



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

Eric BLANQUIER

le lundi 30 septembre 2013

Titre :

Le modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio et ses applications pour décrire les particules sub-nucléaires

Ecole doctorale et discipline :
ED GEET : Ingénierie des PLASMAS

Unité de recherche :
Laboratoire LAPLACE

Directeur de Thèse :
M. Patrice RAYNAUD

Jury :

Directeur de thèse : M. RAYNAUD Patrice, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire LAPLACE, Toulouse

Rapporteurs : M. CUGNON Joseph, Professeur, Université de Liège, BELGIQUE

M. KNEUR Jean-Loïc, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire Coulomb, Montpellier

Examinateurs : M. COSTA Pedro, Chargé de recherche, Université de Coimbra, PORTUGAL

M. HANSEN Hubert, Maître de conférences, Université de Lyon

M. TOUBLANC Dominique, Professeur, Université de Toulouse



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

Eric BLANQUIER

le lundi 30 septembre 2013

Titre :

Le modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio et ses applications pour décrire les particules sub-nucléaires

Ecole doctorale et discipline :
ED GEET : Ingénierie des PLASMAS

Unité de recherche :
Laboratoire LAPLACE

Directeur de Thèse :
M. Patrice RAYNAUD

Jury :

Directeur de thèse : M. RAYNAUD Patrice, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire LAPLACE, Toulouse

Rapporteurs : M. CUGNON Joseph, Professeur, Université de Liège, BELGIQUE

M. KNEUR Jean-Loïc, Directeur de recherche CNRS, Laboratoire Coulomb, Montpellier

Examinateurs : M. COSTA Pedro, Chargé de recherche, Université de Coimbra, PORTUGAL

M. HANSEN Hubert, Maître de conférences, Université de Lyon

M. TOUBLANC Dominique, Professeur, Université de Toulouse

Remerciements

Via cette page, je tenais à ne pas oublier toutes les personnes qui ont rendu possible la concrétisation de mon projet de thèse.

Cela concerne bien entendu mon directeur de thèse, Monsieur Patrice RAYNAUD, du laboratoire LAPLACE, qui m'a permis de valider ce doctorat. Un grand merci à toi Patrice. Merci également à tous ceux qui sont intervenus au niveau des démarches administratives qu'il y avait à effectuer dans mon cas. Je pense notamment à Monsieur Alain CAZARRE, Directeur de l'Ecole Doctorale Génie électrique, électronique, télécommunication (ED GEET), Madame Marie ESTRUGA, assistante de direction de l'ED GEET, Monsieur Christian LAURENT, directeur du laboratoire LAPLACE, Monsieur François DEMANGEOT, deuxième vice président Recherche de l'Université Paul Sabatier (UPS) Toulouse III, Monsieur Arnaud LE PADELLEC, vice président du CEVU à l'UPS, Madame Monique LEMORT, chargée de la coordination de la formation doctorale de l'UPS et Mesdames ROSSI et IZARIE du 3^{ème} cycle de l'UPS. Ceux qui sont au courant savent en effet que mon doctorat a été particulier. Expliquer pourquoi ici amèneraient à citer des personnes qui n'ont pas leur place dans cette page de remerciements. Je m'abstiendrai donc. Je noterais quand même, parce que l'anecdote est finalement intéressante, que j'ai soutenu ma thèse le lundi 30 septembre 2013, soit la veille du 10^{ème} anniversaire de la date officielle de ma première inscription en doctorat.

Naturellement, dans le cadre des remerciements, je n'oublie pas mon jury de thèse. Merci ainsi à Messieurs Jean Loïc KNEUR et Joseph CUGNON d'avoir accepté d'être rapporteurs dans mon jury. Je ne peux que saluer le formidable travail qu'ils ont effectué. Je les remercie aussi pour nos discussions si enrichissantes. Bravo notamment à Monsieur KNEUR d'avoir plongé dans les profondeurs de l'annexe B. Merci également à Messieurs Pedro COSTA et Hubert HANSEN d'avoir été présents dans mon jury, en tant qu'examinateurs. Leurs connaissances du modèle PNJL ont été très utiles. Mention spéciale pour Monsieur COSTA, car son aide a dépassé largement le cadre de sa tâche de rapporteur. Merci donc pour votre inébranlable soutien depuis que nous nous connaissons. Merci également à Monsieur Dominique TOUBLANC d'avoir pris part à mon jury, et d'en avoir été le président. Cela a été un plaisir de vous revoir après tant d'années. Merci pour votre gentillesse et pour votre implication dans le cadre de la validation de mon diplôme.

Merci également à ma famille pour leur soutien, notamment pour le prêt du matériel informatique qui m'a permis de réaliser mes dernières simulations. Merci au public qui a assisté à ma soutenance. Quelques mots également pour remercier mes contacts du CSTJF Pau, que j'aime nommer sous le terme d'anciens collègues de travail. Merci pour vos retours lorsque je vous ai annoncé l'obtention de mon doctorat. Merci également aux revues qui m'ont permis de publier mes travaux. Merci notamment à Rachel pour son écoute et son professionnalisme. Merci à JC pour ses conseils au sujet de mes publications. Merci aussi à mes anciens élèves, dont je ne pourrais pas établir la liste ici, mais que je n'oublie pas. Merci aussi à Céline, avec qui je travaille en tant qu'auteur scientifique.

Table des matières

Introduction	11
Chapitre 1. Connaissances actuelles liées au QGP	17
1. Introduction	17
2. Les symétries	18
2.1 Introduction à la théorie des groupes	19
2.2 Quelques symétries utiles	20
2.3 Application de la théorie des groupes à la physique des particules	21
3. La Chromodynamique Quantique	24
3.1 Description du Lagrangien de QCD	24
3.2 La symétrie chirale	26
3.3 La brisure de la symétrie chirale	27
4. Caractéristiques et problèmes liés à la physique des quarks	29
4.1 Confinement des quarks à l'intérieur des hadrons	29
4.2 Insolvabilité des équations de QCD	30
4.3 Phénomène de liberté asymptotique	31
4.4 Le plasma de quarks et de gluons et diagramme de phase	33
5. Aspects théoriques : la QCD sur réseau	34
5.1 L'action de jauge de Wilson et les boucles	35
5.2 Action due aux quarks et limitations de LQCD	36
5.3 Quelques observables et résultats de la LQCD	37
5.4 Modèles effectifs	38
6. Etude expérimentale du QGP	39
6.1 Signatures du QGP	39
6.2 Le flot elliptique v_2	41
6.3 Résultats récents	42
7. Conclusion	43
8. Références	43
Chapitre 2. Le modèle de Nambu et Jona-Lasinio et le modèle Polyakov NJL	47
1. Introduction	47
2. Présentation du modèle de Nambu et Jona-Lasinio	49
2.1 Le formalisme de Matsubara	49
2.2 Fondements du modèle NJL	50
2.3 Le Lagrangien NJL	51
2.4 Paramètres employés dans NJL	53
3. Masse des quarks constituants	54
3.1 Equations de gap	54
3.2 Symétrie isospin	55
3.3 Traitement des densités	56
4. Le modèle PNJL	57
4.1 Le lagrangien PNJL	57
4.2 Le grand potentiel PNJL	60
4.3 Equations de gap dans le modèle PNJL	64

5. Résultats obtenus	65
5.1 Masses des quarks	65
5.2 Etude des paramètres d'ordre du modèle (P)NJL	69
5.3 Le potentiel chimique	72
6. Conclusion	76
7. Références	77
Chapitre 3. Les mésons	81
1. Introduction	81
2. Description du formalisme	82
2.1 Méthode générale	82
2.2 Lagrangien associé aux mésons	85
2.3 Fonctions de polarisation irréductible des mésons	87
2.4 Détail des équations pour chaque méson	88
2.5 Mésons $\eta - \eta'$ et $f_0 - f_0'$ (avec symétrie isospin)	89
3. Résultats pour les mésons pseudo-scalaires	91
3.1 Masses obtenues	91
3.2 Constantes de couplage	95
3.3 Angle de mélange $\eta - \eta'$	97
4. Résultats obtenus pour les autres mésons	98
4.1 Mésons scalaires	98
4.2 Mésons vectoriels	101
4.3 Mésons axiaux	103
5. Au-delà de la symétrie isospin	104
5.1 Traitement des mésons π^0 , η et η' dans le cas où $m_u \neq m_d$	104
5.2 Résultats obtenus, discussion	108
6. Conclusion	110
7. Références	110
Chapitre 4. Les diquarks	113
1. Introduction	113
2. Etude théorique	114
2.1 Méthode employée	114
2.2 Considérations de théorie des groupes	116
2.3 Lagrangien des diquarks	118
2.4 Fonction de boucle des diquarks	119
2.5 Constantes de couplage	120
3. Résultats numériques	120
3.1 Diquarks scalaires	120
3.2 Diquarks pseudo-scalaires	124
3.3 Diquarks vectoriels	126
3.4 Diquarks axiaux	127
3.5 Autres résultats	129
3.6 Masses obtenues	131
4. Conclusion	132
5. Calcul du propagateur d'un quark conjugué de charge	133
6. Références	137

Chapitre 5. Les baryons	139
1. Introduction	139
2. Présentation de la méthode employée	140
2.1 Approximation statique	141
2.2 Description des équations	142
2.3 Fonction de boucle des baryons	143
3. Etude de chaque baryon	144
3.1 Nucléons : proton et neutron	145
3.2 Baryon Λ	147
3.3 Baryon Σ^0	149
3.4 Baryons Σ^+ et Σ^-	150
3.5 Baryons Ξ	151
3.6 Baryons Δ	153
3.7 Baryon Ω^-	154
4. Résultats à températures et densités finies	155
4.1 Octet de baryons	155
4.2 Décuplet de baryons	158
4.3 Autres résultats	160
5. Constantes de couplage	162
5.1 Etablissement des constantes de couplage des baryons	162
5.2 Résultats	163
6. Masses à température nulle et densité nulles	166
6.1 Présentation des résultats	166
6.2 Explication de l'inversion de masse	167
6.3 Discussion	169
7. Conclusion	170
8. Références	171
Chapitre 6. Sections efficaces	175
1. Introduction	175
2. Méthodes de calcul	177
Réactions inélastiques	179
3. Réactions de mésonisation	179
4. Réactions mettant en jeu un diquark	186
4.1 Règles de Feynman	186
4.2 Réactions $\bar{q} + D \rightarrow M + q$	187
4.3 Réactions $q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$	189
4.4 Réactions $q + q \rightarrow D + M$	191
5. Réactions de baryonisation	194
5.1 Réactions $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$	195
5.2 Réactions $M + D \rightarrow \bar{q} + B$	196
5.3 Réactions $D + D \rightarrow B + q$	198
5.4 Réactions $q + q \rightarrow B + \bar{q}$	199
5.5 Réactions $q + D \rightarrow M + B$	201
Réactions élastiques	203
6. Collisions élastiques entre quarks et antiquarks	203
6.1 Diffusion quark–antiquark	203

6.2 Diffusion quark–quark	206
7. Collisions élastiques avec mésons ou diquarks	208
7.1 Diffusion méson–quark	208
7.2 Diffusion diquark–quark	210
7.3 Diffusion diquark–antiquark	211
7.4 Diffusion diquark–diquark	212
8. Collisions élastiques incluant des baryons	215
8.1 Diffusion baryon–quark	215
8.2 Diffusion baryon–antiquark	216
8.3 Diffusion baryon–diquark	217
9. Conclusion	219
10. Références	221
Chapitre 7. Evolution d'un système en fonction du temps	225
1. Introduction	225
2. Mise en équation du modèle	228
2.1 L'algorithme global	228
2.2 Détermination des densités	228
2.3 Estimation de la température	229
2.4 Traitement des collisions	231
2.5 Liste des types de réactions inclus dans notre modèle	234
2.6 Equations du mouvement	235
3. Résultats préliminaires	237
3.1 Interaction à distance entre particules	237
3.2 Mouvement Brownien relativiste ?	240
4. Premières simulations	245
4.1 Comparaison entre les résultats NJL et PNJL	245
4.2 Une solution pour permettre une hadronisation complète	250
5. Etude complète d'une simulation	253
6. Discussion et conclusions	263
7. Références	265
Conclusions	269
Annexes	
Annexe A. Données sur les particules	275
1. Les quarks	275
2. Les mésons	276
3. Les baryons (particules et résonances)	277
4. Références	278
Annexe B. Formulaire de théorie des champs et calcul de traces	279
1. Générateurs des groupes de Lie	279
1.1 Générateurs de $SU(2)$	279
1.2 Générateurs de $SU(3)$	279
2. Matrices de Dirac	280
2.1 Représentations usuelles	280

2.2 Propriétés des matrices de Dirac	281
3. Calcul standard de traces	282
3.1 Premier exemple	282
3.2 Second exemple	283
4. Spineurs utilisant des quantités de mouvement différentes	284
4.1 Calculs préliminaires	284
4.2 Application	286
4.3 Autres configurations	290
5. Références	291
Annexe C. Facteurs de saveur	293
1. Méthode générale	293
2. Mésons	293
3. Diquarks	295
3.1 Diquarks scalaires	295
3.2 Diquarks axiaux	296
4. Baryons	297
5. Références	298
Annexe D. Fonctions de boucle et fonction triangle	299
1. Calculs préliminaires	299
2. Fonctions génériques	300
2.1 Fonction A (boucle à un fermion)	300
2.2 Fonction B_0 (boucle à deux fermions)	301
2.3 Fonction C_0 (boucle à trois fermions)	302
3. Fonctions de boucle pour les mésons	303
4. Fonctions de boucle pour les diquarks	304
4.1 Expressions des fonctions de boucle des diquarks	304
4.2 Echange des deux quarks	305
5. Fonction de boucle des baryons	307
5.1 Premier terme $\Pi^{(1)}$	307
5.2 Deuxième terme $\Pi^{(2)}$	309
5.3 Expression complète de la fonction de boucle	311
6. Fonctions « triangle »	312
7. Références	313
Annexe E. Calculs à potentiels chimiques non nuls	315
1 Techniques générales	315
2. Mésons	316
3. Diquarks	317
4. Baryons	319
Annexe F. Eléments de cinématique	321
1. Variables de Mandelstam	321
1.1 Cas général	321
1.2 Référentiel du centre de masse	322
2. Calcul du paramètre d'impact	322
3. Angle de diffusion et quantités de mouvement des particules 3 et 4	323
4. Références	325

Annexe G. Simulation finale	327
--	------------

Introduction

Les recherches entreprises pour comprendre le monde qui nous entoure ont fait que, à travers les siècles, les limites du savoir humain ont été progressivement repoussées. En particulier, des recherches ont souvent été faites dans le but de comprendre la matière à des échelles de plus en plus petites, ce qui a entraîné la découverte de l'atome, des noyaux atomiques ... A l'opposé, d'autres ont préféré lever la tête vers les étoiles, et ont essayé de comprendre ces objets, qui nous apparaissaient éternels il y a encore peu de temps, pour développer progressivement la vision que nous avons de l'Univers, en incluant des objets de plus en plus gros, comme les galaxies, les amas de galaxies, ...

Le plus déconcertant est que ces deux pistes de recherche, qui semblent pourtant aller dans des directions opposées, semblent se rejoindre. En effet, pour décrire des étoiles comme les naines blanches, les pulsars ..., la physique nucléaire, c'est-à-dire la physique de l'infiniment petit, est nécessaire [1, 2]. Les astrophysiciens et les physiciens des particules voient leurs travaux devenir de plus en plus proches, sans toujours le réaliser. N'y a-t-il pas de meilleur objet pour étudier la fusion nucléaire qu'une étoile ? Et, c'est sans parler de l'étude des premiers moments de l'Univers, avec le modèle du Big Bang [3, 4]. Ce rapprochement de l'infiniment petit et de l'infiniment grand est comparable à l'image bien connue du serpent qui se mord la queue, employée pour donner l'image d'un cycle. Dans ce point de vue, la vision d'un Univers similaire à une fractale semble guider l'idée que nous en avons de lui, de manière plus ou moins consciente. Le modèle planétaire de Rutherford utilisé pour décrire l'atome semble être une bonne illustration de ce raisonnement, même si probablement son auteur d'avait pas cet objectif.

Un raisonnement hâtif nous conduirait à conclure que nous sommes finalement arrivé à la fin du chemin puisque, d'après ce que nous avons vu, la boucle est bouclée. La Théorie du Tout, l'achèvement de la théorie scientifique ultime serait donc pour bientôt ... Cependant, ce raisonnement est bien sûr trop hâtif, et même *faux*. Il est incorrect parce que la physique est un thème scientifique parmi d'autres, décrivant seulement une vision très partielle du monde. D'autre part, l'Histoire des Sciences nous apprend que c'est quand l'Homme pensait parfaitement comprendre la Nature que celle-ci lui a prouvé le contraire. La naissance de la mécanique quantique s'est accompagnée de la plus grande détresse chez ceux qui pensaient pouvoir bientôt être capables d'expliquer le monde avec la physique classique. Une vision fractale de l'Univers est finalement une source d'intéressantes analogies pour essayer de comprendre tel ou tel phénomène physique [5, 6]. Mais, un atome n'est pas une étoile avec des planètes qui tournent autour de lui. Un modèle, quel qu'il soit, reste un moyen d'interpréter la réalité, sans *être* la réalité.

La physique de l'infiniment petit, c'est-à-dire la physique des particules, réserve encore quelques surprises. Cela correspond au monde des quarks [7]. Ces particules sont actuellement assimilées à des particules élémentaires : elles sont considérées comme les « briques » de la matière. Grâce à elles, les nucléons peuvent être formés. A partir des nucléons, les noyaux des atomes sont créés. Avec les atomes, les molécules sont formées, puis la matière macroscopique ... Même s'il est probable que l'existence de particules encore plus

petites puisse être démontrée dans le futur, comme les préons [8], la physique des quarks est actuellement un intense sujet de recherche, théoriquement et expérimentalement [9].

Tout d'abord, en physique expérimentale, avec d'importants projets comme le RHIC Américain ou le LHC Européen, où des collisions entre des noyaux via des énergies de plus en plus grandes essayent de mettre en lumière les mécanismes qui régissent la physique des quarks. Dans la pratique, une difficulté vient du fait que les quarks ne peuvent pas être observés à l'état libre. Dans des conditions normales, ils sont confinés dans la matière « classique », c'est-à-dire dans les nucléons. La finalité des expériences liées à cette thématique de recherche est d'essayer de former un nouvel état de la matière où les quarks seraient déconfinés, durant un court laps de temps, avant de se recombiner. Cet état très particulier de la matière est nommé le plasma de quarks et de gluons (QGP d'après son appellation anglaise) [9–11]. Il était probablement présent lors les premiers instants de l'Univers. Puisque le QGP n'est pas observable directement, il est nécessaire pour les expérimentateurs de prouver que cet état s'est réellement formé, via des preuves indirectes.

L'objectif actuel des recherches théoriques liées au plasma de quarks et de gluons est de comprendre comment cette phase se refroidit, et comment les quarks et antiquarks se combinent pour former des particules observables, c'est-à-dire de comprendre les mécanismes de l'hadronisation des quarks/antiquarks. Dans la littérature, cette transformation est nommée transition de phase entre le QGP et la matière hadronique [12, 13], dans laquelle la phase hadronique désigne la phase des particules observables : les baryons (y compris les nucléons) et les mésons. En fait, la physique des quarks est correctement décrite par la Chromodynamique Quantique (QCD) [9, 14]. Même si les équations de QCD sont connues, on ne sait cependant pas les résoudre dans les cas général. Cette remarque est particulièrement vraie dans le cadre des énergies mises en jeu dans la transition de phase QGP/matière hadronique. Notamment, le confinement des quarks n'est toujours pas maîtrisé en physique théorique.

Donc, pour étudier l'hadronisation d'un ensemble de quarks/antiquarks, des modèles effectifs sont fréquemment utilisés. Parmi eux, nous pouvons citer le modèle de Nambu et Jona-Lasinio (NJL) [15, 16]. Même si ce modèle n'a pas été conçu initialement pour cet usage, il a été prouvé depuis longtemps sa fiabilité pour décrire la physique des quarks, notamment grâce à la formulation du modèle faites dans les années 1980 et 1990 [17]. Ce modèle a permis de modéliser des particules comme les quarks et les mésons, d'étudier leur comportement à températures et des densités finies. En outre, les sections efficaces associées à des réactions entre ces particules ont été considérées, notamment pour étudier la formation de mésons à partir de quarks et antiquarks [18]. Le modèle NJL est à l'origine de divers travaux. Par exemple, nous pouvons citer [19–21], dans lesquels les études NJL dont nous venons de parler ont été reprises, et il a été effectué des travaux complémentaires sur cette thématique. Il a été proposé notamment une tentative de modélisation des baryons comme un état lié quark-diquark [20]. Dans [21], une tentative d'une simulation NJL a aussi été exposée, décrivant le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks en mésons. Cependant, le modèle NJL présente certaines limitations. Notamment, le confinement est absent de ce modèle. Ainsi, il a récemment été proposé une nouvelle version du modèle NJL, dans lequel une boucle de Polyakov a été ajoutée afin de simuler un mécanisme de confinement. Cette version est connue sous le nom de modèle PNJL [22]. Il a été reporté dans la littérature les divers avantages de cette approche. Parmi les travaux déjà effectués, citons par exemple la modélisation des quarks et mésons avec le modèle PNJL [23, 24].

Mais, pour arriver à décrire le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks en mésons et baryons, les travaux mentionnés plus haut doivent être complétés, dans le cadre des modèles NJL et PNJL. Tout d'abord, la description des particules utiles pour notre étude, comme les quarks, mésons et baryons, a été faite traditionnellement en fonction de la température, de la densité baryonique (ou du potentiel chimique correspondant), mais plus rarement les deux à la fois. Puisque la transition de phase QGP/matière hadronique peut se faire selon la température, la densité baryonique, ou les deux, il est intéressant de faire nos calculs dans le plan T, ρ_B . Aussi, la modélisation des baryons peut être complétée dans le cadre du modèle NJL, et ensuite les baryons devraient être inclus dans une description PNJL. De la même manière, si les réactions faisant intervenir des quarks et des mésons sont maintenant bien maîtrisées dans le cadre du modèle NJL, les sections efficaces de réactions utilisant des baryons devraient être étudiées [25]. Notamment, les réactions formant des baryons sont particulièrement intéressantes, parce qu'elles permettent de comprendre la dynamique de la baryonisation du système. Aussi, dans le modèle NJL, les sections efficaces ont été estimées en fonction de la température, et plus rarement en fonction de la densité baryonique. Il serait intéressant d'estimer les sections efficaces selon ces deux paramètres, afin de pleinement comprendre leur influence sur les résultats. Par ailleurs, les calculs de sections efficaces sont rares dans le modèle PNJL. Donc, les sections efficaces devraient être estimées avec PNJL : l'influence de la boucle de la boucle de Polyakov sur les sections efficaces n'est pas évidente. Concernant les modèles dynamiques étudiant le refroidissement d'un plasma de quarks-antiquarks, celui évoqué dans [21] n'inclut pas les baryons. Même si l'hadronisation du système est certainement dominée par la mésonisation, décrire la formation des baryons dans le modèle est capital. Aussi, dans des conditions expérimentales, la matière domine l'antimatière. Donc, une hadronisation complète dans de tels systèmes ne peut pas être faite seulement via la formation de mésons : la baryonisation est clairement nécessaire. D'autre part, le rôle joué par les diquarks devrait aussi être explicité : quelle est leur contribution dans la dynamique du système ? Pour répondre à cette question, il apparaît indispensable d'étudier leur formation durant le refroidissement, et ensuite d'estimer s'ils sont assez nombreux pour réellement intervenir. Aussi, dans une telle étude, il est particulièrement intéressant de voir si les modèles utilisés, NJL et PNJL, peuvent permettre une hadronisation complète du système. Pour chacune des évolutions proposées dans ce paragraphe, une comparaison systématique entre les résultats NJL et PNJL devrait être effectuée, afin d'estimer concrètement les modifications induites par la boucle de Polyakov sur les résultats, à chaque étape du travail.

Dans le cadre de cette thèse, nous allons considérer les points évoqués au paragraphe précédent. Pour atteindre cet objectif, nous proposons la structure suivante : dans le chapitre 1, nous procédons à un rapide aperçu de quelques notions utiles dans le cadre de nos travaux. Cela concerne particulièrement deux thèmes : la Chromodynamique Quantique, et la théorie des groupes. A propos de la QCD, cela inclut une description des équations correspondantes et une analyse des spécificités de ce modèle, comme le confinement des quarks. De plus, ce chapitre évoque des notions de théorie des groupes. En effet, un objectif de cette partie est de voir comment cette théorie peut nous aider dans ce travail [26]. Dans le chapitre 2, nous nous focalisons sur une description des modèles NJL et PNJL. Nous insistons d'une part sur les approximations à effectuer pour obtenir les équations NJL. D'autre part, nous présentons l'inclusion de la boucle de Polyakov dans le modèle NJL. Nous expliquons alors les modifications à effectuer au modèle NJL pour obtenir PNJL. Une première application de ces modèles est présentée dans ce chapitre. Elle concerne le calcul des masses des quarks effectifs.

Dans les chapitres 3 à 5, nous effectuons la modélisation des particules composites intervenant dans notre travail. Dans le chapitre 3, les mésons sont considérés. Même si de telles particules ont déjà été étudiées dans les modèles (P)NJL, nous retrouverons les résultats de la littérature, et nous proposons d'étendre ces résultats selon plusieurs aspects. De plus, ce chapitre constitue une occasion de présenter la méthode allouée à la modélisation de particules composites, afin de simplement adapter les équations pour les autres particules traitées. Celles-ci sont les diquarks et les baryons. En effet, puisque nous traiterons les baryons comme un état lié quark-diquark, nous proposons d'étudier les diquarks dans le chapitre 4. Là, nous verrons la méthode utilisée, et ensuite nous l'utiliserons pour traiter différentes « familles » de diquarks. Une comparaison entre nos résultats et ceux obtenus par d'autres approches est proposée. Après, dans le chapitre 5, nous nous intéressons à la modélisation des baryons. En utilisant certaines approximations, nous décrivons une méthode générale pour construire les baryons. Ces derniers sont ensuite étudiés, comme les autres particules mentionnées plus haut, en fonction de la température et de la densité baryonique. Des études secondaires sont aussi effectuées dans ce chapitre, comme la modélisation d'antibaryons, ou une étude de la stabilité des baryons dans le plan T, ρ_B .

Ensuite, dans le chapitre 6, nous estimons les sections efficaces associées aux réactions utilisant ces particules citées. D'une part, nous considérons des réactions inélastiques. Notamment, nous reprenons les réactions de mésonisation évoquées dans [18] pour retrouver les résultats de ce papier, et ensuite étendre les résultats selon plusieurs aspects : calculs à densités baryoniques non nulles, inclusion de la boucle de Polyakov ... Ensuite, diverses réactions utilisant des diquarks et/ou des baryons sont considérées, afin de prévoir les réactions dominantes. D'autre part, les réactions élastiques sont traitées, comme celles de [27] et en y incluant de nouvelles. Finalement, dans le chapitre 7, nous nous focalisons sur l'étude dynamique d'un système formé de quarks et d'antiquarks. Cette partie constitue un défi intéressant, car tous les travaux effectués dans les chapitres précédents sont rassemblés dans le code informatique effectuant la simulation. Plus précisément, cela concerne le calcul des masses des particules évoquées (quarks, mésons, diquarks, baryons, et leurs antiparticules) et l'estimation des sections efficaces de toutes les réactions étudiées dans le chapitre précédent. Dans le chapitre 7, après quelques explications à propos des algorithmes développés, des tests sont effectués et commentés. Par exemple, les interactions entre particules sont étudiées, une comparaison est effectuée entre les résultats NJL et PNJL ... Ensuite, des simulations complètes ont été faites. Grâce à elles, l'évolution du système est analysée, et nous verrons à cette occasion s'il est possible d'obtenir une hadronisation complète du système avec les modèles (P)NJL ...

Références

- [1] Valentin L 1975 Physique subatomique : noyaux et particules, *Hermann*
- [2] Audouze J et Vauclair S 1979 An Introduction to Nuclear Astrophysics: The Formation and the Evolution of Matter in the Universe, *Reidel Publishing Company*
- [3] Weinberg S 1977 The First Three Minutes: A Modern View Of The Origin Of The Universe, *BasicsBooks*
- [4] Hawking S 1988 A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes, *Bantam Books*

- [5] Nottale L 1998 La Relativité dans tous ses états : du mouvements aux changements d'échelle, *Hachette éditions*
- [6] Nottale L 2011 Scale Relativity and Fractal Space-Time: A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics, *Imperial College Press*
- [7] Close P E 1979 An introduction to Quarks and Partons, *Academic Press*
- [8] D'Souza I A et Kalman C S 1992 Preons: Models of Leptons, Quarks and Gauge Bosons as Composite Particles, *World Scientific*
- [9] Kuhn C, Plasma de quarks et de gluons et matière étrange du SPS au LHC, *cours présenté à l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1998, Maubuisson, France, 7-12 Septembre 1998. Référence: publication IReS 98-24*
<http://www.pd.infn.it/alipd/papers/qgpkuhn.ps.gz>
<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00652935/>
- [10] Satz H 2011 The Quark-Gluon Plasma – A Short Introduction *Nucl. Phys. A* **862–863** 4–12
- [11] Letessier J et Rafelski 2002 Hadrons and Quark-Gluon Plasma, *Cambridge University Press*
- [12] Meyer-Ortmanns H 1996 Phase transitions in quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **68** 473–598
- [13] Spieles C, Stoecker H et Greiner C 1998 Phase transition of a finite quark-gluon plasma *Phys. Rev. C* **57** 908–15
- [14] Walecka J D 1995 Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics 2nd edition, *Oxford University Press*
- [15] Nambu Y et Jona-Lasinio G 1961 Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity: I *Phys. Rev.* **122** 345–58
- [16] Nambu Y et Jona-Lasinio G 1961 Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity: II *Phys. Rev.* **124** 246–54
- [17] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [18] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [19] Nebauer R 2000 Propriétés des quarks et mésons à température et densités finies dans le cadre du modèle NJL *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [20] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu–Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [21] Marty R et Aichelin J 2013 Molecular dynamics description of an expanding $q\bar{q}$ plasma with the Nambu–Jona-Lasinio model and applications to heavy ion collisions at RHIC and LHC energies *Phys. Rev. C* **87** 034912
- [22] Fukushima K 2004 Chiral effective model with the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **591** 277–84
- [23] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
- [24] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003

- [25] Gastineau F et Aichelin J 2004 Diquark and baryon properties and their production cross sections in dense and hot matter *AIP Conf. Proc.* **739** 398–416
- [26] Chanfray G et Smadja G 1997 Les particules et leurs symétries, *Masson, Paris*
- [27] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in SU_f(3) at finite temperatures *Nucl. Phys. A* **608** 356–88

Chapitre 1

Connaissances actuelles liées au QGP

1. Introduction

La physique des quarks [1, 2] est un domaine qui concerne des thématiques très variées. Concernant ses aspects théoriques, nous pensons d'emblée à la Chromodynamique Quantique (QCD) [3, 4] utilisée afin de décrire l'interaction forte au sein des nucléons, c'est-à-dire en fait les interactions entre quarks. Comparées aux interactions gravitationnelles et électromagnétiques, qui sont bien connues, l'interaction forte présente certaines caractéristiques, comme le confinement des quarks à l'intérieur des hadrons. La quête d'un état où ces quarks pourraient être déconfinés (le plasma de quarks et de gluons QGP) est actuellement l'objet d'intenses recherches. Cependant, à l'instant présent, on ne sait pas résoudre les équations de QCD dans le cas général, mais seulement dans des cas particuliers [5]. Cela nous incitera à proposer une alternative dans les prochains chapitres, via des modèles effectifs. D'autre part, la physique des quarks fait aussi appel à des outils mathématiques puissants, comme la théorie des groupes [6–11]. Cette théorie est en fait basée sur l'étude des symétries d'un système physique. Cette méthode est applicable à divers domaines physiques, comme la cristallographie, la physique atomiques, etc. [8]. Dans le cadre de la physique des particules [1], l'étude des symétries permet de confirmer le nombre de plusieurs types de particules, comme les baryons, les mésons,... observés expérimentalement. En outre, l'existence d'une symétrie a des conséquences sur l'écriture de l'Hamiltonien d'un système.

La finalité principale de ce premier chapitre est de rappeler quelques éléments pertinents dans le cadre d'une étude concernant la physique des quarks. En décrivant les théories correspondantes, un autre objectif est de mettre en évidence les difficultés que nous devrons prendre en compte dans notre travail. Dans la partie 2, quelques notions de théorie des groupes sont présentées, et quelques applications liées à notre travail. Un objectif de cette partie est de se familiariser avec les notations et terminologies utilisées dans la suite du travail. Une liste des quarks, mésons et baryons est ensuite établies, en nous servant de la théorie des groupes. Le Lagrangien de la QCD est rappelé dans la partie 3. Il y est alors proposé une description de chaque terme qui le compose. La notion de symétrie chirale est introduite, tout comme la brisure de cette symétrie et les conséquences qui y sont associées. Ensuite, dans la partie 4, nous exposons les caractéristiques et difficultés rencontrées dans le cadre de la QCD. Cela concerne le confinement des quarks, la non-solvabilité des équations de la QCD, et le phénomène de liberté asymptotique. Cela nous conduit à présenter le quark gluon plasma et ses propriétés. Plus précisément, nous y étudions les conditions selon lesquelles le QGP est supposé se former, et où/quand il existe ou a existé. A cette occasion, un diagramme de phases est proposé, selon la densité baryonique, la densité d'étrangeté et la température. Il permet de présenter les divers objets ou phases qui existent ou sont supposés

exister, en fonction des paramètres évoqués. Cela permet de « planter le décor » dans lequel nous allons évoluer tout au long de cette thèse. Dans la partie 5, nous nous focalisons sur l'étude théorique du QGP, notamment via une description de la QCD sur réseau (lattice QCD ou LQCD). Les limitations de cette approche sont expliquées. Dans la partie 6, nous présentons quelques aspects liés à l'étude expérimentale du QGP. Des signatures possibles de cette phase sont alors présentées. Des observables pertinentes, comme le flot elliptique, sont aussi définies. Pour conclure, nous proposons un aperçu des résultats expérimentaux récents.

2. Les symétries

L'étude des symétries est un outil très puissant en physique. L'idée de départ consiste à étudier les symétries que possède le système physique étudié. Grâce à cette analyse, il devient alors possible de voir qu'une ou plusieurs grandeurs physiques sont conservées. A partir de là, on en déduit les conséquences sur l'Hamiltonien ou le Lagrangien décrivant notre système. En effet, il peut être affecté par les symétries. Plus précisément, les quantités conservées peuvent intervenir dans l'écriture de notre Hamiltonien/Lagrangien.

Pour illustrer cela de manière concrète, un premier exemple consiste à imaginer une particule isolée. Elle n'est soumise à aucune force. Par conséquent, sa vitesse est constante en fonction du temps. Ainsi, cela implique une symétrie par translation dans le temps. Donc, il y a conservation de sa quantité de mouvement p selon le temps. En conclusion, son Hamiltonien ou son Lagrangien n'ont pas de terme dépendant du temps dans leur écriture.

Il est possible d'aller plus loin. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, le théorème de Noether [10] est une généralisation de cette approche. Celle-ci stipule qu'à toute symétrie continue correspond un courant conservé. Celle-ci est notée J^μ , chaque μ étant associé à une coordonnée: 0 pour le temps, et 1,2,3 pour les coordonnées d'espace. Ce courant conservé s'exprime mathématiquement par :

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1)$$

Considérons maintenant un Lagrangien \mathcal{L} est un champ quantique $\psi(x)$. Le lien entre la symétrie (exprimée indirectement par le courant conservé) et le Lagrangien est donné par la relation [10, 12] :

$$J^\mu = \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \cdot \delta \psi. \quad (2)$$

En outre, le scalaire $J^\mu \cdot J_\mu$ peut être un terme du Lagrangien. Il est alors nommé *terme d'interaction*. Nous verrons plus loin dans notre travail que ce terme sera utile, en particulier quand nous construirons notre Lagrangien effectif.

2.1 Introduction à la théorie des groupes

Commençons avec un exemple simple. Considérons un objet macroscopique, non relativiste et non quantique, et un repère Euclidien comportant trois dimensions d'espace. Considérons un point M quelconque de notre objet. Ses coordonnées sont :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ensuite, appliquons une rotation de centre O à notre objet. Cette rotation est dite active, dans le sens où l'objet tourne réellement, alors que le repère reste immobile. Bien sûr, dans le cas d'une rotation passive, les axes du repère auraient subi la rotation et l'objet n'aurait pas été déplacé.... La rotation est décrite par (4), extraite de [10, 11]. Elle nous donne les nouvelles coordonnées du point après rotation :

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Dans cette formule, le vecteur $\vec{\theta}$ apparaît. Il précise les angles des rotations selon chaque axe. Aussi, \vec{J} est un vecteur dont les composantes J_x, J_y, J_z sont des matrices. Une définition possible de celles-ci est :

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Si la rotation est exercée uniquement selon l'axe des z , le terme $\exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$ de (4) se simplifie alors, et se réécrit comme :

$$\begin{aligned} \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}) &= \exp\left(-i\underbrace{\theta_x}_{=0} \cdot J_x - i\underbrace{\theta_y}_{=0} \cdot J_y - i\theta_z \cdot J_z\right) = \exp\left(\theta_z \cdot \begin{bmatrix} & -1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta_z^2}{2} + \frac{\theta_z^4}{24} + \dots & -\theta_z + \frac{\theta_z^3}{6} + \dots & 0 \\ \theta_z - \frac{\theta_z^3}{6} + \dots & 1 - \frac{\theta_z^2}{2} + \frac{\theta_z^4}{24} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Par de simples arguments de symétrie, il peut être vérifié que (6) correspond bien à une rotation selon l'axe z et d'angle θ_z .

Retournons maintenant à la théorie des groupes. Les matrices J_x, J_y, J_z sont les *générateurs* des rotations dans un espace tridimensionnel. Les objets qui subissent les rotations *engendrent*

la représentation du groupe de symétrie, qui est ici $SO(3)$. En effet, $SO(3)$ désigne l'ensemble des matrices réelles carrées telles que $R(\theta) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$, parce que chacune d'entre elles vérifie la propriété $S, O, 3$, où S (*spécial*) signifie que $\det(R) = 1$, O pour orthogonal (${}^T R = R^{-1}$ où T est la transposée) et 3 parce que les matrices R sont des matrices carrées 3×3 . Ici, les objets subissant les rotations sont des vecteurs, comme ceux utilisés dans l'exemple. En revanche, des objets tels que des points n'engendrent pas ce groupe. En effet, ils sont insensibles à toute rotation sur eux-mêmes, créés via $\exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$.

2.2 Quelques symétries utiles

Le monde macroscopique, décrit traditionnellement par la mécanique classique, est composé d'objets matériels. Ces derniers peuvent être décrits par un ensemble de points et de vecteurs. Comme vu plus haut, les points sont insensibles à toute rotation sur eux-mêmes. Ce sont des objets de spin 0, ou objets *scalaires*. Leur groupe de symétrie est $U(1)$. Cela correspond à des matrices 1×1 (c'est à dire des scalaires) du type $\exp(i\varphi)$, où φ est un angle, donc un nombre réel. Pour un vecteur, il est nécessaire de lui faire faire un tour sur lui-même pour lui redonner son aspect initial, c'est-à-dire sa direction initiale. Les vecteurs sont des objets de spin 1, ou des objets *vectoriels*.

Pour aller plus loin, un objet de spin $1/2$ requiert un nombre de rotations pair, au moins deux, afin de lui redonner son aspect initial. Certains de ces objets peuvent être des particules fréquemment désignées comme élémentaires. Cela concerne les électrons, les quarks, ou des particules non élémentaires, comme des fermions composites si leur spin vaut $1/2$. Ce sont des objets *spinoriels*. Leur groupe de symétrie est $SU(2)$, c'est à dire l'ensemble des matrices complexes carrées, avec un déterminant égal à 1 (S) et unitaires (U), c'est à dire telles que $R^\dagger = R^{-1}$. Pour elles, l'équivalent de (2) est :

$$u' = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}\right) \cdot u, \quad (7)$$

où u, u' sont des objets que nous pourrions nommer « vecteurs », dans le sens où ils *engendrent* la représentation $SU(2)$. Clairement, en théorie des groupes, le concept de *vecteur* excède largement la notion que nous pouvons en avoir en mécanique classique. En fait, u, u' sont nommés spineurs. Dans (7), $\vec{\tau}$ contient, comme \vec{J} , trois générateurs. Ce sont les matrices de Pauli, explicitées dans l'annexe B.

De plus, il existe aussi des particules qui nécessitent seulement la moitié d'un tour pour retrouver leur position initiale. Les plus connues de ces particules sont les gravitons. Ce sont les vecteurs de l'interaction gravitationnelle, de la même manière que les photons sont ceux de l'interaction électromagnétique. Les gravitons sont des particules de spin 2. Ce sont particules *tensorielles*.

Mis à part pour ces particules tensorielles, il est possible de prendre en compte un autre type de symétrie. Nous pourrions le décrire comme une « pseudo-symétrie ». D'une manière

générale, ces symétries utilisent la matrice de Dirac γ_5 . En fait, quatre symétries pertinentes devraient être mentionnées dans le cadre de notre travail ; deux d'entre elles concernent ce nouveau type de symétrie. Les quatre sont rassemblées dans le tableau 1 [13, 14]. La première de la liste, c'est-à-dire $U_V(1)$, a été évoquée précédemment : elle concerne les objets scalaires. Si nous « ajoutons » simplement la matrice γ_5 , dans sa matrice de transformation, une nouvelle symétrie est obtenue : $U_A(1)$, nommée *symétrie pseudo scalaire*. De la même manière, l'inclusion de la matrice γ_5 dans la matrice de transformation associée à la symétrie vectorielle $SU_V(3)$ donne une autre symétrie : la symétrie *axiale*.

nom de la symétrie	désignation théorie des groupes	matrice de transformation	courants conservés
scalaire	$U_V(1)$	$\exp(-i\varphi)$	$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$
pseudo-scalaire	$U_A(1)$	$\exp(-i\varphi \cdot \gamma_5)$	$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$
vectorielle	$SU_V(3)$	$\exp\left(-\frac{i}{2}\theta_a \cdot \lambda^a\right)$	$J_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi$
axiale	$SU_A(3)$	$\exp\left(-\frac{i}{2}\theta_a \cdot \lambda^a \gamma_5\right)$	$J_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^a \psi$

Tableau 1. Symétries et caractéristiques.

Dans le tableau 1, une colonne est associée aux courants conservés. Pour toutes les symétries traitées, chacune d'elle agit sur un champ ψ . La colonne établit un lien entre la théorie des champs, et en particulier avec le concept de courant conservé mentionné au début de ce chapitre. A partir du tableau 1, il vient :

$$J_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \Gamma^a \psi, \quad (8)$$

où γ_μ indique la μ ^{ème} matrice de Dirac et Γ^i est associé au type de symétrie correspondante. Pour des symétries scalaires ou pseudo scalaires, nous prenons respectivement 1 ou γ_5 (un courant par μ , l'indice a est alors inutile). D'autre part, pour des symétries vectorielles et axiales, nous avons respectivement λ^a ou $\gamma_5 \lambda^a$. Le terme λ^a fait référence au a ^{ième} propagateur du groupe de symétrie, donc a courants pour μ donné.

2.3 Application de la théorie des groupes à la physique des particules

Les valeurs de la charge électrique ou de la masse des particules peuvent permettre de prédire l'existence de symétrie entre les particules issues de la même « famille » (quarks, mésons ...). L'application du formalisme de la théorie des groupes permet de trouver certaines propriétés des particules subatomiques de manière théorique. D'ailleurs, les valeurs trouvées sont souvent proches de ce qui est observé expérimentalement. De plus, il est possible d'anticiper des résultats expérimentaux, et de déterminer le nombre de particules possibles d'un type

donné. Nous proposons de voir ici les idées principales, et ensuite de présenter les particules qui nous serons utiles dans notre travail.

Nous commençons notre description avec les quarks. Dans le cadre du modèle standard, ils sont considérés comme des particules élémentaires [1]. Dans cette thèse, les trois quarks de saveur u, d, s et leurs antiparticules correspondantes $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ sont considérées. En fait, chacun des ces triplets engendre le même groupe de symétrie. Celui-ci est $SU(3)_f$, l'indice f correspondant à la saveur. Comparé au groupe $SU(2)$ vu plus haut, la différence notable concerne la différence de taille de la matrice. En effet, on a ici des matrices 3×3 .

Un vecteur de $SU(3)_f$ comporte chaque saveur de quarks en tant que composante, via sa fonction d'onde $|u\rangle, |d\rangle$ ou $|s\rangle$. Toute “rotation” de $SU(3)_f$ est alors écrite comme :

$$\begin{bmatrix} |u'\rangle \\ |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{bmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta_a \cdot \lambda^a\right) \cdot \begin{bmatrix} |u\rangle \\ |d\rangle \\ |s\rangle \end{bmatrix}, \quad (9)$$

où θ_a est la $a^{\text{ième}}$ composante du « vecteur θ ». Celui-ci comporte 8 composantes ; c'est l'équivalent de $\vec{\theta}$ vu équation (4). Aussi, λ^a est le $a^{\text{ième}}$ générateur de $SU(3)_f$. Nous avons 8 générateurs différents. Ce sont des matrices 3×3 et elles sont explicitées dans l'annexe B.

Chaque composante du vecteur après rotation, partie gauche de (9), est une combinaison linéaire des fonctions d'onde $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$. Cependant, pour quelques rotations particulières, chaque composante après rotation peut être associée à une saveur de quark distincte des autres. En d'autres termes, il existe une rotation θ pour laquelle on a, par exemple, $|u'\rangle = |d\rangle$, $|d'\rangle = |s\rangle$ et $|s'\rangle = |u\rangle$... Dans la pratique, l'application d'une telle rotation donne de bons résultats pour ce qui est des charges électriques. Mais, ce n'est pas vraiment le cas en ce qui concerne les masses, parce que le quark s est plus lourd que les quarks u et d . Dans ce cadre là, $SU(3)_f$ est connue comme une *symétrie approchée*.

Dans notre exemple utilisant $SO(3)$, nous notons l'existence d'une quantité scalaire invariante quelle que soit la rotation appliquée : la norme du vecteur $\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$. Avec $SU(3)_f$, des quantités scalaires conservées existent également. Elles sont fréquemment notées Y et I_3 [1, 15]. Le scalaire Y est l'hypercharge forte, et est définie comme :

$$Y = N_B + S, \quad (10)$$

où N_B est le nombre baryonique. $N_B = 1/3$ pour un quark et $N_B = -1/3$ pour un antiquark. Aussi, S est le nombre d'étrangeté : -1 pour un quarks s , 1 pour un antiquark \bar{s} , et 0 pour les autres. Pour I_3 , il est lié à Y et à la charge électrique de la particule, note Q , Par la relation de Gell-Mann et Nishijima :

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2}. \quad (11)$$

Grâce à ces quantités, les quarks et les antiquarks peuvent être représentés dans un graphe bidimensionnel, partie de gauche de la figure 1. Le triplet de quarks forme la représentation 3 ; le triplet d'antiquarks forme la représentation $\bar{3}$. Les quarks sont les « briques » de particules composites, les hadrons. Par conséquent, avec plusieurs combinaisons de quarks et/ou d'antiquarks, ces particules peuvent être créées. Avec la théorie des groupes, la méthode est simple : chaque quark ou antiquark est traité comme un vecteur dans le plan I_3, Y . Les mésons sont donc obtenus par sommation vectorielle d'un vecteur quark et d'un vecteur antiquark, voir partie droite de la figure 1. Nous y avons représenté la « famille » la plus utilisée des mésons, c'est-à-dire les mésons pseudo-scalaires. Par rapport aux autres mésons, ils sont les plus stables, car ce sont les plus légers.

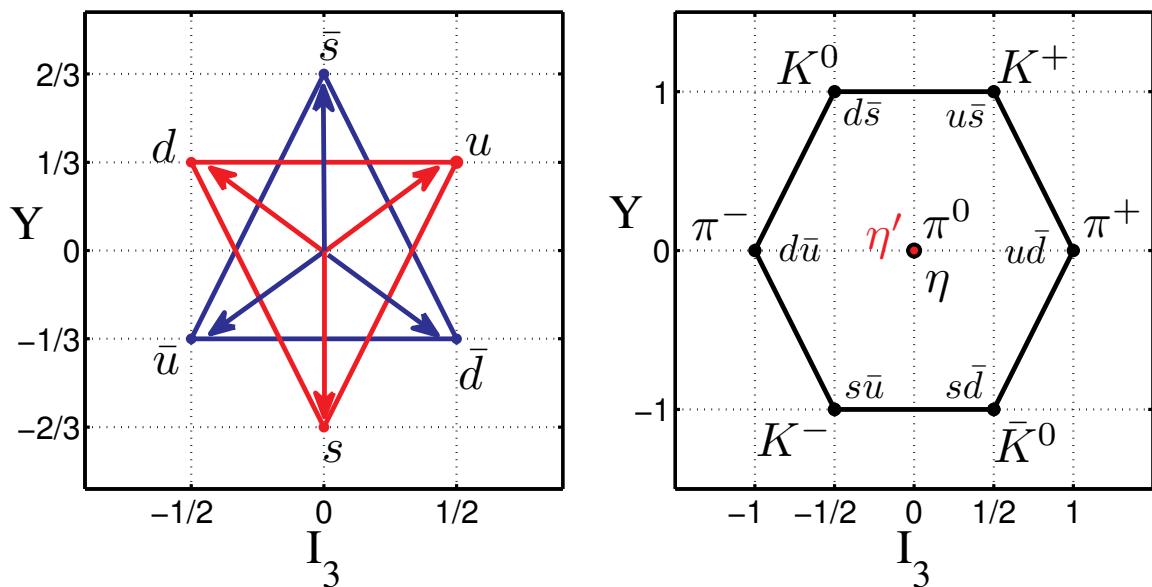


Figure 1. Partie gauche : triplet de quarks u, d, s (représentation 3) et triplet d'antiquarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ (représentation $\bar{3}$). Partie droite : mésons pseudo-scalaires, octet et singulet (η').

Voyons de plus près l'exemple des mésons. Dans ce cas, l'association d'un quark et d'un antiquark est considérée. Cela implique un espace vectoriel correspondant au produit tensoriel de l'espace du quark et de celui de l'antiquark. Cela donne alors l'écriture formelle de la fonction d'onde d'un méson :

$$|q\bar{q}\rangle \equiv |q\rangle \otimes |\bar{q}\rangle. \quad (12)$$

Dans le formalisme de la théorie de groupes, la représentation du groupe de symétrie des mésons est écrite de la même manière. En effet, par analogie avec (12), elle est écrite comme un produit tensoriel des représentations 3 et $\bar{3}$. Donc, nous écrivons $3 \otimes \bar{3}$. Cette écriture peut être modifiée si on écrit la représentation comme une somme de représentations qui ne peuvent pas être simplifiées, connues sous le nom de *représentations irréductibles*. Finalement, il vient [1, 16] :

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8. \quad (13)$$

Par conséquent, la représentation des mésons est composée par la représentation unité, connue sous le nom de représentation triviale, et par la représentation 8, c'est-à-dire un octet. Cela explique pourquoi nous avons 9 mésons, figure 1 : 8 mésons octet et le méson singulet η' .

D'autre part, dans le cadre de $SU(3)_f$, la théorie indique l'existence d'un octet (représentation 8) et d'un décuplet (représentation 10) de baryons. Ces baryons sont représentés figure 2, dans laquelle nous avons utilisé la même méthode que celle décrite pour les mésons. Maintenant, nous proposons de laisser provisoirement de côté la théorie des groupes pour nous focaliser sur la théorie de base qui gouverne les systèmes que nous voulons modéliser.

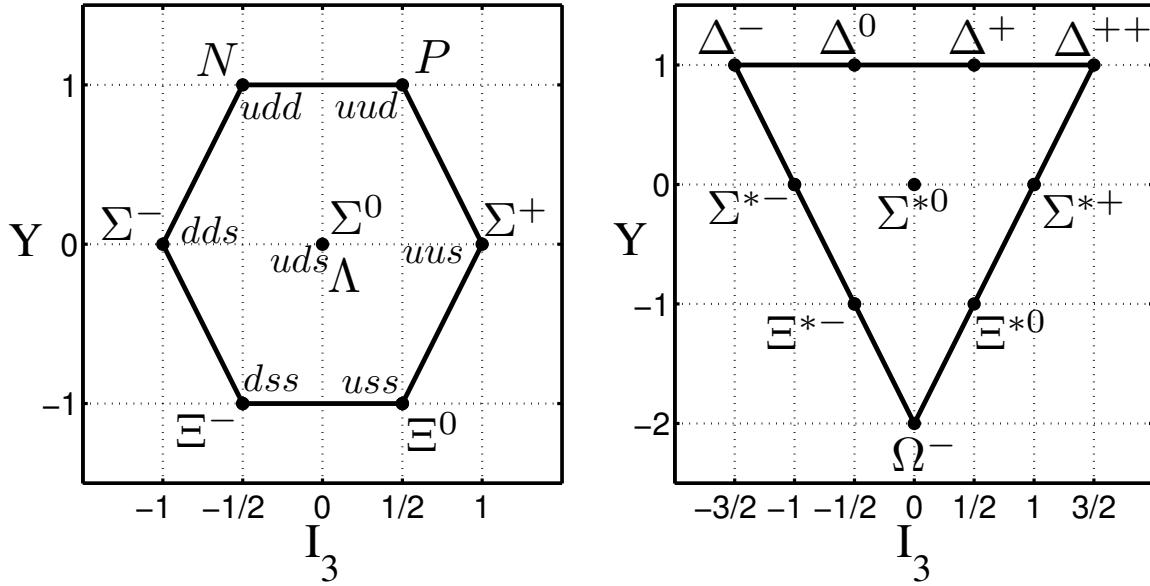


Figure 2. Les baryons. A gauche : baryons de l'octet. A droite : baryons du décuplet.

3. La Chromodynamique Quantique

3.1 Description du Lagrangien de QCD

La Chromodynamique Quantique (QCD) est le modèle le plus sophistiqué pour décrire la physique des quarks [2, 4]. Son Lagrangien décrit l'interaction forte, c'est-à-dire l'interaction subie par les quarks. Les vecteurs de cette interaction sont les gluons. Ce sont des particules de spin égal à un. Le Lagrangien de QCD s'écrit, sous une forme condensée [5, 17, 18] :

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \cdot G_{\mu\nu}^a \cdot G_a^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_{0f}) \psi_f , \quad (14)$$

avec:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \cdot A_\mu , \quad (15)$$

dans lequel nous avons:

$$A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \cdot \frac{\lambda_a}{2} \text{ écrit aussi comme } A_\mu = A_\mu^a \cdot \frac{\lambda_a}{2} \text{ (Sommation implicite d'Einstein).} \quad (16)$$

Au niveau de (14), D_μ correspond à ∂_μ , c'est à dire l'opération de dérivée, dans laquelle nous appliquons une transformation de jauge, comme détaillée dans (15). g_s est la constante de couplage associée à l'interaction forte. Aussi, $G_{\mu\nu}^a$ est le tenseur du champ de gluons, exprimé comme :

$$G_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a + g_s \cdot f^{abc} \cdot A_{b\mu} \cdot A_{c\nu},$$

dans lequel $F_{\mu\nu}^a$ est défini comme :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (18)$$

Le A_μ^a correspond à la composante μ du champ de gluons A . Le a est un index de couleur. Les λ_a sont les 8 générateurs de $SU(3)$, f^{abc} sont les constantes de structure associées, voir (9) et annexe B. Mais, maintenant, le groupe de symétrie $SU(3)$ est noté, c comme *couleur*. Le ψ_f correspond au champ de quarks de saveur f . Plus précisément, les ψ_f sont des triplets, c'est-à-dire des vecteurs à trois composantes. Ils admettent $SU(3)_c$ comme groupe de symétrie. Ils s'écrivent sous forme développée [4] :

$$\psi_f \equiv \begin{pmatrix} \psi_f^{rouge} \\ \psi_f^{vert} \\ \psi_f^{bleu} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Les indices *rouge*, *vert*, *bleu* sont associés à un nombre quantique spécifique à la chromodynamique : la couleur. De la même manière, les « anti-valeurs » sont anti-rouge, anti-vert et anti-bleu. Elles sont associées aux champs d'antiquarks.

La saveur est un autre nombre quantique, lié au type de quarks considéré. Nous en avions déjà parlé au paragraphe 2.3. En fait, dans le modèle actuel, six saveurs de quarks existent : u, d, s, c, b, t , et ainsi de suite pour leurs antiquarks équivalents : anti- u , noté \bar{u} , ... Chacun d'eux a une masse, connue sous le nom de masse nue, ou de masse courante. Dans l'équation (14), elle est notée m_{0f} . Le quark le plus léger est le u , dont la masse est proche de 2 ou 3 MeV, alors que t aurait une masse d'environ 173 GeV, donc comparable à celle d'un noyau d'or, voir annexe A. Par conséquent, des arguments de thermodynamique légitiment notre choix de garder uniquement les trois quarks u, d et s , comme fait dans notre travail exposé dans les chapitres suivants. Plus précisément, les autres quarks n'interviennent pas vraiment dans la physique que nous voulons décrire : ils sont certainement trop lourds pour être réellement créés de manière notable, même si nous verrons plus tard le rôle que pourrait jouer les mésons constitués par c et \bar{c} ... Par analogie avec (19), nous écrivons le champ de quark complet comme :

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Chaque composante du vecteur présenté dans (20) peut divisée comme dans (19), avec $f = u, d, s$. Aussi, ψ admet $SU(3)_f$ comme groupe de symétrie (9). Pour finir cette analyse, imaginons que nous n'ayons pas de gluons dans les équations. Cela correspondrait à une théorie où les quarks n'interagiraient pas entre eux. Donc, ils seraient considérés comme des particules libres. L'équation (14) serait alors écrite comme :

$$\mathcal{L}_{libre} = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{0f}) \psi_f = \sum_f \bar{\psi}_f (i\cancel{D} - m_{0f}) \psi_f. \quad (21)$$

Finalement, elle pourrait s'écrire comme :

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\psi} (i\cancel{D} - m_0) \psi, \quad (22)$$

dans laquelle m_0 correspond à une matrice définie comme :

$$m_0 = \begin{bmatrix} m_{0u} & & \\ & m_{0d} & \\ & & m_{0s} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Clairement, (22) est le Lagrangien de Dirac [19]. Il décrit l'évolution de particules quantiques relativistes de spin $1/2$.

3.2 La symétrie chirale

Une caractéristique importante liée au Lagrangien de QCD est liée à la notion de symétrie chirale. Plus précisément, Les quarks peuvent être classés en deux catégories par rapport à leur chiralité : droite (le spin et la quantité de mouvement sont dans le même sens) et gauche (sens opposés). Nous notons ψ_D un champ de « quarks droits », et ψ_G un champ de « quarks gauches ». Un champ de quarks peut alors s'écrire comme :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_D \\ \psi_G \end{pmatrix}. \quad (24)$$

En utilisant la matrice γ^5 définie dans une représentation de Weyl (chirale), annexe B :

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

nous définissons les projecteurs selon les états gauche et droit [20] :

$$\psi_G = \frac{1_4 - \gamma^5}{2} \psi, \quad \bar{\psi}_G = \psi_G^+ \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1_4 + \gamma^5}{2}, \quad \psi_D = \frac{1_4 + \gamma^5}{2} \psi, \quad \bar{\psi}_D = \psi_D^+ \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1_4 - \gamma^5}{2}, \quad (26)$$

où 1_2 et 1_4 sont respectivement les matrices identités 2×2 et 4×4 . Si nous utilisons ces projecteurs dans le Lagrangien de QCD (14), et si nous n'explicitons pas les saveurs, nous obtenons :

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \cdot G_{\mu\nu}^a \cdot G_a^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_D \gamma^\mu D_\mu \psi_D + i\bar{\psi}_G \gamma^\mu D_\mu \psi_G - m \cdot \bar{\psi} \psi, \quad (27)$$

à cause de la relation d'anti-commutation $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, annexe B. Clairement, les termes $i\bar{\psi}_D \gamma^\mu D_\mu \psi_D$ et $i\bar{\psi}_G \gamma^\mu D_\mu \psi_G$ indiquent qu'un quark gauche peut seulement interagir avec d'autres quarks gauches. De la même manière, les quarks droits interagissent avec les quarks droits. Ce clivage des quarks gauches et droits correspond à la symétrie chirale. Cependant, le terme $m \cdot \bar{\psi} \psi = m \cdot (\bar{\psi}_D \psi_G + \bar{\psi}_G \psi_D)$ brise cette symétrie, car les quarks gauches et droits sont « autorisés à interagir » via ce terme, dans lequel m est la masse des quarks. À hautes températures et/ou hautes densités, les masses des quarks sont proches des masses nues m_0 . Pour les quarks u et d , les masses nues sont assez faibles pour nous permettre de négliger le terme $m_0 \cdot \bar{\psi} \psi$. Cela veut dire que la symétrie chirale est une symétrie approchée. On dit alors que la symétrie chirale est *explicitement brisée*. Cependant, dans certains calculs, il est possible de travailler à la limite chirale, qui consiste à négliger complètement les masses nues des quarks.

Au contraire, à basses températures/densités, des condensats de quarks-antiquarks peuvent apparaître. Ils sont notés traditionnellement comme $\langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle$, et sont fréquemment désignés sous le terme de *condensats de quarks* ou *condensat chiral*. L'antiquark d'un condensat peut interagir avec un quark (non issu d'un condensat). De cette manière, un quark gauche et un condensat peuvent donner un quark droit, comme illustré par la figure 3. Ce couplage brise la symétrie chirale.

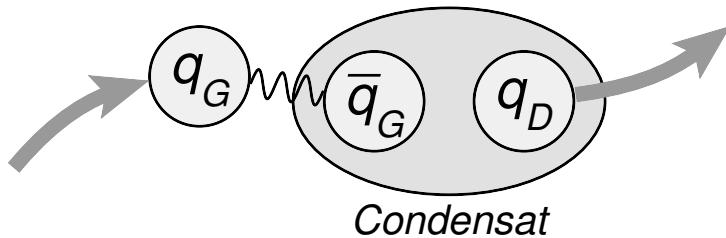


Figure 3. Description de la brisure de la symétrie chirale par le condensat. Ce schéma a été largement inspiré par [5].

En fait, cette interaction conduit à considérer des masses effectives. Clairement, nous considérons là une masse m largement plus forte que la masse nue. Puisque $m \cdot \bar{\psi} \psi$ est responsable de la brisure de la symétrie chirale, un accroissement de m permet à ce terme de devenir non négligeable. Dans ce cas, la symétrie chirale est *spontanément brisée*.

3.3 La brisure de la symétrie chirale

En physique, la brisure de symétries présente certaines applications. Plus précisément, le théorème de Goldstone [21, 22] explique que lorsqu'une théorie continue est spontanément brisée, cela donne naissance à des bosons, nommés bosons de Nambu-Goldstone. Si la symétrie est exacte, ces bosons sont sans masse. Au contraire, dans le cas de symétries approchées, les (pseudo) bosons de Nambu-Goldstone ont une masse. Dans le cadre de la symétrie chirale avec les quarks légers u et d , la symétrie n'est pas exacte, mais bien vérifiée, grâce aux faibles masses nues de ces quarks. En conséquence, les bosons de Nambu-Goldstone associés ont de faibles masses. Ils correspondent aux pions. En fait, la relation de

Gell-Mann-Oakes-Renner (GMOR) [23] établit un lien entre la masse des pions m_π , leur constante de désintégration dans le vide f_π , les masses nues m_{0u}, m_{0d} des quarks u et d , et la valeur du condensat de quarks légers $\langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle$ [20, 24] :

$$m_\pi^2 \cdot f_\pi^2 = -(m_{0u} + m_{0d}) \cdot \langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle, \text{ avec } \langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle \equiv \frac{\langle\langle\bar{\psi}_u\psi_u\rangle\rangle + \langle\langle\bar{\psi}_d\psi_d\rangle\rangle}{2}. \quad (28)$$

Le quark étrange est plus lourd. Ainsi, la symétrie chirale mettant en jeu des quarks de $SU(3)_f$ est plus approchée. Il est imaginé [25] que les bosons de Nambu-Goldstone correspondant puissent être associée aux η et aux kaons dans la limite où les trois quarks u, d, s seraient de masses nulles.

D'autre part, la théorie de Landau sur les transitions de phase [26] considère les transitions de phase pour lesquelles une symétrie est brisée ou restaurée, par exemple en fonction de la température. Un paramètre d'ordre est une quantité utilisée afin d'étudier de telles transitions de phase. Dans la phase dans laquelle la symétrie est respectée, le paramètre d'ordre en nul. À l'opposé, quand la symétrie est brisée, le paramètre d'ordre est non nul. La manière selon laquelle le paramètre d'ordre varie, d'une valeur nulle à une valeur non nulle (ou inversement), nous permet de connaître l'ordre de la transition de phase. Plus précisément, quand le paramètre d'ordre présente une discontinuité entre les deux phases, nous avons une transition de phase du premier ordre. Quand le paramètre d'ordre chute brutalement à zéro, mais de manière continue, cela correspond à une transition du deuxième ordre. Dans ce cas, la dérivée du paramètre d'ordre selon la température présente une discontinuité. Aussi, quand le paramètre d'ordre converge seulement vers zéro, c'est-à-dire qu'il a des valeurs non nulles tout le temps, nous avons un *crossover*. Ces trois configurations sont représentées sur la figure 4, dans laquelle T_c correspond à la température critique de la transition.

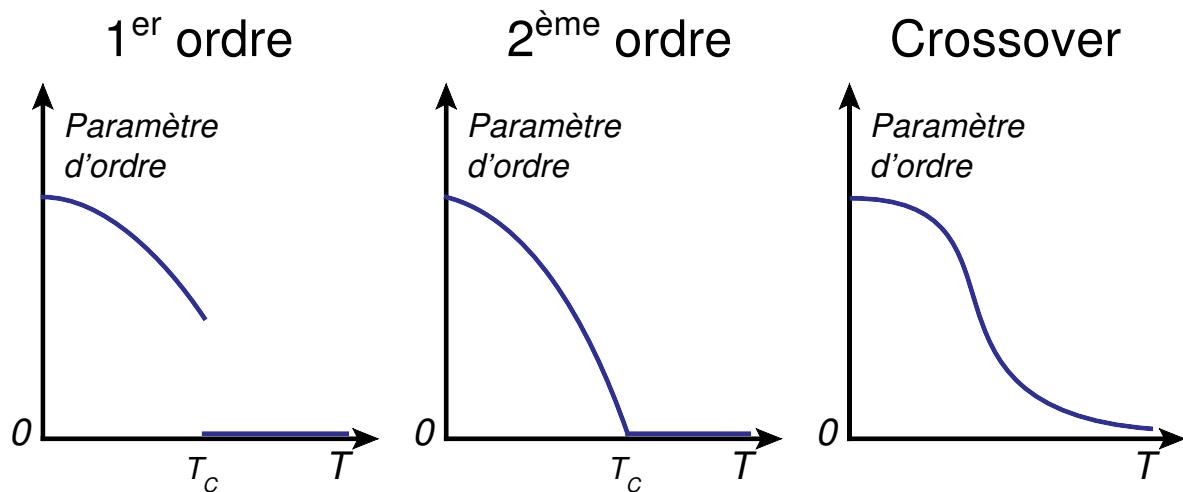


Figure 4. Evolution du paramètre d'ordre en fonction de la température T .

Dans le cas de la symétrie chirale, la valeur du condensat de quarks $\langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle$ constitue un paramètre d'ordre. Clairement, un objectif peut être d'étudier la restauration de la symétrie chirale à hautes températures, quand la valeur du condensat tend vers zéro.

4. Caractéristiques et problèmes liés à la physique des quarks

4.1 Confinement des quarks à l'intérieur des hadrons

Le confinement des quarks est un phénomène important lié à l'interaction forte [4]. Par exemple, considérons un quark et un antiquark. Si ces deux particules sont liées, cela correspond physiquement à un méson. L'interaction forte interdit à nos deux particules de se séparer si aucune autre particule n'intervient, figure 6 paragraphe 4.3. Par conséquent, quand la distance entre ces deux particules est trop forte, l'interaction forte agit via une force de rappel, comme un ressort. Ladite force empêche les deux particules de se retrouver isolées l'une par rapport à l'autre. En fait, il est possible de modifier une structure comme un méson ou un baryon lors de collisions à hautes énergies. Cependant, un quark ou un antiquark ne se retrouveront jamais isolés, c'est-à-dire à l'état libre, même s'il y a création de paires quarks-antiquarks.

En effet, le modèle standard stipule que les seules particules qui puissent exister à l'état libre, et par extension puissent être observées, doivent être des objets de couleur soit nulle (« noir »), soit une « couleur complète » (« blanc » ou « anti-blanc »). Pour être plus précis, le concept de couleur est associé à la charge de couleur portée par les objets décrits par la QCD (évoquée paragraphe 3.1). Les quarks ont une couleur qui peut être r, v, b . De la même manière, les antiquarks peuvent avoir une « anti-couleur » $\bar{r}, \bar{v}, \bar{b}$. Par exemple, un méson bâti avec un quark rouge a nécessairement un antiquark \bar{r} . En conséquence, les mésons ont une charge de couleur nulle : « $r + \bar{r} = \text{noir}$ ». De plus, les baryons doivent être composés de trois quarks de couleurs différentes. Par conséquent, les baryons ont une charge de couleur « complète » : « $r + g + b = \text{blanc}$ ». Par extension, nous avons « anti-blanc » pour les antibaryons.

Dans le cadre de la théorie des groupes, ce raisonnement peut être développé. Plus précisément, des calculs $SU(3)_f$ (sueur), comme avec (13), peuvent être effectués avec $SU(3)_c$ (couleur). Le tableau 2 propose de tels calculs. Les représentations dont les particules existent réellement à l'état libre sont uniquement celles qui peuvent être scindées en une somme incluant la représentation triviale 1 : ce sont des invariant de couleur, c'est-à-dire des scalaires selon la couleur [15]. Cela concerne bien entendu les mésons et les baryons. D'autre part, un raisonnement similaire peut être fait pour les antibaryons \overline{qqq} .

Mentionnons maintenant le rôle particulier joué par les gluons, les vecteurs de l'interaction forte. Concrètement, ils agissent en échangeant de la couleur avec les quarks. A cause de cela, ils peuvent porter une charge de couleur et une anti-charge de couleur différente, et sont donc non observables. Par exemple, si un quark porte initialement une couleur *rouge*, alors il peut interagir avec un gluon portant $b\bar{r}$, et finalement il portera une couleur *bleue* après interaction. En fait, cette description est purement illustrative. Dans le cadre de la mécanique quantique, les états des gluons sont mélangés, pour former des combinaisons linéaires. Par exemple, cela peut donner $(1/\sqrt{2}) \cdot (rb + b\bar{r})$. Nous avons 8 possibilités de combinaisons linéaires indépendantes formées à partir des possibilités couleur-anti-couleur, c'est-à-dire en

fait 8 gluons. Ils correspondent aux 8 générateurs de $SU(3)_c$, notés λ_a dans la partie 3. Les matrices de Gell-Mann, voir annexe B, sont une représentation possible de ces générateurs, où $(1/\sqrt{2}) \cdot (r\bar{b} + b\bar{r})$ peut être associé à λ_4 . D'autre part, il peut être souligné le fait que l'état singulet $(1/\sqrt{3}) \cdot (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$, associé à la matrice unité, n'est pas un neuvième gluon, car il peut être formé par combinaison linéaire des 8 générateurs de $SU(3)_c$ [27].

structure quarks/antiquarks	représentation et simplification possible	nom éventuel	observations
q	3	quark	n'existe pas à l'état libre
\bar{q}	$\bar{3}$	anti-quark	n'existe pas à l'état libre
$q\bar{q}$	$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$	méson	existence prouvée expérimentalement
qq	$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$	diquark	ne peut pas exister à l'état libre, non observé expérimentalement
$qq\bar{q}$	$3 \otimes 3 \otimes \bar{3} = 3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus 15$	–	n'existe pas
qqq	$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$	baryon	existence prouvée expérimentalement !
$qqqq$	$3 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus \bar{6} \oplus \bar{6} \oplus \dots$	–	n'existe pas

Tableau 2. Structures possibles de quarks /antiquarks, inspiré de [1, 15].

Aussi, rien n'interdit les gluons d'interagir avec eux-mêmes, puisque leur charge de couleur le permet. Cette auto-interaction des gluons correspond au terme $-\frac{1}{4} \cdot G_{\mu\nu}^a \cdot G_a^{\mu\nu}$ de (14). Ce comportement ne peut pas exister avec des interactions électromagnétiques. En effet, les vecteurs de cette interaction, les photons, ne portent pas de charge liée à l'interaction, c'est-à-dire de charge électrique. Concernant les gluons, leur auto-interaction suggère l'existence d'états liés de gluons, les *glueballs* ou *gluoniums* [1, 28, 29]. Toutefois, ils n'ont pas (encore) été observés expérimentalement. Une explication possible est qu'ils pourraient se combiner avec des états quantiques de mésons.

4.2 Insolvabilité des équations de QCD

L'interaction entre gluons mentionnée au paragraphe 4.1 est un obstacle qui fait que l'on ne sait pas résoudre les équations de QCD dans le cas général. Mais, ce n'est pas la seule raison. Nous pouvons ainsi parler de la constante de couplage α_s de l'interaction forte. Celle-ci est reliée au terme g_s de l'équation (15) par la relation $\alpha_s = g_s^2 / 4\pi$. En fait, α_s n'est pas réellement une constante, notamment pour les domaines en énergie qui nous intéressent [18]. En outre, sa valeur est suffisamment forte pour interdire d'utiliser les méthodes perturbatives, qui sont appliquées avec succès par exemple en physique atomique ou en électrodynamique quantique. En effet, dans ces théories, la constante de couplage rencontrée correspond à la célèbre constante de structure fine $\alpha=1/137$, qui gouverne les interactions électromagnétiques. En revanche, en ce qui concerne α_s , une valeur approchée de 0.1184 est

souvent rencontrée dans la littérature (pour la masse du boson Z). Cette valeur est assez forte pour qu'une « simple » interaction entre deux quarks fasse intervenir un grand nombre de gluons, de paires particules/antiparticules ... Par conséquence, cela induira une grande quantité d'événements possibles à prendre en compte pour décrire cette interaction [1]. Calculer tous ces événements est très difficile, notamment si nous nous plaçons aux énergies correspondant à la QCD dite de « basses énergies ».

Plus précisément, ces basses énergies sont celles où il faut être pour décrire les hadrons. Mais, dans ce régime, α_s est encore plus forte que la valeur donnée plus haut. En conséquence, on ne peut pas modéliser les quarks à l'intérieur des hadrons à partir des équations de QCD. Puisque les quarks ne peuvent pas exister à l'état libre dans des conditions normales, et puisque on ne sait pas décrire leur interaction au sein des hadrons, certaines de leurs caractéristiques ne sont pas faciles à étudier. Cela concerne en particulier leur masse, nommées masse nue dans la partie 3. Des valeurs des masses nues des quarks sont disponibles dans la littérature, mais l'incertitude est assez grande.

4.3 Phénomène de liberté asymptotique

A l'opposé de ce qui a été vu à basses énergies, l'interaction forte est paradoxalement beaucoup plus « coopérative » aux hautes énergies. Imaginons un système constitué de quarks et/ou d'antiquarks, qui soient suffisamment proches les uns des autres. Si le rapprochement est suffisant, on est alors dans les conditions d'un deuxième phénomène typique de la physique des quarks, caractérisé par une faiblesse relative de l'interaction forte. Cela correspond au phénomène de liberté asymptotique [2, 4]. D'autre part, dans ce cas, les méthodes perturbatives évoquées précédemment sont alors utilisables [5]. Par conséquent, cette branche de la théorie est nommée *perturbative QCD*. Pour l'illustrer, considérons la figure 5, fortement inspirée de [5]. Elle décrit de manière très schématique le phénomène évoqué avec les baryons. Dans cette figure, l'image (1) correspond aux conditions ordinaires, dans un noyau. Si le rapprochement de plusieurs baryons est suffisant, images (2) et (3), leurs quarks peuvent se mélanger, puisque plus rien n'indique que tel ou tel quark appartient à tel ou tel baryon. Si nous interprétons le baryon comme un « sac » qui confine les trois quarks (voir le modèle du sac évoqué plus loin dans ce chapitre), l'image (3) peut être interprétée comme une fusion des sacs. Donc, le confinement est toujours présent, mais il s'exerce sur un plus grand volume et avec plus de quarks qu'avec un simple baryon.

En second exemple, considérons un quark et un antiquark. Tout d'abord, admettons que les deux particules ne subissent pas l'influence d'autres particules, c'est-à-dire qu'elles sont isolées. Dans ce cas, l'interaction entre ces particules peut être donnée par la formule suivante :

$$V_{q\bar{q}}(r) \equiv -\frac{\alpha}{r} + \kappa \cdot r . \quad (29)$$

Ce potentiel quark-antiquark est représenté par la figure 6, directement inspirée de [5]. Il correspond à la courbe étiquetée « sans écrantage ». Nous en avions parlé au paragraphe 4.1. Clairement, le quark et l'antiquark ne peuvent pas être séparés. Toutefois, en général, de telles particules ne sont pas seules. Ainsi, il est nécessaire de prendre en compte en effet d'écrantage, associé à l'autre courbe dans la figure 6. Plus précisément, si le quark et

l'antiquark sont assez éloignés, nous pourrions avoir d'autre quarks/antiquarks entre eux. Cette remarque est vraie notamment si le milieu est assez dense, c'est-à-dire image (3) de la figure 5. Ainsi, ils peuvent « masquer » l'interaction entre notre quark et notre antiquark. Finalement, les quarks et les antiquarks peuvent être séparés. Si l'effet d'écrantage est pris en compte, (29) est alors modifié et donne [14] :

$$V_{q\bar{q} \text{ écrantage}}(r) \equiv -\frac{\beta}{r} \cdot \exp(-r/R). \quad (30)$$

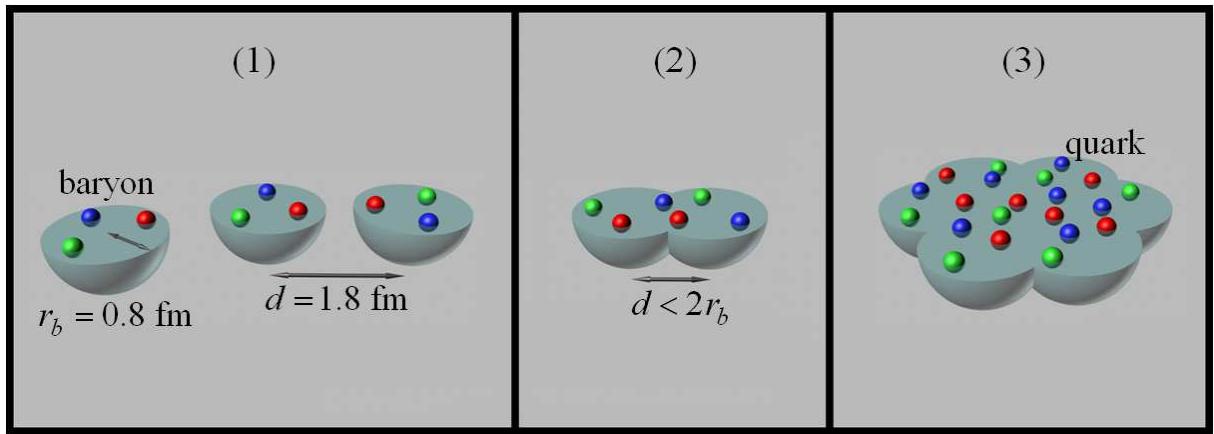


Figure 5. Schématisation de la “fusion” de plusieurs baryons.

L'effet d'écrantage permet la formation d'une phase, dans le sens thermodynamique de ce mot, où les quarks et gluons peuvent coexister, sans manifestation apparente du confinement. Cette phase est le plasma de quarks et de gluons.

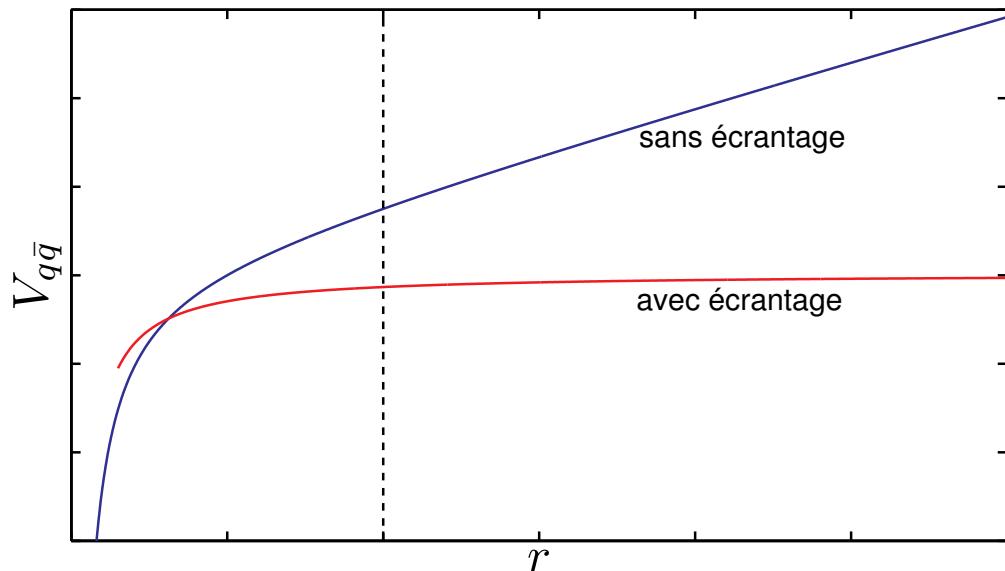


Figure 6. Potentiel quark-antiquark $V_{q\bar{q}}$ fonction de la distance r entre le quark et l'antiquark.

4.4 Le plasma de quarks et de gluons et diagramme de phase

Le plasma de quarks et de gluons (QGP dans l'appellation Anglaise) [5, 17] est un état très particulier de la matière, puisque c'est le seul où les quarks sont déconfinés des hadrons. De nos jours, on connaît deux systèmes physiques dans lesquels un tel état a pu ou pourrait exister. Le premier correspond à l'Univers dans ses premiers instants, peu de temps avant le Big Bang. Quand la température s'est suffisamment abaissée, l'énergie initiale s'est convertie en matière/antimatière. Pendant cette phase, il est supposé que la taille de l'Univers était proche de celle de l'orbite actuelle de Jupiter. Ensuite, durant le refroidissement, l'interaction forte a commencé à agir et le confinement des quarks dans les hadrons s'est amorcé. Par un processus encore mal connu, comme une brisure de la symétrie matière/antimatière (en faveur de la matière), la matière a dominé l'antimatière. Cela explique pourquoi la matière forme l'Univers tel que nous le connaissons aujourd'hui. L'antimatière apparaît seulement dans des cas très particuliers, comme au sein des mésons. Clairement, le refroidissement initial de l'Univers constitue une transition de phase du plasma de quarks et de gluons en matière hadronique. Dans cette configuration, la température est le seul paramètre agissant sur cette condensation.

Le second système physique est le cœur de certaines étoiles à neutrons, où la densité excède plusieurs fois la densité nucléaire des noyaux des atomes. Les étoiles à neutrons sont des astres morts du point de vue de leur activité thermonucléaire. Donc, elles sont considérées comme des objets froids. Dans cette configuration, une masse comparable à celle du Soleil, c'est-à-dire $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, est contenue dans une sphère d'environ dix kilomètres de rayon. Cela met en valeur un autre paramètre pour former du QGP : la densité baryonique ρ_B . En fait, celle-ci est lié au nombre baryonique N_B vu au début de ce chapitre. Donc, les étoiles à neutrons illustrent une autre possibilité de transition de phase, mais cette fois-ci la densité est le paramètre permettant cette transition. Pour certaines étoiles à neutrons massives, dont les masses dépassent largement M_{\odot} , il est courant de parler *d'étoiles à quarks*. Dans les références [30, 31], il est d'ailleurs expliqué que ces étoiles ne peuvent pas être constituées uniquement par des neutrons, mais aussi par de la « matière de quarks », et même de matière *étrange*. C'est pour cela que l'on peut parler *d'étoiles étranges* [32].

Les deux exemples précédents sont des cas particuliers. Pour chacun, seul un paramètre, la température ou la densité, permet cette transition de phase. Dans le cas général, un graphe peut être fait selon ces deux paramètres. Ledit graphe est alors divisé en plusieurs zones : une où le plasma de quarks et de gluons existe, une autre pour la matière hadronique... Chaque zone correspond à une phase. Cela forme le *diagramme de phase*, figure 7, inspiré de [5] et [30]. Dans cette figure, un nouveau paramètre est introduit : la densité d'étrangeté ρ_S , en référence aux quarks étranges et à la matière étrange précédemment évoquée. Une surface est utilisée pour matérialiser la frontière entre la matière hadronique et les autres phases. Cependant, dans l'espace ρ_B, ρ_S, T , une phase mélangeant matière hadronique et phase QGP est attendue, notamment à hautes densités et basses températures. La figure 7 propose aussi de résumer les spéculations actuelles au sujet d'hypothétiques objets exotiques. Ils existeraient à certaines températures et densités. Ce sont les MEMO (*Metastable Exotic Multihypernuclear Objects*) [30, 33, 34] ou les *strangelets* [30, 32, 34]. Par ailleurs, une autre phase est attendue

à hautes densités et basses températures : la phase de supraconductivité de couleur, qui peut elle-même être divisée en plusieurs sous-phases [35–41]. Cette phase sera évoquée de nouveau plus tard dans notre travail. Les sigles AGS, SPS, RHIC et LHC désignent les projets visant à étudier la phase QGP expérimentalement. Leurs positions sur le graphe indiquent les zones potentiellement explorées par ces expériences. Quelques résultats liés auxdites expériences sont données dans la partie 6.

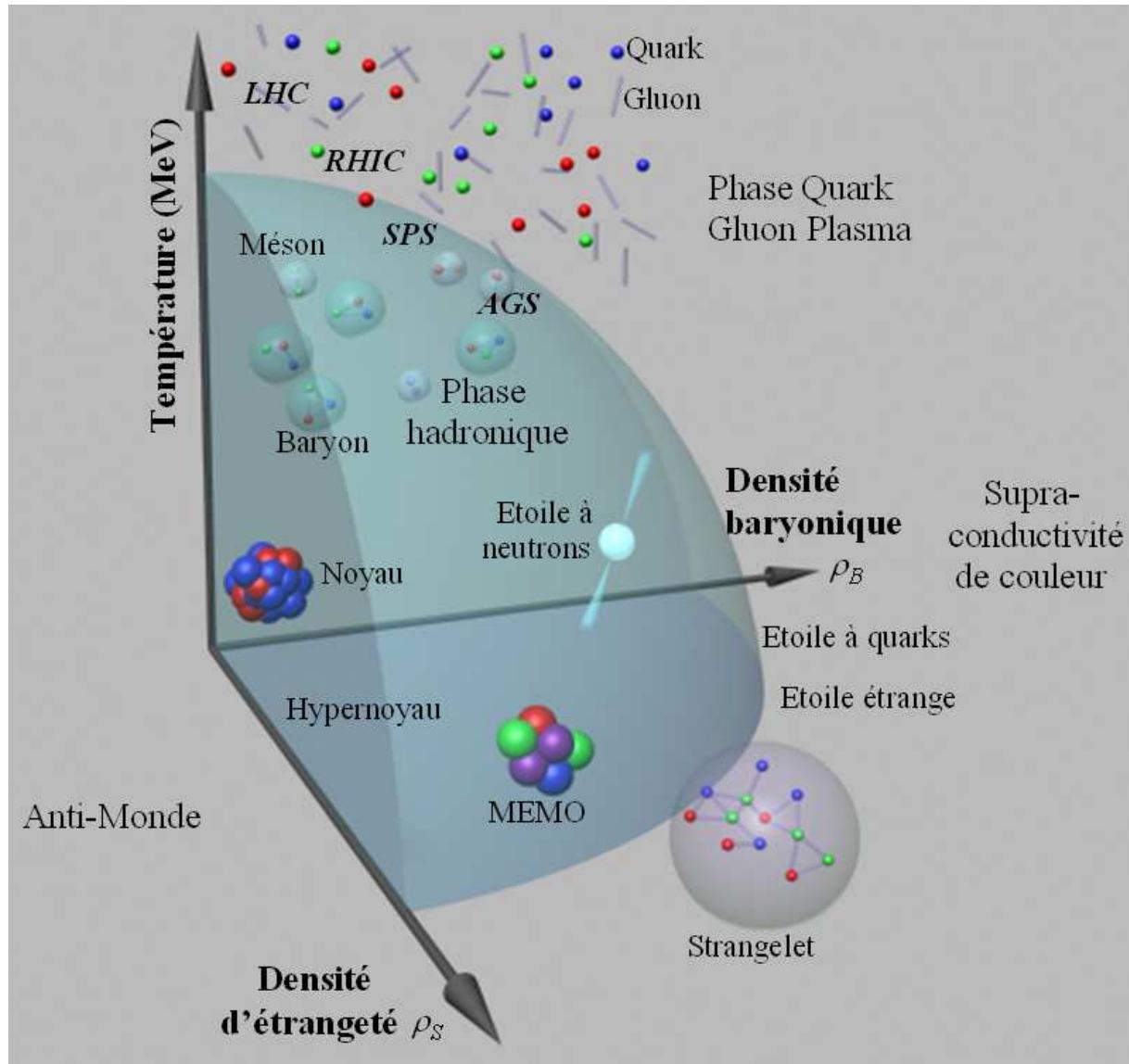


Figure 7. Diagramme de phase dans l'espace ρ_B, ρ_S, T .

5. Aspects théoriques : la QCD sur réseau

Même si les équations de QCD ne peuvent pas être résolues dans le cas général, des approches numériques existent pour effectuer certains calculs. La QCD sur réseau (LQCD) est une de ces méthodes. Elle a été proposée en 1974 par Kenneth Wilson [42]. Avec cette

méthode, [43–47], les calculs de QCD sont effectués sur un réseau à quatre dimensions, c'est-à-dire trois dimensions spatiales et le temps, dans un espace Euclidien. Cela veut dire que la composante temporelle est écrite comme $x_4 = i \cdot t$. Avec LQCD, la valeur moyenne d'une observable A peut être évaluée avec une relation comme [46] :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \cdot \hat{A} \cdot \exp(-S), \quad (31)$$

où ψ est un champ de quarks. Aussi, Z est la fonction de partition, définie comme :

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \cdot \exp(-S), \quad (32)$$

dans laquelle S est l'action. Nous rappelons que $S = \int d^4x \cdot \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est la densité lagrangienne, aussi nommée plus simplement Lagrangien dans la pratique, comme dans notre travail. L'action peut être scindée en deux parties : une associée aux gluons, et l'autre concerne les quarks : $S = S_{\text{gluons}} + S_{\text{quarks}}$.

5.1 L'action de jauge de Wilson et les boucles

Tout d'abord, focalisons-nous sur les gluons. L'action liée aux gluons peut être évaluée par l'action de jauge de Wilson, qui s'écrit comme [44] :

$$S_{\text{gluons}} = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{3} \text{Re} \left(\text{Tr} \left(P_{\mu\nu}(x) \right) \right) \right). \quad (33)$$

Dans cette expression, β est l'inverse de la température. Aussi, $P_{\mu\nu}(x)$ est une plaquette. Grâce à la figure 8, on exprime la plaquette comme [48] :

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_{-\mu}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(x + \hat{\nu}), \quad (34)$$

dans laquelle $U_\mu(x)$ est une variable de champ de jauge, avec $U_\mu(x) \in SU(3)$.

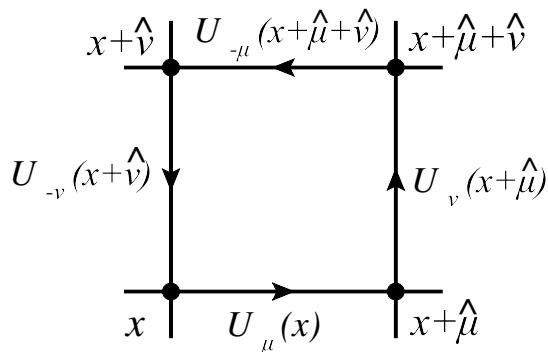


Figure 8. Une plaquette.

$U_\mu(x)$ est relié aux champs de gluons A_μ par $U_\mu(x) = \exp \left(ig \int_x^{x+\mu} d\tilde{x} \cdot A_\mu(\tilde{x}) \right)$. Cependant, si nous considérons que A_μ est constant durant la propagation entre x et $x + \hat{\mu}$ (la valeur de A_μ changeant seulement quand nous atteignons le nœud suivant sur le réseau), il vient :

$$U_\mu(x) \approx \exp(i g \cdot a \cdot A_\mu(x)), \quad (35)$$

où g est la constante de couplage. Aussi, a est le paramètre du réseau. Plus précisément, il correspond à la distance entre deux noeuds consécutifs du réseau, quand il est appliqué aux dimensions spatiales.

En fait, une plaquette est un cas particulier de boucles de Wilson. Ce sont des boucles rectangulaires formées dans un sous-espace qui inclut une dimension spatiale et le temps. Clairement, une plaquette est une boucle de Wilson 1×1 . Les boucles de Wilson sont des invariants de jauge, c'est-à-dire selon $SU(3)$, tout comme les boucles de Polyakov. Une boucle de Polyakov est une ligne selon le temps, dont les extrémités sont reliées par des conditions aux limites périodiques. Nous verrons au chapitre 2 que dans le cadre du formalisme du temps imaginaire, de telles conditions peuvent être satisfaites. Une ligne/boucle de Polyakov s'écrit comme :

$$P(\vec{x}) = \text{Tr} \left[\prod_{\tau=0}^{N_t-1} U_4(\vec{x}, \tau) \right], \text{ avec } U_4(\vec{x}, \tau) = \exp(i g \cdot a \cdot A_4(\vec{x}, \tau)). \quad (36)$$

Dans (36), N_t est le nombre de temps différents considérés dans le calcul. Physiquement, comme expliqué par exemple dans [44], $P(\vec{x})$ simule l'introduction d'un quark statique à la position \vec{x} . De la même manière, on peut aussi définir le complexe conjugué $P^\dagger(\vec{x})$ de la boucle de Polyakov (36), où on remplace $U_4(\vec{x}, \tau)$ par $\exp(-ig \cdot a \cdot A_4(\vec{x}, \tau))$. Clairement, la conjugaison complexe « renverse le temps » dans la boucle. Physiquement, on simule l'introduction d'un antiquark statique. Nous verrons plus tard comment la boucle de Polyakov sera considérée dans le cadre de cette thèse.

5.2 Action due aux quarks et limitations de LQCD

Quand les quarks ne sont pas inclus dans l'étude, $S_{quarks} = 0$. De tels calculs sont nommés calculs LQCD en pure jauge. À l'opposé, si les quarks sont pris en compte, leur action s'écrit dans un espace Euclidien comme :

$$S_{quarks} = \int d^4x \cdot \bar{\psi}(x)(\not{D} + m)\psi(x). \quad (37)$$

Dans le cadre de calculs sur réseau, cette action peut se réécrire par exemple comme [49] :

$$S_{quarks} = \sum_x \bar{\psi}(x) \left(\sum_\mu \gamma^\mu \frac{U_\mu(x)\psi(x+\hat{\mu}) - U_{-\mu}(x)\psi(x-\hat{\mu})}{2a} + m \cdot \psi(x) \right). \quad (38)$$

Quoi qu'il en soit, l'action des quarks est fréquemment écrite sous la forme :

$$S_{quarks}(\bar{\psi}, \psi, U) \equiv \sum_x \bar{\psi}(x) M_{xy}[U] \psi(y), \quad (39)$$

dans laquelle M est la matrice d'interaction, aussi nommée opérateur de Dirac. En fait, dans (32), l'intégration de la contribution des quarks peut être effectuée [46] ; cela mène à l'expression :

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \cdot \exp(-S) \equiv \int \mathcal{D}U \cdot (\det(M[U]))^{n_f} \cdot \exp(-S_{\text{gluons}}), \quad (40)$$

avec n_f est le nombre de saveurs considérées dans les calculs (habituellement deux ou trois). Dans le passé, une approximation, connue sous le nom Anglais de *quenched approximation*, consistait à dire que $\det(M[U])=1$. Cela conduit à négliger les actions locales, et les boucles de fermions sont supprimées [44, 49, 50]. De nos jours, cette approximation tend à être évitée dans les calculs de LQCD. En effet, cette approximation n'est exacte que quand les masses des quarks tendent vers l'infini. En conséquence, cette méthode pourrait être intéressante pour les quarks lourds, mais pas pour les légers.

En fait, les calculs de LQCD prenant en compte les quarks connaissent deux limitations majeures. Tout d'abord, par rapport aux calculs en pure jauge, l'inclusion de l'action des quarks s'accompagne d'une très forte augmentation du temps de calcul. En parallèle, ce temps de calcul explose au fur et à mesure que l'on augmente la taille du réseau. De tels calculs requièrent de très fortes puissances de calculs, via l'utilisation de supercalculateurs. Cela justifie ainsi l'approximation quenched, au moins d'un point de vue numérique, car elle permet de réduire le temps de calcul en simplifiant la modélisation. Sans cette approximation, un autre problème apparaît à potentiels chimiques non nuls, car dans ce régime, $\det(M[U])$ devient complexe. Dans ce cas, les calculs effectués via la méthode de Monte-Carlo sont invalidés, parce que dans cette approche $\exp(-S)$ est interprété comme une densité de probabilités. En outre, ce déterminant présente des oscillations qui affectent les valeurs trouvées dans (31). Ces problèmes numériques sont désignés dans la littérature sous le terme de *fermion sign problem* [48, 51–53].

5.3 Quelques observables et résultats de la LQCD

Les calculs de LQCD permettent de calculer des observables, en partant de la fonction de partition Z [54]. Notamment, la densité d'énergie libre est obtenue avec :

$$f = -\frac{T}{V} \ln Z(T, V), \quad (41)$$

la densité d'énergie est :

$$\varepsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln Z(T, V)}{\partial T}. \quad (42)$$

Aussi, la pression peut être trouvée avec :

$$p = T \frac{\partial \ln Z(T, V)}{\partial V}, \quad (43)$$

ou $p = -f$ dans le cas de grands systèmes uniformes. Avec ces quantités, on peut aussi estimer la densité d'entropie avec $s = \frac{\varepsilon + p}{T}$ ou la vitesse du son $c_s = \frac{dp}{d\varepsilon}$. Dans ces relations, le volume est trouvé avec $V = (N_x \cdot a)^3$, où N_x est la taille du réseau. Aussi, la température est

obtenue avec $T = \frac{1}{N_t \cdot a}$, où N_t est le nombre de temps différents. Le lien entre le temps et la température sera clarifié au chapitre 2, dans le cadre du formalisme du temps imaginaire.

Avec ces observables, une motivation peut être d'étudier le régime pour lequel $\varepsilon = 3p$. Comme expliqué par exemple dans [5, 17], cette égalité est vérifiée quand les particules qui forment le système sont sans masse et sans interaction. Cela correspond à la limite de Stefan-Boltzmann, pour laquelle $\frac{\varepsilon}{T^4}$, $\frac{3p}{T^4}$ and $\frac{3s}{4T^3}$ (selon la définition de s) convergent vers la même valeur. Dans la littérature, ce comportement est souvent attendu pour QCD quand la température tend vers l'infini [55].

D'autre part, les calculs de LQCD permettent aussi d'évaluer la valeur du condensat chiral, évoqué dans la partie 3. Clairement, la finalité est d'étudier la restauration de la symétrie chirale à hautes températures. Plus précisément, il a été trouvé [56] que la valeur du condensat décroît très rapidement quand le système atteint la température critique. Après celle-ci, il a été observé que la valeur du condensat tend vers zéro, confirmant la restauration escomptée de la symétrie chirale.

5.4 Modèles effectifs

Les résultats de LQCD sont souvent considérés comme des références. Toutefois, nous avons vu dans le paragraphe 5.2 que LQCD présente des limitations. Clairement, la LQCD seule ne permet pas d'étudier la transition de phase entre le QGP et la phase hadronique. En fait, des modèles phénoménologiques peuvent donner des résultats intéressants, d'ailleurs de manière plus simple qu'avec LQCD. La non-solvabilité des équations de QCD à basses énergies est liée à certains aspects, comme le confinement. Ainsi, certains de ces modèles traitent cet aspect directement, afin d'essayer de mimer un mécanisme de confinement. L'un d'entre eux, traité dans cette thèse, concerne l'inclusion d'une boucle de Polyakov dans un modèle effectif. Aussi, comme expliqué précédemment, les masses nues des quarks sont actuellement assez mal connues. En prenant le problème à l'envers, puisque l'interaction forte est suffisamment intense pour occulter les caractéristiques des quarks d'une manière non négligeable, alors un modèle peut se baser sur les masses de quarks *effectifs* ou quarks *constituants*. Les masses effectives des quarks n'ont rien à voir avec les masses nues, elles prennent en compte une bonne partie des interactions entre quarks. Pour les quarks u , la masse nue est d'environ 3 MeV, alors que la masse effective dépasse les 300 MeV dans le cadre de certains modèles, c'est-à-dire le tiers de la masse du nucléon. Pour lier ces quarks constituants, une interaction résiduelle peut être ajoutée au modèle. Bien entendu, cette interaction n'est pas capable de décrire correctement le confinement. Par conséquent, certaines améliorations sont imaginées à ce modèle de quarks constituants, pour être en mesure d'obtenir des résultats vérifiés expérimentalement. Par exemple, il est quelquefois fait appel à des modèles comme le modèle du sac (*M.I.T. bag model*), afin de simuler le confinement, ou du moins imiter ses aspects [1, 5]. Plus précisément, cette approche stipule l'existence d'un sac imaginaire avec des parois « infranchissables ». Ce sac devrait contenir les quarks à l'intérieur du hadron étudié, comme dans l'image 1 de la figure 5.

6. Etude expérimentale du QGP

Nous avons vu dans le paragraphe 4.4 que le Quark Gluon Plasma était probablement présent dans les premiers moments de l'Univers et serait formé dans le cœur des étoiles à neutrons. Afin d'étudier cet état de la matière « en laboratoire », des collisions d'ions lourds sont provoquées dans des collisionneurs. Si les noyaux apportent assez d'énergie, la phase QGP peut être formée. Clairement, cela concerne des collisions hautement relativistes : la vitesse des noyaux est très proche de la vitesse de la lumière. L'évolution du QGP est décrite par un scénario proposé en 1983 par J D Bjorken [57]. Dans ce scénario, figure 9, la description du système est faite selon un axe z (direction de propagation des noyaux, voir figure 10) et selon le temps t .

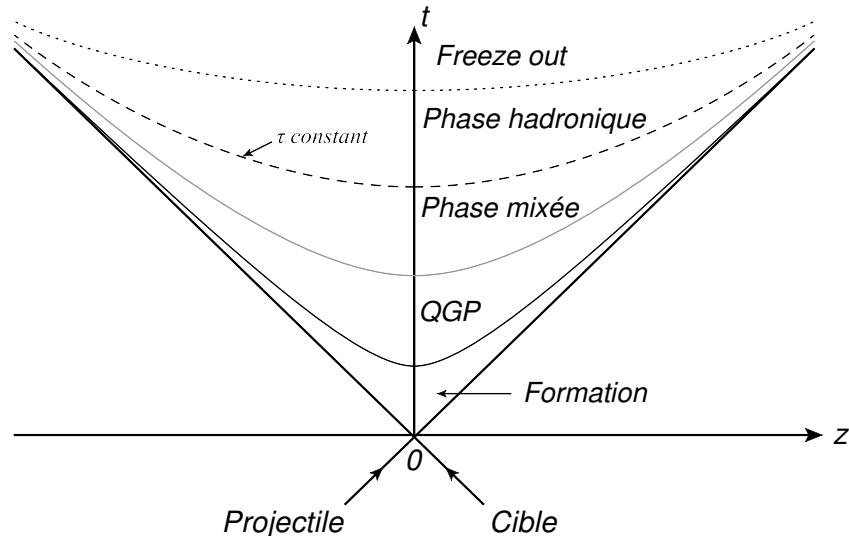


Figure 9. Représentation schématique d'une collision d'ion lourd formant que QGP, selon le scénario de Bjorken [5, 57].

Dans la figure, le temps propre τ est constant selon une hyperbole, où τ est relié au temps t et à la distance z par la relation $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$. En fait, on s'attend à ce que le QGP soit rapidement formé. Ensuite, les quarks, antiquarks et gluons se combinent pour former des hadrons. On parle alors d'hadronisation. Dans certaines versions du scénario de Bjorken [5], il est imaginé qu'il existe une phase mixée, mêlant QGP et hadrons. Après l'hadronisation, le système s'étend rapidement. Le terme Anglais de *freeze out* désigne l'état dans lequel les particules n'interagissent plus entre elles, en raison d'une trop grande dilution du système. Dans ce scénario, il est précisé que la phase QGP n'aurait une durée de vie que de quelques fm/c. À l'opposé, les particules produites sont mesurées au niveau de détecteurs bien après l'hadronization du système.

6.1 Signatures du QGP

A cause du confinement, il n'est pas possible d'*observer* directement la phase QGP. En conséquence, la finalité est alors de collecter des preuves que le QGP s'est formé durant les expériences. Donc, différentes « signatures » du QGP sont étudiées.

Notamment, un scénario mis au point par Matsui et Satz en 1986 [58] prévoit une forte décroissance de la production de J/ψ . Un J/ψ est un méson composé par un quark charmé c et par un antiquark \bar{c} . Dans des collisions d'ions lourds, des paires c, \bar{c} sont formées. Selon le scénario, c et \bar{c} peuvent facilement se combiner dans matière hadronique, et donc former le méson J/ψ . Cependant, dans la phase QGP, l'interaction entre ces quarks et antiquarks devrait être écrantée par les autres quarks/antiquarks. Cet effet devrait empêcher la formation de J/ψ , et donc conduire à la baisse escomptée de leur production. Cependant, cette signature possible du QGP a été critiquée. En effet, d'une part, un processus de régénération des J/ψ a été imaginé [59, 60], qui pourrait contrarier la mesure de la baisse de production attendue. D'autre part, il a aussi été imaginé que des J/ψ pourraient aussi disparaître par des interactions multiples avec la matière hadronique.

Une autre signature possible du QGP est l'accroissement de l'étrangeté, préduite par Rafelski et Müller dans les années 1980 [61, 62]. En fait, des réactions comme $u + \bar{u} \rightarrow s + \bar{s}$, $d + \bar{d} \rightarrow s + \bar{s}$ et entre deux gluons $g + g \rightarrow s + \bar{s}$ ont des seuils cinématiques élevés, car les quarks/antiquarks étranges sont des particules lourdes. Clairement, si l'énergie des particules incidentes est plus basse que ce seuil, la réaction ne peut pas avoir lieu. Les hautes températures atteintes dans la phase QGP permettent de franchir ce seuil. Donc, une forte production de s, \bar{s} est attendue dans cette phase, induisant une production non négligeable de mésons étranges et d'hypérons comme Λ , Ξ , Ω , etc. ou d'anti-hypérons ($\bar{\Omega}$...).

Nous pouvons aussi mentionner la production de di-leptons [63] : e^+ / e^- ou μ^+ / μ^- . En fait, ces particules résultent de désintégrations de mésons. Les désintégrations de J/ψ sont particulièrement connues. Nous pouvons de même évoquer les désintégrations des mésons vectoriels comme ρ, ω, ϕ . En fait, la température du QGP augmente l'instabilité de ces mésons, ce qui favorise leurs désintégrations en dileptons. Comme noté dans [5], l'étude des leptons est intéressante, car ces derniers ne peuvent pas interagir par interaction forte avec la matière hadronique. On s'attend donc à ce qu'ils permettent une description fiable du QGP. Cependant, une limitation de cette approche est de savoir reconnaître la formation de dileptons résultant du QGP par rapport à ceux formés par des scénarios hadroniques, notamment avec le processus de Drell-Yann entre deux hadrons [64].

Aussi, d'autres « témoins » pertinents du QGP sont les photons thermiques émis [17]. Plus précisément, leur production obéit à une loi selon la température évoluant en T^4 . En conséquence, une forte émission de photons par la phase QGP est attendue. De plus, comme les leptons, les photons ne peuvent pas réagir avec le QGP par interaction forte. Toutefois, une limitation de cette approche concerne les photons émis avant et après l'existence du QGP, ce qui peut perturber l'analyse. Notamment, des photons sont aussi émis par des réactions de désintégration, et pas seulement par l'émission thermique prévue.

Ensuite, nous pouvons aussi parler du phénomène de *jet quenching* [65–67]. Les partons (quarks et gluons) produits dans les premiers instants de la formation du QGP forment des faisceaux de particules, nommés *jets* en Anglais. Avant leur hadronization, on s'attend à ce que ces faisceaux de partons traversent la phase QGP, et y perdent une bonne part de leur énergie, notamment par *bremsstrahlung* de gluons. Au niveau des détecteurs, les faisceaux de hadrons résultant de l'hadronisation de ces partons devraient avoir des quantités de mouvement très réduites. Cela constitue le *jet quenching*.

6.2 Le flot elliptique v_2

Par ailleurs, d'autres observables sont aussi étudiées, pas forcément d'ailleurs pour prouver la formation de la phase QGP, mais pour caractériser celle-ci. Parmi eux, nous pouvons particulièrement citer le flot elliptique v_2 [59, 68, 69]. Comme indiqué précédemment, le QGP est étudié expérimentalement par des collisions d'ions lourds, c'est-à-dire une rencontre entre deux noyaux allant dans des sens opposés. Ils peuvent se déplacer le long d'un même axe ou le long d'axes parallèles entre eux. Dans ce cas, la distance minimale entre les centres des noyaux est nommée paramètre d'impact, et est notée b . Dans cette configuration, un fragment de chaque noyau ne participe pas à la collision et continue d'avancer selon une trajectoire rectiligne. A l'opposé, figure 10, l'ellipsoïde correspond à la fusion entre deux parties de ces noyaux.

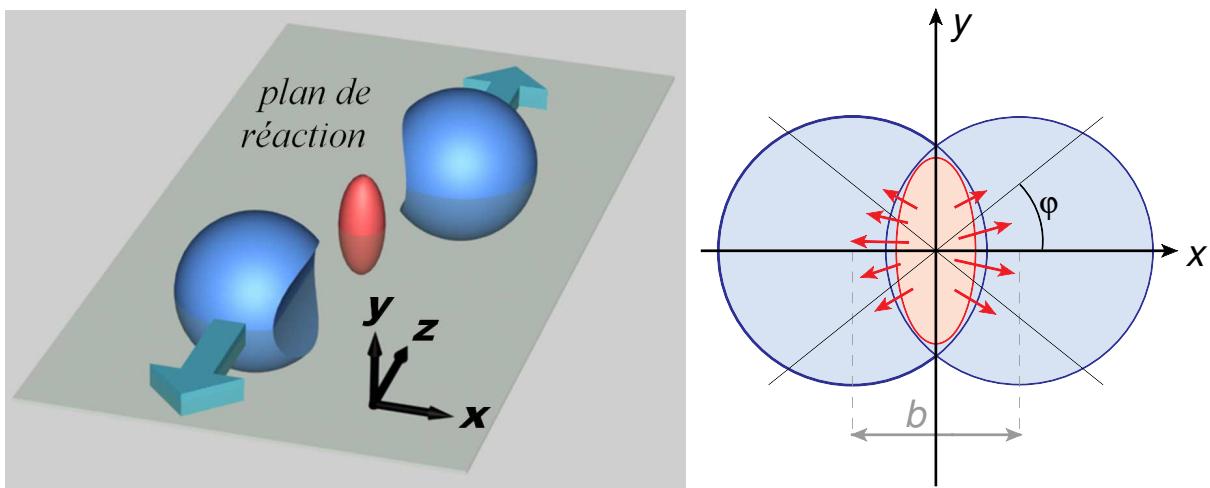


Figure 10. Représentation d'une collision, inspirée de [59], et projection dans le plan xy .

Là, le QGP peut se former. Rapidement après son hadronisation, les particules produites quittent cette zone centrale. La distribution des quantités de mouvement transverses p_T de ces particules, c'est-à-dire selon le plan xy , constitue la distribution azimutale. Dans ce plan, on utilise l'angle φ , comme dans la partie droite de la figure, où $\varphi = \tan^{-1}(p_y/p_x)$ et p_x, p_y sont les projections de p_T selon les axes x, y . Le flot elliptique v_2 est la seconde harmonique de la transformée de Fourier de la distribution azimutale. Il est défini comme [70] :

$$v_2 = \langle \cos(2\varphi) \rangle, \quad (44)$$

c'est à dire la moyenne de $\cos(2\varphi)$ sur les particules quittant la zone centrale. En outre, grâce à la relation mathématique,

$$\cos\left(2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\right) = \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_x^2 + p_y^2}, \quad (45)$$

nous pouvons alors proposer [68] :

$$v_2 = \left\langle \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_x^2 + p_y^2} \right\rangle. \quad (46)$$

En fait, v_2 donne des informations sur le comportement collectif des particules. Plus précisément, il permet d'étudier la friction au sein de la matière formant la zone centrale, donc donne certaines propriétés sur le QGP créé.

6.3 Résultats récents

D'anciens projets étaient le AGS (*Alternating Gradient Synchrotron*) et le SPS (*Super Proton Synchrotron*). La densité d'énergie atteinte par le AGS était proche de 0.8 GeV/fm^3 , pour une température d'environ 150 MeV . Le SPS mettait en jeu des densités d'énergie de 2.5 GeV/fm^3 , associées à une température de 190 MeV [5]. Les conditions atteintes au SPS étaient assez proches de celles requises pour former du QGP dans les expériences effectuées en 2000.

Aussi, un des projets les plus importants alloué à l'étude du QGP est le RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), au *Brookhaven National Laboratory*, dans l'Etat de New-York. Dans les expériences effectuées au RHIC, la densité d'énergie atteinte est voisine de 5 GeV/fm^3 , pour une température d'environ 230 MeV [5]. Ces conditions sont favorables à la formation du QGP sans ambiguïté. Plus précisément, la création de cet état de la matière au RHIC a été annoncée en avril 2005. En fait, concernant les signatures du QGP vues plus haut, le *jet quenching* a été observé au RHIC [71]. Par ailleurs, jusqu'aux années 90, il était imaginé que le QGP était un gaz. Cependant, les résultats obtenus ont indiqué que dans les expériences, la phase QGP agit comme un liquide [59]. Plus précisément, les mesures de v_2 ont montré que le comportement d'un fluide parfait, sans friction. Clairement, la vision de quarks et de gluons libres, imaginée pour décrire la phase QGP, n'a pas été vérifiée par les résultats du RHIC. Cela amène à considérer le sQGP, c'est-à-dire le *strong interacting QGP* [59], et d'adapter la vision de cet état de la matière que l'on pouvait en avoir.

L'autre projet majeur est le LHC (*Large Hadron Collider*) au CERN [72]. Des densités d'énergie proches de 10 GeV/fm^3 et des températures de 260 MeV sont attendues [5], c'est-à-dire des conditions encore plus extrêmes que celles du RHIC. En mai 2011, il a été annoncé que du QGP a été produit au LHC. Les résultats obtenus avec les expériences de QGP ALICE (*A Large Ion Collider Experiment*) ont confirmé ceux obtenus au RHIC [59]. Plus précisément, les mesures de v_2 indiquent aussi le comportement d'un liquide parfait [69]. De la même manière, le phénomène de *jet quenching* a aussi été observé au LHC [73, 74]. Les futures expériences prévues au LHC, qui permettront d'augmenter les énergies et les températures atteintes, sont prévues pour 2015, et ensuite pour 2018 [17] ...

7. Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté certains aspects qui vont directement concerner le travail que nous allons effectuer dans cette thèse. Il a été souligné deux thèmes cruciaux fortement liés à la physique des quarks. Cela a concerné tout d'abord la théorie des groupes. A partir d'exemples assez simples, nous avons progressivement présenté quelques notions liées à cette théorie, comme la notion de vecteur (au sens large du terme), de courants conservés, de quantités scalaires conservées, etc. A cette occasion, nous avons présenté les quarks, mésons et baryons qui seront traités dans les chapitres suivants. Ensuite, nous nous sommes focalisés sur une description de la Chromodynamique Quantique, et de divers aspects reliés à cette théorie, comme la symétrie chirale. Même si l'écriture du Lagrangien de QCD est finalement relativement simple, nous ne pouvons dissimuler les difficultés liées à cette théorie. D'ailleurs, il n'existe toujours pas de nos jours de description correcte et complète du confinement. Mais, la physique des quarks et par extension la physique subatomique est aussi une thématique fascinante, car liée à divers phénomènes, comme la transition de phase entre la matière hadronique et le plasma de quarks et de gluons, la supraconductivité de couleur, etc. D'autre part, nous avons présenté certains aspects expérimentaux. En fait, nous avons vu que les résultats récents sont particulièrement intéressants, car ils montrent que la phase QGP agit comme un fluide parfait dans les expériences du RHIC et du LHC.

Evidemment, ce chapitre ne peut pas être exhaustif, concernant la théorie des groupes, la QCD, la LQCD ou les recherches expérimentales actuelles. Par ailleurs, nous ne pouvons pas parler de la physique des quarks sans parler de la théorie quantique des champs ou de la relativité. Mais, ces aspects seront développés plus en aval dans les chapitres suivants.

8. Références

- [1] Close P E 1979 An introduction to Quarks and Partons, *Academic Press*
- [2] Aitchison I J R et Hey A J G 1989 Gauge theories in particle physics 2^{nde} édition, *Adam Hilger*
- [3] Greiner W et Schäfer A 1994 Quantum Chromodynamics, *Springer Verlag*
- [4] Walecka J D 1995 Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics 2^{nde} édition, *Oxford University Press*
- [5] Kuhn C, Plasma de quarks et de gluons et matière étrange du SPS au LHC, *Cours présenté à l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1998, Maubuisson, France, 7-12 Septembre 1998. Référence: publication IReS 98-24*
<http://www.pd.infn.it/alipd/papers/qgpkuhn.ps.gz>
<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00652935/>
- [6] Chanfray G et Smadja G 1997 Les particules et leurs symétries, *Masson, Paris*
- [7] Tung W K 1985 Group theory in physics, *World Scientific, Singapore*
- [8] Sternberg S 1994 Group Theory and Physics, *Cambridge Univ. Press.*
- [9] Weinberg S 1995 The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations, *Cambridge Univ. Press.*

- [10] Robinson M, Bland K, Cleaver G et Dittmann J 2008 A Simple Introduction to Particle Physics arXiv:0810.3328
- [11] Delamotte B 1996 Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré, *cours disponible à l'adresse* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092924>
- [12] Delamotte B 2005 Introduction à la théorie quantique des champs, *cours disponible à l'adresse* : http://npac.lal.in2p3.fr/2009-2010/Cours/TQC/TQC_2.pdf
- [13] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [14] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu-Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [15] Collot J 2005 Classification des particules subatomiques Propriétés des interactions fondamentales, *cours disponible à l'adresse* : <http://lpsc.in2p3.fr/collot/cours/IntroPP.pdf>
- [16] Wohl C G 2000 $SU(n)$ multiplets and young diagrams *European Physical Journal C* **15** 210
- [17] Martinez G 2013 Advances in Quark Gluon Plasma arXiv:1304.1452
- [18] Hinchliffe I et Manohar A 2000 The QCD Coupling Constant *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **50** 643-78
- [19] Bjorken J D et Drell S D 1964 Relativistic quantum mechanics, *McGraw-Hill, New York*
- [20] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [21] Goldstone J 1961 Field Theories with Superconductor Solutions *Nuovo Cim.* **19** 154-64
- [22] Goldstone J, Salam A et Weinberg S 1962 Broken Symmetries *Phys. Rev.* **127** 965–70
- [23] Gell-Mann M, Oakes R J et Renner B 1968 Behavior of Current Divergences under $SU3 \times SU3$ *Phys. Rev.* **175** 2195–9
- [24] Langfeld K et Kettner C 1996 The quark condensate in the Gell-Mann-Oakes-Renner relation *Mod. Phys. Lett. A* **11** 1331–8
- [25] Burgess C P 2000 Goldstone and Pseudo-Goldstone Bosons in Nuclear, Particle and Condensed-Matter Physics *Phys. Rept.* **330** 193-261
- [26] Landau L D 1937 On the theory of phase transitions *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **7** 19–32, traduit et réimprimé dans *Ukr. J. Phys.* **53** (Numéro spécial) 25-35 (2008)
- [27] Griffiths D J 1987 Introduction to Elementary Particles, *John Wiley and Sons*
- [28] Buniy R et Kephart W 2003 A model of glueballs *Phys. Lett. B* **576** 127-34
- [29] Ochs W 2013 The status of glueballs *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **40** 043001
- [30] Greiner C et Schaffner-Bielich J 1998 Physics of Strange Matter arXiv:nucl-th/9801062
- [31] Schaffner-Bielich J 2006 Neutron stars and quark stars: Two coexisting families of compact stars? arXiv:astro-ph/0612777
- [32] Alford M, Rajagopal K, Reddy S et Steiner A 2006 The Stability of Strange Star Crusts and Strangelets *Phys. Rev. D* **73** 114016

- [33] Schaffner J, Greiner C et Stöcker J 1992 Metastable exotic multihypernuclear objects *Phys. Rev. C* **46** 322–9
- [34] Greiner C 1999 Physics of strange matter (2) *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25** 389-401
- [35] Shovkovy I A 2004 Two Lectures on Color Superconductivity *Found. Phys.* **35** 1309-58
- [36] Rajagopal K et Wilczek F 2000 The Condensed Matter Physics of QCD arXiv:hep-ph/0011333
- [37] Rüster S B, Werth V, Buballa M, Shovkovy I A et Rischke D 2005 Phase diagram of neutral quark matter: Self-consistent treatment of quark masses *Phys. Rev. D* **72** 034004
- [38] Abuki H et Kunihiro T 2006 Thermal unpairing transitions affected by neutrality constraints and chiral dynamics *AIP Conf. Proc.* **842** 110-2
- [39] Warringa H J, Boer D et Andersen J O 2005 Color superconductivity versus pseudoscalar condensation in a three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. D* **72** 014015
- [40] Blaschke D, Fredriksson S, Grigorian H, Öztaş A M et Sandin F 2005 Phase diagram of three-flavor quark matter under compact star constraints *Phys. Rev. D* **72** 065020
- [41] Gómez Dumm D, Blaschke D B, Grunfeld A G et Scoccola N N 2006 Phase diagram of neutral quark matter in nonlocal chiral quark models *Phys. Rev. D* **73** 114019
- [42] Wilson K 1974 Confinement of quarks *Phys. Rev. D* **10** 2445–59
- [43] Meyer-Ortmanns H 1996 Phase transitions in quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **68** 473–598
- [44] DeTar C 1995 Quark gluon plasma in numerical simulations of lattice QCD arXiv:hep-ph/9504325
- [45] Karsch F 2002 Lattice QCD at High Temperature and Density *Lect. Notes Phys.* **583** 209-49
- [46] Petreczky P 2012 Lattice QCD at non-zero temperature *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 093002
- [47] Petreczky P 2012 Numerical study of hot strongly interacting matter *J. Phys.: Conf. Ser.* **402** 012036
- [48] Fodor Z 2003 Lattice QCD Results at Finite Temperature and Density *Nucl. Phys. A* **715** 319-28
- [49] Gupta R 1998 Introduction to Lattice QCD arXiv:hep-lat/9807028
- [50] Bazavov *et al.* 2010 Full nonperturbative QCD simulations with 2+1 flavors of improved staggered quarks *Rev. Mod. Phys.* **82** 1349-417
- [51] Dumitru A, Pisarski R D et Zschiesche D 2005 Dense quarks, and the fermion sign problem, in a SU(N) matrix model *Phys. Rev. D* **72** 065008
- [52] Sakai Y, Sasaki T, Kouno H et Yahiro M 2010 Comparison between LQCD and PNJL model at finite chemical potentials arXiv:hep-ph/1010.5865
- [53] Reinhardt H et Heffner J 2013 Hamiltonian Approach to QCD: The effective potential of the Polyakov loop arXiv:1301.2510
- [54] Boyd G, Engels J, Karsch F, Laermann E, Legeland C, Luetgemeier M et Petersson B 1996 Thermodynamics of SU(3) Lattice Gauge Theory *Nucl. Phys. B* **469** 419-44
- [55] Karsch F 1995 The Phase Transition to the Quark Gluon Plasma: Recent Results from Lattice Calculations *Nucl. Phys. A* **590** 367–81

- [56] Boyd G, Gupta S, Karsch F, Laermann E, Petersson B et Redlich K 1995 Hadron Properties just before Deconfinement *Phys. Lett. B* **349** 170-6
- [57] Bjorken J D 1983 Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region *Phys. Rev. D* **27** 140–61
- [58] Matsui T et Satz H 1986 J/ψ suppression by quark-gluon plasma formation *Phys. Lett. B* **178** 416–22
- [59] Tannenbaum M J 2013 Highlights from BNL-RHIC-2012 arXiv:1302.1833
- [60] Thews R L Martin Schroedter M et Rafelski J 2001 Enhanced J/Psi Production in Deconfined Quark Matter *Phys. Rev. C* **63** 054905
- [61] Rafelski J et Müller B 1982 Strangeness Production in the Quark-Gluon Plasma *Phys. Rev. Lett.* **48** 1066–9
- [62] Rafelski J 1984 Strangeness production in the quark gluon plasma *Nucl. Phys. A* **418** 215-35
- [63] Singh S et Kumar Y 2013 Dilepton emission at temperature dependent baryonic quark-gluon plasma *Journal of Modern Physics* **4** 582-6
- [64] Drell S D et Yan T M 1970 Massive Lepton-Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High Energies *Phys. Rev. Lett.* **25** 316–20
- [65] Gyulassy M et Plümer M 1990 Jet quenching in dense matter *Phys. Lett. B* **243** 432-8
- [66] Baier R, Schiff D et Zakharov B G 2000 Energy loss in perturbative QCD *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **50** 37-69
- [67] d'Enterria D 2009 Jet quenching arXiv:0902.2011
- [68] STAR Collaboration: K.H. Ackermann *et al.* 2001 Elliptic flow in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV *Phys. Rev. Lett.* **86** 402–7
- [69] Singh R, Kumar L, Netrakanti P K et Mohanty B 2013 Experimental Results from Heavy Ion Collisions at LHC arXiv:1304.2969
- [70] Atomssa E T 2008 Suppression et flot elliptique du J/ψ dans les collisions Au+Au à 200 GeV dans la région à mi-rapidité de l'expérience PHENIX, *Thèse de doctorat (en Anglais) au Laboratoire Leprince-Ringuet Ecole Polytechnique*
- [71] PHENIX Collaboration, K. Adcox, *et al.* 2002 Suppression of Hadrons with Large Transverse Momentum in Central Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV *Phys. Rev. Lett.* **88** 022301
- [72] Datta A, Mukhopadhyaya B et Raychaudhuri A 2009 Physics at the Large Hadron Collider, *Springer*
- [73] CMS Collaboration 2011 Observation and studies of jet quenching in PbPb collisions at nucleon-nucleon center-of-mass energy = 2.76 TeV *Phys. Rev. C* **84** 024906
- [74] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration) 2010 Observation of a Centrality-Dependent Dijet Asymmetry in Lead-Lead Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS Detector at the LHC *Phys. Rev. Lett.* **105** 252303

Chapitre 2

Le modèle de Nambu et Jona Lasinio et le modèle Polyakov NJL

Une partie de ce chapitre a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38** 105003

1. Introduction

Il a été vu dans le chapitre précédent que la physique nucléaire des hautes énergies et la physique des particules sont correctement décrites par la Chromodynamique Quantique (QCD). Cependant, nous avons aussi remarqué que ce modèle ne peut pas être résolu dans le domaine qui nous intéresse, c'est-à-dire quand les quarks sont confinés dans les hadrons. La QCD sur réseau (LQCD) est une solution intéressante pour étudier la physique des quarks [1]. De plus, les résultats obtenus par cette méthode sont souvent considérés comme des données de références. Mais, comme noté précédemment, LQCD requiert des ressources informatiques conséquentes. Aussi, il a été signalé [2, 3] que LQCD présente quelques limitations à densités finies. En effet, la LQCD rencontre alors un problème connu sous le nom de *fermion sign problem* [4, 5]. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, ce problème numérique est causé par la contribution des quarks, via le déterminant $\det(M[U])$ associé à ces particules. Plus précisément, à densités finies, ce terme devient complexe, ce qui invalide des approches stochastiques, comme celle de Monte-Carlo. Aussi, il induit des fluctuations indésirables dans le calcul des observables.

Par conséquent, des modèles effectifs ont été développés pour essayer de surmonter les difficultés liées à la QCD ou à ses méthodes numériques. Parmi elles, le modèle de Nambu et Jona-Lasinio (NJL) [6, 7] a prouvé depuis longtemps sa fiabilité pour étudier la physique des quarks. Comme vu dans ce chapitre, ce modèle présente d'intéressantes qualités. Notamment, il permet de travailler à température finie, via l'utilisation du formalisme de Matsubara [8]. Concrètement, comme avec QCD, il montre la brisure de la symétrie chirale [9], et sa restauration à hautes températures. Aussi, il permet des calculs à densités finies. Par ailleurs, nous verrons dans les trois prochains chapitres qu'il permet de modéliser des mésons, et aussi des baryons par l'utilisation de diquarks. Depuis sa création, le modèle NJL a été progressivement amélioré. La référence [10] propose une chronologie partielle des évolutions du modèle. Durant les années 1980 ou plus tard, mentionnons [11, 12] et [9, 13–16]. En ce qui concerne les années 1990, citons [17–19] et [20]. Ces références ont proposé une formulation élégante du modèle NJL, le rendant utilisable dans le domaine de la physique des quarks, en utilisant ces derniers comme degrés de liberté. Plus récemment, soulignons aussi le travail

effectué dans [21, 22]. Nous remarquons que le modèle est toujours l'objet d'améliorations. Notons par exemple le travail effectué en rapport avec l'interaction à huit quarks [23–30].

L'idée principale du modèle NJL est de considérer des gluons massifs, dont l'interaction devient ponctuelle, évitant alors de fait les difficultés rencontrées avec la QCD. Une conséquence directe de cette simplification est que les gluons sont alors absents de la description faite par NJL, au moins en tant que particules dynamiques. Par conséquent, le confinement n'est pas traité dans cette approche. Pour essayer de corriger ce défaut, il a récemment été proposé de coupler les quarks NJL avec une boucle de Polyakov [31–34], afin de simuler un mécanisme de confinement. Cela a alors donné le modèle de Polyakov Nambu Jona-Lasinio (PNJL) [35–44]. Il a été reporté dans la littérature que cette évolution du modèle permet de corriger certains aspects concrets de NJL. Cela concerne notamment le comportement du modèle PNJL à basses températures, comparé à une pure description NJL : par exemple, mentionnons la suppression de la contribution des états colorés dans la thermodynamique du système, comme noté dans [40]. Aussi, grâce à une décroissance rapide de la masse des quarks (observée plus loin dans ce chapitre), l'approche PNJL est plus efficace que le modèle NJL pour décrire la restauration de la symétrie chirale [42]. Par ailleurs, il a aussi été remarqué que les résultats PNJL correspondent bien aux données obtenue avec LQCD [3, 37]. Comme avec le modèle NJL, plusieurs versions du modèle PNJL peuvent être vues dans la littérature récente, comme le modèle EPNJL (*Entangled Polyakov Nambu Jona-Lasino*) [45], prouvant que le modèle est activement utilisé et amélioré. Dans l'ensemble, dans le cadre des modèles (P)NJL, les masses des quarks (« habillés ») est étudié en fonction de la température [42], et quelquefois en fonction du potentiel chimique μ_B [37]. Toutefois, de tels calculs sont relativement moins fréquents en fonction de la densité baryonique ρ_B .

Prenant en compte ces observations, nous proposons dans ce chapitre de présenter le modèle NJL et d'expliquer les modifications requises afin d'inclure une boucle de Polyakov au modèle. Pour arriver à ces objectifs, nous rappelons dans la partie 2 les équations importantes associées au modèle NJL. Cela concerne une présentation du formalisme de Matsubara et une étude du Lagrangien NJL. Dans la partie 3, nous donnons les équations à résoudre pour trouver les masses des quarks habillés, en considérant la température et la densité baryonique comme paramètres. Ensuite, dans la partie 4, nous proposons une description du modèle PNJL. Nous insistons tout particulièrement sur les modifications apportées au Lagrangien NJL et nous considérons les nouvelles variables introduites, comme celles associées au champ de Polyakov. Nous indiquons ensuite les équations supplémentaires à prendre en compte pour trouver les masses des quarks. Finalement, dans la partie 5, nous rassemblons les résultats obtenus par la résolution des équations établies lors des parties précédentes. Un objectif est de retrouver les résultats déjà publiés dans la littérature, et de présenter des résultats dépendant de la densité baryonique. Ce travail inclut notamment une étude dans le plan T, ρ_B . Nous proposons aussi des résultats additionnels, en étudiant le comportement du champ de Polyakov, aussi dans le plan T, ρ_B , ainsi qu'une analyse du lien entre le potentiel chimique baryonique et la densité baryonique. Par ailleurs, comme dans les chapitres suivants, des comparaisons sont effectuées entre les résultats trouvés avec NJL et ceux de PNJL, afin de pouvoir conclure quant à l'effet de l'inclusion de la boucle de Polyakov. De plus, dans ce chapitre, nous insistons tout particulièrement sur les régions pour lesquelles les deux modèles donnent des résultats proches l'un de l'autre, et nous proposons alors d'expliquer ces similarités observées.

2. Présentation du modèle de Nambu et Jona-Lasinio

2.1 Le formalisme de Matsubara

Le formalisme utilisé, nommé *formalisme à temps imaginaire*, ou formalisme de Matsubara [8], utilise une analogie entre le facteur thermique $\exp(-\beta \cdot E)$ et le facteur $\exp(-i \cdot t \cdot H)$, en faisant une correspondance entre l'inverse de la température T , noté β , et $i \cdot t$. Cela explique alors l'appellation de temps imaginaire. Une caractéristique de ce formalisme est que les fonctions de Green dépendent de ce temps imaginaire $i \cdot t$ de telle manière que $0 \leq i \cdot t \leq \beta$, et cela conduit à une périodicité de période β . Par ailleurs, la transformée de Fourier selon le temps est remplacée par une série de Fourier. Une autre conséquence est que les énergies sont quantifiées. Elles sont multiples de π/β : multiples pairs pour les bosons et impairs pour les fermions. Concrètement, quand nous avons à calculer une intégrale dont la variable d'intégration est un quadrivecteur, nous devrons alors effectuer la transformation suivante :

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{i}{\beta} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (1)$$

La composante 0 est la composante *temporelle* du quadrivecteur, c'est-à-dire qu'elle représente une énergie. Cette dernière n'est alors pas une variable *d'intégration*, mais de *sommation*, puisque l'énergie devient une variable discrète dans ce formalisme. L'indice n , avec $n \in \mathbb{Z}$, est associé à la $n^{\text{ième}}$ énergie de Matsubara. Il est d'usage de parler de *fréquence* de Matsubara, définie par :

$$i \cdot \omega_n^{FD} = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{\beta}, \quad (2)$$

où l'énergie est celle d'un fermion (FD : Fermi–Dirac), et :

$$i \cdot \omega_n^{BE} = \frac{2n \cdot \pi}{\beta}, \quad (3)$$

pour un boson (BE : Bose–Einstein).

Nous verrons tout au long de ce travail que ce formalisme est très présent dans notre modèle, même si cela n'apparaît pas de manière explicite. Des exemples de calculs utilisant le formalisme à temps imaginaire sont disponibles à la fin du chapitre 4, associé aux diquarks. Un calcul complet d'un propagateur de fermion y est présenté. Aussi, l'annexe D présente certains calculs directement reliés à ce formalisme. Plus précisément, le début de cette annexe y détaille une méthode générale pour effectuer une sommation de fréquences de Matsubara.

2.2 Fondements du modèle NJL

L'idée principale du modèle NJL est de considérer que les gluons échangés entre les quarks/antiquarks ont une masse effective. Ladite masse est supposée être assez forte face aux quantités de mouvement des gluons. Ces quantités de mouvement sont alors négligées dans l'écriture des propagateurs des gluons. En conséquence, le propagateur d'un gluon est assimilé à une constante et est réduit à un simple facteur effectif. Etudions cette approximation pas à pas. Le propagateur du gluon de quadri-impulsion k s'écrit initialement comme [46] :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{a,b}(k) = \delta^{ab} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi_G) \cdot \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (4)$$

Les indices a et b sont liés aux couleurs à chaque extrémité du propagateur. Le symbole de Kronecker δ^{ab} garantit la conservation de la charge de couleur. μ, ν sont des indices associés aux quatre composantes d'un quadrvecteur. $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski, voir annexe B. Concernant ξ_G , il dépend de notre choix de jauge pour notre champ de gluon. Parmi les possibilités existantes, la jauge de Landau consiste à prendre $\xi_G = 0$, ou $\xi_G = 1$ pour la jauge de Feynman. Nous considérons la seconde possibilité, ce qui permet de simplifier (4) :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{a,b}(k) = \frac{\delta^{ab} \cdot \eta_{\mu\nu}}{k^2}. \quad (5)$$

Malgré ce choix, nous ne sommes pas encore satisfaits. En effet, pendant l'interaction entre un quark et un antiquark, le gluon échangé va certainement interagir avec d'autres gluons et/ou avec des paires quark/antiquark, comme représenté sur la partie gauche de la figure 1. Ce comportement est expliqué par la forte valeur de la constante de couplage α_s [47].

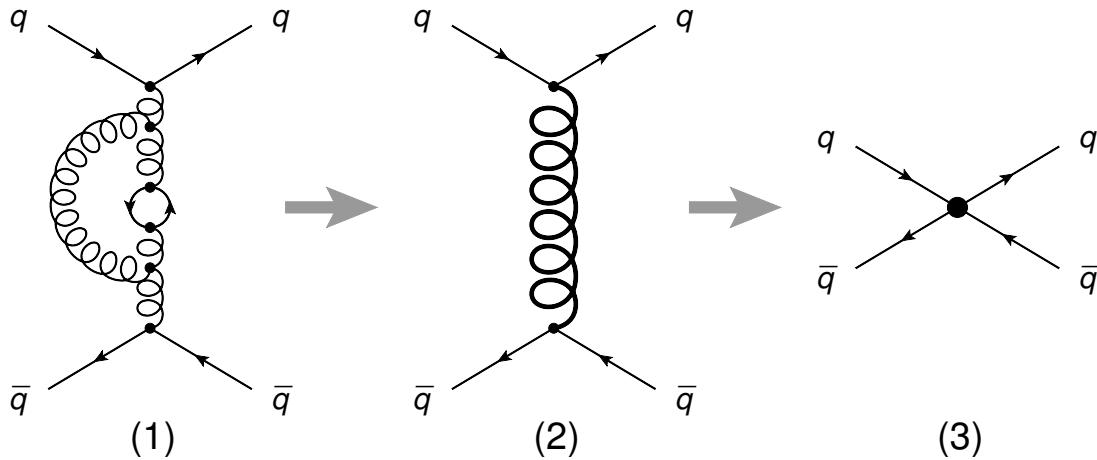


Figure 1. Schématisation de l'approche NJL.

- (1) Interaction entre un quark et un antiquark décrit par la QCD
- (2) Les gluons acquièrent une masse effective
- (3) Gluon traité dans le modèle NJL

Cet aspect conduirait à des calculs très difficiles. Si le gluon possède une masse effective Σ , cas n°2 de la figure 1, alors (5) devient [48] :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{a,b}(k) = \frac{\delta^{ab} \cdot \eta_{\mu\nu}}{k^2 - \Sigma^2}. \quad (6)$$

Les phénomènes physiques qui nous intéressent dans le cadre de ce travail concernent par exemple la formation d'hadrons à partir de quarks/antiquarks. Cet exemple correspond à la QCD de « basses énergies ». Ainsi, allons plus loin, en négligeant k^2 face à Σ^2 . Pour être précis, nous ne sommes pas sur la couche de masse. Ainsi, (6) se réécrit comme [49] :

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{a,b}(k) = \frac{\delta^{ab} \cdot \eta_{\mu\nu}}{k^2 - \Sigma^2} \approx -\frac{\delta^{ab} \cdot \eta_{\mu\nu}}{\Sigma^2}, \quad (7)$$

de telle manière que le gluon est réduit à un simple vertex, partie droite de la figure 1. Précisément, les gluons n'existent pas dans le modèle de Nambu et Jona-Lasinio en tant que degrés de liberté dynamiques. Bien sûr, cela n'est pas sans conséquence, comme l'absence de confinement dans une pure description NJL. Toutefois, l'approximation permet de simplifier les calculs. Le Lagrangien associé est aussi fortement modifié par rapport à celui de QCD. En effet, considérons l'élément de matrice :

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda^a \psi) \cdot \left(\frac{-g^2}{\Sigma^2} \right) \cdot (\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi), \quad (8)$$

décrivant l'interaction entre le quark et l'antiquark en fonction des approximations que nous venons de faire. ψ est associé à un champ de quark. Le g est une constante de couplage entre le gluon et le quark/antiquark. La quantité (8) correspond à la contraction du courant conservé J_μ^a associé à $SU(3)_f$, c'est à dire un des termes d'interaction du Lagrangien [19, 20, 49].

Donc, (8) modélise ici l'interaction entre un quark et un antiquark. Le facteur $\kappa = -g^2 / \Sigma^2$ est finalement une constante effective d'interaction. Le terme d'interaction dans le Lagrangien se met alors sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{int } q\bar{q}} = \kappa \cdot \sum_{a=1}^8 (\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2. \quad (9)$$

2.3 Le Lagrangien NJL

Le Lagrangien le plus complet utilisé dans notre étude est écrit comme [20, 22, 48, 50, 51] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} = & \sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f (i\cancel{D} - m_{0f}) \psi_f \\ & + G \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right] \\ & - G_V \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right] \\ & - K \cdot \left[\det(\bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi) + \det(\bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi) \right] \\ & + \sum_{\alpha} G_{DIQ}^{\alpha} \cdot \sum_{i,j} (\bar{\psi}_a \gamma_\mu \Gamma_{\alpha}^i \psi_b^c) (\bar{\psi}_d^c \gamma^\mu \Gamma_{\alpha}^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de} \end{aligned} \quad (10)$$

Ce Lagrangien est la somme de plusieurs « sous-Lagrangiens ». Chacun d'eux a un rôle bien défini dans l'étude des particules traitées dans ce travail. Le premier terme

$\sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f (i\cancel{D} - m_{0f}) \psi_f$ est le Lagrangien de Dirac pour des particules de spin $\frac{1}{2}$, dans lequel m_{0f} désignent les masses nues des quarks u, d, s . Les quatre termes restants de l'équation (10) sont complètement nouveaux par rapport au Lagrangien de QCD. Ils font appel aux constantes G, G_V, K, G_{DIQ} du modèle NJL étendu, voir tableau 1. Les termes :

$$G \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right] - G_V \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right], \quad (11)$$

décrivent l'interaction d'un quark et d'un antiquark. Ils seront utilisés dans le chapitre suivant, pour modéliser les mésons [52, 53]. Ils constituent le Lagrangien d'interaction $\mathcal{L}_{\text{int } q\bar{q}}$ vu équation (9), après application d'une transformation de Fierz [19, 20, 48]. Cette réécriture de (9) fait apparaître deux termes distincts dans (11), associé à la constante G pour le premier et $-G_V$ pour le second. Chacun d'eux peut être divisé en deux sous-termes : $(\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2$ qui modélise une interaction scalaire quark/antiquark, $(\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2$ une interaction pseudo-scalaire, $(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2$ une interaction vectorielle et $(\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2$ une interaction axiale. La matrice $\lambda^0 = \sqrt{2/3} \cdot 1_3$ est ajoutée dans la sommation sur les 8 matrices λ^a définies annexe B, c'est-à-dire les générateurs de $SU(3)_f$. Aussi, 1_3 est la matrice identité de dimension 3×3 . En fait, λ^0 vient directement de la transformation de Fierz appliquée [19, 20]. Dans (10), le terme :

$$-K \cdot \left[\det(\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi) \right], \quad (12)$$

est connu comme terme de 't Hooft. Il intervient aussi pour décrire une interaction entre un quark et un antiquark, par conséquent pour certains mésons. C'est un terme ajouté pour briser de manière explicite la symétrie pseudo-scalaire $U_A(1)$. Clairement, comme expliqué dans [20], si cette symétrie était respectée, il existerait un méson pseudo-scalaire dont la masse serait comparable à celle du pion. Mais un tel méson n'a pas été observé ...

Finalement, le dernier terme du Lagrangien est :

$$\sum_{\alpha=S,P,V,A} G_{DIQ}^\alpha \cdot \sum_{i,j} (\bar{\psi}_a \gamma_\mu \Gamma_\alpha^i \psi_b^c) (\bar{\psi}_d^c \gamma^\mu \Gamma_\alpha^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de}, \quad (13)$$

qui s'identifie au terme d'interaction $\mathcal{L}_{\text{int } qq}$ du Lagrangien, c'est-à-dire qu'il modélise l'interaction entre deux quarks. Il sera utilisé pour construire les diquarks au chapitre 4, dans lequel nous détaillerons la sommation sur $\alpha = S, P, V, A$: S pour des diquarks scalaires, P pour des pseudo-scalaires, V pour des vectoriels et A pour des axiaux ...

2.4 Paramètres employés dans NJL

Le modèle de Nambu et Jona-Lasinio n'est pas renormalisable. En conséquence, un cut-off, noté Λ , est utilisé dans les calculs. Dans la pratique, il correspond à la borne supérieure des intégrales, dont la structure est celle de (1). Aussi, le modèle utilise les constantes G, G_V, K, G_{DIQ} , visibles dans l'équation (10), qui sont plus ou moins liées explicitement à des grandeurs physiques. Parmi ces dernières, nous avons la constante de couplage g associée aux interactions décrites par la QCD, dont l'incertitude est très forte à basses énergies. Dans la littérature, ces constantes et le cut-off sont souvent rassemblés, pour former un jeu de paramètres. Le tableau 1 propose trois jeux de paramètres différents. Celui désigné sous le sigle « RK » est associé à [53], le « P1 » à [48, 50] et le « EB » que nous avons ajouté dans le cadre de notre travail, en modifiant le « P1 » dans le cas où $m_u \neq m_d$. Pour cela, nous avons pris en compte les contraintes actuellement admises quant aux masses nues des quarks [54]. De plus, nous verrons dans les chapitres suivants que G_V et G_{DIQ} ont été adaptés afin d'augmenter l'accord entre nos résultats et ceux trouvés dans la littérature. Le lien entre les valeurs de G_{DIQ} données dans le tableau 1 et celles de $G_{DIQ}^{\alpha}|_{\alpha=S,P,V,A}$ sera expliqué dans le chapitre 4. Aussi, notons que la constante G est souvent notée G_S dans certains papiers.

	RK	P1	EB
m_{0u}	5.50	4.75	4.00
m_{0d}	5.50	4.75	6.00
m_{0s}	140.7	147.0	120.0
cut-off Λ	602.3	708.0	708.0
$G \cdot \Lambda^2$	1.835	1.922	1.922
G_V	—	$0.310G$	$0.295G$
G_{DIQ}	—	$0.705G$	$0.705G$
$K \cdot \Lambda^5$	12.36	10.00	10.00

Tableau 1. Jeux de paramètres utilisés. Les masses et le cut-off sont en MeV.

Les constantes G_i sont liées à des constantes sans dimension g_i par la relation [19] :

$$G_i = \left(\frac{g_i}{\Lambda} \right)^2. \quad (14)$$

Les G_i sont donc exprimés en MeV^{-2} dans le tableau 1. De plus, des transformations de Fierz permettent d'établir des relations entre certaines des constantes [19, 39, 55], et nous obtenons :

$$G_V = \frac{G}{2} \quad \text{et} \quad G_{DIQ} = \frac{3}{4} \cdot G. \quad (15)$$

Cependant, ces relations ne sont pas toujours strictement respectées dans la pratique, comme nous pouvons le constater des diverses publications NJL et dans le tableau 1.

3. Masses des quarks constituants

3.1 Equations de gap

La détermination des masses des quarks constituants (quarks habillés) constitue une première application du modèle de Nambu et Jona-Lasinio. Les masses des autres particules dépendront d'elles plus ou moins directement. En notant m_{0f} la masse nue d'un quark de saveur f et en notant m_f sa masse effective correspondante, nous écrivons [19, 53, 56] :

$$\begin{cases} m_u = m_{0u} - \frac{G \cdot N_c}{\pi^2} \cdot m_u \cdot A(m_u, \mu_u) + \frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4} \cdot m_d \cdot m_s \cdot A(m_d, \mu_d) \cdot A(m_s, \mu_s) \\ m_d = m_{0d} - \frac{G \cdot N_c}{\pi^2} \cdot m_d \cdot A(m_d, \mu_d) + \frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4} \cdot m_s \cdot m_u \cdot A(m_s, \mu_s) \cdot A(m_u, \mu_u), \\ m_s = m_{0s} - \frac{G \cdot N_c}{\pi^2} \cdot m_s \cdot A(m_s, \mu_s) + \frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4} \cdot m_u \cdot m_d \cdot A(m_u, \mu_u) \cdot A(m_d, \mu_d) \end{cases}, \quad (16)$$

ce qui forme les équations dites de gap. Elles sont obtenues en appliquant l'approximation du champ moyen, aussi nommée approximation de Hartree, dans le Lagrangien (10) [51, 53]. À cause de cette approximation, les termes issus de $\mathcal{L}_{\text{int } qq}$ n'interviennent pas dans (16). Dans ces équations, N_c indique le nombre de couleurs différentes prises en compte, c'est-à-dire trois. μ_f est le potentiel chimique du quark de saveur f . Par ailleurs, nous avons utilisé une fonction générique A associée à une boucle à un quark, voir [53, 56] et annexe D :

$$A(m_f, \mu_f, \beta, \Lambda) = \frac{16\pi^2}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu_f)^2 - E_f^2}, \quad (17)$$

où $E_f = \sqrt{(\vec{p})^2 + m_f^2}$ est l'énergie d'un quark de saveur f , $\beta = 1/T$ et T est la température. En outre, nous avons la relation :

$$i \cdot Tr(S^f(x-x)) = -\frac{m_f}{4\pi^2} \cdot A(m_f, \mu_f), \quad (18)$$

dans laquelle Tr est la trace (matricielle). S^f est le propagateur d'un quark de saveur f dans le formalisme du temps imaginaire, donc à température finie :

$$S^f(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n e^{i \cdot \omega_n \cdot (\tau-\tau')} \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \cdot \vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{x}')}}{\gamma_0 \cdot (i \cdot \omega_n + \mu_f) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m_f}. \quad (19)$$

Les \vec{x}, \vec{x}' correspondent à des positions et τ, τ' à des temps. La fonction A est aussi liée à la valeur du condensat chiral $\langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle$ introduit dans le chapitre précédent. En effet, nous avons la relation [19, 57] :

$$\langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle = \frac{m_f \cdot N_c}{4\pi^2} \cdot A(m_f, \mu_f, \beta, \Lambda). \quad (20)$$

Schématiquement, chaque ligne de (16) est équivalente à [17, 20–22, 49] :

$$\begin{aligned}
 m_f &= m_{0f} + \frac{i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^f)}{4G} + \frac{i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^j)}{2K} + \frac{i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^k)}{} \\
 m_f &= m_{0f} + 4G \cdot \left(i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^f) \right) + 2K \cdot \left(i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^j) \right) \cdot \left(i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^k) \right)
 \end{aligned}$$

ou, en utilisant l'expression du condensat (20),

$$m_f = m_{0f} - 4G \cdot \left\langle \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle \rangle + 2K \left\langle \langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle \rangle \langle \langle \bar{\psi}_k \psi_k \rangle \rangle \right\rangle \Big|_{\substack{f=u,d,s \\ f \neq j \text{ et } f \neq k}}. \quad (21)$$

Chaque boucle correspond à une fonction A , ce qui nous permet de reconnaître facilement les termes de (16). Le premier terme, m_{0f} , prend en compte la masse nue des quarks. Le second terme, $4G \cdot (i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^f))$, traduit l'effet d'une boucle de saveur f sur le quark considéré. Le troisième, $2K \cdot (i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^j)) \cdot (i \cdot N_c \cdot \text{Tr}(S^k))$, modélise les effets des deux autres saveurs de quark sur la masse de notre quark. Comme dans [17, 22], les traits épais sont utilisés quand les masses effectives (quarks habillés) sont prises en compte, y compris dans les boucles, voir m_f dans (18, 19). Les traits fins correspondent aux quarks courants, associés aux masses nues.

3.2 Symétrie isospin

Dans la littérature, et dans certaines parties de notre travail, la symétrie isospin est prise en compte. Elle consiste à dire que les quarks u et d ont les mêmes propriétés, ce qui s'écrit symboliquement comme « $u = d \equiv q$ ». En conséquence, leurs masses et leurs potentiels chimiques sont considérés comme identiques, et notés respectivement comme m_q et μ_q . La finalité est tout d'abord de simplifier les calculs. Cette approximation est valide dans la majorité des systèmes physiques étudiés théoriquement et expérimentalement. Quand la symétrie isospin est vérifiée, le jeu d'équations (16) se simplifie et on obtient :

$$\begin{cases} m_q = m_{0q} - \frac{N_c}{\pi^2} \cdot m_q \cdot A(m_q, \mu_q) \cdot \left(G - \frac{K \cdot N_c}{8\pi^2} \cdot m_s \cdot A(m_s, \mu_s) \right), \\ m_s = m_{0s} - \frac{G \cdot N_c}{\pi^2} \cdot m_s \cdot A(m_s, \mu_s) + \frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4} \cdot (m_q \cdot A(m_q, \mu_q))^2, \end{cases} \quad (22)$$

où il reste deux équations et deux inconnues, c'est à dire les masses m_q et m_s .

3.3 Traitement des densités

Pour les calculs à densités non nulles, la formule suivante, issue de [18, 19], est utilisée :

$$\rho_f = \left\langle \left\langle \psi_f^+ \psi_f \right\rangle \right\rangle = \frac{N_c}{\pi^2} \cdot \int dp \cdot p^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp(\beta \cdot (E_f - \mu_f))} - \frac{1}{1 + \exp(\beta \cdot (E_f + \mu_f))} \right). \quad (23)$$

L'indice f indique la saveur du quark (u, d, s). Dans la pratique, les bornes d'intégrations seront de 0 à Λ (cut-off tableau 1). En fait, (23) donne la relation entre la densité ρ_f du quark de saveur f et son potentiel chimique correspondant μ_f . Dans le cas général, et températures et densités finies, il est nécessaire de résoudre un jeu de 6 équations avec 6 inconnues. Ce jeu d'équations s'écrit comme :

$$\begin{cases} m_f = m_{0f} - \frac{G \cdot N_c}{\pi^2} \cdot m_f \cdot A(m_f, \mu_f, T) + \frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4} \cdot m_j \cdot m_k \cdot A(m_j, \mu_j, T) \cdot A(m_k, \mu_k, T) \\ \rho_f = \frac{N_c}{\pi^2} \cdot \int dp \cdot p^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_f - \mu_f}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_f + \mu_f}{T}\right)} \right) \end{cases} \Bigg|_{\substack{f=u,d,s \\ f \neq j \text{ et } f \neq k}} \quad (24)$$

Les paramètres (fixés) sont la température et les densités voulues ρ_f . Les inconnus sont les masses effectives m_f et les potentiels chimiques μ_f . À cette occasion, nous pouvons mentionner l'existence d'un décalage selon les potentiels chimiques, défini par :

$$\delta\mu_f = G_V \cdot \left\langle \left\langle \psi_f^+ \psi_f \right\rangle \right\rangle = G_V \cdot \rho_f, \quad (25)$$

évoqué notamment dans [19, 20, 22, 52], avec un facteur deux pour les deux dernières références. Ce décalage traduit les effets de l'interaction vectorielle, quand cette interaction est prise en compte dans le Lagrangien, quand $G_V \neq 0$. Le potentiel chimique μ_f qui apparaît dans la seconde ligne de (24) est solution de cette équation. En conséquence, il correspond à un potentiel chimique effectif, ou « renormalisé », selon la terminologie utilisée dans [22]. En d'autres termes, c'est le potentiel chimique *après* le décalage [19]. Donc, il est relié au « vrai » potentiel chimique μ_{0f} (avant le décalage) par $\mu_f = \mu_{0f} - \delta\mu_f$. Dans la pratique, μ_f est utilisé dans les calculs où un potentiel chimique est utilisé, après avoir été obtenu via (24). Dans notre travail, nous considérons la température et les densités ρ_f comme paramètres (d'entrée). Ainsi, nous n'utilisons pas réellement μ_{0f} . Quoi qu'il en soit, il peut être observé que le décalage a une influence assez faible sur les résultats obtenus quand $G_V < G/3$, comme avec nos jeux de paramètres, tableau 1.

Les équations (24) sont réduites à un système de 4 équations / 4 inconnues quand nous faisons appel à la symétrie isospin, comme dans (22). En accord avec le paragraphe 3.2, nous écrivons que $\rho_u = \rho_d \equiv \rho_q$. Dans notre travail, $\rho_q = N_q/V$ est interprété comme la densité de quarks de saveur u , ou de saveur d , nécessairement identiques pour avoir $m_u = m_d \equiv m_q$ et

$\mu_u = \mu_d \equiv \mu_q$. Donc, ρ_q n'est pas la somme de ces deux densités. De la même manière, le nombre de quarks N_q n'est pas ici le nombre *total* de quarks légers, mais finalement la moitié. Dans le cadre de la symétrie isospin, nous définissons la densité baryonique comme [18] :

$$\rho_B = \frac{2}{3} \rho_q. \quad (26)$$

L'équation (26) peut être interprétée en disant que quand la symétrie isospin est satisfaite, un nucléon est constitué *en moyenne* par 1.5 quarks u et autant de quarks d , et $\rho_s = 0$. Concrètement, dans nos résultats, le rapport ρ_B/ρ_0 sera utilisé au lieu de ρ_B , où $\rho_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ correspond à la densité nucléaire ordinaire.

4. Le modèle PNJL

Dans le modèle NJL, nous avons vu au paragraphe 3.1 que les quarks sont couplés au condensat chiral (16, 20) dans le cadre de l'approximation du champ moyen. Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la motivation du modèle PNJL est d'essayer de corriger un défaut majeur du modèle NJL, c'est-à-dire l'absence de confinement, en couplant aussi les quarks à une boucle de Polyakov. Nous allons expliquer dans cette partie comment effectuer ce couplage.

4.1 Le Lagrangien PNJL

Concrètement, nous considérons tout d'abord les modifications qui concernent le Lagrangien NJL. Dans le cadre du modèle PNJL, celui-ci devient [37, 40, 42] :

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \tilde{\mathcal{L}}_{NJL} - \mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi}) + \sum_{f=u,d,s} \mu_f \cdot \bar{\psi}_f \gamma^0 \psi_f, \quad (27)$$

où $\tilde{\mathcal{L}}_{NJL}$ correspond au Lagrangien NJL (10), dans lequel la dérivée $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$ intervenant dans le terme $\sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f (i\not{D} - m_{0f}) \psi_f$ est remplacée par $\gamma^\mu D_\mu$, où $D_\mu = \partial_\mu - i \cdot A_\mu$. Dans cette dernière relation, A est le champ de jauge Euclidien associé aux gluons. Si nous faisons une comparaison avec les équations de QCD vues au chapitre 1, nous notons que la constante de couplage g_s est absorbée dans A , donc ici $A_\mu = g_s \cdot A_\mu^a \cdot \lambda_a / 2$, voir par exemple [42]. Aussi, le terme $\sum_{f=u,d,s} \mu_f \cdot \bar{\psi}_f \gamma^0 \psi_f$ qui apparaît dans (27) est rajouté pour pouvoir effectuer des calculs à potentiels chimiques non nuls [40], donc à densités finies.

Ensuite, une autre modification du Lagrangien NJL est l'inclusion d'un potentiel effectif, noté $\mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi})$. Celui-ci correspond à un Lagrangien de QCD pure jauge, c'est-à-dire sans

quarks/antiquarks, seulement des gluons. Donc, nous pouvons l'associer au terme $-\frac{1}{4} \cdot G_{\mu\nu}^a \cdot G_a^{\mu\nu}$ du Lagrangien de QCD, voir chapitre 1.

Le potentiel $\mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi})$ dépend explicitement de la température T , mais aussi des quantités Φ et de $\bar{\Phi}$. Celles-ci sont définies par les relations [37, 40, 42] :

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{\text{Tr}_c \langle\langle L(\vec{x}) \rangle\rangle}{N_c} \quad \text{et} \quad \bar{\Phi}(\vec{x}) = \frac{\text{Tr}_c \langle\langle L^\dagger(\vec{x}) \rangle\rangle}{N_c}, \quad (28)$$

où Tr_c est la trace selon la couleur et $\langle\langle L(\vec{x}) \rangle\rangle$ est un invariant de jauge représentant la moyenne de la ligne de Polyakov, notée ici $L(\vec{x})$:

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp\left(i \int_0^\beta A_4(\vec{x}, \tau) \cdot d\tau\right). \quad (29)$$

Dans (29), \mathcal{P} est un opérateur d'ordre, et $\beta=1/T$. Aussi, $A_4=i \cdot A^0$ est la composante temporelle du champ de jauge Euclidien (\vec{A}, A_4) évoqué plus haut. Physiquement, Φ et $\bar{\Phi}$ devraient correspondre respectivement à la valeur de la boucle de Polyakov et son conjugué. Mais, comme remarqué dans [39], ce sont leurs valeurs moyennes. En fait, il est aussi remarqué dans cette référence que Φ et $\bar{\Phi}$ peuvent être considérées comme des variables indépendantes. Par ailleurs, les deux sont des réels dans le cadre de l'approximation du champ moyen.

Dans la pratique, Φ , et par extension $\bar{\Phi}$, sont utilisés comme paramètres d'ordre dans la transition de phase entre une « phase confinée de couleur » et une « phase déconfinée de couleur »¹. Aussi, Φ est associé à la symétrie \mathbb{Z}_{N_c} , avec $N_c=3$, c'est-à-dire le centre du groupe de symétrie $SU(3)_c$ de QCD [42]. Nous rappelons que le centre d'un groupe de symétrie G est un ensemble d'éléments de G qui commutent avec tous les autres éléments de G . Clairement, \mathbb{Z}_3 est composée des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $x^3=1$, c'est-à-dire 1, $j=\exp(2i\pi/3)$ et j^2 . En fait, la symétrie \mathbb{Z}_3 est brisée dans la « phase déconfinée », pour laquelle on a $\Phi, \bar{\Phi} \rightarrow 1$, et restaurée dans la « phase confinée » [42], où $\Phi, \bar{\Phi} \rightarrow 0$. Cette correspondance entre $\Phi, \bar{\Phi}$ et ces deux phases peut être vérifiée si nous appliquons l'approximation du champ moyen, ce qui conduit à écrire $A_4(\vec{x}, \tau) \equiv A_4$, c'est-à-dire un champ invariant dans le temps et l'espace. Dans ce cas, (28, 29) donnent, en utilisant $A_4=i \cdot A^0$ [39] :

$$\Phi = \frac{\text{Tr}_c (\exp(iA_4 \cdot \beta))}{N_c} = \frac{\text{Tr}_c (\exp(-A^0/T))}{N_c} \propto \exp(-\Delta E/T). \quad (30)$$

¹ Nous utilisons des guillemets pour évoquer les phases « confinée » et « déconfinée », car elles correspondent à des calculs effectués en pure jauge, c'est-à-dire sans quarks, dans lesquels la première phase est associée à des *glueballs* et la seconde à des gluons déconfinés [40]. Nous pouvons garder la dénomination « confinée/déconfinée » quand les quarks sont rajoutés dans le modèle, mais nous ne pouvons pas dire que la boucle de Polyakov introduit un réel confinement de couleur pour les quarks...

En suivant par exemple l'interprétation de [40], ΔE est l'énergie requise pour ajouter un quark statique (« masse infinie ») au sein du système. A température finie, dans la « phase confinée », $\Delta E \rightarrow \infty$, de sorte que $\Phi \rightarrow 0$. A l'opposé, dans une « phase déconfinée », $\Delta E \rightarrow 0$, et donc $\Phi \rightarrow 1$. De la même manière, le raisonnement est similaire avec $\bar{\Phi}$, associé à l'introduction d'un antiquark statique, selon [4] et la présentation des boucles de Polyakov effectuée dans le chapitre 1.

Maintenant, considérons l'écriture de $\mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi})$. En fait, dans la littérature, deux possibilités sont proposées. Par exemple, dans [40, 44], on trouve :

$$\frac{\mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi})}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \cdot \bar{\Phi}\Phi - \frac{b_3}{6} \cdot (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4} \cdot (\bar{\Phi}\Phi)^2, \quad (31)$$

avec :

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \cdot (T_0/T) + a_2 \cdot (T_0/T)^2 + a_3 \cdot (T_0/T)^3 \quad (32)$$

dans laquelle $a_0, a_1, a_2, a_3, b_3, b_4$ sont des constantes, dont les valeurs sont données dans [40]. Une autre possibilité peut être trouvée par exemple [39, 42], dont voici l'expression :

$$\frac{\mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi})}{T^4} = -\frac{a(T)}{2} \cdot \bar{\Phi}\Phi + b(T) \cdot \ln(1 - 6\Phi\bar{\Phi} + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\bar{\Phi}\Phi)^2), \quad (33)$$

avec :

$$a(T) = a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad \text{et} \quad b(T) = b_3 \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (34)$$

Les valeurs des constantes qui apparaissent dans ces relations sont indiquées dans le tableau 2.

a_0	a_1	a_2	b_3	T_0
3.51	-2.47	15.2	-1.75	270 MeV

Tableau 2. Paramètres PNJL.

Elles ont été choisies par les auteurs des publications citées afin de reproduire correctement les données obtenues lors de calculs LQCD en pure jauge. Plus précisément, comme dans [37], ces données concernent la densité d'énergie ϵ , la densité d'entropie s et la pression p .

De plus, comme expliqué dans [39], le choix de $a_0 = \frac{16\pi^2}{45} \approx 3,51$ a été fait afin d'atteindre la

limite de Stefan-Boltzmann à hautes températures, c'est à dire typiquement $T \rightarrow \infty$. Aussi, comme noté dans [39], la contrainte $b_3 = -0.108 \cdot (a_0 + a_1 + a_2)$ permet d'obtenir une transition de phase du premier ordre quand $T = T_0$. En fait, la constante T_0 , aussi notée T_D dans la littérature, correspond à la température critique de déconfinement dans une théorie pure jauge ($m_{0q} \rightarrow \infty$) [35]. Cette température est supposée être plus forte que la température critique de la transition de phase chirale à la limite chirale ($m_{0q} \rightarrow 0$), dont une valeur proposée dans la littérature est $T_c = 170$ MeV [34]. Dans la suite de notre travail, nous choisissons dans nos calculs le potentiel proposé équation (33). En effet, comme expliqué dans [39], (33) présente une divergence logarithmique quand $\Phi, \bar{\Phi} \rightarrow 1$ (« phase déconfinée »), ce qui limite ces deux

grandeur à des valeurs inférieures à 1, en accord avec le comportement attendu que nous avons expliqué précédemment.

Certaines de ces propriétés sont vérifiées avec la figure 2. Dans sa partie gauche, nous avons représenté \mathcal{U}/T^4 (33) en fonction de Φ , en posant $\bar{\Phi}=\Phi$. Dans le paragraphe suivant, nous verrons que les valeurs de Φ qui minimisent \mathcal{U}/T^4 sont pertinentes dans notre étude. En fait, pour $T < T_0$, \mathcal{U}/T^4 admet un minimum pour $\Phi=0$. Quand $T=T_0$, $\Phi=0$ est encore une valeur qui minimise le potentiel, mais nous avons aussi un autre minimum associé à une valeur de Φ non nulle. Pour $T > T_0$, nous avons seulement la valeur non nulle. Nous avons tracé ces valeurs de Φ , notées comme Φ_{\min} , en fonction de T/T_0 , dans la partie droite de la figure. Comme expliqué précédemment, Φ est un nombre réel. En conséquence, $\Phi=0$ est la seule solution pour laquelle Φ respecte la symétrie \mathbb{Z}_3 [33]. Donc, Φ satisfait bien cette symétrie pour $T < T_0$. Quand T est plus fort que T_0 , \mathbb{Z}_3 est spontanément brisée. Selon la théorie de Landau décrite au chapitre 1, le fait que \mathcal{U}/T^4 ait deux minima (pour une valeur de Φ nulle et pour une non nulle) quand $T=T_0$ nous permet de conclure que nous avons alors là une transition de phase du premier ordre entre la phase « confinée » et « déconfinée ». Cet aspect correspond à la discontinuité visible sur la partie droite de la figure. Pour conclure, nous vérifions aussi que $\Phi_{\min} \rightarrow 1$ à hautes températures.

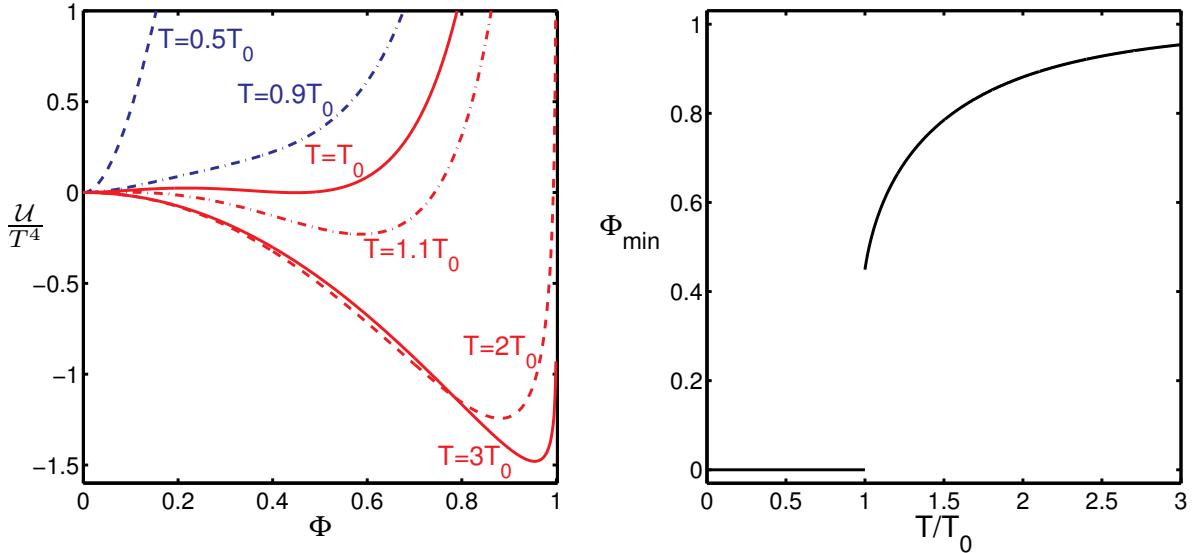


Figure 2. Partie gauche : comportement de \mathcal{U}/T^4 en fonction de Φ , inspiré de [39].

Partie droite : évolution de Φ_{\min} par rapport à T/T_0 .

4.2 Le grand potentiel PNJL

L'inclusion de la boucle de Polyakov induit aussi des modifications dans l'écriture du grand potentiel. Dans le modèle NJL, ce grand potentiel s'écrit de la manière suivante [35, 51] :

$$\Omega_{\text{NJL}} = 2G \sum_{f=u,d,s} \langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle^2 - 4K \langle\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle\rangle \langle\langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle\rangle \langle\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle\rangle \\ - 2N_c \sum_{f=u,d,s} \int_0^\Lambda \frac{p^2 \cdot dp}{2\pi^2} \cdot \left(E_f + T \cdot \ln(Z^+(E_f)) + T \cdot \ln(Z^-(E_f)) \right), \quad (35)$$

dans laquelle $E_f = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2}$ est l'énergie d'un quark/antiquark de saveur f . L'expression des condensats $\langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle$ est donnée équation (20). Par ailleurs, $Z^+(E_f)$ et $Z^-(E_f)$ désignent respectivement les fonctions de partition des fermions et anti-fermions, c'est-à-dire ici les quarks et les antiquarks. Elles sont écrites ici comme :

$$\begin{cases} Z^+(E_f) = 1 + \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f)) \\ Z^-(E_f) = 1 + \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f)) \end{cases}. \quad (36)$$

Les distributions de Fermi-Dirac pour les fermions et anti-fermions, notées respectivement f^+ et f^- , peuvent être obtenues en dérivant les fonctions de partition par le potentiel chimique, et il vient :

$$\begin{cases} f^+(\beta \cdot (E_f - \mu_f)) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln(Z^+(E_f))}{\partial \mu_f} = \frac{1}{\exp(\beta \cdot (E_f - \mu_f)) + 1} \\ f^-(\beta \cdot (E_f + \mu_f)) = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \ln(Z^-(E_f))}{\partial \mu_f} = \frac{1}{\exp(\beta \cdot (E_f + \mu_f)) + 1} \end{cases}. \quad (37)$$

Avec l'inclusion de la boucle de Polyakov, le grand potentiel se réécrit comme [35, 42] :

$$\Omega_{\text{PNJL}} = \mathcal{U}(T, \Phi, \bar{\Phi}) + 2G \sum_{f=u,d,s} \langle\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle\rangle^2 - 4K \langle\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle\rangle \langle\langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle\rangle \langle\langle \bar{\psi}_s \psi_s \rangle\rangle \\ - 2N_c \sum_{f=u,d,s} \int_0^\Lambda \frac{p^2 \cdot dp}{2\pi^2} \cdot \left(E_f + \frac{T}{N_c} \cdot Tr_c \ln(Z_\Phi^+(E_f)) + \frac{T}{N_c} \cdot Tr_c \ln(Z_\Phi^-(E_f)) \right). \quad (38)$$

D'une part, une modification concerne l'inclusion du potentiel \mathcal{U} défini précédemment. D'autre part, des modifications sont requises au niveau des fonctions de partition. En effet, elles sont réécrites sous la forme [35, 40, 43, 44] :

$$\begin{cases} Z_\Phi^+(E_f) = 1 + L \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f)) \\ Z_\Phi^-(E_f) = 1 + L^\dagger \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f)) \end{cases}, \quad (39)$$

où les lignes de Polyakov L et L^\dagger sont déjà apparues équations (28, 29).

Pour calculer le terme $Tr_c \ln(Z_\Phi^+(E_f))$ qui apparaît dans (38), dans lequel Tr_c est une trace selon la couleur, nous considérons une nouvelle fois l'approximation du champ moyen évoquée dans le paragraphe 4.1. Cela nous permet de réécrire L comme :

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp\left(i \int_0^\beta A_4(\vec{x}, \tau) \cdot d\tau\right) \equiv \exp(i\beta A_4), \quad (40)$$

de sorte que l'expression du champ de Polyakov Φ devient :

$$\Phi = \frac{\text{Tr}_c(L)}{N_c} = \frac{\text{Tr}_c(\exp(i\beta A_4))}{N_c} = \frac{1}{3} \cdot (\exp(i\beta(A_4)_{11}) + \exp(i\beta(A_4)_{22}) + \exp(i\beta(A_4)_{33})). \quad (41)$$

De la même manière, $\bar{\Phi} = \frac{\text{Tr}_c(\exp(-i\beta A_4))}{N_c}$. En utilisant (40) dans la fonction de partition Z_Φ^+

des quarks (39), la trace selon la couleur nous donne :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \ln(Z_\Phi^+) &= \text{Tr}_c \ln\left(1 + L \exp(-\beta(E_f - \mu_f))\right) = \ln\left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{11})\right) \\ &\quad + \ln\left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{22})\right) + \ln\left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{33})\right), \end{aligned} \quad (42)$$

ou :

$$\text{Tr}_c \ln(Z_\Phi^+) = \ln \left[\begin{array}{l} \left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{11})\right) \\ \times \left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{22})\right) \\ \times \left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot \exp(i\beta(A_4)_{33})\right) \end{array} \right]. \quad (43)$$

Si nous développons cette relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_c \ln(Z_\Phi^+) &= \\ &\ln \left[\begin{array}{l} \left(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot (\exp(i\beta(A_4)_{11}) + \exp(i\beta(A_4)_{22}) + \exp(i\beta(A_4)_{33}))\right) \\ + \exp(-2\beta(E_f - \mu_f)) \cdot (\exp(i\beta((A_4)_{22} + (A_4)_{33})) + \exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{33})) + \exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22}))) \\ + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f)) \cdot (\exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22} + (A_4)_{33}))) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Immédiatement, en utilisant (41), nous identifions 3Φ dans la première ligne de (44). Pour continuer, nous rappelons la possibilité évoquée dans [35] d'écrire L sous la forme d'une matrice diagonale, comme :

$$L \equiv \begin{bmatrix} \exp(i\beta\phi) & & \\ & \exp(i\beta\phi') & \\ & & \exp(-i\beta(\phi + \phi')) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Cette écriture nous permet d'identifier chaque terme $(A_4)_{ii}$, et ensuite nous remarquons que :

$$\begin{cases} \exp(i\beta((A_4)_{22} + (A_4)_{33})) = \exp(-i\beta(A_4)_{11}) \\ \exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{33})) = \exp(-i\beta(A_4)_{22}), \\ \exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22})) = \exp(-i\beta(A_4)_{33}) \end{cases} \quad (46)$$

et :

$$\exp(i\beta((A_4)_{11} + (A_4)_{22} + (A_4)_{33})) = 1. \quad (47)$$

En conséquence, (44) peut se simplifier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Tr_c \ln(Z_\Phi^+) &= \ln(1 + \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) \cdot 3\Phi + \exp(-2\beta(E_f - \mu_f)) \cdot 3\bar{\Phi} + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f)) \cdot 1) \\ &= \ln(1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} \exp(-\beta(E_f - \mu_f))) \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))) \end{aligned} \quad (48)$$

Ce calcul peut être refait avec $Tr_c \ln(Z_\Phi^-(E_f))$, et nous retrouvons le résultat visible dans la littérature PNJL [37, 40, 42] :

$$\begin{cases} Tr_c \ln(Z_\Phi^+(E_f)) \\ = \ln(1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} \exp(-\beta(E_f - \mu_f))) \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))) \\ Tr_c \ln(Z_\Phi^-(E_f)) \\ = \ln(1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi \exp(-\beta(E_f + \mu_f))) \exp(-\beta(E_f + \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f + \mu_f))) \end{cases}. \quad (49)$$

Rappelons que le signe plus correspond aux quarks, et le signe moins aux antiquarks. Nous observons que :

$$Tr_c \ln(Z_\Phi^-(E_f)) = Tr_c \ln(Z_\Phi^+(E_f)) \Big|_{\substack{\Phi \leftrightarrow \bar{\Phi} \\ \mu_f \leftrightarrow -\mu_f}}. \quad (50)$$

Ces modifications des fonctions de partition nous amènent à considérer une réécriture des distributions de Fermi-Dirac, comme expliqué dans [40]. En suivant la méthode détaillée dans (37), et en notant ces distributions comme f_Φ^+ (quarks) et f_Φ^- (antiquarks), nous écrivons :

$$f_\Phi^\pm(\beta \cdot (E_f \mp \mu_f)) = \pm \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{N_c} Tr_c \ln(Z_\Phi^\pm) \right)}{\partial \mu_f}, \quad (51)$$

et donc :

$$\begin{cases} f_\Phi^+(\beta \cdot (E_f - \mu_f)) \\ = \frac{(\Phi + 2\bar{\Phi} \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f))) \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta \cdot (E_f - \mu_f))}{1 + 3(\Phi + \bar{\Phi} \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f))) \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta \cdot (E_f - \mu_f))} \\ f_\Phi^-(\beta \cdot (E_f + \mu_f)) \\ = \frac{(\bar{\Phi} + 2\Phi \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f))) \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f)) + \exp(-3\beta \cdot (E_f + \mu_f))}{1 + 3(\bar{\Phi} + \Phi \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f))) \cdot \exp(-\beta \cdot (E_f + \mu_f)) + \exp(-3\beta \cdot (E_f + \mu_f))} \end{cases}. \quad (52)$$

Si $\Phi = \bar{\Phi}$, nous avons $f_\Phi^\pm(-x) = 1 - f_\Phi^\pm(x)$ et comme avec les fonctions de partition, nous vérifions que :

$$f_\Phi^-(\beta \cdot (E_f + \mu_f)) = f_\Phi^+(\beta \cdot (E_f - \mu_f)) \Big|_{\substack{\Phi \leftrightarrow \bar{\Phi} \\ \mu_f \leftrightarrow -\mu_f}}. \quad (53)$$

Comme indiqué dans [40, 42], cette mise à jour des statistiques de Fermi-Dirac doit être appliquées chaque fois que les distributions de quarks et antiquarks interviennent. Cela concerne notamment le traitement des mésons, diquarks, baryons, et les calculs de sections-efficaces.

4.3 Equations de gap dans le modèle PNJL

Finalement, l'inclusion de la boucle de Polyakov a aussi des conséquences sur les équations à résoudre pour trouver les masses des quarks constituants. En effet, le jeu d'équations (24) doit être mis à jour afin de prendre en compte les nouvelles distributions de Fermi-Dirac (52). Mais, il est aussi nécessaire de minimiser le grand potentiel PNJL par rapport à Φ et $\bar{\Phi}$. Cela amène à considérer des équations supplémentaires pour pouvoir extraire les valeurs de Φ et $\bar{\Phi}$ [40, 42] :

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} = 0 \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \bar{\Phi}} = 0 , \quad (54)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} &= T^4 \cdot \left(-\frac{a(T)}{2} \cdot \bar{\Phi} - 6 \cdot \frac{b(T) \cdot (\bar{\Phi} - 2 \cdot \Phi^2 + \bar{\Phi}^2 \cdot \Phi)}{1 - 6 \cdot \Phi \cdot \bar{\Phi} + 4 \cdot (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3 \cdot (\bar{\Phi} \cdot \Phi)^2} \right), \\ &- 6 \cdot T \cdot \sum_{f=u,d,s} \int_0^\Lambda \frac{p^2 \cdot dp}{2\pi^2} \cdot I(\Phi, \bar{\Phi}, \beta, E_f, \mu_f) \end{aligned} \quad (55)$$

dans laquelle I est défini par :

$$\begin{aligned} I(\Phi, \bar{\Phi}, \beta, E_f, \mu_f) &= \frac{\exp(-\beta(E_f - \mu_f))}{1 + 3 \cdot (\Phi + \bar{\Phi} \exp(-\beta(E_f - \mu_f))) \exp(-\beta(E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))} \\ &+ \frac{\exp(-2\beta(E_f + \mu_f))}{1 + 3 \cdot (\bar{\Phi} + \Phi \exp(-\beta(E_f + \mu_f))) \exp(-\beta(E_f + \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f + \mu_f))} \end{aligned} \quad (56)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \bar{\Phi}} = \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} \Bigg|_{\substack{\Phi \leftrightarrow \bar{\Phi} \\ \mu_f \leftrightarrow -\mu_f}} . \quad (57)$$

Dans l'expression du grand potentiel PNJL (38), \mathcal{U} est présent. Nous avons étudié dans le paragraphe 4.1 le comportement de \mathcal{U} par rapport à ses minimums selon Φ . En fait, ce comportement aura une influence sur la minimisation effectuée dans (54). Cela veut dire notamment que les propriétés $0 \leq \Phi < 1$ et $0 \leq \bar{\Phi} < 1$ seront vérifiées. Physiquement, la figure 2 considère uniquement \mathcal{U} , c'est-à-dire une description pure jauge, alors que la résolution de (54) prend en compte l'influence des quarks/antiquarks.

Finalement, comme indiqué plus haut, Φ et $\bar{\Phi}$ sont des réels dans le cadre de l'approximation du champ moyen. De plus, ils peuvent être traités comme des variables indépendantes. Donc, quand la symétrie isospin n'est pas considérée, et à densités finies, le jeu complet d'équations à résoudre comporte 8 équations, c'est-à-dire (24) et (54), avec 8 inconnues. Trois de ces inconnues sont les masses des quarks habillés u,d,s , trois sont leurs potentiels chimiques respectifs, et deux sont Φ et $\bar{\Phi}$. Concrètement, un tel système peut être résolu numériquement, en utilisant un algorithme *root-finder*. D'autre part, comme évoqué dans la littérature, le modèle PNJL décrit ici correspond au couplage minimum de la boucle de Polyakov avec les quarks. Cela implique par exemple que les équations de gap (16, 24) ne dépendent pas explicitement de la boucle de Polyakov, sauf via (52). Dans un modèle comme EPNJL, une différence est que G devient une fonction de $\Phi, \bar{\Phi}$ [45].

5. Résultats obtenus

5.1 Masses des quarks

En résolvant (24), les masses des quarks habillés NJL, à température et densité nulles, sont rassemblées dans le tableau 3. Nous avons considéré les trois jeux de paramètres définis dans le tableau 1. Puisque « RK » et « P1 » utilisent la symétrie isospin, les masses des quarks légers u et d sont identiques pour chacun de ces deux jeux de paramètres. Ces masses $m_{u,d}$ trouvées avec RK sont proches de $m_{nucleon}/3$, alors que celles obtenues avec P1 avec EB sont plus élevées. Cependant, ces dernières sont comparables aux masses trouvées dans des références comme [58–60], que nous utiliserons dans le chapitre alloué aux diquarks. De plus, elles restent conformes au domaine de validité des masses effectives établi dans [22]. Les autres résultats exposés dans ce chapitre ont été établis avec le jeu de paramètres P1.

	RK	P1	EB
quark u	367.65	424.23	419.10
quark d	367.65	424.23	422.31
quark s	549.48	626.49	588.17

Tableau 3. Masses effectives des quarks à température et densité nulles.

Les masses des quarks à températures et densités finies sont représentées dans la partie gauche de la figure 3. Nos résultats proposent alors une comparaison entre les modèles NJL et PNJL. Lesdits résultats sont en accord avec ceux publiés par exemple dans [57] (modèle NJL pur), et [42] qui propose aussi une comparaison entre les approches NJL et PNJL. Pour les deux modèles, nous observons que les masses décroissent quand la température augmente. A hautes températures, les masses des quarks légers tendent vers les valeurs de masses nues, voir tableau 1. A l'opposé, les masses des quarks étranges diminuent, mais restent assez hautes, même pour $T = 400$ MeV .

A cette occasion, il devrait être rappelé que le modèle PNJL présente une limitation en fonction de la température, qui correspond à $T \approx 2.5T_0$ [33, 40, 42]. Plus précisément, comme expliqué dans [33], les effets de la boucle de Polyakov sont optimaux au niveau de la « transition de phase de déconfinement », quand $T \approx T_0$. Mais pour de hautes températures, c'est-à-dire $T > 2.5T_0$, ces effets tendent vers une saturation, visible dans [33] et dans la partie droite de la figure 2 ; dans le même temps, la contribution de la masse effective des gluons sur la thermodynamique devient importante. Ladite contribution n'est pas prise en compte dans les modèles (P)NJL. En fait, il est vrai qu'une limitation selon la température peut aussi être prédictive dans un modèle NJL pur. Clairement, NJL est un modèle de basse énergie, dans le sens où il considère des gluons « gelés », voir 2.2. A hautes températures, cette approximation devient invalide pour la même raison : les degrés de liberté des gluons ne peuvent pas être négligés dans ce régime. Ainsi, dans (7), la simplification $k^2 \ll \Sigma^2$ devient questionable, tout comme le fait que la masse effective des gluons, notée Σ , est considérée comme une constante dans cette équation, alors que [33] a montré que $\Sigma(T) \propto T$ à hautes températures. Une limitation physique des modèles (P)NJL selon la densité est discutée plus loin dans ce paragraphe 5.1.

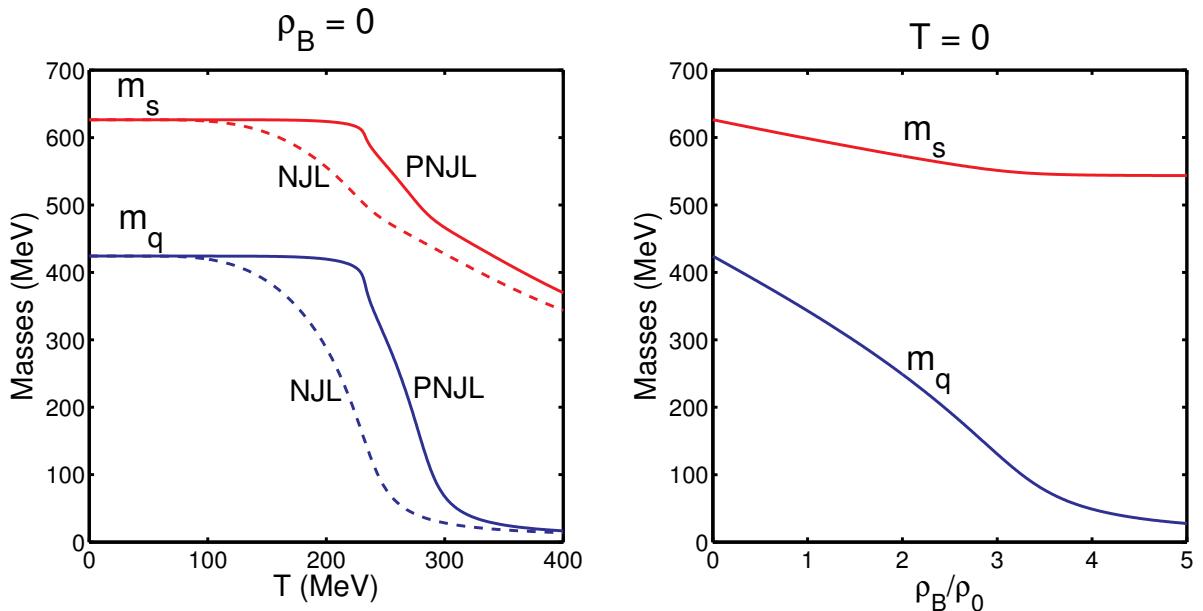


Figure 3. Evolution de la masse des quarks.

A température nulle, comme dans [42] par exemple, les modèles NJL et PNJL donnent exactement les mêmes masses. Ce comportement sera vérifié lors des chapitres suivants avec les mésons, diquarks et baryons. Donc, des résultats comme ceux exposés dans le tableau 3, c'est-à-dire calculés à température et densité nulles, seront valides pour les deux modèles. Une explication de ce comportement vient du fait qu'à densité nulle, $\Phi = \bar{\Phi} \rightarrow 0$, comme confirmé par la figure 7 et [42]. Comme indiqué précédemment, cette valeur correspond à une « phase confinée ». En utilisant ce résultat dans les distributions de Fermi-Dirac modifiées (52), nous obtenons :

$$f_\Phi^+ (\beta(E_f - \mu_f)) \xrightarrow{\Phi = \bar{\Phi} \rightarrow 0} \frac{\exp(-3\beta(E_f - \mu_f))}{1 + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))} = \frac{1}{\exp(3\beta(E_f - \mu_f)) + 1}. \quad (58)$$

Un résultat similaire est trouvé pour $f_{\Phi}^-(\beta \cdot (E_f + \mu_f))$. Mis à part le facteur 3 observé au sein de la fonction exponentielle dans (58), nous retrouvons les distributions de Fermi-Dirac classiques, utilisés dans le cadre d'un pur modèle NJL. Puisque nous sommes là à basses températures, ce facteur 3 est sans conséquence dans notre raisonnement. Ainsi, puisque dans cette configuration les équations NJL et PNJL sont identiques, les deux approches nous donnent bien le même résultat.

De plus, les résultats NJL et PNJL tendent à être les mêmes à hautes températures, c'est-à-dire $T \approx 400$ MeV pour les quarks légers. Les explications de cela sont proches de ce que nous venons de voir. À hautes températures, $\Phi = \bar{\Phi} \rightarrow 1$ [40, 42] (« phase déconfinée »), de telle manière que nous écrivons alors que :

$$\begin{aligned} & f_{\Phi}^+(\beta(E_f - \mu_f)) \\ & \xrightarrow{\Phi=\bar{\Phi}\rightarrow 1} \frac{(1+2\exp(-\beta(E_f - \mu_f)))\exp(-\beta(E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))}{1+3(1+\exp(-\beta(E_f - \mu_f)))\exp(-\beta(E_f - \mu_f)) + \exp(-3\beta(E_f - \mu_f))}, \\ & = \frac{\exp(-3\beta(E_f - \mu_f))(1+\exp(\beta(E_f - \mu_f)))^2}{\exp(-3\beta(E_f - \mu_f))(1+\exp(\beta(E_f - \mu_f)))^3} = \frac{1}{\exp(\beta(E_f - \mu_f))+1} \end{aligned} \quad (59)$$

c'est à dire aussi la distribution classique de Fermi-Dirac. Donc, à basses et hautes températures, les modèles NJL et PNJL donnent des résultats comparables. À l'opposé, à températures modérées, c'est à dire pour $T \approx 200 - 300$ MeV, des différences sont observées. Clairement, les résultats PNJL sont décalés vers des hautes températures par rapport aux résultats NJL. De plus, comme évoqué dans notre introduction, la décroissance des masses des quarks PNJL est plus brutale comparé au comportement des quarks NJL. Pour les résultats PNJL, nous avons une zone jusqu'à $T \approx 250$ MeV pour laquelle les masses sont quasi-constantes.

La partie droite de la figure 3 nous permet de voir l'évolution des masses de quarks en fonction de la densité baryonique, à température nulle. Il peut être observé que les deux modèles donnent exactement les mêmes résultats, quelle que soit la densité baryonique. Les explications liées à (58) restent valides ici. Pour les deux modèles, les masses décroissent quand la densité baryonique augmente. Le quark étrange est moins affecté par une variation de la densité baryonique que les quarks légers. En effet, la dépendance des quarks s en fonction de la densité baryonique, via les potentiels chimiques μ_u, μ_d , apparaît seulement

dans le terme de (16) associé au facteur $\frac{K \cdot N_c^2}{8\pi^4}$, mais pas dans le terme lié à $\frac{G \cdot N_c}{\pi^2}$. Une telle analyse des masses des quarks en fonction de la densité baryonique peut être trouvée par exemple dans [48], même si les résultats trouvés dans cette référence avec leur jeu de paramètres « P3 » ($m_{0u} = m_{0d} = 0$, donc à la limite chirale) sont incorrects : il est en effet possible d'obtenir des masses de quarks pour $0 < \rho_B < 2.5\rho_0$, alors qu'il y est indiqué le contraire.

Après, nous avons étendu les calculs au plan T, ρ_B . Cela nous a donné les résultats exposés dans les figures 4 et 5. La figure 4 montre l'évolution des masses des quarks légers, et la

figure 5 concerne la masse du quark étrange. La partie gauche de la figure 4 est en accord avec la figure équivalente publiée dans [19]. En effet, l'aspect de ces deux graphes est rigoureusement identique, même si les valeurs ne sont pas les mêmes, parce que nous n'avons pas pris le même jeu de paramètres que dans cette publication. Nous pouvons faire la même remarque avec la partie gauche de la figure 5 et [61]. Par ailleurs, ces figures permettent de continuer la comparaison entre les résultats NJL et PNJL. Clairement, le comportement observé dans la figure 3 est confirmé, c'est-à-dire que les résultats NJL et PNJL coïncident à basses et à hautes températures. Aussi, à températures modérées, l'inclusion de la boucle de Polyakov engendre un décalage des graphes vers les hautes températures. Clairement, par rapport aux résultats NJL, les valeurs des masses ne sont pas modifiées par l'inclusion de la boucle de Polyakov, mais elles sont simplement décalées. De plus, ladite boucle de Polyakov n'a pas effet visible selon la densité, car le décalage n'est observé que selon l'axe des températures.

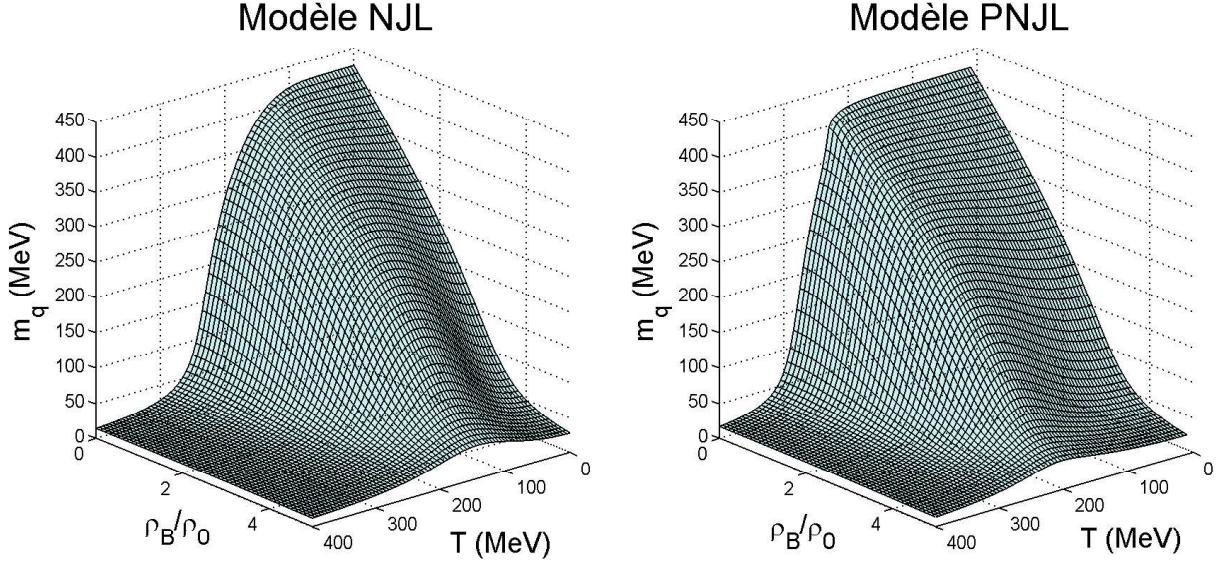


Figure 4. Masse des quarks q en fonction de la température T et de la densité baryonique ρ_B .

En fait, nous devons être prudents en ce qui concerne les résultats effectués à densités finies. En effet, comme vu au chapitre 1, quelques zones, pour lesquelles la température est réduite et la densité baryonique est assez forte, sont susceptibles de subir le phénomène de supraconductivité de couleur [62–70]. Le traitement correct de ce phénomène requiert l'utilisation d'un formalisme adapté, comme celui de Nambu-Gorkov, comme indiqué dans les références citées. Cependant, la frontière entre les phases hadroniques, QGP, et de supraconductivité de couleur n'est pas connue avec précision. Dans [67], il est supposé que la supraconductivité de couleur pourrait intervenir à des densités baryoniques $\rho_B \approx 10\rho_0$, c'est à dire largement au delà des densités abordées dans notre travail ($0 \leq \rho_B \leq 5\rho_0$). Mais, d'autres papiers suggèrent que les phases concernées par la supraconductivité de couleur pourraient exister bien avant. En effet, ils mentionnent des valeurs de potentiels chimiques baryoniques assez réduites, voir [65] par exemple. Toutefois, il semble admis que l'influence de la supraconductivité de couleur puisse être négligée dans les conditions dans lesquelles nous allons travailler. Cela concerne les masses des particules, mais aussi les sections-efficaces des réactions associées. Par ailleurs, un consensus semble considérer que la supraconductivité de couleur ne peut pas intervenir pour des températures supérieures à 100 MeV [65, 67, 69], même si on s'attend que la boucle de Polyakov décale cette température vers des plus hautes

valeurs. Mais, clairement, des températures plus hautes que 150 MeV, c'est-à-dire typiquement au-delà de 200 MeV, semblent être non affectées par la supraconductivité de couleur. Une motivation de notre travail est d'étudier le refroidissement d'un système de quarks/antiquarks et son hadronisation en hadrons. En conséquence, nous pouvons être sûrs que les zones T, ρ_B intéressantes dans lesquelles nous allons travailler, tout particulièrement dans les simulations du chapitre 7, sont clairement non concernées par la supraconductivité de couleur.

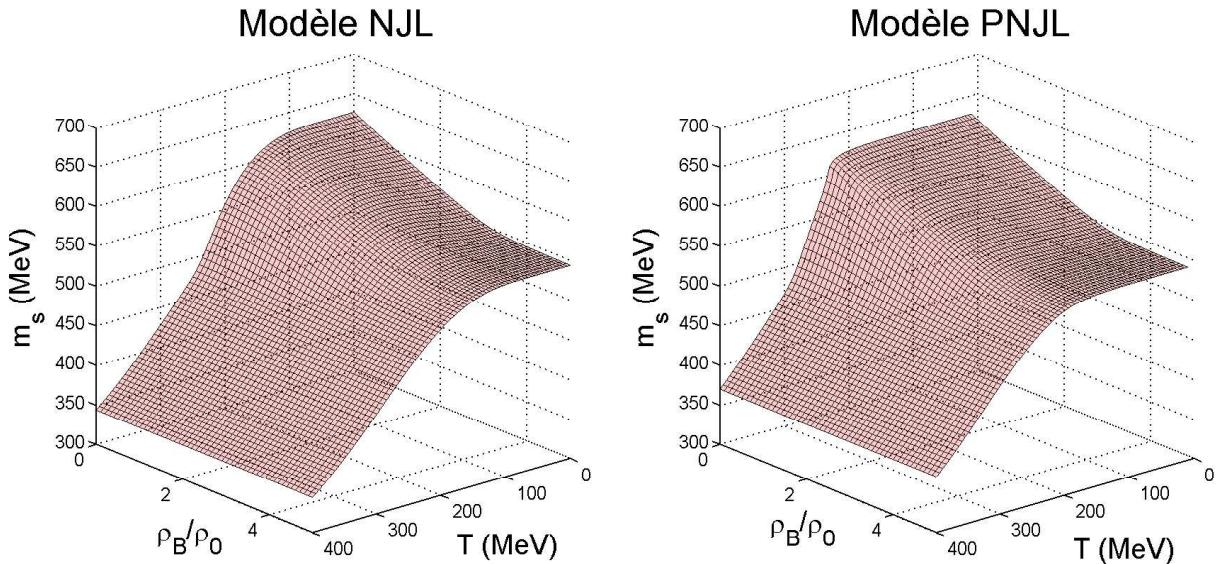


Figure 5. Masse des quarks s en fonction de T et ρ_B .

5.2 Etude des paramètres d'ordre du modèle (P)NJL

Nous avons vu que les équations de gap utilisées correspondent au couplage des masses nues des quarks aux condensats chiraux associés. De plus, avec le modèle PNJL, les quarks sont couplés à la boucle de Polyakov Φ . Le condensat chiral est un paramètre d'ordre lié à la symétrie chirale, alors que Φ est un paramètre d'ordre lié à la transition entre les phases « confinée » / « déconfinée » (rigoureusement dans des calculs en pure jauge). Nous avons représenté l'évolution de ces quantités selon la température, à densité nulle, dans la partie gauche de la figure 6. Immédiatement, on peut les comparer à ceux exhibés dans [35, 37]. Qualitativement, les résultats sont très similaires.

Nous avons tracé l'évolution du condensat chiral $\langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle$ des quarks légers, normalisé par sa valeur $\langle\langle\bar{\psi}_q\psi_q\rangle\rangle_0$ à température et densité nulle, dans les modèles (P)NJL. Pour les deux, nous observons une décroissance quand la température augmente. Cela va dans le sens de la restauration de la symétrie chirale attendue à hautes températures, évoquée dans le chapitre 1. Selon la théorie de Landau sur les transitions de phase, cette restauration est réalisée via un crossover. En effet, la valeur du condensat de quarks ne tend vers zéro qu'à hautes températures. Un tel résultat est explicable par le fait que nous ayons utilisé le jeu de

paramètres P1, dans lequel les masses nues des quarks légers sont non nulles. A la limite chirale, il est possible de voir une transition de phase du second ordre [18, 22] : la valeur du condensat chute continument vers zéro, quand $T = T_c$. Dans [18], $T_c = 150$ MeV, et $T_c = 220$ MeV dans [22].

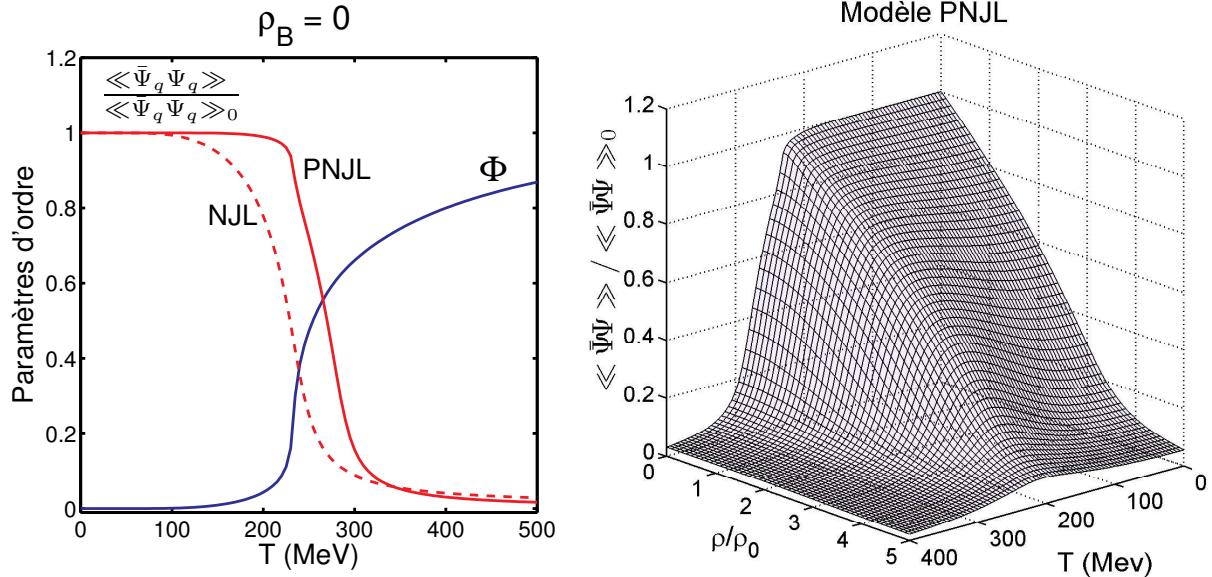


Figure 6. Partie gauche : évolution des paramètres d’ordre en fonction de la température.

Partie droite : condensat chiral normalisé dans le plan $T - \rho_B$, dans le modèle PNJL.

Si nous comparons l’évolution des condensats des modèles NJL et PNJL, deux différences sont notables. Premièrement, nous pouvons étudier la pseudo température critique², notée T_c , pour laquelle nous supposons que la pente de la courbe est maximale, c'est-à-dire que nous suivons la méthode de [37]. En fait, T_c est plus forte dans le modèle PNJL que pour NJL, respectivement 270 MeV contre 230 MeV. Ce résultat confirme celui trouvé dans la littérature [35, 37]. Toutefois, la courbe PNJL du condensat chiral est moins régulière avec le potentiel (33) qu’avec celui de (31) [71]. Donc, notre méthode utilisée pour estimer T_c devrait être améliorée... Deuxièmement, autour de T_c , la décroissance est plus forte avec le modèle PNJL. Cela va dans le sens des résultats de LQCD [39], voir chapitre 1. Cela explique la remarque faite dans [42], reproduite dans l’introduction de ce chapitre, qui indique que la description de la restauration de la symétrie chirale est plus efficace dans le modèle PNJL qu’avec NJL. Dans la partie droite de la figure 6, nous avons étendu l’étude du condensat des quarks légers dans le plan T, ρ_B , pour le modèle PNJL. Comme précédemment, les valeurs sont normalisées par $\langle\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle\rangle_0$. Evidemment, on remarque la forte ressemblance entre ce graphe et celui montrant la masse des quarks légers (partie droite de la figure 4). En conclusion, dans l’équation de gap (21) des quarks légers, le terme G associé au couplage au condensat de quarks légers est dominant. D’autre part, en utilisant (20), nous avons obtenu $\langle\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle\rangle \approx -(283 \text{ MeV})^3$. Cette valeur est comparable, mais supérieure, à la valeur

² La notion de température critique, définie notamment pour les transitions de phase du 1^{er} et du 2^{ème} ordre, est fréquemment étendue à des transitions de type crossover. Dans ce cas, le terme usité est *pseudo température critique* [35].

« empirique » $-(250 \text{ MeV})^3$ admise fréquemment dans la littérature [20, 22]. Toutefois, ce résultat reste cohérent avec la relation GMOR évoquée au chapitre 1. De plus, la valeur trouvée est plutôt proche du $-(287 \text{ MeV})^3$ utilisée dans [18] ou du $-(283 \text{ MeV})^3$ de [72].

Nous proposons maintenant d'étudier l'évolution de Φ . Dans la partie droite de la figure 2, nous avions observé une transition de phase du premier ordre quand nous prenions en compte uniquement le potentiel effectif, c'est-à-dire sans quark. Dans la partie gauche de la figure 6, la contribution des quarks conduit à modifier cette transition de phase en crossover. Cela confirme les observations de [35]. Donc, comme expliqué dans [40], la symétrie \mathbb{Z}_3 est alors non exacte, mais les deux régimes « confiné » / « déconfiné » sont toujours visibles sur le graphe. En fait, dans la littérature, les champs de Polyakov Φ et $\bar{\Phi}$ ont été étudiés selon la température, et quelquefois pour divers potentiels chimiques [37]. Dans notre travail, nous proposons de compléter cette analyse via une étude dans le plan T, ρ_B . Dans la partie gauche de la figure 7, le champ de Polyakov Φ est étudié, alors que la partie droite de la figure concerne la différence entre Φ et $\bar{\Phi}$. A propos de Φ , nous notons que cette grandeur augmente quand la température croît. La courbe pour laquelle $\rho_B = 0$ est en accord avec celles publiées dans [42]. Le comportement observé vérifie ce que nous avons vu dans la partie 4. En effet, quelle que soit la densité baryonique, $\Phi \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$. A hautes températures, Φ semble converger vers une valeur finie. Nous savons que cette valeur est égale à 1, mais la convergence sur notre graphe n'est pas assez forte pour nous permettre de le voir, comme dans les références utilisant le potentiel effectif (33). Dans tous les cas, nous pouvons aussi vérifier que $0 \leq \Phi < 1$, comme mentionné dans [39].

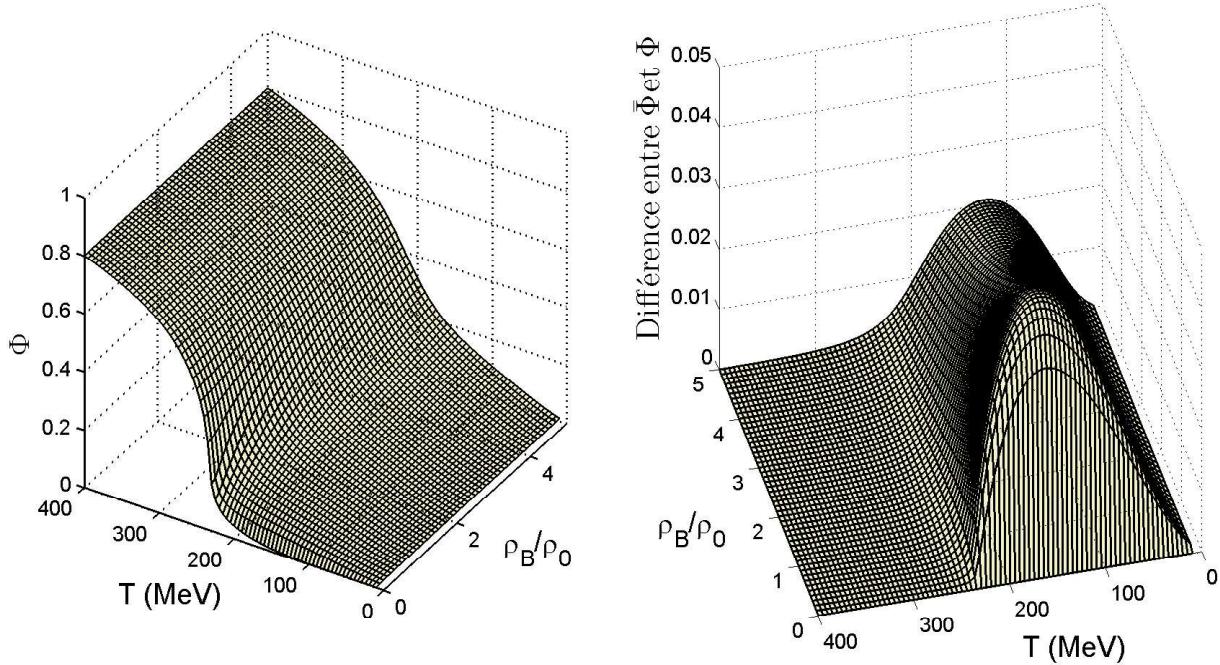


Figure 7. Champ de Polyakov Φ et $\bar{\Phi} - \Phi$ fonction de T et ρ_B .

Par ailleurs, la partie droite de la figure 7 confirme certaines observations trouvées dans la littérature. Tout d'abord, il a été reporté que $\Phi = \bar{\Phi}$ à température nulle, mais aussi à potentiel chimique nul [39]. En fait, comme confirmé par la figure 8, $\mu_B = 0 \Leftrightarrow \rho_B = 0$. Donc, dans la

partie droite de la figure 7, la différence entre Φ et $\bar{\Phi}$ est nulle quand $T=0$ ou $\rho_B=0$. Aussi, la convergence de Φ et $\bar{\Phi}$ à hautes températures (vers 1) induit aussi une diminution de la différence entre ces deux grandeurs. Nos résultats indiquent que ladite différence est négligeable quand $T > 300 \text{ MeV}$. La référence [39] mentionne que $\Phi \neq \bar{\Phi}$ à potentiels chimiques non nuls (et températures non nulles), donc à densités baryoniques non nulles sur notre graphe. D'autre part, il a été observé dans [37], qui utilise le potentiel effectif (31), que $\bar{\Phi} \geq \Phi$ pour des valeurs données de $\mu \neq 0$, quelle que soit la température. Dans la partie droite de la figure 7, nous confirmons cette affirmation pour toutes les valeurs du plan T, ρ_B étudiées dans ce graphe.

En fait, ces résultats sont en accord avec [4], qui donne une explication physique du comportement observé. Clairement, nous avons vu que $\Phi \propto \exp(-\Delta E/T)$, où ΔE est l'énergie requise pour ajouter un quark (statique) dans le milieu, alors que $\bar{\Phi} \propto \exp(-\Delta \bar{E}/T)$ est lié à l'énergie $\Delta \bar{E}$ pour rajouter un antiquark (statique). A densité nulle, les quarks et les antiquarks présentent un comportement identique, donc $\bar{\Phi} = \Phi$. Quand $\mu \neq 0$, ce raisonnement n'est plus valide, d'où $\Phi \neq \bar{\Phi}$. Plus précisément, quand $\mu > 0$ (densité positive), le milieu a un excès de quarks par rapport aux antiquarks. Cela veut dire que $\Delta E > \Delta \bar{E}$, ce qui se traduit par $\Phi < \bar{\Phi}$, comme observé. Evidemment, à densités négatives, nous avons vérifié que $\Phi > \bar{\Phi}$. D'autre part, à température nulle, nous avons vu que $\Phi = \bar{\Phi} \rightarrow 0$. Physiquement, cela correspond à la « phase confinée », donc ΔE et $\Delta \bar{E}$ tendent tous les deux vers l'infini. En d'autres termes, le « confinement » agit de la même manière pour les quarks et pour les antiquarks. Cela explique que $\Phi = \bar{\Phi}$ quand $T \rightarrow 0$. A l'opposé, de fortes températures ($T > 300 \text{ MeV}$) correspondent à la « phase déconfinée ». Même si les quarks et les antiquarks agissent différemment à densités finies, le « déconfinement » fait que ΔE et $\Delta \bar{E}$ tendent vers zéro. C'est pour cela que la différence entre Φ et $\bar{\Phi}$ s'annule à hautes températures.

Par ailleurs, nos résultats nous amènent à remarquer que la différence entre Φ et $\bar{\Phi}$ reste toujours assez modeste, de telle manière que nous pouvons considérer que $\Phi \approx \bar{\Phi}$, au moins dans la partie du plan T, ρ_B explorée dans notre travail.

5.3 Le potentiel chimique

Pour conclure ce chapitre, nous proposons maintenant d'étudier la relation entre la densité baryonique ρ_B (26) et le potentiel chimique des quarks légers μ_q . Dans le cadre de la symétrie isospin, la densité baryonique est liée à μ_q par la relation $\mu_B = 3\mu_q$. Par rapport à certains aspects numériques, nous rappelons que la densité est un paramètre (choisi), alors que le potentiel chimique (un inconnu) est trouvé durant la résolution numérique du système d'équations (24). Aussi, en prenant en compte la remarque effectuée au paragraphe 3.3, mentionnons que nous avons représenté ici ce potentiel chimique, c'est-à-dire le potentiel chimique « effectif ». Quoi qu'il en soit, nous avons observé que le décalage $\delta\mu_f$ est inférieur à 15 MeV quand $\mu_{0f} = 500 \text{ MeV}$ et $T \rightarrow 0$. Cela confirme l'influence modeste de ce décalage, mentionnée plus haut dans ce chapitre.

Les résultats de ce travail sont exposés dans la figure 8, pour les modèles NJL et PNJL. Immédiatement, nous notons que les modèles donnent qualitativement des résultats similaires. La seule différence vient du décalage du graphe PNJL selon l'axe des températures, par rapport aux résultats NJL. Un tel comportement correspond à ce que nous avons observé précédemment avec les masses des quarks. Mais, pour les deux modèles, la structure trouvée doit être commentée. Tout d'abord, nous nous focalisons sur la région des graphes pour lesquels la température et la densité baryonique sont proches de zéro. Une discontinuité y est présente. Même si cette particularité est assez spectaculaire, elle peut être expliquée. Grâce aux équations (23, 26), il est facile de vérifier que $\rho_B = 0$ conduit à la solution triviale $\mu_q = 0$, quelle que soit la température. En revanche, à température réduite et quand $\rho_B \rightarrow 0^+$, nous observons sur les graphes que :

$$\lim_{\substack{\rho_B \rightarrow 0 \\ \rho_B > 0}} \mu_q(T \approx 0, \rho_B) = m_q > 0, \quad (60)$$

ce qui constitue la discontinuité observée. L'équation (60) est explicable avec (23). Pour notre raisonnement, nous considérons la version NJL de cette équation, c'est-à-dire que nous utilisons les distributions de Fermi-Dirac « classiques » (37). A température nulle, ces distributions prennent la forme de fonctions de Heaviside, c'est-à-dire des fonctions « marche d'escalier », de telle manière que le terme à intégrer dans (23, 24) :

$$\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_f - \mu_f}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_f + \mu_f}{T}\right)}, \quad (61)$$

ressemble à une « fonction rectangulaire » selon la variable $E_f = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2}$. En conséquence, quand $E_f > \mu_f$, (61) est égal à zéro. Si le potentiel chimique décroît et tend vers m_f , la zone où (61) est nulle augmente et occupe finalement tout le domaine d'intégration de l'intégrale (23). A la limite $\mu_f \rightarrow m_f$, l'intégrale, c'est-à-dire la densité calculée, converge vers 0^+ . Avec le modèle PNJL, ces explications sont toujours valables, notamment parce que nous avons vu équation (58) que les distributions de Fermi-Dirac modifiées ressemblent aux classiques à températures réduites.

Les résultats présentent une autre particularité. Focalisons-nous maintenant sur la zone localisée à basses températures, le long de l'axe où la température est nulle. Pour le moment, considérons seulement des densités positives. Dans l'approche PNJL, pendant la résolution de (24), une température et une densité baryonique données correspondent, pour un quark effectif léger, à une masse et à un potentiel chimique μ_q . Cependant, la figure 8 indique que la réciproque n'est pas vraie par rapport à μ_q , dans la zone évoquée. En fait, si $T \approx 0$ et $\rho_B > 0$, la fonction $\mu_q(\rho_B)$ décroît lentement, et ensuite croît quand ρ_B augmente. En conséquence, $\mu_q(\rho_B)$ n'est pas ici une bijection : un potentiel chimique correspond dans cette zone à deux densités baryoniques distinctes. Par ailleurs, à températures réduites, le potentiel chimique dépend de la densité baryonique, mais aussi de la température. Ainsi, dans le cadre d'études (P)NJL effectuées à potentiels chimiques finis, ce résultat nous montre que certaines précautions sont nécessaires.

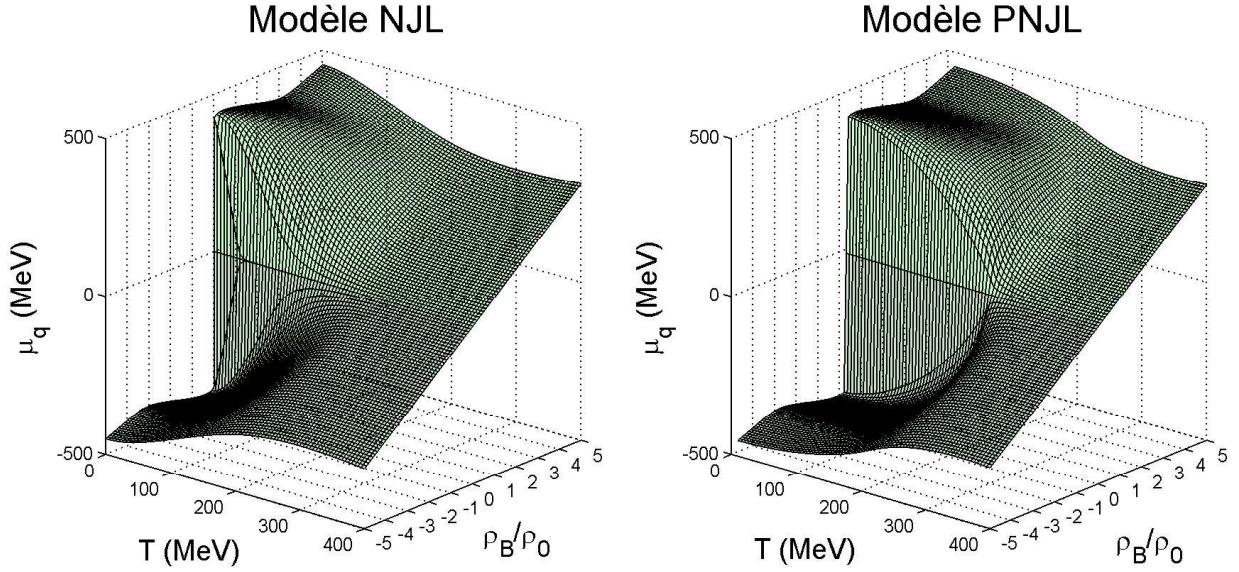


Figure 8. Potentiel chimique μ_q fonction de la température et de la densité baryonique.

En revanche, avec le modèle NJL, ce comportement disparaît pour une température au-delà de 200 MeV. A cet endroit, la relation entre la densité baryonique et le potentiel chimique tend de plus en plus vers un comportement linéaire. Grâce à la figure 8, nous trouvons la relation approchée :

$$\mu_q \equiv \mu_u = \mu_d = (62.2 \text{ MeV}) \cdot \frac{\rho_B}{\rho_0}. \quad (62)$$

Cette relation n'est bien sûr valide qu'avec le jeu de paramètres utilisé (P1), qui respecte d'ailleurs la symétrie isospin. La relation est aussi utilisable avec le modèle PNJL, mais au-delà de 300 MeV, à cause du décalage du graphe PNJL vers les hautes températures, conduisant à un élargissement des structures décrites plus haut.

Dans la figure 8, les graphes ont été étendus à des densités négatives. Nous observons que l'axe $\rho_B = 0, \mu_q = 0$ correspond à un axe de symétrie pour les deux graphes. De la même manière, la discontinuité existe aussi à températures réduites et $\rho_B < 0$:

$$\lim_{\substack{\rho_B \rightarrow 0 \\ \rho_B < 0}} \mu_q(T=0, \rho_B) = -m_q < 0. \quad (63)$$

En utilisant la définition thermodynamique du potentiel chimique, c'est-à-dire l'énergie requise pour rajouter une particule dans le système, un lien entre les densités négatives et l'antimatière peut être établi. En effet, des densités négatives signifient physiquement que l'antimatière domine la matière. En d'autres termes, il a été étudié là le comportement de quarks plongés dans l'antimatière. En fait, il pourrait être montré que des valeurs de potentiel chimique négatives n'affectent pas les masses effectives des quarks. L'équation (16) indique que les masses sont calculées en utilisant les potentiels chimiques uniquement en tant qu'arguments de la fonction générique A . Il a été vu dans l'annexe D, équation (13), que cette fonction utilise seulement la *valeur absolue* du potentiel chimique. En conclusion, par exemple avec les figures 4 et 5, nous pourrions étendre nos graphes à des densités négatives,

en considérant le plan $\rho_B = 0$ comme plan de symétrie, pour les deux figures. La symétrie entre la matière et l'antimatière sera encore utilisée à diverses occasions lors de la modélisation des particules composites.

En fait, dans la littérature, les calculs à μ finis sont plus fréquents que ceux à densités finies. En conséquence, il est intéressant de voir si nous pouvons retrouver les résultats de la littérature à partir de notre approche. Ainsi, dans la partie gauche de la figure 9, nous avons tracé l'évolution du condensat chiral et de la boucle de Polyakov pour plusieurs potentiels chimiques, dans le modèle PNJL. Ces données obtenues sont très similaires à celles visibles notamment dans [35, 37]. Pour établir le lien entre ces graphes et ceux effectués à densités finies, nous avons portés les trois potentiels chimiques μ_q dans le graphe établi dans la figure 8. Nous avons obtenu la partie droite de la figure 9. Plus précisément, pour chacun des trois μ_q , la courbe associée donne la correspondance entre la densité baryonique et le potentiel chimique, pour chaque température. Si cette relation est triviale à potentiel chimique nul, cela n'est pas le cas pour les « trajectoires » obtenues avec les trois μ_q étudiés. Ensuite, nous avons utilisé ces correspondances dans la partie droite de la figure 6 (condensat chiral) et dans la partie gauche de la figure 7 (champ de Polyakov). Cela nous donne la figure 10. Tout d'abord, pour $\mu_q = 300$ MeV, et par extension pour les potentiels chimiques faibles, la trajectoire trouvée est lisse, comme les variations de « $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$ » et Φ . Au contraire, pour $\mu_q = 380$ MeV, la trajectoire est différente. Plus précisément, une portion de la courbe évolue à température constante, proche de 150 MeV. Cela veut dire qu'à cette température, plusieurs densités correspondent au même potentiel chimique. Avec la figure 10, nous montrons que cela implique que les paramètres d'ordre présentent des discontinuités pour cette température, comme observable sur la partie gauche de la figure 9. Nous pourrions faire des observations similaires pour $\mu_q = 420$ MeV, où les discontinuités sont plus marquées, et se trouvent à une température voisine de 40 MeV.

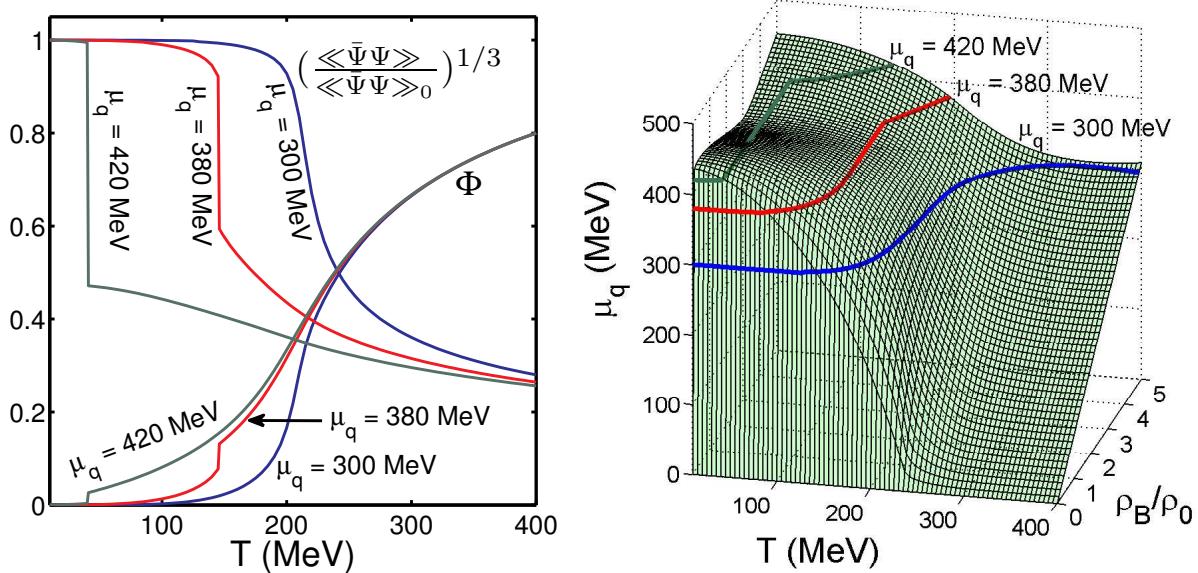


Figure 9. Etude des paramètres d'ordre pour plusieurs potentiels chimiques, et « trajectoires » associées dans le plan $T - \rho_B$.

Physiquement, ces discontinuités selon le condensat chiral peuvent être interprétées comme des transitions de phase du premier ordre [35, 37], en négligeant le fait que les courbes ne chutent pas à zéro après la discontinuité. Une extension possible de ce travail pourrait concerner l'étude du point critique (du second ordre) entre le crossover et la transition de premier ordre. Des calculs effectués à hauts potentiels chimique semblent aussi être prometteurs. Toutefois, comme indiqué précédemment, ce type de calculs requiert de prendre en compte la supraconductivité de couleur, et une adaptation du formalisme utilisé.

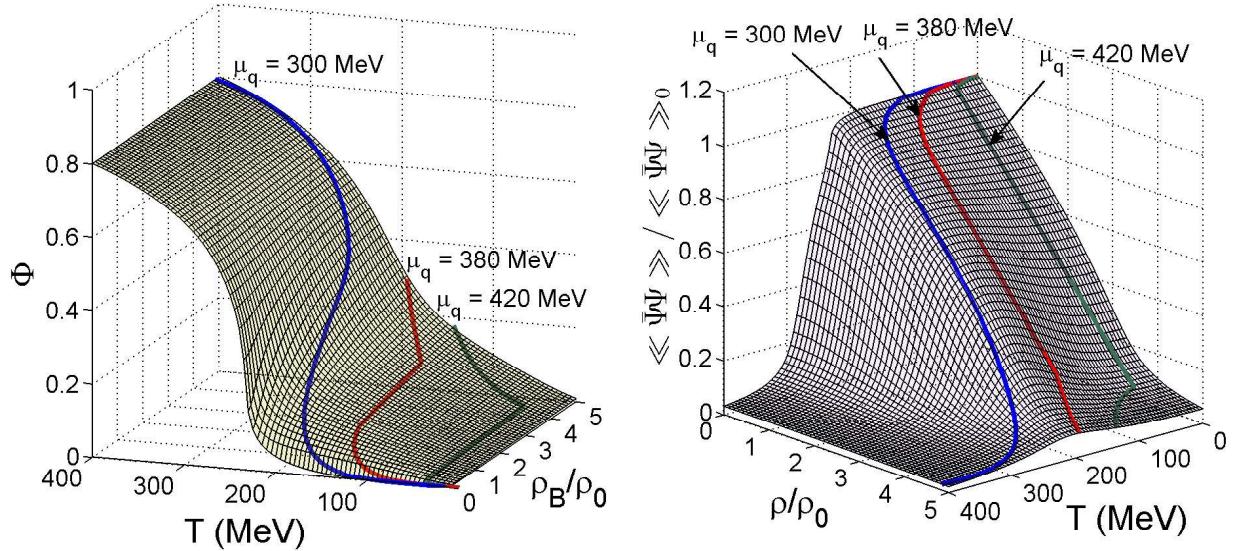


Figure 10. Evolution des paramètres d'ordre dans le plan $T - \rho_B$, avec trois potentiels chimiques donnés.

Dans le cadre de cette thèse, nous continuerons à utiliser la température et la densité comme paramètre d'étude. En effet, d'un point de vue numérique, les discontinuités observées conduisent à des instabilités numériques, indésirables dans le cadre d'une étude dynamique. Au contraire, le crossover rencontré avec les densités ne présente pas cette difficulté.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une alternative intéressante à la QCD : le modèle NJL. Par l'utilisation de gluons dont la dynamique a été « gelée », ce modèle est utilisable pour étudier la physique des quarks. Il a été étudié la possibilité d'estimer les masses de quarks effectifs, par des équations de gap, et l'évolution de ces masses en fonction de la température et de la densité baryonique. Un autre aspect intéressant du modèle NJL est qu'il montre la restauration de la symétrie chirale, comme QCD, à hautes températures et/ou densités. Mais, à cause de l'absence de confinement, il a été montré que le modèle NJL peut être complété, dans le cadre du modèle de Polyakov Nambu Jona-Lasinio. Dans ce modèle, les quarks sont minimalement couplés à une boucle de Polyakov, dont le rôle est de simuler un mécanisme de confinement. La boucle de Polyakov provient des calculs LQCD en pure jauge, dans lesquels elle est utilisée comme paramètre d'ordre, pour décrire la transition de phase entre les phases « confinée » et « déconfinée ».

Via nos résultats numériques, nous avons montré que l'inclusion d'une boucle de Polyakov conduit à un décalage des masses des quarks, du condensat chiral de quarks légers, et des potentiels chimiques vers de plus hautes températures. Nous avons réussi à retrouver les résultats de la littérature, et les avons effectué dans le plan T, ρ_B . De tels calculs ont aussi inclus une étude du potentiel chimique des quarks légers dans ce plan.

7. Références

- [1] Muroya S, Nakamura A, Nonaka C et Takaishi T 2003 Lattice QCD at Finite Density - An introductory review *Prog. Theor. Phys.* **110** 615–68
- [2] Reinhardt H et Heffner J 2013 Hamiltonian Approach to QCD: The effective potential of the Polyakov loop arXiv:1301.2510
- [3] Sakai Y, Sasaki T, Kouno H et Yahiro M 2010 Comparison between LQCD and PNJL model at finite chemical potentials *PoS Lattice 2010* **213**, arXiv:hep-ph/1010.5865
- [4] Dumitru A, Pisarski R D et Zschiesche D 2005 Dense quarks, and the fermion sign problem, in a SU(N) matrix model *Phys. Rev. D* **72** 065008
- [5] Philipsen O 2008 Lattice calculations at non-zero chemical potential: The QCD phase diagram *PoS CONFINEMENT* **8** 011
- [6] Nambu Y et Jona-Lasinio G 1961 Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity: I *Phys. Rev.* **122** 345–58
- [7] Nambu Y et Jona-Lasinio G 1961 Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity: II *Phys. Rev.* **124** 246–54
- [8] Matsubara T 1955 A new approach to quantum statistical mechanics *Prog. Theor. Phys.* **14** 351–78
- [9] Bernard V 1986 Remarks on dynamical breaking of chiral symmetry and pion properties in the Nambu and Jona-Lasinio model *Phys. Rev. D* **34** 1601–5
- [10] Volkov M K et Radzhabov A E 2005 Forty-fifth anniversary of the Nambu–Jona-Lasinio model arXiv:hep-ph/0508263
- [11] Hatsuda T et Kunihiro T 1988 Effects of flavour mixing induced by axial anomaly on the quark condensates and meson spectra *Phys. Lett. B* **206** 385–90
- [12] Hatsuda T et Kunihiro T 1994 QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian *Phys. Rep.* **247** 221–367
- [13] Bernard V, Meissner U G et Zahed I 1987 Decoupling of the pion at finite temperature and density *Phys. Rev. D* **36** 819–23
- [14] Bernard V, Meissner U G et Zahed I 1987 Properties of the scalar σ meson at finite density *Phys. Rev. Lett.* **59** 966–9
- [15] Bernard V et Meissner U G 1988 Properties of vector and axial-vector mesons from a generalized Nambu–Jona-Lasinio model *Nucl. Phys. A* **489** 647–70
- [16] Bernard V, Jaffe R L et Meissner U G 1988 Strangeness mixing and quenching in the Nambu–Jona-Lasinio model *Nucl. Phys. B* **308** 753–90

- [17] Klimt S, Lutz M, Vogl U et Weise W 1990 Generalized SU(3) Nambu Jona-Lasinio model. (I) Mesonic modes *Nucl. Phys. A* **516** (1990) 429–68
Generalized SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model. (II) From current to constituent quarks *Nucl. Phys. A* **516** 469–95
- [18] Lutz M, Klimt S et Weise W 1992 Meson properties at finite temperature and baryon density *Nucl. Phys. A* **542** 521–58
- [19] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [20] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [21] Bijnens J 1996 Chiral Lagrangians and Nambu–Jona-Lasinio like models *Phys. Rep.* **265** 369–446
- [22] Buballa M 2005 NJL-model analysis of dense quark matter *Phys. Rep.* **407** 205–376
- [23] Osipov A A, Hiller B et da Providencia J 2006 Multi-quark interactions with a globally stable vacuum *Phys. Lett. B* **634** 48–54
- [24] Osipov A A, Hiller B, Moreira J, Blin A H et da Providencia J 2007 Lowering the critical temperature with eight-quark interactions *Phys. Lett. B* **646** 91–94
- [25] Kashiwa K, Kouno H, Sakaguchi T, Matsuzaki M et Yahiro M 2007 Chiral phase transition in an extended NJL model with higher-order multi-quark interactions *Phys. Lett. B* **647** 446–51
- [26] Hiller B, Moreira J, Osipov A A et Blin A H 2010 Phase diagram for the Nambu–Jona-Lasinio model with ‘t Hooft and eight-quark interactions *Phys. Rev. D* **81** 116005
- [27] Bhattacharyya A, Deb P, Ghosh S K et Ray R 2010 Investigation of the phase diagram and bulk thermodynamic properties using the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model with eight-quark interactions *Phys. Rev. D* **82** 014021
- [28] Gatto R et Ruggieri M 2010 Dressed Polyakov loop and phase diagram of hot quark matter in a magnetic field *Phys. Rev. D* **82** 054027
- [29] Sakai Y, Sasaki T, Kouno H et Yahiro M 2010 Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration *Phys. Rev. D* **82** 076003
- [30] Gatto R et Ruggieri M 2011 Deconfinement and chiral symmetry restoration in a strong magnetic background *Phys. Rev. D* **83** 034016
- [31] Polyakov A M 1978 Thermal properties of gauge fields and quark liberation *Phys. Lett. B* **72** 477–80
- [32] Meisinger P N et Ogilvie M C 1996 Chiral Symmetry Restoration and Z_N Symmetry *Phys. Lett. B* **379** 163–8
- [33] Meisinger P N, Ogilvie M C et Miller T R 2004 Gluon quasiparticles and the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **585** 149–54
- [34] Hatta Y et Fukushima K 2003 On the nature of thermal QCD phase transitions arXiv:hep-ph/0311267
- [35] Fukushima K 2004 Chiral effective model with the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **591** 277–84
- [36] Fukushima K 2010 Effective Model Approach to the Dense State of QCD Matter arXiv:hep-ph/1008.4322

- [37] Ratti C, Thaler M A et Weise W 2006 Phases of QCD: lattice thermodynamics and a field theoretical model *Phys. Rev. D* **73** 014019
- [38] Ratti C, Thaler M A et Weise W 2006 Phase diagram and thermodynamics of the PNJL model arXiv:nucl-th/0604025
- [39] Roessner S, Ratti C et Weise W 2007 Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram *Phys. Rev. D* **75** 034007
- [40] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
- [41] Ratti C, Roessner S, Thaler M A et Weise W 2007 Thermodynamics of the PNJL model *Eur. Phys. J. C* **49** 213–7
- [42] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003
- [43] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A et Hansen H 2010 Phase diagram and critical properties within an effective model of QCD: the Nambu–Jona-Lasinio model coupled to the Polyakov loop *Symmetry* **2** 1338–74
- [44] Mukherjee S, Mustafa M G et Ray R 2007 Thermodynamics of the PNJL model with nonzero baryon and isospin chemical potentials *Phys. Rev. D* **75** 094015
- [45] Ruivo M C, Costa P et de Sousa C A 2012 Effects of entanglement and instanton suppression at finite T in a SU(2) EPNJL model with anomaly arXiv:1211.2272
- [46] Borodulin V I, Rogalyov R N et Slabospitsky S R 1995 CORE (COmpendium of RElations), version 2.1. arXiv:hep-ph/9507456
- [47] Close P E 1979 An introduction to Quarks and Partons, *Academic Press*
- [48] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu–Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [49] Ebert D 1997 Bosonization in Particle Physics (*Lecture Notes in Physics*, vol 508) (Heidelberg: Springer) pp 103–14
- [50] Gastineau F et Aichelin J 2002 Strange baryons in a hot and dense medium within the Nambu–Jona-Lasinio model *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28** 2017–22
- [51] Gastineau F, Nebauer R et Aichelin J 2002 Thermodynamics of the 3-flavor NJL model: chiral symmetry breaking and color superconductivity *Phys. Rev. C* **65** 045204
- [52] Ruivo M C, Costa P and Sousa C A 2001 Pseudoscalar Mesons in Asymmetric Matter arXiv:hep-ph/0109234
- [53] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [54] Nakamura K (Particle Data Group) 2010 Review of particle physics *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** 075021 (<http://pdg.lbl.gov>)
- [55] Basler H et Buballa M 2010 NJL model of homogeneous neutral quark matter: pseudoscalar diquark condensates revisited *Phys. Rev. D* **81** 054033

-
- [56] Rehberg P et Klevansky S P 1996 One loop integrals at finite temperature and density *Ann. Phys.* **252** 422–57
- [57] Klevansky S P 1998 Chiral Symmetry Breaking in Hot Matter (*Lecture Notes in Physics* vol **516**) (Heidelberg:Springer) pp 113–61
- [58] Ebert D, Feldmann T, Kettner C et Reinhardt H 1998 Heavy baryons in the quark–diquark picture *Int. J. Mod. Phys. A* **13** 1091–113
- [59] Oettel M 2000 Baryons as relativistic bound states of quark and diquark *PhD Thesis Tuebingen University* arXiv:nucl-th/0012067
- [60] Oettel M, Alkofer R et von Smekal L 2000 Nucleon properties in the covariant–diquark model *Eur. Phys. J. A* **8** 553–66
- [61] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A et Kalinovsky Y L 2004 Pseudoscalar mesons in hot, dense matter *Phys. Rev. C* **70** 025204
- [62] Shovkovy I A 2004 Two Lectures on Color Superconductivity *Found. Phys.* **35** 1309–58
- [63] Rajagopal K et Wilczek F 2000 The Condensed Matter Physics of QCD arXiv:hep-ph/0011333
- [64] Azcoiti V, Laliena V, Di Carlo G et Galante A 2003 Diquark condensation at strong coupling *JHEP* **09** 014
- [65] Abuki H et Kunihiro T 2006 Thermal unpairing transitions affected by neutrality constraints and chiral dynamics *AIP Conf. Proc.* **842** 110–12
- [66] Warringa H J, Boer D et Andersen J O 2005 Color superconductivity versus pseudoscalar condensation in a three-flavor Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. D* **72** 014015
- [67] Rüster S B, Werth V, Buballa M, Shovkovy I A et Rischke D 2005 Phase diagram of neutral quark matter: Self-consistent treatment of quark masses *Phys. Rev. D* **72** 034004
- [68] Aguilera D N, Blaschke D, Buballa M et Yudichev V L 2005 Color-spin locking phase in two-flavor quark matter for compact star phenomenology *Phys. Rev. D* **72** 034008
- [69] Blaschke D, Fredriksson S, Grigorian H, Öztaş A M et Sandin F 2005 Phase diagram of three-flavor quark matter under compact star constraints *Phys. Rev. D* **72** 065020
- [70] Gómez Dumm D, Blaschke D B, Grunfeld A G et Scoccola N N 2006 Phase diagram of neutral quark matter in nonlocal chiral quark models *Phys. Rev. D* **73** 114019
- [71] Morita K, Skokov V, Friman B et Redlich K 2011 Probing deconfinement in a chiral effective model with Polyakov loop at imaginary chemical potential arXiv:1107.2273
- [72] McNeile C, Bazavov A, Davies C T H, Dowdall R J, Hornbostel K, Lepage G P et Trottier H D 2013 Direct determination of the strange and light quark condensates from full lattice QCD *Phys. Rev. D* **87** 034503

Chapitre 3

Les mésons

Une partie de ce chapitre a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38** 105003

Pour ce chapitre, et pour les chapitres 4 et 5, les constantes de couplage ont été publiées dans :
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39** 105003

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les modèles considérés dans cette thèse, c'est-à-dire les modèles NJL et PNJL. Nous avons vu que ces modèles permettent de modéliser les quarks habillés u, d, s , dont la masse dépend de la température et de la densité baryonique. En fait, à partir de ces quarks, un des premiers succès de l'approche NJL a été de modéliser les mésons légers de manière fiable. Parmi les références NJL citées dans le chapitre précédent, nous pouvons tout d'abord mentionner [1–6], puis [7–9], [10] et [11]. Ces références ont été suivies par d'autres papiers qui ont utilisé cette modélisation des mésons, comme [12–17]. Plus récemment, les mésons NJL ont de nouveau été considérés, dans des travaux comme [18–20]. Parmi les mésons évoqués dans ces références, les mésons pseudo-scalaires sont particulièrement étudiés. En fait, ces mésons sont les plus légers. D'autre part, il a été observé expérimentalement une production massive de mésons pseudo-scalaires dans des collisions de hautes énergies, notamment des pions et des kaons, voir par exemple [21]. Aussi, les mésons scalaires ont été particulièrement considérés dans le modèle NJL, notamment pour intervenir en tant que propagateurs dans les calculs de sections-efficaces [13, 14]. Grâce aux résultats encourageants rencontrés avec le modèle PNJL, des développements récents de ce modèle ont inclus la modélisation de mésons PNJL. Cela a concerné principalement des mésons pseudo-scalaires et scalaires [22, 23], même si des mésons plus exotiques ont aussi été traités [24]. Les résultats NJL et PNJL ont été comparés. Globalement, ce travail a été effectué en étudiant les masses des mésons en fonction de la température. Il a été reporté [23] que l'effet de l'inclusion de la boucle de Polyakov est similaire à ce qui a été observé pour les quarks, c'est-à-dire un décalage des courbes associées aux masses vers des températures plus hautes, opérant de fait une distorsion de ces courbes.

Dans le cadre du modèle NJL, les masses des mésons ont été estimées en fonction de la température, du potentiel chimique [11], ou de la densité baryonique [9, 25]. Avec le modèle PNJL, la température et le potentiel chimique sont aussi utilisés [22, 23], mais pas la densité baryonique. D'autre part, des études dans le plan T, ρ_B sont rares pour ces deux modèles, mais nous pouvons citer [26, 27]. Travailler dans ce plan permet de cerner les zones de stabilité complètes des mésons étudiés. En outre, même si les mésons axiaux et vectoriels ont été modélisés dans les références premièrement citées, l'étude de ces mésons n'est pas fréquente dans les travaux récents, ce qui inclut ceux liés au modèle PNJL. Pour ces mésons,

il pourrait être investigué si l'accord entre les données obtenues et les valeurs expérimentales est aussi bon que celui observé pour les mésons pseudo-scalaires et scalaires. Les mésons axiaux sont peut-être moins cruciaux dans le cadre de notre étude, mais cette remarque ne peut pas s'appliquer aux mésons vectoriels. En effet, les mésons vectoriels ρ sont importants en physique des particules. Ils sont certes plus massifs que les pions, kaons et η , mais ils sont plus légers que les autres mésons. Aussi, ils interviennent dans la diffusion élastique entre deux pions en tant que propagateurs [17], et leurs diverses désintégrations sont particulièrement étudiées (en une paire de deux pions, en un dilepton, etc.). Aussi, les travaux précédemment évoqués prennent en compte la symétrie isospin. Il pourrait être instructif d'étudier les mésons en dehors de cette approximation, c'est à dire en prenant $m_u \neq m_d$. Notamment, une question serait de voir si l'on pourrait gagner en précision vis-à-vis des données expérimentales de cette manière.

Dans ce chapitre, ces questions associées aux mésons sont prises en compte, en étudiant ces particules. Tout d'abord, le début de ce chapitre est consacré à décrire et expliquer les équations utilisées pour modéliser les mésons. A cette occasion, nous indiquons les modifications à effectuer pour faire la transition d'un pur modèle NJL à un modèle PNJL. Ces descriptions concerneront la partie 2. Les résultats associés aux mésons pseudo-scalaires sont présentés dans la partie 3. Un objectif de cette partie est de retrouver les résultats déjà exposés dans la littérature, c'est-à-dire les masses, les largeurs de niveau et les constantes de couplage de ces particules. Cependant, nous considérons aussi des aspects moins ou pas traitées dans les références citées, comme le diagramme de phases des mésons *stables*, l'étude de ces particules à densités baryoniques finies (y compris négatives), l'angle de mélange $\eta - \eta'$, etc. Dans la partie 4, les autres mésons sont traités : scalaires, vectoriels et axiaux. Dans ces deux parties, les résultats liés aux modèles NJL et PNJL sont comparés. Dans la partie 5, nous proposons de voir les conséquences de l'abandon de la symétrie isospin sur les résultats obtenus. A cette occasion, nous insistons sur les complications induites par cette étude pour les mésons π_0, η, η' . A la fin de cette partie, un tableau récapitulatif rassemble les masses des mésons obtenus à température et densité nulles. Une discussion y est alors proposée.

2. Description du formalisme

2.1 Méthode générale

Dans le cadre du modèle NJL, l'idée essentielle est de considérer un méson comme une association d'un quark et d'un antiquark, formant une boucle. Cette boucle est capable de se reproduire à l'infini. La figure 1 ci-après donne une représentation schématique de la méthode appliquée [11].

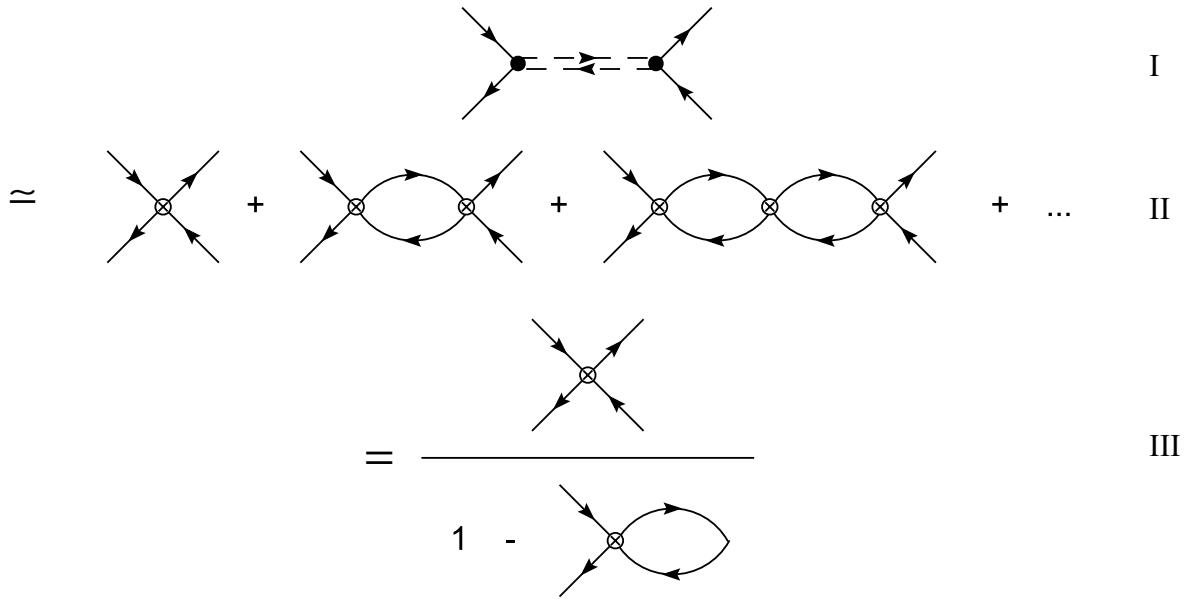


Figure 1. Schématisation de l'approche utilisée pour traiter les mésons.

Seul le terme direct est considéré, dans le cadre l'approximation des phases aléatoires (RPA) [32–35], comme dans [13]. Pour obtenir l'équivalent mathématique de la figure 1, nous prenons $\otimes \equiv \mathcal{Z}$. Il correspond à un couplage effectif à chaque vertex. Pour un système quark/antiquark donné, ce terme est une constante. Aussi, la boucle est notée Π :

$$\text{Diagramme d'une boucle fermée} \equiv \Pi \quad . \quad (1)$$

Cette boucle interne, faite par un quark et un antiquark, est nommée fonction de polarisation irréductible [11, 13, 15]. La boucle est fonction de sa quadri-impulsion totale. Dans le cadre de l'équation de Bethe-Salpeter, voir par exemple [8, 9], nous identifions l'interaction dans la première ligne de la figure 1 à la matrice de transition T . L'équation de Bethe-Salpeter s'écrit $T = \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \cdot \Pi \cdot T$, dans laquelle le couplage \mathcal{Z} est associé à un noyau d'interaction à deux corps [8, 19]. Nous avons alors :

$$T = \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} + \dots, \quad (2)$$

qui traduit le passage de la première ligne à la seconde ligne de la figure. Puisque $\Pi \mathcal{Z}$ satisfait la propriété :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi \mathcal{Z})^n = 0, \quad (3)$$

l'équation (2) correspond à une série géométrique convergente, de sorte que le passage de la seconde à la troisième ligne de la figure 1 s'écrit :

$$T = \mathcal{Z} \cdot (1 + \Pi \mathcal{Z} + \Pi \mathcal{Z} \Pi \mathcal{Z} + \dots) = \frac{\mathcal{Z}}{1 - \Pi \mathcal{Z}}. \quad (4)$$

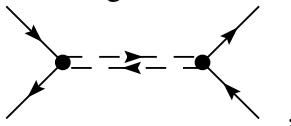
La propriété suivante est vraie pour toute matrice A , si son déterminant est non nul,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^T \text{com}(A), \quad (5)$$

où $\text{com}(A)$ est la comatrice de A et T l'opération transposée matricielle. En appliquant la relation (5) dans (4), il vient :

$$T = \frac{\mathcal{Z}}{1 - \Pi \mathcal{Z}} = \frac{\mathcal{Z}}{\det(1 - \Pi \mathcal{Z})} \cdot {}^T(\text{com}(1 - \Pi \mathcal{Z})) \text{ proportionnel à } \frac{1}{\det(1 - \Pi \mathcal{Z})}. \quad (6)$$

Si nous revenons à la première ligne de la figure 1,



nous écrivons, par de simples arguments de théorie des champs :

$$T = V^- \cdot \frac{i}{k^2 - m^2} \cdot V^+, \quad (7)$$

où $\frac{i}{k^2 - m^2}$ est le propagateur standard d'un méson de masse m et de quadri-impulsion k . En outre, V^- et V^+ sont respectivement les vertices de gauche et de droite, matérialisés par des points noirs sur la figure. Ces termes seront explicités plus tard, mais nous pouvons préciser qu'ils sont non nuls et non infinis. Quand $k^2 \rightarrow m^2$, une divergence est observée dans l'équation (7). Puisque (6) et (7) sont supposés être équivalents, cette divergence doit aussi être trouvée dans (6). Et, puisque \mathcal{Z} et Π sont finis, l'équivalence entre ces deux expressions n'est pas satisfaite que si :

$$\det(1 - \Pi \mathcal{Z}) = 0 \Big|_{k^2 \rightarrow m^2} . \quad (8)$$

Pour un méson au repos, sa masse est obtenue en résolvant :

$$\det[1 - \Pi(k_0, \vec{k}) \cdot \mathcal{Z}] = 0 \Big|_{k_0 = m, \vec{k} = \vec{0}}, \quad (9)$$

alors que pour une quantité de mouvement \vec{k} donnée, l'équation est écrite comme :

$$\det[1 - \Pi(k_0, \vec{k}) \cdot \mathcal{Z}] = 0 \Big|_{k_0 = \sqrt{m^2 + (\vec{k})^2}, \vec{k} \text{ fixé}}. \quad (10)$$

Excepté pour la figure 7b, seuls des mésons au repos sont pris en compte dans nos simulations numériques. Quand un méson est considéré comme stable *par le modèle* en ce qui concerne sa désintégration en un quark et un antiquark, les équations (9) ou (10) à résoudre sont réelles, comme les masses obtenues. Donc, dans cette configuration, la fonction de polarisation est une fonction réelle. Cela correspond au régime pour lequel la masse du méson est inférieure à la masse totale du quark et de l'antiquark qui le composent. A l'opposé, quand cette condition n'est pas satisfaite, la fonction de polarisation est une fonction complexe, et la masse devient un nombre complexe elle aussi. Nous l'écrivons alors comme :

$$m = m_{\text{physique}} - \frac{i}{2} \cdot \Gamma . \quad (11)$$

m_{physique} en est la partie réelle et est identifiée à la masse de la particule, alors que Γ est associée à la partie imaginaire et correspond à la largeur de niveau de la particule. Une

manière de comprendre ce comportement consiste à dire qu'en mécanique quantique non relativiste, la fonction d'onde est proportionnelle à :

$$\exp\left(-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right) = \exp\left(-i \cdot m \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right). \quad (12)$$

Si m est un nombre réel, alors l'exponentielle garde un module constant, alors que si m est complexe, cela donne :

$$\begin{aligned} \exp\left(-i \cdot m \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right) &= \exp\left(-i \cdot \left(m_{\text{physique}} - i \frac{\Gamma}{2}\right) \cdot \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right)\right) \\ &= \exp\left(-i \cdot m_{\text{physique}} \cdot \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{\Gamma}{2} \cdot \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

L'exponentielle située à l'extrême droite de (13) traduit le fait que la fonction d'onde tend à s'évanouir. Cela correspond donc à un instabilité de la particule, indiquée par cette largeur de niveau Γ .

2.2 Lagrangien associé aux mésons

La partie intéressante du Lagrangien NJL qui intervient dans la modélisation des mésons s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f \left(i \not{p} - m_{0f} \right) \psi_f \\ & + G_S \cdot \sum_{a=0}^8 \left[\left(\bar{\psi} \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi \right)^2 \right] \\ & - G_V \cdot \sum_{a=0}^8 \left[\left(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi \right)^2 \right] \\ & - K \cdot \left[\det(\bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi) + \det(\bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

A ce stade, une transformation est appliquée pour développer le terme de 't Hooft, c'est-à-dire le dernier terme de (14), et d'incorporer les sous-termes obtenus dans la sommation $G_S \cdot \sum_{a=0}^8 \left[\left(\bar{\psi} \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi \right)^2 \right]$. En d'autres termes, la seconde et la quatrième ligne de (14) sont fusionnées [11, 13], et il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f (i\cancel{d} - m_{0f}) \psi_f \\
& + \sum_{a=0}^8 \left[K_{aa}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2 + K_{aa}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right] \\
& + K_{30}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^3 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^0 \psi) + K_{30}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^3 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^0 \psi) \\
& + K_{03}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^0 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^3 \psi) + K_{03}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^0 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^3 \psi) \\
& + K_{80}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^8 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^0 \psi) + K_{80}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^8 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^0 \psi) . \\
& + K_{08}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^0 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^8 \psi) + K_{08}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^0 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^8 \psi) \\
& + K_{83}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^8 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^3 \psi) + K_{83}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^8 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^3 \psi) \\
& + K_{38}^- \cdot (\bar{\psi} \lambda^3 \psi) \cdot (\bar{\psi} \lambda^8 \psi) + K_{38}^+ \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^3 \psi) \cdot (\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^8 \psi) \\
& - G_V \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

Ainsi, le terme associé au canal vectoriel $-G_V \cdot \sum_{a=0}^8 \left[(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_5 \lambda^a \psi)^2 \right]$ n'est pas modifié. Par extension, les mésons vectoriels (termes avec γ_μ) et les mésons axiaux (termes avec $\gamma_\mu i \gamma_5$) ne sont pas concernés non plus. Les nouvelles constantes introduites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
K_{00}^\pm &= G_S \mp \frac{1}{3} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^u) + i \cdot \text{Tr}(S^d) + i \cdot \text{Tr}(S^s) \right] \\
K_{11}^\pm &= K_{22}^\pm = K_{33}^\pm = G_S \pm \frac{1}{2} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^s) \right] \\
K_{44}^\pm &= K_{55}^\pm = G_S \pm \frac{1}{2} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^d) \right] \\
K_{66}^\pm &= K_{77}^\pm = G_S \pm \frac{1}{2} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^u) \right] \\
K_{88}^\pm &= G_S \pm \frac{1}{6} N_C K \cdot \left[2i \cdot \text{Tr}(S^u) + 2i \cdot \text{Tr}(S^d) - i \cdot \text{Tr}(S^s) \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

et :

$$\begin{aligned}
K_{03}^\pm &= K_{30}^\pm = \mp \frac{1}{2\sqrt{6}} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^u) - i \cdot \text{Tr}(S^d) \right] \\
K_{08}^\pm &= K_{80}^\pm = \pm \frac{\sqrt{2}}{12} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^u) + i \cdot \text{Tr}(S^d) - 2i \cdot \text{Tr}(S^s) \right] . \\
K_{38}^\pm &= K_{83}^\pm = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} N_C K \cdot \left[i \cdot \text{Tr}(S^u) - i \cdot \text{Tr}(S^d) \right]
\end{aligned} \tag{17}$$

Les quantités physiques exposées dans ces équations ont été définies au chapitre 2. $\text{Tr}(\tilde{S}_f)$ est la trace du propagateur $\tilde{S}_f(x, x')$ d'un quark de saveur f , exprimé en coordonnées

d'espace [13–15]. Celui-ci est relié au propagateur $S_f(\not{p})$ dans l'espace des quantités de mouvement, écrit comme :

$$S_{f \text{ NJL}}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} + \gamma_0 \mu_f - m_f}. \quad (18)$$

A cette occasion, nous indiquons que ce propagateur est réécrit dans le modèle PNJL comme [22] :

$$S_{f \text{ PNJL}}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} + \gamma_0 (\mu_f - iA_4) - m_f}, \quad (19)$$

qui prend en compte la dépendance vis-à-vis de la couleur, via le terme A_4 .

Dans l'équation (4), en accord avec [8, 11], nous avons $\mathcal{Z} \equiv 2 \cdot K_{ab}^{\pm}$ pour les mésons pseudo-scalaires (signe +) ou les mésons scalaires (signe –). Le choix des K_{ab}^{\pm} dépend du méson étudié, voir tableau 2 ci-après. Aussi, $\mathcal{Z} \equiv 2 \cdot G_V$ pour les mésons axiaux et vectoriels.

2.3 Fonction de polarisation irréductible des mésons

Une fonction de polarisation Π , équation (1), peut être comprise comme une boucle de deux quarks. Le premier a une masse m_1 , un potentiel chimique μ_1 et une quadri-impulsion $(i \cdot \omega_n, \vec{p})$. Concernant le second quark, sa quadri-impulsion est $(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k})$, voir figure 2 [13].

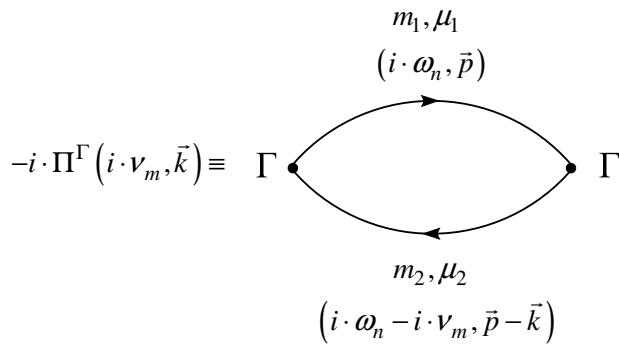


Figure 2. Représentation schématique de la fonction de polarisation des mésons.

Plus précisément, la figure 2 montre que le quark q_1 « va vers la droite », c'est-à-dire vers le futur. Par conséquent, il doit être interprété comme un « vrai » quark, alors que le second quark « va vers la gauche », c'est-à-dire vers le passé. Ce dernier est en fait un antiquark selon le point de vue de Feynman. Donc, il est noté comme \bar{q}_2 , et nous écrivons la fonction de polarisation comme $\Pi_{q_1 \bar{q}_2}$. La quadri-impulsion de la boucle est $(i \cdot v_m, \vec{k})$. Le terme Γ dans la figure 2 représente le type d'interaction à chaque extrémité de la boucle, c'est-à-dire à chaque vertex. Quatre types d'interaction sont considérés ; chacune d'elle correspond à une « famille » de mésons, comme indiqué dans le tableau 1 [19].

Type de méson considéré	Valeur de Γ	Mésons correspondants
pseudo-scalaire (P)	$i\gamma^5$	pion, kaon, η, η'
scalaire (S)	1	a_0, K_0^*, f_0, f_0'
vectoriel (V)	γ^μ	ρ, K^*, ω, ϕ
axial (A)	$\gamma^\mu \cdot i\gamma^5$	a_1, K_1^*, f_1, f_1'

Tableau 1. Valeurs de la matrice Γ , suivant les mésons étudiés.

L'expression générale de la fonction de polarisation des mésons s'écrit comme [11, 13] :

$$-i \cdot \Pi_{q_1 \bar{q}_2}^\Gamma (i \cdot \nu_m, \vec{k}) = N_C \frac{i}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S^{f_1} (i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot \Gamma \cdot i \cdot S^{f_2} (i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m, \vec{p} - \vec{k}) \cdot \Gamma \right), \quad (20)$$

où $S^f(\not{p})$ est le propagateur d'un quark de saveur f , comme défini équations (18, 19) pour les modèles NJL et PNJL. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'inclusion d'une boucle de Polyakov conduit à d'importantes modifications des équations à résoudre pour trouver les masses effectives des quarks. Cependant, comme indiqué dans [22, 23], les adaptations concernant les équations des mésons consistent à remplacer les distributions de Fermi-Dirac classiques par les distributions modifiées, équation (41) du chapitre 2. En fait, dans les calculs numériques, ces distributions sont employées via les fonctions génériques A et B_0 , afin d'estimer (16, 17) et la fonction de polarisation (20). Des détails complémentaires concernant ces aspects sont proposés dans l'annexe D.

Dans (20), la fréquence de Matsubara $i \cdot \omega_n$ du quark 1 est impaire, parce que le quark est un fermion. Cette remarque est aussi valide pour le quark 2, dont la fréquence $i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m$ est également impaire. La « somme » de ces deux fréquences nous donne la fréquence de Matsubara $i \cdot \nu_m$ de la fonction de polarisation. Elle représente aussi la fréquence du méson étudié. La fréquence $i \cdot \nu_m$ est de type bosonique : la somme de deux nombres impairs donne un nombre pair, et bien sûr un méson est un boson.

2.4 Détail des équations pour chaque méson

Pour tous les mésons cités dans le tableau 2, l'équation (4) est écrite sous la forme :

$$M \equiv T = \frac{2C}{1 - 2C \cdot f \cdot \Pi}. \quad (21)$$

La quantité M est appelée matrice de diffusion, comme dans [9, 13]. Elle correspond à la matrice de transition T vue précédemment. Aussi, c'est le propagateur d'un méson dans les modèles (P)NJL. Le facteur f ajouté dans (21) est un facteur de saveur. Sa valeur est de 2 pour tous les mésons cités dans le tableau 2. Plus précisément, nous avons $\sqrt{2}$ à chaque vertex, comme expliqué dans l'annexe C. Le choix de C et Π dépend du méson étudié, comme détaillé dans le tableau.

méson		C	Π	méson		C	Π
pseudo scalaire	π^-	K_{11}^+	$\Pi_{d\bar{u}}^P$	scalaire	a_0^-	K_{11}^-	$\Pi_{d\bar{u}}^S$
	π^+	K_{11}^+	$\Pi_{u\bar{d}}^P$		a_0^+	K_{11}^-	$\Pi_{u\bar{d}}^S$
	K^-	K_{44}^+	$\Pi_{s\bar{u}}^P$		K_0^*	K_{44}^-	$\Pi_{s\bar{u}}^S$
	K^+	K_{44}^+	$\Pi_{u\bar{s}}^P$		K_0^{*+}	K_{44}^-	$\Pi_{u\bar{s}}^S$
	K^0	K_{66}^+	$\Pi_{d\bar{s}}^P$		K_0^{*0}	K_{66}^-	$\Pi_{d\bar{s}}^S$
	\bar{K}^0	K_{66}^+	$\Pi_{s\bar{d}}^P$		\bar{K}_0^{*0}	K_{66}^-	$\Pi_{s\bar{d}}^S$
vectoriel	ρ^-	G_V	$\Pi_{d\bar{u}}^V$	axial	a_1^-	G_V	$\Pi_{d\bar{u}}^A$
	ρ^+	G_V	$\Pi_{u\bar{d}}^V$		a_1^+	G_V	$\Pi_{u\bar{d}}^A$
	ϕ	G_V	$\Pi_{s\bar{s}}^V$		f_1'	G_V	$\Pi_{s\bar{s}}^A$
	K^{*-}	G_V	$\Pi_{s\bar{u}}^V$		K_1^{*-}	G_V	$\Pi_{s\bar{u}}^A$
	K^{*+}	G_V	$\Pi_{u\bar{s}}^V$		K_1^{*+}	G_V	$\Pi_{u\bar{s}}^A$
	K^{*0}	G_V	$\Pi_{d\bar{s}}^V$		K_1^{*0}	G_V	$\Pi_{d\bar{s}}^A$
	\bar{K}^{*0}	G_V	$\Pi_{s\bar{d}}^V$		\bar{K}_1^{*0}	G_V	$\Pi_{s\bar{d}}^A$

Tableau 2. C et Π pour chaque méson.

Pour ces mésons, l'équation (8) est réécrite sous la forme d'une expression scalaire [13, 15] :

$$1 - 4 \cdot C \cdot \Pi(k_0, \vec{k}) = 0 \Big|_{k_0=m, \vec{k}=\vec{0}} . \quad (22)$$

Les autres mésons $SU(3)_f$ non présents dans le tableau 2 sont des mésons couplés. Ces mésons sont π^0, η, η' et leurs équivalents scalaires, vectoriels et axiaux, quand ils existent. Cependant, quand la symétrie isospin est appliquée, π^0 est découpé de η, η' . Dans ce cas, le propagateur de π^0 est identique de ceux de π^\pm . Mais, η, η' requièrent quand même un traitement spécifique. Dans le paragraphe suivant, nous proposons de reproduire la méthode exposée dans [13]. A la fin de ce chapitre, une étude complémentaire étend cette méthode au-delà de la symétrie isospin.

2.5 Mésons $\eta - \eta'$ et $f_0 - f_0'$ (avec la symétrie isospin)

Les mésons η, η' sont couplés à cause d'un mélange des canaux d'isospin λ^0 et λ^8 . L'amplitude de diffusion M est ici une matrice non diagonale. Elle est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{08} \\ M_{80} & M_{88} \end{bmatrix} = 2K^+ \left(1 - 2\Pi^P K^+ \right)^{-1} , \quad (23)$$

avec :

$$K^+ = \begin{bmatrix} K_{00}^+ & K_{08}^+ \\ K_{80}^+ & K_{88}^+ \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi^P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot (2\Pi_{q\bar{q}}^P + \Pi_{s\bar{s}}^P) & \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (\Pi_{q\bar{q}}^P - \Pi_{s\bar{s}}^P) \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (\Pi_{q\bar{q}}^P - \Pi_{s\bar{s}}^P) & \frac{2}{3} \cdot (\Pi_{q\bar{q}}^P + 2\Pi_{s\bar{s}}^P) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$\Pi_{q\bar{q}}^P$ et $\Pi_{s\bar{s}}^P$ sont les fonctions de polarisation de mésons pseudo-scalaires, respectivement pour une boucle de deux quarks q et de deux quarks s . Ici, l'utilisation de la symétrie isospin permet d'établir que $K_{08}^+ = K_{80}^+$ et $M_{08} = M_{80}$. Pour les autres mésons, nous avons obtenu les masses en cherchant les pôles de M . Cela revient ici à calculer M^{-1} , pour la diagonaliser, et résoudre le système d'équations découplées, dans lesquelles les valeurs propres sont posées égales à 0. Cela donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{2 \cdot \det(K^+)} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = K_8^+ - \frac{4}{3} \det(K^+) \cdot (2\Pi_{q\bar{q}}^P + \Pi_{s\bar{s}}^P) \\ \mathcal{B} = -K_{08}^+ - \frac{4\sqrt{2}}{3} \det(K^+) \cdot (\Pi_{q\bar{q}}^P - \Pi_{s\bar{s}}^P) \\ \mathcal{C} = K_0^+ - \frac{4}{3} \det(K^+) \cdot (\Pi_{q\bar{q}}^P + 2\Pi_{s\bar{s}}^P) \end{cases}. \quad (26)$$

Il vient :

$$M^{-1} \sim \frac{1}{4 \cdot \det(K^+)} \cdot \begin{bmatrix} M_\eta^{-1} & 0 \\ 0 & M_{\eta'}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_\eta^{-1} = \mathcal{A} + \mathcal{C} - \sqrt{(\mathcal{A} - \mathcal{C})^2 + 4\mathcal{B}^2} \\ M_{\eta'}^{-1} = \mathcal{A} + \mathcal{C} + \sqrt{(\mathcal{A} - \mathcal{C})^2 + 4\mathcal{B}^2} \end{cases}. \quad (27)$$

Nous avons « découpés » η et η' . Il nous reste à résoudre ces équations : si les particules sont au repos, nous avons :

$$\begin{cases} M_\eta^{-1}(m_\eta, \vec{0}) = 0 \\ M_{\eta'}^{-1}(m_{\eta'}, \vec{0}) = 0 \end{cases}. \quad (28)$$

Pour les mésons scalaires f_0 et f_0' , la méthode est strictement identique. Nous avons seulement besoin de remplacer les fonctions de polarisation pseudo-scalaires par des fonctions de polarisation scalaires et K^+ par K^- .

3. Résultats pour les mésons pseudo-scalaires

3.1 Masses obtenues

L'évolution des masses des mésons pion, kaon, η et η' en fonction de la température est présentée dans la figure 3. A propos des courbes NJL, les données obtenues sont en accord avec celles des références [9], comme avec celles de [13, 15] et [25–27]. Aussi, les données PNJL produites vont dans le sens de celles trouvées dans la littérature associée [22, 23]. En fait, nos résultats PNJL ressemblent plus à ceux à ceux de [23], comparés à ceux de [22], à cause du choix du potentiel effectif, voir chapitre 2. Comme avec les autres résultats présentés ci-après utilisant la symétrie isospin, ces résultats ont été trouvés avec le jeu de paramètres P1 [19]. Cela entraîne une dégénérescence des mésons π^+ , π^- , π^0 d'une part (courbe « pion »), et des mésons K^- , K^+ , K^0 , \bar{K}^0 d'autre part (courbe « kaon »).

Aussi, comme observé dans les références, ces mésons sont trouvés comme stables à températures réduites, mis à part pour η' . En effet, cette affirmation est confirmée par la figure 4, dans laquelle nous avons représentés les largeurs de niveau des mésons. Comme expliqué dans (11), la largeur de niveau est associée à la partie complexe des masses. Quand la largeur de niveau est non nulle, cela révèle que les mésons sont instables vis-à-vis de leur désintégration en un quark et un antiquark. Quand la masse d'un méson est égale à la masse de la paire quark/antiquark qui le constitue, cela correspond alors à la température connue sous le nom de « température de Mott », ou de température critique. Cette température marque la frontière entre la stabilité et l'instabilité du méson. Comme précisé dans la littérature PNJL [22, 23], l'inclusion de la boucle de Polyakov induit une augmentation de cette température critique, quel que soit le méson étudié. En ce qui concerne η' , il a été trouvé que ce méson est instable, quelle que soit la température. De plus, nous notons que la courbe associée à ce méson s'arrête brusquement, pour les deux modèles, correspondant à une annulation de la largeur de niveau de cette particule. A ce moment là, les équations associées à cette particule deviennent instables numériquement. Des résultats peuvent être obtenus pour compléter la courbe, mais la convergence des équations devient non fiable. Même si [13] évoque une manifestation du manque de confinement, il peut être observé que le modèle PNJL ne modifie pas le comportement de ce méson.

Dans la figure 5, les masses des mésons pseudo-scalaires sont étudiées, à température nulle, en fonction de la densité baryonique. Comme expliqué dans le chapitre précédent, les modèles NJL et PNJL coïncident à température nulle, quelle que soit la densité. C'est pourquoi nous n'avons pas spécifié si nos résultats ont été obtenus avec le modèle NJL ou PNJL. Une telle étude est effectuée par exemple dans [19] (partie gauche de la figure), même si cette référence ne mentionne pas la levée de dégénérescence partielle observée pour les kaons. Ce phénomène est visible sur la partie gauche de la figure 5 via les deux courbes associées avec les kaons. En fait, $\Pi_{q\bar{q}}^P$ est invariant par échange de la paire quark/antiquark (par exemple $u\bar{d} \leftrightarrow d\bar{u}$), même à densités baryoniques non nulles. Cependant, $\Pi_{s\bar{q}}^P$ (correspondant à K^- et à \bar{K}^0) n'est égal à $\Pi_{q\bar{s}}^P$ (pour K^+ et K^0) que lorsque $\mu_q = 0$, c'est-à-dire quand $\rho_B = 0$, la

densité d'étrangeté étant fixée à zéro. A densités baryoniques non nulles, $\Pi_{s\bar{q}}^P \neq \Pi_{q\bar{s}}^P$, et cela conduit à la séparation observée : les kaons K^+ et K^0 forment la branche K^+ , alors que K^- et \bar{K}^0 constituent la branche K^- .

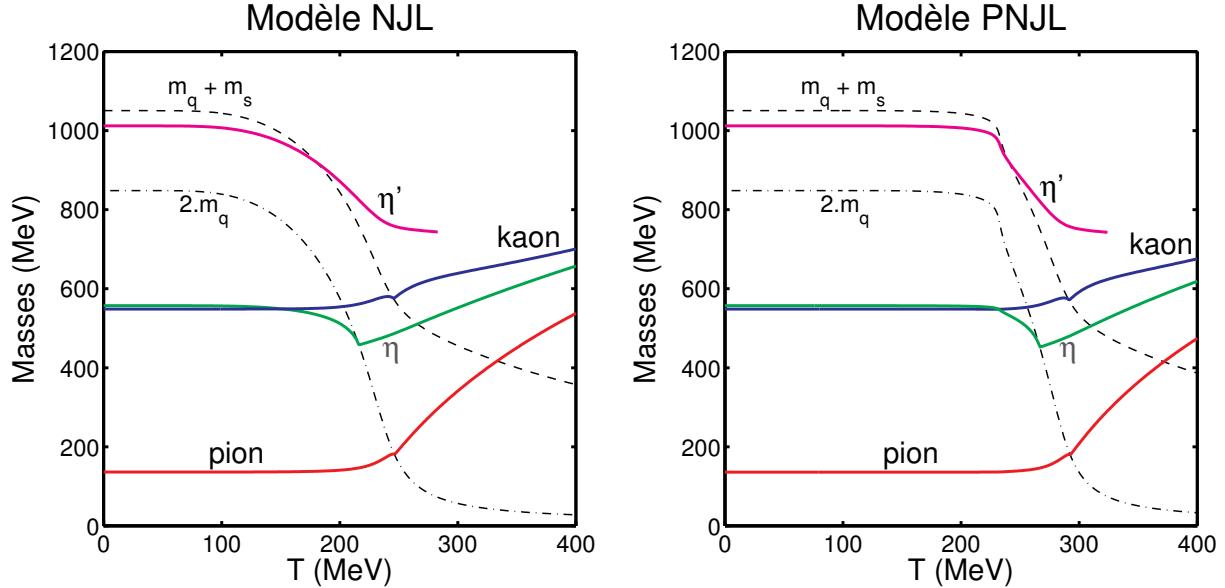


Figure 3. Masses des mésons pseudo-scalaires en fonction de la température, à densité nulle.

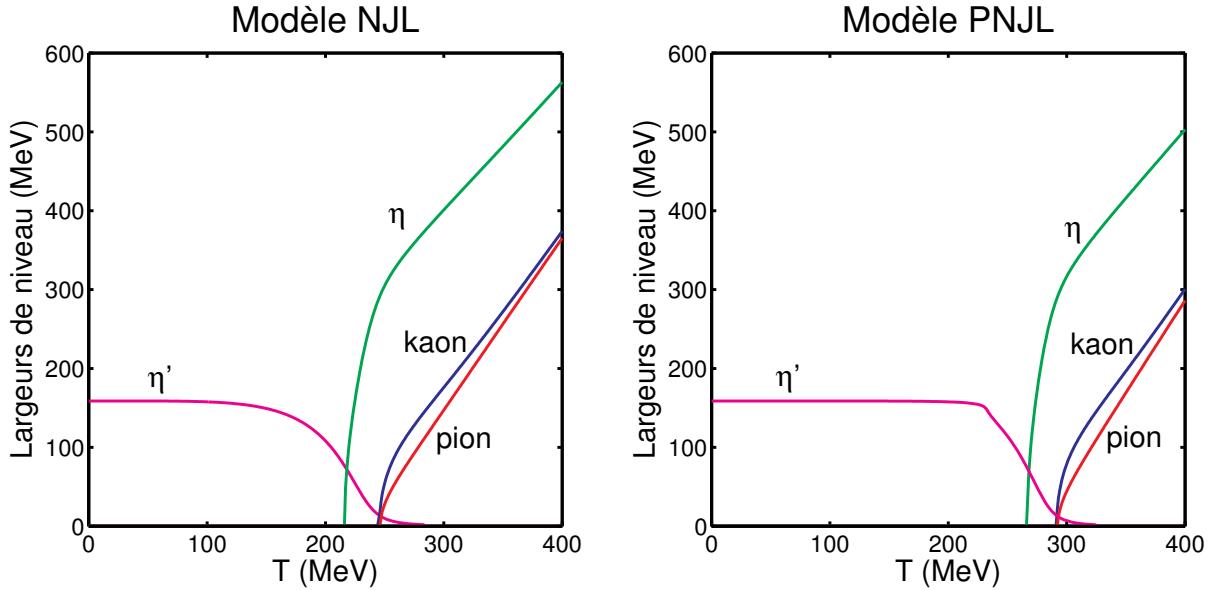


Figure 4. Largeurs de niveau des mésons pseudo-scalaires selon la température, à densité nulle.

Aussi, dans la figure 5, mis à part pour η' , seuls les kaons K^- présentent une transition stable/instable en fonction de la densité. Elle est matérialisée dans la partie droite de la figure 5 par le fait que les largeurs de niveau de ces kaons sont nulles jusqu'à $\rho_B \approx 3.8\rho_0$. Pour les pions, kaons K^+ et η , leurs masses augmentent avec la densité baryonique, deviennent plus fortes que la masse des quarks/antiquarks qui les composent, mais leurs

largeurs de niveau restent nulles. Ce comportement apparemment étrange est en fait expliqué par la figure 6, dans laquelle un « diagramme de phase NJL » est construit pour les mésons étudiés, nommé à cette occasion « diagramme de stabilité/instabilité ». A densité baryonique nulle, le long de l'axe des températures, les températures critiques trouvées dans la partie gauche de la figure 3 peuvent être observées, quand les courbes coupent l'axe des températures. A l'opposé, le long de l'axe des densités baryoniques, seule la courbe des kaons K^- coupe cet axe. Les autres courbes divergent. Pour ces dernières, cela suggère une transition « douce » entre ces phases de stabilité et d'instabilité, c'est-à-dire à une transition de type *cross-over*. Pour la figure 6, ce diagramme a été effectué dans le cadre du modèle NJL, mais pas dans le PNJL. Cependant, à l'aide des résultats obtenus dans les figures 4 et 5, nous devinons que l'inclusion d'une boucle de Polyakov devrait déformer les graphes pour étendre la zone de stabilité de chaque méson vers les hautes températures.

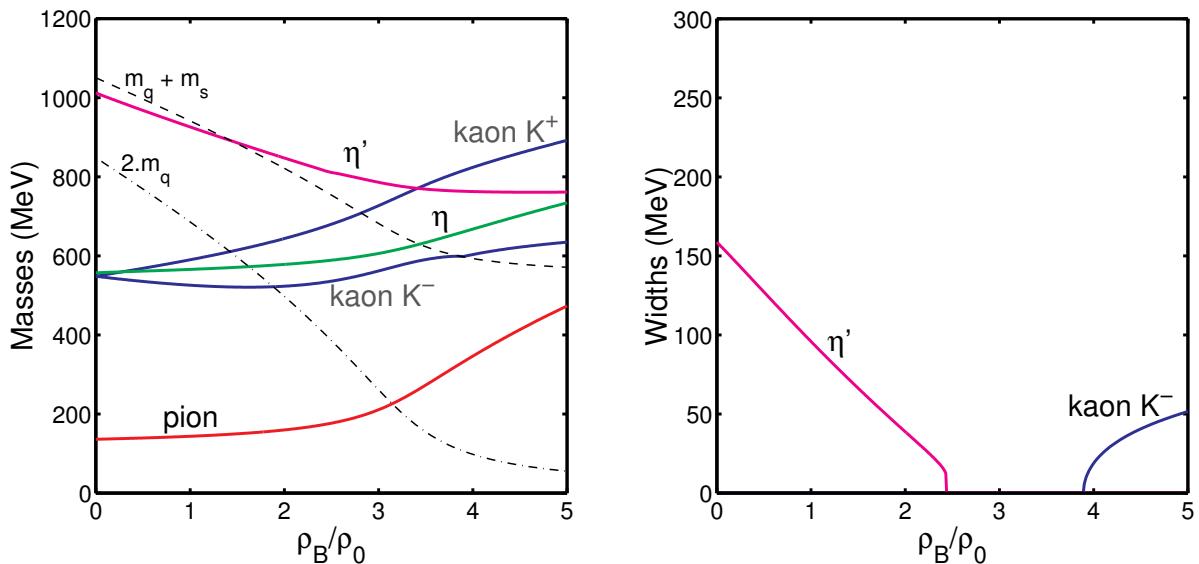


Figure 5. Masses et largeurs de niveau des mésons pseudo-scalaires en fonction de la densité baryonique, pour $T = 0$.

Le comportement des mésons a été étudié à des densités baryoniques négatives. Les résultats ont été exposés dans la figure 7a, c'est-à-dire la partie gauche de la figure 7. Comme expliqué dans le chapitre précédent, des densités baryoniques négatives sont synonymes que l'antimatière domine la matière. Les résultats obtenus confirment ce que nous pouvions prévoir, c'est-à-dire que l'axe $\rho_B = 0$ est un axe de symétrie des courbes, sauf pour les kaons.

Pour ces derniers, le passage de densités positives à négatives échange les courbes K^+ et K^- . Mais, la partie négative de K^- est symétrique par rapport à la partie positive de K^+ , et inversement. Une application possible des résultats de la figure est de nous permettre de vérifier la validité des calculs numériques. Une asymétrie ou une discontinuité des courbes, notamment à densité nulle, aurait été une sérieuse anomalie.

Dans la figure 7b, la dépendance des masses des mésons vis-à-vis de leurs quantités de mouvement est considérée. Plus précisément, dans ce cas, l'équation (10) est utilisée, au lieu de (9). Il a été trouvé que la tendance générale est que la masse d'un méson augmente quand sa quantité de mouvement croît. Dans la pratique, cette dépendance est systématiquement

omise dans les travaux (P)NJL. Comme observé sur la figure, cette approximation est justifiable à quantités de mouvement modérées.

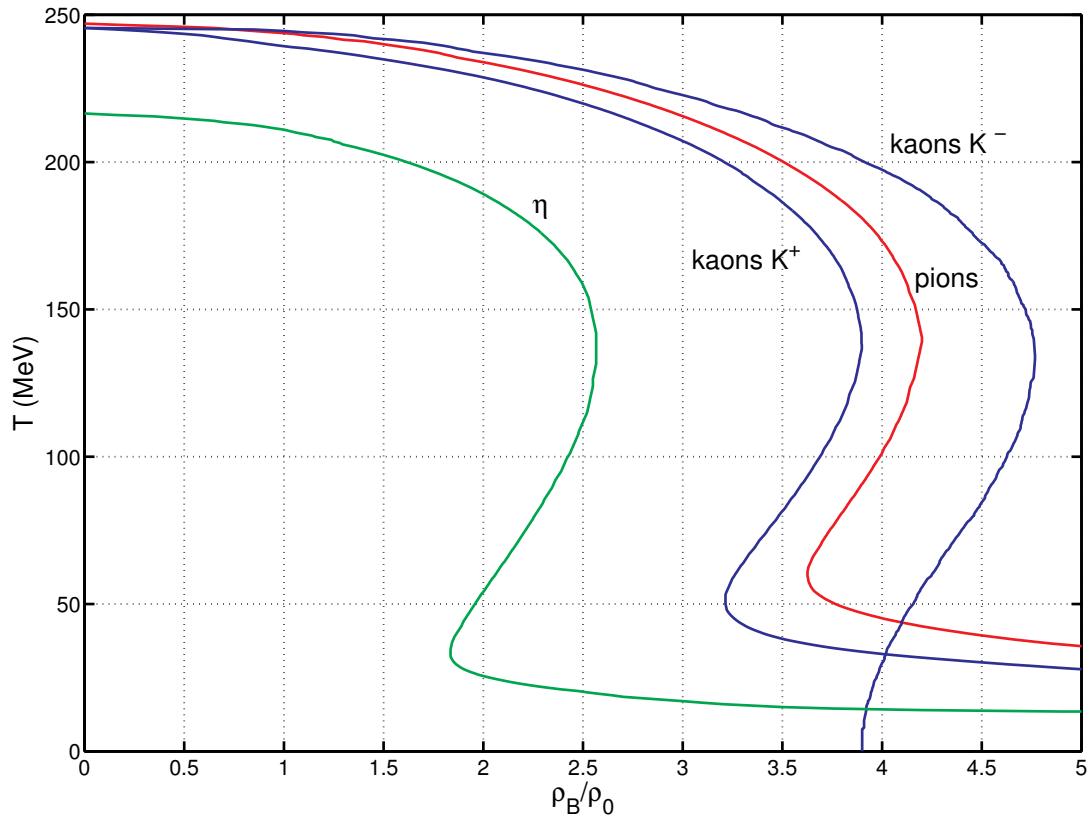


Figure 6. Diagramme de stabilité/instabilité avec le modèle NJL pour les mésons pseudo-scalaires; ces particules sont stables « à l'intérieur de la courbe » (dans la zone contenant le point $(0;0)$) et instables à l'extérieur.

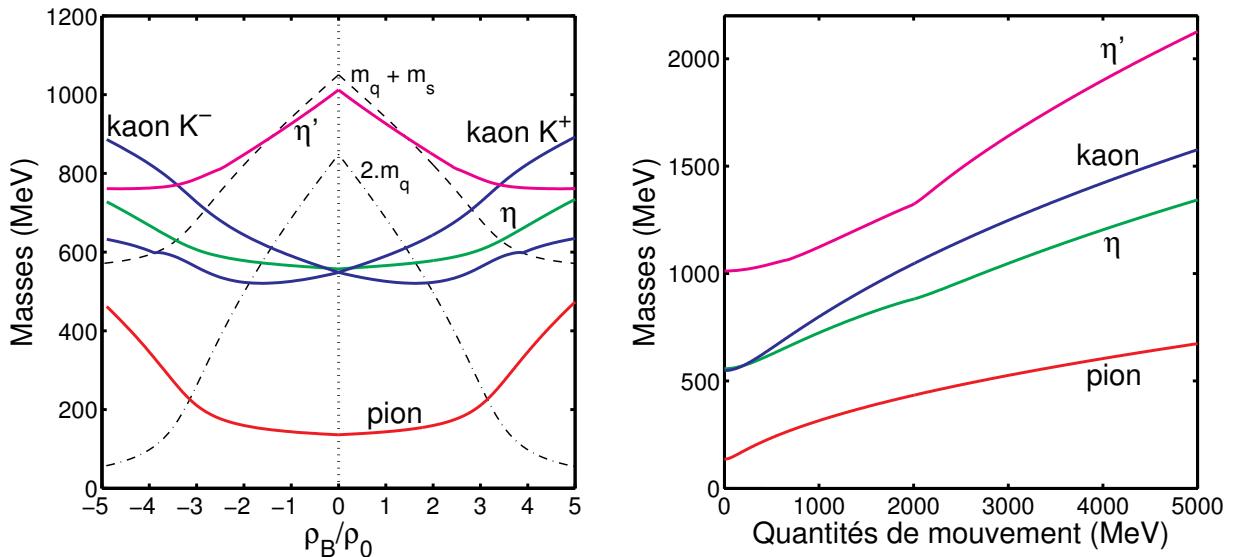


Figure 7a. (partie gauche) Masses des mésons pseudo-scalaires selon la densité baryonique.
Figure 7b. (partie droite) Influence de la quantité de mouvement sur les masses des mésons.

3.2 Constantes de couplage

Une constante de couplage est une quantité décrivant le couplage d'un méson avec le quark et l'antiquark qui le constituent, au niveau d'un vertex [11]. Cette notion est très utilisée lors de calculs de sections efficaces, comme au chapitre 6 de cette thèse. Les V^- et V^+ introduits équation (7) sont des constantes de couplage. Dans la littérature, cette quantité est habituellement notée g . En nous inspirant de [13], nous reprenons les expressions du propagateur, équations (7) et (4, 21). Ensuite, proche du pôle, c'est-à-dire pour $k^2 \rightarrow m^2$, nous avons la relation :

$$\frac{2K}{1 - 4K \cdot \Pi(k_0, \vec{k})} \Big|_{k^2=m^2} \approx \frac{-g^2}{k^2 - m^2} \Big|_{k^2=m^2}, \quad (29)$$

à partir de laquelle nous en déduisons :

$$\frac{1 - 4K \cdot \Pi(k_0, \vec{k})}{2K} \Big|_{k^2=m^2} \approx \frac{k^2 - m^2}{-g^2} \Big|_{k^2=m^2}. \quad (30)$$

En dérivant par rapport à k , il vient :

$$-2 \cdot \frac{\partial \Pi(k_0, \vec{k})}{\partial k} \Big|_{k^2=m^2} \approx \frac{2k}{-g^2} \Big|_{k^2=m^2}. \quad (31)$$

Imposer $k^2 = m^2$ est équivalent à écrire $\begin{cases} k_0 = m \\ \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$.

Donc, pour un méson au repos, on a :

$$g = \sqrt{\frac{m}{\left| \frac{\partial \Pi(k_0, \vec{0})}{\partial k_0} \right|}}. \quad (32)$$

L'équation (32) est toujours valide dans le modèle PNJL. Seule la fonction de boucle Π doit être adaptée, au niveau des distributions de Fermi-Dirac, comme expliqué précédemment. Cette formule est applicable aux kaons et aux pions, c'est-à-dire aux mésons pseudo-scalaires décrits par la relation (21). Pour les particules η et η' , la méthode est plus délicate, à cause du couplage entre ces deux particules. La méthode à appliquer est détaillée dans [11, 13]. Nous avons vu précédemment que la masse est un nombre *complexe* quand la particule devient instable. Cette remarque est aussi valide pour la fonction de polarisation Π . Clairement, g est un nombre réel quand la particule est stable, sinon elle est complexe. Mais, dans la pratique, seul le module carré $|g|^2$ est utilisé dans les calculs. En conséquence, le choix arbitraire du signe de g que nous avons fait dans (32), devant la racine carrée, n'est pas important.

Les figures 8 et 9 montrent le comportement du module des constantes de couplage des mésons pseudo-scalaires π, K, η . Dans la figure 8, nous avons représenté leur dépendance vis-à-vis de la température. Les résultats liés au modèle NJL sont en accord avec des références comme [13], et celles associées au modèle PNJL confirment qualitativement ce qui est montré dans [23]. Pour les deux modèles, nous confirmons que l'évolution des constantes de couplage est réduite à basses températures. Mais, une chute brutale des valeurs trouvées est observée pour toutes les courbes étudiées. En fait, la température pour laquelle $g \rightarrow 0$ correspond aux températures critiques des mésons étudiés. A cette température, le méson a une énergie de liaison nulle. Autrement dit, la masse du méson est égale à la masse de la paire quark-antiquark qui le constitue. Nous avons montré dans la figure 3 que l'inclusion de la boucle de Polyakov conduit à une augmentation de la température critique. Donc, cela explique dans la figure 8 le décalage observé des courbes si on compare les résultats du modèle PNJL avec ceux de NJL. Après la température critique, les masses des mésons, et par extension les constantes de couplage, deviennent complexes, car les mésons sont maintenant instables. Mis à part pour $|g_{\eta-s\bar{s}}|$, cela correspond alors à un accroissement des valeurs trouvées.

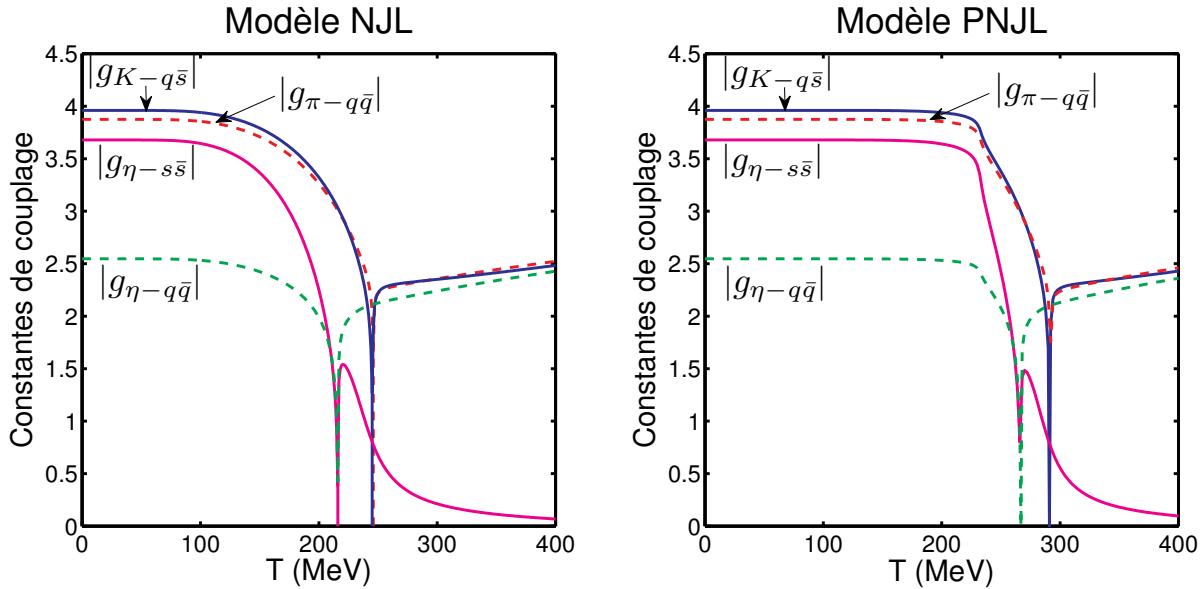


Figure 8. Constantes de couplage des mésons pseudo-scalaires en fonction de la température.

La figure 9 montre l'évolution des constantes de couplage en fonction de la densité baryonique, à température nulle. Un tel travail a été proposé par exemple dans [19, 27], mais la première référence n'inclut pas les résultats associés au méson η et à la courbe K^- . En fait, comme dans la figure 5, la courbe K^- est la seule qui présente le même comportement que celui observé selon la température, c'est-à-dire une décroissance brutale $g \rightarrow 0$. Concernant les autres courbes, les variations observées peuvent suggérer à une transition douce entre leurs régimes de stabilité/instabilité, comme proposé précédemment.

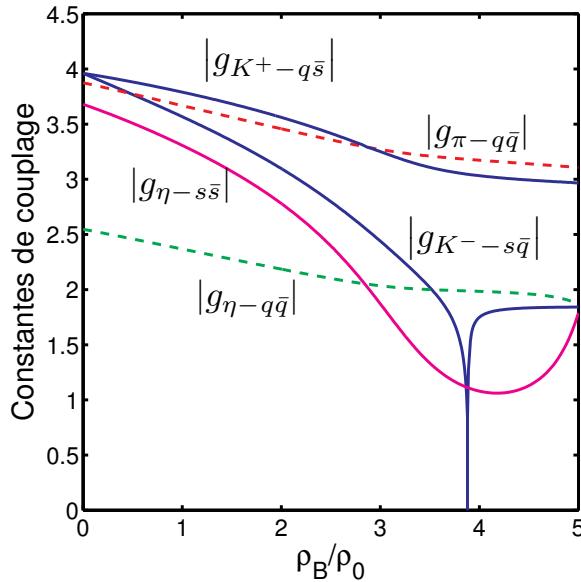


Figure 9. Constantes de couplage des mésons pseudo-scalaires en fonction de la densité baryonique.

3.3 Angle de mélange $\eta - \eta'$

Le modèle de Nambu et Jona-Lasinio, et par extension le modèle PNJL, permettent de calculer l’angle de mélange $\eta - \eta'$ [8, 25, 26, 28]. Cet angle est intrinsèque pour ces modèles. En d’autres termes, il ne requiert pas l’inclusion de données additionnelles dans le modèle. Comme expliqué dans l’annexe C, cet angle est utilisé pour estimer les facteurs de saveur mettant en jeu η ou η' . La méthode utilisée pour estimer l’angle de mélange θ est détaillée dans [11]. En utilisant les équations (23, 24), cela consiste à prendre en compte la quantité :

$$a_\eta = \left. \frac{M_{08}}{M_{00}} \right|_{k^2 = m_\eta^2} . \quad (33)$$

L’angle θ est lié à a_η par la relation:

$$\tan(\theta) = -\frac{1}{a_\eta} . \quad (34)$$

Nos résultats numériques sont présentés dans la figure 10. Pour chacun d’eux, nous notons que même si M_{08} , M_{00} et éventuellement m_η sont complexes, l’angle de mélange reste toujours un nombre réel. Par ailleurs, même si la masse de η' n’est pas accessible pour toutes les températures, figure 3, cela ne nous empêche pas de trouver des valeurs pour θ . Cela est dû au fait que ladite masse n’intervient pas dans la détermination de M_{08} et M_{00} . En outre, dans a_η , nous utilisons la masse de η ...

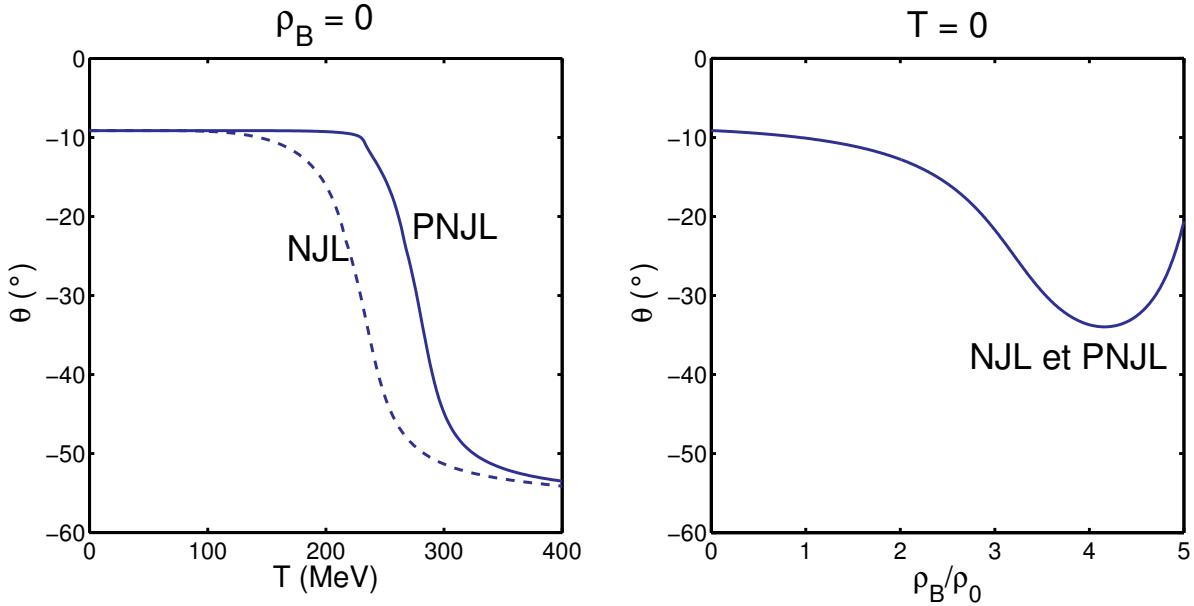


Figure 10. Angle de mélange en fonction de la température et de la densité baryonique.

La partie gauche de la figure étudie l'évolution de l'angle en fonction de la température, à densité baryonique nulle. Les courbes présentées sont assez proches de celles publiées dans [23]. Par rapport à cette référence, nous avons utilisé le même potentiel effectif \mathcal{U} (pour la courbe PNJL), mais un jeu de paramètres différent (P1, défini tableau 1 du chapitre 2). Dans la figure 3, nous remarquons que la température critique du méson η est égale à $T = 216$ MeV avec le modèle NJL, et $T = 267$ MeV avec le modèle PNJL. Pour chaque courbe de la partie gauche de la figure 10, ces températures correspondent à une forte décroissance des valeurs trouvées. Dans la partie droite de la figure, l'évolution de l'angle de mélange est tracée en fonction de la densité baryonique. Puisque ces calculs ont été effectués à température nulle, les valeurs trouvées avec les modèles NJL et PNJL coïncident. Nous observons que l'angle de mélange décroît jusqu'à une densité baryonique proche de $4\rho_0$, et ensuite augmente pour des densités plus fortes. Le comportement de cette courbe, observé aussi dans [26], rappelle celui trouvé avec $|g_{\eta-ss}|$.

4. Résultats obtenus pour les autres mésons

4.1 Mésons scalaires

Comme les mésons pseudo-scalaires, les mésons scalaires sont particulièrement étudiés dans la littérature (P)NJL. A cette occasion, nous souhaitons préciser que le nommage de ces mésons présente quelques différences dans les publications citées. Ainsi, le méson f_0 [9, 30] correspond à σ dans [13, 14, 16, 22, 23]. De la même manière, a_0 [9, 30] est nommé σ_π dans [13, 14, 16]. K_0^* [30] est équivalent à σ_K dans [13, 14, 16] ou κ dans [23]. Finalement, f_0' [9] correspond à σ' dans [13, 14, 16] ou f_0 dans [23, 30], c'est-à-dire une résonance de

f_0 , ou f_0^* dans [31]. Comme expliqué dans la partie 2, les équations à résoudre pour les mésons scalaires et pseudo-scalaires sont très proches [13]. Les deux utilisent le terme de 't Hooft $K \cdot [\det(\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi) + \det(\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi)]$ utilisé dans (14).

Nos résultats sont exposés figures 11 à 13. Tout d'abord, dans la figure 11, nous nous focalisons sur une étude des masses des mésons scalaires en fonction de la température, à densité nulle. Les données produites avec le modèle NJL peuvent être comparées avec celles de [13, 16], et les résultats PNJL avec [22, 23]. Dans l'ensemble, l'aspect des courbes est en accord avec celui des publications citées. Nous confirmons aussi la distorsion des courbes induites pour l'inclusion de la boucle de Polyakov. Aussi, grâce à la figure 12, nous notons que f_0 est le seul méson scalaire trouvé comme stable à températures réduites. En effet, sa largeur de niveau est nulle jusqu'à $T \approx 200$ MeV dans le modèle NJL, et jusqu'à $T \approx 260$ MeV avec le modèle PNJL. Les autres mésons scalaires sont instables, quelle que soit la température. En outre, malgré le comportement de η' , le méson f_0' présente une évolution tout à fait conforme par rapport aux autres mésons scalaires, c'est-à-dire que la courbe ne s'arrête pas brusquement, comme avec η' .

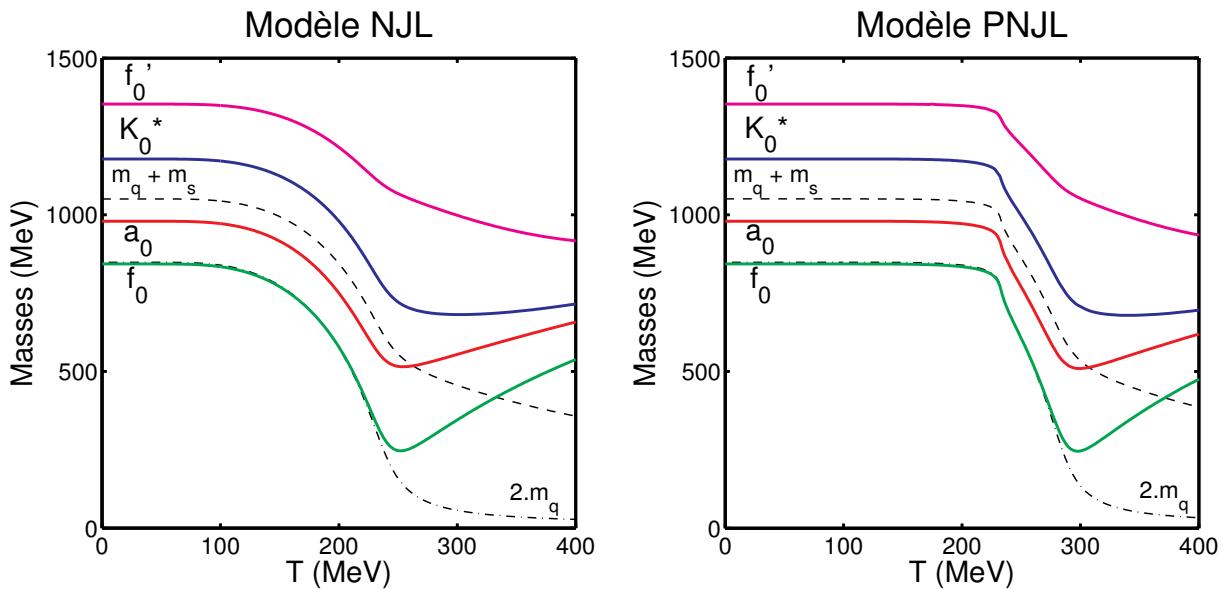


Figure 11. Masses des mésons scalaires en fonction de la température.

Dans la figure 13, les mésons sont étudiés en fonction de la densité baryonique, à température nulle. La partie gauche se focalise sur les masses. Ce graphe peut être comparé à celui publié dans [9]. Même si l'approche et le jeu de paramètres utilisées ne sont pas les mêmes, les résultats sont similaires. Mais, comparé à cette référence, nous avons rajouté le méson K_0^* . Comme avec leurs « partenaires » pseudo-scalaires, la courbe se divise en deux parties, K_0^{*+} et K_0^{*-} . Les explications de ce comportement sont strictement les mêmes que celles données pour les mésons pseudo-scalaires. Aussi, comme avec les mésons a_0 et K_0^{*+} , un point anguleux est trouvé sur les courbes, pour une densité proche de $0.5\rho_0$, c'est-à-dire quand les largeurs de niveau chutent à zéro. Ce comportement est un artefact causé par une approximation numérique expliquée dans [15] et dans la partie 3 de l'annexe D.

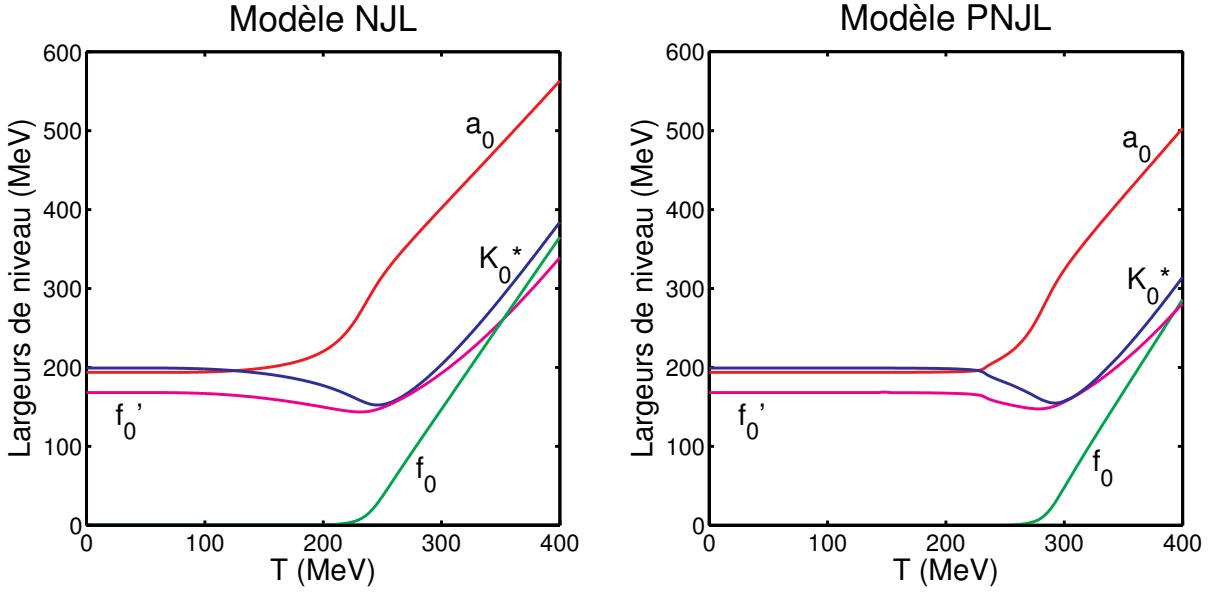


Figure 12. Largeurs de niveau des mésons scalaires en fonction de la température.

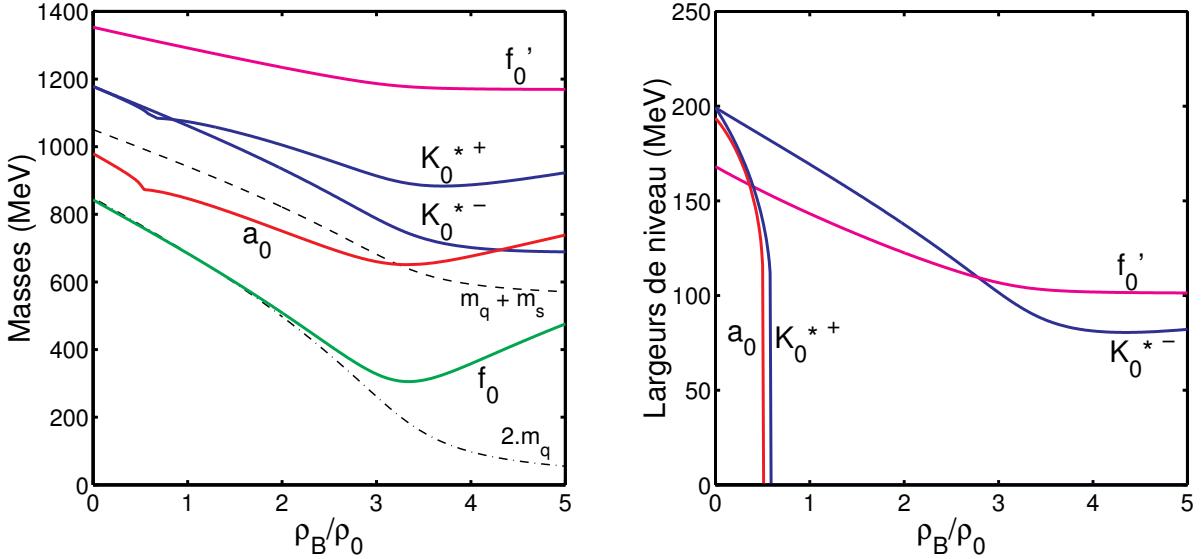


Figure 13. Masses et largeurs de niveau des mésons scalaires en fonction de la densité baryonique.

D'autre part, comme dans [9], nous pouvons remarquer que le pion et le f_0 deviennent dégénérés quand la densité baryonique est assez forte, figures 5 et 13. Comme indiqué dans cette référence, cette dégénérescence a lieu quand la symétrie chirale est restaurée pour les quarks légers. Cet argument peut s'expliquer en disant que quand cette symétrie est restaurée, la valeur du condensat de quarks légers est fortement réduite (apparaissant dans (16, 17) via le terme $i \cdot \text{Tr}(S^f)$), tout comme les masses effectives des quarks légers, apparaissant quant à elles dans les fonctions de polarisation. En conséquence, certains termes associés à ces quantités peuvent devenir négligeables dans les équations des mésons, et permettre cette dégénérescence. En fait, ce phénomène est aussi observé selon la température, figure 3, 11 et 4, 12. Cela concerne aussi d'autres mésons. En effet, nous observons cette dégénérescence à

hautes températures/densités avec $a_0 - \eta$, $K^+ - K_0^{*+}$ et $K^- - K_0^{*-}$, même si la convergence est moins rapide pour les kaons. Evidemment, nos remarques concernent le modèle NJL, mais aussi PNJL.

4.2 Mésons vectoriels

Les mésons vectoriels ont été étudiés dans le cadre du modèle NJL, par exemple dans des papiers comme [3, 7, 8], mais des études de ces mésons en fonction de la température et de la densité sont relativement rares dans ce modèle. Cette remarque est aussi valable pour le modèle PNJL. Nos résultats sont présentés figures 14 à 16. Sans surprise, nous concluons avec la figure 14 que l'inclusion d'une boucle de Polyakov conduit au décalage, déjà observé, des courbes PNJL vers les hautes températures. Afin de ne pas surcharger notre description, les graphes des largeurs de niveau ne sont pas inclus dans ce document. Mais, sans lesdites largeurs de niveau, nous pouvons indiquer que les mésons vectoriels sont stables dans les modèles (P)NJL à températures et densités baryoniques réduites. Ce comportement rappelle celui observé pour les mésons pseudo-scalaires, sauf pour η' .

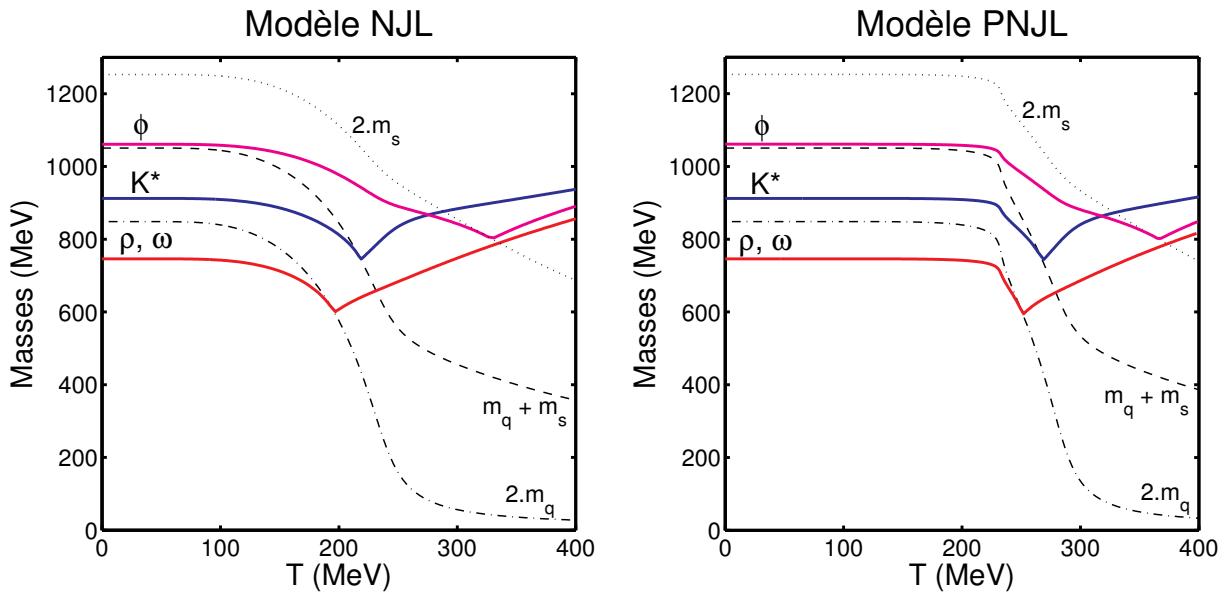


Figure 14. Masses des mésons vectoriels en fonction de la température.

En revanche, la dépendance vis-à-vis de la température est différente : les masses des mésons vectoriels décroissent de manière continue jusqu'à leurs températures de Mott. Par ailleurs, dans le cadre de la symétrie isospin, les mésons ρ et ω sont dégénérés, quelles que soient la température et la densité baryonique. Nous rappelons que ces mésons sont respectivement les équivalents des mésons pseudo-scalaires π et η . En fait, le terme de 't Hooft présenté dans (14) agit seulement sur les mésons scalaires et pseudo-scalaires, mais pas sur les mésons vectoriels. En conséquence, les termes K_{ab}^+ utilisés pour modéliser les mésons pseudo-scalaires sont remplacés ici par la constante G_V , voir tableau 2. Cela conduit au comportement observé. Une autre différence est que les mésons vectoriels ont globalement des températures critiques plus basses comparés à celles des mésons pseudo-scalaires, figure 14. Cette remarque est aussi valide pour les densités critiques, figure 15. En

conséquence, dans le diagramme exposé figure 16, les zones pour lesquelles les mésons vectoriels sont stables sont plus réduites que celles trouvées figure 6.

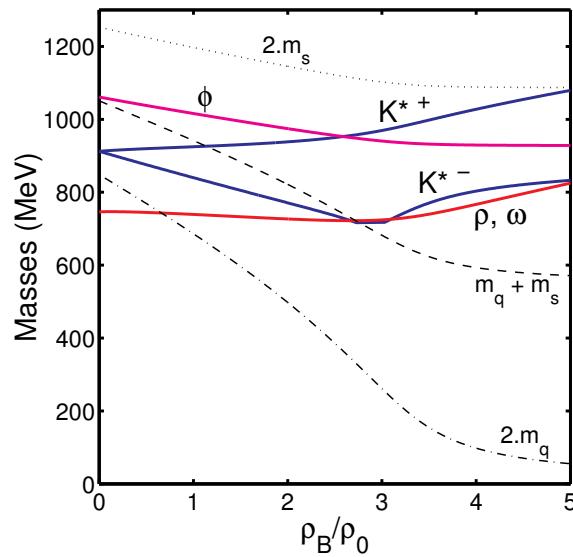


Figure 15. Masses des mésons vectoriels en fonction de la densité baryonique.

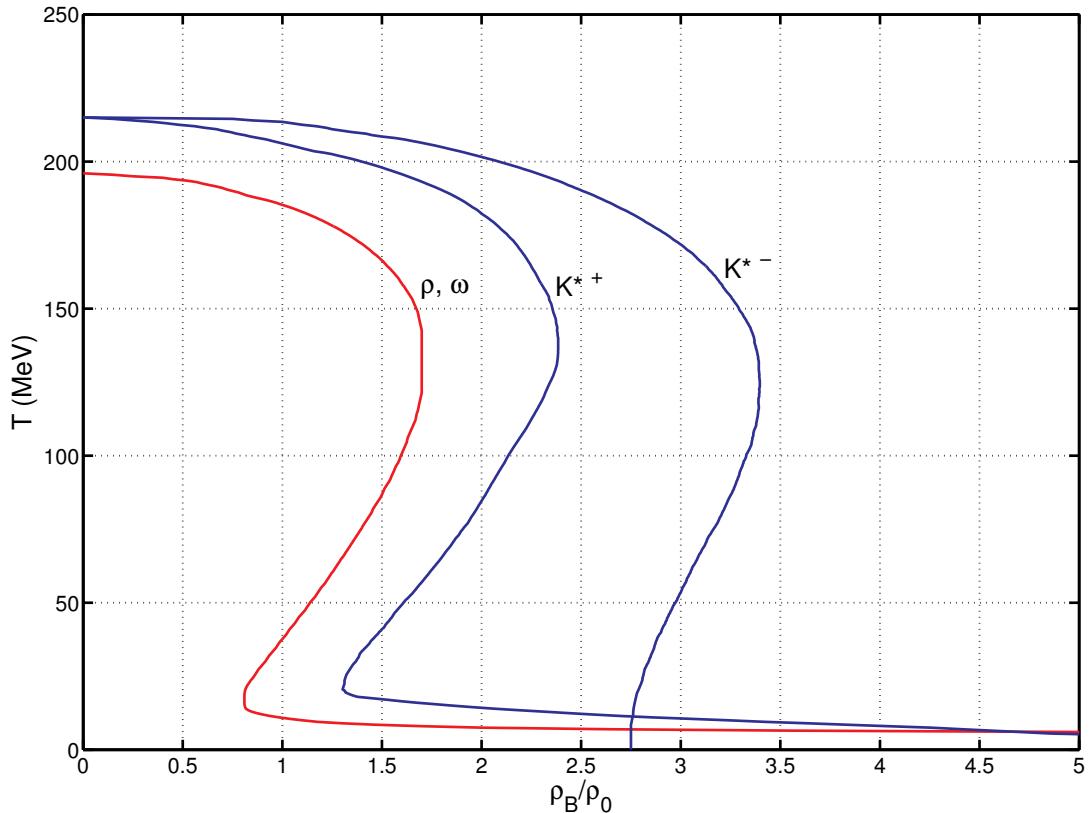


Figure 16. Diagramme de stabilité/instabilité des mésons vectoriels, avec le modèle NJL.

Mais, des similarités peuvent être trouvées entre les figures 6 et 16. Notamment, les courbes associées aux mésons ρ, ω, K^{*+} divergent vers les hautes densités à températures réduites,

sans atteindre l'axe des densités sur la figure 6. Ce comportement, associé à une transition « douce », a aussi été observé avec les mésons π, η, K^+ dans la figure 16. En revanche, le méson K^{*-} agit comme K^- , c'est-à-dire qu'il semble présenter une transition visible selon la densité.

4.3 Mésons axiaux

Nos résultats numériques, exposés figures 17 et 18, montrent que tous les mésons axiaux étudiés sont instables à température et densité nulles, sans exception. Leur comportement rappelle celui des mésons scalaires. Cependant, comme pour les mésons vectoriels, le terme de 't Hooft est aussi absent pour les mésons axiaux. Ces derniers sont clairement les mésons les plus massifs modélisés dans ce travail. En effet, le méson f'_1 a une masse comparable à celle d'un baryon lourd. Aussi, l'artefact observé pour les mésons scalaires a_0 et K_0^{*+} est aussi présent pour les mésons $a_1 - f_1$ et K_1^+ . Comme dans la figure 13, cet artefact est visible sur la figure 18, et se manifeste par des points anguleux, localisés à $1.8\rho_0$ pour $a_1 - f_1$ et $2.4\rho_0$ pour K_1^+ .

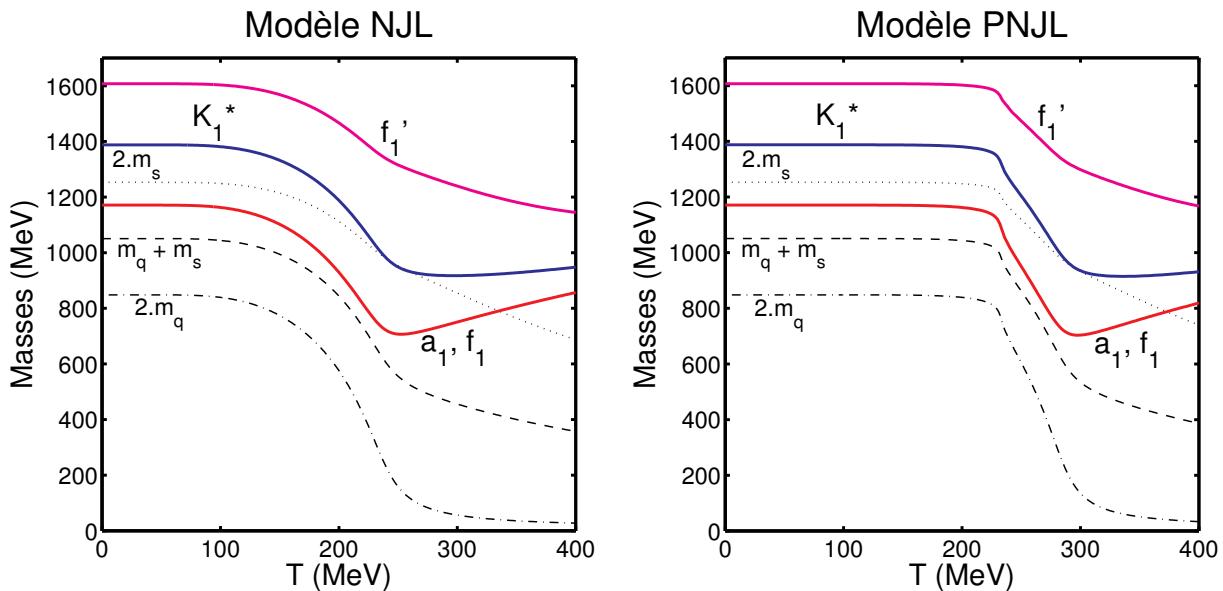


Figure 17. Masses des mésons axiaux en fonction de la température.

D'autre part, comme avec les mésons pseudo-scalaires et scalaires, nous observons aussi que certains mésons vectoriels et axiaux deviennent dégénérés à hautes températures/densités. Clairement, cela concerne ρ, ω avec a_1, f_1 d'une part, $K^{*+} - K_1^{*+}$ et $K^{*-} - K_1^{*-}$ d'autre part, figures 14, 17 et 15, 18. En fait, la seule différence entre les équations des mésons vectoriels et axiaux vient de leurs fonctions de polarisation respectives, via les termes $m_1^2 + m_2^2 \pm 4m_1m_2$, annexe D. On s'attend donc à ce que ces derniers deviennent négligeables à hautes T, ρ_B , par rapport aux autres termes des fonctions de polarisation, si au moins un des deux quarks mis en jeu est un quark léger.

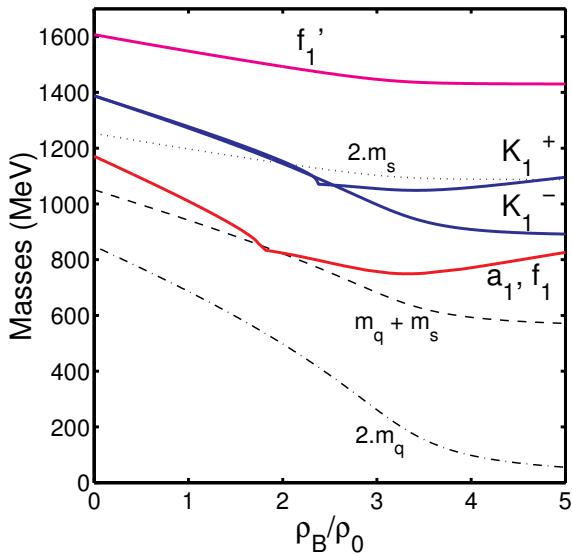


Figure 18. Masses des mésons axiaux en fonction de la densité baryonique.

5. Au-delà de la symétrie isospin

La symétrie isospin est très employée dans le cadre de cette thèse, comme dans la littérature liée aux modèles (P)NJL, voir [7] par exemple. Puisque les masses des quarks u et d sont très proches comparées à celle du quark étrange, cette approximation est pleinement justifiée. Comme indiqué au chapitre 2, elle mène à des simplifications des calculs. Par ailleurs, les résultats obtenus sont satisfaisants. Toutefois, dans certaines conditions, cette approximation n'est pas valable, comme par exemple quand μ_u (respectivement ρ_u) est très différent de μ_d (respectivement ρ_d). Cette situation se rencontre dans des systèmes physiques comme des étoiles à neutrons ou simplement avec des noyaux lourds [19]. Ces derniers sont le « substrat » de base pour étudier le plasma de quarks et de gluons, dans des collisions d'ions lourds. Dans cet exemple, le rapport entre les neutrons et protons, proche de 1.5, crée une asymétrie. Dans cette partie, nous n'avons provisoirement pas utilisé l'approximation isospin, afin d'étudier les conséquences de cela sur nos résultats. Bien entendu, l'abandon de la symétrie isospin induit des complications dans certains calculs. Notamment, nous proposons ci-après de reconsidérer ce qui a été fait dans le paragraphe 2.5 et de montrer les modifications à effectuer.

5.1 Traitement des mésons π^0 , η et η' dans le cas où $m_u \neq m_d$

Le couplage $\pi^0 - \eta - \eta'$ fait que la matrice de diffusion M associée à ces trois particules est écrite sous la forme d'une matrice 3×3 :

$$M = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{03} & M_{08} \\ M_{30} & M_{33} & M_{38} \\ M_{80} & M_{83} & M_{88} \end{bmatrix} = 2K^+ \left(1 - 2\Pi^P K^+ \right)^{-1}, \quad (35)$$

avec :

$$K^+ = \begin{bmatrix} K_{00}^+ & K_{03}^+ & K_{08}^+ \\ K_{30}^+ & K_{33}^+ & K_{38}^+ \\ K_{80}^+ & K_{83}^+ & K_{88}^+ \end{bmatrix} \quad (36)$$

et :

$$\Pi^P = \begin{bmatrix} \Pi_{00}^P & \Pi_{03}^P & \Pi_{08}^P \\ \Pi_{30}^P & \Pi_{33}^P & \Pi_{38}^P \\ \Pi_{80}^P & \Pi_{83}^P & \Pi_{88}^P \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Si l'approximation isospin n'est pas utilisée, la matrice K^+ ne peut pas être simplifiée. Dans le cas général, tous ces termes sont non nuls. La propriété suivante est par contre toujours vérifiée :

$$K_{30}^+ = K_{03}^+, \quad K_{80}^+ = K_{08}^+ \quad \text{et} \quad K_{83}^+ = K_{38}^+. \quad (38)$$

Donc la matrice K^+ est symétrique. Cette propriété est aussi vérifiée par la matrice Π^P , dont nous avons explicité chaque terme ci-après, comme par exemple dans [25] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi_{00}^P = \frac{2}{3} \cdot (\Pi_{u\bar{u}}^P + \Pi_{d\bar{d}}^P + \Pi_{s\bar{s}}^P) & \lambda_0 \times \lambda_0 = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \\ \Pi_{03}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\Pi_{u\bar{u}}^P - \Pi_{d\bar{d}}^P) & \lambda_0 \times \lambda_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{bmatrix} \\ \Pi_{08}^P = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (\Pi_{u\bar{u}}^P + \Pi_{d\bar{d}}^P - 2\Pi_{s\bar{s}}^P) & \lambda_0 \times \lambda_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \\ \Pi_{33}^P = \Pi_{u\bar{u}}^P + \Pi_{d\bar{d}}^P & \lambda_3 \times \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \\ \Pi_{38}^P = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (\Pi_{u\bar{u}}^P - \Pi_{d\bar{d}}^P) & \lambda_3 \times \lambda_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \\ \Pi_{88}^P = \frac{1}{3} \cdot (\Pi_{u\bar{u}}^P + \Pi_{d\bar{d}}^P + 4\Pi_{s\bar{s}}^P) & \lambda_8 \times \lambda_8 = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (39)$$

Les matrices sur la partie droite de (39) sont utilisées afin d'expliquer les facteurs associés aux termes $\Pi_{u\bar{u}}^P$, $\Pi_{d\bar{d}}^P$ et $\Pi_{s\bar{s}}^P$. Ces derniers désignent les fonctions de polarisation des mésons pseudo-scalaires. Par analogie avec le paragraphe 2.5, l'inverse de la matrice M est écrite formellement comme :

$$M^{-1} = \frac{1}{2 \cdot \det(K^+)} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{D}_2 & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D}_3 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = K_{08}^+ \cdot K_{38}^+ - K_{03}^+ \cdot K_{88}^+ - 2 \cdot \Pi_{03}^P \cdot \det(K^+) \\ \mathcal{B} = K_{03}^+ \cdot K_{38}^+ - K_{08}^+ \cdot K_{33}^+ - 2 \cdot \Pi_{08}^P \cdot \det(K^+) \\ \mathcal{C} = K_{08}^+ \cdot K_{03}^+ - K_{00}^+ \cdot K_{38}^+ - 2 \cdot \Pi_{38}^P \cdot \det(K^+) \\ \mathcal{D}_1 = K_{33}^+ \cdot K_{88}^+ - (K_{38}^+)^2 - 2 \cdot \Pi_{00}^P \cdot \det(K^+) \\ \mathcal{D}_2 = K_{00}^+ \cdot K_{88}^+ - (K_{08}^+)^2 - 2 \cdot \Pi_{33}^P \cdot \det(K^+) \\ \mathcal{D}_3 = K_{00}^+ \cdot K_{33}^+ - (K_{03}^+)^2 - 2 \cdot \Pi_{88}^P \cdot \det(K^+) \end{array} \right. \quad (41)$$

et :

$$\det(K^+) = K_{00}^+ \cdot K_{33}^+ \cdot K_{88}^+ - K_{00}^+ \cdot (K_{38}^+)^2 - K_{88}^+ \cdot (K_{03}^+)^2 - K_{33}^+ \cdot (K_{08}^+)^2 + 2 \cdot K_{03}^+ \cdot K_{08}^+ \cdot K_{38}^+. \quad (42)$$

Nous devons maintenant trouver les valeurs propres. Elles correspondent aux propagateurs des mésons (une valeur propre par propagateur). Donc, nous diagonalisons la matrice M^{-1} , c'est-à-dire nous trouvons les racines de son polynôme caractéristique. De manière symbolique, celui-ci s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & -x^3 + \underbrace{(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3) \cdot x^2}_{\alpha} + \underbrace{(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 - \mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_3 - \mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}_3)}_{\beta} \cdot x \\ & + \underbrace{(2 \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} - \mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{D}_3 - \mathcal{B}^2 \cdot \mathcal{D}_2 - \mathcal{C}^2 \cdot \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}_3)}_{\delta} \end{aligned}. \quad (43)$$

Les racines sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\pi_0}^{-1} = \left(-\frac{X^{1/3}}{12} + \frac{3 \cdot \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)}{X^{1/3}} + \frac{\alpha}{3} \right) + \left(\frac{X^{1/3}}{6} + \frac{6 \cdot \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)}{X^{1/3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ M_{\eta}^{-1} = \left(-\frac{X^{1/3}}{12} + \frac{3 \cdot \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)}{X^{1/3}} + \frac{\alpha}{3} \right) - \left(\frac{X^{1/3}}{6} + \frac{6 \cdot \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)}{X^{1/3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ M_{\eta'}^{-1} = \frac{X^{1/3}}{6} - \frac{6 \cdot \left(-\frac{\beta}{3} - \frac{\alpha^2}{9} \right)}{X^{1/3}} + \frac{\alpha}{3} \end{array} \right. , \quad (44)$$

avec :

$$X = 36 \cdot \beta \cdot \alpha + 108 \cdot \delta + 8 \cdot \alpha^3 + 12 \cdot \sqrt{-12 \cdot \beta^3 - 3 \cdot \beta^2 \cdot \alpha^2 + 54 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \delta + 81 \cdot \delta^2 + 12 \cdot \delta \cdot \alpha^3} . \quad (45)$$

Il suffit alors de résoudre, dans le cas général :

$$\begin{cases} M_{\pi_0}^{-1} \left(\sqrt{m_{\pi_0}^2 + (\vec{k}_{\pi_0})^2}, \vec{k}_{\pi_0} \right) = 0 \\ M_{\eta}^{-1} \left(\sqrt{m_{\eta}^2 + (\vec{k}_{\eta})^2}, \vec{k}_{\eta} \right) = 0 \\ M_{\eta'}^{-1} \left(\sqrt{m_{\eta'}^2 + (\vec{k}_{\eta'})^2}, \vec{k}_{\eta'} \right) = 0 \end{cases} . \quad (46)$$

Les \vec{k} sont les quantités de mouvement des particules, et les m sont les masses recherchées. Bien entendu, nous pouvons choisir d'étudier les particules au repos, c'est-à-dire pour $\vec{k} = \vec{0}$, comme nous l'avons précédemment fait dans ce chapitre. Pour conclure ce calcul, il peut être utile de voir ce que nous obtenons si nous prenons maintenant $m_u = m_d$. En d'autres termes, nous essayons de retrouver les résultats obtenus avec l'approximation isospin à partir des formules que nous venons d'établir. Dans ce cas, il est facile de vérifier que :

$$K_{03}^+ = K_{38}^+ = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_{03}^P = \Pi_{38}^P = 0 . \quad (47)$$

En reprenant l'équation (40), nous avons :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{2 \det(K^+)} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{D}_2 & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D}_3 \end{bmatrix} \quad (48) \\ &= \frac{1}{2K_{33}^+ \cdot \det'} \cdot \begin{bmatrix} K_{33}^+ \cdot (K_{88}^+ - 2\Pi_{00}^P \cdot \det') & 0 & K_{33}^+ \cdot (-K_{08}^+ - 2\Pi_{08}^P \cdot \det') \\ 0 & K_{33}^+ \cdot \det' \cdot \left(\frac{1}{K_{33}^+} - 2\Pi_{33}^P \right) & 0 \\ K_{33}^+ \cdot (-K_{08}^+ - 2\Pi_{08}^P \cdot \det') & 0 & K_{33}^+ \cdot (K_{00}^+ - 2\Pi_{88}^P \cdot \det') \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec :

$$\det(K^+) = K_{33}^+ \cdot \left(K_{00}^+ \cdot K_{88}^+ - (K_{08}^+)^2 \right) = K_{33}^+ \cdot \det' . \quad (49)$$

Ce qui est équivalent à :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{K_{88}^+ - 2\Pi_{00}^P \cdot \det'}{2\det'} & \frac{-K_{08}^+ - 2\Pi_{08}^P \cdot \det'}{2\det'} & 0 \\ \frac{-K_{08}^+ - 2\Pi_{08}^P \cdot \det'}{2\det'} & \frac{K_{00}^+ - 2\Pi_{88}^P \cdot \det'}{2\det'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2K_{33}^+ \cdot \Pi_{33}^P}{2K_{33}^+} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} [M_{\eta-\eta'}^{-1}] & 0 \\ 0 & [M_{\pi_0}^{-1}] \end{bmatrix} . \quad (50)$$

Nous retrouvons les équations décrites dans [13], où l'approximation isospin était employée. La particule π_0 y est découpée de $\eta - \eta'$. Son propagateur est alors :

$$M_{\pi_0} = \frac{2 \cdot K_{33}^+}{1 - 2 \cdot K_{33}^+ \cdot \Pi_{33}^P} . \quad (51)$$

Tout ce raisonnement est bien sûr identique pour a_0^0 et $f_0 - f_0'$.

5.2 Résultats obtenus, discussion

Le tableau 3 rassemble les masses et largeurs de niveau des mésons étudiés à température et densité nulles. Dans ce tableau, la colonne P1 est associée à nos résultats trouvés avec ce jeu de paramètres, c'est-à-dire celui utilisé pour les graphes exposés dans ce chapitre. La colonne EB concerne le jeu de paramètres vu au chapitre 2 qui n'utilise pas la symétrie isospin. La colonne « valeurs expérimentales » a été constituée grâce aux valeurs données dans [29, 30]. Cependant, les valeurs liées à f_0' et f_1' de cette colonne ont été estimées grâce à [31]. En fait, cette référence nous fournit les valeurs utilisées dans le cadre des modèles QMD/URQMD. Ces deux modèles considèrent la symétrie isospin. Les données associées aux mésons sont reproduites dans l'annexe A. Elles constituent une autre possibilité de comparaison, notamment avec nos données qui utilisent la symétrie isospin. En fait, même si des différences peuvent être mentionnées entre nos données P1 et celles de la littérature (données expérimentales, [31]), les valeurs restent dans l'ensemble du bon ordre de grandeur en ce qui concerne les masses. Par ailleurs, l'accord avec les publications liées aux modèles (P)NJL [7, 13, 16, 19, 22, 23, 25–27] est aussi correct, conscient que le choix du jeu de paramètres utilisé a une grande influence sur les valeurs trouvées. En revanche, concernant les largeurs de niveau, nous observons des dissemblances par rapport aux données expérimentales. Mais, nous rappelons que dans le cadre de notre travail, la notion de largeur de niveau ou d'instabilité est associée à la désintégration du méson en une paire quark/antiquark, alors que dans les données expérimentales, l'instabilité d'un méson correspond notamment en sa désintégration en un méson plus léger.

Concernant les données de la colonne EB, qui ont d'ailleurs motivées les travaux effectués dans cette partie, l'accord avec les données expérimentales est très bon. Dans la pratique, même si nous avons utilisé les masses des pions et des kaons pour calibrer les valeurs de notre jeu de paramètre EB (notamment les masses nues des quarks), nous pouvons souligner la précision remarquable obtenue avec les mésons pseudo-scalaires. Concernant les mésons π^0, η, η' , nous rappelons que les résultats EB ont été obtenus en appliquant la méthode décrite au paragraphe 5.1. Ces résultats sont également corrects, même si nous nous attendions à une différence de masse plus grande entre celle de π^0 et celle des pions π^\pm . D'autre part, de bons résultats sont aussi observables avec les mésons vectoriels. En fait, en général, les particules trouvées stables dans le modèle (typiquement les mésons pseudo-scalaires et vectoriels, mis à part η') ont des masses plus proches des données expérimentales que celles qui sont instables, c'est-à-dire les mésons scalaires et axiaux, sauf f_0 .

			Jeu de paramètres P1		Jeu de paramètres EB		Valeurs expérimentales	
mésons			masses	largeurs	masses	largeurs	masses	largeurs
pseudo scalaire	π^\pm	$ud\bar{d}, d\bar{u}$	135.96	0	139.46	0	139.57	0
	π^0	$mix(u\bar{u}, d\bar{d})$	135.96	0	139.38	0	134.98	0
	η	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	557.13	0	517.86	0	547.85	0.00118
	η'	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	1012.16	158.74	955.92	152.33	957.78	0.194
	K^\pm	$u\bar{s}, s\bar{u}$	548.50	0	493.94	0	493.677	0
	K^0/\bar{K}^0	$d\bar{s}, s\bar{d}$	548.50	0	497.94	0	497.614	0
scalaire	a_0^\pm	$ud\bar{d}, d\bar{u}$	979.48	193.73	970.16	187.84	984.7	50–100
	a_0^0	$mix(u\bar{u}, d\bar{d})$	979.48	193.73	970.17	187.88	984.7	50–100
	f_0	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	843.13	0	834.07	0	980	40–100
	f_0'	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	1353.34	168.15	1274.05	161.45	1370	200
	$K_0^{*\pm}$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	1178.14	199.28	1132.89	191.88	1429	294
	K_0^{*0}/\bar{K}_0^{*0}	$d\bar{s}, s\bar{d}$	1178.14	199.28	1135.99	191.94	1429	294
vectoriel	ρ^\pm	$ud\bar{d}, d\bar{u}$	746.09	0	764.12	0	775.5	146.2
	ρ^0	$mix(u\bar{u}, d\bar{d})$	746.09	0	764.08	0	775.5	146.2
	ω	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	746.09	0	764.08	0	782.65	8.49
	ϕ	$s\bar{s}$	1061.18	0	1025.79	0	1019.455	4.26
	$K^{*\pm}$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	912.25	0	899.96	0	891.66	50.8
	K^{*0}/\bar{K}^{*0}	$d\bar{s}, s\bar{d}$	912.25	0	902.12	0	896.10	50.7
axial	a_1^\pm	$ud\bar{d}, d\bar{u}$	1171.06	434.01	1173.77	478.50	1230	250– 600
	a_1^0	$mix(u\bar{u}, d\bar{d})$	1171.06	434.01	1173.78	478.54	1230	250– 600
	f_1	$mix(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	1171.06	434.01	1173.78	478.54	1281.8	24.3
	f_1'	$s\bar{s}$	1607.45	487.39	1531.55	522.49	1512	350
	$K_1^{*\pm}$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	1387.78	464.39	1349.69	502.58	1273	90
	K_1^{*0}/\bar{K}_1^{*0}	$d\bar{s}, s\bar{d}$	1387.78	464.39	1353.21	503.04	1273	90

Tableau 3. Masses des mésons à température et densité nulles.

Cependant, concernant la validité de nos résultats, nous devrions avoir un regard critique sur le traitement de certains mésons. Pour les mésons pseudo-scalaires, il n'y a pas de vrais défauts à signaler, sauf bien sûr pour η' . Mais, en revanche, nous sommes conscients que les fortes masses trouvées pour les mésons axiaux suggèrent que nous soyons là potentiellement proches des limites de validité de notre approche. Aussi, pour les mésons vectoriels et scalaires, stricto sensu notre modélisation n'est pas complète, simplement parce que certaines désintégrations importantes ne sont pas incluses dans notre description. Il est en effet bien

connu que le méson vectoriel ρ a de fortes chances de se désintégrer en deux pions, plutôt qu'en une paire quark/antiquark. L'inclusion de ce processus de désintégrations d'un méson en d'autres mésons pourrait conduire à des modifications des résultats, comme celles de la figure 16. Mais, nous pouvons remarquer que dans le cadre de notre travail, ou dans des papiers comme [13, 14, 17], les mésons scalaires et ρ sont pris en compte principalement pour intervenir dans les calculs de sections efficaces, en tant que propagateurs.

6. Conclusion

Dans ce chapitre destiné à l'étude des mésons, nous avons tout d'abord exposé la méthode utilisée pour estimer numériquement les masses des mésons. Nous avons vu qu'il nous a été possible d'inclure une grande variété de mésons dans notre modèle, pour ensuite les étudier à températures et/ou densités finies. Nous avons aussi calculé certaines données annexes, comme les constantes de couplage ou l'angle de mélange entre η et η' . La précision obtenue est apparue très prometteuse, en particulier quand nous n'avons pas utilisé la symétrie isospin. Dans l'ensemble, nos résultats sont en accord avec ceux exposés dans la littérature. Notamment, nous avons aussi confirmé l'effet de l'inclusion d'une boucle de Polyakov sur nos résultats, c'est-à-dire un décalage des valeurs vers des hautes températures. Cela a aussi entraîné des masses quasi-constants à températures réduites. Une partie des travaux décrits dans ce chapitre ont déjà été publiés dans les références citées. Mais, grâce à certains aspects de notre travail, comme les « diagrammes de phase », nous avons souligné des phénomènes bien particuliers. Cela concerne notamment le comportement de certains mésons pseudo-scalaires et vectoriels à température nulle et densités finies.

Nous verrons dans les prochains chapitres comment construire les autres particules que nous utiliserons dans notre travail, c'est-à-dire les diquarks et les baryons. Dans ces chapitres, nous remarquerons que le travail à effectuer sera fait selon une méthode similaire à celle utilisée ici. Au-delà des mésons, nous avons donc vu une méthode générale pour modéliser des particules composites. Cela justifie que nous ayons passé beaucoup de temps à décrire les équations. Pour les autres particules, nous n'aurons qu'à reprendre la méthode, en adaptant simplement lesdites équations.

7. Références

- [1] Bernard V, Meissner U G et Zahed I 1987 Decoupling of the pion at finite temperature and density *Phys. Rev. D* **36** 819–23
- [2] Bernard V, Meissner U G et Zahed I 1987 Properties of the scalar σ meson at finite density *Phys. Rev. Lett.* **59** 966–9
- [3] Bernard V et Meissner U G 1988 Properties of vector and axial-vector mesons from a generalized Nambu–Jona-Lasinio model *Nucl. Phys. A* **489** 647–70
- [4] Bernard V, Jaffe R L et Meissner U G 1988 Strangeness mixing and quenching in the Nambu–Jona-Lasinio model *Nucl. Phys. B* **308** 753–90

- [5] Bernard V, Osipov A A et Meissner U G 1992 Consistent treatment of the bosonized Nambu-Jona-Lasinio model *Phys. Lett. B* **285** 119–25
- [6] Bernard V, Meissner U G et Osipov A A 1994 The momentum-space bosonization of the Nambu-Jona-Lasinio model with vector and axial-vector mesons *Phys. Lett. B* **324** 201–8
- [7] Klimt S, Lutz M, Vogl U et Weise W 1990, Generalized SU(3) Nambu Jona-Lasinio model. (I) Mesonic modes *Nucl. Phys. A* **516** (1990) 429–68
- [8] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [9] Lutz M, Klimt S et Weise W 1992 Meson properties at finite temperature and baryon density *Nucl. Phys. A* **542** 521–558
- [10] Hatsuda T et Kunihiro T 1994 QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian *Phys. Rep.* **247** 221–367
- [11] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [12] Klevansky S P et Lemmer R H 1997 Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory Report No HD-TVP-97/05, arXiv:hep-ph/9707206
- [13] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [14] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in SU_f(3) at finite temperatures *Nucl. Phys. A* **608** 356–88
- [15] Rehberg P et Klevansky S P 1996 One loop integrals at finite temperature and density *Ann. Phys.* **252** 422–57
- [16] Klevansky S P 1998 Chiral Symmetry Breaking in Hot Matter (*Lecture Notes in Physics* vol **516**) (Heidelberg:Springer) pp 113–61
- [17] He Y B, Hüfner J, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi\pi$ scattering in the ρ -meson channel at finite temperature *Nucl. Phys. A* **630** 719–42
- [18] Nebauer R 2000 Propriétés des quarks et mésons à température et densités finies dans le cadre du modèle NJL *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [19] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu–Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [20] Huguet R, Caillou J C et Labarsouque J 2007 In-medium omega meson mass and quark condensate in a Nambu–Jona-Lasinio model constrained by recent experimental data *Phys. Rev. C* **75** 048201
- [21] Kuhn C, Plasma de quarks et de gluons et matière étrange du SPS au LHC, *Cours présenté à l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 1998, Maubuisson, France, 7-12 Septembre 1998. Référence: publication IReS 98-24*
<http://www.pd.infn.it/alipd/papers/qgpkuhn.ps.gz>
<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00652935/>
- [22] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004

-
- [23] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003
 - [24] Blaschke D, Costa P et Kalinovsky Y L 2012 D mesons at finite temperature and density in the PNJL model *Phys. Rev. D* **85** 034005
 - [25] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A et Kalinovsky Y L 2005 Analysis of UA(1) symmetry breaking and restoration effects on the scalar-pseudoscalar meson spectrum *Phys. Rev. D* **71** 116002
 - [26] Costa P, Ruivo M C et Kalinovsky Y L 2003 Pseudoscalar neutral mesons in hot and dense matter *Phys. Lett. B* **560** 171–7
 - [27] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A et Kalinovsky Y L 2004 Pseudoscalar mesons in hot, dense matter *Phys. Rev. C* **70** 025204
 - [28] Bramon A, Escribano R et Scadron M D 1999 The $\eta - \eta'$ mixing angle revisited *Eur. Phys. J. C* **7** 271–278
 - [29] Nakamura K (Particle Data Group) 2010 Review of particle physics *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** 075021
 - [30] Beringer J *et al.* (Particle Data Group) 2012 Review of Particle Physics *Phys. Rev. D* **86** 010001
 - [31] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369
 - [32] Bohm D et Pines D 1951 A Collective Description of Electron Interactions. I. Magnetic Interactions *Phys. Rev.* **82** 625–34
 - [33] Bohm D et Pines D 1952 A Collective Description of Electron Interactions: II. Collective vs Individual Particle Aspects of the Interactions *Phys. Rev.* **85** 338–53
 - [34] Bohm D et Pines D 1953 A Collective Description of Electron Interactions: III. Coulomb Interactions in a Degenerate Electron Gas *Phys. Rev.* **92** 609–25
 - [35] Pines D 1953 A Collective Description of Electron Interactions: IV. Electron Interaction in Metals *Phys. Rev.* **92** 626–36

Chapitre 4

Les diquarks

Une partie de ce chapitre a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38** 105003

1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu les possibilités offertes par les modèles (P)NJL, afin de modéliser des quarks, et ensuite des mésons. L'étape suivante devrait être maintenant d'étudier les baryons avec ces deux modèles. Cependant, comme observé dans le chapitre 3, les approches (P)NJL traitent facilement les particules composites via l'utilisation de boucles. Dans l'exemple des mésons, nous avons vu que ces particules étaient décrites comme des boucles de quarks/antiquarks. Concernant les baryons, nous avons à traiter une association de trois quarks. Les équations de Faddeev pourraient permettre de traiter des interactions à 3 corps [1, 2]. Elles ont déjà été utilisées dans le cadre du modèle NJL [3–5]. En fait, grâce à la représentation des équations de Faddeev proposée dans [6], une simplification de ces équations peut être proposée. Elle consiste à considérer une interaction à deux corps entre deux des quarks, et ensuite de considérer un état lié de ce groupe de deux particules avec le troisième quark. En d'autres termes, les interactions à trois corps sont négligées. Comme montré dans [6], cette simplification est pleinement justifiable, parce que les interactions à trois corps sont supposées être négligeables devant celles à deux corps. Plus précisément, dans cette description, les interactions à deux corps s'exerçant entre deux quarks amènent naturellement à considérer les particules composites associées, c'est-à-dire les diquarks. En conséquence, cette simplification propose de modéliser les baryons comme un état lié formé par un quark et un diquark, par exemple comme dans [7, 8]. Cela justifie ainsi l'étude des diquarks. En outre, quand nous étudierons les réactions permettant la formation de baryons, les diquarks vont intervenir. Il sera alors discuté leur rôle à cette occasion : propagateur dans les réactions, intermédiaires réactionnels, les deux ? En effet, comme observé dans la littérature, par exemple dans [9, 10], les diquarks semblent être largement plus qu'une simple astuce phénoménologique utilisée pour modéliser les baryons, comme expliqué dans [6].

Mais, dans le cadre du modèle standard, nous avons vu au chapitre 1 que les diquarks sont des particules colorées. En conséquence, ils ne peuvent pas être observés à l'état libre. Cela implique que nous ne disposons pas de données expérimentales, notamment concernant leurs masses. Toutefois, des études théoriques ont concernées la modélisation de diquarks, comme [11–14]. Ils fournissent donc des données relatives aux masses des diquarks. Certaines approches ont été effectuées avec le modèle NJL, comme par exemple [15–17], ou [18, 19] dans le cadre de la supraconductivité de couleur, mais pas encore en se servant du modèle PNJL. Il est toutefois vrai que [20] a inclus des termes prenant en compte les contributions des diquarks, mais la finalité de cet article n'était pas d'étudier les masses des diquarks. Dans

l'ensemble, ces références se sont focalisées sur les diquarks les plus légers, c'est-à-dire les diquarks scalaires. Certains travaux ont analysé l'évolution de leurs masses en fonction de la température, ou de la densité baryonique, comme par exemple [17].

Néanmoins, un tel travail est plus rare pour les autres diquarks, c'est-à-dire les diquarks pseudo-scalaires, axiaux et vectoriels. En fait, les diquarks axiaux pourraient permettre notamment la modélisation du décuplet de baryons. Dans le même temps, comme remarqué avec les mésons scalaires et axiaux, certains de ces diquarks peuvent être considérés comme moins importants par rapport aux autres. Cela concerne les diquarks pseudo-scalaires et vectoriels. Cependant, nous verrons au chapitre 6 que les diquarks pseudo-scalaires interviennent dans les réactions de baryonisation, en tant que propagateurs. En suivant ce raisonnement, le même argument peut être appliqué aux diquarks vectoriels : dans des évolutions futures de ce travail, ils pourraient être considérés comme propagateurs dans des réactions formant des baryons du décuplet. Aussi, d'autres aspects de l'étude de diquarks sont encore absents de la littérature. Cela concerne l'étude de la stabilité des diquarks, en particulier avec les diquarks scalaires et axiaux, par exemple dans le plan T, ρ_B . Cela concerne aussi le traitement des anti-diquarks, afin de pouvoir modéliser des antibaryons...

Afin de traiter les points évoqués dans le paragraphe précédent, ce chapitre est organisé de la manière suivante : tout d'abord, dans la partie 2, nous présentons les équations consacrées à l'étude des diquarks. Il y est expliqué comment le travail effectué précédemment avec les mésons peut être simplement adapté afin de nous donner les masses des diquarks, en utilisant des quarks/antiquarks conjugués de charge. Evidemment, ce travail inclut l'adaptation des équations NJL afin d'obtenir celles de la description PNJL. Aussi, certaines considérations de théories des groupes sont présentées. Comme avec les mésons, notre analyse théorique s'est aussi focalisée sur l'établissement des équations consacrées à l'estimation des constantes de couplages des diquarks. Après, la partie 3 expose les résultats obtenus pour chacun des diquarks cités : scalaires, pseudo-scalaires, axiaux, vectoriels, mais aussi pour les anti-diquarks. L'effet de la boucle de Polyakov est également souligné pour tous ces résultats. Un résumé des masses trouvées est disponible à la fin de la partie, nous permettant de conclure sur la qualité des données obtenues. La conclusion est proposée dans la partie 4. Après, pour clôturer ce chapitre, les calculs détaillés établissant le propagateur d'un quark conjugué de charge sont proposés dans la partie 5.

2. Etude théorique

2.1 Méthode employée

Pour modéliser un diquark, l'idée principale de notre approche consiste à reprendre ce qui a été fait pour les mésons, afin de l'adapter [6, 17]. Un méson a été traité comme une boucle de deux quarks, l'un allant vers le futur et l'autre allant vers le passé. Ce quark est en fait un antiquark, selon le point de vue de Feynman¹. Pour un diquark, il est nécessaire de remplacer cet antiquark par un quark. Pour faire cela, une astuce consiste à remplacer le propagateur de la particule par celui de sa particule *conjuguée de charge*. Ainsi, le « quark » qui allait vers le

¹ Feynman R P 1949 The Theory of Positrons *Phys. Rev.* **76** 749–59

passé (c'est-à-dire l'antiquark) deviendra virtuellement un « vrai quark », ou du moins il va agir comme tel. La figure 1 ci-après propose de résumer et d'expliquer la méthode sous la forme de diagrammes. En toute rigueur, cette approche « mime » seulement le comportement de quarks en appliquant la conjugaison de charge à des antiquarks.

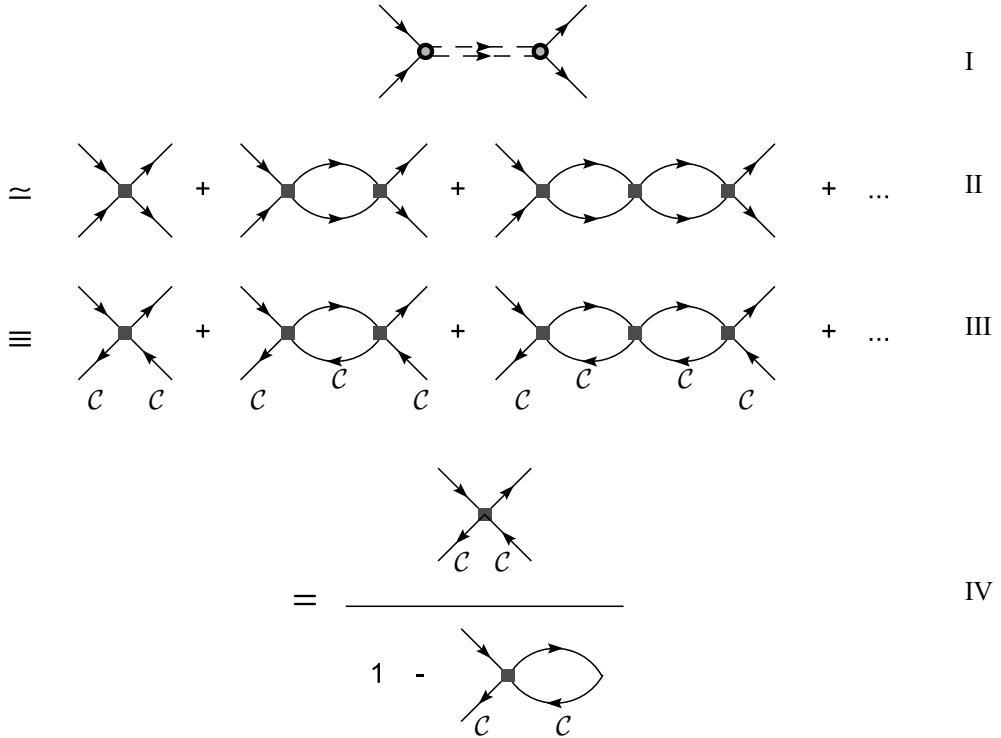


Figure 1. Schématisation de la méthode utilisée pour modéliser les diquarks.

L'astuce apparaît dans le passage de la seconde à la troisième ligne de la figure 1. Chaque antiquark conjugué de charge est indiqué par le symbole de la conjugaison de charge \mathcal{C} . Cela concerne les antiquarks au sein des boucles, mais aussi les lignes externes. Par analogie avec les chapitres précédents, nous écrivons immédiatement que $\blacksquare \equiv \mathcal{Z}$ pour décrire le couplage effectif au niveau de chaque vertex. De la même manière, la fonction de boucle est écrite comme :

$$\text{Diagramme avec boucle fermée} \equiv \Pi \quad , \quad (1)$$

\mathcal{C}

de sorte que la matrice de transition T est structurellement identique à celle vue pour les mésons. En partant de l'équation de Bethe-Salpeter $T = \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \cdot \Pi \cdot T$, nous arrivons comme dans le chapitre 3 à la relation :

$$T = \frac{\mathcal{Z}}{1 - \Pi \mathcal{Z}} , \quad (2)$$

Dans laquelle seul le \mathcal{Z} et l'écriture de Π diffère. Dans tous les cas traités dans ce chapitre, les diquarks ne sont pas couplés, comme ce fut le cas pour certains mésons. En conséquence, les équations utilisent toujours des \mathcal{Z} et Π scalaires. Ainsi, pour obtenir la masse m d'un

diquark ayant une quantité de mouvement k , l'équation à résoudre présente la forme générale suivante :

$$1 - \Pi(k_0, \vec{k}) \cdot \mathcal{Z} = 0 \Big|_{k_0 = \sqrt{m^2 + (\vec{k})^2}}, \quad \vec{k} \text{ fixé}. \quad (3)$$

Pour tous les diquarks vus ici, les facteurs de saveur sont égaux à 1 au niveau de chaque vertex mettant en jeu un diquark et une paire de deux quarks, comme expliqué dans l'annexe C.

2.2 Considérations de théorie des groupes

Nous débutons notre analyse en utilisant le travail effectué dans le chapitre 1 pour les diquarks. En effet, il avait été noté que les diquarks pouvaient être écrits sous la forme d'un produit tensoriel de deux représentations 3 de $SU(3)_f$ associées aux quarks. Cela conduit à deux représentations irréductibles [6],

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6, \quad (4)$$

de sorte que les diquarks sont divisés en deux groupes. Les diquarks de la représentation 6 peuvent être composés par deux quarks de saveurs identiques, alors que cela n'est pas possible pour ceux de la représentation $\bar{3}$, figure 2.

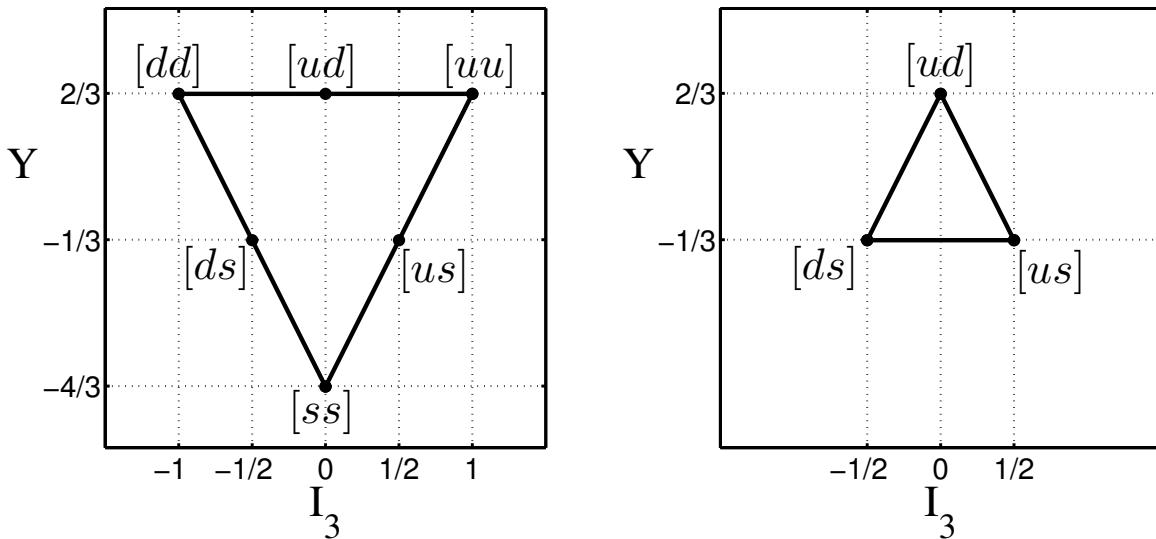


Figure 2. Diquarks dans la représentation 6 (partie gauche), et dans la représentation $\bar{3}$ (partie droite).

En effet, les diquarks de la représentation 6 ont une fonction d'onde symétrique en saveur. Par exemple, pour un diquark $[ud]$ issu de cette représentation, nous avons $|[ud]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$.

En revanche, les diquarks de la représentation $\bar{3}$ ont des fonctions d'onde antisymétriques en

saveur, de sorte que pour un $[ud]$ de cette représentation $\bar{3}$, la fonction d'onde est $|[ud]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$ [12].

Le même raisonnement que celui que nous venons de faire pour la saveur est faisable dans l'espace des couleurs. Cela nous conduit ainsi aux mêmes résultats, c'est-à-dire deux groupes possibles. Ils correspondent tout d'abord aux diquarks qui ont une fonction d'onde symétrique en couleur, c'est-à-dire que cela correspond à une représentation 6. Les autres diquarks ont une fonction d'onde antisymétrique en couleur, avec la représentation $\bar{3}$. Cependant, comme expliqué dans [6], comme la finalité est de pouvoir construire des baryons en utilisant des diquarks, nous voyons mal comment des diquarks symétriques en couleur pourraient nous conduire à cet objectif. Plus précisément, un baryon est un objet « blanc », par conséquent composé de quarks avec différentes couleurs. Un diquark constitué par exemple avec deux quarks bleus associés à un autre quark de couleur quelconque ne peut pas donner un baryon. Les diquarks traités dans ce chapitre sont donc antisymétriques en couleur. Par ailleurs, cela permet à des diquarks comme $[uu]$ de respecter le principe d'exclusion de Pauli.

Pour les mésons, les courants conservés ont la forme $\bar{\psi} \gamma_\mu \Gamma \psi$. Les courants conservés des diquarks sont obtenus en considérant l'interaction entre deux quarks. Cela conduit à :

$$\bar{\psi}^C \gamma_\mu \Gamma \psi, \quad (5)$$

où il apparaît le champ conjugué de charge $\bar{\psi}^C$. Celui-ci est défini, selon [6], comme :

$$\psi^C = \mathcal{C} \gamma_0 \psi^* \quad \text{ou} \quad \bar{\psi}^C = -\psi^T \mathcal{C}^{-1} = \psi^T \mathcal{C}. \quad (6)$$

Dans ces équations, * indique la conjugaison complexe et T l'opération de transposition. Le Γ^j correspond au canal d'interaction. Aussi, \mathcal{C} est l'opérateur de conjugaison de charge, défini par $\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2$ dans la représentation de Dirac. De plus, comme avec les mésons, nous avons plusieurs types de diquarks. Les diquarks scalaires et pseudo-scalaires sont des particules de spin 0, alors que le spin des diquarks vectoriels et axiaux est égal à 1. Le tableau 1, inspiré de [6], propose de rassembler ces données. Concernant les courants conservés, nous notons l'introduction du tenseur totalement antisymétrique ϵ^{abc} , afin de respecter le fait que les diquarks traités doivent être antisymétriques en couleur. Chaque lettre a, b, c font référence à des couleurs. La couleur a est associée au champ conjugué de charge $\psi^T \mathcal{C}^{-1}$, et la couleur b au champ ψ . Comme expliqué, les diquarks peuvent être symétriques ou antisymétriques en saveur, ce qui correspond respectivement aux représentations 6 et $\bar{3}$. En conséquence, les générateurs de $SU(3)_f$ et λ^0 , c'est-à-dire le 9^{ième} λ^j qui apparaît dans les courants conservés, sont divisés en deux groupes. Pour les diquarks symétriques en saveur, nous avons $\lambda^S|_{S=0,1,3,4,6,8}$, alors que pour ceux qui sont antisymétriques, cela concerne $\lambda^A|_{A=2,5,7}$.

En outre, un point important du tableau 1 concerne la manière de nommer les types de diquarks. En effet, le nommage est inversé par rapport à celui vu pour les mésons. Par

exemple, les diquarks *scalaires* correspondent à un canal γ_5 . Ce comportement est dû à l'opérateur $\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2$, comme expliqué dans [6, 12].

Type de diquarks	Valeur de Γ	Courants conservés	Spin	Représentation des diquarks	Diquarks possibles
Scalaire (S)	$i\gamma^5$	$\psi_a^T \mathcal{C}^{-1} \gamma_5 \lambda^A \psi_b i \cdot \epsilon^{abc}$	0	$\bar{3}$	$[ud], [us], [ds]$
Pseudo-scalaire (P)	1	$\psi_a^T \mathcal{C}^{-1} i \lambda^A \psi_b i \cdot \epsilon^{abc}$			
Vectoriel (V)	$\gamma^\mu \cdot i\gamma^5$	$\psi_a^T \mathcal{C}^{-1} i \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^A \psi_b i \cdot \epsilon^{abc}$			
Axial (A)	γ^μ	$\psi_a^T \mathcal{C}^{-1} i \gamma_\mu \lambda^S \psi_b i \cdot \epsilon^{abc}$	1	6	$[ud], [us], [ds], [uu], [dd], [ss]$

Tableau 1. Liste des diquarks étudiés.

2.3 Lagrangien des diquarks

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la partie du Lagrangien NJL associée aux diquarks, c'est-à-dire $\mathcal{L}_{\text{int } qq}$, était écrite comme :

$$\mathcal{L}_{\text{int } qq} = \sum_{\alpha=S,P,V,A} G_{DIQ}^\alpha \cdot \sum_{i,j} (\bar{\psi}_a \gamma_\mu \Gamma_\alpha^i \psi_b^c) (\bar{\psi}_d^c \gamma^\mu \Gamma_\alpha^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de}, \quad (7)$$

dans laquelle i, j font références aux matrices de saveur λ^j incluses dans le terme $\Gamma_\alpha^{i,j}$, où α est associé aux quatre canaux d'interaction : Scalaire, Pseudo-scalaire, Vectoriel et Axial. L'équation (7) est maintenant réécrite, en particulier pour clarifier la sommation sur ces quatre canaux. Grâce à une transformation de Fierz, cela conduit à l'expression [6, 7, 15, 18] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int } qq} = & G_{DIQ}^S \cdot \sum_{j=2,5,7} (\bar{\psi}_a i \gamma_5 \lambda^j \mathcal{C} \bar{\psi}_b^T) (\bar{\psi}_d^T \mathcal{C}^{-1} i \gamma_5 \lambda^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de} \\ & + G_{DIQ}^P \cdot \sum_{j=2,5,7} (\bar{\psi}_a \lambda^j \mathcal{C} \bar{\psi}_b^T) (\bar{\psi}_d^T \mathcal{C}^{-1} \lambda^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de} \\ & + G_{DIQ}^V \cdot \sum_{j=2,5,7} (\bar{\psi}_a i \gamma_5 \cdot \gamma_\mu \lambda^j \mathcal{C} \bar{\psi}_b^T) (\bar{\psi}_d^T \mathcal{C}^{-1} i \gamma_5 \cdot \gamma^\mu \lambda^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de} \\ & + G_{DIQ}^A \cdot \sum_{j=0,1,3,4,6,8} (\bar{\psi}_a \gamma_\mu \lambda^j \mathcal{C} \bar{\psi}_b^T) (\bar{\psi}_d^T \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \lambda^j \psi_e) \cdot \epsilon^{abc} \cdot \epsilon_c^{de} \end{aligned} \quad (8)$$

Les a, b, c, d, e sont associés à la couleur ; nous notons d'ailleurs la somme implicite sur c . Dans le développement effectué dans (8), chaque ligne correspond à un canal. Pour chacun d'eux, une constante G_{DIQ}^α est utilisée. Ces quatre constantes sont reliées à la constante G_{DIQ} introduite au chapitre 2, pendant la description des jeux de paramètres. Nous avons [6] :

$$\begin{cases} G_{DIQ}^S = G_{DIQ}^P = G_{DIQ} \\ G_{DIQ}^V = G_{DIQ}^A = \frac{G_{DIQ}}{4} \end{cases}. \quad (9)$$

Clairement, le terme \mathcal{Z} utilisé dans les équations (2, 3) s'identifie aux constantes de (9). Nous rappelons que la méthode était identique pour les mésons. En conséquence, pour un diquark de type α :

$$\mathcal{Z} = 2 \cdot G_{DIQ}^\alpha. \quad (10)$$

dans lequel α peut être S, P, V ou A, voir tableau 1.

2.4 Fonction de boucle des diquarks

La fonction de polarisation d'un diquark $q_1 q_2$ peut être écrite selon deux formes, équation (11). En fait, comme montré dans l'annexe D, l'échange des deux quarks laisse invariantes les deux formes présentées dans (11). Clairement, cela implique que ces deux formes sont strictement équivalentes. Les détails techniques associés aux calculs, qui expliquent notamment l'intérêt de ces deux formes, ont été relégués dans l'annexe E.

$$\begin{aligned} -i \cdot \Pi_{q_1 q_2}^\Gamma(i \cdot \nu_m, \vec{k}) &= \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_{f_1}(i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m, \vec{p} - \vec{k}) \cdot \Gamma \cdot i \cdot S_{f_2}^C(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot \Gamma \right) \\ -i \cdot \Pi_{q_1 q_2}^\Gamma(i \cdot \nu_m, \vec{k}) &= \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_{f_1}^C(i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m, \vec{p} - \vec{k}) \cdot \Gamma \cdot i \cdot S_{f_2}(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot \Gamma \right) \end{aligned}, \quad (11)$$

où :

$$S_f^C_{NJL}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - \gamma_0 \mu_f - m_f} \quad \text{et} \quad S_f^C_{PNJL}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - \gamma_0 (\mu_f - iA_4) - m_f} \quad (12)$$

sont les propagateurs d'un quark conjugué de charge, dans les modèles NJL et PNJL [20, 21]. Les calculs complets effectués pour établir le propagateur NJL (12) sont rassemblés à la fin de ce chapitre. Concernant les modifications à apporter aux équations NJL pour obtenir leurs équivalents PNJL, nous voyons que nous avons tout d'abord à remplacer μ_f par $\mu_f - iA_4$ dans les propagateurs des quarks/antiquarks (et pas ailleurs), comme noté dans [21]. En outre, dans le cadre des calculs numériques, les autres modifications concernent l'adaptation des distributions de Fermi-Dirac associées aux quarks/antiquarks. Clairement, cette adaptation, suggérée dans [21, 22] pour les mésons, est toujours valable pour les diquarks. Nous rappelons que les distributions de Fermi-Dirac modifiées dans le modèle PNJL ont été établies dans le chapitre 2. Dans la pratique, comme avec les mésons, ces modifications affectent la fonction Π .

2.5 Constantes de couplage

La méthode pour estimer les constantes de couplage mettant en jeu un diquark et une paire de deux quarks est la même que celle décrites pour les mésons. En fait, seule l'expression du propagateur diffère :

$$\frac{4G_{DIQ}}{1 - 2G_{DIQ} \cdot \Pi(k_0, \vec{k})} \Big|_{k^2=m^2} \approx \frac{-g^2}{k^2 - m^2} \Big|_{k^2=m^2}. \quad (13)$$

Cela donne :

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \Pi(k_0, \vec{k})}{\partial k} \Big|_{k^2=m^2} \approx \frac{2k}{-g^2} \Big|_{k^2=m^2}. \quad (14)$$

$k^2 = m^2$ est équivalent à écrire $\begin{cases} k_0 = m \\ \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$. Ainsi, pour un diquark au repos, cela revient à considérer la formule :

$$g = \sqrt{\frac{4m}{\frac{\partial \Pi(k_0, \vec{0})}{\partial k_0}} \Big|_{k_0=m}}. \quad (15)$$

3. Résultats numériques

Dans cette partie, nous proposons d'étudier chaque type de diquark. Dans l'ensemble, nous utilisons le jeu de paramètres P1 défini au chapitre 2 (qui utilise la symétrie isospin). Cependant, dans le paragraphe 3.6, le jeu de paramètre EB est aussi utilisé pour estimer les masses des diquarks à température et densité nulles.

3.1 Diquarks scalaires

Les résultats associés aux masses et aux largeurs de niveau des diquarks scalaires sont exposés dans les figures 3 à 5. Tout d'abord, nous remarquons que les courbes obtenues avec le modèle NJL peuvent être comparées à celles de [15, 17]. Qualitativement, l'accord est bon avec des références, notamment parce que nous utilisons un jeu de paramètres assez similaire, c'est-à-dire P1. Toutefois, des différences peuvent être observées quantitativement, par exemple en regardant la masse à température et densité nulles. En fait, nous avons pris $G_{DIQ}/G=0.705$ (voir chapitre 2), alors que [15, 17] semblent avoir considéré des valeurs différentes. Comme indiqué dans [15], leur choix a été fixé afin d'obtenir un bon accord pour les nucléons entre leurs résultats et les valeurs expérimentales. Plus précisément, leurs résultats peuvent être retrouvés avec $G_{DIQ}/G \approx 0.735$, c'est-à-dire une valeur proche de celle indiquée dans [16], mais pas le $G_{DIQ}/G \approx 0.55$ annoncé dans [15, 17].

Comme confirmé par l'étude des largeurs de niveau dans la figure 5, les diquarks scalaires sont stables à températures et densités réduites. Bien entendu, cette notion de stabilité se réfère à leur désintégration en une paire de deux quarks. La stabilité de ces diquarks est aussi observée avec les résultats PNJL. En fait, en ce qui concerne les différences entre les modèles NJL et PNJL, les figures 3 à 5 montrent le même comportement que celui obtenu avec les quarks et les mésons. D'une part, il consiste en une déformation des courbes PNJL, par rapport aux NJL, vers les hautes températures. A températures réduites, cela conduit à des masses de diquarks assez constantes pour les courbes PNJL, jusqu'à $T \approx 200$ MeV. D'autre part, les résultats NJL et PNJL coïncident à température nulle, quelle que soit la densité baryonique. Après, la grande ressemblance entre les courbes de mésons et celles des diquarks peut être expliquée par le fait que les équations à résoudre sont très semblables pour ces deux types de particules. Plus précisément, le comportement des diquarks scalaires rappelle fortement celui des mésons pseudo-scalaires. En fait, ces particules correspondent à une interaction via le canal γ^5 , et la ressemblance entre leurs équations peut être facilement être constatée dans l'annexe D. Cependant, les masses de diquarks sont plus fortes que celles des mésons pseudo-scalaires, conduisant à un résultat prévisible : ces diquarks sont moins stables que ces mésons.

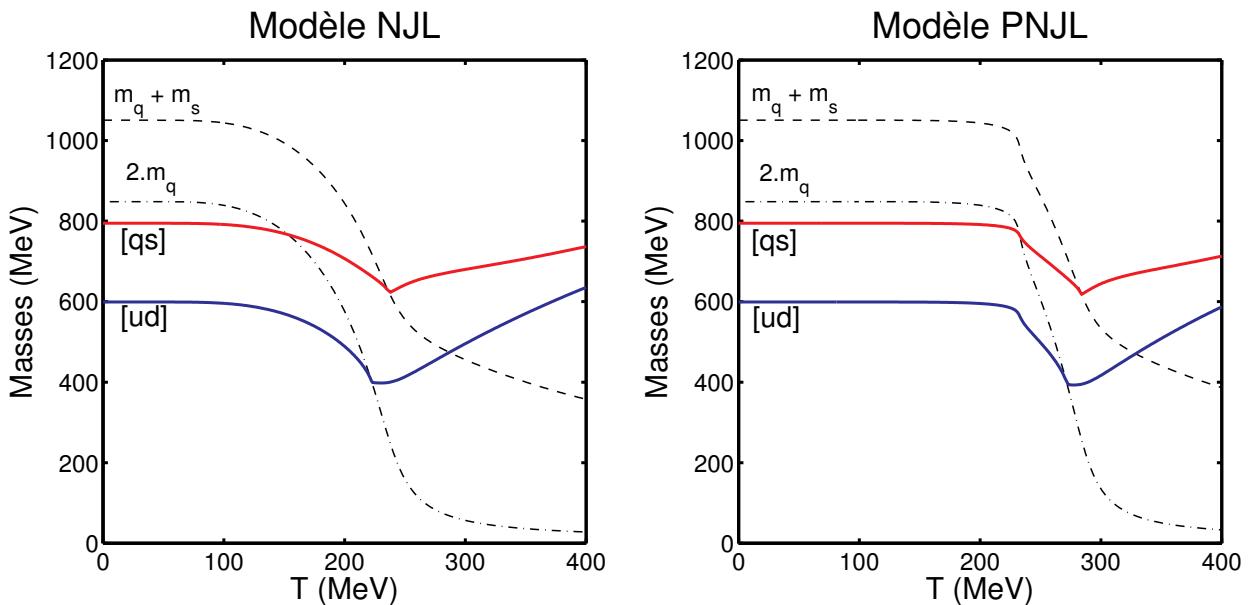


Figure 3. Masses des diquarks scalaires en fonction de la température.

Une autre différence entre ces deux types de particules concerne l'évolution de leurs masses en fonction de la température et de la densité baryonique. En effet, pour les diquarks scalaires, il est observé sur les figures 3 et 4 une décroissance des masses quand T ou ρ_B augmente, jusqu'à leur limite de stabilité. Plus précisément, une température critique et une densité critique sont présentes pour chaque diquark, respectivement dans la figure 3 et dans la figure 4. Ce comportement, notamment pour la température, rappelle celui trouvé pour les mésons vectoriels, pour lesquels le terme de 't Hooft n'était pas appliqué. En fait, une densité baryonique forte correspond à un large excès de quarks q par rapport aux antiquarks \bar{q} . Ainsi, une structure construite à l'aide de quarks, comme un diquark, devrait être « stabilisée » par une augmentation de la densité baryonique. Cette observation peut expliquer l'évolution des

masses dans la figure 4. Mais, les masses des quarks qui composent nos diquarks décroissent plus rapidement que les masses des diquarks. Donc, l'énergie de liaison de ces derniers, c'est-à-dire $m_{[ud]} - 2m_q$, tend à décroître (en valeur absolue). Cela peut expliquer la transition stable/instable observée sur la figure 4, à environ $3\rho_0$ pour $[ud]$ et $\approx 3.5\rho_0$ pour $[qs]$.

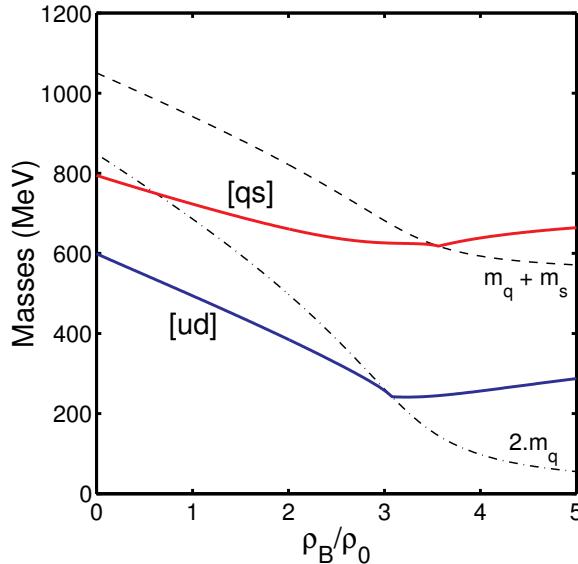


Figure 4. Masses des diquarks scalaires en fonction de la densité baryonique.

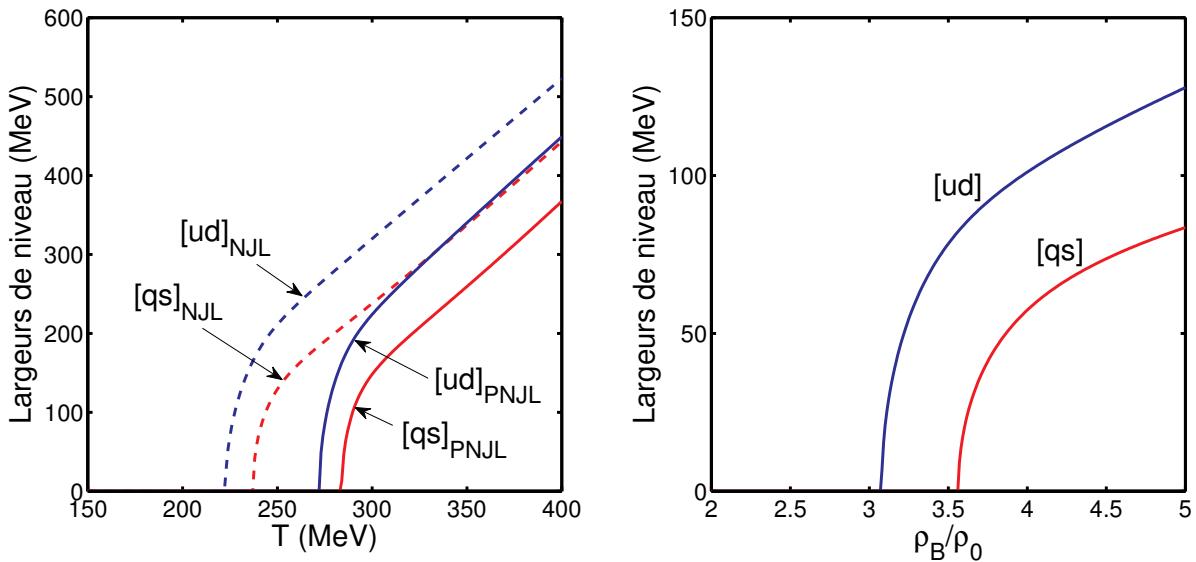


Figure 5. Largeurs de niveau des diquarks scalaires en fonction de la température et de la densité baryonique.

Les masses des diquarks scalaires semblent être assez faibles pour pouvoir les considérer comme de bons candidats pour former des baryons. Plus précisément, la masse de $[ud]$ est d'environ 600 MeV à température et densité nulles. Associé à un quark léger, dont la masse est ici proche de 420 MeV, il est raisonnable d'envisager de former un nucléon à partir de ce système. Cela justifie l'estimation des constantes de couplage de ces diquarks, notamment

pour utiliser ces données lors de la modélisation des baryons, et ensuite dans les sections efficaces concernées. Nos résultats sont proposés dans les figures 6 et 7. Comme avec les masses, nos courbes NJL peuvent être comparées à celles de [15, 17], conduisant à des remarques similaires.

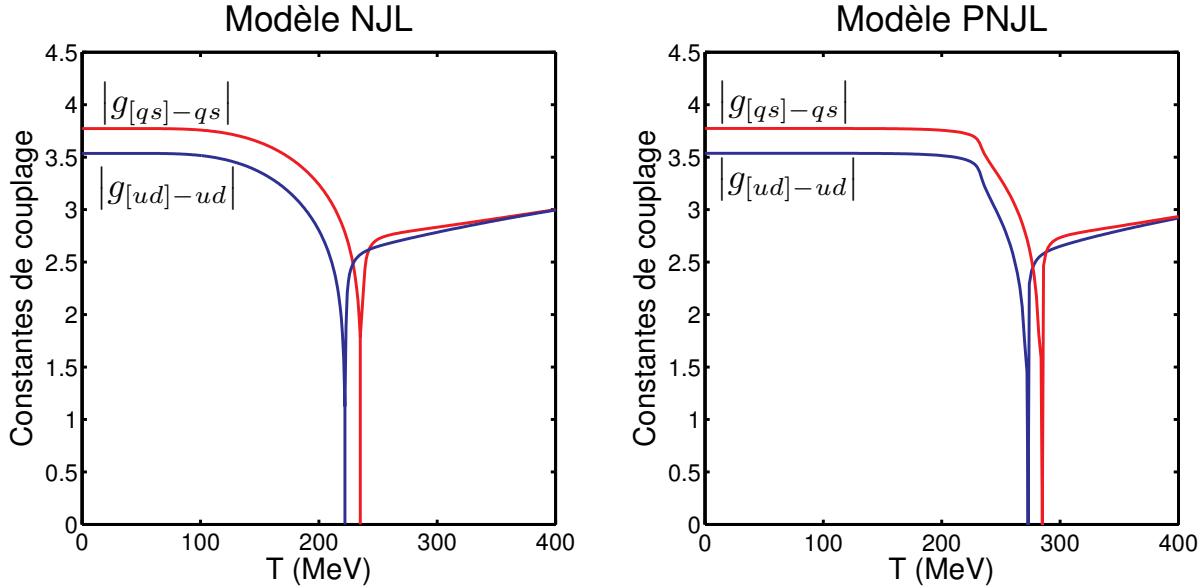


Figure 6. Constantes de couplage des diquarks scalaires en fonction de la température.

En fait, les courbes rappellent fortement celles trouvées pour les pions et les kaons, notamment selon la température, figure 6. Même qualitativement, les valeurs prises par les constantes de couplage restent plutôt proches de 4 à basses températures. D'autre part, la forte décroissance ($g \rightarrow 0$) est aussi observée avec les diquarks. Cette forte décroissance correspond à une transition stable/instable, cela confirme donc nos observations précédentes pour ces diquarks. L'analyse sera étendue à des densités négatives dans le paragraphe 3.5.

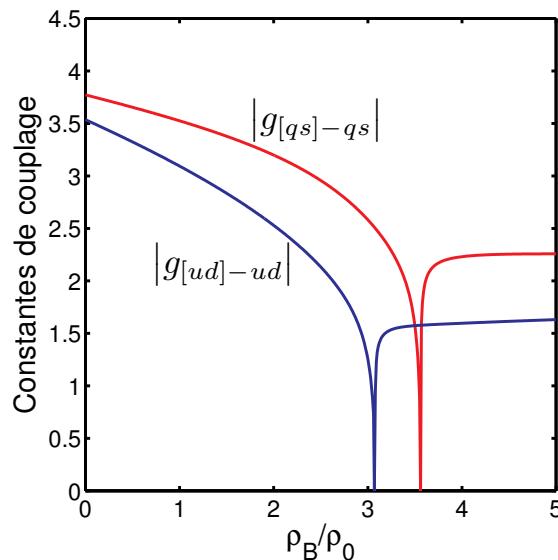


Figure 7. Constantes de couplage des diquarks scalaires en fonction de la densité baryonique.

3.2 Diquarks pseudo-scalaires

Les diquarks pseudo-scalaires et les diquarks vectoriels ne sont pas traités dans la littérature. En conséquence, nous ne pouvons pas proposer de comparaison de nos résultats avec d'autres. Concernant les diquarks pseudo-scalaires, nous avons étudié leurs masses et largeurs de niveau selon la température dans les figures 8 et 9, et selon la densité baryonique dans la figure 10. En fait, le comportement des diquarks pseudo-scalaires est qualitativement très proche de celui trouvé pour les mésons scalaires. En effet, ces particules ont été trouvées comme étant toujours instables, quelle que soit la température ou la densité baryonique. Cette affirmation est justifiée en notant que les masses des diquarks pseudo-scalaires sont toujours plus fortes que celles des quarks qui les composent, figure 8. Par ailleurs, les largeurs de niveau associées sont toujours non nulles, figure 9. Concernant l'évolution des masses selon la température, nous notons que les masses de ces diquarks évolue de manière parallèle par rapport à celles des quarks qui les constituent, c'est-à-dire respectivement $2m_q$ pour $[ud]$ et $m_q + m_s$ pour $[qs]$, jusqu'à $T \approx 180$ MeV pour le modèle NJL et $T \approx 220$ MeV pour PNJL. Cela conduit à des valeurs assez stables de largeurs de niveau, figure 9, jusqu'à atteindre ces températures. Un tel comportement est aussi présent selon la densité baryonique, même s'il est moins marqué.

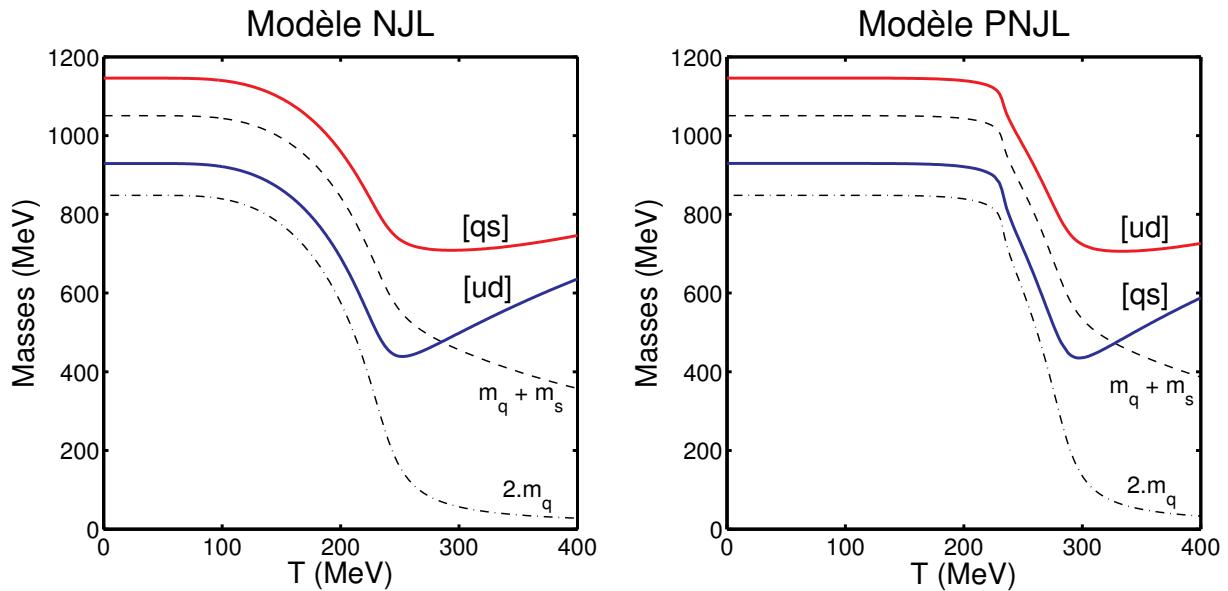


Figure 8. Masses des diquarks pseudo-scalaires en fonction de la température.

Qualitativement, les masses des diquarks pseudo-scalaires sont relativement fortes à basses températures et densités, environ 920 MeV pour $[ud]$ et 1140 MeV pour $[qs]$. En fait, $[ud]$ a une masse proche de celle d'un nucléon. Ainsi, dans le cadre de la modélisation du nucléon, nous pouvons supposer que la contribution des diquarks pseudo-scalaires ne devrait pas être dominante, et devrait être même plutôt négligeable. En effet, si nous associons le $[ud]$ pseudo-scalaire avec un quark, il faudrait une énergie de liaison plus forte que 400 MeV pour obtenir une masse de nucléon proche de celle mesurée expérimentalement, c'est-à-dire 938 MeV. Une telle valeur de l'énergie de liaison semble être trop proche pour être réaliste. Cependant, comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, les diquarks pseudo-scalaires

ne sont pas inutiles : ils peuvent être considérés dans les calculs de sections efficaces, en tant que propagateurs, dans le cadre de réactions mettant en jeu des baryons.

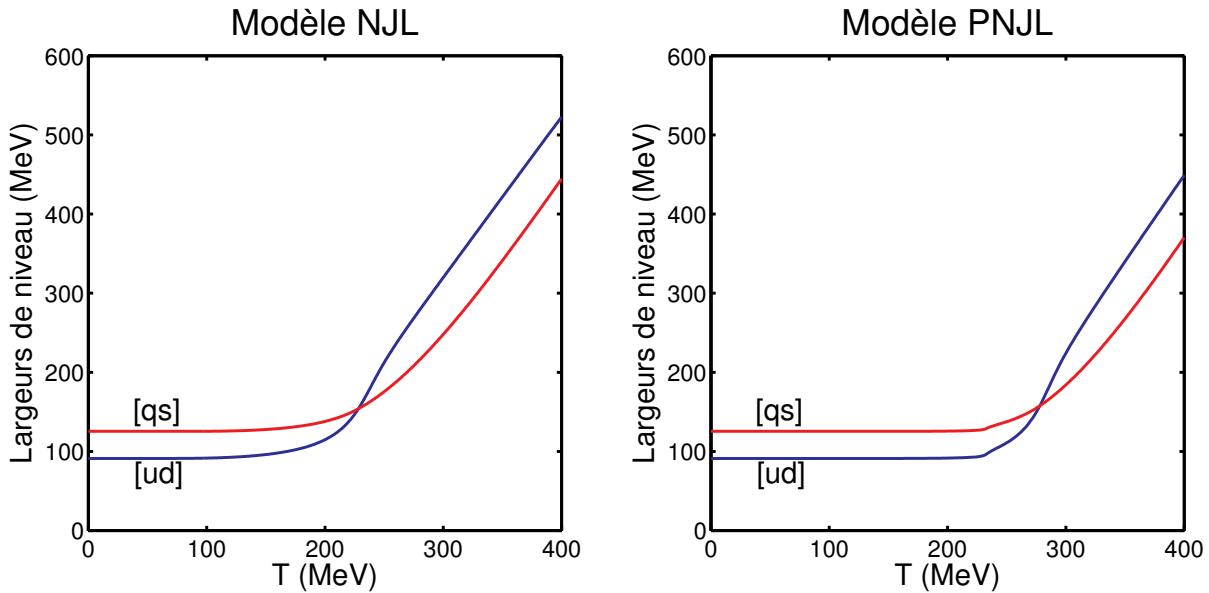


Figure 9. Largeurs de niveau des diquarks pseudo-scalaires en fonction de la température.

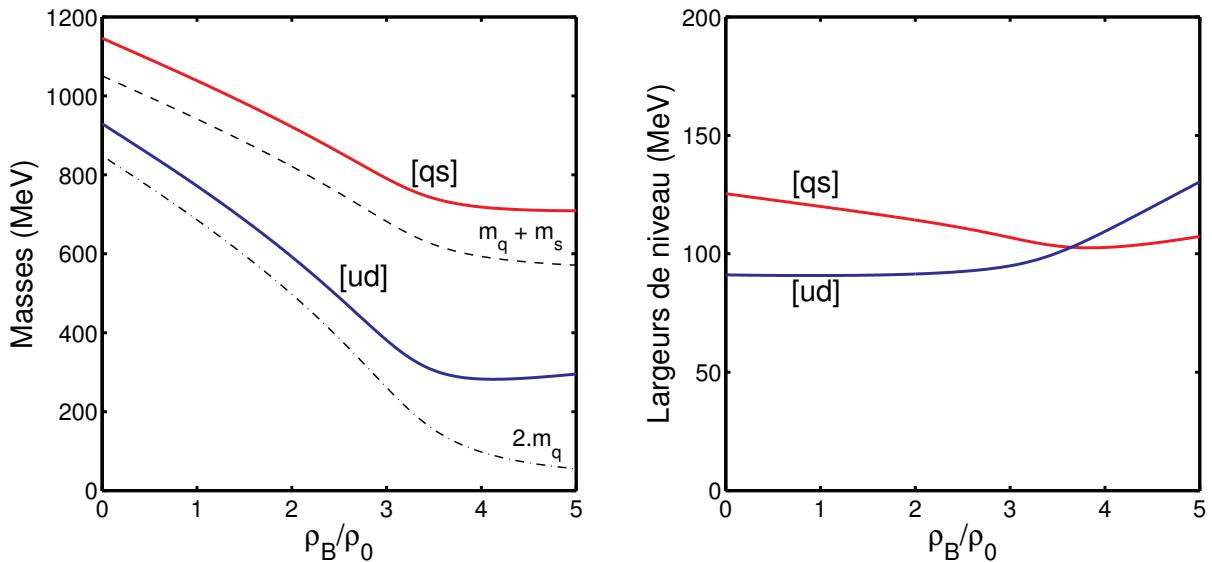


Figure 10. Masses et largeurs de niveau des diquarks pseudo-scalaires, en fonction de la densité baryonique.

D'autre part, comme avec les mésons, nous observons que les diquarks scalaires et pseudo-scalaires $[ud]$ deviennent dégénérés à hautes températures et hautes densités, figures 3, 8 et 4, 10. Cette remarque s'applique aussi pour $[us]$, mais la dégénérescence intervient pour des valeurs de T, ρ_B plus fortes. De la même manière, ce comportement sera aussi observé avec les diquarks vectoriels et axiaux $[ud]$ et $[us]$.

3.3 Diquarks vectoriels

L'évolution des diquarks vectoriels en fonction de la température est représentée dans la figure 11. L'influence de la densité baryonique est étudiée dans la figure 12. Ces résultats sont structurellement similaires à ceux vus pour les diquarks pseudo-scalaires. Les diquarks vectoriels sont les diquarks les plus lourds étudiés dans notre travail. Ils ressemblent fortement aux mésons axiaux. Comme avec ces particules, les fortes masses pourraient suggérer que nous sommes là aussi à la limite de validité de notre approche. Comme avec les diquarks pseudo-scalaires, une application possible de ces particules pourrait concerter leur utilisation en tant que propagateurs dans des calculs de sections efficaces. Cependant, si nous avons réellement utilisé les diquarks pseudo-scalaires pour cet objectif, cela n'a pas été le cas pour les diquarks vectoriels, au moins dans le cadre du travail présenté dans cette thèse.

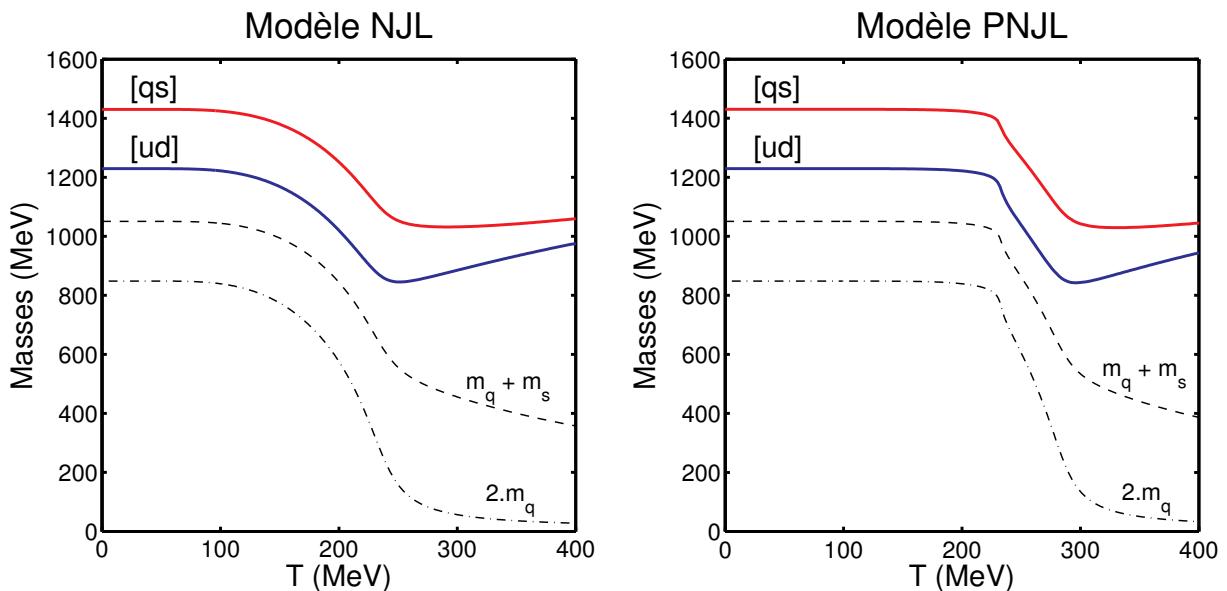


Figure 11. Masses des diquarks vectoriels en fonction de la température.

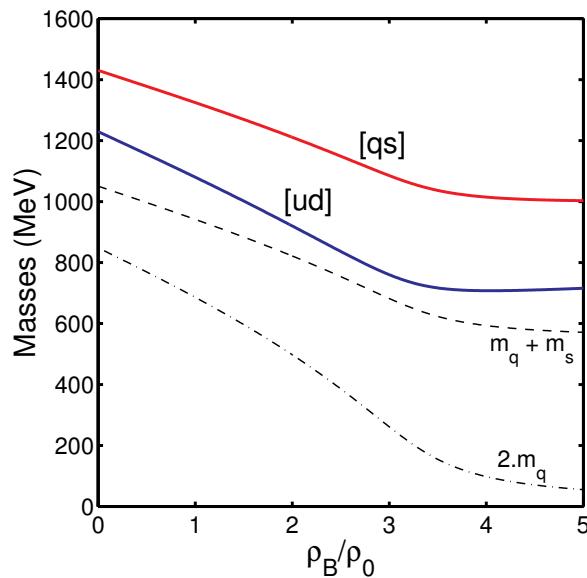


Figure 12. Masses des diquarks vectoriels en fonction de la densité baryonique.

3.4 Diquarks axiaux

Dans notre travail, les diquarks axiaux sont les seuls qui puissent avoir deux quarks de même saveur. Grâce à cette propriété, ces diquarks peuvent intervenir dans la modélisation de baryons comme Δ , Ω , ou pour les composantes axiales de saveur d'autres baryons. En conséquence, ce sont des particules particulièrement intéressantes. Nos résultats concernant l'évolution de leurs masses selon la température et la densité baryonique sont exposés dans les figures 13 et 14. Dans la littérature, nous n'avons pas d'élément de comparaison, sauf pour des valeurs estimées à température et densité baryonique nulles, comme dans [11–13] par exemple.

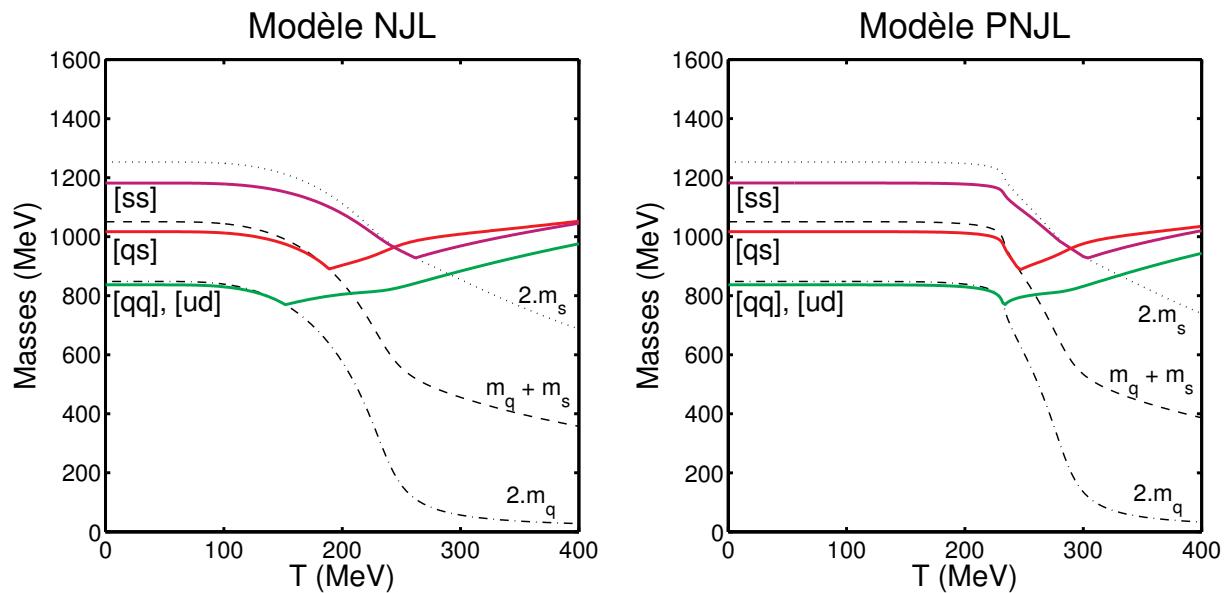


Figure 13. Masses des diquarks axiaux en fonction de la température.

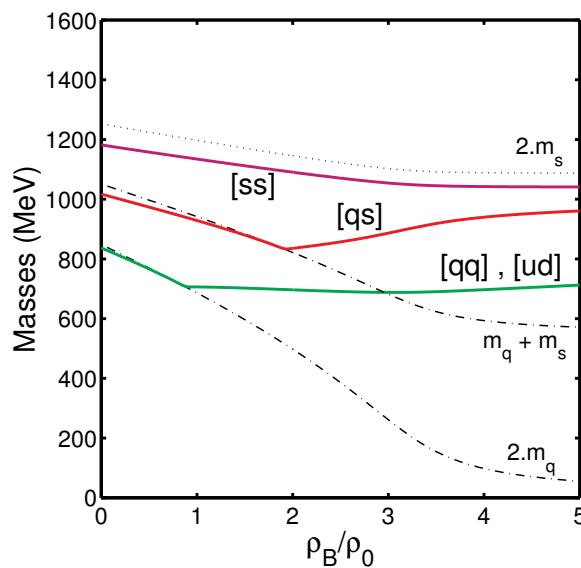


Figure 14. Masses des diquarks axiaux en fonction de la densité baryonique.

Dans nos deux figures, nous avons trouvé que les diquarks axiaux sont stables à des températures et densités réduites. En effet, même si nous ne présentons pas ici l'évolution des largeurs de niveau, cette information peut facilement être vérifiée à travers le comportement des courbes, mais aussi avec les résultats exposés dans les figures 15, 16, 18. En fait, qualitativement, l'évolution des masses des diquarks axiaux rappelle celle observée pour les diquarks scalaires. Cependant, dans leur zone de stabilité, les masses des diquarks axiaux sont très proches des masses des paires quark-quark qui les composent. Cela veut dire que leurs énergies de liaison sont très faibles (en valeur absolue). En conséquence, les diquarks axiaux sont moins stables que les diquarks scalaires. Cette remarque est confirmée dans la figure 18, si nous comparons la zone de stabilité de chaque diquark. Mais, cette observation ne s'applique pas au diquark $[ss]$. En fait, cette particule est composée de deux quarks étranges, donc $[ss]$ est moins sensible à la température et à la densité baryonique, comme observé avec le quark s dans le chapitre 2. Mis à part pour $[ss]$ selon la densité baryonique, les diquarks étudiés ont une température critique, et une densité critique. Ainsi, nous avons une séparation nette entre leurs zones de stabilité et instabilité, selon ces deux paramètres.

Conscients de l'utilité des diquarks axiaux, nous proposons d'étudier ci-après leurs constantes de couplage. Cela correspond aux figures 15 et 16. Tout d'abord, nous pouvons souligner que leur allure rappelle celles trouvées pour les diquarks scalaires et pour les mésons. Cependant, quelques différences sont identifiables. Tout d'abord, cela concerne les valeurs à température et densité nulles. Mis à part pour le méson η , nous avons trouvé précédemment des valeurs proches de 4, alors qu'ici, nous avons pour ≈ 1.73 pour $|g_{[qq]-qq}|$, 2.32 pour $|g_{[qs]-qs}|$ et 2.85 pour $|g_{[ss]-ss}|$.

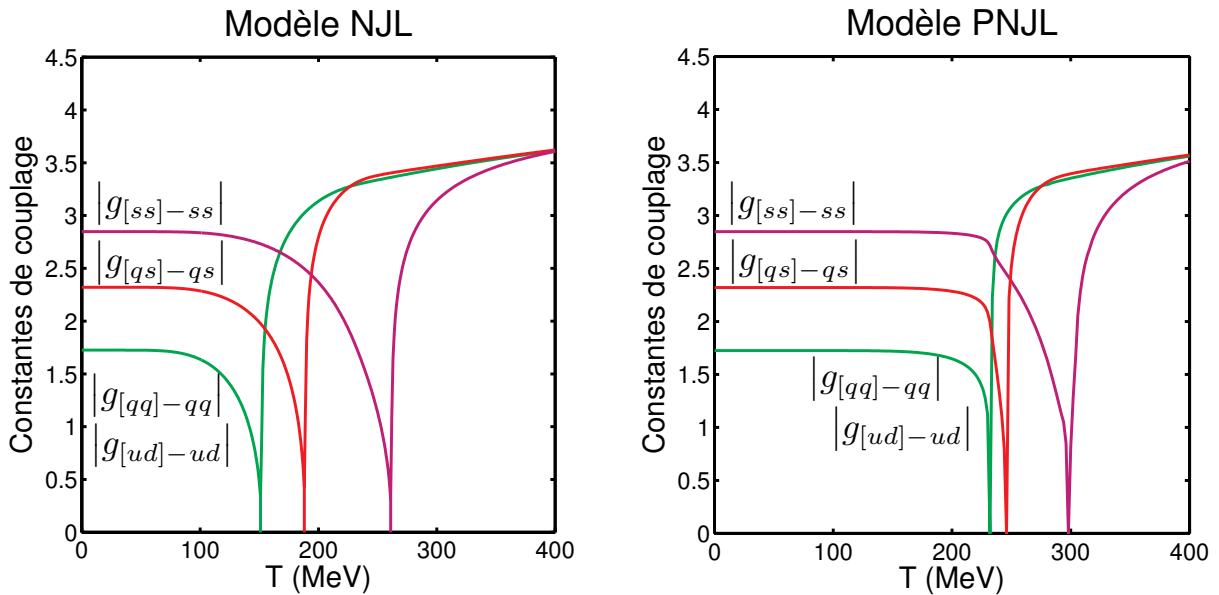


Figure 15. Constantes de couplage des diquarks axiaux, selon la température.

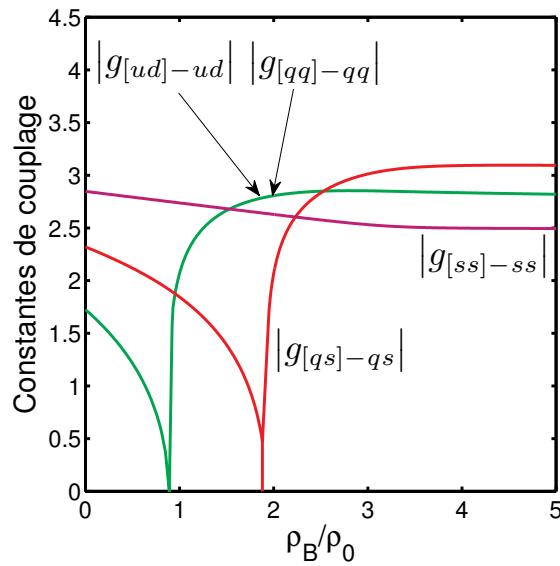


Figure 16. Constantes de couplages des diquarks axiaux, selon la densité baryonique.

Pour les diquarks axiaux, plus le diquark est léger, plus sa constante de couplage est faible, pour $T=0$ et $\rho_B=0$. Pour des températures localisées dans la zone d'instabilité des diquarks, les constantes de couplage deviennent plus fortes, voir figure 15. Elles dépassent les valeurs que nous avions à basses températures : elles sont supérieures à 3.5. Dans cette figure, les courbes nous donnons aussi l'impression de converger vers des valeurs très proches. Evidemment, ces remarques sont vérifiées dans les modèles NJL et PNJL. En revanche, à hautes densités (figure 16), les constantes de couplage gardent des valeurs très distinctes. Mais, les courbes tendent à se stabiliser rapidement : vers 2.5 environ pour $|g_{ss}-ss|$, 2.8 pour $|g_{qq}-qq|$ et 3.1 pour $|g_{qs}-qs|$.

3.5 Autres résultats

Nous proposons maintenant d'étendre les résultats trouvés pour les diquarks scalaires et axiaux à des densités négatives. Plus précisément, nous avons étudié le comportement d'anti-diquarks en fonction de la densité baryonique, figure 17, et nous avons effectué un « diagramme de phase » étendu aux densités négatives, figure 18. Pour les résultats de la figure 17, notre méthode considère la symétrie matière-antimatière. Cela consiste à dire qu'une particule plongée dans un milieu dans lequel la densité est égale à $-\rho_B$ (valeur négative, c'est-à-dire un milieu dominé par l'antimatière) agit de la même manière que son antiparticule correspondante plongée dans un milieu dans lequel la densité est égale à ρ_B (c'est-à-dire dominée par la matière), et réciproquement. En conséquence, les anti-diquarks peuvent être trouvés simplement en renversant le signe de la densité baryonique. Avec les mésons, ces particules pouvaient être leurs propres antiparticules, notamment quand la symétrie isospin est utilisée. Ainsi, nous avions trouvé que les masses des mésons évoluaient de la même manière dans des densités positives ou négatives, sauf pour les kaons.

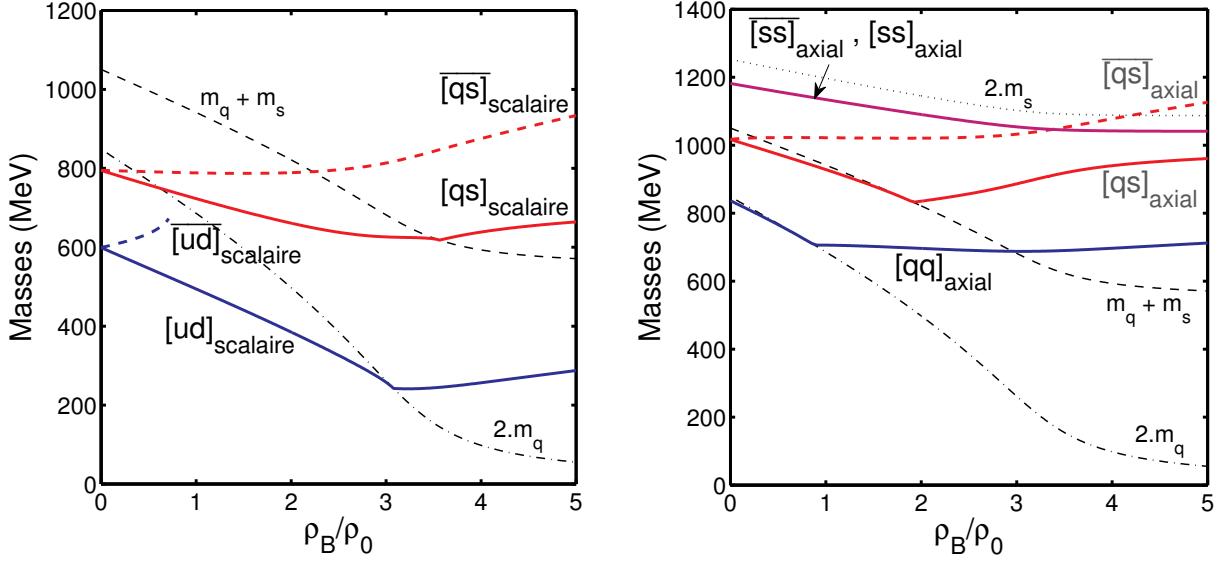


Figure 17. Diquarks scalaires et axiaux, et leurs antiquarks correspondants.

Evidemment, un diquark et son anti-diquark sont supposés agir de manières très différentes, comme confirmé dans la figure 17. Dans cette figure, les anti-diquarks sont représentés en pointillés. Les graphes ont été établis à température nulle. Ainsi, les modèles NJL et PNJL coïncident strictement. En fait, à densité nulle, la structure des équations conduit à des masses identiques pour un diquark et son anti-diquark correspondant, quelle que soit la température. Mais, à densités non nulles, les masses des diquarks/anti-diquarks peuvent être différentes. Ce comportement est observé pour les diquarks composés par un moins un quark léger q . En effet, quand $\rho_B \neq 0$, les potentiels chimiques μ_q et $\mu_{\bar{q}}$ sont aussi non nuls, et $\mu_{\bar{q}} = -\mu_q$. Cette différence de signe provient directement des expressions des fonctions de boucle liées aux diquarks et anti-diquarks, annexe D, conduisant à une asymétrie entre les diquarks et les anti-diquarks. Cela explique cette différence de masse. Intuitivement, nous comprenons qu'un couple de diquark/anti-diquark constitués par deux quarks/antiquarks légers est plus sensible à cet effet qu'un couple constitué seulement par un quark/antiquark léger. Cela est confirmé par les résultats numériques. En effet, dans la figure 17, nous notons que la différence entre les masses des diquarks/anti-diquarks scalaires $[ud]$ et $[\bar{ud}]$ croît plus vite que celle observée pour les diquarks/anti-diquarks scalaires $[qs]$ et $[\bar{qs}]$. Mais, cette comparaison n'a pas été possible avec leurs équivalents axiaux, parce que les anti-diquarks axiaux $[\bar{qq}]$ n'ont pas pu être calculés numériquement. Ces anti-diquarks sont trop sensibles à la densité baryonique pour être modélisés de manière fiable. Cette observation explique également pourquoi la courbe de l'anti-diquark scalaire $[\bar{ud}]$ n'a pas pu être continuée après $0.7\rho_0$. A l'opposé, les $[ss]$ et $[\bar{ss}]$ sont constitués respectivement par deux quarks/antiquarks étranges. Les masses des quarks/antiquarks étranges dépendent de la densité baryonique exactement de la même manière. En conséquence, les masses de $[ss]$ et $[\bar{ss}]$ évoluent selon ρ_B . Mais, l'asymétrie mentionnée plus haut ne peut pas intervenir pour ces diquarks. Ainsi, il n'a pas de différence de masse pour eux : les courbes restent dégénérées, quelle que soit la densité baryonique.

D'autre part, dans la figure 18, l'asymétrie mentionnée peut être observée aussi sur le diagramme de stabilité/instabilité des diquarks, parce que l'axe $\rho_B = 0$ n'est pas ici un axe de

symétrie du graphe. Clairement, les diquarks sont plus stables dans un milieu dans lequel $\rho_B > 0$ que dans un milieu dominé par l'antimatière ($\rho_B < 0$). Une explication physique est que les diquarks sont porteurs de deux quarks. Plongés dans un milieu où la densité baryonique est négative, c'est-à-dire dans lequel les antiquarks \bar{q} (confinés ou pas) sont en large excès par rapport aux quarks q , les diquarks tendent à libérer leurs quarks. En d'autres termes, ils deviennent instables. Ces quarks sont alors capables de se combiner avec les antiquarks pour former des mésons, qui sont clairement plus stables. En revanche, comme dans le paragraphe précédent, ces explications ne peuvent pas s'appliquer à $[ss]$. Plus précisément, cette particule est trop stable selon la densité baryonique. Donc, nous ne l'avons pas représenté sur la figure 18.

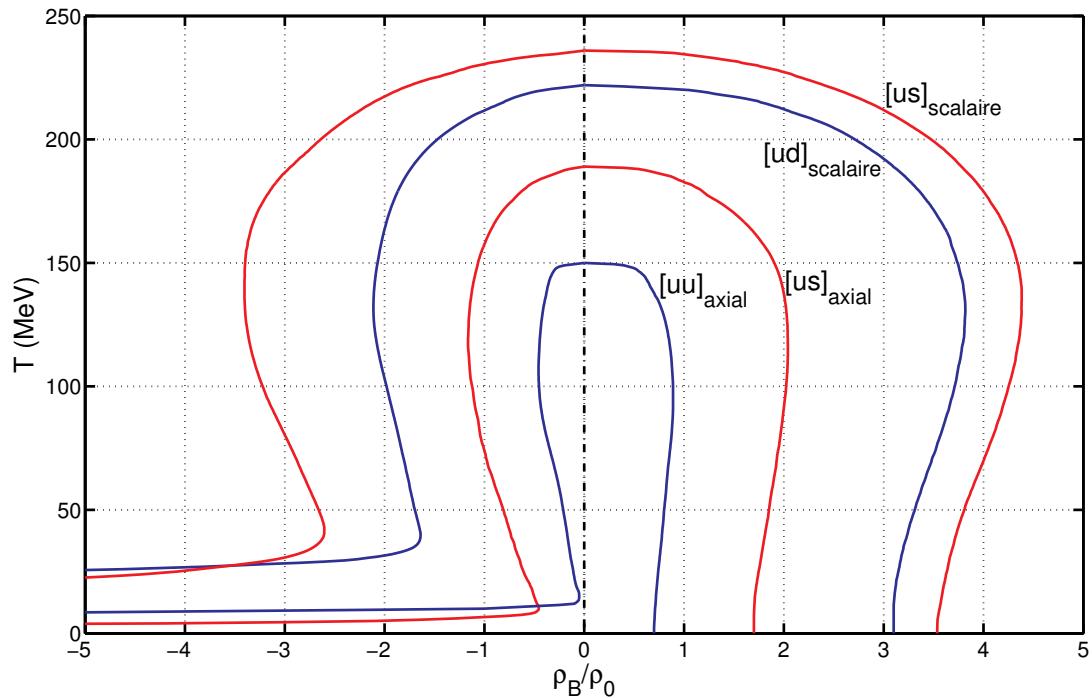


Figure 18. Diagramme NJL de stabilité/instabilité des diquarks scalaires et axiaux.

3.6 Masses obtenues

Le tableau 2 ci-après résume les valeurs trouvées à température et à densité nulles. La colonne associée au jeu de paramètre P1 correspond aux données décrites dans les graphes précédents, c'est-à-dire en prenant en compte la symétrie isospin. Comme dans les chapitres précédents, la colonne associée au jeu de paramètre EB n'applique pas cette symétrie. Entre les deux colonnes, nous avons inséré des valeurs extraites de la littérature : de [11] et de [12, 13]. Ces publications ont considéré d'autres approches que la nôtre, et elles ont pris en compte la symétrie isospin. Dans ces références, les largeurs de niveau sont nulles. En effet, ces articles ont étudié les diquarks qui sont apparus comme stables. C'est pourquoi les cases correspondant aux diquarks pseudo-scalaires et vectoriels sont vides. Pour les autres diquarks, c'est-à-dire pour les scalaires et les axiaux, un très bon accord est obtenu entre nos résultats et ceux de ces références. Cependant, nous reconnaissons que nous avons utilisé les données de

M. Oettel [12, 13] afin de déterminer notre valeur de G_{DIQ} . En fait, nous considérons que $G_{DIQ}/G = 0.705$ dans les jeux de paramètre P1 et EB.

		Résultats obtenus (jeu de paramètres P1)		Valeurs de la littérature		Résultats obtenus (jeu de paramètres EB)	
Diquarks		Masses	Largeurs de niveau	Masses de [11]	Masses de [12, 13]	Masses	Largeurs de niveau
Scalaire	[ud]	599.14	0	595	598	592.82	0
	[us]	794.75	0	795	—	752.43	0
	[ds]	794.75	0	795	—	754.86	0
Pseudo Scalaire	[ud]	929.37	91.11	—	—	921.72	89.81
	[us]	1146.25	125.40	—	—	1100.17	118.45
	[ds]	1146.25	125.40	—	—	1103.60	119.08
Vectoriel	[ud]	1229.39	715.76	—	—	1222.38	715.08
	[us]	1430.38	733.84	—	—	1387.24	730.39
	[ds]	1430.38	733.84	—	—	1390.49	730.62
Axial	[ud]	836.94	0	835	831	830.77	0
	[us]	1017.06	0	1000	—	978.27	0
	[ds]	1017.06	0	1000	—	980.81	0
	[uu]	836.94	0	835	831	827.94	0
	[dd]	836.94	0	835	831	833.59	0
	[ss]	1181.94	0	1160	—	1116.68	0
Quarks	<i>u</i>	424.23	0	450	425	419.10	0
	<i>d</i>	424.23	0	450	425	422.31	0
	<i>s</i>	626.49	0	650	—	588.17	0

Tableau 2. Masses des diquarks à température et densité nulles.

Concernant les valeurs trouvées avec P1, nous avons un bon accord entre notre $[ud]$ scalaire et celui trouvé dans [12, 13], mais aussi nos $[us]$, $[ds]$ scalaires et $[ud]$, $[uu]$, $[dd]$ axiaux avec ceux de [11]. Pour ce qui est des valeurs trouvées avec EB, nous avons des similitudes entre le $[ud]$ scalaire et celui de [11], et les $[ud]$, $[uu]$, $[dd]$ axiaux avec ceux de [12, 13]. Finalement, ces comparaisons sont globalement excellentes car les différences n'excèdent pas 3 MeV. Pour les autres valeurs, c'est-à-dire les $[us]$, $[ds]$, $[ss]$ axiaux (non disponibles dans [12, 13]), nos valeurs sont du bon ordre de grandeur par rapport à celles de [11]. Mais, les différences entre nos résultats et ceux de la littérature sont un peu plus fortes que précédemment.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu tout d'abord qu'adapter les équations de mésons peut permettre facilement d'obtenir celles des diquarks, grâce à l'utilisation de la conjugaison de charge. En effet, cette astuce nous a permis de transformer une boucle quark-antiquark en une boucle quark-quark. Comme avec les mésons, quatre types de diquarks ont été considérés : les diquarks scalaires, pseudo-scalaires, vectoriels et axiaux. Il a d'ailleurs été observé des similarités entre les diquarks et les mésons, notamment en ce qui concerne le comportement

de leurs masses en fonction de la température et de la densité baryonique. L'effet de la boucle de Polyakov a aussi été étudié. Il a été trouvé qu'elle agit de la même manière que pour les mésons, c'est-à-dire qu'elle induit un décalage des courbes vers les hautes températures.

D'autre part, les diquarks scalaires et axiaux sont apparus comme de bons candidats pour former des baryons. Les deux ont été trouvés stables à $T=0$ et $\rho_B=0$. Pour eux, il a alors été étudié leurs constantes de couplage associées, et leur comportement à des densités baryoniques négatives. Cela a permis de construire les diagrammes de stabilité/instabilité de ces diquarks dans le plan T, ρ_B . A cette occasion, nous avons aussi vu la possibilité de modéliser des anti-diquarks, ce qui nous permettra de considérer des antibaryons. Finalement, les masses à température et densité nulles ont été comparées avec celles d'autres approches théoriques. Il a été trouvé une bonne correspondance avec ces autres approches.

5. Calcul du propagateur d'un quark conjugué de charge

Cette section a été grandement inspirée par les notes de Regina Nebauer [23].

Le propagateur NJL d'un quark conjugué de charge s'écrit comme :

$$\begin{aligned} S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') &= \left\langle T \left(\psi_\xi^C(\tau, \vec{x}) \bar{\psi}_\xi^C(\tau', \vec{x}') \right) \right\rangle \\ &= \theta(\tau - \tau') \cdot \left\langle \psi_\xi^C(\tau, \vec{x}) \bar{\psi}_\xi^C(\tau', \vec{x}') \right\rangle + \theta(\tau' - \tau) \cdot \left\langle \bar{\psi}_\xi^C(\tau', \vec{x}') \psi_\xi^C(\tau, \vec{x}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

dans lequel T est l'opérateur d'ordre selon le temps, θ est la fonction de Heaviside et τ, τ' correspondent à des temps. En utilisant la décomposition :

$$\begin{cases} \psi_\xi^C(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_k} \sum_{\alpha} \left(d_\alpha(\tau, k) \cdot u_\xi^\alpha(k) \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) + b_\alpha^+(\tau, k) \cdot v_\xi^\alpha(k) \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right) \\ \bar{\psi}_\xi^C(\tau', \vec{x}') = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{k'}} \sum_{\alpha'} \left(d_{\alpha'}^+(\tau', k') \cdot \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \cdot \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{x}') + b_{\alpha'}(\tau', k') \cdot \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \cdot \exp(i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \right) \end{cases}, \quad (17)$$

le propagateur est écrit comme :

$$\begin{aligned} S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') &= \theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3 \vec{k} \cdot \int d^3 \vec{k}' \cdot \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\begin{array}{l} \left\langle d_\alpha(\tau, k) d_{\alpha'}^+(\tau', k') \right\rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \cdot u_\xi^\alpha(k) \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \\ + \left\langle b_\alpha^+(\tau, k) b_{\alpha'}(\tau', k') \right\rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \cdot v_\xi^\alpha(k) \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \end{array} \right) \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3 \vec{k} \cdot \int d^3 \vec{k}' \cdot \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\begin{array}{l} \left\langle d_{\alpha'}^+(\tau', k') d_\alpha(\tau, k) \right\rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \cdot \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') u_\xi^\alpha(k) \\ + \left\langle b_{\alpha'}(\tau', k') b_\alpha^+(\tau, k) \right\rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \cdot \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') v_\xi^\alpha(k) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{avec } \int d^3\bar{k} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{E_k} \text{ et } \int d^3\bar{k}' \equiv \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{E_{k'}} . \quad (19)$$

Maintenant, grâce aux relations,

$$\begin{cases} b_\alpha(\tau, k) = \exp(-i(E_k - \mu) \cdot \tau) \cdot b_\alpha(k) \\ d_\alpha(\tau, k) = \exp(-i(E_k + \mu) \cdot \tau) \cdot d_\alpha(k) \end{cases} \quad \begin{cases} b_\alpha^+(\tau, k) = \exp(i(E_k - \mu) \cdot \tau) \cdot b_\alpha^+(k) \\ d_\alpha^+(\tau, k) = \exp(i(E_k + \mu) \cdot \tau) \cdot d_\alpha^+(k) \end{cases}, \quad (20)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} & S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \\ &= \theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \int d^3\bar{k}' \\ &\times \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\begin{array}{l} \langle d_\alpha(k) d_{\alpha'}^+(k') \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \exp(-i(E_k + \mu)\tau) \exp(i(E_{k'} + \mu)\tau') \cdot u_\xi^\alpha(k) \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \\ + \langle b_\alpha^+(k) b_{\alpha'}(k') \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \exp(i(E_k - \mu)\tau) \exp(-i(E_{k'} - \mu)\tau') \cdot v_\xi^\alpha(k) \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \end{array} \right) \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \int d^3\bar{k}' \\ &\times \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\begin{array}{l} \langle d_{\alpha'}^+(k') d_\alpha(k) \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \exp(i(E_{k'} + \mu)\tau') \exp(-i(E_k + \mu)\tau) \cdot \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') u_\xi^\alpha(k) \\ + \langle b_{\alpha'}(k') b_\alpha^+(k) \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{x}') \exp(-i(E_{k'} - \mu)\tau') \exp(i(E_k - \mu)\tau) \cdot \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') v_\xi^\alpha(k) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Si nous gardons seulement les termes non nuls, le propagateur est alors simplifié :

$$\begin{aligned} & S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \\ &= \theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \sum_{\alpha} \left(\begin{array}{l} \langle d_\alpha(k) d_\alpha^+(k) \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(-i(E_k + \mu)(\tau - \tau')) \cdot u_\xi^\alpha(k) \bar{u}_\xi^\alpha(k) \\ + \langle b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(i(E_k - \mu)(\tau - \tau')) \cdot v_\xi^\alpha(k) \bar{v}_\xi^\alpha(k) \end{array} \right), \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \sum_{\alpha} \left(\begin{array}{l} \langle d_{\alpha'}^+(k') d_\alpha(k) \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(-i(E_k + \mu)(\tau - \tau')) \cdot \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') u_\xi^\alpha(k) \\ + \langle b_\alpha(k) b_{\alpha'}^+(k') \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(i(E_k - \mu)(\tau - \tau')) \cdot \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') v_\xi^\alpha(k) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

et :

$$\begin{aligned} & S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \\ &= \theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \sum_{\alpha} \underbrace{\left(\begin{array}{l} \langle d_\alpha(k) d_\alpha^+(k) \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(-i(E_k + \mu)(\tau - \tau')) \cdot \frac{\mathcal{K} + m}{2m} \\ + \langle b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(i(E_k - \mu)(\tau - \tau')) \cdot \frac{\mathcal{K} - m}{2m} \end{array} \right)}_{S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}')|_{\theta(\tau - \tau')}} \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3\bar{k} \cdot \sum_{\alpha} \underbrace{\left(\begin{array}{l} \langle d_{\alpha'}^+(k') d_\alpha(k) \rangle \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \exp(-i(E_k + \mu)(\tau - \tau')) \cdot \frac{\mathcal{K} + m}{2m} \\ + \langle b_\alpha(k) b_{\alpha'}^+(k') \rangle \cdot \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \cdot \exp(i(E_k - \mu)(\tau - \tau')) \cdot \frac{\mathcal{K} - m}{2m} \end{array} \right)}_{S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}')|_{\theta(\tau' - \tau)}} \end{aligned} \quad (23)$$

La finalité du calcul est d'exprimer le propagateur dans l'espace des énergies-impulsions. Ainsi, dans un premier temps, une transformée de Fourier est appliquée aux temps :

$$\begin{aligned} S^C(i\omega_n, \vec{x} - \vec{x}') &= \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(i(i\omega_n)(\tau - \tau')) \cdot S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \Big|_{\theta(\tau - \tau')} \\ &\quad - \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(-i(i\omega_n)(\tau - \tau')) \cdot S^C(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \Big|_{\theta(\tau' - \tau)} . \end{aligned} \quad (24)$$

Cela donne l'expression :

$$\begin{aligned} S^C(i\omega_n, \vec{x} - \vec{x}') &= \\ &\theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3 k \cdot \left(\langle d(k) d^+(k) \rangle \cdot \frac{\not{k} + m}{2m} \cdot \exp(i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \right) \cdot \left(\int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot e^{i(i\omega_n - E_k - \mu)(\tau - \tau')} \right) \\ &+ \theta(\tau - \tau') \cdot \int d^3 k \cdot \left(\langle b^+(k) b(k) \rangle \cdot \frac{\not{k} - m}{2m} \cdot \exp(-i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \right) \cdot \left(\int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot e^{i(i\omega_n + E_k - \mu)(\tau - \tau')} \right) . \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3 k \cdot \left(\langle d^+(k) d(k) \rangle \cdot \frac{\not{k} + m}{2m} \cdot \exp(i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \right) \cdot \left(- \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot e^{-i(i\omega_n - E_k - \mu)(\tau - \tau')} \right) \\ &+ \theta(\tau' - \tau) \cdot \int d^3 k \cdot \left(\langle b(k) b^+(k) \rangle \cdot \frac{\not{k} - m}{2m} \cdot \exp(-i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \right) \cdot \left(- \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot e^{-i(i\omega_n + E_k - \mu)(\tau - \tau')} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Pour ce qui est de l'intégrale selon $\tau - \tau'$, nous écrivons :

$$\int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(i(i\omega_n - E_k - \mu)(\tau - \tau')) = i \cdot \left(\frac{\exp(-\beta(E_k + \mu)) + 1}{i\omega_n - E_k - \mu} \right), \quad (26a)$$

$$\int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(i(i\omega_n + E_k - \mu)(\tau - \tau')) = i \cdot \left(\frac{\exp(\beta(E_k - \mu)) + 1}{i\omega_n + E_k - \mu} \right), \quad (26b)$$

$$- \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(-i(i\omega_n - E_k - \mu)(\tau - \tau')) = i \cdot \left(\frac{\exp(\beta(E_k + \mu)) + 1}{i\omega_n - E_k - \mu} \right), \quad (26c)$$

$$- \int_0^{-i\beta} d(\tau - \tau') \cdot \exp(-i(i\omega_n + E_k - \mu)(\tau - \tau')) = i \cdot \left(\frac{\exp(-\beta(E_k - \mu)) + 1}{i\omega_n + E_k - \mu} \right), \quad (26d)$$

car la fréquence de Matsubara $i\omega_n$ est de type fermionique, ce qui implique que :

$$\exp(i\omega_n \cdot \beta) = \exp((2n+1) \cdot \pi) = -1. \quad (27)$$

Aussi, nous avons :

$$\begin{cases} \langle b^+(k) b(k) \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_k - \mu)) + 1} \\ \langle b(k) b^+(k) \rangle = \frac{\exp(\beta(E_k - \mu))}{\exp(\beta(E_k - \mu)) + 1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \langle d^+(k) d(k) \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_k + \mu)) + 1} \\ \langle d(k) d^+(k) \rangle = \frac{\exp(\beta(E_k + \mu))}{\exp(\beta(E_k + \mu)) + 1} \end{cases} . \quad (28)$$

Nous injectons maintenant ces relations dans (25), nous groupons les termes et nous obtenons :

$$S^C(i\omega_n, \vec{x} - \vec{x}') = i \int d^3 \vec{k} \cdot \frac{\not{k} + m}{2m} \cdot \frac{\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{i\omega_n - E_k - \mu} + i \int d^3 \vec{k} \cdot \frac{\not{k} - m}{2m} \cdot \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{i\omega_n + E_k - \mu}, \quad (29)$$

ou :

$$S^C(i\omega_n, \vec{x} - \vec{x}') = i \cdot \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\not{k} + m}{2E_k} \cdot \frac{\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{i\omega_n - E_k - \mu} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\not{k} - m}{2E_k} \cdot \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}{i\omega_n + E_k - \mu} \right). \quad (30)$$

Nous appliquons maintenant une transformée de Fourier sur les positions :

$$S^C(i\omega_n, \vec{p}) = \int d^3(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \exp(-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')) \cdot S^C(i\omega_n, \vec{x} - \vec{x}'), \quad (31)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} S^C(i\omega_n, \vec{p}) &= i \cdot \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\not{k} + m}{2E_k} \cdot \frac{1}{i\omega_n - E_k - \mu} \cdot \underbrace{\int d^3(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \exp(i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}_{(2\pi)^3 \cdot \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p})}, \\ &+ i \cdot \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\not{k} - m}{2E_k} \cdot \frac{1}{i\omega_n + E_k - \mu} \cdot \underbrace{\int d^3(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \exp(-i(\vec{k} + \vec{p}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}_{(2\pi)^3 \cdot \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{p})} \end{aligned}, \quad (32)$$

ou :

$$S^C(i\omega_n, \vec{p}) = i \cdot \left(\frac{\gamma_0 \cdot i\omega_n - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2E_p \cdot (i\omega_n - E_p - \mu)} + \frac{\gamma_0 \cdot i\omega_n + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m}{2E_p \cdot (i\omega_n + E_p - \mu)} \right), \quad (33)$$

et, finalement :

$$S^C(i\omega_n, \vec{p}) = \frac{i}{\not{p} - m - \gamma_0 \cdot \mu}. \quad (34)$$

Dans le cadre du modèle PNJL, en raison de l'inclusion de la boucle de Polyakov, les quarks sont minimalement couplés à cette boucle, induisant une dépendance selon la couleur dans le propagateur. Comme évoqué précédemment, cela conduit au remplacement $\mu_f \rightarrow \mu_f - iA_4$ [21]. Le propagateur PNJL est alors écrit comme [20, 21] :

$$S_f^C_{PNJL}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - \gamma_0(\mu_f - iA_4) - m_f}. \quad (35)$$

D'autre part, l'expression du propagateur ordinaire (non conjugué de charge) est connue dans le cadre du formalisme de Nambu et Jona-Lasinio depuis longtemps [24]. Mais, elle pourrait être retrouvée par un calcul similaire à celui effectué dans cette partie. En effet, nous avons seulement à refaire le calcul en remplaçant l'équation (17) par :

$$\begin{cases} \psi_\xi(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{E_k} \cdot \sum_\alpha (b_\alpha(\tau, k) \cdot u_\xi^\alpha(k) \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) + d_\alpha^+(\tau, k) \cdot v_\xi^\alpha(k) \cdot \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x})) \\ \bar{\psi}_\xi(\tau', \vec{x}') = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{E_{k'}} \cdot \sum_{\alpha'} (b_{\alpha'}^+(\tau', k') \cdot \bar{u}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \cdot \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{x}') + d_{\alpha'}(\tau', k') \cdot \bar{v}_{\xi'}^{\alpha'}(k') \cdot \exp(i\vec{k}' \cdot \vec{x}')) \end{cases}, \quad (36)$$

ce qui donne :

$$S(i\omega_n, \vec{p}) = i \cdot \left(\frac{\gamma_0 \cdot i\omega_n - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m}{2E_p \cdot (i\omega_n - E_p + \mu)} + \frac{\gamma_0 \cdot i\omega_n + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m}{2E_p \cdot (i\omega_n + E_p + \mu)} \right), \quad (37)$$

et il vient :

$$S(i\omega_n, \vec{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + \gamma_0 \cdot \mu}. \quad (38)$$

De la même manière, la transformation $\mu_f \rightarrow \mu_f - iA_4$ donne aussi la possibilité de retrouver le propagateur PNJL associé [20, 21] :

$$S_f \text{ PNJL}(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} + \gamma_0(\mu_f - iA_4) - m_f}. \quad (39)$$

Quel que soit le modèle, NJL ou PNJL, la seule différence entre le propagateur du quark et celui du quark conjugué de charge est le signe placé devant le terme du potentiel chimique, c'est-à-dire avant la matrice γ_0 . En conséquence, quand le potentiel chimique est nul, les deux propagateurs sont égaux : $S^C(i\omega_n, \vec{p}) = S(i\omega_n, \vec{p})|_{\mu_f=0}$, et idem pour les propagateurs PNJL.

6. Références

- [1] Faddeev L D 1965 Mathematical aspects of the three body problem in quantum scattering theory, *Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem ; Davey, New York*
- [2] Faddeev L D et Merkuriev S P 1993 Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*
- [3] Ishii N, Bentz W et Yazaki K 1993 Solution of the relativistic three quark Faddeev equation in the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model *Phys. Lett. B* **318** 26–31
- [4] Ishii N, Bentz W et Yazaki K 1995 Baryons in the NJL model as solutions of the relativistic Faddeev equation *Nucl. Phys. A* **587** 617–56
- [5] Bentz W, Ishii N, Asami H et Yazaki K 1998 Description of baryons in the relativistic Faddeev approach to the NJL model *Nucl. Phys. A* **631** 473–7
- [6] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [7] Ebert D 1997 Hadronization in Particle Physics (*Lecture Notes in Physics*, vol 508) (Heidelberg: Springer) pp 115–21
- [8] Huguet R, Caillon J C et Labarsouque J 2008 A nuclear matter description based on quark structure of the nucleon and pion exchange *Nucl. Phys. A* **809** 189–210
- [9] Anselmino M, Predazzi E, Ekelin S, Fredriksson S et Lichtenberg D B 1993 Diquarks *Rev. Mod. Phys.* **65** 1199–233

-
- [10] Alexandrou C, de Forcrand Ph et Lucini B 2005 Searching for diquarks in hadrons arXiv:hep-lat/0509113
 - [11] Ebert D, Feldmann T, Kettner C et Reinhardt H 1998 Heavy baryons in the quark–diquark picture *Int. J. Mod. Phys. A* **13** 1091–113
 - [12] Oettel M 2000 Baryons as relativistic bound states of quark and diquark *PhD Thesis Tuebingen University* arXiv:nucl-th/0012067
 - [13] Oettel M, Alkofer R et von Smekal L 2000 Nucleon properties in the covariant–diquark model *Eur. Phys. J. A* **8** 553–66
 - [14] Maris P 2002 Effective masses of diquarks *Few-Body Syst.* **32** 41–52
 - [15] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu–Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
 - [16] Gastineau F et Aichelin J 2002 Strange baryons in a hot and dense medium within the Nambu–Jona-Lasinio model *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28** 2017–22
 - [17] Gastineau F et Aichelin J 2004 Diquark and baryon properties and their production cross sections in dense and hot matter *AIP Conf. Proc.* **739** 398–416
 - [18] Gastineau F, Nebauer R et Aichelin J 2002 Thermodynamics of the 3-flavor NJL model: chiral symmetry breaking and color superconductivity *Phys. Rev. C* **65** 045204
 - [19] Basler H et Buballa M 2010 NJL model of homogeneous neutral quark matter: pseudoscalar diquark condensates revisited *Phys. Rev. D* **81** 054033
 - [20] Roessner S, Ratti C et Weise W 2007 Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram *Phys. Rev. D* **75** 034007
 - [21] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
 - [22] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003
 - [23] Nebauer R 2000 Propriétés des quarks et mésons à température et densités finies dans le cadre du modèle NJL *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
 - [24] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29

Chapitre 5

Les baryons

Une partie de ce chapitre a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38** 105003

1. Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que le modèle NJL peut être complété par l'inclusion d'une boucle de Polyakov, formant le modèle PNJL. Comme indiqué dans la littérature et comme observé dans notre travail, ces modèles peuvent permettre la modélisation de quarks habillées et de mésons. L'étape suivante est d'inclure les baryons dans l'analyse. En fait, pour étudier le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks, les baryons ne peuvent pas être négligés, même si une forte mésonisation du système est attendue.

Cependant, si les mésons sont des particules composites formées par une paire quark-antiquark, les baryons sont composés de trois quarks. Cela nécessite donc la modélisation d'un système à trois corps. Comme évoqué dans le chapitre précédent, les équations de Faddeev doivent être prises en compte dans un tel travail [1, 2]. Mais, il a aussi été montré qu'une simplification de ces équations, consistant à prendre en compte uniquement le « premier terme d'interaction », conduit à considérer un baryon comme un état lié entre un quark et un diquark [3–5]. Dans la littérature, des études utilisant cette approche ont été publiées [6–8]. En outre, la modélisation des baryons a aussi été effectuée dans le cadre du modèle NJL, notamment avec cette approximation quark-diquark. Cela conduit à divers travaux. Durant les années 90, des publications comme [9–14] peuvent être mentionnées. Après 2000, nous avons notamment [15–21]. Parmi les études effectuées, certaines d'entre elles concernent l'estimation des masses des baryons à température et densité nulles, comme dans [3]. Par exemple dans [15, 19], les baryons ont été étudiés à densités finies ...

En fait, le modèle quark-diquark semble être particulièrement intéressant dans la description NJL, notamment parce que cela permet d'utiliser des fonctions de boucle comme fait précédemment avec les autres particules composites. Clairement, nous avons vu au chapitre 3 que les mésons ont été considérés par le biais d'une fonction de boucle quark-antiquark. Concernant les diquarks, chapitre 4, nous avons simplement utilisé une conjugaison de charge à l'antiquark pour mimer une boucle quark-quark. Une fonction de boucle constituée par un quark et un diquark est possible ici. Cependant, c'est au prix une approximation supplémentaire, connue sous le nom d'approximation statique [13]. Elle consiste à négliger la quantité de mouvement du quark échangé par rapport à sa masse. Des études utilisant cette idée ont été développées, comme [16–18] qui utilisent les diquarks scalaires pour calculer les masses des baryons de l'octet, selon la température et la densité baryonique. Cependant, il est

observable dans [16] quelques limitations de cette tentative, sous la forme d'instabilités numériques sur certaines courbes. D'un point de vue numérique, cela révèle que les équations à résoudre nécessitent des méthodes de calcul plus performantes que celles utilisées pour les mésons.

Revenons à un point de vue physique. Il est souvent considéré que la modélisation des baryons est traitée de manière incomplète dans la littérature. Cela suggère des évolutions et des modifications des travaux déjà effectués. De plus, les baryons n'ont pas été modélisés dans le cadre du modèle PNJL. Ainsi, il serait intéressant d'observer les effets de l'inclusion de la boucle de Polyakov. Avec les quarks, mésons et diquarks, cette modification du modèle induit un décalage des courbes vers les hautes températures. Concernant les baryons, il n'est pas évident d'obtenir le même résultat. D'autre part, les masses des baryons ont été étudiées principalement selon la température, plus rarement selon la densité baryonique, mais pas dans le plan T, ρ_B complet. Clairement, il serait instructif de voir les limites de stabilité de certains baryons, comme les nucléons. Aussi, grâce au travail effectué dans le chapitre précédent, nous avons la possibilité d'inclure les diquarks axiaux de la modélisation des baryons, comme évoqué par exemple dans [11]. Cela pourrait permettre le traitement des baryons du décuplet. De la même manière, en utilisant des anti-diquarks, nous pourrions étudier le comportement des antibaryons.

Dans ce chapitre, en prenant en compte ces observations, nous proposons d'établir dans la partie 2 les équations consacrées à modéliser les baryons. A cette occasion, l'approximation statique est introduite dans notre travail et expliquée. Dans la partie 3, ces calculs théoriques se focalisent sur l'étude de chaque baryon d'une manière systématique. Plus précisément, les composantes scalaires ou axiales en saveur de ces particules sont détaillées. Ensuite, la partie 4 présente nos résultats numériques effectués à températures et densités finies. A cette occasion, nous soulignons les différences entre les modèles NJL et PNJL. Cette partie inclut notamment une étude de la masse du nucléon dans le plan T, ρ_B , des diagrammes de stabilité/instabilité des baryons étudiés, et une modélisation des antibaryons. Dans la partie 5, des calculs des constantes de couplage impliquant les baryons sont présentés. Les équations utilisées pour les mésons et les diquarks ne peuvent pas être utilisées ici. En conséquence, nous nous focalisons tout d'abord sur la méthode à appliquer. Nous présentons ensuite les résultats obtenus. Dans la partie 6, les masses des baryons à température et densité nulles sont étudiées, dans le cadre de la symétrie isospin, et au-delà de celle-ci. Ces résultats sont comparés aux données expérimentales. Cela amorcera alors une discussion au sujet de la fiabilité de notre approche, notamment en ce qui concerne les approximations utilisées. Notre méthode est alors comparée à d'autres. Cela concerne évidemment les travaux que nous avons cités, effectués dans le cadre du schéma quark-diquark avec le modèle NJL, mais aussi les travaux effectuées dans [22], c'est-à-dire n'utilisant pas les quarks pour décrire les baryons.

2. Présentation de la méthode employée

L'idée de base de notre modélisation des baryons est de revenir à une structure proche de celles observées pour les mésons et les diquarks. En d'autres termes, la finalité est d'utiliser l'équation de Bethe-Salpeter pour une diffusion quark-diquark. Cela veut dire que nous devons être capables de revenir à une description utilisant une fonction de boucle, mettant en jeu un quark et un diquark. Notre manière de procéder est résumée dans la figure 1. La finalité

de cette partie est d'expliquer le passage d'une ligne à l'autre de cette figure, et de donner les relations mathématiques associées. En fait, la méthode décrite ici peut être appliquée directement à des cas « simples », comme la composante scalaire en saveur du nucléon. Les adaptations à faire dans des cas plus complexes, comme le baryon Λ , seront expliquées dans la partie 3, quand ces baryons seront décrits individuellement.

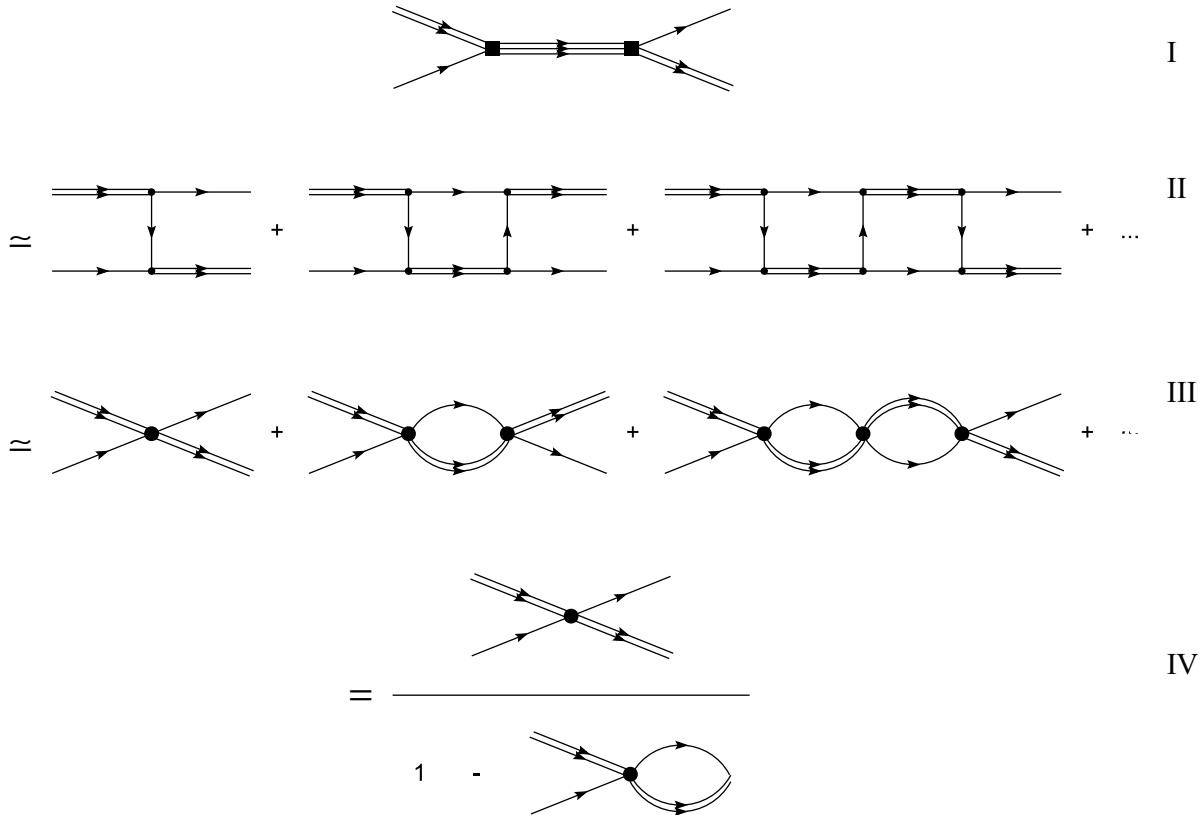


Figure 1. Schématisation de la modélisation des baryons.

2.1 Approximation statique

L'approximation statique [13, 16] évoquée dans l'introduction correspond au passage de la seconde à la troisième ligne de la figure 1. Grâce à cette approximation, nous pouvons revenir à la structure de boucle voulue. Dans la pratique, cela consiste à « effacer proprement » les quarks échangés visibles sur la ligne II de la figure 1.

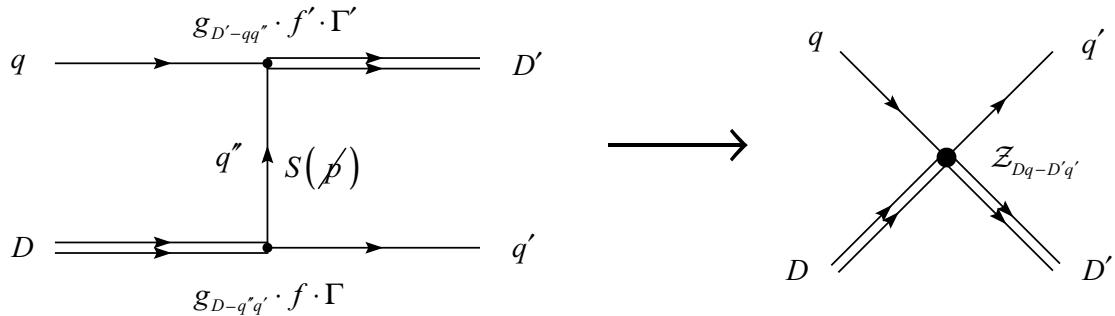


Figure 2. L'approximation statique.

Nous prenons ensemble le propagateur du quark échangé $S(\not{p})$ avec ses deux vertices associés. Cela conduit tout d'abord à l'écriture suivante :

$$(g_{D-q''q'} \cdot f \cdot \Gamma) \cdot S(\not{p}) \cdot (g_{D'-qq''} \cdot f' \cdot \Gamma') = (g_{D-q''q'} \cdot f \cdot \Gamma) \cdot \left(\frac{i}{\not{p} - m_q} \right) \cdot (g_{D'-qq''} \cdot f' \cdot \Gamma'). \quad (1)$$

Les deux g représentent les constantes de couplage entre un diquark et une paire de deux quarks. De tels termes ont été étudiés dans les chapitres précédents. Aussi, les deux f rassemblent des termes comme des facteurs de saveur (annexe C), ou des facteurs de couleur [16, 18]. Ils incluent aussi les deux termes Γ . Ces derniers correspondent aux matrices de Dirac traduisant le type d'interaction, au niveau des vertices. Dans notre étude, nous considérons des interactions *scalaires* (γ_5) ou *vectorielles* (γ^μ), comme dans [7, 10, 11]. Les autres interactions ne sont pas prises en compte, parce que nous avons vu que les diquarks pseudo-scalaires et vectoriels ne sont pas de bons candidats pour former des baryons.

Dans le cadre de l'approximation statique, la quadri-impulsion du quark échangé est négligée devant sa masse. Cela permet de remplacer le propagateur du quark échangé par un vertex effectif. Celui-ci est matérialisé par un point noir sur la partie droite de la figure 2. Nous avons :

$$\begin{aligned} & (g_{D-q''q'} \cdot f \cdot \Gamma) \cdot \left(\frac{i}{\not{p} - m_q} \right) \cdot (g_{D'-qq''} \cdot f' \cdot \Gamma') \\ & \approx (g_{D-q''q'} \cdot f \cdot \Gamma) \cdot \left(-\frac{i}{m_q} \right) \cdot (g_{D'-qq''} \cdot f' \cdot \Gamma') , \quad (2) \\ & \equiv \mathcal{Z}_{Dq-D'q'} = \begin{cases} g_{D-q''q'} \cdot g_{D'-qq''} \cdot f \cdot f' \cdot \left(-\frac{i}{m_q} \right) \cdot 1_4 & \text{si } \Gamma = \Gamma' = \gamma_5 \\ 4 \cdot g_{D-q''q'} \cdot g_{D'-qq''} \cdot f \cdot f' \cdot \left(-\frac{i}{m_q} \right) \cdot 1_4 & \text{si } \Gamma = \Gamma' = \gamma^\mu \end{cases} \end{aligned}$$

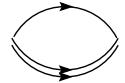
où 1_4 est la matrice identité de dimensions 4×4 .

2.2 Description des équations

Maintenant, nous nous focalisons sur la troisième et la quatrième ligne de la figure 1. Le vertex matérialisé par un point noir, impliquant deux diquarks et deux quarks, correspond au noyau d'interaction à deux corps de l'équation de Bethe-Salpeter [3, 16]. Il est associé au \mathcal{Z} défini précédemment dans la description de l'approximation statique :

$$\bullet \equiv \mathcal{Z} \text{ proportionnel à } -i \cdot \frac{g_{D-q''q'} \cdot g_{D'-qq''}}{m_q}. \quad (3)$$

De la même manière, la boucle diquark/quark correspond à la fonction de polarisation des baryons, aussi désignée sous le terme de fonction de boucle des baryons dans notre travail :



$$\equiv \Pi \quad (4)$$

La matrice de transition T est écrite, grâce à l'équation de Bether-Salpeter, comme $T = Z + Z \cdot \Pi \cdot T$. Comme avec les mésons, nous écrivons alors, dans le cas général :

$$T = Z + Z\Pi Z + Z\Pi Z\Pi Z + Z\Pi Z\Pi Z\Pi Z + \dots = \frac{Z}{1 - \Pi Z}. \quad (5)$$

Rigoureusement, (5) est vérifiée seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi Z)^n = 0. \quad (6)$$

Posons que Z soit égal à g^2/m . Ensuite, g ne dépasse pas 4, voir chapitre sur les diquarks. En outre, les masses effectives des quarks m sont supérieures à 16 dans le domaine dans lequel les baryons seront étudiés. En conclusion, Z^n est nécessairement proche de zéro quand n est suffisamment grand. Pour ce qui est de Π , des tests numériques nous ont permis de conclure que (6) est bien vérifiée. Alors, T est écrite comme :

$$T = \frac{Z}{1 - \Pi Z} = \frac{Z}{\det(1 - \Pi Z)} \cdot {}^T(\text{com}(1 - \Pi Z)) \text{ proportionnel à } \frac{1}{\det(1 - \Pi Z)}. \quad (7)$$

Pour obtenir la masse du baryon, il est nécessaire que T diverge. Par conséquent il nous faut :

$$\det(1 - \Pi Z) = 0. \quad (8)$$

Pour les cas simples, ΠZ est un nombre scalaire. Ainsi, pour un baryon de quantité de mouvement \vec{k} , (8) est équivalent à l'équation :

$$1 - \Pi(k_0, \vec{k}) \cdot Z = 0 \Big|_{k_0 = \sqrt{m^2 + (\vec{k})^2}}, \vec{k} \text{ fixé}, \quad (9)$$

où m est la masse du baryon. Dans des cas plus complexes, ΠZ est une matrice. Toutefois, la relation (8) reste valide.

2.3 Fonction de boucle des baryons

Bien que structurellement proches des fonctions de polarisation des mésons et des diquarks, la fonction de boucle de baryons Π est plus délicate à traiter, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la fonction de boucle n'inclut pas un terme, mais deux. Cela est dû à l'asymétrie causée par le fait de considérer un quark et un diquark. Nous pouvons faire le choix de prendre un quark et un diquark conjugué de charge. Mais, nous pouvons aussi considérer un diquark et un quark conjugué de charge. Pour écrire notre fonction, nous devrions construire celle-ci comme une combinaison linéaire de ces deux possibilités, figure 3 et équations (10, 11). Cependant, nous avons montré dans l'annexe D que ces deux composantes sont strictement égales. En conséquence, c'est une fausse complication.

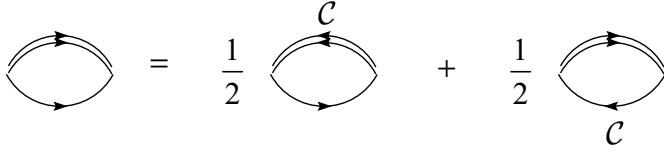


Figure 3. Les deux composantes de la fonction de boucle des baryons.

$$-i \cdot \Pi(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{1}{2} \cdot (-i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k})) + \frac{1}{2} \cdot (-i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k})), \quad (10)$$

avec :

$$\left\{ -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_q(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot i \cdot S_D^C(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \right) \right. \quad (11a)$$

$$\left. -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_D(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot i \cdot S_q^C(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \right) \right.. \quad (11b)$$

Ensuite, nous devons prendre en compte que la fonction de boucle inclut un fermion (le quark) et un boson (le diquark). Cela impose de réfléchir aux fréquences de Matsubara. D'ailleurs, ce ne sont pas les mêmes dans (11a) et (11b). Mais, pour ces deux composantes, la fréquence totale $i \cdot v_m$ est celle d'un baryon. Par conséquent, $i \cdot v_m$ est une fréquence fermionique, c'est-à-dire un nombre impair. Dans l'équation (11a), $i \cdot \omega_n$ est la fréquence associée au propagateur du quark. Donc, $i \cdot \omega_n$ est fermionique. La fréquence de Matsubara du propagateur du diquark doit alors être bosonique. Cela est vérifié, puisque $i \cdot \omega_n - i \cdot v_m$ correspond à cette fréquence : la somme ou la différence de deux fréquences fermioniques (nombres impairs) donne nécessairement une fréquence bosonique (nombre pair). Dans l'équation (11b), cette fois, $i \cdot \omega_n$ est la fréquence associée au propagateur de diquark. Ainsi, cela implique que celui-ci soit bosonique. La fréquence du propagateur du quark est fermionique. En effet, elle est égale à $i \cdot \omega_n - i \cdot v_m$: la somme ou la différence d'une fréquence bosonique (nombre pair) avec une fréquence fermionique (nombre impair) est nécessairement une fréquence fermionique (nombre impair).

Concernant les adaptations des équations causées par l'inclusion de la boucle de Polyakov, nous continuons ici aussi d'appliquer l'idée évoquée dans les chapitres précédents. Clairement, cela concerne l'adaptation des statistiques de Fermi-Dirac pour les quarks et antiquarks, en généralisant ainsi la méthode proposée dans [23] pour les mésons.

3. Etude de chaque baryon

Dans cette partie, nous effectuons une étude systématique de chaque baryon, en prenant en compte les canaux d'interaction scalaires et axiaux. Cela donne alors deux composantes [7, 11], c'est-à-dire respectivement la composante scalaire en saveur et l'axiale. Pour chacune d'elles, nous proposons d'écrire les diagrammes associés, comme ceux observables dans [4, 16]. Ensuite, nous étudions leurs fonctions d'onde, en nous inspirant de [6, 7, 18]. Finalement, nous établissons les équations à résoudre pour trouver les masses des baryons, dans le cadre des modèles (P)NJL.

3.1 Nucléons: proton et neutron

La composante scalaire en saveur du proton est une des plus simples à étudier, figure 4. En effet, elle concerne un quark u et un diquark scalaire $[ud]$. Le quark échangé est le quark d .

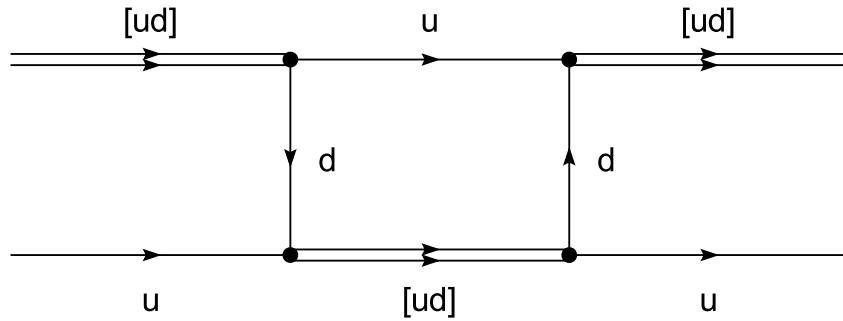


Figure 4. Composante scalaire en saveur du proton.

Dans la figure 4, un vertex traduisant l’interaction scalaire est indiqué par un point noir. La fonction d’onde de cette composante est écrite comme un produit tensoriel associant un quark u et un diquark $[ud]$ [6, 7, 18] :

$$|p\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_u \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[ud]} . \quad (12)$$

Une technique mnémotechnique pour comprendre cette fonction d’onde est de considérer que l’espace des quarks est résumé en un vecteur colonne. Plus précisément, la première composante est associée au quark u , la seconde au quark d , et la troisième au quark s . Cette idée peut être reprise pour les diquarks. Dans ce cas, nous devons prendre en compte deux

quarks. Ces derniers sont bien sûr ceux qui constituent le diquark, d’où le $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pour $[ud]$.

Concernant la matrice λ_2 , le lecteur est invité à consulter l’annexe C. Plus précisément, un parallèle peut être fait entre cette matrice et le facteur de saveur des vertices où $[ud]$ apparaît [6]. En appliquant la relation (9) dans le cas de la composante scalaire en saveur du proton, nous obtenons l’équation à résoudre pour trouver sa masse M_p . Pour un proton au repos, nous avons :

$$1 - 2 \cdot \frac{-2 \cdot g_{ud}^2}{m_d} \cdot \Pi_{[ud],u}(M_p, \vec{0}) = 0 . \quad (13)$$

Maintenant, considérons la composante axiale en saveur. Comme indiqué par la figure 5, la composante axiale est constituée par l’état $[ud]_{\text{axial}} + u$ et par l’état $[uu]_{\text{axial}} + d$. Dans cette figure, les vertices matérialisés par des cercles indiquent des interactions axiales.

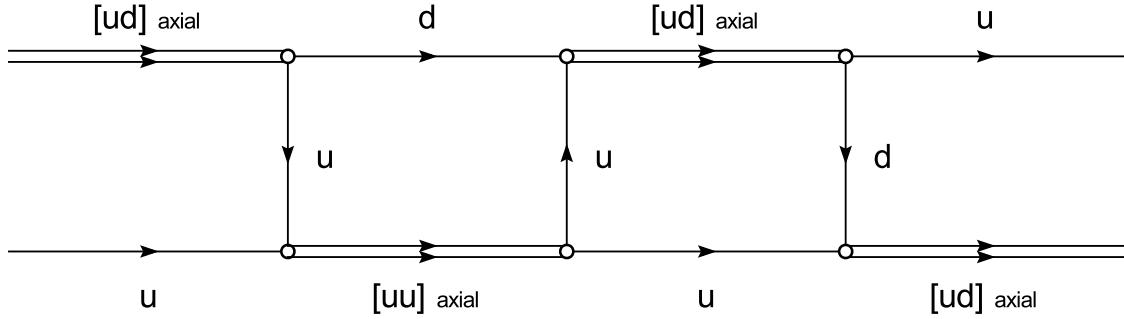


Figure 5. Composante axiale en saveur du proton.

Cette combinaison linéaire entre ces deux états est trouvée dans l'expression de la fonction d'onde associée à cette composante axiale, qui est écrite comme [6, 7] :

$$|p\rangle_{\text{axial}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i \cdot \lambda_{+1} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[ud]_{\text{axial}}} \right) , \quad (14)$$

avec :

$$\lambda_{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (\lambda_1 \pm i \cdot \lambda_2) . \quad (15)$$

La méthode utilisée pour obtenir l'équation à résoudre, c'est-à-dire l'équivalent de (13) pour la composante axiale en saveur, sera expliquée avec le baryon Λ , dans le paragraphe 3.2. Cependant, elle peut être employée sans problème avec les autres baryons. En fait, il sera juste nécessaire d'y insérer les quarks et diquarks qui correspondent à la composante de saveur voulue ...

Il est possible de refaire ce travail avec le neutron. Il suffit seulement de remplacer tous les u par des d , en inversement, dans toutes les formules associées au proton. Evidemment, si la symétrie isospin est appliquée, les résultats doivent strictement coïncider. En effet, dans ce cas, les quarks u et d sont similaires. Dans le cas général, la fonction d'onde de la composante scalaire en saveur du neutron s'écrit comme :

$$|n\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{d} \quad [ud]} , \quad (16)$$

et la composante axiale en saveur est :

$$|n\rangle_{\text{axial}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i \cdot \lambda_{-1} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{d} \quad [ud]_{\text{axial}}} \underbrace{- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i \cdot \lambda_{-1} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{{u} \quad [dd]_{\text{axial}}} \right) . \quad (17)$$

3.2 Baryon Λ

Le baryon Λ est conceptuellement plus délicat à traiter. En effet, la fonction d'onde de ce baryon résulte d'une combinaison linéaire de trois états distincts : $u+[ds]$, $d+[us]$ et $s+[ud]$. La figure 6 ci-après décrit la composante scalaire en saveur :

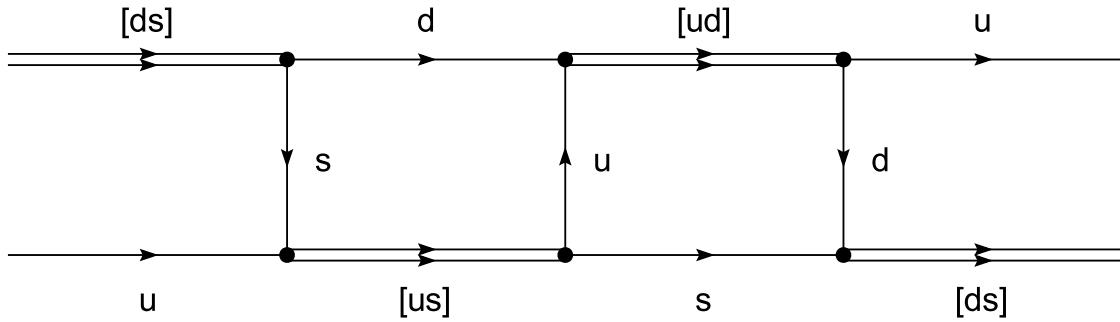


Figure 6. Composante scalaire en saveur du baryon Λ .

La fonction d'onde associée à la figure 6 est écrite comme [7, 18] :

$$|\Lambda\rangle_{\text{scalaire}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i\lambda_7}_{[ds]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{d} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i\lambda_5}_{[us]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{s} - 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes i\lambda_2}_{[ud]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} \right). \quad (18)$$

Les vertices d'interaction entre les quarks et les diquarks qui composent le baryon sont rassemblés dans le terme \mathcal{Z} , qui est maintenant une matrice 3×3 . Celle-ci se présente sous la forme :

$$\mathcal{Z}_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{Z}^{ud} & \mathcal{Z}^{us} \\ \mathcal{Z}^{du} & 0 & \mathcal{Z}^{ds} \\ \mathcal{Z}^{su} & \mathcal{Z}^{sd} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_{u,s} \cdot g_{d,s}}{m_s} & \frac{-2 \cdot g_{u,d} \cdot g_{d,s}}{m_d} \\ \frac{g_{u,s} \cdot g_{d,s}}{m_s} & 0 & \frac{-2 \cdot g_{u,d} \cdot g_{u,s}}{m_u} \\ \frac{-2 \cdot g_{u,d} \cdot g_{d,s}}{m_d} & \frac{-2 \cdot g_{u,d} \cdot g_{u,s}}{m_u} & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Pour chaque constante de couplage g , les deux quarks mis en indice sont ceux qui forment le diquark. Nous pouvons aussi noter le facteur -2 , qui apparaît devant les termes incluant $g_{u,d}$ [16, 18]. Ce facteur est assimilé à un facteur de saveur. En fait, ce facteur apparaît aussi dans (13). Comme avec \mathcal{Z} , le terme Π dans (8) est aussi une matrice 3×3 . Celle-ci est diagonale :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_u & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_d & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_s \end{bmatrix}, \quad (20)$$

où Π_u est la fonction de boucle des baryons impliquant le quark u et le diquark $[ds]$. Aussi, Π_d indique celui impliquant le quark d et le diquark $[us]$. Et, Π_s est celui incluant s et le diquark $[ud]$. Dans cette configuration, la matrice de transition T est évidemment une matrice 3×3 . Mais, T est toujours définie par l'équation de Bethe-Salpeter $T = \mathcal{Z} + \mathcal{Z} \cdot \Pi \cdot T$. Stricto sensu, (6) est alors réécrite comme $T = \mathcal{Z}(1 - \Pi \mathcal{Z})^{-1}$, puisque dans le cadre de calculs matriciels, nous ne pouvons pas diviser par une matrice, mais nous pouvons multiplier par sa matrice inverse. Dans tous les cas, l'équation $\det(1 - \Pi \mathcal{Z}) = 0$ (8) reste toujours valide. Formellement, l'équation à résoudre est la même que celle vue précédemment, c'est-à-dire quand \mathcal{Z} et Π étaient des nombres scalaires. Mais, si nous explicitons les termes, en utilisant (19, 20) dans (8), nous obtenons :

$$1 - 2 \cdot \Pi_u \cdot \Pi_d \cdot \Pi_s \cdot \mathcal{Z}^{ud} \cdot \mathcal{Z}^{us} \cdot \mathcal{Z}^{ds} - \Pi_u \cdot \Pi_d \cdot (\mathcal{Z}^{ud})^2 - \Pi_u \cdot \Pi_s \cdot (\mathcal{Z}^{us})^2 - \Pi_d \cdot \Pi_s \cdot (\mathcal{Z}^{ds})^2 = 0 . \quad (21)$$

Le baryon Λ peut aussi avoir une composante axiale en saveur, décrite par le diagramme de la figure 7. Il est facile de remarquer la similarité avec la figure 6.

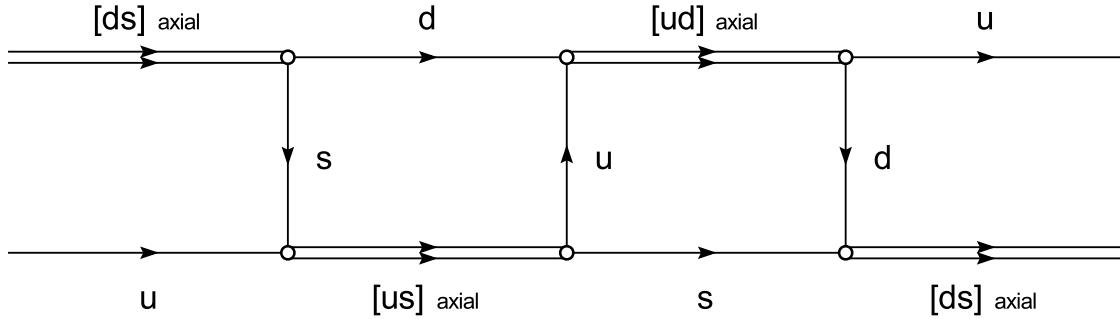


Figure 7. Composante axiale en saveur du baryon Λ .

La fonction d'onde associée est écrite comme [7] :

$$|\Lambda\rangle_{\text{axial}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \lambda_6}_{\substack{u \\ [ds]_{\text{axial}}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{d} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \lambda_4}_{\substack{d \\ [us]_{\text{axial}}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{s} - 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \lambda_1}_{\substack{s \\ [ud]_{\text{axial}}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{ud} \right) . \quad (22)$$

Par rapport à (18), les diquarks scalaires sont remplacés par des axiaux. En conséquence, la nature des vertices est modifiée, comme les matrices utilisées dans (22). D'autre part, dans l'équation à résoudre pour trouver la masse du baryon, c'est-à-dire l'équivalent de (21), un facteur 4 additionnel doit être ajouté à chaque vertex. En effet, ces derniers traduisent ici une interaction axiale, voir équation (2). Mis à part de ces différences, l'équation est structurellement identique à (21). Ainsi, nous ne l'expliquerons pas à nouveau.

3.3 Baryon Σ^0

Le baryon Σ^0 est traité séparément de Σ^- et Σ^+ , car la manière de décrire ce baryon est très différente de celle des deux autres. Clairement, la structure des équations décrivant ce baryon est assez proche de celle vue pour Λ . La seule différence entre Λ et Σ^0 est que ce dernier n'inclut pas de terme associé à la boucle formée par s et $[ud]$, figure 8. Cette remarque est valide pour les composantes scalaires et axiales en saveur.

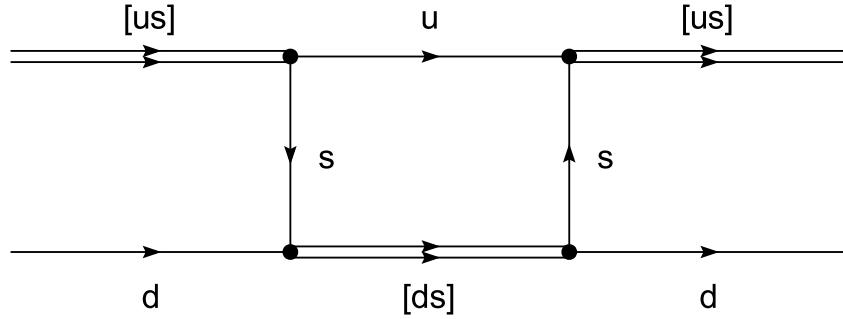


Figure 8. Composante scalaire en saveur du baryon Σ^0 .

En revanche, la fonction d'onde est assez différente de celle vue équation (18) [16, 18] :

$$\left| \Sigma^0 \right\rangle_{\text{scalaire}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i\lambda_7 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[ds]} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes i\lambda_5}_{d} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[us]} \\ u \end{pmatrix}, \quad (23)$$

en raison du terme de normalisation (1/2) et du signe moins au centre de l'équation. Malgré cela, l'équation donnant la masse du baryon est facile à trouver. Nous utilisons ce que nous avons fait pour Λ , et nous écrivons [18] :

$$\mathcal{Z}_{\Sigma^0} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{Z}^{ud} & 0 \\ \mathcal{Z}^{du} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-g_{u,s} \cdot g_{d,s}}{m_s} & 0 \\ \frac{-g_{u,s} \cdot g_{d,s}}{m_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_u & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

de sorte que l'équation à obtenir s'écrit, en partant de $\det(1 - \Pi \mathcal{Z}) = 0$ (8), comme :

$$1 - \Pi_u \cdot \Pi_d \cdot (\mathcal{Z}^{ud})^2 = 0. \quad (25)$$

La composante axiale en saveur de Σ^0 est obtenue exactement de la même manière. En effet, celle-ci est structurellement identique à la composante scalaire en saveur du baryon, voir figure 9 et sa fonction d'onde (26).

$$\left| \Sigma^0 \right\rangle_{\text{axial}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \otimes \lambda_6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ [ds]_{\text{axial}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \otimes \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ [us]_{\text{axial}} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

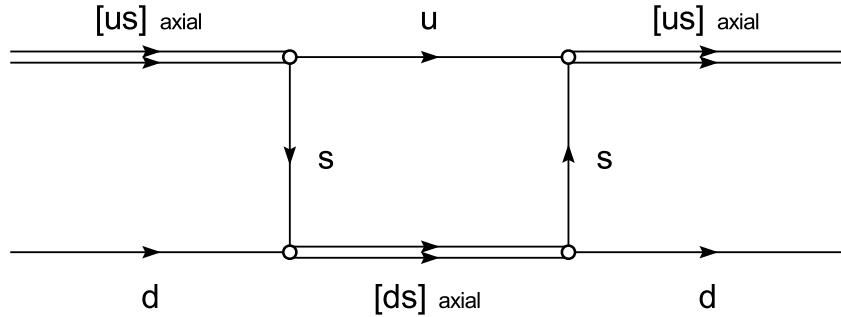


Figure 9. Composante axiale en saveur du baryon Σ^0 .

3.4 Baryons Σ^+ et Σ^-

La forme des équations décrivant ces deux baryons rappelle fortement ce qui a été fait pour les composantes scalaires en saveur des nucléons. Nous pouvons le voir sur la figure 10 pour Σ^+ : il suffit de remplacer le quark d du proton par le quark s .

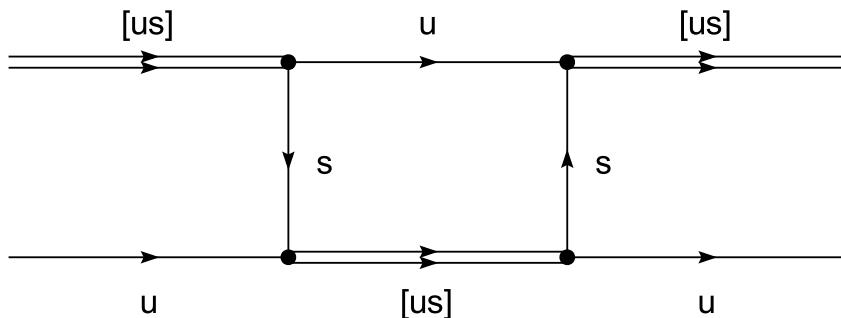


Figure 10. Composante scalaire en saveur du baryon Σ^+ .

La fonction d'onde s'écrit comme :

$$\left| \Sigma^+ \right\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}}_u \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ [us] \end{pmatrix}}_{[us]}, \quad (27)$$

et l'équation à résoudre est :

$$1 - 2 \cdot \frac{-2 \cdot g_{us}^2}{m_s} \cdot \Pi_{[us],u} (M_{\Sigma^+}, \bar{0}) = 0. \quad (28)$$

Une composante axiale en saveur peut aussi être considérée. Selon la figure 11, elle a la même structure que son équivalent scalaire. Les diquarks scalaires sont seulement remplacés par leurs équivalents axiaux. Cela entraîne bien sûr une mise à jour des vertices.

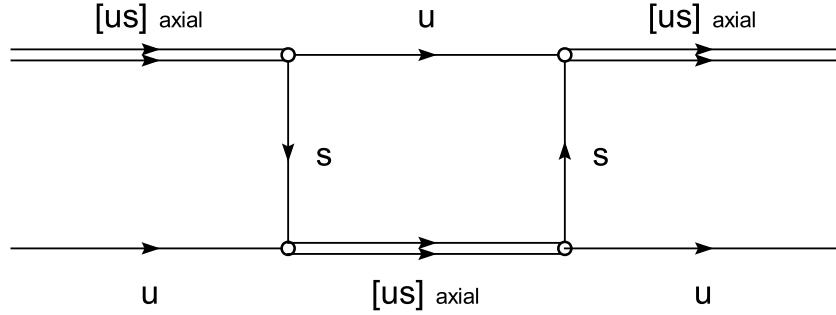


Figure 11. Composante axiale en saveur du baryon Σ^+ .

Ainsi, comparé à (27), seul le terme matriciel est modifié dans l'expression de la fonction d'onde [7] :

$$\left| \Sigma^+ \right\rangle_{\text{axial}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}}_{[us]_{\text{axial}}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_4}_{\text{ }} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Pour obtenir Σ^- , tous les u sont remplacés par des d . Cela conduit aux deux fonctions d'onde qui correspondent aux deux composantes en saveur :

$$\left| \Sigma^- \right\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}}_{[ds]} \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_7}_{\text{ }} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left| \Sigma^- \right\rangle_{\text{axial}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}}_{[ds]_{\text{axial}}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_6}_{\text{ }} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

3.5 Baryons Ξ

La manière de décrire ces baryons est très proche de celle que nous avons vu pour les nucléons et Σ^\pm . En effet, la composante scalaire en saveur de Ξ^0 est composée par un seul terme, figure 12.

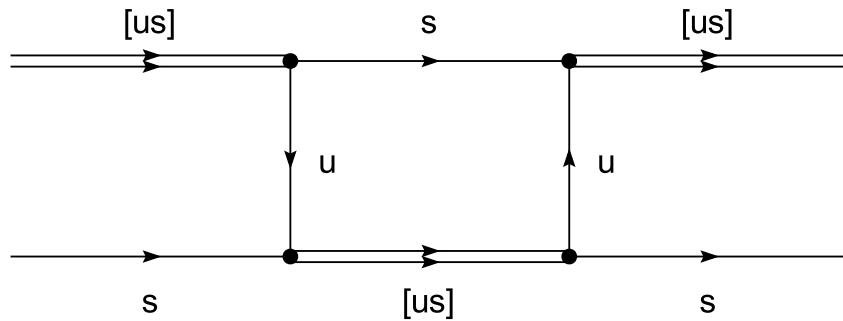


Figure 12. Composante scalaire en saveur du baryon Ξ^0 .

En conséquence, la fonction d'onde de la composante scalaire est écrite comme :

$$\left| \Xi^0 \right\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_s \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_5}_{[us]} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

L'équation à résoudre pour trouver la masse est :

$$1 - \frac{-2 \cdot g_{us}^2}{m_u} \cdot \Pi_{[us],s}(M_{\Xi^0}, \vec{0}) = 0. \quad (32)$$

Par rapport aux nucléons et aux baryons Σ^\pm , nous n'avons pas le facteur 2 devant le terme $\frac{-2 \cdot g_{us}^2}{m_u}$. Comme avec les nucléons, la composante axiale en saveur inclut deux termes, voir figure 13.

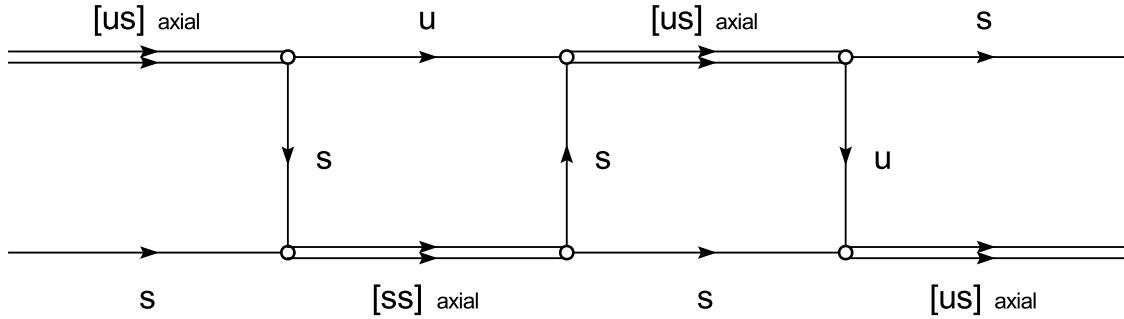


Figure 13. Composante axiale en saveur du baryon Ξ^0 .

Par conséquent, nous avons [6, 7] :

$$\left| \Xi^0 \right\rangle_{\text{axial}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_s \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_4}_{[us]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_u \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{[ss]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \quad (33)$$

Pour Ξ^- , nous remplaçons les u par des d , ainsi nous obtenons :

$$\left| \Xi^- \right\rangle_{\text{scalaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_s \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_7}_{[ds]} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

et :

$$\left| \Xi^- \right\rangle_{\text{axial}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} s \\ d \\ ss \end{bmatrix}_{\text{axial}}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_6}_{[ds]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} d \\ ss \end{bmatrix}_{\text{axial}}} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{[ss]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

3.6 Baryons Δ

Les baryons Δ et Ω^- sont traités par une seule composante, c'est-à-dire la composante axiale en saveur. En effet, si nous considérons ces baryons comme un état lié quark-diquark, les diquarks doivent avoir des fonctions d'onde symétriques en saveur, car nous avons besoin ici de diquarks comme $[uu], [dd], [ss]$. Seuls les diquarks axiaux peuvent satisfaire cette contrainte [7], comme observé dans le chapitre précédent. D'autre part, si la symétrie isospin n'est pas considérée, nous avons quatre baryons Δ différents : Δ^{++} , Δ^- , Δ^+ et Δ^0 . Commençons par Δ^{++} , voir figure 14.

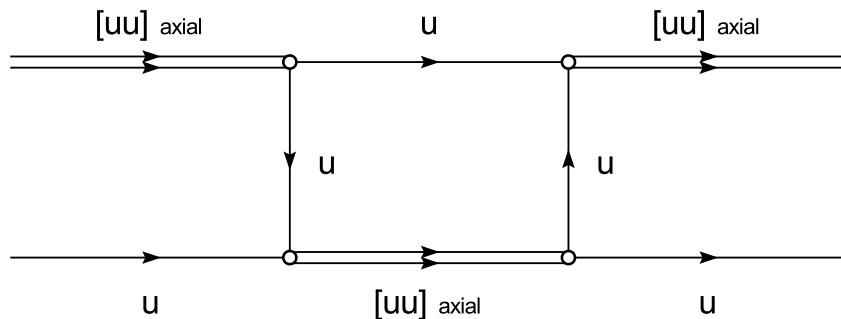


Figure 14. Composante axiale en saveur du baryon Δ^{++} .

Selon ce que nous avons vu plus haut, la fonction d'onde associée est écrite comme [7] :

$$\left| \Delta^{++} \right\rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} u \\ uu \end{bmatrix}_{\text{axial}}} \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_{+1} \cdot \lambda_2}_{[uu]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

et l'équation utilisée pour obtenir la masse du baryon est :

$$1 - 2 \cdot \frac{-2 \cdot 4 \cdot g_{uu}^2}{m_u} \cdot \Pi_{[uu],u} (M_{\Delta^{++}}, \vec{0}) = 0 . \quad (37)$$

Un facteur 4 est présent, en raison du canal d'interaction scalaire. Le baryon Δ^- est obtenu à partir de ce que nous avons vu pour Δ^{++} , par un remplacement des u par d . Il vient :

$$|\Delta^- \rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_d \otimes \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_{-1} \cdot \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[dd]_{\text{axial}}} . \quad (38)$$

Pour Δ^+ , nous avons à prendre en compte une combinaison linéaire de deux termes, figure 15.

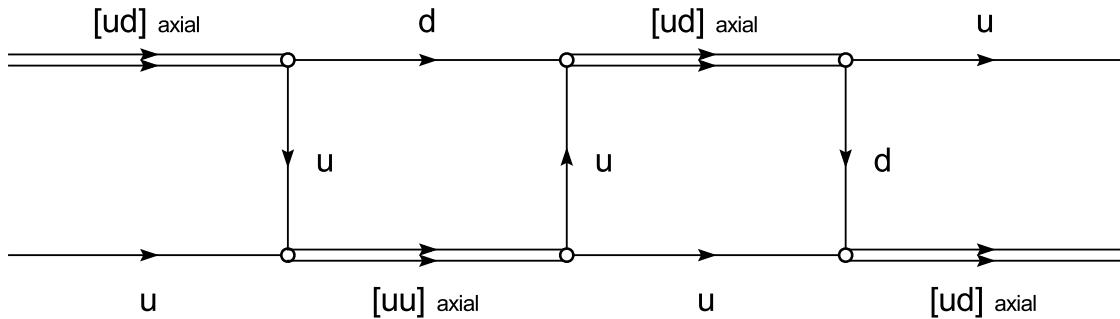


Figure 15. Baryon Δ^+ .

Mais, ce diagramme correspond exactement à la composante axiale en saveur du proton. Par conséquent, la fonction d'onde du baryon Δ^+ est identique à celle écrite équation (14).

Pour le baryon Δ^0 , nous remplaçons les u par des d , et inversement, dans la figure 15. Cela correspond à la composante axiale en saveur du neutron, et ainsi la fonction d'onde associée est identique à (17).

3.7 Baryon Ω^-

Le baryon Ω^- peut être modélisé comme une association d'un quark s et d'un diquark axial $[ss]$. Evidemment, le quark échangé est un quark s , comme représenté sur la figure 16.

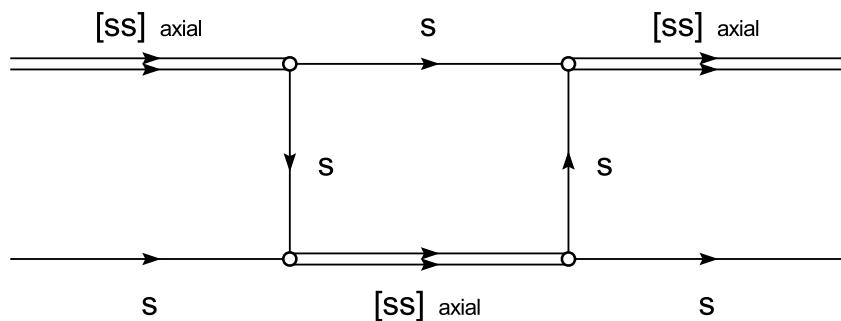


Figure 16. Baryon Ω^- .

La fonction d'onde associée à ce baryon est écrite comme :

$$\left| \Omega^- \right\rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_s \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{[ss]_{\text{axial}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

et l'équation à résoudre est :

$$1 - \frac{-2 \cdot 4 \cdot g_{ss}^2}{m_s} \cdot \Pi_{[ss],s} (M_{\Omega^-}, \vec{0}) = 0 . \quad (40)$$

4. Résultats à températures et densités finies

Dans nos résultats numériques, nous avons noté que les baryons de l'octet peuvent être correctement décrits uniquement par leur composante scalaire en saveur. En fait, même s'il a été possible d'inclure la composante axiale en saveur, comme dans [7], nos résultats numériques ont montré que cette contribution peut être négligée dans la description (P)NJL que nous avons effectuée ici. De la même manière, les baryons du décuplet ont été modélisés en utilisant leur composante axiale en saveur.

D'autre part, comme dans les chapitres précédents, nos calculs à températures et densités finies ont été effectués avec le jeu de paramètre P1. Cela veut dire que nous avons considéré la symétrie isospin. En fait, avec les baryons de l'octet et du décuplet, nous avons ainsi à traiter 18 baryons. Grâce à la symétrie isospin, certaines masses de baryons sont dégénérées. En conséquence, le nombre de courbes à tracer est de fait réduit. Cela évite de surcharger nos graphes.

4.1 Octet de baryons

Comme indiqué dans l'introduction, certains travaux NJL liés à l'octet de baryons à températures et densités finies sont disponibles dans la littérature, comme par exemple [16–18]. Ces références ont utilisé la composante scalaire en saveur pour décrire l'octet de baryons. Ils n'ont pas modélisé les diquarks axiaux, donc ils n'ont pas inclus la composante axiale en saveur. Concernant les résultats PNJL, nous rappelons que la modélisation des baryons dans le modèle PNJL n'a pas été traitée dans la littérature avant notre travail.

Nos résultats sont présentés dans les figures 17 à 19. Dans la figure 17, nous étudions les masses des baryons en fonction de la température, à densité nulle, alors que dans la figure 18, les masses sont calculées à densités finies, avec $T=0$. Dans ces figures, dans l'ensemble, les masses diminuent quand la température augmente, jusqu'à ce que les baryons atteignent leurs limites de stabilité. Cependant, en fonction de la densité, il est aussi observé que les masses atteignent chacun un minimum, et ensuite ré-augmentent. Ce comportement intervient notamment pour les nucléons, Ξ et Λ . De manière générale, les baryons de l'octet sont plus sensibles à la densité baryonique qu'à la température. La diminution de la masse en fonction de ce paramètre est inférieure à 20 % dans les modèles NJL et PNJL. Le taux est proche de

30 % en fonction de la densité baryonique. Aussi, dans notre description, la masse des nucléons est égale à 897.5 MeV à densité nulle. A la densité nucléaire ordinaire ρ_0 , la masse est de 724.4 MeV. Cela conduit à un rapport $M_N(\rho_B = \rho_0)/M_N(\rho_B = 0) \approx 0.8$, alors que [22] propose une valeur de 0.6. En conséquence, on s'attend à ce que la décroissance de la masse du nucléon en fonction de la densité baryonique soit plus forte que dans notre approche. Nos résultats NJL peuvent être comparés à certains de [16–18]. Notamment avec l'étude selon la densité baryonique, nous notons que nos courbes ne présentent pas les défauts observables avec ces références, notamment avec [16], caractérisés par de fortes instabilités numériques. Une autre différence concerne les masses obtenues à températures réduites, notamment avec Ξ . Notre choix de la constante G_{DIQ} dans le jeu de paramètre utilisé explique ladite différence. En fait, notre choix semble être meilleur en ce qui concerne le comportement de Ξ . En effet, tous nos baryons ont une température critique et une densité critique, figures 17, 18, alors que cela ne semble pas être le cas pour le Ξ traité dans [16–18].

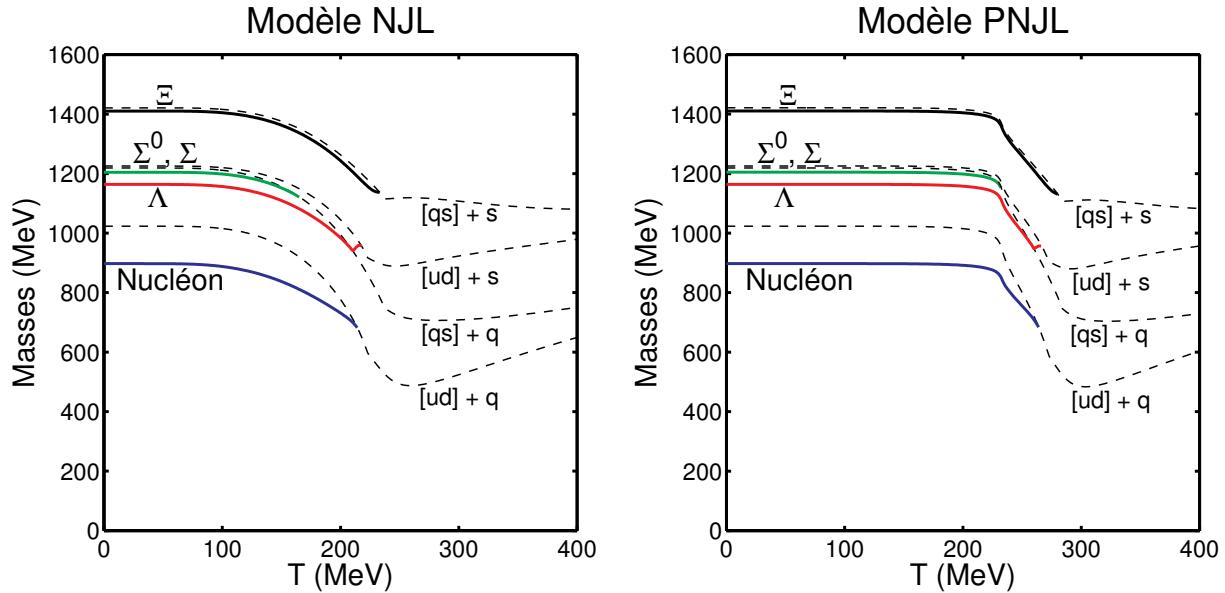


Figure 17. Masses des baryons de l'octet en fonction de la température.

Plus précisément, concernant Ξ , nous avons trouvé que ces particules sont les baryons de l'octet qui tolèrent le mieux la température et la densité baryonique. En effet, ils ont les températures et densités critiques les plus fortes. Les Ξ sont constitués *globalement* par deux quarks étranges s et par un seul quark léger. Cela explique cet excès de stabilité par rapport aux autres baryons. En effet, les quarks étranges s sont moins sensibles à T, ρ_B que les quarks légers. Cependant, l'énergie de liaison de Ξ est toujours faible. Nous rappelons que l'énergie de liaison peut être trouvée en comparant les valeurs données par les courbes de $[qs] + s$ et de Ξ .

Concernant les baryons Σ , les courbes associées à Σ^0, Σ^\pm sont strictement dégénérés, quelle que soit la température ou la densité baryonique. Dans le cadre de la symétrie isospin, un tel résultat est parfaitement valide. Cependant, les équations utilisées pour traiter les baryons Σ^0 et Σ^\pm sont différentes, paragraphes 3.3 et 3.4. Ainsi, il n'était pas évident d'obtenir

exactement les mêmes résultats. Cette remarque sera aussi valide pour les baryons du décuplet Σ^0, Σ^* . D'autre part, les énergies de liaison des baryons Σ sont toujours assez modestes.

Pour le baryon Λ , nous avons vu dans le paragraphe 3.2 que sa fonction d'onde est décrise par trois états distincts ($[ud]+s$, $[us]+d$ et $[ds]+u$). Dans le cadre de la symétrie isospin, les deux derniers sont dégénérés, ainsi nous avons les états $[ud]+s$ et $[qs]+q$. Cela entraîne « deux températures critiques » et « deux densités critiques » pour ce baryon. En d'autres termes, le phénomène est présent selon la température et la densité baryonique, voir respectivement les figures 17 et 18. Quand la courbe de Λ coupe tout d'abord la courbe de $[qs]+q$, le Λ devient instable par rapport à cet état. Mais, il reste stable par rapport à l'état $[ud]+s$, jusqu'à ce qu'il coupe la courbe associée. Après cela, le baryon devient instable. Dans les figures, la « double transition stable/instable » est observable par une croissance rapide de la masse de Λ , entre les courbes de $[qs]+q$ et de $[ud]+s$.

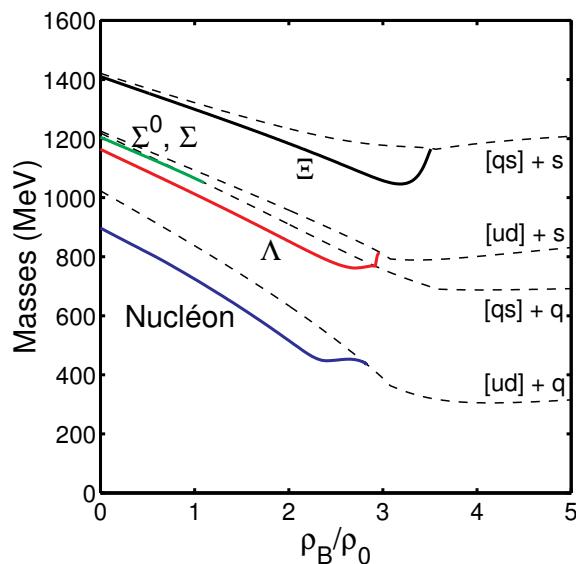


Figure 18. Masses des baryons de l'octet en fonction de la densité baryonique.

Dans le cadre de notre travail, nous rappelons que l'instabilité d'un baryon est associée à sa désintégration en un quark et un diquark. Cela n'inclut pas la désintégration en un autre baryon. D'autre part, dans nos résultats liés aux baryons, nous nous sommes focalisés sur l'étude de leurs masses dans leur zone de stabilité, et pas dans celle d'instabilité. En fait, les équations de nos baryons ont été construites en utilisant l'approximation proposée dans [24]. Elle consiste à négliger la partie imaginaire du terme k_0 , voir (9), utilisé en tant qu'argument de la fonction B_0 . Dans le cadre des baryons, cette approximation interdit de travailler dans la zone d'instabilité des baryons, comme expliqué dans le paragraphe 5.3 de l'annexe D. Clairement, des calculs de ce type nécessitent d'effectuer des intégrations utilisant des nombres complexes. Certaines versions de nos algorithmes numériques effectuent de telles intégrales.

D'autre part, les figures 17 montrent que l'inclusion de la boucle de Polyakov entraîne le décalage déjà observé vers les hautes températures. En fait, nous confirmons que cette

distorsion de la courbe n'altère pas les valeurs trouvées : par exemple, le comportement de Λ décrit plus haut peut être trouvé dans les modèles NJL et PNJL, figure 17. Dans le cadre du modèle PNJL, à densités réduites, les masses des baryons restent constantes dans un domaine en température large d'environ 200 MeV, comme pour leurs constituants (quarks et diquarks). Aussi, les températures critiques sont décalées vers des valeurs plus fortes. Concrètement, elles sont localisées après 260 MeV pour les courbes PNJL, c'est-à-dire 20 MeV en plus par rapport au modèle NJL. En conséquence, les zones de stabilité sont augmentées sous l'effet de la boucle de Polyakov. Cette observation est confirmée par la figure 19, dans laquelle la masse du nucléon est estimée dans le plan T, ρ_B , dans sa zone de stabilité, pour les modèles NJL et PNJL. Dans cette figure, nous pouvons estimer de manière concrète l'extension de la zone de stabilité causée par la boucle de Polyakov. Il y est aussi confirmé que les approches NJL et PNJL coïncident à température nulle, quelle que soit la densité baryonique. D'autre part, comme pour les quarks dans le chapitre 2, nous confirmons aussi que la boucle de Polyakov agit seulement selon la température, et pas selon la densité. Une figure comme la figure 19 est aussi un test pertinent en ce qui concerne la stabilité de notre méthode numérique. Nous concluons que le test est très positif, car aucun défaut n'est observable sur les graphes, comme des discontinuités ou autres comportements pathologiques.

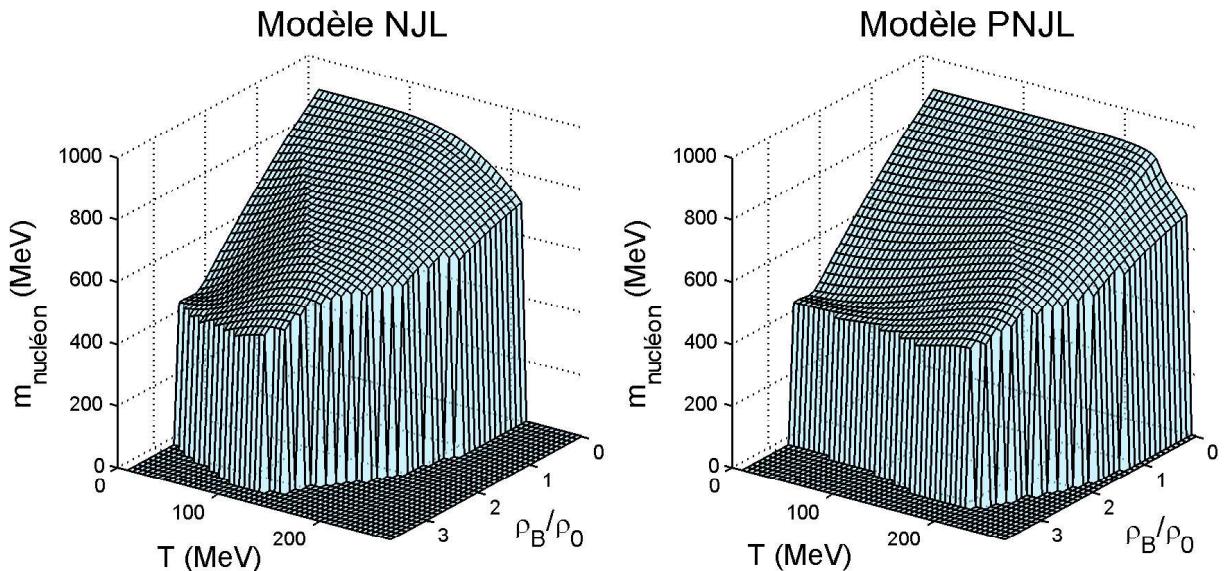


Figure 19. Masse du nucléon dans le plan $T - \rho_B$.

4.2 Décuplet de baryons

Dans le cadre des modèles (P)NJL, l'étude des baryons du décuplet à températures et densités finies effectuée ici peut être considérée comme nouvelle par rapport à la littérature. En fait, des estimations des masses de ces baryons ont été effectuées à $T = 0, \rho_B = 0$, par exemple dans [3]. Mais, ces données seront considérées plus tard, dans la partie 6. Nos résultats sont exposés dans les figures 20 et 21. Clairement, le décuplet de baryons présente des différences par rapport à ceux de l'octet. Les variations de masse selon la température sont faibles, figure 20. Les masses des baryons Δ tendent à augmenter quand la température croît, alors que nous avions trouvé une décroissance pour les baryons de l'octet. Mais, comme pour ces

derniers, les masses des baryons du décuplet diminuent quand la densité baryonique augmente, figure 21. Concernant les résultats NJL, des valeurs très disparates ont été trouvées pour les températures et densités critiques. Les températures critiques des baryons du décuplet sont globalement plus faibles que celles trouvées pour l'octet de baryons. De manière générale, les baryons les plus légers, comme Δ , sont clairement les plus fragiles selon T, ρ_B . En revanche, le baryon Ω est le plus résistant : sa température critique est comparable à celles des baryons de l'octet. En outre, ce baryon est manifestement trop stable pour admettre une densité critique à température nulle, au moins dans notre domaine d'étude, voir figure 21. Les comportements de ces baryons sont reliés à ceux des diquarks $[qq]$ et $[ss]$ qui les constituent. D'autre part, concernant les baryons Ξ^* , nous observons le même phénomène de « double transition » que celui observé pour Λ , entre les courbes $[ss]+q$ et $[qs]+s$.

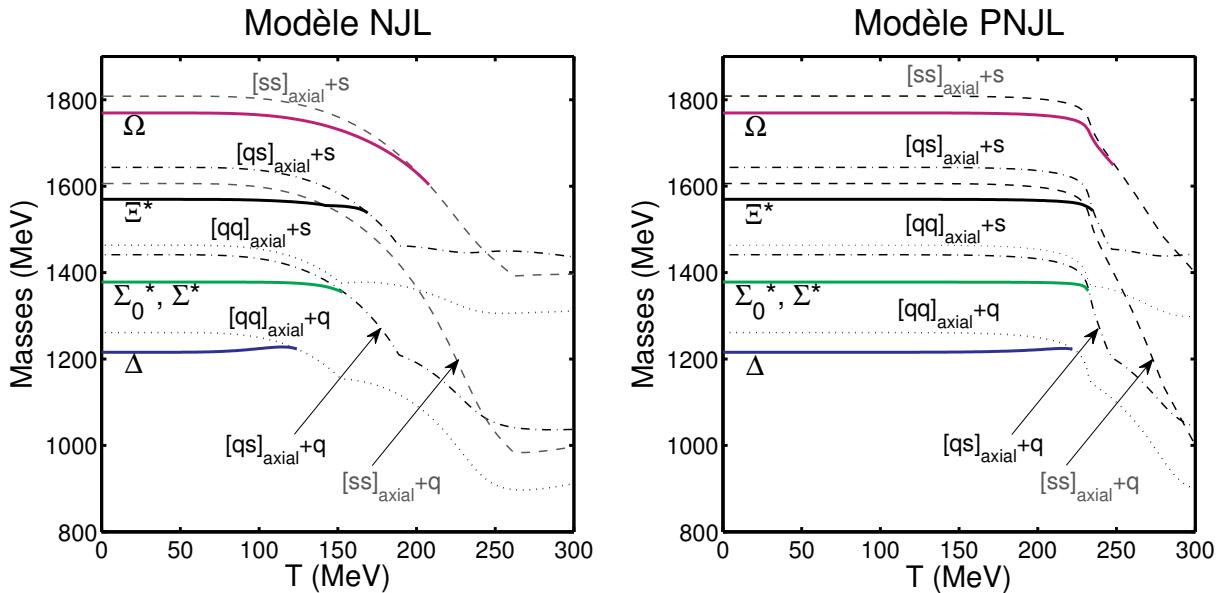


Figure 20. Masses des baryons du décuplet en fonction de la température.

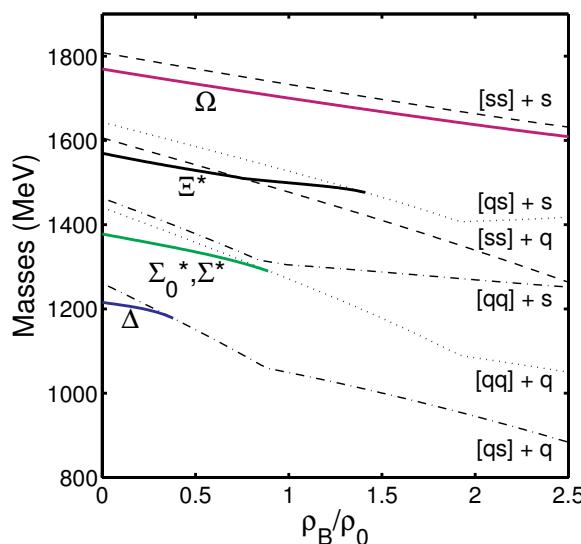


Figure 21. Masses des baryons du décuplet en fonction de la densité baryonique.

Dans le modèle PNJL, mis à part le comportement déjà observé pour les particules précédentes, nous prouvons souligner le fait que la zone de stabilité des baryons Δ est fortement augmentée par l'ajout la boucle de Polyakov. Plus précisément, pour ces baryons, nous avons une température critique proche de 125 MeV dans le modèle NJL, contre 225 MeV avec PNJL. En outre, si la dispersion des températures critiques est forte pour les baryons NJL du décuplet, cette dispersion est réduite avec le modèle PNJL.

4.3 Autres résultats

Afin de compléter les résultats trouvés dans les paragraphes précédents, nous proposons ici d'étudier les antibaryons et d'établir les diagrammes NJL de stabilité/instabilité pour les baryons traités. Comme expliqué dans le chapitre précédent avec les diquarks, l'utilisation de la symétrie matière-antimatière rend possible d'étudier des antiparticules. Pour un antibaryon, l'astuce consiste à admettre que le comportement d'un baryon à une densité de $-\rho_B$ est le même que celui de son antibaryon correspondant à ρ_B , et inversement. Nos résultats pour les baryons/antibaryons de l'octet et du décuplet sont exposés figure 22. Pour ces particules, les couples baryons/antibaryons sont strictement dégénérés à densité nulle. Quand la densité est non nulle, pour tous les couples baryons/antibaryons, la masse de l'antibaryon est toujours plus forte que celle de son baryon correspondant. Comme escompté, cela révèle que les antibaryons sont moins stables que les baryons à densités positives. En fait, en raison de l'instabilité des antibaryons pour ce régime, cela explique pourquoi notre domaine en densité baryonique est si réduit dans la figure 22. La tendance générale est que la différence de masse entre un baryon et son antibaryon croît rapidement si le baryon est composé par des quarks légers. Cette remarque est particulièrement vraie avec les nucléons et les anti-nucléons. D'ailleurs, pour cette antiparticule, l'augmentation de sa masse est si forte que l'anti-nucléon devient instable quand $\rho_B \approx 0.1\rho_0$. Dans la figure 22, les pointillés indiquent que les données ont été trouvées dans sa zone d'instabilité. A cette occasion, nous avons utilisé une méthode numérique légèrement différente que celle que nous utilisons d'habitude, en effectuant des intégrales avec des nombres complexes, comme évoqué précédemment.

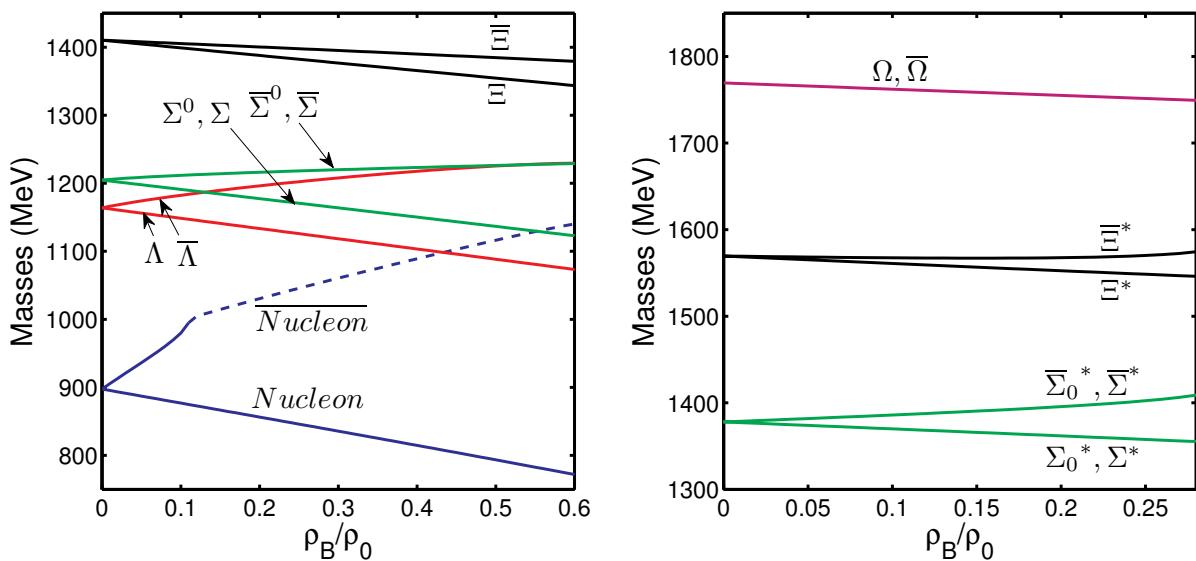


Figure 22. Masses des baryons et des antibaryons en fonction de la densité baryonique.

Dans le chapitre précédent, nous n'avons pas modélisé les anti-diquarks $\overline{[qq]}$ à densités finies (pour $T=0$), car ils étaient trop instables. Par conséquent, nous n'avons pas considéré l'antibaryon $\bar{\Delta}$ dans les figures 22, 24. A l'opposé, les $[ss]$ et $\overline{[ss]}$ sont toujours dégénérés, quelle que soit la densité baryonique. Ce comportement est aussi observable pour les baryons/antibaryons $\Omega, \bar{\Omega}$, dans la figure 22. Dans la figure 24, cela conduit à une symétrie parfaite de la courbe de Ω selon l'axe $\rho_B = 0$. Nous rappelons que les quarks étranges, et par extension $[ss]$ et Ω , sont seulement affectés par la valeur absolue de la densité baryonique.

Dans la figure 23, nous avons établi le diagramme NJL de stabilité/instabilité pour les baryons de l'octet, alors que dans la figure 24, nous nous intéressons au diagramme NJL pour les baryons du décuplet, sauf pour Δ . Comme trouvé avec les diquarks, les courbes des baryons présentent une asymétrie par rapport à l'axe $\rho_B = 0$, sauf pour Ω . Cela confirme les observations faites pour la figure 22 : les baryons sont plus stables à densités positives qu'à densités négatives. Concernant les baryons qui présentent « plusieurs transitions », comme les Λ et Ξ^* , la courbe indique la limite pour laquelle *tous* les états qui composent les baryons sont stables, c'est-à-dire la « première » transition sur les figures 17, 18, 20, 21. Sur les deux figures, les courbes pointillées correspondent aux diquarks. Elles permettent de remarquer que, pour tous les baryons traités, la limite de stabilité d'un baryon est atteinte avant que le ou les diquarks qui le composent deviennent instables. Ce point sera discuté plus tard dans ce chapitre.

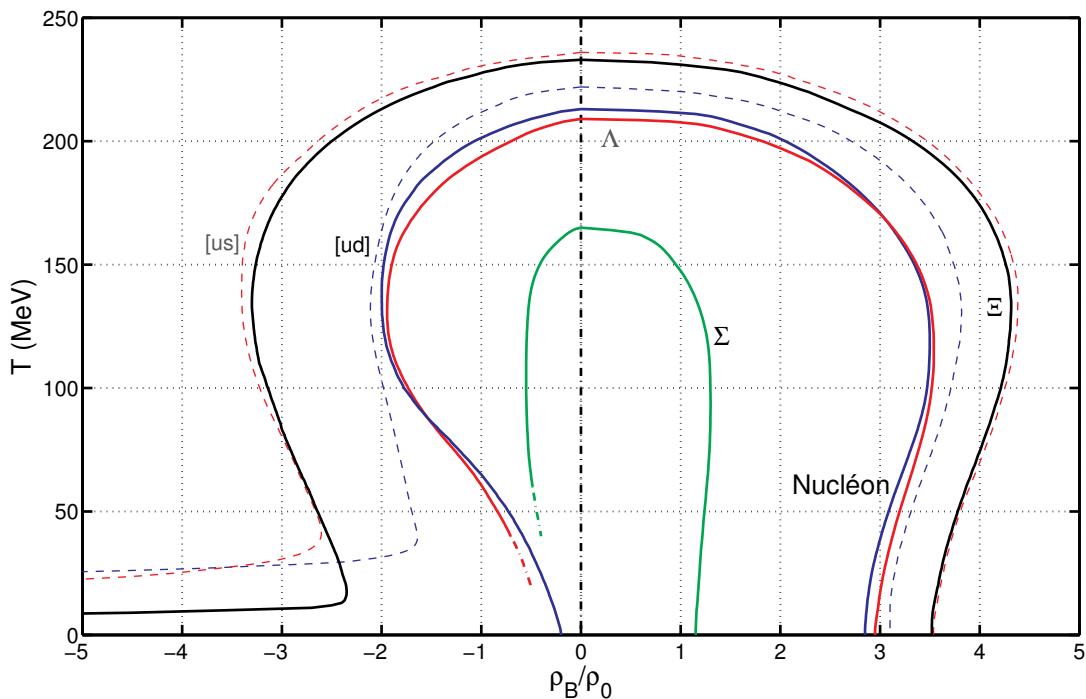


Figure 23. Diagramme NJL de stabilité/instabilité pour l'octet de baryons.

En fait, avec les résultats obtenus pour les baryons, nous observons que les masses des baryons, ou leurs limites de stabilité, sont strictement continues selon la densité baryonique, positive ou négative. C'est un signe positif en ce qui concerne la fiabilité de notre approche.

Comme on s'attend à ce que les baryons de l'octet interviennent dans le modèle d'évolution dynamique effectué dans le chapitre 7, un résultat différent à ce niveau aurait été inacceptable, physiquement ou numériquement.

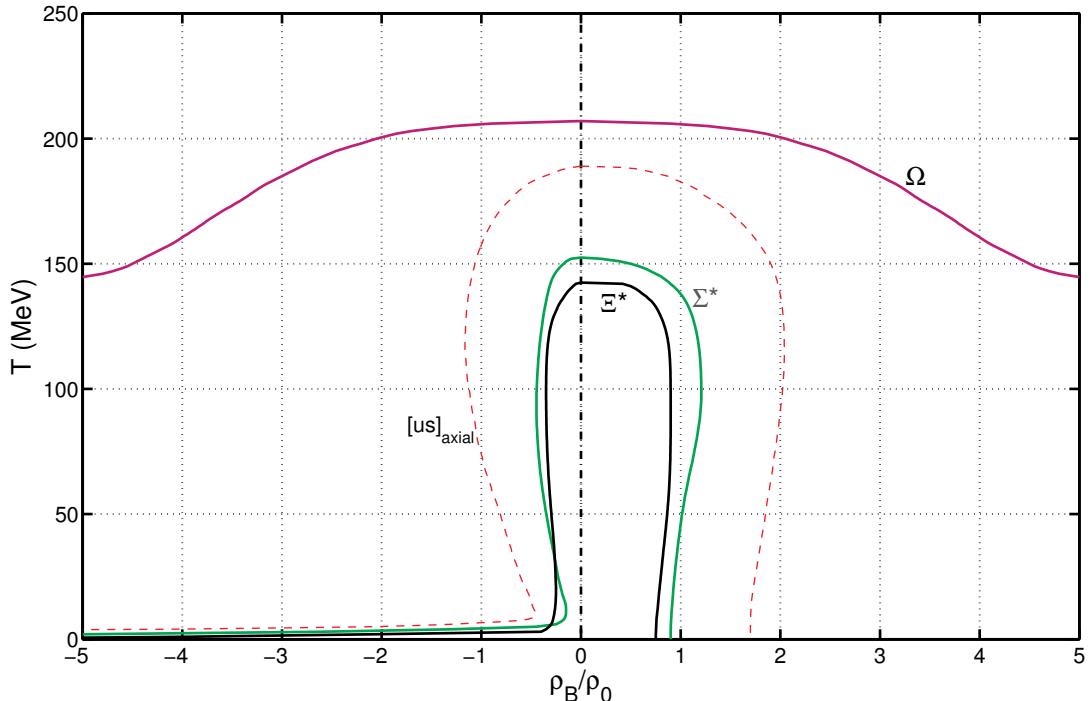


Figure 24. Diagramme NJL de stabilité/instabilité pour le décuplet de baryons.

5. Constantes de couplage

5.1 Etablissement des constantes de couplage des baryons

Comme avec les autres particules composites étudiées précédemment, les constantes de couplage mettant en jeu un baryon peuvent être considérées. Cependant, la méthode à appliquer est plus délicate pour les baryons. En effet, nous avons vu avec les mésons et les diquarks que la matrice T obtenue pouvait être associée à un propagateur (P)NJL. Celui-ci pourrait être comparé au propagateur traditionnel, c'est-à-dire celui trouvé dans le cadre de la théorie quantique des champs, comme par exemple $\frac{i}{k^2 - m^2}$ avec les mésons. En fait, ce

dernier et le propagateur (P)NJL sont scalaires. Comme avec les baryons, nous devons remarquer la nature scalaire de la fonction de boucle utilisée. En conséquence, la matrice T , et donc le propagateur (P)NJL sont aussi scalaires, alors que le propagateur du baryon obtenu avec la théorie quantique des champs (propagateur « libre ») est un quadrivecteur, c'est-à-dire $\frac{\mathcal{K} + m}{k^2 - m^2}$. Cependant, la divergence est aussi vérifiée avec ce dernier propagateur, nous permettant de valider l'équation (8). Cet aspect n'a pas de conséquence sur la fiabilité de la

méthode [16–18], mais cela impose certaines précautions dans les calculs associés aux constantes de couplage.

Plusieurs solutions sont possibles pour établir l'expression des constantes de couplage des baryons. Mais, dans tous les cas, il semble nécessaire de procéder à une approximation. Par exemple, une méthode simple consiste à considérer la trace du propagateur « libre » du baryon, et ensuite d'établir l'équivalence avec le propagateur (P)NJL. Pour un nucléon, cela conduit à l'expression :

$$\left. \frac{-2 \cdot \frac{g^2}{m_q}}{1 + 4 \cdot \frac{g^2}{m_q} \cdot \Pi(k_0, \vec{k})} \right|_{k^2 = m_B^2} \approx iG \cdot \left(\text{Tr} \left(\frac{\not{k} + m_B}{k^2 - m_B^2} \right) \right|_{k^2 = m_B^2} \cdot iG, \quad (41)$$

dans lequel m_B est la masse du nucléon et G est la constante de couplage voulue. Ensuite, nous appliquons la même méthode que dans les chapitres précédents. Clairement, nous inversons tout d'abord l'équation (41), nous dérivons par rapport à k , et finalement nous posons $k_0 = m$, $\vec{k} = \vec{0}$. Finalement, nous obtenons la relation :

$$G = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \frac{\partial \Pi(k_0, \vec{0})}{\partial k_0}}} \Big|_{k_0 = m_B} \quad (42)$$

Dans cette écriture, la dérivée de Π par rapport à k_0 a été trouvée négative numériquement, conduisant à $G \in \mathbb{C}$. Mais, seul $|G|$ est utilisé dans les calculs. Par conséquent, ce comportement est sans conséquence sur les résultats. Concernant les autres baryons, nous n'avons besoin que de reprendre (41) et de remplacer \mathcal{D} par celui du baryon considéré. Pour les baryons décrits par une combinaison linéaire entre plusieurs états distincts, comme Λ , il est nécessaire de considérer chaque état séparément.

5.2 Résultats

Nous avons obtenu les données présentées dans les figures 25 à 28. Les figures 25 et 26 concernent les baryons de l'octet, alors que les figures 27 et 28 sont associées à ceux du décuplet. Pour les mésons et les diquarks, sauf pour η , il a été observé que les constantes de couplage sont assez constantes à températures modérées. Ensuite, les courbes décroissent, tendent vers zéro pour la température critique, et ensuite ré-augmentent quand la particule devient instable. Un comportement similaire a été observé aussi selon la densité baryonique quand la particule présente une transition stable/instable selon ce paramètre. Concernant les baryons, nous rappelons que nous les avons étudiés jusqu'à ce qu'ils atteignent leur limite de stabilité. Par conséquent, seule une partie de la courbe est représentée sur nos résultats. Selon la température, certaines courbes des baryons correspondent à cette description, c'est-à-dire une décroissance jusqu'à zéro des constantes de couplage. Cependant, comme pour $|g_{\Lambda-[ud]s}|$, $|g_{\Xi-[qs]s}|$, les courbes ont un comportement différent. Pour la première, la courbe ne tend pas

vers zéro. Concernant la seconde, la courbe admet un maximum avant d'atteindre la température critique. Un tel comportement est aussi observé pour certains baryons de l'octet, selon la densité baryonique, figure 26. Cette remarque est particulièrement vraie pour $|g_{nucleon-[ud]q}|$, pour laquelle le maximum est particulièrement spectaculaire. En fait, ces maximums correspondent aux densités pour lesquelles les masses des baryons sont stables, comme visible sur la figure 18. Plus précisément, une constante de couplage admet un maximum quand la masse du baryon présente un minimum selon ρ_B , ou au moins une stabilisation de la masse.

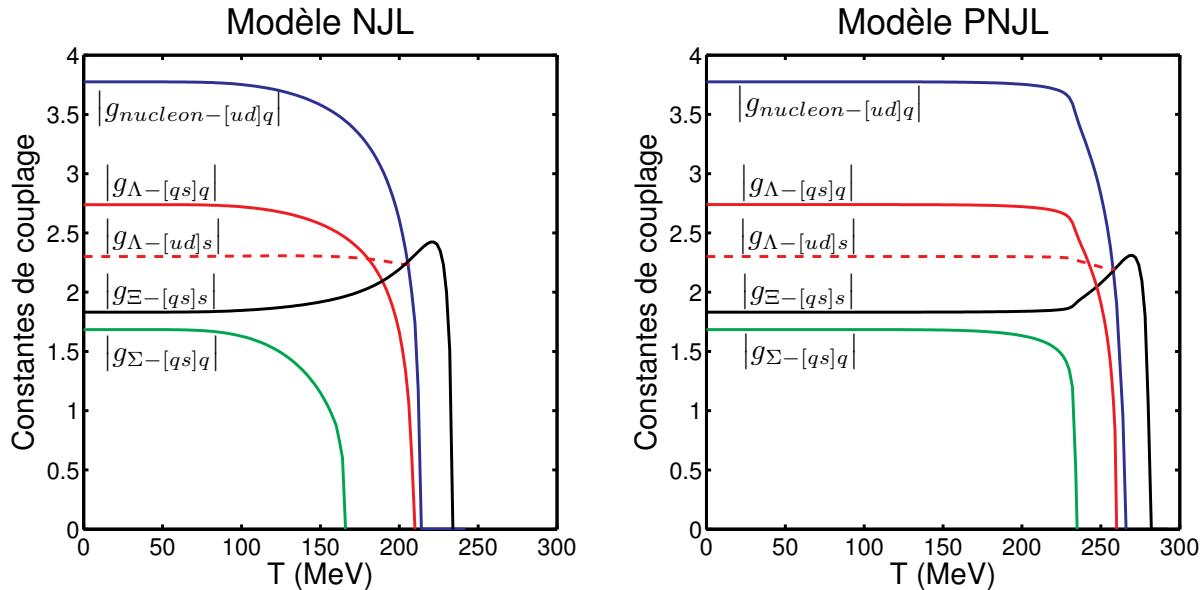


Figure 25. Constantes de couplage des baryons de l'octet en fonction de la température.

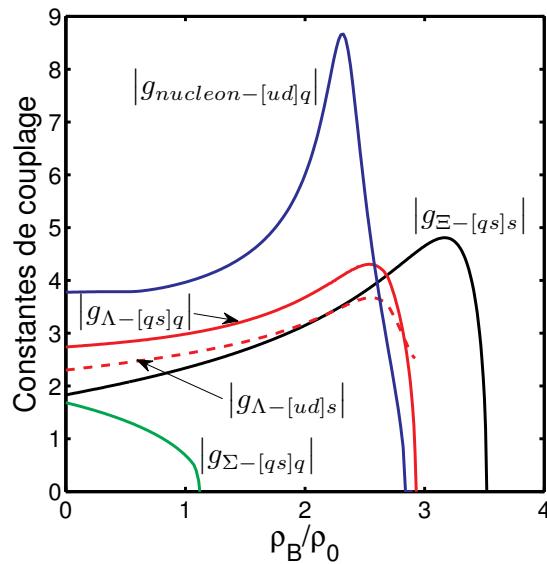


Figure 26. Constantes de couplage des baryons de l'octet en fonction de la densité baryonique.

Concernant les baryons du décuplet, nous pouvons souligner que la figure 27 confirme nos observations faites dans le paragraphe 4.2, c'est-à-dire que l'effet de la boucle de Polyakov conduit à un décalage des températures critiques, mais aussi tend à rassembler les

températures critiques des baryons. D'autre part, les courbes $|g_{\Xi^*-[ss]q}|$ présentent un aspect intéressant, selon la température ou la densité baryonique. En effet, c'est le seul baryon pour lequel nous avons obtenu des valeurs après $g \rightarrow 0$, c'est-à-dire quand les courbes remontent. Clairement, nous avons trouvé là un comportement similaire à celui obtenu pour les mésons et les diquarks en régime instable. Un tel résultat est visible pour Ξ^* en raison de sa « double transition stable/instable » associée à ces deux états $[ss]+q$ et $[qs]+s$, voir figures 20, 21. En outre, l'intervalle entre les transitions est assez large, selon T et ρ_B , pour rendre ce phénomène très visible dans les figures 27 et 28. Le même comportement aurait dû être observé pour Λ . Mais, cela n'a pas été le cas dans les figures 25 et 26, parce que l'écart entre les deux transitions est là par contre trop faible, selon la température et la densité.

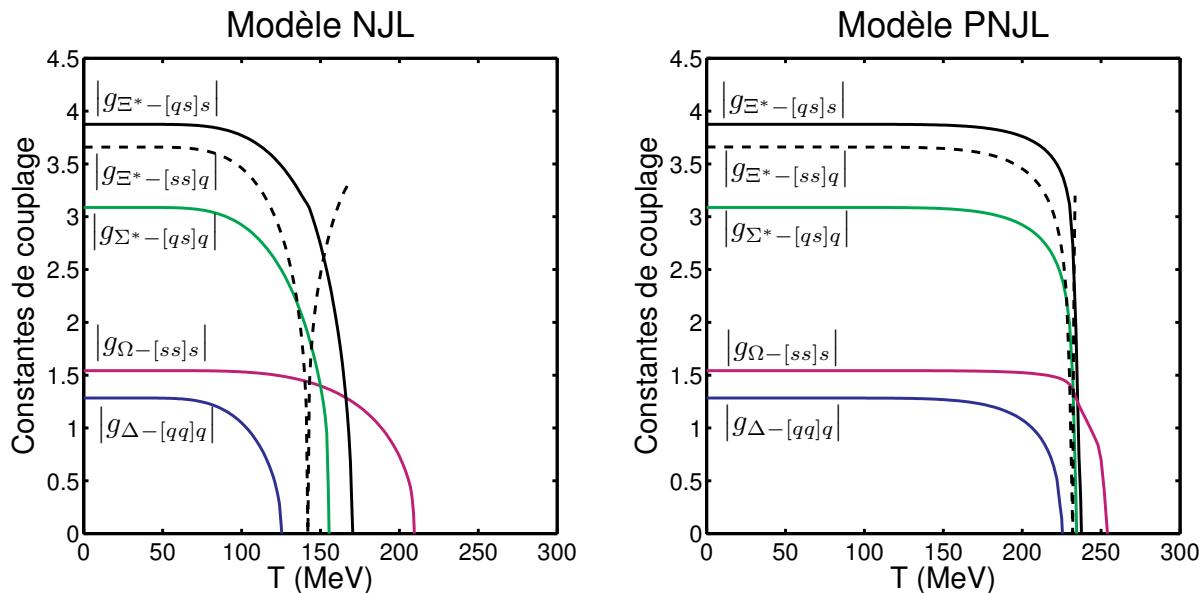


Figure 27. Constantes de couplage des baryons du décuplet en fonction de la température.

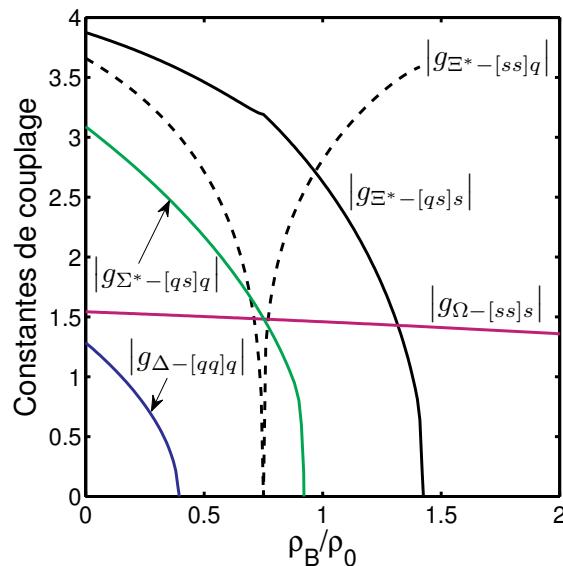


Figure 28. Constantes de couplage des baryons du décuplet en fonction de ρ_B , avec $T = 0$.

6. Masses à température nulle et densité nulle

6.1 Présentation des résultats

Afin de comparer qualitativement nos résultats avec ceux de la littérature, nous rassemblons dans le tableau 1 les masses des baryons trouvés à température et densité nulles. Comme nous l'avons fait pour les mésons et les diquarks, nous avons utilisé le jeu de paramètres P1 pour trouver nos résultats dans le cadre de la symétrie isospin, et avec le jeu de paramètres EB, qui ne respecte pas cette symétrie. Concernant les données trouvées dans la littérature, nous pouvons mentionner [3, 16] qui ont fait usage du modèle NJL. D'autres études théoriques qui ont modélisé des baryons sont par exemple [6, 7, 22]. Pour ce qui est de la symétrie isospin, les valeurs proposées dans le cadre de la *Quantum Molecular Dynamics* (QMD) [27] constituent aussi une source intéressante de données. Celles-ci sont reproduites dans l'annexe A. D'autre part, des valeurs expérimentales peuvent être trouvées dans [25, 26]. Elles correspondent à la colonne de droite dans le tableau 1.

			Résultats obtenus (P1)	Résultats obtenus (EB)	Valeurs expérimentales	
Baryons			Masses	Masses	Masses	Largeurs de niveau
Octet	proton	<i>uud</i>	897.46	887.11	938.3	0
	neutron	<i>udd</i>	897.46	884.76	939.6	
	Λ	<i>uds</i>	1163.83	1119.45	1116	
	Σ^+	<i>uus</i>	1204.72	1148.91	1189	
	Σ^0	<i>uds</i>	1204.72	1151.22	1193	
	Σ^-	<i>dds</i>	1204.72	1153.52	1197	
	Ξ^0	<i>uss</i>	1410.44	1332.36	1315	
	Ξ^-	<i>dss</i>	1410.44	1335.37	1321	
Décuplet	Δ^{++}	<i>uuu</i>	1215.64	1211.62	1232	120
	Δ^+	<i>uud</i>	1215.64	1212.55	1232	120
	Δ^0	<i>udd</i>	1215.64	1213.34	1232	120
	Δ^-	<i>ddd</i>	1215.64	1214.19	1232	120
	Σ^{*+}	<i>uus</i>	1377.96	1336.08	1383	36
	Σ^{*0}	<i>uds</i>	1377.96	1336.96	1384	36
	Σ^{*-}	<i>dds</i>	1377.96	1337.81	1387	39
	Ξ^{*0}	<i>uss</i>	1569.55	1512.74	1532	9
	Ξ^{*-}	<i>dss</i>	1569.55	1514.73	1535	10
	Ω^-	<i>sss</i>	1769.54	1674.88	1672	

Tableau 1. Masses des baryons, à température et densité nulles, en MeV.

Dans le cadre de nos résultats numériques, nous avons fait le choix de traiter les baryons de l'octet par leurs composantes scalaires en saveur, et les baryons du décuplet par leurs

composantes axiales. Les données obtenues prouvent que ce choix était judicieux car l'accord est bon entre nos valeurs et celles d'autres études ou des données expérimentales.

Pour les valeurs P1, nous observons que ces résultats sont du bon ordre de grandeur. Nous n'avons pas obtenu de valeurs aberrantes. Ces données sont comparables à celles de [3]. Afin de quantifier l'exactitude de ces résultats, nous pouvons utiliser les relations de Gell-Mann–Okubo, améliorées dans [28] :

$$\begin{cases} 2 \cdot (m_N + m_{\Xi}) = 3m_{\Lambda} + m_{\Sigma} + \frac{2}{13} \cdot (m_N + m_{\Sigma} - 2m_{\Lambda}) \\ m_{\Omega} - m_{\Delta} = 3 \cdot (m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*}) \end{cases}. \quad (43)$$

Nous obtenons une variation inférieure à 1 % pour la première relation, et moins de 4 % pour la seconde. De plus, si nous comparons les données avec celles de [27], les variations sont respectivement de moins de 0.4 % et de moins de 0.91 %. Cependant, la masse des nucléons est sous-estimée dans notre approche, alors que les masses des Ξ semblent être surévaluées. À l'opposé, l'accord est meilleur pour les baryons du décuplet.

Concernant le jeu de paramètres EB, l'abandon de la symétrie isospin conduit à une amélioration de la précision pour certains baryons. Ce phénomène est particulièrement visible pour les baryons de l'octet : la surestimation des Ξ par le jeu de paramètres P1 est corrigée par EB. Cependant, les valeurs obtenues avec P1 sont légèrement meilleures que celles de EB pour certains baryons du décuplet, comme Σ^* , sauf pour Ω^- . En effet, la masse de ce baryon obtenue avec le jeu de paramètres EB est très proche de la valeur expérimentale : l'erreur est inférieure à 0.2 %.

D'autre part, l'abandon de la symétrie isospin induit l'apparition d'une « hiérarchie » entre les baryons qui étaient dégénérés quand $m_u = m_d$. Cette hiérarchie en masse est notamment visible pour les baryons Δ . Même si ce phénomène n'est pas observé expérimentalement, cela reste assez cohérent. En effet, $m_u < m_d$, donc il apparaît physiquement admissible de trouver $m_{\Delta^{++}} < m_{\Delta^+} < m_{\Delta^0} < m_{\Delta^-}$, en raison de leur composition respective en quarks u et d , voir tableau 1. Ce raisonnement marche aussi avec $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$, avec Ξ^0, Ξ^- , et avec leurs équivalents du décuplet. Dans ces cas là, la hiérarchie en masse est confirmée par les données expérimentales. Cependant, ce raisonnement ne marche pas pour le proton et le neutron. Pour eux, nos résultats EB sous-estiment toujours les données expérimentales, mais l'aspect le plus important à souligner est que nos résultats indiquent que le proton est plus lourd que le neutron. Bien entendu, cet aspect n'est pas en accord avec les faits expérimentaux. L'explication de ce comportement est détaillée dans le paragraphe 6.2 ci-après.

6.2 Explication de l'inversion de masse

Afin d'expliquer l'inversion de masse entre le proton et le neutron, nous réécrivons l'équation (13) à résoudre pour ces deux baryons :

$$\begin{cases} 1 + 4 \cdot \frac{g_{ud}}{m_d}^2 \cdot \Pi_{[ud],u}(M_p, \vec{0}) = 0 \\ 1 + 4 \cdot \frac{g_{ud}}{m_u}^2 \cdot \Pi_{[ud],d}(M_n, \vec{0}) = 0 \end{cases}. \quad (44)$$

La première équation concerne le proton de masse M_p , la seconde est pour le neutron de masse M_n . Le second argument des fonctions Π , fixé à zéro, est la quantité de mouvement du baryon. Autrement dit, les baryons sont considérés comme étant au repos. Dans les explications suivantes, nous omettrons cet argument. Nous notons que la constante de couplage g_{ud} ² est la même que pour les deux baryons. La seule différence entre ces derniers est la fonction de boucle Π et le quark échangé, exprimé par sa masse : m_d pour le proton, m_u pour le neutron. Quand les deux équations (44) sont satisfaites, nous écrivons formellement :

$$\frac{\Pi_{[ud],u}(M_p)}{m_d} = \frac{\Pi_{[ud],d}(M_n)}{m_u}. \quad (45)$$

En fait, $\Pi_{[ud],u}(M_B)$ est différent de $\Pi_{[ud],d}(M_B)$, mais nous pouvons raisonnablement négliger cette différence, même si nous ne prenons pas en compte la symétrie isospin. Ainsi, nous avons :

$$\Pi_{[ud],u}(M_B) \approx \Pi_{[ud],d}(M_B) \equiv \Pi(M_B), \quad (46)$$

où M_B est la masse d'un baryon, utilisée comme argument de la fonction de boucle Π . Nous réécrivons l'équation (45) comme :

$$\Pi(M_p) \cdot m_u = \Pi(M_n) \cdot m_d. \quad (47)$$

Nous avons étudié le comportement de la fonction de boucle Π . Nous avons trouvé que pour des masses de baryons très diverses, sur un domaine très large, la fonction est négative et décroissante. En multipliant l'équation (47) par -1 , nous avons :

$$-\Pi(M_p) \cdot m_u = -\Pi(M_n) \cdot m_d. \quad (48)$$

Puisque nous avons $m_d > m_u$ en dehors de la symétrie isospin, nous déduisons de (48) que

$$-\Pi(M_p) > -\Pi(M_n). \quad (49)$$

La fonction $-\Pi(M_B)$ est croissante, donc nous trouvons finalement que :

$$M_p > M_n. \quad (50)$$

En conclusion, la structure des équations, via l'approximation statique, est responsable de notre inversion de masse entre le proton et le neutron. En revanche, nous n'observons pas ce phénomène avec la composante axiale en saveur, ou avec les autres baryons. En effet, les composantes scalaires en saveur du proton et du neutron sont les seules qui utilisent la même constante de couplage g_{ud} ² avec des quarks échangés différents (m_d et m_u).

6.3 Discussion

A la lumière de ces résultats, nous pouvons maintenant discuter au sujet de la validité de notre approche, et de ses possibles limitations. Tout d'abord le modèle quark-diquark NJL proposé par [3] constitue une première approximation. Cependant, cette référence a montré la validité de cette description. En dehors du modèle NJL, nous pouvons citer le travail exposé dans [29–31] qui étudient la possibilité d'aller au-delà de cette approximation. En fait, ils ont prouvé que le modèle quark-diquark conduit à une variation d'environ 5 % par rapport à une description à trois quarks. Ainsi, cette approximation semble être bien validée.

En revanche, comme indiqué avec les mésons, nous manipulons ici des particules lourdes. A cause de l'utilisation d'un *cut-off* dans les calculs numériques, les descriptions faites avec les modèles (P)NJL peuvent présenter certaines limitations pour décrire des baryons lourds. Le bon accord entre nos résultats trouvés avec les baryons les plus massifs et les données expérimentales nous amène à considérer que nos résultats sont fiables, même avec cette limitation. Un autre aspect concerne le fait que nous n'avons pas intégré dans nos descriptions la désintégration des baryons, qui auraient certainement nécessité l'inclusion de mésons dans notre modélisation. Plus précisément, une amélioration du travail présenté dans ce chapitre est d'inclure les décroissances des baryons lourds en baryons plus légers. Un tel travail pourrait conduire à des modifications, surtout concernant lesdits baryons lourds, en particulier pour ce qui est de leurs zones de stabilité, figures 23, 24.

Ensuite, un point important de la modélisation des baryons concerne l'utilisation de l'approximation statique. En effet, cette approximation est suspectée d'être à l'origine d'imprécisions dans nos résultats. Nous pouvons nous référer à [7] qui n'a pas utilisé cette approximation, mais en dehors du modèle NJL. Aussi, dans le cadre NJL, des réflexions ont déjà été menées dans la littérature par rapport à cet aspect, comme dans [16–18], qui se réfèrent notamment aux travaux effectués dans [13–15]. En fait, nos résultats confirment la réflexion menée dans [18]. L'approximation statique consiste à négliger la quadri-impulsion du quark échangé par rapport à sa masse. Par conséquent, cette simplification est bien validée pour les quarks lourds, c'est-à-dire ici les quarks étranges, quand ils sont utilisés comme quarks échangés. Cette observation est une explication possible du bon accord trouvé pour les baryons lourds, et notamment pour Ω . De plus, nous avons montré que les quarks étranges ne sont pas sensibles à la température et à la densité baryonique. Cela veut dire que l'approximation statique reste applicable pour les baryons lourds, pour un large domaine en températures et densités.

A l'opposé, les quarks légers présentent des masses faibles, et tendent vers les valeurs de leurs masses nues à hautes températures/densités. Là, l'approximation statique pourrait être moins fiable. Même à température et densité nulles, nous pourrions être tentés d'évoquer l'approximation statique pour expliquer le fait que certains de nos résultats sous-estiment les données expérimentales. Aussi, le travail effectué dans [15] a mené à la conclusion que l'utilisation de l'approximation statique conduit le nucléon à décroître plus vite que dans des approches n'utilisant pas cette approximation. Quoi qu'il en soit, nous avons montré dans le paragraphe 3.2 que l'inversion de masse non physique entre le proton et le neutron peut être associée à cette approximation. Une autre explication pour expliquer le fait d'avoir sous-estimé les masses des baryons de l'octet, y compris les nucléons, pourrait être lié au fait que

nous n'avons pas inclus de composante axiale en saveur. Mais, cet argument ne peut pas marcher pour les baryons du décuplet, comme Δ .

Un autre aspect à mentionner concerne les équations (11a) et (11b) utilisées pour définir la fonction de boucle des baryons Π . Dans celle-ci, comme dans des travaux comme [16–18], les propagateurs utilisés pour modéliser les diquarks sont les propagateurs « libres », c'est-à-dire les propagateurs établis en théorie quantique des champs, et non les propagateurs (P)NJL. En fait, nous rappelons que ces deux propagateurs ne sont strictement équivalents que quand la particule est sur sa couche de masse. Dans ce cas, les couplages g intervenant dans le terme \mathcal{Z} , équation (3), sont constants pour une température et une densité donnée. Cela justifie ainsi l'appellation de « constante de couplage » que l'on peut rencontrer fréquemment dans la littérature. Clairement, ces constantes de couplage ont été trouvées dans le chapitre associé aux diquarks, précisément en écrivant l'équivalence entre les deux propagateurs quand $k^2 \rightarrow m^2$. Mais, pour des quantités de mouvement quelconques, il a été montré que les couplages deviennent dépendants de la quantité de mouvement, comme expliqué dans [32, 33]. En fait, cette observation n'invalide pas nos résultats, mais notre traitement des g constitue une approximation. La prise en compte de cette dépendance vis-à-vis de la quantité de mouvement devrait constituer une évolution future de notre travail.

Une autre propriété de notre étude est visible sur les figures 23, 24. Quelle que soit la température ou la densité baryonique, on peut noter que les baryons sont stables uniquement quand les diquarks qui les composent sont stables eux aussi. En d'autres termes, nous n'avons pas modélisé des baryons stables à partir de diquarks se trouvant dans des états instables. Cette observation ne contredit pas les travaux de [11, 15, 18], qui ont considérés les équations de Faddeev (et leur simplification), comme nous. Mais, il est expliqué dans [20] comment modéliser des baryons NJL stables composés d'un quark et d'un diquark qui peut être stable ou instable. Dans cette description, le comportement du baryon est comparé à un état Borroméen (ou état de Efimov). En fait, ce résultat ne contredit pas forcément notre modélisation, puisque nos équations n'interdisent pas la création de baryons stables formés par des diquarks instables, même si nous ne l'avons pas observé. Une extension intéressante de notre travail pourrait être de vérifier cet aspect dans le cadre de notre approche (P)NJL. Cependant, même si [20] utilise le modèle NJL, l'approche menée dans cette publication semble être différente de celle vue dans [11, 15, 18]. Quoi qu'il en soit, la thématique de cette publication suggère aussi une autre piste d'évolution de notre travail, qui consiste à étudier le comportement des baryons proches de la phase de supraconductivité de couleur.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposée la méthode utilisée pour inclure les baryons dans notre description (P)NJL. Par une simplification des équations de Faddeev, nous avons vu que le baryon peut être considéré comme un état lié d'un quark et d'un diquark. Dans cette modélisation, nous sommes revenus à une structure proche de celle décrite dans les chapitres précédents. En d'autres termes, nous avons utilisé l'équation de Bethe-Salpeter pour trouver le propagateur du baryon. Cela a conduit à considérer une fonction de boucle constituée par un quark et un diquark. Cette modélisation a aussi impliquée l'usage d'approximations, comme l'approximation statique. Ensuite, nous avons analysé les équations associées aux baryons de l'octet et du décuplet.

Concernant nos résultats, nous avons montré que les baryons de l'octet peuvent être modélisés d'une manière fiable en utilisant uniquement sa composante scalaire en saveur, alors que les baryons du décuplet ont été traités par leur composante axiale en saveur. Nous avons analysé le comportement de ces baryons à températures et densités finies. Au sujet de la différence entre les résultats NJL et PNJL, nous avons observé le même comportement que dans les chapitres précédents, c'est-à-dire une distorsion des courbes selon la température. Cela induit une extension significative des zones de stabilité de certains baryons. D'autres études ont concernées la modélisation des antibaryons ou une estimation des constantes de couplage mettant des baryons en jeu. Ensuite, nous nous sommes focalisés sur une étude des résultats à température et densité nulles, afin de les comparer à ceux d'autres études, ou à des données expérimentales. Même si notre modélisation peut être considérée comme assez simple, nous avons obtenu de bons résultats. Nous avons aussi noté que l'abandon de la symétrie isospin conduit à une amélioration de la précision de nos données.

Dans une dernière partie, nous avons réfléchi au sujet de la fiabilité de notre approche. En effet, si la modélisation des mésons et diquarks est assez standard, le traitement des baryons nécessite diverses précautions et simplifications. Parmi celles-ci, nous avons analysé tout particulièrement les effets de l'approximation statique. En effet, celle-ci est suspectée d'être à l'origine de certains défauts dans nos résultats. D'autre part, les autres simplifications et limitations de notre modélisation ont été analysées. Elles peuvent suggérer plusieurs pistes d'évolutions de notre travail.

8. Références

- [1] Faddeev L D 1965 Mathematical aspects of the three body problem in quantum scattering theory, *Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem ; Davey, New York*
- [2] Faddeev L D et Merkuriev S P 1993 Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*
- [3] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [4] Ebert D 1997 Hadronization in Particle Physics (*Lecture Notes in Physics*, vol 508) (Heidelberg: Springer) pp 115–21
- [5] Ebert D, Reinhardt H et Volkov M K 1994 Effective hadron theory of QCD *Prog. Part..Nucl..Phys.* **33** 1-120
- [6] Oettel M, Hellstern G, Alkofer R et Reinhardt H 1998 Octet and decuplet baryons in a covariant and confining diquark-quark model *Phys. Rev. C* **58** 2459–77
- [7] Oettel M 2000 Baryons as relativistic bound states of quark and diquark *PhD Thesis Tuebingen University* arXiv:nucl-th/0012067
- [8] Oettel M, Alkofer R et von Smekal L 2000 Nucleon properties in the covariant-diquark model *Eur. Phys. J. A* **8** 553–66
- [9] Suzuki K et Toki H 1992 Flavor SU(4) baryon and meson masses in diquark quark model using the Pauli-Gursey symmetry *Mod. Phys. Lett. A* **7** 2867-75

- [10] Ishii N, Bentz W et Yazaki K 1993 Solution of the relativistic three quark Faddeev equation in the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model *Phys. Lett. B* **318** 26–31
- [11] Ishii N, Bentz W et Yazaki K 1995 Baryons in the NJL model as solutions of the relativistic Faddeev equation *Nucl. Phys. A* **587** 617–56
- [12] Bentz W, Ishii N, Asami H et Yazaki K 1998 Description of baryons in the relativistic Faddeev approach to the NJL model *Nucl. Phys. A* **631** 473–7
- [13] Buck A, Alkofer R et Reinhardt H 1992 Baryons as bound states of diquarks and quarks in the Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Lett. B* **286** 29–35
- [14] Ebert D, Feldmann T, Kettner C et Reinhardt H 1998 Heavy baryons in the quark–diquark picture *Int. J. Mod. Phys. A* **13** 1091–113
- [15] Bentz W et Thomas A W 2001 The stability of nuclear matter in the Nambu–Jona-Lasinio model *Nucl. Phys. A* **696** 138–72
- [16] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu–Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [17] Gastineau F et Aichelin J 2002 Strange baryons in a hot and dense medium within the Nambu–Jona-Lasinio model *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **28** 2017–22
- [18] Gastineau F et Aichelin J 2004 Diquark and baryon properties and their production cross sections in dense and hot matter *AIP Conf. Proc.* **739** 398–416
- [19] Huguet R, Caillon J C et Labarsouque J 2008 A nuclear matter description based on quark structure of the nucleon and pion exchange *Nucl. Phys. A* **809** 189–210
- [20] Wang J, Wang Q et Rischke D 2011 Baryon formation and dissociation in dense hadronic and quark matter *Phys. Lett. B* **704** 347–53
- [21] Mu C, Jiang Y, Zhuang P et Liu Y 2012 Nucleons at finite temperature and low density in Faddeev equation approach *Phys. Rev. D* **85** 014033
- [22] Serot B D et Walecka J D 1997 Recent progress in quantum hadrodynamics *Int. J. Mod. Phys. E* **6** 515–631
- [23] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
- [24] Rehberg P et Klevansky S P 1996 One loop integrals at finite temperature and density *Ann. Phys.* **252** 422–57
- [25] Nakamura K (Particle Data Group) 2010 Review of particle physics *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** 075021
- [26] Beringer J *et al.* (Particle Data Group) 2012 Review of Particle Physics *Phys. Rev. D* **86** 010001
- [27] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369
- [28] Yan M L et Meng X H 1995 Improved Gell-Mann–Okubo Relations and SU(3) Rotation Excitations of Baryon States *Commun. Theor. Phys.* **24** 435–8
- [29] Eichmann G, Alkofer R, Krassnigg A et Nicmorus D 2010 Nucleon Mass from a Covariant Three-Quark Faddeev Equation *Phys. Rev. Lett.* **104** 201601

- [30] Eichmann G, Alkofer R, Krassnigg A et Nicmorus D 2010 Covariant solution of the three-quark problem in quantum field theory: the nucleon *EPJ Web Conf.* **3** 03028
- [31] Eichmann G, Alkofer R, Fischer C S, Krassnigg A et Nicmorus D 2010 Baryons in and beyond the quark-diquark model *AIP Conf. Proc.* **1374** 617-20
- [32] Bernard V, Osipov A A et Meissner U G 1992 Consistent treatment of the bosonized Nambu-Jona-Lasinio model *Phys. Lett. B* **285** 119–25
- [33] Bernard V, Meissner U G et Osipov A A 1994 The momentum-space bosonization of the Nambu-Jona-Lasinio model with vector and axial-vector mesons *Phys. Lett. B* **324** 201–8

Chapitre 6

Sections efficaces

Ce chapitre a été publié dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 105003

1. Introduction

Pour modéliser le refroidissement d'un système de quarks et d'antiquarks, les calculs des sections efficaces [1–5] apparaissent comme une étape essentielle de l'étude. En effet, la connaissance des interactions entre les particules est cruciale pour caractériser la dynamique du système. Une telle étude peut être divisée en deux parties, correspondant aux deux types de sections efficaces : les inélastiques et les élastiques. Durant le refroidissement, les réactions inélastiques permettent la formation de particules composites à partir des quarks et antiquarks. Les sections efficaces de ces réactions sont fortement reliées au taux de création des particules composites. D'autre part, les réactions élastiques sont responsables de transferts de chaleur des zones chaudes vers les zones froides.

Le modèle de Nambu et Jona-Lasinio a montré sa pertinence pour modéliser des particules comme des quarks, mésons ou baryons, comme vu dans les chapitres précédents. En outre, il autorise des calculs de sections efficaces mettant en jeu ces particules. Plus précisément, il a été reporté dans la littérature la possibilité d'évaluer des sections efficaces de réactions produisant des mésons à partir d'un paire quark-antiquark $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ [6, 7]. Des sections efficaces très importantes ont été observées, notamment à proximité du seuil cinématique des réactions. Cela pourrait permettre une mésonisation massive du plasma de quarks/antiquarks durant son refroidissement, comme observé dans les collisions de hautes énergies. De plus, des sections-efficaces élastiques ont aussi été calculées dans le modèle NJL. Elles concernent la diffusion élastique entre deux quarks $q + q \rightarrow q + q$, et entre une paire quark-antiquark $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ [8, 9]. Plus récemment, certaines études ont été entreprises, tout d'abord pour reprendre les processus décrits plus haut [10], mais aussi pour essayer d'évaluer les sections efficaces des réactions de baryonisation [11, 12]. Dans l'ensemble, les réactions mettant en jeu deux particules incidentes et deux particules sortantes ont été traitées, mis à part dans des études comme [13]. En effet, on s'attend à ce que les réactions à trois corps soient trop rares pour intervenir de manière notable.

D'autre part, les travaux cités concernent globalement des calculs de sections efficaces en fonction variable de Mandelstam \sqrt{s} , pour diverses températures. Certaines études ont considéré l'influence du potentiel chimique baryonique, mais plus rarement la densité baryonique. En effet, [7, 8] ou [14, 15] par exemple ont considéré la température, [16] la densité baryonique, et [17] les deux. En fait, même si des processus comme $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ ou

$q + \bar{q} \rightarrow M + M$ sont cruciaux pour décrire correctement la mésonisation d'un plasma de quarks/antiquarks, ils n'ont pas encore été traités à des densités finies. Dans le cadre d'études dynamiques, négliger l'influence de la densité dans ces réactions pourrait conduire à manquer certains aspects importants du refroidissement, notamment dans des systèmes physiques où la densité est positive. En outre, les limitations du modèle NJL ont été signalées, dues notamment à son défaut principal : l'absence de confinement [18]. Dans le calcul des sections efficaces, cet aspect peut limiter la fiabilité des résultats obtenus.

Ainsi, plusieurs pistes sont possibles pour améliorer et développer les calculs de sections efficaces impliquant les particules citées. Cela consiste tout d'abord à étudier l'influence de la densité baryonique sur les sections efficaces, notamment avec les processus décrits dans [7, 8]. D'autre part, grâce à l'inclusion de la boucle de Polyakov, il pourrait être intéressant de voir les modifications apportées sur nos résultats. Plus précisément, quelles sont les conséquences du mécanisme de confinement simulé par le modèle PNJL, comparé à de purs résultats NJL ? Nous avons vu dans les chapitres précédents que les masses des particules PNJL sont décalées vers les hautes températures par rapport aux particules NJL. Dans le cadre des sections efficaces, les modifications induites par l'inclusion de la boucle de Polyakov agissent à différents niveaux des calculs requis. En conséquence, le résultat final n'est pas évident. De telles comparaison des sections efficaces NJL-PNJL ne sont pas abordées dans la littérature, mais devraient être faites. De plus, grâce à la modélisation des baryons effectuée dans le chapitre 6, nous sommes capables d'inclure des réactions de baryonisation dans notre étude, en nous inspirant des réactions mentionnées dans [11, 12], mais aussi en y rajoutant de nouvelles. En effet, la liste des réactions NJL déjà traitées dans la littérature est intéressante, mais non exhaustive. Afin de préparer l'étude dynamique effectuée dans le chapitre suivant, cette liste devrait être complétée. Cela concerne notamment les réactions élastiques. Aussi, le rôle joué par les diquarks devrait être précisé clairement. Plus précisément, nous devrions analyser s'ils agissent principalement comme propagateurs dans les réactions de baryonisation, ou s'ils agissent comme intermédiaires réactionnels dans le système, c'est-à-dire deux quarks s'assembleraient ensemble pour former un diquark, et ensuite un quark réagirait avec le diquark pour former un baryon.

Le travail exposé dans ce chapitre a été effectué afin de prendre en compte les évolutions proposées dans le paragraphe précédent. Dans la partie 2, nous rappelons les méthodes générales utilisées pour effectuer des calculs de section efficace. Tout d'abord, nous abordons les réactions inélastiques. Dans la partie 3, nous reprenons les réactions de mésonisation [7], afin de voir l'effet des densités et de la boucle de Polyakov. Dans la partie 4, des réactions induisant la formation de diquarks sont traitées, alors que la partie 5 se focalise sur celles qui produisent des baryons. En fait, les calculs effectués dans ces deux parties requièrent des calculs mathématiques évolués, notamment les calculs de spineurs avec des quantités de mouvement différentes. De tels calculs sont détaillés dans l'annexe B, qui utilise la référence [19]. Ensuite, nous nous focalisons sur les réactions élastiques. Dans la partie 6, la diffusion quark-quark et la diffusion quark-antiquark exposées dans [8] sont calculées à nouveau. Comme dans la partie 2, un objectif est de comparer les résultats NJL-PNJL, et d'étendre les calculs à densités finies. Dans la section 7, les réactions élastiques mettant en jeu des mésons et des diquarks sont étudiées. Des réactions impliquant des baryons sont ensuite abordées dans la partie 8.

2. Méthodes de calcul

La méthode requise pour effectuer des calculs de sections efficaces est sensiblement toujours la même, quelles que soient les réactions que nous allons décrire dans ce chapitre. Tout d'abord, nous établissons une liste des canaux possibles, nommés $s, s', t, u \dots$. Nous verrons par la suite des cas concrets où ces canaux seront utilisés. Chacun d'eux correspond à un diagramme de Feynman et à un élément de matrice \mathcal{M}_i . Ensuite, ces éléments de matrice sont sommés, puis on calcule le carré de la valeur absolue de la quantité obtenue. Aussi, on somme selon les états finaux et on fait la moyenne selon les états initiaux, comme expliqué par exemple dans [7], selon les degrés de liberté de spin et de couleur :

$$\frac{1}{4N_c^2} \sum_{s,c} |\mathcal{M}_{\text{total}}|^2 , \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{\text{total}} = \sum_{\text{canaux } i} \pm \mathcal{M}_i . \quad (1)$$

Cela demande de calculer des termes carrés $|\mathcal{M}_i|^2$ et des termes mélangés $\mathcal{M}_i \cdot \mathcal{M}_j^*$, aussi appelés comme termes d'interférences dans la littérature, ou termes croisés. Dans l'annexe B, la méthode utilisée pour déterminer les termes carrés et mélangés est expliquée. Dans la partie droite de (1), les signes \pm placés devant les éléments de matrice sont liés à la symétrisation ou à l'antisymétrisation des fonctions d'onde impliquées dans les processus de diffusion, notamment dans le cas de particules identiques. Afin de l'expliquer, nous prenons l'exemple de la diffusion élastique entre deux diquarks identiques. L'interaction peut concerner un canal t ou un canal u , figure 39. Celui-ci diffère du canal t par l'échange des deux particules produites (sortantes). Si l'interaction considérée utilise les deux canaux, cela conduit à additionner les amplitudes de transition et nous avons $\mathcal{M}_{\text{total}} = \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u$. En effet, les mésons sont des bosons : la fonction d'onde décrivant la « voie de sortie » doit être symétrique par l'échange de ces deux particules. Cela explique le signe plus. À l'opposé, concernant la diffusion élastique mettant en jeu deux quarks identiques, figure 30, nous avons $\mathcal{M}_{\text{total}} = \mathcal{M}_t - \mathcal{M}_u$. En effet, la fonction d'onde associée doit être antisymétrique par l'échange de deux quarks, car les quarks sont des fermions. Cela justifie l'usage du signe moins.

D'autre part, les éléments de matrice peuvent avoir la structure suivante, extraite de la partie 3 :

$$-i\mathcal{M}_s = f_s \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) ig_1 i\mathcal{D}_s^S \Gamma ig_2 u(p_1) \quad (2)$$

Les $u(p_1)$ et $\bar{v}(p_2)$ désignent des spineurs. Ils sont obtenus par application des règles de Feynman [4, 5]. Le terme \mathcal{D} est un propagateur (P)NJL. Nous pouvons remarquer la différence de notation avec le S utilisé pour désigner les propagateurs *libres*, comme ceux vus dans les chapitres précédents, notamment dans les fonctions de boucle Π . Clairement, dans ce chapitre, les propagateurs (P)NJL sont utilisés pour les mésons et les diquarks, alors les propagateurs libres concernent les quarks. D'autre part, dans (2), f_s est un facteur de saveur [7]. Ce type de terme est traité dans l'annexe C. Les g_1 et g_2 sont des constantes de couplage au niveau des vertices. Ces derniers ont été étudiés dans les chapitres précédents. Les autres termes seront expliqués plus tard. Ensuite, la section efficace différentielle exprimée dans le référentiel du centre de masse des deux particules incidentes s'écrit comme [7, 8] :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{\|\vec{p}_1^*\|^2} \cdot \frac{1}{4N_c^2} \sum_{s,c} |\mathcal{M}_{\text{total}}|^2 . \quad (3)$$

L'annexe F rappelle certaines notions au sujet des variables de Mandelstam s, t, u utilisées dans cette relation. Elle propose aussi de définir nos conventions d'écriture. Notamment, les particules entrantes sont nommées particules 1 et 2, alors que les particules sortantes sont les particules 3 et 4. Pour estimer la section efficace σ , l'intégrale est effectuée selon la variable de Mandelstam t . Ensuite, deux *facteurs de blocage* sont insérés [20]. Ils prennent en compte que les deux particules produites apparaissent dans un milieu où d'autres particules identiques existent déjà. Si la particule 3 ou la 4 est un fermion, son facteur de blocage est $1 - f_F(\beta \cdot (E_{3,4}^* - \mu_{3,4}))$. Dans le cas d'un boson, on a $1 + f_B(\beta \cdot (E_{3,4}^* - \mu_{3,4}))$. Les f_F et f_B correspondent respectivement aux statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein. Les signes devant les potentiels chimiques $\mu_{3,4}$ sont adaptés quand nous avons des anti-fermions ou des anti-bosons. Comme expliqué dans les chapitres précédents, les statistiques de Fermi-Dirac sont modifiées pour les quarks et les antiquarks si les calculs sont effectués dans l'approche PNJL, à cause du champ de Polyakov [21]. La section efficace est finalement écrite comme [7, 8] :

$$\sigma(s, T) = (1 \pm f_{F,B}(E_3^* - \mu_3)) \cdot (1 \pm f_{F,B}(E_4^* - \mu_4)) \cdot \int_{t_-}^{t_+} dt \cdot \frac{\partial \sigma(s, T)}{\partial t} . \quad (4)$$

Dans la pratique, les sections efficaces sont non nulles selon \sqrt{s} après un *seuil cinématique*, défini comme [7, 11] :

$$\sqrt{s}_{\text{seuil}} = \max[(m_1 + m_2), (m_3 + m_4)] , \quad (5)$$

où $m_{1,2}$ sont les masses des particules incidentes, et $m_{3,4}$ les masses de particules produites. Si $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$, le seuil cinématique correspond à $m_1 + m_2$. Au niveau de ce seuil, $\|\vec{p}_1^*\|$ et $\|\vec{p}_2^*\|$ tendent vers zéro, voir annexe F. Selon (3), la section efficace différentielle diverge, sauf bien sûr si les éléments de matrice sont nuls à ce moment là.

Avec les réactions inélastiques, il pourrait être utile de considérer les réactions inverses, comme par exemple $M + M \rightarrow q + \bar{q}$ [10] : les particules 3 et 4 produisent les particules 1 et 2. Evidemment, les facteurs de blocage sont adaptés. Ensuite, un raisonnement similaire est appliqué pour $\|\vec{p}_3^*\|$ ou $\|\vec{p}_4^*\|$, qui remplacent $\|\vec{p}_1^*\|$ dans la relation (3). Ainsi, pour une réaction inverse, il y a possibilité de diverge au niveau du seuil cinématique si $m_3 + m_4 > m_1 + m_2$.

D'autre part, il pourrait être intéressant d'introduire le taux de transition ω , comme proposé dans [7]. Cette quantité est associée à la section efficace σ par la relation [2, 7] :

$$\omega(s, T) = v_{\text{rel}} \cdot \sigma(s, T) \quad \text{avec} \quad v_{\text{rel}} = \frac{\|\vec{p}_1^*\| + \|\vec{p}_2^*\|}{E_1^* + E_2^*} . \quad (6)$$

Dans l'équation (6), v_{rel} est la vitesse relative des particules incidentes, dans leur référentiel du centre de masse.

Réactions inélastiques

3. Réactions de mésonisation

Nous considérons tout d'abord $q + \bar{q} \rightarrow M + M$: un quark et un antiquark donnent deux mésons pseudo-scalaires. C'est une réaction dominante dans les processus d'hadronisation d'un plasma de quarks/antiquarks. Cette affirmation est notamment vérifiée avec les mésons pseudo-scalaires, car ce sont les plus légers. Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, cette réaction a été proposée dans [7], dans laquelle les calculs de sections efficaces ont été effectués à températures finies. Nous proposons de retrouver ces résultats, de voir les différences avec le modèle PNJL, et d'étendre ces calculs à des densités non nulles.

Les canaux possibles sont présentés dans la figure 1 par leur diagramme de Feynman. Pour chacun d'eux, les éléments de matrice correspondants sont écrits dans (7).

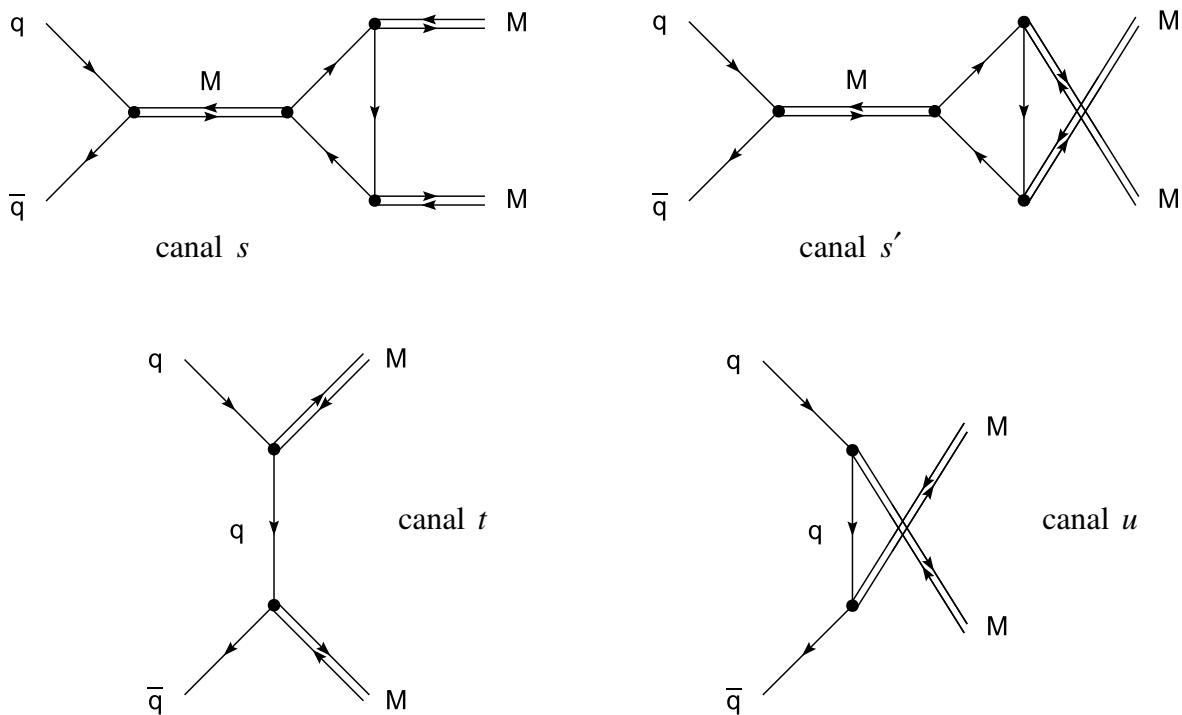


Figure 1. Diagrammes de Feynman.

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_s &= f_s \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) ig_1 i\mathcal{D}_s^S(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_3) ig_2 u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_{s'} &= f_{s'} \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) ig_1 i\mathcal{D}_{s'}^S(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_4) ig_2 u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_t &= f_t \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 ig_2 u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_u &= f_u \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_4) i\gamma_5 ig_2 u(p_1)
 \end{aligned} \quad . \quad (7)$$

Dans les canaux s et s' , les quarks/antiquarks incidents forment temporairement des mésons scalaires, dont les propagateurs (P)NJL sont notés $\mathcal{D}_{s,s'}^S$. Comme vu dans le chapitre 3 et dans [7], nous pouvons les écrire, pour a_0 ou K_0^* , par l'écriture suivante :

$$\mathcal{D}_{s,s'}^S(k_0, \vec{k}) = \frac{2K_{ii}^-}{1 - 4K_{ii}^- \cdot \Pi^S(k_0, \vec{k})}. \quad (8)$$

Ces mésons sont liés à la structure « quark-triangle », décrite par la fonction Γ , comme dans [7] :

$$\begin{aligned} -i \cdot \Gamma(i\nu_m, \vec{k}; i\alpha_l, \vec{p}) &= -N_c \cdot \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \\ &\times \text{Tr} \left[iS_{f_1}(i\omega_n, \vec{q}) \cdot i\gamma_5 \cdot iS_{f_2}(i\omega_n - i\alpha_l, \vec{q} - \vec{p}) \cdot i\gamma_5 \cdot iS_{f_3}(i\omega_n - i\nu_m, \vec{q} - \vec{k}) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Comme expliqué dans l'annexe D, ce Γ requiert l'utilisation de la fonction C_0 [22]. La structure Γ permet de produire deux mésons pseudo-scalaires. Comme visible sur la figure 1, la différence entre les canaux s et s' est que ces mésons sont échangés dans le canal s' par rapport au s .

La règle concernant les constantes de couplage g_1, g_2 dans (7) est de les inclure à chaque vertex connecté à des lignes externes, ou à des lignes internes qui ne sont pas des propagateurs (P)NJL, c'est-à-dire des propagateurs de quarks dans la pratique. En fait, des constantes de couplage sont incluses par construction dans les propagateurs (P)NJL [23]. D'autre part, les canaux t et u utilisent le propagateur de quarks nommé S_F dans (7). Celui-ci a été défini par exemple dans le chapitre 4. Pour les canaux t et u , les matrices $i\gamma_5$ sont incluses à cause de la nature pseudo-scalaire des mésons produits. Aussi, les règles associées aux calculs de trace imposent un nombre pair de telles matrices dans (9), voir annexe B, ce qui justifie l'usage de mésons scalaires en tant que propagateurs. Clairement, les mésons pseudo-scalaires ne sont pas possibles en tant que propagateurs dans cette configuration. Aussi, les termes f_i sont des facteurs de saveur, annexe C. En outre, les mésons sont des objets non colorés, au sens de la QCD. Cela impose des contraintes sur le choix des couleurs des quarks, comme indiqué par le symbole de Kronecker δ .

L'existence des quatre canaux présentés dans la figure 1 dépend des particules mises en jeu dans la réaction. Nous proposons dans le tableau 1 une liste des réactions les plus courantes dans le cadre de $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Cette liste n'est pas exhaustive. Plus précisément, des réactions produisant des mésons lourds, comme η' , ont des sections efficaces faibles par rapport aux autres [7]. Ainsi, elles peuvent être omises.

Concernant les calculs numériques, nous nous focalisons sur la réaction $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Comme observé dans [7, 10], cet exemple génère les sections efficaces les plus fortes du processus $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Les résultats sont rassemblés dans les figures 2 à 7. Tout d'abord, avec les figures 2 et 3, il est possible d'effectuer une comparaison des résultats donnés par les modèles NJL et PNJL. En fait, j'ai déjà publié une figure similaire à la figure 2 dans la référence [10]. Comme pour les masses des particules et comme avec les constantes de couplage, l'inclusion de la boucle de Polyakov conduit aussi à un décalage des valeurs vers

les hautes températures. Les valeurs trouvées ne sont pas modifiées, mais décalées. En effet, nous avons utilisé la même légende et la même échelle dans les figures 2 et 3. Clairement, l'inclusion de la boucle de Polyakov n'induit pas des sections efficaces plus faibles ou plus fortes. Numériquement, ladite boucle intervient dans les équations de gap, et dans d'autres relations, par le remplacement des statistiques de Fermi-Dirac par les versions modifiées [21], comme vu dans les chapitres précédents. Cela concerne les équations utilisées pour trouver les masses des mésons, ainsi que des calculs spécifiques, comme la fonction Γ (9).

réactions	méson(s) propagés (canal s)	canal			
		s	s'	t	u
$u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	a_0^0, f_0, f_0'	✓	✓	✓	
$u + \bar{u} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$	a_0^0, f_0, f_0'	✓	✓	✓	✓
$u + \bar{u} \rightarrow K^+ + K^-$	$(a_0^0), f_0, f_0'$	✓	✓	✓	
$u + \bar{u} \rightarrow \pi^0 + \eta$	a_0^0, f_0, f_0'	✓	✓	✓	✓
$u + \bar{d} \rightarrow \pi^+ + \pi^0$	a_0^+	✓	✓	✓	✓
$u + \bar{d} \rightarrow K^+ + \bar{K}^0$	a_0^+	✓		✓	
$u + \bar{d} \rightarrow \pi^+ + \eta$	a_0^+	✓	✓	✓	✓
$u + \bar{s} \rightarrow \pi^+ + K^0$	K_0^{*+}	✓		✓	
$u + \bar{s} \rightarrow \pi^0 + K^+$	K_0^{*+}	✓		✓	
$u + \bar{s} \rightarrow \eta + K^+$	K_0^{*+}	✓	✓	✓	✓
$s + \bar{s} \rightarrow K^- + K^+$	f_0, f_0'	✓	✓	✓	
$s + \bar{s} \rightarrow \bar{K}^0 + K^0$	f_0, f_0'	✓	✓	✓	
$s + \bar{s} \rightarrow \eta + \eta$	f_0, f_0'	✓		✓	

Tableau 1. Quelques réactions de mésonisation.

Comme expliqué dans la partie 2, une divergence au niveau du seuil peut être présente si les particules incidentes sont plus lourdes que les particules produites. Avec $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, les quarks sont plus lourds que les pions à températures et densités modérées, donc des divergences sont observables dans cette configuration, comme confirmé par la figure 6. Comme noté dans [10], ces divergences conduisent à des sections efficaces très fortes. Au niveau du seuil, une bande très étroite selon \sqrt{s} peut quelquefois dépasser 40 mb, ou même plus. Dans le modèle NJL, la divergence existe jusqu'à $T = 240$ MeV. Les sections efficaces maximales sont trouvées juste avant cette température. Celle-ci correspond à la température critique des pions à densité nulle, comme vu au chapitre 3. Avec le modèle PNJL, cette température est plus forte, c'est-à-dire $T = 290$ MeV. En conséquence, la divergence (la zone la plus foncée sur les graphes) existe pour un domaine en température plus large.

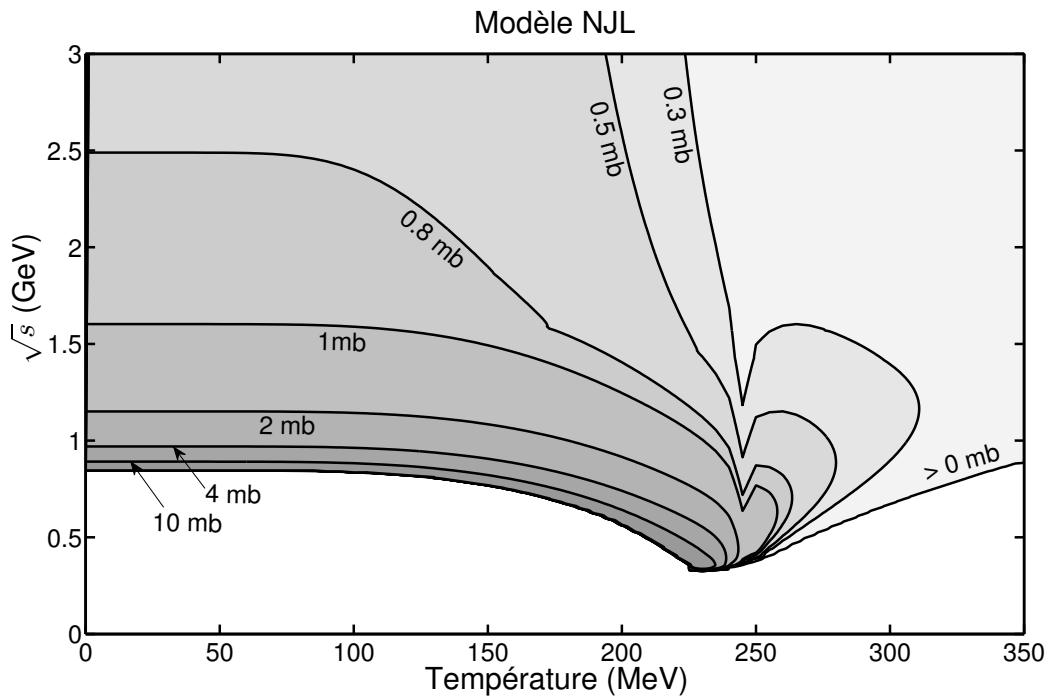


Figure 2. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ dans le plan $T - \sqrt{s}$, pour $\rho_B = 0$, en utilisant le modèle NJL.

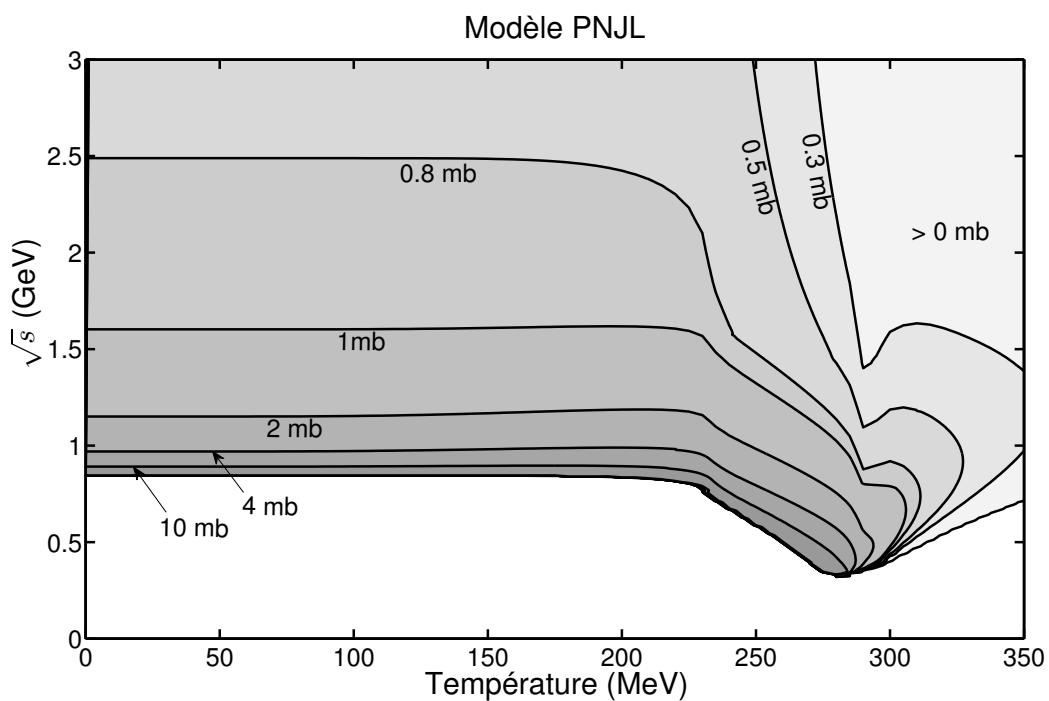


Figure 3. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ dans le plan $T - \sqrt{s}$, pour $\rho_B = 0$, en utilisant le modèle PNJL.

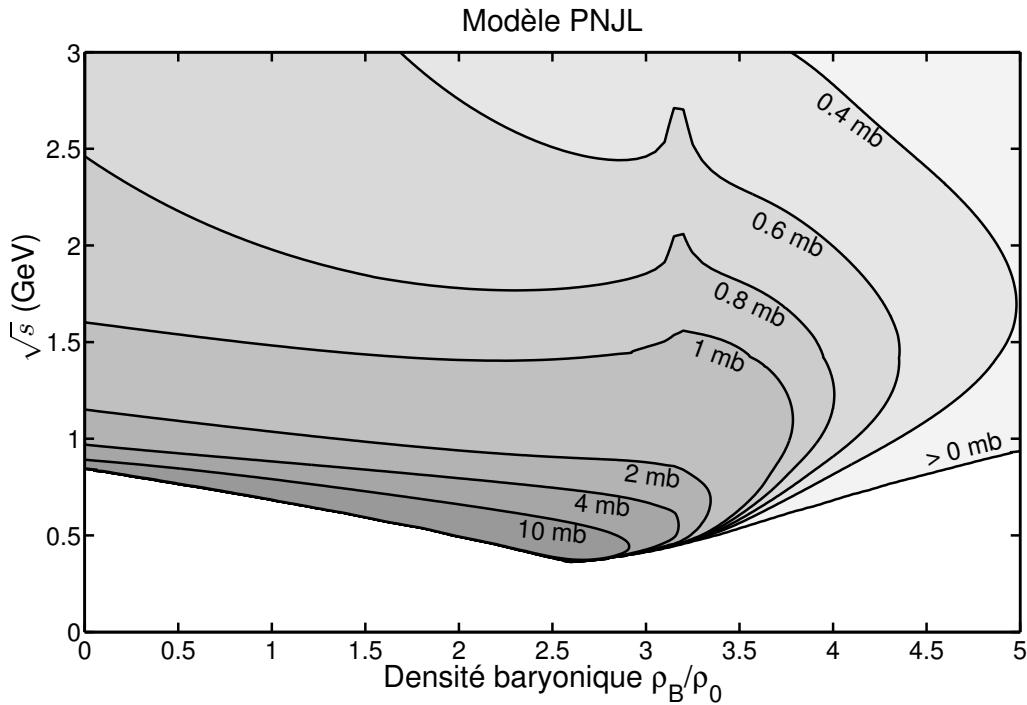


Figure 4. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ dans le plan $\rho_B - \sqrt{s}$, à température nulle.

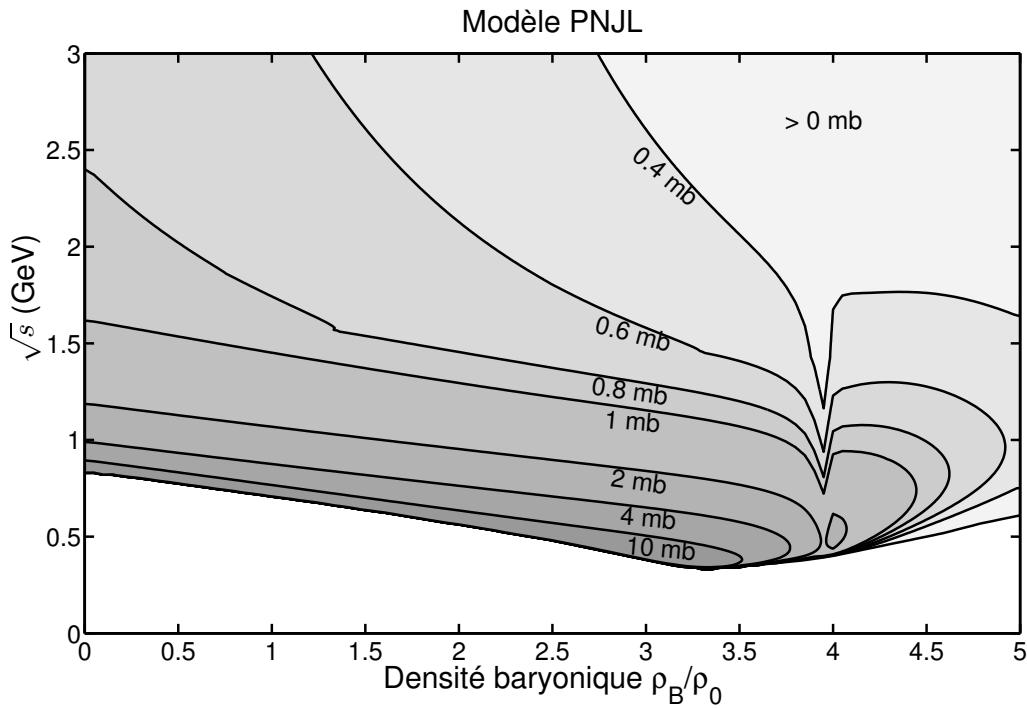


Figure 5. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ dans le plan $\rho_B - \sqrt{s}$, à $T = 200$ MeV .

L'étude de l'influence de la densité baryonique est nouvelle dans le cadre de $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. En conséquence, nous n'avons pas d'élément de comparaison dans la littérature. Pour analyser cet aspect, nous proposons de considérer tout d'abord les figures 4 et 5. Dans la figure 4, les calculs ont été effectués à température nulle, alors que nous avons pris

$T = 200$ MeV pour la figure 5. Dans l'ensemble, la densité baryonique agit de manière comparable à la température. Concernant la figure 4, nous notons que la zone pour laquelle $\sigma > 10$ mb est plus large que pour les figures 2 et 3. Par ailleurs, à environ $2.5\rho_0$, la largeur de cette zone est maximale. Nous avons là des valeurs extrêmes, proche du barn localement, juste après le seuil. A l'opposé, pour $\rho_B > 3\rho_0$, les sections efficaces deviennent plus faibles. Comme observé dans le chapitre 3, le pion n'a pas de transition stable/instable selon la densité baryonique quand la température est nulle. Toutefois, $\rho_B > 3\rho_0$ correspond à la zone pour laquelle le pion devient plus lourd que la paire quark/antiquark qui le constitue.

Concernant la figure 5, des différences peuvent être notées par rapport à la figure 4. Tout d'abord, la zone $\sigma > 10$ mb est étendue vers les plus hautes densités, car cette zone existe jusqu'à $3.5\rho_0$. Cependant, sa largeur est plus réduite que sur la figure 4. Une autre différence concerne le fait qu'à $T = 200$ MeV, le pion devient instable par une transition stable/instable. Dans le modèle PNJL, cette transition a lieu juste avant $4\rho_0$. Elle correspond aux structures visibles sur la figure 5, le long de la droite verticale d'équation $\rho_B = 4\rho_0$. Ce phénomène est aussi présent selon la température, mais il semble moins marqué dans les figures 2 et 3. Il est expliqué par le fait que la constante de couplage du pion s'annule, voir chapitre 3.

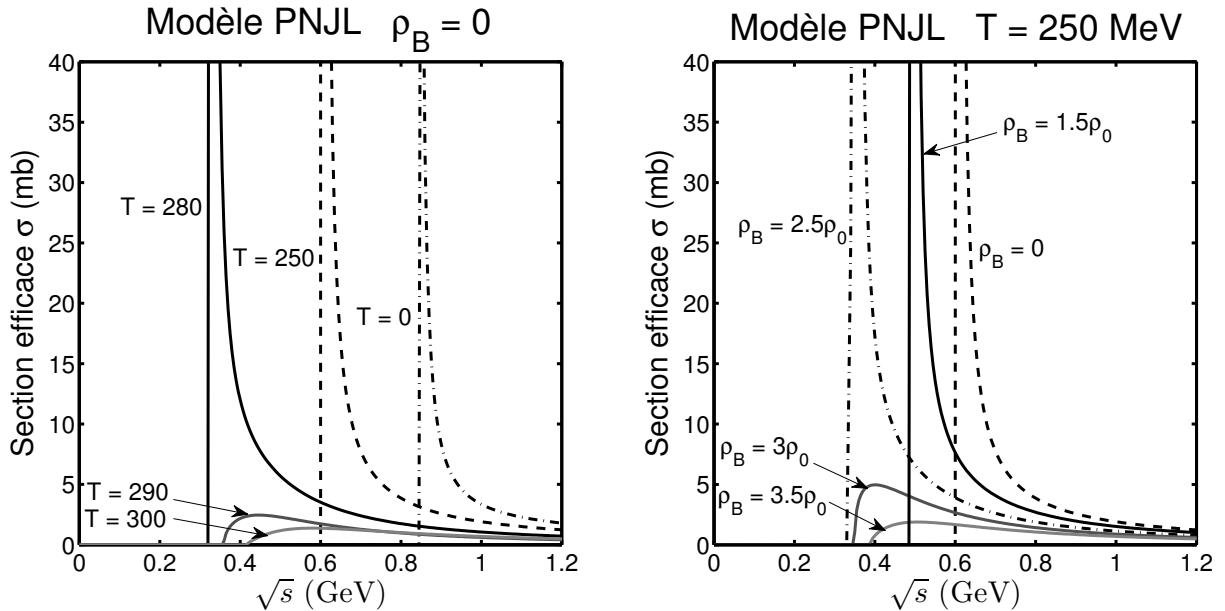


Figure 6. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, en fonction de la température et de la densité baryonique.

Nous proposons de compléter cette analyse avec les figures 6 à 8. Dans la figure 6, les sections efficaces sont étudiées en fonction de \sqrt{s} pour diverses températures pour $\rho_B = 0$ (partie gauche de la figure), et pour plusieurs densités pour $T = 250$ MeV. En fait, le choix de cette température est motivé par la remarque formulée au chapitre 2 au sujet de la supraconductivité de couleur. Comme expliqué, à densités finies et à températures modérées, l'état de supraconductivité de couleur est supposée intervenir [24, 25] et affecter nos calculs de sections efficaces. Cependant, comme argumenté, des températures au dessus de 200 MeV ne sont certainement pas concernées par ce phénomène. D'autre part, pour étudier le refroidissement d'un système de quarks/antiquarks, il vaut mieux travailler à des températures

proximes de celle de la transition de phase. Clairement, cela justifie notre choix d'effectuer nos calculs à densités finies à de telles températures dans ces figures, et dans le reste de ce chapitre.

La figure 6 est aussi complétée par la figure 7, dans laquelle le taux de transition ω , défini dans la partie 2, est estimé dans les mêmes conditions que dans la figure 6. L'avantage du taux de transition est d'atténuer la divergence au niveau du seuil. En effet, quand $T \leq 280$ MeV, la valeur du seuil correspond à la masse de la paire incidente quark/antiquark. Là, les sections efficaces tendent vers l'infini, mais la vitesse relative entre les particules incidentes est très proche de zéro, voir (3–6) et l'annexe F. Pour les figures 6 et 7, le comportement global confirme les observations de la figure 3 : σ et ω tendent vers des valeurs fortes au niveau du seuil quand la température augmente, jusqu'à ce que les pions atteignent leur température critique. Après cette température, les divergences disparaissent, ce qui explique par le fait que les pions produits sont alors plus lourds que les paires incidents quarks/antiquarks.

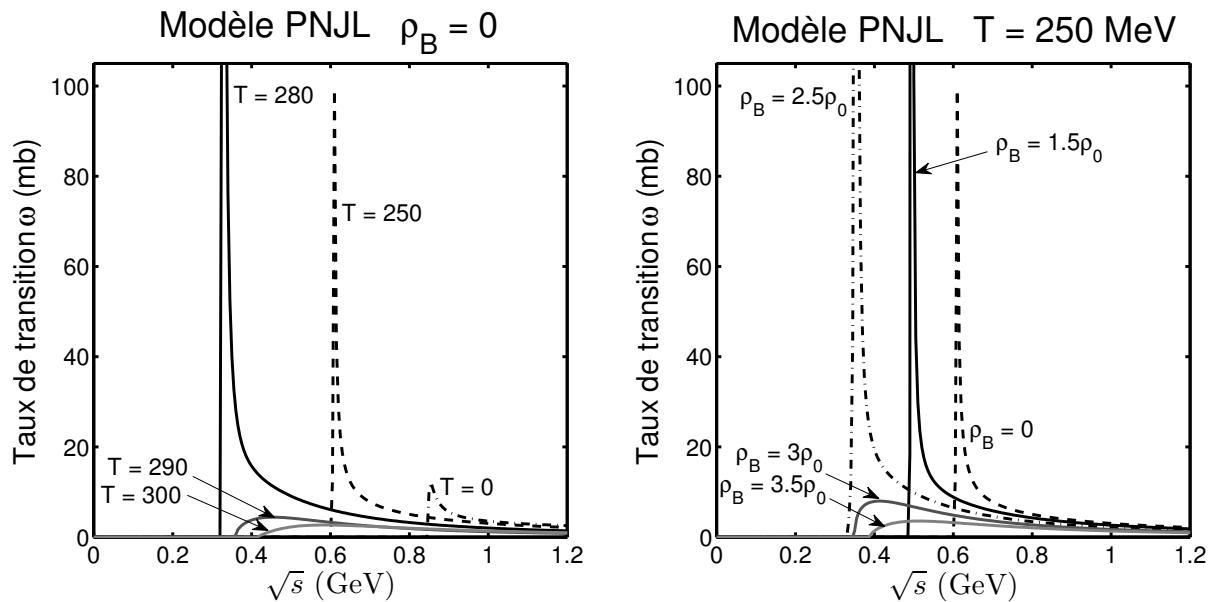


Figure 7. Taux de transition de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

La figure 8 montre le taux de transition obtenu avec la réaction $\pi^+ + \pi^- \rightarrow u + \bar{u}$, c'est-à-dire la réaction inverse de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ étudiée dans les figures précédentes. La partie gauche de cette figure peut être comparée aux résultats de [10], dans laquelle les sections efficaces NJL de ces réactions inverses ont été étudiées à températures finies et densité nulle. D'autre part, si nous comparons aussi la partie gauche de la figure 8 avec celle de la figure 7, nous pouvons conclure que les valeurs trouvées sont faibles pour la réaction inverse, par rapport à celles de la réaction directe.

Maintenant, considérons la partie gauche des figures 6 à 8. A $T = 250$ MeV et à $\rho_B = 0$, les pions sont encore plus légers que les paires quarks/antiquarks qui les composent, c'est-à-dire qu'ils sont encore stables. Pour des densités réduites, σ et ω augmentent encore quand la densité croît. A cette température, la disparition de la divergence au niveau du seuil est située entre $2.5\rho_0$ et $3\rho_0$ dans le modèle PNJL. A $2.5\rho_0$, σ et ω explosent localement. Après $3\rho_0$,

les évolutions de σ et ω rappellent fortement ce qui avait été observé pour les hautes températures. De la même manière, les valeurs du taux de transition pour la réaction inverse sont assez faibles selon la densité, partie droite de la figure 8. Même si les courbes ont des pics au niveau du seuil, ils restent réduits par rapport à ceux observables pour la réaction directe, figure 7. Ainsi, dans l'ensemble, la réaction inverse n'est pas supposée contrarier la réaction directe, au moins dans les conditions de la mésonisation.

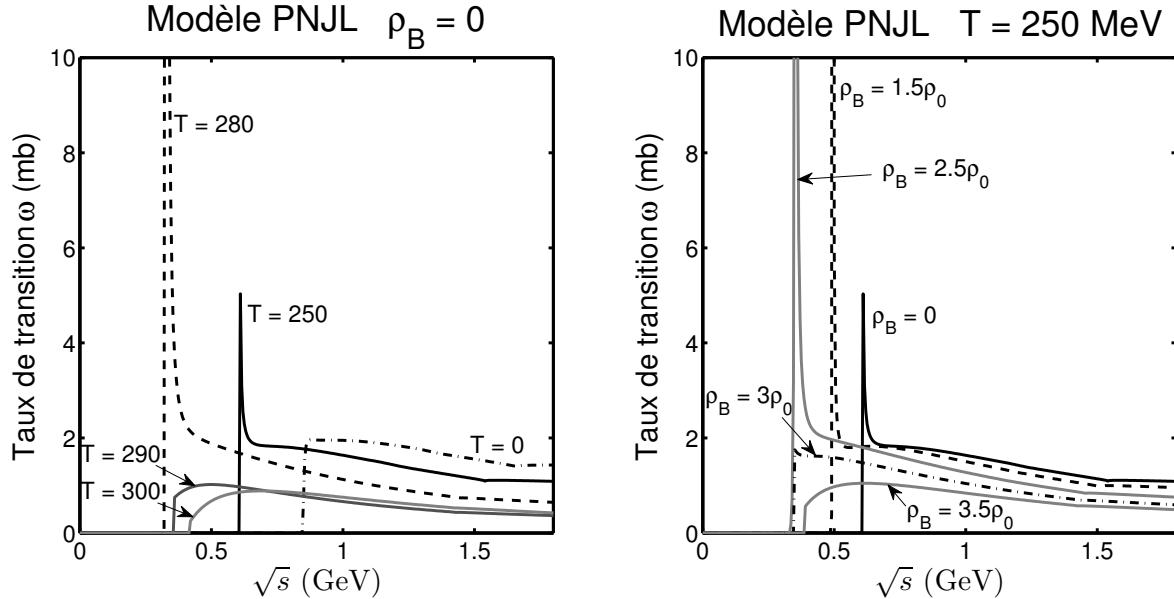


Figure 8. Taux de transition de $\pi^+ + \pi^- \rightarrow u + \bar{u}$.

Pour résumer cette analyse, nous voyons que les sections efficaces (et les taux de transition) tendent à exploser juste avant que le pion ne devienne instable, ou du moins quand sa masse est plus forte que celle de la paire quark/antiquark qui le compose. Comme indiqué dans [10], ce comportement et l'extension de la zone $\sigma > 10$ mb dans le plan $T - \rho_B$ suggèrent une mésonisation écrasante du plasma de quarks/antiquarks, quand la température et/ou la densité baryonique auront suffisamment diminué.

4. Réactions mettant en jeu un diquark

4.1 Règles de Feynman

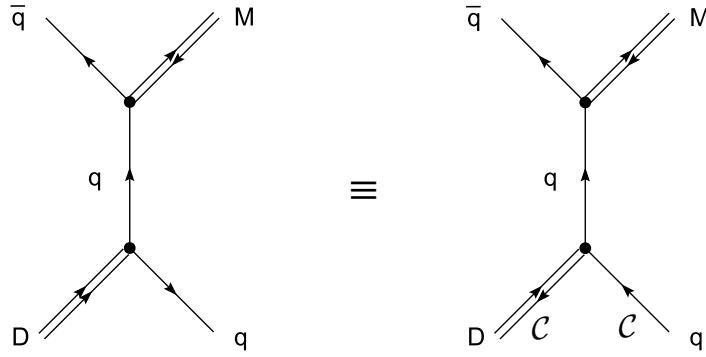
Les diagrammes de Feynman et les éléments de matrice associés précédemment présentés correspondent bien aux techniques déjà utilisées dans le cadre de la théorie quantique des champs [1–15, 19], adaptées au cadre des modèles (P)NJL, comme décrit dans [7, 8, 14, 15]. Mais, pour être capable de manipuler des éléments de matrice impliquant des diquarks, certaines précisions sont nécessaires [11, 12]. Les mésons sont décrits dans les modèles (P)NJL par une boucle composée d'un quark allant vers le futur, et un quark allant vers le

passé. Selon le point de vue de Feynman¹, ce second quark est interprété comme un antiquark. Clairement, le méson est constitué d'un quark et d'un antiquark. Concernant le diquark, nous avons vu dans le chapitre 4 qu'appliquer une conjugaison de charge à l'antiquark donne la possibilité de *mimer* le comportement d'un quark. Cette astuce est aussi utile pour écrire les éléments de matrice. En fait, les règles de Feynman traditionnelles telles que nous les utilisons ne prennent pas en compte la conjugaison de charge. Autrement dit, il est nécessaire de trouver quel est (sont) les quarks/antiquarks conjugués de charge, afin de déterminer quelles particules sont *réellement* des quarks ou des antiquarks. Logiquement, il pourrait y avoir ambiguïté seulement au niveau de vertices où un diquark/anti-diquark intervient. Dans les cas traités ci-dessous, il y a quelquefois « plusieurs solutions ». Par conséquent, plusieurs canaux sont possibles pour le même diagramme de Feynman. Dans les exemples suivants, seuls les diquarks scalaires sont utilisés comme particules incidentes ou produites. Ces exemples sont inspirés de [11, 12]. Toutefois, nous avons observé que les résultats de ces références ne sont pas vraiment en accord avec ceux de la littérature, ou avec les nôtres. Cela inclut notamment un désaccord entre certains résultats de [11] avec ceux de [8], alors que de notre côté, nous avons retrouvé les valeurs de [8].

4.2 Réactions $\bar{q} + D \rightarrow M + q$

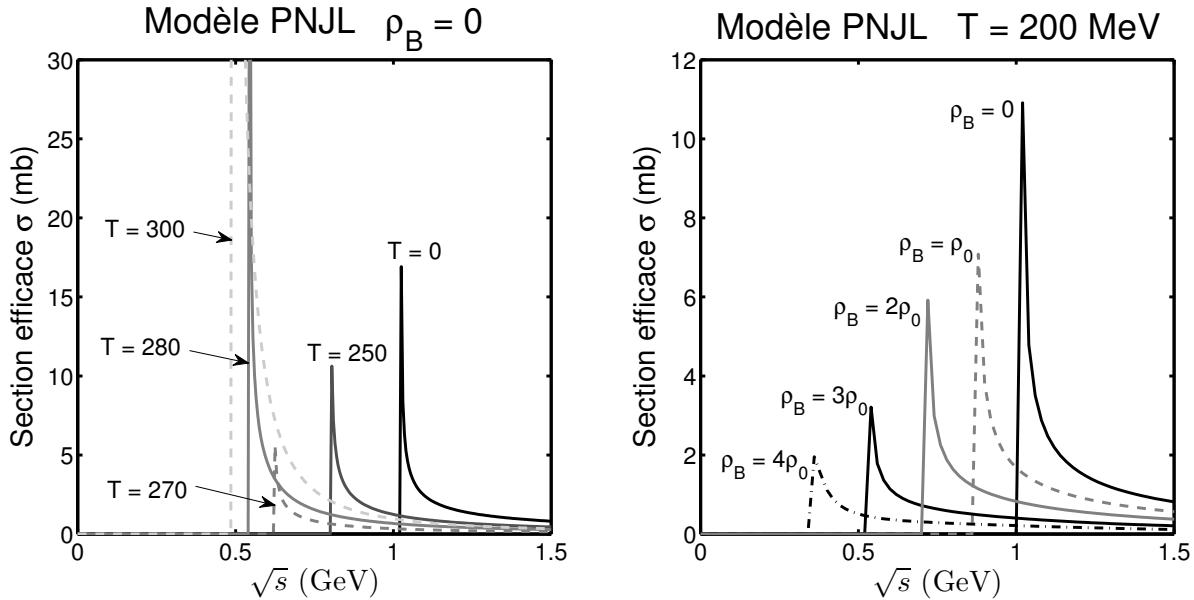
Nous considérons tout d'abord le processus $\bar{q} + D \rightarrow M + q$ et son inverse, c'est-à-dire $M + q \rightarrow \bar{q} + D$. Clairement, celui-ci est particulièrement intéressant dans le cadre d'une éventuelle production de diquarks. D'autre part, ces réactions sont les plus simples de celles traitées dans cette partie. En effet, seul un canal est pris en compte, le canal t , décrit par la figure 9 et par son élément de matrice, équation (18). Cela constitue une première occasion d'utiliser la méthode exposée dans le paragraphe précédent. Le vertex supérieur du diagramme de Feynman n'est pas connecté à un diquark. Ainsi, l'antiquark en position 1, c'est-à-dire en haut à gauche, doit vraiment être traité comme un antiquark, impliquant le spinor $\bar{v}(p_1)$. En revanche, le vertex inférieur utilise un diquark, donc le quark en position 4 (en bas à droite) doit être vu comme un antiquark conjugué de charge. Par conséquent, celui-ci est représenté par $v(p_4)$. Dans l'équation (18), les matrices $i\gamma_5$ sont associées au méson pseudo-scalaire et au diquark scalaire. En outre, le tenseur complètement antisymétrique ϵ^{c_2, c_t, c_4} est utilisé pour rappeler les contraintes de couleur entre le diquark, le quark propagé et le quark en position 4. Plus précisément, la couleur du diquark doit être la « somme » de celles des deux quarks. Ce terme ϵ^{c_2, c_t, c_4} , aussi utilisé dans [11, 12], peut être trouvé aussi dans l'écriture du Lagrangien des diquarks ou dans l'expression des courants conservés, voir chapitre 4. Nous rappelons que les diquarks scalaires sont antisymétriques en couleur.

¹ Feynman R P 1949 The Theory of Positrons *Phys. Rev.* **76** 749–59

**Figure 9.** Canal t .

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \delta_{c_i, c_l} \epsilon^{c_2, c_t, c_4} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_3 - p_1) i\gamma_5 ig_2 v(p_4) . \quad (10)$$

Les résultats trouvés pour la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow \pi^- + u$ sont exposés dans la figure 10. L'allure des courbes rappelle celle de la figure 6. La réaction peut présenter des divergences au niveau du seuil, car la masse totale des particules incidentes est plus forte que celle des particules produites. En effet, le diquark $[ud]$ est plus lourd que le pion. Quand la température augmente, la divergence au niveau du seuil est toujours présente, à l'opposé du comportement trouvé dans la partie 3. Aussi, quand les masses des diquarks commencent à décroître, à partir d'une température $T = 250$ MeV, le seuil est décalé vers des valeurs plus basses le long de l'axe \sqrt{s} . Ensuite, avant que le pion et le diquark n'atteignent leur température critique, les sections efficaces sont minimales. Après $T = 270$ MeV, les sections efficaces augmentent fortement, et tendent à exploser après $T = 300$ MeV.

**Figure 10.** Sections efficaces de $\bar{u} + [ud] \rightarrow \pi^- + u$.

La figure 11 montre les résultats associés à la réaction inverse $\pi^- + u \rightarrow \bar{u} + [ud]$. Elle n'a pas de divergence au niveau du seuil comme la réaction directe. Dans la partie gauche de la

figure 10, les sections efficaces atteignent des valeurs de quelques millibarns à basses températures. Au niveau du seuil, les valeurs sont environ 10 fois plus faibles que celles de la réaction directe. En revanche, les sections efficaces de la réaction inverse varient de la même manière que pour la réaction directe, c'est-à-dire en diminuant jusqu'à $T = 270 \text{ MeV}$, avant de ré-augmenter rapidement.

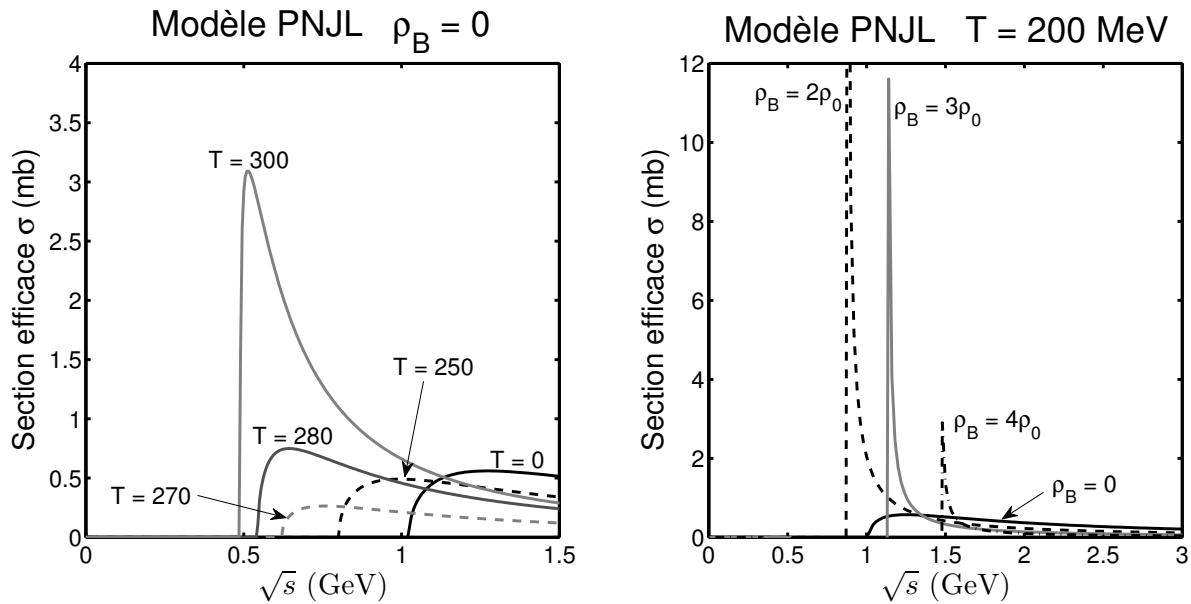


Figure 11. Sections efficaces de $\pi^- + u \rightarrow \bar{u} + [ud]$.

Selon la densité baryonique, partie droite des figures 10 et 11, une augmentation de ce paramètre conduit à une diminution progressive des sections efficaces, pour la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow \pi^- + u$. Concernant la réaction inverse, les sections efficaces augmentent pour devenir optimales pour des densités de $\rho_B \approx 2\rho_0$, et diminuent après cette densité. En fait, si nous généralisons ces résultats à toutes les réactions du type $M + q \rightarrow \bar{q} + D$, elles sont supposées produire des diquarks dans de telles conditions. Cependant, sauf dans ce cas, le processus $\bar{q} + D \rightarrow M + q$ présente globalement des sections efficaces plus fortes que son processus inverse. En conséquence, les diquarks sont certainement consommés, mais non produits. Clairement, on ne s'attend pas à ce que $M + q \rightarrow \bar{q} + D$ soit un bon candidat pour créer des diquarks. Cependant, comme remarqué dans [12], $\bar{q} + D \rightarrow M + q$ a besoin d'un antiquark pour se produire. Ainsi, une manière d'interpréter ces résultats est d'imaginer qu'une production éventuelle de diquarks, et par extension de baryons, ne peut pas avoir lieu avant qu'une mésonisation massive n'ait consommé les antiquarks, afin de les « neutraliser » dans les mésons.

4.3 Réactions $q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$

Ce type de réaction peut être modélisé en adaptant les travaux effectués pour $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Comme indiqué dans la figure 12, nous avons appliqué une conjugaison de charge à certains

quarks et antiquarks de la figure 1. En conséquence, les éléments de matrice associés (11) sont structurellement identiques à ceux de (7). Dans la pratique, la même fonction Γ que celle vue avec les mésons a été utilisée, en appliquant seulement une conjugaison de charge sur un des quarks, comme indiqué par la figure 12. D'autre part, les mésons utilisés comme propagateurs dans le canal s sont des mésons scalaires, comme dans la partie 3.

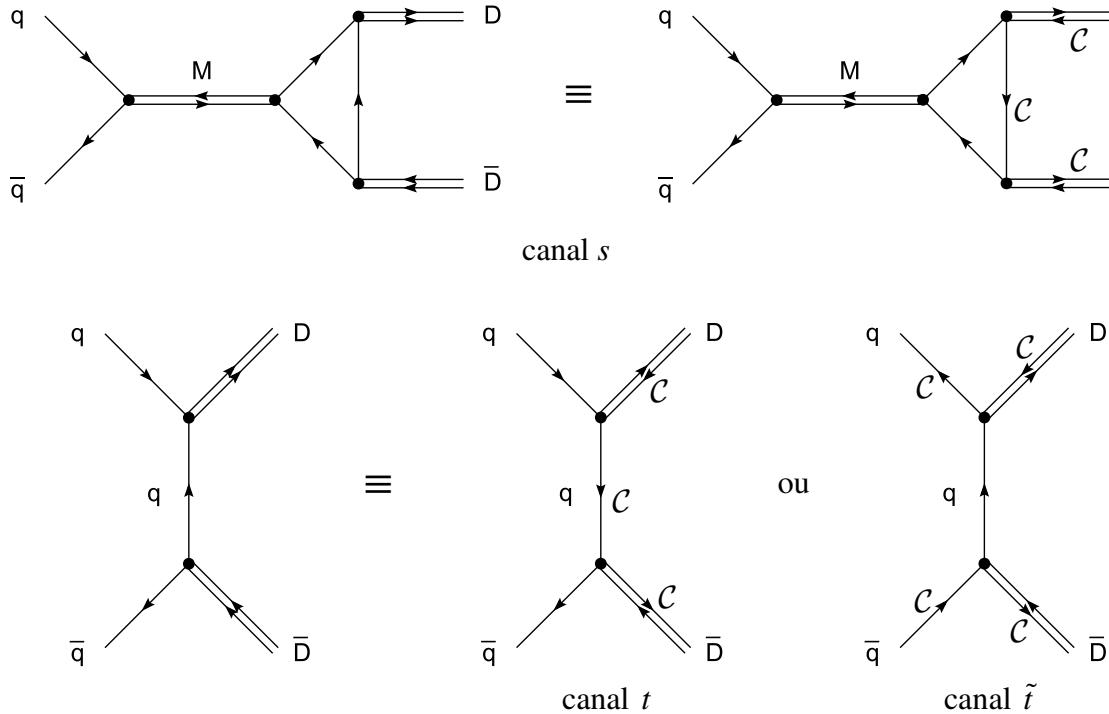


Figure 12. Canaux de la réaction.

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_s &= f_s \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) u(p_1) i\mathcal{D}_s^S(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_3) ig_1 ig_2 \\
 -i\mathcal{M}_t &= f_t \bar{v}(p_2) i\gamma_5 \epsilon^{c_2, c_t, c_4} ig_1 S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 \epsilon^{c_t, c_1, c_3} ig_2 u(p_1) . \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{t}} &= -f_t \bar{v}(p_1) i\gamma_5 \epsilon^{c_1, c_t, c_3} ig_1 S_F(p_3 - p_1) i\gamma_5 \epsilon^{c_t, c_2, c_4} ig_2 u(p_2)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Dans la partie 4.2, nous avons vu que nous avions seulement un canal t . Ici, deux « solutions » peuvent être proposées pour ce canal. En effet, nous avons deux possibilités en ce qui concerne l'identification de particules conjuguées de charge. Le canal nommé t stipule que le quark et l'antiquark sont réellement ce qu'ils sont. En revanche, pour le canal \tilde{t} , ces deux particules incidentes sont en fait de particules conjuguées de charge. Dans la pratique, ces deux canaux doivent être traités comme deux canaux distincts. Un terme croisé comme $\mathcal{M}_t \mathcal{M}_{\tilde{t}}^*$ est donc possible. Ils entraînent des calculs mettant en jeu des termes comme $\bar{v}(p_2)v(p_1)$ et $u(p_1)\bar{u}(p_2)$, c'est-à-dire des spineurs avec des quantités de mouvement différentes, voir annexe B.

Dans la figure 13, nous présentons les résultats trouvés avec la réaction $u + \bar{u} \rightarrow [ud] + \overline{[ud]}$, et avec sa réaction inverse $[ud] + \overline{[ud]} \rightarrow u + \bar{u}$. Les sections efficaces associées ont été estimées à températures finies, et pour une densité nulle. En effet, comme observé au chapitre 4, l'anti-diquark $\overline{[ud]}$ est décrit dans notre modèle uniquement quand la densité baryonique est

réduite, largement inférieure à ρ_0 . Ainsi, les calculs n'ont pas été effectués à densités non nulles. La réaction directe ne donne pas de fortes sections efficaces, quelle que soit la température. En fait, il n'y a pas de divergence au niveau du seuil, et les valeurs n'excèdent pas 0.40 mb. Ainsi, cette réaction est certainement dominée par des réactions comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. D'autre part, les sections efficaces de la réaction inverse $[ud] + [\bar{ud}] \rightarrow u + \bar{u}$ sont légèrement plus fortes que celles de la réaction directe. Mais, de la même manière, elles ne dépassent pas 0.6 mb. En conséquence, le processus $q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$ et son inverse ne devraient pas intervenir de manière notable.

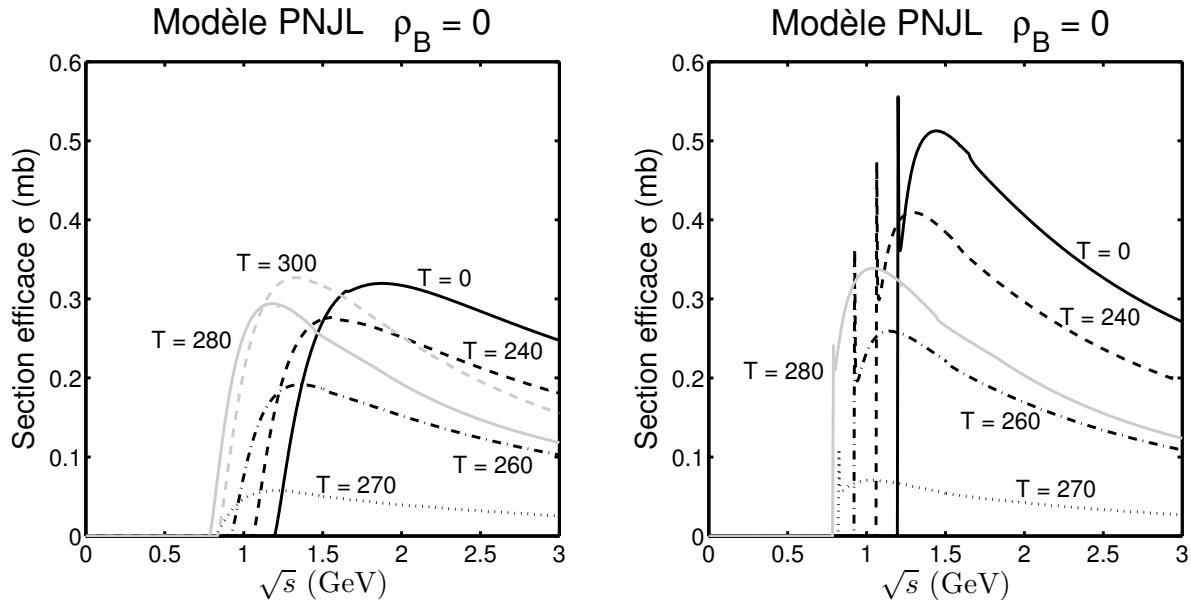


Figure 13 Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow [ud] + [\bar{ud}]$ et $[ud] + [\bar{ud}] \rightarrow u + \bar{u}$ à densité nulle.

4.4 Réactions $q + q \rightarrow D + M$

Comme avec les réactions précédentes, nous commençons par identifier les particules qui sont conjuguées de charge. Dans le diagramme de Feynman associé au canal t , figure 14, le quark en position 1 est un antiquark conjugué de charge. Son spinor associé est $\bar{v}(p_1)$, comme écrit dans l'élément de matrice équation (12). Ce processus admet aussi un canal u . Dans ce cas, le vertex dans lequel le diquark intervient est celui en bas du diagramme. Ainsi, un quark en position 2 est un antiquark conjugué de charge. Cela explique le spinor $\bar{v}(p_2)$ dans (12).

D'autre part, deux canaux s sont considérés. Comme dans la partie 3 et dans le paragraphe 4.3, ils incluent une fonction Γ (9). Celle-ci prend en compte les deux matrices $i\gamma_5$ associées au méson et au diquark produits. En conséquence, le diquark utilisé comme propagateur doit être pseudo-scalaire : contribution 1_4 , c'est-à-dire la matrice identité de dimensions 4×4 . En revanche, des diquarks scalaires ne sont pas possibles ici en tant que propagateurs. En effet, la trace dans la fonction Γ doit avoir un nombre pair de matrices $i\gamma_5$, sinon le calcul donne un résultat nul. Comme dans le paragraphe 4.3, l'effet de la conjugaison de charge sur les quarks

dans la fonction Γ consiste à changer le signe de leur potentiel chimique. En outre, en étudiant les quarks/antiquarks conjugués de charge, deux solutions possibles sont obtenues. La première garde le nom de « canal s » dans la figure 14. Dans l'écriture de l'élément de matrice associé, elle a la même structure que le canal s utilisé pour $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. La seconde solution est nommée « canal \tilde{s} ». De la même manière, l'étude inclut aussi des canaux s' . Ils ont été établis comme dans (7) : ils consistent en un échange des particules produites en sortie du triangle modélisé par Γ .

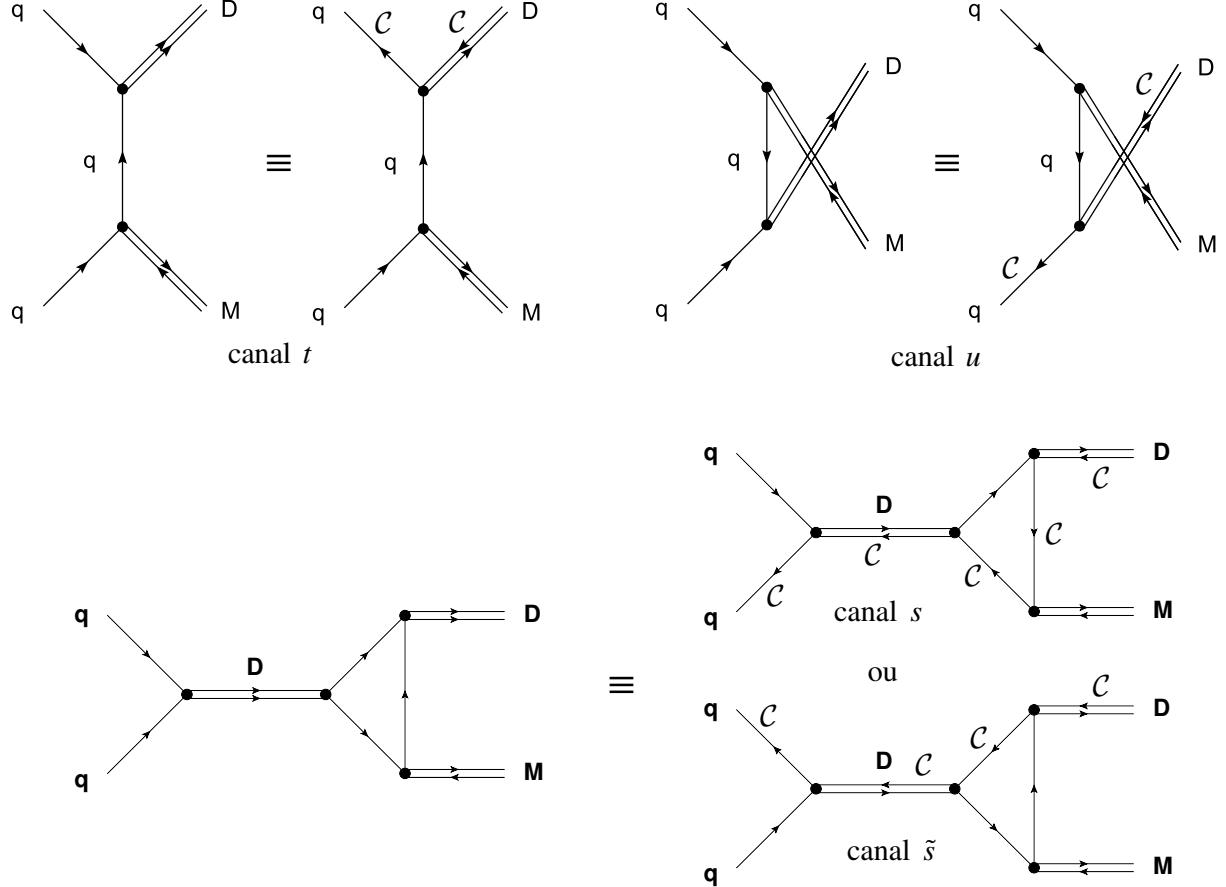


Figure 14. Canaux s , t et u .

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_t &= f_t \delta_{c_1, c_2} \varepsilon^{c_1, c_t, c_3} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_3 - p_1) i\gamma_5 ig_2 u(p_2) \\
 -i\mathcal{M}_u &= f_u \delta_{c_u, c_1} \varepsilon^{c_2, c_u, c_3} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_4) i\gamma_5 ig_2 u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_s &= f_s \varepsilon^{c_1, c_2, c_D} \bar{v}(p_2) ig_1 i\mathcal{D}_s^{PS}(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_3) ig_2 u(p_1) . \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{s}} &= f_s \varepsilon^{c_1, c_2, c_D} \bar{v}(p_1) ig_1 i\mathcal{D}_{\tilde{s}}^{PS}(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_4) ig_2 u(p_2) \\
 -i\mathcal{M}_{s'} &= f_{s'} \varepsilon^{c_1, c_2, c_D} \bar{v}(p_2) ig_1 i\mathcal{D}_s^{PS}(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_4) ig_2 u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{s}'} &= f_{s'} \varepsilon^{c_1, c_2, c_D} \bar{v}(p_1) ig_1 i\mathcal{D}_{\tilde{s}}^{PS}(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_3) ig_2 u(p_2)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Les calculs des termes carrés ne présentent pas de différence par rapport à ceux traités dans la littérature [7, 8]. Cependant, comme dans le paragraphe 4.3, certains termes mixés, comme

\mathcal{M}_t , \mathcal{M}_u^* et $\mathcal{M}_u \mathcal{M}_t^*$, impliquent des calculs mettant en jeu $\bar{v}(p_1)v(p_2)$ et $u(p_2)\bar{u}(p_1)$. Dans l'annexe B, nous présentons notre méthode en traitant l'exemple du terme $\mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^*$.

Nous considérons la réaction $u+d \rightarrow [ud] + \pi^0$ et sa réaction inverse, c'est-à-dire $[ud] + \pi^0 \rightarrow u+d$. Nos résultats associés sont présentés respectivement dans les figures 15 et 16. Dans la figure 15, les sections efficaces montrent des divergences au niveau du seuil. En effet, les deux quarks incidents peuvent être plus lourds que le diquark et pion produits. Cependant, les divergences sont moins marquées que pour les réactions de mésonisation. Selon les résultats trouvés en fonction de la température, les sections efficaces tendent à augmenter quand la température croît, jusqu'à $T = 200$ MeV, voir la partie gauche de la figure 15. Pour des valeurs plus fortes, elles diminuent. À $T = 300$ MeV et après, la divergence au seuil disparaît et les sections efficaces deviennent hautement négligeables. Les valeurs maximales atteintes par cette réaction restent assez modestes : elles ne peuvent pas dépasser 2 mb à densité nulle. La contribution des canaux s et s' semble être optimale proche du seuil cinématique. La masse du diquark pseudo-scalaire $[ud]$ utilisé comme propagateur peut expliquer cette observation. En effet, à densité nulle, sa masse est proche de 930 MeV jusqu'à $T = 200$ MeV, donc sa résonance quand \sqrt{s} est proche de cette valeur permet cette contribution pour des températures réduites.

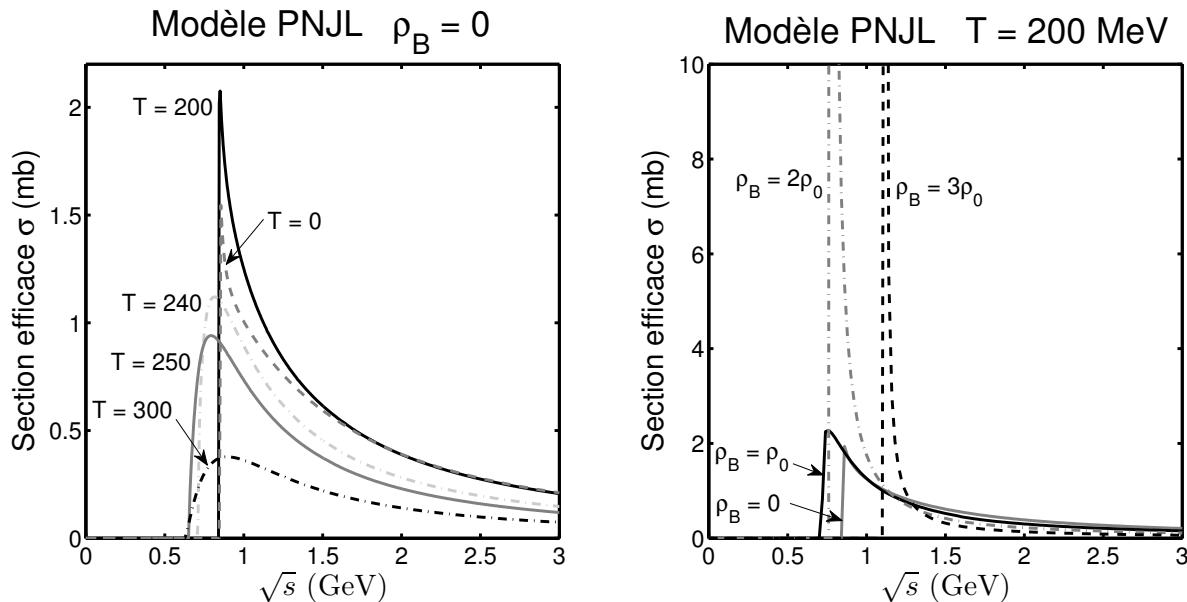


Figure 15. Sections efficaces de $u+d \rightarrow [ud] + \pi^0$.

Selon la densité baryonique, les sections efficaces augmentent jusqu'à $\rho_B \approx 2\rho_0$, densité pour laquelle les sections efficaces peuvent ponctuellement dépasser 10 mb, voir partie droite de la figure 15. Dans l'ensemble, les sections efficaces sont affectées de manière non négligeable par les facteurs de blocage (4), notamment à densités non nulles. En effet, une augmentation de la densité baryonique conduit à des variations des potentiels chimiques. Ces derniers interviennent dans les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein utilisées dans les facteurs de blocage. Cela explique les allures très différentes des courbes obtenues pour la

réaction directe $u + d \rightarrow [ud] + \pi^0$ et pour sa réaction inverse, figure 16, à densité baryonique non nulle. Clairement, la réaction directe utilise des facteurs de blocage bosoniques, alors que la réaction inverse utilise des fermioniques.

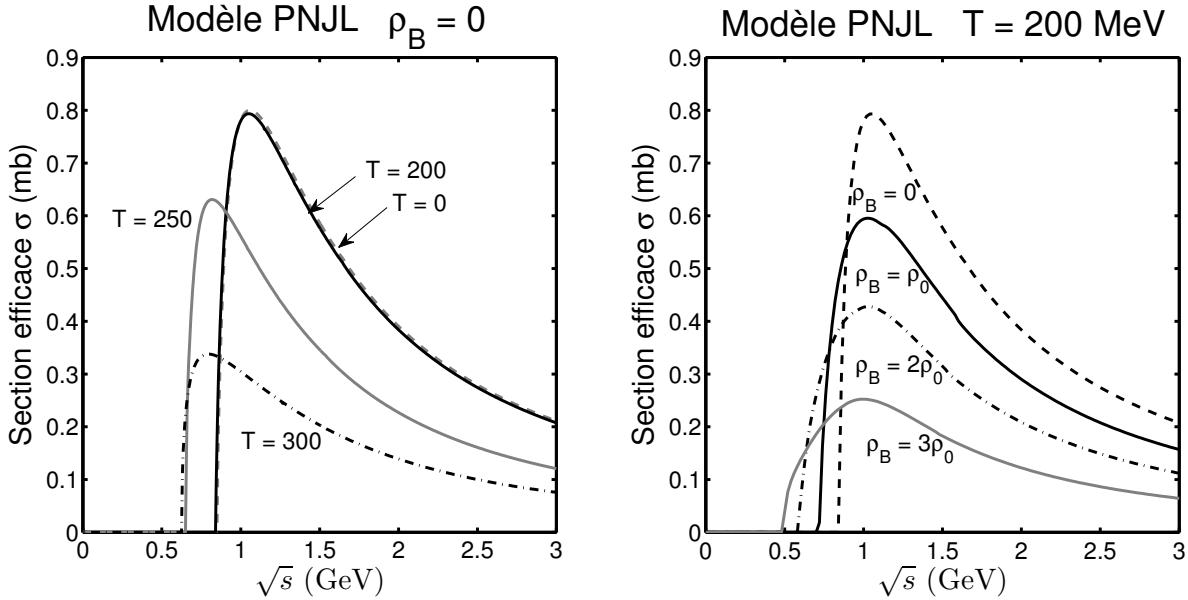


Figure 16. Sections efficaces de $[ud] + \pi^0 \rightarrow u + d$.

Les valeurs trouvées pour la réaction $u + d \rightarrow [ud] + \pi^0$ sont globalement plus fortes que celles de $[ud] + \pi^0 \rightarrow u + d$. Cependant, la différence n'est pas très marquée à densité nulle. La production de diquarks semble être assez réduite. Ses conditions optimales sont proches de $T = 200$ MeV et $\rho_B \approx 2\rho_0$. Pour de telles températures ou au-delà, si les processus de mésonisation ont consommé assez d'antiquarks, ces derniers ne pourront pas détruire les diquarks, par exemple via $\bar{q} + D \rightarrow M + q$. Avec cette hypothèse, quelques diquarks pourraient se former.

5. Réactions de baryonisation

Nous traitons maintenant des réactions inélastiques dans lesquelles un baryon est produit, en partant de quarks et/ou de diquarks. Comme dans la partie précédente, nous considérons certains des processus décrits dans [11, 12]. Cela concerne $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$, $M + D \rightarrow \bar{q} + B$, $q + q \rightarrow B + \bar{q}$, $q + D \rightarrow M + B$, mais nous avons ajouté le processus $D + D \rightarrow B + q$. Pour tous ces processus, nous nous sommes focalisés sur la production de nucléons. Plus précisément, comme expliqué dans le chapitre précédent, ces baryons ont été décrits par leur composante scalaire en saveur, et non pas leur composante axiale. Cette simplification se retrouvera au niveau des descriptions effectuées dans cette partie. En effet, un vertex impliquant un nucléon et un diquark vont donc traduire une interaction scalaire. Quoi qu'il en soit, nous avons vu avec les diquarks que certaines précautions sont nécessaires dans l'écriture de nos éléments de matrice. C'est notamment le cas pour l'identification des quarks/antiquarks conjugués de

charge. Cette méthode sera considérée ici, même si nous ne ferons plus apparaître nos diagrammes de Feynman équivalents, qui révélaient de manière explicite les particules qui étaient conjuguées de charge.

D'autre part, grâce aux travaux effectués dans le chapitre précédent, nous remarquons que la masse du nucléon est très proche de la masse totale de ses constituants, c'est à dire un quark léger et un diquark [ud]. Cela induit une énergie de liaison assez réduite. Plus précisément, à température et densité nulle, celle-ci est inférieure à 150 MeV, en valeurs absolues. Dans le cadre de la production de nucléons, cela veut dire que nous ne pouvons pas modéliser des processus dans lesquels les particules incidentes sont plus lourdes que les particules produites, si une des particules produites est un nucléon. Comme remarqué précédemment, ce comportement est traduit par l'absence de divergence au niveau du seuil cinématique. De plus, cela peut induire des sections efficaces plus fortes pour les réactions inverses, précisément celles qui tendent à détruire les baryons. Clairement, pour chacun des exemples traités, cette propriété est capable de limiter le champ d'application de ces processus de baryonisation. Mais, nous étudierons dans quelles conditions les réactions inverses pourraient ne pas intervenir.

5.1 Réactions $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$

Quelles que soient les particules concernées, le canal t est considéré pour ces réactions. Celui-ci est décrit par le diagramme de Feynman de la figure 17, et par l'élément de matrice équation (13). Le vertex impliquant l'anti-diquark (en haut à droite de la figure) et les deux antiquarks requiert une matrice γ_5 , parce que l'anti-diquark est scalaire. En revanche, le vertex en bas du diagramme est connecté à un baryon, un diquark scalaire et un quark. Ce vertex indique une interaction de type scalaire, ce qui se traduit par une matrice 1_4 (identité), dans le même esprit que l'équation (2) vue dans le chapitre précédent. Cette matrice 1_4 n'apparaît pas de manière explicite dans (13). La « règle » au niveau de tels vertices est de considérer que le quark est toujours un vrai quark. En d'autres termes, ce quark n'est pas un antiquark conjugué de charge. Nous concluons que la seule solution est que l'antiquark en position 1 soit en fait un quark conjugué de charge : son spinor associé est $u(p_1)$ dans l'équation (13).

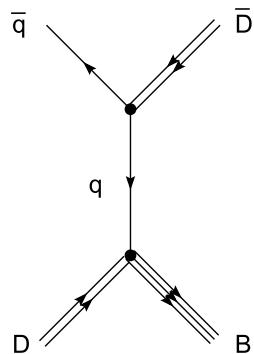


Figure 17. Canal t .

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \ i g_1 \ \bar{u}(p_4) \ S_F(p_4 - p_2) \ i \gamma_5 \ i g_2 \ \epsilon^{c_t, c_1, c_3} \ u(p_1) . \quad (13)$$

Nous considérons la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow [\bar{ud}] + n$ en tant qu'exemple. Le neutron est représenté par n . Puisque cette réaction utilise un anti-diquark, l'étude des sections efficaces selon la densité baryonique n'a pas été effectuée, comme pour la réaction $u + \bar{u} \rightarrow [ud] + [\bar{ud}]$ vue précédemment. Les résultats, disponibles dans la figure 18, révèlent que les sections efficaces sont plutôt faibles. En fait, à densité baryonique nulle, elles ne dépassent pas 0.25 mb. Nous pouvons alors extrapoler à toutes les réactions $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$. De plus, à densités positives ou nulles, nous prédisons que les anti-diquarks sont si mal tolérés dans un système physique que leur existence pourrait être à l'origine de la destruction des baryons déjà présents dans le milieu, notamment via les réactions inverses de celles traitées ici, c'est-à-dire $\bar{D} + B \rightarrow \bar{q} + D$.

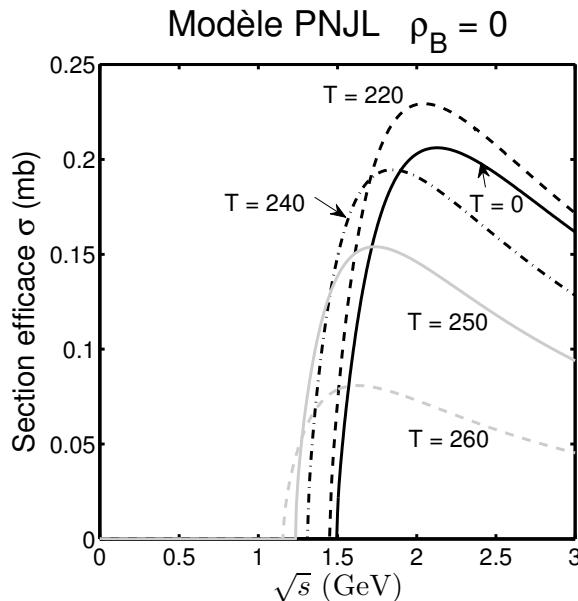
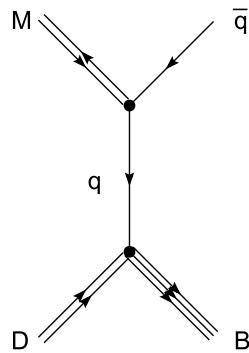


Figure 18. Sections efficaces de la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow [\bar{ud}] + n$ pour plusieurs températures.

En conséquence, nous pouvons considérer que cette réaction ne conduit pas vraiment à la baryonisation du système, et peut être négligée. Dans l'ensemble, comme $u + \bar{u} \rightarrow [ud] + [\bar{ud}]$, les réactions produisant des anti-diquarks ne devraient pas intervenir de manière significative

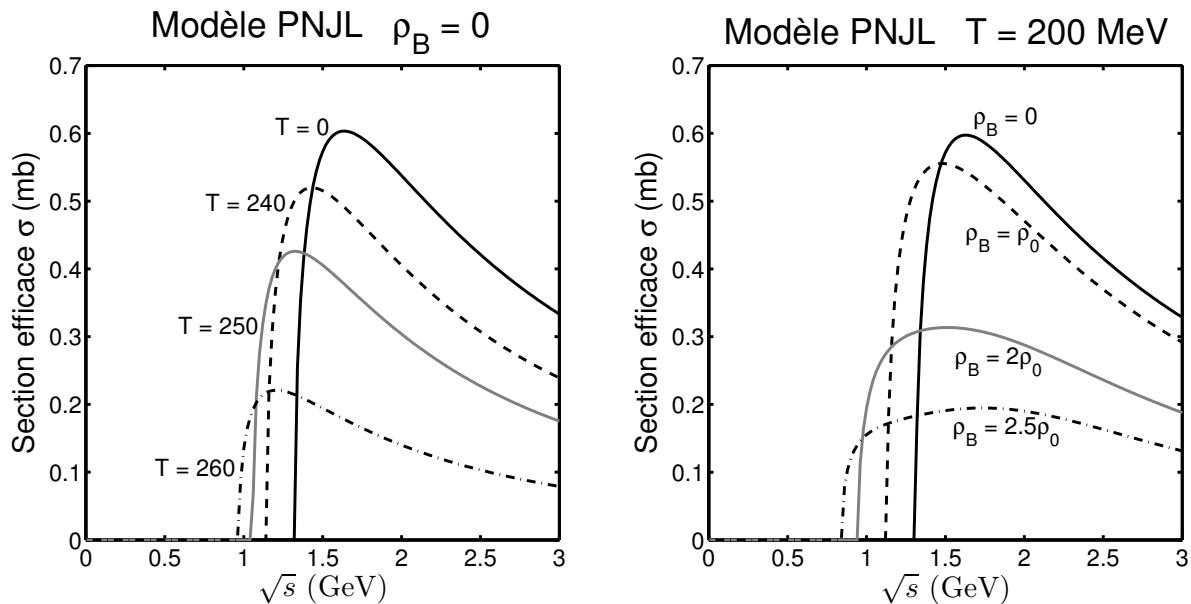
5.2 Réactions $M + D \rightarrow \bar{q} + B$

Nous testons ici un processus capable de consommer un diquark et de produire un baryon. Cette réaction nécessite la présence d'un méson. En raison de la forte mésonisation escomptée grâce aux réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, cette contrainte ne semble pas être un problème. Dans notre description, les réactions $M + D \rightarrow \bar{q} + B$ sont décrites par le canal t , voir figure 19 et équation (14). Le vertex en bas du diagramme met en jeu un baryon. Donc, ce vertex indique une interaction scalaire, et utilise alors la matrice 1_4 . Selon les « règles » exposées dans le paragraphe précédent, le quark impliqué dans ce vertex est un vrai quark. En conséquence, l'antiquark en position 3 est un vrai antiquark.

**Figure 19.** Canal t .

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \ i g_1 \bar{u}(p_4) S_F(p_4 - p_2) i\gamma_5 \ i g_2 v(p_3) . \quad (14)$$

La figure 20 décrit les sections efficaces trouvées avec la réaction $\pi^- + [ud] \rightarrow \bar{u} + n$. Dans l'ensemble, lesdites sections efficaces sont réduites. Elles n'excèdent pas un millibarn dans les résultats présentés. A densité baryonique nulle, les sections efficaces tendent à diminuer quand la température augmente. A $T = 200$ MeV, le même comportement est observé quand nous faisons varier la densité baryonique. A densité baryonique non nulle, les particules produites sont plus lourdes que les particules incidentes. En conséquence, aucune divergence au seuil n'a été observée. Une autre conséquence est que la réaction inverse a des sections efficaces plus fortes. Cependant, comme indiqué dans le paragraphe 4.4, si les antiquarks tendent à être plus rares, cette réaction inverse ne peut pas avoir lieu. En parallèle, des diquarks peuvent être formés, pour permettre la formation de quelques baryons, par exemple via ce processus $M + D \rightarrow \bar{q} + B$. Les antiquarks produits en même temps pourraient être consommés préférentiellement par les réactions de mésonisation. Quoi qu'il en soit, $M + D \rightarrow \bar{q} + B$ semble être trop limitée pour assumer seule la baryonisation du système de quarks.

**Figure 20.** Sections efficaces de $\pi^- + [ud] \rightarrow \bar{u} + n$.

5.3 Réactions $D + D \rightarrow B + q$

Nous décrivons les réactions $D + D \rightarrow B + q$ avec deux canaux, figure 21 et équation (15). Il n'y a pas ambiguïté au niveau des vertices impliquant les baryons, mais au niveau de ceux mettant en jeu un diquark et deux quarks. Le quark en position 4 est un antiquark conjugué de charge pour les deux canaux. Cet aspect est traduit par le spinor $v(p_4)$ dans (15).

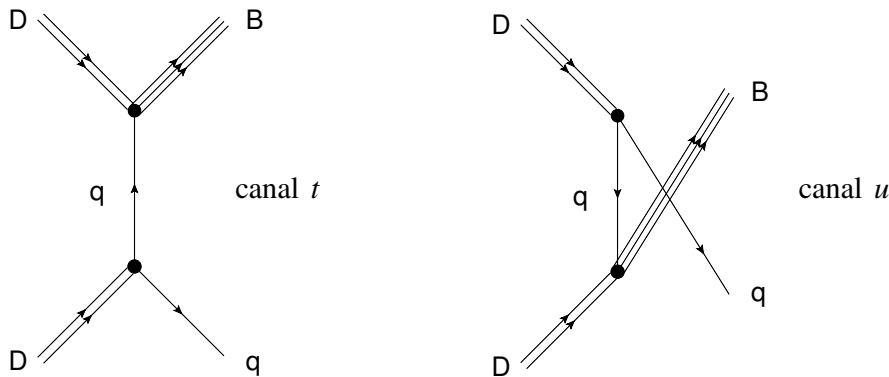


Figure 21. Canaux mis en jeu.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_t &= f_t \epsilon^{c_4, c_t, c_2} ig_1 v(p_4) i\gamma_5 S_F(p_3 - p_1) ig_2 \bar{u}(p_3) \\ -i\mathcal{M}_u &= f_u \epsilon^{c_4, c_u, c_1} ig_1 v(p_4) i\gamma_5 S_F(p_1 - p_4) ig_2 \bar{u}(p_3) \end{aligned} \quad (15)$$

Les résultats numériques correspondent à la réaction $[ud] + [ud] \rightarrow p + d$, dans laquelle p est un proton. La figure 22 indique que la température a une influence modeste sur les sections efficaces, jusqu'à $T = 250$ MeV. Après cette température, les sections efficaces décroissent brutalement. Des observations similaires peuvent être faites selon les densités, pour $T = 200$ MeV. Pour des densités au dessus de $2\rho_0$, les sections efficaces ne peuvent pas dépasser le milibarn. La réaction est capable d'avoir des sections efficaces proches de 4.5 mb au maximum. C'est certainement mieux que les réactions que les réactions traitées dans les paragraphes précédents. En outre, nous verrons ci-après que les autres sections efficaces associées à des réactions de baryonisation ne donneront pas des valeurs plus fortes. Cependant, cela reste faible devant les valeurs trouvées pour les réactions de mésonisation. Aussi, cette réaction inélastique entre deux diquarks suppose une production de diquarks relativement importante. Les résultats trouvés dans la partie 4 ne semblent pas confirmer cette hypothèse, notamment à densité nulle. En fait, on s'attend à ce que $D + D \rightarrow B + q$ agisse durant la baryonisation d'une manière assez modeste. Clairement, la réaction inverse ne peut pas réellement se produire dans la Nature, sauf dans des systèmes physiques très chauds et très denses. Il n'y a pas de réelle chance qu'un baryon stable, frappé par un quark, se désintègre entre deux objets colorés comme des diquarks dans des conditions « normales », c'est-à-dire à températures et densités modérées.

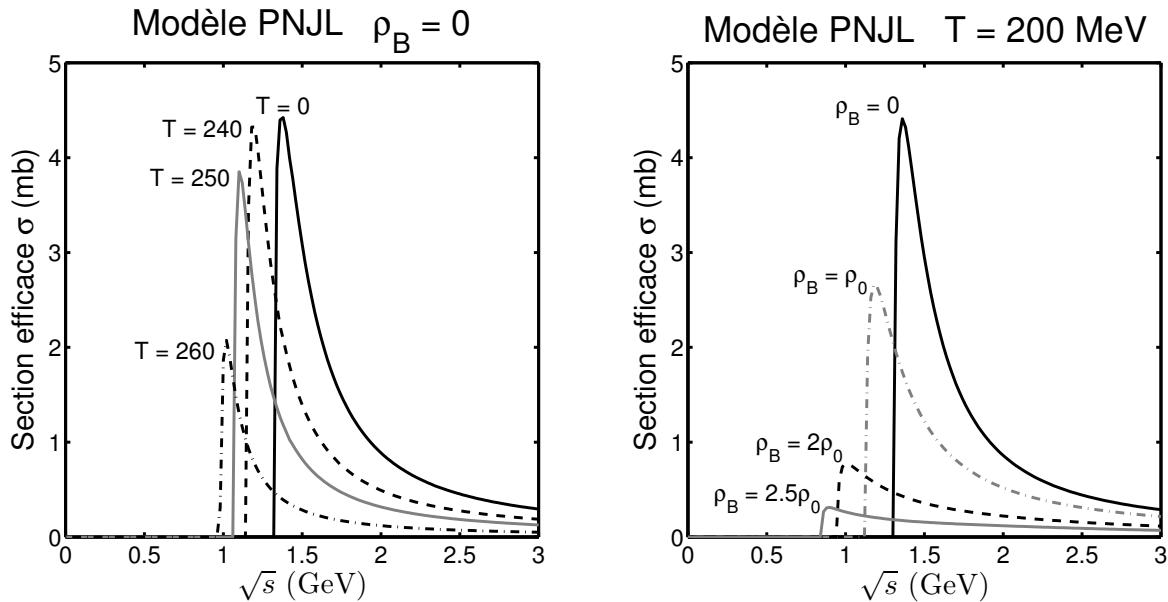


Figure 22. Sections efficaces de la réaction $[ud] + [ud] \rightarrow p + d$ pour plusieurs températures et densités baryoniques.

5.4 Réactions $q + q \rightarrow B + \bar{q}$

A l'opposé des réactions $D + D \rightarrow B + q$, les réactions $q + q \rightarrow B + \bar{q}$ sont une alternative au scénario imaginant que les diquarks interviennent comme particules intermédiaires. Une production de diquarks assez réduite peut nous amener à étudier des réactions qui ne soient pas concernées par ces particules. En effet, le processus décrit dans ce paragraphe crée des baryons directement à partir de quarks. Les diquarks jouent seulement le rôle d'intermédiaires, car servent de propagateurs dans les canaux traités, figure 23. Ils correspondent aux propagateurs (P)NJL \mathcal{D}^D dans l'écriture des éléments de matrice (16). Les diquarks utilisés sont scalaires, donc ils impliquent des $i\gamma_5$ au niveau des vertices mettant aussi en jeu deux quarks/antiquarks. La structure des diagrammes de Feynman présente des similitudes avec les diagrammes utilisés pour modéliser les diffusions élastiques quark/antiquark, voir [8] ou partie 6. Concernant les canaux t/\tilde{t} , nous avons une ambiguïté au niveau du quark en position 2 et de l'antiquark en position 4. Un des deux est conjugué de charge. Pour le canal t , l'antiquark est en fait un quark conjugué de charge. Pour le canal \tilde{t} , le quark est un antiquark conjugué de charge. Ensuite, pour les canaux u/\tilde{u} , l'ambiguïté se situe au niveau du quark en position 1 et de l'antiquark en position 4. Si l'antiquark est un quark conjugué de charge, nous obtenons le canal u . Sinon, nous avons le canal \tilde{u} . Pour les canaux s/\tilde{s} , l'ambiguïté est liée aux deux quarks incidents. Un des deux est un antiquark conjugué de charge...

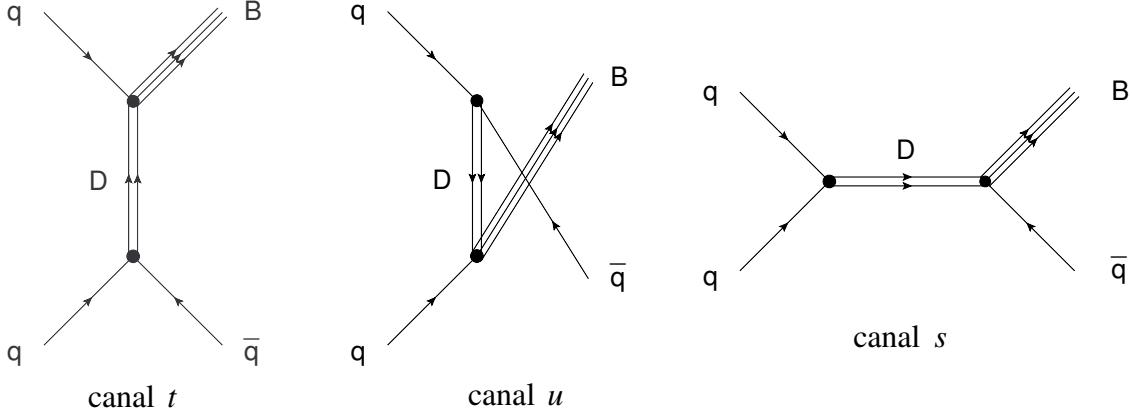


Figure 23. Canaux mis en jeu.

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_s &= f_s \epsilon^{c_2, c_1, c_s} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 u(p_1) i\mathcal{D}_s^D(p_1 + p_2) \bar{u}(p_3) v(p_4) \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{s}} &= f_s \epsilon^{c_2, c_1, c_s} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 u(p_2) i\mathcal{D}_s^D(p_1 + p_2) \bar{u}(p_3) v(p_4) \\
 -i\mathcal{M}_t &= f_t \epsilon^{c_4, c_2, c_t} \bar{u}(p_4) i\gamma_5 u(p_2) i\mathcal{D}_t^D(p_3 - p_1) \bar{u}(p_3) u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{t}} &= f_t \epsilon^{c_2, c_4, c_t} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 v(p_4) i\mathcal{D}_t^D(p_3 - p_1) \bar{u}(p_3) u(p_1) \\
 -i\mathcal{M}_u &= f_u \epsilon^{c_4, c_1, c_u} \bar{u}(p_4) i\gamma_5 u(p_1) i\mathcal{D}_u^D(p_3 - p_2) \bar{u}(p_3) u(p_2) \\
 -i\mathcal{M}_{\tilde{u}} &= f_u \epsilon^{c_1, c_4, c_u} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 v(p_4) i\mathcal{D}_u^D(p_3 - p_2) \bar{u}(p_3) u(p_2)
 \end{aligned} . \quad (16)$$

Les résultats obtenus avec $u+u \rightarrow p+\bar{d}$ sont exposés dans la figure 24. Les canaux s/\tilde{s} ne sont pas disponibles dans cet exemple. En effet, les diquarks $[uu]$, symétriques en saveur, sont des diquarks axiaux, mais pas scalaires. En outre, à l'opposé de certains processus évoqués dans ce travail, notamment $q+\bar{q} \rightarrow M+M$ [7], la contribution des canaux s/\tilde{s} n'est pas importante dans le cas des réactions $q+q \rightarrow B+\bar{q}$. D'autre part, le choix des diquarks scalaires, au lieu de diquarks pseudo-scalaires, a été motivé par le fait que les scalaires permettent d'obtenir des sections efficaces plus fortes.

Concernant l'évolution des sections efficaces, la température et la densité baryonique agissent de la même manière. En effet, ces paramètres décalent le seuil vers les basses valeurs de \sqrt{s} . Cependant, la température ne modifie pas vraiment les sections efficaces obtenues, alors qu'une augmentation de la densité entraîne une réduction des valeurs trouvées. Dans la figure 24, les valeurs restent assez basses, car elles n'excèdent pas 1.5 mb quand \sqrt{s} est inférieur à 1.7 GeV. De plus, $q+q \rightarrow B+\bar{q}$ est capable de concurrencer $q+q \rightarrow D+M$ ou les réactions élastiques entre quarks [8]. Ces trois réactions ont des sections efficaces d'égales importances, même si $q+q \rightarrow D+M$ permet la formation de diquarks, et peut donc indirectement permettre la création de baryons. Concernant la réaction inverse de $q+q \rightarrow B+\bar{q}$, on s'attend à ce qu'elle soit plus forte que nos réactions, quand elle est en mesure de se produire. Mais, comme indiqué précédemment, la disparition des antiquarks (grâce à une mésonisation massive) peut neutraliser le processus $B+\bar{q} \rightarrow q+q$. En outre, on s'attend à ce que la mésonisation continue, même après que la baryonisation ait démarrée, en capturant tous les antiquarks qui pourraient être formés durant cette phase. Clairement, on peut considérer que le processus $q+q \rightarrow B+\bar{q}$ est intéressant dans la cadre de la baryonisation

du système. Il a certes des sections efficaces réduites, mais il est totalement indépendant de la production de diquarks.

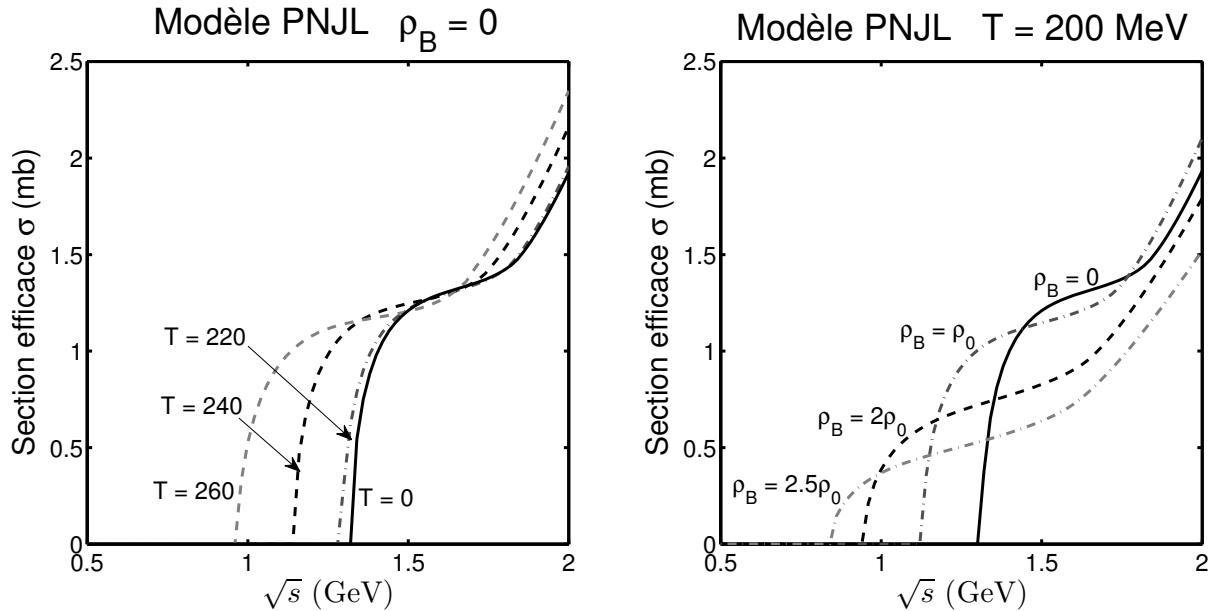


Figure 24. Sections efficaces de la réaction $d + u \rightarrow n + \bar{d}$.

5.5 Réactions $q + D \rightarrow M + B$

Dans ces réactions, les particules produites ne sont pas des objets colorés, alors que c'est le cas pour les particules incidentes, c'est-à-dire le quark et le diquark. Aussi, $q + D \rightarrow M + B$ a l'avantage que les réactions inverses ne peuvent pas intervenir, sauf dans des conditions extrêmes. Dans un scénario dans lequel quelques diquarks pourraient être produits, on peut imaginer que $q + D \rightarrow M + B$ soit le processus final qui combinerait les diquarks formés avec les quarks libres restants. A ce niveau là, on s'attend à ce que l'antimatière, c'est-à-dire notamment les antiquarks, soit déjà consommée par les réactions précédentes pour former des mésons. Après les réactions $q + D \rightarrow M + B$, toutes les particules formées seraient alors des particules observables. Dans notre travail, ce processus est décrit par le canal t , voir figure 25.

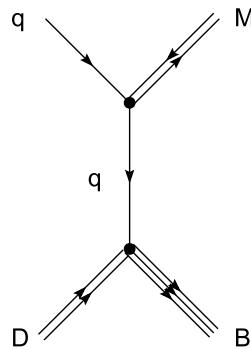


Figure 25. Canal t .

L'élément de matrice associé est écrit équation (17). Il n'y a pas de vertex impliquant un diquark et deux quarks. Ainsi, il n'y a pas ambiguïté sur les quarks et antiquarks présents. Par conséquent, le canal t n'est pas subdivisé en un autre canal \tilde{t} .

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \ i g_1 \bar{u}(p_4) S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 \ i g_2 u(p_1). \quad (17)$$

La réaction $u + [ud] \rightarrow \pi^+ + n$ est considérée en tant qu'exemple. Les résultats associés, exposés dans la figure 26, indiquent que les sections efficaces sont faibles. Cependant, même si nous notons une ressemblance entre les équations (17) et (14), les valeurs sont ici légèrement plus fortes que celles observées dans le paragraphe 5.2. En effet, la réaction $q + D \rightarrow M + B$ est capable d'atteindre 1.2 mb dans certaines conditions. Le comportement selon la température, à densité nulle, est décrit dans la partie gauche de la figure 26. Il y est montré que les sections efficaces augmentent très lentement quand la température croît, jusqu'à $T = 220$ MeV. Après cela, les valeurs chutent rapidement jusqu'à la limite de stabilité du nucléon. En ce qui concerne l'évolution en fonction de la densité, partie droite de la figure, nous suggérons de comparer avec la figure 20 pour observer un comportement assez similaire qualitativement entre les deux réactions. D'autre part, même si un canal s a été imaginé par [11, 12], aucune divergence au niveau du seuil n'est attendue pour cette réaction, même avec ce canal additionnel. Peut-être que l'inclusion dudit canal est capable d'augmenter les valeurs des sections efficaces, mais cela serait seulement d'une manière assez modeste.

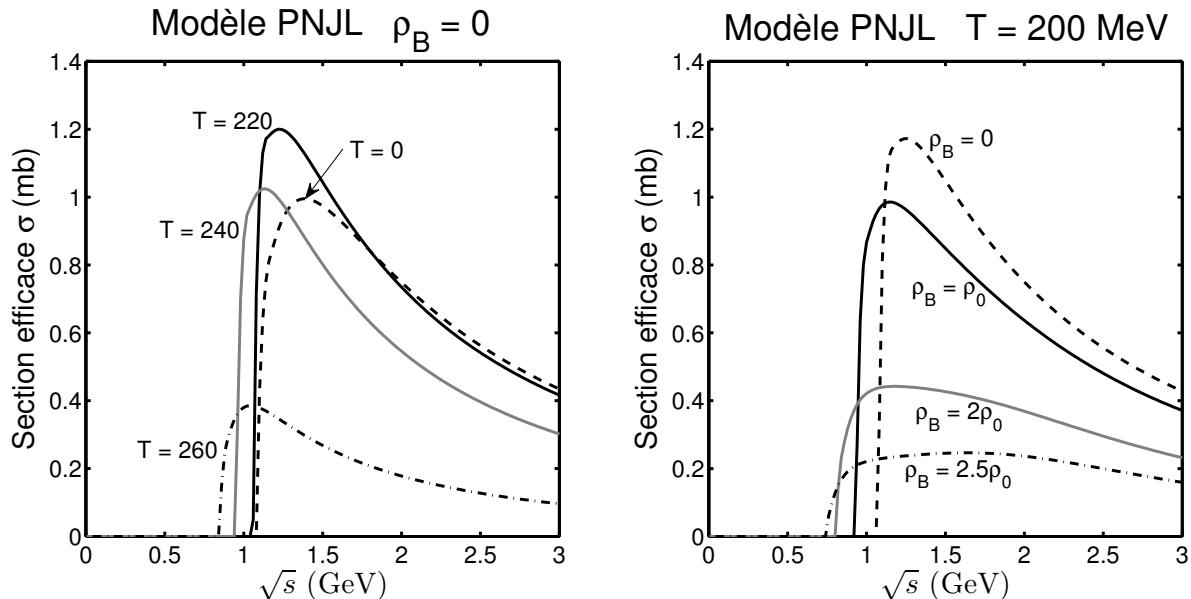


Figure 26. Sections efficaces de la réaction $u + [ud] \rightarrow \pi^+ + n$.

Réactions élastiques

Etudions maintenant les réactions élastiques. Celles-ci sont moins courantes dans la littérature NJL que les réactions inélastiques, sauf pour les diffusions élastiques quark-quark et quark/antiquark [8]. Concernant ces dernières, comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, les objectifs sont de retrouver les résultats trouvés dans cette référence, puis de les étendre à densités non nulles, et d'effectuer les calculs dans le cadre du modèle PNJL. Notamment avec $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$, un autre but est d'être capable de comparer les résultats trouvés avec ceux de $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, pour voir si la diffusion élastique est capable de contrarier la mésonisation, c'est-à-dire si elle peut être une concurrente sérieuse. Une telle étude est ensuite étendue aux autres réactions élastiques traitées dans cette seconde partie du chapitre. Clairement, l'objectif est donc de voir les processus élastiques qui seraient capables d'intervenir de manière notable, notamment en tant que concurrents des réactions inélastiques.

6. Collisions élastiques entre quarks et antiquarks

6.1 Diffusion quark–antiquark

Comme observé dans [8], la diffusion élastique entre un quark et un antiquark est décrite par les canaux s et t , figure 27 et équation (18). Les propagateurs utilisés concernent des mésons scalaires et pseudo-scalaires, qui sont représentés respectivement par les propagateurs NJL/PNJL $\mathcal{D}_{t,u}^S$ et $\mathcal{D}_{t,u}^P$. Les symboles T correspondent à des facteurs de saveur.

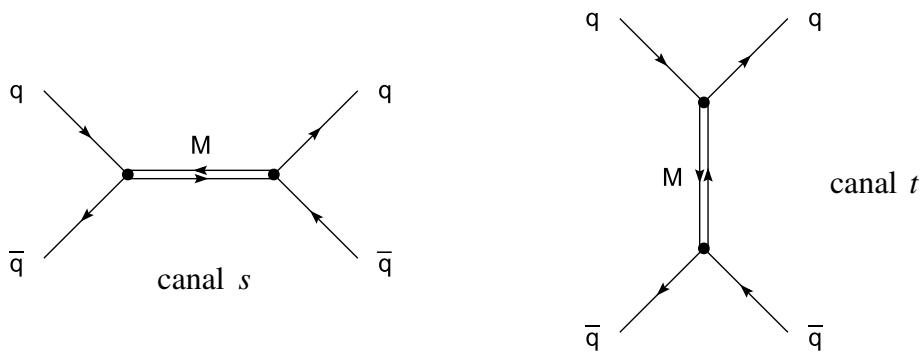


Figure 27. Canaux s et t .

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_s &= \delta_{c_1,c_2} \delta_{c_3,c_4} \bar{v}(p_2) T u(p_1) i\mathcal{D}_s^S(p_1 + p_2) \bar{u}(p_3) T v(p_4) \\
 &\quad + \delta_{c_1,c_2} \delta_{c_3,c_4} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 T u(p_1) i\mathcal{D}_s^P(p_1 + p_2) \bar{u}(p_3) i\gamma_5 T v(p_4) \\
 -i\mathcal{M}_t &= \delta_{c_1,c_3} \delta_{c_2,c_4} \bar{u}(p_3) T u(p_1) i\mathcal{D}_t^S(p_1 - p_3) v(p_4) T \bar{v}(p_2) \\
 &\quad + \delta_{c_1,c_3} \delta_{c_2,c_4} \bar{u}(p_3) i\gamma_5 T u(p_1) i\mathcal{D}_t^P(p_1 - p_3) v(p_4) i\gamma_5 T \bar{v}(p_2)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Nous avons évalué les sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$. Les résultats sont présentés dans les figures 28 et 29. La partie gauche de la figure expose nos résultats NJL, alors que l'autre partie concerne les valeurs PNJL. Pour tous ces graphes, comme mentionné dans [8], les calculs sont restreints par une valeur limite selon \sqrt{s} :

$$\sqrt{s}_{\text{limite}} = 2\sqrt{\Lambda^2 + m_f^2} \Big|_{f=u,d,s}, \quad (19)$$

dans laquelle Λ est la borne supérieure des intégrales utilisées pour calculer les masses des particules concernées, voir chapitre 2.

Concernant les sections efficaces NJL, nous observons un bon accord avec les résultats de [8]. Pour les résultats NJL et PNJL de la figure 28, les sections efficaces sont modestes à basses températures. Ensuite, elles augmentent brutalement, et elles forment des structures proches du seuil cinématique. Après cela, à hautes températures, les valeurs diminuent quand la température monte. Comme avec $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, l'inclusion de la boucle de Polyakov conduit à un décalage des courbes vers les hautes températures. Plus précisément, avec le modèle NJL, les sections efficaces de fortes valeurs sont obtenues à $T = 250$ MeV, en accord avec [8], alors que dans le modèle PNJL, les sections efficaces optimales sont trouvées à des températures proches de 300 MeV. En fait, quel que soit le modèle, NJL ou PNJL, la température optimale correspond aux températures critiques (températures de Mott) de certains mésons pseudo-scalaires utilisés comme propagateurs.

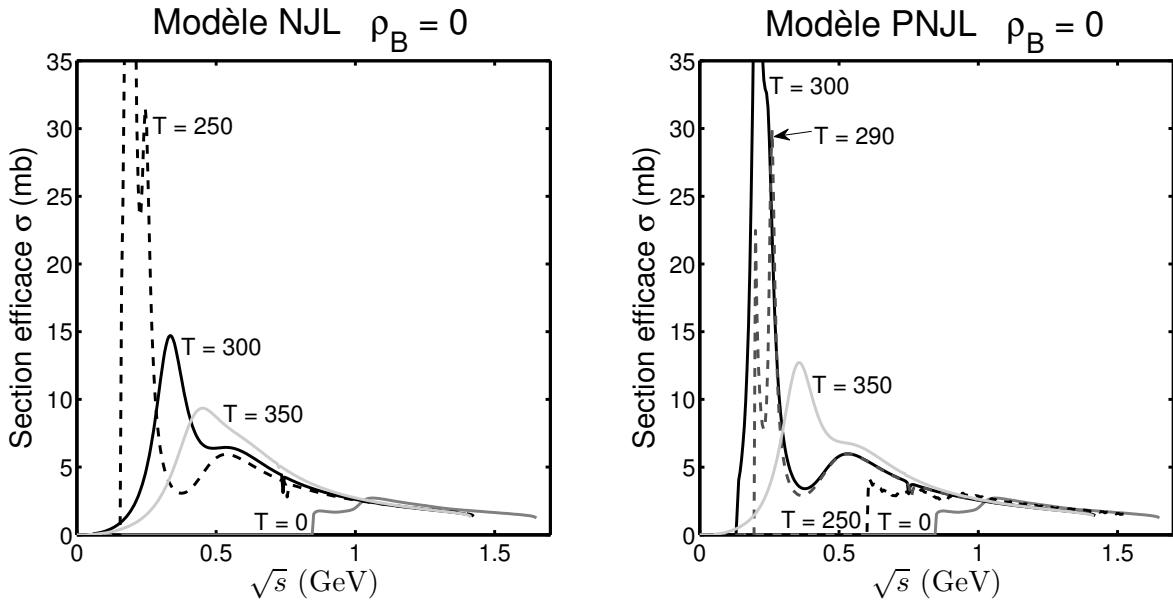


Figure 28. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ selon la température.

Pour les études à densités non nulles, figure 29, nous avons estimé l'évolution des sections efficaces PNJL à $T = 250$ MeV. En effet, à cette température, l'effet de la densité est assez spectaculaire. En fait, le comportement des sections efficaces est semblable à celui observé avec la température. Les valeurs sont faibles à basses densités. Elles augmentent et forment des structures comparables à celles de la figure 28, et ensuite elles diminuent à hautes densités, c'est-à-dire ici $\rho_B \approx 5\rho_0$.

Une explication globale consiste à dire que les sections efficaces deviennent fortes quand \sqrt{s} est comparable à la masse des mésons pseudo-scalaires les plus légers utilisés comme propagateurs dans le canal s , c'est-à-dire le pion et η . D'ailleurs, nous avons vérifié que le canal s domine, notamment quand les sections efficaces sont fortes. Dans la figure 28, sauf pour la divergence au seuil, les deux autres maximums de la courbe NJL à $T = 250$ MeV et de la PNJL à $T = 290$ MeV traduisent les résonances de ces mésons quand \sqrt{s} est égal à leurs masses.

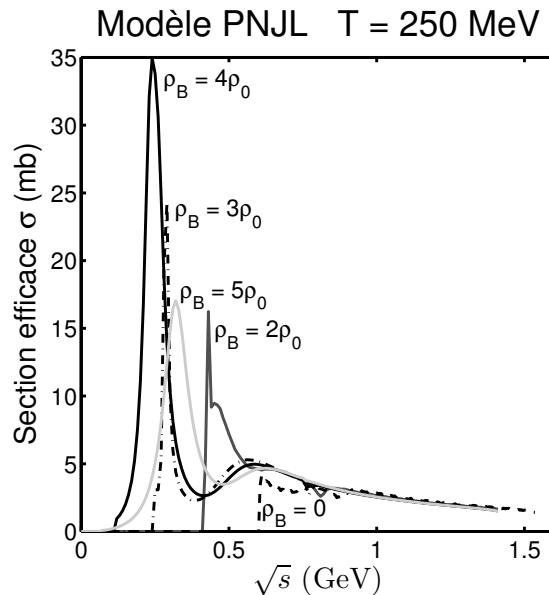


Figure 29. Sections efficaces de $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ selon la densité baryonique.

Nous considérons maintenant les différences entre $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ et $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. A densité nulle, les sections efficaces maximales du processus élastique $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ sont trouvées à une température proche de $T = 300$ MeV, alors que la température optimale de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ a été trouvée sur la figure 6 à $T = 280$ MeV environ. Une telle différence pouvait aussi être notée avec le modèle NJL. Avec ce dernier, la température optimale sont de $T = 230$ MeV pour $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (voir figure 2), contre $T = 250$ MeV pour $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ [10]. En revenant aux résultats PNJL, à $T = 250$ MeV, la section efficace de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ explose pour une densité d'environ $2\rho_0$ ou $2.5\rho_0$, mais inférieure à $3\rho_0$. La figure 29 indique que la densité optimale pour la réaction $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ est plus forte, car nous avions obtenu $4\rho_0$. En extrapolant au plan T, ρ_B , nous pouvons deviner que ces deux dernières réactions ne devraient pas interférer ensemble de manière notable, car elles devraient se dérouler dans des conditions voisines, mais différentes. La diffusion élastique est capable d'intervenir à des températures/densités très fortes. Pendant le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks, une thermalisation du système, induite par le processus élastique, devrait se produire juste avant une mésonisation massive.

6.2 Diffusion quark–quark

Dans le cadre de l'évolution d'un système de quarks, la diffusion quark/quark devrait jouer un rôle important, notamment dans les premiers instants de son expansion. En nous inspirant de [8], nous proposons d'estimer les sections efficaces avec les canaux t et u représentés figure 30. Les éléments de matrice correspondants sont écrits équation (20). Comme avec la diffusion quark/antiquark, des mésons scalaires et pseudos scalaires sont utilisés comme propagateurs. Ils sont notés respectivement $i\mathcal{D}_{t,u}^S$ et $i\mathcal{D}_{t,u}^P$. De la même manière, T fait référence à des facteurs de saveur, en utilisant les mêmes notations que dans la référence [8].

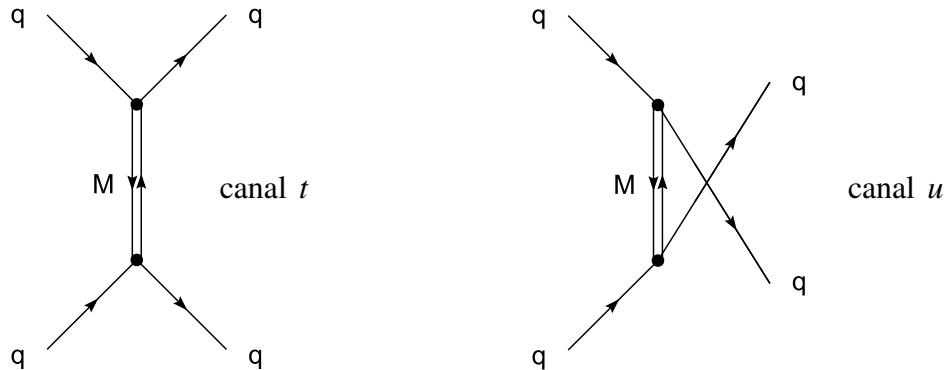


Figure 30. Canaux t et u .

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_t &= \delta_{c_1,c_3} \delta_{c_2,c_4} \bar{u}(p_3) T u(p_1) i\mathcal{D}_t^S(p_1 - p_3) \bar{u}(p_4) T u(p_2) \\
 &\quad + \delta_{c_1,c_3} \delta_{c_2,c_4} \bar{u}(p_3) i\gamma_5 T u(p_1) i\mathcal{D}_t^P(p_1 - p_3) \bar{u}(p_4) i\gamma_5 T u(p_2) \\
 -i\mathcal{M}_u &= \delta_{c_1,c_4} \delta_{c_2,c_3} \bar{u}(p_4) T u(p_1) i\mathcal{D}_u^S(p_1 - p_4) \bar{u}(p_3) T u(p_2) \\
 &\quad + \delta_{c_1,c_4} \delta_{c_2,c_3} \bar{u}(p_4) i\gamma_5 T u(p_1) i\mathcal{D}_u^P(p_1 - p_4) \bar{u}(p_3) i\gamma_5 T u(p_2)
 \end{aligned} \quad . \quad (20)$$

Nos résultats sont exposés dans les figures 31 et 32. Ils concernent l'étude de la diffusion élastique entre deux quark u . La figure 31 rassemble les données trouvées à densité baryonique nulle, pour les modèles NJL et PNJL. Nos résultats NJL sont en accord avec ceux de [8]. Comme avec les autres comparaisons entre les modèles NJL et PNJL, il a aussi été observé un décalage selon la température. Par exemple, la courbe NJL trouvée à $T = 250$ MeV ressemble fortement à la courbe PNJL trouvée à $T = 300$ MeV. Ces deux valeurs correspondent à la température pour laquelle les sections efficaces sont optimales, dans chaque modèle. En fait, en nous focalisant sur les valeurs de \sqrt{s} inférieures à 1 GeV, les sections efficaces tendent à augmenter quand la température monte, jusqu'à atteindre les deux températures citées, mais très lentement. Après cela, elles commencent à diminuer. Les mésons propagés sont $\pi_0, \eta, \eta', a_0, f_0, f_0'$ pour cette diffusion. La présence de mésons pseudo-scalaires est une explication possible du comportement observé. En raison de leurs faibles masses, ils peuvent intervenir pour des valeurs de \sqrt{s} assez basses. Le maximum absolu observé pour la réaction $u+u \rightarrow u+u$ pourrait correspondre assez bien aux températures critiques de ces mésons, c'est à dire $T = 250$ MeV (NJL) et $T = 300$ MeV (PNJL). Et, la disparition de ce maximum au-delà de ces températures pourrait être associée à leur instabilité.

Selon la densité baryonique, les calculs ont été effectués à $T = 250$ MeV, avec le modèle PNJL. Les résultats sont présentés dans la figure 32. Ils montrent que les sections efficaces tendent à diminuer quand la densité baryonique augmente. Cette évolution devrait aussi se produire aux autres températures. A hautes températures ou à hautes densités baryoniques, les sections efficaces ont un aspect très similaire, presque linéaire en fonction de \sqrt{s} . Dans l'ensemble, la diffusion élastique entre deux quarks semble être assez faible quels que soient les paramètres appliqués, au moins pour de faibles valeurs de \sqrt{s} . En effet, quel que soit le modèle utilisé, les sections efficaces restent assez basses, en dessous de 2.5 mb. De telles valeurs sont comparables à celles de $q+q \rightarrow D+M$ et $q+q \rightarrow B+\bar{q}$, c'est-à-dire les concurrents directs de la diffusion élastique entre quarks.

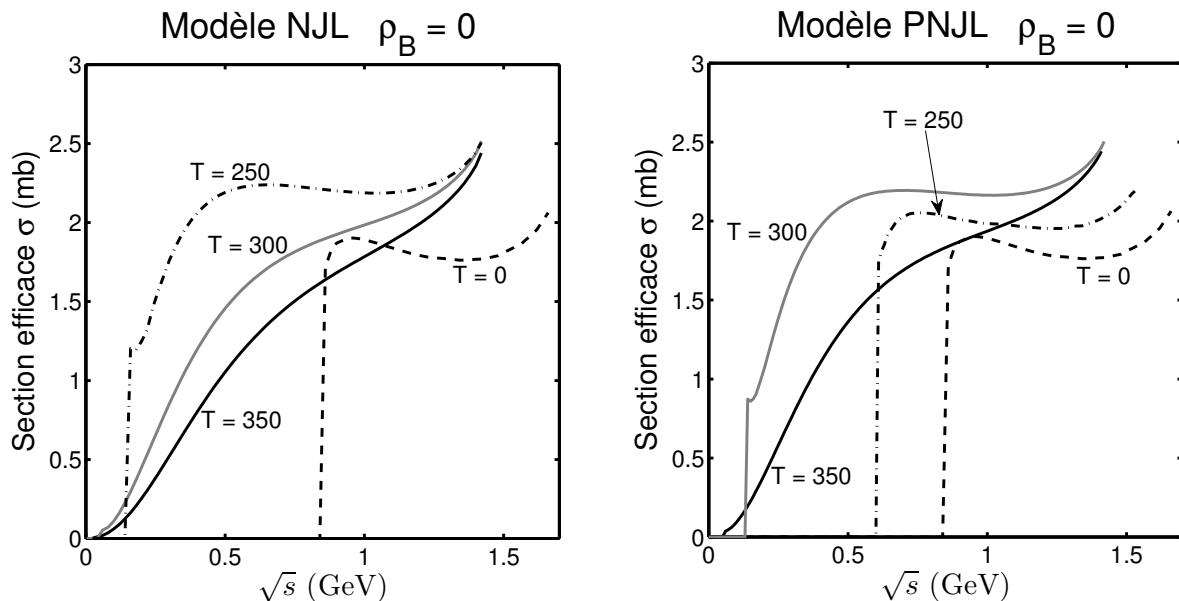


Figure 31. Sections efficaces de $u + u \rightarrow u + u$ selon la température.

D'autre part, une évolution possible du traitement de ce processus élastique pourrait être la prise en compte d'un canal s . Celui-ci pourrait utiliser des diquarks scalaires ou pseudo-scalaires comme propagateurs, comme dans les paragraphes 4.4 et 5.1. Leurs contributions aux valeurs obtenues pourraient alors être évaluées. Une autre évolution de ce travail concerne aussi l'étude de la diffusion antiquark-antiquark, avec des réactions comme $\bar{u} + \bar{u} \rightarrow \bar{u} + \bar{u}$. Mais, en fait, à densité nulle, les sections efficaces associées à $\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$ sont identiques à celles de $q + q \rightarrow q + q$. A densités non nulles, nous pouvons utiliser la symétrie matière-antimatière évoquée dans les chapitres précédents. Nous rappelons que celle-ci consiste à dire qu'un antiquark plongé dans un milieu où la densité est positive agira comme un quark plongé dans un milieu où la densité est négative. Mais, comme observé au chapitre 2, les quarks sont seulement affectés par la valeur absolue de la densité. Avec $\bar{u} + \bar{u} \rightarrow \bar{u} + \bar{u}$, cette observation peut être étendue à tous les termes de (20), ce qui inclut les propagateurs de mésons. Finalement, la seule différence entre $\bar{u} + \bar{u} \rightarrow \bar{u} + \bar{u}$ et $u + u \rightarrow u + u$ vient finalement des facteurs de blocage (4), c'est-à-dire $(1 - f_F(E_3^* - \mu_3)) \cdot (1 - f_F(E_4^* - \mu_4))$. Clairement, la différence entre un quark et un antiquark est le signe de leur potentiel

chimique. Celui-ci est positif pour un quark, négatif pour un antiquark (à densité positive). Naturellement, cela induit des résultats différents au niveau des distributions de Fermi-Dirac.

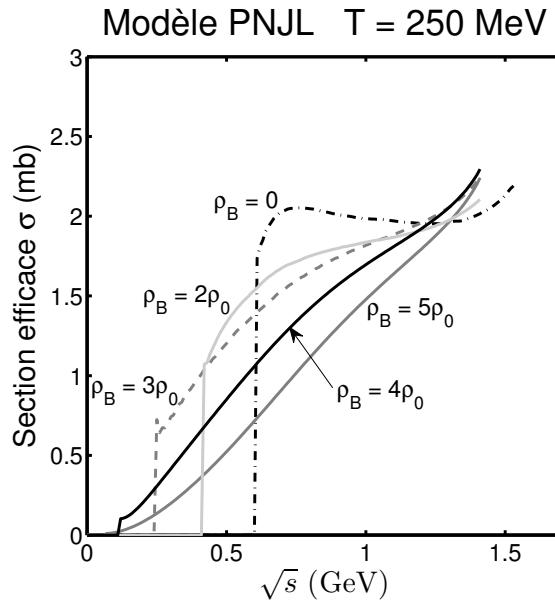


Figure 32. Sections efficaces de $u + u \rightarrow u + u$ selon la densité baryonique.

7. Collisions élastiques avec mésons ou diquarks

7.1 Diffusion méson–quark

Au début de ce chapitre, il a été vu que les sections efficaces trouvées pour les réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ sont fortes, conduisant à une mésonisation massive. On s'attend à ce que ces mésons soient formés tôt dans l'évolution du système physique. Ainsi, leurs collisions avec les quarks ou antiquarks restants doivent être considérées. Pour traiter les réactions $q + M \rightarrow M + q$, nous considérons le canal t décrit par la figure 33 et par son élément de matrice (21). Une évolution possible de ce travail serait d'inclure d'autres canaux, mais ils ne devraient pas apporter des modifications importantes. D'autre part, le processus $\bar{q} + M \rightarrow M + \bar{q}$ peut être déduit de $q + M \rightarrow M + q$. Plus précisément, par rapport à (21), son diagramme de Feynman requiert seulement de remplacer $u(p_1)$ par $\bar{v}(p_1)$, $S_F(p_1 - p_3)$ par $S_F(p_3 - p_1)$ et $\bar{u}(p_4)$ par $v(p_4)$, en se rappelant le travail fait au paragraphe 4.2. En fait, nous pouvons vérifier que les termes carrés $|\mathcal{M}_t|^2$ de ces deux processus sont égaux. Seuls les facteurs de blocage sont différents à densités baryoniques non nulles.

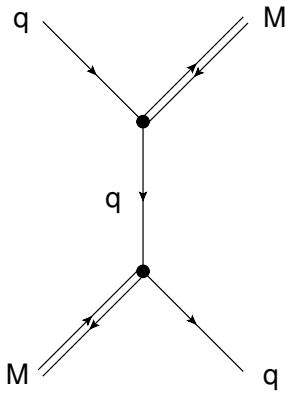


Figure 33. Canal t de $q + M \rightarrow M + q$.

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \delta_{c_t, c_1} \delta_{c_4, c_t} u(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 ig_2 \bar{u}(p_4). \quad (21)$$

Nos résultats considèrent la diffusion élastique entre un pion π^0 et un quark u , dans la figure 34. Dans la partie gauche de la figure, nous observons que les sections efficaces augmentent quand la température monte. En effet, les valeurs sont inférieures à un millibarn à températures réduites. En revanche, elles dépassent quelques millibarns pour $T = 280$ MeV. De telles valeurs ne peuvent pas être négligées. Selon la densité baryonique, partie droite de la figure, nous notons que les sections efficaces tendent à diminuer quand la densité baryonique augmente, sauf au niveau du seuil. Clairement, la divergence au seuil devient significative.

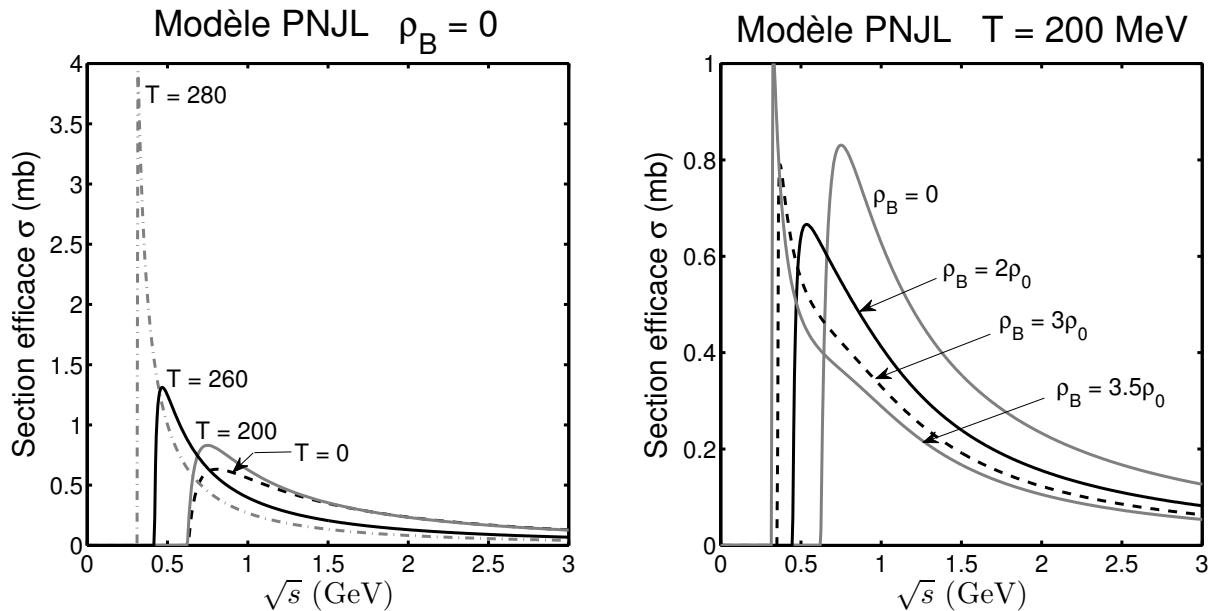


Figure 34. Sections efficaces de la réaction $u + \pi^0 \rightarrow u + \pi^0$.

La diffusion méson-quark a un seul concurrent, c'est-à-dire $M + q \rightarrow \bar{q} + D$ étudié dans le paragraphe 4.2. En fait, les résultats des figures 11 et 34 sont assez comparables selon la température, même si la réaction élastique semble être légèrement favorisée. Cependant, à

densités non nulles, $M + q \rightarrow \bar{q} + D$ a des sections efficaces plus fortes, notamment via la forte divergence au seuil que nous pouvons observer pour $\rho_B \approx 2 - 3\rho_0$.

7.2 Diffusion diquark–quark

En nous inspirant du paragraphe 5.5, nous proposons avec la figure 35 un diagramme de Feynman pour modéliser les réactions élastiques $q + D \rightarrow D + q$. Il pourrait être argumenté qu'il nous faudrait également inclure un canal s mettant en jeu un baryon. Cependant, comme dans le paragraphe 5.5, nous ne l'avons pas inclus, notamment pour obtenir de sections efficaces équivalentes entre $q + D \rightarrow D + q$ et $q + D \rightarrow M + B$. Les deux éléments de matrice possibles sont écrits équation (22) : nous avons un canal t et un canal \tilde{t} . En fait, il y a ambiguïté au niveau des deux vertices sur la figure 35, ce qui explique ces deux canaux. La première solution consiste à dire que seul le quark propagé est conjugué de charge. Cela correspond à l'élément de matrice du canal t . L'autre possibilité consiste à dire le contraire : les quarks associés aux lignes externes dans le diagramme de Feynman sont en fait des antiquarks conjugués de charge. En revanche, le quark propagé n'est pas affecté. Cela donne le canal \tilde{t} .

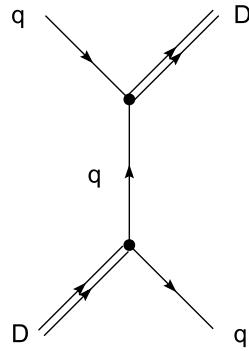


Figure 35. Canaux t/\tilde{t} .

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_t &= f_t \epsilon^{c_1, c_3, c_t} \bar{u}(p_4) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 \epsilon^{c_1, c_4, c_t} ig_2 u(p_1) \\ -i\mathcal{M}_{\tilde{t}} &= f_t \epsilon^{c_1, c_3, c_t} v(p_4) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_2 - p_4) i\gamma_5 \epsilon^{c_1, c_4, c_t} ig_2 \bar{v}(p_1) \end{aligned} \quad . \quad (22)$$

Nous étudions la réaction $u + [ud] \rightarrow [ud] + u$ en tant qu'exemple. Les résultats sont rassemblés dans les figures 36. À températures finies et densité nulle, les valeurs sont inférieures à 2.5 mb. En outre, plus la température augmente, plus les sections efficaces sont réduites. Par ailleurs, selon la densité baryonique, nous observons qu'une divergence au seuil apparaît quand la densité baryonique est proche de $2\rho_0$. Là, les sections efficaces peuvent largement dépasser 6 mb. Au-dessus de cette densité, la divergence au seuil est toujours présente, mais les sections efficaces deviennent plus faibles.

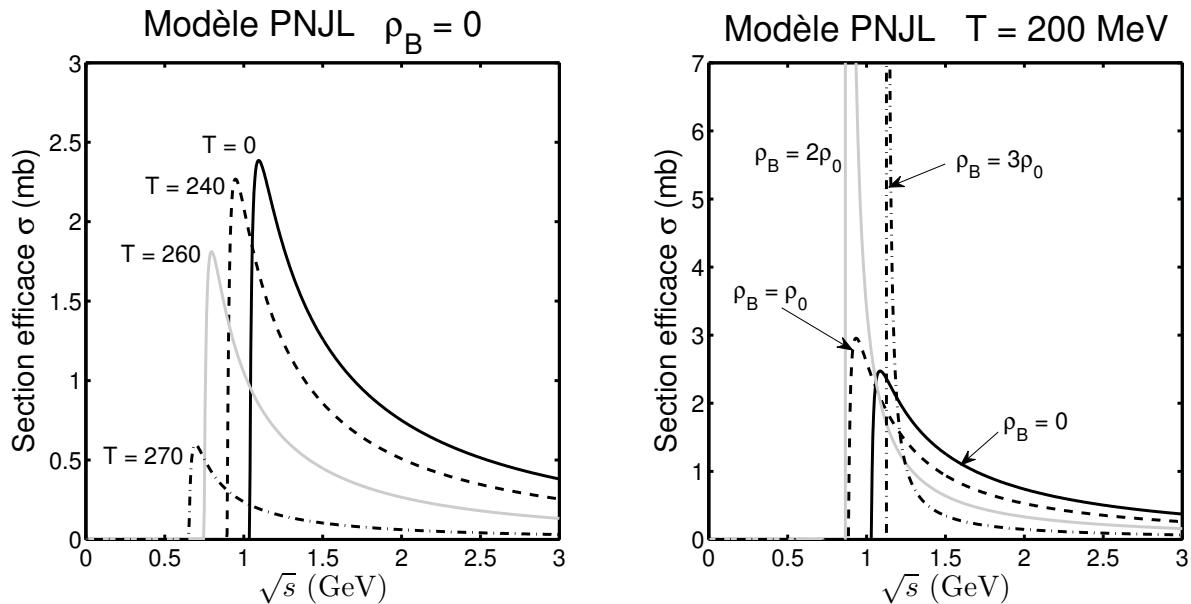


Figure 36. Sections efficaces de la réaction $u + [ud] \rightarrow [ud] + u$.

Si nous comparons $q + D \rightarrow D + q$ et $q + D \rightarrow M + B$ à densité nulle, nous notons que le processus élastique a des sections efficaces qui sont le double de celles du processus inélastiques, voir les figures 36 et 26. A densités finies, $q + D \rightarrow D + q$ domine largement $q + D \rightarrow M + B$. En conséquence, le processus élastique est capable de limiter la production de baryon via $q + D \rightarrow M + B$. Les conditions les plus favorables en ce qui concerne cette production de baryons semblent être à densités réduites.

7.3 Diffusion diquark–antiquark

Le processus $\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$ est décrit dans nos travaux par les canaux s et \tilde{s} , figure 37 et équation (23). Clairement, à cause des deux vertices impliquant un diquark et un antiquark, cela conduit à deux solutions pour le choix des quarks conjugués de charge. Plus précisément, pour le canal s , les antiquarks entrants et sortants sont en fait des quarks conjuguées de charge, conduisant respectivement aux spineurs $u(p_1)$ et $\bar{u}(p_3)$. Concernant le canal \tilde{s} , le quark utilisé comme propagateur est en fait un antiquark conjugué de charge.

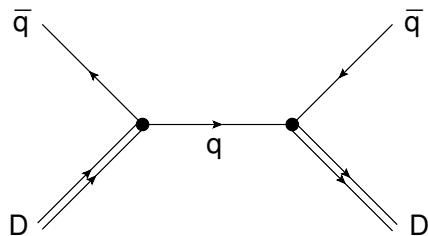


Figure 37. Canaux s/\tilde{s} .

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_s &= f_s \epsilon^{c_1, c_2, c_s} u(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 + p_2) i\gamma_5 \epsilon^{c_3, c_s, c_s} ig_2 \bar{u}(p_3) \\ -i\mathcal{M}_{\bar{s}} &= f_s \epsilon^{c_1, c_2, c_s} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(-p_1 - p_2) i\gamma_5 \epsilon^{c_1, c_4, c_t} ig_2 v(p_3) \end{aligned} . \quad (23)$$

Les résultats associés à ce processus sont exposés dans la figure 38, dans laquelle nous considérons la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow \bar{u} + [ud]$. Quelle que soit la température et la densité baryonique, les sections efficaces restent réduites, car elles sont incapables de dépasser 1 mb, sauf peut-être pour des divergences au niveau du seuil, pour des densités comme $3-4\rho_0$. En fait, ces divergences ne sont pas observées selon la température, partie gauche de la figure 38.

Deux autres types de processus utilisent un antiquark et un diquark comme particules incidentes. Ce sont $\bar{q} + D \rightarrow q + M$ et $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$. Tout d'abord, grâce à la figure 10, nous concluons que $\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$ ne peut pas être un sérieux concurrent de $\bar{q} + D \rightarrow q + M$. En effet, les sections efficaces de ce processus sont nettement plus fortes que celles de $\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$. En revanche, les valeurs trouvées avec $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$, figure 18, sont comparables à celles de notre processus élastique. En fait, cela veut dire que les réactions associées à $\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$ et $\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$ sont négligeables par rapport à $\bar{q} + D \rightarrow q + M$. Cette remarque est vraie selon la température, et selon la densité baryonique.

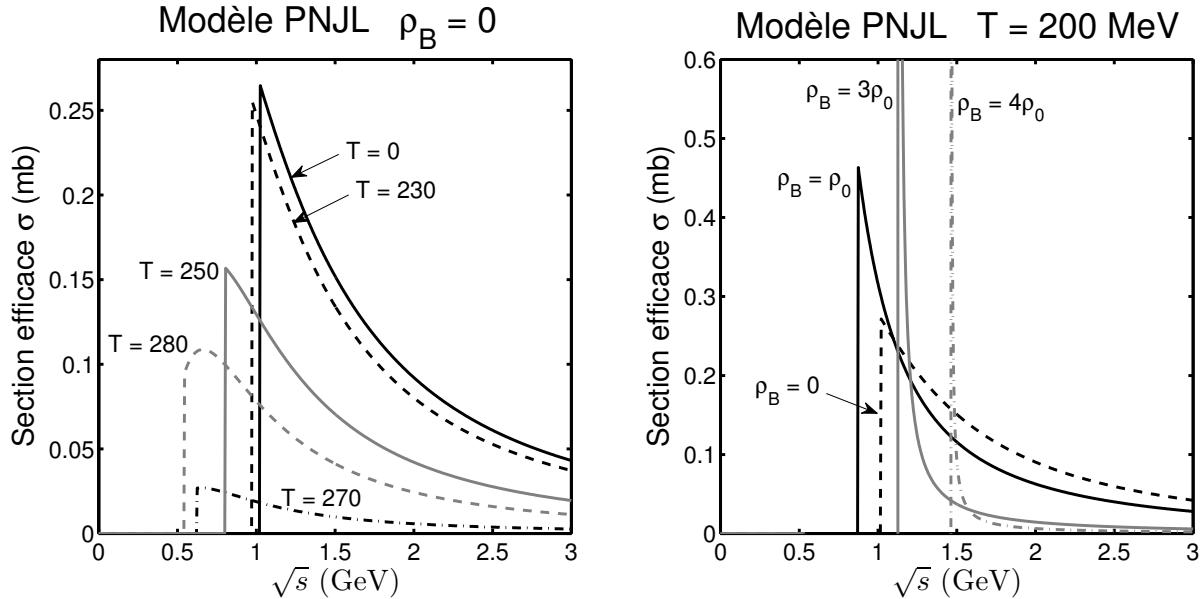


Figure 38. Sections efficaces de la réaction $\bar{u} + [ud] \rightarrow \bar{u} + [ud]$.

7.4 Diffusion diquark-diquark

Des études des sections efficaces entre deux particules composites sont rares dans le cadre des modèles (P)NJL. Les complications induites par ce type de calculs en sont souvent la raison. Cependant, nous pouvons remarquer notamment le travail effectué dans [14–16]. Ces publications nous permettent considérer la diffusion quark-quark, en utilisant des diagrammes de Feynman, figure 39, proches de ceux proposés dans ces références. Les structures en

triangle pour les canaux t et u correspondent à la fonction Γ (9) utilisée pour modéliser $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Dans l'écriture des éléments de matrice, équation (24), elles sont désignées par $\Gamma_{t,u}^{haut}$ ou $\Gamma_{t,u}^{bas}$. Entre elles, un propagateur (P)NJL de méson est utilisé, correspondant à $\mathcal{D}_{t,u}^S$. Comme rappelé par le S , seuls des mésons scalaires sont utilisés pour cela, comme dans [15]. D'autre part, la figure 39 inclut aussi un nouveau canal, le canal « *box* » [15, 16]. Ce canal ne peut pas être décrit en utilisant les fonctions génériques A, B_0 décrites dans l'annexe D. En conséquence, nous ne l'avons pas inclus dans nos calculs.

Nous considérons la diffusion élastique entre deux diquarks [ud] comme exemple. Les résultats sont proposés dans la figure 40. Nous remarquons la faiblesse relative des valeurs trouvées. A densité nulle, nous ne dépassons jamais le millibarn, malgré la présence de divergences au seuil, quelle que soit la température. En fait, les sections efficaces tendent à diminuer quand la température monte. A $T = 200$ MeV, la densité baryonique agit de manière inverse : les sections efficaces sont plus fortes pour $\rho_B = \rho_0$ qu'à densité nulle, notamment au niveau du seuil cinématique.

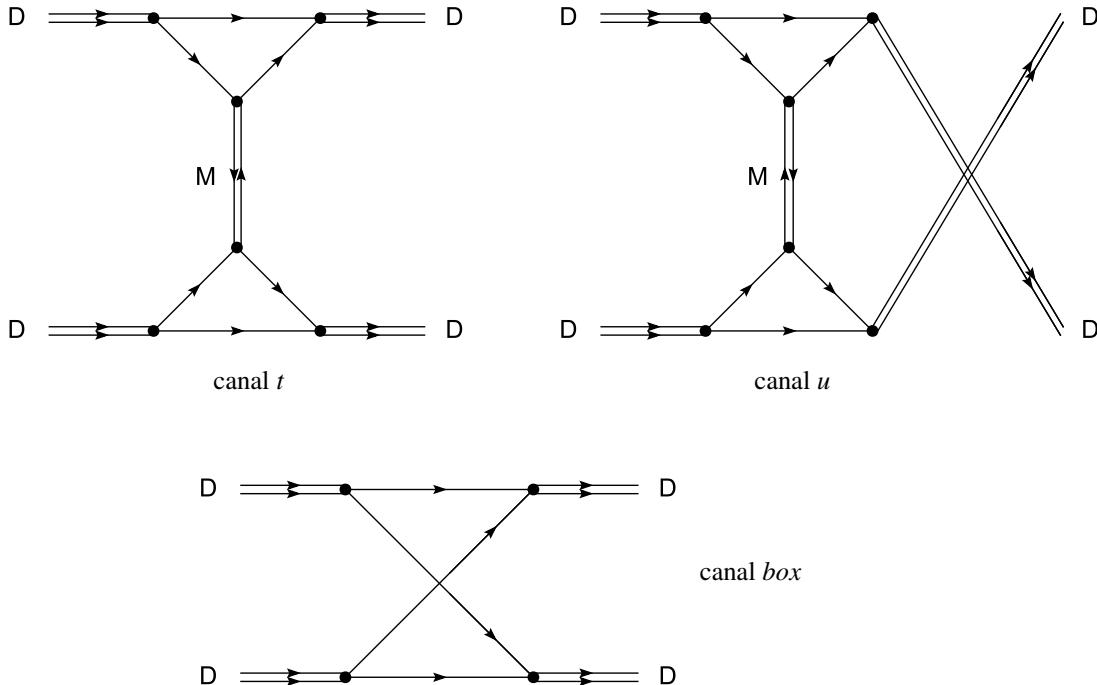


Figure 39. Canaux possibles.

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_t &= f_t i g_1 i g_3 \Gamma_t^{haut}(p_1 - p_3, p_1) i \mathcal{D}_t^S(p_1 - p_3) \Gamma_t^{bas}(p_1 - p_3, p_4) i g_2 i g_4 . \\ -i\mathcal{M}_u &= f_u i g_1 i g_4 \Gamma_u^{haut}(p_1 - p_4, p_1) i \mathcal{D}_u^S(p_1 - p_4) \Gamma_u^{bas}(p_1 - p_4, p_3) i g_2 i g_3 . \end{aligned} \quad (24)$$

Un intérêt de cette étude est de comparer les résultats avec ceux des réactions qui utilisent deux diquarks comme particules entrantes, c'est-à-dire $D + D \rightarrow q + B$. Selon les résultats trouvés dans la figure 22, nous voyons que la réaction inélastique domine largement la réaction élastique à densité nulle. En effet, nous trouvons des sections efficaces qui peuvent dépasser 4 mb pour $D + D \rightarrow q + B$. A densités finies, les sections efficaces de ce processus diminuent quand la densité croît. En conséquence, la domination de $D + D \rightarrow q + B$ par rapport

à $D+D \rightarrow D+D$ est ici moins manifeste. Cependant, nous concluons que la production de baryons par le biais de réactions comme $D+D \rightarrow q+B$ pourrait ne pas être réellement contrariée par la diffusion quark-quark. Comme vu précédemment, la principale limitation de $D+D \rightarrow q+B$ est en fait le manque de diquarks ...

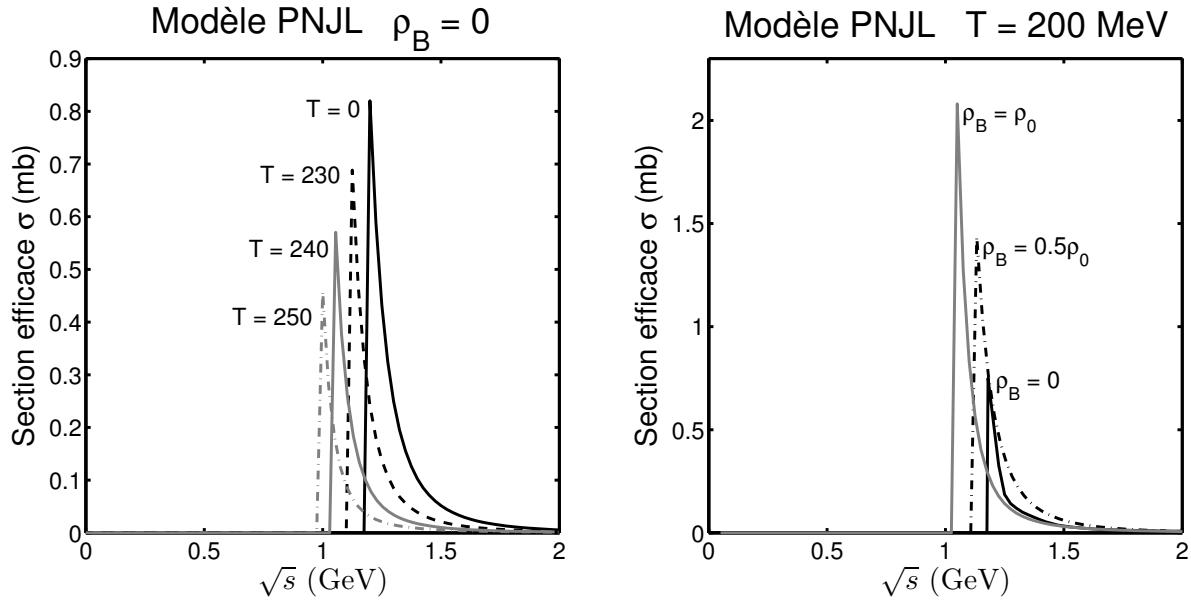


Figure 40. Sections efficaces de $[ud] + [ud] \rightarrow [ud] + [ud]$.

Une évolution du travail effectué dans ce paragraphe est évidemment de l'étendre à des sections efficaces mettant en jeu deux mésons, un méson et un diquark, ou une diffusion baryon-baryon. En fait, des calculs des sections efficaces de $M+D \rightarrow M+D$ ont été faites dans le cadre de notre travail, conduisant à des résultats comparables à ceux trouvées dans la figure 40, mais des valeurs plus fortes ont été trouvées. Pour les sections efficaces méson-méson, une complication apparaît pour modéliser la diffusion entre deux pions. En effet, comme expliqué dans [14], une telle étude requiert l'utilisation d'un méson ρ comme propagateur, dans un canal s . Ces calculs constituent une évolution intéressante de notre travail. D'autre part, de la même manière, il est possible d'imaginer, de décrire la diffusion baryon-baryon avec les modèles (P)NJL, en utilisant des diagramme de Feynman comme ceux de la figure 39. Cependant, en raison de la nature fermionique des baryons, une étude de ce type induit des complications au niveau des calculs des éléments de matrice. En conséquence, nous considérons les données et les formules fournies par [26, 27], pour estimer les sections efficaces des processus $B+M \rightarrow B+M$ et $B+B \rightarrow B+B$.

8. Collisions élastiques incluant des baryons

8.1 Diffusion baryon–quark

Pour modéliser la diffusion élastique entre un baryon et un quark, nous considérons le canal t présenté dans la figure 41 et équation (25). Les diquarks utilisés comme propagateurs, via le terme \mathcal{D}_t , sont scalaires. En fait, nous concédons que notre description pourrait être complétée par des canaux plus complexes, notamment par des canaux de type *box*, en adaptant le travail effectué dans le paragraphe précédent.

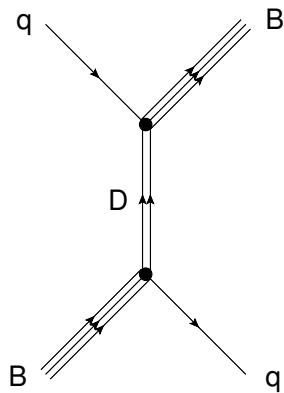


Figure 41. Canal t .

$$-i\mathcal{M}_t = f_t \bar{u}(p_4) u(p_2) i\mathcal{D}_t(p_3 - p_1) \bar{u}(p_3) u(p_1) . \quad (25)$$

Concernant nos résultats numériques, nous avons choisi d'étudier $p + u \rightarrow p + u$, c'est-à-dire la diffusion élastique entre un proton et un quark u . Les résultats associés sont présentés dans la figure 42. Dans l'ensemble, les valeurs trouvées ne sont pas négligeables, car elles peuvent dépasser 10 mb à températures et densités réduites. En fait, ces deux paramètres agissent de la même manière : quand la température ou la densité baryonique augmente, il est observé une diminution des sections efficaces. À la limite de stabilité du proton selon la température, les sections efficaces peuvent encore atteindre 4 mb. Selon la densité baryonique, la diminution est plus forte. À $\rho_B = 2\rho_0$ et $T = 200$ MeV, les valeurs sont proches de 2 mb.

D'autre part, l'autre processus mettant en jeu un baryon et un quark comme particules incidentes est $q + B \rightarrow D + D$. Clairement, les réactions associées sont les réactions inverses de $D + D \rightarrow q + B$, étudié dans le paragraphe 5.3. Même si nous ne présentons pas les résultats associés à ces réactions inverses, ils sont plus forts que ceux de $D + D \rightarrow q + B$. En effet, la masse totale des deux diquarks est plus faible que la masse totale d'un baryon et d'un quark, ainsi nous n'avons pas de divergence au niveau du seuil cinématique pour $D + D \rightarrow q + B$. Mais, les divergences sont présentes pour $q + B \rightarrow D + D$, permettant à ces dernières d'atteindre des sections efficaces assez fortes. En pratique, au niveau de la divergence, les valeurs dépassent fréquemment 20 mb. En conséquence, nous concluons que $q + B \rightarrow q + B$ et $q + B \rightarrow D + D$ ont des sections efficaces assez équivalentes, même si le processus inélastique

domine, grâce à la divergence. Quoi qu'il en soit, un aspect intéressant du processus élastique est qu'il puisse gêner $q + B \rightarrow D + D$, c'est-à-dire qu'il réduise une destruction indésirable des baryons par les quarks.

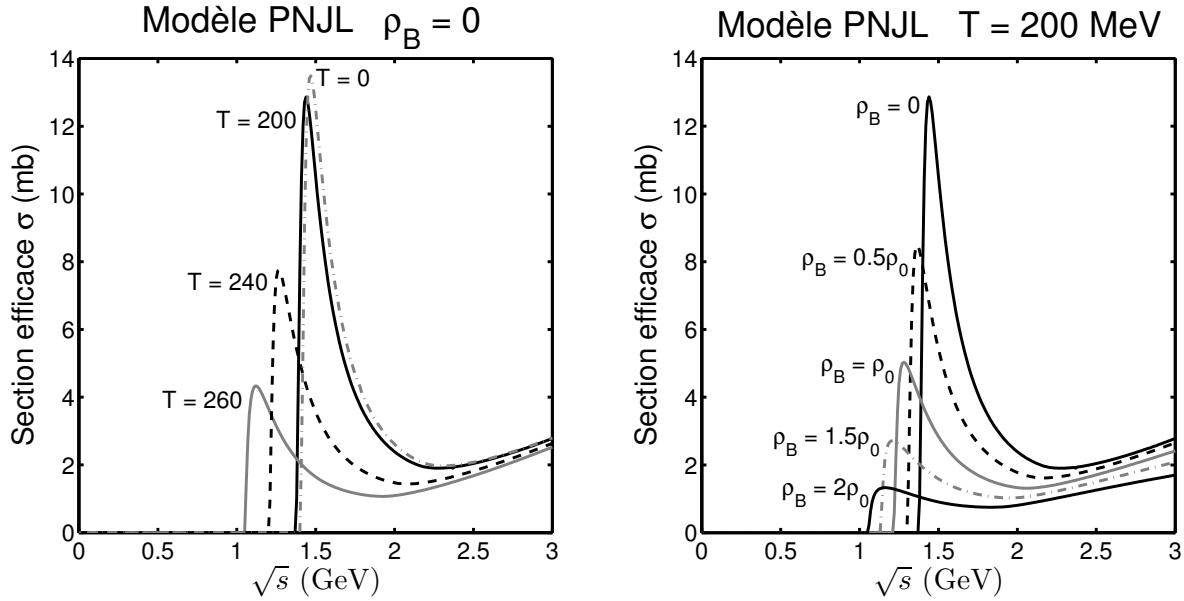


Figure 42. Sections efficaces de la réaction $u + p \rightarrow u + p$.

D'autre part, l'étude effectuée dans ce paragraphe peut facilement être adaptée aux réactions $\bar{q} + \bar{B} \rightarrow \bar{q} + \bar{B}$, en utilisant la symétrie matière-antimatière, comme expliqué plus haut pour d'autres réactions. Cependant, il est vrai que l'on ne s'attend pas à ce que les antibaryons soient présents dans un système physique dans lequel la matière domine l'antimatière.

8.2 Diffusion baryon–antiquark

Une modélisation possible des collisions élastiques entre un baryon et un antiquark inclut le canal s , comme présenté figure 43 et équation (26). Dans ce canal, les diquarks scalaires sont utilisés comme propagateurs. Ils correspondent au terme \mathcal{D}_s .

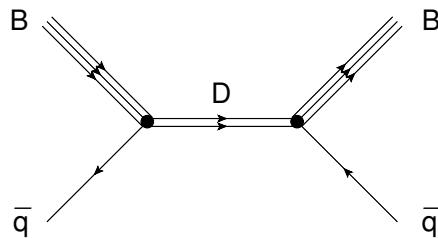


Figure 43. Canal s .

$$-i\mathcal{M}_s = f_s \bar{v}(p_2)u(p_1) i\mathcal{D}_s(p_1 + p_2) \bar{u}(p_3)v(p_4) . \quad (26)$$

En tant qu'exemple, nous avons estimé les sections efficaces de la diffusion $p + \bar{u} \rightarrow p + \bar{u}$, et nous avons rassemblé nos résultats dans la figure 44. Les courbes obtenues ont un comportement très différent de ceux décrits précédemment. Clairement, ils n'ont pas de point commun avec les sections efficaces trouvées par exemple avec $q + B \rightarrow q + B$. Les résultats montrent que $p + \bar{u} \rightarrow p + \bar{u}$ n'est pas capable d'intervenir avant $\sqrt{s} < 1,6$ GeV. Après cette valeur, les sections efficaces augmentent fortement, mais elles restent inférieures au millibarn pour $\sqrt{s} = 2$ GeV, quelle que soit la température ou la densité baryonique.

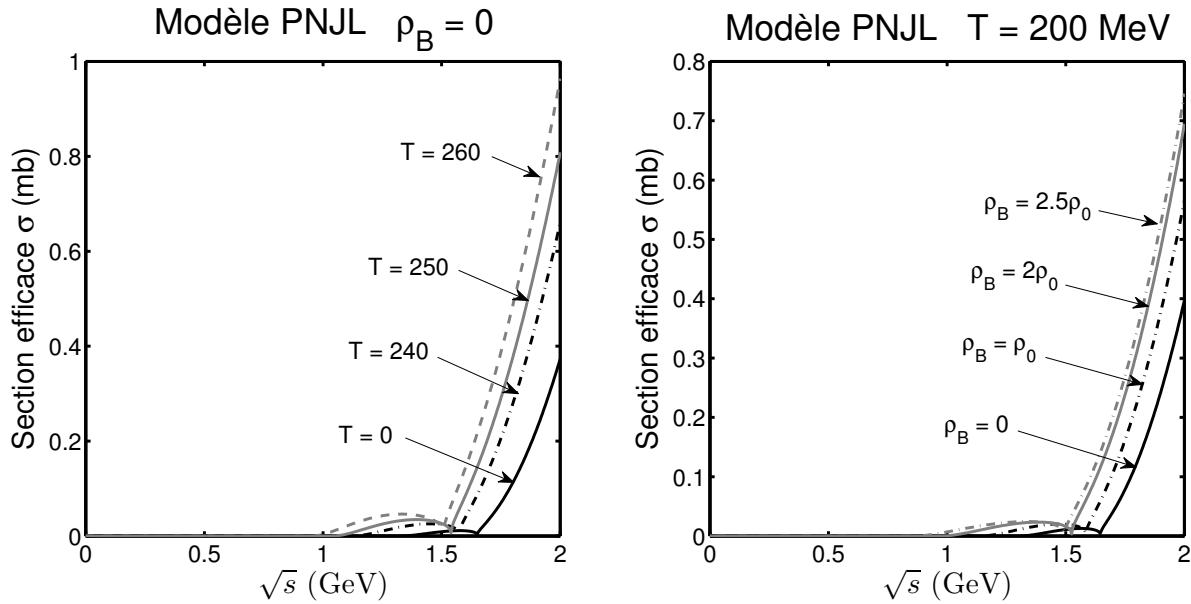


Figure 44. Sections efficaces de la réaction $p + \bar{u} \rightarrow p + \bar{u}$.

D'autre part, deux autres processus considèrent un baryon et un antiquark comme particules incidentes : ce sont $\bar{q} + B \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + B \rightarrow M + D$. Ils correspondent aux réactions inverses des réactions de baryonisation vues aux paragraphes 5.2 et 5.4. Aussi, $\bar{q} + B \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + B \rightarrow M + D$ sont des réactions *exothermiques* (les particules incidentes sont plus lourdes que les particules produites). Ainsi, elles ont des divergences au niveau du seuil cinématique, et elles présentent des sections efficaces que celles de $M + D \rightarrow \bar{q} + B$ et $q + q \rightarrow \bar{q} + B$. Cela veut dire que $\bar{q} + B \rightarrow \bar{q} + B$ est hautement négligeable pour $\sqrt{s} < 2$ GeV. Ce processus élastique est ainsi incapable d'éviter la destruction des baryons par des réactions comme $\bar{q} + B \rightarrow q + q$ ou $\bar{q} + B \rightarrow M + D$. Comme remarqué plus haut dans ce chapitre, cela suggère un scénario dans lequel la production de baryon pourrait n'être efficace que si la population d'antiquarks est assez réduite.

8.3 Diffusion baryon–diquark

Le dernier processus décrit dans ce chapitre concerne les réactions élastiques entre un baryon et un diquark. Nous proposons d'étudier ce processus avec un canal t , voir figure 45. L'élément de matrice associé est écrit équation (27). Dans notre modélisation, un quark est

utilisé comme propagateur. Nous sommes particulièrement conscients que cette description peut être complétée par l'inclusion de canaux plus complexes, comme un canal *box* dans lequel le diquark et le baryon échangent un quark, en nous inspirant de celui de la figure 39.

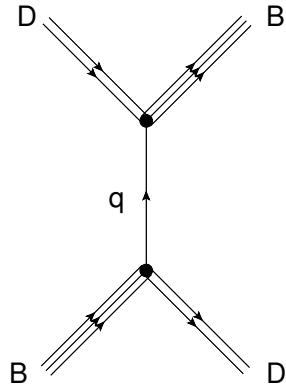


Figure 45. Canal *t*.

$$-i\mathcal{M}_t = f_t u(p_2) ig_2 S_F(p_3 - p_1) ig_1 \bar{u}(p_3) . \quad (27)$$

Nous considérons la réaction $p + [ud] \rightarrow p + [ud]$ comme exemple. Nos résultats sont exhibés dans la figure 46. Tout d'abord, nous observons que les sections efficaces obtenues peuvent dépasser quelques millibarns, c'est-à-dire plus de 6 mb à certaines occasions. Dans la partie gauche de la figure, nous notons que les valeurs augmentent légèrement quand la température croît, jusqu'à $T = 230$ MeV. Ensuite, les sections efficaces diminuent, jusqu'à la limite de stabilité du baryon, pour $T \approx 260$ MeV.

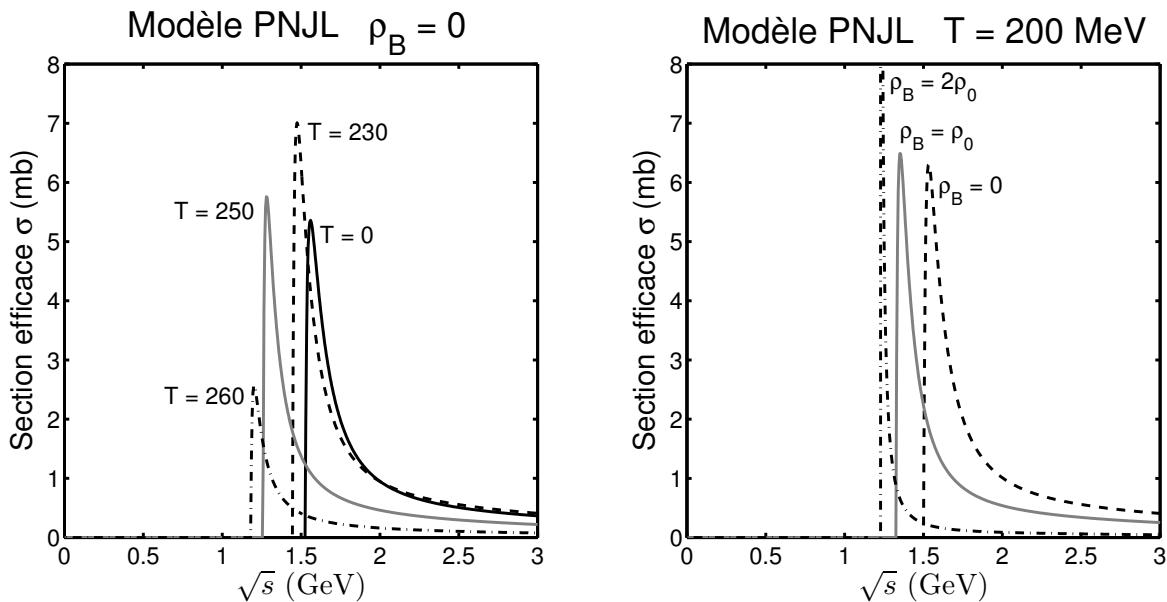


Figure 46. Sections efficaces de la réaction $[ud] + p \rightarrow [ud] + p$.

Selon la densité baryonique, partie droite de la figure, le pic au niveau du seuil devient plus important quand la densité est assez forte. Mais dans le même temps, les sections efficaces

sont plus ténues loin le seuil, c'est-à-dire quand $\sqrt{s} > 2 \text{ GeV}$. Dans l'ensemble, grâce aux valeurs trouvées, la réaction ne peut pas être considérée comme négligeable. En outre, $D + B \rightarrow B + D$ est le seul processus pour lequel nous avons un baryon et un diquark comme particules incidentes. Ainsi, il n'y a pas de concurrence pour un tel processus. En conséquence, il est probable que $D + B \rightarrow B + D$ ait lieu durant le refroidissement du plasma de quarks/antiquarks.

9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié des sections efficaces mettant en jeu des particules modélisées dans le cadre de notre travail, c'est-à-dire les quarks/antiquarks, les mésons pseudo-scalaires, les diquarks scalaires et les baryons de l'octet. Plus précisément, nous avons restreint nos calculs aux réactions impliquant des particules légères. Autrement dit, nous n'avons pas inclus l'étrangeté. En effet, des particules comme des quarks q , des pions, $[ud]$ et les nucléons permettent d'obtenir les sections efficaces les plus fortes. En fait, nos calculs sont pleinement applicables aux particules étranges, mais exposer les résultats correspondant aurait nettement surchargé ce chapitre.

Un premier objectif était de reprendre les réactions déjà traitées dans la littérature NJL. Cela concernait tout d'abord le processus $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ [7]. Comme noté dans [10], nous avons confirmé que les divergences au niveau du seuil cinématique conduisent à des sections efficaces fortes pour ces réactions, c'est-à-dire plus fortes que 100 mb. Ce comportement a aussi été confirmé selon la densité baryonique. En outre, nous avons aussi analysé les effets de l'inclusion de la boucle de Polyakov sur les résultats obtenus. Comme pour les masses des particules, nous avons observé que les courbes PNJL sont décalées vers les hautes températures par rapport aux résultats NJL. Quantitativement, les sections efficaces optimales de la réaction $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ont été trouvées à $T = 230 \text{ MeV}$ (avec $\rho_B = 0$) dans le modèle NJL, alors que nous avons $T = 280 \text{ MeV}$ avec PNJL. Dans l'ensemble, nous avons vu que ces conditions optimales, selon la température ou la densité baryonique, ont été trouvées juste avant que les pions produits deviennent plus lourds que les paires q/\bar{q} qui les composent, c'est-à-dire juste avant leur limite de stabilité. D'autre part, il est intéressant de noter que $T = 280 \text{ MeV}$ est très comparable à la valeur de déconfinement critique dans une théorie pure jauge, dont la valeur escomptée est $T_0 = 270 \text{ MeV}$ [28], voir chapitre 2.

De la même manière, nous avons aussi effectué des travaux similaires concernant les réactions élastiques impliquant des quarks et/ou des antiquarks, c'est-à-dire $q + q \rightarrow q + q$ et $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$, en suivant la méthode exposée dans [8]. Nous avons retrouvé les résultats de cette référence selon la température, mais nous les avons étendus à des densités finies. Comme pour $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, nous avons aussi observé les effets de la boucle de Polyakov sur ces résultats. Clairement, pour $u + u \rightarrow u + u$ et $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$, nous avons trouvé des sections efficaces optimales pour $T = 250 \text{ MeV}$ dans le modèle NJL, contre $T = 300 \text{ MeV}$ avec PNJL. En comparant ces températures optimales avec celles de $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, il a été imaginé que, pendant le refroidissement du système quarks/antiquarks, $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ devrait fortement agir, notamment pour permettre une thermalisation du système, avant une mésonisation massive

via $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Autrement dit, on ne s'attend pas à ce que $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ et $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ interviennent en même temps.

D'autre part, d'autres travaux effectués dans ce chapitre ont concerné la modélisation de réactions mettant en jeu des diquarks, et ensuite d'autres impliquant des baryons. Ces calculs ont été faits dans le cadre du modèle PNJL, selon la température et la densité baryonique. En nous inspirant des processus proposés dans [11, 12], et en y ajoutant de nouveaux comme $D + D \rightarrow B + q$, l'objectif était ainsi de voir les réactions dominantes qui peuvent permettre la formation de baryons, et le rôle joué par les diquarks. Globalement, des sections efficaces assez faibles ont été trouvées, par rapport à celles de $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Elles ont des valeurs de quelques millibarns. Selon nos résultats, on s'attend à une production plutôt réduite de diquarks, permise seulement si les processus de mésonisation ont consommé la grande majorité des antiquarks présents initialement dans le système. Il apparaît que le processus dominant qui peut permettre cette création de diquarks est $q + q \rightarrow D + M$. Les conditions optimales de cette production de diquarks semblent être à densités modérées, c'est-à-dire deux fois la densité nucléaire standard ρ_0 , et en dessous de la température optimale de mésonisation.

En fait, nos résultats nous ont conduit à développer un scénario décrivant le refroidissement du plasma de quarks/antiquarks. Après une domination de $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ à hautes températures (≈ 300 MeV dans le modèle PNJL), et après une forte mésonisation via $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ à des températures proches de $T = 280$ MeV, la baryonisation est supposée avoir lieu, notamment quand la température est assez réduite. D'autre part, on s'attend à ce que la baryonisation se produise pendant que la mésonisation est toujours active, afin de « supprimer » tous les antiquarks, produits par exemple par $q + q \rightarrow B + \bar{q}$, qui pourraient détruire les baryons qui viennent d'être créés. Avec cette hypothèse, la faiblesse relative des sections efficaces de baryonisation n'est pas une réelle limitation de notre approche. En effet, en dehors des réactions élastiques, les quarks restants ne peuvent réagir entre eux que par des réactions produisant des diquarks et/ou des baryons. Dans le cadre de la production des baryons, nous avons vu que $q + q \rightarrow B + \bar{q}$, $q + D \rightarrow M + B$, $D + D \rightarrow B + q$ sont des réactions particulièrement pertinentes. Evidemment, le dernier processus cité est très lié à la production de diquarks au sein du système.

Nous avons vu que les réactions dans cette partie nécessitaient d'interpréter correctement les diagrammes de Feynman, en identifiant les quarks/antiquarks qui sont en fait conjugués de charge. Cela a quelquefois conduit à des subdivision des canaux mis en jeu, comme par exemple t/\tilde{t} . Aussi, cela a mené à devoir traiter des calculs assez singuliers, car impliquant des spineurs avec des quantités de mouvement différentes. Nous avons alors établi une méthode, décrite dans l'annexe B, pour pouvoir effectuer de tels calculs. Bien sûr, la méthode ne semble pas être limitée aux modèles (P)NJL, mais pourrait être adaptée à d'autres configurations impliquant un nombre élevé de quadrivecteurs. Aussi, les résultats trouvés avec cette méthode restent finalement assez proches de ceux obtenus avec la « méthode standard » utilisée pour traiter des calculs avec des spineurs, comme ceux décrits dans [7, 8]. Cette observation était loin d'être triviale avant d'effectuer les calculs. En fait, ces similarités peuvent s'expliquer par la méthode développée dans [29]. Plus précisément, l'approche exposée dans cette publication propose d'effectuer des transformations qui permettent de réécrire certains éléments de matrice, afin de simplifier énormément les calculs. Plus

précisément, comme nous l'avons montré dans l'annexe B, le terme $\mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^*$ de $q + q \rightarrow D + M$ (paragraphe 4.4) devient équivalent après transformation à celui vu dans le processus $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Clairement, cette méthode alternative confirme nos calculs. D'autre part, elle permet de valider les signes des termes mixés, désignés sous le sigle RSIF (Relative Sign of Interfering Feynman graphs) dans cette référence.

Un autre aspect de ce chapitre concerne la modélisation des réactions élastiques mettant en jeu des mésons, des diquarks et des baryons. Sauf avec la diffusion méson/méson [14–16], la littérature (P)NJL est pauvre en ce qui concerne de telles réactions. Certains des processus étudiés ont présenté des sections efficaces intéressantes, comme $M + q \rightarrow M + q$, $q + D \rightarrow q + D$ et $B + q \rightarrow B + q$. Il a été montré que ces réactions sont capables de constituer une source de concurrence par rapport aux réactions inélastiques utilisant les mêmes particules incidentes. Par exemple, nous pouvons mentionner la rivalité entre $q + D \rightarrow q + D$ et $q + D \rightarrow M + B$.

D'autre part, nous avons vu que la description de certains de ces processus pourrait être complétée par l'inclusion de nouveaux canaux, comme les canaux de type « box ». Cet aspect pourrait constituer un développement futur de notre travail. En fait, d'autres évolutions peuvent être évoquées, comme la modélisation complète de la diffusion méson/méson [14–16] dans le cadre des modèles (P)NJL, notamment pour décrire la diffusion entre deux pions. Dans la continuité de cette idée, comme suggéré dans [11], nous pourrions aussi considérer de traiter les réactions élastiques comme $B + B \rightarrow B + B$ ou $B + M \rightarrow B + M$. D'autres possibilités d'évolution pourrait de même concerner l'étude de l'influence de la supraconductivité de couleur [24, 25] sur les sections efficaces, à basses températures et densités finies.

Remerciements

Nous souhaiterions remercier les auteurs du logiciel *Jawodraw* [30, 31], utilisé notamment dans ce chapitre pour réaliser nos diagrammes de Feynman.

10. Références

- [1] Bjorken J D et Drell S D 1964 Relativistic quantum mechanics, *McGraw-Hill, New York*
- [2] Groot S R, Leeuwen W A et Christianus Gerardus van Weert C G 1980 Relativistic kinetic theory: principles and applications, *North Holland publications, Amsterdam*
- [3] Aitchison I J R et Hey A J G 1989 Gauge theories in particle physics 2nd edition, *Adam Hilger*
- [4] 't Hooft G et Veltman M 1973 Diagrammar, *CERN Yellow Report*
- [5] Veltman M 1994 Diagrammatica: the path to Feynman diagrams, *Cambridge Lecture Notes in Physics*
- [6] Hüfner J, Klevansky S P, Quack E et Zhuang P 1994 Hadronization cross-sections at the chiral phase transition of a quark plasma *Phys. Lett. B* **337** 30–36

- [7] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [8] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in SUf (3) at finite temperatures *Nucl. Phys. A* **608** 356–88
- [9] Klevansky S P 1998 Chiral Symmetry Breaking in Hot Matter (*Lecture Notes in Physics vol 516*) (Heidelberg:Springer) pp 113–61
- [10] Gastineau F, Blanquier E et Aichelin J 2005 Critical opacity - a possible explanation of the fast thermalisation times seen in RHIC experiments *Phys. Rev. Lett.* **95** 052001
- [11] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu-Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*
- [12] Gastineau F et Aichelin J 2004 Diquark and baryon properties and their production cross sections in dense and hot matter *AIP Conf. Proc.* **739** 398–416
- [13] Isert D S, Klevansky S P et Rehberg P 1998 Transition rates for $q\bar{q} \rightarrow \pi\pi\pi$ in a chiral model *Nucl. Phys. A* **643** 275–302
- [14] He Y B, Hüfner J, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi\pi$ scattering in the ρ -meson channel at finite temperature *Nucl. Phys. A* **630** 719–42
- [15] Piwnicki P, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi - K$ scattering lengths at finite temperature in the Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **58** 502–16
- [16] Davesne D, Zhang Y J et Chanfray G 2000 Medium modification of the Pion–Pion interaction at finite density *Phys. Rev. C* **62** 024604
- [17] Zhuang P, Huang M et Yang Z 2000 Density effect on hadronization of a quark plasma *Phys. Rev. C* **62** 054901
- [18] Volkov M K et Radzhabov A E 2005 Forty-fifth anniversary of the Nambu–Jona-Lasinio model arXiv:hep-ph/0508263
- [19] Borodulin V I, Rogalyov R N et Slabospitsky S R 1995 CORE (COmpendium of RElations), version 2.1. arXiv:hep-ph/9507456
- [20] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369
- [21] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
- [22] Rehberg P et Klevansky S P 1996 One loop integrals at finite temperature and density *Ann. Phys.* **252** 422–57
- [23] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [24] Abuki H et Kunihiro T 2006 Thermal unpairing transitions affected by neutrality constraints and chiral dynamics *AIP Conf. Proc.* **842** 110-12
- [25] Rüster S B, Werth V, Buballa M, Shovkovy I A et Rischke D 2005 Phase diagram of neutral quark matter: Self-consistent treatment of quark masses *Phys. Rev. D* **72** 034004
- [26] Donnachie A et Landshoff P V 1992 Total cross sections *Phys. Lett. B* **296** 227-32

- [27] Bleicher M *et al.* 1999 Relativistic Hadron-Hadron Collisions in the Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics Model *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25** 1859-96
- [28] Fukushima K 2004 Chiral effective model with the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **591** 277-84
- [29] Denner A, Eck H, Hahn O et Küblbeck J 1992 Feynman rules for fermion-number-violating interactions *Nucl. Phys. B* **387** 467-81
- [30] Binosi D et Theussl L 2004 JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams *Comput. Phys. Commun.* **161** 76-86
- [31] Binosi D, Collins J, Kaufhold C et Theussl L 2008 JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams. Version 2.0 release notes arXiv:0811.4113

Chapitre 7

Evolution du système en fonction du temps

Ce chapitre a été soumis à *Physical Review C*.

1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu les possibilités offertes par les modèles (P)NJL pour modéliser des quarks, mésons, diquarks et baryons. Ce travail permet d'estimer la masse de chacune des particules citées, en fonction de la température T et de la densité baryonique ρ_B . Dans le chapitre 6, nous avons étudié les sections efficaces associées aux réactions mettant en jeu ces particules, en fonction de \sqrt{s} , mais aussi en prenant en compte T et ρ_B . Par conséquent, à ce stade du travail, nous avons les outils requis pour nous focaliser maintenant sur la dernière partie de cette thèse, c'est-à-dire l'étude de l'évolution du système en fonction du temps. Cela concerne le refroidissement d'un plasma de quarks et d'antiquarks, et son hadronisation.

Dans la littérature dédiée à la physique nucléaire et à la physique des particules, divers modèles d'évolution dynamique ont été proposés. Tout d'abord, nous pouvons citer l'hydrodynamique et les modèles QMD/UrQMD. L'hydrodynamique relativiste [1–9] a été proposée en 1953 par Landau pour décrire des systèmes dans lesquels les interactions entre particules sont fortes. Dans cette approche, la matière est modélisée comme un fluide continu. Cette méthode est applicable si l'équilibre thermodynamique local est satisfait : cela impose de faibles variations de la température et de la pression, en fonction du temps et de la distance. En fait, le scénario de Bjorken [10], vu dans le chapitre 1, prévoit l'existence d'une évolution de type hydrodynamique, depuis l'hadronisation (rapide) de la phase QGP, jusqu'au *freeze out* de la phase hadronique. Des résultats expérimentaux semblent confirmer cette hypothèse, validant que cette évolution semble satisfaire le critère d'équilibre local. Dans la pratique, l'hydrodynamique relativiste peut être utilisée pour modéliser l'évolution de la phase QGP et celle de la phase hadronique. L'UrQMD (Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics) [11, 12] est une approche microscopique. Cela veut dire qu'il modélise l'évolution de particules, dans un régime hautement relativiste. Plus précisément, cette méthode considère des équations de transport covariantes et traite les interactions entre particules via des sections efficaces. UrQMD peut être employée dans la pratique pour décrire la phase hadronique, voir par exemple [13, 14]. Dans certaines versions d'UrQMD, les cordes de Lund [15] sont considérées pour décrire les collisions à hautes énergies entre hadrons. Elles permettent la formation de nouvelles particules (mésons), tout en respectant le confinement des quarks au

sein des hadrons. Des approches récentes peuvent aussi être citées, comme la PHSD (Parton Hadron String Dynamics) [16–19], BAMPS (Boltzmann Approach for Multi-Parton Scattering) [20], etc.

Ces travaux sont souvent considérés comme une base de travail dans le cadre de telles études. Par exemple, le critère de collision proposé dans [11, 12] est utilisé dans divers travaux, tout comme les équations du mouvement relativistes détaillées dans [11]. Ces aspects, inclus dans le modèle NJL, ont déjà donné des résultats disponibles dans la littérature, comme [21–24]. Dans l'ensemble, la température apparaît comme un paramètre crucial qui régit le refroidissement du système de quarks. Ce refroidissement peut être traité selon deux méthodes. La première utilise un thermostat externe dont le rôle est d'imposer une baisse programmée de la température en fonction du temps. La seconde considère la température comme un paramètre local [24]. Cela veut dire que la température ressentie par chaque particule dépend de son environnement proche. Si la première méthode semble être adaptée pour décrire le comportement d'un système infini, la seconde est capable de modéliser l'interdépendance entre particules, et de traiter des effets locaux, comme l'interaction cœur-couronne.

Les travaux dynamiques NJL évoqués dans le paragraphe précédent semblent se focaliser sur la transition de phase entre un plasma de quarks/antiquarks et une phase mésonique. En effet, par exemple dans [24], des réactions impliquant des quarks, antiquarks et mésons ont été considérées. Puisque cette référence mentionne une hadronisation « quasi-complète » du système, cela suppose donc un système composé initialement par des quarks et antiquarks en quantités égales, c'est-à-dire une densité moyenne nulle. Grâce à l'inclusion des baryons dans les modèles (P)NJL, cette description pourrait être étendue à des systèmes de quarks/antiquarks dans lesquels nous avons plus de quarks que d'antiquarks, c'est-à-dire une densité moyenne positive. Par ailleurs, si des études comme dans [23] ont proposé une tentative d'utiliser les baryons dans un tel travail, le nombre des réactions possibles doit être augmenté. La finalité est de pouvoir gérer les réactions possibles entre deux particules quelconques (quarks, mésons, diquarks, baryons et leurs antiparticules), via des collisions élastiques et/ou éventuellement inélastiques.

Dans le chapitre précédent, il a été proposé un scénario prenant en compte les sections efficaces obtenues. Notamment, à hautes températures, on s'attend à ce que $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ domine $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, alors que la situation est renversée à températures moyennes et faibles. Cela laisse présager une mésonisation massive, c'est-à-dire une forte consommation de quarks et d'antiquarks. En parallèle, il a été reporté que les réactions produisant des diquarks et des baryons présentent des sections efficaces assez modestes. Il a donc été envisagé que la baryonisation intervienne après la mésonisation, notamment après disparition de la majorité des antiquarks, pour éviter des réactions parasites entre baryons et antiquarks. Clairement, dans le cadre d'une étude dynamique, il serait intéressant de valider ou pas ce scénario. A cette occasion, le rôle joué par les diquarks devrait être précisé : est-ce que leur production est suffisante durant l'évolution du système pour réellement intervenir ? Dans le même temps, puisque les particules et les sections efficaces dépendent dans notre travail de la température et de la densité, l'influence de la densité devrait aussi être estimée.

Par ailleurs, à cause de la relative faiblesse des sections efficaces des réactions de baryonisation, au moins par rapport à celles de mésonisation, il devrait être étudié l'éventuelle conséquence de cela sur les simulations. Plus précisément, à cause de l'expansion du système,

nous pouvons imaginer que quelques quarks n'auraient pas le temps d'interagir par des collisions inélastiques avant de quitter le système. En effet, puisque le modèle NJL n'inclut pas de confinement, un quark (ou un diquark) peut apparaître libre en dehors des conditions attendues pour le plasma de quarks et de gluons, c'est-à-dire qu'il peut se retrouver isolé des autres quarks. Evidemment, comme noté dans le chapitre 1, ce comportement est physiquement non acceptable : un quark ne peut pas être observé à l'état libre. Cet aspect constitue une contrainte importante dans le cadre d'une étude dynamique qui doit pleinement être prise en compte. A cause de cela, le modèle NJL peut être considérée comme insuffisant pour modéliser correctement l'évolution du système. Dans les chapitres précédents, nous avons vu que l'inclusion d'une boucle de Polyakov permet de simuler un mécanisme de confinement dans le modèle NJL, en formant le modèle PNJL. Il a été observé son effet sur les masses des particules traitées, et sur les sections efficaces. A cette étape du travail, il est maintenant intéressant d'évaluer l'effet de la boucle de Polyakov sur la dynamique du système. Ainsi, une question cruciale, qui motive le travail effectué dans ce chapitre, est de voir si l'inclusion de cette boucle permet d'éviter la présence de quarks/antiquarks libres à la fin des simulations.

Dans ce chapitre, nous démarrons notre analyse, partie 2, en expliquant notre méthode, et en établissant les équations requises pour modéliser l'évolution du système. Nous débutons cette partie avec une description de l'algorithme global. Le reste de la partie se focalise alors sur une étude de chaque étape de cet algorithme. Cela concerne tout d'abord l'évaluation des paramètres externes ressentis par chaque particule, c'est-à-dire les densités et la température. Concernant la température, il est expliqué comment ce paramètre statistique, bien maîtrisé en thermodynamique, doit être adapté dans le cadre de systèmes relativistes. Aussi, un aspect important traité dans la partie 2 concerne le traitement des collisions dans notre modèle. La procédure associée est alors décrite, et ensuite il est proposé une liste des réactions incluses dans notre programme. Nous continuons cette description en explicitant les équations du mouvement relativistes. Celles-ci sont issues de [11, 24]. A ce moment là, une discussion est alors amorcée sur la manière de les interpréter. Notamment, la notion d'interaction à distance entre les particules est introduite. Dans la partie 3, nous présentons quelques résultats préliminaires. Certains d'entre eux sont liés à la discussion démarrée dans la partie 2 au sujet de l'interaction à distance. D'autres tests concernent l'étude d'un système fermé, afin de simuler un système de quarks chauds. Notamment, une finalité de ce travail est de caractériser les trajectoires des quarks. A cette occasion, nous voulons voir si leur comportement peut être comparé à celui d'un mouvement Brownien relativiste [25] ou pas. Dans la partie 4, les résultats de simulations sont présentés. Un premier objectif est de comparer les modèles NJL et PNJL, afin de voir si l'un des deux peut permettre une hadronisation complète du plasma de quarks/antiquarks. Dans la partie 5, nous décrivons les résultats d'une simulation complète, en incluant une étude de l'évolution de certains observables, afin de décrire les diverses phases du refroidissement. Nous nous focalisons aussi sur une analyse des collisions qui ont eu lieu durant les simulations, afin de déterminer lesquelles dominent.

2. Mise en équation du modèle

2.1 L'algorithme global

Dans le cadre du travail exposé dans ce chapitre, nous avons développé un programme informatique indépendant. Le programme et par extension l'algorithme programmé peuvent être désignés par le nom non officiel du logiciel, c'est-à-dire ARCHANGE. Notons que ce nom ne correspond pas à un acronyme. L'algorithme global utilisé n'est pas si différent de ceux décrits dans la littérature, comme [23, 24]. En effet, nous considérons les étapes suivantes :

1. Initialisation du système. Dans cette étape, les particules initiales sont créées et ajoutées dans le système. Dans le cadre du travail décrit dans ce chapitre, nous considérons les mésons pseudo-scalaires, les diquarks scalaires et l'octet de baryons. Mise à part la nature des particules, nous fournissons seulement les positions et quantités de mouvement de nos particules comme données d'entrée. En effet, le programme détermine l'environnement de chacune d'entre elles, c'est-à-dire il calcule les valeurs des paramètres externes (T, ρ_f) au voisinage de chaque particule. Cela permet d'estimer la masse initiale de chacune d'elles.
2. Traitement des collisions. Cette étape est dédiée à l'étude de toutes les possibilités de collisions entre chaque couple de particules que l'on peut former. Les collisions effectuées sont déterminées par le programme. Celui-ci traite alors le remplacement éventuel des particules au sein du système.
3. Traitement des déplacements. Ici, nous appliquons les équations de mouvement afin de mettre à jour périodiquement la position et la quantité de mouvement de chaque particule.
4. Retour au point 2 pour la prochaine itération en temps, jusqu'à la fin de la simulation.

2.2 Détermination des densités

Notre approche prend en compte des paramètres locaux. Comme vu dans le paragraphe précédent, la détermination de ces paramètres externes est utilisée dans la première étape, c'est-à-dire l'initialisation du système. Cependant, dans la pratique, la mise à jour de ces valeurs est effectuée dans presque toutes les autres étapes, notamment après une collision ou après le traitement des déplacements. Dans notre travail, ces paramètres externes sont la température T et les densités. Ces dernières sont notées ρ_f , avec $f = u, d, s$, c'est à dire une densité par saveur de quark. Dans le cadre de la symétrie isospin, $\rho_u = \rho_d$, et la densité baryonique ρ_B peut être trouvée par la relation $\rho_B = \frac{2}{3} \rho_q$ [26]. Cependant, dans les simulations effectuées ci-après, cette symétrie n'est pas appliquée. Clairement, nous avons utilisé le jeu de paramètres EB défini dans le chapitre 2. La température et les densités sont

évaluées pour chaque particule dans le référentiel du laboratoire. Nous considérons que ce référentiel coïncide toujours avec le référentiel du centre de masse du système entier.

Concernant le calcul des densités, nous remarquons tout d'abord que notre choix de les utiliser est différent de celui fait dans [24], qui utilise quant à lui le potentiel chimique. Notre choix s'explique par le comportement observé sur la figure 6 du chapitre 2. Plus précisément, la relation entre ρ_B et μ_q ($q \equiv u, d$) n'est pas triviale dans les modèles (P)NJL. En fait, μ_q est une fonction de ρ_B mais aussi de la température T , notamment à basses températures. Cette remarque est tout à fait généralisable aux ρ_f et aux potentiels chimiques μ_f . Toutefois, puisque chaque μ_f est solution du jeu d'équations utilisé pour trouver la masse des quarks (chapitre 2), les potentiels chimiques peuvent être calculés par l'algorithme. Ils sont ensuite écrits dans les données de sortie fournies par le programme.

Considérons une particule quelconque, étiquetée avec l'indice i . La densité ρ_f ressentie par cette particule est déterminée par la formule :

$$(\rho_f)_i = \frac{1}{V} \cdot \sum_{j \neq i} w(i, j) \cdot \left((n_f)_j - (n_{\bar{f}})_j \right), \quad (1)$$

où f est une saveur de quark (u, d, s). Aussi, $V = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3$ est le volume d'une sphère factice centrée sur la particule étudiée i . Cette sphère définit le voisinage de la particule. Dans (1), la sommation est effectuée sur les particules constituant le système. Aussi, $(n_f)_j$ et $(n_{\bar{f}})_j$ désignent respectivement le nombre de quarks de saveur f et le nombre d'antiquarks d'anti-saveur \bar{f} « contenus » dans la particule j . Par exemple, dans le cas d'un proton, $n_u = 2$, $n_{\bar{u}} = 0$, $n_d = 1$, $n_{\bar{d}} = 0$, $n_s = 0$ et $n_{\bar{s}} = 0$. De la même manière, avec un antiquark \bar{u} , $n_{\bar{u}} = 1$, et zéro pour les autres compteurs. En conséquence, le comptage ne considère pas l'état des quarks, c'est-à-dire que l'on ne prend pas en compte qu'ils soient confinés ou pas. Mais, afin de prendre en compte la distance entre les particules i et j , un coefficient est appliqué durant le calcul. Ce coefficient est donné par une fonction que [24] appelle *fonction de pondération*. Comme dans cette référence, nous utilisons une fonction Gaussienne :

$$w(i, j) = \exp \left(-\frac{d_{ij}^2}{2D^2} \right), \quad (2)$$

où d_{ij} est la distance entre les particules i et j , et D est lié au rayon R de la sphère. Dans la pratique, nous prenons $D = 1.75$ fm dans nos simulations. L'équation (2) permet de considérer les densités comme des paramètres locaux, comme escompté.

2.3 Estimation de la température

Dans [24], un lien a été établi entre les densités et la température. Dans notre approche, la température et les densités sont des paramètres indépendants, sans corrélation entre eux. Cela permet de considérer diverses configurations : système chaud et/ou dense ... En physique statistique, l'utilisation du théorème d'équipartition est une approche particulièrement

pertinente pour estimer la température. Dans notre cas, des complications viennent de l'adaptation de ce théorème dans un cadre relativiste, et de la nécessité de travailler à l'équilibre thermique. Concernant l'aspect relativiste, certaines approches ont été proposées afin d'introduire la notion de température relativiste [27–34]. Nous proposons d'expliquer leur raisonnement.

Tout d'abord, dans le cas d'un système non relativiste, nous rappelons que la température d'un gaz parfait peut être obtenue, à l'équilibre thermique, par le théorème d'équipartition classique :

$$\langle E_K \rangle_{NR} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T, \quad (3)$$

où $\langle E_K \rangle_{NR}$ est la valeur moyenne de l'énergie cinétique non relativiste, c'est-à-dire l'énergie cinétique moyenne par particule. k_B est la constante de Boltzmann, prise égale à 1 dans nos unités. En fait, le théorème d'équipartition peut être étendu. Une formulation générale explique que pour chaque degré de liberté ϕ_i , c'est-à-dire pour chaque variable quadratique dans l'écriture de l'énergie, la relation suivante est satisfaite [27] :

$$\left\langle \phi_i \cdot \frac{\partial E}{\partial \phi_i} \right\rangle = k_B \cdot T. \quad (4)$$

Dans le cadre d'une formulation relativiste, l'énergie moyenne d'une particule est écrite comme $\langle E \rangle = \left\langle \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2} \right\rangle$. Nous avons alors trois possibilités :

- Régime non relativiste. Dans ce cas $(\vec{p})^2 \ll m^2$, conduisant à l'approximation bien connue :

$$\langle E \rangle \approx \left\langle \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + m \right\rangle \equiv \langle E_K \rangle_{NR} + \langle m \rangle. \quad (5)$$

En utilisant les équations (4, 5), nous obtenons $\left\langle p_i \cdot \frac{\partial E}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle \frac{p_i^2}{m} \right\rangle = k_B \cdot T$, où $i = x, y, z$.

Evidemment, nous retrouvons (3).

- Régime ultra-relativiste [24]. Ici, la masse est négligeable devant la quantité de mouvement : $(\vec{p})^2 \gg m^2$. Dans ce cas, nous avons :

$$\langle E \rangle \approx \left\langle \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \right\rangle \equiv \langle E_K \rangle_{UR}. \quad (6)$$

De la même manière, nous trouvons $\left\langle p_i \cdot \frac{\partial E}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle \frac{p_i^2}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right\rangle = k_B \cdot T$, et il

$$\text{vient } \langle E_K \rangle_{UR} = \left\langle \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \right\rangle = \sum_{i=x,y,z} \left\langle p_i \cdot \frac{\partial E}{\partial p_i} \right\rangle \text{ et } \langle E_K \rangle_{UR} = 3 \cdot k_B \cdot T. \quad (7)$$

- Cas général. En utilisant la même méthode que dans les cas précédents, nous avons encore $\langle E \rangle = \sqrt{\langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 \rangle}$, et nous écrivons :

$$\left\langle p_i \cdot \frac{\partial E}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle \frac{p_i^2}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2}} \right\rangle = k_B \cdot T . \quad (8)$$

En sommant les contributions des composantes x, y, z , nous obtenons [27, 33, 34] :

$$\left\langle \frac{(\bar{p})^2}{E} \right\rangle = 3k_B \cdot T \text{ ou } \left\langle \frac{(\bar{p})^2}{2E} \right\rangle = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T . \quad (9)$$

L'équation (9) présente l'avantage d'être satisfaite dans tous les cas, puisqu'aucune approximation n'a été utilisée pour elle, à la différence des deux autres régimes vus plus haut. Nous avons considéré cette relation (9) dans nos calculs. Dans notre travail, la notion de température locale est utilisée, donc l'équilibre local doit être considéré localement. Dans la pratique, l'opérateur de moyennation $\langle \rangle$ concerne les quantités de mouvement \bar{p} et l'énergie E des particules situées au voisinage de la particule étudiée. Comme avec les densités, la fonction de pondération (2) est utilisée dans ce calcul. A cette occasion, nous pouvons souligner le rôle important joué par le D utilisé dans cette fonction, car ce paramètre définit ce qui est considéré comme le voisinage de chaque particule. Il a une influence sur les calculs de la température et des densités.

D'autre part, l'énergie $E = \sqrt{\bar{p}^2 + m^2}$ d'une particule dépend de sa masse m . En conséquence, la masse d'une particule j intervient, via (9), sur le calcul de la température ressentie par une particule i . Nous avons vu dans les chapitres 2 et 4 que les masses de toutes les particules traitées dépendent de la température dans les modèles (P)NJL. Ainsi, la température de la particule i a une incidence sur la masse de cette particule i . Cette variation de la masse a des conséquences sur la température ressentie par la particule j . Cette température a une incidence sur la masse de cette particule j ... Clairement, il y a ainsi une interdépendance entre les masses et les températures. Numériquement, cet aspect est pris en compte par le biais de plusieurs itérations, jusqu'à convergence des valeurs. C'est notamment le cas pour l'étape numéro 1 vue au paragraphe 2.1, c'est-à-dire l'initialisation du système.

2.4 Traitement des collisions

L'algorithme gérant les collisions consiste tout d'abord à prendre en compte une particule en particulier. Nous l'étiquetons comme étant la particule i . Ensuite, le programme établit une liste de tous les couples de particules qui peuvent être constitués en utilisant la particule i et une autre de son voisinage, que nous nommerons j . Chaque couple (i, j) représente une possibilité de particules incidentes qui peuvent réagir ensemble.

Les quantités de mouvement des particules sont exprimées dans le référentiel du laboratoire dans les données manipulées par le programme. Les sections efficaces (P)NJL disponibles

dans la littérature, et par extension celles calculées dans notre modèle (chapitre 6), sont estimées dans le référentiel du centre de masse des deux particules incidentes (i, j) . En conséquence, la procédure consiste à calculer \sqrt{s} pour le système formé par ces deux particules, et ensuite d'appliquer un boost de Lorentz à ce système, afin d'exprimer les énergies et quantités de mouvement des deux particules dans leur référentiel du centre de masse.

Pour chaque couple (i, j) , le paramètre d'impact $b_{i,j}^*$ est estimé dans leur référentiel du centre de masse. Certains couples peuvent être invalidés à ce stade là, notamment si le programme détermine que les particules s'éloignent l'une de l'autre, ou si le paramètre d'impact est physiquement trop fort, c'est-à-dire incompatible avec le critère de collision (10) quelle que soit la valeur de σ physiquement admissible. Aussi, le programme procède à une extrapolation des trajectoires afin de ne valider le couple (i, j) que si la distance entre i et j est minimale, suivant l'idée exposée dans [24]. En d'autres termes, la collision n'a pas lieu à un temps t s'il est établi que les particules peuvent encore se rapprocher lors de l'itération en temps suivante.

Pour chaque couple (i, j) restant, le programme établit une sous-liste des types de réactions qui peuvent se produire avec i et j . Dans notre modélisation, les collisions faisant intervenir deux particules en entrée et deux en sortie sont prises en compte. Par exemple, avec une paire quark/antiquark (q, \bar{q}) , les types de réaction possibles sont $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$, $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ et $q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$. Ensuite, pour chaque type de réactions, l'algorithme prévoit les particules pouvant être produites par chaque processus. Si cette étape est triviale pour des réactions comme $q + q \rightarrow q + q$, les choses sont plus délicates dans d'autres cas. Le tableau 1 propose une liste dans la configuration d'un couple de quark/antiquark (u, \bar{u}) incidents.

Type de réaction	Réactions possibles
$q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$	$u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ $u + \bar{u} \rightarrow d + \bar{d}$ $u + \bar{u} \rightarrow s + \bar{s}$
$q + \bar{q} \rightarrow M + M$	$u + \bar{u} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ $u + \bar{u} \rightarrow \pi^0 + \eta$ $u + \bar{u} \rightarrow \eta + \eta$ $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ $u + \bar{u} \rightarrow K^+ + K^-$
$q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$	$u + \bar{u} \rightarrow [ud] + [\bar{u}\bar{d}]$ $u + \bar{u} \rightarrow [us] + [\bar{u}\bar{s}]$

Tableau 1. Liste des réactions possibles quand un quark u interagit avec un antiquark \bar{u} .

La notion de *réactions élastiques* doit être comprise ici comme des réactions lors desquelles les types de particules (quark, méson, etc.) ne sont pas modifiés. Mais, les particules elles-mêmes peuvent être remplacées, comme dans $u + \bar{u} \rightarrow d + \bar{d}$. Concernant $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, nous n'avons pas pris en compte les réactions dans lesquelles η' pourrait apparaître. En effet, les

sections efficaces des réactions de mésonisation mettant en jeu η' sont négligeables par rapport aux processus de mésonisation formant des mésons légers, comme des pions [35].

A ce stade de la procédure, le programme évalue les sections efficaces de toutes les réactions listées. Pour chaque couple (i, j) et pour chaque réaction (étiquetée avec k), la section efficace obtenue $\sigma_{i,j,k}$ est comparée au paramètre d'impact $b_{i,j}^*$ du couple. Plus précisément, le critère de collision mentionné dans [11, 12] est appliqué : il stipule qu'une réaction est possible si sa section efficace satisfait l'inégalité exposée équation (10), et schématisée figure 1.

$$b_{i,j}^* \leq \sqrt{\sigma_{i,j,k}/\pi}. \quad (10)$$

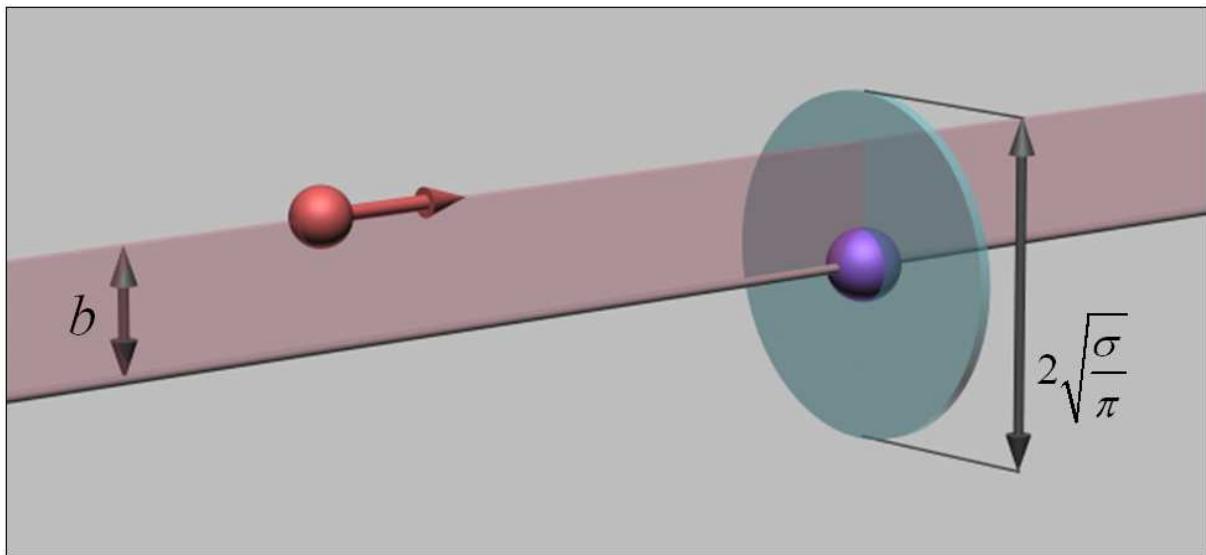


Figure 1. Schématisation du critère de collision géométrique avec deux particules.

Parmi toutes les réactions qui vérifient ce critère, le programme choisit la réaction k associée au couple (i, j) qui sera considérée. Ce choix est déterminé de manière stochastique, mais la probabilité de chaque réaction (i, j, k) est pondérée par sa section efficace correspondante. En d'autres termes, la réaction qui présente la section efficace la plus forte à ce moment là est celle qui a le plus de chance de se produire. A l'opposé, une réaction ayant une section efficace nulle à cet instant ne peut pas être choisie.

Une fois que la réaction et le couple associé sont déterminés, c'est-à-dire qu'il a été trouvé la particule j qui réagira avec la particule i via la réaction k , le programme estime l'angle de diffusion et les quantités de mouvement des particules produites. Quand ces particules sont insérées dans le système, leurs masses sont estimées au préalable dans les conditions exactes (températures et densités) ressenties par les particules incidentes (i, j) avant leur remplacement. Les formules utilisées pour traiter la collision d'un point de vue géométrique (boosts de Lorentz, paramètre d'impact, angle de diffusion) sont rassemblées dans l'annexe F.

Quelle que soit la réaction qui a eu lieu, élastique ou inélastique, ces nouvelles particules ne vont plus interagir avant la prochaine itération : elles sont provisoirement « désactivées » par la procédure. Ceci est fait afin d'éviter que les mêmes particules n'interagissent indéfiniment

entre elles durant la même itération. De la même manière, si le programme juge que la particule i considérée ne peut pas interagir à ce moment là (trop éloignée des autres, etc.), la particule i est aussi désactivée jusqu'à la prochaine itération.

Finalement, le programme prend en compte une autre particule i , et recommence la procédure expliquée dans ce paragraphe 2.4, jusqu'à ce que toutes les particules aient été passées en revue, c'est-à-dire « désactivées ».

2.5 Liste des types de réactions inclus dans notre modèle

Le tableau 2 ci-après rassemble les types de réactions implémentées dans le programme. Cela révèle qu'un nombre important de réactions possibles doit être considéré, notamment parce que nos simulations n'utilisent pas la symétrie isospin. Nous rappelons que les particules incluses dans le programme sont les quarks q , les mésons pseudo-scalaires M , les diquarks scalaires D , l'octet de baryons B et leurs antiparticules associées.

En outre, comme observé auparavant dans cette thèse, les sections efficaces dépendent de \sqrt{s} , de la température T et des densités (ou des potentiels chimiques). En conséquence, utiliser des valeurs « pré-calculées » n'est pas la meilleure solution, notamment en utilisant une base de données de sections efficaces, comme dans [24]. Certainement cette solution est possible, mais au prix d'approximations trop fortes. En effet, par exemple avec $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, une forte mésonisation est attendue, mais dans des conditions selon \sqrt{s}, T, ρ_f bien précises. En fait, cet aspect est important pour étudier le refroidissement d'un système de quarks. Durant les simulations, les sections efficaces sont calculées *en temps réel*, c'est-à-dire qu'elles sont estimées quand le programme en a besoin, en prenant \sqrt{s}, T, ρ_f en compte. La méthode pour estimer une section efficace avec les modèles (P)NJL est détaillée dans le chapitre précédent. Notamment, concernant les types de réactions décrits dans le tableau 2, nous avons utilisé la méthode décrite dans [36, 37] pour calculer les sections efficaces de réactions comme $D + D \rightarrow D + D$. Mais, nous nous sommes servis des formules exposées dans [12] pour estimer les sections efficaces de réactions comme $M + M \rightarrow M + M$, $M + B \rightarrow M + B$ et $B + B \rightarrow B + B$. Cette remarque est évidemment valable pour des réactions mettant en jeu leurs antiparticules, comme $\bar{B} + \bar{B} \rightarrow \bar{B} + \bar{B} \dots$

Particules incidentes	Types de réactions possibles		
$q + \bar{q}$	$q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$	$q + \bar{q} \rightarrow M + M$	$q + \bar{q} \rightarrow D + \bar{D}$
$q + q$	$q + q \rightarrow q + q$	$q + q \rightarrow M + D$	$q + q \rightarrow \bar{q} + B$
$\bar{q} + \bar{q}$	$\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$	$\bar{q} + \bar{q} \rightarrow M + \bar{D}$	$\bar{q} + \bar{q} \rightarrow q + \bar{B}$
$q + M$	$q + M \rightarrow q + M$	$q + M \rightarrow \bar{q} + D$	
$\bar{q} + M$	$\bar{q} + M \rightarrow \bar{q} + M$	$\bar{q} + M \rightarrow q + \bar{D}$	
$\bar{q} + D$	$\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$	$\bar{q} + D \rightarrow q + M$	$\bar{q} + D \rightarrow \bar{D} + B$
$q + \bar{D}$	$q + \bar{D} \rightarrow q + \bar{D}$	$q + \bar{D} \rightarrow \bar{q} + M$	$q + \bar{D} \rightarrow D + \bar{B}$
$q + D$	$q + D \rightarrow q + D$	$q + D \rightarrow M + B$	
$\bar{q} + \bar{D}$	$\bar{q} + \bar{D} \rightarrow \bar{q} + \bar{D}$	$\bar{q} + \bar{D} \rightarrow M + \bar{B}$	
$\bar{q} + B$	$\bar{q} + B \rightarrow \bar{q} + B$	$\bar{q} + B \rightarrow q + q$	$\bar{q} + B \rightarrow M + D$
$q + \bar{B}$	$q + \bar{B} \rightarrow q + \bar{B}$	$q + \bar{B} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$	$q + \bar{B} \rightarrow M + \bar{D}$
$q + B$	$q + B \rightarrow q + B$	$q + B \rightarrow D + D$	
$\bar{q} + \bar{B}$	$\bar{q} + \bar{B} \rightarrow \bar{q} + \bar{B}$	$\bar{q} + \bar{B} \rightarrow \bar{D} + \bar{D}$	
$M + M$	$M + M \rightarrow M + M$	$M + M \rightarrow q + \bar{q}$	
$M + D$	$M + D \rightarrow M + D$	$M + D \rightarrow q + q$	$M + D \rightarrow \bar{q} + B$
$M + \bar{D}$	$M + \bar{D} \rightarrow M + \bar{D}$	$M + \bar{D} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$	$M + \bar{D} \rightarrow q + \bar{B}$
$M + B$	$M + B \rightarrow M + B$	$M + B \rightarrow q + D$	
$M + \bar{B}$	$M + \bar{B} \rightarrow M + \bar{B}$	$M + \bar{B} \rightarrow \bar{q} + \bar{D}$	
$D + \bar{D}$	$D + \bar{D} \rightarrow D + \bar{D}$	$D + \bar{D} \rightarrow q + \bar{q}$	
$D + D$	$D + D \rightarrow D + D$	$D + D \rightarrow q + B$	
$\bar{D} + \bar{D}$	$\bar{D} + \bar{D} \rightarrow \bar{D} + \bar{D}$	$\bar{D} + \bar{D} \rightarrow \bar{q} + \bar{B}$	
$\bar{D} + B$	$\bar{D} + B \rightarrow \bar{D} + B$	$\bar{D} + B \rightarrow \bar{q} + D$	
$D + \bar{B}$	$D + \bar{B} \rightarrow D + \bar{B}$	$D + \bar{B} \rightarrow q + \bar{D}$	
$D + B$	$D + B \rightarrow D + B$		
$\bar{D} + \bar{B}$	$\bar{D} + \bar{B} \rightarrow \bar{D} + \bar{B}$		
$B + \bar{B}$	$B + \bar{B} \rightarrow B + \bar{B}$		
$B + B$	$B + B \rightarrow B + B$		
$\bar{B} + \bar{B}$	$\bar{B} + \bar{B} \rightarrow \bar{B} + \bar{B}$		

Tableau 2. Liste des types de réactions incluses dans le modèle.

2.6 Equations du mouvement

Dans le paragraphe 2.3, nous avons souligné la nécessité de travailler dans notre modèle dans un cadre relativiste. Cet aspect doit apparaître de manière explicite dans les équations du mouvement. Dans la littérature, des théories relativistes ont été développées, comme par exemple [11, 12, 38, 39]. Comme noté dans [11] ou dans [24], l'écriture des équations de départ rappelle fortement les équations de Hamilton. Cependant, comme expliqué dans ces références, les équations à utiliser dans un formalisme relativiste sont différentes.

Dans notre travail, nous considérons les équations exposées par exemple dans [24] :

$$\begin{cases} \frac{d(r_i^\mu)}{d\tau} = \frac{p_i^\mu}{E_i} \\ \frac{d(p_i^\mu)}{d\tau} = -\sum_{j \neq i} \frac{1}{2E_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial r_{i\mu}} = -\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{E_j} \cdot \frac{\partial m_j}{\partial r_{i\mu}} \end{cases}. \quad (11)$$

Ces sont des équations de mouvement classiques (c'est-à-dire non quantiques). Dans ces relations, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ est l'énergie de la particule concernée, c'est-à-dire la composante 0 de son quadrivecteur énergie-impulsion. Comme mentionné dans [24], la réécriture de la seconde équation de (11), en fonction des masses m_j , est justifiée par le fait que nous n'avons pas de potentiel explicite V_j dans le cadre des modèles (P)NJL. Cependant, la masse de chaque particule dépend de paramètres comme la température ou les densités. Clairement, ces paramètres sont calculés pour chaque particule via son voisinage, c'est-à-dire les autres particules. Donc, il est possible de considérer que le potentiel est « caché » dans les masses des particules, en faisant le remplacement $\frac{\partial V_j}{\partial r_{i\mu}} = \frac{\partial m_j^2}{\partial r_{i\mu}}$. Le terme $\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{E_j} \cdot \frac{\partial m_j}{\partial r_{i\mu}}$ est donc interprétable comme une *interaction à distance* entre les particules.

Aussi, en suivant le raisonnement de [24], la dérivée $\frac{\partial m_j}{\partial r_{i\mu}}$ peut être développée comme :

$$\frac{\partial m_j}{\partial r_{i\mu}} = \frac{\partial m_j}{\partial T_j} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial r_{i\mu}} + \sum_{f=u,d,s} \frac{\partial m_j}{\partial \rho_{fj}} \cdot \frac{\partial \rho_{fj}}{\partial r_{i\mu}}. \quad (12)$$

Cependant, une autre interprétation de ce terme peut être donnée, en disant qu'il représente directement les variations des masses des particules j induites par la variation de position de la particule i . Notre raisonnement est illustré figure 2. Plus précisément, le déplacement d'une particule induit des perturbations sur les particules situées dans son voisinage. Tout d'abord, les densités ressenties par les autres particules sont modifiées, notamment pour les particules dans son environnement proche. Ensuite, le déplacement induit aussi une modification de la température locale. En fait, ces deux effets peuvent être compris par la méthode que nous utilisons pour estimer les densités et la température, voir paragraphes 2.2 et 2.3, notamment par l'utilisation d'une fonction de pondération (2). Plus précisément, chaque déplacement induit une variation des valeurs retournées par cette fonction, ce qui opère alors des modifications dans le comptage.

Puisque la masse d'une particule est calculée en utilisant la température et les densités comme paramètres, cela explique pourquoi le déplacement d'une particule est capable de modifier les masses d'autres particules. Clairement, ces observations montrent la nécessité de mettre à jour les masses, températures et densités après l'étape n°3 du paragraphe 2.1 (traitement des déplacements). Concernant les densités, puisque ce paramètre est lié aux positions des particules, le calcul est facile. Mais, comme vu dans le paragraphe 2.3, l'interdépendance entre les masses et la température locale nécessite d'effectuer plusieurs itérations dans le calcul de ces quantités, jusqu'à convergence. Cependant, dans la pratique, cette convergence est rapidement atteinte. La conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement

totale sont deux contraintes imposées à l'algorithme durant cette procédure. En fait, la conservation de l'énergie est compatible avec la manière dont (11) est utilisée. Clairement, il est vrai que la détermination des paramètres T, ρ_f est imparfaite, dans le sens où ils dépendent de la valeur (arbitraire) du D introduit équation (2). Cependant, premièrement, ces paramètres sont estimés de la même manière pour toutes les particules présentes dans le système étudié. Deuxièmement, nous remarquons que la deuxième équation de (11) permet des variations de l'énergie cinétique d'une particule par des variations de son énergie potentielle. Mais, l'énergie totale de la particule étudiée de varie pas, du moins si elle ne participe pas à une collision.

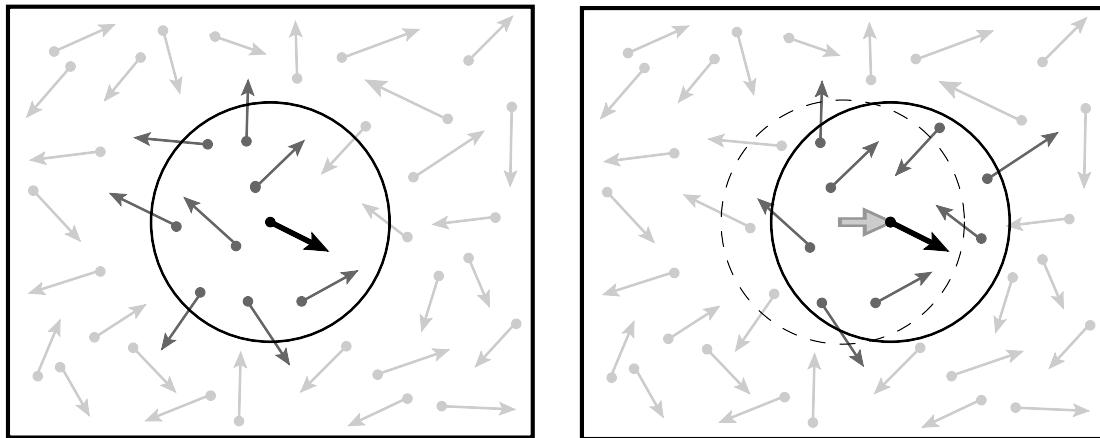


Figure 2. Schématisation de l'effet induit par le déplacement d'une particule.

3. Résultats préliminaires

3.1 Interaction à distance entre particules

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étudier numériquement les propriétés de l'interaction à distance évoquée dans le paragraphe 2.6. La finalité est d'essayer de répondre à la question que nous pouvons avoir depuis plusieurs chapitres. Résumons-nous : l'interaction forte, décrite par la chromodynamique quantique, gouverne les interactions entre les quarks et/ou les antiquarks par l'échange de gluons. Cette interaction est très attractive, car elle est responsable du confinement des quarks et antiquarks dans les hadrons. Quand nous considérons le modèle NJL, nous perdons les gluons et le confinement, même si l'inclusion de la boucle de Polyakov mime un mécanisme de confinement. La question est finalement de voir si nous avons toujours un potentiel attractif entre quarks et/ou antiquarks. Aussi, est-il assez fort pour mimer l'interaction forte de manière réaliste ?

Tout d'abord, deux tests ont été effectués, en utilisant le modèle PNJL. Dans le premier, deux quarks u lents sont considérés. Leurs quantités de mouvement sont de sens opposé, mais nous avons $\|\vec{p}\|=70$ MeV pour les deux. Dans un second test, les deux quarks u ont même quantité de mouvement, avec aussi $\|\vec{p}\|=70$ MeV. Pour ces deux tests, la procédure de collision est désactivée. Un thermostat externe impose une température de 200 MeV pour les quarks,

ajoutée à celle produite par les particules elles-mêmes via (9). Les trajectoires dans le référentiel du laboratoire sont représentées sous la forme d'un chronogramme dans la figure 3. Les trajectoires des quarks sont marquées périodiquement avec des points. Les points qui présentent la coloration la plus vive correspondent aux positions les plus récentes des quarks. Pour ces tests, comme avec ceux décrits figure 4, nous avons vérifié que l'énergie totale et la quantité de mouvement totale sont strictement conservées, pour chaque itération en temps.

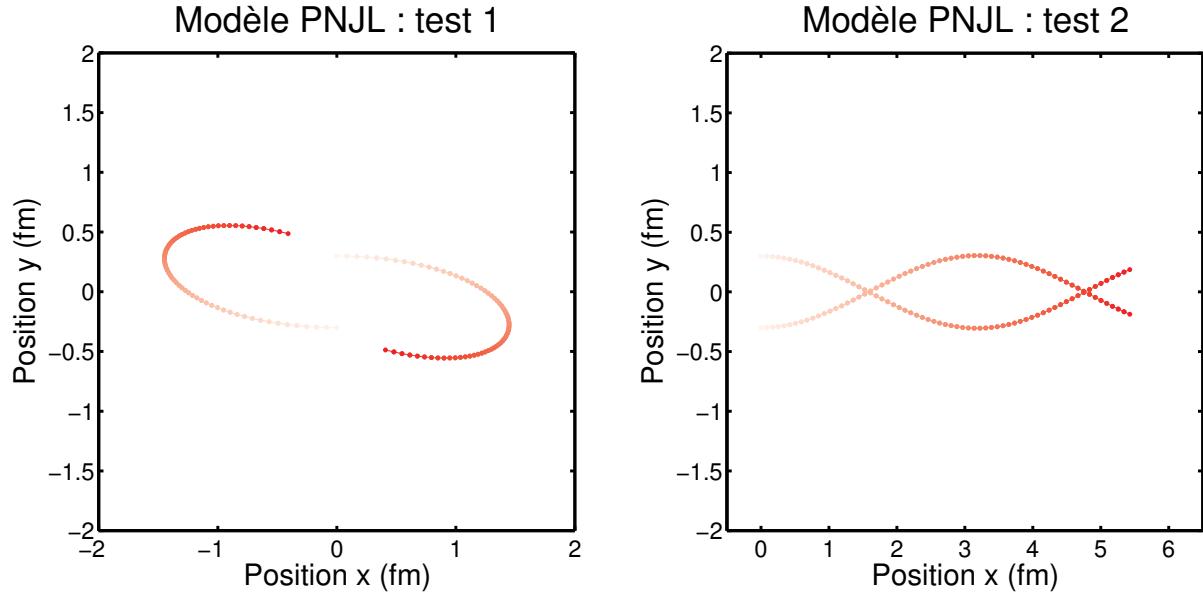


Figure 3. Trajectoires de deux quarks u , pour $T \approx 200$ MeV .

Les résultats de la figure 3 montrent une interaction à distance entre les quarks. Cette interaction est clairement attractive. En poursuivant la discussion amorcée dans le paragraphe 2.6, ce comportement est expliqué par la seconde équation de (11). La tendance générale est qu'une particule modifie sa trajectoire de telle manière qu'elle tende à minimiser les masses des particules de son voisinage. Ainsi, les deux quarks sont attirés mutuellement l'un vers l'autre. En effet, pour un quark j , l'approche d'un autre quark i induit que la température et la densité ρ_u ressenties par le quark j augmentent, donc sa masse diminue, comme confirmé par la figure 3 du chapitre 2. Le même raisonnement est applicable au quark i vis à vis du quark j , de manière symétrique. Dans la zone du plan $T - \rho_B$ dans laquelle nos deux quarks évoluent, c'est-à-dire $\rho_B \approx 0$ et $T \approx 200$ MeV , la dérivée par rapport à la densité ρ_u semble être plus forte que celle selon la température. Cette remarque peut être étendue à des zones pour lesquelles les densités sont réduites et $T < 200$ MeV . Dans les tests de la figure 3, le comportement observé des quarks semble provenir principalement des variations de densité ressenties par ces deux particules, voir équations (11, 12).

Plus précisément, nous interprétons le terme $-\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{E_j} \cdot \frac{\partial m_j}{\partial r_{i\mu}}$ dans la seconde ligne de (11)

comme une force. Il doit être remarqué que l'interaction à distance est clairement non linéaire. En effet, multiplier le nombre de quarks n'induit pas forcément que l'effet attractif sera multiplié par le même facteur. Elle devrait être vue comme une interaction à N-corps. En outre, l'interaction observée a une portée limitée, à la différence du potentiel quark-quark décrit par la QCD. En fait, l'interaction à distance (P)NJL est fortement liée aux variations de

T et des densités induites par une particule sur son environnement. Evidemment, la fonction de pondération (2) joue un rôle central sur le comportement de cette interaction, notamment en ce qui concerne sa portée. Dans une évolution dynamique, les modèles (P)NJL semblent capables de mimer les phénomènes de courtes portées décrits par la QCD, mais doivent présenter des limitations pour modéliser ceux impliquant de longues portées.

D'autre part, les masses des quarks tendent vers leurs masses nues (m_{0f}) à hautes températures et densités, comme vu au chapitre 2. En conséquence, dans ces conditions extrêmes, la masse d'un quark n'est plus influencée par ces paramètres, donc par son environnement. Ainsi, les quarks deviennent libres dans ce régime. Il coïncide avec le phénomène de liberté asymptotique, traité par la QCD perturbative évoquée au chapitre 1.

Maintenant, étudions les différences entre les modèles NJL et PNJL en ce qui concerne cette interaction observée. En d'autres termes, nous essayons de voir l'influence de la boucle de Polyakov sur ce phénomène. Ces différences sont évaluées par le biais de deux tests, dans lesquels deux quarks u interagissent ensemble dans des conditions identiques, avec initialement $\|\vec{p}\|=30$ MeV et pour une température proche de 250 MeV, imposée par un thermostat externe. La seule différence entre ces deux tests est le modèle utilisé : NJL ou PNJL. Les résultats présentés dans la figure 4 indiquent que l'interaction à distance PNJL est plus intense que celle de NJL, au moins dans le cadre de ces simulations. En effet, les trajectoires montrent que les déviations induites par l'interaction à distance sont plus importantes quand le modèle PNJL est utilisé. Dans le test NJL, l'attraction n'a pas été assez forte pour retenir les quarks ensemble : ils sont partis dans des directions opposées.

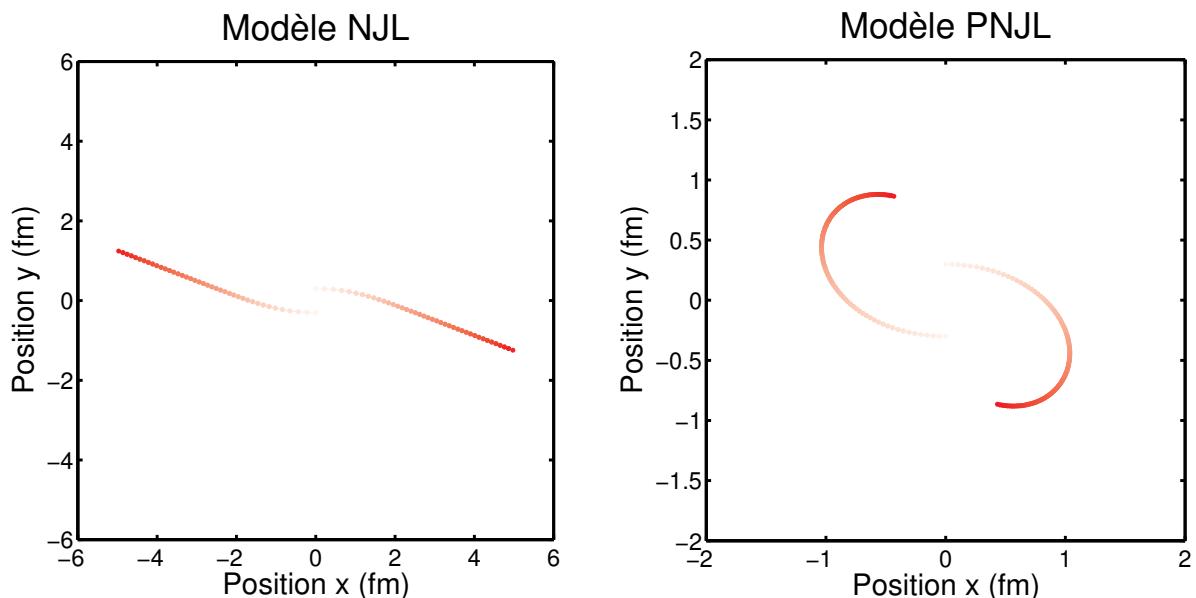


Figure 4. Comparaison des résultats trouvés pour les modèles NJL et PNJL, pour $T \approx 250$ MeV .

Une première explication de ces comportements observés est donnée par la figure 3 du chapitre 2 : l'effet de la boucle de Polyakov sur les masses des quarks est de décaler les valeurs observées vers de plus hautes températures, en appliquant un effet de distorsion aux courbes. Selon nos explications données dans les paragraphes précédents, on s'attend à ce que l'interaction quark-quark soit directement reliée aux variations des masses selon T et ρ_f . La

variation de masse est plus forte dans l'approche PNJL que dans la NJL, dans une région pour laquelle la densité baryonique est plus basse que $3\rho_0$ et la température approximativement entre 200 et 300 MeV. Cette zone est particulièrement intéressante, car elle correspond aux conditions pour lesquelles on s'attend à ce que l'hadronisation se produise.

Là, l'interaction à distance quark-quark pourrait être plus forte dans le modèle PNJL que dans le NJL. En suivant cette hypothèse, cela pourrait induire un effondrement provisoire du système de quarks, ce qui pourrait optimiser les processus d'hadronisation. D'autre part, à densités réduites, la zone pour laquelle $\frac{\partial m}{\partial \rho_f}$ est forte est plus large dans le modèle PNJL

qu'avec NJL. En effet, nous avons trouvé respectivement $T < 220$ MeV contre $T < 150$ MeV dans la figure 3 du chapitre 2. Conscient des résultats de la figure 3 ci-dessus, expliqués par les variations de masses en fonction de la densité, cela laisse entrevoir que l'effet attractif pourrait être plus présent durant le refroidissement du système de quarks grâce à l'inclusion de la boucle de Polyakov.

3.2 Mouvement Brownien relativiste ?

Si nous considérons l'interaction à distance mise en évidence dans le paragraphe précédent et les collisions décrites dans les paragraphes 2.4 et 2.5, nous allons maintenant voir s'il pourrait y avoir un comportement dominant entre les deux. En d'autres termes, si les collisions dominent largement la dynamique, le système pourrait montrer un comportement proche de celui d'un mouvement Brownien relativiste [25]. A l'opposé, si l'interaction à distance est assez forte, cela pourrait induire le mouvement d'implosion évoqué dans le paragraphe précédent.

Afin d'essayer de répondre à cette question, nous avons effectué une autre simulation utilisant le modèle PNJL. Nous avons rassemblé 6 quarks u et 6 quarks d dans un cube de 2 fm de côté, dans les conditions d'un système chaud et dense. Plus précisément, ces 12 quarks dans un volume de 8 fm^3 correspondent à une densité baryonique proche de $3\rho_0$. D'autre part, la quantité de mouvement moyenne de chaque quark est voisine de 780 MeV. En accord avec (9) et conscient des masses des quarks légers dans ces conditions, cela correspond à une température d'environ 250 MeV. Afin de simuler le comportement d'un système infini, les parois du cube sont parfaitement réfléchissantes pour les quarks. Clairement, la quantité de mouvement est modifiée lors d'un rebond, mais pas sa norme. En conséquence, la conservation de l'énergie totale peut être satisfaite. Nous avons vérifié que cela a été vraiment le cas. D'autre part, les collisions inélastiques n'ont pas été incluses dans cette simulation. Cela veut dire que nos quarks ne sont pas modifiés dans ce test. Aussi, comme dans les prochaines simulations, aucun thermostat externe n'a été utilisé.

Les résultats sont présentés dans les figures 5 à 8. Dans les figures 5 et 6, l'évolution de certaines grandeurs physiques pertinentes a été représentée. Cela concerne la masse moyenne et la quantité de mouvement moyenne des quarks, la température moyenne et le champ de Polyakov Φ moyen ressenti par ces particules. Concernant ce dernier, nous avons observé au chapitre 2 que $\bar{\Phi} \approx \Phi$ quelles que soient la température et la densité baryonique. Cela explique pourquoi nous avons seulement représenté Φ dans nos graphes.

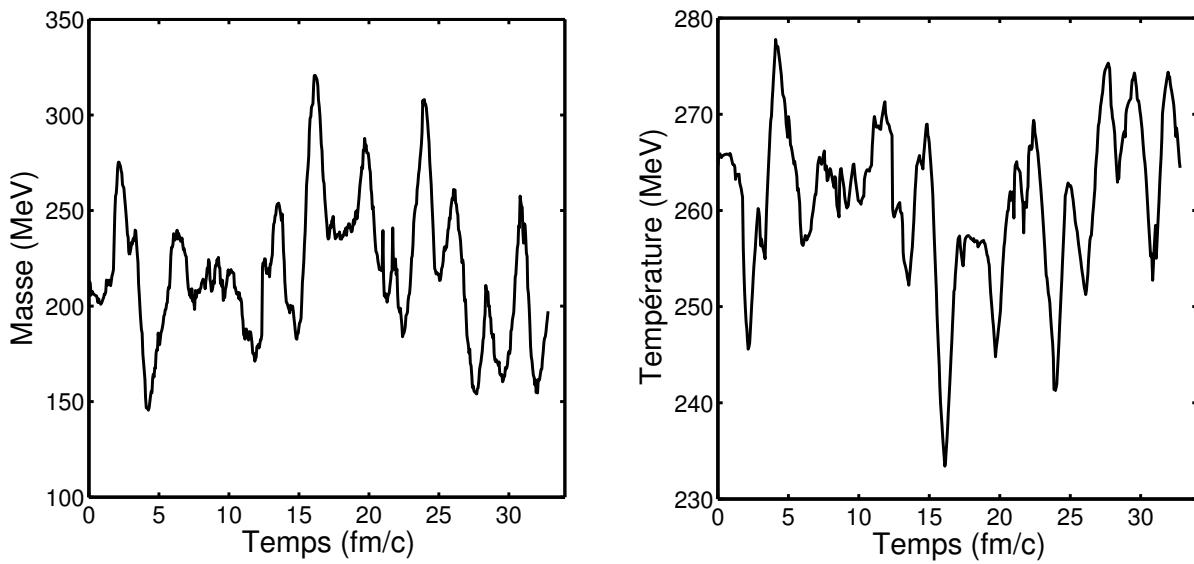


Figure 5. Evolution de la masse moyenne et de la température moyenne en fonction du temps.

Les grandeurs physiques étudiées présentent des fluctuations en fonction du temps, mais aucune déviation n'est observée. La masse oscille autour d'une valeur moyenne proche de 220 MeV. La température moyenne est proche de 250 ou 260 MeV, comme escompté. Aussi, la quantité de mouvement moyenne semble être proche de 780 MeV. D'autre part, nous notons que les variations de la température et de la quantité de mouvement ont quelques similarités. Celles-ci sont explicables avec (9) : grossso modo, la température peut être vue comme une moyenne des quantités de mouvement (de leur norme). De plus, les variations de la masse et de la température semblent être opposées l'une de l'autre. Autrement dit, quand la température est maximale, la masse admet un minimum, et inversement. Cet aspect est explicable par le comportement des masses des quarks en fonction de la température. Plus précisément, pour les températures observées ici, la masse d'un quark léger q décroît presque linéairement quand la température augmente, voir chapitre 2.

En ce qui concerne le champ de Polyakov Φ , il est souvent au-dessus de 0.5. Stricto sensu, le régime « déconfiné » s'identifie à $\Phi \rightarrow 1$. Toutefois, à cause du potentiel effectif utilisé, c'est-à-dire celui de [40, 41], une telle valeur n'est atteinte par construction que pour une température infinie. Dans la pratique, nous avons observé que $\Phi \approx 0.8$ pour $T \approx 400$ MeV. En outre, la valeur de T_0 , c'est-à-dire la température critique de déconfinement dans une théorie de pure jauge [42], a été prise égale à 270 MeV. En conséquence, les valeurs de T et Φ trouvées dans les figures 5 et 6 suggèrent que nous sommes proches de la « transition de déconfinement » dans ce test. Ainsi, notre simulation correspond à la description d'un système plutôt chaud. Il pourrait être associé aux conditions d'un système en train de se refroidir, quand l'hadronisation est supposée intervenir.

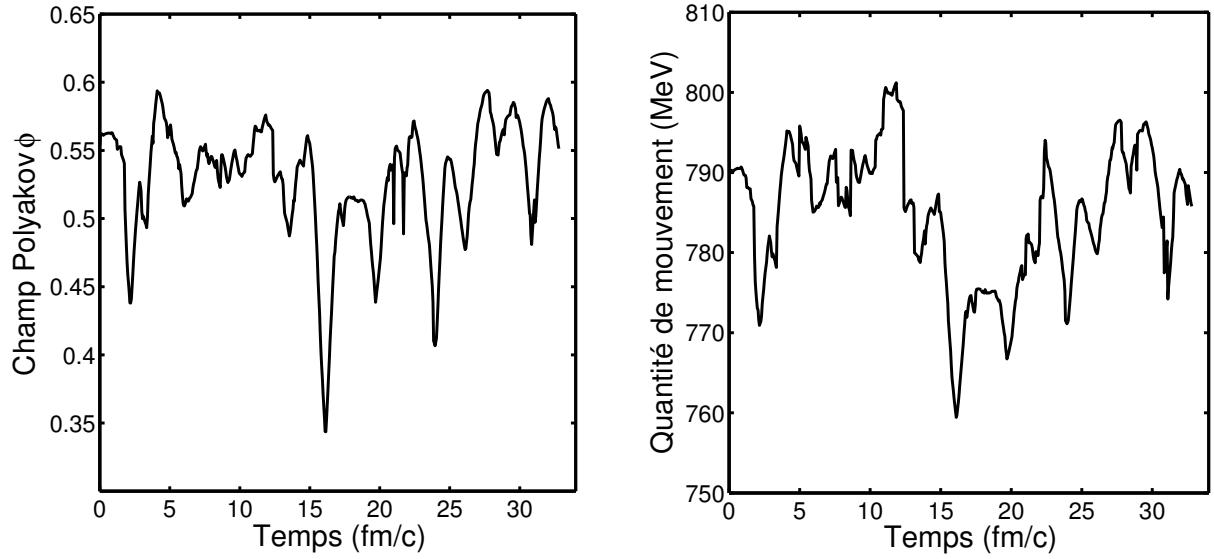


Figure 6. Champ de Polyakov moyen et quantité de mouvement moyenne des particules, en fonction du temps.

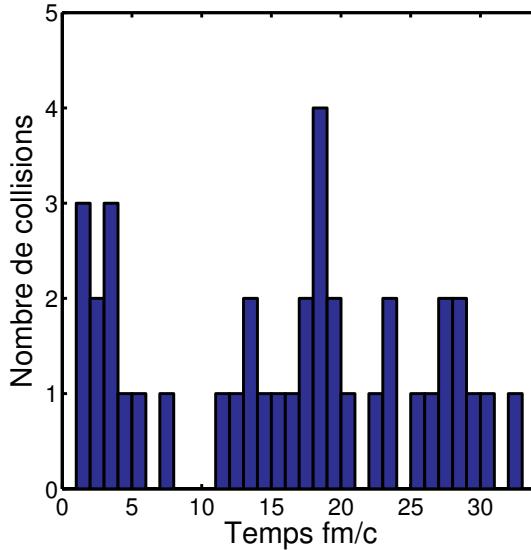


Figure 7. Nombre de collisions en fonction du temps.

L'évolution du nombre de collisions en fonction du temps est représentée dans la figure 7. Le taux de collision est similaire à celui observé dans [24], dans des conditions assez proches. Aussi, ces résultats sont en accord avec ceux des figures 5 et 6. En effet, même si nous observons des variations, les résultats semblent osciller autour d'une valeur moyenne. Cela confirme que nos résultats décrivent l'évolution d'un système à l'équilibre. Ce comportement est parfaitement explicable pour un tel système fermé et isolé. En fait, cet équilibre semble être atteint dès le début de la simulation. D'un point de vue numérique, une déviation des valeurs aurait été le signe d'une possible anomalie dans nos algorithmes, ou d'un pas en temps mal choisi. Plus précisément, dans ce test et dans les suivants, nous avons choisi un pas en temps $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$ fm/c .

Pour justifier ce choix de Δt , nous utilisons la méthode standard utilisée en physique statistique pour estimer le libre parcours moyen λ . Cette quantité correspond à la distance minimale parcourue par une particule entre deux collisions. Nous l'interprétons comme la hauteur d'un cylindre fictif, comme schématisé dans la figure 8 ci-après.

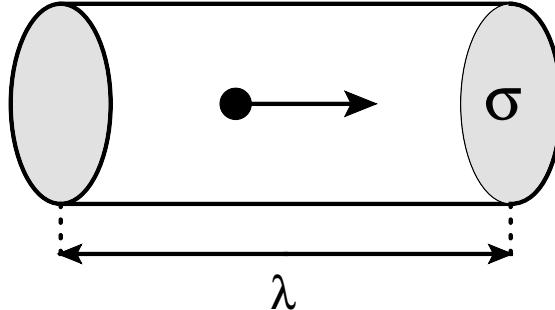


Figure 8. Méthode pour évaluer le libre parcours moyen λ .

L'aire de la base du cylindre correspond à la section efficace σ associée aux collisions entre la particule et les autres de son voisinage. Le volume V du cylindre est le volume maximal que la particule puisse occuper seule. Si nous considérons la densité ρ définie par le nombre de particules/antiparticules divisé par le volume ($\neq \rho_f \dots$), nous avons $\rho \cdot V = 1$. D'autre part, $V = \sigma \cdot \lambda$, de sorte que le libre parcours moyen est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{\rho \cdot \sigma} . \quad (13)$$

Dans notre test, $\rho = 12/2^3$ et $\sigma \approx 2 \text{ mb} = 0.2 \text{ fm}^2$ (diffusion entre deux quarks), ainsi $\lambda \approx 3 \text{ fm}$. D'autre part, grâce au libre parcours moyen, nous pouvons estimer le temps moyen $\Delta\tau$ entre deux collisions. En effet, si nous notons v la vitesse de la particule, il vient $\Delta\tau = (\rho \cdot \sigma \cdot v)^{-1}$. Comme effectué de manière implicite dans [24], nous prenons $v \equiv 1$ (la célérité de la lumière). Cela conduit à minimiser $\Delta\tau$, ainsi nous nous plaçons dans la configuration la plus défavorable. Aussi, nous verrons que cette approximation sera justifiée avec d'autres simulations, figure 28. En conséquence, nous proposons :

$$\Delta\tau = \frac{1}{\rho \cdot \sigma} . \quad (14)$$

Dans ce test, $\Delta\tau \approx 3 \text{ fm}/c$. Puisque notre incrément en temps vaut $\Delta t = 5 \times 10^{-2} \text{ fm}/c$, nous concluons que la condition $\Delta t < \Delta\tau$ est satisfaite, c'est-à-dire que notre incrément en temps a été correctement choisi. Dans d'autres simulations, des sections efficaces plus fortes sont considérées, notamment $\sigma \approx 100 \text{ mb} = 10 \text{ fm}^2$ pour $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ dans certaines conditions. Si nous gardons la valeur de ρ utilisée dans les calculs précédents (surestimant les valeurs réellement trouvées dans ces simulations), nous trouvons maintenant $\Delta\tau = 7 \times 10^{-2} \text{ fm}/c$, de sorte que notre choix de Δt est toujours valide.

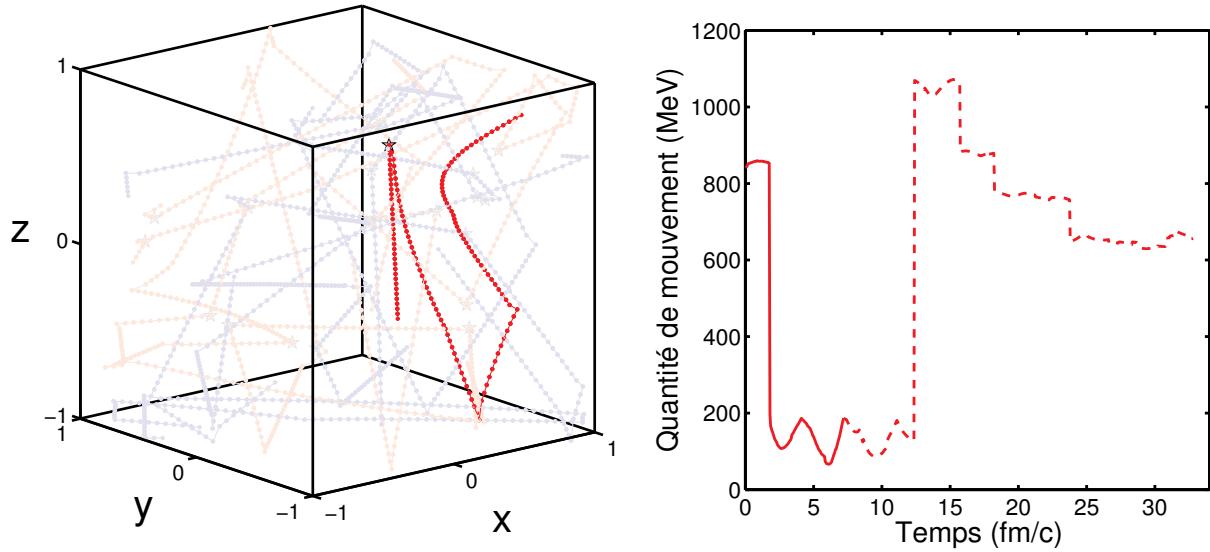


Figure 9. Simulation de 12 quarks légers dans un cube, et détail de la quantité de mouvement de l'un de ces quarks.

Maintenant, focalisons-nous sur la figure 9. Dans la partie gauche de cette figure, les trajectoires des quarks sont représentées, dans les premiers instants de la simulation, c'est-à-dire $0 \leq t \leq 7.2 \text{ fm/c}$. Nous avons souligné la trajectoire d'un de ces quarks, afin de faciliter la lecture du graphe. D'autre part, les collisions entre les quarks sont matérialisées par des étoiles, mais pas les rebonds de ces particules sur les parois du cube. Dans la partie droite de la figure 9, la valeur de la quantité de mouvement du quark souligné est tracée en fonction du temps. La partie de la courbe en trait plein correspond aux temps de simulation réellement représentés dans la partie gauche de la figure. A l'opposé, la partie de la courbe en pointillés est associée à l'évolution de la quantité de mouvement du quark pour les moments ultérieurs de la simulation.

Dans l'ensemble, nous remarquons que les trajectoires sont des lignes droites. Cela suggère que l'interaction à distance identifiée dans le paragraphe précédent n'intervient pas dans cette simulation. Cela peut être expliqué par plusieurs raisons, comme les hautes températures du milieu, comme expliqué au paragraphe 3.1. Plus précisément, les quantités de mouvement des particules sont plus fortes que dans les figures 3 et 4. Clairement, l'interaction à distance n'a pas le temps de réellement influencer les mouvements des quarks. Ensuite, un autre argument est la promiscuité des quarks, induisant un environnement plutôt constant. Comme mentionné précédemment, l'interaction à distance n'intervient réellement que quand les paramètres externes ressentis par les particules présentent des variations suffisantes.

Toutefois, le quark souligné est une exception à ce comportement général. En fait, sa trajectoire est fortement courbée, notamment dans la partie droite du graphe tridimensionnel. Cette portion de la trajectoire correspond à des temps de simulation entre 3 et 7.2 fm/c. Pour $t \approx 7.2 \text{ fm/c}$, le quark va vers le coin supérieur droit du graphe. La déviation du quark a été induite par les autres quarks présents dans son voisinage, en accord avec le comportement décrit dans les figures 3 et 4. En fait, dans la partie droite de la figure 9, pour $3 < t < 7.2 \text{ fm/c}$, la quantité de mouvement du quark est largement réduite par rapport à celles des autres quarks, voir figure 6, car elle est inférieure à 200 MeV. Cette observation confirme nos observations précédentes : l'interaction à distance entre quarks ne peut réellement agir que sur des quarks lents. Dans le cadre du refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks,

impliquant (au moins initialement) de hautes températures, donc des quarks rapides, l'influence de cette interaction à distance semble être assez limitée. En conséquence, les collisions semblent diriger la dynamique des quarks, et dominer les effets de l'interaction à distance. En accord avec ces résultats, le mouvement des quarks peut être comparé au modèle du mouvement Brownien relativiste.

4. Premières simulations

4.1 Comparaison entre les résultats NJL et PNJL

Maintenant, procédons à des simulations complètes, en considérant des systèmes ouverts. En d'autres termes, nous ne considérons pas une boîte, comme dans le paragraphe précédent, qui confine les particules. Nous considérons un système sphérique composé initialement avec des quarks et antiquarks légers, voir table 3 et partie gauche de la figure 10. La matière domine l'antimatière. En effet, le rapport quarks/antiquarks est proche de 1.5. Aussi, notre système ne contient pas initialement des quarks/antiquarks étranges. La sphère est inhomogène pour ce qui est des quantités de mouvement des quarks, comme visible sur la partie droite de la figure 10. Ce profil est comparable à celui de [24]. Puisque des quantités de mouvement importantes sont synonymes de hautes températures, l'objectif est clairement d'obtenir une structure en couches, avec un cœur chaud et des couches externes plus froides. La figure 13 montre que les profils en température obtenus sont en accord avec cette description.

Particules	u	\bar{u}	d	\bar{d}
Nombre	30	20	36	25

Tableau 3. Composition initiale du système.

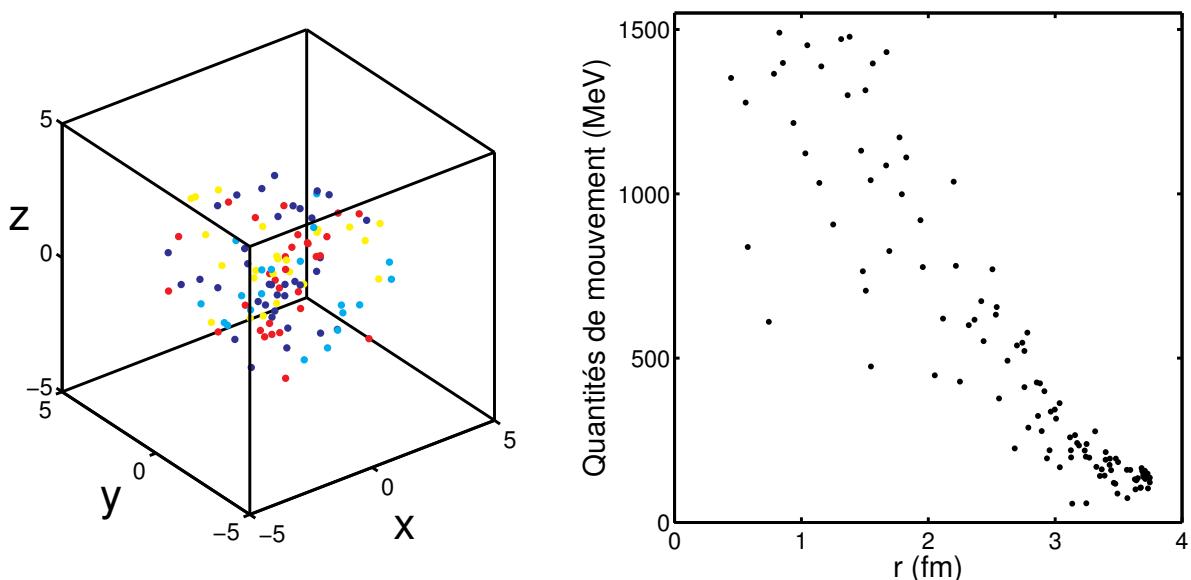


Figure 10. Partie gauche : positions initiales des quarks. Partie droite : leurs quantités de mouvement initiales en fonction de la distance par rapport au centre du système.

La simulation de l'expansion/hadronisation de ce système a été effectuée dans les modèles NJL et PNJL, en utilisant chaque fois exactement les mêmes conditions initiales que celles décrites plus haut. Les résultats correspondant sont présentés dans les figures 11, 12 et dans le tableau 4. Concernant les versions en couleur de cette thèse, ces figures utilisent la convention de couleur donnée dans l'annexe G. L'évolution du nombre de quarks/antiquarks en fonction du temps est exposée dans la figure 11, alors que la figure 12 concerne les mésons. Ces données correspondent à deux simulations, mais nous avons vérifié que d'autres tests ont donné des résultats très proches. Plus précisément, dans l'algorithme de collisions décrit paragraphe 2.4, les collisions sont déterminées en prenant en compte des considérations stochastiques, même si chaque réaction est prise en compte, et chacune est pondérée par sa section efficace correspondante dans ce « choix ». Cela induit des fluctuations statistiques. Cependant, nous avons vérifié que les variations concernent peu de particules dans les résultats décrits ci-après, typiquement moins de 5 quarks/mésons. D'autre part, à propos de la procédure de collision, conscient de la fragilité relative des antiparticules composites, c'est-à-dire \bar{D} et \bar{B} , ces objets n'ont pas été inclus dans ces simulations. Les réactions présentées dans le tableau 2 qui incluent ces antiparticules ont été désactivées. D'un point de vue numérique, les réactions ont été prises en compte dans l'algorithme, mais le programme a retourné des sections efficaces nulles pour elles.

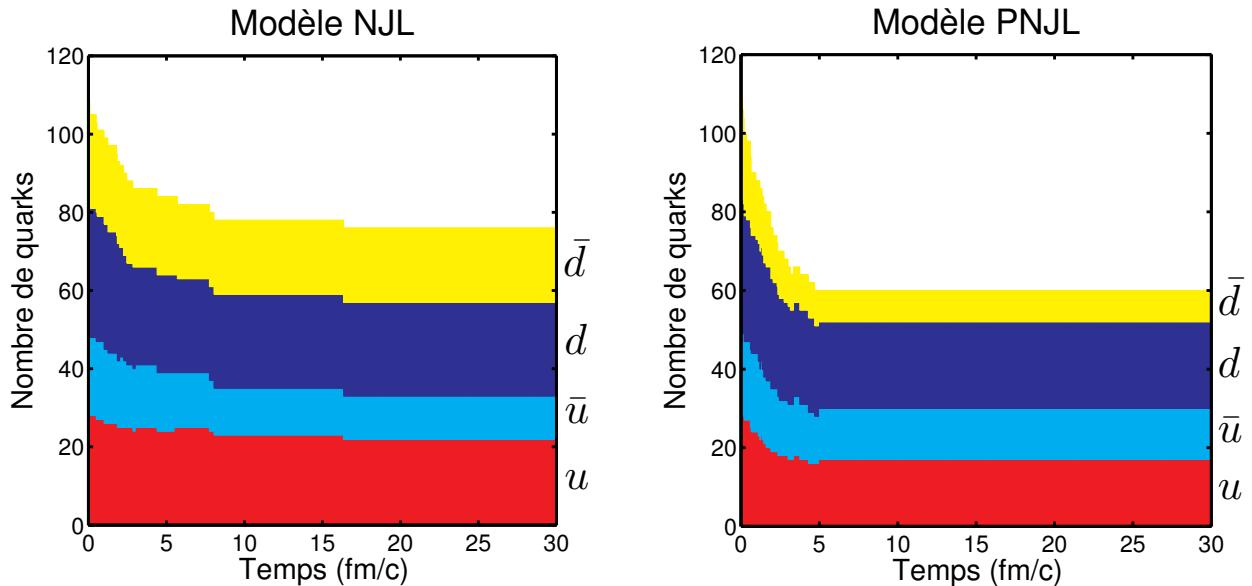


Figure 11. Comparaison de la consommation de quarks/antiquarks dans les modèles NJL et PNJL.

Dans ces simulations, nous avons vu que l'interaction à distance entre quarks intervient de manière négligeable sur les résultats. Cela confirme notre conclusion formulée au paragraphe 3.2. Clairement, comme nous pouvons le voir sur la figure 10, les quarks localisés initialement dans les couches les plus externes semblent être assez lents pour subir cette interaction de manière notable. En fait, cela entraîne des modifications sur les trajectoires des quarks. Cependant, puisque les sections efficaces peuvent être fortes, notamment pour des réactions comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, les déviations des trajectoires ne sont pas assez importantes pour intervenir dans les collisions. En outre, les quarks provenant du cœur ou des couches chaudes sont certainement trop rapides pour subir l'interaction à distance. En conséquence, des trajectoires rectilignes ont été trouvées pour eux.

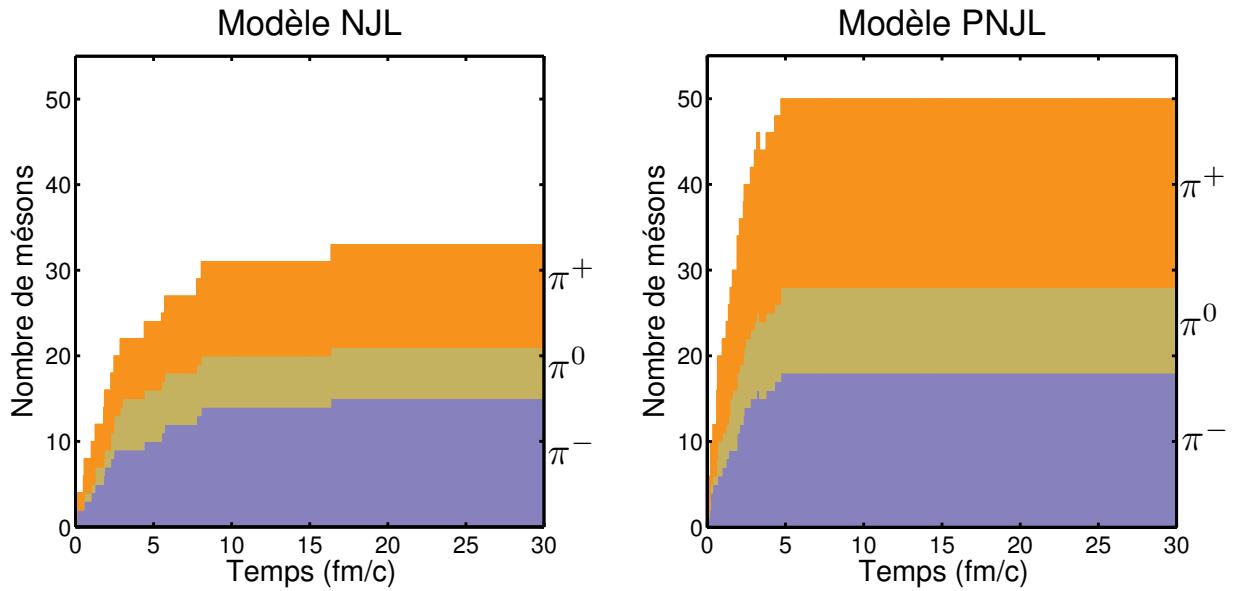


Figure 12. Production des mésons dans les modèles NJL et PNJL.

Qualitativement, la production de mésons décrite dans la figure 12 concerne seulement des pions. Nos simulations ne prennent pas en compte la symétrie isospin, donc π^- , π^0 et π^+ sont indépendants. Mais, les résultats ne montrent pas de production de η ou de kaons. De la même manière, dans la figure 11, aucune production de quark ou d'antiquark étrange n'a été observée. En fait, même si nous n'avons pas inclus de particules/antiparticules étranges dans la composition initiale du système, ils peuvent apparaître au sein dudit système via des collisions, voir tableau 2. Toutefois, comme montré dans [43] dans le cas de $u + \bar{u} \rightarrow s + \bar{s}$ et dans [35] pour $u + \bar{d} \rightarrow K^+ + \bar{K}^0$ ou $u + \bar{u} \rightarrow K^- + K^+$, les sections efficaces des réactions produisant de la matière étrange sont réduites par rapport à celles qui utilisent exclusivement des particules légères. Cela explique l'absence de matière étrange dans ces simulations, même s'il était en théorie possible d'en observer. En fait, dans certains tests similaires à ceux décrits ici, nous avons toute de même observé la production de kaons.

Concernant l'évolution de la population des quarks/antiquarks et des mésons, nous notons tout d'abord que leurs populations ne semblent pas varier après $t > 20$ fm/c. Cette remarque est valide pour les modèles NJL et PNJL. Pour les deux, les simulations se sont arrêtées à $t = 30$ fm/c. Ainsi, ce temps correspond à « l'état final » du système. Le tableau 4 nous montre sa composition à cet instant là. Puisque dans ces simulations la production de diquarks et baryons est fortement réduite, l'évolution du système peut être décrite uniquement par les figures 12 et 13, c'est-à-dire en étudiant les quarks/antiquarks et les mésons. Dans l'ensemble, la production de mésons est optimale dans les premiers instants de la simulation. Cela induit une diminution de la population de quarks/antiquarks de manière symétrique. Cette forte mésonisation est expliquée par la haute concentration de quarks et d'antiquarks, conduisant à un taux de collision important. Comme vu précédemment, l'interaction attractive entre quarks décrite au paragraphe 3.2 n'intervient pas de manière notable. En conséquence, le système s'étend spatialement. Puisque le système est libre (ouvert), une telle expansion est sans limitation. Cela entraîne une dilution des particules, donc une diminution du taux de collision.

Quand l'expansion devient trop forte, les particules n'interagissent plus. Cela explique la stagnation observée quand $t > 20$ fm/c.

Particules	Quarks	Mésons	Diquarks	Baryons
NJL	76	33	1	1
PNJL	60	50	0	1

Tableau 4. Composition du système à $t = 30$ fm/c.

Qualitativement, des différences sont observables entre les modèles NJL et PNJL. Cela constitue un aspect important de nos résultats. La production de mésons est plus rapide et plus efficace dans le modèle PNJL que pour un modèle NJL pur. Plus précisément, le nombre de mésons stagne dans le modèle PNJL pour $t > 5$ fm/c, alors que cette stagnation intervient après 15 fm/c dans le modèle NJL. De plus, la production de mésons est de 50 avec PNJL, contre 33 avec NJL. Une telle différence induite par l'ajout de la boucle de Polyakov peut être expliquée en étudiant les figures 13 et 14 ci-après. La figure 13 décrit la température initiale ressentie par chaque quark/antiquark. La figure 14 étudie leurs masses initiales. Les deux figures permettent une comparaison entre ces deux modèles. Clairement, même si les positions et quantités de mouvement initiales sont strictement égales pour les simulations NJL et PNJL, figure 10, l'estimation des masses des quarks et des températures ne donnent pas les mêmes résultats pour les deux modèles. D'autre part, dans notre modèle dynamique, nous rappelons l'interdépendance entre la masse et la température : les masses des quarks sont estimées à une température donnée (voir chapitre 2) et les températures requièrent les masses des quarks dans l'estimation des énergies (9). Donc, ces quantités ne peuvent pas être étudiées séparément. Une conséquence de l'inclusion de la boucle de Polyakov est que les températures sont plus basses dans le modèle PNJL que dans le NJL. A l'opposé, les masses sont plus fortes avec PNJL qu'avec NJL. Ces différences sont particulièrement visibles dans le cœur du système, c'est-à-dire pour $r < 1.5$ fm.

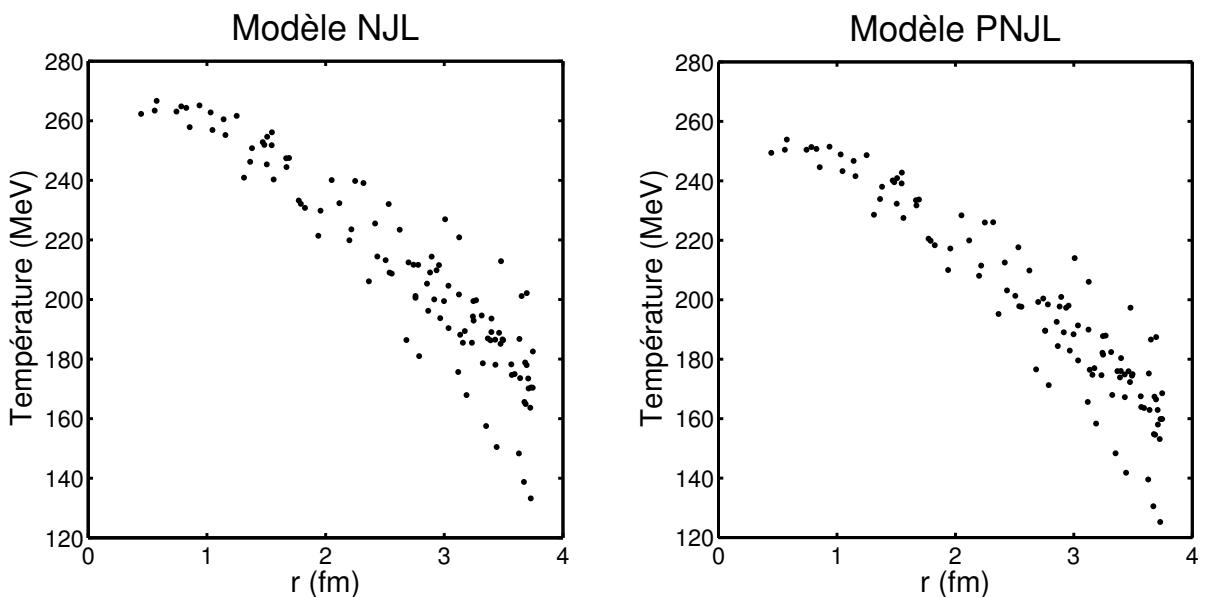


Figure 13. Températures initiales dans les modèles NJL et PNJL.

En fait, il peut être observé que la différence de masse entre les modèles (P)NJL intervient dans la première équation de (11), via l'énergie. Pour une quantité de mouvement identique, puisqu'un quark PNJL est plus lourd, on s'attend à ce que le terme p/E soit plus réduit pour ce quark. En conséquence, $\frac{dr}{d\tau}$ devrait être plus faible. Ainsi, la vitesse d'un quark PNJL devrait être plus faible qu'avec NJL. Donc, cela devrait réduire la vitesse de l'expansion. Toutefois, la plupart des quarks sont hautement relativistes, donc cette explication ne peut pas expliquer les différences obtenues.

Clairement, une explication plus pertinente concerne directement les valeurs des sections efficaces. Selon le travail effectué dans le chapitre précédent, la température optimale (à densité nulle) de mésonisation, via $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, semble être proche de 230 MeV dans le modèle NJL, contre 280 MeV dans le modèle PNJL. En fait, $u + \bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ est la réaction dominante de celles écrites comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, et ces résultats peuvent être extrapolés aux autres réactions de mésonisation de ce type, mettant en jeu des quarks légers et des pions [35]. De plus, la réaction élastique $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$ est optimale pour une température 20 MeV au dessus de celle trouvée pour le processus de mésonisation, dans les descriptions NJL et PNJL. A la lumière de ces informations et avec la partie gauche de la figure 13, pour la simulation NJL, nous concluons qu'une partie significative du système est initialement trop chaude pour subir le phénomène de mésonisation. Clairement, dans le cœur, les réactions élastiques entre les quarks et/ou les antiquarks ont dû dominer les réactions inélastiques de mésonisation, au moins dans les premiers instants de l'expansion. Cela entraîne alors une production de mésions réduite, qui s'est produite principalement dans les couches externes. A l'opposé, pour la simulation PNJL, partie droite de la figure 13, tout le système est initialement en dessous de $T = 280$ MeV. Même si la mésonisation n'est pas optimale pour des températures modestes, les sections efficaces y restent tout de même assez fortes, notamment au niveau du seuil cinématique [35, 44]. En conséquence, dans la simulation PNJL, la mésonisation peut démarrer dans tout le système dès le début de la simulation, entraînant alors une production de mésions plus rapide et plus efficace.

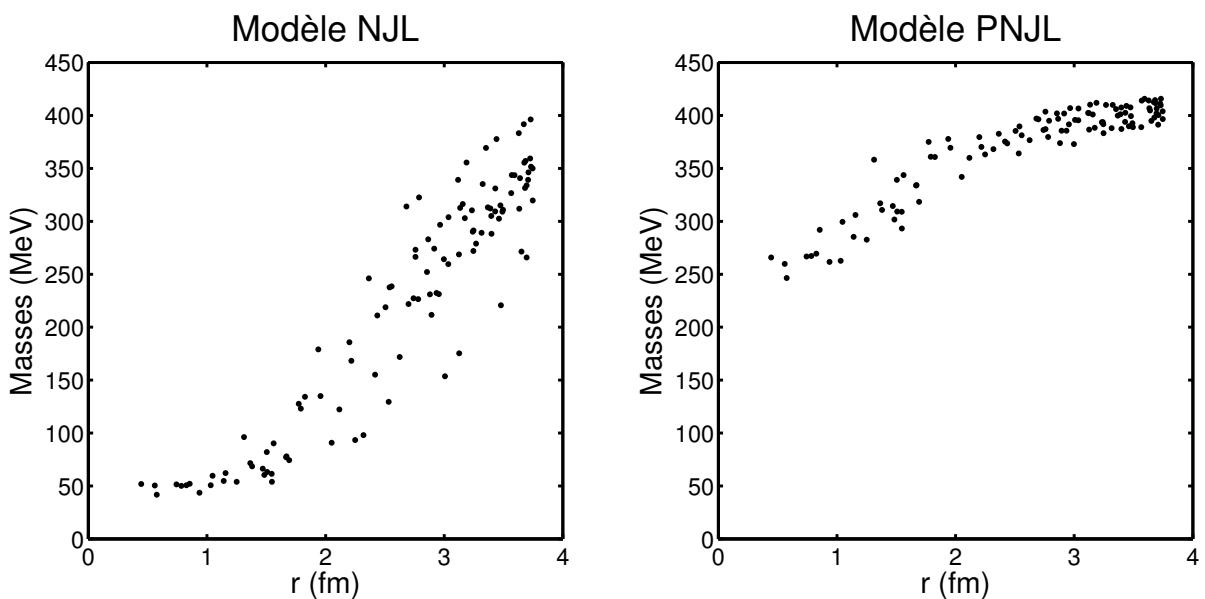


Figure 14. Masses initiales dans les modèles NJL et PNJL.

Toutefois, même le modèle PNJL ne parvient pas à une hadronisation complète dans ces simulations. Plus précisément, 68 % des quarks/antiquarks sont toujours libres à la fin de la simulation avec le modèle NJL, et 54 % dans la version PNJL. Même s'il est imaginable d'améliorer ces résultats, notamment au niveau de la composition du système, de sa géométrie, des quantités de mouvement initiales, etc., les modèles (P)NJL seuls ne semblent pas capables de permettre une hadronisation complète d'un tel système. En fait, une explication de ce phénomène pourrait être associée à la faiblesse relative des sections efficaces des réactions de baryonisation, notamment par rapport aux sections efficaces trouvées pour $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Ainsi, il est réaliste d'atteindre des taux d'hadronisation élevés avec des systèmes composés équitablement par des quarks et des antiquarks. Dans ces systèmes, une hadronisation totale est possible, exclusivement via une mésonisation, c'est-à-dire en négligeant les réactions de baryonisation, comme dans [24]. En fait, nous avons précédemment vu la possibilité de modéliser une interaction de courte portée entre les quarks. Mais, celle-ci s'est révélée être trop limitée. En conséquence, nos résultats montrent la nécessité d'une interaction à longue portée entre les quarks/antiquarks, comme celle observée dans le cadre de la QCD. Clairement, la finalité d'une telle interaction est de réduire la vitesse d'expansion du système, au moins pour les quarks/antiquarks, afin de permettre aux quarks de se combiner, pour former des diquarks et ensuite des baryons.

4.2 Une solution pour permettre une hadronisation complète

Pour résoudre le problème évoqué dans le paragraphe précédent, plusieurs solutions sont possibles. La finalité est de trouver un mécanisme qui puisse modéliser l'interaction à longue portée dont nous avons parlé. Cela pourrait entraîner une modification des modèles (P)NJL utilisés. Toutefois, dans ce travail, nous proposons d'ajouter une sphère qui confinera le système de quarks et antiquarks décrit à la figure 10 dans une « phase QGP », et donc qui mimera le comportement d'une force de rappel à longue portée. Comme avec la boîte décrite paragraphe 3.2, la paroi de la sphère est réfléchissante selon la loi de Descartes sur la réflexion. Cependant, les seules particules concernées sont les quarks, antiquarks et les éventuels diquarks rassemblés dans la sphère. À l'opposé, les particules non colorées, comme les mésons et les baryons, peuvent quitter la sphère librement. Puisque les populations de quarks, antiquarks et diquarks vont évidemment décroître avec le temps, le rayon de la sphère est mis à jour à chaque itération en temps. Plus précisément, le volume de la sphère est proportionnel au nombre total de quarks/antiquarks, libres ou combinés dans des diquarks. Cette phase QCD est supposée présenter une symétrie sphérique durant la simulation. En conséquence, le centre de la sphère coïncide avec le centre du système.

L'évolution des populations de chaque type de particules est proposée dans les figures 15 à 17. Dans cette simulation, nous avons fait appel au modèle PNJL. Nous pouvons observer que la sphère permet d'obtenir une hadronisation complète, puisque le nombre total de quarks et d'antiquarks converge vers zéro (et atteint zéro), et il n'y a pas de diquark à la fin de la simulation. En fait, l'hadronisation s'est totalement terminée au temps 86.6 fm/c. Ce temps est plus long que celui escompté dans des références comme [16, 24]. Cependant, l'évolution du nombre de quarks/antiquarks et de mésons, observés figures 15 et 16, rappelle celle prédicta dans [16]. En effet, la production de mésons est forte dans les premiers instants de la

simulation, jusqu'à $t \approx 8$ fm/c, via les réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Ensuite, la production commence à être moins rapide, jusqu'à $t \approx 25$ fm/c. Après cela, les variations du nombre de mésons sont lentes, mais assez régulières. Mais, dans cette dernière phase, la production de mésons est permise par des réactions comme $q + D \rightarrow M + B$, et non par $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. En fait, même si la sphère évite que les quarks/antiquarks quittent la phase QGP, le taux de collision tend à décroître avec le temps. Comme observé dans la figure 25 avec une autre simulation, cette diminution ne peut pas être associée à une modification des conditions dans la phase QGP. En effet, il a été trouvé qu'un effet indirect de la sphère est de stabiliser la température et les densités dans cette phase. La raison de la diminution du taux de collision est liée à des considérations cinématiques. Clairement, avec des réactions comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, les sections efficaces sont maximales au niveau du seuil cinématique. Cela veut dire que la probabilité de création de mésons est optimale si les quantités de mouvement du quark et de l'antiquark incidents sont réduites dans le référentiel du centre de masse de ces deux particules, annexe F. Au début de la simulation, le grand nombre de quarks et d'antiquarks rend cette condition cinématique hautement probable. Mais, au fur et à mesure que le nombre de quarks et d'antiquarks diminue, la probabilité décroît également. Ce comportement peut être comparé aux processus décrits par la loi exponentielle. En outre, les quarks et antiquarks rapides ne sont clairement pas favorisés en ce qui concerne cette condition cinématique. Ils peuvent rester dans la phase QGP pendant longtemps avant leur hadronisation. Cependant, les réactions élastiques permettent de diminuer leurs quantités de mouvement, et elles permettent ainsi à ces particules de réagir plus facilement via des réactions inélastiques.

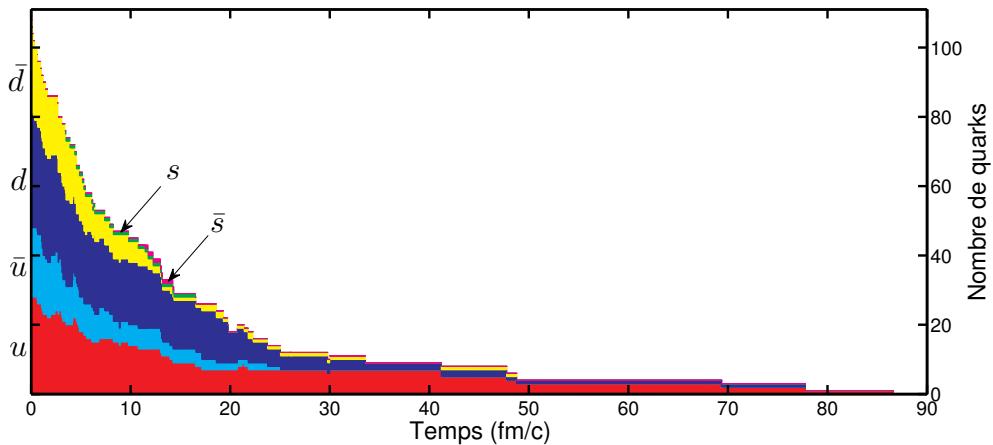


Figure 15. Evolution de la population de quarks-antiquarks en fonction du temps.

D'autre part, des quarks/antiquarks rapides peuvent aussi être de bons candidats pour réagir via des réactions mettant en jeu de la matière étrange. Comme vu précédemment, nous pouvons citer $u + \bar{u} \rightarrow s + \bar{s}$, $u + \bar{d} \rightarrow K^+ + \bar{K}^0$ ou $u + \bar{u} \rightarrow K^- + K^+$. Ces réactions ont des sections efficaces réduites, mais leurs seuils cinématiques sont plus forts que pour les réactions mettant en jeu uniquement des particules légères. Elles ne peuvent pas être négligées pour des valeurs de \sqrt{s} modérées [35, 43]. L'inclusion de la sphère évite que les quarks/antiquarks rapides quittent le système, et dans le même temps elle permet d'accroître le nombre de collisions durant la simulation entière. En conséquence, la figure 15 montre que des quarks et antiquarks étranges ont été produits, par exemple via $q + \bar{q} \rightarrow s + \bar{s}$. En outre, une production de kaons a été observée, figure 36 et tableau 5. Comme escompté, cette

production est réduite par rapport à celle des pions. Aussi, un Σ^+ a été produit, figure 37 et tableau 5.

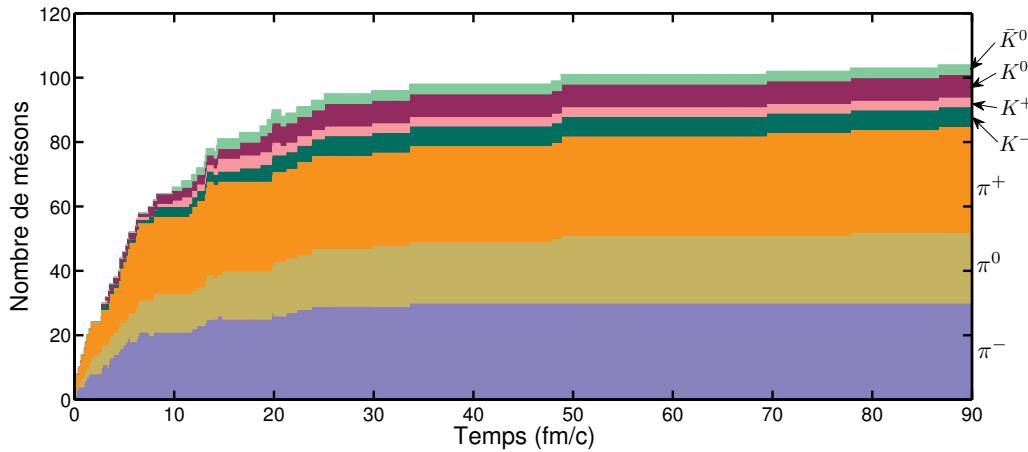


Figure 16. Production des mésons en fonction du temps.

Particules	π^-	π^0	π^+	K^-	K^+	K^0	\bar{K}^0	Neutron	Proton	Σ^+
Nombre	30	22	33	6	3	7	3	4	2	1

Tableau 5. Composition finale du système.

Concernant les baryons, leur production a démarré plus tard dans cette simulation, c'est-à-dire après 16 fm/c. Dans cette description, nous ne prenons pas en compte les nucléons formés au tout début de la simulation, car ils ont été rapidement détruits par des réactions inélastiques. Ces observations confirment notre scénario qui imaginait que la mésonisation interviendrait avant la baryonisation, afin de « consommer » assez d'antiquarks pour bloquer les réactions inélastiques qui peuvent détruire les baryons, comme $\bar{q} + B \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + B \rightarrow M + D$. D'autre part, aucun antiquark libre (non combiné dans un méson) n'a été trouvé dans le système, tout d'abord pour $t \approx 33,6$ fm/c, et ensuite définitivement pour $t \approx 48,8$ fm/c. Clairement, la mésonisation, via $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, s'est achevée nettement plus tôt que la baryonisation.

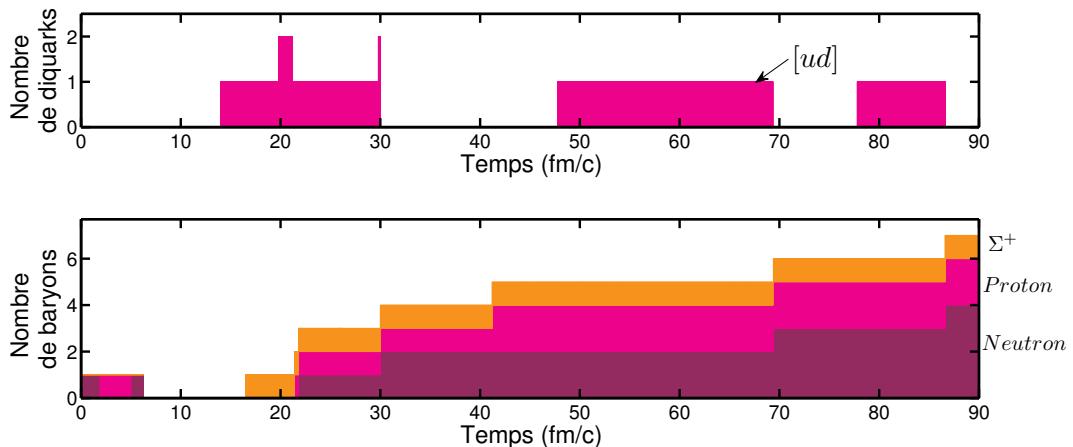


Figure 17. Nombre de diquarks et baryons en fonction du temps.

5. Etude complète d'une simulation

Les simulations précédentes ont fait intervenir un nombre réduit de particules. En conséquence, la production de diquarks assez modeste observée dans la figure 17 ne peut pas être considérée comme un résultat général. Ainsi, nous avons effectué une autre simulation PNJL, mettant en jeu 279 particules. La composition initiale est donnée par le tableau 6. Par rapport aux simulations précédentes, tableau 3, l'asymétrie entre la matière et l'antimatière a été renforcée. Plus précisément, le rapport quarks/antiquarks est maintenant égal à 2. Comme précédemment, aucun quark/antiquark étrange n'est présent initialement dans le système. Les positions et quantités de mouvement initiales sont représentées sur la figure 18. Dans la simulation précédente, le rayon initial était de 3.8 fm. Maintenant, il est de 4.5 fm. D'autre part, comme nous pouvons le voir sur la figure 18, les quantités de mouvement maximales peuvent largement dépasser 1500 MeV, c'est-à-dire plus que les quantités de mouvement décrites figure 10.

Particules	u	\bar{u}	d	\bar{d}
Nombre	86	43	100	50

Table 6. Composition initiale du système.

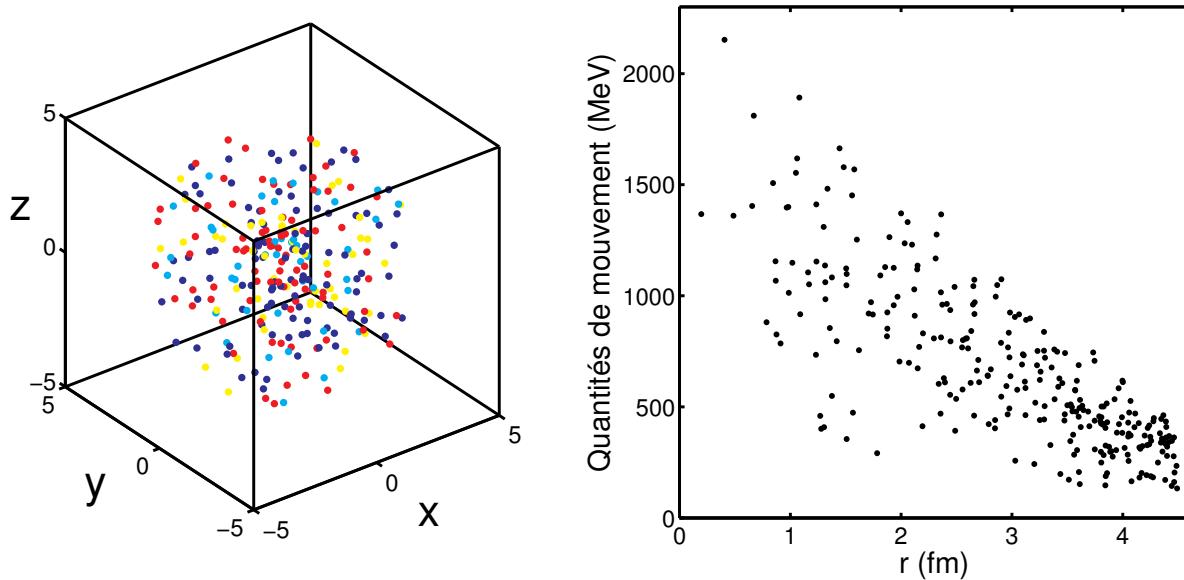


Figure 18. Positions et quantités de mouvement initiales des quarks-antiquarks de notre système.

Ces conditions initiales induisent un système chaud et dense. Cette affirmation est confirmée par les figures 19–21. Tout d'abord, dans la partie droite de la figure 19, la température dans le cœur peut dépasser 300 MeV. Cela veut dire que nous sommes au dessus de la température de mésonisation optimale $T = 280$ MeV. La température décroît régulièrement au fur et à mesure que le rayon augmente. Dans les couches les plus externes, les valeurs de la température sont plus fortes que 180 MeV. Dans la partie gauche de la figure 19, les masses des quarks/antiquarks semblent être réduites dans le cœur, mais restent plus fortes que leurs masses nues. En effet, dans le cadre du modèle PNJL, les masses des quarks nus peuvent seulement être atteintes pour des températures supérieures ou égales à 400 MeV, voir

chapitre 2. Cependant, puisque les valeurs du champ de Polyakov Φ sont proches de 0.7 dans le cœur, figure 21, nous pouvons considérer que les quarks/antiquarks sont là dans une phase « déconfinée ».

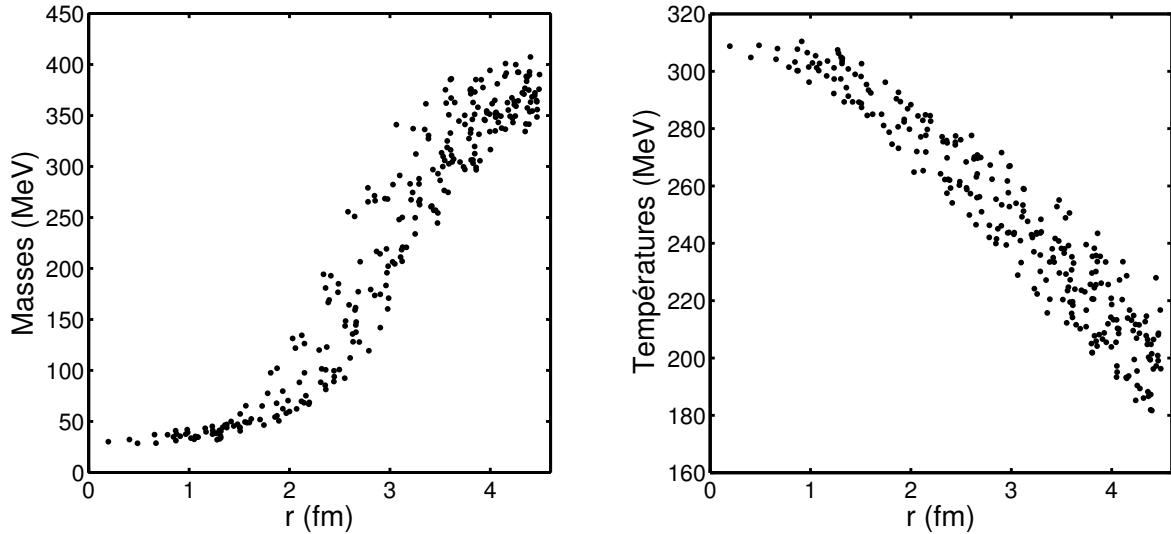


Figure 19. Masses et températures initiales des quarks-antiquarks.

D'autre part, dans les simulations précédentes, les densités n'ont pas été prises en compte dans nos descriptions. Mais, dans le cadre de cette simulation, de fortes densités ont été trouvées, comme le prouve la figure 20. Les profils des densités ρ_u et ρ_d sont similaires, mais les densités trouvées pour ρ_d sont légèrement plus élevées que celles de ρ_u , en raison de l'excès de quarks d par rapport aux u , tableau 6. En fait, grâce à la relation $\rho_B = 2/3 \rho_q$ [26] utilisée dans le cadre de la symétrie isospin, avec $\rho_s \equiv 0$, nous concluons que la densité baryonique est proche de $3\rho_0$ dans le cœur.

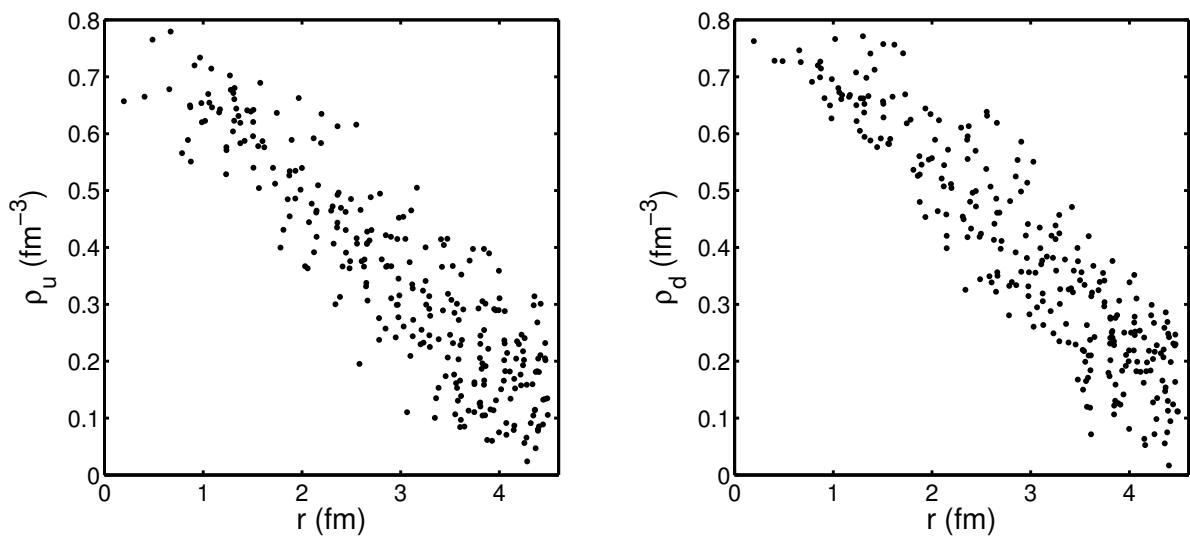


Figure 20. Densités initiales.

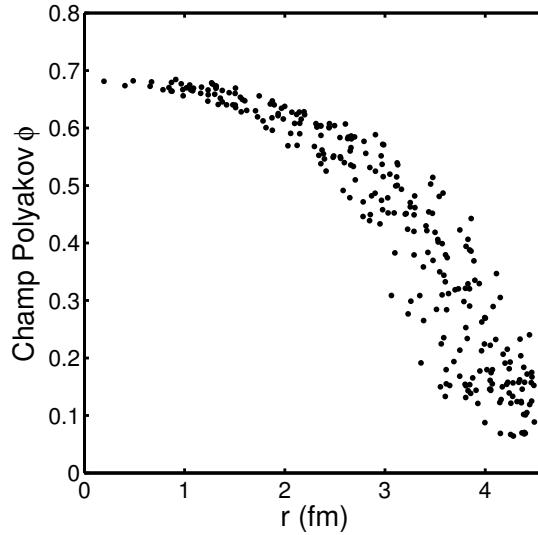


Figure 21. Valeurs initiales du champ de Polyakov ressentie par les quarks et antiquarks.

L’annexe G propose une visualisation des positions des particules en fonction du temps. D’autre part, l’évolution des populations des particules est représentée sur la figure 22. Concernant les quarks/antiquarks et les mésons, les évolutions observées rappellent fortement celles trouvées dans la simulation précédente, figures 15 et 16. Grossièrement, la population de quarks/antiquarks est exponentiellement décroissante. Cependant, pour les diquarks et les baryons, des différences sont observables par rapport à la figure 17. Dans la simulation précédente, les diquarks ont été produits de manière très ponctuelle. Ici, une production massive de diquarks a eu lieu dans les premiers instants de l’expansion, jusqu’à $t \approx 10$ fm/c. Pendant environ 15 fm/c, le nombre de diquarks stagne, et ensuite il décroît exponentiellement. En ce qui concerne les baryons, leur formation n’a réellement démarré qu’à 3.7 fm/c. Dans un premier temps, le nombre de baryons est réduit, jusqu’à $t \approx 25$ fm/c. Ensuite, la production devient plus forte. Ce comportement est directement explicable par la consommation des diquarks, afin de former les baryons. Après 60 fm/c, la production commence à être plus réduite, et stagne après 102 fm/c. En fait, l’évolution des populations de diquarks et baryons rappelle fortement ce qui est observé en chimie. Plus précisément, les diquarks jouent parfaitement le rôle d’intermédiaires réactionnels. Clairement, par leur production non négligeable, ils permettent une création de baryons plus efficace. C’est vrai notamment pour $30 < t < 60$ fm/c. Dans cette simulation, ce comportement est explicable par les températures et densités obtenues dans certaines couches du système, permettant des réactions comme $q + q \rightarrow M + D$. En effet, il a été vu dans le chapitre 6 que ces réactions ont des sections efficaces optimales pour des densités proches de $2 - 3\rho_0$ et des températures d’environ 200 MeV, ou légèrement plus.

Qualitativement, la figure 22 est complétée par le tableau 7. Celui-ci décrit la composition finale du système, une fois que l’hadronisation est complète, c'est-à-dire pour $t = 133.4$ fm/c. Comme avec le tableau 5, la production de pions est forte. Clairement, ils représentent environ 79 % des particules trouvées à la fin de la simulation. Aussi, une production de 26 nucléons est observable : ils représentent légèrement moins de 10 % de l’ensemble des particules. De plus, des particules étranges ont également été produites. En fait, puisque nous avons considéré plus de particules et puisque nous avons atteint des températures plus hautes que dans la simulation précédente, nous avons réussi à produire des particules rares.

Clairement, grâce aux conditions rencontrées dans cette simulation, des paires s, \bar{s} ont été produites. Cela a permis notamment la formation d'un diquark comme $[us]$. Dans l'état final, nous remarquons la présence de mésons η et d'hypérons Σ^-, Σ^+ . Ces particules sont formées par des réactions ayant des sections efficaces limitées.

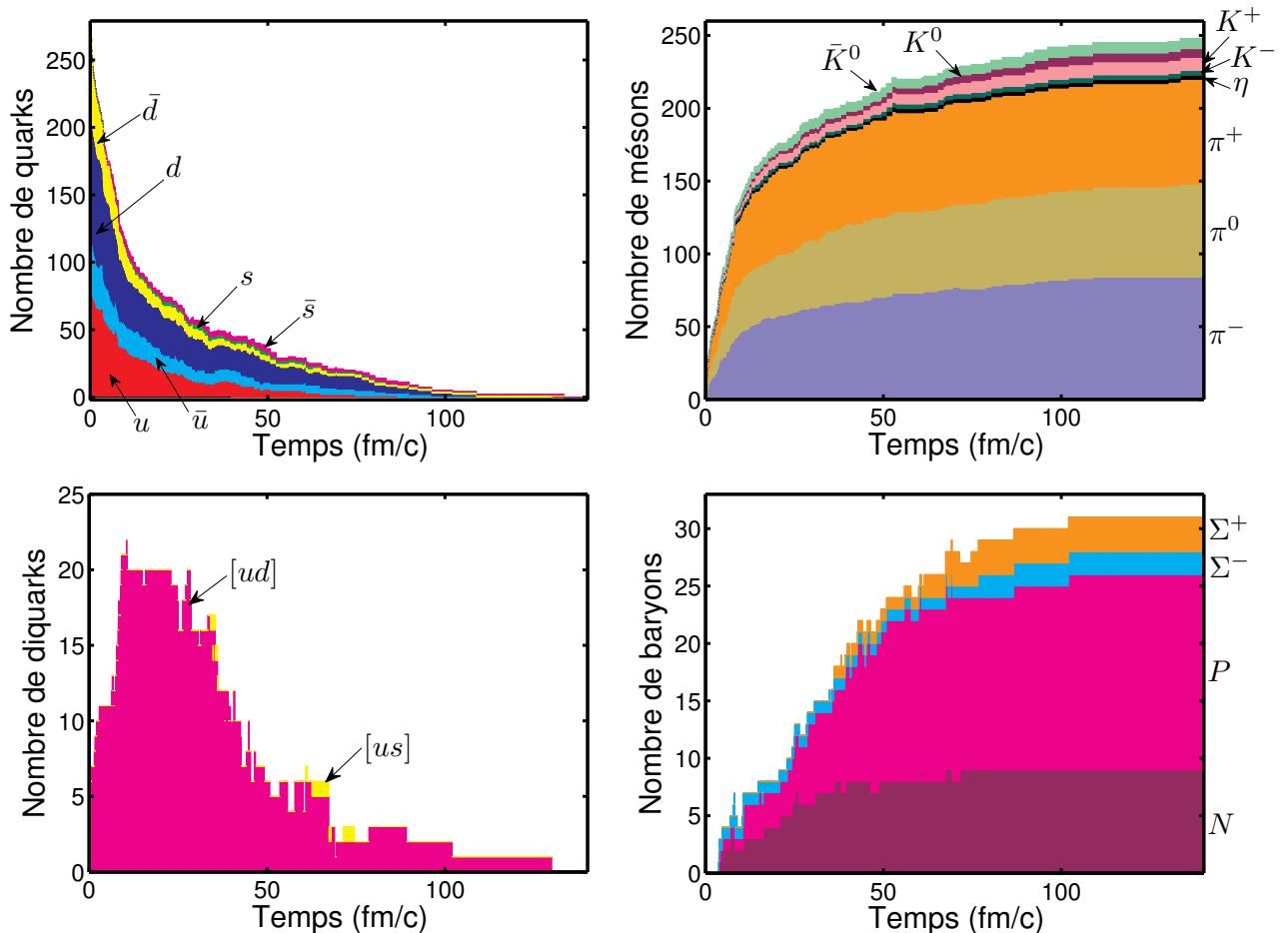


Figure 22. Populations des particules mises en jeu en fonction du temps (N : neutron, P : proton).

Particules	π^-	π^0	π^+	η	K^-	K^+	K^0	\bar{K}^0	Neutron	Proton	Σ^-	Σ^+
Nombre	84	64	72	3	3	9	6	7	9	17	2	3

Tableau 7. Composition finale du système.

Nous considérons maintenant la figure 23. Celle-ci montre l'évolution de la température en fonction du rayon (c'est-à-dire la distance par rapport au centre du système) et en fonction du temps. Dans ce graphe, nous avons aussi tracé le rayon de la sphère introduite dans la simulation décrite au paragraphe 4.2. La zone localisée à gauche de cette courbe est l'intérieur de cette sphère. Elle représente la phase dans laquelle les quarks/antiquarks et les diquarks sont présents, c'est-à-dire la phase QGP. Jusqu'à 20 fm/c, une production massive de mésons a eu lieu, entraînant une forte consommation de quarks et d'antiquarks. En conséquence, la décroissance du rayon de la sphère est forte au début de la simulation. Ensuite, entre 20 et 110 fm/c, la décroissance du rayon est moins forte, et semble être presque linéaire. Ce

comportement est expliqué par la diminution de la consommation de quarks et d'antiquarks. Après 110 fm/c, le rayon stagne, jusqu'à l'hadronisation totale, environ 20 fm/c plus tard.

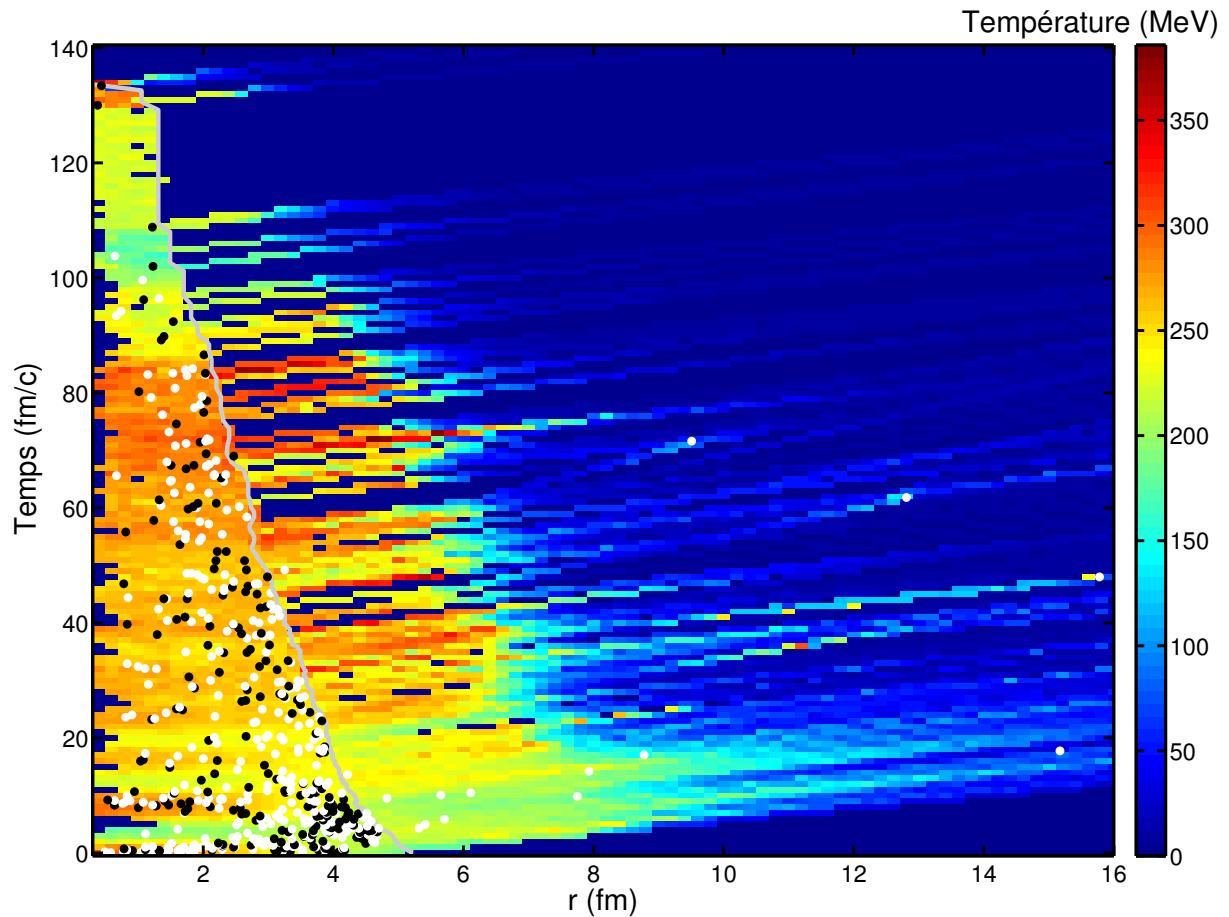


Figure 23. Température en fonction de la distance par rapport au centre du système, et en fonction du temps. La courbe grise matérialise la limite de la phase QGP. Les points blancs montrent les collisions élastiques et les points noirs les réactions inélastiques.

D'autre part, durant toute l'hadronisation de la phase QGP, sa température est plutôt constante, comme visible sur la figure 25. Selon la partie droite de cette figure, cette remarque est aussi valide pour les densités ρ_u et ρ_d . La température moyenne dans la phase QGP est proche de 250 MeV, même si des variations sont observables. Clairement, l'inclusion de la sphère conduit à ce comportement. À l'opposé, la dynamique du système en dehors de la sphère est complètement différente. Plus précisément, cette partie du système est composée par les mésons et baryons qui ont quitté la phase QGP. Les réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ impliquant des particules légères sont particulièrement *exothermiques* [35]. Cela veut dire que les particules incidentes sont plus lourdes que les particules produites. Notamment avec les pions formés par ces réactions, on s'attend à ce que ces particules aient de fortes vélocités, comme confirmé par la figure 28. Ces fortes vélocités impliquent de fortes températures autour de la phase QGP, formant une « couronne chaude » de pions. Cette couronne explique la légère augmentation de la température du plasma q/\bar{q} , visible dans la figure 23, notamment entre 20 et 70 fm/c. Une autre conséquence est que l'expansion de la phase composée par les mésons et baryons est très rapide. Cela correspond à la partie droite de la figure 23. Comme observable dans cette zone, ces particules se refroidissent progressivement

quand r et le temps augmentent, en raison de la dilution. Comme vérifié sur la figure 25, cela entraîne une décroissance exponentielle de la température moyenne et des densités $\rho_{u,d}$ moyennes du système.

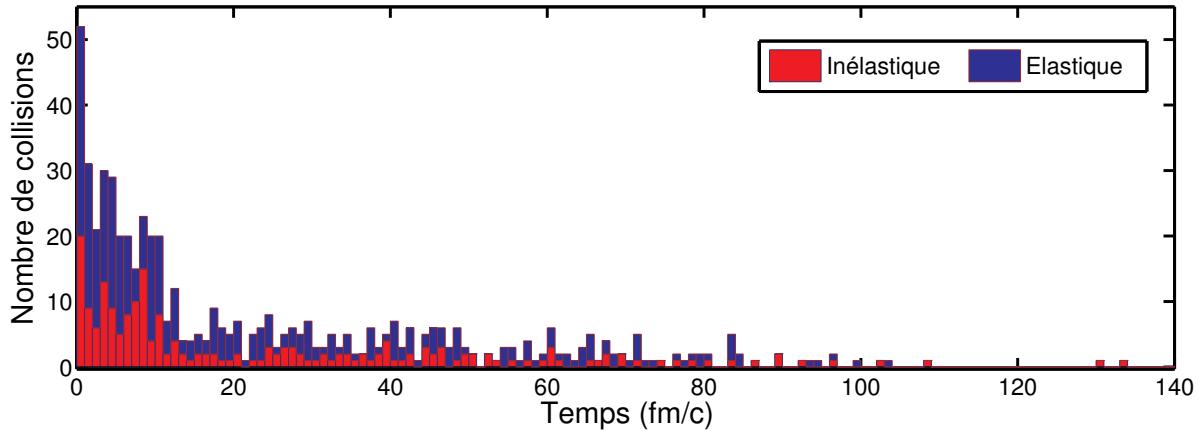


Figure 24. Collisions élastiques et inélastiques en fonction du temps.

Concernant les collisions, les figures 23, 24 et le tableau 8 permettent de les étudier selon plusieurs aspects. Dans cette simulation, nous avons compté 559 collisions. Les réactions élastiques représentent environ 63 %, contre 37 % pour les inélastiques. Selon la figure 24, les collisions ont préférentiellement eu lieu dans les premiers moments de la simulation, jusqu'à 10 fm/c. Là, les collisions élastiques dominent les réactions inélastiques. Ce comportement est explicable par les hautes températures rencontrées dans cette simulation. Cela permet à des réactions comme $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$, $q + q \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$ de dominer, figures 23, 25. Selon le travail effectué dans le chapitre précédent, nous rappelons que les fortes températures permettent à ces réactions d'avoir des sections efficaces plus fortes que celles de $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Toutefois, ce type de réactions inélastiques est aussi très présent, et il permet l'hadronisation massive visible sur la figure 22. Entre 10 et 80 fm/c, en raison de la diminution de la population de la phase QGP, le taux de collision décroît fortement, mais reste assez constant. Comme vu précédemment, la température de la phase QGP est quasiment constante durant la simulation. Ainsi, comme avec $t < 10$ fm/c, les réactions élastiques dominent aussi les réactions inélastiques pour $10 \text{ fm/c} < t < 80 \text{ fm/c}$. Après 80 fm/c, le nombre de particules formant la phase QGP est bas. Cela conduit à une forte réduction de la probabilité d'interaction entre deux particules dans la phase QGP, comme avec la simulation décrite dans le paragraphe 4.2.

Ces observations sont en accord avec les données exposées dans la figure 23. Celle-ci donne aussi des informations concernant la répartition spatiale des collisions. Dans l'ensemble, les collisions inélastiques (points noirs) ont eu lieu préférentiellement dans la phase QGP, mais proche de sa surface. Dans cette zone, la température est plus réduite qu'au centre du système : cela correspond à des conditions plus favorables pour les réactions inélastiques comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Cependant, des réactions inélastiques *endothermiques*, comme $q + q \rightarrow \bar{q} + B$, ne sont pas concernées par cette remarque. Elles sont associées aux réactions inélastiques visibles sur la figure 23 proches du centre du système. D'autre part, les collisions élastiques sont observées dans la phase QGP toute entière. Cela concerne principalement les diffusions élastiques entre quarks et/ou antiquarks. Mais, des réactions

élastiques sont aussi observables en dehors de cette phase. Celles-ci correspondent à $M + M \rightarrow M + M$, et d'une manière plus secondaire à $M + B \rightarrow M + B$ et $B + B \rightarrow B + B$, voir tableau 8. La domination de $M + M \rightarrow M + M$ par rapport aux deux autres est expliquée par le fait que la production de mésons domine largement celle des baryons, figure 22. En conséquence, la rencontre entre deux mésons est extrêmement plus probable que M, B ou B, B , indépendamment des sections efficaces associées à ces réactions.

D'autre part, le tableau 8 présente l'occurrence de tous les processus traités dans la simulation. Parmi les 559 collisions, les réactions $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ en représentent plus d'un quart. Comme observé précédemment, ces diffusions élastiques dominent les réactions inélastiques de mésonisation $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. En effet, celles-ci correspondent à moins de 20 % des réactions observées. Nous avons vu dans le paragraphe 4.2 que la mésonisation s'est terminée assez tôt. Mais, cette observation n'est pas confirmée dans cette simulation. En effet, des antiquarks ont été trouvés dans le système jusqu'à l'hadronisation complète. En conséquence, les hautes températures rencontrées dans cette simulation ont agit sur $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ d'une manière non négligeable. Toutefois, ces réactions inélastiques n'ont pas été réellement perturbées par leurs réactions inverses $M + M \rightarrow q + \bar{q}$, car celles-ci n'ont eu lieu qu'une seule fois dans toute la simulation. En effet, les sections efficaces trouvées avec les réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ sont globalement plus fortes que celles de $M + M \rightarrow q + \bar{q}$. Evidemment, $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ est la méthode privilégiée pour produire des mésons à partir d'un système de quarks/antiquarks, largement devant $q + q \rightarrow M + D$. Mais, cette conclusion peut dépendre du rapport initial entre les quarks et les antiquarks. D'autre part, les mésons ont principalement interagi avec les autres particules via des réactions élastiques, comme $M + M \rightarrow M + M$, $q + M \rightarrow q + M$ ou $\bar{q} + M \rightarrow \bar{q} + M$, mais plus rarement via des réactions inélastiques, comme $q + M \rightarrow \bar{q} + D$ ou $M + D \rightarrow \bar{q} + B$. Cela explique l'augmentation constante du nombre de mésons, figure 22.

$q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$	147	$q + D \rightarrow M + B$	14	$D + D \rightarrow D + D$	3
$q + \bar{q} \rightarrow M + M$	106	$\bar{q} + M \rightarrow \bar{q} + M$	14	$M + B \rightarrow M + B$	3
$q + q \rightarrow q + q$	59	$q + B \rightarrow D + D$	10	$B + B \rightarrow B + B$	2
$\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$	36	$q + M \rightarrow \bar{q} + D$	7	$\bar{q} + B \rightarrow q + q$	1
$q + D \rightarrow q + D$	31	$\bar{q} + B \rightarrow M + D$	7	$M + M \rightarrow q + \bar{q}$	1
$M + M \rightarrow M + M$	24	$\bar{q} + D \rightarrow q + M$	5	$\bar{q} + D \rightarrow \bar{q} + D$	0
$q + q \rightarrow M + D$	22	$D + B \rightarrow D + B$	4	$\bar{q} + B \rightarrow \bar{q} + B$	0
$q + M \rightarrow q + M$	22	$q + B \rightarrow q + B$	3	$M + D \rightarrow q + q$	0
$D + D \rightarrow q + B$	17	$M + D \rightarrow \bar{q} + B$	3	$M + B \rightarrow q + D$	0
$q + q \rightarrow \bar{q} + B$	15	$M + D \rightarrow M + D$	3		

Tableau 8. Occurrence de chaque type de collision.

Concernant les autres réactions évoquées dans le tableau 8, même si $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ intervient d'une manière notable, les autres réactions élastiques mettant en jeu des quarks/antiquarks, comme $q + q \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$ sont aussi présentes. Leur occurrence est plusieurs fois plus faible par rapport à la diffusion quark-antiquark, puisque leurs sections efficaces sont globalement plus réduites que celles de $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ [43]. D'une part, les sections efficaces de $q + q \rightarrow q + q$ et $\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$ sont similaires à basses densités. D'autre part, le rapport

initial entre la matière et l'antimatière est ici égal à deux. Ainsi, cela explique pourquoi l'occurrence de $q + q \rightarrow q + q$ est presque deux fois celle de $\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q}$.

Concernant les diquarks, leur contribution ne peut pas être négligée dans cette simulation, figure 22. Comme indiqué plus haut, parmi les processus inélastiques étudiés dans les chapitres précédents, les réactions $q + q \rightarrow M + D$ sont clairement celles qui produisent des diquarks de manière significative, comme visible dans le tableau 8. En outre, les réactions inverses $M + D \rightarrow q + q$ n'ont pas eu lieu durant la simulation. En revanche, la contribution des réactions $q + M \rightarrow \bar{q} + D$ est réduite, notamment en raison de sections efficaces faibles. Une autre raison pour expliquer cela est que les réactions inverses $\bar{q} + D \rightarrow q + M$ ont quant à elles des sections efficaces plus fortes.

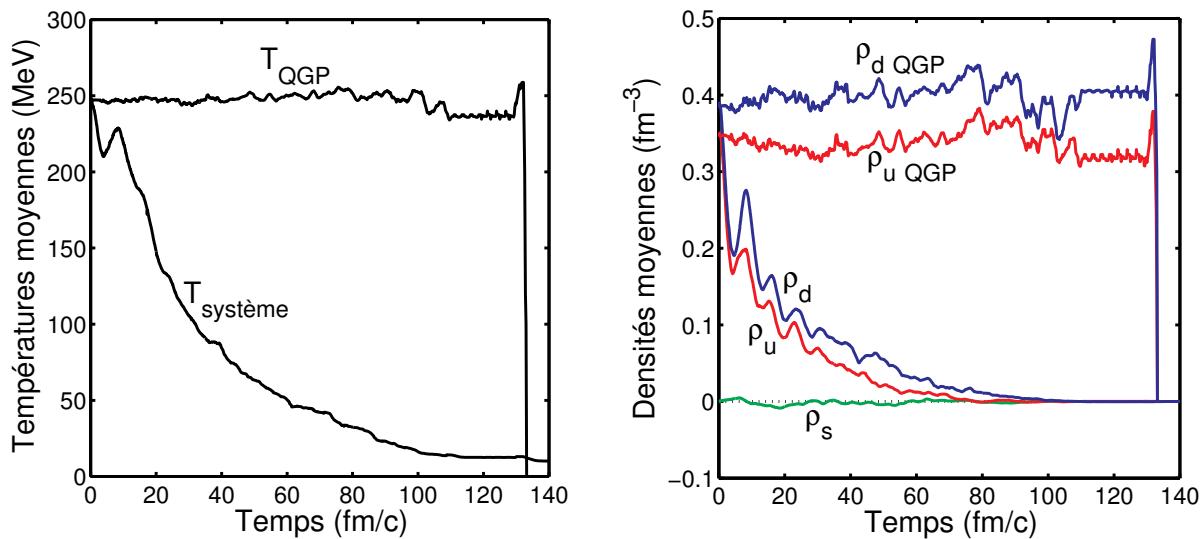


Figure 25. Evolution de la température et des densités.

Pour ce qui concerne la formation des baryons, nous confirmons l'hypothèse formulée dans le chapitre précédent : $M + D \rightarrow \bar{q} + B$ peut être négligée, là aussi en raison de sections efficaces réduites et du fait que celles des réactions inverses $\bar{q} + B \rightarrow M + D$ sont toujours plus fortes. Clairement, comme escompté, les trois réactions dominantes permettant la baryonisation sont $D + D \rightarrow q + B$, $q + D \rightarrow M + B$ et $q + q \rightarrow \bar{q} + B$. Dans le cadre de cette simulation, les trois ont donné des contributions similaires. La production de baryons via $D + D \rightarrow q + B$ a été permise par une production de diquarks non négligeable, figure 22, par des sections efficaces intéressantes, et par les relatives hautes températures de la phase QGP. En effet, ces réactions endothermiques requièrent de telles températures pour intervenir de manière efficace. L'argument de la température peut aussi être évoqué avec les réactions $q + q \rightarrow \bar{q} + B$. Mais, concernant $D + D \rightarrow q + B$ et $q + q \rightarrow \bar{q} + B$, nous notons tout d'abord que $q + B \rightarrow D + D$ n'est pas négligeable, diminuant l'efficacité de la production de baryons à partir de deux diquarks. De plus, même si $\bar{q} + B \rightarrow q + q$ peut être négligée selon nos résultats, cela n'est pas le cas pour $\bar{q} + B \rightarrow M + D$, conduisant aussi à des limitations de l'efficacité de la production de baryons via $q + q \rightarrow \bar{q} + B$. À l'opposé, $q + D \rightarrow M + B$ n'est pas limitée par des réactions inverses. En effet, les mésons ne participent pas énormément aux réactions inélastiques une fois qu'ils sont produits. En conséquence, $M + B \rightarrow q + D$ n'est pas observé dans nos

simulations, alors que $M + B \rightarrow M + B$ s'est produit trois fois. Cependant, il est vrai que $q + D \rightarrow q + D$ apparaît comme une source de concurrence non négligeable de $q + D \rightarrow M + B$, même si ce processus élastique peut seulement ralentir la production de baryons.

Maintenant, considérons la figure 26 ci-après. Sa finalité est de vérifier la validité de nos résultats. Ce graphe montre l'évolution de l'énergie totale en fonction du temps. Physiquement, l'énergie totale devrait être constante, mais à cause d'arrondis numériques, des variations sont observables. Les valeurs présentées dans la figure 26 peuvent être considérées comme le cas le plus défavorable, parmi les simulations décrites dans ce chapitre. Toutefois, les variations restent toujours inférieures à 0.8 %. Par ailleurs, après des variations observées jusqu'à 40 fm/c, nous notons une stabilisation des valeurs vers 0.5 %. Une telle valeur est acceptable, et est légèrement plus forte que les variations annoncées dans [24]. Clairement, dans le cadre de nos simulations, ces variations peuvent être atténuées en augmentant la précision des calculs numériques, mais au prix d'une augmentation du temps de calcul. Nous avons vérifié que l'inclusion de la sphère n'a pas d'incidence directe sur ces variations.

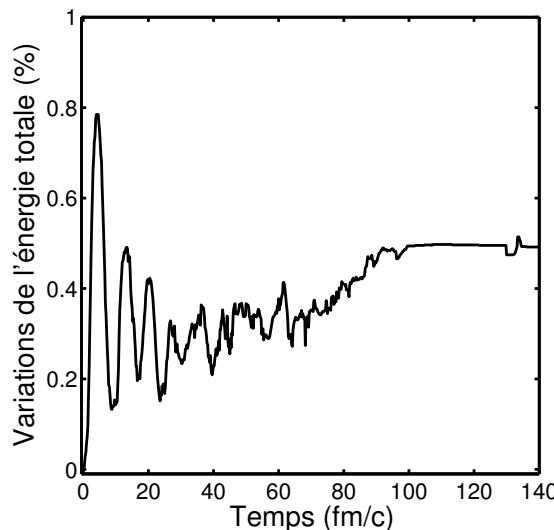


Figure 26. Fluctuations de l'énergie totale du système en fonction du temps.

Pour poursuivre cette analyse, nous considérons les figures 27 et 28, qui décrivent le système à la fin de la simulation, c'est-à-dire pour un temps $t \approx 140$ fm/c. La figure 27 nous montre les masses et les quantités de mouvement des particules. Evidemment, en accord avec le tableau 7, ces particules sont forcément des mésons et des baryons. A la fin de la simulation, la température et les densités sont réduites, figure 25. Ainsi, les masses des particules, partie droite de la figure 27, sont très proches de celles observées pour $T = 0$ et $\rho_f = 0$, voir les chapitres 3 et 5. En conséquence, nous notons quatre couches distinctes dans ce graphe. Deux concernent les mésons : une pour les mésons légers, et un autre pour les autres mésons (kaons et η). De la même manière, les deux autres sont associées aux baryons légers (nucléons) et étranges, c'est-à-dire aux hypérons Σ^\pm dans notre simulation. Nous remarquons aussi une forte concentration de mésons pour des rayons compris entre 100 et 150 fm. Ils attestent de la mésonisation massive qui a eu lieu dans les premiers instants de la simulation. D'autre part, ces particules sont celles qui ont parcourues les distances les plus grandes distances. Cela est dû au fait qu'ils ont de hautes vitesses, en raison du comportement exothermique de

$q + \bar{q} \rightarrow M + M$ avec ces particules. Nous pouvons aussi invoquer le fait qu'ils sont produits tôt, comme confirmé dans la figure 22. Dans la partie gauche de la figure 27, nous avons tracé les quantités de mouvement des particules. La quantité de mouvement la plus forte est proche de 2 GeV, alors que la plus basse est légèrement supérieure à 70 MeV. En conséquence, des valeurs très diverses sont observables. Cependant, les points semblent être plus concentrés sur la partie inférieure droite du graphe. Selon nos explications précédentes, ces points concernent principalement les mésons, et notamment les pions.

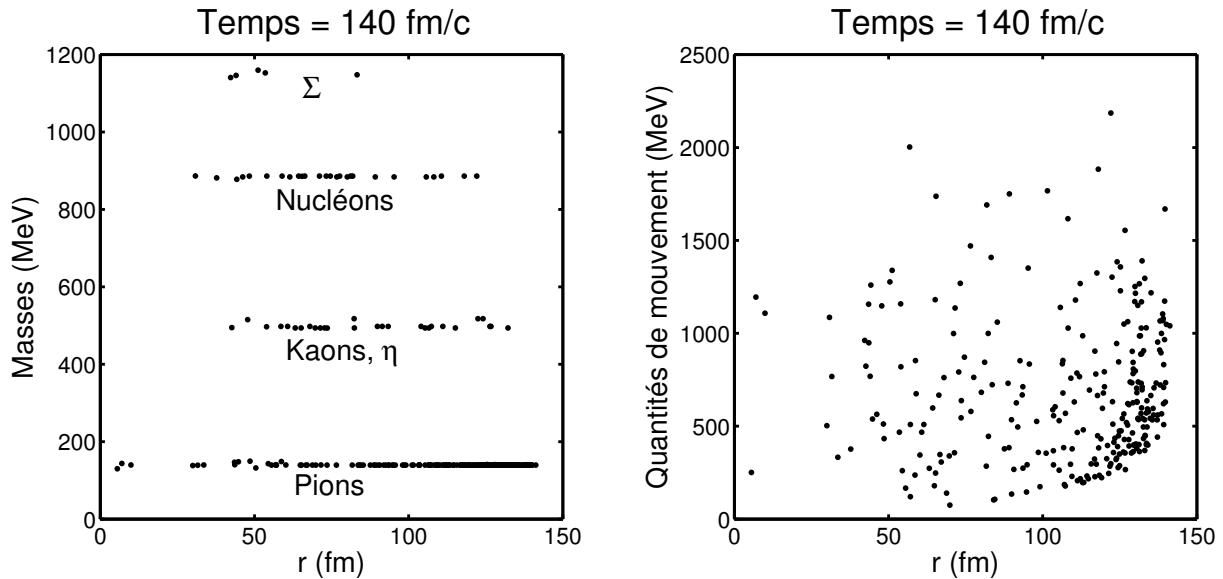


Figure 27. Masses et quantités de mouvement des particules à la fin de la simulation.

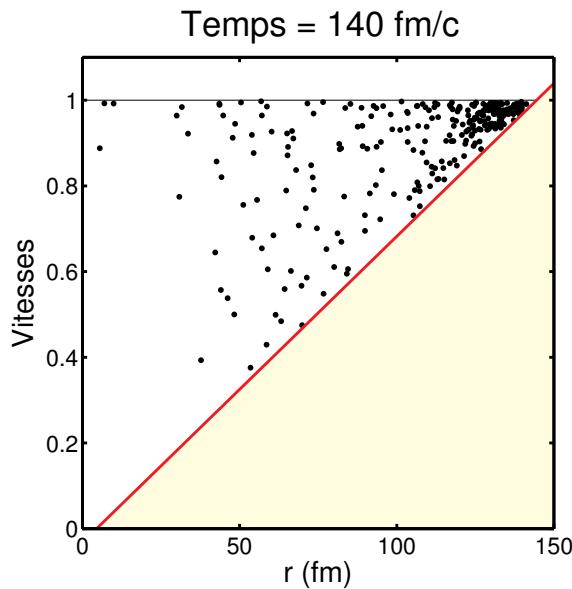


Figure 28. Vitesses des particules à la fin de la simulation.

Afin de terminer cette description, la figure 28 décrit la vitesse des particules en fonction de la distance par rapport au centre du système, pour $t = 140 \text{ fm}/c$. Ces vitesses ont été obtenues par les données apportées par la figure 27, et en utilisant la formule $\vec{v} = \vec{p} \cdot c^2 / E$. Dans la figure, la

ligne horizontale, pour laquelle la vitesse vaut 1, matérialise la célérité de la lumière c . Une partie significative des particules présente de fortes vitesses, proches de 1, parce que les quantités de mouvement étaient initialement fortes, et à cause des réactions exothermiques. Evidemment, aucun tachyon n'a été observé... D'autre part, nous avons vu que l'interaction à distance entre les particules pouvait être négligée. Cette remarque est vraie bien sûr en dehors de la phase QGP, en raison de la portée limitée de cette interaction. En d'autres termes, une fois que les particules finales (mésons et baryons) ont été produites, leurs vitesses ne sont pas susceptibles de varier jusqu'à la fin de la simulation. Cela permet de les considérer comme des particules libres. En prenant cette hypothèse en compte, une ligne diagonale a été tracée dans la figure 28 : elle matérialise la limite de causalité du graphe. Le décalage de cette ligne selon l'axe des r prend en compte le rayon initial du système, d'environ 4.5 fm. Clairement, des particules à droite de cette ligne auraient été non causales, parce qu'elles auraient été à trop grandes distances du centre du système, par rapport à leurs vitesses. Un tel comportement non physique n'a pas été observé dans nos résultats. Il aurait été le signe de défaut de l'algorithme.

6. Discussion et conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle destiné à étudier dynamiquement le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks. Cela a été l'occasion de rassembler les travaux effectués dans les chapitres précédents dans notre programme effectuant la simulation ; celui-ci est nommé ARCHANGE. En effet, nous avons vu que ce programme a pris en compte les calculs des masses des particules, dans les modèles (P)NJL. Ces particules ont ici été les quarks u,d,s , les antiquarks correspondants, les mésons pseudo-scalaires, les diquarks scalaires et l'octet de baryons, sans appliquer la symétrie isospin. Ces masses ont été calculées selon la température T et les densités $\rho_{u,d,s}$. Plus précisément, ces *paramètres externes* ont été considérés dans notre modélisation comme des paramètres locaux. En d'autres termes, pour chaque particule, ils traduisent l'influence du voisinage, c'est-à-dire les autres particules situées aux alentours.

En outre, afin de décrire les collisions, notre algorithme a inclus les calculs des sections efficaces, en utilisant le travail effectué dans le chapitre 6. Notamment, 60 types de réactions ont été implémentés, afin de permettre le traitement des diverses collisions possibles entre les quarks, les mésons, les diquarks, les baryons et leurs antiparticules correspondantes. De plus, les sections efficaces correspondantes ont été calculées *en temps réel*, en prenant en compte \sqrt{s} , mais aussi la température et les densités locales. Nous avons montré que cette approche nous a permis d'obtenir certains résultats intéressants, comme une production non négligeable de diquarks via les réactions $q + q \rightarrow D + M$. En effet, ces réactions peuvent avoir de fortes sections efficaces, mais dans des conditions très précises selon la température et les densités.

De plus, nous avons considéré des équations de mouvement relativistes. Cela nous a donné l'occasion de les interpréter dans le cadre des modèles (P)NJL. De cette manière, nous avons mis en évidence une interaction attractive à distance entre les particules, notamment entre les quarks, par le biais de leur masse. En conséquence, certaines de nos simulations se sont focalisées sur l'étude de cette interaction à distance. Nous avons vu que l'effet attractif est

plus fort dans le modèle PNJL que dans le modèle NJL. Cependant, cette interaction est apparue assez négligeable dans le cadre de systèmes chauds, puisqu'ils mettent en jeu des particules rapides. Aussi, cette interaction a une portée limitée, c'est-à-dire quelques femtomètres dans nos descriptions.

Ensuite, nous avons effectué une simulation complète. Nous avons tout d'abord noté que le modèle PNJL nous a donné de meilleurs résultats que le modèle NJL pur, notamment en ce qui concerne la consommation de quarks/antiquarks et la production de mésons. Ces améliorations du modèle PNJL ont été expliquées par le décalage en température induit par l'ajout de la boucle de Polyakov. Plus précisément, cela concerne les modifications des températures optimales des réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ impliquant des particules légères : 230 MeV pour le modèle NJL, contre 280 MeV avec PNJL. En conséquence, puisque les réactions de mésonisation peuvent intervenir à des températures plus hautes dans la description PNJL, ladite mésonisation est plus efficace dans ce modèle.

Cependant, les modèles (P)NJL ne permettent pas une hadronisation complète de notre système ouvert. Même le mécanisme de confinement proposé par le modèle PNJL n'a pas été suffisant dans le cadre de ces simulations. Nous avons alors évoqué la relative faiblesse des réactions de baryonisation pour expliquer ces résultats. Aussi, cette hadronisation incomplète est éventuellement un signe que notre modélisation a besoin d'interactions longues portées, afin de confiner suffisamment les quarks/antiquarks. Dans notre travail, nous avons proposé de mimer ce comportement en utilisant une sphère. Bien entendu, cette astuce constitue une première étape, et de futurs développements de ce travail doivent concerner la modélisation de cette interaction à longue portée.

Cette sphère a permis d'effectuer deux simulations, pour lesquelles l'hadronisation fut complète. L'évolution des particules présente des similarités avec celles décrites par exemple dans [16]. Mais, nous avons aussi noté que le temps nécessaire pour obtenir une hadronisation complète a été plus long que celui escompté dans cette référence, et en général que celui attendu dans la littérature, en particulier dans le cadre du scénario de Bjorken [10]. L'absence de gluons dans la modélisation en tant que particules dynamiques peut être évoquée pour tenter d'expliquer cet aspect. Clairement, on s'attend à ce que des réactions comme $g + g \rightarrow q + \bar{q}$ ne soient pas négligeables durant l'évolution du QGP, voir chapitre 1. Plus précisément, ces réactions peuvent conduire à une augmentation de la population de quarks/antiquarks, donc à un accroissement du taux de collisions. L'inclusion des gluons en tant que particules dynamiques pourrait mener à l'obtention de l'interaction longue portée attendue entre les quarks/antiquarks. Cependant, une telle évolution ne peut pas concerner les modèles (P)NJL ... D'autre part, la contribution au temps d'hadronisation des réactions mettant en jeu plus de deux particules (en entrée/sortie) devrait être étudiée. Ces processus peuvent intervenir quand le système est assez dense, c'est-à-dire potentiellement au début de la simulation. Les négliger conduit certainement à une sous-estimation du taux de collisions.

Cependant, pour les deux simulations, certains aspects intéressants peuvent être observés. Tout d'abord, nous avons confirmé le scénario formulé dans le chapitre précédent. Il explique qu'à hautes températures, le système est dominé par des réactions élastiques entre quarks/antiquarks. Mais, quand la température devient assez basse, les réactions $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ permettent une mésonisation très importante du système. La forte consommation d'antiquarks permet alors la formation de baryons. Avec la seconde simulation, nous avons montré une production non négligeable de diquarks. Ils ont réellement

agi comme des intermédiaires réactionnels, et ont permis d'accélérer la production de baryons. Dans cette configuration, nous avons vu que les baryons ont été préférentiellement formés par des réactions comme $D + D \rightarrow q + B$, $q + q \rightarrow \bar{q} + B$ et $q + D \rightarrow M + B$. En outre, il a été observé un léger avantage pour $q + D \rightarrow M + B$. D'autre part, dans les simulations, un autre aspect intéressant concerne la création de particules étranges à partir de quarks/antiquarks légers.

En effet, nous avons vu au chapitre 1 que la production d'étrangeté est une des signatures possibles du QGP. Mais, notre modélisation présente des limitations pour étudier les autres signatures. C'est particulièrement vrai avec l'émission de dileptons et de photons thermiques, parce que ces particules ne sont pas incluses dans notre approche. Concernant la production de J/ψ , il nous faut inclure les quarks c . Il a été vu dans [45] que cette amélioration est possible dans le modèle PNJL. Concernant le *jet quenching*, nous pourrions étudier la variation de l'énergie des quarks avant leur hadronisation. Mais, une limitation majeure vient de l'absence de gluons, nous empêchant alors d'étudier le bremsstrahlung des gluons. D'autre part, en raison du choix de nos conditions initiales (présentant une symétrie sphérique), nous n'avons pas étudié v_2 . En conséquence, une amélioration de notre approche consiste à prendre en compte des conditions initiales compatibles avec celles attendues dans des collisions de hautes énergies où $b \neq 0$. Dans ce cadre là, nous pouvons citer par exemple le modèle de Glauber [6] utilisé dans diverses simulations.

Mise à part les améliorations mentionnées ci-dessus, nous pouvons proposer d'autres évolutions possibles. Cela pourrait concerner par exemple l'inclusion de mésons vectoriels, du décuplet de baryons, etc. Evidemment, un tel développement requiert d'effectuer les calculs de sections efficaces associées à ces particules. D'autre part, comme remarqué dans les chapitres précédents avec les particules lourdes, une description correcte des processus de désintégration de ces particules apparaît aussi comme nécessaire, comme celle amorcée dans [24] pour les mésons pseudo-scalaires (quand ils sont dans leurs zones d'instabilité). Concernant les aspects numériques, certains développements pourraient être faits en considérant deux objectifs. Le premier est de réduire les arrondis numériques, afin de minimiser les variations de l'énergie totale. Le second concerne une réduction du temps requis pour effectuer nos simulations, afin d'être capable de traiter des systèmes avec plus de particules.

7. Références

- [1] Landau L D 1953 On the multiple production of particles in high energy collisions *Izv. Akad. Nauk. SSSR, ser. fiz.* **17** 51
- [2] Belenki S Z et Landau L D 1955 The hydrodynamic theory of multiple formation of particles *Usp. Fiz. Nauk* **56** 309
- [3] Landau L D et Lifschitz E M 1959 Fluid Mechanics, Oxford, Pergamon Press
- [4] Dumitru A, Brachmann J, Fraga E S, Greiner W, Jackson A D, Lenaghan J T, Scavenius O et Stöcker H 2001 Hydrodynamic Models for Heavy-Ion Collisions and beyond *Heavy Ion Phys.* **14** 121-31

- [5] Kolb P F et Heinz U 2003 Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions arXiv:nucl-th/0305084
- [6] Luzum M et Romatschke P 2008 Conformal relativistic viscous hydrodynamics: Applications to RHIC results at $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV *Phys. Rev. C* **78** 034915
- [7] Ollitrault J Y 2008 Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collision *Eur. J. Phys.* **29** 275–302
- [8] Cooper F et Frye G 1974 Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production *Phys. Rev. D* **10** 186–9
- [9] Cooper F, Frye G et Schonberg E 1975 Landau's hydrodynamic model of particle production and electron-positron annihilation into hadrons *Phys. Rev. D* **11** 192–213
- [10] Bjorken J D 1983 Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region *Phys. Rev. D* **27** 170
- [11] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369
- [12] Bleicher M *et al.* 1999 Relativistic Hadron-Hadron Collisions in the Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics Model *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25** 1859–96
- [13] Song H, Bass S A, Heinz U W, Hirano T et Shen C 2011 200 A GeV Au+Au collisions serve a nearly perfect quark-gluon liquid *Phys. Rev. Lett.* **106** 192301
- [14] Soltz R A, Garishvili I, Cheng M, Abelev B, Glenn A, Newby J, Linden Levy L A et Pratt S 2013 Constraining the initial temperature and shear viscosity in a hybrid hydrodynamic model of $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions using pion spectra, elliptic flow, and femtoscopic radii *Phys. Rev. C* **87** 044901
- [15] Andersson B, Gustafson G, Ingelman G et Sjostrand T 1983 Parton Fragmentation and String Dynamics *Phys. Rept.* **97** 31–145
- [16] Cassing W et Bratkovskaya E L 2008 Parton transport and hadronization from the dynamical quasiparticle point of view *Phys. Rev. C* **78** 034919
- [17] Cassing W et Bratkovskaya E L 2009 Parton-Hadron-String Dynamics: an off-shell transport approach for relativistic energies *Nucl. Phys. A* **831** 215–42
- [18] Bratkovskaya E L, Cassing W, Konchakovski V P et Linnyk O 2011 Parton-Hadron-String Dynamics at Relativistic Collider Energies arXiv:1101.5793
- [19] Ozvenchuk V, Linnyk O, Gorenstein M I, Bratkovskaya E L et Cassing W 2013 Dynamical equilibration of strongly interacting “infinite” parton matter within the parton-hadron-string dynamics transport approach *Phys. Rev. C* **87** 024901
- [20] Uphoff J, Fochler O, Xu Z et Greiner C 2011 Heavy quarks at RHIC and LHC within a partonic transport model *Nucl. Phys. A* **855** 444–7
- [21] Rehberg P, Bot L et Aichelin J 1999 Expansion and Hadronization of a Chirally Symmetric Quark-Meson Plasma *Nucl. Phys. A* **653** 415–35
- [22] Rehberg P, Bot L et Aichelin J 1999 Expansion and hadronization of quark-meson plasma *Prog. Part. Nucl. Phys.* **42** 323–31
- [23] Gastineau F 2002 La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu-Jona-Lasinio *Thèse de doctorat, Université de Nantes*

- [24] Marty R et Aichelin J 2013 Molecular dynamics description of an expanding $q\bar{q}$ plasma with the Nambu–Jona-Lasinio model and applications to heavy ion collisions at RHIC and LHC energies *Phys. Rev. C* **87** 034912
- [25] Dunkel J et Hänggi P 2009 Relativistic Brownian Motion *Phys. Rep.* **471** 1–73
- [26] Lutz M, Klimt S et Weise W 1992 Meson properties at finite temperature and baryon density *Nucl. Phys. A* **542** 521–558
- [27] Tolman R C 1918 A General Theory of Energy Partition with Applications to Quantum Theory *Phys. Rev.* **11** 261–75
- [28] Komar A 1978 Interacting relativistic particles *Phys. Rev. D* **18** 1887–93
- [29] Bergmann P G et Komar A 1982 The Hamiltonian in relativistic systems of interacting particles *General Relativity and Gravitation* **14** 731–40
- [30] Komar A 1995 Relativistic temperature *General Relativity and Gravitation* **27** 1185–206
- [31] Komar A 1996 Relativistic equipartition *General Relativity and Gravitation* **28** 379–85
- [32] McLennan J A 1989 Boltzmann equation for a dissociating gas *Journal of Statistical Physics* **57** 887–905
- [33] Dunkel J et Hänggi P 2009 Relativistic Brownian Motion *Phys. Rep.* **471** 1–73
- [34] Koide T et Kodama T 2011 Thermodynamic laws and equipartition theorem in relativistic Brownian motion *Phys. Rev. E* **83** 061111
- [35] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [36] He Y B, Hüfner J, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi\pi$ scattering in the p-meson channel at finite temperature *Nucl. Phys. A* **630** 719–42
- [37] Piwnicki P, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi - K$ scattering lengths at finite temperature in the Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **58** 502–16
- [38] Samuel J 1982 Constraints in relativistic Hamiltonian mechanics *Phys. Rev. D* **26** 3475–81
- [39] Mukunda N et Sudarshan E 1981 Form of relativistic dynamics with world lines *Phys. Rev. D* **23** 2210–7
- [40] Roessner S, Ratti C et Weise W 2007 Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram *Phys. Rev. D* **75** 034007
- [41] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003
- [42] Fukushima K 2004 Chiral effective model with the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **591** 277–84
- [43] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in SUf (3) at finite temperatures *Nucl. Phys. A* **608** 356–88
- [44] Gastineau F, Blanquier E et Aichelin J 2005 Critical opacity - a possible explanation of the fast thermalisation times seen in RHIC experiments *Phys. Rev. Lett.* **95** 052001

- [45] Blaschke D, Costa P et Kalinovsky Y L 2012 D mesons at finite temperature and density in the PNJL model *Phys.Rev. D* **85** 034005

Conclusions

Dans cette thèse, l'objectif principal était d'étudier la physique des quarks, et notamment la transition de phase entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique. Pour arriver à ce but, nous avons d'abord brossé un rapide aperçu des connaissances théoriques associées à cette thématique. Nous avons rappelé quelques notions de théorie des groupes. En effet, nous avons vu tout au long de cette thèse la pertinence d'une telle théorie dans notre travail. D'autre part, nous avons décrit la Chromodynamique Quantique (QCD), notamment son Lagrangien et ses propriétés. Nous avons vu que cette théorie, même si elle constitue le modèle le plus sophistiqué pour modéliser les quarks, n'était pas applicable dans notre description. En effet, la QCD ne peut pas être résolue dans le cas général. Des calculs sont certes possibles dans le cadre de la QCD sur réseau. Ils sont d'ailleurs considérés comme des calculs de référence, mais présentent quelques limitations à densités finies, à cause du *fermion sign problem*. En conséquence, nous avons considéré un modèle effectif, le modèle de Nambu et Jona-Lasinio. Dans cette approche, la description de l'interaction entre quarks est simplifiée en considérant des gluons dont la dynamique est « gelée ». Plus précisément, ces derniers sont traités à l'aide de termes effectifs, et finalement les gluons disparaissent du modèle, en tant que degrés de liberté dynamiques. Nous avons vu qu'une conséquence directe de ce traitement est que le confinement est absent dans le modèle NJL « classique ». Afin de corriger ce défaut, nous avons pris en compte une évolution du modèle NJL, qui a été récemment proposée dans la littérature [1]. Elle consiste à coupler les quarks et antiquarks à une boucle de Polyakov, afin de mimer un mécanisme de confinement. Cela forme le modèle de Polyakov Nambu Jona-Lasinio (PNJL).

Durant trois chapitres de cette thèse, nous avons modélisé des particules à l'aide du modèle NJL, et nous avons comparé ces résultats à ceux trouvés avec une description PNJL. Ces particules étaient les quarks u, d, s , les mésons, les diquarks et les baryons. Notre modélisation a notamment concerné l'étude des masses de ces particules dans le plan T, ρ_B . Nous avons aussi étudié la stabilité des particules composites citées, c'est-à-dire les mésons, diquarks et baryons. Suite à l'inclusion de la boucle de Polyakov, nous avons trouvé que la tendance générale consiste en une distorsion des courbes vers des températures plus fortes. En d'autres termes, les valeurs des masses trouvées n'ont pas été modifiées, mais décalées vers les hautes températures, par rapport aux résultats du modèle NJL. Cet effet n'a pas été observé en fonction de la densité. Concernant les quarks, nous avons retrouvé les résultats des modèles NJL [2] et PNJL [3] exposés dans la littérature, et nous avons étendu les résultats dans le plan T, ρ_B . Nous avons aussi proposé d'étudier les valeurs moyennes du champ de Polyakov Φ et son conjugué $\bar{\Phi}$ dans ce plan. De la même manière, une telle étude a été faite également pour le potentiel chimique μ_q . Nous avons vu que la relation entre μ_q , la température T et la densité baryonique ρ_B n'est pas triviale dans les modèles (P)NJL. À propos des mésons, nous avons aussi trouvé des résultats en accord avec [3, 4], notamment au sujet des mésons scalaires et pseudo-scalaires. Nous avons aussi étudié les mésons axiaux et vectoriels. Pour les mésons dits stables (pseudo-scalaires et vectoriels), nous avons réalisé des diagrammes stabilité/instabilité. D'autre part, il a été vu que nos résultats à température et densité nulle sont très proches des valeurs expérimentales, tout particulièrement quand la symétrie isospin n'a pas été utilisée. Ensuite, à propos des baryons, nous avons constaté qu'il

est possible de les décrire comme un état lié quark-diquark. Cela nous a donc motivé à étudier les diquarks avec les modèles (P)NJL. Nous avons conclu que les diquarks scalaires sont utilisables pour décrire l'octet de baryons, alors que les diquarks axiaux peuvent permettre de décrire le décuplet de baryons. En fait, même en ayant procédé à d'importantes approximations dans notre traitement des baryons, comme l'approximation statique, nos résultats se sont révélés être proches de ceux trouvés dans d'autres approches théoriques [2, 6, 7] ou des données expérimentales. Toutefois, nous avons constaté que notre approche peut être l'objet de plusieurs évolutions, comme l'inclusion des désintégrations des baryons lourds.

Après, un chapitre important de cette thèse a concerné le calcul des sections efficaces de réactions mettant en jeu les particules évoquées. Une part de ce travail s'est focalisé sur des réactions comme $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ et $q + q \rightarrow q + q$. Celles-ci, calculées initialement dans [4, 5], ont été estimées en fonction de \sqrt{s}, T, ρ_B dans notre travail. Nous avons également étudié l'effet de la boucle de Polyakov sur ces sections efficaces. Globalement, comme avec les masses, les sections efficaces PNJL ont été décalées vers les hautes températures par rapport à celles trouvées avec le modèle NJL. Plus précisément, la température optimale de mésonisation via $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ a été trouvée égale à 280 MeV avec le modèle PNJL, contre 230 MeV avec NJL. D'autre part, en nous inspirant des réactions proposées dans [6], nous avons aussi étudié avec le modèle PNJL des réactions inélastiques impliquant des diquarks et/ou des baryons. Nous avons trouvé des valeurs assez réduites pour ces réactions. D'une part, seules les réactions $q + q \rightarrow D + M$ semblent être capables de produire des diquarks d'une manière non négligeable, mais dans des conditions bien précises. D'autre part, trois types de réactions nous sont apparus comme de bons candidats pour permettre la formation de baryons : $D + D \rightarrow B + q$, $q + D \rightarrow M + B$ et $q + q \rightarrow B + \bar{q}$. Pour décrire ces réactions, nous avons vu la nécessité de développer des méthodes de calcul, notamment pour être capable d'effectuer des opérations assez peu communes, comme celles impliquant des spineurs avec des quantités de mouvement différentes. Cela a induit des développements formels assez complexes, exposés dans l'annexe B. Puis, nous avons aussi considéré des réactions peu ou pas traitées dans la littérature, comme $q + M \rightarrow M + q$, $q + D \rightarrow D + q$, $q + B \rightarrow q + B$, $D + B \rightarrow B + D$. La finalité était d'estimer dans quelle mesure ces réactions pouvaient intervenir par rapport aux réactions inélastiques, en constituant éventuellement une source de concurrence. Nous avons observé que celait pouvait être le cas avec $q + D \rightarrow D + q$ par rapport à $q + D \rightarrow M + B$. Nous avons vu que notre description devrait être complétée, notamment en prenant en compte plus de canaux d'interaction, comme les canaux « box », pour certaines réactions. De plus, le travail effectué pour $D + D \rightarrow D + D$, inspiré par [8, 9], devrait être étendu à la diffusion entre mésons, ou même avec $B + M \rightarrow B + M$ et $B + B \rightarrow B + B$.

Un dernier aspect de notre travail a concerné l'étude dynamique. La finalité était de simuler l'évolution d'un plasma de quarks et d'antiquarks en fonction du temps, d'observer son refroidissement et son hadronisation. Dans un premier temps, nous avons décrit les différentes étapes requises afin de construire un tel modèle dynamique. Dans notre modélisation, les particules peuvent être affectées, au niveau de leur masse, via des paramètres externes. Ces derniers sont la température et les densités selon les saveurs u, d, s . Plus précisément, T, ρ_f sont traités comme des paramètres locaux. A l'aide des équations du mouvement, nous avons vu que l'influence de ces paramètres sur les masses se matérialise sous la forme d'une interaction à distance entre particules. Nous avons alors étudié les propriétés de cette

interaction à courte portée, mais nous avons trouvé que ses effets étaient trop faibles pour réellement influencer la dynamique du système, surtout si des particules rapides sont considérées. D'autre part, nous avons décrit notre algorithme dédié au traitement des collisions. Nous avons fait appel au critère de collision utilisé dans [10], qui compare la valeur de la section efficace avec le paramètre d'impact. Nous avons noté qu'un grand avantage de notre description est d'estimer les sections efficaces dans les conditions rencontrées par les deux particules incidentes, c'est-à-dire en prenant pleinement en compte \sqrt{s}, T, ρ_f , sans utiliser de base de données rassemblant des sections efficaces pré-calculées. Clairement, la plupart des travaux utilisés dans les chapitres précédents ont été implémentés dans ce modèle dynamique, afin d'estimer les masses ou les sections efficaces. Puis, nous nous sommes concentrés sur une description des simulations effectuées. Elles ont pris en compte les quarks u, d, s , leurs antiquarks respectifs, les mésons pseudo-scalaires, les diquarks scalaires et l'octet de baryons. Nous avons d'ailleurs expliqué que l'inclusion de particules lourdes dans notre modèle dynamique, comme le décuplet de baryons, peut être considéré comme une évolution possible et intéressante de notre travail. Mais, cela nécessiterait d'étendre les calculs de sections efficaces à ces particules, ainsi que le traitement des désintégrations pour ces particules lourdes. D'autre part, nous avons conclu que l'inclusion de la boucle de Polyakov permet d'obtenir de meilleurs résultats que le modèle NJL brut. En effet, la mésonisation est plus rapide et plus efficace avec le modèle PNJL, grâce au décalage des températures mentionné plus haut. Cependant, nous ne sommes pas arrivés à obtenir lihadronisation complète d'un système ouvert avec le modèle PNJL. Il a été indiqué que la relative faiblesse des sections efficaces des réactions de baryonisation nécessite l'inclusion d'une interaction à longue portée entre les particules, pour retenir suffisamment les quarks dans la phase QGP du système. En conséquence, une évolution importante de notre description concerne la modélisation de cette force longue portée. Toutefois, nous sommes arrivés à mimer celle-ci via l'inclusion d'une sphère qui a confiné les particules colorées jusqu'à leur hadronisation en mésons et baryons. Grâce à cette astuce, nous avons observé une hadronisation complète de deux simulations différentes. Nous avons comparé nos résultats avec ceux d'autres approches [11, 12]. Nos données sont qualitativement en accord avec ces références. Cependant, nous avons trouvé que le temps requis pour permettre une hadronisation complète était plus fort que celui prévu dans la littérature. Une telle différence pourrait être expliquée notamment via les valeurs de sections efficaces et l'absence de gluons en tant que particules dynamiques. En outre, nous avons noté la contribution non négligeable des diquarks dans la formation des baryons, mais selon des conditions bien précises selon la température et les densités. Nous avons également établi et vérifié un scénario, dans lequel nous avons prévu une domination des réactions élastiques quarks/antiquarks à hautes températures, puis une mésonisation massive via $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ quand $T \leq 280$ MeV (dans le modèle PNJL), et ensuite une production de baryons, dès que la population d'antiquarks sera assez réduite.

En conséquence, tout au long de cette thèse, nous avons montré la pertinence du modèle NJL pour décrire la physique des quarks, selon plusieurs aspects, et notamment pour modéliser dynamiquement le refroidissement et lhadronisation d'un plasma de quarks et d'antiquarks. En outre, par l'inclusion d'une boucle de Polyakov, pour former le modèle PNJL, nous avons confirmé que cette amélioration du modèle est très prometteuse, comme annoncé dans la littérature associée. En effet, par le mécanisme de confinement simulé par le modèle, nous avons montré l'influence sur les résultats, et ses avantages, notamment lors des simulations dynamiques. Cependant, nous reconnaissions que nous sommes d'accord avec les conclusions formulées dans [13] : le modèle PNJL mime certains aspects du confinement, mais il n'y a

pas de *réel confinement* dans ce modèle. Le confinement n'est toujours pas bien maîtrisé. Sa description via le modèle PNJL est intéressante, mais incomplète. Certainement, des évolutions futures du modèle prendront en compte cette présente limitation. En ce qui concerne les améliorations actuelles proposées dans la littérature, il serait instructif de considérer par exemple le modèle EPNJL (*Entangled Polyakov Nambu Jona-Lasinio*) [14], et de voir les modifications apportées par cette variante sur nos résultats (masses, sections efficaces, simulations). D'autre part, une autre évolution possible de notre travail concerne le traitement de la supraconductivité de couleur [15] avec le modèle PNJL. Comme évoqué précédemment, on ne s'attend pas à ce que ce phénomène se produise dans les conditions T, ρ_f de nos simulations dynamiques. En conséquence, cela ne constitue pas une limitation de notre travail. Mais, le traitement de la supraconductivité de couleur peut permettre d'explorer tout le plan T, ρ_B , ou du moins la partie encore mal connue se situant à températures réduites et à de fortes densités baryoniques. Aussi, la supraconductivité de couleur présente des applications en astrophysique, afin de décrire les couches profondes d'objets denses et froids, comme les étoiles à neutrons. Cela constitue donc une extension possible de notre travail, en prenant bien entendu en compte les modifications à appliquer au modèle : formalisme de Nambu-Gorkov [16] ...

References

- [1] Fukushima K 2004 Chiral effective model with the Polyakov loop *Phys. Lett. B* **591** 277–84
- [2] Vogl U et Weise W 1991 The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** 195–272
- [3] Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A, Hansen H et Alberico W M 2009 Scalar–pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model *Phys. Rev. D* **79** 116003
- [4] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29
- [5] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in SU_f(3) at finite temperatures *Nucl. Phys. A* **608** 356–88
- [6] Gastineau F et Aichelin J 2004 Diquark and baryon properties and their production cross sections in dense and hot matter *AIP Conf. Proc.* **739** 398–416
- [7] Oettel M 2000 Baryons as relativistic bound states of quark and diquark *PhD Thesis Tuebingen University* arXiv:nucl-th/0012067
- [8] He Y B, Hüfner J, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi\pi$ scattering in the ρ -meson channel at finite temperature *Nucl. Phys. A* **630** 719–42
- [9] Piwnicki P, Klevansky S P et Rehberg P 1998 $\pi - K$ scattering lengths at finite temperature in the Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **58** 502–16
- [10] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369

-
- [11] Marty R et Aichelin J 2013 Molecular dynamics description of an expanding $q\bar{q}$ plasma with the Nambu–Jona-Lasinio model and applications to heavy ion collisions at RHIC and LHC energies *Phys. Rev. C* **87** 034912
 - [12] Cassing W et Bratkovskaya E L 2008 Parton transport and hadronization from the dynamical quasiparticle point of view *Phys. Rev. C* **78** 034919
 - [13] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
 - [14] Ruivo M C, Costa P et de Sousa C A 2012 Effects of entanglement and instanton suppression at finite T in a SU(2) EPNJL model with anomaly arXiv:1211.2272
 - [15] Buballa M 2005 NJL-model analysis of dense quark matter *Phys. Rep.* **407** 205-376
 - [16] Shovkovy I A 2004 Two Lectures on Color Superconductivity *Found. Phys.* **35** 1309-58

Annexe A

Données sur les particules

1. Les quarks

saveur	nom	masse (MeV)	charge électrique	nombres quantiques
<i>u</i>	haut (up)	1.8–3.0	$2/3 e$	$I_z = +1/2$
<i>d</i>	bas (down)	4.5–5.3	$-1/3 e$	$I_z = -1/2$
<i>s</i>	étrange (strange)	90–100	$-1/3 e$	strangeness $S = -1$
<i>c</i>	charme (charm)	1.250–1.300 GeV	$2/3 e$	charm $C = +1$
<i>b</i>	fond (bottom)	4.15–4.69 GeV	$-1/3 e$	bottomness $B = -1$
<i>t</i>	sommet (top)	173.07 ± 1.24 GeV	$2/3 e$	topness $T = +1$

Tableau 1. Description des quarks.

Dans la colonne « nombres quantiques », seules les valeurs non nulles sont indiquées (sauf I_z). Par exemple, l'étrangeté d'un quark autre que *s* est forcément nulle. I_z désigne la projection selon *z* de l'isospin *I*. Les quarks sont des fermions : leur spin est égal à $1/2$. Les données présentées ont été extraites de [1, 2].

2. Les mésons

	0^{+-}	1^{--}	0^{++}	1^{++}	1^{+-}	2^{++}	1^{--}	1^{--}
nom	π	ρ	a_0	a_1	b_1	a_2	ρ	ρ
masse	138	769	984	1230	1235	1318	1465	1700
largeur	0	151	100	400	142	107	310	323
isospin	1	1	1	1	1	1	1	1
étrangeté	0	0	0	0	0	0	0	0
nom	K	K^*	K_0^*	K_1^*	K_1	K_2^*	K^*	K^*
masse	495	893	1429	1273	1400	1430	1410	1680
largeur	0	50	287	90	174	100	227	235
isospin	1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
étrangeté	± 1							
nom	η	ω	f_0	f_1	h_1	f_2	ω	ω
masse	547	782	980	1282	1170	1275	1419	1662
largeur	0	8.43	100	24	360	185	174	280
isospin	0	0	0	0	0	0	0	0
étrangeté	0	0	0	0	0	0	0	0
nom	η'	ϕ	f_0^*	f_1'	h_1'	f_2'	ϕ	ϕ
masse	958	1019	1370	1512	1380	1525	1680	1900
largeur	0.201	4.43	200	350	80	76	150	400
isospin	0	0	0	0	0	0	0	0
étrangeté	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 2. Les mésons.

Concernant la première ligne du tableau, le nombre indique le spin du méson, le premier \pm traduit le comportement de sa fonction d'onde selon la parité, le second \pm selon la conjugaison de charge. Les données présentées ici sont celles utilisées par les modèles QMD/URQMD ; elles sont extraites de [3]. Ces données respectent la symétrie isospin. Les masses et les largeurs de niveau sont en MeV.

3. Les baryons (particules et résonances)

Nucléon : uud ou udd
 $S = 0$, $I = 1/2$

Δ : uuu , uud , udd ou ddd
 $S = 0$, $I = 3/2$

Λ : uds
 $S = -1$, $I = 0$

Masse	Largeur	Spin
0938	000	1/2
1440	200	1/2
1520	125	3/2
1535	150	1/2
1650	150	1/2
1675	140	5/2
1680	120	5/2
1700	100	3/2
1710	110	1/2
1720	150	3/2
1900	500	3/2
1990	550	7/2
2080	250	3/2
2190	550	7/2
2200	550	9/2
2250	470	9/2

Masse	Largeur	Spin
1232	115	3/2
1600	200	3/2
1620	180	1/2
1700	300	3/2
1900	240	1/2
1905	280	5/2
1910	250	1/2
1920	150	3/2
1930	250	5/2
1950	250	7/2

Masse	Largeur	Spin
1116	000	1/2
1405	050	1/2
1520	016	3/2
1600	150	1/2
1670	035	1/2
1690	060	3/2
1800	300	1/2
1810	150	1/2
1820	080	5/2
1830	095	5/2
1890	100	3/2
2100	200	7/2
2110	200	5/2

Σ : 1 quark s
 $S = -1$, $I = 1$

Ξ : uss ou dss
 $S = -2$, $I = 1/2$

Ω : sss
 $S = -3$, $I = 0$

Masse	Largeur	Spin
1192	000	1/2
1385	036	3/2
1660	100	1/2
1670	060	3/2
1750	090	1/2
1775	120	5/2
1915	120	5/2
1940	220	3/2
2030	180	7/2

Masse	Largeur	Spin
1315	00	1/2
1530	09	3/2
1690	50	3/2
1820	24	3/2
1950	60	3/2
2030	20	5/2

Masse	Largeur	Spin
1672	00	3/2

Tableau 3. Les baryons.

La masse de la particule correspond à la valeur la plus basse pour chaque sous-tableau. Les autres sont les résonances. Les masses et les largeurs de niveau sont en MeV. Les données sont issues de [3].

4. Références

- [1] Nakamura K (Particle Data Group) 2010 Review of particle physics *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** 075021
- [2] Beringer J *et al.* (Particle Data Group) 2012 Review of Particle Physics *Phys. Rev. D* **86** 010001
- [3] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369

Annexe B

Formulaire de théorie des champs et calcul de traces

Les sections 3 et 4 ont été publiées dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 105003

1. Générateurs des groupes de Lie

1.1 Générateurs de $SU(2)$

$SU(2)$ désigne l'ensemble des matrices unitaires de dimension 2 qui ont un déterminant égal à 1. Les générateurs de ce groupe sont les matrices de Pauli, et leur représentation habituelle est :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2 Générateurs de $SU(3)$

$SU(3)$ désigne l'ensemble des matrices unitaires de dimension 3 qui ont un déterminant égal à 1. Les générateurs de $SU(3)$ sont les matrices de Gell-Mann. Une représentation possible de ces générateurs est [1] :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Ces matrices sont reliées entre elles par la relation de commutation :

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i \cdot f^{abc} \cdot \frac{\lambda^c}{2}, \quad (3)$$

où les f^{abc} sont appelées les constantes de structure de $SU(3)$, avec $f^{123}=1$, $f^{147}=1/2$, $f^{156}=-1/2$, $f^{246}=1/2$, $f^{678}=\sqrt{3}/2$, les autres étant nulles.

Dans le cadre du modèle de Nambu et Jona-Lasinio, il est d'usage d'introduire λ_0 , qui n'est bien sûr pas un 9^{ème} générateur :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2. Matrices de Dirac

2.1 Représentations usuelles

Dirac (standard)

$$\gamma_D^0 = \begin{bmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{bmatrix} \quad \gamma_D^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_D^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$i = 1, 2, 3$

où 1_2 est la matrice identité 2×2 .

Chiral (spinorielle)

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{bmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Majorana

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} i \cdot \sigma_3 & 0 \\ 0 & i \cdot \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{bmatrix}$$

2.2 Propriétés des matrices de Dirac

Algèbre de Clifford

Quelle que soit la représentation, les relations suivantes sont toujours valables [2] :

$$\begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_4 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \\ (\gamma^5)^2 = \mathbf{1}_4 \\ \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0, (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \end{cases}. \quad (8)$$

Plus précisément, (8) définit l'algèbre de Clifford, avec

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

qui est la métrique de Minkowski et $\mathbf{1}_4$ la matrice identité 4×4 . Nous pouvons également introduire :

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu - \gamma^\nu \cdot \gamma^\mu). \quad (10)$$

Autres propriétés

$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$	$Tr(\mathbf{1}_4) = 4$
(sommation implicite sur les μ)	$Tr(\gamma^5) = 0$
$\gamma_\mu \not\propto \gamma^\mu = -2\not\propto$	$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\alpha \gamma^\beta) = Tr(\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\alpha)$
$\gamma_\mu \not\propto \not\propto \gamma^\mu = 4ab$	$= Tr(\gamma^\beta \gamma^\alpha \dots \gamma^\nu \gamma^\mu)$
$\gamma_\mu \not\propto \not\propto \not\propto \gamma^\mu = -2\not\propto \not\propto \not\propto$	$Tr(\text{nombre impair de } \gamma^\mu) = 0$
$\gamma_\mu \sigma_{\nu\lambda} \gamma^\mu = 0$	$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$
$Tr(\not\propto \not\propto) = 4ab$	$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0$
$Tr(\not\propto \not\propto \gamma^5) = 0$	$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta})$

où a_μ est la μ ^{ème} composante d'un quadrivecteur quelconque, et $a_\mu \cdot \gamma^\mu \equiv \not\propto$ (dague de Feynman). Idem pour b et c .

3. Calcul standard de traces

La vocation des parties 3 et 4 est de montrer comment calculer les éléments de matrice apparaissant dans les calculs de section efficace (chapitre 6). Dans l'ensemble, cela requiert des calculs de traces, dans lesquels on rencontre des termes comme α . La section 3 traite des cas relativement classiques. La section 4 s'occupe de cas plus délicats, où l'on a des spineurs comportant des quantités de mouvement différentes.

3.1 Premier exemple

En tant que premier exemple, nous évaluons le terme carré du canal s , pour la réaction $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. L'élément de matrice correspondant s'écrit comme :

$$-i\mathcal{M}_s = f_s \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) 1_4 i g_1 i \mathcal{D}_s^S(p_1 + p_2) \Gamma(p_1 + p_2, p_3) i g_2 u(p_1). \quad (12)$$

Le terme carré se calcule en effectuant en sommant les couleurs et les spins :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4N_c^2} \cdot \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{couleur}}} \mathcal{M}_s \cdot \mathcal{M}_s^* \\ &= \frac{f_s^2}{4N_c} \cdot |g_1 g_2|^2 \cdot |\mathcal{D}_s^S|^2 \cdot |\Gamma|^2 \cdot \sum_{s_1, s_2} (\bar{v}(p_2, s_2) \cdot 1_4 \cdot u(p_1, s_1)) \cdot (\bar{v}(p_2, s_2) \cdot 1_4 \cdot u(p_1, s_1))^*, \end{aligned} \quad (13)$$

où s_1, s_2 sont les spins des quark/antiquark entrants. La sommation sur les spins donne:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2} \bar{v}(p_2, s_2) \cdot 1_4 \cdot u(p_1, s_1) \cdot \bar{u}(p_1, s_1) \cdot 1_4 \cdot v(p_2, s_2) \\ &= \sum_{s_2} v(p_2, s_2) \cdot \bar{v}(p_2, s_2) \cdot 1_4 \times \sum_{s_1} u(p_1, s_1) \cdot \bar{u}(p_1, s_1) \cdot 1_4 \\ &= \sum_{s_2} v_i(p_2, s_2) \cdot \bar{v}_j(p_2, s_2) \cdot [1_4]_{jk} \times \sum_{s_1} u_k(p_1, s_1) \cdot \bar{u}_l(p_1, s_1) \cdot [1_4]_{li} \end{aligned} \quad (14)$$

Au niveau de la dernière ligne de (14), les indices sur les spineurs i, j, k, l sont l'objet de la convention d'Einstein sur les sommes. En utilisant la relation de complétude des spineurs :

$$\begin{cases} \sum_{s_1=\pm} u_k(p_1, s_1) \cdot \bar{u}_l(p_1, s_1) = (\not{p}_1)_{kl} + m_1 \cdot \delta_{kl} \\ \sum_{s_2=\pm} v_i(p_2, s_2) \cdot \bar{v}_j(p_2, s_2) = (\not{p}_2)_{ij} - m_2 \cdot \delta_{ij} \end{cases}, \quad (15)$$

(14) se réécrit comme :

$$\begin{aligned} & ((\not{p}_2)_{ij} - m_2 \cdot \delta_{ij}) \cdot [1_4]_{jk} \cdot ((\not{p}_1)_{kl} + m_1 \cdot \delta_{kl}) \cdot [1_4]_{li} \\ &= Tr((\not{p}_2 - m_2) \cdot (\not{p}_1 + m_1)) = 4 \cdot (p_2 \cdot p_1 - m_2 \cdot m_1) \end{aligned} \quad (16)$$

Puisque $2p_1 \cdot p_2 = s - m_1^2 - m_2^2$, voir annexe F, nous retrouvons le résultat trouvé dans [3]:

$$\frac{1}{4N_c^2} \cdot \sum_{s,c} |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{f_s^2}{2N_c} \cdot |g_1 g_2|^2 \cdot |\mathcal{D}_s^S \cdot \Gamma|^2 \cdot (s - (m_1 + m_2)^2). \quad (17)$$

3.2 Second exemple

Considérons maintenant le calcul du terme croisé des canaux u et t , pour la réaction $q + \bar{q} \rightarrow M + M$. Les éléments de matrice à utiliser sont :

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_t &= f_t \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_3) i\gamma_5 ig_2 u(p_1) \\ -i\mathcal{M}_u &= f_u \delta_{c_1, c_2} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_4) i\gamma_5 ig_2 u(p_1) \end{aligned} \quad (18)$$

Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4N_c^2} \cdot \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{couleur}}} \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_u^* &= \frac{f_t f_u |g_1 g_2|^2}{4N_c} \cdot \frac{1}{(t - m_t^2)(u - m_u^2)} \\ &\times Tr((\not{p}_2 - m_2) \gamma_5 (\not{p}_1 - \not{p}_3 + m_t) \gamma_5 (\not{p}_1 + m_1) \gamma_5 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m_u) \gamma_5) \end{aligned} \quad (19)$$

Le calcul de cette trace est plus délicat que pour (16). En prenant en compte les relations vues au 2.2 de cette annexe, nous proposons la formule suivante :

$$\begin{aligned} &Tr((\not{p}_a + m_a) \gamma_5 (\not{p}_b + m_b) \gamma_5 (\not{p}_c + m_c) \gamma_5 (\not{p}_d + m_d) \gamma_5) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} Tr((\not{p}_a + m_a) \gamma_5 (\not{p}_b + m_b) \gamma_5) \cdot Tr((\not{p}_c + m_c) \gamma_5 (\not{p}_d + m_d) \gamma_5) \\ + Tr((\not{p}_b + m_b) \gamma_5 (\not{p}_c + m_c) \gamma_5) \cdot Tr((\not{p}_d + m_d) \gamma_5 (\not{p}_a + m_a) \gamma_5) \\ - Tr((\not{p}_a + m_a) \gamma_5 (\not{p}_c + m_c) \gamma_5) \cdot Tr((\not{p}_b + m_b) \gamma_5 (\not{p}_d + m_d) \gamma_5) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

L'équation (20) est valide pour quatre matrices γ_5 . Pour les cas où nous avons deux ou aucune de ces matrices, la relation (20) peut être adaptée, en utilisant la propriété $\gamma_5 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma_5 = -\gamma^\mu$. En fait, avec (20), la finalité est de partager la trace en des traces plus restreintes, comparable à la trace intervenant dans (16), dont la forme générale est :

$$Tr((\not{p}_a + m_a) \gamma_5 (\not{p}_b + m_b) \gamma_5) = 4(-p_a \cdot p_b + m_a \cdot m_b), \quad (21)$$

où $p_a \cdot p_b$ est un produit scalaire de deux quadrivecteurs. Ce terme est forcément fonction des variables de Mandelstam, comme vu annexe F. En conséquence, en utilisant (20), nous pouvons retrouver le résultat exposé dans [3] :

$$\frac{1}{4N_c^2} \cdot \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{couleur}}} \mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_u^* = \frac{f_t f_u |g_1 g_2|^2}{4N_c} \cdot \frac{1}{(t - m_t^2)(u - m_u^2)} \times \begin{cases} - (m_2^2 - m_3^2 + u)(m_1^2 - m_3^2 + t) - (m_1^2 - m_4^2 + u)(m_2^2 - m_4^2 + t) \\ + 2m_1 m_u \cdot (m_2^2 - m_4^2 + t) + 2m_2 m_u \cdot (m_1^2 - m_3^2 + t) \\ + 2m_1 m_t \cdot (m_2^2 - m_3^2 + u) + 2m_2 m_t \cdot (m_1^2 - m_4^2 + u) \\ + (s - (m_1 - m_2)^2)(-m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) + (s - (m_1 + m_2)^2)(2m_u m_t) \end{cases}. \quad (22)$$

Naturellement, $\mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^*$ conduit au même résultat. Dans l'esprit de la formule (20), nous proposons aussi la relation :

$$\begin{aligned} & Tr((\not{p}_a + m_a) \gamma^5 (\not{p}_b + m_b) \gamma^5 (\not{p}_c + m_c)) \\ &= m_a \cdot Tr(\not{p}_b \gamma^5 \not{p}_c \gamma^5) + m_b \cdot Tr((\not{p}_a + m_a)(\not{p}_c + m_c)) + m_c \cdot Tr(\not{p}_a \gamma^5 \not{p}_b \gamma^5), \end{aligned} \quad (23)$$

à utiliser dans le cas de traces impliquant trois termes $\not{p}_i + m_i$.

4. Spineurs utilisant des quantités de mouvement différentes

4.1 Calculs préliminaires

Notre point de départ sera les relations exposées dans [4]. A partir de cette référence, nous extrayons les relations où apparaissent des spineurs u faisant intervenir deux quantités de mouvement p_1 et p_2 , associées respectivement aux masses m_1 et m_2 :

$$\begin{cases} u(p_1, \pm) \cdot \bar{u}(p_2, \pm) = \left(j_+ \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} - j_- \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \not{k}_1 - m_2 \cdot \not{k}_2 \right) \cdot \frac{\not{\epsilon}_{\pm}}{\sqrt{2}}, \\ u(p_1, \pm) \cdot \bar{u}(p_2, \mp) = (j_+ \cdot \not{k}_1 + m_1) \cdot \not{k}_2 \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} + (j_- \cdot \not{k}_2 + m_2) \cdot \not{k}_1 \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2}, \end{cases} \quad (24)$$

où \pm est lié au spin, et :

$$\not{k}_1 = \frac{1}{2\Delta} \cdot \left(j_+ \not{p}_1 - \frac{m_1}{m_2} j_- \not{p}_2 \right) \quad \not{k}_2 = \frac{1}{2\Delta} \cdot \left(j_+ \not{p}_2 - \frac{m_2}{m_1} j_- \not{p}_1 \right), \quad (25)$$

$$j_{\pm} = \frac{\sqrt{p_1 \cdot p_2 + m_1 \cdot m_2} \pm \sqrt{p_1 \cdot p_2 - m_1 \cdot m_2}}{\sqrt{2}} \quad \Delta = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 \cdot m_2)^2}, \quad (26)$$

dans lesquelles $k_1, k_2, \omega_+, \omega_-$ sont des quadrivecteurs de type lumière, comme définis dans [4]. Dans la pratique, nous n'avons pas à expliciter ω_{\pm} dans les calculs décrits dans cette annexe. En outre, $k_1, k_2, \omega_+, \omega_-$ satisfont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} k_i^2 = 0 \\ k_i \cdot k_j = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{\pm} \cdot \omega_{\pm} = 0 \\ \omega_{\pm} \cdot \omega_{\mp} = -1 \\ \omega_{\pm} \cdot k_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} i, j = 1, 2 \\ i \neq k \end{cases}. \quad (27)$$

Nous allons maintenant travailler avec des termes comme $v(p_1, \pm) \cdot \bar{v}(p_2, \pm)$. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons les relations :

$$\omega_- u(p, +) = \sqrt{2} v(p, +) \quad \omega_+ u(p, -) = -\sqrt{2} v(p, -), \quad (28)$$

et nous écrivons :

$$\begin{aligned} v(p_1, \pm) \cdot \bar{v}(p_2, \pm) &= \frac{\omega_- u(p_1, +)}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\omega_- u(p_2, +)}{\sqrt{2}} \right)^{\dagger} \cdot \gamma_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \omega_- u(p_1, +) \cdot (u(p_2, +))^{\dagger} \cdot \gamma_0 \cdot \omega_- \cdot \gamma_0 = \frac{1}{2} \cdot \omega_- u(p_1, +) \cdot \bar{u}(p_2, +) \omega_- \end{aligned} . \quad (29)$$

En explicitant $u(p_1, +) \cdot \bar{u}(p_2, +)$ en se servant de (4), nous obtenons alors :

$$v(p_1, +) \cdot \bar{v}(p_2, +) = \frac{1}{2} \cdot \omega_- \cdot \left(j_+ \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} - j_- \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} + m_1 \cdot \mathcal{K}_2 - m_2 \cdot \mathcal{K}_1 \right) \cdot \frac{\omega_+}{\sqrt{2}} \cdot \omega_- . \quad (30)$$

Ensuite, puisque $\omega_{\pm} \cdot \mathcal{K}_i + \mathcal{K}_i \cdot \omega_{\pm} = 2 \cdot \omega_{\pm} \cdot k_i = 0$, nous en déduisons que $\omega_{\pm} \cdot \mathcal{K}_i = -\mathcal{K}_i \cdot \omega_{\pm}$. De plus, en utilisant $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$, l'équation (30) devient :

$$v(p_1, +) \cdot \bar{v}(p_2, +) = \left(j_+ \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} - j_- \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} - m_1 \cdot \mathcal{K}_2 + m_2 \cdot \mathcal{K}_1 \right) \cdot \frac{\omega_- \cdot \omega_+}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \omega_- . \quad (31)$$

Aussi, $\omega_- \cdot \omega_+ + \omega_+ \cdot \omega_- = -2$, de sorte que $\omega_- \cdot \omega_+ \cdot \omega_- = -2\omega_- - \omega_+ \cdot \omega_- \cdot \omega_- = -2\omega_-$. La méthode est identique pour $v(p_1, -) \cdot \bar{v}(p_2, -)$. Cela nous conduit à écrire la relation :

$$v(p_1, \pm) \cdot \bar{v}(p_2, \pm) = \left(-j_+ \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \mathcal{K}_2 - m_2 \cdot \mathcal{K}_1 \right) \cdot \frac{\omega_{\mp}}{\sqrt{2}} . \quad (32)$$

En parallèle, avec $v(p_1, +) \cdot \bar{v}(p_2, -)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} v(p_1, +) \cdot \bar{v}(p_2, -) &= -\frac{1}{2} \cdot \omega_- u(p_1, +) \cdot \bar{u}(p_2, -) \omega_+ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \omega_- \left((j_+ \cdot \mathcal{K}_1 + m_1) \cdot \mathcal{K}_2 \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} + (j_- \cdot \mathcal{K}_2 + m_2) \cdot \mathcal{K}_1 \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \omega_+ \\ &= \left((-j_+ \cdot \mathcal{K}_1 + m_1) \cdot (-\mathcal{K}_2) \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} + (-j_- \cdot \mathcal{K}_2 + m_2) \cdot (-\mathcal{K}_1) \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} \right) \frac{\omega_- \cdot \omega_+}{-2} \\ &= \left((j_+ \cdot \mathcal{K}_1 - m_1) \cdot \mathcal{K}_2 \cdot \frac{1-\gamma_5}{2} + (j_- \cdot \mathcal{K}_2 - m_2) \cdot \mathcal{K}_1 \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} \right) \frac{-2 - \omega_+ \cdot \omega_-}{-2} \end{aligned} . \quad (33)$$

Les termes formés par $\not{\alpha}_+ \cdot \not{\alpha}_-$ s'annulent car ils se terminent par $\not{k}_2(1-\gamma_5)\not{\alpha}_+$ ou $\not{k}_1(1+\gamma_5)\not{\alpha}_+$. En effet, en les réécrivant comme $\not{k}_2 \cdot \not{\alpha}_+(1+\gamma_5)$ et $\not{k}_1 \cdot \not{\alpha}_+(1-\gamma_5)$, [4] précise que de tels termes sont nuls. La même méthode est utilisée afin de trouver l'expression de $v(p_1, -) \cdot \bar{v}(p_2, +)$. Finalement, en rassemblant toutes les relations obtenues, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(p_1, \pm) \cdot \bar{u}(p_2, \pm) = \left(j_+ \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} - j_- \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \not{k}_2 - m_2 \cdot \not{k}_1 \right) \cdot \frac{\not{\alpha}_\pm}{\sqrt{2}} \\ u(p_1, \pm) \cdot \bar{u}(p_2, \mp) = (j_+ \cdot \not{k}_1 + m_1) \cdot \not{k}_2 \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} + (j_- \cdot \not{k}_2 + m_2) \cdot \not{k}_1 \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \\ v(p_1, \pm) \cdot \bar{v}(p_2, \pm) = \left(-j_+ \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \not{k}_2 - m_2 \cdot \not{k}_1 \right) \cdot \frac{\not{\alpha}_\mp}{\sqrt{2}} \\ v(p_1, \pm) \cdot \bar{v}(p_2, \mp) = (j_+ \cdot \not{k}_1 - m_1) \cdot \not{k}_2 \cdot \frac{1 \mp \gamma_5}{2} + (j_- \cdot \not{k}_2 - m_2) \cdot \not{k}_1 \cdot \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \end{array} \right. . \quad (34)$$

4.2 Application

Pour utiliser (34), nous allons calculer le terme croisé $\mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^*$ de la réaction $q + q \rightarrow D + M$, en tant qu'exemple. Les canaux u et t s'écrivent via les éléments de matrice :

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_t &= f_t \delta_{c_t, c_2} \epsilon^{c_1, c_t, c_3} \bar{v}(p_1) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_3 - p_1) i\gamma_5 ig_2 u(p_2) \\ -i\mathcal{M}_u &= f_u \delta_{c_u, c_1} \epsilon^{c_2, c_u, c_3} \bar{v}(p_2) i\gamma_5 ig_1 S_F(p_1 - p_4) i\gamma_5 ig_2 u(p_1) \end{aligned} . \quad (35)$$

Soient m_t et m_u les masses des quarks propagés respectivement des les canaux t et u . En supposant que les ϵ donnent +1, le terme croisé s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4N_c^2} \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{couleur}}} \mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^* &= \frac{f_u f_t |g_1 g_2|^2}{4N_c} \cdot \frac{1}{(t - m_t^2)(u - m_u^2)} \\ &\times \sum_{s_1, s_2} v(p_1, s_1) \bar{v}(p_2, s_2) \cdot \gamma_5 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m_u) \gamma_5 \cdot u(p_1, s_1) \bar{u}(p_2, s_2) \cdot \gamma_5 (\not{p}_3 - \not{p}_1 + m_t) \gamma_5 \end{aligned} . \quad (36)$$

Ici, les sommes sur les spins s_1, s_2 ne peuvent pas être séparées, comme dans la partie 3. Ainsi, nous devons considérer quatre cas : $s_1 = +, s_2 = +$; $s_1 = +, s_2 = -$; $s_1 = -, s_2 = +$; $s_1 = -, s_2 = -$, désignés respectivement comme $T^{++}, T^{+-}, T^{-+}, T^{--}$. Tout d'abord, concernant T^{++} , l'utilisation de (34) nous permet d'écrire ce terme comme :

$$T^{++} = Tr \left(\begin{array}{l} \left(-j_+ \cdot \frac{1 - \gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{1 + \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \not{k}_2 - m_2 \cdot \not{k}_1 \right) \cdot \frac{\not{\alpha}_-}{\sqrt{2}} \cdot (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \\ \times \left(j_+ \cdot \frac{1 + \gamma_5}{2} - j_- \cdot \frac{1 - \gamma_5}{2} + m_1 \cdot \not{k}_2 - m_2 \cdot \not{k}_1 \right) \cdot \frac{\not{\alpha}_+}{\sqrt{2}} \cdot (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \end{array} \right) . \quad (37)$$

Conscient du comportement pseudo-scalaire des matrices γ_5 , nous coupons (37) en deux parties. Les six termes composant la première partie sont numérotés pour clarifier nos explications. Les matrices γ_5 de la seconde partie sont quant à elles traitées en utilisant l'algèbre de Clifford vue au 2.2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
T^{++} = & Tr \left(\underbrace{\left(-j_+ \cdot \frac{1}{2} + j_- \cdot \frac{1}{2} + m_1 \cdot \cancel{k}_2 - m_2 \cdot \cancel{k}_1 \right)}_{4} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\phi}_-}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(-\cancel{p}_1 + \cancel{p}_4 + m_u)}_{3}}_{2} \right) \\
& + Tr \left(\underbrace{\left(j_+ \cdot \frac{1}{2} - j_- \cdot \frac{1}{2} + m_1 \cdot \cancel{k}_2 - m_2 \cdot \cancel{k}_1 \right)}_{4} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\phi}_+}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(-\cancel{p}_3 + \cancel{p}_1 + m_t)}_{6}}_{5} \right) \\
& + Tr \left(\underbrace{\left(j_+ \cdot \frac{\gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{\gamma_5}{2} \right)}_{4} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\phi}_-}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(-\cancel{p}_1 + \cancel{p}_4 + m_u)}_{3}}_{2} \right) \\
& + Tr \left(\underbrace{\left(j_+ \cdot \frac{\gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{\gamma_5}{2} \right)}_{4} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\phi}_+}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(-\cancel{p}_3 + \cancel{p}_1 + m_t)}_{6}}_{5} \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

La première trace de (38) présente une structure similaire de celle de (20). La différence est que (38) a 6 termes, alors que (20) en a quatre. L'idée est alors d'étendre la méthode suggérée par (20). Pour cela, nous considérons tout d'abord une relation comme (20), mais en utilisant $\gamma_5 \cdot \gamma^\mu \cdot \gamma_5 = -\gamma^\mu$ afin de "retirer" les matrices γ_5 de l'expression. Nous établissons que :

$$\begin{aligned}
& Tr((\cancel{p}_1 + m_1) \cdot (\cancel{p}_2 + m_2) \cdot (\cancel{p}_3 + m_3) \cdot (\cancel{p}_4 + m_4)) \\
= & \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{array}{l} Tr((\cancel{p}_1 + m_1) \cdot (\cancel{p}_2 + m_2)) \cdot Tr((\cancel{p}_3 + m_3) \cdot (\cancel{p}_4 + m_4)) \\ + Tr((\cancel{p}_1 + m_1) \cdot (\cancel{p}_4 + m_4)) \cdot Tr((\cancel{p}_2 + m_2) \cdot (\cancel{p}_3 + m_3)) \\ - Tr((\cancel{p}_1 - m_1) \cdot (\cancel{p}_3 + m_3)) \cdot Tr((\cancel{p}_2 - m_2) \cdot (\cancel{p}_4 + m_4)) \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{39}$$

D'une manière symbolique, nous réécrivons (39) comme :

$$Tr(1,2,3,4) = \frac{1}{4} \cdot \left(Tr(1,2) \cdot Tr(3,4) + Tr(1,4) \cdot Tr(2,3) - Tr(\overline{1,3}) \cdot Tr(\overline{2,4}) \right). \tag{40}$$

Chaque nombre est associé à un terme de la forme $\cancel{p}_i + m_i$, c'est à dire un quadrivecteur utilisant la dague de Feynman et un terme scalaire (une masse dans (39)). La notation $Tr(i,j)$ rappelle que le signe d'*un* des scalaires de $Tr(i,j)$ doit être changé, comme montré dans (39). Cette méthode est alors étendue à des traces faisant intervenir plus de quatre de tels termes. La condition est que le nombre de termes doit être pair. Bien entendu, la méthode peut tout de même être adaptée aux cas où le nombre de termes est impair.

L'idée générale de cette méthode de partage de la trace est d'associer les termes par groupes de deux, afin de former des invariants de Lorentz, pour lesquels la trace est facilement calculable. Dans le cas d'une trace avec 4 termes, 3 permutations sont possibles, comme dans (40). Le signe placé devant certaines traces, comme avec $-Tr(\overline{1,3}) \cdot Tr(\overline{2,4})$ dans (40), correspond à la signature de la permutation appliquée. Plus précisément, la trace $Tr(i,j)$ concerne des couples de même parité (paire/paire ou impaire/impaire). Cette complication est motivée par notre souhait de garder ensemble les quadrivecteurs et les scalaires ensembles, afin d'éviter la difficulté qu'engendrerait d'avoir à développer l'expression entière. Aussi, le facteur 1/4 intervenant dans (40) rappelle que le calcul de la trace d'invariants de Lorentz ajoute un facteur 4, voir 2.2. Pour exprimer une trace comme un produit de deux traces, nous

avons besoin d'un tel facteur. Dans le cas de n termes, la valeur du facteur est $4^{\frac{-n}{2}+1}$. Nous rappelons que n est supposé être pair. En outre, $(n-1)!!$ sont possibles, où $!!$ est la double factorielle, c'est à dire le produit des termes impairs inférieurs à n . Dans le cas de (40), on vérifie que $n=4$ conduit bien à $(3)!!=1\times 3=3$ permutations.

Nous appliquons cette méthode à la trace à 6 termes de l'équation (38). Cela conduit à un total de 15 permutations possibles. La plupart d'entre elles s'annulent, en utilisant les propriétés (27). Parmi les 5 permutations restantes, 3 d'entre elles concernent la trace $Tr(1,4)$. Après quelques étapes de calcul, nous arrivons à les exprimer de la manière suivante :

$$-\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot (j_+^2 + j_-^2) \begin{cases} Tr(\omega_- \cdot (\not{p}_1 - \not{p}_4)) \cdot Tr(\omega_+ \cdot (\not{p}_3 - \not{p}_1)) \\ + Tr(\omega_+ \cdot (\not{p}_1 - \not{p}_4)) \cdot Tr(\omega_- \cdot (\not{p}_3 - \not{p}_1)) \\ + 16((\not{p}_1 - \not{p}_4) \cdot (\not{p}_3 - \not{p}_1) + m_u m_t) \end{cases}. \quad (41)$$

Toutefois, la seconde partie de (38), qui rassemble les matrices γ_5 , s'écrit quant à elle :

$$Tr \left(\begin{array}{l} \left(j_+ \cdot \frac{\gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{\gamma_5}{2} \right) \cdot \frac{\omega_-}{\sqrt{2}} \cdot (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \\ \times \left(j_+ \cdot \frac{\gamma_5}{2} + j_- \cdot \frac{\gamma_5}{2} \right) \cdot \frac{\omega_+}{\sqrt{2}} \cdot (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \end{array} \right), \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (j_+^2 + j_-^2) \cdot Tr(\omega_- \cdot (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m_u) \times \omega_+ \cdot (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t)) \quad (42)$$

c'est à dire l'opposé de (41). En d'autres termes, (41) et (42) s'annulent mutuellement. Il reste alors seulement deux permutations, $Tr(1,6) \cdot Tr(2,5) \cdot Tr(3,4)$ et $Tr(\overline{1,3}) \cdot Tr(2,5) \cdot Tr(\overline{4,6})$. On montre que celles-ci sont strictement égales, et conduisent à l'expression :

$$T^{++} = -(-m_1 2k_2 \cdot (p_1 - p_4) + m_2 2k_1 \cdot (p_1 - p_4) + m_u (j_+ - j_-)) \\ \times (-m_1 2k_2 \cdot (p_3 - p_1) + m_2 2k_1 \cdot (p_3 - p_1) - m_t (j_+ - j_-)). \quad (43)$$

Par symétrie, le cas $s_1 = -, s_2 = -$, c'est à dire T^{--} , est égal au résultat de (43). Nous avons :

$$T^{++} + T^{--} = -2(-m_1 2k_2 \cdot (p_1 - p_4) + m_2 2k_1 \cdot (p_1 - p_4) + m_u (j_+ - j_-)) \\ \times (-m_1 2k_2 \cdot (p_3 - p_1) + m_2 2k_1 \cdot (p_3 - p_1) - m_t (j_+ - j_-)). \quad (44)$$

Pour le moment, nous n'allons pas chercher à exploiter davantage cette écriture, en particulier les quadrivecteurs $k_{i,j}$ définis équation (25). D'autre part, il est intéressant de remarquer que nous n'avons pas eu besoin d'expliciter les quadrivecteurs ω_{\pm} [4].

Maintenant, considérons le cas où $s_1 = +, s_2 = -$, qui s'écrit comme :

$$T^{+-} = Tr \left(\begin{array}{l} \left((j_+ \not{k}_1 - m_1) \not{k}_2 \frac{1-\gamma_5}{2} + (j_- \not{k}_2 - m_2) \not{k}_1 \frac{1+\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \\ \times \left((j_+ \not{k}_1 + m_1) \not{k}_2 \frac{1+\gamma_5}{2} + (j_- \not{k}_2 + m_2) \not{k}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \end{array} \right). \quad (45)$$

En développant cette équation, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T^{+-} = & Tr \left(\left((j_+ \not{k}_1 - m_1) \not{k}_2 \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \left((j_+ \not{k}_1 + m_1) \not{k}_2 \frac{1+\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \right) \\ & + Tr \left(\left((j_- \not{k}_2 - m_2) \not{k}_1 \frac{1+\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \left((j_+ \not{k}_1 + m_1) \not{k}_2 \frac{1+\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \right) \\ & + Tr \left(\left((j_+ \not{k}_1 - m_1) \not{k}_2 \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \left((j_- \not{k}_2 + m_2) \not{k}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \right) \\ & + Tr \left(\left((j_- \not{k}_2 - m_2) \not{k}_1 \frac{1+\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_1 + \not{p}_4 + m_u) \left((j_- \not{k}_2 + m_2) \not{k}_1 \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (-\not{p}_3 + \not{p}_1 + m_t) \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Comme avec (38), les $\frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ conduisent à couper chaque ligne de (46) en deux parties. Après quelques manipulations, nous trouvons que la première et la quatrième traces de (46) donnent ensemble le résultat :

$$\left(j_+^2 + j_-^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} -2k_1 \cdot (p_3 - p_1) \times k_2 \cdot (p_1 - p_4) \\ -2k_1 \cdot (p_1 - p_4) \times k_2 \cdot (p_3 - p_1) \\ +(p_1 - p_4) \cdot (p_3 - p_1) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

Alors que la seconde et la troisième traces donnent :

$$2m_1 m_2 \cdot \begin{pmatrix} -2k_1 \cdot (p_3 - p_1) \times k_2 \cdot (p_1 - p_4) \\ -2k_1 \cdot (p_1 - p_4) \times k_2 \cdot (p_3 - p_1) \\ +(p_1 - p_4) \cdot (p_3 - p_1) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

En d'autres termes, seul le pré-facteur est différent entre (47) et (48). Nous observons de même que $T^{-+} = T^{+-}$. Cela nous permet d'avoir, en utilisant $j_+^2 + j_-^2 = 2p_1 \cdot p_2$,

$$T^{+-} + T^{-+} = (2p_1 \cdot p_2 + 2m_1 m_2) \cdot \begin{pmatrix} -2k_1 \cdot (p_3 - p_1) \times 2k_2 \cdot (p_1 - p_4) \\ -2k_1 \cdot (p_1 - p_4) \times 2k_2 \cdot (p_3 - p_1) \\ +2(p_1 - p_4) \cdot (p_3 - p_1) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

En rassemblant les cas T^{++}, T^{+-}, T^{-+} and T^{--} , nous trouvons alors, après quelques calculs :

$$\begin{aligned} T^{++} + T^{+-} + T^{-+} + T^{--} = & \\ & -2p_2 \cdot (p_1 - p_4) \times 2p_1 \cdot (p_3 - p_1) - 2p_1 \cdot (p_1 - p_4) \times 2p_2 \cdot (p_3 - p_1) \\ & + 2p_1 \cdot p_2 \times 2(p_1 - p_4) \cdot (p_3 - p_1) + 2m_1 m_2 2(p_1 - p_4) \cdot (p_3 - p_1) \\ & + 2m_u m_1 2p_2 \cdot (p_3 - p_1) - 2m_u m_2 2p_1 \cdot (p_3 - p_1) \\ & - 2m_t m_1 2p_2 \cdot (p_1 - p_4) + 2m_t m_2 2p_1 \cdot (p_1 - p_4) \\ & + 2m_u m_t 2p_1 \cdot p_2 - 4m_1 m_2 m_u m_t \end{aligned} \quad (50)$$

Pour finir, l'expression complète de notre terme croisé $\mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^*$ est :

$$\frac{1}{4N_c^2} \cdot \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{couleur}}} \mathcal{M}_u \cdot \mathcal{M}_t^* = \frac{f_u f_t |g_1 g_2|^2}{4N_c} \cdot \frac{1}{(t - m_t^2)(u - m_u^2)} \times \begin{cases} - (m_2^2 - m_3^2 + u)(m_1^2 - m_3^2 + t) - (m_1^2 - m_4^2 + u)(m_2^2 - m_4^2 + t) \\ + 2m_1 m_u \cdot (m_2^2 - m_4^2 + t) + 2m_2 m_u \cdot (m_1^2 - m_3^2 + t) \\ + 2m_1 m_t \cdot (m_2^2 - m_3^2 + u) + 2m_2 m_t \cdot (m_1^2 - m_4^2 + u) \\ + (s - (m_1 - m_2)^2)(-m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) + (s - (m_1 + m_2)^2)(2m_u m_t) \end{cases}. \quad (51)$$

Les calculs effectués avec $\mathcal{M}_t \cdot \mathcal{M}_u^*$ donnent le même résultat. En outre, (51) est égal à ce que nous avions trouvé équation (22). Cette remarque peut s'expliquer par la méthode exposée dans [5]. Plus précisément, selon l'approche suggérée dans ce papier, nous pouvons choisir un flot arbitraire qui permet de réécrire nos éléments de matrice. Dans le cas de (35), le flot allant de la particule 1 à la particule 2 ne modifie pas $-i\mathcal{M}_u$. Mais, avec $-i\mathcal{M}_t$, cela conduit à remplacer $S_F(p_3 - p_1)$ par $S_F(p_1 - p_3)$, $\bar{v}(p_1)$ par $\bar{v}(p_2)$ et $u(p_2)$ par $u(p_1)$. Clairement, mis à part les termes ϵ , nous obtenons des éléments de matrice identiques à ceux de (18). Donc, cela explique pourquoi (51) et (22) sont équivalentes.

4.3 Autres configurations

Concernant les autres calculs de ce type, nous établissons que :

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_2, s_2) \cdot (\not{p} + m) \cdot v(p_1, s_1) \bar{v}(p_2, s_2) \\ &= 2m(2p_1 \cdot p_2 - 2m_1 m_2) - 2m_1 2p_2 \cdot p + 2m_2 2p_1 \cdot p \end{aligned}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2} v(p_1, s_1) \bar{v}(p_2, s_2) \cdot (\not{p} + m) \cdot u(p_1, s_1) \bar{u}(p_2, s_2) \\ &= 2m(2p_1 \cdot p_2 - 2m_1 m_2) + 2m_1 2p_2 \cdot p - 2m_2 2p_1 \cdot p \end{aligned}, \quad (53)$$

et :

$$\sum_{s_1, s_2} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_2, s_2) \cdot v(p_1, s_1) \bar{v}(p_2, s_2) = 2 \cdot (s - (m_1 + m_2)^2). \quad (54)$$

L'équation (54) coïncide avec ce que nous avons obtenu équations (16–17) avec :

$$\sum_{s_1, s_2} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \cdot v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2). \quad (55)$$

5. Références

- [1] Robinson M, Bland K, Cleaver G et Dittmann J 2008 A Simple Introduction to Particle Physics arXiv:0810.3328
- [2] Delamotte B 1996 Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré, cours en Français disponible sur Internet à l'adresse : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092924>
- [3] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys.Rev. C* **53** 410–29
- [4] Borodulin V I, Rogalyov R N et Slabospitsky S R 1995 CORE (COmpendium of RElations), version 2.1. arXiv:hep-ph/9507456
- [5] Denner A, Eck H, Hahn O et Küblbeck J 1992 Feynman rules for fermion-number-violating interactions *Nucl. Phys. B* **387** 467–81

Annexe C

Facteurs de saveur

Cette annexe a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 105003

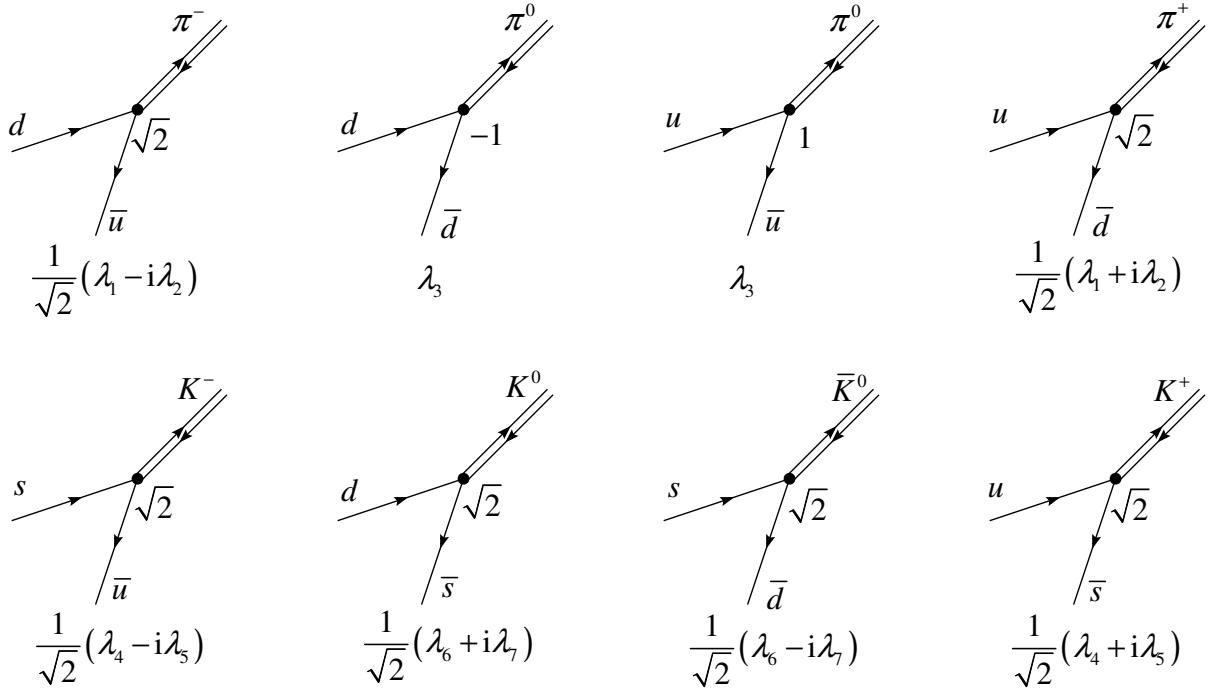
1. Méthode générale

Un facteur de saveur est une constante scalaire intervenant notamment dans le calcul des sections efficaces. Il se détermine à chaque vertex du diagramme de Feynman étudié. La méthode pour calculer un facteur de saveur est la même, quelle que soit les particules que nous considérons. Notons que pour déterminer un facteur de saveur, les quarks u et d doivent être traitées comme des particules différentes. Autrement dit, la symétrie isospin ne peut pas être considérée ici.

Chaque vertex matérialisera la rencontre entre trois particules : une particule composite (méson, diquark, baryon) et deux autres particules « élémentaires » qui, réunies, donnent la particule composite. A chaque particule composite correspond une matrice formée à partir d'un ou d'une combinaison linéaire de deux générateurs de $SU(3)$ (voir Annexe B). A partir de la matrice obtenue, chaque ligne s'identifie à une première particule « élémentaire », les colonnes à la seconde particule « élémentaire ». Dans le cas des mésons, les lignes correspondent par convention aux quarks, les colonnes aux antiquarks. Pour les diquarks, les lignes correspondent à un premier quark, les colonnes à un second quark. Pour les baryons, les lignes sont associées aux diquarks et les colonnes aux quarks.

2. Mésons

	\bar{u}	\bar{d}	\bar{s}
u			
d			
s			



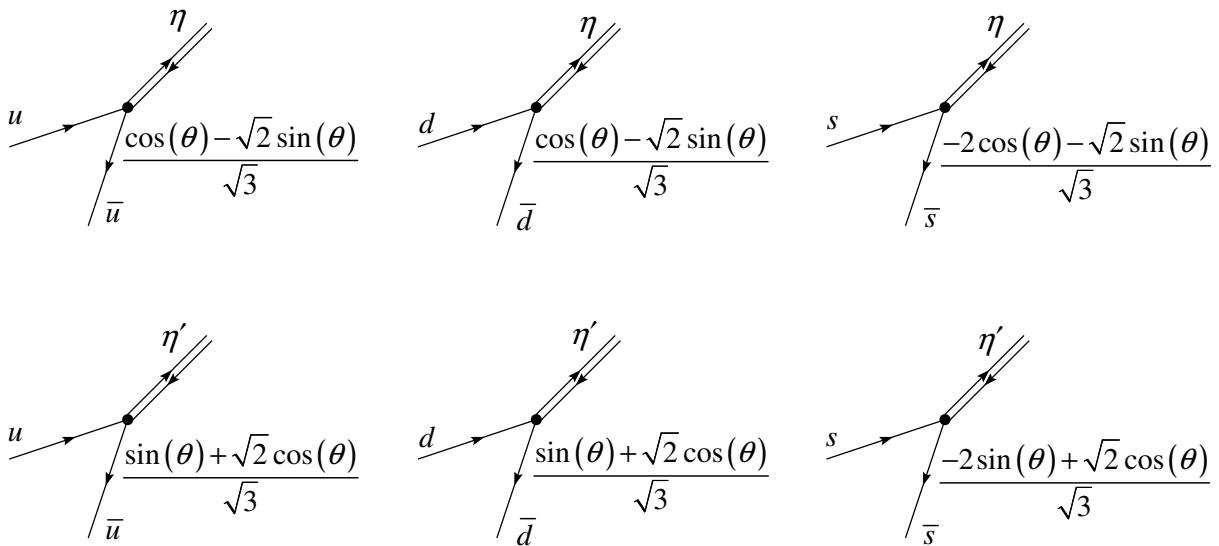
Pour η et η' , nous devons utiliser l'angle de mélange θ , que nous avons introduit dans le chapitre 3, relatif aux mésons. Formellement, nous écrivons, comme dans [1] :

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où :

$$\eta_8 \Leftrightarrow \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \text{ et } \eta_0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{1}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

ce qui nous donne :



3. Diquarks

	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>
<i>u</i>			
<i>d</i>			
<i>s</i>			

3.1 Diquarks scalaires

$[ud]$
 $[us]$
 $[ds]$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_2 \Big|_{ud} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_2 \Big|_{du} \\
 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_5 \Big|_{us} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_5 \Big|_{su} \\
 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_7 \Big|_{ds} - \frac{-i}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_7 \Big|_{sd}
 \end{aligned}$$

Cette écriture se justifie en disant que les diquarks $[ud]$, $[us]$, $[ds]$ présents dans ces croquis sont en fait des combinaisons linéaires des deux diquarks possibles. Plus précisément, les diquarks scalaires ont une fonction d'onde antisymétrique en saveur. Par exemple, pour $[ud]$, nous avons [2] :

$$[ud] = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (ud - du), \quad (3)$$

et de même pour $[us]$ et $[ds]$.

3.2 Diquarks axiaux

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_1 \Big|_{ud} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_1 \Big|_{du}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_4 \Big|_{us} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_4 \Big|_{su}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_6 \Big|_{ds} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda_6 \Big|_{sd}}{\sqrt{2}}$$

Pour ces trois diquarks, le raisonnement est identique à celui vu pour les diquarks scalaires, seules diffèrent les matrices employées et la combinaison linéaire [2], puisque les fonctions d'onde des diquarks axiaux sont symétriques en saveur :

$$[ud] = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (ud + du). \quad (4)$$

$$1_3$$

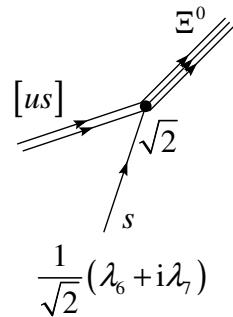
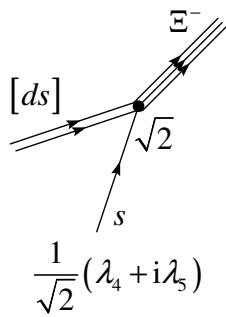
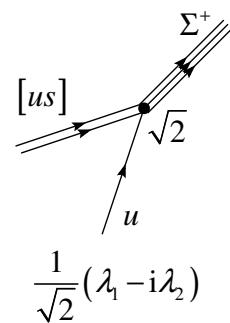
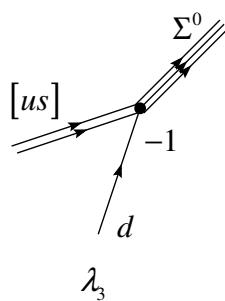
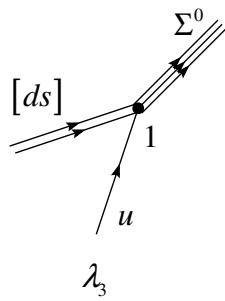
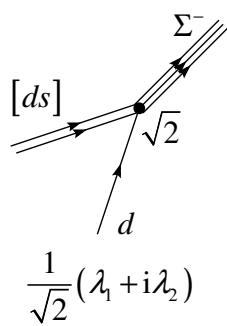
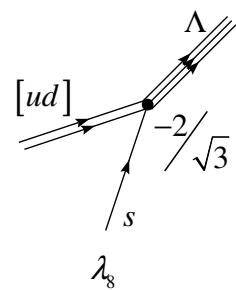
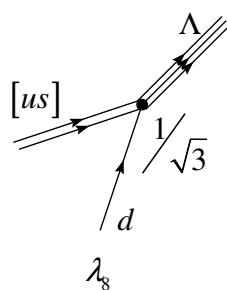
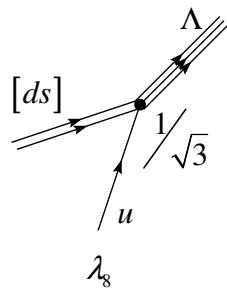
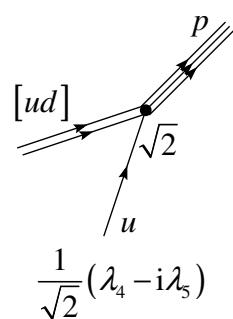
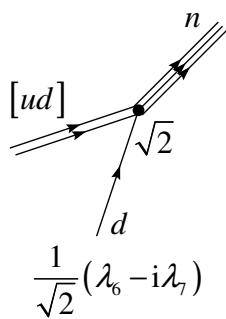
$$1_3$$

$$1_3$$

1_3 désigne la matrice identité de dimension 3.

4. Baryons

	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>
[<i>ds</i>]			
[<i>us</i>]			
[<i>ud</i>]			



5. Références

- [1] Klevansky S P 1992 The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics *Rev. Mod. Phys.* **64** 649–708
- [2] Oettel M 2000 Baryons as relativistic bound states of quark and diquark *PhD Thesis Tuebingen University* arXiv:nucl-th/0012067

Annexe D

Fonctions de boucle et fonction triangle

Une partie de cette annexe a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **38** 105003

1. Calculs préliminaires

Avant de décrire les fonctions utilisées, nous proposons d'établir ici quelques formules générales, afin de pouvoir effectuer des sommes de Matsubara. Les calculs exposés ci-après ont été fortement inspirés de [1], que nous avons adapté à notre cas d'étude. L'objectif est ici d'évaluer la quantité suivante :

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(i \cdot \omega_n), \quad (1)$$

n étant un entier, $\beta = 1/T$ et $i \cdot \omega_n$ une fréquence de Matsubara, qui peut être :

- soit fermionique : $i \cdot \omega_n^{FD} = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{\beta}$ (2a)

- soit bosonique : $i \cdot \omega_n^{BE} = \frac{2n \cdot \pi}{\beta}$ (2b)

Nous supposons que la fonction ϕ ne possède que des pôles simples, que nous noterons par la suite z_e , et que les $i \cdot \omega_n$ ne feront jamais parti de ses pôles. Aussi, avec le modèle NJL, nous considérons :

$$f^{BE}(z) = \frac{1}{e^{\beta \cdot z} - 1} \quad \text{et} \quad f^{FD}(z) = \frac{1}{e^{\beta \cdot z} + 1}, \quad (3)$$

comme étant respectivement les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein. On vérifie que $i \cdot \omega_n^{FD}$ et $i \cdot \omega_n^{BE}$ sont respectivement les pôles de $f^{FD}(z)$ et de $f^{BE}(z)$. Dans le cadre du modèle PNJL, f^{FD} doit être adaptée, comme mentionné au chapitre 2 et dans [2], mais les résultats obtenus ici restent valides.

Nous considérons maintenant le théorème suivant, bien utile pour le calcul d'un résidu :

$$\text{si une fonction } \psi(z) \text{ s'écrit sous la forme } \psi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \text{ alors } \text{res}(\psi, z_0) = \frac{P(z_0)}{\left. \frac{\partial Q}{\partial z} \right|_{z=z_0}}. \quad (4)$$

Nous déduisons de (4) que :

$$\text{res}\left(f^{BE}, i \cdot \omega_n^{BE}\right) = \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \text{res}\left(f^{FD}, i \cdot \omega_n^{FD}\right) = -\frac{1}{\beta}. \quad (5)$$

Par conséquent, la fonction $f^{FD} \cdot \phi$ (respectivement $f^{BE} \cdot \phi$) admet donc z_e et $i \cdot \omega_n^{FD}$ (respectivement $i \cdot \omega_n^{BE}$) comme pôles. Nous intégrons ces fonctions dans le plan complexe sur un contour circulaire \mathcal{C} de rayon $R \rightarrow \infty$, autrement dit englobant tous les pôles. Nous avons, d'après le théorème des résidus :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2i\pi} \cdot f^{FD/BE}(z) \cdot \phi(z)}_0 = \text{res}\left(f^{FD/BE}, i \cdot \omega_n^{FD/BE}\right) \cdot \sum_n \phi\left(i \cdot \omega_n^{FD/BE}\right) + \text{res}(\phi, z_e) \cdot \sum_e f^{FD/BE}(z_e). \quad (6)$$

Cela nous donne les deux relations suivantes, comme dans [1] :

$$\frac{1}{\beta} \sum_n \phi\left(i \cdot \omega_n^{FD}\right) = \sum_e f^{FD}(z_e) \cdot \text{res}(\phi, z_e) \quad (7a)$$

$$-\frac{1}{\beta} \sum_n \phi\left(i \cdot \omega_n^{BE}\right) = \sum_e f^{BE}(z_e) \cdot \text{res}(\phi, z_e) \quad (7b)$$

2. Fonctions génériques

Mise à part pour la fonction de boucle des baryons, les fonctions dont nous nous servons dans nos calculs sont construites à partir de trois fonctions génériques A , B_0 et C_0 , introduites par le groupe de S. P. Klevansky [3]. Elles intervenant respectivement dans des boucles à 1, 2, 3 fermions. Ici, ces fermions sont des quarks.

2.1 Fonction A (boucle à un fermion)

A est une fonction réelle n'admettant que des arguments réels et est définie par :

$$A(m, \mu, \beta, \Lambda) = \frac{16\pi^2}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu)^2 - E^2}, \quad (8)$$

avec :

$$E = \sqrt{\bar{p}^2 + m^2}. \quad (9)$$

Comme la fraction présente dans la partie droite de (8) est associée à un quark (fermion), $i \cdot \omega_n$ est de type fermionique :

$$i \cdot \omega_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{\beta}. \quad (10)$$

Les pôles sont :

$$\begin{cases} i \cdot \omega_n = E - \mu \\ i \cdot \omega_n = -E - \mu \end{cases}. \quad (11)$$

Ainsi, en utilisant (7a) :

$$\begin{aligned} A(m, \mu, \beta, \Lambda) &= 16\pi^2 \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2E} \cdot (f^{FD}(E - \mu) - f^{FD}(-E - \mu)) \\ &= 16\pi^2 \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2E} \cdot (-1 + f^{FD}(E + \mu) + f^{FD}(E - \mu)) \end{aligned} . \quad (12)$$

Qui nous permet d'établir la relation :

$$A(m, \mu, \beta, \Lambda) = A(m, -\mu, \beta, \Lambda) \equiv A(m, |\mu|, \beta, \Lambda). \quad (13)$$

2.2 Fonction B_0 (boucle de deux fermions)

B_0 est une fonction complexe n'admettant que des arguments réels :

$$\begin{aligned} B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot v_m, \beta, \Lambda) \\ = \frac{16\pi^2}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2} \cdot \frac{1}{(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m + \mu_2)^2 - E_2^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

avec :

$$E_1 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} \quad \text{et} \quad E_2 = \sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m_2^2}. \quad (15)$$

Comme pour la fonction A , $i \cdot \omega_n$ est de type fermionique :

$$i \cdot \omega_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{\beta}. \quad (16a)$$

B_0 traduit une boucle entre deux quarks (fermions), la boucle en elle-même sera de type bosonique. C'est d'ailleurs pour cela que B_0 intervient pour la construction des mésons. Son argument $i \cdot v_m$ est donc de type bosonique :

$$i \cdot v_m = \frac{2m \cdot \pi}{\beta}. \quad (16b)$$

Chacune des fractions de (14) correspondant à un quark (fermion), la fréquence de Matsubara totale pour chacune des fractions est alors forcément de type fermionique, ce qui est vérifié : la fraction de gauche a comme fréquence $i \cdot \omega_n$ qui est de type fermionique et celle de droite a comme fréquence $i \cdot \omega_n - i \cdot v_m$ qui est de type fermionique : ajouter ou soustraire un nombre impair avec un nombre pair donne nécessairement un nombre impair.

Les pôles sont :

$$\begin{cases} i \cdot \omega_n = E_1 - \mu_1 \\ i \cdot \omega_n = -E_1 - \mu_1 \\ i \cdot \omega_n = E_2 - \mu_2 + i \cdot v_m \\ i \cdot \omega_n = -E_2 - \mu_2 + i \cdot v_m \end{cases}. \quad (17)$$

En utilisant (7a), nous avons :

$$B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot v_m, \beta, \Lambda) = 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{f^{FD}(E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(E_1 - \mu_1 + \mu_2 - i \cdot v_m)^2 - E_2^2} \\ - \frac{f^{FD}(-E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(-E_1 - \mu_1 + \mu_2 - i \cdot v_m)^2 - E_2^2} \\ + \frac{f^{FD}(E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(E_2 + \mu_1 - \mu_2 + i \cdot v_m)^2 - E_1^2} \\ - \frac{f^{FD}(-E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(-E_2 + \mu_1 - \mu_2 + i \cdot v_m)^2 - E_1^2} \end{array} \right\}. \quad (18)$$

L'équation (18) nous permet de vérifier la relation :

$$B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, -i \cdot v_m, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, \mu_1, i \cdot v_m, \beta, \Lambda). \quad (19)$$

2.3 Fonction C_0 (boucle à trois fermions)

C_0 est une fonction complexe à variables réelles :

$$C_0(\vec{k}, \vec{q}, \delta_{\vec{k}, \vec{q}}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot v_m, m_3, \mu_3, i \cdot \alpha_l, \beta, \Lambda) = \frac{16\pi^2}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2} \cdot \frac{1}{(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m + \mu_2)^2 - E_2^2} \cdot \frac{1}{(i \cdot \omega_n - i \cdot \alpha_l + \mu_3)^2 - E_3^2}, \quad (20)$$

où :

$$E_1 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2}, \quad E_2 = \sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m_2^2} \quad \text{et} \quad E_3 = \sqrt{(\vec{p} - \vec{q})^2 + m_3^2}. \quad (21)$$

Les pôles sont :

$$\begin{cases} i \cdot \omega_n = E_1 - \mu_1 \\ i \cdot \omega_n = -E_1 - \mu_1 \\ i \cdot \omega_n = E_2 - \mu_2 + i \cdot v_m \\ i \cdot \omega_n = -E_2 - \mu_2 + i \cdot v_m \\ i \cdot \omega_n = E_3 - \mu_3 + i \cdot \alpha_l \\ i \cdot \omega_n = -E_3 - \mu_3 + i \cdot \alpha_l \end{cases}. \quad (22)$$

Comme précédemment, la nature fermionique de $i \cdot \omega_n$ nous amène à utiliser (7a) :

$$C_0(\vec{k}, \vec{q}, \delta_{\vec{k}, \vec{q}}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot v_m, m_3, \mu_3, i \cdot \alpha_l, \beta, \Lambda) = \\ 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{f^{FD}(E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{((\lambda_1 - E_1)^2 - E_2^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_2 - E_1)^2 - E_3^2)} \\ - \frac{f^{FD}(-E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{((\lambda_1 + E_1)^2 - E_2^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_2 + E_1)^2 - E_3^2)} \\ + \frac{f^{FD}(E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{((\lambda_1 + E_2)^2 - E_1^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_3 + E_2)^2 - E_3^2)} \\ - \frac{f^{FD}(-E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{((\lambda_1 - E_2)^2 - E_1^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_3 - E_2)^2 - E_3^2)} \\ + \frac{f^{FD}(E_3 - \mu_3)}{2E_3} \cdot \frac{1}{((\lambda_2 + E_3)^2 - E_1^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_3 - E_3)^2 - E_2^2)} \\ - \frac{f^{FD}(-E_3 - \mu_3)}{2E_3} \cdot \frac{1}{((\lambda_2 - E_3)^2 - E_1^2)} \cdot \frac{1}{((\lambda_3 + E_3)^2 - E_2^2)} \end{array} \right], \quad (23)$$

où :

$$\begin{cases} \lambda_1 = i \cdot v_m + \mu_1 - \mu_2 \\ \lambda_2 = i \cdot \alpha_l + \mu_1 - \mu_3 \\ \lambda_3 = i \cdot v_m - i \cdot \alpha_l - \mu_2 + \mu_3 \end{cases}. \quad (24)$$

3. Fonctions de boucle pour les mésons

Mésons pseudo-scalaires :

$$\Pi_{q_1, \bar{q}_2}^P(k_0, \vec{k}) = -\frac{N_c}{8\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) + \left((m_1 - m_2)^2 - (k_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \quad (25)$$

Mésons scalaires :

$$\Pi_{q_1, \bar{q}_2}^S(k_0, \vec{k}) = -\frac{N_c}{8\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) + \left((m_1 + m_2)^2 - (k_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \quad (26)$$

Mésons axiaux :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, \bar{q}_2}^A(k_0, \vec{k}) \\ &= -2 \cdot \frac{N_c}{8\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) \right. \\ & \quad \left. + \left(m_1^2 + m_2^2 + 4m_1m_2 - (k_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Mésons vectoriels :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, \bar{q}_2}^V(k_0, \vec{k}) \\ &= -2 \cdot \frac{N_c}{8\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) \right. \\ & \quad \left. + \left(m_1^2 + m_2^2 - 4m_1m_2 - (k_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Pour toutes les fonctions de boucle mentionnée ici, les arguments des fonctions A et B_0 sont nécessairement réels. Lorsque k_0 est complexe, l'approximation utilisée consiste à ne prendre que la partie réelle de k_0 , notée $\text{Re}(k_0)$, en tant qu'argument de B_0 [3]. Cependant, le k_0 présent dans le facteur placé devant le B_0 reste complexe : c'est en fait lui qui nous permet de travailler dans la zone où les mésons sont instables. Cette remarque est aussi valable pour les diquarks.

4. Fonctions de boucle pour les diquarks

4.1 Expressions des fonctions de boucle des diquarks

Diquarks scalaires :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, q_2}^S(k_0, \vec{k}) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, -\mu_2) \right. \\ & \quad \left. + \left((m_1 - m_2)^2 - (k_0 + \mu_1 + \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Diquarks pseudo-scalaires :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, q_2}^P(k_0, \vec{k}) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, -\mu_2) \right. \\ & \quad \left. + \left((m_1 + m_2)^2 - (k_0 + \mu_1 + \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Diquarks vectoriels :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, q_2}^V(k_0, \vec{k}) \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, -\mu_2) \right. \\ & \quad \left. + \left(m_1^2 + m_2^2 + 4m_1m_2 - (k_0 + \mu_1 + \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, \text{Re}(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Diquarks axiaux :

$$\begin{aligned} & \Pi_{q_1, q_2}^A(k_0, \vec{k}) \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \cdot \left[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, -\mu_2) \right. \\ &\quad \left. + \left(m_1^2 + m_2^2 - 4m_1m_2 - (k_0 + \mu_1 + \mu_2)^2 + \vec{k}^2 \right) \cdot B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, \mathcal{R}e(k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

4.2 Echange des deux quarks

Pour les mésons, $\Pi_{q_1, \bar{q}_2} \neq \Pi_{q_2, \bar{q}_1}$ dans le cas général, sauf si $q_1 \equiv q_2$ (mésons couplés π_0, η, η').

Pour les diquarks, nous sommes en droit de nous attendre à avoir $\Pi_{q_1, q_2} = \Pi_{q_2, q_1}$, autrement dit l'échange des deux quarks doit laisser les fonctions de boucles invariantes. En fait, nous remarquons, en regardant l'écriture des fonctions de boules de diquarks (29–32), que l'échange des quarks q_1 et q_2 n'intervient que par l'échange des masses m_1 , m_2 et des potentiels chimiques μ_1 , μ_2 . Le facteur placé devant B_0 est invariant par cet échange, quelle que soit la fonction de boucle considérée pour les diquarks. Quant aux fonctions A , en utilisant (13), nous écrivons :

$$A(m_1, \mu_1) + A(m_2, -\mu_2) = A(m_2, \mu_2) + A(m_1, -\mu_1). \quad (33)$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'échange des deux quarks laisse invariante B_0 elle-même. Tout d'abord, on écrit :

$$\begin{aligned} & B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) \\ &= 16\pi^2 \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{f^{FD}(E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(E_1 - \lambda)^2 - E_2^2} - \frac{f^{FD}(-E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(-E_1 - \lambda)^2 - E_2^2} \\ + \frac{f^{FD}(E_2 + \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(E_2 + \lambda)^2 - E_1^2} - \frac{f^{FD}(-E_2 + \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(-E_2 + \lambda)^2 - E_1^2} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

avec ici :

$$\lambda = i \cdot \nu_m + \mu_1 + \mu_2. \quad (35)$$

En parallèle, nous avons :

$$\begin{aligned} & B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) \\ &= 16\pi^2 \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{f^{FD}(E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(E_2 - \lambda)^2 - E_1^2} - \frac{f^{FD}(-E_2 - \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(-E_2 - \lambda)^2 - E_1^2} \\ + \frac{f^{FD}(E_1 + \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(E_1 + \lambda)^2 - E_2^2} - \frac{f^{FD}(-E_1 + \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(-E_1 + \lambda)^2 - E_2^2} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

Ce qui nous donne :

$$B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) = 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1-f^{FD}(-E_2 + \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(E_2 - \lambda)^2 - E_1^2} - \frac{1-f^{FD}(E_2 + \mu_2)}{2E_2} \cdot \frac{1}{(-E_2 - \lambda)^2 - E_1^2} \\ + \frac{1-f^{FD}(-E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(E_1 + \lambda)^2 - E_2^2} - \frac{1-f^{FD}(E_1 - \mu_1)}{2E_1} \cdot \frac{1}{(-E_1 + \lambda)^2 - E_2^2} \end{array} \right]. \quad (37)$$

Dans l'équation (37), nous identifions $B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda)$ explicité équation (34) :

$$B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) + 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2E_2} \cdot \frac{1}{(-E_2 + \lambda)^2 - E_1^2} - \frac{1}{2E_2} \cdot \frac{1}{(E_2 + \lambda)^2 - E_1^2} \\ + \frac{1}{2E_1} \cdot \frac{1}{(-E_1 - \lambda)^2 - E_2^2} - \frac{1}{2E_1} \cdot \frac{1}{(E_1 - \lambda)^2 - E_2^2} \end{array} \right], \quad (38)$$

et :

$$B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) + 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{2\lambda}{((-E_2 + \lambda)^2 - E_1^2) \cdot ((E_2 + \lambda)^2 - E_1^2)} \\ + \frac{-2\lambda}{((-E_1 - \lambda)^2 - E_2^2) \cdot ((E_1 - \lambda)^2 - E_2^2)} \end{array} \right]. \quad (39)$$

Il vient :

$$B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) + 16\pi^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[2\lambda \cdot \frac{0}{((-E_1 - \lambda)^2 - E_2^2) \cdot ((E_1 - \lambda)^2 - E_2^2) - ((-E_2 + \lambda)^2 - E_1^2) \cdot ((E_2 + \lambda)^2 - E_1^2)} \right] \quad (40)$$

Donc, nous obtenons :

$$B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, -\mu_1, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, -\mu_2, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda). \quad (41)$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\Pi_{q_1, q_2} = \Pi_{q_2, q_1}. \quad (42)$$

5. Fonction de boucle des baryons

Pour construire un baryon, nous considérons une boucle quark-diquark où nous pouvons conjuguer soit le diquark, soit le quark. Les équations obtenues n'étant pas forcément les mêmes dans ces deux cas, nous calculons ici les deux, ce qui correspond à deux termes à priori distincts. La nature des fréquences de Matsubara mises en jeu a été discutée dans le chapitre 5 consacré aux baryons.

5.1 Premier terme $\Pi^{(1)}$

Si nous conjuguons le diquark, le premier terme de la fonction de boucle des baryons s'écrit :

$$-i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_q(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot i \cdot S_D^c(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \right), \quad (43)$$

avec :

$$S_q(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \equiv S_q(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} + \gamma_0 \cdot \mu_q - m_q}, \quad (44)$$

$$S_D^c(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \equiv S_D^c(\not{k}) = \frac{i}{(k_0 - \mu_D)^2 - \vec{k}_D^2 - m_D^2}, \quad (45)$$

désignent respectivement le propagateur du quark de saveur q et du diquark conjugué de charge (=anti-diquark). L'équation (44) doit être mise à jour dans le cadre du modèle PNJL, comme expliqué au chapitre 4, par le remplacement $\mu_q \rightarrow \mu_q - iA_4$. Cela conduit à l'adaptation des distributions de Fermi-Dirac [2], comme dans (55) par exemple, mais nos résultats restent applicables.

La trace de (43) s'écrit alors comme :

$$Tr \left(i \cdot S_q(\not{p}) \cdot i \cdot S_D^c(\not{k}) \right) = \frac{\overbrace{Tr(\not{p} + m_q)}^{4m_q}}{\left((i \cdot \omega_n + \mu_q)^2 - E_q^2 \right) \cdot \left((i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_D)^2 - E_D^2 \right)}, \quad (46)$$

avec :

$$E_q = \sqrt{\vec{p}^2 + m_q^2} \quad \text{et} \quad E_D = \sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m_D^2}. \quad (47)$$

(43) se réécrit de la manière suivante :

$$-i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot 4m_q \cdot \frac{1}{\left((i \cdot \omega_n + \mu_q)^2 - E_q^2 \right) \cdot \left((i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_D)^2 - E_D^2 \right)}. \quad (48)$$

Puis, il vient :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot 4m_q \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu_q - E_q) \cdot (i \cdot \omega_n + \mu_q + E_q)} \\ \frac{1}{(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_D - E_D) \cdot (i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_D + E_D)} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Les pôles sont :

$$\begin{cases} i \cdot \omega_n = -\mu_q + E_q \\ i \cdot \omega_n = -\mu_q - E_q \\ i \cdot \omega_n = \mu_D + E_D + i \cdot v_m \\ i \cdot \omega_n = \mu_D - E_D + i \cdot v_m \end{cases}. \quad (50)$$

$i \cdot \omega_n$ étant de type fermionique, nous utilisons donc (7a) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot 4m_q \cdot \begin{pmatrix} \frac{f^{FD}(-\mu_q + E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda - E_q - E_D)} - \frac{f^{FD}(-\mu_q - E_q)}{2E_q \cdot (\lambda + E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \\ + \frac{f^{FD}(\mu_D + E_D + i \cdot v_m)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q + E_D)} - \frac{f^{FD}(\mu_D - E_D + i \cdot v_m)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q - E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (51)$$

où :

$$\lambda = i \cdot v_m + \mu_q + \mu_D. \quad (52)$$

$$i \cdot v_m \text{ est de type fermionique, } i \cdot v_m = \frac{(2m+1) \cdot \pi}{\beta}, \quad (53)$$

$$\text{en conséquence : } f^{FD}(z + i \cdot v_m) = \frac{1}{1 + \underbrace{e^{i \cdot v_m \cdot \beta}}_{-1} \cdot e^{\beta \cdot z}} = -f^{BE}(z). \quad (54)$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= 4m_q \cdot i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{f^{FD}(-\mu_q + E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda - E_q - E_D)} - \frac{f^{FD}(-\mu_q - E_q)}{2E_q \cdot (\lambda + E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \\ + \frac{-f^{BE}(\mu_D + E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q + E_D)} - \frac{-f^{BE}(\mu_D - E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q - E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

5.2 Deuxième terme $\Pi^{(2)}$

Maintenant, si nous conjuguons le quark à la place du diquark, le deuxième terme s'écrit :

$$-i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} Tr \left(i \cdot S_D(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \cdot i \cdot S_q^C(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \right), \quad (56)$$

où :

$$S_D(i \cdot \omega_n, \vec{p}) \equiv S_D(p) = \frac{i}{(p_0 + \mu_D)^2 - \vec{p}_D^2 - m_D^2}, \quad (57)$$

$$S_q^C(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}) \equiv S_q^C(k) = \frac{i}{k - \gamma_0 \cdot \mu_q - m_q}, \quad (58)$$

désignent respectivement le propagateur du diquark et du quark conjugué (=anti-quark). Comme avec l'équation (44), (58) est modifié dans le modèle PNJL. Puis, (56) est écrit comme :

$$-i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot 4m_q \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{(i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_q - E_q) \cdot (i \cdot \omega_n - i \cdot v_m - \mu_q + E_q)} \\ \frac{1}{(i \cdot \omega_n + \mu_D - E_D) \cdot (i \cdot \omega_n + \mu_D + E_D)} \end{Bmatrix}. \quad (59)$$

Les pôles sont :

$$\begin{cases} i \cdot \omega_n = -\mu_D + E_D \\ i \cdot \omega_n = -\mu_D - E_D \\ i \cdot \omega_n = \mu_q + E_q + i \cdot v_m \\ i \cdot \omega_n = \mu_q - E_q + i \cdot v_m \end{cases}. \quad (60)$$

Cette fois-ci, $i \cdot \omega_n$ étant de nature bosonique, nous utilisons (7b) pour arriver à :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= i \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot 4m_q \cdot \begin{Bmatrix} \frac{-f^{BE}(-\mu_D + E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q)} - \frac{-f^{BE}(-\mu_D - E_D)}{2E_D \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \\ + \frac{-f^{BE}(\mu_q + E_q + i \cdot v_m)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q)} - \frac{-f^{BE}(\mu_q - E_q + i \cdot v_m)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

$i \cdot v_m$ est de type fermionique, donc :

$$f^{BE}(z + i \cdot v_m) = \underbrace{\frac{1}{e^{i \cdot v_m \cdot \beta} \cdot e^{\beta \cdot z} - 1}}_{-1} = -f^{FD}(z). \quad (62)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= 4m_q \cdot i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{-f^{BE}(-\mu_D + E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q)} - \frac{-f^{BE}(-\mu_D - E_D)}{2E_D \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \\ + \frac{f^{FD}(\mu_q + E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q)} - \frac{f^{FD}(\mu_q - E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \end{array} \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

En utilisant les relations,

$$f^{FD}(-x) = 1 - f^{FD}(x) \quad \text{et} \quad -f^{BE}(-x) = 1 + f^{BE}(x), \quad (64)$$

l'équation (63) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &= 4m_q \cdot i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{f^{BE}(\mu_D - E_D) + 1}{2E_D \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q)} - \frac{f^{BE}(\mu_D + E_D) + 1}{2E_D \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \\ + \frac{1 - f^{FD}(-\mu_q - E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q)} - \frac{1 - f^{FD}(-\mu_q + E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \end{array} \right) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Grâce à l'équation (55), nous identifions une partie de (65) comme étant $-i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k})$:

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &+ 4m_q \cdot i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2E_D \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q)} - \frac{1}{2E_D \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \\ + \frac{1}{2E_q \cdot (\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q)} - \frac{1}{2E_q \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \end{array} \right) \right], \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}) \\ &+ 4m_q \cdot i \cdot \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left(\begin{array}{c} \frac{\lambda}{(\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)} \\ - \underbrace{\frac{\lambda}{(\lambda - E_D + E_q) \cdot (\lambda + E_D + E_q) \cdot (\lambda - E_D - E_q) \cdot (\lambda + E_D - E_q)}}_0 \end{array} \right) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Donc, on trouve :

$$-i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot v_m, \vec{k}) = -i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot v_m, \vec{k}). \quad (68)$$

5.3 Expression complète de la fonction de boucle

Afin de prendre en compte les deux composantes vues précédemment, nous écrivons formellement :

$$-i \cdot \Pi(i \cdot \nu_m, \vec{k}) = \frac{1}{2} \cdot (-i \cdot \Pi^{(1)}(i \cdot \nu_m, \vec{k})) + \frac{1}{2} \cdot (-i \cdot \Pi^{(2)}(i \cdot \nu_m, \vec{k})) \\ = 4m_q \cdot i \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1/2 \cdot (f^{FD}(-\mu_q + E_q) - f^{FD}(\mu_q - E_q))}{2E_q \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda - E_q - E_D)} \\ - \frac{1/2 \cdot (f^{FD}(-\mu_q - E_q) - f^{FD}(\mu_q + E_q))}{2E_q \cdot (\lambda + E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \\ - \frac{1/2 \cdot (f^{BE}(\mu_D + E_D) - f^{BE}(-\mu_D - E_D))}{2E_D \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q + E_D)} \\ + \frac{1/2 \cdot (f^{BE}(\mu_D - E_D) - f^{BE}(-\mu_D + E_D))}{2E_D \cdot (\lambda - E_q - E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \end{array} \right]. \quad (69)$$

Ce qui s'écrit bien sûr, compte tenu de (68) et en explicitant tous les arguments de Π :

$$-i \cdot \Pi(\vec{k}, m_q, \mu_q, m_D, \mu_D, i \cdot \nu_m, \beta, \Lambda) \\ = 4m_q \cdot i \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{f^{FD}(-\mu_q + E_q)}{2E_q \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda - E_q - E_D)} \\ - \frac{f^{FD}(-\mu_q - E_q)}{2E_q \cdot (\lambda + E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \\ - \frac{f^{BE}(\mu_D + E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q + E_D) \cdot (\lambda + E_q + E_D)} \\ + \frac{f^{BE}(\mu_D - E_D)}{2E_D \cdot (\lambda - E_q - E_D) \cdot (\lambda + E_q - E_D)} \end{array} \right]. \quad (70)$$

Notons que l'équation (69) présente l'avantage d'être plus stable numériquement que l'équation (70). Par contre, avec l'équation (70), nous remarquons que la fonction de boucle des baryons se résume en fait à une « version modifiée » de la fonction B_0 évoquée précédemment, qui est une fonction complexe à variables réelles. Ceci implique que $i \cdot \nu_m$, qui est l'équivalent de ce que nous nommions k_0 , est nécessairement réel. Cela nous interdit au premier abord de travailler dans la zone où les baryons sont instables. De toute manière, du simple fait que nous utilisons la masse du diquark m_D (contenue dans E_D), nous nous limitons à la zone où le diquark est stable, puisqu'au delà, m_D devient complexe, ce qui rend alors l'utilisation de (69) ou (70) non triviale.

6. Fonction « triangle »

La fonction « triangle » de trois quarks, notée Γ dans notre travail et dans la littérature [4], intervient dans le calcul de certaines sections efficaces. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} & -i \cdot \Gamma(i \cdot \nu_m, \vec{k}; i \cdot \alpha_l, \vec{p}) \\ & = -N_c \cdot \frac{i}{\beta} \cdot \sum_n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} Tr \left[i S^{f_1} (i \cdot \omega_n, \vec{q}) \cdot i \gamma_5 \cdot i S^{f_2} (i \cdot \omega_n - i \cdot \alpha_l, \vec{q} - \vec{p}) \cdot i \gamma_5 \cdot i S^{f_3} (i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m, \vec{q} - \vec{k}) \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

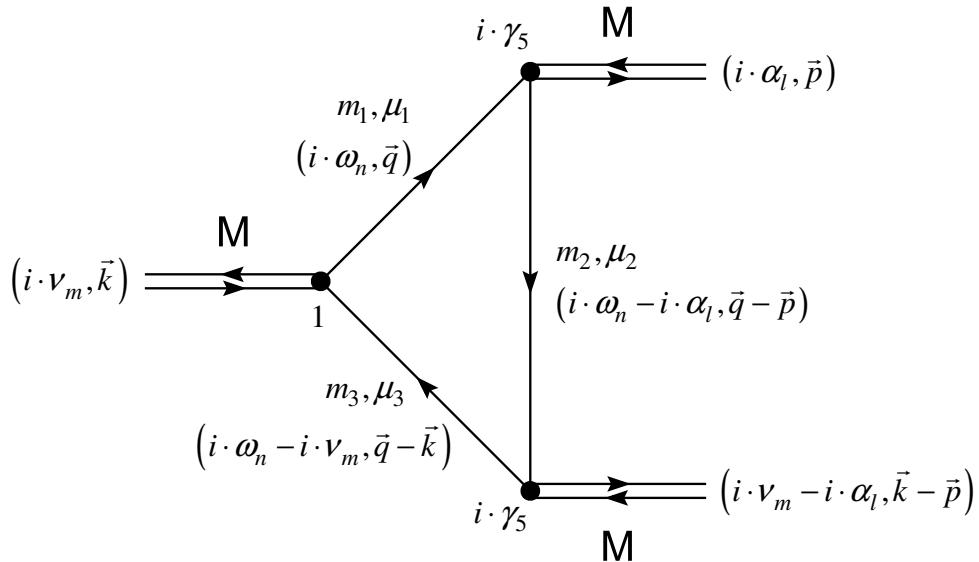


Figure 1. Schématisation de la fonction triangle Γ .

Nous vérifions que $i \cdot \nu_m$, $i \cdot \alpha_l$ et $i \cdot \nu_m - i \cdot \alpha_l$ sont de type bosoniques, ce qui correspond au fait que ces trois énergies sont celles des trois mésons de la figure 1. Aussi, $i \cdot \omega_n$, $i \cdot \omega_n - i \cdot \alpha_l$ et $i \cdot \omega_n - i \cdot \nu_m$ sont de type fermioniques et sont les énergies des trois quarks du triangle. La trace présente dans l'équation (71) n'est non nulle que si le nombre de matrices γ_5 est pair, ce qui impose que si nous voulons deux mésons pseudo-scalaires en sortie, alors le méson en entrée doit forcément être scalaire (vertex 1) ou à la rigueur vectoriel.

Nous obtenons, comme dans [4] :

$$\Gamma(i \cdot \nu_m, \vec{k} ; i \cdot \alpha_l, \vec{p}) = -\frac{N_c}{8\pi^2} \left[\begin{array}{l} (m_3 - m_2) B_0(\vec{k} - \vec{p}, m_2, \mu_2, m_3, \mu_3, i \cdot \nu_m - i \cdot \alpha_l) \\ + (m_1 - m_2) B_0(\vec{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot \alpha_l) \\ + (m_1 + m_3) B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_3, \mu_3, i \cdot \nu_m) \\ \\ \left(m_1^2 \cdot (m_3 - m_2) \right. \\ \left. + m_2^2 \cdot (m_1 + m_3) \right. \\ \left. + m_3^2 \cdot (m_1 - m_2) - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \right. \\ \left. + m_3 \left(\vec{p}^2 - (i \cdot \alpha_l - \mu_2 + \mu_1)^2 \right) \right. \\ \left. - m_2 \left(\vec{k}^2 - (i \cdot \nu_m - \mu_3 + \mu_1)^2 \right) \right. \\ \left. + m_1 \left((\vec{p} - \vec{k})^2 - (i \cdot \alpha_l - i \cdot \nu_m - \mu_2 + \mu_3)^2 \right) \right) C_0(\vec{p}, \vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i \cdot \alpha_l, m_3, \mu_3, i \cdot \nu_m) \end{array} \right]. \quad (72)$$

7. Références

- [1] Georges A et Giamarchi T 2002 Introduction au problème à N Corps et à la Physique des Fermions Fortement Corrélos, Cours en Français disponibles via les adresses Internet :
http://dpmc.unige.ch/gr_giamarchi/Personal_pages/Giamarchi/Files/poly_dea_02.pdf
<http://romain.bel.free.fr/agregation/Ecrits/Fermionsfortementcorreles-pdf.pdf>
- [2] Hansen H, Alberico W M, Beraudo A, Molinari A, Nardi M et Ratti C 2007 Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu–Jona-Lasinio model with a Polyakov loop *Phys. Rev. D* **75** 065004
- [3] Rehberg P et Klevansky S P 1996 One loop integrals at finite temperature and density *Ann. Phys.* **252** 422–57
- [4] Rehberg P, Klevansky S P et Hüfner J 1996 Hadronization in the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio model *Phys. Rev. C* **53** 410–29

Annexe E

Calculs à potentiels chimiques non nuls

1. Techniques générales

Que nous travaillons avec les mésons, les diquarks ou les baryons, nous avons certaines similitudes que nous allons voir maintenant. Considérons tout d'abord $i \cdot v_m$, qui est l'argument de la fonction de boucle correspondant à l'énergie « brute » de la boucle de particules. A potentiels chimiques non nuls, $i \cdot v_m$ se voit modifié par l'ajout ou le retrait des potentiels chimiques des particules composant la boucle.

La règle générale pour une particule/anti-particule composite formée de deux particules/anti-particules p_1 et p_2 est :

- Nous soustrayons μ_{p_1} si p_1 est une particule ou une anti-particule conjuguée de charge, c'est à dire qui va vers la droite sur un graphe de Feynman.
- nous ajoutons μ_{p_1} si p_1 est une anti-particule ou une particule conjuguée de charge, c'est-à-dire qui va vers la gauche sur un graphe de Feynman.

La démarche est identique pour p_2 par remplacement des notations. Le nouvel argument « remplaçant » $i \cdot v_m$ est ainsi :

$$k_0 = i \cdot v_m \pm \mu_{p_1} \pm \mu_{p_2}. \quad (1)$$

Nous pouvons proposer une interprétation physique à cela en nous rappelant que la définition du potentiel chimique d'une particule correspond à l'énergie nécessaire pour ajouter cette particule au système. Nous comprenons ainsi la différence de signe entre les particules et les anti-particules. Ainsi, une façon d'interpréter (1) est de dire que l'énergie $i \cdot v_m$ de la particule composite se voit amputée de $\pm \mu_{p_1} \pm \mu_{p_2}$ pour créer les particules/anti-particules p_1 et p_2 à partir du vide, pour ensuite les lier et former la particule voulue, d'énergie k_0 .

Nous sommes quelquefois amenés à travailler dans un milieu dominé par l'antimatière, où les potentiels chimiques deviennent alors négatifs. Dans ce cas-ci, comme dans d'autres cas similaires, il peut arriver que k_0 devienne négatif, ce qui est incompatible avec les fonctions que nous avons étudiées précédemment, et avec le fait que k_0 est la variable qui doit nous donner la masse ... Pour s'en sortir, nous utiliserons alors la relation (19) de l'annexe précédente :

$$B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, -k_0, \beta, \Lambda) = B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, \mu_1, k_0, \beta, \Lambda). \quad (2)$$

Par conséquent, nous considérerons :

$$\begin{cases} B_0(\vec{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, k_0, \beta, \Lambda) & \text{si } k_0 > 0 \\ B_0(\vec{k}, m_2, \mu_2, m_1, \mu_1, k_0' = -k_0, \beta, \Lambda) & \text{si } k_0 < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Pour chacune des particules, nous allons voir ci-après comment cette relation modifie la fonction de boucle et son interprétation physique.

2. Mésons

L'étude des mésons est la plus simple du fait que, d'une façon générale, les fonctions de polarisation des mésons ne sont pas invariantes par l'échange des deux saveurs entre le quark et l'antiquark (sauf pour π_0, \dots). Physiquement, nous concevons que, sauf exception, $q_1\bar{q}_2 \neq q_2\bar{q}_1$. Les deux cas possibles sont représentés dans le tableau 1.

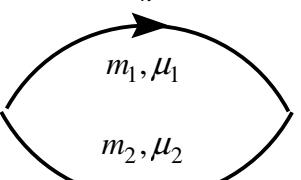
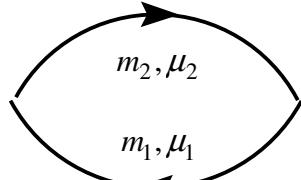
$i \cdot v_m > 0$	$i \cdot v_m < 0$
$i \cdot \omega_n, \vec{p}$  $i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n - i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ $k_0 = i \cdot v_m - \mu_1 + \mu_2$ $q_1\bar{q}_2$	$i \cdot \omega_n, \vec{p}$  $i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n + i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ $k_0 = - i \cdot v_m - \mu_2 + \mu_1$ $\overline{q_2\bar{q}_1} = q_1\bar{q}_2$

Tableau 1. Graphes possibles pour les mésons.

Si nous avons $i \cdot v_m - \mu_1 + \mu_2 > 0$, alors nous sommes dans le cas de gauche de ce tableau. Cela correspond à la situation ordinaire où $i \cdot v_m > 0$, donc nous avons affaire à la particule $q_1\bar{q}_2$, composée d'un quark q_1 et d'un antiquark \bar{q}_2 . D'après les règles que nous avons vues précédemment :

$$k_0 = |i \cdot v_m| - \mu_1 + \mu_2. \quad (4)$$

Si, par contre, $i \cdot v_m - \mu_1 + \mu_2 < 0$, alors il s'agit du cas exposé dans la colonne de droite du tableau 1. Il correspond à la deuxième ligne de (3). Pour avoir l'équivalence avec le premier

cas, il suffit de dire que $i \cdot v_m < 0$: nous considérons donc l'antiparticule $\overline{q_2 q_1}$ composée du quark q_2 et de l'antiquark \bar{q}_1 , ce qui est équivalent à la particule $q_1 \bar{q}_2$.

Nous avons :

$$k_0 = -|i \cdot v_m| - \mu_2 + \mu_1. \quad (5)$$

3. Diquarks

En accord avec (42) de l'annexe précédente, l'échange des deux quarks laisse la fonction de polarisation invariante. Physiquement, cela se traduit par $[q_1 q_2] = [q_2 q_1]$. Nous avons ainsi deux cas supplémentaires par rapport aux mésons. Une autre différence est que les fonctions de boucle sont construites différemment : afin de pouvoir employer les mêmes fonctions A et B_0 (voir annexe précédente) que celles employées pour les mésons, nous devons avoir recours à une astuce de calcul. Elle consiste à intervertir les énergies-impulsions des deux particules de la fonction de boucle, ce qui a pour conséquence l'ajout d'un signe moins devant $i \cdot v_m$ par rapport à ce que nous avions pour les mésons.

Un autre point à souligner est l'emploi de particules conjuguées de charge. Son effet est de changer le signe du potentiel chimique de la particule concernée. Remarquons que l'invariance de la fonction de boucle par échange des deux quarks nous confirme que les signes placés devant les potentiels chimiques doivent être identiques : $-\mu_1, -\mu_2$ pour les diquarks et $+\mu_1, +\mu_2$ pour les anti-diquarks. Les quatre cas possibles sont exposés dans le tableau 2.

$i \cdot v_m > 0$	$i \cdot v_m < 0$
$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n - i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>	$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n + i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>
$k_0 = - i \cdot v_m - \mu_2 - \mu_1$ $q_2 q_1$	$k_0 = i \cdot v_m + \mu_1 + \mu_2$ $\overline{q_1 q_2} = q_1 q_2$
$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n - i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>	$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n + i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>
$k_0 = - i \cdot v_m - \mu_1 - \mu_2$ $q_1 q_2$	$k_0 = i \cdot v_m + \mu_2 + \mu_1$ $\overline{q_2 q_1} = q_2 q_1$

Tableau 2. Graphes possibles pour les diquarks.

Si nous avons $-i \cdot v_m - \mu_1 - \mu_2 > 0$, alors nous sommes dans les deux cas de gauche du tableau 2, qui sont bien sûr strictement équivalents. On a $i \cdot v_m > 0$ donc il s'agit bien du diquark $q_1 q_2$. En vertu de nos remarques précédentes, nous avons :

$$k_0 = -|i \cdot v_m| - \mu_1 - \mu_2. \quad (6)$$

Si $-i \cdot v_m - \mu_1 - \mu_2 < 0$, alors nous sommes dans la colonne de droite du tableau 2. Nous avons les deux cas possibles de l'antiparticule $\overline{q_2} \overline{q}_1$, ce qui équivaut à $q_2 q_1$. Ici, $i \cdot v_m < 0$, nous obtenons donc :

$$k_0 = |i \cdot v_m| + \mu_2 + \mu_1. \quad (7)$$

4. Baryons

Pour les baryons, les choses sont formellement identiques à ce que nous avons pour les diquarks, la seule différence est que nous remplaçons un des deux quarks par un diquark. D'ailleurs, il a été vu équation (68) de l'annexe précédente que les deux composantes $\Pi^{(1)}$ et $\Pi^{(2)}$ décrivant le baryon, bien que structurellement différentes, sont équivalentes. Ceci correspond au passage de la première à la deuxième ligne du tableau 3.

Si $-i \cdot v_m - \mu_q - \mu_D > 0$, nous avons alors les deux cas de la colonne de gauche du tableau 3. Nous avons affaire à des particules, d'où $i \cdot v_m > 0$. Comme pour les diquarks, nous avons alors :

$$k_0 = -|i \cdot v_m| - \mu_q - \mu_D. \quad (8)$$

Si $-i \cdot v_m - \mu_q - \mu_D < 0$, c'est à dire les deux cas de la colonne de droite du tableau 3, nous avons l'anti-particule $\overline{D} \overline{q}$, ce qui est équivalent à Dq . On a $i \cdot v_m < 0$, d'où :

$$k_0 = |i \cdot v_m| + \mu_q + \mu_D. \quad (9)$$

$i \cdot v_m > 0$	$i \cdot v_m < 0$
$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n - i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>	$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n + i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>
$k_0 = - i \cdot v_m - \mu_q - \mu_D$ qD	$k_0 = i \cdot v_m + \mu_D + \mu_q$ $\overline{\bar{D}\bar{q}} = Dq$
$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n - i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>	$i \cdot \omega_n - i \cdot v_m, \vec{p} - \vec{k}$ $= i \cdot \omega_n + i \cdot v_m , \vec{p} - \vec{k}$ <p style="text-align: center;">\downarrow</p>
$k_0 = - i \cdot v_m - \mu_D - \mu_q$ Dq	$k_0 = i \cdot v_m + \mu_q + \mu_D$ $\overline{\bar{q}\bar{D}} = qD$

Tableau 3. Graphes possibles pour les baryons.

Annexe F

Eléments de cinématique

La partie 1 de cette annexe a été publiée dans *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 105003
 La partie 2 intervient dans une publication soumise à *Physical Review C*

1. Variables de Mandelstam

1.1 Cas général

Considérons une collision quelconque où l'on a deux particules en entrée, et deux en sortie. La collision est schématisée par la figure 1, dans laquelle p_i est le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule i . Via le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, on écrit :

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (1)$$

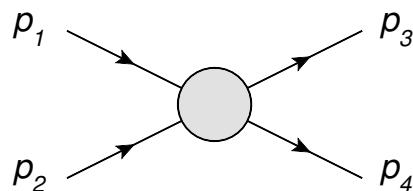


Figure 1. Schématisation de la collision.

En introduisant les variables de Mandelstam s, t, u , nous avons les relations :

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u = (p_4 - p_1)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{cases}. \quad (2)$$

Soit m_i la masse de la particule i . Il vient :

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 2p_1 \cdot p_2 &= s - m_1^2 - m_2^2, & 2p_1 \cdot p_3 &= m_1^2 + m_3^2 - t, & 2p_1 \cdot p_4 &= m_1^2 + m_4^2 - u, \\ 2p_3 \cdot p_4 &= s - m_3^2 - m_4^2, & 2p_2 \cdot p_4 &= m_2^2 + m_4^2 - t, & 2p_2 \cdot p_3 &= m_2^2 + m_3^2 - u. \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Référentiel du centre de masse

L'indice * utilisé ci-après précise que la grandeur physique concernée est exprimée dans le référentiel du centre de masse des deux particules entrantes. Nous rappelons que celui-ci est le référentiel dans lequel $\vec{p}_2^* + \vec{p}_1^* = \vec{0}$. Nous avons alors les relations suivantes liant les quantités de mouvement \vec{p}_i^* , les énergies $E_i = \sqrt{(\vec{p}_i)^2 + m_i^2}$ et les variables de Mandelstam [1]:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} & \|\vec{p}_1^*\| &= \frac{\sqrt{(s - (m_1 + m_2)^2) \cdot (s - (m_1 - m_2)^2)}}{2\sqrt{s}} \\ E_2^* &= \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s}} & \vec{p}_2^* &= -\vec{p}_1^* \\ E_3^* &= \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}} & \|\vec{p}_3^*\| &= \frac{\sqrt{(s - (m_3 + m_4)^2) \cdot (s - (m_3 - m_4)^2)}}{2\sqrt{s}} \\ E_4^* &= \frac{s - m_3^2 + m_4^2}{2\sqrt{s}} & \vec{p}_4^* &= -\vec{p}_3^* \end{aligned} \quad (5)$$

Nous avons aussi $t \in [t_-, t_+]$ avec :

$$t_{\pm} = m_1^2 + m_3^2 - 2 \cdot E_1^* \cdot E_3^* \pm 2 \cdot \|\vec{p}_1^*\| \cdot \|\vec{p}_3^*\|. \quad (6)$$

2. Calcul du paramètre d'impact

Les quantités de mouvement des particules incidentes 1 et 2 sont exprimées initialement dans le référentiel du laboratoire. Ainsi, une première étape pour trouver le paramètre d'impact b^* est d'appliquer un boost de Lorentz à ces quantités de mouvement, afin de travailler dans le référentiel du centre de masse de ces deux particules :

$$\begin{cases} \vec{p}_1^* = \vec{p}_1 + \vec{v}_{CM} \left((\Gamma - 1) \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{v}_{CM}}{\|\vec{v}_{CM}\|^2} - \Gamma E_1 \right), \\ E_1^* = \Gamma(E_1 - \vec{p}_1 \cdot \vec{v}_{CM}) \end{cases} \quad (7)$$

où \vec{v}_{CM} est la vitesse du référentiel du centre de masse. \vec{v}_{CM} est écrit comme :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}, \quad (8)$$

et le facteur de Lorentz est :

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{CM}/c)^2}}, \quad (9)$$

dans lequel la vitesse de la lumière est prise égale à 1. L'équation (7) est alors simplement adaptée pour la quantité de mouvement de la particule 2. La même procédure est aussi appliquée aux positions de ces particules 1 et 2, afin de les exprimer dans le référentiel du centre de masse. Nous obtenons alors respectivement \vec{r}_1^* et \vec{r}_2^* . Soit $\vec{r}^* = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$ et

$\vec{p}^* = \vec{p}_2^* - \vec{p}_1^*$. Puisque $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$, prendre $\vec{p}^* = \vec{p}_2^*$ nous aurait donné le même résultat que celui que nous allons obtenir ci-dessous.

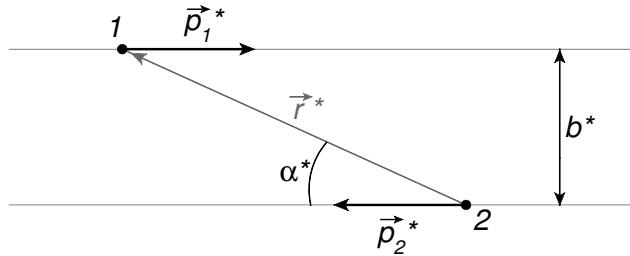


Figure 2. Détermination du paramètre d'impact b^* .

A l'aide de la figure 2, les équations (10) sont alors trouvées par des considérations de géométrie :

$$\cos(\alpha^*) = \frac{\vec{r}^* \cdot \vec{p}^*}{\|\vec{r}^*\| \|\vec{p}^*\|} \quad \sin(\alpha^*) = \frac{b^*}{\|\vec{r}^*\|}. \quad (10)$$

En utilisant la relation $\sin(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, le paramètre d'impact b^* dans le référentiel du centre de masse s'écrit alors, comme dans [2] :

$$b^* = \sqrt{\|\vec{r}^*\|^2 - \left(\frac{\vec{r}^* \cdot \vec{p}^*}{\|\vec{p}^*\|} \right)^2}. \quad (11)$$

L'intérêt de notre développement est que la première équation de (10) permet de savoir si les particules s'approchent l'une de l'autre ($\cos(\alpha^*) \geq 0$) ou au contraire s'éloignent ($\cos(\alpha^*) < 0$). Cette information ne peut pas être obtenue par l'équation (11) seule. Dans le cas où $\cos(\alpha^*) < 0$, la procédure gérant les collisions est annulée pour ces deux particules (voir chapitre 7).

3. Angle de diffusion et quantités de mouvement des particules 3 et 4

La figure 3 montre la méthode utilisée pour estimer l'angle de diffusion θ^* , dans laquelle σ est la section efficace de la réaction $1+2 \rightarrow 3+4$ considérée. D'autre part, \vec{r}^* est un vecteur allant de la particule 2 vers la particule 1, au moment précis de leur interaction. Celle-ci est supposée être ponctuelle et instantanée. En outre, \vec{p}_3^* et \vec{p}_4^* sont les quantités de mouvement des particules issues de la réaction, respectivement les particules 3 et 4. La norme de ces vecteurs est obtenue en utilisant (5).

Notre approche est basée sur le modèle des sphères dures, sauf qu'ici la somme des rayons des particules 1 et 2 est remplacée par $\sqrt{\sigma/\pi}$. Ensuite, la particule 1 devient la particule 3 après un rebond sur la sphère, suivant la loi de Descartes sur la réflexion, pendant que la particule 2 devient la particule 4. Par des arguments de géométrie, l'angle de diffusion θ^* s'exprime comme :

$$\theta^* = \pi - 2 \sin^{-1} \left(b \sqrt{\pi/\sigma} \right). \quad (12)$$

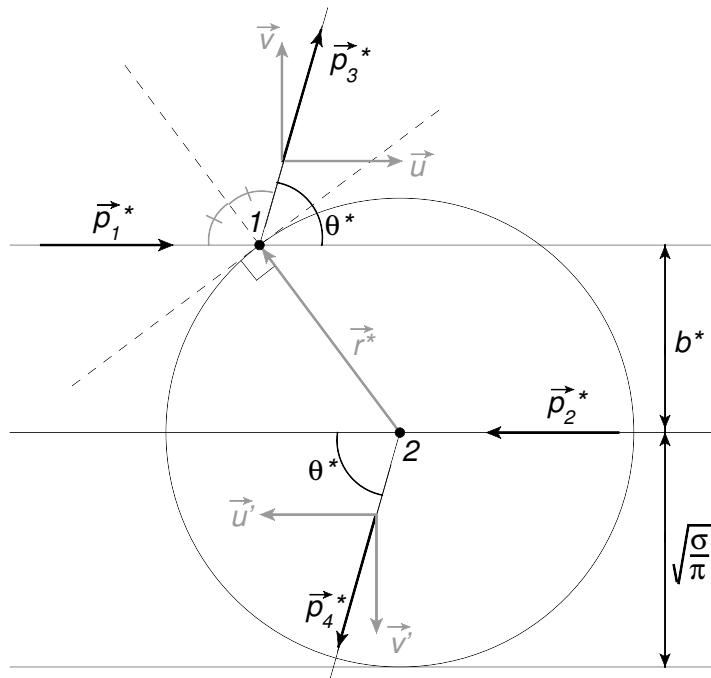


Figure 3. Estimation de l'angle de diffusion θ^* .

Grâce à cet angle, les coordonnées des vecteurs \vec{p}_3^* et \vec{p}_4^* sont alors complètement déterminables. Pour la particule 3, nous considérons un repère orthonormal (\vec{u}, \vec{v}) . Nous définissons un vecteur unitaire \vec{u} construit à partir de \vec{p}_1^* :

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}_1^*}{\|\vec{p}_1^*\|}. \quad (13)$$

Pour définir le vecteur unitaire \vec{v} , nous observons que \vec{p}_3^* est forcément dans le plan formé par les vecteurs \vec{p}_1^* et \vec{r}^* . En conséquence, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}_3^*$ doivent être coplanaires. Il y a deux vecteurs possibles pour \vec{v} . Ces deux vecteurs sont opposés l'un de l'autre. Nous choisissons celui qui est dirigé en direction opposée de la particule 2. Après quelques calculs, il vient :

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}^* - (\vec{r}^* \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{r}^* - (\vec{r}^* \cdot \vec{u}) \vec{u}\|}. \quad (14)$$

\vec{p}_3^* est alors projeté dans ce repère (\vec{u}, \vec{v}) : $\vec{p}_3^* = \|\vec{p}_3^*\| \cdot \cos(\theta^*) \cdot \vec{u} + \|\vec{p}_3^*\| \cdot \sin(\theta^*) \cdot \vec{v}$. La procédure pourrait être répétée de la même manière pour \vec{p}_4^* , ou sinon nous pouvons utiliser le fait que $\vec{p}_4^* = -\vec{p}_3^*$, d'après (5).

Finalement, un boost de Lorentz est appliqué à ces quantités de mouvement \vec{p}_3^* et \vec{p}_4^* , afin de les exprimer dans le référentiel du laboratoire.

4. Références

- [1] Borodulin V I, Rogalyov R N et Slabospitsky S R 1995 CORE (COnpendium of RElations), version 2.1. arXiv:hep-ph/9507456
- [2] Bass S A *et al.* 1998 Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions *Prog. Part. Nucl. Phys.* **41** 255–369

Annexe G

Simulation finale

La finalité de cette dernière annexe et de représenter l'évolution d'une de nos simulations complètes, vue au chapitre 7. Dans cette partie du travail, puisque nous n'y utilisons pas la symétrie isospin, un grand nombre de particules doit être pris en compte. En effet, nos simulations incluaient les quarks u, d, s , les antiquarks, les neuf mésons pseudo-scalaires, les trois diquarks scalaires, les anti-diquarks, les baryons de l'octet et les antibaryons associés. Par conséquent, dans les versions couleurs de cette thèse, nous proposons ci-après un code couleur, afin de représenter les particules évoquées. Ce code couleur est basé sur la synthèse trichromatique utilisée en optique, photographie, etc. La figure 1 nous montre ce code pour les quarks/antiquarks et mésons, alors que la figure 2 est associée aux diquarks/anti-diquarks et aux baryons/antibaryons. D'autre part, le diamètre des disques utilisés pour représenter chaque particule permet de reconnaître le type de celle-ci. Plus précisément, les quarks sont représentés par les disques les plus petits. Les mésons ont un disque un peu plus grand, encore un peu plus grand pour les diquarks, et les disques dont le diamètre est le plus fort sont réservés aux baryons.

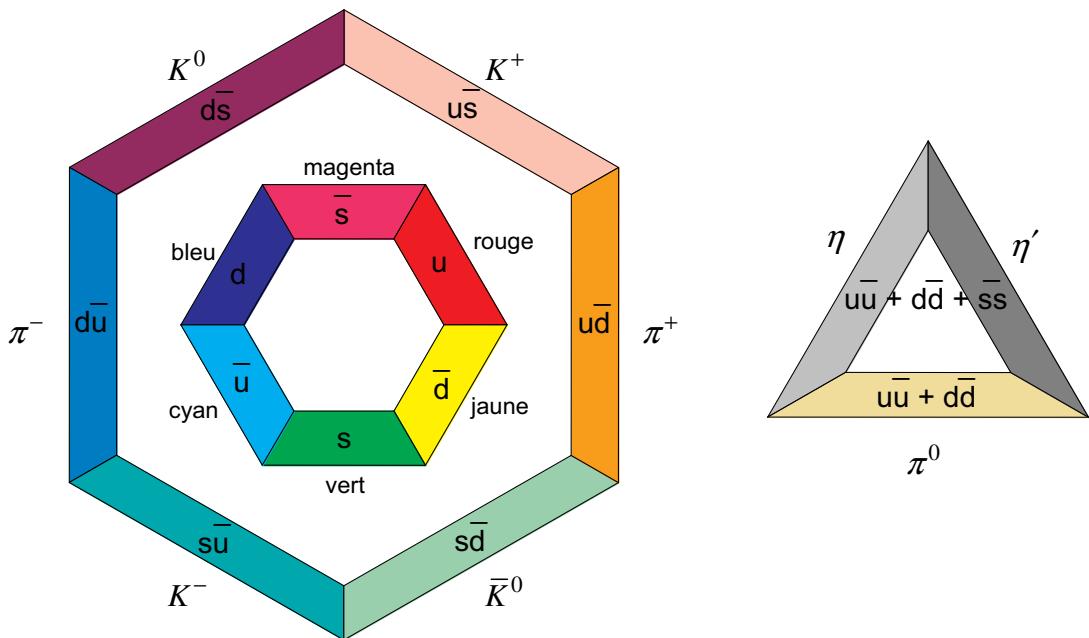


Figure 1. Code couleur pour les quarks/antiquarks et les mésons.

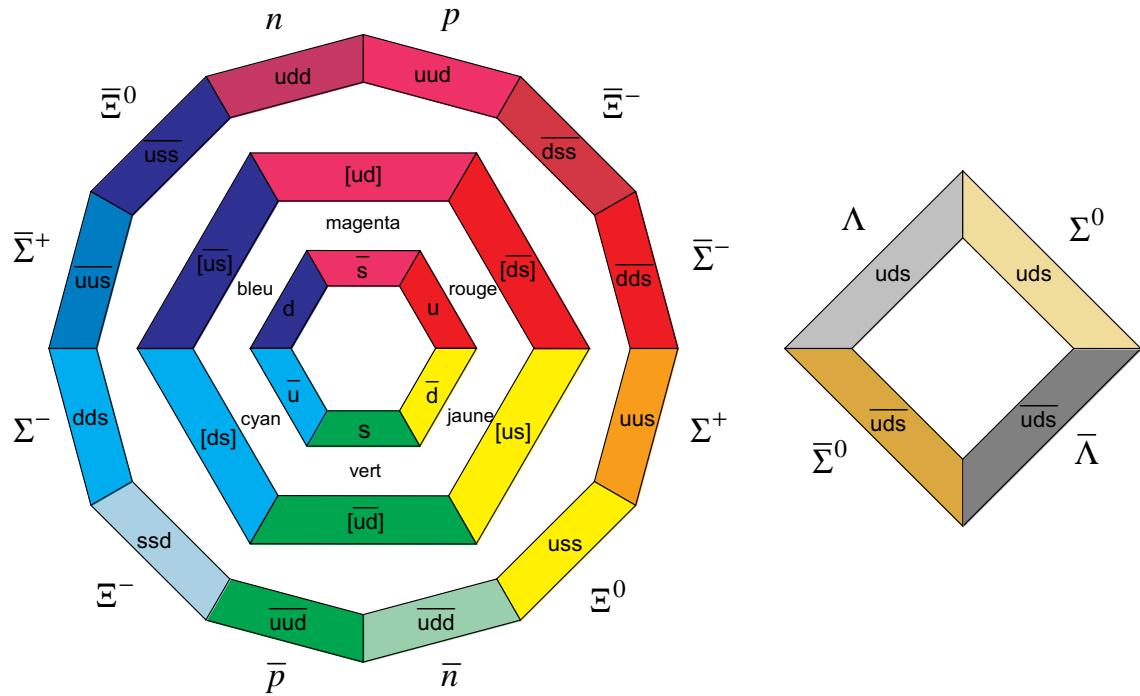


Figure 2. Code couleur pour les diquarks/anti-diquarks et baryons/antibaryons.

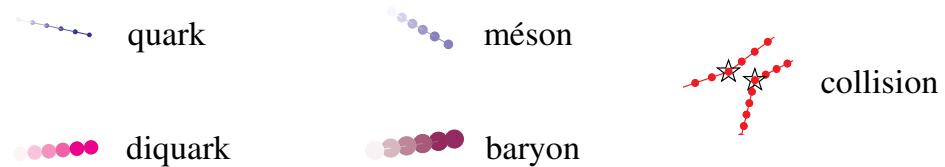
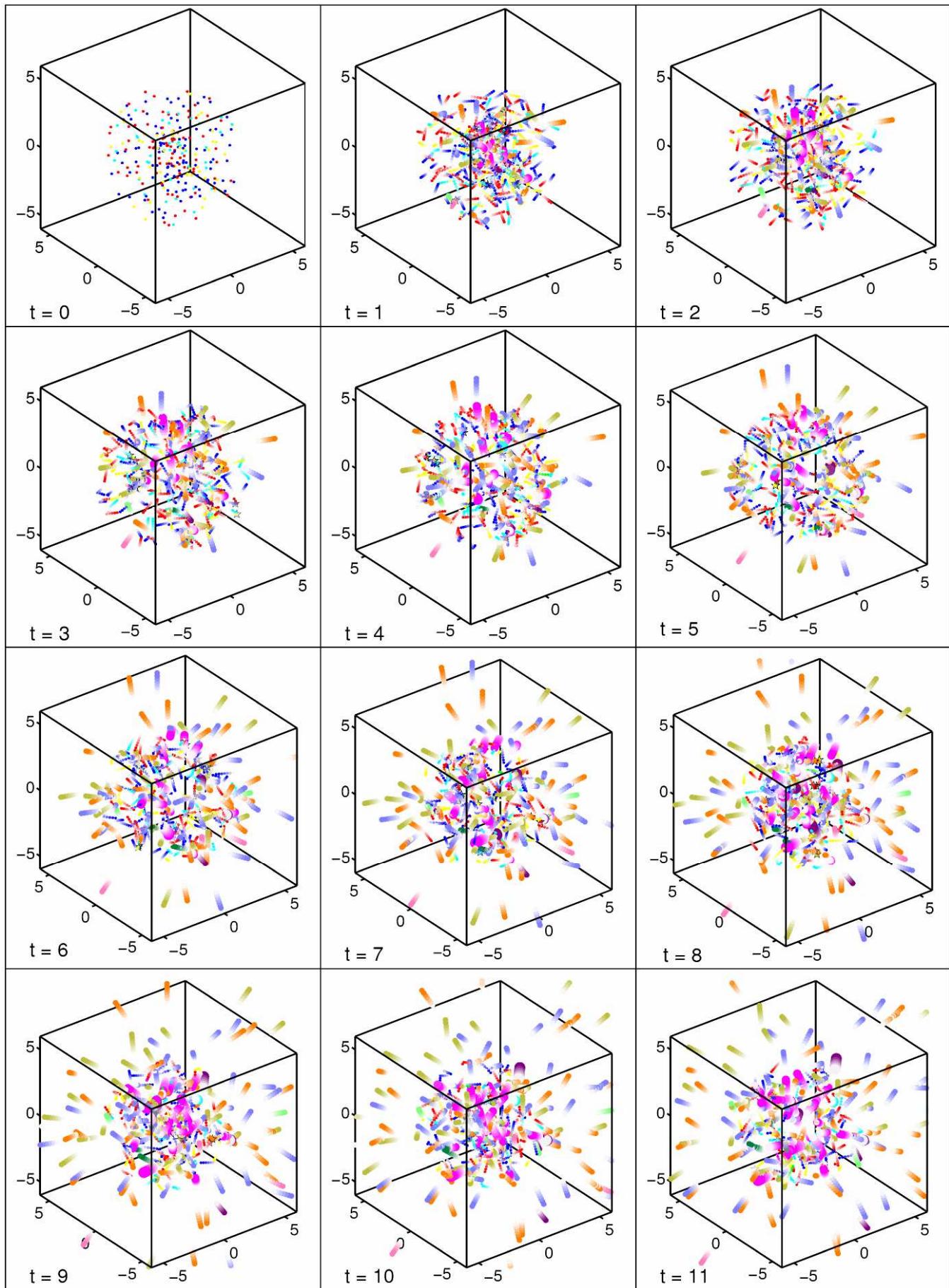
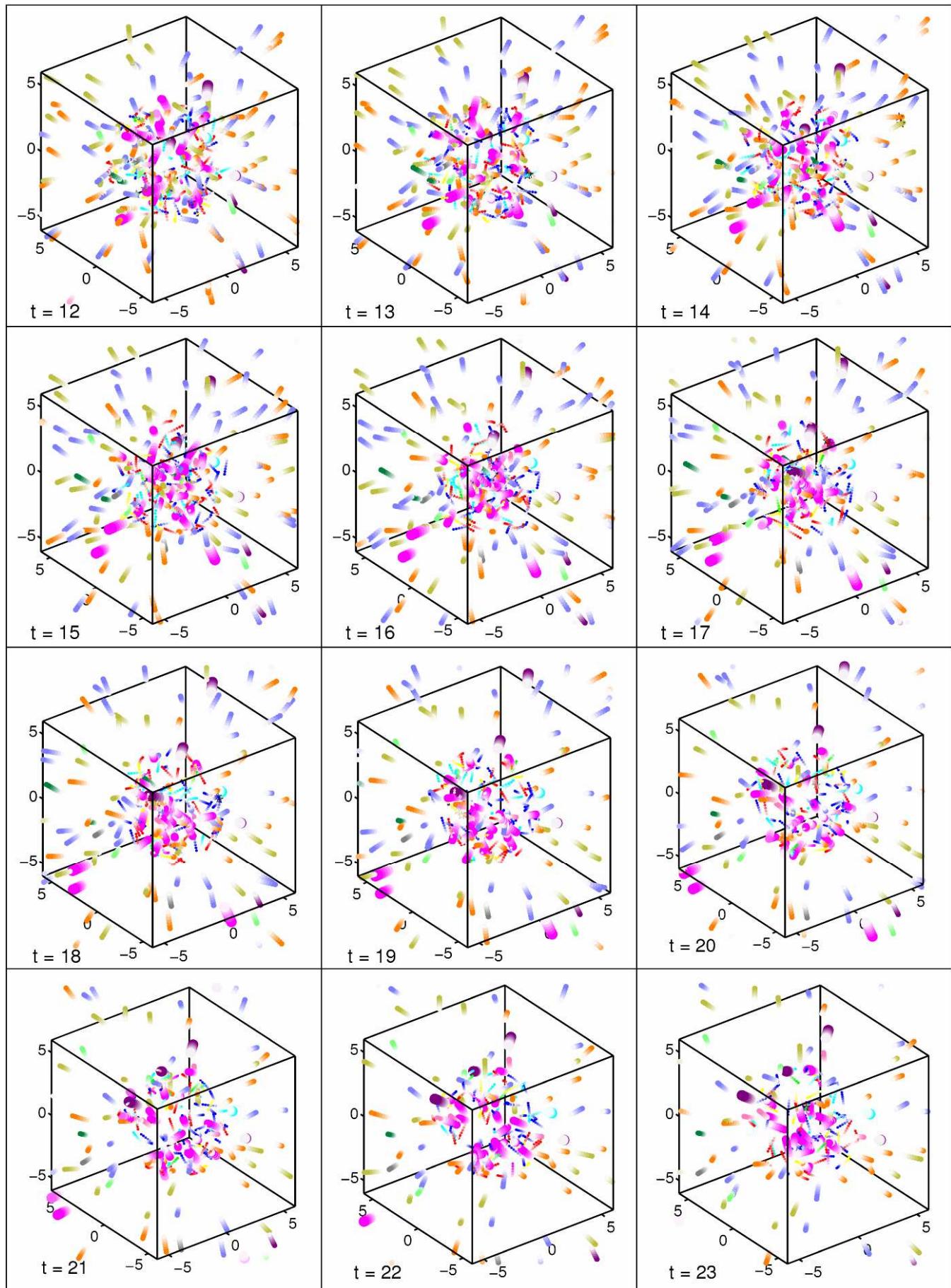
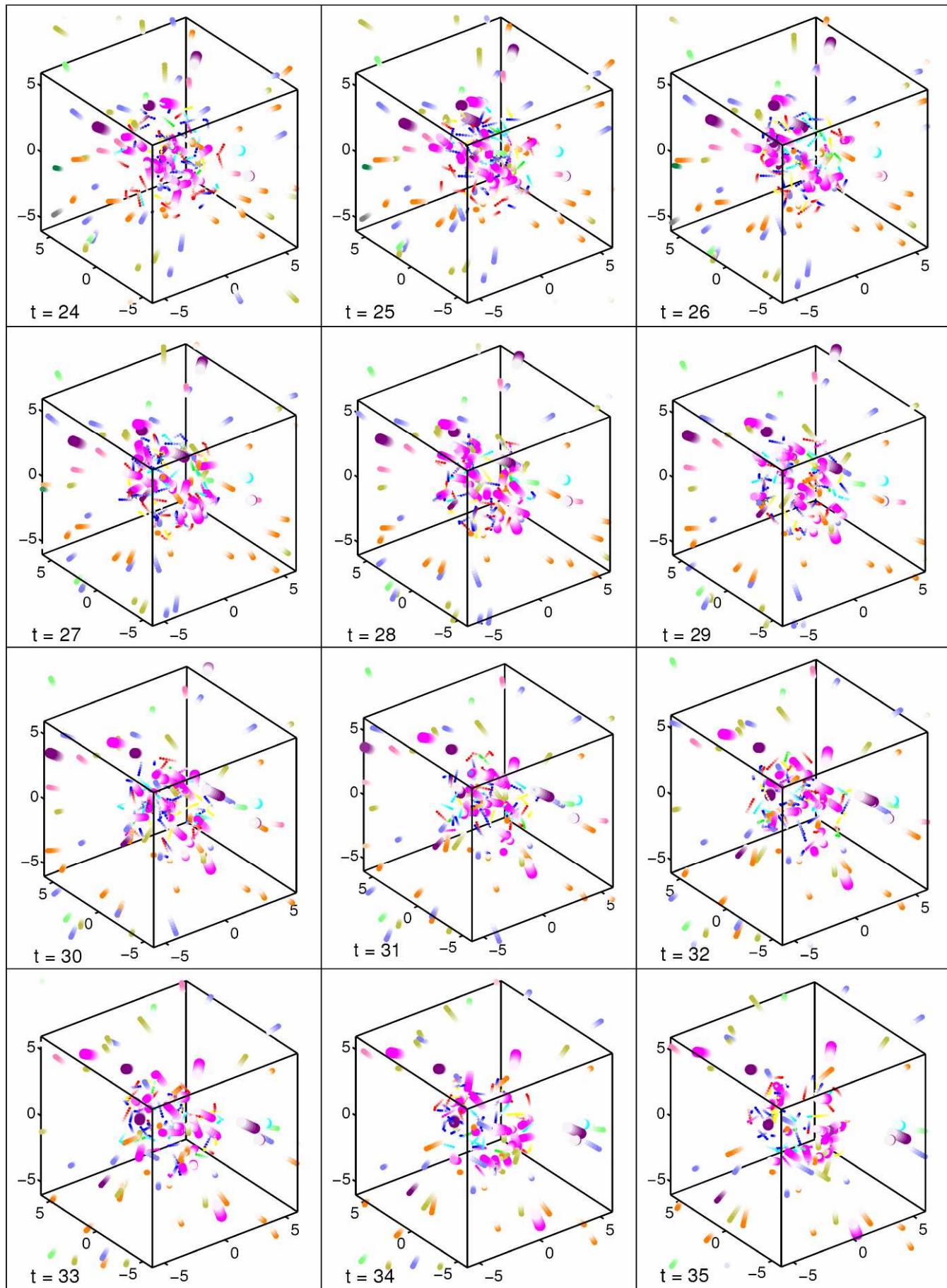
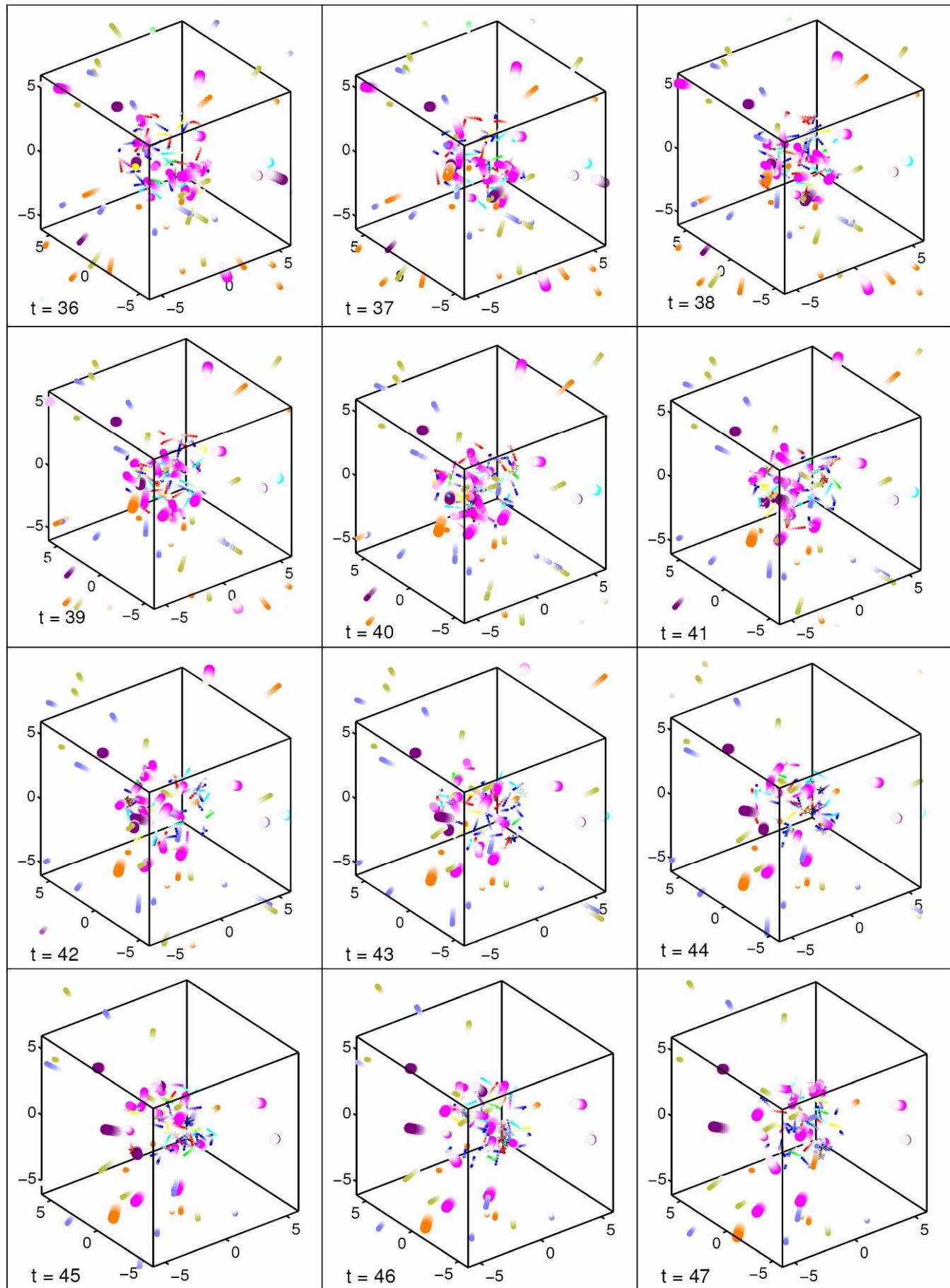


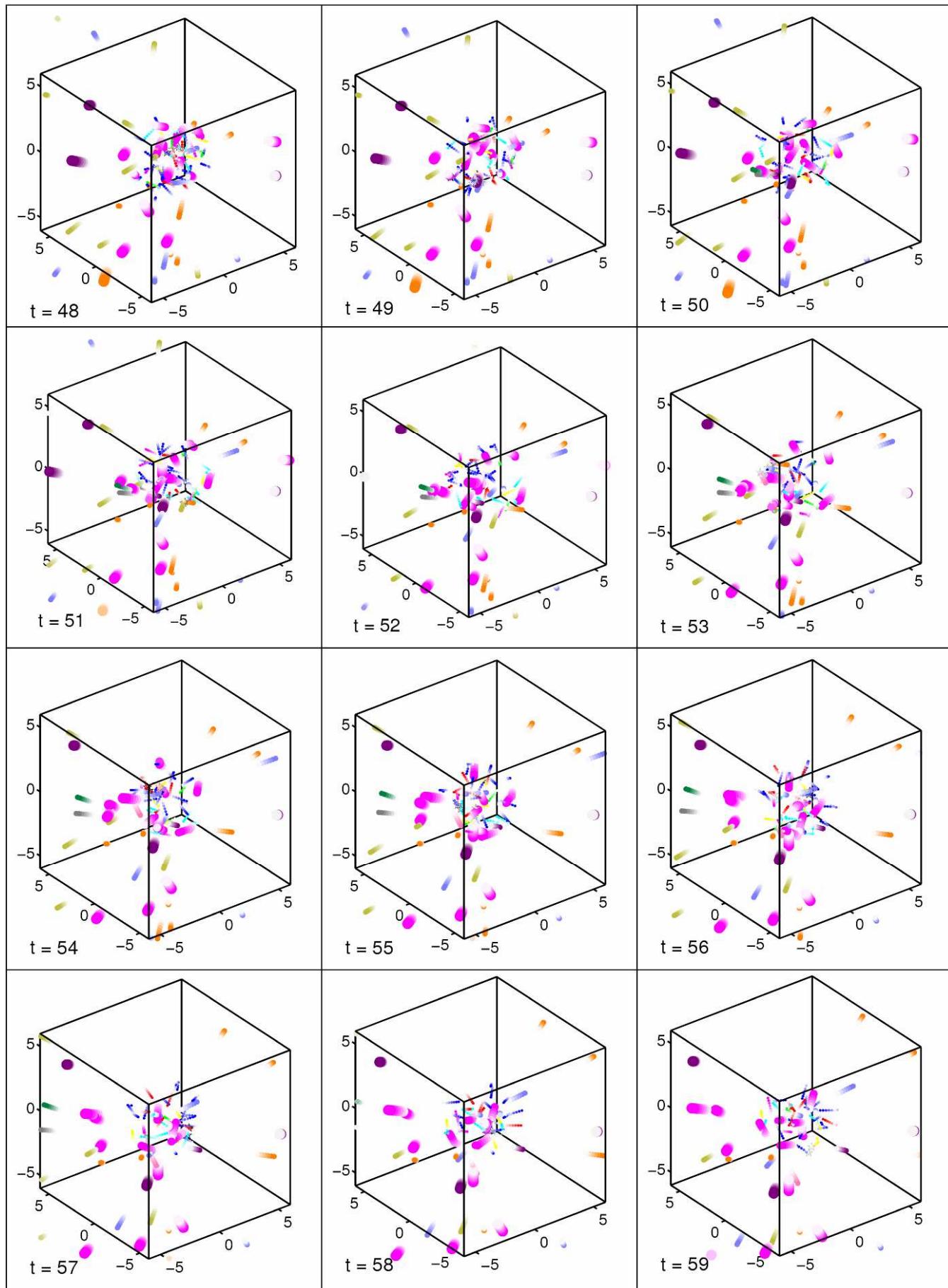
Figure 3. Représentation des particules incluses dans notre travail.

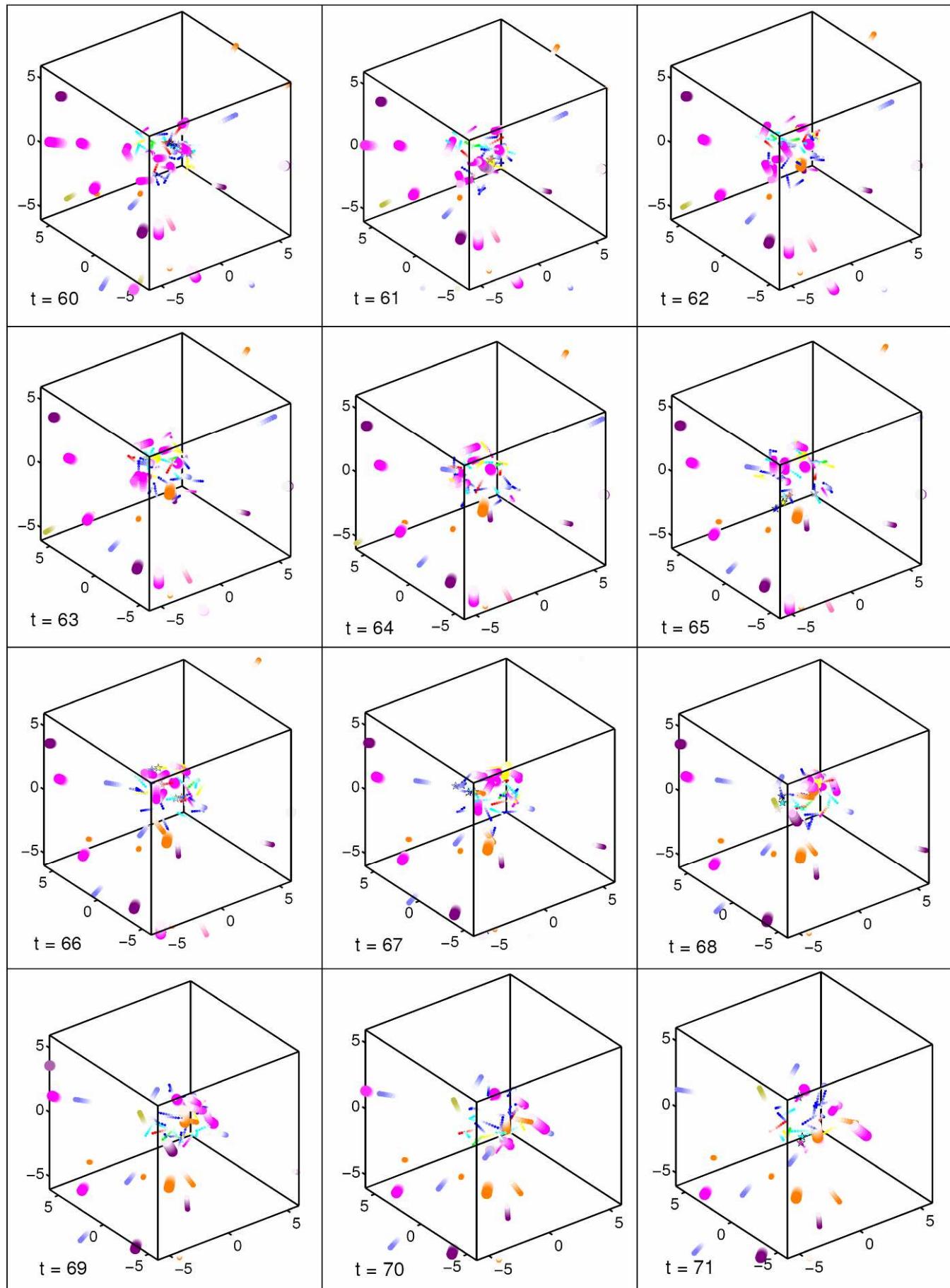


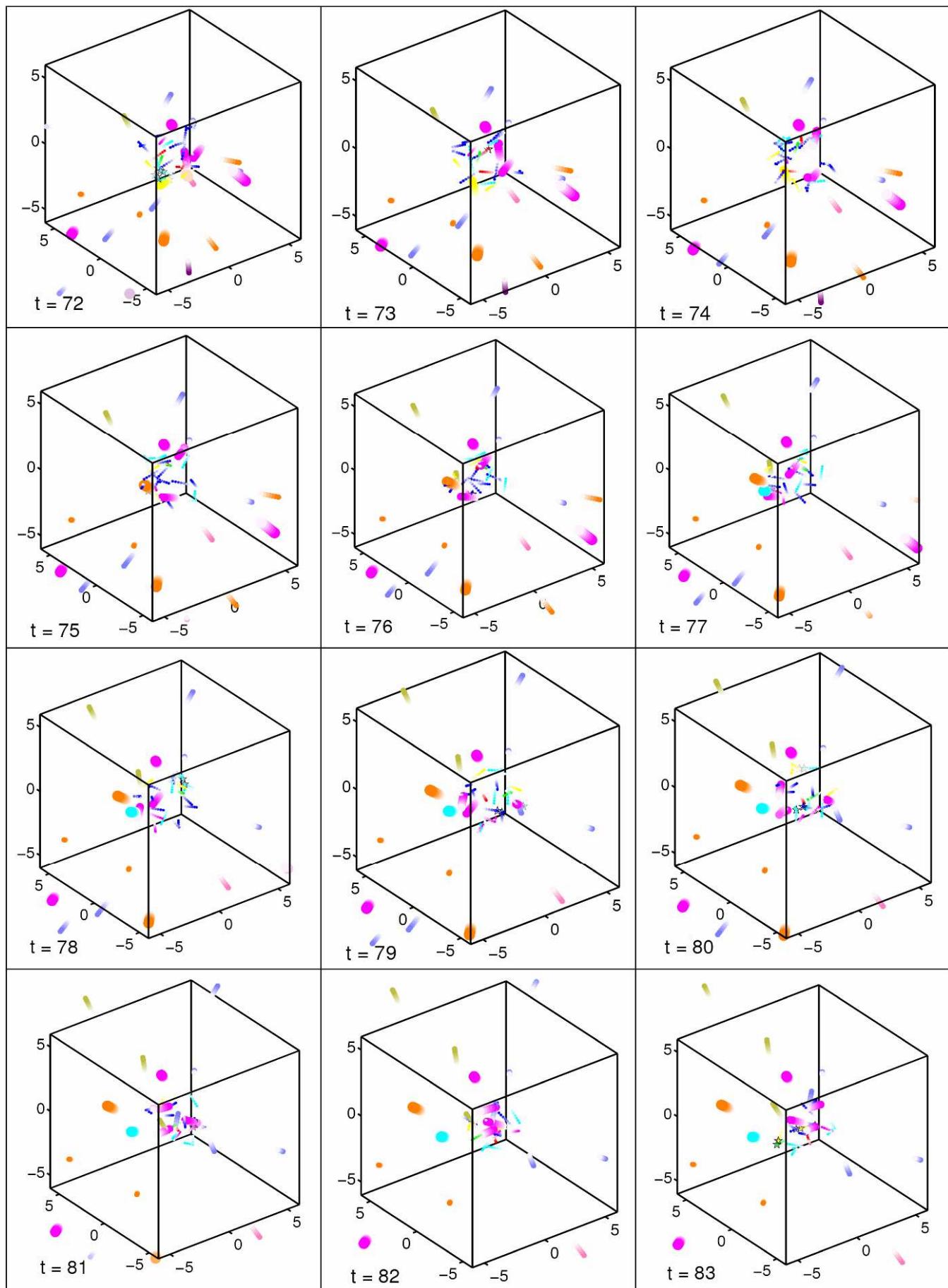


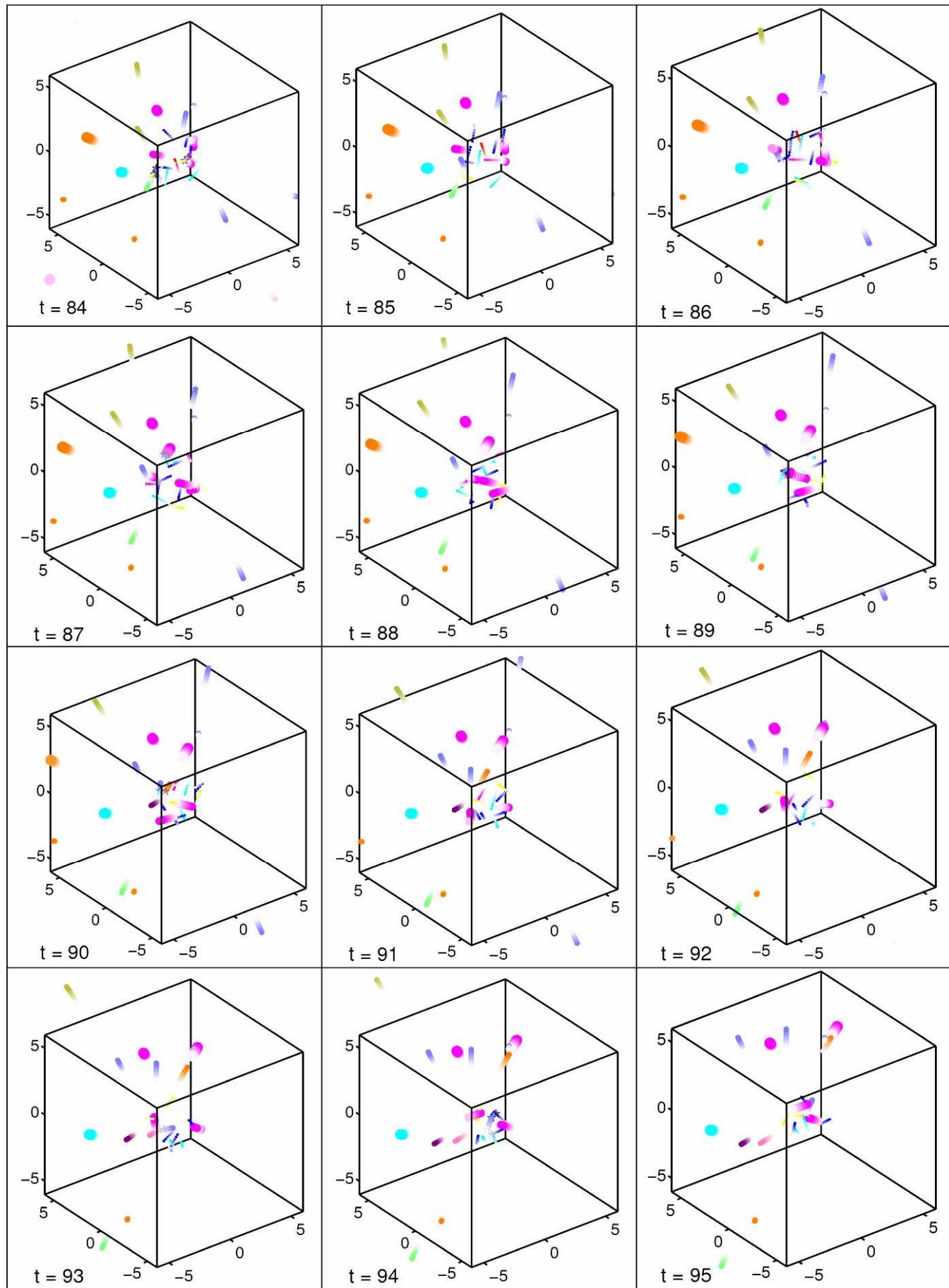


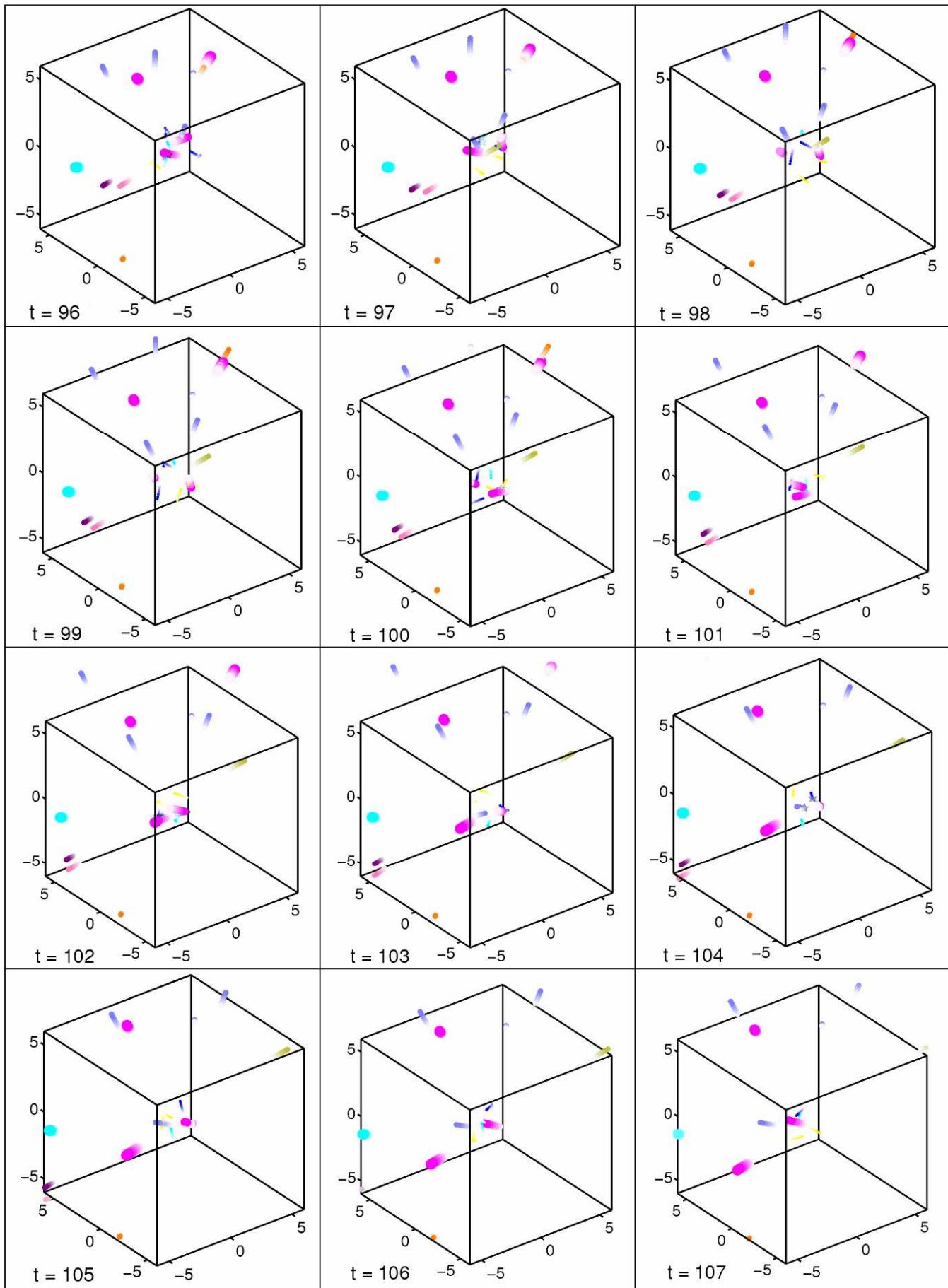


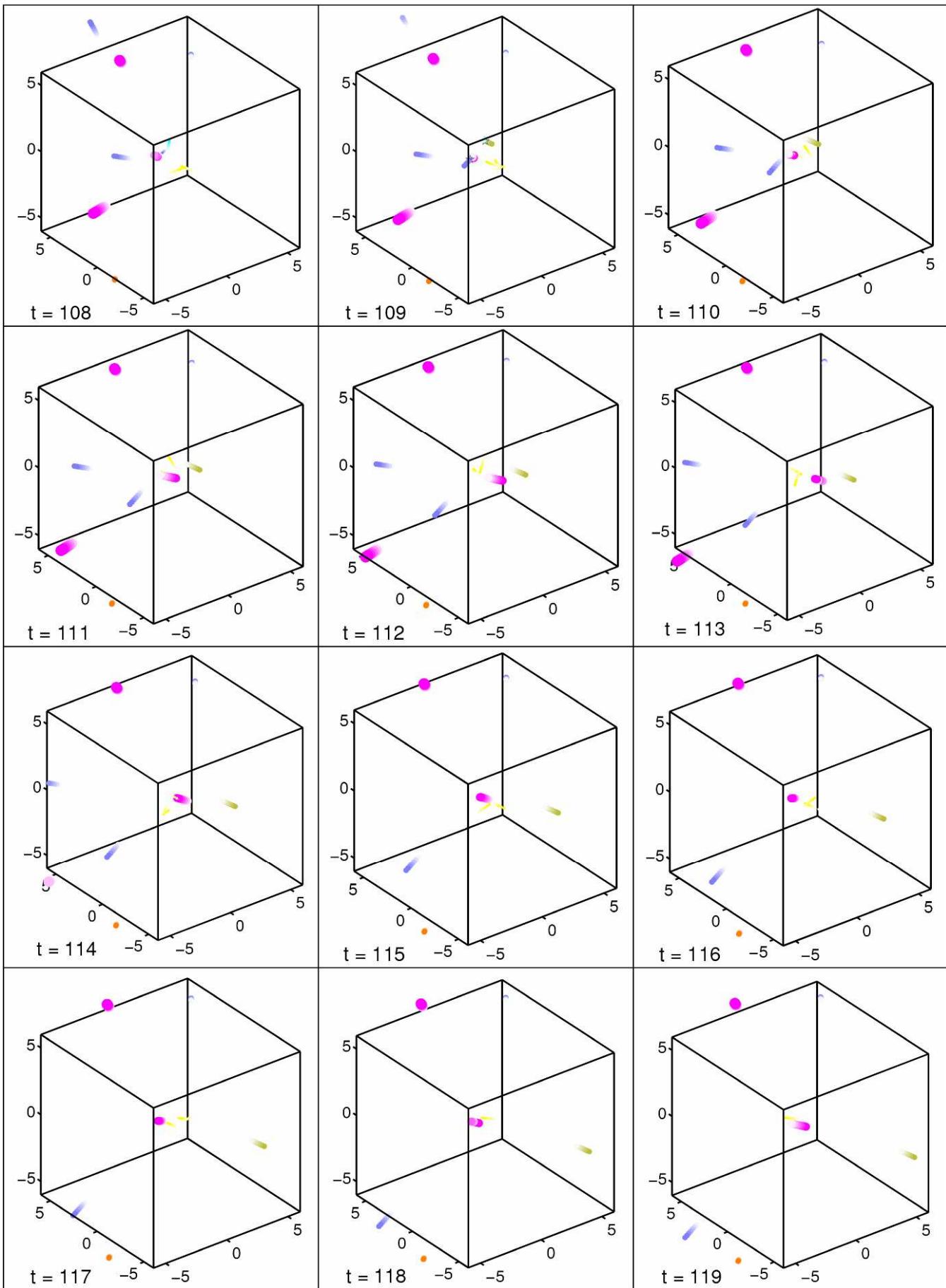


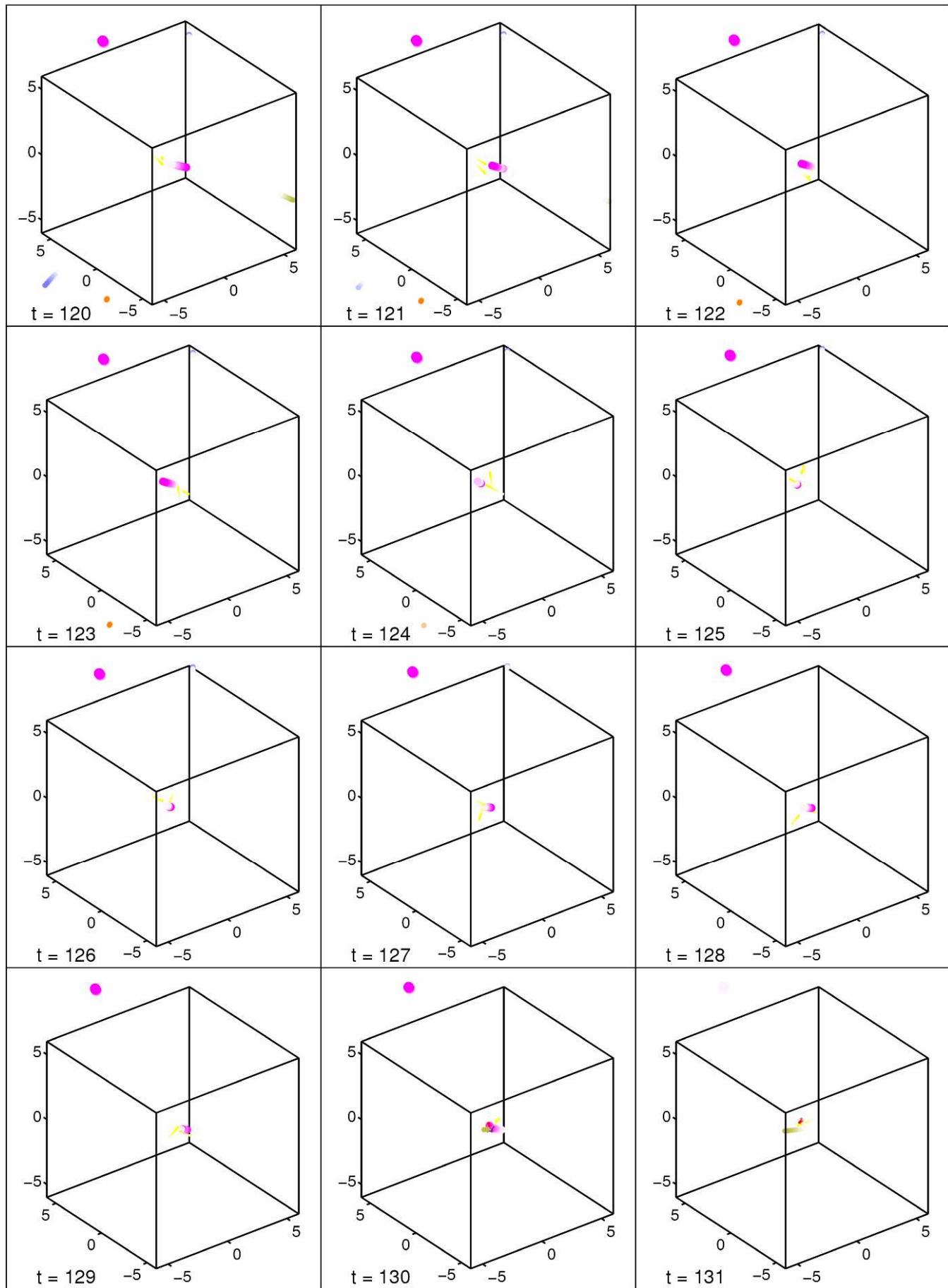


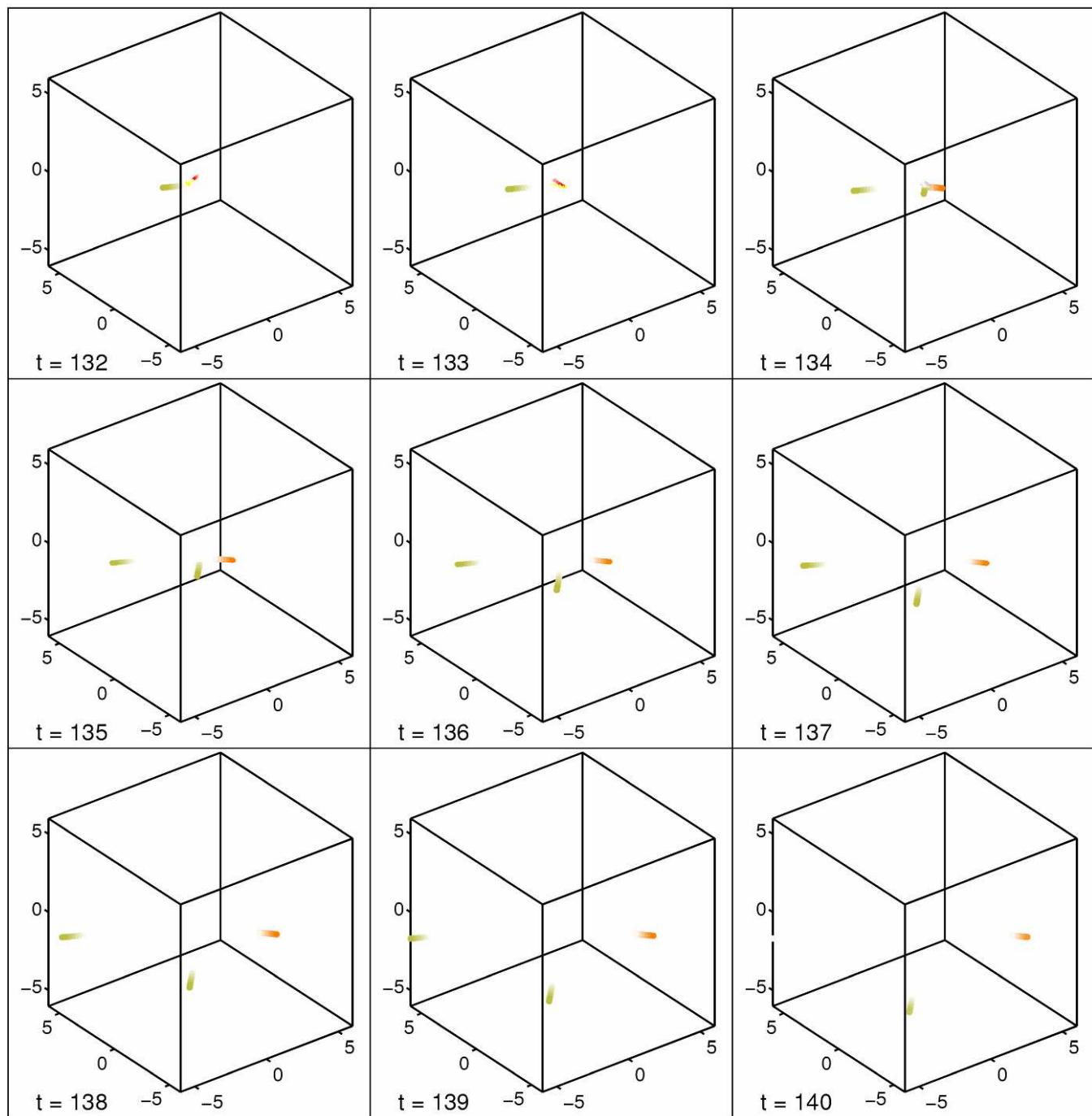












Author: Eric BLANQUIER
Title: The Polyakov, Nambu and Jona-Lasinio model and its applications to describe the sub-nuclear particles
Thesis supervisor: Patrice RAYNAUD
Place and date of the presentation: LAPLACE laboratory, Monday, September 30th, 2013

Abstract:

To study the high energy nuclear physics and the associated phenomenon, as the QGP/hadronic matter phase transition, the Nambu and Jona-Lasinio model (NJL) appears as an interesting alternative of the Quantum Chromodynamics, not solvable at the considered energies. Indeed, the NJL model allows describing the quarks physics, at finite temperatures and densities. Furthermore, in order to try to correct a limitation of the NJL model, i.e. the absence of confinement, it was proposed a coupling of the quarks/antiquarks to a Polyakov loop, forming the PNJL model.

The objective of this thesis is to see the possibilities offered by the NJL and PNJL models, to describe relevant sub-nuclear particles (quarks, mesons, diquarks and baryons), to study their interactions, and to proceed to a dynamical study involving these particles.

After a recall of the useful tools, we modeled the u , d , s effective quarks and the mesons. Then, we described the baryons as quarks-diquarks bound states. A part of the work concerned the calculations of the cross-sections associated to the possible reactions implying these particles. Then, we incorporated these works in a computer code, in order to study the cooling of a quarks/antiquarks plasma and its hadronization. In this study, each particle evolves in a system in which the temperature and the densities are local parameters. We have two types of interactions: one due to the collisions, and a remote interaction, notably between quarks. Finally, we studied the properties of our approach: qualities, limitations, and possible evolutions.

Keywords: Quark gluon plasma, Polyakov loop, Nambu and Jona Lasinio model, baryons, cross sections, finite temperatures and densities, dynamic evolution, cooling of a quark plasma.

Administrative topic: Plasma engineering

Laboratory: Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE) – UMR 5213,
118, Route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 9

Auteur : Eric BLANQUIER

Titre : Le modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio et ses applications pour décrire les particules sub-nucléaires

Directeur de thèse : Patrice RAYNAUD

Lieu et date de soutenance : Laboratoire LAPLACE, le lundi 30 septembre 2013

Résumé :

Pour étudier la physique nucléaire des hautes énergies et les phénomènes associés, comme la transition de phase quark-gluon-plasma/matière hadronique, le modèle de Nambu et Jona Lasinio (NJL) constitue une alternative intéressante à la Chromodynamique Quantique, non solvable aux énergies considérées. En effet, le modèle NJL permet de décrire la physique des quarks à températures et densités finies. D'autre part, afin de tenter de corriger une limitation de ce modèle, l'absence de confinement, il a été proposé un couplage des quarks/antiquarks à une boucle de Polyakov, formant le modèle PNJL.

L'objectif de cette thèse est de voir les possibilités offertes par les modèles NJL et PNJL, afin de décrire les particules sub-nucléaires pertinentes (quarks, mésons diquarks et baryons), d'étudier leurs interactions et de mener une étude dynamique avec ces particules.

Après un rappel des outils pertinents, nous avons modélisé les quarks effectifs u , d , s , et les mésons. Ensuite, nous avons décrit les baryons comme des états liés quarks-diquarks. Une partie du travail a concerné le calcul des sections efficaces liées aux réactions possibles avec ces particules. Nous avons incorporé ces travaux dans un code de calcul pour étudier le refroidissement d'un plasma de quarks/antiquarks et son hadronisation. Dans cette étude, chaque particule évolue dans un système où la température et les densités sont des paramètres locaux. Les interactions entre particules sont de deux types : interactions par collisions et interactions à distance, notamment entre quarks. Finalement, nous avons étudié les propriétés de notre approche : qualités, limitations et évolutions possibles.

Mots clés : Quark gluon plasma, boucle de Polyakov, modèle de Nambu et Jona Lasinio, baryons, sections efficaces, températures et densités finies, évolution dynamique, refroidissement d'un plasma de quarks.

Discipline administrative : Ingénierie des PLASMAS

Laboratoire : Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE) – UMR 5213,
118, Route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 9