peut le retirer à la manière d'un contre-terme (cf. remarque initiale de ce paragraphe); on obtient de la sorte un chemin rugueux tronqué à l'ordre 2 pour α quelconque. Néanmoins, nous allons utiliser une régularisation moins brutale.

Définition 2.18 (Régularisation de domaine) *Soit*

$$\mathcal{R}G_t^{\eta,+} = c_\alpha \int_{\mathbb{R}_{reg}^{2,+}} dW_{\xi_1}(1) dW_{\xi_2}(2) \frac{|\xi_1|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\xi_1 + \xi_2} e^{it\xi_1 - \eta|\xi_1|/2} \cdot |\xi_2|^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{it\xi_2 - \eta|\xi_2|/2}$$

où

$$\mathbb{R}_{reg}^{2,+} := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_1| \leq |\xi_2|, |\xi_1 + \xi_2| > C_{reg}|\xi_2|\}, \quad C_{reg} \in]0, 1[. \quad (2.78)$$

Autrement dit, seules les composantes de Fourier “proches” de l'antidiagonale $\xi_1 = -\xi_2$ jouent dans cette approche le rôle de contre-terme.

Théorème 2.3 *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'aire régularisée*

$$\mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^\eta = \left(\mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial) + [\delta \mathcal{R}G^{\eta,+}]_{ts} \right) + \left(\mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^{\eta,-}(\partial) + [\delta \mathcal{R}G^{\eta,-}]_{ts} \right) \quad (2.79)$$

vérifie les deux estimées suivantes:

1. $\text{Var} \mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^\eta \lesssim |t - s|^{4\alpha};$
2. $\text{Var} (\mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^{\eta_1} - \mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^{\eta_2}) \lesssim |\eta_1 - \eta_2|^{2\alpha}.$

Corollaire 2.19 *Pour tout $\kappa < \alpha$, le chemin rugueux $(\delta B_{ts}^\eta(1), \delta B_{ts}^\eta(2), \mathcal{R}\mathcal{A}_{ts}^\eta)$ converge dans $L^2(\Omega; C_2^\kappa([0, T]) \times C_2^\kappa([0, T]) \times C_2^{2\kappa}([0, T]))$ vers un chemin rugueux $(\delta B, \mathbf{B}^2)$ tronqué à l'ordre 2.*

Remarquons que l'aire de Lévy du brownien fractionnaire analytique Γ_t (cf. eq. (2.65)) ne nécessite pas de régularisation puisque la condition (2.78) $|\xi_1 + \xi_2| > C_{reg}|\xi_2|$ définissant $R^{2,+}$ est toujours vérifiée si ξ_1 et ξ_2 sont de même signe. Les contre-termes à tous ordres de la procédure de régularisation de domaine sont alors tous nuls, ce qui est cohérent avec le fait que le relèvement canonique de $\Gamma_t^\eta := \Gamma_{t+i\eta/2}$ converge au sens des chemins rugueux quand $\eta \rightarrow 0$ (cf. §2.3.3).

2.4.2 L'algorithme de mise en ordre normal de Fourier

A. Structures combinatoires

Nous commençons par montrer comment coder les intégrales itérées par des arbres. L'algèbre de la définition ci-dessous est aussi connue sous le nom d'algèbre de Connes et Kreimer [87, 88, 89].

Définition 2.20 (algèbre de Hopf des arbres décorés enracinés) 1.

Un arbre décoré enraciné \mathbb{T} est un arbre avec un sommet distingué appelé racine (dessiné en montant de la racine aux feuilles), muni d'une décoration $\ell = (\ell(v))_{v \in V(\mathbb{T})}$ pour chaque sommet, $V(\mathbb{T})$ étant l'ensemble de ses sommets. Les décorations sont supposées à valeurs dans $\{1, \dots, d\}$. L'ensemble des arbres est noté \mathcal{T} . Le produit commutatif $\mathbb{T}_1 \cdot \mathbb{T}_2$ de deux arbres donne la forêt avec deux composantes connexes, \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 . L'algèbre sur \mathbb{R} engendrée par les arbres est notée \mathbf{H} , le sous-espace vectoriel engendré par les forêts avec n sommets, $\mathbf{H}(n)$. L'arbre vide, élément unité de \mathbf{H} , est noté 1.

2. Si w est un descendant de v (i.e. w est au-dessus de v) on écrit $w \rightarrow v$. On dit que v et w sont connectés si $w = v$, $w \rightarrow v$ ou $v \rightarrow w$. Un ensemble de sommets $\mathbf{v} \subset V(\mathbb{T})$ est dit coupure admissible si deux éléments $v \neq w$ de \mathbf{v} ne sont jamais connectés; on écrit alors $\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})$, et on définit $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})$ comme la sous-forêt de sommets $\{w \in V(\mathbb{T}); \exists v \in \mathbf{v}, v \rightarrow w\}$, alors que $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})$ est la sous-forêt d'ensemble de sommets complémentaire $V(\mathbb{T}) \setminus V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T}))$. Si \mathbb{T} est un arbre alors $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})$ également.

3. Posons

$$\Delta(\mathbb{T}) = \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})} \text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T} \otimes \text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}. \quad (2.80)$$

Par exemple,

$$\Delta({}^b\mathbf{V}_a^c) = 1 \otimes {}^b\mathbf{V}_a^c + {}^b\mathbf{V}_a^c \otimes 1 + \mathbf{!}_a^b \otimes \cdot_c + \mathbf{!}_a^c \otimes \cdot_b + \cdot_a \otimes \cdot_b \cdot \cdot \cdot \quad (2.81)$$

Alors \mathbf{H} munie du coproduit Δ est une bigèbre.

4. \mathbf{H} a une unique antipode \bar{S} , définie par récurrence par

$$\bar{S}(1) = 1, \quad \bar{S}(\mathbb{T}) = -\mathbb{T} - \sum_{v \models V(\mathbb{T}), v \neq \emptyset} \text{Roo}_v \mathbb{T} \cdot \bar{S}(\text{Lea}_v \mathbb{T}). \quad (2.82)$$

Rappelons que l'antipode joue le rôle d'inverse pour la convolution: si f, g sont deux formes linéaires sur \mathbf{H} , on définit

$$f * g(\mathbb{T}) = \sum_{v \models V(\mathbb{T})} f(\text{Roo}_v \mathbb{T}) g(\text{Lea}_v \mathbb{T}). \quad (2.83)$$

Alors $f * (f \circ \bar{S})$ est l'identité pour la convolution, i.e. $f * (f \circ \bar{S})(1) = 1$, $f * (f \circ \bar{S})(\mathbb{T}) = 0$ pour toute forêt \mathbb{T} .

Définition 2.21 (algèbre de shuffle) 1. Soit \mathbf{Sh} l'algèbre de shuffle avec décorations dans $\{1, \dots, d\}$, i.e. l'ensemble des mots $(i_1 \dots i_n)$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}$, muni du produit de shuffle, cf. éq. (2.5),

$$(i_1 \dots i_{n_1}) \uplus (j_1 \dots j_{n_2}) = \sum_{\mathbf{k} \in Sh(\mathbf{i}, \mathbf{j})} (k_1 \dots k_{n_1+n_2}). \quad (2.84)$$

Un élément de \mathbf{Sh} se représente naturellement comme un arbre tronc décoré par $\ell = (\ell(1), \dots, \ell(n))$ de la racine jusqu'en haut. Par exemple, $(i_1 i_2 i_3) = \begin{smallmatrix} i_3 \\ \vdots \\ i_2 \\ \vdots \\ i_1 \end{smallmatrix}$ a pour décorations $\ell(j) = i_j$, $j = 1, 2, 3$.

2. \mathbf{Sh} munie de la restriction du coproduit Δ de \mathbf{H} aux arbres troncs et de l'antipode $S((i_1 \dots i_n)) = -(i_n \dots i_1)$ est une algèbre de Hopf. On a la formule suivante: $\Delta((i_1 \dots i_n)) = \sum_{k=0}^n (i_1 \dots i_k) \otimes (i_{k+1} \dots i_n)$.

On peut voir \mathbf{Sh} comme une sous-cogèbre de \mathbf{H} puisque les arbres troncs sont des arbres, et que la restriction de $\Delta_{\mathbf{H}}$ à \mathbf{Sh} coïncide avec $\Delta_{\mathbf{Sh}}$; en revanche \mathbf{Sh} n'est pas une sous-algèbre de \mathbf{H} . En fait, l'algèbre des arbres décorés enracinés se projette de manière canonique sur l'algèbre de shuffle comme suit.

Définition 2.22 (morphisme de projection θ) Soit $\theta : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{Sh}$ le morphisme de Hopf obtenu en associant à un arbre \mathbb{T} la somme des arbres troncs \mathbf{t} avec les mêmes décorations tels que

$$(v \twoheadrightarrow w \text{ dans } \mathbb{T}) \Rightarrow (v \twoheadrightarrow w \text{ dans } \mathbf{t}). \quad (2.85)$$

Par exemple, $\theta(\begin{smallmatrix} c \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ a \end{smallmatrix} \mathbb{V}_a^c) = \begin{smallmatrix} c \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ a \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} b \\ \vdots \\ c \\ \vdots \\ a \end{smallmatrix}$.

Soit Γ un chemin rugueux au-dessus d'un chemin $\Gamma = (\Gamma(1), \dots, \Gamma(d))$. On écrira pour plus de commodité $\Gamma^{ts}(i_1, \dots, i_n)$ au lieu de $\Gamma_{ts}^n(i_1, \dots, i_n)$ dans les pages qui suivent. En particulier, on notera

$$I_{\Gamma}^{ts}(i_1, \dots, i_n) = \int_s^t d\Gamma_{x_1}(i_1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{x_2}(i_2) \dots \int_s^{x_{n-1}} d\Gamma_{x_n}(i_n) \quad (2.86)$$

les intégrales itérées de Γ lorsque Γ est régulier.

Indexons $\Gamma^{ts}(i_1, \dots, i_n)$ par des arbres troncs $\mathbb{T} \in \mathbf{Sh}$ avec décoration $\ell(j) = i_j$, $j = 1, \dots, n$. Alors les propriétés de (i) Chen et (ii) shuffle, cf. éq. (2.4) et (2.5), sont équivalentes à

(i)bis si $\mathbb{T} \in \mathbf{Sh}$ est un arbre tronc,

$$\mathbf{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T}) = \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})} \mathbf{\Gamma}^{tu}(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})) \mathbf{\Gamma}^{us}(\text{Lea}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})); \quad (2.87)$$

en d'autres termes, $\mathbf{\Gamma}^{ts} = \mathbf{\Gamma}^{tu} * \mathbf{\Gamma}^{us}$ pour la convolution de l'algèbre de shuffle, définie comme celle de \mathbf{H} (cf. supra);

(ii)bis si $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{Sh}$ sont des arbres troncs,

$$\mathbf{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T}) \mathbf{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T}') = \mathbf{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T} \pitchfork \mathbb{T}'). \quad (2.88)$$

En d'autres termes, $\mathbf{\Gamma}^{ts}$ est un caractère de \mathbf{Sh} .

Une telle fonctionnelle indexée par des *arbres troncs* s'étend facilement en une fonctionnelle *arborescente*, i.e. indexée par des arbres \mathbb{T} quelconques, en posant $\bar{\mathbf{\Gamma}}(\mathbb{T}) := \mathbf{\Gamma} \circ \theta(\mathbb{T})$. Comme θ est un morphisme d'algèbre de Hopf, on obtient immédiatement les propriétés

(i)ter si $\mathbb{T} \in \mathbf{H}$ est un arbre,

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts}(\mathbb{T}) = \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})} \bar{\mathbf{\Gamma}}^{tu}(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})) \bar{\mathbf{\Gamma}}^{us}(\text{Lea}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T})); \quad (2.89)$$

en d'autres termes, $\bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts} = \bar{\mathbf{\Gamma}}^{tu} * \bar{\mathbf{\Gamma}}^{us}$ pour la convolution de l'algèbre des arbres décorés;

(ii)ter si $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{H}$ sont des arbres,

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts}(\mathbb{T}) \bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts}(\mathbb{T}') = \bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts}(\mathbb{T} \cdot \mathbb{T}'). \quad (2.90)$$

En d'autres termes, $\bar{\mathbf{\Gamma}}^{ts}$ est un caractère de \mathbf{H} .

Les propriétés algébriques (i), (ii) ou (i)bis, (ii)bis ou encore (i)ter, (ii)ter sont satisfaites par les intégrales itérées usuelles I_{Γ}^{ts} ou leurs extensions arborescentes \bar{I}_{Γ}^{ts} à condition que Γ soit un chemin régulier.

On peut donner une formule explicite pour les intégrales itérées arborescentes. Soit \mathbb{T} un arbre (l'extension aux forêts est immédiate), indexons ses sommets par les entiers $1, \dots, n$ de sorte que $(i \rightarrow j) \Rightarrow (i > j)$. Alors, si l'on note i^- l'ancêtre du sommet i dans \mathbb{T} , on a

$$\bar{I}_{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T}) = \int_s^t d\Gamma_{x_1}(\ell(1)) \int_s^{x_2^-} d\Gamma_{x_2}(\ell(2)) \dots \int_s^{x_n^-} d\Gamma_{x_n}(\ell(n)). \quad (2.91)$$

Remarque. La formule (2.91) ne dépend pas du choix d'indexation des sommets, tant que l'arbre est *ordonné en tas*, i.e. tant que $(i \rightarrow j) \Rightarrow (i > j)$. Nous appelons cette invariance par réindexation la *propriété d'invariance par réindexation* des intégrales itérées. Elle peut s'énoncer en disant que $\bar{I}_{\Gamma}^{ts}(\mathbb{T})$ dépend seulement de la *topologie* de \mathbb{T} . Cette même propriété réapparaît plus loin.

Contentons-nous pour l'instant de la remarque suivante, montrant la concision de la formulation algébrique. Supposons qu'on ait défini des quantités $\mathbf{\Gamma}^{ts_0}(i_1, \dots, i_n)$, $n \leq \lfloor 1/\alpha \rfloor$, avec s_0 fixé, vérifiant la propriété

de shuffle. Posons $J_{\Gamma}^{ts_0}((i_1 \dots i_n)) = \mathbf{\Gamma}^{ts_0}(i_1, \dots, i_n)$ et plus généralement $J_{\Gamma}^{ts} := J_{\Gamma}^{ts_0} * (J_{\Gamma}^{ss_0} \circ S)$. On a obtenu ainsi une famille de caractères de **Sh**, et on vérifie très facilement la propriété (i)bis. En d'autres termes, on a construit ainsi un chemin rugueux formel au-dessus de Γ .

B. Transformation de Fourier et intégrales squelettes

Au lieu de régulariser les intégrales itérées, $I_{\Gamma}^{ts_0} \rightsquigarrow J_{\Gamma}^{ts_0}$ avec s_0 fixé, nous choisissons de régulariser les *intégrales squelettes* SkI_{Γ}^t , qui sont des analogues des intégrales itérées usuelles *dépendant d'un seul argument*, obtenues par transformation de Fourier.

Définition 2.23 (intégrales squelettes) *Soit, pour Γ régulier à support compact,*

$$\begin{aligned} \text{SkI}_{\Gamma}^t(i_1 \dots i_n) := \\ (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \mathcal{F}\Gamma'_{\xi_j}(i_j) d\xi_j \cdot \int^t dx_1 \int^{x_1} dx_2 \dots \int^{x_{n-1}} dx_n e^{i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

où, par définition, $\int^x e^{iy\xi} dy = \frac{e^{ix\xi}}{i\xi}$. On peut vérifier que SkI_{Γ}^t est un caractère de **Sh** – ou, en d'autres termes, qu'elle satisfait la propriété de shuffle–, comme pour les intégrales itérées ordinaires.

La projection θ permet de généraliser immédiatement la définition précédente aux intégrales squelettes arborescentes, cf.  q. (2.91),

$$\overline{\text{SkI}}_{\Gamma}^t(\mathbb{T}) = \text{SkI}_{\Gamma}^t \circ \theta(\mathbb{T}) = \int^t d\Gamma_{x_1}(\ell(1)) \int^{x_2^-} d\Gamma_{x_2}(\ell(2)) \dots \int^{x_n^-} d\Gamma_{x_n}(\ell(n)). \quad (2.93)$$

Un calcul explicite donne (cf. [23], Lemme 4.5):

$$\overline{\text{SkI}}_{\Gamma}^t(\mathbb{T}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \mathcal{F}\Gamma'_{\xi_j}(\ell(j)) d\xi_j \cdot \frac{e^{it(\xi_1 + \dots + \xi_n)}}{\prod_{i=1}^n [\xi_i + \sum_{j \rightarrow i} \xi_j]}. \quad (2.94)$$

C. Mise en ordre normal de Fourier pour des chemins réguliers

Définition 2.24 (projections de Fourier et décomposition des mesures)

(i) *Soit μ une mesure signée à support compact, par exemple,*
 $\mu = \mu_{(\Gamma, \ell)}(dx_1, \dots, dx_n) := \otimes_{i=1}^n d\Gamma_{x_i}(\ell(i))$. *Alors*

$$\mu = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathcal{P}^{\sigma} \mu = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu^{\sigma} \circ \sigma^{-1}, \quad (2.95)$$

où

$$\mathcal{P}^{\sigma} : \mu \mapsto \mathcal{F}^{-1} \left(\mathbf{1}_{|\xi_{\sigma(1)}| \leq \dots \leq |\xi_{\sigma(n)}|} \mathcal{F}\mu(\xi_1, \dots, \xi_n) \right) \quad (2.96)$$

est un projecteur de Fourier, et μ^{σ} est défini par

$$\mu^{\sigma} := \mathcal{P}^{\text{Id}}(\mu \circ \sigma) = (\mathcal{P}^{\sigma} \mu) \circ \sigma. \quad (2.97)$$

L'ensemble des mesures signées dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans $\{(\xi_1, \dots, \xi_n); |\xi_1| \leq \dots \leq |\xi_n|\}$ sera noté $\mathcal{P}^{Id}Mes(\mathbb{R}^n)$, ou, de manière plus parlante, $\mathcal{P}^+Mes(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $\mu^\sigma \in \mathcal{P}^+Mes(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si \mathbb{T} est un arbre à n sommets, on note

$$\mathcal{P}^{\mathbb{T}}Mes(\mathbb{R}^n) = \{\mu \in Mes(\mathbb{R}^n); \xi \in \text{supp}(\mathcal{F}\mu) \Rightarrow ((v \rightarrow w) \Rightarrow (|\xi_v| > |\xi_w|))\}. \quad (2.98)$$

En particulier, $\mathcal{P}^{\mathbb{T}}Mes(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}^+Mes(\mathbb{R}^n)$ si \mathbb{T} est un arbre tronc.

Cette définition s'applique en particulier au cas des mesures produit $\mu = \mu_{(\Gamma, \ell)} = \otimes_{i=1, \dots, n} d\Gamma_{x_i}(\ell(i))$ si $\ell = (\ell(1), \dots, \ell(n))$ est la décoration d'un arbre tronc. Néanmoins, même si μ est une mesure produit dans ce cas, les projections de Fourier μ^σ n'en sont pas. Ceci nous contraint à étendre les définitions précédentes de I_Γ^{ts} , J_Γ^{ts} , \bar{I}_Γ^{ts} , \bar{J}_Γ^{ts} , SkI_Γ^t , $\overline{\text{SkI}}_\Gamma^t$ en des caractères indexés par des mesures, I_μ^{ts} , J_μ^{ts} , \bar{I}_μ^{ts} , \bar{J}_μ^{ts} , SkI_μ^t , $\overline{\text{SkI}}_\mu^t$. C'est élémentaire d'un point de vue analytique. Cependant, d'un point de vue formel, on doit remplacer les arbres (ou forêts) *décorés* par des arbres (ou forêts) *ordonnés en tas*², c'est-à-dire, des arbres non décorés mais dont les sommets sont indexés par les entiers $1, \dots, n$ de sorte que

$$(i \rightarrow j) \Rightarrow (i > j). \quad (2.99)$$

D'une certaine manière, la décoration est passée de l'arbre à la mesure puisqu'on remplace Γ par $\mu_{(\Gamma, \ell)}$; ainsi, $\bar{I}_\Gamma^{ts}((\mathbb{T}, \ell)) = \bar{I}_{\mu_{(\Gamma, \ell)}}^{ts}(\mathbb{T})$ si \mathbb{T} est un arbre ordonné en tas et ℓ une décoration de cet arbre. Par exemple,

$$\bar{I}_\mu^{ts}(\mathbb{T}) = \int_s^t \int_s^{x_2^-} \dots \int_s^{x_n^-} d\mu(x_1, \dots, x_n). \quad (2.100)$$

La décomposition $\mu = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathcal{P}^\sigma \mu$, $\mu = \otimes_{i=1, \dots, n} d\Gamma_{x_i}(\ell(i))$ est adaptée au cas du brownien fractionnaire, mais trop brutale pour un chemin α -Hölder quelconque. Dans ce cas-là, on tronque Γ en un chemin à support compact inclus dans $[0, T]$, avec T aussi grand qu'on veut, et on utilise l'équivalence de la norme Hölder

$$\|\Gamma\|_{C^\alpha} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Gamma(t)\| + \sup_{s, t \in \mathbb{R}} \frac{\|\Gamma(t) - \Gamma(s)\|}{|t - s|^\alpha} \quad (2.101)$$

avec la norme Besov [125], [23]

$$\|\Gamma\|_{B_{\infty, \infty}^\alpha} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\alpha|k|} \|D(\chi_k)\Gamma\|_\infty, \quad (2.102)$$

où $(\chi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une partition C^∞ dyadique de l'unité, avec $\text{supp} \chi_0 \subset [-2, 2]$, $\text{supp} \chi_k \subset [2^k, 5 \cdot 2^{k-1}]$, $\text{supp} \chi_{-k} \subset [-5 \cdot 2^{k-1}, -2^{k-1}]$ ($k \geq 1$) et $D(\chi_k) : f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\chi_k \cdot \mathcal{F}f)$ est le multiplicateur de Fourier correspondant.

On pose alors pour un arbre \mathbb{T} à n sommets

$$\mathbb{Z}_+^{\mathbb{T}} := \{(k_v)_{v \in V(\mathbb{T})} \in \mathbb{Z} \mid (v \rightarrow w) \Rightarrow (|k_v| \geq |k_w|)\} \quad (2.103)$$

²L'algèbre formelle engendrée par les arbres ordonnés en tas est équipée naturellement d'une structure de coproduit analogue à celle de \mathbf{H} , qui en fait une algèbre de Hopf (non commutative) [26].

et

$$\mathcal{P}^\mathbb{T} \mu := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^\mathbb{T}} \frac{1}{|\Sigma_{\mathbf{k}}|} \left[\otimes_{v \in V(\mathbb{T})} D(\chi_{k_v}) \right] \mu, \quad (2.104)$$

où $|\Sigma_{\mathbf{k}}| = |\{\sigma \in \Sigma_n; \forall j, |k_{\sigma(j)}| = |k_j|\}|$ est un facteur de symétrie choisi de sorte que la décomposition (2.95) reste vraie. Les résultats des pages suivantes s'adaptent facilement dans ce cadre, modulo quelques modifications techniques mineures dues au fait que $\mathcal{P}^\mathbb{T}$ n'est plus tout à fait un projecteur, i.e. $(\mathcal{P}^\mathbb{T})^2 \neq \mathcal{P}^\mathbb{T}$.³

Nous avons vu plus haut (cf. §2.4.1) l'utilité des intégrales squelette et de la mise en ordre normal de Fourier sur l'exemple de l'aire de Lévy du brownien fractionnaire. Comme dans cet exemple, nous allons nous arranger pour permuter l'ordre d'intégration à l'aide du théorème de Fubini de sorte que *les intégrales les plus intérieures (les plus à droite) portent les fréquences de Fourier les plus élevées*. C'est ce que nous appelons *mettre en ordre normal de Fourier*.

Remarque. Nous avons déjà insisté (cf. remarque précédente) sur le fait que les intégrales itérées dépendaient uniquement de la topologie de l'arbre, ce qui signifie, lorsqu'on remplace les chemins par des *mesures* et les arbres décorés par des *arbres ordonnés en tas*, que

$$\bar{I}_\mu^{ts}(\mathbb{T}) = \bar{I}_{\mu \circ \sigma}^{ts}(\sigma^{-1} \cdot \mathbb{T}) \quad (2.105)$$

si $\sigma \in \Sigma_n$ est une réindexation des sommets préservant la topologie de \mathbb{T} , i.e. telle que

$$(i \rightarrow j \text{ dans } \mathbb{T}) \Rightarrow (i \rightarrow j \text{ dans } \sigma^{-1}(\mathbb{T})). \quad (2.106)$$

Nous avons introduit les arbres décorés et les arbres ordonnés en tas. Il est également possible de décorer des arbres ordonnés en tas, on obtient encore une nouvelle algèbre de Hopf en combinant ces deux super-structures. Cela facilite l'énoncé de la proposition suivante:

Proposition 2.25 (graphes de permutation) *Soit $\mathfrak{T}_n \in \mathbf{Sh}$ un arbre tronc avec n sommets décoré par ℓ , et $\sigma \in \Sigma_n$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Alors il existe un unique élément \mathbb{T}^σ de l'algèbre des arbres décorés et ordonnés en tas, appelé graphe de permutation, se présentant comme une somme de forêts décorées par $\ell \circ \sigma$, et tel que*

$$I_\Gamma^{ts}(\mathfrak{T}_n) = I_\Gamma^{ts}(\mathbb{T}^\sigma). \quad (2.107)$$

Donnons un exemple. Soit $\mathfrak{T}_n = \mathfrak{!}_{a_1^{a_2}}^{a_3}$ and $\sigma : (1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$. Alors

³Pour simplifier, on peut remplacer les ϕ_k par des fonctions caractéristiques d'intervalles; $\mathcal{P}^\mathbb{T}$ est alors un projecteur, mais on obtient des régularités Hölder $n\alpha^-$ au lieu de $n\alpha$.

$$\begin{aligned}
I_{\Gamma}^{ts}(\mathfrak{T}_n) &= \int_s^t d\Gamma_{a_1}(x_3) \int_s^{x_3} d\Gamma_{a_2}(x_1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{a_3}(x_2) \\
&= \int_s^t d\Gamma_{a_2}(x_1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{a_3}(x_2) \int_{x_1}^t d\Gamma_{a_1}(x_3) \\
&= \int_s^t d\Gamma_{a_2}(x_1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{a_3}(x_2) \int_s^t d\Gamma_{a_1}(x_3) \\
&\quad - \int_s^t d\Gamma_{a_2}(x_1) \int_s^{x_1} d\Gamma_{a_3}(x_2) \int_s^{x_1} d\Gamma_{a_1}(x_3) \\
&= I_{\Gamma}^{ts}(\mathfrak{!}_{a_2}^{a_3} \bullet_{a_1}) - I_{\Gamma}^{ts}({}^{a_3}\mathbb{V}_{a_2}^{a_1}),
\end{aligned}$$

donc (oubliant la structure d'ordre en tas pour ne retenir que les décorations) $\mathbb{T}^{\sigma} = \mathfrak{!}_{a_2}^{a_3} \bullet_{a_1} - {}^{a_3}\mathbb{V}_{a_2}^{a_1}$. Remarquons que tous les graphes de permutation \mathbb{T}^{σ} avec σ fixé s'obtiennent à partir de la même somme de forêts ordonnées en tas (également notée \mathbb{T}^{σ} , par abus de notation) en superposant les décorations de \mathfrak{T}_n permutées par σ .

Comme corollaire élémentaire de la Définition 2.24 et de la Proposition 2.25, on obtient:

Corollaire 2.26 (mise en ordre normal de Fourier pour des chemins réguliers)

Soit Γ un chemin régulier, et $\mathfrak{T}_n \in \mathbf{Sh}$ un arbre tronc avec n sommets décoré par ℓ , alors

$$I_{\Gamma}^{ts}(\mathfrak{T}_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} I_{\mu_{(\Gamma, \ell)}^{\sigma}}^{ts}(\mathbb{T}^{\sigma}), \quad (2.108)$$

où l'on a posé comme d'habitude $\mu_{(\Gamma, \ell)} = \otimes_{i=1}^n d\Gamma_{x_i}(\ell(i))$.

D. Ordre normal de Fourier: théorèmes algébriques

Nous en venons finalement au principal résultat algébrique de ce paragraphe, annoncé dans l'introduction de la section 2.4.

Définition 2.27 (données d'arbres $\phi_{\mathbb{T}}^t$) (i) Pour tout arbre ordonné en tas \mathbb{T} avec n sommets, et $t \in \mathbb{R}$, soit $\phi_{\mathbb{T}}^t : \mathcal{P}^{\mathbb{T}} \text{Mes}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \mu \mapsto \phi_{\mathbb{T}}^t(\mu)$ ou encore $\phi_{\mu}^t(\mathbb{T})$, une famille de formes linéaires telle que:

- (a) $\phi_{d\Gamma(i)}^t(\mathbb{T}_1) - \phi_{d\Gamma(i)}^s(\mathbb{T}_1) = I_{\Gamma}^{ts}(\bullet_i) = \Gamma_t(i) - \Gamma_s(i)$ si \mathbb{T}_1 est l'arbre ordonné en tas avec un seul sommet;
- (b) si $\mathbb{T}_i, i = 1, 2$ sont des arbres ordonnés en tas avec n_i sommets, et $\mu_i \in \mathcal{P}^{\mathbb{T}_i} \text{Mes}(\mathbb{R}^{n_i}), i = 1, 2$, alors la propriété multiplicative suivante est vérifiée,

$$\phi_{\mu_1}^t(\mathbb{T}_1) \phi_{\mu_2}^t(\mathbb{T}_2) = \phi_{\mu_1 \otimes \mu_2}^t(\mathbb{T}_1 \wedge \mathbb{T}_2), \quad (2.109)$$

où $\mathbb{T}_1 \wedge \mathbb{T}_2$ est le produit non décoré $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$, les indices des sommets de \mathbb{T}_2 ayant été augmentés de n_1 ⁴;

⁴Le produit $\mathbb{T}_1 \wedge \mathbb{T}_2$ est en fait le produit (non commutatif) de l'algèbre de Hopf des arbres ordonnés en tas [26]

(c) (propriété d'invariance par réindexation) la condition d'invariance suivante sous les réindexations des sommets est vérifiée, cf. (2.105),

$$\phi_\mu^t(\mathbb{T}) = \phi_{\mu \circ \sigma}^t(\sigma^{-1} \cdot \mathbb{T}) \quad (2.110)$$

si σ – qui agit en permutant les sommets de \mathbb{T} – est telle que

$$(i \rightarrow j \text{ dans } \mathbb{T}) \Rightarrow (i \rightarrow j \text{ dans } \sigma^{-1}(\mathbb{T})). \quad (2.111)$$

(ii) Soit, pour $\Gamma = (\Gamma(1), \dots, \Gamma(d))$, $\chi_\Gamma^t : \mathbf{Sh} \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire sur \mathbf{Sh} définie par

$$\chi_\Gamma^t(\mathfrak{T}_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \phi_{\mu_{(\Gamma, \ell)}^\sigma}^t(\mathbb{T}^\sigma), \quad \mathfrak{T}_n = (\ell(1), \dots, \ell(n)) \quad (2.112)$$

où \mathbb{T}^σ est comme dans la Proposition 2.25.

Le résultat principal est le suivant.

Proposition 2.28 (construction de chemin rugueux par ordre normal de Fourier) Soit Γ un chemin tel que χ_Γ^t soit bien défini. Alors χ_Γ^t est un caractère de \mathbf{Sh} .

Par conséquent, la formule suivante pour $\mathfrak{T}_n \in \mathbf{Sh}$, $n \geq 1$, avec n sommets et décoration ℓ ,

$$J_\Gamma^{ts}(\ell(1), \dots, \ell(n)) := \chi_\Gamma^t * (\chi_\Gamma^s \circ \bar{S})(\mathfrak{T}_n) \quad (2.113)$$

définit un chemin rugueux formel au-dessus de Γ .

A cette définition de J utilisant la convolution de l'algèbre de shuffle s'ajoute une autre définition équivalente utilisant la convolution de l'algèbre des arbres,

$$J_\Gamma^{ts}(\mathfrak{T}_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_{\mu_{(\Gamma, \ell)}^\sigma}(\mathbb{T}^\sigma), \quad (2.114)$$

où la convolution est définie par référence au coproduit d'arbres (ordonnés en tas), i.e.

$$(\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_\nu(\mathbb{T}) = \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})} \phi_{\otimes_{v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}} \mathbb{T})} \nu_v}^t(\text{Roo}_{\mathbf{v}} \mathbb{T}) \phi_{\otimes_{v \in V(\text{Lea}_{\mathbf{v}} \mathbb{T})} \nu_v}^s(\bar{S}(\text{Lea}_{\mathbf{v}} \mathbb{T})) \quad (2.115)$$

pour un arbre \mathbb{T} ordonné en tas à n sommets et une mesure produit $\nu = \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$, et, par extension multilinéaire,

$$\begin{aligned} (\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_\nu(\mathbb{T}) &= (2\pi)^{-n/2} \int \mathcal{F}\nu(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \cdot \\ &\cdot \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T})} \phi_{\otimes_{v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T}))} e^{ix_v \xi_v} dx_v}^t(\text{Roo}_{\mathbf{v}} \mathbb{T}) \phi_{\otimes_{v \in V(\text{Lea}_{\mathbf{v}}(\mathbb{T}))} e^{ix_v \xi_v} dx_v}^s(\bar{S}(\text{Lea}_{\mathbf{v}} \mathbb{T})) \end{aligned} \quad (2.116)$$

pour une mesure quelconque $\nu \in \text{Mes}(\mathbb{R}^n)$.

Supposons provisoirement que Γ est un chemin régulier. Si l'on définit ϕ^t comme l'intégrale squelette SkI_Γ^t , on obtient de manière élémentaire en resommant sur toutes les permutations $\chi_\Gamma^t = \text{SkI}_\Gamma^t$, et par conséquent $J_\Gamma^{ts} = I_\Gamma^{ts}$. La Proposition 2.28 montre que le même algorithme de resommation sur les permutations produit un chemin rugueux formel au-dessus de tout chemin α -Hölder Γ pourvu que ϕ^t satisfasse les conditions (a), (b) and (c) de la Définition 2.27. Mieux, il s'ensuit facilement de la Définition 2.27 que *tout* chemin rugueux au-dessus de Γ s'obtient de cette manière.

La démonstration originelle de la proposition ci-dessus consistait précisément à utiliser le fait que SkI_Γ^t est un caractère de l'algèbre de shuffle pour *tout* chemin Γ régulier; on en déduit une certaine égalité entre deux éléments de \mathbf{H} , qui, à son tour, implique que (2.113) définit un caractère de l'algèbre de shuffle. Dans [26], on montre en fait que \mathbb{T}^σ est défini comme image réciproque par un isomorphisme de Hopf noté Θ de la permutation σ^{-1} , vue comme élément d'une algèbre de Hopf de permutations appelée *algèbre des fonctions quasi-symétriques libres*. De manière très élégante, le fait que (2.113) soit un caractère découle alors directement du fait que Θ préserve la structure de *produit*, et l'égalité entre (2.113) et (2.114) du fait que Θ préserve la structure de *coproduct*.

L'énorme avantage par rapport au problème d'origine est qu'on peut construire autant de formes linéaires ϕ^t qu'on souhaite en donnant une valeur arbitraire à $\phi_\mu^t(\mathbb{T})$, \mathbb{T} parcourant l'ensemble des arbres (ordonnés en tas), et en les étendant aux forêts en suivant la propriété multiplicative (b). Le problème *algébrique* a ainsi été complètement résolu: les chemins rugueux formels sont exactement caractérisés par un *choix arbitraire des données d'arbres* $\phi_\mu^t(\mathbb{T})$.

Il reste à choisir une définition convenable de ϕ^t conduisant à un chemin rugueux avec les bonnes propriétés de régularité Hölder. Par comparaison avec le cas des chemins réguliers, il est naturel de définir ϕ^t comme une régularisation (dans un sens à définir) des intégrales squelettes. Quel que soit le choix de ϕ^t , la démonstration de la régularité Hölder se fait en partant de la définition de J par *convolution de l'algèbre des arbres*, cf éq. (2.114), qu'on explicite de la manière suivante. Soit $\nu = \mu_{(\Gamma, \ell)}^\sigma$; supposons que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{T}_p$ soit le produit (ordonné en tas) de p arbres. Posons $\hat{\nu}_{\mathbb{T}'}(\xi) = \otimes_{v \in V(\mathbb{T}')} \mathcal{F}(\Gamma'(\ell \circ \sigma(v)))(\xi_v) e^{ix_v \xi_v} dx_v$ si \mathbb{T}' est un sous-arbre de \mathbb{T} et $\xi = (\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}')}$. Alors, la propriété multiplicative (b) pour ϕ^t donne

$$\begin{aligned}
(\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_\nu(\mathbb{T}) = \\
(2\pi)^{-n/2} \int d\xi_1 \dots d\xi_n \mathbf{1}_{|\xi_1| \leq \dots \leq |\xi_n|} \prod_{q=1}^p (\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)}}(\mathbb{T}_q).
\end{aligned}
\tag{2.117}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
& (\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)})}(\mathbb{T}_q) \\
&= \phi_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)})}^t(\mathbb{T}_q) + \phi_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)})}^s(\bar{S}(\mathbb{T}_q)) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T}_q), \mathbf{v} \neq \emptyset} \phi_{\hat{\nu}_{\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)})}^t(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q) \cdot \\
&\quad \phi_{\hat{\nu}_{\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)})}^s(\bar{S}(\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)) \\
&= (\phi^t - \phi^s)_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)})}(\mathbb{T}_q) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{v} \models V(\mathbb{T}_q), \mathbf{v} \neq \emptyset} (\phi^t - \phi^s)_{\hat{\nu}_{\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)})}(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q) \cdot \\
&\quad \phi_{\hat{\nu}_{\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)})}^s(\bar{S}(\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q))
\end{aligned} \tag{2.118}$$

d'après (2.82).

Finalement, si l'on applique de façon répétée la définition récursive de l'antipode, on obtient une expression de $\bar{S}(\text{Lea}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)$ en termes d'une somme de forêts obtenues par coupures multiples [88, 23]. La propriété multiplicative (b) appliquée à ϕ^s permet d'exprimer $(\phi^t * (\phi^s \circ \bar{S}))_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}_q)})}(\mathbb{T}_q)$ comme une somme de termes de la forme

$$(\phi^t - \phi^s)_{\hat{\nu}_{\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q}((\xi_v)_{v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)})}(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q) \prod_{j=1}^J \phi_{\hat{\nu}_{\mathbb{T}'_j}((\xi_v)_{v \in V(\mathbb{T}'_j)})}^s(\mathbb{T}'_j), \tag{2.119}$$

avec $V(\mathbb{T}_q) = V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q) \cup \uplus_{j=1}^J V(\mathbb{T}'_j)$.

La mesure ν étant dans $\mathcal{P}^+ \text{Mes}(\mathbb{R}^n)$, $|\xi_v|$ augmente en montant le long des branches des arbres; en particulier, si $w \rightarrow v$, $w \in V(\mathbb{T}'_j)$, $v \in V(\text{Roo}_{\mathbf{v}}\mathbb{T}_q)$, alors $|\xi_w| > |\xi_v|$, ce qui permet *a priori* de répéter l'argument montrant la régularité du terme de bord $\mathcal{A}_{ts}^{\eta,+}(\partial)$ en §2.4.1.

2.4.3 Régularisation de domaine

Nous avons vu en §2.4.1 comment régulariser le terme d'incrément $G_t^{\eta,+}$ en restreignant l'intégrale en Fourier au domaine conique $\mathbb{R}_{reg}^{2,+}$, cf. Définition 2.18. Dans le langage que nous venons de développer, cf. alinéa B en §2.4.2, $G_t^{\eta,+}$ s'interprète simplement (aux exponentielles régularisantes en $e^{-\eta|\xi|/2}$ près) comme l'intégrale squelette $\text{SkI}_{\mathcal{P}^+\mu}^t(\mathbf{!}_1^2)$ avec $\mu = dB_{x_1}^\eta(1) \otimes dB_{x_2}^\eta(2)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
\text{SkI}_{\mathcal{P}^+\mu}^t(\mathbf{!}_1^2) &= (2\pi)^{-1} \int d\xi \mathcal{F}(\mathcal{P}^+\mu)(\xi) \text{SkI}_{e^{ix_1\xi_1}dx_1 \otimes e^{ix_2\xi_2}dx_2}^t(\mathbf{!}_1^2) \\
&= (2\pi)^{-1} \int d\xi \mathcal{F}(\mathcal{P}^+\mu)(\xi) \frac{e^{it(\xi_1+\xi_2)}}{[i\xi_2][i(\xi_1+\xi_2)]}.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

L'intégrale squelette régularisée, $\mathcal{R}G_t^{\eta,+}$, s'interprète, elle, comme $\phi_{\mathcal{P}^+\mu}^t(\mathbf{!}_1^2)$ et s'écrit comme l'équation ci-dessus en insérant la fonction caractéristique du domaine $\mathbb{R}_{reg}^{2,+}$ dans l'intégrale en ξ .

Tout ceci s'étend de manière naturelle comme suit (où l'on retrouve en particulier $\mathbb{R}_{reg}^{2,+}$ écrit sous la forme $\mathbb{R}_{reg}^{\mathbb{T}}$, avec $\mathbb{T} = \mathbf{!}_1^2$).

Définition 2.29 (régularisation de domaine) Soit \mathbb{T} un arbre ordonné en tas avec n sommets, et $\nu \in \mathcal{P}^+ \text{Mes}(\mathbb{R}^n)$.

1. (pour le brownien fractionnaire) On définit

$$\mathbb{R}_{reg}^{\mathbb{T}} := \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid |\xi_1| < \dots < |\xi_n| \text{ et } \forall i, |\xi_i + \sum_{j \rightarrow i} \xi_j| > C_{reg} \sup_{j \rightarrow i} |\xi_j|\}$$

(2.121)

et

$$\begin{aligned} \phi_{\nu}^t(\mathbb{T}) &= (2\pi)^{-n/2} \int d\xi(\mathcal{F}\nu)(\xi) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_{reg}^{\mathbb{T}}}(\xi) \cdot \overline{\text{SkI}}_{\otimes_{i=1}^n e^{ix_j \xi_j} dx_j}^t(\mathbb{T}) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int d\xi(\mathcal{F}\nu)(\xi) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_{reg}^{\mathbb{T}}}(\xi) \cdot \frac{e^{it(\xi_1 + \dots + \xi_j)}}{\prod_{i=1}^n [\sqrt{-1}(\xi_i + \sum_{j \rightarrow i} \xi_j)]}. \end{aligned}$$

(2.122)

2. (pour un chemin Γ α -Hölder quelconque) On définit $\mathbb{Z}_{reg}^{\mathbb{T}} \subset \mathbb{Z}_+^{\mathbb{T}}$, cf. (2.103), comme l'ensemble des n -uplets $(k_v)_{v \in V(\mathbb{T})}$ tels que (notant $w_{max}(v) := \max\{w \in V(\mathbb{T}) \mid w \rightarrow v\}$, ou $w_{max}(v) = v$ si v est une feuille)

- (i) si $v < w$, alors $|k_v| \leq |k_w|$;
- (ii) si $v \in V(\mathbb{T})$ et w est une feuille au-dessus de v , et que $k_w \cdot k_v < 0$, alors $|k_v| \leq |k_w| - \log_2 10 - \log_2 |V(\mathbb{T})|$;
- (iii) si $n \in V(\mathbb{T})$ est un noeud, alors tout sommet $w \in \{w_{max}(v) \mid v \rightarrow n\}$ tel que $k_w \cdot k_{w_{max}(n)} < 0$ vérifie: $|k_w| \leq |k_{w_{max}(n)}| - \log_2 10 - \log_2 |V(\mathbb{T})|$;

et l'on pose

$$\phi_{\nu}^t(\mathbb{T}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{reg}^{\mathbb{T}}} \overline{\text{SkI}}_{\mathcal{P}\{\mathbf{k}\}_{\nu}}^t(\mathbb{T}),$$

(2.123)

où $\mathcal{P}\{\mathbf{k}\}_{\nu} = \frac{1}{|\Sigma_{\mathbf{k}}|} [\otimes_{v \in V(\mathbb{T})} D(\phi_{k_v})](\nu)$, cf. après (2.103) pour la définition du facteur de symétrie $|\Sigma_{\mathbf{k}}|$.

Remarque. L'intuition provenant du cas du brownien fractionnaire, étudié avant le cas général, les conditions assez *ad hoc* du 2. assurent que $|\xi_v + \sum_{w \rightarrow v} \xi_w| > \frac{1}{2} \sup_{w \rightarrow v} |\xi_w|$ si $\xi_v \in \text{supp} \phi_{k_v}$, $v \in V(\mathbb{T})$ pour $\mathbf{k} = (k_v)_{v \in V(\mathbb{T})} \in \mathbb{Z}_{reg}^{\mathbb{T}}$. On retrouve les conditions du 1. avec $C_{reg} = \frac{1}{2}$.

Le théorème principal des articles [21] et [23] s'énonce alors ainsi.

Théorème 2.4 Soit J^{ts} la fonctionnelle construite (cf. Proposition 2.28) à partir des données d'arbres ϕ^t définies dans la Définition 2.29 ci-dessus. Alors:

- 1. (pour le brownien fractionnaire) $\mathcal{RB}_{ts}^{n,\eta}(i_1, \dots, i_n) := J_{B^n}^{ts}((i_1 \dots i_n))$, $n = 1, \dots, N := \lfloor 1/\alpha \rfloor$ est un chemin rugueux vivant dans le chaos d'ordre n de B , et tel que:

- (i) (estimées Hölder uniformes) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$,

$$\mathbb{E}|\mathcal{RB}_{ts}^{n,\eta}(i_1, \dots, i_n)|^2 \leq C|t - s|^{2n\alpha};$$

- (ii) (vitesse de convergence) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $\eta_1, \eta_2 > 0$,

$$\mathbb{E}|\mathcal{RB}_{ts}^{n,\eta_1}(i_1, \dots, i_n) - \mathcal{RB}_{ts}^{n,\eta_2}(i_1, \dots, i_n)|^2 \leq C|\eta_1 - \eta_2|^{2\alpha}.$$

Par des arguments standard, on en déduit la convergence dans $L^2(\Omega; C_2^\kappa([0, T], \mathbb{R}^d) \times C_2^{2\kappa}([0, T], \mathbb{R}^{d^2}) \times \dots \times C_2^{N\kappa}([0, T], \mathbb{R}^{d^N}))$ pour tout $\kappa < \alpha$ vers un chemin rugueux \mathcal{RB} au-dessus de B .

2. (pour un chemin Γ α -Hölder quelconque) Supposons $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{R}\mathbf{\Gamma}_{ts}^n(i_1, \dots, i_n) := J_\Gamma^{ts}((i_1 \dots i_n))$ définit un chemin rugueux α -Hölder au-dessus de Γ .

Ce théorème est valide dans le cas simple où l'on pose arbitrairement $\phi_\nu^t(\mathbb{T}) = 0$ dès que l'arbre \mathbb{T} possède ≥ 2 sommets. On voit facilement que c'est un cas particulier de la construction précédente en choisissant C_{reg} assez grand, les conditions de la Définition 2.29 n'étant non vides (pour un arbre ayant ≥ 2 sommets) que pour C_{reg} petit. Considérons la Définition (2.113) de J_Γ^{ts} . En écrivant de manière explicite la convolution et l'antipode de l'algèbre de shuffle et la définition (2.112), on trouve (avec des notations évidentes)

$$J_\Gamma^{ts}(\mathbb{T}_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \phi_{\mu_1}^{t, \sigma_1}(\mathbb{T}_k^{\sigma_1}) \phi_{\mu_2}^s(\mathbb{T}_{n-k}^{\sigma_2}), \quad (2.124)$$

où $\mu_1 := \otimes_{i=1}^k d\Gamma_{x_i}(\ell(i))$, $\mu_2 := \otimes_{i=1}^{n-k} d\Gamma_{x_i}(\ell(n-i+1))$, et $\sigma_1 : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $\sigma_2 : \{k+1, \dots, n\} \rightarrow \{k+1, \dots, n\}$ sont des permutations. Or l'unique graphe de permutation \mathbb{T}^σ faisant intervenir un produit d'arbres à un seul sommet est $\mathbb{T}_m^{\sigma^0}$, $\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ m & \dots & 1 \end{pmatrix}$, qui contient le produit $\bullet_1 \dots \bullet_m$. On obtient ainsi des formules tout à fait explicites dans lesquelles les intégrales arborescentes ont disparu. Par exemple, dans le cas du brownien fractionnaire, on trouve

$$\begin{aligned} J_B^{ts}(\mathbb{T}_n) &= c_\alpha^{n/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \int \dots \int_{|\xi_k| < \dots < |\xi_1|} \prod_{j=1}^k e^{it\xi_j} \frac{|\xi_j|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{i\xi_j} dW_{\xi_j}(\ell(j)) \\ &\quad \int \dots \int_{|\xi_{k+1}| < \dots < |\xi_n|} \prod_{j=k+1}^n e^{is\xi_j} \frac{|\xi_j|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{i\xi_j} dW_{\xi_j}(\ell(j)). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Si l'on décompose à nouveau le domaine d'intégration en $\{|\xi_1| > \dots > |\xi_k|, |\xi_k| < \dots < |\xi_n|\} \amalg \{|\xi_1| > \dots > |\xi_{k+1}|, |\xi_{k+1}| < \dots < |\xi_n|\}$, on trouve

finale

$$J_B^{ts}(\mathbb{T}_n) = c_\alpha^{n/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \int \dots \int_{|\xi_1| > \dots > |\xi_k|, |\xi_k| < \dots < |\xi_n|} \left[\prod_{j=1}^{k-1} e^{it\xi_j} \frac{|\xi_j|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{i\xi_j} dW_{\xi_j}(\ell(j)) \right] \\ (e^{it\xi_k} - e^{is\xi_k}) \frac{|\xi_k|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{i\xi_k} dW_{\xi_k}(\ell(k)) \left[\prod_{j=k+1}^n e^{is\xi_j} \frac{|\xi_j|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{i\xi_j} dW_{\xi_j}(\ell(j)) \right]. \quad (2.126)$$

Cette dernière formule est formellement identique au chemin rugueux défini postérieurement par D. Nualart et S. Tindel [120], qui fait appel à la représentation par noyau de Volterra du brownien fractionnaire au lieu de la représentation harmonisable.

2.4.4 Renormalisation à la BPHZ: une esquisse

Le découpage du domaine d'intégration en Fourier est présent dans les premières démonstrations de la convergence des intégrales de Feynman renormalisées (cf. par exemple le livre de C. Itzykson et B. Zuber [107]). Les outils multi-échelles (cf. par ex. [126]) ont permis de simplifier ces démonstrations en dégagant la notion *adaptée aux échelles de renormalisation utile* ou de *diagrammes multi-échelles dangereux*, fondamentaux en théorie constructive (cf. sous-section suivante). Sans entrer dans les détails, la régularisation de domaine introduite dans le paragraphe précédent évite artificiellement l'apparition de diagrammes multi-échelles dangereux nécessitant une renormalisation. Il est naturel d'aller plus loin et de chercher à renormaliser les intégrales squelettes. C'est ce que nous faisons dans le preprint [28], dont nous proposons de donner brièvement un simple aperçu.

L'exemple le plus simple d'intégrale squelette est celui associé à l'aire de Lévy, $G_t^+ = \text{Sk}I_{\mathcal{P}^+(dB)}^t(1, 2)$ (cf. éq. (2.120)), qui s'écrit

$$G_t^+ = c_\alpha \int \int_{|\xi_2| > |\xi_1|} dW_{\xi_1}(1) dW_{\xi_2}(2) \frac{|\xi_1 \xi_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(\xi_1 + \xi_2)\xi_2} e^{it(\xi_1 + \xi_2)}. \quad (2.127)$$

Posons $\zeta_1 := \xi_1 + \xi_2$, $\zeta_2 := \xi_2$. Un bref calcul montre que si l'on remplace l'intégrande $\frac{|\xi_1 \xi_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(\xi_1 + \xi_2)\xi_2} = \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha} |\zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\zeta_1 \zeta_2}$ par $\frac{(|\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha} - |\zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}) |\zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\zeta_1 \zeta_2}$ — autrement dit, si l'on soustrait l'intégrande évaluée à un moment externe ζ_1 nul —, alors l'intégrale résultante est convergente ultra-violette. La raison pour cela tient au fait que dans le domaine divergent $|\zeta_2| \gg |\zeta_1|$, la différence $|\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha} - |\zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha}$ se comporte comme $O(|\zeta_2|^{-\frac{1}{2}-\alpha})$ au lieu de $O(|\zeta_2|^{\frac{1}{2}-\alpha})$.

De manière générale, la renormalisation consiste à soustraire de l'intégrande, de manière cohérente, un certain nombre de contretermes, de manière à obtenir une intégrale finie.

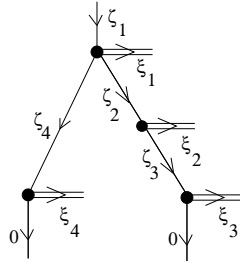


Figure 2.2: "Demi-diagramme" de Feynman associé à \mathbb{T} . La somme des moments en chaque sommet est nulle. Chaque ligne simple, resp. double contribue à l'intégrande un facteur multiplicatif $\frac{1}{\xi}$, resp. $|\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

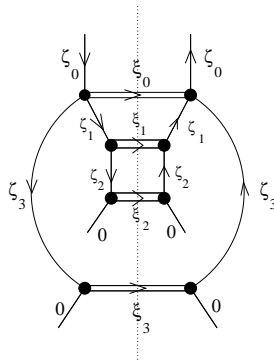


Figure 2.3: Diagramme de Feynman associé à \mathbb{T} . Chaque ligne double *contractée* contribue maintenant $|\xi|^{1-2\alpha}$ au lieu de $|\xi|^{\frac{1}{2}-\alpha}$.

L'intégrande se représente comme un "demi-diagramme" de Feynman, cf. ci-dessous l'exemple de l'intégrale squelette associée à $\mathbb{T} = {}^{2\uparrow}V_0^3$ (figure 2.2). Les moments $\zeta_i := \xi_i + \sum_{j \rightarrow i} \xi_j$ apparaissent dans le dénominateur de l'éq. (2.94). Chaque ligne double ξ_j porte de plus une "décoration" $dW_{\xi_j}(\ell(j))$. La *variance* de l'intégrale squelette se calcule, elle, à l'aide d'un diagramme de Feynman classique (figure 2.3) obtenu en collant le long d'un miroir (matérialisé par une ligne en pointillés sur la figure) un double symétrique du demi-diagramme. On retrouve G_t^+ , cf. éq. (2.127) et sa variance en se restreignant aux lignes d'indices 1 et 2.

Les règles de soustraction de contre-termes à l'intégrande définies en [28] suivent de près l'algorithme de BPHZ, ce qui permet d'estimer par les méthodes multi-échelles usuelles la variance renormalisée. Notons qu'en travaillant sur les *demi-diagrammes* et non sur les *diagrammes* eux-mêmes, on redéfinit directement la *variable aléatoire* $\text{SkI}_B^t(\mathbb{T})$.

La fin du travail consiste à vérifier en utilisant les formules (2.117), (2.118), (2.119) que le *chemin rugueux renormalisé* associé par l'algorithme de mise en ordre normal de Fourier est régulier.

2.4.5 De la théorie constructive des champs au calcul stochastique fractionnaire

Ce paragraphe se veut une introduction rapide aux idées développées dans le preprint [27], en collaboration avec J. Magnen (du Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique), permettant de construire une aire de Lévy au-dessus du brownien fractionnaire à deux composantes $B = (B(1), B(2))$ d'indice de Hurst $\alpha \in (1/8, 1/4)$.

Le brownien fractionnaire peut s'obtenir comme limite de marches aléatoires; on pourra se référer notamment à la construction récente de A. Hammond et S. Sheffield [105]. On passe facilement de là à la construction de B en considérant deux marches aléatoires indépendantes. Cependant, on peut imaginer que B représente le mouvement idéalisé dans \mathbb{R}^2 d'une particule, invariant par rotation, mais soumis à des contraintes de rotation (dues à une rigidité mécanique ou électromagnétique liée aux dimensions macroscopiques de la particule, ou à un phénomène similaire encore à élucider), introduisant une corrélation à l'échelle microscopique entre les deux composantes. Une description naturelle de ce phénomène dans le langage de la théorie quantique des champs consiste à ajouter un lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_{int} = (\partial \mathcal{A}^\pm)^2$, où \mathcal{A}^\pm sont les limites (divergentes ultra-violettes) quand $\eta \rightarrow 0$ des quantités mises en ordre normal de Fourier introduites dans la Définition 2.16. L'intuition fondamentale est que le champ B est dans un certain sens un *champ mésoscopique*, alors que \mathcal{A}^\pm dépend des détails *microscopiques* de la théorie. Cette idée est déjà présente en germe dans les travaux de Lejay [111]. A. Lejay explique comment les trajectoires de B peuvent être modifiées en insérant des bulles microscopiques tout du long, ce qui donne à la limite des trajectoires indistinguables de celles de B – autrement dit, mathématiquement parlant, il y a convergence en loi vers B pour la norme β -Hölder pour tout $\beta < \alpha -$, alors que l'aire de Lévy a été corrigée d'une quantité *arbitraire*. On doit donc chercher une interaction qui guérisse les divergences ultra-violettes à l'échelle microscopique, *sans modifier la théorie à l'échelle mésoscopique*. Si l'on comprend l'échelle mésoscopique comme une échelle basse-fréquence (ce qui n'est pas forcément approprié, puisqu'il y a deux échelles de référence ici, au lieu d'une seule), un candidat naturel serait une théorie en interaction asymptotiquement libre à grande distance (à l'échelle mésoscopique, pour être précis). L'exemple le plus connu d'un tel comportement est probablement celui de la théorie ϕ^4 infra-rouge en 4 dimensions [96]; mais dans ce cas, la constante de couplage augmente indéfiniment à petite distance, ce qui impose un cut-off ultra-violet. Dans notre cas, la constante de couplage λ a un flot trivial, si bien que la théorie sera bien définie à *toutes* les échelles, suggérant une théorie *juste renormalisable* (ou, en d'autres termes, une interaction intégrée homogène de degré 0). Comme $(\partial \mathcal{A}^\pm)^2$ est homogène de degré $(4\alpha - 2)$ en temps, on utilisera en fait un lagrangien d'interaction *non local*, $\frac{1}{2}c'_\alpha \int \int |t_1 - t_2|^{-4\alpha} \mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2)(t_1, t_2) dt_1 dt_2$, où ϕ_1, ϕ_2 sont les champs stationnaires divergents infra-rouges associés à B (en d'autres termes, les intégrales squelettes d'ordre 1 de B) et

$$\mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2)(t_1, t_2) = \lambda^2 \{ (\partial \mathcal{A}^+)(t_1)(\partial \mathcal{A}^+)(t_2) + (\partial \mathcal{A}^-)(t_1)(\partial \mathcal{A}^-)(t_2) \} \quad (2.128)$$

– une interaction *positive* pour $\alpha < 1/4$ puisque le noyau $|t_1 - t_2|^{-4\alpha}$ est

localement intégrable et défini positif. La mesure gaussienne $d\mu(\phi)$ est ainsi pénalisée par le poids exponentiel singulier $e^{-\frac{c'_\alpha}{2} \int \int \mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2)(t_1, t_2) |t_1 - t_2|^{-4\alpha} dt_1 dt_2}$. De manière équivalente, en utilisant la transformation de Hubbard-Stratonovich⁵, on introduit deux particules gaussiennes d'échange $\sigma_\pm(t)$ de covariance $\mathbb{E}\sigma_\pm(s)\sigma_\pm(t) = c'_\alpha |s - t|^{-4\alpha}$, de transformée de Fourier $|\xi|^{4\alpha-1}$, et on réécrit la fonction de partition $Z = Z(\lambda)$, poids total de la mesure pénalisée, sous la forme

$$Z := \int e^{-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2, \sigma)(t) dt} d\mu(\phi) d\mu(\sigma), \quad (2.129)$$

où

$$\mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2, \sigma)(t) = i\lambda (\partial \mathcal{A}^+(t) \sigma_+(t) - \partial \mathcal{A}^-(t) \sigma_-(t)). \quad (2.130)$$

Tout ceci est mal défini mathématiquement puisque (1) σ est un processus à valeurs distributions et $\partial \mathcal{A}^\pm$ n'est pas *du tout* défini quand $\alpha \leq 1/4$; (2) on intègre sur \mathbb{R} une quantité invariante par translation puisque construite à partir de champs stationnaires.

Supposons le paramètre de couplage λ *assez petit*. La théorie perturbative des champs suggère alors de développer formellement l'exponentielle du lagrangien et de calculer les moments polynomiaux de ϕ ou σ , par exemple, $\frac{1}{Z} \mathbb{E} \left[\sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) e^{-\int \mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2, \sigma)(t) dt} \right]$, également appelée *fonction à n points de σ* et notée $\langle \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle_\lambda$. En utilisant la formule de Wick, on peut représenter cette quantité comme une somme sur des diagrammes de Feynman, $\sum_\Gamma A(\Gamma)$, où Γ parcourt l'ensemble des diagrammes à n pattes σ externes, et $A(\Gamma)$ est l'évaluation correspondante. Par intégration par parties fonctionnelle (suivant la formule dite de Schwinger-Dyson⁶), on obtient

$$\langle |\mathcal{F}(\partial \mathcal{A}^\pm)(\xi)|^2 \rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{1-4\alpha} [1 - |\xi|^{1-4\alpha} \langle |(\mathcal{F}\sigma_+)(\xi)|^2 \rangle_\lambda]. \quad (2.131)$$

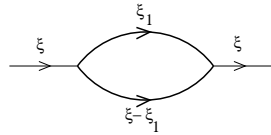


Figure 2.4: Diagramme bulle. La somme des moments en chaque sommet est nulle. Les lignes en gras sont des champs ϕ , les lignes simples des champs σ . Chaque ligne contribue à l'intégrande un facteur multiplicatif égal à la covariance en Fourier, $|\xi|^{1-2\alpha}$ ou $|\xi|^{4\alpha-1}$ suivant le cas.

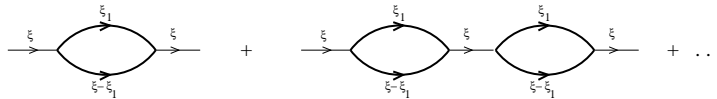


Figure 2.5: Deux premiers termes de la série de bulles.

⁵une extension en dimension infinie de l'identité $\mathbb{E}e^{i\lambda X} = e^{-\sigma^2 \lambda^2 / 2}$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

⁶une extension en dimension infinie de la formule bien connue pour les vecteurs gaussiens, $\mathbb{E}[\partial_{X_i} F(X_1, \dots, X_n)] = \sum_j C^{-1}(i, j) \mathbb{E}[X_j F(X_1, \dots, X_n)]$ si C est la matrice de covariance de (X_1, \dots, X_n) .

Considérons (en utilisant un cut-off ultraviolet brutal à $|\xi| = \Lambda$) le terme de plus bas degré en λ dans le terme entre crochets: il est essentiellement égal (au signe près) à l'évaluation du diagramme bulle à demi amputé, cf. Fig. 2.4,

$$\begin{aligned} & -|\xi|^{1-4\alpha} \cdot (-i\lambda)^2 \int_{|\xi_1| < |\xi - \xi_1|}^{\Lambda} d\xi_1 \\ & \quad \left\{ \left(\mathbb{E}[\|\mathcal{F}\sigma_+(\xi)\|^2] \right)^2 \mathbb{E}[\|\mathcal{F}(\partial\phi_1)(\xi_1)\|^2] \mathbb{E}[\|\mathcal{F}\phi_2(\xi - \xi_1)\|^2] \right\} \\ & = \lambda^2 |\xi|^{4\alpha-1} \int_{|\xi_1| < |\xi - \xi_1|}^{\Lambda} d\xi_1 |\xi_1|^{1-2\alpha} |\xi - \xi_1|^{-1-2\alpha} \sim_{\Lambda \rightarrow \infty} K \lambda^2 (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

une quantité divergente mais *positive*. Si l'on resomme *formellement* la série de bulles comme dans la Fig. 2.5 – la justification mathématique de cette procédure nécessite de dépasser la théorie perturbative –, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{1-4\alpha} \left[1 - \frac{1}{1 + K \lambda^2 (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}} \right] &= \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{1-4\alpha} \cdot \frac{K \lambda^2 (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}}{1 + K \lambda^2 (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}} \\ &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{1-4\alpha}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Ainsi, le propagateur "nu" $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}}$ a été remplacé par le propagateur *renormalisé* $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha} + K \lambda^2 \Lambda^{1-4\alpha}}$, qui s'annule dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Dans des termes plus physiques, l'interaction en $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}}$ a été totalement écrantée ("screened") par un contre-terme de masse infini $K \lambda^2 \Lambda^{1-4\alpha}$. Les diagrammes plus compliqués – d'ordre plus élevé en λ – apparaissant dans l'éq. (2.131) s'annulent également quand $\Lambda \rightarrow \infty$. Il reste simplement:

$$\langle |\mathcal{F}\mathcal{A}^\pm(\xi)|^2 \rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{-1-4\alpha}. \quad (2.134)$$

Des arguments de comptage de puissance standards montrent en revanche que les diagrammes connexes avec 4, 6, ... pattes externes σ sont convergents. La fonction génératrice des moments connexes de l'aire de Lévy (le logarithme de la fonction génératrice usuelle) n'est donc pas modifiée par l'interaction, *sauf* le terme de degré 2 (la variance), qui a été rendu fini. Quant à la loi du champ ϕ ou de B , elle est inchangée à la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, toujours pour les mêmes raisons.

La théorie constructive des champs permet de rendre ces arguments rigoureux. Elle est fondée sur un développement multi-échelle des champs dans l'espace de Fourier, $\phi^j := D(\chi_j)\phi$ (dit: *vertical*), cf. éq. (2.102), complété par un développement dit *horizontal* dans l'espace direct, dans des intervalles dyadiques Δ^j de taille 2^{-j} – une sorte de développement en ondelettes simplifié –, permettant lui-même un *développement en cluster*. Le principe est le suivant. Le champ $\psi = \phi$ ou σ se décompose comme une somme $\sum_j \sum_{\Delta^j} \psi^j|_{\Delta^j}$. L'interaction diverge parce que cette somme

est doublement infinie. Le développement en cluster permet de réécrire la fonction de partition $Z_V^{\rightarrow\rho}$ (avec un cut-off ultraviolet d'échelle $j = \rho$ et un cut-off de volume V dans l'espace direct) comme une somme,

$$Z_V^{\rightarrow\rho} = \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n \text{ non-overlapping}} F_{HV}(\mathbb{P}_1) \dots F_{HV}(\mathbb{P}_n), \quad (2.135)$$

où $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ sont des *polymères* disjoints, i.e. des ensembles d'intervalles dyadiques Δ connectés par des liens horizontaux et verticaux; au cours du développement, la mesure gaussienne a été modifiée de sorte que les composantes des champs appartenant à des polymères différents sont devenues indépendantes.

L'idée maintenant est que (i) la fonction $F_{HV}(\mathbb{P})$ est d'autant plus petite que le polymère est étendu, tant horizontalement (en raison de la décroissance polynomiale des corrélations à grande distance) que verticalement, ce qui conduit à l'image d'*îles horizontales* maintenues ensemble par des *ressorts* verticaux; (ii) les liens horizontaux et verticaux dans \mathbb{P} (une fois qu'un seul intervalle de \mathbb{P} a été fixé) suppriment l'invariance par translation responsable des divergences. Une astuce combinatoire classique, appelée *développement de Mayer*, permet de réécrire l'éq. (2.135) comme une somme similaire sans les conditions de non-overlap. La procédure permet de resommer en une exponentielle les *parties locales des graphes divergents*, conduisant à des analogues multi-échelles du contre-terme de masse évoqué ci-dessus dans le cas particulier du modèle $(\phi, \partial\phi, \sigma)$; c'est l'essence même de la *renormalisation* dans sa version constructive. Finalement, on trouve, dans la limite $|V|, \rho \rightarrow \infty$, que l'énergie libre $\ln Z_V^{\rightarrow\rho}$ est une somme sur chaque échelle de quantités *extensives* dépendant de l'échelle considérée, i.e. $\ln Z_V^{\rightarrow\rho} = |V| \sum_{j=0}^{\rho} 2^j f_V^{j \rightarrow \rho}$, où $f_V^{j \rightarrow \rho}$ converge quand $|V| \rightarrow \infty$ vers une quantité finie de l'ordre de $O(\lambda)$. On retrouve l'idée que chaque intervalle dyadique Δ^j d'échelle j contient un degré de liberté.

La sommation formelle de la chaîne de bulles ci-dessus prend alors tout son sens si λ a été choisi assez petit pour que la série converge à l'échelle maximale ρ .

Références bibliographiques

- [1] J. Unterberger. *Prolongement analytique des séries de Fourier sur un groupe compact*, C. R. A. S. Paris **324** (I), 1089–1092 (1997).
- [2] J. Unterberger. *Analyse harmonique sur un espace symétrique ordonné et sur son dual compact*, Thèse de doctorat de l’université Paris VI (1999).
- [3] M. Henkel, J. Unterberger. *Schrödinger invariance and space-time symmetries*, Nucl. Phys. **B660**, 407–435 (2003).
- [4] N. B. Andersen, J. Unterberger, *Harmonic analysis on $SU(n, n)/SL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}_+^*$* , J. Lie Theory **10**, 311–322 (2000).
- [5] F. Ricci, J. Unterberger, *Solvability of invariant sublaplacians on spheres and group contractions*, Rend. Mat. Acc. Lincei **9** (12), 27–42 (2001).
- [6] J. Unterberger. *Hypergeometric functions of second kind and spherical functions on an ordered symmetric space*, J. Funct. Anal. **188**, 137–155 (2002).
- [7] N. B. Andersen, J. Unterberger, *An application of shift operators to ordered symmetric spaces*, Ann. Inst. Fourier **52** (1), 275–288 (2002).
- [8] M. Henkel, A. Picone, M. Pleimling, J. Unterberger. *Local scale invariance and its applications to strongly anisotropic critical phenomena*, Mathematical Physics Frontiers, Nova Science, New York (2004).
- [9] C. Roger, J. Unterberger. *The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study*, Ann. Henri Poincaré **7**, 1477–1529 (2006).
- [10] M. Henkel, J. Unterberger, *Supersymmetric extensions of Schrödinger-invariance*, Nucl. Phys. **B746**, 155–201 (2006).
- [11] J. Unterberger, *The Schrödinger-Virasoro Lie algebra: a mathematical structure between conformal field theory and non-equilibrium dynamics*, Journal of Physics, Conference Series **40**, 156 (2006).
- [12] M. Henkel, R. Schott, S. Stoimenov, J. Unterberger, *On the dynamical symmetric algebra of ageing: Lie structure, representations and Appell systems*, Quantum Probab. White Noise Anal. **20**, 233–240 (2007).
- [13] J. Unterberger. *On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro algebra*, Nucl. Phys. **B823** (3), 320–371 (2009).

- [14] J. Unterberger. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst exponent $H > 1/4$: a rough path method by analytic extension*, Ann. Prob. **37** (2), 565–614 (2009).
- [15] J. Unterberger. *A classification of periodic time-dependent generalized harmonic oscillators using a Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro group*. A paraître dans: Confluentes Mathematicae.
- [16] S. Tindel, J. Unterberger. *The rough path associated to the multidimensional analytic fBm with any Hurst parameter*. Preprint arXiv:0810.1408. A paraître dans: Collectanea Mathematica.
- [17] A. Böttcher, S. Grudsky, J. Unterberger. *Asymptotic pseudomodes of Toeplitz matrices*, Operators and Matrices **2**, 525–541 (2008).
- [18] J. Unterberger. *A central limit theorem for the rescaled Lévy area of two-dimensional Brownian motion with Hurst index $H < 1/4$* . Preprint arXiv:0808.3458.
- [19] C. Roger, J. Unterberger. *A Hamiltonian action of the Schrödinger-Virasoro algebra on a space of periodic time-dependent Schrödinger operators in $(1+1)$ -dimensions*. A paraître dans: Journal of Nonlinear Mathematical Physics.
- [20] A. Böttcher, S. Grudsky, E. A. Maksimenko, J. Unterberger. *The first order asymptotics of the extreme eigenvectors of certain Hermitian Toeplitz matrices*, Integr. Equ. oper. theory **63**, 165–180 (2009).
- [21] J. Unterberger. *A stochastic calculus for multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index*, Stoch. Proc. Appl. **120** (8), 1444–1472 (2010).
- [22] A. Neuenkirch, S. Tindel, J. Unterberger. *Discretizing the fractional Lévy area*, Stoch. Proc. Appl. **120** (2), 223–254 (2010).
- [23] J. Unterberger. *Hölder-continuous rough paths by Fourier normal ordering*, Comm. Math. Phys. **298** (1), 1–36 (2010).
- [24] J. Unterberger. *A Lévy area by Fourier normal ordering for multidimensional fractional Brownian motion with small Hurst index*. Preprint arXiv:0906.1416.
- [25] J. Unterberger. *Moment estimates for solutions of linear stochastic differential equations driven by analytic fractional Brownian motion*. Preprint arXiv:0905.0782. A paraître dans: Elec. Comm. Prob.
- [26] en collaboration avec L. Foissy. *Ordered forests, permutations and iterated integrals*. Preprint arXiv:1004.5208. Soumis à: Journal of Algebra.
- [27] en collaboration avec J. Magnen. *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (I) The Lévy area of fractional Brownian motion with Hurst index $\alpha \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$* . Preprint arXiv:1006.1255.
- [28] *A renormalized rough path over fractional Brownian motion*. Preprint arXiv:1006.5604.

- [29] C. Roger, J. Unterberger. *The Schrödinger-Virasoro algebra. Mathematical structure of dynamical Schrödinger symmetries*. Monographie en préparation.

Bibliographie générale du premier chapitre

- [30] C. Albert, P. Molino. *Pseudogroupes de Lie transitifs. I*, Hermann, Paris (1984).
- [31] M. Alishahiha, A. Davody, A. Vahedi. *On AdS/CFT of Galilean conformal field theories*. Preprint arXiv:0903.3953.
- [32] K. Balasubramanian, J. McGreevy. *Gravity duals for non-relativistic CFTs*, Phys. Rev. Lett. **101**, 061601 (2008).
- [33] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov. *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (2), 333–380 (1984).
- [34] F. A. Berezin, M. A. Shubin. *The Schrödinger equation*, Kluwer Academic Publishers (1991).
- [35] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger. *The geometric phase in quantum systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer (2003).
- [36] E. Cartan. *Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **42** (3), 17–88 (1925).
- [37] P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber. *Classical W-algebras*, Comm. Math. Phys. **140** (3), 543–567 (1991).
- [38] C. Duval, H. P. Künzle. *Minimal gravitational coupling in the Newtonian theory and the covariant Schrödinger equation*, General Relativity and Gravitation **16** (4) (1984).
- [39] C. Duval. *Nonrelativistic conformal symmetries and Bargmann structures*, in : *Conformal groups and related symmetries : physical results and mathematical background*, Springer Lecture Notes in Physics **261** (1986).
- [40] C. Duval, G. Gibbons, P. Horváthy. *Celestial mechanics, conformal structures, and gravitational waves*, Phys. Rev. **D43** (12) (1991).
- [41] C. Duval. *On Galilean isometries*, Class. Quantum Grav. **10** (1993), 2217–2221.
- [42] D. Freed, *Five lectures on supersymmetry*, AMS (Providence 1999).
- [43] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker. Phys. Rev. Lett. **52**, 1575 (1984); Commun. Math. Phys. **107**, 535 (1986).
- [44] D. B. Fuks. *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Contemporary Soviet Mathematics, Consultants Bureau, New York (1986).

- [45] I. M. Gelfand, G. E. Shilov. *Generalized functions*, Vol. 1, Academic Press, New York (1964).
- [46] P. Goddard, A. Kent. D. Olive. *Commun. Math. Phys.* **103**, 105 (1986).
- [47] L. Guieu, C. Roger. *L'Algèbre et le Groupe de Virasoro: aspects géométriques et algébriques, généralisations*. Publications CRM, Montréal (2007).
- [48] G. Hagedorn. *Raising and lowering operators for semiclassical wave packets*, *Ann. Phys.* **269** (1), 77–104 (1998).
- [49] G. Hagedorn, M. Loss, J. Slawny. *Non-stochasticity of time-dependent quadratic Hamiltonians and the spectra of canonical transformations*, *J. Phys. A*. **19**, 521–531 (1986).
- [50] M. Henkel. *Schrödinger invariance and strongly anisotropic critical systems*, *J. Stat. Phys.* **75**, 1023 (1994).
- [51] M. Henkel. *Phenomenology of local scale invariance: from conformal invariance to dynamical scaling*, *Nucl. Phys.* **B641**, 405 (2002).
- [52] M. Henkel. *Phase-ordering kinetics: ageing and local scale-invariance*, *cond-mat/0503739*.
- [53] M. Henkel. *Ageing, dynamical scaling and its extensions in many-particle systems without detailed balance*, *J. Phys. Condens. Matt.* **19**, P065202 (2007).
- [54] *Mathematical statistical physics* (ed.: A. Bovier, F. Dunlop, F. den Hollander, A. van Enter, J. Dalibard). Ecole de physique théorique des Houches LXXXIII, 2005, Elsevier (2006).
- [55] E. V. Ivashkevich. *Symmetries of the stochastic Burgers equation*, *J. Phys.* **A30** (15), 525–535 (1997).
- [56] A. Joye. *Geometric and mathematical aspects of the adiabatic theorem of quantum mechanics*, Ph. D. thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1992).
- [57] V. G. Kac. *Vertex algebras for beginners*, AMS (1998).
- [58] B. Khesin, R. Wendt. *The geometry of infinite-dimensional Lie groups*, Series of Modern Surveys in Mathematics Vol. 51, Springer (2008).
- [59] A. A. Kirillov. *Infinite-dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations. The geometry of moments*, *Lecture Notes in Maths.* **970**, 101–123 (1982).
- [60] H. R. Lewis, W. B. Riesenfeld, *An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field*, *J. Math. Phys.* **10** (8), 1458–1473 (1969).
- [61] J.-M. Lévy-Leblond. *Nonrelativistic particles and wave equations*, *Comm. Math. Phys.* **6**, 286 (1967).

- [62] G. F. Lawler, O. Schramm, W. Werner. *Values of Brownian intersection exponents*, Acta Math. **187** (2), 237–308 (2001).
- [63] G. F. Lawler, O. Schramm, W. Werner. *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Ann. Prob. **32** (1B), 939–995 (2004).
- [64] G. F. Lawler, O. Schramm, W. Werner. *Conformal restriction: the chordal case*, J. Amer. Math. Soc. **16** (4), 917–955 (2003).
- [65] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*, Classics in Mathematics, Springer (2005).
- [66] W. Magnus, S. Winkler. *Hill's equation*, John Wiley and Sons (1966).
- [67] C. Martin, A. Piard. *Classification of the indecomposable bounded admissible modules over the Virasoro Lie algebra with weight spaces of dimension not exceeding two*, Comm. Math. Phys. **150**, 465–493 (1992).
- [68] O. Mathieu. *Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra*, Invent. Math. **107**, 225–234 (1992).
- [69] O. Mathieu. *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth*, Invent. Math. **108**, 455–519 (1992).
- [70] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance groups of Schrödinger equations with arbitrary potentials*, Helv. Phys. Act. **47**, 167–172 (1974).
- [71] V. Ovsienko, C. Roger. *Generalizations of Virasoro group and Virasoro algebra through extensions by modules of tensor-densities on S^1* , Indag. Math. (N.S.) **9** (2), 277–288 (1998).
- [72] V. Ovsienko, C. Roger. *Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension $2 + 1$* , Comm. Math. Phys **273** (2), 357–378 (2007).
- [73] A. G. Reiman, M. A. Semenov-Tyan-Shanskii. *Hamiltonian structure of Kadomtsev-Petivashvili type equations*, Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova AN SSSR **133**, 212–227 (1984).
- [74] S. Sheffield. *Gaussian free fields for mathematicians*, Probab. Th. Relat. Fields **139**, 521–541 (2007).
- [75] W. Werner. *Random planar curves and Schramm-Löwner Evolutions*, Lecture Notes in Mathematics **1840**, 107–195 (2004).

Bibliographie générale du deuxième chapitre

- [76] E. Alòs, O. Mazet, D. Nualart. *Stochastic calculus with respect to Gaussian processes*, Ann. Prob. **29** (2), 766–801 (2001).
- [77] E. Alòs, D. Nualart. *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion*, Stoch. Stoch. Rep. **75** (3), 129–152 (2003).

- [78] R. F. Bass, B. M. Hambly, T. J. Lyons. *Extending the Wong-Zakai theorem to reversible Markov processes*, J. Eur. Math. Soc. **4**, 237–269 (2002).
- [79] F. Baudoin, M. Hairer. *A version of Hörmander’s theorem for the fractional Brownian motion*, Prob. Th. Rel. Fields **139** (3), 373–395 (2007).
- [80] C. Brouder, A. Frabetti. *QED Hopf algebras on planar binary trees*, Journal of Algebra **267**, 298–322 (2003).
- [81] C. Brouder, A. Frabetti, C. Krattenthaler, *Non-commutative Hopf algebra of formal diffeomorphisms*, Advances in Math. **200**, 479–524 (2006).
- [82] J. C. Butcher. *An algebraic theory of integration methods*, Math. Comp. **26**, 79–106 (1972).
- [83] P. Carmona, L. Coutin, G. Montseny. *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **39** (1), 27–68 (2003).
- [84] T. Cass, P. Friz. *Densities for rough differential equations under Hörmander’s condition*, Ann. Math. **171** (3), 2115–2141 (2010).
- [85] V. Chari, A. Pressley. *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press (1994).
- [86] P. Cheridito, D. Nualart, *Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, \frac{1}{2})$* , Ann. Inst. H. Poincaré **B41**(6), 1049 (2005).
- [87] A. Connes, D. Kreimer. *Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1), 203–242 (1998).
- [88] A. Connes, D. Kreimer. *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem (I)*, Comm. Math. Phys. **210** (1), 249–273 (2000).
- [89] A. Connes, D. Kreimer. *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem (II)*, Comm. Math. Phys. **216** (1), 215–241 (2001).
- [90] L. Coutin, Z. Qian. *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions*, Probab. Theory Related Fields **122** (1), 108–140 (2002).
- [91] S. Darses, I. Nourdin, D. Nualart. *Limit theorems for non-linear functionals of Volterra processes via white noise analysis* (arXiv:0904.1401).
- [92] A. Davie. *Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximation*, Appl. Math. Res. Express. **2** (2007).
- [93] A. Deya, S. Tindel. *Rough Volterra equations 2: convolutional generalized integrals*. Preprint <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00328409/en/>.

- [94] K. Dzhaparidze, H. van Zanten, *A series expansion of fractional Brownian motion*, Probab. Theory Relat. Fields **130**, 39-55 (2004).
- [95] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi, H. Bateman, *Tables of integral transforms*, vol. 1, McGraw-Hill (1954).
- [96] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor. *Construction and Borel summability of infrared Φ_4^4 by a phase space expansion*, Comm. Math. Phys. **109**, 437–480 (1987).
- [97] L. Foissy. *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés (I)*, Bull. Sci. Math., **126** (3), 193–239, and *(II)*, Bull. Sci. Math., **126** (4), 249–288 (2002).
- [98] P. Friz, N. Victoir: *Multidimensional dimensional processes seen as rough paths*. Cambridge University Press (2010).
- [99] M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo, P. Vallois. *m-order integrals and generalized Itô's formula: the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index*, Ann. Inst. H. Poincaré **B41**(4), 781 (2004).
- [100] M. Gubinelli. *Controlling rough paths*, J. Funct. Anal. **216**, 86-140 (2004).
- [101] M. Gubinelli. *Ramification of rough paths*. Preprint available on Arxiv (2006).
- [102] M. Gubinelli, S. Tindel. *Rough evolution equations*, Ann. Prob. **38** (1), 1–75 (2010).
- [103] M. Hairer, N. S. Pillai. *Ergodicity of hypoelliptic SDEs driven by fractional Brownian motion*. Preprint arXiv:0909.4505.
- [104] B. Hambly, T. J. Lyons. *Stochastic area for Brownian motion on the Sierpinski basket*, Ann. Prob. **26** (1), 132–148 (1998).
- [105] A. Hammond, S. Sheffield. *Power law Polya's urn and fractional Brownian motion*, preprint arXiv:0903.1284.
- [106] K. Hepp. *Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization*, Commun. Math. Phys. **2** (4), 301–326 (1966).
- [107] C. Itzykson, J.-B. Zuber. *Quantum field theory*, International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill International Book Co., New York (1980).
- [108] Kahane J.-P. *Some random series of functions*, Cambridge studies in advanced mathematics **5** (1985).
- [109] T. Kühn, W. Linde. *Optimal series representation of fractional Brownian sheets*, Bernoulli **8** (5), 669-696 (2002).
- [110] A. Lejay. *An introduction to rough paths*, Séminaire de Probabilités XXXVII, 1–59, Lecture Notes in Math., 1832 (2003).
- [111] A. Lejay. *Yet another introduction to rough paths*, à paraître dans: Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag (2009).

- [112] T. Lyons. *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (2), 215–310 (1998).
- [113] T. Lyons, N. Victoir. *An extension theorem to rough paths*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (5), 835–847 (2007).
- [114] T. Lyons, Z. Qian. *System control and rough paths*, Oxford University Press (2002).
- [115] A. Neuenkirch, I. Nourdin, A. Rössler, S. Tindel. *Trees and asymptotic developments for fractional stochastic differential equations*. A paraître (arXiv:math.PR/0611306).
- [116] I. Nourdin, D. Nualart, C. Tudor. *Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion*. Preprint arXiv:0710.5639 (2008).
- [117] D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics (2ème édition)*, Probability and its applications, Springer Verlag, New-York (1995).
- [118] D. Nualart, S. Ortiz-Latorre. *Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus*, Stoch. Proc. Appl. **118**, 614–628 (2008).
- [119] D. Nualart, G. Peccati. *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals*, Ann. Prob. **33**(1), 177–193 (2005).
- [120] D. Nualart, S. Tindel. *A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra’s representation* (arXiv:0909.1307).
- [121] G. Peccati, C. Tudor. *Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals*, Séminaire de Probabilités XXXVIII, Lecture Notes in Mathematics 1857, Springer, 247–262 (2005).
- [122] Ll. Quer, S. Tindel. *The 1-dimensional stochastic wave equation driven by a fractional Brownian motion*, Stoch. Proc. Appl. **117** (10), 1448–1472 (2007).
- [123] J. Magnen, V. Rivasseau. *Constructive ϕ^4 field theory without tears*, Ann. Henri Poincaré **9**, 403–424 (2008).
- [124] F. Russo, P. Vallois. *Forward, backward and symmetric stochastic integration*, Prob. Th. Relat. Fields **97**, 403–421 (1993).
- [125] H. Triebel. *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type*. Teubner, Leipzig (1978).
- [126] F. Vignes-Tourneret. *Renormalisation des théories de champs non commutatives*, Thèse de doctorat de l’Université Paris 11, arXiv:math-ph/0612014.