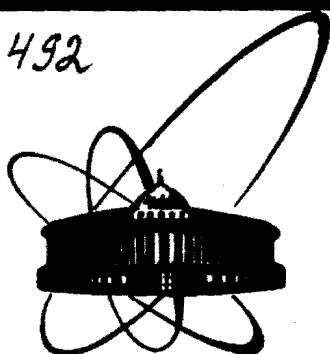


У-492



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-86-207

Н.А.Черников

КОНСПЕКТ ТЕОРИИ АФИННОЙ СВЯЗНОСТИ
ДЛЯ ГРАВИТАЦИОНИСТОВ

1986

Предлагаемый вниманию гравитационистов конспект теории аффинной связности написан по книге ^{/1/} в связи с дискуссией об энергии гравитационного поля /см. ^{/2/} и цитированную там литературу/. При этом получились результаты, имеющие прямое отношение к столь трудному понятию. Вместе с конспектом публикуем и эти результаты.

Все геометрические объекты в данной работе отнесены к координатному базису dx^a и дуальному базису $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$.

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Тензорным полем T типа $\binom{A}{B}$ называем тензорное поле с компонентами $T_{b_1 \dots b_B}^{a_1 \dots a_A}$.

Аффинная связность Γ вводится на многообразии с таким расчетом, чтобы ковариантная производная ∇T любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ являлась тензорным полем типа $\binom{A}{B+1}$.

Для векторного поля полагают

$$\nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma_{mn}^a T_a. \quad /1/$$

Отсюда следует, что компоненты Γ_{mn}^a связности при переходе от координатной карты K к карте $\bar{K}$ преобразуются по правилу

$$\bar{\Gamma}_{mn}^a = \left(\Gamma_{pq}^i \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} \right) \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}. \quad /2/$$

Из /2/ следует, что для любого векторного поля T комбинации

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma_{mn}^a T^n \quad /3/$$

являются компонентами тензорного поля ∇T типа $\binom{1}{1}$.

Ковариантная производная любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ составляется по правилу дифференцирования произведения, например:

$$\nabla_k T_{mn} = \partial_k T_{mn} - \Gamma_{km}^s T_{sn} - \Gamma_{kn}^s T_{ms},$$

$$\nabla_k T_m^a = \partial_k T_m^a - \Gamma_{km}^s T_s^a + \Gamma_{ks}^a T_m^s.$$

$$\nabla_k T^{ab} = \partial_k T^{ab} + \Gamma_{ks}^a T^{sb} + \Gamma_{ks}^b T^{as},$$

$$\nabla_k T_{mn}^a = \partial_k T_{mn}^a - \Gamma_{km}^s T_{sn}^a - \Gamma_{kn}^s T_{ms}^a + \Gamma_{ks}^a T_{mn}^s. \quad /4/$$

Для скалярной функции T полагают $\nabla_k T = \partial_k T$.
Как это следует из /2/, разность

$$S_{mn}^a = \Gamma_{mn}^a - \Gamma_{nm}^a \quad /5/$$

является тензором. Его называют тензором кручения. Иногда тензором кручения называют половину разности /5/.

Рассмотрим оператор

$$\nabla_{kl} = \nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k + S_{kl}^p \nabla_p. \quad /6/$$

В применении к скалярной функции T он дает нуль ($\nabla_{kl} T = 0$), а в применении к ковекторному полю T_n^a - следующий результат:

$$\nabla_{kl} T_n^a = -R_{kln}^a T_a^a, \quad /7/$$

где

$$R_{kln}^a = \partial_k \Gamma_{ln}^a - \partial_l \Gamma_{kn}^a + \sum_{s=1}^N (\Gamma_{ks}^a \Gamma_{ln}^s - \Gamma_{ls}^a \Gamma_{kn}^s). \quad /8/$$

Из /7/ следует, что комбинация /8/ является тензором. Он называется тензором кривизны или тензором Римана - Кристоффеля.
Свертка

$$R_{ln} = R_{aln}^a \quad /9/$$

называется тензором Риччи. Заметим очевидное тождество

$$R_{kln}^a + R_{lkn}^a = 0. \quad /10/$$

В применении к векторному полю T^a оператор /6/ дает

$$\nabla_{kl} T^a = R_{kln}^a T^n^a. \quad /11/$$

Легко просматривается аналогия между формулами /1/, /3/ и формулами /7/, /11/. Она распространяется на все тензорные поля.
Например,

$$\begin{aligned} \nabla_{kl} T_{mn} &= -R_{klm}^s T_{sn} - R_{kln}^s T_{ms}, \\ \nabla_{kl} T_m^a &= -R_{klm}^s T_s^a + R_{kls}^a T_m^s, \\ \nabla_{kl} T^{ab} &= R_{kls}^a T^{sb} + R_{kls}^b T^{as}, \end{aligned} \quad /12/$$

$$\nabla_{kl} T_{mn}^a = -R_{klm}^s T_{sn}^a - R_{kln}^s T_{ms}^a + R_{kls}^a T_{mn}^s.$$

Формулы /12/ получаются из формул /4/ заменой $\nabla_k - \partial_k$ на ∇_{kl} и Γ_{km}^a на R_{klm}^a .

СВЕРНУТАЯ СВЯЗНОСТЬ

Свернутой /аффинной/ связностью называем свертку

$$\Gamma_m = \Gamma_{ma}^a. \quad /13/$$

Согласно /2/, ее компоненты преобразуются следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m} \Gamma_p + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m}. \quad /14/$$

Эту формулу можно привести к виду

$$\tilde{\Gamma}_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m} (\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^p} \ln J), \quad /14'/$$

где J - якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x^1, \dots, x^N)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N)}, \quad /15/$$

так как дифференциал определителя ϕ любой матрицы (ϕ_k^i) равен $d\phi = \bar{\phi}_i^k d\phi_k^i$, где $\bar{\phi}_i^k$ - алгебраическое дополнение элемента ϕ_k^i .

Ковариантная производная тензора типа $\binom{0}{N}$ равна

$$\begin{aligned} \nabla_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} &= \partial_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} - \Gamma_{mk_1}^a \epsilon_{ak_2 \dots k_N} - \dots - \\ &- \Gamma_{mk_N}^a \epsilon_{k_1 \dots k_{N-1}a}. \end{aligned} \quad /16/$$

Если этот тензор антисимметричен по любой паре значков $k_1 \dots k_N$, то комбинация

$$\Gamma_{ma}^b \epsilon_{k_1 \dots k_N} - \Gamma_{mk_1}^b \epsilon_{ak_2 \dots k_N} - \dots - \Gamma_{mk_N}^b \epsilon_{k_1 \dots k_{N-1}a} \quad /16'/$$

антисимметрична по любой паре значков $a, k_1, \dots, k_N$. Следовательно, она равна нулю и

$$\nabla_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} = (\partial_m - \Gamma_m) \epsilon_{k_1 \dots k_N}. \quad /16''/$$

Аналогично доказывается, что

$$\nabla_{mn} \epsilon_{k_1 \dots k_N} = -R_{mna}^a \epsilon_{k_1 \dots k_N} \quad /17/$$

Из /8/ находим, что другая свертка тензора кривизны равна

$$\Omega_{mn} = R_{mna}^a = \partial_m \Gamma_n - \partial_n \Gamma_m. \quad /18/$$

Этот тензор называем кривизной свернутой связности.

На ориентируемом многообразии существует нигде не обращающаяся в нуль N-форма. Выбирая такой атлас, для которого все якобианы /15/ больше нуля, можем положить $\epsilon = \epsilon_{1\dots N} > 0$ для всех карт, составляющих атлас. Действительно, если $\epsilon > 0$, то и $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_{1\dots N} = J\epsilon > 0$. Полагая, что ковариантная производная тензора $\epsilon_{k_1 \dots k_N}$ равна нулю, из /16'/ находим

$$\Gamma_m = \partial_m \ln \epsilon. \quad /19/$$

В таком случае

$$\Omega_{mn} = 0. \quad /20/$$

По сути здесь мы имели дело с "продолженным" дифференцированием и "длинной" производной.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЯЗНОСТИ

Пусть теперь на многообразии заданы две связности, Γ и $\tilde{\Gamma}$ с коэффициентами Γ_{mn}^a и $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ соответственно. Переход от одной из них к другой называется преобразованием связности /1/. Из /2/ следует, что разность

$$P_{mn}^a = \tilde{\Gamma}_{mn}^a - \Gamma_{mn}^a \quad /21/$$

является тензором. Этот тензор называют тензором аффинной деформации. Подставляя взятое отсюда выражение для $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ в формулу /8/, получаем закон изменения тензора кривизны при преобразовании связности:

$$\tilde{R}_{kln}^a = R_{kln}^a + S_{kl}^m P_{mn}^a + \nabla_k P_{ln}^a - \nabla_l P_{kn}^a + \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s). \quad /22/$$

Разность

$$P_m = \tilde{\Gamma}_m - \Gamma_m = P_{ma}^a \quad /23/$$

есть ковектор аффинной деформации. Из /18/ получаем закон изменения тензора кривизны свернутой связности:

$$\tilde{\Omega}_{kl} = \Omega_{kl} + \partial_k P_l - \partial_l P_k, \quad /24/$$

что согласуется с /22/.

СИММЕТРИЧНАЯ СВЯЗНОСТЬ. ЭКВИАФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Дальше будем рассматривать только симметричные связности, т.е. будем полагать

$$\Gamma_{mn}^a = \Gamma_{nm}^a, \quad /25/$$

так что тензор кручения будет равняться нулю.

В этом случае

$$R_{kln}^a + R_{nkl}^a + R_{lnk}^a = 0. \quad /26/$$

В результате свертки отсюда получаем

$$\Omega_{kl} + R_{kl} - R_{lk} = 0. \quad /27/$$

Симметричная связность, свертка которой равна /19/, называется эквивафинной. В этом случае тензор Риччи симметричен:

$$R_{kl} = R_{lk}. \quad /28/$$

Наряду с алгебраическими тождествами /10/ и /26/ существует еще одно весьма важное дифференциальное тождество, а именно:

$$\nabla_l R_{kln}^a + \nabla_l R_{ikn}^a + \nabla_k R_{lin}^a = 0, \quad /29/$$

называемое тождеством Бианки-Падова /1/.

Для симметричных связностей тензор аффинной деформации также симметричен, т.е.

$$P_{mn}^a = P_{nm}^a. \quad /30/$$

Для симметричных связностей закон /22/ запишем в двух эквивалентных видах

$$\tilde{R}_{kln}^a = R_{kln}^a + \nabla_k P_{ln}^a - \nabla_l P_{kn}^a + \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s), \quad /31/$$

$$\tilde{R}_{kln}^a = \tilde{R}_{kln}^a + \tilde{\nabla}_l P_{kn}^a - \tilde{\nabla}_k P_{ln}^a + \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s). \quad /32/$$

Для эквивафинных связностей получаем следствие

$$\tilde{R}_{ln} = R_{ln} + \nabla_a P_{ln}^a - \nabla_l P_n + P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^a, \quad /33/$$

$$R_{ln} = \tilde{R}_{ln} + \tilde{\nabla}_l P_n - \tilde{\nabla}_a P_{ln}^a + P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^a, \quad /34/$$

где

$$P_n = \partial_n \ln \frac{\epsilon}{\epsilon} \quad /35/$$

СВЯЗНОСТЬ КРИСТОФФЕЛЯ

Зададим на многообразии невырожденный симметричный тензор g_{mn} и потребуем, чтобы его ковариантная производная по симметричной связности Γ_{mn}^a равнялась нулю, т.е. положим

$$g = \det(g_{mn}) \neq 0, \quad g_{mn} = g_{nm} \quad /36/$$

$$S_{mn}^a = 0, \quad \nabla_a g_{mn} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что в таком случае связность Γ_{mn}^a равна скобке Кристоффеля

$$\{\begin{smallmatrix} a \\ mn \end{smallmatrix}\} = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}), \quad /37/$$

$$\text{где } g^{ma} g_{an} = \delta_n^m.$$

Из равенства $\nabla_a g_{mn} = 0$ следует $\nabla_a g^{mn} = 0$, а значит, операция опускания и поднятия тензорных индексов с помощью g_{mn} и g^{mn} коммутативна с операцией ковариантного дифференцирования по связности Кристоффеля /37/.

Свертка связности /37/ равна

$$\{\begin{smallmatrix} a \\ ma \end{smallmatrix}\} = \frac{1}{2} g^{ab} \partial_m g_{ab} = \frac{1}{2g} \partial_m g, \quad /38/$$

т.е. представляется в виде /19/, где

$$\epsilon = \sqrt{|g|}. \quad /39/$$

Следовательно, связность Кристоффеля /37/ эквивалентна.

Полагая в первой из формул /12/ $T_{mn} = g_{mn}$, находим, что в случае связности Кристоффеля

$$R_{klm}^s g_{sn} + R_{kln}^s g_{sm} = 0. \quad /40/$$

Согласно /10/, /40/ и /26/, тензор

$$R_{klmn} = R_{klm}^a g_{an} \quad /41/$$

таков, что

$$R_{klmn} + R_{lkmn} = 0, \quad R_{klmn} + R_{klnm} = 0, \quad /42/$$

$$R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0. \quad /43/$$

Докажем, что из тождеств /42/ и /43/ следует тождество

$$R_{klmn} = R_{mnkl} \quad /44/$$

Для этого сделаем в /43/ все циклические перестановки индексов:

$$R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0, \quad R_{mnkl} + R_{klnm} + R_{nklm} = 0,$$

$$R_{nklm} + R_{lnkm} + R_{klmn} = 0, \quad R_{lmnk} + R_{nlmk} + R_{mnlk} = 0.$$

Вычитая из верхних равенств нижние, получаем

$$R_{klmn} - R_{klnm} = R_{nklm} + R_{lnkm} - R_{mkln} - R_{lmkn}$$

$$R_{mnkl} - R_{mnlk} = R_{lmnk} + R_{nlmk} - R_{klnm} - R_{nklm}.$$

Отсюда и из /42/ следует /44/.

В случае связности Кристоффеля наряду с тензором Риччи /9/ рассматриваем скаляр кривизны

$$R = g^{mn} R_{mn} \quad /45/$$

и тензор Эйнштейна

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}. \quad /46/$$

Свертывая тождества Бианки - Падова /69/ с тензором $\delta_a^k g^{in}$, находим

$$2 \nabla^n R_{nl} = \nabla_l R. \quad /47/$$

Следовательно, ковариантная дивергенция тензора /46/ равна нулю.

КООРДИНАТНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Связность, все компоненты которой в некоторой координатной карте K равны нулю, называем координатной связностью, порожденной картой $\tilde{K}$. Ту же самую связность порождает любая линейно склеенная с $\tilde{K}$ карта. Согласно /2/, в произвольно склеенной с $\tilde{K}$ карте коэффициенты координатной связности равны

$$\Gamma_{mn}^a = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n}. \quad /48/$$

Тензор кручения и тензор кривизны координатной связности /48/ равны нулю:

$$S_{mn}^a = 0, \quad R_{kln}^a = 0. \quad /49/$$

Свертка координатной связности /48/ равна

$$\Gamma_m = \Gamma_{ma}^a = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \frac{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)}, \quad /50/$$

так что координатную связность можно считать эквивалентной, положив $\epsilon = \epsilon_0 J^{-1}$, где $\epsilon_0 = \text{const}$, а J равно /15/.

Если в формулах /31/-/34/ считать, что связность $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ координатная, то они примут вид

$$R_{kln}^a = -V_k P_{ln}^a + V_l P_{kn}^a - \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s) \quad /51/$$

$$R_{kln}^a = -\tilde{V}_k P_{ln}^a + \tilde{V}_l P_{kn}^a - \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s) \quad /52/$$

$$R_{ln} = -V_a P_{ln}^a + V_l P_n - (P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^s) \quad /53/$$

$$R_{ln} = -\tilde{V}_a P_{ln}^a + \tilde{V}_l P_n - (P_s P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{an}^s). \quad /54/$$

Если обе связности координатные, то тензор аффинной деформации удовлетворяет следующему условию, записанному в двух эквивалентных видах:

$$V_k P_{ln}^a - V_l P_{kn}^a = - \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s). \quad /55/$$

$$\tilde{V}_k P_{ln}^a - \tilde{V}_l P_{kn}^a = - \sum_{s=1}^N (P_{ks}^a P_{ln}^s - P_{ls}^a P_{kn}^s).$$

Координатную связность /48/ при желании можно представить в виде скобки Кристоффеля /37/ и даже неоднозначно. Действительно, возьмем любую неособенную симметричную матрицу (M_{ab}) , где M_{ab} - числа, а не функции, и положим в карте K

$$g_{ab} = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N M_{pq} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^b}. \quad /56/$$

Для такого метрического тензора

$$\{^a_{mn}\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^n}. \quad /57/$$

в чем нетрудно убедиться. Вообще, для любой - не обязательно неособенной - симметричной матрицы чисел (M_{ab}) ковариантная производная от тензора /56/ по связности /48/ равна нулю.

ЧАСТНЫЙ ВИД ТЕНЗОРА АФФИННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Имеем

$$\tilde{V}_k g^{ab} = \partial_k g^{ab} + \tilde{\Gamma}_{ks}^a g^{sb} + \tilde{\Gamma}_{ks}^b g^{as}, \quad /58/$$

$$\partial_k g^{ab} = - \{^a_{ks}\} g^{sb} - \{^b_{ks}\} g^{as}.$$

Следовательно, если в разности /21/ вычитаемое равно /37/, то

$$\tilde{V}_k g^{ab} = P_{ks}^a g^{sb} + P_{ks}^b g^{as}. \quad /59/$$

Аналогично, имеем

$$\tilde{V}_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \tilde{\Gamma}_{km}^s g_{sn} - \tilde{\Gamma}_{kn}^s g_{ms} \quad /60/$$

$$\partial_k g_{mn} = \{^s_{km}\} g_{sn} + \{^s_{kn}\} g_{ms}.$$

Следовательно,

$$\tilde{V}_k g_{mn} = -P_{km}^s g_{sn} - P_{kn}^s g_{ms}. \quad /61/$$

Поскольку мы условились рассматривать только симметричные связности, то

$$P_{mn}^a = -\frac{1}{2} g^{ak} (\tilde{V}_m g_{kn} + \tilde{V}_n g_{km} - \tilde{V}_k g_{mn}). \quad /62/$$

Обозначим Φ^a вектор

$$\Phi^a = g^{mn} P_{mn}^a. \quad /63/$$

Из /59/ получаем

$$\Phi^a = (\tilde{V}_b - P_b) g^{ab}. \quad /64/$$

Если связность $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ эквивалентна, то

$$\Phi^a = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \nabla_b \left(\frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} g^{ab} \right). \quad /65/$$

Дальше будем считать, что связность Γ_{mn}^a равна /37/, а связность $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ равна /48/. Выражение $\tilde{\epsilon}^{-1} = J$ будем считать равным /15/.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СКАЛЯРА КРИВИЗНЫ

Из формулы /53/ следует, что

$$R = g^{mn} (P_{mb}^a P_{an}^b - P_s P_{mn}^s) + V_a \Omega^a, \quad /66/$$

где

$$\Omega^a = P_m g^{ma} - P_{mn}^a g^{mn}. \quad /67/$$

ФУНКЦИОНАЛ ГИЛЬБЕРТА И ЕГО ВАРИАЦИЯ

Функционал Гильберта от метрического тензора g^{mn} равен

$$H = \int R \epsilon \, dx^1 \dots dx^N. \quad /68/$$

Закон /33/ изменения тензора Риччи сразу дает вариацию δH . Действительно, свертывая /33/ с тензором $\tilde{g}^{ln} = g^{ln} + \delta g^{ln}$ и пренебрегая квадратичными поправками, находим

$$\delta R = R_{ab} \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a. \quad /69/$$

где вектор ω^a аналогичен вектору /67/:

$$\omega^a = g^{ina} \delta \Gamma_{mn}^n - g^{mn} \delta \Gamma_{mn}^a. \quad /70/$$

Из /39/ и /38/ следует

$$\delta \epsilon = -\frac{1}{2} \epsilon g_{ab} \delta g^{ab}. \quad /71/$$

Таким образом,

$$\delta H = \int (G_{ab} \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a) \epsilon \, dx^1 \dots dx^N. \quad /72/$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим тензор

$$U^{ambn} = (\epsilon J)^2 (g^{ab} g^{mn} - g^{an} g^{mb}), \quad /73/$$

где ϵ равно /39/, а $J = \tilde{\epsilon}^{-1}$ равно /15/. Имеем

$$U^{ajkb} R_{jk} = (\epsilon J)^2 (R^{ab} - R g^{ab}),$$

$$U^{akij} R_{ijk}^b = 2(\epsilon J)^2 R^{ab}. \quad /74/$$

С помощью этих формул и формул /52/ и /54/ преобразуем тензор /46/ следующим образом:

$$\begin{aligned} 2(\epsilon J)^2 G^{ab} = & U^{akij} (\tilde{\nabla}_j P_{ik}^b + P_{is}^b P_{jk}^s) + \\ & + U^{ajkb} (\tilde{\nabla}_j P_k^b - \tilde{\nabla}_l P_{jk}^l + P_s P_{jk}^s - P_{js}^l P_{lk}^s). \end{aligned} \quad /75/$$

С другой стороны, на основании /35/ и /59/ находим

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_s^a + 2P_s^a) U^{ambn} = & P_{sk}^a U^{kmbn} + P_{sk}^m U^{akbn} + \\ & + P_{sk}^b U^{amkn} + P_{sk}^n U^{ambk}. \end{aligned} \quad /76/$$

Дальше обозначаем

$$U^{abn} = \tilde{\nabla}_m U^{ambn}, \quad U^{ab} = \tilde{\nabla}_n U^{abn}. \quad /77/$$

Из /76/ следует

$$U^{abn} = P_{mk}^b U^{amkn} + P_{mk}^n U^{ambk} - P_m U^{ambn}. \quad /78/$$

Теперь находим

$$2(\epsilon J)^2 G^{ab} = U^{ab} + V^{ab}, \quad /79/$$

где

$$\begin{aligned} V^{ab} = & U^{akij} P_{is}^b P_{jk}^s + U^{ajkb} (P_s P_{jk}^s - P_{js}^l P_{lk}^s) - \\ & - P_{mk}^b \tilde{\nabla}_n U^{amkn} - P_{mk}^n \tilde{\nabla}_n U^{ambk} + P_m \tilde{\nabla}_n U^{ambn}. \end{aligned} \quad /80/$$

В последней формуле с помощью /76/ можно избавиться от производных $\tilde{\nabla}_n$. В результате получается

$$\begin{aligned} V^{ab} = & P_{km}^a P_{ln}^b U^{klmn} + A_{mn} U^{ambn} + \\ & + B_{kmn}^a U^{bkmn} + B_{kmn}^b U^{akmn}, \end{aligned} \quad /81/$$

где

$$A_{mn} = 2P_s P_{mn}^s - P_{mk}^l P_{ln}^k - P_m P_n, \quad /82/$$

$$B_{kmn}^a = P_{km}^a P_n^a + P_{km}^s P_{sn}^a.$$

Полагая здесь $\tilde{\Gamma}_{mn}^a = 0$, получаем формулы Синга /8/.

ПСЕВДОТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как и тензорное поле аффинной деформации

$$P_{mn}^a = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right), \quad /83/$$

тензорное поле

$$t^{ab} = -\frac{c^4}{16\pi\gamma} (\epsilon J)^{-2} V^{ab}, \quad /84/$$

где c - скорость света, γ - постоянная Ньютона, является функционалом карты $\tilde{K}$, в которой компоненты связности $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ равны нулю. Этот функционал называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Отметим, что значение таких функционалов не меняется при замене в их аргументах карты $\tilde{K}$ на любую линейно склеенную с $\tilde{K}$ карту $\tilde{K}$.

Условием гармоничности, накладываемым на тензор аффинной деформации /83/, называем

$$\Phi^a = g^{mn} R_{mn}^a = 0, \quad a \in \{1, \dots, N\}. \quad /85/$$

Для формулировки этого условия достаточно знать связность /48/ и, ввиду равенства /57/, можно не прибегать к метрике типа /56/. Согласно /65/, это условие записывается в виде

$$\Phi^a = \frac{1}{\epsilon J} \tilde{\nabla}_b (\epsilon J g^{ab}) = 0, \quad a \in \{1, \dots, N\}. \quad /86/$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

По отношению к тензорному полю g_{ab} координаты называются гармоническими, если выполняются равенства

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{-g} g^{ab}) = 0, \quad a \in \{1, \dots, N\}. \quad /87/$$

Составленную из таких координат карту будем называть гармонической.

Согласно /86/, если выполняется условие гармоничности /85/, то карта $\tilde{K}$, в которой компоненты связности $\tilde{\Gamma}_{mn}^a$ равны нулю, является гармонической картой. Если карта K гармоническая, то, очевидно, и любая линейно склеенная с ней карта K является гармонической. Но карта K будет гармонической и в том случае, когда

$$g^{mn} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad /88/$$

Это следует из /83/ и равенства

$$g^{mn} \{ \begin{matrix} a \\ mn \end{matrix} \} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{-g} g^{ab}). \quad /89/$$

Пример

В случае метрики Шварцшильда

$$g_{ab} dx^a dx^b = c^2 V^2 dt^2 - V^{-2} d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad /90/$$

где

$$V^2 = 1 - \frac{2a}{\rho}, \quad a = \frac{\gamma M}{c^2}, \quad \rho > 2a, \quad /91/$$

гармоническими являются координаты

$$\tilde{x} = (\rho - a) \sin \theta \cos \phi, \quad \tilde{y} = (\rho - a) \sin \theta \sin \phi,$$

$$\tilde{z} = (\rho - a) \cos \theta, \quad \tilde{t} = t. \quad /92/$$

По их поводу читаем: "Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$? Нам представляется единственно правильным второе определение" /4/. В связи с этим мнением в работе /2/ наряду с метрикой Шварцшильда /90/ была введена метрика Минковского

$$\tilde{g}_{ab} d\tilde{x}^a d\tilde{x}^b = c^2 d\tilde{t}^2 - d\rho^2 - (\rho - a)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad /93/$$

Однако, учитывая, что понятие прямой имеет не метрическую, а аффинную природу, мы с равным успехом могли бы вместо метрики /93/ ввести только аффинную связность по формуле /48/, положив $\tilde{x}^a$ равными /92/, а x^a равными $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$. В таком случае метрика Шварцшильда рассматривалась бы не на фоне Минковского, а на фоне четырехмерного аффинного пространства. Это устраняет трудности, возникающие с интерпретацией пары световых конусов с вершиной в каждой мировой точке, задаваемых метриками /90/ и /93/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
2. Черников Н.А. О трудностях в релятивистской теории гравитации. В кн.: Труды VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.382.
3. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963, с.220.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955, с.273.