

541850 7640-07653

185-54-07653

Институт физики высоких энергий

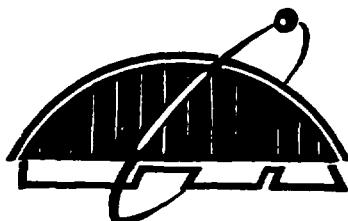
541850 7859-07870

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ  
ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ И  
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ  
ПОЛЯ

VI Международный семинар

Протвино, 1983

Том I



ТРУДЫ  
МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА  
ПО ПРОБЛЕМАМ  
ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ  
И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Том 1  
Протвино, июль 1983

PROCEEDINGS  
OF THE INTERNATIONAL SEMINAR  
ON HIGH ENERGY PHYSICS  
AND QUANTUM FIELD THEORY

Volume I  
Protvino, July 1983

В целях ускорения издания доклады напечатаны методом прямого  
репродуцирования. В первый том включены доклады, поступившие в  
готовом для репродуцирования виде до окончания семинара.

# ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕНЗОРОВ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГИЛЬБЕРТА И БЕЛИНФАНТЕ

А.А.Логунов, М.А.Меетвишвили

Институт физики высоких энергий, Серпухов

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что только симметричный тензор энергии-импульса приводит к самосогласованным законам сохранения 4-импульса и момента количества движения. Поэтому проблеме симметризации канонического тензора энергии-импульса, который естественным образом возникает в лагранжевом подходе и который, вообще говоря, не обладает свойством симметрии, в литературе уделяется большое внимание<sup>1,2</sup>.

Общий метод построения симметричного тензора энергии-импульса был предложен Гильбертом<sup>3</sup>, в связи с выводом общековариантного уравнения гравитации.

Метод Гильберта основывается на нахождении вариации лагранжиана материи по метрическому тензору и с необходимостью требует перехода к криволинейным координатам, что, с одной стороны, вызывает неудобства в теориях, где достаточно ограничиться пространством-времени Минковского, и для координат – преобразованиями Пуанкаре, а с другой, при получении явного выражения тензора энергии-импульса Гильберта приходится сталкиваться с большими техническими трудностями.

Более рациональный метод построения симметричного тензора энергии-импульса был предложен Белинфанте<sup>4</sup>. Метод Белинфанте заключается в том, что к каноническому тензору энергии-импульса добавляются некоторые построенные из исходного лагранжиана члены и в результате тензор получается симметричным и сохраняющимся.

В некоторой степени нерешенными являются следующие вопросы:

1. Отличаются ли тензоры энергии-импульса Гильберта и Белинфанте? Отчасти ответ на этот вопрос в литературе имеется<sup>5-7</sup>. Он заключается в следующем. Если лагранжиан материи содержит производные полевых функций не выше первого порядка, то тензоры энергии-импульса Гильберта и Белинфанте совпадают.

В данной работе мы покажем эквивалентность тензоров энергии-импульса Гильберта и Белинфанте в случае, когда лагранжиан содержит производные симметричного тензорного поля до третьего порядка включительно. Такой лагранжиан появляется в полевой теории гравитации<sup>8</sup>, и поэтому изучение данной проблемы имеет не только методическое, но и практическое значение.

2. Если канонический тензор энергии-импульса сам является симметричным, изменит ли его процедура Белинфанте, т.е. равны ли нулю в этом случае добавочные к каноническому тензору построенные по рецепту Белинфанте члены или нет? Пример лагранжиана, рассмотренного в приложении 2, показывает, что канонический тензор энергии-импульса, который оказывается симметричным, и тензор Белинфанте не совпадают между собой. Это значит, что в теории появляются два кандидата на роль тензора энергии-импульса. Какому из них отдать предпочтение?

Ввиду того, что для любой теории фундаментальную роль играет именно тензор энергии-импульса Гильberta, и значит тензор Белинфанте, предпочтение следует отдавать этому тензору по сравнению с каноническим, даже если последний является симметрическим. В этом заключается ответ на второй вопрос.

В настоящей работе затрагивается также вопрос о калибровочной инвариантности тензора энергии-импульса.

Известно<sup>19)</sup>, что канонический тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля не является инвариантным относительно калибровочного преобразования вектор-потенциала

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu a(x),$$

хотя соответствующий лагранжиан калибровочно инвариантен. Что касается тензора Гильberta-Белинфанте свободного электромагнитного поля, то он калибровочно инвариантен.

В разд. 5 этой работы на примере лагранжиана полевой теории гравитации показано, что это не всегда так. Не только канонический, но и тензор энергии-импульса Гильberta-Белинфанте не является калибровочно-инвариантным относительным заменой

$$\phi_{\mu\nu} \rightarrow \phi_{\mu\nu} + \partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu,$$

хотя лагранжиан полевой теории гравитации этим свойством обладает. Следует подчеркнуть, что в основе построения тензора энергии-импульса Гильberta-Белинфанте лежит инвариантность относительно преобразований координат, не имеющих ничего общего с калибровочными преобразованиями полей, поэтому нет ничего удивительного в том, что тензор энергии-импульса в общем случае не является калибровочно-инвариантной величиной.

Наконец, заметим, что калибровочная неинвариантность тензора энергии-импульса не отражается на наблюдаемых физических величинах, построенных на его основе.

В общепринятом подходе к построению теории поля исходным объектом является действие, которое в лекартовых координатах пространства-времени Минковского (или псевдоевклидова пространства)  $E_4$  с метрикой  $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ , имеет вид

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (1.1)$$

Здесь лагранжиан  $\mathcal{L}$  (лагранжиева плотность) построен из полевых функций и их производных и является скаляром;  $v$  — некоторый, вообще говоря, произвольный объем из  $E_4$ .

Если в  $E_4$  введены криволинейные координаты  $y^\mu = y^\mu(x)$ , то (1.1) следует записать в виде

$$S = \int \int \int \int \mathcal{L} d^4y \Lambda, \quad (1.2)$$

где величина

$$\Lambda = \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (1.3)$$

является скалярной плотностью и при преобразовании координат преобразуется как  $\sqrt{-g}$ . В (1.3)  $y = \det y^\mu(y)$ . Для дальнейшего удобно  $\mathcal{L}$  представить в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M,$$

где в декартовых координатах  $\mathcal{L}_g$  является скаляром, построенным только лишь из производных третьего порядка от симметричного тензорного поля  $\phi_{\mu\nu}$ , а  $\mathcal{L}_M$  (также скаляр) зависит от полей  $u_A, u_B, \dots$  (индексы  $A, B, \dots$  здесь и в дальнейшем будут означать мультииндексы), от их первых производных  $\partial_\mu u_A = u_{A,\mu}$ ;  $u_{B,\mu} \dots$  и только от вторых производных поля  $\phi_{\mu\nu}$ . Данная структура лагранжиана  $\mathcal{L}$  выбрана нами с целью применить полученные в этой статье результаты непосредственно к полевой теории гравитации, развитой в работах<sup>78</sup>. Утверждения настоящей работы справедливы в общем случае для любого лагранжиана и могут быть доказаны аналогично с некоторыми незначительными изменениями технического характера.

При рассмотрении метода Гильберта необходимо входящие в лагранжиан поля записать в криволинейных координатах. Требование инвариантности лагранжиана при этом приводит к тому, что в  $\mathcal{L}_g$  появится зависимость от самого поля  $\phi_{\mu\nu}$  и от всех его обычных производных до третьего порядка включительно, а в  $\mathcal{L}_M$  – зависимость от самого поля  $\phi_{\mu\nu}$  и от всех его производных до второго порядка включительно. Кроме того, так как метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  уже становится зависящим от криволинейных координат, в лагранжианы  $\mathcal{L}_g$  и  $\mathcal{L}_M$  войдут его производные до соответствующих порядков.

Как правило, сокращение свойства инвариантности при переходе к криволинейным координатам достигается заменой обычных производных на ковариантные

$$\phi_{\mu\nu,\sigma} \rightarrow D_\sigma \phi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu;\sigma},$$

$$\phi_{\mu\nu,\sigma,r} \rightarrow D_\sigma D_r \phi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu;\sigma;r},$$

$$u_{A,\mu} \rightarrow D_\mu u_A = u_{A;\mu} \quad \text{и т.д.},$$

где, например,

$$\phi_{\mu\nu,\sigma} = \phi_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \phi_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \phi_{\lambda\mu}. \quad (1.4)$$

Такой переход и дает рецепт построения инвариантных величин в криволинейных координатах.

В (1.4)  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  является символом Кристоффеля (или связности) и через метрику пространства-времени Минковского  $g_{\mu\nu}$  выражается следующим образом:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (1.5)$$

Заметим, что в декартовой системе координат

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0.$$

Так как пространство  $E_4$  плоское, тензор кривизны Римана тождественно равен нулю и поэтому операторы  $D_\sigma$  и  $D_\nu$  перестановочны.

## 2. СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПО БЕЛИНФАНТЕ

Хотя в этом разделе мы намерены получить следствия, следующие из инвариантности только относительно группы Пуанкаре, учитывая необходимость общекоординатного преобразования в дальнейшем, удобно уже здесь привести определения и формулы в той форме, в которой они понадобятся ниже.

Индукрированная вариация  $\Delta_S$ . Запишем общекоординатное преобразование в инфинитезимальном виде:

$$y^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (2.1)$$

Тогда очевидно

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \xi_{,\nu}^\mu(x) \quad (2.2)$$

и в линейном приближении по  $\xi^\mu(x)$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} = \delta_\nu^\mu - \xi_{,\nu}^\mu(x). \quad (2.3)$$

Определение. Приращение тензорных величин, согласованных с координатным преобразованием (2.1), называется индуцированной вариацией и обозначается через  $\Delta_S$  (!).

Если  $\phi(x)$ -скалярное поле, то очевидно

$$\Delta_S \phi(x) = 0. \quad (2.4)$$

Пусть  $\phi_{\mu\nu}$  симметричное тензорное поле, т.е.

$$\phi'_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \phi_{\alpha\beta}(x),$$

тогда в силу (2.3) в линейном приближении по  $\xi^\mu$  находим

$$\phi'_{\mu\nu}(y) - \phi_{\mu\nu}(x) = \Delta_S \phi_{\mu\nu}(x) = -\xi_{,\mu}^\alpha \phi_{\alpha\nu}(x) - \xi_{,\nu}^\alpha \phi_{\mu\alpha}(x). \quad (2.5)$$

Для поля  $u_A(x)$ , где  $A$  - мультииндекс, тензорный закон преобразования в инфинитезимальной форме может быть записан в виде

$$u'_A(y) = (\delta_A^B - S_{A\nu}^B \xi_{,\mu}^\nu) u_B(x).$$

Тогда очевидно

$$\Delta_S u_A(x) = -S_{A\nu}^{B\mu} \xi_{,\mu}^{\nu} u_B(x). \quad (2.6)$$

Совершенно аналогично может быть показано, что

$$\begin{aligned} \Delta_S \phi^{\mu\nu}(x) &= \xi_{,\alpha}^{\mu} \phi^{\alpha\nu}(x) + \xi_{,\alpha}^{\nu} \phi^{\alpha\mu}(x), \\ \Delta_S \phi_{\nu}^{\mu}(x) &= -\xi_{,\nu}^{\alpha} \phi_{\alpha}^{\mu}(x) + \xi_{,\alpha}^{\mu} \phi_{\nu}^{\alpha}(x), \\ \Delta_S u^A(x) &= \tilde{S}_{B\nu}^{A\mu} \xi_{,\mu}^{\nu} u^B(x), \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теперь найдем индуцированную вариацию от производных полей. Рассмотрим подробно  $\Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma}$ . По определению:

$$\Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial \phi_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\sigma}.$$

Так как в линейном приближении (см. (2.5))  $\phi'_{\mu\nu}(y) = \phi_{\mu\nu}(x) - \xi_{,\mu}^{\alpha} \phi_{\alpha\nu}(x) - \xi_{,\nu}^{\alpha} \phi_{\alpha\mu}(x)$ , то

$$\frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial y^\sigma} = \frac{\partial x^r}{\partial y^\sigma} \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial x^r} = (\delta_{\sigma}^r - \xi_{,\sigma}^r) (\phi_{\mu\nu,r}(x) - \xi_{,\mu}^{\alpha} \phi_{\alpha\nu}(x) + \xi_{,\nu}^{\alpha} \phi_{\alpha\mu}(x))_r = \phi_{\mu\nu,\sigma}(x) + [\Delta_S \phi_{\mu\nu}(x)]_{,\sigma} - \xi_{,\sigma}^r \phi_{\mu\nu,r}(x),$$

поэтому

$$\Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma}(x) = [\Delta_S \phi_{\mu\nu}(x)]_{,\sigma} - \xi_{,\sigma}^r \phi_{\mu\nu,r}(x). \quad (2.8)$$

Аналогично может быть доказано, что

$$\begin{aligned} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x) &= [\Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma}(x)]_{,\tau} - \xi_{,\tau}^{\alpha} \phi_{\mu\nu,\sigma,\alpha}(x), \\ \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau,\alpha} &= [\Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x)]_{,\alpha} - \xi_{,\alpha}^{\beta} \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau,\beta}(x), \\ \Delta_S u_{A,\mu}(x) &= [\Delta_S u_A(x)]_{,\mu} - \xi_{,\mu}^{\nu} u_{A,\nu}(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

и т.д.

Вариация Ли. Из формул (2.8) – (2.9) видно, что оператор  $\Delta_S$  не переставочен с операторами дифференцирования. Во многих случаях, однако, целесообразно иметь такие вариации, которые, с одной стороны, согласованы с тензорным законом преобразований, а с другой, перестановочны с операторами дифференцирования. Такие вариации называются вариациями Ли и обозначают их через  $\Delta_L$ .

Определение  $\Delta_L$  следующее:

$$\Delta_L \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x);$$

$$\begin{aligned} \Delta_L \phi_{,\sigma}(x) &= \frac{\partial \phi'(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\sigma} = (\Delta_L \phi(x))_{,\sigma}; \\ \Delta_L \phi_{\mu\nu}(x) &= \phi'_{\mu\nu}(x) - \phi_{\mu\nu}(x); \\ \Delta_L \phi_{\mu\nu,\sigma}(x) &= \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \phi_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\sigma} = (\Delta_L \phi_{\mu\nu}(x))_{,\sigma} \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

В (2.10)  $\phi'(x)$ ,  $\phi'_{\mu\nu}(x)$  и т.д. – значения преобразованных полей  $\phi'(y)$ ,  $\phi'_{\mu\nu}(y)$  и т.д., взятые в исходной точке  $x^\mu = y^\mu - \xi^\mu$ . Отсюда видим, что  $\Delta_L(\cdot)$  – вариации не являются произвольными изменениями полей в точке, а согласованы с преобразованием координат (2.1), т.е. с тензорным законом трансформации полей.

Из определения (2.10) очевидно, что оператор  $\Delta_L$  перестановчен с операторами дифференцирования. Установим связь между операторами  $\Delta_S$  и  $\Delta_L$ . Найдем сначала  $\Delta_L \phi$ :

$$\begin{aligned} \Delta_L \phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(y^\mu - \xi^\mu) - \phi(x) = \phi'(y) - \\ &- \frac{\partial \phi'(y)}{\partial y^\nu} \xi^\nu - \phi(x) = \Delta_S \phi(x) - \frac{\partial \phi'(y)}{\partial y^\nu} \xi^\nu. \end{aligned}$$

Так как в первом порядке по  $\xi^\nu$

$$\frac{\partial \phi'(y)}{\partial y^\nu} \xi^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \frac{\partial \phi'(y)}{\partial x^\mu} \xi^\nu \approx \delta_\nu^\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \xi^\nu = \xi^\mu \phi_{,\mu}(x),$$

то с учетом (2.4) находим

$$\Delta_L \phi(x) = \Delta_S \phi(x) - \xi^\mu \phi_{,\mu}(x) = -\xi^\mu \phi_{,\mu}(x). \quad (2.11)$$

Теперь найдем  $\Delta_L \phi_{\mu\nu}$ :

$$\Delta_L \phi_{\mu\nu}(x) = \phi'_{\mu\nu}(x) - \phi_{\mu\nu}(x) = \phi'_{\mu\nu}(y^\sigma - \xi^\sigma) - \phi_{\mu\nu}(x) = \Delta_S \phi_{\mu\nu}(x) - \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial y^\tau} \xi^\tau,$$

но в первом порядке по  $\xi^\mu$

$$\frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial y^\tau} \xi^\tau = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\tau} \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}(y)}{\partial x^\sigma} \xi^\tau = \xi^\sigma \phi_{\mu\nu,\sigma}(x)$$

и поэтому имеем

$$\Delta_L \phi_{\mu\nu}(x) = \Delta_S \phi_{\mu\nu}(x) - \xi^\sigma \phi_{\mu\nu,\sigma}(x). \quad (2.12)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned}\Delta_L u_A(x) &= \Delta_S u_A(x) - \xi^\mu u_{A,\mu}(x), \\ \Delta_L \phi_{,\mu}(x) &= \Delta_S \phi_{,\mu}(x) - \xi^\nu \phi_{,\mu,\nu}(x), \\ \Delta_L \phi_{\mu\nu,\sigma}(x) &= \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma}(x) - \xi^\tau \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x), \\ \Delta_L \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x) &= \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x) - \xi^\alpha \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau,\alpha}(x), \\ \Delta_L u_{A,\mu}(x) &= \Delta_S u_{A,\mu}(x) - \xi^\nu u_{A,\mu,\nu}(x) \text{ и т.д.}\end{aligned}\quad (2.13)$$

В силу того, что операторы  $\Delta_L$  и  $\partial_\mu$  перестановочны, для вычисления явного вида вариации  $\Delta_L$  от производных полей, достаточно знать явный вид вариации самих полей;  $\Delta_L \phi$  задана формулой (2.11):

$$\Delta_L \phi_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha \phi_{a\nu}(x) - \xi^\alpha \phi_{,\nu}^a(x) - \xi^\alpha \phi_{\mu\nu,a}(x), \quad (2.14)$$

$$\Delta_L u_A(x) = -S_{A\nu}^B \xi^\nu \phi_B(x) - \xi^\alpha u_{A,a}(x), \quad (2.15)$$

$$\Delta_L \phi_\nu^\mu(x) = -\xi^\alpha \phi_a^\mu(x) + \xi^\mu \phi_a^\alpha(x) - \xi^\alpha \phi_{\nu,a}^\mu(x), \text{ и т.д.} \quad (2.16)$$

Переход от формул, полученных для общекоординатного преобразования (2.1), к формулам для преобразования Пуанкаре осуществляется с помощью конкретного выбора параметра  $\xi^\mu(x)$ :

$$\xi^\mu(x) = \epsilon^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu, \quad (2.17)$$

где  $\epsilon^\mu$  – произвольный, но постоянный 4-вектор, а  $\omega^{\mu\nu}$  – некоторая 6-параметрическая антисимметричная  $4 \times 4$  матрица:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}. \quad (2.18)$$

Явный вид  $\omega^{\mu\nu}$  в данной работе нам не понадобится. Главной особенностью группы Пуанкаре является то, что она сохраняет вид метрического тензора  $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ , т.е. группа Пуанкаре осуществляет переход от одной галилеевской системы отсчета к любой другой галилеевской системе. Поэтому естественно при построении теории, инвариантной относительно группы Пуанкаре, исходить из действия (1.1), которое записано в декартовой системе координат. Следуя Э.Нетер, потребуем инвариантности действия (1.1), когда координаты подвергаются преобразованию Пуанкаре, т.е. положим

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi_{\mu\nu}(x); \phi_{\mu\nu,\sigma}(x); \dots) d^4x - \int \mathcal{L}(\phi'_{\mu\nu}(y); \phi'_{\mu\nu,\sigma}(y); \dots) d^4y = 0. \quad (2.19)$$

Так как  $d^4y = d^4x$ , а

$$\mathcal{L}(\phi'_{\mu\nu}(y); \phi'_{\mu\nu,\sigma}(y); \dots) = \mathcal{L}(\phi_{\mu\nu}(x); \phi_{\mu\nu,\sigma}(x); \dots) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau}(x) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} \Delta_S u_A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,\mu}} \Delta_S u_{A,\mu}(x), \quad (2.20)$$

то из (2.19) находим

$$\int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} \Delta_S u_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,\mu}} \Delta_S u_{A,\mu} \right) = 0. \quad (2.21)$$

В силу произвольности  $\psi$  из (2.21) следует

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a}} \Delta_S \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,\mu}} \Delta_S u_{A,\mu} = 0. \quad (2.22)$$

Учитывая связь между вариациями  $\Delta_S$  и  $\Delta_L$ , а также предпринятое нами разбиение лагранжиана  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M$ , соотношение (2.22) может быть записано в виде

$$\xi^\nu (\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M)_{,\nu} + V^{(\mu\nu)(\sigma r)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\sigma,r} + R^{(\mu\nu)(\sigma r a)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\sigma,r,a} +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} \Delta_L u_{A,\mu} = 0. \quad (2.23)$$

В (2.23) введены обозначения:

$$V^{(\mu\nu)(\sigma r)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r}}, \quad (2.24a)$$

$$R^{(\mu\nu)(\sigma r a)} = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,r,a}}. \quad (2.24)$$

Но инвариантными относительно групп Пуанкаре должны быть величины  $\mathcal{L}_S$  и  $\mathcal{L}_M$  по отдельности, поэтому, применяя метод Э.Нетер для интегралов

$\int \mathcal{L}_S d^4x$  и  $\int \mathcal{L}_M d^4x$  по отдельности, найдем:

$$\xi^\nu (\mathcal{L}_S)_{,\nu} + V^{(\mu\nu)(\sigma r)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\sigma,r} = 0, \quad (2.25)$$

$$\xi^\nu (\mathcal{L}_M)_{,\nu} + V^{(\mu\nu)(\sigma r)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\sigma,r} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} (\Delta_L u_A)_{,\mu} = 0. \quad (2.26)$$

Хотя соотношение (2.23) следует из (2.25) – (2.26), мы сочли необходимым выписать его отдельно, поскольку, как это будет видно ниже,

законы сохранения удобно получить именно на его основе. Тождества (2.25) - (2.26) являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности  $\mathcal{L}_g$  и  $\mathcal{L}_M$  относительно группы Пуанкаре, и по существу накладывают ограничения только на функциональную структуру лагранжианов  $\mathcal{L}_g$  и  $\mathcal{L}_M$ , т.е. на то, как они зависят от величин  $\phi_{\mu\nu,\sigma,\tau,a}$  и  $\phi_{\mu\nu,\sigma,\tau} ; u_A$ ;  $u_{A,\mu}$  соответственно. Подставляя в (2.25) и (2.26) явный вид вариаций  $\Delta_L \phi_{\mu\nu}$  и  $\Delta_L u_A$  с учетом того, что для группы Пуанкаре все производные от параметра  $\xi^\mu$  начиная со второй включительно и выше тождественно равны нулю (см. (2.17)), найдем:

$$\xi^\beta_{,\mu} [2R^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} \phi_{\beta\nu,\sigma,\tau,a} + 3R^{(\alpha\nu)(\sigma\tau\mu)} \phi_{\alpha\nu,\beta,\tau,\sigma}] = 0, \quad (2.27)$$

$$\xi^\alpha_{,\mu} [2V^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\tau} + 2V^{(\sigma\nu)(\mu\tau)} \phi_{\sigma\nu,a,\tau} + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{Aa}^{B\mu} u_B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}} S_{Aa}^{B\mu} u_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} u_{A,a}] = 0. \quad (2.28)$$

Легко заметить, что (2.27) и (2.28) накладывают условия только на антисимметричные части выражений, входящих в квадратные скобки, так как величина  $\xi^\beta_{,\mu} = \omega_{\beta\mu}$  антисимметрична (см. (2.18)). Таким образом, из (2.27) и (2.28) находим:

$$2R^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} \phi_{\nu,\sigma,\tau,a}^\beta - 2R^{(\beta\nu)(\sigma\tau a)} \phi_{\nu,\sigma,\tau,a}^\mu + \\ + 3R^{(\alpha\nu)(\sigma\tau\mu)} \phi_{\alpha\nu,\tau,\sigma,\tau}^\beta - 3R^{(\alpha\nu)(\sigma\tau\beta)} \phi_{\alpha\nu,\tau,\sigma,\tau}^\mu = 0 \quad (2.29)$$

$$2V^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} \phi_{\nu,\sigma,\tau}^\beta - 2V^{(\beta\nu)(\sigma\tau)} \phi_{\nu,\sigma,\tau}^\mu + 2V^{(\sigma\nu)(\mu\tau)} \phi_{\sigma\nu,\tau,\tau}^\beta - 2V^{(\sigma\nu)(\mu\tau)} \phi_{\sigma\nu,\tau,\tau}^\mu + \\ + \gamma^a \beta \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{Aa}^{B\mu} u_B - \gamma^a \mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{Aa}^{B\beta} u_B + \gamma^a \beta \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}} S_{Aa}^{B\mu} u_{B,\sigma} - \\ - \gamma^a \mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}} S_{Aa}^{B\beta} u_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} u_{A,\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} u_{A,\beta}^\mu = 0. \quad (2.30)$$

Теперь вернемся к тождеству (2.23), переписав предварительно его в виде

$$\frac{\delta(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M)}{\delta \phi_{\mu\nu}} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta u_A} \Delta_L u_A + J^\sigma_{,\sigma} = 0, \quad (2.31)$$

где

$$J^\sigma = \xi^\sigma (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M) + V^{(\mu\nu)(\sigma\tau)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\tau} - V^{(\mu\nu)(\sigma\tau)}_{,\tau} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + R^{(\mu\nu)(\sigma\tau a)} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,r,a} -$$

$$-R_{,r}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha)}(\Delta_L\phi_{\mu\nu})_{,a} + R_{,r,a}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha)}\Delta_L\phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}}\Delta_L u_A, \quad (2.32)$$

а  $\delta/\delta\phi_{\mu\nu}$  – функциональная производная Эйлера–Лагранжа (см. приложение 1).

Предполагая, что поля  $\phi_{\mu\nu}$  и  $u_A$  подчиняются уравнениям движения, т.е. что

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_M)}{\delta\phi_{\mu\nu}} &= 0, \\ \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta u_A} &= 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

из (2.31) находим

$$J_{,\sigma}^{\sigma} = 0. \quad (2.34)$$

Используя для  $\Delta_L\phi_{\mu\nu}$  и  $\Delta_L u_A$  явные выражения (2.14) и (2.15), представим (2.32) в виде

$$J^{\sigma} = -\xi_r P^{\sigma r} - \xi_{r,\mu} M^{\sigma\mu r}, \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} P^{\sigma r} &= -\gamma^{\sigma r}(\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_M) + V_{\mu\nu,a}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha)}\phi_{\mu\nu,a}^r - V_{a,\sigma}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha)}\phi_{\mu\nu}^r + \\ &+ R_{\mu\nu,a,\sigma}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha)}\phi_{\mu\nu,a}^r - R_{,r,a}^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)}\phi_{\mu\nu,\beta}^r + R_{,a,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\alpha\beta)}\phi_{\mu\nu}^r + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}}u_A^r. \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} M^{\sigma\mu r} &= 2R_{\nu\alpha,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)}\phi_{\nu,\alpha}^r + 2R_{,\alpha,\beta}^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\mu)}\phi_{\alpha,\beta}^r - 2R_{,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)}\phi_{\nu,\alpha}^r - \\ &- R_{,\beta}^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\mu)}\phi_{\alpha,\beta}^r + 2R_{,\alpha,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)}\phi_{\nu}^r + 2V_{\nu,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\beta)}\phi_{\nu}^r + \\ &+ V_{\beta,\nu}^{(\beta\nu)(\sigma\mu)}\phi_{\beta,\nu}^r - 2V_{,\beta}^{(\mu\nu)(\sigma\beta)}\phi_{\nu}^r + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\sigma}}S_{A\alpha}^{c\mu}g^{ar}u_c. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тензор  $P^{\sigma r}$ , заданный равенством (2.36), называется каноническим тензором энергии–импульса. Заметим, что  $P^{\sigma r}$ , как правило, не является симметричным по индексам  $(\sigma r)$ .

Если поля  $\phi_{\mu\nu}$  и  $u_A$  удовлетворяют уравнениям движения (2.33),  $P^{\sigma r}$  является по первому индексу сохраняющимся, т.е.

$$P_{,\sigma}^{\sigma r} = 0. \quad (2.38)$$

Действительно, выбирая в качестве  $\xi_r = \epsilon_r$ , где  $\epsilon_r$  — постоянный, но произвольный 4-вектор, из (2.34) и (2.35) находим (2.38).

Пусть теперь  $\xi_r = \omega_{r\lambda} x^\lambda$ . Тогда

$$J^\sigma = -\omega_{r\lambda} x^\lambda P^{\sigma r} - \omega_{r\mu} M^{\sigma\mu r},$$

и с учетом (2.38) из (2.34) находим

$$\omega_{r\mu} (P^{\mu r} - P^{r\mu} + M^{\sigma\mu r} - M^{\sigma r\mu}) = 0,$$

т.е.

$$P^{\mu r} - P^{r\mu} = -(M^{\sigma\mu r} - M^{\sigma r\mu}), \quad (2.39)$$

Введем обозначение

$$H^{\mu r\sigma} = M^{\sigma\mu r} - M^{\sigma r\mu}. \quad (2.40)$$

Тогда (2.39) примет вид

$$P^{\mu r} - P^{r\mu} = -H^{\mu r\sigma}. \quad (2.41)$$

Заметим, что (см. (2.40))

$$H^{\mu r\sigma} = -H^{r\mu\sigma}. \quad (2.42)$$

Из (2.41) в силу (2.38) очевидно, что

$$P_{,r}^{\mu r} = -H_{,r,\sigma}^{\mu r\sigma}. \quad (2.43)$$

Следуя Белинфанте, определим тензор  $P_{(B)}^{(\mu r)}$ , полагая

$$P_{(B)}^{(\mu r)} = P^{\mu r} + \frac{1}{2}(H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma} - H^{\sigma r\mu}),_{\sigma}. \quad (2.44)$$

Докажем, что таким образом определенный тензор  $P_{(B)}^{(\mu r)}$  симметричен. Действительно, рассмотрим разность

$$P_{(B)}^{(\mu r)} - P_{(B)}^{(r\mu)} = P^{\mu r} - P^{r\mu} + \frac{1}{2}(H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma} - H^{\sigma r\mu} - H^{r\sigma\mu} - H^{r\mu\sigma} + H^{\sigma\mu r}).$$

Учитывая свойства антисимметрии (2.42), найдем

$$P_{(B)}^{(\mu r)} - P_{(B)}^{(r\mu)} = P^{\mu r} - P^{r\mu} + H_{,\sigma}^{\mu r\sigma}.$$

Последнее выражение в силу (2.41) тождественно равно нулю. Этим доказательство симметричности тензора Белинфанте  $P_{(B)}^{(\mu r)}$  завершается.

Теперь покажем, что

$$P_{(\mu)}^{\mu r} = P_{(B),\mu}^{(\mu r)} = 0. \quad (2.45)$$

Рассмотрим сначала  $P_{(B),\mu}^{(\mu r)}$ :

$$P_{(\mu)}^{\mu r} = P^{\mu r} + \frac{1}{2}(H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma} - H^{\sigma r\mu}),_{\sigma,\mu} = 0.$$

Здесь мы также воспользовались свойством (2.42) и законом сохранения канонического тензора  $P^{\mu r}$  (см. (2.38)). Аналогично:

$$\begin{aligned}
P_{(B),r}^{(\mu,r)} &= P_{,r}^{\mu r} + \frac{1}{2} (H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma} - H^{\sigma r\mu}),_{\sigma,r} = \\
&= P_{,r}^{\mu r} + \frac{1}{2} (H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma}),_{\sigma,r} = P_{,r}^{\mu r} + H^{\mu\sigma r},_{\sigma,r}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение тождественно равно нулю в силу (2.43).

Построенный Белинфантен тензор  $P_{(B)}^{(ur)}$  (в отличие от канонического тензора (2.36), который, вообще говоря, не является симметричным) обладает всеми требуемыми свойствами, предъявляемыми к тензору энергии-импульса и является хорошим кандидатом для того, чтобы быть взятым в качестве тензора энергии-импульса материи.

После несложных, но громоздких вычислений на основе формул (2.37) и (2.40) найдем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (H^{\mu\sigma r} + H^{\mu r\sigma} - H^{\sigma r\mu}),_{\sigma} &= [V^{(\mu\sigma)(\sigma\beta)} \phi_{\nu,\beta}^r - V^{(\mu\nu)(\sigma\beta)} \phi_{\nu,\beta}^r - V^{(r\nu)(\sigma\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} - \\
&- V^{(\beta\nu)(\sigma r)} \phi_{\beta\nu,\beta}^{\mu} + V^{(r\nu)(\sigma\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} + V^{(\mu\nu)(\beta r)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma} + V^{(\beta\nu)(\mu r)} \phi_{\beta\nu,\beta}^{\sigma} - V^{(\mu\nu)(r\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma} - \\
&- V^{(\sigma\nu)(r\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} + V^{(\sigma\nu)(r\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} - V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^r + V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma} + V^{(r\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma} - \\
&- V^{(r\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma} + R^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta,\alpha}^r - R^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha}^r + R^{(\mu\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^r - \\
&- R^{(r\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta,\alpha}^{\mu} - 2R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu,\beta,\alpha}^{\mu} + R^{(r\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha}^{\mu} - R^{(r\nu)(\sigma\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} + \\
&+ R^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta,\alpha}^{\sigma} + 2R^{(\alpha\nu)(r\mu\beta)} \phi_{\alpha\nu,\beta,\beta}^{\sigma} - R^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha}^{\sigma} - R^{(\alpha\nu)(\beta\mu)} \phi_{\alpha\nu,\beta}^{\sigma} + \\
&+ R^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta,\alpha}^{\sigma} - R^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha,\beta}^{\mu} + R^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} + R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu,\beta}^{\mu} - \\
&- R^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^{\mu} - R^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha,\beta}^r + R^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha}^r - R^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^r + \\
&+ R^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha,\beta}^{\sigma} - R^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\alpha}^{\sigma} + R^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu,\beta}^{\sigma}],_{\sigma} + \\
&+ \frac{1}{2} [u_C (\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{C\mu} \gamma^{a\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{C\sigma} \gamma^{a\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{C\mu} \gamma^{a\sigma} - \\
&- \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{Cr} \gamma^{a\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{C\sigma} \gamma^{a\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_r}} S_{Aa}^{Cr} \gamma^{a\sigma})],_{\sigma}. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание в (2.30) уравнение движения для полей  $u_A$ , найдем:

$$\begin{aligned}
 & [u_C \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A\sigma}} S_{Aa\gamma}^{C\mu} u^\tau - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A\tau}} S_{Aa\gamma}^{C\mu} u^\sigma \right)]_{,\sigma} = -2V^{(\mu\nu)(\alpha\beta)} \phi_{\nu,a,\beta}^r + \\
 & + 2V^{(\nu\lambda)(\alpha\beta)} \phi_{\nu,a,\beta}^\mu - 2V^{(\beta\nu)(\alpha\mu)} \phi_{\beta\nu,a}^r + 2V^{(\beta\nu)(\alpha\tau)} \phi_{\beta\nu,a,\mu}^r - \\
 & - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A\mu}} u_{A\tau}^r + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A\tau}} u_{A\mu}^r. \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Подставляя в (2.44) выражение для канонического тензора (2.36) и (2.46), а также учитывая (2.29) и (2.47), найдем окончательный вид тензора Беллинфанте, обладающего явной симметрией по индексам ( $\mu\nu$ ):

$$\begin{aligned}
 P^{(\mu\nu)}_{(B)} = & -V^{\mu\tau} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M) + V^{(\beta\nu)(\alpha\mu)} \phi_{\beta\nu,a}^r + V^{(\beta\nu)(\alpha\tau)} \phi_{\beta\nu,a,\mu}^r - \\
 & - V^{(\beta\nu)(\alpha\mu)} \phi_{\beta\nu,a}^r - V^{(\beta\nu)(\alpha\tau)} \phi_{\beta\nu,a,\mu}^r - V^{(\beta\nu)(\alpha\sigma)} \phi_{\beta\nu,a,\sigma}^r - V^{(\beta\nu)(\alpha\mu)} \phi_{\beta\nu,a,\sigma}^r + \\
 & + V^{(\mu\nu)(\beta\tau)} \phi_{\nu,\beta}^\sigma + V^{(\nu\lambda)(\beta\mu)} \phi_{\nu,\beta}^\sigma + V^{(\beta\nu)(\mu\tau)} \phi_{\beta\nu,\sigma}^\sigma + V^{(\beta\nu)(\mu\tau)} \phi_{\beta\nu,\sigma}^\sigma - \\
 & - V^{(\mu\nu)(\beta\tau)} \phi_{\nu,\beta}^\alpha - V^{(\nu\lambda)(\beta\mu)} \phi_{\nu,\beta}^\alpha - V^{(\mu\nu)(\beta\tau)} \phi_{\nu,\sigma}^\alpha - V^{(\nu\lambda)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^\alpha - \\
 & - V^{(\sigma\nu)(\tau\beta)} \phi_{\nu,\beta}^\mu - V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^\mu - V^{(\sigma\nu)(\tau\beta)} \phi_{\nu,\beta,\sigma}^\mu - V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta,\sigma}^\mu + \\
 & + V^{(\sigma\nu)(\tau\beta)} \phi_{\nu,\beta}^\mu + V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\beta}^\mu + V^{(\sigma\nu)(\tau\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^\mu + V^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^\mu - \\
 & - R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\mu)}_{,\beta} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\beta}^r - R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\tau)}_{,\beta} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\beta}^\mu + R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\mu)}_{,\sigma,\beta} \phi_{\alpha\nu,\beta}^r + \\
 & + R^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\tau)}_{,\sigma,\beta} \phi_{\alpha\nu,\beta}^\mu + R^{(\mu\nu)(\tau\beta\alpha)}_{,\sigma} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma + R^{(\nu\lambda)(\mu\beta\alpha)}_{,\sigma} \phi_{\nu,\sigma,\beta}^\sigma + \\
 & + R^{(\mu\nu)(\alpha\beta\tau)}_{,\nu,\sigma,\alpha,\beta} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma + R^{(\nu\lambda)(\mu\beta\alpha)}_{,\nu,\sigma,\alpha,\beta} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma + 2R^{(\alpha\nu)(\mu\tau\beta)}_{,\sigma} \phi_{\alpha\nu,\beta,\sigma}^\sigma + \\
 & + 2R^{(\alpha\nu)(\tau\mu\beta)}_{,\alpha\nu,\beta,\sigma} \phi_{\alpha\nu,\beta,\sigma}^\sigma - R^{(\mu\nu)(\tau\beta\alpha)}_{,\sigma,\beta} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma - R^{(\nu\lambda)(\mu\alpha\beta)}_{,\nu,\sigma,\alpha} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma - \\
 & - R^{(\mu\nu)(\tau\beta\alpha)}_{,\nu,\sigma,\alpha} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma - R^{(\nu\lambda)(\mu\beta\alpha)}_{,\nu,\sigma,\alpha,\beta} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma - R^{(\alpha\nu)(\tau\mu\beta)}_{,\sigma,\beta} \phi_{\alpha\nu,\beta,\sigma}^\sigma - \\
 & - R^{(\alpha\nu)(\tau\mu\beta)}_{,\nu,\beta,\sigma} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\beta}^\sigma + R^{(\mu\nu)(\tau\alpha\beta)}_{,\alpha,\sigma,\beta} \phi_{\nu,\sigma,\alpha,\beta}^\sigma + R^{(\nu\lambda)(\alpha\beta\mu)}_{,\nu,\alpha,\beta} \phi_{\nu,\alpha,\beta,\sigma}^\sigma +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + R_{,a,\beta}^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\sigma}^\alpha + R_{,a,\beta}^{(\nu\mu)(\alpha\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^\alpha - R_{,\sigma}^{(\sigma\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu,a,\beta}^\mu - \\
& - R_{,\sigma}^{(\sigma\nu)(\mu\alpha\beta)} \phi_{\nu,a,\beta}^r - R_{,\sigma}^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\sigma,a,\beta}^\mu - R_{,\sigma}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu,\sigma,a,\beta}^r + \\
& + R_{,\sigma,\beta}^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu,\sigma}^\mu + R_{,\sigma,\beta}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu,a}^\mu + R_{,\beta}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta r)} \phi_{\nu,a,\sigma}^\mu + \\
& + R_{,\beta}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu,a,\sigma}^r - R_{,\sigma,a,\beta,\sigma}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta r)} \phi_{\nu}^\mu - R_{,\sigma,a,\beta,\sigma}^{(\sigma\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu}^r - \\
& - R_{,\sigma,\beta}^{(\sigma\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^\mu - R_{,\sigma,\beta}^{(\sigma\nu)(\mu\alpha\beta)} \phi_{\nu,\sigma}^r - \frac{1}{2} R_{,\sigma}^{(\alpha\nu)(\sigma\beta\mu)} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\beta,\sigma}^r - \\
& - \frac{1}{2} R_{,\sigma}^{(\alpha\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu,\sigma,\beta,\sigma}^\mu + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} u_{A,\mu}^r + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,r}} u_{A,\mu}^\mu \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ u_C \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,r}} S_{Aa}^{C\mu} \gamma^{a\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} S_{Aa}^{Cr} \gamma^{a\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,r}} S_{Aa}^{Cs} \gamma^{a\mu} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} S_{Aa}^{Cs} \gamma^{a,r} \right) \right]_{,\sigma}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

### 3. СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПО ГИЛЬБЕРТУ

Метод Гильберта основан на применении общекоординатного преобразования (2.1). Следуя Гильберту, будем исходить из действия (1.2), записанного в криволинейных координатах. Так как при общекоординатном преобразовании (2.1) метрический тензор  $u_{\mu\nu}$  уже не остается постоянным, необходимо найти индуцированные и линейские вариации метрики  $u_{\mu\nu}$  и ее частных производных. Используя тензорный закон преобразования  $u_{\mu\nu}$ , совершенно аналогично тому, как это было сделано в разд. 2, найдем:

$$\Delta_S \gamma^{\mu\nu} = \xi_{,a}^\mu \gamma^{a\nu} + \xi_{,a}^\nu \gamma^{a\mu}; \tag{3.1}$$

$$\Delta_S \gamma_{\mu\nu} = -\xi_{,\mu}^\alpha \gamma_{a\nu} - \xi_{,\nu}^\alpha \gamma_{a\mu}; \tag{3.2}$$

$$\Delta_S \gamma_{\mu\nu,a}^{\mu\nu} = (\Delta_S \gamma_{\mu\nu})_{,a} - \xi_{,a}^\beta \gamma_{\mu\nu,\beta}^{\mu\nu}; \tag{3.2}$$

$$\Delta_S \gamma_{,a,\beta}^{\mu\nu} = (\Delta_S \gamma_{,a}^{\mu\nu})_{,\beta} - \xi_{,\beta}^\sigma \gamma_{,a,\sigma}^{\mu\nu}; \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta_S \gamma_{\mu\nu, a, \beta} &= (\Delta_S \gamma_{\mu\nu, a})_{, \beta} - \xi_{, \beta}^{\sigma} \gamma_{\mu\nu, a, \sigma}; \\ \Delta_S \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu} &= (\Delta_S \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu})_{, \sigma} - \xi_{, \sigma}^{\tau} \gamma_{, a, \beta, \tau}^{\mu\nu} \quad \text{и т.д.} \end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\Delta_L \gamma^{\mu\nu} = \xi_{, a}^{\mu} \gamma^{\alpha\nu} + \xi_{, a}^{\nu} \gamma^{\alpha\mu} - \xi_{, \sigma}^{\sigma} \gamma_{, \sigma}^{\mu\nu}; \quad (3.5)$$

$$\Delta_L (\gamma_{, a}^{\mu\nu}) = (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{, a}; \quad \Delta_L (\gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu}) = (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{, a, \beta} \quad \text{и т.д.} \quad (3.6)$$

Наконец, выпишем связи между вариациями  $\Delta_S$  и  $\Delta_L$ :

$$\Delta_S \gamma^{\mu\nu} = \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \xi_{, a}^{\alpha} \gamma_{, a}^{\mu\nu}; \quad (3.7)$$

$$\Delta_S \gamma_{, a}^{\mu\nu} = (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{, a} + \xi_{, a, \beta}^{\beta} \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu};$$

$$\Delta_S \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu} = (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{, a, \beta} + \xi_{, a, \beta, \sigma}^{\sigma} \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu} \quad \text{и т.д.}$$

При общекоординатном преобразовании (2.1) в первом порядке по  $\xi^a$ :

$$d^4 y' = d^4 y (1 + \xi_{, a}^a),$$

а

$$\begin{aligned}\Lambda(\gamma_{, a}^{\mu\nu}; \gamma_{, a}^{\nu\mu}; \dots \phi_{\mu\nu}^{\sigma}; \dots u_{A, a}^{\sigma}) &= \Lambda(\gamma^{\mu\nu}; \gamma_{, a}^{\mu\nu}; \dots \phi_{\mu\nu}^{\sigma}; \dots u_{A, a}^{\sigma}) + \\ &+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \Delta_S \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a}^{\mu\nu}} \Delta_S \gamma_{, a}^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu}} \Delta_S \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu}} \Delta_S \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu}^{\sigma}} \Delta_S \phi_{\mu\nu}^{\sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a}^{\sigma}} \Delta_S \phi_{\mu\nu, a}^{\sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta}^{\sigma}} \Delta_S \phi_{\mu\nu, a, \beta}^{\sigma} + \\ &+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta, \sigma}^{\sigma}} \Delta_S \phi_{\mu\nu, a, \beta, \sigma}^{\sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_A^{\sigma}} \Delta_S u_A^{\sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{A, a}^{\sigma}} \Delta_S u_{A, a}^{\sigma}\end{aligned}$$

и поэтому условие инвариантности действия (1.2) запишется в виде

$$\begin{aligned}\int d^4 y [\xi_{, a}^a \Lambda + \xi^a \Lambda_{, a} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a}^{\mu\nu}} (\Delta_L \gamma_{, a}^{\mu\nu}) + \\ + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu}} (\Delta_L \gamma_{, a, \beta}^{\mu\nu}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu}} (\Delta_L \gamma_{, a, \beta, \sigma}^{\mu\nu}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu}^{\sigma}} \Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\sigma} + \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta} + \\
& + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta, \sigma}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta, \sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{A, a}} (\Delta_L u_A)_{,a} = 0.
\end{aligned}$$

В силу произвольности  $\gamma$  отсюда находим:

$$\begin{aligned}
& (\xi^a \Lambda)_{,a} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a, \beta}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a, \beta} + \\
& + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a, \beta, \sigma}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a, \beta, \sigma} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu}} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + \\
& + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta, \sigma}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta, \sigma} + \\
& + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{A, a}} (\Delta_L u_A)_{,a} = 0. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Тождество (3.8) является необходимым и достаточным условием инвариантности действия  $\int \Lambda d^4y$  относительно преобразования (2.1). Однако инвариантными относительно общекоординатного преобразования (2.1) должны быть величины  $\int \Lambda_g d^4y$  и  $\int \Lambda_M d^4y$ . Поэтому применяя метод Э.Нетер для интегралов  $\int d^4y \Lambda_g$  и  $\int d^4y \Lambda_M$  по отдельности найдем:

$$\begin{aligned}
& (\xi^a \Lambda_g)_{,a} + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a} + \\
& + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a, \beta}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a, \beta} + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a, \beta, \sigma}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a, \beta, \sigma} + \\
& + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\nu}} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\nu, a}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a} + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta} + \\
& + \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\nu, a, \beta, \sigma}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,a, \beta, \sigma} = 0; \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$(\xi^a \Lambda_M)_{,a} + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{,a}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,a} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial y^{\mu\nu}} (\Delta_L y^{\mu\nu})_{,\alpha,\beta} + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \phi_{\mu\nu}} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \phi_{\mu\nu,\alpha}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\alpha} + \\
& + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \phi_{\mu\nu,\alpha,\beta}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu})_{,\alpha,\beta} + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial u_A} \Delta_L u_A + \frac{\partial \Lambda_M}{\partial u_{A,\alpha}} (\Delta_L u_A)_{,\alpha} = 0. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Хотя из (3.9) и (3.10) следует (3.8), последнее, т.е. (3.8), мы выписали из-за того, что на его основе удобно получить законы сохранения и связь между каноническим тензором энергии-импульса и тензором Гильберта. Учитывая разложения  $\Delta_L$  (!) вариации по параметру  $\xi^\alpha$  (см. формулы (2.14) – (2.15) и (3.5) – (3.6)), запишем (3.9) в виде

$$\begin{aligned}
& \xi^\alpha_{,\alpha} \Lambda_g + \xi^\nu_{,\beta} [2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu} + 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha} - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\sigma}} y^{\mu\sigma}_{,\nu} + \\
& + 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha,\sigma} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\sigma}} y^{\mu\sigma}_{,\sigma,\beta} + 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\sigma,\tau,\alpha} - \\
& - 3 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\alpha}} y^{\mu\alpha}_{,\nu,\sigma,\tau} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta}} \phi_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha}} \phi_{\mu\nu,\alpha} - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\alpha,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\nu} - \\
& - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\sigma,\tau}} \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\sigma,\beta,\tau}} \phi_{\mu\sigma,\nu,\tau} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\sigma,\tau,\alpha}} \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau,\alpha} - \\
& - 3 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\nu,\beta,\alpha,\tau}} \phi_{\mu\sigma,\nu,\tau,\alpha} ] + \xi^\nu_{,\alpha,\beta} [2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha} + 4 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha,\sigma} - \\
& - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\sigma}} y^{\mu\sigma}_{,\nu,\alpha,\beta} + 6 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha,\sigma,\tau} - 3 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\sigma}} y^{\mu\sigma}_{,\nu,\beta,\tau} - \\
& - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha}} \phi_{\mu\nu} - 4 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\sigma,\alpha}} \phi_{\mu\nu,\sigma} - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\sigma,\alpha,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\nu} - \\
& - 6 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha,\sigma,\tau}} \phi_{\mu\nu,\sigma,\tau} - 3 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\sigma,\alpha,\beta,\tau}} \phi_{\mu\sigma,\tau,\nu} ] + \\
& + \xi^\nu_{,\alpha,\beta,\sigma} [2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha,\sigma} + 6 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu}_{,\alpha,\sigma,\tau} - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial y^{\mu\tau}} y^{\mu\tau}_{,\nu,\alpha,\beta,\sigma} - 
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma}} \phi_{\mu\nu} - 6 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma, r}} \phi_{\mu\nu, r} - \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu r, a, \beta, \sigma}} \phi_{\mu r, \nu} \} + \\
& + \xi_{, a, \beta, \sigma, r}^{\nu} [2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, \sigma, r}} \gamma^{\beta\mu} - 2 \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma, r}} \phi_{\mu\nu}] \equiv 0. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \frac{\partial (\sqrt{-\gamma} \mathcal{L}_g)}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \sqrt{-\gamma} \mathcal{L}_g + \sqrt{-\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}},$$

в силу произвольности величин  $\xi^{\nu}$ ;  $\xi_{, a}^{\nu}$ ;  $\xi_{, a, \beta}^{\nu}$ ;  $\xi_{, a, \beta, \sigma}^{\nu}$  и  $\xi_{, a, \beta, \sigma, r}^{\nu}$  из (3.11) находим:

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\beta\mu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a}} \gamma^{\mu\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\sigma}_{, \beta}} \gamma^{\mu\sigma}_{, \nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, \sigma}} \gamma^{\beta\mu}_{, \sigma} - \\
& - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\alpha}_{, \sigma, \beta}} \gamma^{\mu\alpha}_{, \nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, r, a}} \gamma^{\mu\beta}_{, \sigma, r} - 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\alpha}_{, \beta, r, \sigma}} \gamma^{\alpha\mu}_{, \nu, \sigma, r} - \\
& - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta}} \phi_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a}} \phi_{\mu\nu, a} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, \beta}} \phi_{\mu\sigma\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma\sigma}} \phi_{\mu\nu, r, \sigma} - \\
& - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, \nu, r}} \phi_{\mu\sigma, \nu, r} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma, r, a}} \phi_{\mu\nu, \sigma, r, a} - 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta, r}} \phi_{\mu\sigma, \nu, r, a} = 0, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi_{(\alpha\beta)} (2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a}} \gamma^{\mu\beta} + 4 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, \alpha, \sigma}} \gamma^{\mu\beta}_{, \sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\sigma}_{, a, \beta}} \gamma^{\mu\sigma}_{, \nu} + 6 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, \sigma, r}} \gamma^{\mu\beta}_{, \sigma, r} - \\
& - 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\sigma}_{, a, \beta, r}} \gamma^{\mu\sigma}_{, \nu, r} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a}} \phi_{\mu\nu} - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma}} \phi_{\mu\nu, \sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta}} \phi_{\mu\sigma, \nu} - \\
& - 6 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma, r}} \phi_{\mu\nu, \sigma, r} - 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta, r}} \phi_{\mu\sigma, r, \nu}) = 0. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi_{(\alpha\beta\sigma)} (2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, \sigma}} \gamma^{\beta\mu} + 6 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\nu}_{, a, \sigma, r}} \gamma^{\mu\beta}_{, r} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma^{\mu\tau}_{, a, \beta, \sigma}} \gamma^{\mu\tau}_{, \nu} - \\
& - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma}} \phi_{\mu\nu} - 6 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma, r}} \phi_{\mu\nu, r} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu r, a, \beta, \sigma}} \phi_{\mu r, \nu}) = 0, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\Pi_{(\alpha\beta\sigma)}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \gamma_{\alpha,\sigma,\tau}^{\mu\nu}}\gamma^{\mu\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha,\sigma,\tau}}\phi_{\mu\nu}\right) = 0. \quad (3.15)$$

В формулах (3.13) – (3.15) и в дальнейшем  $\Pi_{(\alpha\beta\dots)}$  означает сператор симметризации выражений, на которые он действует, по индексам  $(\alpha\beta\dots)$ .

Совершенно аналогично с учетом тождества

$$\frac{\partial \Lambda_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \frac{\partial (\sqrt{-\gamma} \mathcal{L}_M)}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \sqrt{-\gamma} \mathcal{L}_M + \sqrt{-\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}},$$

в силу произвольности параметров  $\xi^{\nu}_{,a}$ ,  $\xi^{\nu}_{,a,\beta}$  и  $\xi^{\nu}_{,a,\beta,\sigma}$  из (3.10) найдем:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\beta} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\beta} - \\ & - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta}} \phi_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha}} \phi_{\mu\nu,\alpha} - \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha,\sigma}} \phi_{\mu\nu,\alpha,\sigma} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma,\alpha,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\alpha,\nu} - \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \xi_{A\nu}^{C\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \xi_{A\nu}^{C\beta} u_{C,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} u_{A,\nu} = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{(\alpha\beta)}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\beta\mu} + 4 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\beta\mu,\alpha}} \phi_{\mu\nu} - \right. \\ & \left. - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha,\sigma}} \phi_{\mu\nu,\sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma,\alpha,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \xi_{A\nu}^{C\beta} u_C\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\Pi_{(\alpha\beta\sigma)}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta,\alpha,\sigma}} \phi_{\mu\nu}\right) = 0. \quad (3.18)$$

Тождества (3.12) – (3.18) являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности величин  $\mathcal{L}_g$  и  $\mathcal{L}_M$  относительно общего единичных преобразований (2.1).

Обратимся теперь к тождеству (3.8) и запишем его в виде

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\delta \Lambda}{\delta \phi_{\mu\nu}} \Delta_L \phi_{\mu\nu} + \frac{\delta \Lambda_M}{\delta u_A} \Delta_L u_A + J_{,\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (3.19)$$

где явно выделены эйлеровы производные лагранжиана по полям  $\phi_{\mu\nu}$  и  $u_A$ . В (3.19) введено обозначение:

$$\begin{aligned}
J^\alpha &= \xi^\alpha \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a}^{\mu\nu}} \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,\alpha,\beta}^{\mu\nu}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,\beta} - \partial_\beta \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta}^{\mu\nu}} \right) \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \\
&+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,\alpha,\beta,\sigma}^{\mu\nu}} (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,\sigma,\beta} - \partial_\beta \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,\alpha,\beta,\sigma}^{\mu\nu}} \right) (\Delta_L \gamma^{\mu\nu})_{,\sigma} + \partial_\beta \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta,\sigma}^{\mu\nu}} \right) \Delta_L \gamma^{\mu\nu} + \\
&+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a}^{\alpha}} \Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\beta}^{\alpha}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\beta} - \partial_\beta \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\beta}^{\alpha}} \right) \Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha} + \\
&+ \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\beta,\sigma}^{\alpha}} (\Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\sigma,\beta} - \partial_\beta \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\beta,\sigma}^{\alpha}} \right) (\Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\sigma} + \\
&+ \partial_\beta \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,\sigma,\beta,a}^{\alpha}} \right) \Delta_L \phi_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{A,a}^{\alpha}} \Delta_L u_{A,a}^{\alpha}. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Учитывая в последнем выражении разложение по параметру  $\xi^\alpha$  вариации Ли  $\Delta_L(\mathbf{!})$ , запишем его в виде

$$J^\alpha = -\xi^\beta (\tilde{P}_\beta^\alpha + K_\beta^\alpha) + \xi^\nu_{,\beta} N_\nu^{\beta a} + \xi^\nu_{,\beta,\sigma} M_\nu^{\beta a\sigma} + \xi^\nu_{,\beta,\sigma,r} \gamma^{\beta a\sigma r}, \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_\beta^\alpha &= -\partial_\beta \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\sigma}^{\alpha}} \phi_{\mu\nu,\sigma,\beta} - \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\sigma}^{\alpha}} \right) \phi_{\mu\nu,\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\sigma,r}^{\alpha}} \phi_{\mu\nu,\beta,\sigma,r} - \\
&- \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\sigma,r}^{\alpha}} \right) \phi_{\mu\nu,\beta,\sigma,r} + \partial_\sigma \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a,\sigma,r}^{\alpha}} \right) \phi_{\mu\nu,\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{A,a}^{\alpha}} u_{A,a}^{\alpha}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_\beta^\alpha &= \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a}^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\nu,\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma}^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\nu,\sigma,\beta} - \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\mu\nu,\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\nu,\beta} - \\
&- \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\mu\nu,\beta,\sigma,r} + \partial_\sigma \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\mu\nu,\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a}^{\alpha}} \phi_{\mu\nu,\beta}; \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\nu^{\beta a} &= 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a}^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\nu,\beta} + 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma}^{\mu\nu}} \gamma^{\mu\nu,\sigma,\beta} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta}^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma,\nu} - 2 \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\beta\mu} + \\
&+ 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \gamma^{\beta\mu,\sigma,r} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta,r}^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma,\nu,r} - 2 \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\mu\beta} + \\
&+ 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \gamma^{\beta\mu,\sigma,r} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta,r}^{\mu\sigma}} \gamma^{\mu\sigma,\nu,r} - 2 \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta,r}^{\mu\nu}} \right) \gamma^{\mu\beta} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,\beta}^{\mu r}} \right) \gamma_{,r}^{\mu r} + 2 \partial_\sigma \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \right) \gamma_{,r}^{\beta\mu} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\nu,a}} \phi_{\mu\nu} - \\
& - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma}} \phi_{\mu\nu,\sigma} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\sigma,a,\beta}} \phi_{\mu\sigma,\nu} + 2 \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma}} \right) \phi_{\mu\nu} - \\
& - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,a,\sigma,r}} \phi_{\mu\nu,\sigma,r} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\sigma,a,\beta,r}} \phi_{\mu\sigma,\nu,r} + 2 \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta,a,\sigma,r}} \right) \phi_{\mu\nu,r} + \\
& + \partial_\sigma \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu r,a,\beta,\sigma}} \right) \phi_{\mu r,\nu} - 2 \partial_\sigma \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma,r}} \right) \phi_{\mu\nu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{,a,\alpha}} S_{,a\nu}^{\alpha\beta} u_c, \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{,v}^{\beta\alpha\sigma} = & 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma}^{\mu\nu}} \gamma_{,r}^{\beta\mu} + 4 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \gamma_{,r}^{\beta\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\beta,\sigma}^{\mu r}} \gamma_{,r}^{\mu r} - \\
& - 2 \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,r,\sigma}^{\mu\nu}} \right) \gamma_{,r}^{\beta\mu} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\beta\mu,a,\sigma}} \phi_{\mu\nu} - 4 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma,r}} \phi_{\mu\nu,r} - \\
& - \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu r,a,\beta,\sigma}} \phi_{\mu r,\nu} + 2 \partial_r \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma,r}} \right) \phi_{\mu\nu}. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$Y_{,v}^{\beta\alpha\sigma r} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{,a,\sigma,r}^{\mu\nu}} \gamma_{,r}^{\beta\mu} - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\mu\beta,a,\sigma,r}} \phi_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Предположим, что поля  $\phi_{\mu\nu}$  и  $u_A$  удовлетворяют уравнениям движения Эйлера-Лагранжа. Тогда (3.19) примет вид

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta y^{\mu\nu}} \Delta_L y^{\mu\nu} + J_{,a}^a = 0. \quad (3.27)$$

Подставляя в это выражение (3.5) и (3.21) и учитывая произвольность параметров  $\xi_{,a}^\nu$ ,  $\xi_{,a,\beta}^\nu$ ,  $\xi_{,a,\beta,\sigma}^\nu$  и  $\xi_{,a,\beta,\sigma,r}^\nu$ , найдем:

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta y^{\mu\sigma}} \gamma_{,v}^{\mu\sigma} + \tilde{K}_{,v}^a + K_{,v,a}^a = 0, \quad (3.28)$$

$$2 \frac{\delta \Lambda}{\delta y^{\mu\nu}} \gamma_{,r}^{\beta\mu} - \tilde{K}_{,v}^\beta - K_{,v}^\beta + N_{,v,a}^{\beta a} = 0, \quad (3.29)$$

$$\Pi_{(\alpha\beta)} (N_{,v}^{\beta a} + M_{,v,\sigma}^{\beta\alpha\sigma}) = 0, \quad (3.30)$$

$$\Pi_{(\alpha\beta\sigma)}(M_{\nu}^{\beta\alpha\sigma} + Y_{\nu,\Gamma}^{\beta\Gamma\alpha\sigma}) = 0, \quad (3.31)$$

$$\Pi_{(\alpha\beta\sigma\tau)} Y_{\nu}^{\beta\alpha\sigma\tau} = 0. \quad (3.32)$$

Теперь следует вернуться к декартовой системе координат. Это означает, что во всех формулах, полученных в этом разделе, все производные от метрического тензора  $y^{\mu\nu}$  надо положить равными нулю. При этом, очевидно, выражения типа  $\partial\Lambda/\partial y^{\mu\nu}$ ,  $\partial\Lambda/\partial y^{\mu\nu}_{,\sigma\tau}$  и т.д. сначала надо вычислять в криволинейных координатах, а уже потом приравнять к нулю производные метрического тензора.

Заметим, что в декартовой системе координат  $K_{\nu}^{\alpha} = 0$ . Действительно из (3.23) видно, что все члены в правой части, кроме последнего, умножаются на производные метрического тензора и поэтому вклада не дают. Что касается члена  $\phi_{\mu\nu,\beta} \partial\Lambda/\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}$ , то в силу структуры  $\Lambda$ , которая зависит от  $\phi_{\mu\nu,\alpha}$  только через ковариантные производные второго и третьего порядка, он может быть записан в виде

$$\phi_{\mu\nu,\beta} \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}} = \phi_{\mu\nu,\beta} \left( \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau;\kappa}} \frac{\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau;\kappa}}{\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau}} \frac{\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau}}{\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}} \right).$$

Так как  $\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau;\kappa}/\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}$  и  $\partial\phi_{\lambda\omega;\sigma;\tau}/\partial\phi_{\mu\nu,\alpha}$  оба пропорциональны производным метрического тензора, то в декартовой системе координат они тождественно равны нулю. Этим утверждение доказано.

Таким образом, из (3.28) и (3.29) находим

$$\tilde{P}_{\nu,\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.33)$$

и

$$2 \frac{\delta\Lambda}{\delta y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu} - \tilde{P}_{\nu}^{\beta} + N_{\nu,\alpha}^{\beta\alpha} = 0. \quad (3.34)$$

Остальные соотношения (3.30) – (3.32) в дальнейшем нам не понадобятся и поэтому сосредоточим наше внимание только на величинах, входящих в формулы (3.33) и (3.34). Выражение

$$2 \frac{\delta\Lambda}{\delta y^{\mu\nu}} y^{\beta\mu} = T_{(\Gamma)\nu}^{\beta} = y_{\nu,\alpha} T_{(\Gamma)}^{\alpha\beta} \quad (3.35)$$

называют тензором энергии-импульса Гильберта. Из (3.35) легко заметить, что  $T_{(\Gamma)}^{\alpha\beta}$  является симметричным тензором по своим индексам.

В декартовой системе координат величина  $\tilde{P}^{\alpha\tau} = y^{\tau\beta} \tilde{P}_{\beta}^{\alpha}$  будет совпадать с каноническим тензором энергии-импульса (2.36), а  $N_{\nu}^{\beta\alpha}$  примет вид

$$N_{\nu}^{\beta\alpha} = 2 \frac{\delta\Lambda_m}{\delta y^{\mu\nu}_{,\alpha}} y^{\mu\beta} + 2 \frac{\delta\Lambda_g}{\delta y^{\mu\nu}_{,\alpha}} y^{\beta\mu} - 2 \partial_{\sigma} \left( \frac{\delta\Lambda_m}{\delta y^{\mu\nu}} \right) y^{\beta\mu} - 2 \partial_{\sigma} \left( \frac{\delta\Lambda_g}{\delta y^{\mu\nu}} \right) y^{\beta\mu} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \partial_{\sigma} \partial_{\tau} \left( \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma_{\sigma, \alpha, \beta, \tau}^{\mu \nu}} \right) \gamma^{\mu \beta} - 2 V^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu, \sigma} - V^{(\mu \sigma)(\alpha \beta)} \phi_{\mu \sigma, \nu} + \\
& + 2 V^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu} - 2 R^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu, \sigma, \tau} - 2 R^{(\mu \sigma)(\alpha \beta \tau)} \phi_{\mu \sigma, \nu, \tau} + \\
& + 2 R_{, \sigma}^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu, \tau} + R_{, \tau}^{(\mu \sigma)(\alpha \beta \tau)} \phi_{\mu \sigma, \nu} - 2 R_{, \sigma, \tau}^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} S_{A, \nu}^{C \beta} u_C. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Принятая нами ранее (см. разд. 1) структура  $\Lambda_g$  и  $\Lambda_M$  дает возможность выразить производные  $\Lambda_g$  и  $\Lambda_M$  по производным метрического тензора через производные величин  $\Lambda_g$  и  $\Lambda_M$  по производным полем  $\phi_{\mu \nu}$  и  $u_A$ . Действительно, так как лагранжиан  $\Lambda_g$  составлен только из ковариантных производных третьего порядка поля  $\phi_{\mu \nu}$ , то он будет зависеть от  $\gamma_{\sigma, \alpha, \beta}^{\mu \nu}$  и  $\gamma_{\alpha, \beta, \sigma}^{\mu \nu}$  только через  $\phi_{\mu \nu}$  и  $\phi_{\mu \sigma}$ . Опуская простые, но длинные выкладки, выпишем окончательные соотношения:

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu \beta} \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma_{\sigma, \alpha}^{\mu \nu}} & = \frac{3}{2} [ R^{(\sigma \beta)(\alpha \tau \lambda)} \phi_{\sigma \nu, \tau, \lambda} + R^{(\lambda \sigma)(\tau \mu \alpha)} \gamma_{\lambda \nu} \phi_{\sigma, \tau, \mu}^{\beta} + R^{(\lambda \sigma)(\alpha \beta \tau)} \phi_{\lambda \sigma, \tau, \mu}^{\beta} + \\
& + R^{(\lambda \sigma)(\alpha \tau \mu)} \gamma_{\mu \nu} \phi_{\lambda \sigma, \tau, \nu}^{\beta} + R^{(\alpha \sigma)(\beta \tau \lambda)} \phi_{\nu \sigma, \tau, \lambda} + R^{(\alpha \tau)(\lambda \tau \mu)} \gamma_{\mu \nu} \phi_{\sigma, \lambda, \tau}^{\beta} - \\
& - R^{(\sigma \beta)(\tau \mu \lambda)} \gamma_{\tau \nu} \phi_{\sigma, \lambda, \mu}^{\alpha} - R^{(\lambda \sigma)(\beta \tau \mu)} \gamma_{\lambda \nu} \phi_{\sigma, \tau, \mu}^{\alpha} - R^{(\lambda \sigma)(\beta \tau \mu)} \gamma_{\tau \nu} \phi_{\lambda \sigma, \mu}^{\alpha} ]; \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu \beta} \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma_{\sigma, \alpha, \sigma}^{\mu \nu}} & = \frac{1}{4} [ 3 ( R^{(\alpha \tau)(\beta \sigma \mu)} + R^{(\sigma \tau)(\alpha \beta \mu)} ) \phi_{\tau \nu, \mu} + 3 \gamma_{\tau \nu} ( R^{(\alpha \mu)(\sigma \tau \lambda)} + \\
& + R^{(\mu \sigma)(\alpha \lambda \tau)} \phi_{\mu, \lambda}^{\beta} + 6 R^{(\lambda \beta)(\alpha \sigma \tau)} \phi_{\nu, \lambda, \tau}^{\beta} + 6 \gamma_{\lambda \nu} R^{(\lambda \mu)(\alpha \sigma \tau)} \phi_{\mu, \tau}^{\beta} + \\
& + 2 R^{(\lambda \mu)(\alpha \beta \sigma)} \phi_{\lambda, \mu, \nu}^{\beta} + 2 \gamma_{\tau \nu} R^{(\mu \lambda)(\alpha \sigma \tau)} \phi_{\mu, \lambda, \tau}^{\beta} - 3 \gamma_{\mu \nu} R^{(\mu \lambda)(\beta \sigma \tau)} \phi_{\lambda, \tau}^{\alpha} - \\
& - 3 \gamma_{\tau \nu} R^{(\mu \beta)(\sigma \tau \lambda)} \phi_{\mu, \lambda}^{\alpha} - \gamma_{\tau \nu} R^{(\mu \lambda)(\beta \sigma \tau)} \phi_{\mu, \lambda, \tau}^{\alpha} - 3 \gamma_{\mu \nu} R^{(\mu \tau)(\alpha \beta \lambda)} \phi_{\tau, \lambda}^{\sigma} - \\
& - 3 \gamma_{\tau \nu} R^{(\beta \mu)(\alpha \tau \lambda)} \phi_{\mu, \lambda}^{\sigma} - \gamma_{\mu \nu} R^{(\tau \lambda)(\alpha \beta \mu)} \phi_{\tau, \lambda}^{\beta} ]; \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu \beta} \frac{\partial \Lambda_g}{\partial \gamma_{\sigma, \alpha, \sigma, \tau}^{\mu \nu}} & = \frac{1}{6} [ ( R^{(\alpha \mu)(\sigma \beta \tau)} + R^{(\sigma \mu)(\alpha \beta \tau)} + R^{(\tau \mu)(\alpha \beta \sigma)} ) \phi_{\mu \nu} + \\
& + \gamma_{\lambda \nu} ( R^{(\alpha \mu)(\lambda \sigma \tau)} + R^{(\sigma \mu)(\alpha \tau \lambda)} + R^{(\tau \mu)(\alpha \sigma \lambda)} ) \phi_{\mu}^{\beta} + 3 R^{(\mu \beta)(\alpha \sigma \tau)} \phi_{\mu \nu} + 
\end{aligned}$$

$$+ 3\gamma_{\mu\nu} R^{(\mu\lambda)(\alpha\sigma r)} \phi_{\lambda}^{\beta} - \gamma_{\mu\nu} (\phi_{\lambda}^{\alpha} R^{(\mu\lambda)(\beta\sigma r)} + \phi_{\lambda}^{\sigma} R^{(\mu\lambda)(\alpha\beta r)} + \\ + \phi_{\lambda}^{\tau} R^{(\mu\lambda)(\alpha\beta\sigma)} - \gamma_{\lambda\nu} (\phi_{\mu}^{\alpha} R^{(\mu\beta)(\lambda\sigma r)} + \phi_{\mu}^{\sigma} R^{(\beta\mu)(\lambda\alpha r)} + \phi_{\mu}^{\tau} R^{(\beta\mu)(\alpha\sigma\lambda)})). \quad (3.39)$$

Аналогично, так как  $\Lambda_M$  зависит от  $\gamma_{\mu\nu}^a$ ,  $\gamma_{\alpha\sigma\tau}^{\mu\nu}$  только через ковариантные производные поля  $\phi_{\mu\nu}^a$  второго порядка и ковариантные производные поля  $u_A$  первого порядка, найдем:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\beta} \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \gamma_{\alpha\sigma}^{\mu\nu}} = & V^{(\sigma\beta)(\alpha r)} \phi_{\sigma\nu, r}^{\beta} + \gamma_{\mu\nu} V^{(\alpha\sigma)(\lambda\alpha r)} \phi_{\sigma, r}^{\beta} + \frac{1}{2} V^{(\mu\sigma)(\alpha\beta)} \phi_{\mu\sigma, \nu}^{\beta} + \\ + \frac{1}{2} V^{(\mu\alpha)(\lambda r)} \gamma_{\nu r} \phi_{\mu\sigma}^{\beta} + & V^{(\alpha\sigma)(\beta r)} \phi_{\nu\sigma, r}^{\beta} + \gamma_{r\nu} V^{(\alpha\sigma)(r\mu)} \phi_{\sigma, \mu}^{\beta} - \\ - V^{(\beta\sigma)(r\mu)} \gamma_{r\nu} \phi_{\sigma, \mu}^{\alpha} - & \gamma_{r\nu} V^{(\tau\sigma)(\mu\beta)} \phi_{\sigma, \mu}^{\alpha} - \\ - \frac{1}{2} V^{(\sigma\mu)(r\beta)} \gamma_{r\nu} \phi_{\sigma\mu, r}^{\alpha} + & \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\alpha, \alpha}} S_{A_\alpha}^{B\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\beta, \alpha}} S_{A_\beta}^{Br} \gamma^{\beta\mu} \gamma_{r\nu} \right. + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\alpha, \beta}} S_{A_\alpha}^{Ba} + & \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\beta, r}} S_{A_\beta}^{Ba} \gamma^{\beta\mu} \gamma_{r\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\beta, r}} S_{A_\beta}^{B\beta} \gamma^{\alpha\mu} \gamma_{r\nu} - \\ - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A_\alpha, \beta}} S_{A_\alpha}^{Br} \gamma^{\mu\alpha} \gamma_{r\nu} \left. \right] u_B; \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\beta} \frac{\partial \Lambda_M}{\partial \gamma_{\alpha\sigma}^{\mu\nu}} = & \frac{1}{4} \left( V^{(\alpha r)(\beta\sigma)} + V^{(\sigma r)(\alpha\beta)} \right) \phi_{\nu r}^{\beta} + \frac{1}{2} V^{(\tau\beta)(\alpha\sigma)} \phi_{r\nu}^{\beta} + \\ + \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \left( V^{(\alpha r)(\mu\alpha)} + V^{(\sigma r)(\alpha\mu)} \right) \phi_r^{\beta} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} V^{(\mu r)(\alpha\sigma)} \phi_r^{\beta} - \\ - \frac{1}{4} \gamma_{\mu\nu} \left( V^{(\mu r)(\beta\sigma)} \phi_r^{\alpha} + V^{(\mu r)(\alpha\beta)} \phi_r^{\sigma} \right) - \\ - \frac{1}{4} \gamma_{r\nu} \left( V^{(\beta\mu)(\sigma r)} \phi_{\mu}^{\alpha} + V^{(\beta\mu)(\alpha r)} \phi_{\mu}^{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Подставляя соотношения (3.37) ~ (3.41) в (3.36), после умножения на  $\gamma^{\mu\nu}$  и действия оператором  $\partial_a$  найдем:

$$\begin{aligned}
& (N_{\nu}^{\beta\alpha} \gamma^{\nu\mu})_{,a} = N_{,a}^{\beta\alpha\mu} = [V_{,r}^{(\sigma\mu)(r\beta)} \phi_{\sigma}^a + \\
& + V^{(\sigma\mu)(ar)} \phi_{\sigma,r}^{\beta} - V^{(\sigma\mu)(r\beta)} \phi_{\sigma,r}^a + V^{(\sigma r)(a\mu)} \phi_{\sigma r}^{\beta} - \\
& - V^{(\sigma r)(\mu\beta)} \phi_{\sigma r}^a + V^{(a\alpha)(r\beta)} \phi_{\sigma,r}^{\mu} - V^{(\sigma\beta)(ar)} \phi_{\sigma,r}^{\mu} + \\
& + V^{(a\alpha)(\mu r)} \phi_{\sigma,r}^{\beta} - V^{(\beta\alpha)(r\mu)} \phi_{\sigma,r}^a - V^{(ar)(\alpha\mu)} \phi_{,a}^{\beta} + \\
& + V_{,r}^{(\alpha\beta)(r\mu)} \phi_{,r}^a - V_{,r}^{(\alpha\beta)(\beta r)} \phi_{\sigma}^{\mu} + V_{,r}^{(\sigma\beta)(ar)} \phi_{\sigma}^{\mu} - V_{,r}^{(\sigma\mu)(ar)} \phi_{\sigma}^{\beta} - \\
& - R^{(\sigma\beta)(ar\nu)} \phi_{\sigma,r,\nu}^{\mu} + R^{(\sigma\mu)(ar\nu)} \phi_{\sigma,r,\nu}^{\beta} + 2R^{(\sigma r)(a\mu\nu)} \phi_{\sigma r,\nu}^{\beta} - \\
& - R_{,r}^{(\sigma\mu)(ar\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^{\beta} + R_{,r}^{(\sigma\beta)(ar\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^{\mu} - R_{,r}^{(\sigma r)(a\mu\nu)} \phi_{\sigma r,\nu}^{\beta} - \\
& - R_{,r,\nu}^{(\sigma\beta)(ar\nu)} \phi_{\sigma}^{\mu} + R_{,r,\nu}^{(\sigma\mu)(ar\nu)} \phi_{\sigma}^{\beta} + R^{(\alpha\alpha)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma,r,\nu}^{\mu} + \\
& + R_{,r,\nu,r}^{(\alpha\alpha)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma,\nu,r}^{\beta} - R_{,r,\nu,r}^{(\sigma\beta)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma,\nu,r}^a - R_{,r,\nu,r}^{(\alpha\mu)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma,\nu,r}^a - \\
& - 2R_{,r,\nu,\nu}^{(\sigma r)(\mu\beta\nu)} \phi_{\sigma,\nu,\nu}^a + R_{,r,\nu}^{(\sigma r)(\beta\mu\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^a - R_{,r,\nu}^{(\alpha\alpha)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^{\mu} + \\
& + R_{,r,\nu,\nu}^{(\alpha\alpha)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma}^{\mu} - R_{,r,\nu}^{(\alpha\sigma)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^{\beta} + R_{,r,\nu}^{(\alpha\alpha)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma}^{\beta} + \\
& + R_{,r,\nu}^{(\alpha\beta)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^a - R_{,r,\nu}^{(\alpha\beta)(\mu r\nu)} \phi_{\sigma}^a + R_{,r,\nu}^{(\alpha\mu)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma,\nu}^a - \\
& - R_{,r,\nu,\nu}^{(\alpha\mu)(\beta r\nu)} \phi_{\sigma}^a]_{,a} + \frac{1}{2} [u_C (\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,a}} S_{Aa}^{C\mu} \gamma^{\beta\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,a}} S_{A\nu}^{C\beta} \gamma^{\nu\mu} + \\
& + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\beta}} S_{A\nu}^{Ca} \gamma^{\nu\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\beta}} S_{A\nu}^{C\mu} \gamma^{a\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} S_{A\nu}^{Ca} \gamma^{\beta\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A,\mu}} S_{A\nu}^{C\beta} \gamma^{a\nu})]_{,a} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Из равенства (3.34) и определения (3.35) находим

$$T_{(\Gamma)}^{\beta\mu} = 2 \frac{\delta \Lambda}{\delta \gamma^{\sigma\nu}} \gamma^{\beta\sigma} \gamma^{\mu\nu} = P^{\beta\mu} - N_{,a}^{\beta\alpha\mu}. \quad (3.43)$$

Сравнивая выражения (2.46) и (3.42), мы видим, что

$$-N_{,a}^{\beta\alpha\mu} = \frac{1}{2} (H^{\beta\alpha\mu} + H^{\beta\mu\alpha} - H^{\alpha\mu\beta}),$$

и поэтому

$$T_{(\Gamma)}^{\beta\mu} = P_{(B)}^{\beta\mu}.$$

Этим доказательство эквивалентности тензоров Гильберта и Белинфантэ завершается.

Для записи тензора Белинфантэ  $P_{(B)}^{(\beta\mu)}$  в виде (2.48), обладающем явной симметрией по индексам  $(\beta\mu)$ , мы воспользовались тождествами (2.29) и (2.47). Эти соотношения могут быть установлены и в рамках подхода Гильберта. Действительно, в декартовой системе координат (3.12) примет вид

$$2y^{\beta\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial y^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma, r, a}} \phi_{\mu\nu, \sigma, r, a} + 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta, r}} \phi_{\mu\sigma, \nu, r, a}. \quad (3.45)$$

Здесь было принято во внимание то, что в декартовой системе координат

$$\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma, r}} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma}} = 0. \text{ Умножая (3.45) на } y^{\nu\lambda} \text{ найдем}$$

$$2y^{\beta\mu} y^{\nu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial y^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\beta, \sigma, r, a}} \phi_{\mu\sigma, r, a}^{\lambda} + 3 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta, r}} \phi_{\mu\sigma, r, a}^{\lambda}.$$

Левая сторона этого тождества симметрична по индексам  $(\lambda\beta)$ , поэтому антисимметрическая часть правой стороны тождественно равна нулю, что и приводит нас к соотношению (2.29).

Аналогично из (3.16) в декартовой системе координат, находим

$$2y^{\mu\beta} y^{\nu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial y^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma}} \phi_{\mu a, \sigma}^{\lambda} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta}} \phi_{\mu\sigma, a}^{\lambda} + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\beta} y^{\nu\lambda} u_C + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\beta} y^{\nu\lambda} u_C + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} u_A^{\lambda}.$$

Так как левая часть этого равенства симметрична, то и правая часть должна быть симметричной. Поэтому

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\beta, a, \sigma}} \phi_{\mu a, \sigma}^{\lambda} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu a, \sigma}} \phi_{\mu\beta, a, \sigma}^{\lambda} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \beta}} \phi_{\mu\sigma, a}^{\lambda} - \\ - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi_{\mu\sigma, a, \lambda}} \phi_{\mu\sigma, a}^{\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\beta} y^{\nu\lambda} u_C - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\lambda} y^{\nu\beta} u_C + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\beta} y^{\nu\lambda} u_C - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} S_{\lambda\nu}^{C\lambda} y^{\nu\beta} u_C + \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} u_A^{\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} u_A^{\beta} = 0.$$

В силу уравнений движения для поля  $u_A$  величину  $\partial \mathcal{L}_M / \partial u_A$  можно заменить на  $\partial_u (\partial \mathcal{L}_M / \partial u_A)$  и тем самым привести к тождеству (2.47). На основании этого тождества правая часть (3.43) может быть приведена к виду, обладающему явной симметрией по индексам  $(\beta\mu)$ .

В заключение этого раздела отметим, что для нахождения тензора энергии-импульса Гильберта – Белинфантэ в теориях поля с естественной геометрией пространства-времени Минковского достаточно ограничиться решением Белинфантэ.

#### 4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В полевой теории гравитации в качестве свободного лагранжиана  $\mathcal{L}_g$  для симметричного тензорного поля  $\phi_{\mu\nu}$  берется выражение

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{64\pi} \gamma^{\alpha\beta} (\gamma^{\lambda\nu} \gamma^{\mu\tau} - \frac{1}{2} \gamma^{\lambda\mu} \gamma^{\nu\tau}) f_{\lambda\mu, \alpha} f_{\nu\tau, \beta}, \quad (4.1)$$

где

$$f_{\lambda\mu} = Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma x)(\epsilon\omega)} \phi_{\sigma x, \epsilon, \omega}. \quad (4.2)$$

В (4.2)

$$\begin{aligned} Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma x)(\epsilon\omega)} = & \frac{1}{4} [2\gamma^{\epsilon\omega} \delta_{\lambda\mu}^{\sigma x} - \gamma^{\sigma\epsilon} \delta_{\lambda\mu}^{\omega x} - \\ & - \gamma^{\lambda\epsilon} \delta_{\lambda\mu}^{\sigma\omega} - \gamma^{\omega\mu} \delta_{\lambda\mu}^{\lambda x} - \gamma^{\lambda\omega} \delta_{\lambda\mu}^{\sigma\epsilon} + 2\gamma^{\sigma x} \delta_{\lambda\mu}^{\epsilon\omega} + \\ & + 2\gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} (\gamma^{\sigma\omega} \gamma^{\epsilon x} + \gamma^{\omega x} \gamma^{\sigma\epsilon} - 2\gamma^{\omega\epsilon} \gamma^{\sigma\omega})]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\delta_{\lambda\mu}^{\sigma x} = \delta_{\lambda}^{\sigma} \delta_{\mu}^x + \delta_{\lambda}^x \delta_{\mu}^{\sigma}.$$

Можно показать, что (4.3) допускает разбиение

$$Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma x)(\epsilon\omega)} = \Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\epsilon][\lambda\omega]} + \Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\omega][\lambda\epsilon]}, \quad (4.4)$$

где величина  $\Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\omega][\lambda\epsilon]}$  антисимметрична по индексам, заключенным в квадратные скобки, и имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\omega][\lambda\epsilon]} = & \frac{1}{4} [\delta_{\mu}^{\sigma} (\gamma^{\omega\epsilon} \delta_{\lambda}^x - \gamma^{\omega x} \delta_{\lambda}^{\epsilon}) + \\ & + \delta_{\lambda}^{\sigma} (\gamma^{\omega\epsilon} \delta_{\mu}^x - \gamma^{\omega x} \delta_{\mu}^{\epsilon}) + \delta_{\lambda}^{\omega} (\gamma^{\sigma x} \delta_{\mu}^{\epsilon} - \delta_{\mu}^x \gamma^{\sigma\epsilon}) + \\ & + \delta_{\mu}^{\omega} (\gamma^{\sigma x} \delta_{\lambda}^{\epsilon} - \delta_{\lambda}^x \gamma^{\sigma\epsilon}) + 2\gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} (\gamma^{\omega x} \gamma^{\sigma\epsilon} - \gamma^{\omega\epsilon} \gamma^{\sigma x})]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Легко показать, что  $f_{\lambda\mu}$  не меняется при следующем калибровочном преобразовании поля  $\phi_{\mu\nu}$ :

$$\phi_{\sigma x} \rightarrow \phi_{\sigma x} + a_{\sigma x} + a_{x, \sigma}, \quad (4.6)$$

где  $a_{\sigma}$  – некоторый 4-вектор. Действительно, в силу (4.4) из (4.2) находим

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu} = & Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma x)(\epsilon\omega)} \phi_{\sigma x, \epsilon, \omega} \rightarrow \\ & \rightarrow (\Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\epsilon][\lambda\omega]} + \Omega_{(\lambda\mu)}^{[\sigma\omega][\lambda\epsilon]}) (\phi_{\sigma x, \epsilon, \omega} + a_{\sigma x, \epsilon, \omega} + a_{x, \sigma, \epsilon, \omega}). \end{aligned}$$

Так как величины  $a_{\sigma x, \epsilon, \omega}$  и  $a_{x, \sigma, \epsilon, \omega}$  симметричны по индексам  $(\lambda\epsilon\omega)$  и  $(\sigma\epsilon\omega)$  соответственно, правая часть последней формулы дает  $f_{\lambda\mu}$ , что

и требовалось показать. Теперь покажем, что определенное равенством (4.2) тождество удовлетворяет условию Лоренца-Гильберта:

$$f_{\lambda\mu}^{\nu} f_{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Действительно, запишем  $f_{\mu\nu}$  в виде

$$f_{\mu\nu} = \gamma^{\lambda\nu} Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma\kappa)(\epsilon\omega)} \phi_{\sigma\kappa, \epsilon, \omega, \nu}. \quad (4.8)$$

Используя разбиение

$$\gamma^{\lambda\nu} Q_{(\lambda\mu)}^{(\sigma\kappa)(\epsilon\omega)} = B_{\mu}^{(\sigma\kappa)[\nu\epsilon]\omega} + B_{\mu}^{(\sigma\kappa)[\nu\omega]\epsilon}, \quad (4.9)$$

где

$$B_{\mu}^{(\sigma\kappa)[\nu\epsilon]\omega} = \frac{1}{4} [\delta_{\mu}^{\kappa} (\gamma^{\epsilon\omega} \gamma^{\nu\omega} - \gamma^{\sigma\epsilon} \gamma^{\nu\omega}) + \delta_{\mu}^{\sigma} (\gamma^{\epsilon\omega} \gamma^{\nu\kappa} - \gamma^{\epsilon\kappa} \gamma^{\nu\omega}) + \gamma^{\sigma\omega} (\gamma^{\epsilon\kappa} \delta_{\mu}^{\nu} - \gamma^{\nu\kappa} \delta_{\mu}^{\epsilon}) + \gamma^{\kappa\omega} (\gamma^{\epsilon\sigma} \delta_{\mu}^{\nu} - \gamma^{\nu\sigma} \delta_{\mu}^{\epsilon}) + 2\gamma^{\sigma\kappa} (\gamma^{\nu\omega} \delta_{\mu}^{\epsilon} - \gamma^{\epsilon\omega} \delta_{\mu}^{\nu})] \quad (4.10)$$

и является антисимметричной по индексам, заключенным в квадратные скобки, на основе (4.8) и (4.9) с учетом симметрии  $\phi_{\sigma\kappa, \epsilon, \omega, \nu}$  по  $(\epsilon\omega\nu)$

приходим к тождеству (4.7).

Что касается лагранжиана материи

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, u_A, u_A{}_{\mu})$$

при его построении мы должны руководствоваться требованием, чтобы он был инвариантен относительно калибровочного преобразования поля  $\phi_{\mu\nu}$  (4.6). В работах<sup>8/</sup> предложена одна из возможных реализаций этого требования посредством предположения, что эффективная метрика Риманова пространства-времени  $g_{\mu\nu}$  зависит от поля  $\phi_{\mu\nu}$  только через  $f_{\mu\nu}$ . Последнее соглашение в полевой теории гравитации исключает зависимость лагранжиана  $\mathcal{L}_M$  от производных  $g_{\mu\nu}$ . Действительно, одной из особенностей подхода, развитого в работах<sup>8/</sup>, является то, что естественной геометрией для гравитационного поля  $\phi_{\mu\nu}$  остается пространство-время Минковского. Это означает, что в лагранжиане  $\mathcal{L}_M$  не могут присутствовать производные  $\phi_{\mu\nu}$  выше второго порядка, и так как  $g_{\alpha\beta}$  (1) уже зависит от вторых производных поля  $\phi_{\mu\nu}$  (см. (4.2)), то  $\mathcal{L}_M$  не может зависеть от производных  $g_{\mu\nu}$ .

С другой стороны, в  $\mathcal{L}_M$  производные полей материи  $u_A$  всегда должны входить в виде ковариантных производных, согласованных с метрикой эффективного Риманова пространства-времени  $g_{\mu\nu}$  (1).

Требование независимости лагранжиана  $\mathcal{L}_M$  от производных метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  приводит нас к особой структуре  $\mathcal{L}_M$  и сводится к тому, что ковариантные производные от полей материи  $u_A$  должны входить в него в виде комбинации, в которой происходит полное сокращение членов, пропорциональных к символам Кристоффеля эффективного Риманова пространства-времени. (Сокращение членов, пропорциональных к символам Кристоффеля в вышеупомянутых комбинациях производных полей  $u_A$  произойдет и при переходе к криволинейным координатам). Таким образом, лагранжиан материи  $\mathcal{L}_M$  становится зависящим реально только от обычных производных полей  $u_A$ . Такая структура лагранжиана  $\mathcal{L}_M$  проявляется в том, что для  $\gamma^{\mu\nu} g_{\mu\nu} / \partial_{\mu} u_A$  вместо (3.40) будем иметь тождество

$$\begin{aligned}
\gamma \beta \mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma_{\mu \nu}^{\alpha \beta}} = & V^{(\alpha \beta)(\alpha r)} \phi_{\sigma \nu, r} + \gamma_{\mu \nu} V^{(\sigma \mu)(\alpha r)} \phi_{\sigma, r}^{\beta} + \frac{1}{2} V^{(\mu \sigma)(\alpha \beta)} \phi_{\mu \sigma, \nu} + \\
& + \frac{1}{2} V^{(\mu \sigma)(\alpha r)} \gamma_{\nu r} \phi_{\mu \sigma,}^{\beta} + V^{(\alpha \sigma)(\beta r)} \phi_{\nu \sigma, r} + \gamma_{\nu \nu} V^{(\alpha \sigma)(r \mu)} \phi_{\sigma, \mu}^{\beta} - \\
& - V^{(\beta \sigma)(r \mu)} \gamma_{\nu \nu} \phi_{\sigma, \mu}^{\alpha} - \gamma_{\nu \nu} V^{(r \sigma)(\mu \beta)} \phi_{\sigma, \mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} \gamma_{\nu \nu} V^{(\alpha \mu)(r \beta)} \phi_{\sigma \mu,}^{\alpha}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Дополнительное и очень важное соотношение для лагранжиана материи  $\mathcal{L}_M$  в этом случае получается из (3.17). В декартовой системе координат (3.17) принимает вид

$$\begin{aligned}
2 \gamma \beta \mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma_{\mu \nu}^{\alpha \beta}} + 2 \gamma^{\alpha \mu} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma_{\mu \nu}^{\alpha \beta}} - 4 V^{(\beta \mu)(\alpha \sigma)} \phi_{\mu \nu, \sigma} - 4 V^{(\alpha \mu)(\sigma \beta)} \phi_{\mu \nu, \sigma} - \\
- 2 V^{(\alpha \mu)(\alpha \beta)} \phi_{\mu \sigma, \nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{\Lambda, \alpha}} S_{\Lambda \nu}^{C \beta} - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{\Lambda, \beta}} S_{\Lambda \nu}^{C \alpha} u_{\Lambda, \nu} = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая здесь (4.11), найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{\Lambda, \alpha}} S_{\Lambda \nu}^{C \beta} = - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{\Lambda, \beta}} S_{\Lambda \nu}^{C \alpha}. \quad (4.12)$$

Это соотношение в рамках преобразования Пуанкаре, вообще говоря, не возникает, так как там  $\xi_{\sigma, r}^{\alpha} \neq 0$ . В силу соотношения (4.12) последние квадратные скобки в формулах (2.46) и (3.42) упрощаются и сводятся к выражению

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{\Lambda, \beta}} S_{\Lambda \nu}^{C \alpha} \gamma^{\nu \mu} u_{\mu} \right]_{,\alpha},$$

а тензоры энергии-импульса Белинфантса и Гильбертса в полевой теории гравитации также совпадают между собой и имеют вид

$$\begin{aligned}
P_{(B)}^{(\mu r)} - T_{(\Gamma)}^{\mu r} = & - \gamma^{\mu r} (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_M) + V^{(\beta \nu)(\alpha \mu)} \phi_{\beta \nu, a}^{\alpha} + V^{(\beta \nu)(r \alpha)} \phi_{\beta \nu, a}^{\mu} - \\
& - V^{(\beta \nu)(\alpha \mu)} \phi_{\beta \nu, a}^{\mu} - V^{(\beta \nu)(\alpha r)} \phi_{\beta \nu, a}^{\mu} - V^{(\beta \nu)(\sigma \tau)} \phi_{\beta \nu, \sigma, \tau}^{\mu} - V^{(\beta \nu)(\alpha \mu)} \phi_{\beta \nu, a}^{\tau} + \\
& + V^{(\mu \nu)(\beta r)} \phi_{\nu, \beta}^{\sigma} + V^{(r \nu)(\mu \beta)} \phi_{\nu, \beta}^{\sigma} + V^{(\beta \nu)(\mu r)} \phi_{\beta \nu, \sigma}^{\mu} + V^{(\beta \nu)(\mu r)} \phi_{\beta \nu, \sigma}^{\sigma} - \\
& - V^{(\mu \nu)(\beta r)} \phi_{\nu, \beta}^{\alpha} - V^{(r \nu)(\beta \mu)} \phi_{\nu, \beta}^{\alpha} - V^{(\mu \nu)(\beta r)} \phi_{\nu, \sigma, \beta}^{\sigma} - V^{(r \nu)(\mu \beta)} \phi_{\nu, \sigma, \beta}^{\sigma} - \\
& - V^{(\sigma \nu)(r \beta)} \phi_{\nu, \beta}^{\mu} - V^{(\sigma \nu)(\beta \mu)} \phi_{\nu, \beta}^{\mu} - V^{(\sigma \nu)(r \beta)} \phi_{\nu, \beta, \sigma}^{\mu} - V^{(\sigma \nu)(\beta \mu)} \phi_{\nu, \beta, \sigma}^{\mu} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + V_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\beta)} \phi_{\nu}^{\mu} + V_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu}^r + V_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(r\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^{\mu} + V_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^r - \\
& - R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta\mu)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^r - R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^{\mu} + R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta\mu)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^r + \\
& + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^{\mu} + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\mu\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, \alpha, \beta}^{\sigma} + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, \alpha, \beta}^{\sigma} + \\
& + R_{\nu, \alpha, \beta, a}^{(\mu\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu, \alpha, \beta, a}^{\sigma} + R_{\nu, \alpha, \beta, a}^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, \alpha, \beta, a}^{\sigma} + 2R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\alpha\nu, \beta, a}^{\sigma} + \\
& + 2R_{\alpha\nu, \beta, a}^{(\sigma\nu)(r\mu\beta)} \phi_{\alpha\nu, \beta, a}^{\sigma} - R_{\alpha\nu, \beta, a}^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\alpha\nu, \beta, a}^{\sigma} - R_{\alpha\nu, \beta, a}^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\alpha\nu, \beta, a}^{\sigma} - \\
& - R_{\sigma, \beta}^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu, \sigma, \alpha, \beta}^{\sigma} - R_{\sigma, \beta}^{(\nu\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, \sigma, \alpha, \beta}^{\sigma} - R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(r\mu\beta)} \phi_{\alpha\nu, \beta}^{\sigma} - \\
& - R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(r\mu\beta)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^{\sigma} + R_{\sigma, \alpha, \beta, a}^{(\mu\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu}^{\sigma} + R_{\sigma, \alpha, \beta, a}^{(r\nu)(\alpha\beta\mu)} \phi_{\nu}^{\sigma} + \\
& + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\mu\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu, \sigma}^{\sigma} + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(r\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, \sigma}^{\sigma} - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^{\mu} - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^r - \\
& - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma, a, \beta}^{\mu} - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma, a, \beta}^r + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu, a}^{\mu} + R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, a}^r + \\
& + R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha)} \phi_{\nu, a, \sigma}^{\mu} + R_{\sigma, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha)} \phi_{\nu, a, \sigma}^r - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\beta\alpha), \mu} - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\beta\alpha), r} - \\
& - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(r\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^{\mu} - R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\mu\alpha\beta)} \phi_{\nu, \sigma}^r - \frac{1}{2} R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta\mu)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^{\sigma} - \frac{1}{2} R_{\sigma, \alpha, \beta}^{(\sigma\nu)(\sigma\beta r)} \phi_{\alpha\nu, \sigma, \beta}^{\mu} + \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \mu}} u_{A, \sigma}^r + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, r}} u_{A, \sigma}^{\mu} \right) - \frac{1}{2} \left[ u_C \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, r}} S_{Aa}^{C\sigma} u_{A, \sigma}^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \mu}} S_{Aa}^{C\sigma} u_{A, \sigma}^r \right) \right], \sigma. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

## 5. ПРОБЛЕМА КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Лагравжиан  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M$ , используемый в полевой теории гравитации, инвариантен относительно калибровочного преобразования поля  $\phi_{\mu\nu}$  (4.6). Естественно возникает вопрос: будет ли тензор энергии-импульса Гильберта-Белинфантена инвариантным относительно преобразования поля  $\phi_{\mu\nu}$  (4.6)? Чтобы ответить на этот вопрос, удобно в той мере, в какой это удастся, из тензора Гильберта-Белинфантена (2.48) выделить члены, записанные только в терминах  $f_{\mu\nu}$ . Величину  $f_{\mu\nu}$  в дальнейшем будем называть полем.

Предварительно выпишем уравнение движения для поля  $f_{\mu\nu}$  в той форме, в какой оно понадобится ниже (подробно см. приложение 1). Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\nu, \alpha}} \right) - \frac{1}{2} (\partial^\mu \lambda^\nu + \partial^\nu \lambda^\mu) = 0, \quad (5.1)$$

где величина  $\lambda^\nu$  определяется из соотношения (см. (П.1.15))

$$\square \lambda^\nu = 2 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} - \gamma_{\alpha\beta} \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\alpha\beta}} = -\partial_\mu h^{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

Учитывая связь (4.2) и (5.1), легко найти, что

$$V^{(\alpha\beta)(ar)} = \left[ \partial_\omega \left( \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\nu, \omega}} \right) + \partial^\mu \lambda^\nu \right] Q_{(\mu\nu)}^{(\alpha\beta)(ar)}, \quad (5.3)$$

$$R^{(\alpha\beta)(ar\omega)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\nu, \alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\alpha\beta)(r\omega)} + \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\nu, \tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\alpha\beta)(\omega\tau)} + \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\nu, \omega}} Q_{(\mu\nu)}^{(\alpha\beta)(ar)} \right\}. \quad (5.4)$$

После несложных, но громоздких вычислений из (4.13) получим

$$P_{(B)}^{(\alpha\beta)} = P_{(B)}^{(\alpha\beta)} - \Pi_{\sigma, r}^{[\alpha\sigma][\beta r]} - \Pi_{\sigma, \tau}^{[\beta\sigma][\alpha\tau]}, \quad (5.5)$$

где (см. приложение 3, (П.3.17))

$$\begin{aligned} P_{(B)}^{(\alpha\beta)}(f_{\mu\nu}) &= -\gamma^{\alpha\beta} (\mathcal{L}_M + \mathcal{L}_E) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} u_{A, \beta} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} u_{A, \alpha} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\mu}^{C\sigma} \gamma^{\mu\alpha} u_C + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} S_{A\mu}^{C\sigma} \gamma^{\mu\beta} u_C \right)_{,\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( f_\mu^\alpha (\partial^\mu \lambda^\beta - \partial^\beta \lambda^\mu) + f_\mu^\beta (\partial^\mu \lambda^\alpha - \partial^\alpha \lambda^\mu) \right) + \\ &+ \left( \gamma^{\alpha\beta} \lambda^\mu f_\mu^\sigma - \lambda^\sigma f_\mu^{\alpha\beta} \right)_{,\sigma} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\sigma\mu, \beta}} f_{\sigma\mu}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\sigma\mu, \alpha}} f_{\sigma\mu}^\beta \right) + \\ &+ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\sigma\mu, \beta}} f_\mu^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\mu\beta, \alpha}} f_\mu^\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\sigma\mu, \beta}} f_\mu^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial f_{\sigma\mu, \alpha}} f_\mu^\beta \right)_{,\sigma}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{[\beta\sigma][ar]} &= \frac{3}{4} \phi_{\mu, \beta}^\sigma \mu (\lambda^\alpha \gamma^r \beta - \lambda^r \gamma^\alpha \beta) - \\ &- \frac{3}{4} \phi_{\mu, \beta}^\beta \mu (\lambda^\alpha \gamma^{r\sigma} - \lambda^r \gamma^{\alpha\sigma}) + \frac{1}{2} \lambda^\omega (\gamma^{\beta r} \phi_{\omega, \alpha}^\sigma - \gamma^{\alpha\beta} \phi_{\omega, r}^\sigma) - \\ &- \frac{1}{2} \lambda^\omega (\gamma^{\sigma r} \phi_{\omega, \beta}^\alpha - \gamma^{\alpha\beta} \phi_{\omega, r}^\sigma) + \frac{1}{2} \lambda^\sigma (\phi^{\beta r \alpha} - \phi^{\alpha\beta r}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\lambda^{\beta}(\phi^{\sigma\alpha} - \phi^{\alpha\sigma}) + \frac{3}{4}\lambda^{\omega}(\gamma^{\sigma\alpha}\phi_{\omega}^{\beta\alpha} - \gamma^{\alpha\sigma}\phi_{\omega}^{\beta\sigma}) - \\
& -\frac{3}{4}\lambda^{\omega}(\phi_{\omega}^{\sigma\alpha}\gamma^{\beta\tau} - \gamma^{\alpha\beta}\phi_{\omega}^{\sigma\tau}) + \frac{1}{2}\phi_{\mu}^{\mu}\beta(\lambda^{\alpha}\gamma^{\sigma\tau} - \lambda^{\tau}\gamma^{\alpha\sigma}) - \\
& -\frac{1}{2}\phi_{\mu}^{\mu}\sigma(\lambda^{\alpha}\gamma^{\beta\tau} - \lambda^{\tau}\gamma^{\alpha\beta}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\sigma\alpha)(\alpha\omega)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\sigma\alpha)(\tau\omega)}\right) \phi_{x,\omega}^{\beta} - \\
& - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\beta\alpha)(\alpha\omega)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\beta\alpha)(\tau\omega)}\right) \phi_{x,\omega}^{\sigma} + \\
& + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\omega\alpha)(\alpha\sigma)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\omega\alpha)(\sigma\tau)}\right) \phi_{\omega x}^{\beta} - \\
& - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\omega\alpha)(\alpha\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\omega\alpha)(\beta\tau)}\right) \phi_{\omega x}^{\sigma} + \\
& + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\beta\alpha)(\alpha\omega)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\beta\alpha)(\tau\omega)}\right) \phi_x^{\sigma} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\tau}} Q_{(\mu\nu)}^{(\sigma\alpha)(\alpha\omega)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{E}}}{\partial f_{\mu\nu,\alpha}} Q_{(\mu\nu)}^{(\sigma\alpha)(\tau\omega)}\right) \phi_x^{\beta} + \right. \\
& \left. + \lambda^{\nu} B_{\nu}^{(\alpha\beta)(\tau\alpha)\omega} \phi_x^{\sigma} - \lambda^{\nu} B_{\nu}^{(\sigma\alpha)(\tau\alpha)\omega} \phi_x^{\beta}\right]_{,\omega}. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Так как величины  $\Pi_{\sigma,\tau}^{[\alpha\sigma][\beta\tau]}$  и  $\Pi_{\sigma,\tau}^{[\beta\sigma][\alpha\tau]}$  при преобразовании (4.6) поля  $\phi_{\mu\nu}$  получают отличные от нуля добавки, которые в сумме не сокращаются, из (5.5) видно, что тензор энергии-импульса Гильберта-Беллинфранте не инвариантен относительно калибровочного преобразования (4.6).

Следует, однако, заметить, что члены  $\Pi_{\sigma,\tau}^{[\alpha\sigma][\beta\tau]}$  и  $\Pi_{\sigma,\tau}^{[\beta\sigma][\alpha\tau]}$  из (5.5) могут быть устранены путем добавления дивергенционных членов к лагранжиану. Поэтому при построении наблюдаемых величин достаточно использовать только калибровочно-инвариантное выражение (5.6).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. М.: ~ ИЛ, 1947, с. 8-18.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1973, с. 20-27.
3. Hilbert D. Die Grundlagen der Physik. Nachrichten von der Kon-Ges Wissenschaften zu Göttingen. – Math. Phys., 1915, K1, Heft 3, с. 395/перевод под ред. Л.С.Полака в сб: Вариационные принципы механики. – М.: изд-во физ.-мат. литер., 1959, с. 589.
4. Belinfante F.J. – Physica, 1939, 6, р. 887.
5. Rosenfeld L. – Mem. Acad. Roy. Belg., 1938, 18, р. 2.
6. Marx G. – Acta Phys. Hung., 1952, 1, р. 209.
7. Schmutzler E. Relativistische Physik (Klassische Theorie). – Leipzig, 1968.
8. Денисов В.И., Логунов А.А. – ТМФ, 1982, 50, с. 3.  
Логунов А.А., Денисов В.И., Власов А.А., Мествиршили М.А.,  
Фоломешкин В.Н. – Препринт ИФВЭ 79-66, Серпухов, 1979; ТМФ, 1979,  
40, с. 291.  
Денисов В.И., Логунов А.А., Мествиршили М.А. – ЭЧАЯ, 1981, 12,  
с. 5.
9. Ландау Л.Д., Лишин Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973, с. 348;  
Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. – М.: Мир, 1977, т. 1,  
с. 183-186.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ  
И УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Согласно вариационному принципу, уравнения движения для полей получаются из условия экстремума функционала (1.1). Этот принцип в физике известен, как принцип наименьшего действия. Для данного лагранжиана экстремумы функционала (1.1) должны удовлетворять уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{(\dots)}} = 0, \quad (\text{П.1.1})$$

которые являются уравнениями движения для полей  $\phi_{(\dots)}$ . В (П.1.1) оператор  $\frac{\delta}{\delta \phi_{(\dots)}}$  имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{(\dots)}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{(\dots)}} - \partial_a \left( \frac{\partial}{\partial \phi_{(\dots),a}} \right) + \partial_a \partial_\beta \left( \frac{\partial}{\partial \phi_{(\dots),a,\beta}} \right) - \partial_a \partial_\beta \partial_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial \phi_{(\dots),a,\beta,\sigma}} \right) + \dots \quad (\text{П.1.2})$$

Заметим, что принцип наименьшего действия является совершенно самостоятельным принципом, и не связан с инвариантностью действия. Из (П.1.1) и (П.1.2) легко заметить, что если  $\mathcal{L}$  является лагранжианом, рассмотренным в разд. 1, то уравнения для полей  $\phi_{\mu\nu}$  и  $u_A$  примут вид

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{\mu\nu}} = -\partial_a \partial_\beta \partial_\sigma \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta (\phi_{\mu\nu,a,\beta,\sigma})} + \partial_a \partial_\beta \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi_{\mu\nu,a,\beta}} = 0 \quad (\text{П.1.3})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_A} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta u_A} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta u_A, \mu} = 0. \quad (\text{П.1.4})$$

В полевой теории гравитации, принимая во внимание структуру  $\mathcal{L}_g$  и  $\mathcal{L}_M$  (см. разд. 4), уравнение (П.1.3) запишется в виде

$$\square^2 (\square \phi^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \square \phi_a^a - \partial^\mu \partial^\nu \phi_a^a - \partial^\nu \partial^\mu \phi_a^a + \partial^\mu \partial^\nu \phi_a^a + \gamma^{\mu\nu} \partial_a \partial_\beta \phi^{a\beta}) = -16\pi (\square h^{\mu\nu} - \partial_a \partial^\mu h^{a\nu} - \partial_a \partial^\nu h^{a\mu} + \gamma^{\mu\nu} \partial_a \partial_\beta h^{a\beta}). \quad (\text{П.1.5})$$

В (П.1.5)

$$h^{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} + \gamma_{a\beta} \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{a\beta}} = -\theta^{a\beta} \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial f_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \partial_\beta \theta^{a\beta} \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial f_{\sigma\tau}} \gamma_{\sigma\tau}, \quad (\text{П.1.6})$$

где

$$\theta^{a\beta} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{a\beta}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{a\beta}}.$$

Учитывая связь (4.2), уравнение (П.1.5) в терминах поля  $f^{\mu\nu}$  примет вид

$$\square^2 f^{\mu\nu} = -16\pi (\square h^{\mu\nu} - \partial_a \partial^\mu h^{a\nu} - \partial_a \partial^\nu h^{a\mu} + \gamma^{\mu\nu} \partial_a \partial_\beta h^{a\beta}). \quad (\text{П.1.7})$$

Уравнение (П.1.7) с помощью вариационного принципа может быть получено непосредственно из действия, если лагранжиан полевой теории гравитации записать в терминах поля  $f_{\mu\nu}$ , а потом варьировать его по  $f_{\mu\nu}$ .

Однако при варьировании действия по полю  $f_{\mu\nu}$ , необходимо учесть дополнительное условие Лоренца-Гильберта (4.7), которому подчинено  $f_{\mu\nu}$ .

Такая вариационная задача – задача на условный экстремум – решается методом лагранжевых множителей и сводится к тому, что вместо действия (1.1) с лагранжианом  $\mathcal{L}$ , надо рассмотреть действие вида

$$S = \int_v (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu}) d^4x, \quad (1.1.8)$$

где  $\lambda^\mu$  – лагранжевый множитель и подлежит дальнейшему определению.

Условие экстремума Эйлера-Лагранжа для (1.1.8) дает

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{\mu\nu, \alpha}} \right) - \frac{1}{2} (\partial^\mu \lambda^\nu + \partial^\nu \lambda^\mu) = 0; \quad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^\nu} = \partial^\mu f_{\mu\nu} = 0; \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A, \alpha}} = 0. \quad (1.1.11)$$

Учитывая разбиение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M$ , где  $\mathcal{L}_g$  имеет вид (4.1), а  $\mathcal{L}_M$  от поля  $f_{\mu\nu}$  зависит только лишь через  $g_{\mu\nu}$  ( $f_{\mu\nu}$ ), из (1.1.9) найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} - \frac{1}{32\pi} \square f^{\mu\nu} + \frac{1}{64\pi} g^{\mu\nu} \square f_a^a - \frac{1}{2} (\partial^\mu \lambda^\nu + \partial^\nu \lambda^\mu) = 0. \quad (1.1.12)$$

Умножая это выражение на  $g_{\mu\nu}$ , получим

$$\frac{1}{64\pi} g^{\mu\nu} \square f_a^a = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha \lambda^\alpha - \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\alpha\beta}}).$$

Учет последнего соотношения в (1.1.12) дает

$$\frac{1}{32\pi} \square f^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\alpha \lambda^\alpha - \partial^\mu \lambda^\nu - \partial^\nu \lambda^\mu). \quad (1.1.13)$$

Принимая во внимание в (1.1.13) определение (1.1.6), его можно записать в виде

$$\square f^{\mu\nu} = -16\pi h^{\mu\nu} + 16\pi (g^{\mu\nu} \partial_\alpha \lambda^\alpha - \partial^\mu \lambda^\nu - \partial^\nu \lambda^\mu). \quad (1.1.14)$$

Действуя на (1.1.14) оператором  $\partial_\nu$ , и, учитывая (1.1.10), найдем

$$\square \lambda^\mu = 2\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} - \gamma_{\alpha\beta} \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\alpha\beta}} = -\partial_\nu h^{\mu\nu}. \quad (1.1.15)$$

Из этого соотношения и находится лагранжевый множитель  $\lambda^\mu(x)$ :

$$\lambda^\mu(x) = -\partial_\nu \int D(x-y) h^{\mu\nu}(y) d^4y. \quad (1.1.16)$$

В (1.1.16)  $D(x-y)$  – гриновская функция и удовлетворяет уравнению

$$\square D(x-y) = \delta(x-y). \quad (1.1.17)$$

Принимая во внимание (1.1.6) и (1.1.16) в (1.1.13), найдем

$$\begin{aligned} \square f^{\mu\nu} = & -16\pi (h^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \int D(x-y) h^{\alpha\beta}(y) d^4y - \\ & - \partial^\mu \partial_\alpha \int D(x-y) h^{\alpha\nu}(y) dy - \partial^\nu \partial_\alpha \int D(x-y) h^{\mu\nu}(y) d^4y). \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Если подействуем на (П.1.18) оператором  $\square$  и учтем (П.1.17), мы перейдем к уравнению (П.1.7). Таким образом, уравнение (П.1.18), и значит и уравнения (П.1.9) и (П.1.14), могут быть интерпретированы как частично проинтегрированное уравнение (1.7).

## Приложение 2

### КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ТЕНЗОР ГИЛЬБЕРТА-БЕЛИНФАНТЕ ДЛЯ СВОБОДНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В настоящем приложении рассматривается пример лагранжиана, который приводит к симметричному каноническому тензору энергии-импульса, не совпадающему с тензором Гильберта-Белинфанте.

Пусть

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{64\pi} g^{\alpha\beta} (g^{\lambda\nu} g^{\mu\rho} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g^{\nu\rho}) f_{\lambda\mu, \alpha} f_{\nu\rho, \beta}. \quad (\text{П.2.1})$$

Легко заметить, что (П.2.1) является лагранжианом свободного гравитационного поля (4.1), записанного в декартовых координатах в терминах  $f_{\mu\nu}$ . Далее предположим, что поле  $f_{\mu\nu}$  подчинено дополнительному условию Лоренца-Гильберта:

$$\partial^\mu f_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{П.2.2})$$

Канонический тензор энергии-импульса из лагранжиана (П.2.1) с учетом дополнительного условия (П.2.2) и уравнения движения

$$\square f_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{П.2.3})$$

находится легко и имеет вид

$$P^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \mathcal{L}_g + \frac{1}{32\pi} (\partial^\alpha f_{\mu\nu} \partial^\beta f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha f^\mu_\mu \partial^\beta f_\nu^\nu). \quad (\text{П.2.4})$$

Из (П.2.4) видно, что он симметричен по индексам  $(\alpha\beta)$ .

Теперь построим тензор энергии-импульса Белинфанте.

В силу (2.44)

$$P_{(\text{Б})}^{(\alpha\beta)} = P^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (H^{\alpha\sigma\beta} + H^{\beta\sigma\alpha} - H^{\sigma\beta\alpha}), \quad (\text{П.2.5})$$

где

$$H^{\alpha\beta\sigma} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial f_{\alpha\nu, \sigma}} f_\nu^\beta - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial f_{\beta\nu, \sigma}} f_\nu^\alpha = \frac{1}{16\pi} (f^{\beta\nu} f_{\nu, \sigma}^\alpha - f^{\alpha\nu} f_{\nu, \sigma}^\beta) \quad (\text{П.2.6})$$

и поэтому имеем

$$P_{(\text{Б})}^{(\alpha\beta)} = P^{\alpha\beta} + \frac{1}{32\pi} (f^{\sigma\nu} f_{\nu, \sigma}^\alpha - f^{\alpha\nu} f_{\nu, \sigma}^\sigma + f^{\beta\nu} f_{\nu, \sigma}^\alpha - f^{\alpha\nu} f_{\nu, \sigma}^\beta - f^{\beta\nu} f_{\nu, \sigma}^\alpha + f^{\sigma\nu} f_{\nu, \sigma}^\beta), \quad (\text{П.2.6})$$

Учитывая (П.2.2) и (П.2.3), находим

$$\begin{aligned} P_{(B)}^{(a\beta)} &= P^{a\beta} + \frac{1}{32\pi} (f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^a \beta + f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^{\beta a} - f_{,\sigma}^{\alpha\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\beta} - f_{,\sigma}^{\beta\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\alpha}) = \\ &= P^{a\beta} + \frac{1}{32\pi} (f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^a \beta + f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^{\beta a} - f^{\alpha\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\beta} - f^{\beta\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{П.2.7})$$

Из (П.2.7) видно, что добавочное к каноническому тензору выражение

$$f^{a\beta} = \frac{1}{32\pi} (f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^a \beta + f^{\sigma\nu} f_{\nu,\sigma}^{\beta a} - f^{\alpha\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\beta} - f^{\beta\nu} f_{\nu,\sigma}^{\alpha\alpha}), \quad (\text{П.2.8})$$

отлично от нуля и симметрично по индексам  $a\beta$ .

Заметим также, что выражение (П.2.8) на классе поля  $f_{\mu\nu}$ , удовлетворяющее дополнительному условию (П.2.2), и уравнение движения (П.2.3) сохраняются, т.е.

$$\partial_a f^{a\beta} = \partial_\beta f^{a\beta} = 0.$$

### Приложение 3

#### КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ТЕНЗОР ГИЛЬБЕРТА-БЕЛИНФАНТЕ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ В ТЕРМИНАХ ПОЛЯ $f_{\mu\nu}$

Структура лагранжиана полевой теории гравитации<sup>/8/</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M$$

в терминах поля  $f_{\mu\nu}$  т.к. оно, что  $\mathcal{L}_g$  содержит только первые производные  $f_{\mu\nu}$ , а  $\mathcal{L}_M$  зависит от поля  $f_{\mu\nu}$  только через  $g_{\mu\nu}(f_{\alpha\beta})$ .

Так как  $f_{\mu\nu}$  подчиняется дополнительному условию Лоренца-Гильберта (4.7), теоремы Нетер следует применять к действию (П.1.8). В (П.1.8) входит лагранжиев множитель  $\lambda^\mu(x)$ , поэтому необходимо учесть его трансформационные свойства при преобразовании Пуанкаре. Легко показать, что

$$\Delta_S \lambda_\mu = \Delta_L \lambda_\mu + \xi^\alpha \lambda_{\mu,\alpha}, \quad (\text{П.3.1})$$

где вариация Ли

$$\Delta_L \lambda_\mu = -\xi_{,\mu}^\alpha \lambda_\alpha - \xi^\alpha \lambda_{\mu,\alpha}. \quad (\text{П.3.2})$$

Из инвариантности (П.1.8), а также по отдельности интегралов  $\int (\mathcal{L}_g + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu}) d^4x$  и  $\int \mathcal{L}_M d^4x$  относительно группы Пуанкаре, следуя Нетер, получим соответственно тождество:

$$\begin{aligned} & \xi^a (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})_{,a} + \partial_a \left( \frac{\partial (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\partial f_{\sigma r, a}} \Delta_L f_{\sigma r} \right) + \\ & + \partial_a \left( \frac{\partial (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\partial u_{A, a}} \Delta_L u_A \right) + \frac{\partial (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\partial \lambda^a} \Delta_L \lambda^a + \\ & + \frac{\delta (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\delta f_{a\beta}} \Delta_L f_{a\beta} + \frac{\delta (\mathcal{L} + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\delta u_A} \Delta_L u_A = 0; \end{aligned} \quad (\text{П.3.3})$$

$$\begin{aligned} & \xi^a (\mathcal{L}_e + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})_{,a} + \frac{\partial (\mathcal{L}_e + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\partial \lambda^a} \Delta_L \lambda^a + \\ & + \frac{\partial (\mathcal{L}_e + \lambda^\mu \partial^\nu f_{\mu\nu})}{\partial f_{\sigma r, a}} \Delta_L f_{\sigma r, a} = 0; \end{aligned} \quad (\text{П.3.4})$$

$$\xi^a (\mathcal{L}_M)_{,a} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} \Delta_L f_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A} \Delta_L u_A, a + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_A, a} \Delta_L u_A, a = 0. \quad (\text{П.3.5})$$

Подставляя в (П.3.4) и (П.3.5) явный вид вариации  $\Delta_L$  (!) и используя свойства антисимметрии (см. (2.18)) и произвольность параметра  $\xi_{a\beta} = \omega_{a\beta}$ , а также уравнения движения для поля  $u_A$ , найдем соответственно:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial f_{\sigma r, a}} f_{r, a}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial f_{\beta r, a}} f_{r, a}^\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial f_{ar, \beta}} f_{ar, \sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial f_{ar, \sigma}} f_{ar, \beta} \right), \quad (\text{П.3.6})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\beta\nu}} f_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial f_{\mu\nu}} f_\nu^\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \mu}} u_{A, \nu}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \nu}} u_{A, \mu}^\beta \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \nu}} S_{Aa}^{B\mu} \gamma^{a\beta} u_B - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \nu}} S_{Aa}^{B\beta} \gamma^{a\mu} u_B \right), \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

Аналогично, если учесть формулы (П.1.9) – (П.1.11), из (П.3.3) найдем

$$j_{,a}^a = 0, \quad (\text{П.3.8})$$

где

$$j^a = -\xi_\beta P^{a\beta} (f_{\mu\nu}) - \xi_{\beta, \sigma} m^{a\sigma\beta} (f_{\mu\nu}). \quad (\text{П.3.9})$$

В (П.3.9)

$$P^{a\beta} (f_{\mu\nu}) = -\gamma^{a\beta} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial f_{\sigma r, a}} f_{\sigma r, a}^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, a}} u_{A, a}^\beta + \lambda^\sigma f_{\sigma, a}^\beta, \quad (\text{П.3.10})$$

a

$$m^{\alpha\beta}(\mathbf{f}_{\mu\nu}) = 2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, a}} f_r^\beta + \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, a}} S_{A\nu}^{B\sigma} u_B^{\nu\beta} + (\lambda^{\sigma} f^{\beta a} + \lambda^{\nu} f^{\alpha\beta}), \quad (\text{П.3.11})$$

Величина  $P^{\alpha\beta}(\mathbf{f}_{\mu\nu})$ , заданная равенством (П.3.10), является каноническим тензором энергии-импульса полной теории гравитации, записанным в терминах поля  $\mathbf{f}_{\mu\nu}$ . Поступая совершенно аналогично тому, как это было сделано в разд. 2, можно построить симметричный тензор энергии-импульса Белинфанта. Действительно, из (П.3.8) и (П.3.9), выбирая параметр  $\xi_\beta$ , поочередно  $\xi_\beta = \epsilon_\beta$  и  $\xi_\beta = \omega_{\beta\sigma} x^\sigma$ , найдем:

$$P_{, a}^{\alpha\beta}(\mathbf{f}) = 0; \quad P^{\alpha\beta}(\mathbf{f}) - P^{\beta\alpha}(\mathbf{f}) = -H_{, \sigma}^{\alpha\beta\sigma}(\mathbf{f}), \quad (\text{П.3.12})$$

где, как и раньше (см. (2.40)),

$$H^{\alpha\beta\sigma}(\mathbf{f}) = m^{\alpha\beta}(\mathbf{f}) - m^{\beta\alpha}(\mathbf{f}). \quad (\text{П.3.13})$$

По определению тензор Белинфанта имеет вид

$$P_{(B)}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{f}) = P^{\alpha\beta}(\mathbf{f}) + \frac{1}{2}(H^{\alpha\beta\sigma}(\mathbf{f}) + H^{\beta\alpha\sigma}(\mathbf{f}) - H^{\sigma\beta\alpha}(\mathbf{f})),_\sigma. \quad (\text{П.3.14})$$

Учитывая формулы (П.1.9) – (П.1.11), а также соотношения (П.3.6) и (П.3.7), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(H^{\alpha\beta\sigma}(\mathbf{f}) + H^{\beta\alpha\sigma}(\mathbf{f}) - H^{\sigma\beta\alpha}(\mathbf{f})),_\sigma &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, \beta}} f_r^\sigma + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\beta r, a}} f_r^\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, \beta}} f_r^\alpha - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, a}} f_r^\beta \right),_\sigma + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, \beta}} f_{\sigma r, a}^\alpha - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_{\sigma r, a}} f_{\sigma r, \beta}^\alpha \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, \beta}} u_{A, a}^\alpha - \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, a}} u_{A, \beta}^\alpha \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\nu}^{B\sigma} u_B^{\nu\beta} - \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, a}} S_{Aa}^{B\sigma} u_B^{\nu\beta} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\nu}^{B\sigma} u_B^{\nu\alpha} + \frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial u_{A, a}} S_{A\nu}^{B\beta} u_B^{\nu\alpha} + \frac{1}{2} [f^{\beta\sigma}(\lambda^{\alpha} - \lambda^{\sigma}) + \\ &\quad + f^{\alpha\sigma}(\lambda^{\beta} - \lambda^{\sigma})] - (\lambda^{\sigma} f^{\alpha\beta}),_\sigma - \lambda^{\sigma} f_{\sigma, \alpha}^\beta + \gamma^{\alpha\beta} \lambda_{\sigma, \nu}^\sigma f_\sigma^\nu. \end{aligned} \quad (\text{П.3.15})$$

После подстановки (П.3.10) и (П.3.15) в (П.3.14) для тензора энергии-импульса Беллинфанте найдем:

$$\begin{aligned}
 P_{(B)}^{(\alpha\beta)}(t) = & -\gamma^{\alpha\beta}(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \beta}} t_{\sigma r, \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \alpha}} t_{\sigma r, \beta} \right) + \\
 & + \left( \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\alpha r, \beta}} t_r^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{r \beta, \alpha}} t_r^\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \beta}} t_r^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \alpha}} t_r^\beta \right)_\sigma + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} u_{A, \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} u_{A, \beta} \right) + (\gamma^{\alpha\beta} \lambda^\nu t_\nu^\sigma - \lambda^\sigma t^{\alpha\beta})_{,\sigma} + \\
 & + \frac{1}{2} [t^{\beta\sigma} (\lambda^\alpha_{,\sigma} - \lambda^\alpha_{,\sigma}) + t^{\alpha\sigma} (\lambda^\beta_{,\sigma} - \lambda^\beta_{,\sigma})] + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\nu}^{B\alpha} \gamma^{\nu\sigma} u_B - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} S_{A\nu}^{B\sigma} \gamma^{\nu\beta} u_B - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\nu}^{B\sigma} \gamma^{\nu\alpha} u_B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} S_{A\nu}^{B\beta} \gamma^{\nu\sigma} u_B \right)_{,\sigma}. \tag{П.3.16}
 \end{aligned}$$

Наконец, учитывая здесь соотношение (4.12), получим:

$$\begin{aligned}
 P_{(B)}^{(\alpha\beta)}(t) = & -\gamma^{\alpha\beta}(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \beta}} t_{\sigma r, \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \alpha}} t_{\sigma r, \beta} \right) + \\
 & + \left( \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\alpha r, \beta}} t_r^\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\beta r, \alpha}} t_r^\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \beta}} t_r^\alpha - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial t_{\sigma r, \alpha}} t_r^\beta \right)_\sigma + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} u_{A, \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} u_{A, \beta} \right) + (\gamma^{\alpha\beta} \lambda^\nu t_\nu^\sigma - \lambda^\sigma t^{\alpha\beta})_{,\sigma} + \\
 & + \frac{1}{2} [t^{\beta\sigma} (\lambda^\alpha_{,\sigma} - \lambda^\alpha_{,\sigma}) + t^{\alpha\sigma} (\lambda^\beta_{,\sigma} - \lambda^\beta_{,\sigma})] - \\
 & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \alpha}} S_{A\nu}^{B\sigma} \gamma^{\nu\beta} u_B + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial u_{A, \beta}} S_{A\nu}^{B\sigma} \gamma^{\nu\alpha} u_B \right)_{,\sigma}. \tag{П.3.17}
 \end{aligned}$$

Выбирая в качестве лагранжиана  $\mathcal{L}_g$  выражение (П.2.1), а  $\mathcal{L}_M$  полагая равным нулю, из (П.3.17) найдем

$$R_{(B)}^{(\alpha\beta)}(f) = -\gamma^{\alpha\beta} \mathcal{L}_f + \frac{1}{32\pi} (\partial^\alpha f_{\mu\nu} \partial^\beta f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha f_\mu^\mu \partial^\beta f_\nu^\nu) + \\ + \frac{1}{32\pi} (f^{\sigma\nu} \{^a_{\nu\sigma} \beta^\beta + f^{\sigma\nu} \{^{\beta a}_{\nu\sigma} - f^{a\nu} \{^{\sigma\beta}_{\nu\sigma} - f^{\beta\nu} \{^{\sigma a}_{\nu\sigma} \}_{,\sigma}.$$

Эта формула полностью совпадает с тензором Белинфакте, полученным в приложении 2 (см. (П.2.7)).

ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ МОНОПОЛИ  
НЕИЗБЕЖНЫМ СЛЕДСТВИЕМ ТЕОРИИ БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ?

Н.В. Красников

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Как хорошо известно, теории большого объединения предсказывают существование монополий Кофта-Поликова с массой  $M_{\text{mon}} \sim (10^{15}-10^{17}) \text{ GeV}$ . Существование монополий с такой массой приводит к некоторым трудностям в космологии. Поэтому интересно исследовать вопрос: являются ли монополии неизбежным следствием теории большого объединения? В этой статье мы описываем модификацию моделей великого объединения, в которой монополии Кофта-Поликова отсутствуют. Основной недостаток предложенной модификации — отсутствие перенормируемости. В принципе, учет гравитационного

взаимодействия может привести к наличию ненормируемых членов в эффективном лагранжиане. Поэтому не исключено, что учет гравитационного взаимодействия приведет к исчезновению монополей Хофта-Поликова.

Рассмотрим простейшую модель, описывающую взаимодействие  $SU(2)$  - калибровочных полей с триплетом скалярных полей. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2}D_\mu U_a D_\nu U_a - P(U_a),$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (1).$$

$$D_\mu U_a = \partial_\mu U_a + e \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c,$$

$$P(U_a) = \lambda (U_a^2 - F^2)^2$$

Монопольное решение Хофта-Поликова имеет вид

$$\begin{aligned} U_a(r, t) &= r_a \psi(r), \\ W_0^a &= 0, \\ W_i^a &= \epsilon_{iab} r_b W(r), \\ r_a &= (x, y, z), \quad r_a^2 = r^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Масса монополя Хофта-Поликова определяется минимумом функционала

$$\begin{aligned} M_{\text{mon}} &= - \int \mathcal{L} d^3x = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left[ r^2 \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 + \right. \\ &+ 4rW \frac{dW}{dr} + 6W^2 + 2e r^2 W^3 + \frac{1}{2} e^2 r^4 W^4 + \\ &+ \left. \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{dU}{dr} \right)^2 + rU \frac{dU}{dr} + \frac{3}{2} U^2 + 2e r^2 W U^2 \right], \end{aligned}$$

$$+ e^2 r^4 W^2 (\mathcal{Q}^2 + \lambda (r^2 \mathcal{Q}^2(r) - F^2)^2]. \quad (3)$$

Из условия конечности массы монополя следует, что при  $r \rightarrow \infty$

$$W_i^a(r) = - \frac{\epsilon_{cab} r_b}{er^2}, \quad (4)$$

$$\mathcal{Q}_a(r) = F \frac{r_a}{r}$$

Добавим к лагранжиану (1) модельный член вида  $\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{A^4} \left( \frac{1}{2} D_\mu Q_a D_\mu Q_a \right)^2$  и рассмотрим лагранжиан (1) в пределе сильной связи  $\lambda \rightarrow \infty$ . Предел  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствует наложению дополнительного условия  $\mathcal{Q}_a^2 = F^2$ . Масса монополя Хофта-Полякова в модифицированной модели (1) определяется минимумом функционала

$$M_{\text{mon}} = - \int [\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}] d^3x =$$

$$4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left[ r^2 \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 + 4rW \frac{dW}{dr} + 6W^2 + \frac{F^4}{16r^4} \left( \frac{1}{2} + eWr \right)^2 + 2e^2 r^2 W^3 + \frac{1}{2} e^2 r^4 W^4 + F^2 \left( \frac{1}{2} + eWr \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{F^4}{16r^4} \left( \frac{1}{2} + eWr \right)^4 \right]. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что для функционала (5) при любом выборе  $W(r)$  невозможно получить конечную величину для массы монополя. Действительно, последний член в выражении (5) расходится как  $\int \frac{dr}{r^2}$  при  $r \rightarrow 0$  для конечных в куло  $W(r)$ . В принципе, можно скомпенсировать ультрафильтровую расходимость последнего члена в интеграле (5), потребовав, чтобы  $W(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{1}{er^2}$ , однако при таком выборе асимптотики  $W(r)$  первые члены в функционале (5) будут расходящимися при  $r \rightarrow 0$ .

Таким образом, мы доказали, что для модифицированного лагранжиана (1) монополи с конечной массой отсутствуют. Нетрудно видеть, что это не утверждение справедливо для лагранжиана  $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$  с любым потенциалом, образующим в бесконечность волны  $\mathcal{Q}_a = 0$ .

К сожалению, модифицированный лагранжиан (1) не является перенормируемым. В принципе, учет гравитационных эффектов может привести к появлению неперенормируемого члена вида  $\frac{1}{M^4} \left( \frac{1}{2} (\mathcal{V}_a \mathcal{V}_a)^2 \right)^2$ . В этой связи следует отметить, что топологические соображения приводят только либо к конечности функционалов (3) и (5) в кибер-красной ( $r \rightarrow \infty$ ) области для монопольного решения. Сходимость не соответствующих интегралов в ультрафиолетовой области ( $r \rightarrow 0$ ), где эффекты гравитации несомненно важны, зависит от конкретной формы лагранжиана на малых расстояниях, поэтому не исключено, что эффекты гравитации приведут к бесконечной массе монополей.

То, что эффекты гравитации могут быть определяющими, видно уже из следующего примера. Рассмотрим лагранжиан (1) с потенциалом  $P(\mathcal{V}_a) = \lambda (\mathcal{V}_a^2 - F^2)^2 (\mathcal{V}_a^2 - F_o^2)$ . Этот потенциал имеет минимум  $\mathcal{V}_a = F \delta_{a3}$  с кульевой плотностью энергии вакуума, изующий локальную калибровочную группу  $SO(3)$  до  $SO(2)$ . Однако этот минимум не является абсолютным. Калибровочно-инвариантный минимум  $\mathcal{V}_a = 0$  обладает отрицательной плотностью энергии  $-\lambda F_o^2 F^4$ . Без учета эффектов гравитации мы ожидали бы фазовый переход из вакуума  $\mathcal{V}_a = F \delta_{a3}$  в энергетически более выгодный вакуум  $\mathcal{V}_a = 0$ . Кроме того, в описанной системе монополь Хофта-Поликова было бы энергетически не выгодно образовывать по сравнению с вакуумом  $\mathcal{V}_a = 0$  и он бы просто неустойчив. Однако при учете эффектов гравитации туннелирование из вакуума  $\mathcal{V}_a = F \delta_{a3}$  в вакуум  $\mathcal{V}_a = 0$  становится невозможным и вакуум  $\mathcal{V}_a = F \delta_{a3}$  становится устойчивым. Учет гравитационных эффектов приводит также к устойчивости монопольной Хофта-Поликова относительно распада в вакуум  $\mathcal{V}_a = 0$ .

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА МАССИВНЫХ ПОЛЕЙ  
В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

В.П.Фролов, А.И.Зельников

Физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР, Москва

Цель настоящей работы состоит в изучении вклада массивных полей в эффект поляризации вакуума в гравитационном поле вращающейся черной дыры. В работе вычислено среднее значение по вакууму Хартли-Хокинга  $\langle H \rangle / I$  тензора энергии-импульса массивных склянкого ( $s=0$ ), дираховского спинорного ( $s=1/2$ ) и векторного ( $s=1$ ) полей, удовлетворяющих уравнениям:

$$(\nabla^\xi \nabla_\xi - \xi R - m^2) \Phi^{(0)} = 0 ,$$

$$(\gamma^\xi \nabla_\xi + m) \Phi^{(1/2)} = 0 ,$$

$$(\delta_\alpha^\beta \nabla^\xi \nabla_\xi - \nabla_\alpha \nabla^\beta - R_\alpha^\beta - m^2 \delta_\alpha^\beta) \Phi^{(1)}_\beta = 0 ,$$

$$\hbar = c = G = 1 , \quad R^M_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^M_{\nu\beta} + \dots , \quad R_{\mu\nu} = R^\xi_{\mu\nu}$$

В приближении, когда комптоновская длина волны  $\lambda = \hbar/mc$  много меньше размера горизонта. Соответствующая метрика (метрика Керра) в координатах Бойера-Линдхуса имеет вид

$$ds^2 = -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}) dt^2 - \frac{4Mr a}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 +$$
$$+ (r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \Sigma d\theta^2 ,$$

где  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

Вычисление вакуумного тензора энергии-импульса  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{ren}^{(s)}$  проводится методом эффективного действия де Витта [2]. В рассматриваемом приближении эффективное действие

$$W_{ren}^{(s)} = (32\pi^2 m^2)^{-1} (-1)^{25} \text{Tr} \{ d^4 x \lg l^{1/2} \alpha_3^{(s)}(x) + O(m^{-4}) \},$$

где  $\alpha_3$  - матричные коэффициенты де Витта.

Подставляя в  $W_{ren}^{(s)}$  общее выражение для  $\alpha_3$ , найденное Джилки [3], в случае вакуумных пространств, получаем

$$W_{ren}^{(s)} = (96 \cdot 7! \pi^2 m^2)^{-1} \{ d^4 x \lg l^{1/2} \{ \alpha_5 R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\epsilon\zeta} R_{\epsilon\zeta}^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} \beta_5 R R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\alpha\beta\gamma\delta} \} + O(m^{-4}) \},$$

где  $\alpha_5 = I$ ;  $\alpha_{1/2} = -4$ ;  $\alpha_1 = 3$ ;  $\beta_0 = 216 - 1008 \xi$ ;  $\beta_{1/2} = 144$ ;

$\beta_1 = -360$ . Варьируя  $W_{ren}^{(s)}$  по метрике, имеем

$$\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{ren}^{(s)} = \frac{2}{18 I^{1/2}} \frac{\delta W_{ren}^{(s)}}{\delta g_{\mu\nu}} = (96 \cdot 7! \pi^2 m^2)^{-1} \{ \alpha_5 \theta_{(1)}^{\mu\nu} + \beta_5 \theta_{(2)}^{\mu\nu} \},$$

$$\theta_{(1)\mu}^{\nu} = 6 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\nu} C^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{3}{2} \delta_{\mu}^{\nu} I^{\epsilon\zeta} - 5 \delta_{\mu}^{\nu} J,$$

$$\theta_{(2)\mu}^{\nu} = \frac{1}{6} I^{\nu\zeta} - \frac{1}{6} \delta_{\mu}^{\nu} I^{\epsilon\zeta}.$$

Здесь  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  - тензор Вейля;  $I \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ;  $J \equiv C_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} C_{\gamma\delta}^{\epsilon\zeta} C_{\epsilon\zeta}^{\alpha\beta}$ . Конкретные вычисления  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{ren}^{(s)}$  для метрики Керра удобно проводить в формализме Ньюмена-Пенроуза. В результате вычислений окончательно получаем:

$$\theta_{(1,2)\mu}^{\nu} = 48 M^2 \text{Re} \{ \tau_{(1,2)\mu}^{\nu} \},$$

$$\tau_{(1)t}^t = \rho^8 (-45 + 106 u) + 8 \rho^7 \mu, \quad \tau_{(1)\varphi}^t = -36 \rho^8 u \sin^2 \theta, \quad$$

$$\tau_{(1)t}^{\varphi} = 0, \quad \tau_{(1)\mu}^{\nu} = \rho^8 (-27 + 36w - 2u) + 8 \rho^7 \mu, \quad$$

$$\tau_{(1)\varphi}^{\varphi} = \rho^8 (-27 + 70u) + 8 \rho^7 \mu, \quad \tau_{(1)\theta}^{\theta} = \rho^8 (9 - 36w + 70u) + 8 \rho^7 \mu, \quad$$

$$\tau_{(1)r}^{\theta} = \tau_{(1)\theta}^{\nu} / \Delta = 36i \rho^8 u \sin \theta / \Sigma, \quad$$

$$\tau_{(2)t}^t = \rho^8 (-5 + 12u + 2uw) + \rho^7 \mu (2 - 2u - w + 4\tau w), \quad$$

$$\tau_{(2)t}^{\varphi} = 2 \rho^8 u \alpha / \Sigma + \rho^7 \mu \alpha (4u - 1) / \Sigma, \quad$$

$$\tau_{(2)\varphi}^t = -2 \rho^8 u \alpha^3 \sin^4 \theta / \Sigma + \rho^7 \mu \alpha (4u - 1) \sin^2 \theta, \quad$$

$$\tau_{(2)\varphi} = \rho^8 (-6 + 16u - 2uw) + \rho^7 M (1 + 2v + w - 4vw),$$

$$\tau_{(2)r} = \rho^8 (-6 + 8w) + \rho^7 M (1 + 2v),$$

$$\tau_{(2)\theta} = \tau_{(2)\varphi} / \Delta = 8i \rho^8 \alpha \sin \theta / \Sigma,$$

$$\tau_{(2)\theta} = \rho^8 (2 - 8w + 14u) + \rho^7 M (2 - 2v).$$

Здесь  $\rho = -(r - i\alpha \cos \theta)^{-1}$ ,  $M = M/\Sigma$ ,  $u = Mr/\Sigma$ ,  
 $v = r^2/\Sigma$ ,  $w = (r^2 + \alpha^2)/\Sigma$ .

Полученный тензор энергии-импульса обладает следующими свойствами: 1)  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{\text{gen}}^{(4)}$  отличается от средних значений  $\langle V | T_\mu^\nu | V \rangle_{\text{gen}}^{(4)}$  и  $\langle U | T_\mu^\nu | U \rangle_{\text{gen}}^{(4)}$ , вычисленных соответственно по вакуумным состояниям Бульвара  $|B\rangle$  и Янга  $|U\rangle$ , на величины, пропорциональные  $\exp\{-r_B/\lambda\}$ . В нашем приближении  $\lambda \ll r_B$  и этим отличием всегда можно пренебречь. 2) Его компоненты в координатах Бойера-Линдквиста остаются конечными на горизонте. 3) В частном случае шварцшильдовской черной дыры  $\alpha = 0$  воспроизводится полученный ранее в нашей работе <sup>4/</sup> результат для скалярного поля. Любопытно, что поведение компонент  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{\text{gen}}^{(4)}$  качественно аналогично поведению соответствующих компонент тензора энергии-импульса в случае безмассового конформного скалярного поля <sup>5/</sup>. 4) Для вращающейся черной дыры  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{\text{gen}}^{(4)} \neq 0$  и, следовательно, около черной дыры существует циркулярный поток энергии, что приводит к эффекту экранировки (в случае векторного поля) и антизакранировки (в случае скалярного и спинорного полей) углового момента черной дыры.

Более подробное обсуждение свойств  $\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{\text{gen}}^{(4)}$  можно найти в работе <sup>6/</sup>.

#### Литература

1. J.B.Hartle, S.W.Hawking. Phys.Rev., D13, 2188 (1976).  
S.W.Hawking, Comm.Math.Phys., 80, 421 (1981).
2. B.S.DeWitt."Dynamical theory of groups and fields" (Gordon and Breach, 1965); S.M.Christensen. Phys.Rev., D17, 946 (1978).
3. P.B.Gilkey. J.Diff.G geom., 10, 601 (1975).
4. V.P.Frolov, A.I.Zel'nikov. Phys.Lett., 115B, 372 (1982).
5. M.S.Fawcett."The energy-momentum tensor near a black hole", prepr., University of Otago, Dunedin, New Zealand (1982).
6. V.P.Frolov, A.I.Zel'nikov."Vacuum polarization of massive fields near rotating black holes", prepr., Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del IPN, Mexico, (1983).

ON CONNECTION BETWEEN THE SOLUTIONS OF THE QUANTUM  
AND CLASSICAL TRIANGLE EQUATIONS

V.V.Bazhanov, Yu.G.Stroganov

Institute for High Energy Physics, Serpukhov

The following functional equations

$$R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(\theta) R_{j_1 j_3}^{k_1 k_3}(\theta) R_{j_2 j_3}^{k_2 k_3}(\theta' - \theta) = R_{i_2 i_3}^{j_2 j_3}(\theta' - \theta) R_{i_1 i_3}^{j_1 k_3}(\theta') R_{j_1 j_2}^{k_1 k_2}(\theta) \quad (1)$$

for the set of meromorphic functions  $R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(\theta)$  of the complex variable  $\theta$  are called the triangle equations (or Yang-Baxter equations). The indices run over the values 1, ..., n, the summation over repeated indices is assumed.

For the first time eq. (1) has appeared in refs. /1,2/ and now it plays an important role in the theory of completely integrable quantum systems.

Let us introduce compact notations. The four-index quantity  $R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(\theta)$  will be considered as matrix elements of some matrix  $R(\theta)$  acting in the tensor product of two n-dimensional vector spaces. Further, introduce the matrices  $R^{12}(\theta)$ ,  $R^{13}(\theta)$ ,  $R^{23}(\theta)$  acting in the tensor product of three n-dimensional vector spaces according to the following rule

$$(R^{12}(\theta))_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(\theta) \delta_{j_3}^{j_3}$$

( $R^{13}(\theta)$  and  $R^{23}(\theta)$  are defined similarly, they act identically in the second and third spaces, respectively). In new notations eq. (1) takes the form

$$R^{12}(\theta) R^{13}(\theta') R^{23}(\theta' - \theta) = R^{23}(\theta' - \theta) R^{13}(\theta') R^{12}(\theta). \quad (1a)$$

Any solution of eq. (1)  $R(\theta, \eta)$  is called quasiclassical one if it depends on an additional parameter  $\eta$  and has the following expansion for small  $\eta$

$$R(\theta, \eta) = I + \eta r(\theta) + O(\eta^2) \quad (2)$$

Substituting (2) into (1) one can obtain classical triangle equations<sup>/3, 4/</sup>, which play an important role in the theory of classical integrable systems

$$[r^{12}(\theta), r^{13}(\theta')] + [r^{12}(\theta), r^{23}(\theta' - \theta)] + [r^{13}(\theta'), r^{23}(\theta' - \theta)] = 0, \quad (3)$$

where  $[\cdot, \cdot]$  stands for commutator,  $r \in \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ , where  $\mathfrak{G}$  denotes Lie algebra of  $n$  by  $n$  matrices, i.e.  $r(\theta) = \mathbb{I}_{\alpha\beta}(\theta) \mathbb{I}^\alpha \otimes \mathbb{I}^\beta$ , where  $\{\mathbb{I}^\alpha\}$  is a basis in  $\mathfrak{G}$ . The solution of eq. (3)  $r(\theta)$  is called nondegenerated if  $\det(r_{\alpha\beta}(\theta))$  does not vanish identically.

Recently, the classification of the nondegenerated solutions of eq. (3) for all simple Lie algebras has been constructed<sup>/5/</sup>. It was shown that these solutions can be expressed through elliptic, trigonometric or rational functions only. Moreover, all the elliptic and trigonometric solutions and some rational solutions have been constructed explicitly<sup>/5/</sup>. Note, that corresponding solutions of quantum triangle equations (1) are known only for few cases.

Thus, there arises the problem to construct the corresponding solutions of quantum eq. (1) (assuming that they exist) starting with known solutions of classical eq. (3).

We find out, that for the known elliptic solutions<sup>/4/</sup> of eq. (1), connected with  $sl(n)$  algebra, this problem is solved with the help of the formula

$$R(\theta, \eta) = \phi(\theta, \eta) P \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} r(s) ds \right\}, \quad (4)$$

where  $\phi(\theta, \eta)$  is some normalization factor, the symbol  $P$  means an ordering along the integration path. The elliptic solution<sup>/4/</sup> has the form

$$R(\theta, \eta) = g(\theta, \eta) \sum_{\alpha, \beta=0}^{n-1} \frac{\Theta_{\alpha\beta}(\theta - \eta/n)}{\Theta_{\alpha\beta}(-\eta/n)} (\mathbb{I}_{\alpha\beta} \otimes \mathbb{I}_{\alpha\beta}^+), \quad (5)$$

$$r(\theta) = -\frac{\Theta'_{00}(0)}{n} \sum_{\alpha+\beta>c} \frac{\Theta_{\alpha\beta}(\theta)}{\Theta_{\alpha\beta}(0)\Theta_{00}(\theta)} (\mathbb{I}_{\alpha\beta} \otimes \mathbb{I}_{\alpha\beta}^+), \quad (6)$$

where

$$\Theta_{\alpha\beta}(\theta - \frac{1}{2} - \frac{r}{2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i\pi r(m + \frac{\alpha}{n})^2 + 2\pi i(m + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n})(\theta + \frac{\beta}{n}) \right\}$$

$$g(\theta, \eta) = -\Theta_{00}(\eta) [\Theta_{00}(\theta + \eta)]^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n} [\Theta_{00}(\theta - \eta)]^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n}$$

$$(\mathbb{I}_{\alpha\beta})_k^\ell = \delta_{\alpha+\ell}^\ell \exp(2\pi i \beta \ell / n)$$

the matrices  $\{I_{\alpha\beta}\}$  form a basis in  $sl(n)$  algebra, cross denotes the hermitian conjugation,  $\delta_k^\ell = 1$ , if  $k \equiv \ell \pmod{n}$ ,  $Im \tau > 0$ . Note, that for  $n = 2$  eq. (5) reduces to the Baxter's solution<sup>[2]</sup>.

One can immediately check, that eq. (5) satisfies the differential equation

$$\partial/\partial\eta R(\theta, \eta) = \frac{1}{2} [r(\theta - \eta)R(\theta, \eta) + R(\theta, \eta)r(\theta + \eta)],$$

$$R(\theta, 0) = 1.$$

which is equivalent to (4) for  $\phi(\theta, \eta) = 1$ .

We suppose that eq. (4) may be generalized for other solutions of eq. (3), connected with  $sl(n)$  algebra. A possibility to generalize eq. (4) for other algebras is also studied.

The authors thank A.A.Belavin for driving the authors' attention to this problem and to S.N.Sokolov for reading the manuscript and useful comments.

#### REFERENCES

1. Yang C.N. *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 19, 1312.
2. Baxter R.J. *Ann. Phys.*, 1972, 70, 193.
3. Склянин Е.К. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 95, стр. 55-128, Ленинград, 1980.
4. Belavin A.A. *Nucl. Phys.*, 1981, B180 (FS2), 180.
5. Белавин А.А., Дринфельд В.Г. *Функ. анализ*, 1982, 16, 1.

## МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Г.П.Пронько

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В настоящей работе предлагается формализм для описания релятивистской струны с помощью так называемого метода обратной задачи рассеяния, точнее его модификации для периодических потенциалов, которая развивалась в работах Новикова, Дубровина, Матвеева и Итса<sup>/5-7/</sup>. Применение этого метода позволило найти регулярную процедуру редукции струны  $x$  системам с конечным числом степеней свободы. Первый пример такой редукции был построен в работе<sup>/4/</sup> без обращения к методу обратной задачи простым "замораживанием" бесконечного числа степеней свободы. Возникающая при этом система с конечным числом степеней свободы, сохраняя характерные черты релятивистской струны, допускает последовательное квантовое описание в пространстве любого числа измерений. Несмотря на конечное число степеней свободы, редуцированная система обладает богатым спектром постоянных и реджевскими траекториями, которые в отличие от традиционных оказываются нелинейными. Следует напомнить, что существующие в настоящее время методы квантования, с которыми можно ознакомиться, например, в обзоре<sup>/8/</sup>, не приводят последовательной теории струны в пространстве с любым числом измерений. В данной работе мы рассматриваем только случай четырехмерного пространства-времени, хотя, в принципе, аналогичные построения возможны и для большего числа измерений.

Несомненным преимуществом предлагаемого подхода является его релятивистская и калибровочная инвариантность. Так, например, нам удалось построить полный набор инволютивных, релятивистски-инвариантных интегралов движения. Эти функционалы генерируют гамильтоновые потоки на фазовом пространстве струны, причем точки стационарности этих потоков образуют конечномерные орбиты калибровочной группы.

Аналогичные потоки в теории уравнений Кортевега-де Фриза (КдФ) называют высшими уравнениями КдФ. Введя понятие о высших струнных уравнениях, можно сказать, что их стационарные решения образуют конечномерное пространство, соответствующее калибровочно-инвариантной редукции фазового пространства струны.

Предлагаемый нами формализм основан на изучении вспомогательной спектральной задачи для матричной системы первого порядка. Аналогичная система, но с меньшим числом компонент потенциала, возникает в теории периодических решений нелинейного уравнения Шредингера<sup>/7/</sup>. В работе содержится вывод и обсуждение основных свойств функций Блоха и спектра необходимых для

введения и формулировки условий конечнозонности конфигурации струны. Показано, что условие конечнозонности эквивалентно условию стационарности относительно одного из высших струнных уравнений. В заключение обсуждается квантование струны в конечнозонном спектре.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Релятивистская струна в четырехмерном пространстве-времени задается с помощью набора функций от двух параметров:

$$x_\mu = x_\mu(\sigma, \tau), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Параметр  $\tau$  описывает эволюцию струны, в то время как  $\sigma$  нумерует её точки.

Мы будем рассматривать замкнутую струну, поэтому удобно взять область изменения параметра  $\sigma$  от 0 до  $2\pi$ , причем

$$x_\mu(0, \tau) = x_\mu(2\pi, \tau).$$

Удобно также считать, что функции  $x_\mu(\sigma, \tau)$  периодическим образом продолжены на все остальные значения  $\sigma$ .

Следуя работам<sup>1/</sup>, мы выбираем действие для струны в виде

$$S = -\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad (1)$$

где точка и штрих обозначают производные по  $\tau$  и  $\sigma$  соответственно. Для простоты будем считать, что размерный множитель  $2\pi a$ , обеспечивающий кулевую размерность действию, равен 1.

Как известно, действие (1) является параметрически инвариантным, вследствие чего канонический гамильтониан равен нулю, и в соответствии с теорией Дирака<sup>2/</sup> роль гамильтониана выполняет линейная комбинация связей

$$x_1(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} (p^2(\sigma, \tau) + x'^2(\sigma, \tau)), \quad x_2(\sigma, \tau) = p(\sigma, \tau) x^1(\sigma, \tau).$$

Канонические импульсы, фигурирующие в этих формулах, определены равенством

$$p_\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\delta S}{\delta \dot{x}_\mu(\sigma, \tau)}.$$

Каноническая скобка Пуассона для координат и импульсов замкнутой струны имеет следующий вид:

$$\{x_\mu(\sigma, \tau), p_\nu(\sigma', \tau)\} = g_{\mu\nu} \Delta(\sigma - \sigma'), \quad (2)$$

где  $\Delta(\sigma)$  – периодическая  $\delta$ -функция

$$\Delta(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

Связи  $x_1(\sigma, \tau)$  и  $x_2(\sigma, \tau)$  образуют относительно скобки (2) алгебру связей первого рода<sup>2/</sup>. Подробное обсуждение этой алгебры и соответствующей группы содержится в<sup>3/</sup>.

Введя обозначения

$a_\mu(\sigma, r) = p_\mu(\sigma, r) + x'_\mu(\sigma, r)$ ,  $b_\mu(\sigma, r) = p_\mu(\sigma, r) - x'_\mu(\sigma, r)$ ,  
удобно перейти к линейным комбинациям связей  $x_1$  и  $x_2$ :

$$L(\sigma, r) = -\frac{1}{4}a^2(\sigma, r), \quad \bar{L}(\sigma, r) = \frac{1}{4}b^2(\sigma, r). \quad (3)$$

Используя скобку (2), можно убедиться в том, что переменные  $a_\mu(\sigma, r)$  и  $b_\mu(\sigma, r)$  и связи (3) удовлетворяют соотношениям

$$\{a_\mu(\sigma, r), a_\nu(\sigma', r)\} = -\{b_\mu(\sigma, r), b_\nu(\sigma', r)\} = 2g_{\mu\nu}\Delta'(\sigma - \sigma'),$$

$$\{a_\mu(\sigma, r), b_\nu(\sigma', r)\} = 0,$$

$$\{L(\sigma, r), L(\sigma', r)\} = -(L(\sigma, r) + L(\sigma', r))\Delta'(\sigma - \sigma'),$$

$$\{\bar{L}(\sigma, r), \bar{L}(\sigma', r)\} = -(\bar{L}(\sigma, r) + \bar{L}(\sigma', r))\Delta'(\sigma - \sigma'),$$

$$\{L(\sigma, r), \bar{L}(\sigma', r)\} = 0.$$

Генераторы группы Пуанкаре получаются с помощью теоремы Нетер стандартным образом и имеют следующий вид:

$$P_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma p_\mu(\sigma, r) = \int_0^{2\pi} d\sigma b_\mu(\sigma, r) = \int_0^{2\pi} d\sigma a_\mu(\sigma, r), \quad (4)$$

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{2\pi} d\sigma (x_\mu(\sigma, r)p_\nu(\sigma, r) - x_\nu(\sigma, r)p_\mu(\sigma, r)). \quad (5)$$

Из  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$  можно построить псевдовектор Паули-Любансского

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} P_\mu M_{\nu\rho}$$

и тензор спина<sup>4)</sup>

$$S_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - \frac{1}{P^2} (M_{\mu\rho} P^\rho P_\nu - M_{\nu\rho} P^\rho P_\mu) = \frac{1}{P^2} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho W_\rho.$$

Импульс и момент (4), (5) образуют относительно скобки Пуассона обычную алгебру Ли группы Пуанкаре. Как отмечалось в работе<sup>4/</sup>, для замкнутой релятивистской струны существует разбиение  $S_{\mu\nu}$  на сумму двух интегралов движения. Введем векторы

$$A_\mu = -\frac{1}{4\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\nu \int_0^{2\pi} d\sigma a^\rho(\sigma) \int_0^\sigma d\sigma' a^r(\sigma'), \quad (6)$$

$$B_\mu = \frac{1}{4\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\nu \int_0^{2\pi} d\sigma b^\rho(\sigma) \int_0^\sigma d\sigma' b^r(\sigma').$$

Нетрудно убедиться в том, что векторы (6) не зависят от  $r$  и образуют относительно скобки Пуассона алгебру, являющуюся прямой суммой двух алгебр, каждая из которых совпадает с алгеброй Ли малой группы четырехимпульса  $P_\mu$ :

<sup>4)</sup> Считаем, что  $P^2 \neq 0$ , случай  $P^2 = 0$  нужно рассматривать особо.

$$[A_\mu, A_\nu] = -\frac{1}{\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho A^r, [B_\mu, B_\nu] = -\frac{1}{\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho B^r, [A_\mu, B_\nu] = 0.$$

Введя тензоры

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho A^r, B_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{P^2}} \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho B^r,$$

мы видим, что

$$S_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Соотношение (7) не случайно, в действительности все величины, связанные с внутренними степенями свободы замкнутой струны, можно разбить на два слагаемых, аналогичных (6), одно из которых зависит от переменных  $a_\mu(\sigma)$ , второе – от переменных  $b_\mu(\sigma)$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Классическая динамика релятивистской струны довольно проста – гамильтоновы уравнения решаются в произвольной калибровке<sup>3/</sup>, однако, несмотря на то, что задача Коши полностью решена, до сих пор не удавалось построить инволютивные релятивистски инвариантные интегралы движения струны. Приведенный метод обратной задачи рассеяния<sup>5/</sup>, удалось получить полный набор таких интегралов в классической теории. Более того, спектр вспомогательной обратной задачи позволяет естественным образом выделить из фазового пространства струны подпространства с конечным числом степеней свободы, причем, что самое главное, делается это калибровочно-инвариантным способом.

При анализе вспомогательной спектральной задачи мы основываемся на результатах, полученных в работах Новикова, Дубровина, Матвеева и Итса, посвященных исследованию периодических решений уравнения Кортевега-де Фриза<sup>5-7/</sup>.

Перейдем к описанию спектральной задачи. Как говорилось выше, удобно вместо канонических переменных  $p_\mu(\sigma, r)$  и  $x_\mu(\sigma, r)$  использовать переменные  $a_\mu(\sigma, r)$  и  $b_\mu(\sigma, r)$ , дополнив их усредненной координатой  $X_\mu$  (способ усреднения не играет особой роли, и мы не будем его конкретизировать).

Далее, для случая  $P^2 \neq 0$ , который мы будем рассматривать, можно ввести тетраду, связанную с полным импульсом:

$$e_\mu^0 = \frac{P_\mu}{\sqrt{P^2}}, e_\mu^i e^{i\mu} = 0, e_\mu^i e^{j\mu} = -\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

и вместо проекций на координатные орты рассматривать проекции  $a_\mu(\sigma)$  и  $b_\mu(\sigma)$  на компоненты тетрады. При этом

$a_\mu(\sigma) = e_\mu^0 a^0(\sigma) - e_\mu^i a^i(\sigma)$   
для трехмерных векторов, составленных из проекций четырехвекторов на  $e_\mu^i$ ,  
ниже мы будем применять обычные векторные обозначения. Заметим, что в  
силу (4) и (8)

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \vec{a}(\sigma) = 0 \quad (9)$$

и, поскольку вектор  $\vec{a}(\sigma)$  периодически зависит от  $\sigma$ , его можно считать касательной к некоторой замкнутой пространственной кривой  $u$ . Эта интерпретация в дальнейшем позволит существенно упростить формулы. Проекция  $a_\mu(\sigma)$  на нулевую компоненту тетрады физически малоинтересна и выбором калибровки ее можно сделать константой, поэтому в спектральной задаче достаточно использовать только  $\vec{a}(\sigma)$ . Рассмотрим матричную систему первого порядка

$$\frac{d}{ds} \psi(s, \lambda) = \frac{i\lambda}{2} a_i(s) \sigma_i \psi(s, \lambda), \quad (10)$$

где  $a_i$  — матрица Паули,  $\psi(s, \lambda)$  — двухкомпонентный спинор. При каждом значении спектрального параметра  $\lambda$  существует, вообще говоря, два линейно-независимых решения (10)  $\psi(s, \lambda)$ ,  $\phi(s, \lambda)$ :

$$\psi(s, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(s, \lambda) \\ \psi_2(s, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \phi(s, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(s, \lambda) \\ \phi_2(s, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Определитель Вронского для системы (10) имеет вид

$$W(\psi, \phi) = \det \begin{vmatrix} \psi_1(s, \lambda) & \phi_1(s, \lambda) \\ \psi_2(s, \lambda) & \phi_2(s, \lambda) \end{vmatrix}$$

и не зависит от  $s$ . Эрмитовость матрицы  $a_i a_i(s)$  приводит к существованию инволюции  $\psi(s, \lambda) \rightarrow \tilde{\psi}(s, \lambda)$  при произвольных комплексных  $\lambda$ , т.е. если

$$\psi(s, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(s, \lambda) \\ \psi_2(s, \lambda) \end{pmatrix}$$

является решением (10), то

$$\tilde{\psi}(s, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(s, \lambda^*) \\ \psi_1^*(s, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

также является решением с тем же  $\lambda$ .

Для системы (10) можно построить матрицу трансляции решений на период или матрицу монодромии  $T_s^{s+2\pi}(\lambda)$

$$T_s^{s+2\pi}(\lambda) = P \exp \frac{i\lambda}{2} \int_s^{s+2\pi} ds' a_i(s') \sigma_i, \quad (11)$$

где  $P$  обозначает упорядочение вдоль пути.

Перечислим некоторые элементарные свойства матрицы монодромии.

1. Унимодулярность при произвольных комплексных  $\lambda$ .

2. При вещественных  $\lambda$  матрица  $T_s^{s+2\pi}(\lambda)$  унитарна, при комплексных  $\lambda$  соотношение "унитарности" выглядит следующим образом:

$$T_s^{s+2\pi}(\lambda) (T_s^{s+2\pi}(\lambda^*))^* = 1. \quad (12)$$

3. Уравнение движения

$$\frac{d}{ds} T_s^{s+2\pi}(\lambda) = \frac{i\lambda}{2} a_i(s) [a_i, T_s^{s+2\pi}(\lambda)] \quad (13)$$

4.  $Sp T_s^{s+2\pi}(\lambda)$  не зависит от  $s$ .

5.  $Sp T_s^{s+2\pi}(\lambda)$  – интеграл движения.

6. Матричные элементы  $T_s^{s+2\pi}(\lambda)$  являются целыми функциями  $\lambda$ .

7.  $Sp T_s^{s+2\pi}(\lambda)$  – релятивистский инвариант.

Доказательства первых четырех свойств элементарны, и мы не останавливаемся на них. Свойство 5 следует из того, что эволюция  $a_i(s)$  сводится к перепараметризации [3]:

$$a_i(s, r) = F'(s, r)a_i(F(s, r), 0), \quad (14)$$

где  $F(s, r)$  – монотонная функция  $s$  при всех  $r$ , причем

$$F(s+2\pi, r) = F(s, r) + 2\pi.$$

Явный вид  $F(s, r)$  зависит от калибровки. Подставляя (14) в определение матрицы монодромии, получаем

$$T_s^{s+2\pi}(\lambda; r) = T_{F(s, r)}^{F(s, r)+2\pi}(\lambda; 0),$$

т.е. при изменении  $r$  меняется начальная точка  $s \rightarrow F(s, r)$ , но из свойства 4 следует, что след матрицы монодромии не зависит от начальной точки, следовательно, он не зависит и от  $r$ .

Для доказательства шестого свойства матрицы монодромии достаточно разложить её в ряд по степеням  $\lambda$ . Этот ряд сходится абсолютно при всех комплексных  $\lambda$ , откуда и следует отсутствие особенностей в конечной части комплексной плоскости  $\lambda$ .

Релятивистскую инвариантность следа матрицы монодромии проще всего доказать, разложив его в ряд по  $\lambda$ . Каждый член этого ряда представляется в виде

$$Sp(a_{i_1} \dots a_{i_n}) \int_0^{2\pi} d\sigma_1 \dots d\sigma_n P(a_{i_1}(\sigma_1) \dots a_{i_n}(\sigma_n)),$$

где  $P$  – знак упорядочения. После вычисления следа первый сомножитель в этой формуле становится тензором, составленным из инвариантных тензоров  $\delta_{ij}$  и  $\epsilon_{ijk}$ , индексы которых свернуты с индексами  $a_i$ . Напомним, что эти индексы являются номерами пространственных компонент тетрады (8). Пронесяв суммирование по этим индексам, мы получим выражение типа

$$R_{\mu_1 \dots \mu_n} \int d\sigma_1 \dots d\sigma_n P(a_{\mu_1}(\sigma_1) \dots a_{\mu_n}(\sigma_n)), \quad (15)$$

где  $R_{\mu_1 \dots \mu_n}$  – тензор, составленный из тензоров двух типов:

$$\delta_{ij} \epsilon_{\mu}^{i} \epsilon_{\nu}^{j} = -g_{\mu\nu} + \frac{P_{\mu} P_{\nu}}{P^2}$$

и

$$\epsilon_{\mu}^{i} \epsilon_{\nu}^{j} \epsilon_{\rho}^{k} \epsilon_{ij}^{kl} = \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{P_r}{\sqrt{P^2}},$$

следовательно, (15) является лоренц-скаляром.

Решения системы (10), являющиеся собственными векторами матрицы монодромии, называются функциями Блоха. Обозначим такие решения  $\psi^\pm(s, s_0, \lambda)$ . Зависимость  $\psi^\pm$  от  $s_0$  связана с условием нормировки

$$\psi_1^+(s_0, s_0, \lambda) = \psi_2^-(s_0, s_0, \lambda) = 1. \quad (16)$$

Как следует из определения,

$$T_s^{s+2\pi}(\lambda) \psi^\pm(s, s_0, \lambda) = e^{\pm i p(\lambda)} \psi^\pm(s, s_0, \lambda), \quad (17)$$

где  $e^{\pm i p(\lambda)}$  — собственные значения матрицы  $T_s^{s+2\pi}(\lambda)$ , которые в силу свойств 1 и 4 не зависят от  $s$  и являются взаимнообратными при всех  $\lambda$ . Величину  $p(\lambda)$  по аналогии с одномерным уравнением Шредингера будем называть квазимпульсом. Очевидно, что

$$\text{Sp } T_s^{s+2\pi}(\lambda) = 2 \cos p(\lambda).$$

Оставим на время спектральную задачу и рассмотрим скобки Пуассона матричных элементов матриц монодромии с разными значениями спектральных параметров. Опуская вычисления, приведем результат:

$$\begin{aligned} & \left( \left( T_s^{s+2\pi}(\lambda) \right)_{\alpha\beta} \cdot \left( T_s^{s+2\pi}(\mu) \right)_{\gamma\delta} \right)_{\gamma\delta} = \frac{\mu\lambda}{4} \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} \times \\ & \times \left[ \left( T_s^{s+2\pi}(\lambda) \right)_{\alpha\delta} \left( T_s^{s+2\pi}(\mu) \right)_{\gamma\beta} - \left( T_s^{s+2\pi}(\mu) \right)_{\alpha\delta} \left( T_s^{s+2\pi}(\lambda) \right)_{\gamma\beta} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left( \text{Sp } T_s^{s+2\pi}(\lambda), \text{Sp } T_s^{s+2\pi}(\mu) \right) = 0.$$

Таким образом, след матрицы монодромии, а вместе с ним и квазимпульс  $p(\lambda)$ , являются производящими функциями инволютивных интегралов движения. Для вычисления этих интегралов удобно воспользоваться функцией Блоха. Из определения (17) и нормировки (16) имеем

$$p(\lambda) = \frac{1}{i} \ln \psi_1^+(s_0 + 2\pi, s_0, \lambda) = \frac{1}{i} \int_{s_0}^{s_0 + 2\pi} ds \cdot \frac{\psi_1^+(s', s_0, \lambda)}{\psi_1^+(s', s_0, \lambda)}. \quad (18)$$

Будем искать  $\psi_1^+(s, s_0, \lambda)$  в виде

$$\psi_1^+(s, s_0, \lambda) = \exp \frac{i\lambda}{2} \int_{s_0}^s ds' \sqrt{\frac{1}{a^2(s')}} (1 + K(s', \lambda)). \quad (19)$$

Подставляя (19) в систему (10) и исключая  $\psi_2^+$ , получим для функции  $K(s, \lambda)$  уравнение Риккетти

$$\frac{n_-(s)}{\sqrt{a^2(s)}} \frac{d}{ds} \left( \frac{K(s, \lambda) + 1 - n_3(s)}{n_-(s)} \right) + \frac{i\lambda}{2} \left( K^2(s, \lambda) + 2K(s, \lambda) \right) = 0,$$

где мы обозначили

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{a}(s)}{\sqrt{a^2(s)}}, \quad n_\pm(s) = n_1(s) \pm i n_2(s).$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$ , функция  $K(s, \lambda)$  имеет асимптотическое разложение

$$K(s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^{-m} K_m(s), \quad (20)$$

где  $K_m(s)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{n_-(s)}{\sqrt{\alpha^2(s)}} \frac{d}{ds} \frac{K_m(s)}{n_-(s)} + \sum_{\ell=1}^m K_\ell(s) K_{m+1-\ell}(s) + 2K_{m+1}(s) = 0,$$

причем

$$K_1 = -\frac{1}{2} \frac{n_-(s)}{\sqrt{\alpha^2(s)}} \frac{d}{ds} \left( \frac{1-n_3(s)}{n_-(s)} \right).$$

Наконец, сравнивая (20) и (18), можно выразить квазинимпульс  $p(\lambda)$  непосредственно через  $K_m(s)$ :

$$p(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \left[ \int_0^{2\pi} ds \sqrt{\alpha^2(s)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^{-m} \int_0^{2\pi} ds \sqrt{\alpha^2(s)} K_m(s) \right]. \quad (21)$$

Выпишем несколько первых членов разложения (21), записанного в виде

$$p(\lambda) = \frac{\lambda}{2} I_{-1} + I_0 + \frac{1}{2\lambda} I_1 + \frac{1}{(2\lambda)^2} I_2 + \dots, \quad (22)$$

где  $I_k$  – функционалы, зависящие от вектора  $\vec{d}(s)$ . Чтобы выписать их явное выражение в компактном виде, удобно воспользоваться интерпретацией  $\vec{d}(s)$  как касательной к некоторой кривой  $y$ . С этой кривой связаны её дифференциальные характеристики – кривизна  $\rho(s)$ , кручение  $r(s)$  и дифференциал дуги  $d\ell(s)$ . Через эти величины первые четыре коэффициента разложения (22) выражаются следующим образом:

$$I_{-1} = \int_0^{2\pi} d\ell(s), \quad (23)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\ell(s) r(s), \quad (24)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\ell(s) \rho^2(s), \quad (25)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\ell(s) \rho^2(s) r(s). \quad (26)$$

Естественно, в интегралы (23)–(26) не вошли полные производные от периодических функций, содержащиеся в  $K_m(s)$ . Кривизна, кручение и дуга связаны с  $\vec{a}(s)$  формулами

$$\rho(s) = \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(s)}} \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \right|,$$

$$r(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} \left( \hat{n} \left[ \frac{1}{\sqrt{\hat{d}^2(s)}} - \frac{d\hat{n}}{ds} \times \left( \frac{1}{\sqrt{\hat{d}^2(s)}} - \frac{d}{ds} \right)^2 \hat{n} \right] \right),$$

$$l'(s) = \sqrt{\hat{d}^2(s)}.$$

### 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ БЛОХА

Функции Блоха в случае одномерного уравнения Шредингера подробно исследовались в цитированных выше работах<sup>5,6</sup>. К сожалению, мы не можем воспользоваться этими результатами, так как в нашу задачу спектральный параметр входит нестандартным образом, что приводит к некоторой модификации аналитических свойств функций Блоха и матрицы монодромии.

Выведем минимальное количество формул, необходимое для обсуждения аналитических свойств. Прежде всего, нам нужно установить связь матрицы монодромии с функциями Блоха. Запишем её матричные элементы, вводя вектор  $(\vec{T}, T_0)$ :

$$T_0(\lambda) = \frac{1}{2} \text{Sp } T_0^{a+2\pi}(\lambda), \quad T_1(s, \lambda) = \frac{1}{2i} \text{Sp } a_1 T_0^{a+2\pi}(\lambda).$$

Соотношение "унитарности" (12) при комплексных  $\lambda$  приводит к равенствам

$$T_0^*(\lambda) = T_0(\lambda^*), \quad \vec{T}^*(s, \lambda) = \vec{T}(s, \lambda^*). \quad (27)$$

Кроме того, нам понадобится уравнение движения, которое получается прямым дифференцированием (11) по  $s$ :

$$\frac{1}{\sqrt{a_2(s)}} \frac{d}{ds} \vec{T}(s, \lambda) = -\lambda \hat{n}(s) \times \vec{T}(s, \lambda). \quad (28)$$

Поскольку функция  $\psi^+(s, s_0, \lambda)$  является собственным вектором матрицы монодромии, нетрудно показать, что в принятой нами нормировке (16)

$$\psi^+(s_0, s_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{T(\lambda) - T_0(s_0, \lambda)}{T_-(s_0, \lambda)} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $T(\lambda)$  обозначает модуль вектора  $\vec{T}(s, \lambda)$  ( $\vec{T}(s, \lambda)$  не зависит от  $\lambda$ ). С другой стороны, уравнения (10) дают связь между компонентами  $\psi_{1,2}^+$  и функцией  $K(s, \lambda)$ :

$$\psi_2^+(s, s_0, \lambda) = \frac{K(s, \lambda) + 1 - n_3(s)}{n_-(s)} \psi_1^+(s, s_0, \lambda). \quad (30)$$

Полагая в (30)  $s = s_0$  и сравнивая с (29), получаем выражение функции  $K(s, \lambda)$  через компоненты  $T_i(s, \lambda)$ :

$$K(s, \lambda) + 1 = n_3(s) + n_-(s) \frac{T(\lambda) - T_3(s, \lambda)}{T_-(s, \lambda)}. \quad (31)$$

Правую часть этого равенства можно преобразовать с помощью уравнений движения  $\tilde{T}(s, \lambda)$ , заметив, что

$$n_3(s) - n_-(s) \frac{T_3(s, \lambda)}{T_-(s, \lambda)} = \frac{1}{i\lambda} \frac{1}{\sqrt{\delta^2(s)}} \frac{d \ln T_-}{ds} T_-(s, \lambda). \quad (32)$$

Подставляя (31) в (18) с учетом (32), мы выражим  $\psi_1^+(s, s_0, \lambda)$  через  $T_1(s, \lambda)$ :

$$\psi_1^+(s, s_0, \lambda) = \left( \frac{T_-(s, \lambda)}{T_0(s, \lambda)} \right)^{1/2} \exp \frac{i\lambda}{2} \int_0^s ds' \sqrt{\delta^2(s')} n_-(s') \frac{T(\lambda)}{T_-(s', \lambda)}. \quad (33)$$

Аналогичные формулы можно получить и для других компонент функций Блоха. Мы не будем их выписывать, так как характерные особенности видны уже из формулы (33). Наконец, прежде чем переходить к обсуждению аналитических свойств функций Блоха, приведем формулу для квазимпульса, которая получается из представления (33). По определению,  $\psi_1^+(s_0 + 2\pi, s_0, \lambda)$  есть  $\exp ip(\lambda)$ , следовательно,

$$p(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} ds n_-(s) \frac{T(\lambda) \sqrt{\delta^2(s)}}{T_-(s, \lambda)} (\bmod 2\pi). \quad (34)$$

Решения  $\psi_1^+$  уравнений (10) существуют при произвольных комплексных  $\lambda$ . При специальных значениях  $\lambda$ , зависящих от  $\delta(s)$ , решения эти становятся периодическими или антипериодическими функциями  $s$ . Эти точки называются соответственно периодическими или антипериодическими точками спектра, в этих точках  $\sin p(\lambda) = 0$ . Обычно в периодической или антипериодической точке вектор  $\tilde{T}(s, \lambda)$  не обращается в нуль, хотя и имеет нулевой квадрат, так как  $T(\lambda) = \sin p(\lambda)$ .

Такие точки спектра называются невырожденными. В вырожденных точках матрица монодромии становится кратной единичной:

$$T_1^{s+2\pi}(\lambda) = \pm 1$$

и, следовательно,  $\tilde{T}(s, \lambda) = 0$ . Соотношение (27) предписывает всем точкам — вырожденным и невырожденным — располагаться симметрично относительно вещественной оси, следовательно, их количество всегда четно.

Другое следствие из соотношения (27) состоит в том, что на вещественной оси находятся только вырожденные точки.

Важным обстоятельством при обсуждении аналитических свойств функций Блоха является то, что матрица монодромии есть целая функция спектрально-го параметра. (Заметим, что  $T(\lambda)$  вообще говоря, не является целой). Имея явное выражение для  $\psi_1^+(s, s_0, \lambda)$  через  $T_1(s, \lambda)$  (формула (33)), можно сделать вывод, что функции Блоха являются мероморфными функциями  $\lambda$  на двулистной римановой поверхности с ветвлениями в невырожденных точках. В этих точках определитель Вронского обращается в нуль, т.е. решения  $\psi^+$  и

$\psi$  становятся линейно зависимыми. Для произвольной конфигурации струны  $\tilde{a}(s)$  количество ветвлений у функций Блока бесконечно, однако существуют конфигурации с конечным числом ветвлений, их мы будем называть конечнозонными. Точнее,  $N$ -зонной конфигурации соответствует  $2N$  точек ветвления.

#### 4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В этом разделе будем заниматься выводом уравнений для конечнозонных конфигураций струны. Явная формула для матрицы монодромии позволит сделать этот вывод более наглядным по сравнению со случаем уравнения КdФ. Далее, введя понятие о высших струнных уравнениях, покажем, что условие конечнозонности эквивалентно условию стационарности конфигурации струны относительно высшего струнного уравнения. Этот факт имеет свой аналог в теории уравнения КdФ<sup>5,6/</sup>, но мы предложили несколько видоизменить подход с тем, чтобы не нарушить ковариантности наших уравнений. В работах<sup>5,6/</sup> было замечено, что уравнения для конечнозонных решений КdФ порождают вполне интегрируемые механические системы с конечным числом степеней свободы. Можно показать, что и наши уравнения для конечнозонных конфигураций струны также порождают вполне интегрируемые механические системы, но благодаря тому, что инволютивные интегралы  $I_k$  в нашем случае обладают калибровочной инвариантностью, эти системы сингулярны: в них имеются связи. В настоящей работе мы не будем излагать теорию механических систем, связанных с конечнозонными конфигурациями. Отметим только, что полная интегрируемость означает наличие необходимого количества первых интегралов, достаточных для сведения задачи о нахождении конечнозонных потенциалов к проблеме Якоби обращения гиперэллиптических интегралов.

Перейдем к выводу уравнений. Условие конечнозонности по сути дела означает, что целая функция  $\tilde{T}(s, \lambda)$  имеет следующий вид.

$$\tilde{T}(s, \lambda) = f(\lambda) \tilde{t}(s, \lambda),$$

где  $f(\lambda)$  – целая функция с нулями в вырожденных точках, а  $\tilde{t}(s, \lambda)$  – конечный полином по  $\lambda$ :

$$\tilde{t}(s, \lambda) = \sum_{k=0}^N \tilde{t}_k(s) \lambda^k.$$

Условие конечности полинома  $\tilde{t}(s, \lambda)$  другими словами означает, что

$$\tilde{t}_k(s) = 0 \quad \text{при } k > N,$$

$$\tilde{t}_{-1}(s) = 0.$$

Кроме того, уравнения движения для  $\tilde{T}(s, \lambda)$  (28) дают связь между  $\tilde{t}_k(s)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{d^2(s)}} \frac{d}{ds} \tilde{t}_k(s) = -[\tilde{t}(s) \times \tilde{t}_{k-1}(s)]. \quad (36)$$

Этих соотношений достаточно для построения  $\tilde{t}(s, \lambda)$  с заданным  $N$ . Покажем это. Для упрощения формул введем следующее обозначение для производных по дуге:

$$\frac{1}{\sqrt{d^2(s)}} \frac{d}{ds} f(s) = \dot{f}(s).$$

Начнем нахождение полинома  $\vec{f}(s, \lambda)$  с последнего члена. Так как  $\vec{t}_{N+1}(s) = 0$

$$\vec{t}_N(s) = d_0(s) \vec{n}(s),$$

из (36) следует, что

$$\vec{n}(s) \vec{t}_k = 0,$$

откуда в силу единичности  $\vec{n}(s)$  получаем, что  $d_0$  — константа, которую мы положим равной единице. Далее из (36) при  $k = N$  имеем

$$\vec{t}_{N-1}(s) = \vec{n}(s) \times \vec{n}(s) + d_1(s) \vec{n}(s).$$

Опять с помощью (37) находим, что

$$\vec{d}_1(s) = 0$$

и переходим к  $\vec{t}_{N-2}$ . Определив таким образом все члены  $\vec{t}_k$  вплоть до  $\vec{t}_1$ , обновим итерации с помощью условия (35), которое означает, что  $\vec{t}_0$  — постоянный вектор

$$\vec{t}_0 = \vec{K}. \quad (38)$$

Это и есть искомое уравнение. При  $N = 1$  оно имеет вид

$$\vec{n} \times \vec{n} + d_1 \vec{n} = \vec{K}, \quad (39)$$

при  $N = 2$

$$-\frac{3}{2} \vec{n} \cdot \vec{n}^2 - \vec{n} + d_1 \vec{n} \times \vec{n} + d_2 \vec{n} = \vec{K}. \quad (40)$$

Уравнения (39) и (40) необходимо дополнить условием (9), которое при  $N = 1$  дает  $d_1 = 0$ .

Так как  $\vec{t}(s, \lambda)$  удовлетворяет уравнению (28), то  $\vec{t}^2(s, \lambda)$  не зависит от  $s$  и можно показать, что коэффициенты полинома  $\vec{t}^2(\lambda)$  степени  $2N$  выражаются через первые интегралы уравнения (38). Зная  $\vec{t}(s, \lambda)$ , мы можем найти функцию  $f(\lambda)$  и, следовательно, весь вектор  $\vec{T}(s, \lambda)$ . Действительно, согласно (36)

$$p(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} ds \sqrt{\vec{t}^2(s)} n_-(s) \frac{\vec{T}(\lambda)}{T_-(s, \lambda)} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} ds \sqrt{\vec{t}^2(s)} n_-(s) \frac{f(\lambda)}{t_-(s, \lambda)}.$$

Зная квазимпульс, мы можем определить  $f(\lambda)$ , а вместе с тем и все вырожденные точки спектра.

Полином  $\vec{t}^2(\lambda)$  играет важную роль в определении аналитических свойств функций Блоха, он задает риманову поверхность  $\Gamma$

$$z^2 = \vec{t}^2(\lambda),$$

на которой функция Блоха является мероморфной, точки ветвления  $\Gamma$  есть концы зон, следовательно, для  $N$ -зоиной конфигурации степень полинома  $\vec{t}^2(\lambda)$  равна  $2N$ .

В работах<sup>5,6/</sup> конечнозонные потенциалы определялись как статические решения высших уравнений КdФ. Применимально к нашему случаю можно сказать, что конечнозонные конфигурации струны являются статическими решениями высших струнных уравнений.

Поясним, что мы имеем в виду. Рассмотрим линейную комбинацию первых  $N+1$ -инволютивных интегралов  $I_k$  (22):

$$I = I_{N-1} + \sum_{\ell=0}^{N-1} c_{n-\ell} I_{\ell-1}.$$

Всем таким функционалам соответствуют коммутирующие потоки

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \{ \vec{a}, I \} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\delta I}{\delta \vec{a}(s)}.$$

Назовем статическим решением высшего струнного уравнения конфигурацию  $\vec{a}(s)$ , удовлетворяющую

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\delta I}{\delta \vec{a}(s)} = 0$$

или уравнению

$$\frac{\delta I}{\delta \vec{a}(s)} = \vec{K}, \quad (41)$$

дополненному условием интегрируемости  $\vec{a}(s)$  (9). Тогда справедливо утверждение, что  $N$ -зонная конфигурация струны является решением (41). Для доказательства этого утверждения рассмотрим вектор  $\vec{t}(s, \lambda)$ , причем будем считать, что он является полиномом по  $\lambda$  степени  $N$ . Составим отношение  $\vec{t}(s, \lambda) / \sqrt{\vec{t}^2(\lambda)}$  и, устремив  $\lambda \rightarrow \infty$ , разложим его по степеням  $1/\lambda$ :

$$\frac{\vec{t}(s, \lambda)}{\sqrt{\vec{t}^2(\lambda)}} = \frac{\vec{R}_0(s)}{\lambda^0} + \frac{\vec{R}_1(s)}{\lambda} + \dots \quad (42)$$

Число членов этого асимптотического разложения бесконечно, но из-за условия конечности полинома  $\vec{t}(s, \lambda)$   $N+1$ -ый член (42) является линейной комбинацией предыдущих плюс постоянный вектор  $\vec{K}$ , т.е.

$$\vec{R}_N(s) + \sum_{\ell=0}^{N-1} \vec{R}_\ell(s) b_{N-\ell} = \vec{K}.$$

Теперь вычислим вариацию квазимпульса  $p(\lambda)$  по  $\vec{a}(s)$  при условии (9):

$$\begin{aligned} \frac{\delta p(\lambda)}{\delta \vec{a}(s)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds' \frac{\delta p(\lambda)}{\delta \vec{a}(s')} &= \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\vec{T}(s, \lambda)}{T(\lambda)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds' \frac{\vec{t}(s', \lambda)}{T(\lambda)} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\vec{t}(s, \lambda)}{\sqrt{\vec{t}^2(\lambda)}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds' \frac{\vec{t}(s', \lambda)}{\sqrt{\vec{t}^2(\lambda)}} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Для вычисления вариаций мы воспользовались явным выражением для матрицы монодромии, а во втором преобразовании мы сократили функцию  $\{ \cdot \}$  в числителе и знаменателе дроби. Поделим обе части (43) на  $\lambda/2$  и, устремив  $\lambda \rightarrow \infty$ , разложим их по степеням  $1/\lambda$ . Разложение в правой части мы уже фактически знаем: оно дается формулой (42) с точностью до постоянного слагаемого в каждом члене. В левой же части (43) стоят вариационные производные инволютивных интегралов  $I_k$  (22). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$  в правой и левой частях, получаем

$$\vec{R}_k(s) = \frac{\delta l_{k-1}}{\delta \vec{a}(s)}$$

и, следовательно, условие конечности полинома  $\vec{t}(s, \lambda)$  или условие конечнозонности (38) имеет на языке инволютивных интегралов следующий вид:

$$\frac{\delta}{\delta \vec{a}(s)} \left( \sum_{N=1}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} l_{\ell-1} c_{N-\ell} \right) = \vec{K}.$$

Таким образом, мы доказали эквивалентность двух условий — конечности полинома  $\vec{t}(s, \lambda)$  и условия стационарности относительно высшего струнного уравнения.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Условия конечнозонности конфигурации струны являются калибровочно-инвариантными уравнениями, которые можно рассматривать как уравнения некоторой гиперповерхности в фазовом пространстве струны. Поскольку эволюция струны есть калибровочное преобразование, генерируемое связями, а гиперповерхность задана инвариантным уравнением, она содержит фазовые кривые принадлежащих ей точек. Решив уравнения, т.е. выразив конфигурацию через начальные данные и первые интегралы, мы можем сузить симплектическую форму, заданную на всем фазовом пространстве на рассматриваемую гиперповерхность, и в результате получить систему с конечным числом степеней свободы.

В работе А.В.Разумова и автора<sup>/4/</sup> была рассмотрена система, получающаяся из релятивистской струны при замораживании бесконечного числа степеней свободы. Пользуясь терминологией данной работы, можно сказать, что по существу эта система соответствует однозонной конфигурации струны. Самое примечательное в этой системе то, что её квантовая теория не содержит никаких аномалий и обладает явной релятивистской инвариантностью в четырехмерном пространстве. Кроме того, в этой системе нет естественно духовых и тахионных состояний, которые неизбежно возникали в традиционной квантовой теории струны<sup>/8/</sup>. Таким образом, имеется реальная возможность непротиворечивого квантового описания струны и в любом конечнозонном секторе. Его отличие от традиционных квантований струны заключается в том, что переход от скобок Пуассона к коммутаторам производится не в исходных тахионических переменных, а в других, более удобных. Например, в однозонном секторе такими переменными являются два вектора, сопряженных друг другу как момент и углы. При этом не возникает необходимости упорядочивать некоммутирующие операторы при вычислении генераторов группы Пуанкаре и, следовательно, в квантовом случае она остается такой же, как и в классическом.

В заключение автор благодарит А.В.Разумова и Л.Д.Соловьева за ценные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Namby Y. - *Lecture for Copenhagen Symp.*, 1970;  
Goto T. - *Progr. Theor. Phys.*, 1971, 46, 1560.
2. Dirac P. A. M. - *Proc. Roy. Soc.*, 1948, A246, 326-345.  
Дирак Р.А.М. *Лекции по квантовой механике*. - М.: Мир, 1968.
3. Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. - Препринт ИФВЭ 82-82, Серпухов, 1982.
4. Пронько Г.П., Разумов А.В. - Препринт ИФВЭ 82-173, Серпухов, 1982.
5. Теория солитонов /Под ред. С.П.Новикова. М.: Наука, 1980.
6. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. - УМН, 1976, 31, № 1, 55-136.
7. Итс А.Р. - *Вестник ЛГУ*, 1976, 7, № 2, 39-46.
8. Rebbi C. - *Phys. Rep.*, 1974, 12C, № 1.

ПРАВИЛА СУММ  
И ЭКСКЛЮЗИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

А.В.Радюшкин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

Правила кваркового счета (ПКС) <sup>1,2/</sup> стали фактически частью "фольклора" современной физики элементарных частиц высоких энергий. Согласно этим правилам, усредненный по спиновым переменным формфактор адрона, состоящего из  $n$  кварков, должен вести себя в асимптотике как  $(Q^2)^{1-n}$  (где  $Q^2 = -q^2$ , а  $q$  — передача импульса). Бродским и Фаррар <sup>1/2/</sup> был найден и конкретный динамический механизм (жесткое перерассеяние), обеспечивающий выполнение ПКС в пределе  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Предложенная в <sup>1/2/</sup> картина получила в конце 70-х годов свое обоснование в рамках пертурбативной КХД <sup>3,4/</sup>. Было показано, в частности, что учет КХД — эффектов для формфакторов мезонов и нуклонов приводит в асимптотической области лишь к логарифмическому отклонению от диктуемого ПКС степенного закона <sup>73-8/</sup>. Возникает естественный вопрос, начиная с каких передач импульса можно использовать асимптотический анализ? Нередко ответ на этот вопрос пытаются извлечь из существующих экспериментальных данных. Из данных же следует, в частности, что для пиона произведение  $Q^2 F_\pi(Q^2)$  практически постоянно при  $Q^2 \gtrsim 1 \text{ ГэВ}^2$ , а для протона и нейтрона при  $Q^2 \gtrsim 2-3 \text{ ГэВ}^2$  с хорошей точностью постоянны комбинации  $Q^2 G_M^p(Q^2)$ ,  $Q^2 G_M^n(Q^2)$ . Отсюда делается вывод (см., например, <sup>4,6/</sup>), что уже при

$Q^2 \gtrsim 1 \text{ GeV}^2$  (для пиона) или при  $Q^2 \gtrsim 2-3 \text{ GeV}^2$  (для нуклонов) наступает асимптотический режим и основной вклад в форм-факторы обусловлен подпроцессом жесткого пересечения (рис. I). Однако теоретическое обоснование подобной интерпретации в рам-

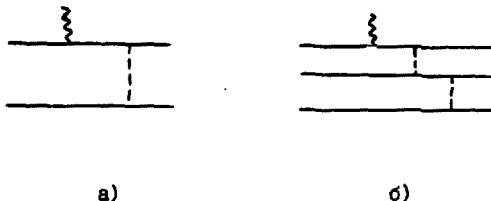


Рис. I. Диаграммы, ответственные за асимптотику формфакторов а) пиона и б) нуклона

ках КХД сталкивается с определенными трудностями. Дело в том, что, скажем, для нуклона вклад, соответствующий диаграммам типа Iб, является фактически лишь третьим членом разложения, получающегося в результате применения к  $G^N(Q^2)$  стандартной КХД-процедуры разбиения вкладов больших и малых расстояний (см. рис.2).

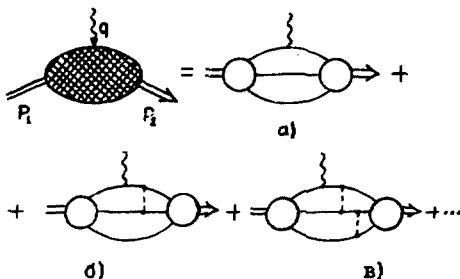


Рис. 2. Структура факторизации для нуклонных формфакторов. Обобщенные кварк-адронные вершины вместе с непосредственно примыкающими к ним кварковыми линиями соответствуют большим расстояниям (малым виртуальностям), а остальные кварковые и глюонные линии – малым расстояниям, т.е. виртуальностям, большим некоторого адрового масштаба  $\lambda^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ .

Для оценки относительных вкладов диаграмм 2a-в заметим, во-первых, что при  $Q^2=0$  основной вклад в  $G^N(Q^2)$  обусловлен, очевидно, простейшей диаграммой 2a. Далее, согласно обычной оценке по числу петель, вклады диаграмм 2b, в подавлены по сравнению с вкладом диаграммы 2a факторами порядка  $(\alpha_s(M_N)/\pi)^2 \lesssim 0,1$  и  $(\alpha_s(M_N)/\pi)^2 \lesssim 0,01$  соответственно ( $M_N$  - масса нуклона). Это означает, что в некоторой области  $Q^2 \leq t_{\max}$  простейшая диаграмма 2a доминирует несмотря на то, что в асимптотике ее вклад убывает с ростом  $Q^2$  быстрее, чем вклад диаграммы 2b. По оценкам, основанным на теории возмущений вклад диаграммы 2b убывает с ростом  $Q^2$  лишь как  $1/Q^6$  (мы убедимся в этом ниже на конкретных примерах), и поэтому следует ожидать, что  $t_{\max} \sim (\alpha_s/\pi)^2 \cdot 1 \text{ ГэВ}^2$ . Для более аккуратной оценки вкладов диаграмм 2a-в необходимо знать мягкую волновую функцию нуклона. Эта задача, конечно, не может быть решена в рамках обычной теории возмущений, поскольку само существование адронов в КД в значительной мере обусловлено непертурбативными эффектами.

Из существующих в настоящее время подходов к анализу непертурбативных эффектов наиболее близким к пертурбативной КД в "технологическом" аспекте является метод КД правил сумм <sup>79,10/</sup>, успешно примененный ранее к вычислению таких существенно связанных с непертурбативными эффектами адронных характеристик как массы и лептонные ширини. В последнее время этот метод (в различных формулировках) был применен также и к исследованию поведения адронных формфакторов при умеренно больших передачах импульса <sup>/11-15/</sup>. В данном докладе будет дан краткий обзор результатов, полученных в работах <sup>/11-12,14-15/</sup>, выполненных автором совместно с В.А. Нестеренко. Основной вывод, к которому мы пришли в конечном итоге, состоит в том, что для описания экспериментальных данных по формфакторам пиона, протона и нейтрона достаточно учесть вклады лишь простейших диаграмм (типа рис. 2a), не содержащих глюонных обменов. Следовательно, экспериментальное подтверждение степенного закона, формально диктуемого правилами кваркового счета, вовсе не означает, что основной вклад в формфакторы при достижимых ныне передачах обусловлен механизмом жесткого перенаселения.

## 2. Анализ формфактора пиона методом КД правил сумм <sup>/11-13/</sup>

В основе метода КД правил сумм лежит концепция кварк-адронной

дуальности, согласно которой характеристики адронного спектра в интегральном смысле (т.е. после усреднения по некоторой энергетической области) близки к аналогичным характеристикам, вычисляемым по теории возмущений для (слабо взаимодействующих)夸арков. Учет неperturbативных эффектов (определеных, в частности, величину интервала усреднения) достигается при этом введением в теорию ненулевых вакуумных средних (конденсатов)夸арковых и глюонных полей<sup>9/</sup>. При анализе формфакторов методом КД правил сумм исходным объектом является трехточечная функция

$$T_{\alpha\beta}^{\mu}(p_1, p_2) = i^2 \int \exp(-ip_1 x + ip_2 y) \langle 0 | T \{ j_{\alpha}(y) J^{\mu}(0) j_{\beta}^{+}(x) \} | 0 \rangle d^4 x d^4 y,$$

где  $J^{\mu} = (2/3) \bar{u} \gamma_{\mu} u - (1/3) \bar{d} \gamma_{\mu} d$  - электромагнитный ток, а  $j_{\alpha} = \bar{q}_{\alpha} \gamma_{\mu} q_{\alpha}$  - аксиальный ток (обозначения соответствуют рис. 3а). Последний,

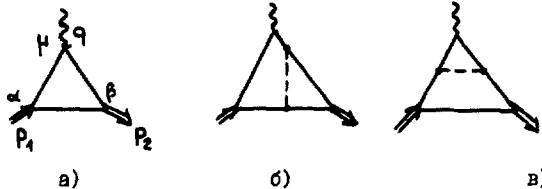


Рис. 3. Диаграммы, дающие вклад в пертурбативную спектральную плотность  $\rho_{\text{КВАРК}}^{\mu}(s_1, s_2, Q^2)$ .

как известно, имеет ненулевую проекцию на однолонгное состояние  $|P\rangle$ :  $\langle 0 | j_{\alpha}(0) | P \rangle = f_{\pi} p_{\alpha}$ , где  $f_{\pi} \approx 132$  МэВ - константа распада  $\pi \rightarrow \mu\nu$ .

Амплитуда  $T_{\alpha\beta}^{\mu}(p_1, p_2)$  представляет собой сумму различных структур:  $P^{\mu} P^{\alpha} P^{\beta}$ ,  $P^{\mu} P^{\alpha} q^{\beta}$ ,  $P^{\mu} q^{\alpha} q^{\beta}$  и т.д., где  $P = p_1 + p_2$ . Соответствующие инвариантные амплитуды  $T_i$  зависят от трех импульсных инвариантов:  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $q^2 = (p_2 - p_1)^2$ . Вклады различных структур в  $T_{\alpha\beta}^{\mu}$  можно сравнивать, естественно, лишь в какой-либо конкретной системе отсчета. В нашем случае весьма удобной является система бесконечного импульса (СБИ), в которой  $P_{\mu} \equiv P^{\mu} \rightarrow \infty$ , а  $q^{\mu} \equiv q^{\mu}_1$  фиксировано. Наиболее важной в СБИ является, очевидно, структура  $P^{\mu} P^{\alpha} P^{\beta}$ , не содержащая "малого" параметра  $q$ . Эта структура, кроме того,

максимально близка к структуре  $P^A P^B$ , являющейся объектом анализа при исследовании двухточечной функции  $\Pi_{AB}(P)$  - коррелятора двух аксиальных токов.

Благодаря асимптотической свободе амплитуда  $T(p_1^2, p_2^2, Q^2)$  может быть теоретически рассчитана в глубоко евклидовой области, где  $p_1^2, p_2^2, Q^2 \lesssim -1 \text{ ГэВ}^2$ . Для извлечения информации о физических состояниях используется двойное дисперсионное соотношение

$$T(p_1^2, p_2^2, Q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{p(s_1, s_2, Q^2)}{(s_1 - p_1^2)(s_2 - p_2^2)} + (\text{вычитания}). \quad (2)$$

Невыписанные явно члены в (2) исчезают после применения к (2) ШВЗ - оператора  $\frac{1}{\partial^2}$ .

$$B(p^2 \rightarrow M^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-p^2)^n}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dp^2} \right)^n \Big|_{p^2 = -nM^2} \quad (3)$$

по переменным  $p_1^2$  и  $p_2^2$ . В результате

$$\Phi(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds_1}{M_1^2} \int_0^\infty \frac{ds_2}{M_2^2} e^{-\frac{s_1}{M_1^2} - \frac{s_2}{M_2^2}} \rho(s_1, s_2, Q^2), \quad (4)$$

где  $\Phi = B_1 B_2 T$ .

Пертурбативный вклад в  $T(p_1^2, p_2^2, Q^2)$  (соответствующий диаграммам рис. 3) также может быть записан в форме (2), а  $\Phi^{\text{pert}} = B_1 B_2 T^{\text{pert}}$  - в форме (4). Непосредственные вычисления дают в низшем (нулевом) порядке по  $\alpha_s$

$$\Phi^{\text{pert}}(M_1^2, M_2^2, Q^2) = \frac{3}{2\pi^2 M_1^2 + M_2^2} \int_0^1 x(1-x) \exp \left\{ -\frac{xQ^2}{(1-x)(M_1^2 + M_2^2)} \right\}. \quad (5)$$

Массами  $u$ -,  $d$ -кварков ( $m_{u,d} \lesssim 10 \text{ МэВ}$ ) мы пренебрели. Отметим, что переменная  $x$  имеет смысл фракции продольного импульса пиона, приходящейся в СБИ на пассивный夸克.

Используя тот факт, что (4) имеет форму двойного преобразования Лапласа по  $1/M_{1,2}^2$ , из (5) нетрудно найти кварковую (пертурбативную) спектральную плотность

$$\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) = \frac{3}{4} (Q^2)^2 \left[ \left( \frac{d}{dQ^2} \right)^2 + \frac{Q^2}{3} \left( \frac{d}{dQ^2} \right)^3 \right] \left[ (s_1 + s_2 + Q^2)^2 - 4s_1 s_2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Физическая плотность  $\rho(s_1, s_2, Q^2)$ , конечно, отличается от  $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$ . В частности,  $\rho(s_1, s_2, Q^2)$  содержит пиональный " $\delta\delta$ " - вклад

$$\rho_\pi(s_1, s_2, Q^2) = \pi^2 \int_\pi^2 F_\pi(Q^2) \delta(s_1 - m_\pi^2) \delta(s_2 - m_\pi^2), \quad (7)$$

а вне этой точки равна нулю везде ниже порога рождения (3-к)-системы. Лишь при достаточно больших  $s_1, s_2$ , где резонансы становятся очень широкими и фактически сливаются друг с другом, можно ожидать, что  $\rho \approx \rho^{\text{pert}}$ . Это означает, что  $\Phi(M^2, M^2, Q^2)$  также отличается от выражения (5), вычисленного для свободных кварков. Как подчеркивалось в [9], за эту разницу главным образом ответственны непертурбативные степенные поправки  $(1/M^2)^N$ , обусловленные существованием кваркового  $\langle \bar{q}q \rangle$  и глюонного  $\langle GG \rangle$  конденсатов. Учитывая низшие степенные поправки

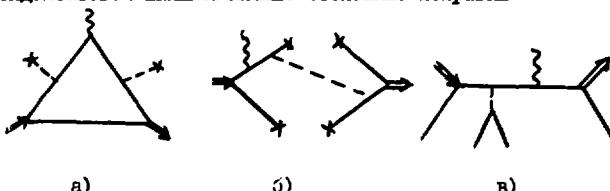


Рис. 4. Диаграммы, описывающие непертурбативные эффекты, пропорциональные  $\langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle$  (4a) и  $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$  (4b,в).

(тиличные диаграммы представлены на рис. 4), находим

$$\Phi(M^2, M^2, Q^2) = \Phi^{\text{pert}}(M^2, M^2, Q^2) + \frac{\alpha_s \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle}{12 \pi M^6} + \frac{208 \pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 (1 + \frac{2}{13} Q^2/M^2)}{84 M^8} \quad (8)$$

Представляя адронную спектральную плотность  $\rho(s_1, s_2, Q^2)$  в виде

$$\rho(s_1, s_2, Q^2) = \rho_\pi(s_1, s_2, Q^2) + \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) \{ 1 - \theta(s_1 - s_0) \theta(s_2 - s_0) \} \quad (9)$$

(т.е., считая, что везде вне квадрата  $s_1, s_2 < s_0$  адронная плотность совпадает с кварковой) и приравнивая (8), (4) (с учетом (6), (7), (9)), получаем правило сумм, связывающее характеристики адронного спектра (в нашем случае таковыми являются  $\int_\pi^2 F_\pi(Q^2)$  и  $s_0$  - эффективный порог рождения высших состояний, масса pione  $m_\pi$  берется равной нулю) с теоретически вычисленными величинами:

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{S_0} ds_1 \int_0^{S_0} ds_2 \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) e^{-\frac{s_1+s_2}{M^2}} + \frac{\alpha_s \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle}{12\pi M^4} + \frac{208\pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81M^4} + O(1/M^6) + O(\alpha_s) \quad (10)$$

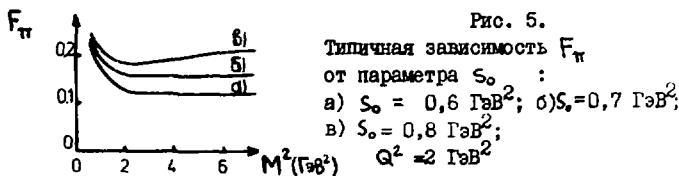
Для конденсатов мы используем значения

$$(\alpha_s/\pi) \langle G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \rangle = 0,012 \text{ ГэВ}^4, \quad (II)$$

$$\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^4, \quad (I2)$$

полученные в [9] из анализа двухточечных функций.

Нетрудно заметить, что левая часть правила сумм (10), в отличие от правой, не имеет явной зависимости от параметра  $M^2$ . На самом деле, если бы мы учили все непертурбативные поправки и взяли для  $\rho(s_1, s_2, Q^2)$  точное, а не модельное выражение, то правая часть правила сумм (10) также не зависела бы от  $M^2$ . В реальной ситуации значения величины  $f_\pi^2 F_\pi(Q^2)$ , полученные из (10), имеют слабую зависимость от "нефизического" параметра  $M^2$  при больших  $M^2$ , но начало асимптотического режима сильно зависит от выбранного значения  $S_0$  (рис. 5).



Истинным значением  $S_0$  будем считать, естественно, то значение, при котором область слабой чувствительности  $F_\pi(Q^2)$  к параметру  $M^2$  является наиболее широкой. Для  $Q^2 = 1,2$  и  $3 \text{ ГэВ}^2$  данный критерий дает значения, близкие к  $0,7 \text{ ГэВ}^2$ . Отметим, что такое же значение параметра  $S_0$  получается и из анализа двухточечной функции, связанной с  $\langle T_{\bar{q}q}^{(+) \dagger} \rangle$ , что свидетельствует о самооговоренности метода. В качестве теоретического предсказания на  $f_\pi^2 F_\pi(Q^2)$  следует, очевидно, брать значение этой величины на плато. Для  $S_0 = 0,7 \text{ ГэВ}^2$  это значение на всем интервале  $M^2 \gtrsim 1 \text{ ГэВ}^2$  фактически не отличается от асимптотического значения при  $M^2 = \infty$ .

Важно подчеркнуть, что при  $M^2 \rightarrow \infty$  степенные поправки исчезают и мы приходим к конечнозенергетическому правилу сумм (ср. /16/),

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{S_0} ds_1 \int_0^{S_0} ds_2 \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2), \quad (13)$$

выражающему собой локальную дуальность между резонансным (пионным) и кварковым вкладом. Для двухточечной функции аналогичное правило сумм позволяет связать  $S_0$  с константой  $f_\pi$ :

$$S_0 = 4\pi^2 f_\pi^2. \quad (14)$$

Соотношение (14) хорошо согласуется (при  $S_0 = 0,7 \text{ ГэВ}^2$ ) с экспериментальным значением  $f_\pi = 132 \text{ МэВ}$ .

Используя, далее, явный вид  $\rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2)$  (6), можно получить из (13) выражение для формфактора пиона

$$F_\pi(Q^2) = \frac{S_0}{4\pi^2 f_\pi^2} \left\{ 1 - \frac{1 + 6s_0/Q^2}{(1 + 4s_0/Q^2)^{5/2}} \right\}. \quad (15)$$

Связь (14) обеспечивает в (15) правильную нормировку (на единицу) формфактора при  $Q^2 = 0$ .

Более удобную при быстрых оценках формулу для  $F_\pi(Q^2)$  можно получить, если заменить интегрирование по квадрату в (13) интегрированием по треугольнику ( $0 \leq s_1 + s_2 \leq S_0 = \sqrt{2} s_0$ ) равной площади. В этом случае

$$F_\pi^{(\text{trp})}(Q^2) = \frac{S_0}{8\pi^2 f_\pi^2} \frac{1}{(1 + Q^2/s_0)^2}, \quad (16)$$

где  $S_0 = \sqrt{2} s_0 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$ . При  $Q^2 \gtrsim 1 \text{ ГэВ}^2$  предсказания формул (15) и (16) согласуются друг с другом лучше, чем с 10%-ной точностью.

Формула (16) предсказывает дипольное поведение для пионного формфактора, что, казалось бы, резко противоречит сложившимся представлениям о поведении  $F_\pi(Q^2)$ . В действительности, однако, теоретическая кривая, основанная на (15), при  $S_0 = 0,7 \text{ ГэВ}^2$  находится в хорошем согласии с экспериментом (см. рис. 6), совпадая при  $Q^2 \gtrsim 1 \text{ ГэВ}^2$  с лучшим фитом /17/ имеющихся данных /18/. Иными словами, формулы (15), (16) в области  $0,5 < Q^2 < 5 \text{ ГэВ}^2$  имитируют  $1/Q^2$  – поведение, соответствующее правилам кваркового счета.

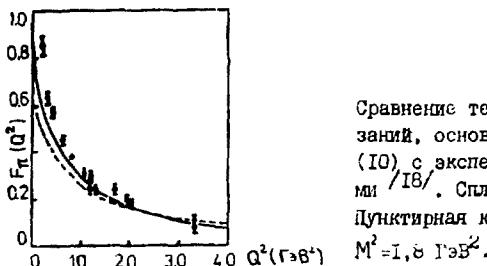


Рис. 6.

Сравнение теоретических предсказаний, основанных на правиле суммы (10) с экспериментальными данными [18]. Сплошная кривая:  $M^2 = \infty$ .  
Пунктирная кривая:  $M^2 = 1.8 \text{ ГэВ}^2$ .

### 3. Локальная дуальность и волновая функция пиона

Использование локальной дуальности (13) эквивалентно фиксации вида мягкой волновой функции<sup>10</sup> (м.в.ф.) пиона. Действительно, с учетом того, что  $\rho^{\text{pert}}(s_0, S_0, Q^2)$  есть двойной скачок (по  $p_1^2$  и  $p_2^2$ ) соответствующей амплитуды  $T^{\text{pert}}(p_1^2, p_2^2, Q^2)$ , расчет по формуле (7) сводится для диаграммы 3a к подстановке в качестве м.в.ф. локальной амплитуды перехода тока  $\bar{q} \gamma^\mu q$  в свободные, практически безмассовые кварки, с последующим усреднением по инвариантной массе  $S$  двухкварковой системы в интервале  $0 \leq S \leq S_0$ . Иными словами, пion моделируется системой из двух свободных ( $k_i^2 = m_q^2$ ) кварков, локализованных в области  $(k_1 + k_2)^2 \leq S_0$  импульсного пространства. К достоинствам "модели" необходимо отнести, по крайней мере, ее явную релятивистскую и калибровочную инвариантность.

Следует также отметить, что в СБИ такая м.в.ф. пропорциональна  $\Theta(x^2 < s_0)$ , где  $x^2$  – стандартная СБИ – комбинация (см. [6]),

$$x^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{k_{\perp i}^2}{x_i}, \quad (17)$$

причем  $x_i$  являются фракциями продольного импульса пиона, приходящимися на  $i$ -й кварк, а  $k_{\perp i}$  – поперечный импульс последнего. Приведем для сравнения предложенные Бродским и Лепажем [19] модельные м.в.ф. с гауссовским  $\Psi^{(G)}(k_{\perp i}, x_i) \sim \exp\{-R^2 k_{\perp i}^2\}$  и степенным  $\Psi^{(C)}(k_{\perp i}, x_i) \sim (x_i^2 \lambda^2)^{-s}$  поведением. Общим свойством всех трех функций является обрезание интегралов по  $k_{\perp i}$ ,  $x_i$  в области больших значений  $x^2$ . Конечно, резкое обрезание при  $x^2 = s_0$ , диктуемое  $\Psi^{(A,B)} \sim \Theta(x^2 < s_0)$ , нереалистично; точная

м.в.ф. должна быть гладкой функцией параметра  $\lambda^2$  наподобие  $\psi^{(r)}$  или  $\psi^{(c)}$ . Таким образом,  $\psi^{(n,0)}(x_1, x_2)$  дает представление лишь о наиболее общих, интегральных свойствах точной м.в.ф. пиона. Соответственно и результаты вычисления формфактора  $F_\pi(Q^2)$  по формуле (10) не обязательно совпадают с точным вкладом треугольной диаграммы во всем интервале  $0 < Q^2 < \infty$ .

Не следует, в частности, особенно доверять основанным на (10) предсказаниям в ситуациях, когда соответствующий вклад сильно зависит от конкретного поведения м.в.ф. на краях кинематически разрешенной области, когда  $x_1 \sim 0$  или  $x_1 \sim 1$  для одного из夸克ов. Как следует из выражения (5), поведение  $\Phi^{pert}$  (а следовательно, и  $\rho^{pert}$ ) при малых  $Q^2$  существенно зависит от поведения подынтегрального выражения в области  $x \sim 1$ , в которой основная доля продольного импульса пиона приходится на пассивный夸克, тогда как при больших  $Q^2$  основной вклад в  $\Phi^{pert}$  обусловлен интегрированием по области  $x \sim 0$ , когда импульс пиона переносится, в основном, активным夸克ом. Таким образом, основанным на (10) результатам не следует доверять ни при малых, ни при асимптотически больших значениях  $Q^2$ .

Конкретные значения границ области применимости формулы (10) можно получить следующим образом. Во-первых, расчет исходной амплитуды  $T(p_1^2, p_2^2, Q^2)$  по теории возмущений надежен лишь в области асимптотической свободы, т.е. при  $Q^2 \gtrsim m_p^2 \sim 0,6 \text{ ГэВ}^2$ . При больших  $Q^2$  формуле (10) не следует доверять при таких  $Q^2$ , когда начинает чувствоваться асимптотический режим  $F_\pi(Q^2) \sim 1/Q^4$ . При этом основной вклад определяется областью, в которой пассивный夸克 имеет бархудальность  $\leq p^4/Q^2$ , и мы снова оказываемся вне области асимптотической свободы. Нетрудно установить, что (15) согласуется с асимптотической формулой  $F_\pi^{(as)}(Q^2) \sim 6 \xi_0^2/Q^4$  (в пределах 50 %) лишь начиная с  $Q^2 = 7 \text{ ГэВ}^2$ , и примерно при таких значениях  $Q^2$  произведение  $Q^2 F_\pi^{(as)}(Q^2)$  начинает убывать с ростом  $Q^2$  (что является сигналом о наступлении асимптотического режима).

Таким образом, существует промежуточная область  $0.5 \leq Q^2 \leq 5 \text{ ГэВ}^2$ , в которой вклад треугольной диаграммы определяется интегральными свойствами м.в.ф., главным образом шириной распределения夸克ов по поперечному импульсу (т.е. в конечном итоге – размером пиона) и слабо зависит от конкретной формы этого распределения.

ния. Размерным параметром, характеризующим ширину распределения по  $k_\perp$  для  $\psi^{(A,D)}(k_\perp, x)$ , является, очевидно,  $S_0$  ( $\langle k_\perp^2 \rangle = S_0 / \gamma \sim (0.3 \text{ ГэВ})^2$ ), т.е. тот же параметр, который задает и масштаб спектра масс баронов в рассматриваемом канале. С физической точки зрения такая связь выглядит совершенно естественной.

#### 4. Локальная кварк-адронная дуальность и формфакторы нуклонов в КХЛ

Изложенную выше технику можно распространить и на нуклонные формфакторы. Естественно, вместо аксиального тока в (I) необходимо взять ток, имеющий квантовые числа нуклонов, например, для протона /10/

$$\eta_\alpha = (u^a c^{-1} \gamma_\lambda u^b) (\bar{u}^c \bar{d}^d) \epsilon_{abc}, \quad (18)$$

где  $C$  - матрица зарядового сопряжения, а  $\epsilon_{abc}$  - абсолютно анти-симметричный тензор ( $a, b, c = 1, 2, 3$ ). Нейтронный ток получается из (18) заменой  $u \leftrightarrow d$ .

Амплитуда  $T_{\mu\nu}^F(p_1, p_2)$  является в данном случае суммой структур типа  $P^\mu \hat{P}_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}^F(p), q^\mu \hat{P}_{\mu\nu}, q^2 \gamma^\mu \hat{P}_{\mu\nu}, i \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} P_\lambda q_\sigma (V_\rho V_\mu)$   $= A_{\mu\nu}^F(p, q)$  и т.д. Лидирующей СБИ - структурой является

$V_{\mu\nu}^F(p)$ . Отметим, что при  $p_1^2 = p_2^2$  эта структура обладает свойством поперечности  $q_\mu V_{\mu\nu}^F(p) = 0$ . Этим свойством обладает и следующая в СБИ -иерархии структура  $A_{\mu\nu}^F(p, q)$ , линейная по "малому" параметру  $q$ . Соответствующие инвариантные амплитуды обозначим  $T_V$  и  $T_A$ . Данные структуры имеют наиболее тесную связь с  $\hat{P}_{\mu\nu}$  - компонентой двухточечной функции  $T_{\mu\nu}^F(p)$ , связанной с  $\langle T_{\mu\nu}^F(p) \rangle$ , и детально проанализированной в /20/. Для интервала дуальности  $S_0$  в /20/ было получено значение  $S_0 = 2,3 \text{ ГэВ}^2$ , которым мы и будем пользоваться в дальнейшем. В приближении локальной дуальности  $S_0$  связано с константой распада протона

$$\langle 0 | \eta_\alpha(0) | P \rangle = \lambda_N v_\alpha(p) \quad (19)$$

(где  $v_\alpha(p)$  - дираковский спинор) следующим соотношением

$$(2\pi)^4 \lambda_N^2 = S_0^3 / 12, \quad (20)$$

аналогичным (14).

Вычисляя  $\hat{P}_{\mu\nu}^{\text{pert}}(s_1, S_1, Q^2)$  для диаграммы 2а и подставляя результат в аналог формулы (10), получаем для протона

$$F_V^P(Q^2) = \frac{1}{(2\pi)^4 \lambda_N^2} \int_0^{S_1} ds_1 \int_0^{S_2} ds_2 Q^2 \left(1 - \frac{\sigma}{z}\right)^2 \times \left\{ \frac{2e_u - e_d}{16} \frac{Q^2}{z} \left(1 + \frac{\sigma}{z}\right)^2 + \frac{e_u + e_d}{12} \left(2 + \frac{\sigma}{z}\right) \right\}, \quad (21)$$

$$F_A^P(Q^2) = \frac{e_u}{(2\pi)^4 \lambda_N^2} \int_0^{S_0} ds_1 \int_0^{S_0} ds_2 \frac{Q^2}{4} \left(1 - \frac{\sigma}{z}\right)^2 \left(2 + \frac{\sigma}{z}\right), \quad (22)$$

где  $\sigma = S_1 + S_2 + Q^2$ ,  $z = \sqrt{\sigma^2 - 4S_1 S_2}$ ,  $e_u = 2/3$ ,  $e_d = -1/3$ . Нейтронные формфакторы получаются из (21), (22) заменой  $e_u \leftrightarrow e_d$ .

Конкретные значения формфакторов получаются из (21), (22) подстановкой в качестве  $\lambda_N^2$  значения, диктуемого (20). Для  $S_0$  необходимо взять 2,3 ГэВ<sup>2</sup>. Следует также учесть, что  $F_V$  представляет собой комбинацию электрического  $G_E$  и магнитного  $G_M$  формфакторов

$$F_V(Q^2) = \frac{4M_N^2 G_E(Q^2) + Q^2 G_M(Q^2)}{4M_N^2 + Q^2}, \quad (23)$$

которая при малых  $Q^2$  сходит к  $G_E(Q^2)$ , а при больших  $Q^2$  (фактически при  $Q^2 \gtrsim 10$  ГэВ<sup>2</sup>) — к  $G_M(Q^2)$ . Формфактор  $F_A(Q^2)$  совпадает с  $G_M(Q^2)$ .

При  $Q^2 \rightarrow \infty$  правая часть формулы (22) совпадает с правой частью выражения (21), и из обеих формул следует одно и то же выражение для асимптотики магнитного формфактора:

$$G_M^{P(n)}(Q^2) \sim 4e_{u(d)} S_0^3 / Q^6.$$

Необходимо подчеркнуть, однако, что асимптотический режим для (21), (22) устанавливается лишь при  $Q^2 \gtrsim 20-30$  ГэВ<sup>2</sup>. Произведения  $Q^4 F_V(Q^2)$ ,  $Q^4 G_M(Q^2)$ , вычисленные согласно (21), (22), в области  $Q^2 = 5-20$  ГэВ<sup>2</sup> на самом деле постоянны в пределах 10 % точности. Другими словами, формулы (21), (22) имитируют степенной закон  $G \sim 1/Q^4$  диктуемый ПКС, вплоть до весьма больших значений  $Q^2 \approx 20$  ГэВ<sup>2</sup>. В высших порядках по  $\alpha_s$  выражения (21), (22) модифицируются поправками, связанными с судаковским формфактором акционного кварка

$$S(Q^2, M^2) = \exp \left\{ - \frac{g}{27} \left[ \left( \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) \ln \frac{\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}{\ln \frac{M^2}{\Lambda^2}} - \ln \frac{Q^2}{M^2} \right] \right\}, \quad (24)$$

где в качестве масштаба  $M^2$  следует взять некоторую величину, пропорциональную  $S_0$  — единственному размерному параметру, фигурирующему в (21), (22). Заметим, что параметр  $S_0$  довольно велик, а параметр  $\Lambda$  — в свою очередь, довольно мал ( $\Lambda \lesssim 100$  МэВ), и поэтому судаковское подавление в существенной для нас области не очень значительно. Более того, оно может быть частично скомпенсировано вкладом диаграмм 2б, в. Поэтому при  $Q^2 \lesssim 20$  ГэВ<sup>2</sup> кажется весьма разумным пренебречь эффектами высших порядков и ожидать, что основанные на локальной квark-адронной дуальности предсказания должны находиться в хорошем согласии с экспериментальными данными.

### 5. Количественный анализ результатов для нуклонных формфакторов

Обратимся теперь к детальному сравнению предсказаний формул (21), (22) с существующими экспериментальными данными (см. таблицу).

Таблица

Результаты численных расчетов, основанных на формулах (21)–(23)

$t (\Gamma \cdot B^2)$	1	2	3	4	5	6	7	10	12	15	$2 \cdot 10^4$	30
$G_M^p(t)/D(t)$	2,21	2,60	2,76	2,86	2,87	2,87	2,71	2,56	2,41	2,20	1,30	1,49
$G_M^p(t)/D(t)$	2,53	2,81	2,92	2,94	2,91	2,85	2,71	2,54	2,35	2,17	1,88	1,47
$G_E^p(t)/D(t)$	1,00	1,13	1,16	1,15	1,11	1,06	0,95	0,86	0,77	0,67	0,54	0,38
$G_E^p(t)/D(t)$	-1,11	-1,30	-1,35	-1,43	-1,43	-1,42	-1,36	-1,28	-1,21	-1,10	-0,95	-0,74
$G_E^p(t)/D(t)$	-1,57	-1,52	-1,50	-1,48	-1,45	-1,41	-1,31	-1,25	-1,17	-1,07	-0,93	-0,73
$G_E^p(t)/D(t)$	-0,13	-0,12	-0,10	-0,06	-0,03	0,00	0,05	0,08	0,11	0,13	0,14	0,14
$M_N(\Gamma \cdot B)$	0,74	0,83	0,87	0,90	0,92	0,94	0,97	0,99	1,00	1,01	1,02	1,04

а) Протонные формфакторы. Отметим, во-первых, что поведение формфактора  $G_M^p(Q^2)$ , вычисленное по формуле (22), в области 2–10 ГэВ<sup>2</sup> согласуется в пределах 10 % точности с эмпирическим дипольным фитом  $G_M^p(Q^2) = \mu_p D(Q^2)$  (где  $\mu_p = 2,79$ ), а  $D(Q^2) = (1 + Q^2/\Omega^2)^{-2}$ . Далее, используя (21)–(23), можно получить явное выражение и для  $G_E^p(Q^2)$ , которое при  $Q^2 \leq 12$  ГэВ<sup>2</sup> также с 10 % точностью согласуется с дипольной формулой  $G_E^p(Q^2) = D(Q^2)$ .

(таблица, третья строка). Как следствие, при изменении  $Q^2$  от 3 до 15 ГэВ<sup>2</sup> с точностью 15 % выполняется масштабный закон  $G_M^P(Q^2)/G_E^P(Q^2) = \mu_P$ . С другой стороны, приняв, что  $G_E^P(Q^2)/G_M^P(Q^2) = \mu_P$  для всех  $Q^2$ , можно извлечь  $G_M^P(Q^2)$  и из формулы (21), которая предположительно является более точной при малых  $Q^2$ , чем формула (22). Действительно, подобный расчет дает для  $G_M^P(Q^2)$  значения, лучше согласующиеся с экспериментальными данными при  $Q^2 = 1-2$  ГэВ<sup>2</sup>, чем результаты вычислений по формуле (22) (см. таблицу, 2-я строка и рис. 7.)

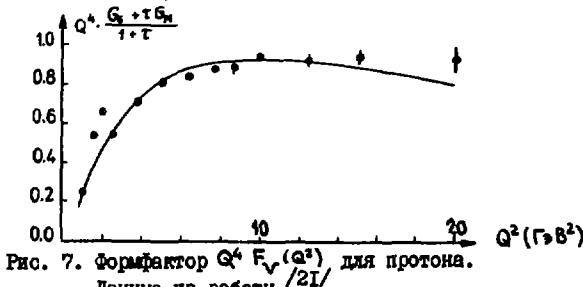


Рис. 7. Формфактор  $Q^4 F_V(Q^2)$  для протона.

Данные из работы [21]

б) Магнитный формфактор нейтрона. Для нейтронного формфактора  $G_M^N(Q^2)$  формулы (21), (22) согласуются с экспериментальными данными в пределах ошибок эксперимента только при  $Q^2 \gtrsim 6$  ГэВ<sup>2</sup> (рис. 8), а в области  $Q^2 \lesssim 6$  ГэВ<sup>2</sup> согласие формул (21), (22)

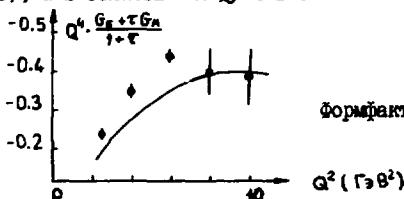


Рис. 8.  
Формфактор  $Q^4 F_V(Q^2)$  для нейтрона

с экспериментальными данными далеко не такое блестящее, как для  $G_M^P(Q^2)$ . В частности, при  $Q^2 = 3-6$  ГэВ<sup>2</sup> формула (21) дает для  $|G_M^N(Q^2)/G_E(Q^2)|$  значения, лежащие на 30 % ниже экспериментально наблюдаемого (таблица, 4-я строка). При  $Q^2 = 1-2$  ГэВ<sup>2</sup> формула (22) еще больше занижает величину  $|G_M^N|$ . Расчет по формуле (21) в предположении, что  $G_E^N(Q^2) = 0$ , уменьшает рассогласование с экспериментом при  $Q^2 = 1-4$  ГэВ<sup>2</sup>, но лишь до 20 % (таблица, 5-я

строка). Эту ситуацию можно интерпретировать таким образом, что различие между точной м.в.ф. нуклона и модельной м.в.ф. заметнее сказывается на  $G_M^n(Q^2)$ , чем на  $G_M^p(Q^2)$ . Необходимо подчеркнуть, что подобная асимметрия между протоном и нейтроном не обязательно противоречит изотопической инвариантности. В частности, исследуя структуру степенных поправок в КХД правилах сумм для  $G_M(Q^2)$  мы обнаружили, что для протона наиболее существенные  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle^2$ - поправки пропорциональны  $e_d$ , в то время как основной член, согласно (22), пропорционален  $e_u$ . Для нейтрона ситуация в точности обратная, и как следствие отношение  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle^2$  - поправки к основному члену для нейтрона получается в 4 раза большим, чем для протона.

**в) Электрический формфактор нейтрона и оценка массы нуклона**

Используя формулы (21)-(23) можно вычислить формфактор  $G_E^n(Q^2)$ , который оказывается с хорошей точностью равным нулю в интервале от 2 до  $20 \text{ ГэВ}^2$  (таблица, 6-я строка). Подчеркнем, что близость  $G_E^n(Q^2)$  к нулю является результатом нетривиальной корреляции между вытекающими формулами (21), (22) значениями формфакторов  $F_V^n(Q^2)$ ,  $G_M^n(Q^2)$  и входящим в (23) параметром массы нуклона. В частности, из требования  $G_E^n(Q^2)=0$  можно, пользуясь (21)-(23), извлечь величину  $M_N$ , которая в интервале  $Q^2 = 2-30 \text{ ГэВ}^2$  совпадает с экспериментальным значением с точностью не хуже 10% (таблица, 7-я строка).

г) Отношение  $G_M^p(Q^2)/G_M^n(Q^2)$ . Согласно формуле (22), отношение  $G_M^p(Q^2)/G_M^n(Q^2)$  постоянно и равно (-2). Формула (21) (в предположении, что  $G_E^n(Q^2)/G_u(Q^2) = G_E^p(0)/G_u(0)$ ) при  $Q^2 \lesssim 4 \text{ ГэВ}^2$  дает для  $|G_M^p(Q^2)/G_M^n(Q^2)|$  значения, меньшие двух (например 1,6 при  $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ ), но при  $Q^2 \gtrsim 4 \text{ ГэВ}^2$  предсказания формул (21) и (22) совпадают друг с другом. Отметим, что при  $Q^2 \gtrsim 6 \text{ ГэВ}^2$  экспериментальные данные <sup>721</sup> также указывают на то, что  $G_M^p(Q^2)/G_M^n(Q^2) \approx -2$ .

д) Значения формфакторов при  $Q^2 = 0$ . Как указывалось ранее, нет никаких оснований надеяться на хорошее согласие между формулами (21), (22) и экспериментальными данными при  $Q^2 \lesssim 1 \text{ ГэВ}^2$ . Однако благодаря сохранению электрического заряда формфакторы  $G_E^n(Q^2)$ ,  $G_E^p(Q^2)$ , вычисленные по формулам (21)-(23), при  $Q^2=0$  принимают экспериментальные значения 0 и 1 соответственно. Для магнитных формфакторов формула (21) дает  $G_M^p(0) = 4e_u = 8/3$  и

$G_M^n(0) = 4 e_d = -4/3$ . Для протона теория опять (как и при  $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$ ) оказалась более точной, чем для нейтрона. Интересно отметить, что отношение  $(\mu_n - 4/3)/(\mu_p - 8/3)$ , действительно, близко к 4.

## 6. Заключение

Таким образом, в довольно широкой области  $Q^2 = 2-15 \text{ ГэВ}^2$  расчет нуклонных формфакторов по формулам (21), (22) находится в удовлетворительном (а иногда и в хорошем) согласии с экспериментальными данными. Одним из наиболее нетривиальных результатов можно считать вытекающее из (21), (22) предсказание о том, что отношение  $G_M^n(Q^2)/G_M^p(Q^2)$  при достаточно больших  $Q^2$  должно принимать значение  $(-2)$ , согласующееся с последними экспериментальными данными /21/. Для японского формфактора хорошее согласие между теоретическими расчетами и экспериментальными данными имеет место в области  $0,5 \leq Q^2 \leq 5 \text{ ГэВ}^2$ . Как для нуклонов, так и для pione хорошее описание данных удалось получить в рамках низшего (нулевого) приближения по  $\alpha_s$ , без учета подавленных по  $(\alpha_s/\pi)^2 \sim 0,1$  и  $(\alpha_s/\pi)^3 \sim 0,01$  вкладов, связанных с глюонными обменами. Мы видели также, что поведение адронных формфакторов в указанных областях изменения  $Q^2$  существенным образом, зависит от параметров (типа  $S_0$ ), характеризующих размеры рассматриваемого адрона. Соответствующие формулы имеют сложную зависимость от  $S_0$  и  $Q^2$ , при умеренных  $Q^2$  имитирующие степенное поведение  $F_\pi(Q^2) \sim 1/Q^2$ ,  $G_{M,p}^n(Q^2) \sim 1/Q^4$ , логарифмическое правила квarkового счета /1,2/. Следует, однако, отметить, что основной вклад в формфакторы дает при этом интегрирование по импульсам  $k$ , имеющим виртуальность  $|k^2|$  порядка масштаба  $S_0$ , так что ни о каких приближениях, основанных на малости отношения  $S_0/|k^2|$ , не может быть и речи. Наблюдаемый на эксперименте степенной закон убывания адронных формфакторов с ростом  $Q^2$  есть эффект, целиком обусловленный конечными размерами адронов. Он никак не связан ни с подпроцессами жесткого перерассеяния, ни с масштабной инвариантностью на малых расстояниях. Лишь в далекой асимптотике, когда вклады простейших  $O(\alpha_s^0)$  — диаграмм (рис. 2a, 3a) будут подавлены судаковским формфактором активного квarkа, доминирующий вклад в адронные формфакторы будут давать диаграммы жесткого перерассеяния (рис. 1). Только при таких (по-видимому, астрономических) значимых передачи импульса в игру вступят малые расстояния, и к рас-

чету формфакторов адронов будет применен асимптотический анализ,  
развитый в /1-8/.

Все сказанное имеет прямое отношение и к другим экспозиционным процессам (таким, как рассеяние адронов на большие углы), а также к анализу структурных функций при  $x \rightarrow 1$ . Во всех случаях, когда нет запретов (связанных, например, с законами сохранения) на диаграммы без глюонных обменов, именно такие диаграммы следует учитывать в первую очередь, а не тратить зря силы и время на расчет, скажем, миллионов  $O(\alpha_s^5)$  — диаграмм, ответственных за (астрономически далекую) асимптотику амплитуды  $pp$ -рассеяния на большой угол.

#### Литература

1. V.A. Matveev, R.M. Muradyan, A.N. Tavkhelidze. Lett. Nuovo Cimento, 1973, 7, p.719.
2. S.J. Brodsky, G.R. Farrar. Phys. Rev., Lett., 1973, 31, p. 1153.
3. A.B. Радюшкин. Препринт ОИЯИ P2-10717, Дубна, 1977.
4. S.J. Brodsky, C.P. Lepage. Preprint SLAC-Pub 2294 Stanford, 1979.
5. A.N. Efremov, A.V. Radyushkin. Phys. Lett., B, 94, 1980, p. 245.
6. S.J. Brodsky, G.P. Lepage. Phys. Rev., D, 1980, 22, p.2157.
7. В.Л. Черняк. Материалы XV Зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, 1980, т. I, с. 65.
8. A.H. Mueller. Phys. Reports 1981, 73, p. 237.
9. M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov. Nucl. Phys., B, 1979, 147, pp. 385, 447.
10. B.L. Loffe. Nucl. Phys., 1981, 188, p. 317.
11. В.А. Нестеренко, А.В. Радюшкин. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с. 395.
12. V.A. Nesterenko, A.V. Radyushkin. Phys. Lett., B, 1982, 115, p. 410.
13. B.L. Loffe, A.V. Smilga. Phys. Lett., B, 1982, 114, p.353; Nucl. Phys., B, 1983, 216, p. 373.
14. В.А. Нестеренко, А.В. Радюшкин. Препринт ОИЯИ, Р2-82-691, Дубна, 1982.
15. В.А. Нестеренко, А.В. Радюшкин. Препринт ОИЯИ Р2-83-251, Дубна, 1983.

16. N.V. Krasnikov, A.A. Pivovarov. *Phys. Lett.*, B, 1982, 112, p. 397.
17. C.A. Dominguez. Report DoE/ER/05223-48, Texas Univ., College Station, 1981.
18. C.Bebek et al. *Phys. Rev.* D, 1978, 17, p. 1693.
19. S.J. Brodsky, G.P. Lepage SLAC-Pub-2605. Stanford, 1980.
20. В.Б. Беляев, Б.Л. Модже. КЭТД, 1982, 93, 0. 876.
21. S. Rock et al. SLAC-Pub-2449, Stanford, 1982.

## ТРЕУГОЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ В КХД

Н.В.Красников

Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

Исследование релятивистского вещества при конечной температуре методами квантовой теории поля весьма важно для исследований рабочей Вселенной и других астрофизических приложений. Особый интерес представляет изучение фазовых переходов в моделях великого объединения и в КХД. В КХД при некоторой температуре  $T_c$  происходит фазовый переход от фазы квазилемента к фазе свободных夸克ов. С другой стороны, в квантовой хромодинамике с и бозонами夸克ами квазиматрица группы симметрии  $SU_L(n) \otimes SU_R(n)$  спектральная нарушена при  $T=0$ . При некоторой температуре  $T_F$  происходит восстановление квазиматрицы в КХД. В связи с этим

весьма интересен вопрос о соотношении между температурой деконфайнемента  $T_c$  и температурой восстановления киральной симметрии  $T_F$ . Недавно Хофт на основе использования уравнения Адлера-Белла-Джакина вместе с предположением о комфайнменте в КХД показал необходимость нарушения киральной симметрии в КХД (для  $n=3$ ) при нулевой температуре.

В настоящей работе мы покажем, что уравнение Адлера-Белла-Джакина, выведенное первоначально для  $T=0$  сохраняет свой вид и при конечных температурах. При этом анализ Хофта справедлив и для конечных температур. Мы покажем, что

$$T_F > T_c \quad (1)$$

Кроме того, из нашего анализа следует, что при температуре  $T_c < T < T_F$  безмассовые кварки приобретают немуленную динамическую массу.

Напомним, что при  $T=0$  уравнение Адлера-Белла-Джакина в КХД с  $n$  безмассовыми кварками имеет вид

$$K_\mu T_{abc}^{\mu\nu\lambda} = 8\pi^2 N_c \epsilon^{\mu\nu\lambda\beta} p_1^\mu p_2^\beta T_2 \frac{\{T^a T^b\} T^c}{2}, \quad (2)$$

$$T_{abc}^{\mu\nu\lambda} = (2\pi)^4 \int d^4x d^4y e^{-i\phi_1 x - i\phi_2 y} \langle 0 | T(J_a^\mu(x)$$

$$J_b^\nu(y) J_{sc}^\lambda(0) |0\rangle,$$

$$J_a^\mu = \bar{\psi} f^\mu \tau^a \psi,$$

$$J_{sc}^\lambda = \bar{\psi} f^\lambda \tau^c \psi,$$

$N_c=3$  – число цветов,  $T_a$  – генераторы группы  $SU(n)$ . Тензор  $T_{abc}^{\mu\nu\lambda}$  удовлетворяет тождеством Уорда

$$P_{1\mu} T_{abc}^{\mu\nu\lambda} = P_{2\nu} T_{abc}^{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (3)$$

и условию Бозе – симметрии.

Анализируя уравнение (2) и используя гипотезу о комфайнменте кварков, Хофт показал, что для  $n > 2$  киральная  $SU_{n-n}(n)$

симметрии должна быть спонтанно нарушена. Доказательство Хоффа основано на том, что аномалии в правой части уравнения (2) может компенсироваться только при наличии в спектре теории безмассовых частиц. Если киральная симметрия в КХД была бы точной, то это означало бы, что у некоторых баронов масса равна нулю. Однако при  $n > 2$  учет безмассовых баронов не воспроизводит аномальное уравнение (2). Отметим, что при доказательстве спонтанного нарушения киральной симметрии Хофф использовал помимо уравнения (2) условие декаплинга. Заметим, однако, что при  $n = 3$  (К-целое) доказательство Хоффа непосредственно следует из уравнения (2) без условия декаплинга.

Если мы рассматриваем квантовую теорию поля с температурой, то релятивистская инвариантность будет потеряна. Для того чтобы формально восстановить релятивистскую инвариантность удобно ввести внешний четырехвектор температуры  $n_T^M$  ( $n_{T\perp}^2 = T^2$ ). При этом в случае  $T \neq 0$  все функции Грина будут зависеть от внешнего четырехвектора температуры  $n_T^M$ . Нетрудно заметить, что уравнения движения не зависят от температуры. Более того, непосредственным вычислением можно показать, что при  $T \neq 0$  уравнение (2) и тождество Уорда (3) не меняются. Тот факт, что уравнение (2) справедливо и при конечной температуре, непосредственно связан с тем, что уравнение (2) обязано своим происхождением линейной расходимости соответствующих однолетевых интегралов. Поскольку введение конечной температуры не вносит дополнительных ультраколетовых расходимостей по сравнению со случаем  $T=0$ , то вид уравнения (2) не меняется, за исключением того, что в правой части уравнения (2)

$$\begin{aligned} \Pi_{abc}^{M^2} (p_1, p_2, n_T) &= \\ &\quad \langle T (S_a^M(x) S_b^M(y) S_c^M(z)) \rangle_T, \end{aligned}$$

где

$$\langle O \rangle_T = \text{Sp}(e^{-H/T_0}), \quad \text{Sp}(e^{-H/T})$$

Н-гамильтониан системы, а интеграл по всем состояниям. Таким образом, энталпия Хофта переносится без изменений и на случай Т<sub>0</sub>О. Отсюда, как следствие, мы сразу же получаем, что температура восстановления киральной симметрии Т<sub>F</sub> не может быть меньше температуры декомпозиции Т<sub>C</sub> (изделие I). В случае Т<sub>C</sub> < Т < Т<sub>F</sub> в правую часть уравнения (2) будут давать вклад безмассовые псевдоскалярные мезоны-голдстоуны группы  $SU_{L-R}(4)$ . Для того чтобы избежать дополнительного вклада в правую часть уравнения (2), безмассовые кварки должны приобрести при Т<sub>C</sub> < Т < Т<sub>F</sub> некулонову динамическую массу.

Я благодарю В.А.Матвееву и А.Н.Тахалидзе за полезные обсуждения.

AVERAGE MULTIPLICITIES IN DEEP INELASTIC PROCESSES  
AND THEIR INTERPRETATION

A.V.Kiselev, V.A.Petrov

Institute for High Energy Physics, Serpukhov

1. INTRODUCTION

For a more detailed check of QCD in hard processes it is necessary to measure besides usual structure functions - the quantities related to final hadronic states; inclusive spectra of hadrons and jets, average multiplicities, etc. In particular, a great attention is being payed to measurement of average multiplicities in deep-inelastic lepton-hadron processes both total ( $\bar{N}_{TOT}$ ) and those of hadrons flying along and opposite to current direction in hadronic c.m.s./1,2/. In what follows we shall designate these quantities as  $\bar{N}_F$  and  $\bar{N}_B$ , respectively.

If one starts from "standard" parton model then such experiments are to give information about fragmentation properties of the quark, knocked out from the nucleon ( $N_F$ ) and those of the remaining stuff, which we call "diquark" ( $\bar{N}_B$ ).

A common property of various experiments at energies of hadronic system in its c.m.s.  $W \approx 18$  GeV consists in systematical excess of  $\bar{N}_F$  over  $\bar{N}_B$ <sup>1,2/</sup>. Qualitatively this phenomenon can be explained by the fact that diquark, as a rule, must produce a nucleon (or an isobar), carrying away a significant fraction of the diquark momentum. Thus the effective energy available for particle production in target fragmentation region is lower than energy available for particle production in current (struck quark) fragmentation region. Quantitative calculation at above mentioned (relatively low) energies demands concrete phenomenological assumptions about, for example, fragmentation function of the diquark, and cannot be realized in the framework of quantum field theory, at least on its present level.

At  $Q^2$  high enough standard parton model needs quantum chromodynamical modification in order to account for the scaling violation in structure functions. The same relates to the hard processes with semiinclusive production of hadrons. For all that it is possible to preserve usual interpretation of  $\bar{N}_F$  as multiplicity of the struck quark fragmentation products. As far as  $\bar{N}_B$  is concerned the picture

changes drastically. At  $Q^2$  high enough there begins intensive bremsstrahlung of gluons, fragmenting then into hadrons. The role of diquark in  $\bar{N}_B$  becomes less and less essential, and the main contribution to  $\bar{N}_B$  is due to the cascade production of heavy gluon jet (see below in more detail). Under such conditions the task of determining of  $\bar{N}_F$  and  $\bar{N}_B$  can be reduced to the calculation of multiplicities in quark and gluon jets in the framework of perturbative QCD, supplemented with hypothesis of soft branching for transition of quarks and gluons into hadronic states<sup>3,4</sup>.

## 2. INCLUSIVE PRODUCTION OF HADRONS IN DEEP INELASTIC PROCESSES

Let us consider a deep inelastic process

$$\ell + p \rightarrow \ell' + X \quad (I)$$

In single-photon (W-boson) approximation process (I) is equivalent to the process of absorption of virtual photon or W-boson with four-momentum  $q = \ell - \ell'$  by proton

$$\gamma^* + p \rightarrow X \quad (II)$$

In the renormalizable theories structure functions of process (II) which we designate totally as  $F(x, Q^2)$ , where  $Q^2 = -q^2$ ,  $x = Q^2/2pq$ , are proved to factorize (with an accuracy of  $O(1/Q^2)$ ):

$$F(x, Q^2) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} F_i(z, Q^2, Q_0^2) f_i(z, Q_0^2) \quad (I)$$

where  $i$  means the species of partons,  $F_i$  can be interpreted, at  $Q^2 \gg Q_0^2$ , as a structure function of a parton process

$$\gamma^* + i \rightarrow X_i \quad (III)$$

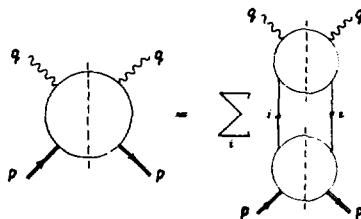
with Bjorken variable  $x/z$ , and  $f_i(z, Q^2)$  is the  $i$ -type parton distribution function on parton momentum fraction of proton momentum. Parameter  $Q_0^2$  has double meaning. In process (III)  $Q_0^2$  stands for invariant mass square of parton  $i$  (this is so only at  $Q_0^2 \ll Q^2$ ) and in  $f_i(z, Q^2)$  parameter  $Q_0^2$  means the normalization point of composite operator, which in its turn defines  $z$ -distribution function of parton  $i$ . In the language of Lipatov-Kogut-Susskind parton model  $Q_0^2$  in  $f_i$  defines the depth at which the parton  $z$ -distribution is probed. The L.H.S. of equation (1) at  $Q^2 \geq Q_0^2 \gg M^2$ ,  $M$  is a mass of the order of 1 GeV (proton mass, for example), independent of  $Q^2$  - the fact following from renormalizability.

In QCD the concept of renormalization well defined in perturbation theory loses its meaning at  $Q_0^2 \sim M^2$  because nonperturbative effects connected with confinement become important. Further on  $Q_0^2$  is supposed to lie on the boundary between perturbative phase of QCD and nonperturbative one, i.e.  $Q_0^2 \ll Q^2$  while an effective coupling constant is yet small enough  $\alpha_s(Q_0^2)/2\pi < 1$ . Thus all nonpertur-

bative effects are concentrated in  $f_i(z, Q_0^2)$  and  $Q_0^2$  acquires a status of a physical parameter, connected with the confinement radius. It is worth to note that  $f_i(z, Q_0^2)$  in gauge theories can be interpreted as a function of parton momentum fraction distribution only within definite class of gauges, in axial gauge, for instance

$$n_\mu A_\mu = 0 \quad (2)$$

In this case  $z = nk/np$ , where  $k$  is a parton momentum. Relation (1) may be symbolically presented in the form



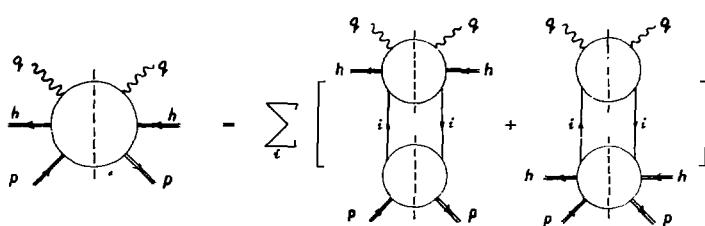
In order to obtain the expression for inclusive spectrum in the process

$$\gamma^* + p \rightarrow h + X \quad (IV)$$

one needs to "differentiate" (1):

$$\frac{dF}{d^3h} = \sum_i \int \frac{1}{z} \frac{dz}{dh} \left[ \frac{d^3}{d^3h} f_i + F_i \frac{df_i}{d^3h} \right]. \quad (3)$$

$d^3h = d\vec{h}/(2\pi)^3 2h_0$ . Relation (3) can be presented by the following figure



Usually when discussing inclusive hadron spectra in deep inelastic processes one restricts himself by the consideration of the first term in relation (3) only, which defines at large  $Q^2$  the distribution of particles produced with positive rapidities in hadronic c.m.s. As it will be seen below the contribution of the second term in (3) to total multiplicity at fixed  $x$  becomes less and less essential when  $Q^2$  grows. Nevertheless the rejection of the second term in (3) would result in violation of general requirements as, for instance, sum rules reflecting four-momentum conservation. Further on

we will discuss distribution on rapidity  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{h_0 + h_{||}}{h_0 - h_{||}} = \frac{1}{2} \ln \frac{h_+}{h_-} = \ln \frac{2h_+}{\sqrt{\mu^2 + h_+^2}}$  which we rewrite in a normalized form

$$F(x, Q^2) \frac{d\bar{N}_i}{dy} = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} F_i(x, Q^2, Q_0^2) f_i(Q_0^2, z) \left[ \frac{d\bar{N}_i}{dy} + \frac{d\bar{N}_i}{dy} \right], \quad (4)$$

where  $d\bar{N}_i/dy$  is a rapidity distribution density\*) in the process

$$y^+ + i \rightarrow h + X_i \quad (Y)$$

and  $d\bar{N}_i/dy$  is a rapidity distribution density, corresponding to virtual process

$$p \rightarrow i + h + (X - X_i) \quad (YI)$$

In process (II)  $y$  varies within the region

$$-Y \leq y + \ln \frac{2(p+q)_+}{W} \leq Y, \quad ,$$

where  $Y = \ln \left[ \frac{W}{\mu} + \sqrt{\left( \frac{W}{\mu} \right)^2 - 4} \right] - \ln \frac{2W}{\mu}$ ,  $W^2 = (p+q)^2$  is a square of final hadron states energy in the c.m.s.  $\vec{p} + \vec{q} = 0$  and  $\ln \frac{2(p+q)_+}{W}$

is the c.m.s. rapidity, which is equal to zero when  $\vec{p} + \vec{q} = 0$ .

Further on we work always in the c.m.s.  $\vec{p} + \vec{q} = 0$ . In process (V) rapidity changes within the limit

$$-\tilde{Y} \leq y + \ln \frac{2(k+q)_+}{\tilde{W}} \leq \tilde{Y},$$

where  $\tilde{Y} = \ln \left[ \frac{\tilde{W}}{\mu} + \sqrt{\left( \frac{\tilde{W}}{\mu} \right)^2 - 4} \right]$ ,  $\tilde{W}$  is the mass of final states and  $\ln \frac{2(k+q)_+}{\tilde{W}}$  means rapidity of the c.m.s. for system  $X_i$  in the total process c.m.s. Here

$$\tilde{W}^2 = W^2 \frac{z-x}{1-x}, \quad \ln \frac{2(k+q)_+}{\tilde{W}} = \ln \frac{1-x}{z-x} = y_0.$$

\*) Here and below the summation on species of detected hadrons is implied unless it is mentioned apart.

In the  $\vec{p} + \vec{q} = 0$  system the kinematically available region of rapidities for particles produced in process (IV) at fixed  $z$  is of the form

$$-Y + y_0 < y < Y \quad (5)$$

The region where rapidity of diquark fragments varies in subprocess (IV) at fixed  $z$  looks as follows:

$$-Y + \ln \frac{1-x}{1-z} < y < -Y + \ln \frac{1-x}{1-z} + \ln \frac{4M^2}{\mu^2}, \quad (6)$$

where  $M^2 = (1-z)(M^2 + Q_0^2/z)$  is an upper limit for diquark system invariant mass.

After integration upon  $z$  in formula (4) regions (5) and (6) spread to the total region

$$-Y \leq y \leq Y$$

More detailed analysis shows that provided

$$W > \frac{2}{\mu}(1-x)(M^2 + Q_0^2/x) \quad (7)$$

diquark contribution is wittingly absent in the region  $0 \leq y \leq Y$ . For example, if  $\mu = m_n$ ,  $x = 1/2$ ,  $Q_0^2 = M^2$  the condition for absence of diquark contribution to forward moving particle production consists in that

$$W \geq 20 \text{ GeV}$$

Condition (7) is, of course, not an exact one because of some uncertainty of the parameter  $Q_0^2$ . But some qualitative conclusions can be drawn: for instance, heavier diquark fragments leave the region of positive rapidity more rapidly.

On the other hand at low energies as one can see from (5) and (6), fragmentation regions of quark and diquark overlap.

So at high enough energies inclusive spectrum will mainly be defined at  $y > 0$  by secondary particle spectrum in process (V). The position of the central part of the rapidity region available in the c.m.s. of process (V) can be estimated at fixed  $x$  by taking instead of  $F_1$  its nonsinglet part, i.e.

$$F_1(x, Q^2, Q_0^2) \sim \frac{(1-x/z)_+^{2C_F \xi - 1}}{\Gamma(2C_F \xi)},$$

where  $\xi = \int \frac{dk^2}{Q_0^2 k^2} \frac{a_S(k^2)}{2\pi}$ ,  $C_F = (N^2 - 1)/2N$ ,  $N \sim$  is a color number. For

$f_1(z, Q_0^2)$  we use the expression following from quark counting rules/6/:

$$f_1(z, Q_0^2) \sim (1-z)^{2n_{sp}-1},$$

where  $n_{sp}$  is a number of passive quarks (spectators). In our case  $n_{sp} = 2$ . Then the position of spectrum central part for process (IV) in the system  $\vec{p} + \vec{q} = 0$  is determined by the quantity

$$\frac{1}{2} \langle y_o \rangle \approx \frac{1}{4C_F \xi} + \dots + \frac{1}{4(C_F \xi + n_{sp})} \quad (8)$$

Formula (8) holds at  $\xi > 0$ . At  $\xi = 0$  i.e.  $Q^2 = Q_o^2$

$$\frac{1}{2} \langle y_o \rangle = \ln \frac{W}{Q_o} \quad (9)$$

where parameter  $\bar{Q}_o$  analogous to  $Q_o$  separates perturbative phase from nonperturbative one along timelike direction. One can see from (8) that the position of spectrum middle point in process (V) tends

to zero rather slowly ( $2C_F \xi \sim \ln \frac{\ln Q/\Lambda}{\ln Q_o/\Lambda}$ )

$$\frac{1}{2} \langle y_o \rangle \xrightarrow[Q^2 \rightarrow \infty]{x \text{ - fix}} 0$$

Whence it appears that with the increase of  $Q^2$  process (V) will form the spectrum of process (III) within even wider region of rapidities. As for diquark contribution there is a limit on its invariant mass

$$M^2 < (1-x)(M^2 + Q^2/x)$$

which makes diquark contribution even less essential at fixed  $x$  when  $Q^2$  grows. Indeed integrating the diquark contribution to total multiplicity

$$F(x, Q^2) \bar{N}_{\text{diquark}} = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} \bar{n}_i(Q_o^2, z) F_i(Q^2, Q_o^2, \frac{x}{z}) f_i(z, Q_o^2)$$

we obtain

$$\bar{N}_{\text{diquark}} \leq \max_{x \leq z \leq 1} \bar{n}_i(Q_o^2, z)$$

i.e.,  $\bar{N}_{\text{diquark}}$  is bounded from above by a  $Q^2$  independent value.

So contribution of process (IV) dominates at  $Q^2 \rightarrow \infty$ . However at fixed  $Q^2$  the average energy  $\langle \tilde{W} \rangle$  of process (IV) in its own c.m.s. is much lower than the total energy  $W$

$$\langle \tilde{W}^2 \rangle = \frac{2C_F \xi}{2n_{sp} + 2C_F \xi} W^2$$

For instance, if  $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ ,  $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ ,  $\Lambda = 0.1 \text{ GeV}$   
 $\langle \tilde{W}^2 \rangle \simeq 0.1 W^2$

i.e.  $\langle \tilde{W} \rangle \simeq 3 \text{ GeV}$  at  $W = 10 \text{ GeV}$ . Under such circumstances one can hardly expect that LLA is applicable to the calculation of spectrum in process (IV).

Indeed in this case secondary particles must be the products of quark and gluon jet fragmentation. However invariant masses of the jets are too small for one to use the approximation which allowed the authors of refs.<sup>7-9</sup> to obtain the expression for spectra and multiplicities in parton jets. This is confirmed by low values of experimentally observed multiplicities. For example, at  $W \simeq 10 \text{ GeV}$   $N_{ch}$  in process  $\nu p \rightarrow hX$  is approximately equal to 4 for particles moving forward in hadron c.m.s.

Thus at available energies transition of partons into hadrons is mainly of nonperturbative character. At the same time usual structure functions which we calculate without paying attention to final states are satisfactorily described by the expressions obtained within the framework of QCD at  $x$  not too close to 0 or 1.

Leaving aside a doubtless possibility of describing inclusive spectra in deep inelastic processes with the help of phenomenological parton models, let us turn directly to experimental data. The main feature of inclusive rapidity distributions of charged hadrons in hadron c.m.s. measured in processes  $\bar{\nu}p \rightarrow \mu hX$  ( $W < 10 \text{ GeV}$ )<sup>2/</sup>,  $\mu p \rightarrow \mu hX$  ( $W < 14 \text{ GeV}$ )<sup>10/</sup> is quite distinguished asymmetry: the spectra have a maximum shifted into a region of positive rapidity. As soon as diquark contribution to positive rapidities region decreases with an increase of  $W$  the maximum mentioned above reflects obviously the structure of inclusive spectrum in subprocess  $\gamma^* + \text{quark} \rightarrow h + X$ . It follows particularly from the results of ref.<sup>10/</sup> where spectra of charged hadrons in process  $\mu p \rightarrow \mu hX$  at  $W^2 \leq 450 \text{ GeV}^2$  and  $Q^2 \leq 100 \text{ GeV}^2$  with laboratory momentum above 6 GeV have been measured. Hadron spectrum for  $y > 0$  has rather sharp maximum at  $y \simeq 1.5$  ( $y < 4$ ). The value  $y \simeq 1.5$  is in a satisfactory agreement with the estimates of mean value  $1/2 \langle y \rangle$  by formula (8) from which one concludes that hadron spectrum in subprocess (IV) is approximately symmetrical in the c.m.s. of subprocess (V) and reaches its maximum value at  $y^* = 0$ . Of course one should bear in mind that inclusive spectra in deep inelastic processes are measured to our regret, not at definite energies but at energies belonging to some interval. That is why the discussions mentioned above are mainly qualitative ones.

Thus available at present experimental data on inclusive production of hadrons in deep inelastic processes reveal the asymmetry: particles with positive rapidities are produced in a greater number than those with negative rapidities.

3. AVERAGE MULTIPLICITIES IN DEEP INELASTIC PROCESSES  
AT  $Q^2 \rightarrow \infty$

What will happen with the increase of  $Q^2$ ? As it was mentioned above subprocess (V) plays the leading role. In general one must take as 1 parton both quarks and gluons. However the contribution of gluons is suppressed in comparison with quark contribution at fixed  $x$  and  $Q^2$  high enough. Thus the subprocess

$$\gamma^* + \text{quark} \rightarrow h + X$$

plays the leading role.

The total average multiplicity is consequently determined by the expression

$$\bar{N}_{TOT}^F(x, Q^2) = \sum_i \int_x^1 \frac{dz}{z} F_i(Q^2, Q_0^2, \frac{x}{z}) f_i(z, Q_0^2) \bar{N}_i(Q^2, Q_0^2, \frac{x}{z}) + \\ + \bar{N}_{diquark}^F(x, Q^2) \quad (10)$$

where  $\bar{N}_{diquark} < \text{const}$  at  $Q^2 \rightarrow \infty$  and fixed  $x$ ,  $i$  is a species of quarks.

Let us clarify now what is the contribution to  $\bar{N}_{TOT}$  and also to  $\bar{N}_F$  and  $\bar{N}_B$  coming from the first term in (10) which we designate by  $\bar{N}_{TOT}^q F(x, Q^2)$ . The problem has already been investigated in ref./11/. Here we present only the results supplemented by a more detailed discussion of parton jet fragmentation. It is convenient to make calculations in axial gauge (2), taking as a gauge vector  $W_\mu$ , i.e. total momentum of final hadron state in process (IV). In the c.m.s. this gauge comes to temporal one:

$$A_0 = 0$$

In  $A_0 = 0$  gauge both the fragments of struck quark and the fragments of massive off-shell gluons emitted by the target-quark make contribution to  $\bar{N}_{TOT}^q$ . We designate their multiplicities  $\bar{N}_+$  and  $\bar{N}_-$ , respectively ( $\bar{N}_{TOT}^q = \bar{N}_+ + \bar{N}_-$ ). It is necessary to clear up: in what direction the fragments move. It concerns mainly the soft particles, because namely they are considered as responsible ones for the size of average multiplicity.

First let us consider the fragmentation of the struck quark. Its off-shell mass is large enough at high  $Q^2$ . It follows from kinematics that quark would be able, in principle, to emit soft particles backward, i.e. opposite to its momentum. However this does not take place due to dynamical reasons. As it has been shown in refs./8,9/ at soft momenta destructive interference in Feynman diagrams leads to effective ordering of production angles in consecutive decays of partons. It also shifts the spectrum towards higher momentum than one thought of earlier. In our case it leads to the fact that pro-

ducts of the struck quark fragmentation move wholly along the current direction. Thus we have

$$\bar{N}_F = \bar{N}_+ = \frac{\sum_i \bar{N}_i(W^2) \int \frac{dz}{z} F_i(Q^2, Q_0^2, \frac{x}{z}) f_i(Q_0^2, z)}{F(x, Q^2)}, \quad (11)$$

where  $\bar{N}_i$  is average multiplicity in a jet of  $i$  quark in  $A_0=0$  gauge.

As at  $W^2$  high enough quantity  $N_i$  does not depend on quark species,  $\bar{N}_i = \bar{N}_q$  we obtain from (11)

$$\bar{N}_F \approx \bar{N}_q(W^2).$$

Let us underline that  $\bar{N}_F$  depends essentially on total energy of final state  $W$  only but not on  $Q^2$  and  $x$  taken separately - the fact marked out repeatedly in experimental works/12/. On first sight from the point of view of LLA to distinguish  $Q^2$  from  $W^2$  would mean an excess of accuracy. However when one calculates average multiplicities he in fact already goes beyond the limits of standard procedure of accounting for leading terms. For example, the use of  $k^2$  instead of  $zk^2$  leads to quite different (and wrong) answer for  $\bar{N}$ . At present the opinion is popular (confirmed by the direct calculation in high orders) that rigorous account of kinematics in LLA takes into consideration automatically corresponding corrections.

On the other hand in the same temporal gauge we have

$$\bar{N}_{e^+e^-}(W^2) = \frac{\sum_i e_i^2 (\bar{N}_q(W^2) + \bar{N}_{\bar{q}}(W^2))}{\sum_i e_i^2} \approx 2\bar{N}_q(W^2) \quad (12)$$

and, consequently,

$$\bar{N}_F(W^2) \approx \frac{1}{2} \bar{N}_{e^+e^-}(W^2) \quad (13)$$

As we see from (13) the average multiplicity of particles moving along the current in deep inelastic process coincides with the half of average multiplicity in  $e^+e^-$ -annihilation at the same energy.

For the first time the quantity  $\bar{N}_{e^+e^-}$  has been calculated in refs./4,7/. Further it has been shown in ref./8/ that the expression for  $\bar{N}_{e^+e^-}$  is modified due to destructive interference (mentioned above). At present it is of the form

$$\bar{N}_{e^+e^-}(W^2) \sim \exp \sqrt{\frac{2N}{\pi b} \ln \frac{W^2}{\Lambda^2}},$$

where  $12\pi b = 11N - 2N_f$ ,  $N_f$  is a number of active flavors.

Formulae of type (11) more than once have appeared in literature. As to the target quark contribution to  $\bar{N}_T^q$ , it has been found for the first time within the framework of perturbative QCD in ref. /11/. Target fragments are produced from decay of hard gluon jets, they flow (in  $A_0 = 0$  gauge) opposite to the current, i.e. make contribution to  $\bar{N}_B$

$$\bar{N}_B = \bar{N}_- = \frac{1}{F(x, Q^2)} \sum_i \frac{Q^2}{Q_o^2} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \frac{1}{x} \int dz \int \frac{dy}{x/z} \frac{a_s(k^2 \frac{1-z}{z})}{2\pi} \times$$

$$\times F_i(Q^2, k^2, \frac{x}{yz}) \hat{P}_q^{qg}(z) \bar{N}_g(|k^2| \frac{1-z}{z}, \bar{Q}_o^2) f_i(k^2/z, y). \quad (14)$$

In formula (14)  $\hat{P}_q^{qg}(z)$  means the nonregularized function for decay  $q \rightarrow qg$ , and through  $N_g$  we designate the average multiplicity in gluon jet.

Function  $\hat{P}_q^{qg}(z)$  has the singularity of  $(1-z)^{-1}$  type. In structure functions calculations the singularity is regularized by the contributions of virtual processes. In our case, when one selects final, "real" states, the singularity of decay function remains uncompensated. But according to the hypothesis of soft color branching, hadrons are produced through decay of parton colorless clusters with a mass of the order of few GeV/3,4. For simplicity we suppose that it coincides with parameter  $\bar{Q}_o$ . Then the limitation at large  $z$  holds

$$|k^2| \frac{1-z}{z} > \bar{Q}_o^2 \quad \text{or} \quad z < 1 - \frac{\bar{Q}_o^2}{|k^2| + \bar{Q}_o^2}$$

Taking into account all what was said above it is easy to obtain the formula

$$\bar{N}_B \approx \frac{Q^2}{Q_o^2} \frac{d|k^2|}{|k^2|} \int_{\max(\frac{\bar{Q}_o^2}{|k^2|}, \frac{|k^2|}{Q^2})}^{1-x} dz \hat{P}_q^{qg}(z) \frac{a_s(k^2 \frac{z}{1-z})}{2\pi} \bar{N}_g(|k^2| \frac{z}{1-z}, \bar{Q}_o^2).$$

The expression on the R.H.S. in its turn at  $W^2 \rightarrow \infty$  is nothing but  $\bar{N}_q$  and we come to equality (accounting for (12))

$$\bar{N}_B \approx \frac{1}{2} \bar{N}_{e^+ e^-} (W^2) \quad (15)$$

It follows from (13) and (15) that at  $W^2 \rightarrow \infty$  the relations hold\*)

$$\begin{aligned}\frac{\bar{N}_F(W^2)}{\bar{N}_B(W^2)} &= 1, \\ \frac{\bar{N}_{TOT}(W^2)}{\bar{N}_{e^+e^-}(W^2)} &= 1.\end{aligned}\tag{16}$$

When deducing (16) we have omitted nonperturbative diquark contribution discussed above in detail which is energy-independent.

#### 4. INTERPRETATION OF $N_F$ AND $N_B$

Now let us discuss some principal problems, connected with the interpretation of formulae (16). Results (16) are in full agreement with the ideas of parton model about hard processes. Unfortunately such correspondence depends completely on our wish. Indeed consider, for instance, the case when vector  $n$  determining the axial gauge, coincides with momentum of the struck quark. Then the total multiplicity is accumulated (in the sense of main leading term) entirely through decay of gluon jets emitted by target-quark, i.e.

$$\begin{aligned}\bar{N}_{TOT} &\approx \bar{N}_- \\ \frac{\bar{N}_+}{\bar{N}_-} &\rightarrow 0 \text{ at } W^2 \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

It however does not mean at all that most of the particles are produced in the target fragmentation region, i.e.  $\bar{N}_{TOT} = \bar{N}_B$ . In reality gluon jets are emitted in the given gauge by the target-quark symmetrically relative to the direction of its movement\*\*) which leads again to formulae (16). Nevertheless the picture of final states creation has considerably changed and we are not able to interpret, say,  $\bar{N}_F$  as the result of the struck quark fragmentation. Still more noticeable deviations from parton pattern will take place in Feynman gauge.

All this makes us convinced that perturbative QCD at modern level does not allow one to interpret unambiguously the experimental data in terms of microprocesses underlying observed phenomena. Thus the interpretation of experimental results is, in general, quite conventional in QCD. Of course it does not concern the verification

\*) Let us note that formulae (16) are specific for QCD. For example in  $\text{d}_6^3$  theory  $\bar{N}_F/\bar{N}_B \sim (1-x)^{-2}$ .

\*\*) An analogous phenomenon was observed in  $e^+e^-$ -annihilation investigation in QCD<sup>14</sup>.

of quantitative predictions of QCD, connected with the behaviour of gauge invariant features of physical processes, such as, for instance, average multiplicities considered in the paper.

## 5. CONCLUSION

As a result we come to the following conclusions:

1. At modern energies the jet evolution in deep inelastic process is mainly of nonperturbative character.
2. With the increase of  $W^2$  the leading contribution to average multiplicity comes from parton subprocess due to production of massive quark and gluon jets and their further fragmentation, as di-quark contribution becomes less and less essential.
3. At asymptotically high  $W^2$  the ratio of average multiplicities of particles, moving along the current and opposite to it in hadronic c.m.s., tends to unity.
4. The ratio of the total average multiplicity in deep inelastic process to average multiplicity in  $e^+e^-$ -annihilation at the same (asymptotically high) energy tends also to unity.
5. Interpretation of  $\bar{N}_F$  and  $\bar{N}_G$  as average multiplicities of current fragments and target fragments respectively takes place in definite gauges only and consequently it is no more than a gauge artifact.

Authors are grateful to V.V.Ammosov for useful discussions of the obtained results.

## REFERENCES

1. Kitagaki T. et al. *Phys. Lett.*, 1980, 97B, 325;  
Barlag S. et al. *Preprint DPh. PE81-08*, 1981;  
Allen P. et al. *Nucl. Phys.*, 1981, B181, 385.
2. Derrick H. et al. *Phys. Rev.*, 1981, D24, 1071.
3. Amati D. and Veneziano G. *Phys. Lett.*, 1979, 83B, 87.
4. Bassetto A., Ciafaloni M. and Marchesini G. *Nucl. Phys.*, 1980, B163, 477.
5. A.V.Radyushkin. *Phys. Lett.*, 69B, 1977, 245.  
Politzer H.D. *Nucl. Phys.*, 1977, B129, 301;  
Ellis R.K., Georgi H., Machacek M., Politzer H.D. and Ross G.C. *Nucl. Phys.*, 1979, B152, 285.
6. Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. *Nuovo Cim. Lett.*, 1973, 7, 719.  
Brodsky S. and Farrar G., 1973, 31, 1133.
7. Furmanski W., Petronzio R. and Pokorski S. *Nucl. Phys.*, 1979, B155, 253;  
Konishi K. *Preprint RL79-035*, 1979.

8. Mueller A.H. *Phys. Lett.*, 1981, 104B, 161.
9. Ермоляев Б.И., Фадин В.С. Письма в ЖГТФ, 1981, 33, 285.
10. Brasse F.W. *Preprint DESY 82-047*, 1982.
11. Джапаридзе Г.Ш., Киселев А.В., Петров В.А. Труды 1У Международного семинара по физике высоких энергий и квантовой теории поля. Т. 1, стр. 12, Протвино, 1981; ЯФ, 1982, 35, 1586.
12. Аммосов V.V. et al. *Preprint IHEP 81-94*, Serpukhov, 1981.  
Berge J.P. et al. *Nucl. Phys.*, 1982, B203, 1;  
Aubert J.J. et al. Contributed paper to the XXI International Conference on High Energy Physics. Paris, 1982 (CERN preprint).
13. Bassetto A. *Nucl. Phys.*, 1982, B202, 493.
14. Odorico R., *Nucl. Phys.*, 1980, B172, 157,

# СВЕРХТОНКОЕ РАСШЕПЛЕНИЕ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ПОЗИТРОНИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО $a^6 \ln a$

Н.Е.Нюнько, Ю.Н.Тюхтиев

Саратовский государственный университет

Р.Н.Фаустов

Всесоюзный научно-исследовательский центр  
по изучению свойств поверхности и вакуума, Москва

## I. ОСНОВНЫЕ МОМЕНТЫ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОДХОДА К РАСЧЕТУ ПОПРАВОК ПОРЯДКА $a^6 \ln a$ В СВЕРХТОНКОЕ РАСШЕПЛЕНИЕ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ПОЗИТРОНИЯ

Аналитические выражения для сверхтонкого расщепления основного уровня водородоподобного атома в общем случае, наряду с логарифмическими по контенте тонкой структуры  $\Lambda \ln \frac{m_1}{m_2}$ , включают поправки, пропорциональные отношениям масс частиц  $\Lambda \ln \frac{m_1}{m_2}$ , величина которых в настоящее время не установлена окончательно. В связи с этим оценки теоретического значения указанной величины и их сравнение с экспериментальными данными затруднены.

Такая ситуация исключена при исследовании уровней энергии позитрония, который наиболее полно описывается методами квантовой электродинамики и является особенно удобным объектом для проверки её основных положений.

Теоретические исследования сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония с точностью до  $a^6 \ln a$  интенсивно ведутся с начала 70-х годов. В настоящее время для величины этого расщепления принят результат, полученный в работах <sup>1,2/</sup>.

Нами установлено новое теоретическое значение сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония, которое обосновывается в настоящей работе дополнительными исследованиями ряда процессов взаимодействия электрона и позитрона в прямом и аннигиляционном каналах.

Исходным пунктом для анализа структуры уровней энергии позитрона является основное уравнение квазипотенциального подхода

$$(E - 2\epsilon_p) \tilde{\Psi}_p(\vec{p}) = (2\pi)^3 \int d\vec{q} \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) \tilde{\Psi}_p(\vec{q}), \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (I.1)$$

Здесь  $\tilde{\Psi}_p$  - волновая функция связной системы с полной энергией  $E$ . Квазипотенциал  $\tilde{V}$  может быть выражен с помощью ядра взаимодействия электрона и позитрона.

Для полной функции Грина двух частиц  $\mathcal{G}$  существуют различные интегральные представления и в частности,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(1 + \mathcal{K}\mathcal{G}) = \mathcal{G}_c(1 + \tilde{\mathcal{K}}\mathcal{G}), \quad (I.2)$$

где  $\mathcal{G}_0$  - функция Грина свободных частиц;  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_0(1 + \mathcal{K}\mathcal{G}_c)$  - кулоновская функция Грина;  $\mathcal{K}_c = \mathcal{G}_c \tilde{V}_c$ ,  $\tilde{V}_c$  - кулоновский потенциал;  $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{V}}_c \tilde{\mathcal{V}}_p$ ,  $\tilde{\mathcal{V}}_p$  - дираковские матрицы  $i$ -ой частицы;  $\mathcal{K}$  - ядро взаимодействия;  $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} - \mathcal{K}_c$ .

Представим квазипотенциал суммой

$$\tilde{V} = \mathcal{K}_\Sigma + \tilde{V}_c + \tilde{V}_p. \quad (I.3)$$

Оператор  $\mathcal{K}_\Sigma$  включает всевозможные процессы обмена кулоновскими фотонами

$$\mathcal{K}_\Sigma = (\mathcal{K}_c)_+ + \Delta \mathcal{K}_\Sigma, \quad \Delta \mathcal{K}_\Sigma = -(\mathcal{K}_c \tilde{\Lambda}_{12} \tilde{\Gamma}_c \tilde{\Gamma}_p)_+, \quad \tilde{\Sigma} = \tilde{\Gamma}_c (1 - \tilde{\Lambda}_{12} \tilde{\Gamma}_c \mathcal{K}_c)^{-1}. \quad (I.4)$$

Символ  $+$  означает проектирование на положительно-частотные состояния, например

$$(\mathcal{K}_c)_+ = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \mathcal{K}_c u_1 u_2. \quad (I.5)$$

Здесь  $u_i$  - дираковские басисные функции частиц; символ  $\bar{}$  означает дираковское сопряжение. Оператор  $\tilde{\Lambda}_{12} = \mathbf{I} - \tilde{\Lambda}_1^+ \tilde{\Lambda}_2^+$  определяется через единичный  $\mathbf{I}$  и операторы проектирования

$$\tilde{\Lambda}_i^\pm(\vec{k}) = (2\epsilon_k)^{-1} \begin{pmatrix} M_k^\pm & \pm \vec{e}_i \vec{k} \\ \pm \vec{e}_i \vec{k} & M_k^\pm \end{pmatrix}, \quad M_k^\pm = \epsilon_k \pm m. \quad (I.6)$$

Другие части квазипотенциала I.3 задаются выражениями

$$\tilde{V}_c = \tilde{\Gamma}_c (1 - \tilde{\mathcal{E}}_c^+ \tilde{\Gamma}_c + \dots), \quad (I.7)$$

$$\tilde{V}_p = g (1 - \tilde{\mathcal{E}}_c^+ \tilde{\Gamma}_p) - (\tilde{\Gamma}_p + g) \tilde{\mathcal{E}}_c^+ g + \dots \quad (I.8)$$

Здесь  $\tilde{\mathcal{E}}_c^+(\vec{p}, \vec{q}; E) = u_1^* u_2^* (2\pi)^2 \int d\vec{p}_0 d\vec{q}_0 \mathcal{G}_c(\vec{p}_0, \vec{q}_0; \vec{p}, \vec{q}; E) \tilde{\Gamma}_0 u_1 u_2$ ,  $\tilde{\Gamma}_p = \tilde{\mathcal{K}}(1 + \tilde{\mathcal{G}}\tilde{\mathcal{K}})$ ,  $(I.9)$   $(I.10)$ .

$$g = (G \tilde{K} \Lambda_n G \tilde{G})_+ + (\tilde{G} G \Lambda_n \tilde{G})_+ + (G \tilde{K} \Lambda_n \tilde{G} \tilde{G} G \Lambda_n \tilde{G})_+ \quad (I.11)$$

Ядро взаимодействия  $\tilde{K}$  строится с помощью ряда<sup>1/5/</sup>

$$\tilde{K} = \tilde{K}^{(1)} + \tilde{K}^{(2)} + \dots \quad (I.12)$$

Члены ряда могут быть представлены графически. В этом случае основной части ядра  $\tilde{K}^{(1)}$  соответствуют простейшие однофотонные диаграммы в прямом и аннигиляционном каналах

$$\tilde{K}^{(1)} = K_T + K_A, \quad (I.13)$$

где

$$K_T = -e^2 (k_e^2 - k^2)^{-1} \gamma_{1i} \gamma_{2j} \left( \delta^{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (I.14)$$

$$K_A = -e^2 (k_{\mu} G) (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) D_0^{\mu\nu}(E, \vec{o}), \quad D_0^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (I.15)$$

Выражение  $\tilde{K}^{(2)}$  зависит от выбора теории возмущений. Обычно это сумма неприводимых диаграмм 2-го порядка по  $\alpha$ . Для учёта эффектов связности следует считать, что соответствующая часть ядра  $\tilde{K}^{(2)}$  представляет собой кулоновскую лестницу, пересечённую фотоном /кулоновским или поперечным/.

Решая уравнение (I.1) с квазипотенциалом (I.3), выраженным с помощью ядра (I.12), методами теории возмущений, можно получить поправки к сверхтонкому расщеплению от обменов одним или двумя поперечными и любым числом кулоновских фотонов. На практике оказывается, что с точностью до  $\alpha^4$  достаточно ограничиться расчётом одно-, двух- и трёхфотонных взаимодействий. Учитывая это, запишем

$$\Delta E = \Delta E_K + \Delta E_T + \Delta E_p, \quad (I.16)$$

$$\text{где } \Delta E_K = \langle \Psi_c | \delta K_c (1 + \delta K_{\Sigma} + \delta K_c) + \delta K_{\Sigma} (1 + \delta K_c) | \Psi_c \rangle, \quad (I.17)$$

$$\delta K_c(\vec{p}, \vec{k}) = (E + 2\varepsilon_p) \gamma^{\mu} K_c(\vec{p}, \vec{k}) - \Gamma_c(\vec{p}, \vec{k}), \quad \Gamma_c(\vec{p}) = \frac{1}{m} (p^2 + m^2), \quad \delta K = \delta K_c + \delta K_{\Sigma}.$$

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \langle \Psi_c | \tilde{K}_+ (1 + \delta K_c) + \delta K_c \delta \tilde{K}_+ + (\tilde{K}_c \tilde{K})_+ (1 + \delta K_c) + \\ &+ \delta K_c \delta (\tilde{K}_c \tilde{K})_+ + \delta K_c \delta \tilde{K}_+ + \delta K_c (\tilde{K}_c \delta \tilde{K})_+ | \Psi_c \rangle \end{aligned} \quad (I.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \langle \Psi_c | (K_c \delta \tilde{K})_+ - (K_c)_+ \delta \tilde{K}_+ + \text{симм.} + \{ [ (K_c \delta \tilde{K})_+ - (K_c)_+ \delta \tilde{K}_+ ] + \\ &+ \{ [ \tilde{K}_c K_c ]_+ - \tilde{K}_c F(K_c)_+ \} \} \delta K_c + \text{симм.} + \{ [ (K_c \delta \tilde{K})_+ - (K_c)_+ \delta \tilde{K}_+ ] + \\ &+ \text{симм.} - (K_c \delta \tilde{K})_+ \delta K_c \} F(K_c)_+ - (K_c \Lambda_{12} F \tilde{G}_c \tilde{K})_+ + (K_c \Lambda_{12} \tilde{G}_c \tilde{K} G_c \Lambda_{12} K_c)_+ | \Psi_c \rangle, \end{aligned} \quad (I.19)$$

$$F'(\vec{p}) = (E - 2\varepsilon_p)^{-1}, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_1 \Lambda_2, \quad (\tilde{K})_o = G_c \tilde{K} G_c.$$

Важно отметить, что входящие в эти выражения одно- и двухфотонные диаграммы в приближении  $\Psi_c \sim \Psi_0(\delta \tilde{K})$  немедленно дают известное

значение сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония с точностью до  $\alpha^5$ . Использование точного выражения для кулоновской функции  $\Phi_c$  при усреднении квазипотенциала позволяет получить поправки  $\sim \alpha^6 \ln \alpha$  от этих диаграмм. Кроме того, на основе соотношений (I.17) – (I.19) могут быть исследованы соответствующие трёхфотонные обмены в позитронии.

## 2. ПРЯМОЙ КАНАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. ПОПРАВКИ $\sim \alpha^6 \ln \alpha$ ОТ ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХФОТОННЫХ ДИАГРАММ

Подставим выражение для ядра  $\tilde{K}$  I.12 в общие формулы (I.18)(I.19) и рассмотрим сначала поправки к уровню энергии от одно- и двухфотонных взаимодействий

$$\Delta E_c^{\text{II}} = \Delta E_{\text{cp}}^{\text{II}} + \Delta E_{\text{cp}}^{\text{III}},$$

$$\Delta E_{\text{cp}}^{\text{II}} = \langle \Phi_c | \delta K_c (1 + \delta K_c) + (K_c \delta K_c)_{+} - (K_c)_{+} F(K_c)_{+} | \Phi_c \rangle, \quad (2.1)$$

$$\Delta E_{\text{cp}}^{\text{III}} = \langle \Phi_c | (K_T)_{+} + (\tilde{K}_{\text{cp}}^{(2)})_{+} + (K_T \delta K_T)_{+} + [(K_T \delta K_T)_{+} - \delta K_T f(K_T)_{+}] + \text{смн.} | \Phi_c \rangle.$$

Методика расчётов, применяемая нами, сводится в основном к следующему. В связи с выделенной ролью ядра  $\tilde{K}_c$  используется кулоновская калибровка для фотонного пропагатора. При этом однофотонное взаимодействие в прямом канале разбивается на кулоновскую и поперечную части. Соответственно разбиваются и двух- и более фотонные взаимодействия на чисто кулоновские, смешанные и чисто поперечные. Интегрирование по энергетическим компонентам проводится с учётом интегрального представления для  $\delta$ -функции Дирака, что позволяет фактически разбить кратные интегралы и проводить каждое из возникающих интегрирований с помощью теории вычетов<sup>1/4</sup>. Получающиеся в итоге функции трёхимпульсов подлежат дальнейшему интегрированию по этим переменным. Матричная структура элементов амплитуды рассеяния  $T$  приводится к характерной для сверхтонкого расщепления форме  $A(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \cdot \vec{e}_4 \vec{e}_2$  учётом симметрий подынтегрального выражения относительно переменных интегрирования.

Наиболее тонкий момент анализа трёхмерных интегралов – разложение подынтегрального выражения по степеням  $\alpha$ . Как правило, оказывается возможным ещё до интегрирования оценить порядок вкладов частей рассматриваемого интеграла в сверхтонкое расщепление уровня энергии. В частности, логарифмические поправки порядка  $\alpha^6 \ln \alpha$ , как показывают детальные исследования, всегда обеспечивает интеграл, который в дальнейшем будем называть стандартным:

$$I_{ct} = \alpha^6 (8\pi^2)^{-1} \int \frac{dp^2 \varphi}{\epsilon p} \left[ \frac{dp^2 \varphi}{\epsilon p (p-q)^2} \right] \approx \frac{\pi^2}{2m^2} \alpha^6 \ln \alpha^{-1}, \quad \varphi_p = \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad \omega = \frac{mc}{2} \quad (2.2)$$

дополнительные степени  $p$  или  $q$  в числителе подынтегрального выражения приводят к вкладам  $\sim \alpha^6$ . фактически разложение по  $\alpha$  и выделение поправок  $\sim \alpha^6$  проводится посредством сравнения с интегралом  $I_{ct}$ .

Перейдём к изложению результатов вычисления логарифмических вкладов в сверхтонкое расщепление основного уровня позитронии. Основной вклад от взаимодействия с квазишотенциалом  $\Delta K_c = K_{c+} - K_c$  имеет порядок  $\alpha^6/4.5$ . Диаграмма обмена одним поперечным фотоном кроме основного вклада  $\sim \alpha^6/6.7$  обуславливает дополнительную логарифмическую поправку  $\sim \alpha^6/8$ .

Основной вклад от большинства двухфотонных диаграмм имеет порядок  $\alpha^5$ . Это позволяет при проектировании дираховскими блокнотами положить там, где это не приводит к расходимостям в ультрафиолетовой области,  $\epsilon_p, \epsilon_q \ll 1$ . Наибольшие же вклады от диаграммы  $[K_{c+} K_c + K_{c+} K_{c-}]_+$  и вычитаемой итерации  $(K_{c+} K_c + K_{c-} K_{c+})$  имеют порядок  $\alpha^6$ . Расчёт итерационной части тривиален — она сводится к однофотонному обмену. Что касается процессов  $[K_{c+} K_c + K_{c-} K_{c+}]_+$ , то здесь чрезвычайно важно учесть отличие факторов  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_q$  от  $\epsilon$  в блокнотах. При этом суммарный вклад таких диаграмм, пропорциональный  $\alpha^6 \ln \alpha^{-1}$ , обращается в нуль.

Конкретные значения поправок от перечисленных диаграмм, а также от неприводимых двухфотонных графов, соответствующих ядру  $K_{c+}$ , приведены на рис. I /9, 10/.

$$\Delta E(n) = n \cdot \alpha^6 m \ln \alpha^{-1}$$

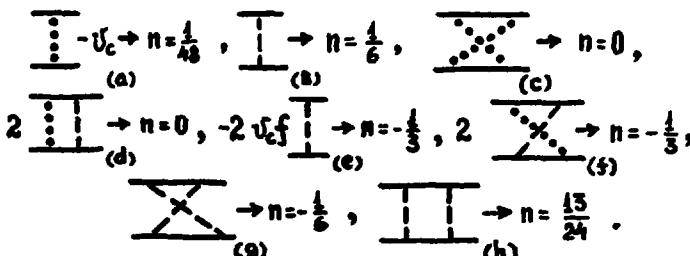


Рис. I

Здесь точечная линия символизирует кулоновский обмен, прерывистая — обмен поперечным фотоном.

На практике оказывается, что любые четырёхфотонные диаграммы, а также графы, исключающие более двух обменов поперечными фотонами, логарифмических вкладов интересующего нас порядка к сверхтонкое расщепление основного уровня не вносят.

Поправки от трёхфотонных диаграмм, содержащих обмен одним или двумя поперечными фотонами записаны в виде

$$\Delta E_c^{\text{III}} = \Delta E_c^{\text{II}} + \Delta E_c^{\text{IV}}, \quad (2.3)$$

$$\text{где } \Delta E_c^{\text{II}} = \langle \Psi_c | \tilde{K}_{3y}^{(n)} + [K_c(K_c)_{K_T}]_+ + [(K_T)_{K_c} K_T]_+ + (K_T)_+ f_{K_c} \{ \delta K_c + \text{симм.} + (K_T)_+ f_{K_c} f_{(K_T)_+} + \delta K_c \{ (K_T)_+ f \delta K_c \} | \Psi_c \rangle.$$

$$\Delta E_c^{\text{IV}} = \langle \Psi_c | (K_c \tilde{K}_{3y}^{(n)})_+ - U_c \{ \tilde{K}_{3y}^{(n)} \} + \text{симм.} + [K_c(K_T)_+ K_T]_+ - K_c f_{(K_T)_+} K_T + \text{симм.} + \delta K_c f_{[(K_T)_+ f_{(K_c)_{K_T}} + (K_T)_+ f_{(K_c)_+} + \text{симм.}]} + \text{симм.} | \Psi_c \rangle.$$

Представляющие наибольший интерес для анализа трёхфотонные взаимодействия и соответствующие им поправки  $\alpha^6 \ln \lambda$  приведены на рис.2

$$\Delta E(n) = n \cdot \alpha^6 \ln \lambda \text{нд.}^{-1}$$

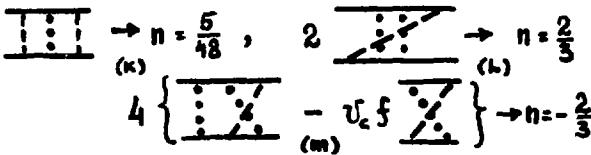


Рис.2

Учитывая результаты, изложенные выше, получаем суммарную поправку от взаимодействий в прямом канале к сверхтонкому расщеплению основного уровня позитрония, равную

$$\Delta E_d(\alpha^6 \ln \lambda) = 0. \quad (2.4)$$

### 3. ПОПРАВКИ ПОРЯДКА $\alpha^6 \ln \lambda$ ОТ ДИАГРАММ АННИГИЛИЦИОННОГО КАНАЛА

Учёт матриц зарядового сопряжения  $C$  в определении полной функции Грина позволяет по аналогии с работой <sup>13</sup> записать квазипотенциал в терминах амплитуды рассеяния единим образом в прямом и аннигиляционном каналах взаимодействия.

Простейшему аннигиляционному взаимодействию  $K_A$  (I.15) соответст-

вует элемент квазипотенциала

$$V_A = \bar{u}_1 \bar{u}_2 K_A u_1 u_2 = -i \hbar \omega E^{-2} [\bar{u}_1^\dagger \gamma_\mu u_2^\dagger] [\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1^\dagger]. \quad (3.1)$$

Двухфотонная аннигиляция в позитронии  $\bar{K}_A^2$  строится с помощью итерационной процедуры в уравнения для ядра взаимодействия

$$K = K_0(K) + K_A \rightarrow K_A^{(n)} = [K_0(K_A)]^{(n)}. \quad (3.2)$$

Чтобы получить аналитическое выражение для вклада в сдвиг уровня от процессов взаимодействия в аннигиляционном канале, достаточно заменить в выражениях  $\Delta E_{\tau}^{(2.1)}$  и  $\Delta E_{\tau}^{(2.3)}$  обмен поперечным фотоном  $K_T$  на  $\bar{K}_T^m = K_T + K_A$  и  $\bar{K}_T^{(n)}$  на  $K_A^{(n)}$ , что приводит к следующим поправкам:

$$\Delta E_A^{\bar{\tau}} = \langle \Phi_c | (K_A)_+ + (\bar{K}_A^{(n)})_+ + [K_T f_c(\bar{K}_T^m)_+ + (K_T + K_c)_+ f_c K_T]_+ + [(K_T + K_c)_+ f_c K_A]_+ - (K_A)_+ f_c \rangle - \text{симв. } | \Psi_c \rangle, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_A^{\bar{\tau}} = & (\Delta E_{\tau}^{\bar{\tau}})_A + (\Delta E_{\tau}^{\bar{\tau}})_A, \quad (\Delta E_{\tau}^{\bar{\tau}})_A = \langle \Phi_c | (\bar{K}_T^m)_+ K_A + K_A (\bar{K}_T)_+ K_T \rangle_+ + \\ & + \delta K_T [(\bar{K}_T^m)_+ K_A + K_A (\bar{K}_T)_+] + (K_A)_+ f_c K_T + \delta f_c (K_A)_+ + \text{симв. } - \delta K_T (K_A)_+ f_c K_T + \\ & + (\bar{K}_T^m)_+ f_c (K_A)_+ + (K_A)_+ f_c (K_T)_+ | \Psi_c \rangle, \quad (\Delta E_{\tau}^{\bar{\tau}})_A = \langle \Phi_c | [K_A \bar{K}_T^m]_+ K_A + K_c (K_A)_+ K_T + \\ & + \text{симв.}]_+ - K_T^+ F [\bar{K}_T^m]_+ K_A + K_A f_c K_T]_+ + \text{симв.} + \delta K_T [ (K_A)_+ f_c (K_T)_+ - (K_A)_+ F (K_T)_+ + \\ & + \text{симв.}] + \text{симв.} - (f_c A_{\tau}^{\bar{\tau}} \bar{f}_c f_c K_A)_+ - \text{симв.} + (f_c A_{\tau}^{\bar{\tau}} (K_A)_+ f_c \bar{f}_c)_+ | \Psi_c \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Специфической особенностью аннигиляционного взаимодействия является наличие  $\gamma$ -матриц, не имеющих принадлежности к току той или иной частицы. Для преобразования матричной структуры в этом случае применяется теорема Фирца.

Отметим, что однофотонная аннигиляция (3.1) не вносит логарифмического вклада интересующего нас порядка. При исследовании двухфотонных процессов единственная поправка порядка  $\alpha^4 \ln \alpha$  получена от диаграммы однофотонной аннигиляции с вершинной вставкой

$$(\Delta E_A^{\bar{\tau}})^\Gamma = \langle \Phi_c | [K_T f_c K_A + \text{симв.}]_+ | \Psi_c \rangle. \quad (3.5)$$

Выделая здесь положительно-частотную составляющую свободной функции Грина  $f_c$ , приходим к выражению

$$(\Delta E_A^{\bar{\tau}})^\Gamma = 2 \langle \Phi_c | f_c \frac{[K_T(p, k)]_+ [K_A]_+}{(p_2 + k_2 - p_1 + i\epsilon)(p_2 - k_2 - k_1 + i\epsilon)} | \Psi_c \rangle. \quad (3.6)$$

В результате теорема Фирца используется лишь в части  $(K_A)_+$  и, как показывают расчёты, для выделения логарифмического вклада можно использовать приближения

$$[X_A]_+ \cong \pi d \cdot m^2 \langle \tilde{S}^2 \rangle, \\ [X_T(p, k)]_+ \cong [X_T(p, \tilde{p})]_+ \cong -V_c \cdot \tilde{g}_L \tilde{g}_2. \quad (3.7)$$

Учитывая в (3.6) явный вид кулоновской функции  $\Phi_c(p)$  и возможность использования приближения  $\Phi_c(p) \sim \delta(p)$ , после интегрирования по  $k$  и  $\tilde{q}$  получим

$$(\Delta E_A^T)^T = -\frac{d^3 m}{2\pi^3} |\Phi_c(0)|^2 \langle \tilde{S}^2 \rangle \int d\tilde{p} \tilde{p}^2 \int \frac{d\tilde{k} \Phi_c}{\epsilon_c(\tilde{p}-\tilde{k})} [X_1 \tilde{X}_2]_+, \quad (3.8)$$

где  $[X_1 \tilde{X}_2]_+ \cong (4\pi^2)^{-1} (\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 b_{12} + \tilde{p}_1 b_{12} \tilde{k}_2 + \tilde{p}_2 b_{12} \tilde{k}_1 + b_{12} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2)$ ,  $b_{12} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ .

Отметим, что при преобразовании матричной структуры достаточно удержать степень  $\tilde{p}^2$ . Тогда приходим к стандартному интегралу, при чём выделенный вклад сходится в области больших  $|\tilde{p}|$ . Поэтому здесь вопросов даренормировки мы не касаемся. В результате имеем

$$(\Delta E_A^T)^T (d^6 l_{\text{had}}) \cong \frac{\pi d^3}{m^2} |\Phi_c(0)|^2 \cdot \langle \tilde{S}^2 \rangle \cdot l_{\text{had}}^{-1}. \quad (3.9)$$

Перейдём к трёхфотонным диаграммам аннигиляционного канала. Ранее в работах [II, 12] было показано, что для ряда таких процессов основной вклад имеет порядок  $d^6 l_{\text{had}}$  и может быть просто получен в приближении  $\Phi_c(p) \sim S(p)$ . Для части квазипотенциала

$$[\tilde{K}^M(K_c)_+ X_A + X_A(K_c)_+ X_T]_+ \quad (3.10)$$

возникновение логарифмических поправок связано с поведением соответствующих диаграмм вблизи порога рождение частиц /расходимость при  $E^2 = 4m^2$ . Диаграммы двух- и трёхфотонной аннигиляции, не имеющие подобных особенностей, не вносят логарифмических вкладов в сверхтонкое расщепление.

Нетрудно показать отсутствие логарифмических вкладов от диаграмм:

$$\langle \Phi_c | -[X_A \Gamma_k F' \tilde{b}_c b_c]_+ - \text{сдвиг} + [X_A \Gamma_k F' \Gamma_c K_A \Gamma_{k'} F' \tilde{b}_c]_+ | \Phi_c \rangle. \quad (3.11)$$

Третье слагаемое содержит два фактора типа  $F' \Gamma_c [E + 2\epsilon_k]^{-1}$ . В силу зависимости  $X_A$  лишь от  $E$  интегрирование факторизуется и стандартного интеграла не возникает. В двух первых слагаемых достаточно учесть лишь положительно-частотную часть функции  $\tilde{b}_c$ , но и при этом наличие лишних степеней переменных интегрирования в числителе подинтегрального выражения приводит к отсутствию логарифмических поправок.

Рассмотрим приводимые трёхфотонные диаграммы с ядром  $X_A$ , для которых сдвиг уровня имеет вид

$$\Delta E_A(4f) = \langle E' | (K_A)_{4f} | E' \rangle = \Delta^4 E + \Delta^2 E + \Delta^3 E. \quad (3.12)$$

Первое слагаемое  $\langle |(K_A)_{4f}| \rangle$  не содержит стандартного интеграла из-за отсутствия множителя  $(\vec{p} - \vec{q})^{-2}$ . Второе слагаемое запишем в виде

$$\Delta^2 E = 2 \langle \Psi_c(\vec{p}) \delta K_c \{ (1 + \delta E) | (K_A)_{4f} | \Psi_c(\vec{q}) \}. \quad (3.13)$$

С требуемой точностью для  $\delta K_c$  имеем выражение

$$\delta K_c = K_c^+ - \bar{J}_c + K_c^+ \frac{K_c^2}{2mM_c^2}, \quad K_c^+ \approx \bar{J}_c \cdot \frac{M_c^2 N_c^2}{2mM_c^2} \cdot \langle 1 + \bar{p}_1 \bar{K}_1 + \bar{p}_2 \bar{K}_2 \rangle. \quad (3.14)$$

Используя приближения  $\langle \Psi_c(\vec{q}) | \delta(\vec{q}) | (K_A)_{4f} | \Psi_c(\vec{q}) \rangle \approx \langle \vec{q} | (K_A)_{4f} | \vec{q} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{q}^2 \rangle$ , получим для  $\Delta^2 E$ :

$$\Delta^2 E = \Delta_1^2 E + \Delta_2^2 E, \quad (3.15)$$

$$\text{где } \Delta_1^2 E = A d^6 \int \frac{d\vec{p} d\vec{q} d\vec{e}^2 \Phi_p \Phi_q}{(\vec{p} - \vec{q})^2 (\vec{e} - \vec{q})^2} \left[ \frac{M_c^2 N_c^2}{2mM_c^2} (1 + \frac{K_c^2}{2mM_c^2}) \langle \vec{K} \rangle - 1 \right], \quad \langle \vec{K} \rangle = \langle 1 + \bar{p}_1 \bar{K}_1 + \bar{p}_2 \bar{K}_2 \rangle,$$

$$\Delta_2^2 E = B d^7 \int \frac{d\vec{p} d\vec{q} d\vec{e}^2 \Phi_p \Phi_q}{(\vec{p} - \vec{q})^2 (\vec{e} - \vec{q})^2} \cdot \Phi_c \left[ \frac{M_c^2 N_c^2}{2mM_c^2} (1 + \frac{K_c^2}{2mM_c^2}) \langle \vec{K} \rangle - 1 \right].$$

Сравнение интеграла  $\Delta_1^2 E$  со стандартным показывает, что для получения логарифмических поправок следует учитывать в числителе степени переменной  $\vec{p}^2$ , а наоборот, степени переменной  $\vec{K}^2$  исключить из рассмотрения. В этом случае, используя симметрии подынтегрального выражения, имеем

$$\Delta_1^2 E = A' d^6 \int d\vec{p} d\vec{e}^2 \frac{\Phi_p \Phi_q}{\epsilon_p(\vec{p} - \vec{e})^2} \left[ 2 \vec{p}^2 - \vec{p}^2 \right]. \quad (3.16)$$

На этом этапе легко увидеть компенсацию логарифмических поправок.

Перепишем стандартный интеграл в виде

$$I_{ct} = \frac{m \epsilon^2}{(2\pi)^4} \cdot \int d\vec{p} \Phi_p^2 \cdot \frac{d\vec{e}^2 \vec{e}^2}{(\vec{p} - \vec{e})^2} \Phi_e \int \frac{d\vec{K}^2 \Phi_K^2}{\epsilon_p(\vec{e} - \vec{K})^2}. \quad (3.17)$$

Тогда сравнение этого выражения и интеграла  $\Delta_2^2 E$  показывает необходимость учёта степеней переменной  $\vec{K}^2$  для выделения логарифмических вкладов:

$$\Delta_2^2 E = B' d^7 \left( \frac{d\vec{p} d\vec{e} d\vec{e}^2 \Phi_p \Phi_q \Phi_e}{(\vec{p} - \vec{e})^2 (\vec{e} - \vec{q})^2 M_c^2} \left[ -\frac{\vec{e}^2}{22} + \frac{\vec{e}^2}{2m} + \frac{M_c^2}{4q_p q_e} (\bar{p} \bar{K}_1 + \bar{p}_2 \bar{K}_2) \right] \right). \quad (3.18)$$

Первое и второе слагаемые компенсируют друг друга, третью же приводится к виду

$$\Delta_2^2 E = B'' d^7 \left( \frac{d\vec{p} d\vec{e} d\vec{e}^2 \Phi_p \Phi_q \Phi_e}{\epsilon_p(\vec{p} - \vec{e})^2 (\vec{e} - \vec{q})^2} \left[ \vec{e}^2 - (\vec{e} - \vec{K})^2 \right] \right). \quad (3.19)$$

Выполняя интегрирование по импульсу  $\vec{p}$ , приходим к выражению

$$\Delta_2^2 E \approx \alpha^6 \int d\vec{e} d\vec{e}^2 \frac{1}{\epsilon_p(\vec{e} - \vec{q})^2} \Phi_p \Phi_e \left[ \vec{e}^2 \Phi_K - 1 \right] \sim \alpha^7 \ln d, \quad (3.20)$$

не содержащему вкладов порядка  $\alpha^6 \ln d$ . Аналогичным образом решает-

ся вопрос об отсутствии подобных вкладов и в других оставшихся трёх-фотонных диаграммах.

Результаты выполненных исследований диаграмм аннигиляционного канала систематизированы на рис. 3.

$$\Delta E(n) = n \cdot d^6 \ln d^{-1}$$

$$2 \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} - \left[ f \right] \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow n = \frac{1}{4},$$

$$2 \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow n = -\frac{1}{12}, \quad \left[ f \right] \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow n = -\frac{1}{8}.$$

Рис. 3

Суммарная поправка  $\Delta E_{\text{hfs}}(d^6 \ln d)$  от аннигиляционного взаимодействия, таким образом, равна

$$\Delta E_A(d^6 \ln d) = \frac{\pi^4}{m^2} \langle \vec{S}^2 \rangle |\Psi_e(\omega)|^2 \cdot d^6 \ln d^{-1} \cdot \frac{1}{6}. \quad (3.21)$$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов, полученных в настоящей работе позволяет заключить, что суммарный логарифмический вклад порядка  $d^6 \ln d$  в сверхтонкое расщепление основного уровня позитрония от диаграммы прямого канала равен нулю и поэтому искомая логарифмическая поправка связана лишь с процессами виртуальной аннигиляции электрона и позитрона:

$$\Delta E_{\text{hfs}}(d^6 \ln d) = m d^6 \ln d \cdot \frac{1}{24}. \quad (4.1)$$

Выполненные нами исследования взаимодействий в аннигиляционном канале полностью согласуются с результатами работ /I, II/.

Метод определения уровней энергии ВИ-атомов, используемый в работе /2/ и позволивший подтвердить теоретическое значение сверхтонкого расщепления основного уровня в позитронии, найденное ранее Ледакем /I/, чрезвычайно близок к квазипотенциальному подходу Логунова - Тавхелидзе. Поэтому анализ данных, содержащихся в этой работе представляет особый интерес.

Результаты вычисления вкладов от ряда диаграммы прямого канала /n1, n2, n3, n4, n5/ авторы считали надёжно установленными /что вполне согласуется с нашими выводами/ и непосредственно исследовали процес-

см обмена одним поддеречным фотоном и некоторым числом кулоновских.

К последним в нашей работе относятся диаграммы (б), (д), (е) и (ж). Суммарные результаты вычисления вкладов от этих диаграмм в обеих работах идентичны<sup>2,8/</sup>, если учесть поправки к волновой функции уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом. При этом изменяется только величина вклада от диаграммы (д).

Таким образом, используя найденную нами поправку к величине сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония, рассчитанной ранее<sup>6,7/</sup> с точностью до  $\alpha^5$ , получаем новое теоретическое значение

$$\Delta E_{\text{hfs}} = \frac{e^2 m}{2} \left[ \frac{7}{6} - \left( \frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{g}{\pi} + \frac{5\alpha^2 \ln \alpha^{-1}}{12} \right]. \quad (4.2)$$

Учитывая значения наблюдаемой массы и константы тонкой структуры, приходим к результату

$$\Delta V_{\text{theor}}^{\text{hfs}} = 203, 400 \quad (10) \text{ Гц}. \quad (4.3)$$

Это значение довольно близко к экспериментальному<sup>13,14/</sup>:

$$\Delta V_{\text{exp}}^{\text{hfs}} = 203,3849 \quad (12) \text{ Гц}. \quad (4.4)$$

$$\Delta V_{\text{exp}}^{\text{hfs}} = 203,3870 \quad (16) \text{ Гц}. \quad (4.5)$$

Авторы благодарят А.А. Логунова, А.Н. Тавхелидзе, Л.Д. Соловьёва и О.А. Хрусталёва за внимание и интерес к работе, полезные обсуждения и замечания, а также Н.А. Бойкова и А.А. Бойкова за помощь в работе.

#### Литература

1. G.P. Lepage. *Phys. Rev.* AI6, 863, 1977.
2. G.T. Bodwin, D.R. Yennie. *Phys. Rept.* 43C, 267, 1978.
3. Н.Е. Нионько, Ю.Н. Тихонев, Р.Н. Фаустов. *ТМФ*, 44, 424, 1980.
4. Н.А. Левченко и др. Сообщение ОИИИ Р2-12355, Дубна, 1979.
5. V.K. Sung et. al. *Ann. Phys.* 96, 261, 1976.
6. R. Karplus, A. Klein. *Phys. Rev.* 87, 848, 1952.

7. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна, 1964.
8. Ю.Н.Тихтиев. ТМФ 36, 264, 1978.
9. Н.А.Бойкова, Ю.Н.Тихтиев, Р.Н.Фаустов. ЯФ 32, 1656, 1980.
10. Н.А.Бойкова, Ю.Н.Тихтиев, Р.Н.Фаустов. Сообщения ОИЯИ Р2-81-457, Дубна 1981.
11. R. Barbieri, E. Remiddi. Phys.Lett. B65, 258, 1976.
12. Н.Е.Новько, Ю.Н.Тихтиев, Р.Н.Фаустов. ЯФ 30, 457, 1979.
13. P.O. Egan, et.al. Phys.Lett. A54, 412, 1975.
14. A.P. Mills, G.H. Beagman. Phys.Rev.Lett. 34, 246, 1975.

ПОПРАВКИ К СВЕРХТОНКОМУ РАСЩЕПЛЕНИЮ  
ОСНОВНОГО УРОВНЯ МЮОННИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА  $\frac{m_e}{m_\mu} \alpha^2 \ln \alpha$

Н.А.Бойкова, Ю.Н.Тюхтяев

Саратовский государственный университет

Р.Н.Фаустов

Всесоюзный научно-исследовательский центр  
по изучению свойств поверхности и вакуума, Москва

### I. ВВЕДЕНИЕ

Проблема связанных состояний на всех этапах развития квантовой теории оставалась одной из наиболее актуальных.

Особая роль водородоподобных ВП-атомов обусловлена тем, что эти простейшие связанные состояния двух частиц доступны для прямизненных измерений. Теоретическое значение сверхтонкого расщепления основного уровня в ВП-атоме с точностью до  $\alpha^4/d$  - постоянная тонкой структуры/ было установлено Ферми <sup>см. 2</sup> в 30-х годах<sup>1/</sup>. Надёжные расчёты этой величины с точностью до  $\alpha^{5/2}/d$  стали возможны лишь в 50-е годы после основополагающих работ Бете, Солитера, Кимингера<sup>3/</sup>.

В начале 70-х годов были получены первые логарифмические поправки  $\alpha^6/d^4$  к этому результату<sup>4,5/</sup>. Достигнутая в настоящее время точность теоретических исследований в значительной степени связана с использованием квазипотенциального подхода в квантовой теории поля, предложенного впервые А.А.Логуновым и А.Н.Тавхелидзе<sup>6/</sup>.

Квазипотенциальное уравнение для двух взаимодействующих частиц со спинами  $1/2$  и массами  $m_1$  и  $m_2$  в импульсном представлении в системе центра масс имеет вид

$$(E - \epsilon_{ip} - \epsilon_{2p}) \Psi_{\epsilon}(\vec{p}) = (2\pi)^3 \int d\vec{q} \sqrt{p^2 + m_i^2} V(p, \vec{q}; E) \Psi_{\epsilon}(\vec{q}), \quad (I.1)$$

где  $\Psi_{\epsilon}$  - волновая функция связанный системы,  $\epsilon_{ip}$  -  $\sqrt{p^2 + m_i^2}$ ,  $E$  - полная энергия.

Для определения квазипотенциала  $V(p, \vec{q}; E)$  существует два способа. В одном случае на основе полной функции Грина двух частиц  $G(p, q; E)$  вводят двухвременную функцию

$$\tilde{G}(p, q; E) = \tilde{U}_1(p) \tilde{U}_2(q) \int \frac{dp_0 dq_0}{(2\pi)^3} G(p_0, \vec{p}, q_0, \vec{q}; E) \Gamma_0 U_1(q) U_2(-q). \quad (I.2)$$

Здесь  $\Gamma_0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ip}$ ,  $U_i(p) = \frac{1}{\epsilon_{ip}} \psi_i(p)$  - дираховский блок-диаграмм  $i$ -ой частицы.

$$U_i(p) = N_{ip} \left( \frac{1}{\epsilon_{ip}} \right) W_i, \quad N_{ip} = \sqrt{\frac{\epsilon_{ip} + m_i}{2\epsilon_{ip}}}, \quad \epsilon_{ip} = \sqrt{p^2 + m_i^2} \quad (I.3)$$

В этом случае квазипотенциал даётся выражением

$$V = F^{-1} \cdot (\tilde{G}^{+})^{-1} = e (1 + FT)^{-1} \quad (I.4)$$

где  $F = F_0 \tilde{T} \tilde{G}_0 F^{-1}$ ;  $\tilde{G}_0$  - функция Грина свободных фермронов;  $F^{-1} = (\tilde{G}_0^{+})^{-1} = (m^3 \delta(p^2 - q^2) (E - \epsilon_{ip} - \epsilon_{2p}))^{-1}$ ;  $\tilde{T} = K(1 + FK)$ ;  $K$  - ядро взаимодействия двух частиц.

В другом случае квазипотенциал строят с помощью амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности

$$V = T_+ (1 + FT_+)^{-1} \quad (I.5)$$

где  $T_+(p, q; E) = \tilde{U}_1(p) \tilde{U}_2(q) T(p, q; E; p_0 = q_0 = 0) U_1(q) U_2(-q)$ ; символ  $\tilde{}$  означает дираховское сопряжение. Переход от одного варианта к другому при определении квазипотенциала осуществляется заменой  $\tilde{T} \rightarrow T^+$ .

При расчётах с точностью до  $1/7$  квазипотенциал уравнения (I.1) задавался разложением

$$V = U_c + \delta V^{(2)} + V^{(4)} + \dots \quad (I.6)$$

где  $U_c$  - кулоновский потенциал;  $\delta V^{(2)} = V^{(2)} - U_c$ ;  $V^{(2)} = T_+^{(2)}$ ,  $V^{(4)} = T_+^{(4)} - T_+^{(2)} F T_+^{(2)}$  и мог быть представлен фейнмановскими графиками 2- и 4-го порядков по заряду электрона. Исследования сверхтонкого расщепления основного уровня ВП атомов в этом случае проводились с использованием так называемого "приближения рассеяния": эффекты связности частиц, проявляющиеся лишь при малых частотах виртуальных фотонов не учитывались из-за малости константы связи, в высокочастотной же области квазипотенциал выражался через элементы амплитуды рассеяния вблизи массовой поверхности. Вычисления при этом можно упростить, если положить  $E = \epsilon_{ip} + \epsilon_{2p}$ , а волновую функцию основного состояния представить в виде

$$\Psi_c(p) = \frac{1}{\pi} \delta(p) \Psi_c^{(0)} / (p^2 + \mu^2)^2 \approx (2\pi)^3 \Psi_c^{(0)} \delta(p), \quad |\Psi_c^{(0)}|_{15}^2 = \frac{\mu^3 \pi^3}{15}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (I.7)$$

В таком подходе вклады в сверхтонкое расщепление от Фейнмановских диаграмм пропорциональны целым степеням  $\alpha$ . Наибольшие поправки к известной с точностью до  $\alpha^5$  величине сверхтонкого расщепления основного уровня ВП-атомов могут быть получены лишь от диаграмм 6-го порядка по заряду электрона и пропорциональны соответственно  $\alpha^6$ .

Отметим однако, что, используя при усреднении квазипотенциала кулоновские волновые функции в приближении (I.7) можно, получить лишь основной вклад в сдвиг уровня от рассматриваемой диаграммы. Для анализа одно- и двухфотонных процессов с большей точностью /поправки к основному порядку вклада  $\alpha^4$  и  $\alpha^5$  соответственно/ требуется рассмотреть дополнительные вклады с учётом точного выражения для кулоновской волновой функции и зависимости квазипотенциала от относительных трёхимпульсов начального и конечного состояний и параметра полной энергии связанный системы.

С другой стороны, вклад в сдвиг уровня энергии от некоторых трёхфотонных диаграмм начинается с величины порядка  $\alpha^6 \ln \alpha$ . В данном случае для кулоновской волновой функции можно воспользоваться приближением (I.7), а полная энергия системы  $E_{\text{св}}(m_1, m_2)$  примет характер параметра обрезания, фиксирующего инфракрасные /в аннигиляционном канале/ - пороговые/ особенности интегралов по импульсам виртуальных частиц.

Для систематического исследования структуры уровней энергии с точностью до  $\alpha^6 \ln \alpha$  нами разработан квазипотенциальный метод учёта эффектов связности, который позволяет анализировать в ВП-атоме процессы обмена одним или двумя поперечными фотонами и любым числом кулоновских.

## 2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД УЧЁТА ЭФФЕКТОВ СВЯЗАННОСТИ В ВП-АТОМЕ

Состояние связанный системы с полной энергией  $E$  описывается волновой функцией  $\Psi_E$ , удовлетворяющей квазипотенциальному уравнению

$$F_E^{-1} \Psi_E = V_E \Psi_E. \quad (2.1)$$

Для исследования структуры уровней энергии ВП-атома с точностью до  $\alpha^6 \ln \alpha$  запишем квазипотенциал в виде

$$V_E = K_{\Sigma} + \tilde{V}_E. \quad (2.2)$$

Операторы  $\tilde{V}_E$  и  $K_{\Sigma}$  являются ядрами интегральных уравнений для положительно-частотных полной  $\tilde{E}_E^+$  и кулоновской  $\tilde{E}_{ce}^+$  двухвременных функций Грина соответственно:

$$\tilde{E}_E^+ = \tilde{E}_{ce}^+ (1 + \tilde{V}_E \tilde{E}_E^+), \quad (2.3)$$

$$\tilde{G}_{ce}^+ = F_e (1 + K_{\Sigma} \tilde{G}_{ce}^+). \quad (2.4)$$

Используя интегральные представления для четырёхвременных функций Грина

$$G_c = G_0 (1 + K_c G_c), \quad (2.5)$$

$$G = G_0 (1 + K G) = G_c (1 + \tilde{K} G), \quad (2.6)$$

где  $K_c = \delta_c \Gamma_0$ , а  $K = K_F \tilde{K}$  — ядро взаимодействия в ВП-атоме, определим квазипотенциал 2.2 соотношениями

$$K_{\Sigma} = U_1 U_2 \Sigma U_1 U_2, \quad \Sigma = U_c (1 - \Lambda_{12} \tilde{G}_c K_c)^{-1}, \quad \Lambda_{12} = I - K_c^+ K_c^-, \quad (2.7)$$

$$\tilde{V}_E = \tilde{G}_c (1 + \tilde{G}_c^+ \tilde{G}_c)^{-1}, \quad (2.8)$$

где  $\tilde{G}_c = (G_c^+)^* G_c^+ (G_c^+)^{-1}$ ,  $\tilde{K} = \tilde{K} (1 + \tilde{G} \tilde{K})$ . Из выражения для оператора  $K_{\Sigma}$  выделим ядро  $K_c$  основного кулоновского взаимодействия в ВП-атоме:

$$K_{\Sigma} = K_c^+ + \Delta K_{\Sigma}, \quad (2.9)$$

$$\Delta K_{\Sigma} = - (U_c \Lambda_{12} \tilde{G}_c \Gamma_0 \Sigma \Gamma_0)^* \quad (2.10)$$

Амплитуду  $\tilde{G}_c$  зададим суммой

$$\tilde{G}_c = \tilde{G}_0 + \rho, \quad (2.11)$$

$$\text{где } \tilde{G}_0 = F^{-1} (\tilde{\Gamma}_0)^* F^{-1}, \quad \rho = F \tilde{A} F^{-1}, \quad \tilde{A} = F (\Sigma \Lambda_{12} \tilde{G}_0)^* + (\tilde{G}_0 \Gamma_0 \Lambda_{12} \Sigma \Gamma_0)^* F + F (\Sigma \Lambda_{12} \tilde{G}_0 \Gamma_0 \Lambda_{12} \Sigma \Gamma_0)^* F, \quad \tilde{\Gamma}_0 = \tilde{G}_0 \Gamma_0 G_0.$$

Тогда, итерируя равенство (2.8), получаем

$$\tilde{V}_E = \tilde{V}(\tilde{G}_0) + \tilde{V}(\rho), \quad (2.12)$$

$$\text{где } \tilde{V}(\tilde{G}_0) = \tilde{G}_0 (1 - \tilde{G}_0^+ \tilde{G}_0 + \dots), \quad \tilde{V}(\rho) = \rho (1 - \tilde{G}_0^+ \tilde{G}_0) - (\tilde{G}_0 + \rho) \tilde{G}_0^+ \rho + \dots$$

Для разложения в ряд теория возмущений амплитуды рассеяния  $\tilde{V}$  используем метод построения ядра взаимодействия в ВП-атоме, предложенный в работах<sup>8, 9</sup>. В этом случае в нулевом порядке теории возмущений ядро описывает кулоновское взаимодействие в ВП-атоме, в первом — обмены одним коперечным и любым числом кулоновских фотонов и т.д. С учётом изложенной процедуры разложения для ядра  $K$ , амплитуда рассеяния принимает вид

$$K = \tilde{K}^{(0)} + \tilde{K}^{(1)} + \tilde{K}^{(2)} G_c \tilde{K}^{(0)} + \dots \quad (2.13)$$

Здесь римские цифры символизируют число обменов коперечными фотонами при учёте многократного обмена кулоновскими.

Поправки к кулоновским уровням энергии в ВП-атоме найдём с помощью квазипотенциального уравнения

$$(F_e^{-1} - K_c^+ - \tilde{V}_E) \tilde{V}_E = 0, \quad (2.14)$$

в котором квазипотенциал

$$\tilde{V}_e = \tilde{V}_e + \Delta K_e \quad (2.15)$$

выберем за возмущение.

Уравнение

$$[F_{e^+}^{(1)} + \Delta E_e - K_e^+] \Psi_e = 0, \quad (2.16)$$

$$\Delta E_e = E' - E_e, \quad (2.17)$$

определенное невозмущенную волновую функцию  $\Psi_{e^+}$  сдвиг уровня энергии  $\Delta E_e$ , решается на основе нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом, в результате чего с необходимой точностью приходим к выражениям

$$\Psi_{e^+} = (1 + g_e' \delta K_e) \Psi_e, \quad \delta K_e = M_{1p}^+ M_{2p}^+ [2\mu (M_p^+ M_{2p}^+)]^{-1} K_e^+ - J_e, \quad (2.18)$$

$$M_{1p}^+ \approx E_p \pm i\epsilon, \quad g_e' = [g_e - \Psi_e \Psi_e^* (E - E_e)]^{-1} \Big|_{E \rightarrow E_e},$$

$$\Delta E_e = \langle \Psi_e | \delta K_e (1 + g_e' \delta K_e) | \Psi_e \rangle. \quad (2.19)$$

Применим далее методы обычной теории возмущений к уравнению (2.14), определим сдвиг некоторого уровня энергии  $E$  относительно  $E'$ :

$$\Delta E' = E - E', \quad (2.20)$$

где  $\Delta E' = \langle \Psi_{e^+} | \tilde{V}_e | (1 + g_e' \tilde{V}_e) | \Psi_{e^+} \rangle, \quad G_e' = [g_e - \Psi_{e^+} \Psi_{e^+}^* (E - E')^{-1}] \Big|_{E \rightarrow E_e} \quad (2.21)$

Подставив найденное значение  $E'$  в равенство (2.17), находим окончательно

$$\Delta E = E - E_e = \Delta E_e + \Delta E', \quad (2.22)$$

Выражения для поправок к уровням энергии и волновой функции (2.18), (2.19), (2.21) показывают, что развитая теория возмущений, позволяющая исследовать в ВЛ-атоме обмены одним или двумя переносчиками и любым числом кулоновских фотонов. Одним из приложений этой теории является описание структуры уровней энергии в атоме иона  $/m_i = m_e -$  масса электрона,  $m_i = m_e$  - масса иона/ .

### 3. ПОПРАВКИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА $\frac{m_e}{m_i} \alpha^4 l_{ind}$ ОТ ОДНО-, ДВУХ- И ТРЕХФОТОННЫХ ДИАГРАММ

На практике оказывается, что основные вклады от одно-, двух- и трёхфотонных обменов в сверхтонкое расщепление имеют по константе тонкой структуры порядки соответственно  $\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6 l_{ind}$ . Ясно поэтому, что четырёхфотонные диаграммы взаимодействия при определении сдвигов уровней энергии с точностью до  $\alpha^6 l_{ind}$  можно не учитывать.

Используя фотонный пропагатор в кулоновской калибровке

$$D_o^{(i)}(k) = -(\vec{k}^2)^{-1}, \quad D_o^{(ii)}(k) = -(\vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2)^{-1} I^{(ii)}(k), \quad I^{(ii)} = \delta^{ii} - \frac{\vec{k}_1^i \vec{k}_2^i}{\vec{k}^2}, \quad (3.1)$$

представим ядро взаимодействия суммой слагаемых по числу обменов фотонами в ВЛ-атоме. Тогда ядра одно- и двухфотонного взаимодействия примут соответственно вид

$$K^{(1)} = K_c + K_T, \quad K_c = \delta_c \Gamma_0, \quad K_T = -e_1 e_2 \delta_{ii} \Gamma_{ii} D_o^{(ii)}, \quad (3.2)$$

$$K^{(2)} = K_{cc} + K_{ct} + K_{tt}, \quad (3.3)$$

где символы  $c$  и  $t$  относятся соответственно к обмену кулоновским и поперечным фотонами.

Трёхфотонные неприводимые диаграммы логарифмического вклада в сверхтонкое расщепление основного уровня мюония не вносят. Анализ кулоновского взаимодействия показывает, что логарифмическая поправка ~~должна~~ связана лишь с однофотонным кулоновским обменом в мюонии.

Поэтому, перегруппировав члены в выражениях (2.19), (2.21) так, чтобы квазипотенциал наиболее просто изображался графически, приходим с требуемой точностью к следующему выражению для суммарного вклада в сверхтонкое расщепление основного уровня мюония:

$$\Delta E = \Delta_I E + \Delta_{\bar{I}} E + \Delta_{\bar{II}} E, \quad (3.4)$$

где

$$\Delta_I E = \langle \Phi_c | \delta K_c + (K_T)_4 - 2 \delta_c \Gamma (K_T)_4 + 2 (K_c \delta_c K_T)_4 + \Gamma_c \rangle, \quad (3.5)$$

$$\Delta_{\bar{I}} E = \langle \Phi_c | (K_{cc})_4 + (K_{ct})_4 + (K_{tt})_4 + (K_T \delta_c K_T)_4 + \Gamma_c \rangle, \quad (3.6)$$

$$\Delta_{\bar{II}} E = \langle \Phi_c | (K_T \delta_c K_c \delta_c K_T)_4 + \Gamma_c \rangle, \quad (3.7)$$

$$\delta K_c = \vec{k}_c^2 - \delta_c - \left[ 1 - M_{\mu\mu}^2 M_{\mu\mu}^2 \{ 2 \zeta (M_{\mu\mu}^2 + M_{\mu\mu}^2) \}^{-1} \right] (K_c)_4. \quad (3.8)$$

Методика вычисления записанных поправок включает следующие общие моменты. Вначале выполняется интегрирование по энергетической компоненте виртуального импульса с помощью теории вычетов. Преобразование матричных выражений к форме, характерной для сверхтонкого расщепления уровней энергии, осуществляется с учётом соответствующих симметрий относительно переменных интегрирования. Разложение по константе связи проводится посредством сравнения с так называемым стандартным интегралом  $I_{ct}$ , единственным, приводящим к логарифмическим вкладам в сверхтонкое расщепление

$$I_{ct} = (3\pi^2)^3 \int d\vec{p}^3 \delta(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^{-1} \Gamma_p \int \frac{d\vec{q}^3}{(\vec{q}^2 - q^2)^2} \Phi_q \approx \frac{\Gamma^2}{2m_1 m_2} \ln \mu^{-1}, \quad \Phi_p = (p^2 + m^2)^{-1}. \quad (3.9)$$

Анализ вкладов в сдвиг уровня мюония начнём с диаграммы обмена кулоновским фотоном. Перемножая дираховские матрицы и биспиноры и

выпавшие ответственные за сверхтонкое расщепление члены, получаем

$$(A_I E)_c = \langle \Psi_c | (K_c)_4 - V_c | \Psi_c \rangle = \frac{4}{3} \int d\vec{p} \Psi_p^2 \int d\vec{q} \Psi_q^2 \cdot R^{-1} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{(\vec{p} - \vec{q})^2}, \quad (3.10)$$

$$B_1 \left( \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 N^+ N^+ N^+ N^+ \right)^{1/2} = A = \left( \frac{d\epsilon}{dt} \right)^2 \mu^2 W_p(\omega)^2 \left\langle \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \right\rangle$$

Сравнение выражений 3.9 и 3.10 показывает, что для выделения поправок важно выделять слагаемые с множителем  $(-q)^2$ . С учётом этого обстоятельства заменим

$$[\vec{p}^2 \vec{q}^2]^2 \rightarrow -\frac{1}{4} (p^2 - q^2)^2. \quad (3.II)$$

Так как для частицы с массой  $m_1$  во всём интервале интегрирования  $p^2 < \epsilon_1 M_1^2$ , используем разложения

$$[E_{ip} M_{ip}^* J^{-1/2} = (\sqrt{2} \varepsilon_{ip})^{-1} (1 + \frac{p^2}{4} [\varepsilon_{ip} M_{ip}^* J^{-1} + \dots]), \quad (3.12)$$

$$(\varepsilon_{iq})^{-1} = (M_i)^{-1} (1 - q^2 [\varepsilon_{iq} M_{iq}^{-1}]^{-1}) .$$

Всё это позволяет при вычислении величины  $\Delta E$  сформировать стандартный интеграл

$$(\Delta F)_c(d^6\ln d) = \frac{d^3 \mu^2}{3m_1 m_2} |F_c(0)|^2 \langle \vec{S}_1 \vec{S}_2 \rangle T_{cT}. \quad (3.13)$$

Используя найденное Ферми значение сверхтонкого расщепления основного уровня в нижнем порядке, запишем окончательно

$$(\Delta_T E)_c(d^6 \ln d) = \frac{1}{4} E'_E d^3 \ln d^{-1}, \quad E'_E = \frac{8}{3} \omega^4 \mu^3 (m_p + m_{\mu})^2. \quad (3.14)$$

Вклад членов квазипотенциала  $\left[1 + N_e^2 M_e^2 \left\{ \frac{1}{2} \left( M_e^2 + M_{\mu}^2 \right) \right\} \right]^{-1} (K_e)^4$  в сверхтонкое расщепление, как показывает анализ, может быть выражен интегралом (3.9) с дополнительной степенью  $\rho^4$  в числителе и поэтому пропорционален  $\rho^6$ .

Взаимодействие при обмене попечечным фотоном оказывается более существенным, его основной вклад пропорционален  $\alpha^4$ . В то же время и здесь может быть получена поправка  $\alpha^6$  к известному с точностью до  $\alpha^5$  значению сверхтонкого расщепления. Соответствующий вклад даётся выражением

$$(\Delta_x E)_T = h \left(\frac{v}{c}\right)^2 \mu^2 |V_C(\infty)|^2 \int dp \int p^2 \int d\vec{p} \frac{q^2}{p^2} \frac{p^2 - \vec{p}^2}{\vec{p}^2} \bar{u}_1 \bar{u}_2 \chi_1 \chi_2 \frac{1}{2} \frac{1}{(p_0)} u_1 u_2, \quad (3.15)$$

При расчётах с требуемой точностью достаточно ограничиться преобразованием блока  $\bar{U}_2, Y_2, U_2, M_2$ :

$$(\Delta_x E)_T(\alpha^6 \ln \alpha) = 2A \int d\vec{p}_1 \Psi_0 \int d\vec{p}_2 \Psi_0 \frac{p_1^{-2} \cdot p_2^{-1}}{p_1 + p_2} \frac{M_1^+ M_2^+ + M_2^+ M_1^+}{(E_{p_1} + E_{p_2}) (E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2})} . \quad (3.16)$$

Сравнение этого интеграла со стандартным убеждает, что для выделения логарифмического вклада ни одна степень переменных  $p$  или  $q$  не должна быть учтена в разложениях типа (3.12). В результате имеем

$$(\Delta_T E)_T (d^3 \omega_d) = N \frac{4}{m_1 m_2} A \cdot \frac{1}{3} \left[ \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right] I_{ct} = \left[ \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right] E_F' d^3 \omega_d^{-1} \quad (3.17)$$

Поскольку волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(2\pi)^3 \int U_c \Psi_c G^3 d^3 = f^{-1} \Psi_c (p^3), \quad f^{-1} = -(2\mu \Psi_p)^{-1}, \quad (3.18)$$

то непосредственно отсюда следует

$$\langle \Psi_c | U_c f(T) + 1 \Psi_c \rangle = (\Delta_T E)_T (d^3 \omega_d). \quad (3.19)$$

Завершая вычисление поправки (3.5), исследуем вклад

$$(\Delta_T E)_{ct} = \langle \Psi_c | (K_c G_c K_T) + 1 \Psi_c \rangle. \quad (3.20)$$

Функции Грина свободных фермionов представляем через операторы проектирования на положительные и отрицательно-частотные состояния:

$$G_c = S_1 S_2, \quad S_i = (p - m_i)^{-1} = [A_i^+ (p - \epsilon_{ip} + i\epsilon \Gamma^i) + A_i^- (p + \epsilon_{ip} - i\epsilon \Gamma^i)] \quad (3.21)$$

Тогда величина  $(\Delta_T E)_{ct}$  является результатом перемножения блоковоров,  $\chi$ -матриц и произведений соответствующих операторов проектирования. С не-обходиомой точностью запишем

$$\Delta E_{ct} = I_{++} + I_{+-} + I_{-+}, \quad (3.22)$$

$$\text{где } I_{++} = K \cdot 2p^2 (E_K + E_{Kc} - E)^{-1} \left[ (E_K + E_{Kc} - E)^{-1} + (1-2) \right] \left( \frac{M_K^+}{M_{Kp}^+} + (1-2) \right),$$

$$I_{+-} = K \cdot \bar{E}_K^2 (E_K + E_{Kc} - E)^{-1} \left[ (E_K + E_{Kc} + E_2)^{-1} (E_K + E_{Kc} - E)^{-1} \right] \left( \frac{M_K^+}{M_{Kp}^+} + (1-2) \right),$$

$$I_{-+} = I_{+-} (1-2), \quad E_i = m_i / \left( 1 - \frac{M_i^2}{2m_i^2} \right), \quad K_p = 1 E_p^{-1}.$$

$$K = (4/6\pi^2) A \frac{4}{3} \Psi_p^3 (d^3 \Psi_p)^2 \int d^3 \Psi (E_K E_{Kc} K_p^2)^{-1}.$$

Детальный анализ показывает, что при вычислении логарифмических поправок можно положить

$$(K_K + E_{Kc} - E_i)^{-1} \simeq K_p^{-1}.$$

Выполнив кроме того несложные алгебраические преобразования и интегрирование по переменной  $\Psi$ , находим:

$$I_{++} = \frac{A}{3p} \frac{(d^3 \Psi_p)^2 \int d^3 \Psi_K}{E_K E_{Kc} K_p^2} \left( E_K + E_{Kc} - E \right)^{-1} \left[ \frac{M_K^+}{M_{Kp}^+} + (1-2) \right]. \quad (3.23)$$

Удерживая здесь множитель  $K_p^{-2}$  и опуская линии степени переменной  $K^2$ , приведём интеграл  $I_{++}$  к стандартному:

$$I_{++} = \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) E_F' d^3 \omega_d^{-1}. \quad (3.24)$$

Аналогичным образом получим

$$I_{+-} + I_{-+} = - \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} + 1 \right) E_F' d^3 \omega_d^{-1}. \quad (3.25)$$

В результате логарифмическая поправка от приводимой диаграммы обмена кулоновским и поперечным фотонами имеет значение

$$2\Delta E_{\text{йт}} = \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} - 2 \right) E_F d^2 \ln d^2. \quad (3.26)$$

Структура полученных вкладов  $\Delta E_{\text{йт}}$  однотипна: имеется общий во всех случаях коэффициент  $E_F^2 d^2 \ln d^2$  и специфический фактор диаграммы, который включает числовые величины и параметр отношения масс частиц. Фактор суммарного вклада не зависит от масс, что позволяет сделать при расчётах очевидные упрощения. Например, полагая в факторах всех рассмотренных выше диаграмм массы частиц равными, приходим к той же величине суммарного вклада:

$$\Delta E = -\frac{3}{4} E_F d^2 \ln d^2. \quad (3.27)$$

Переходя к анализу поправки  $\Delta E$ , привем во внимание следующие соображения. Логарифмический вклад от неприводимой диаграммы с двумя кулоновскими фотонами равен нулю. Вклад остальных двухфотонных диаграмм неприводимого типа после перемножения пропагаторов частиц в форме (3.21) выражается с помощью попарных произведений проекционных операторов, относящихся к различным частицам. Наиболее значительной, порядка  $d^6$ , оказывается поправка, компенсирующаяся в суммарном выражении для сдвига уровня и погашающаяся от слагаемых, содержащих отрицательно-частотные операторы проектирования. Вклады от других интегралов пропорциональны по крайней мере  $d^5$ . Во всех этих случаях нормировочные множители биоминоров можно положить равными единице.

Интересующая нас поправка  $d^6$  соответствует произведению операторов проектирования на смешанные частоты. В результате упомянутых выше преобразований для логарифмического вклада от неприводимой диаграммы обмена двумя поперечными фотонами получаем

$$(\Delta E)_{\text{ит}}(d^6) = -\frac{4a}{3\pi^2(m_1+m_2)} \int d\vec{p} d\vec{p}' \int d\vec{q}^2 d\vec{q}'^2 \left\{ \frac{d\vec{k}^2}{\epsilon_{ik}\epsilon_{ik'}\epsilon_{ip}\epsilon_{ip'}} \right\} \otimes \\ \bullet \left[ \frac{(p^2)M_{\text{ит}}^+(M_{ik}+k_q)^2}{(M_{ik}+M_{ip})(M_{ik}-k_p)} + \frac{(p'^2)M_{\text{ит}}^+(M_{ip}+k_q)^2}{(M_{ip}+M_{ik})(M_{ip}-k_p)} \right]. \quad (3.28)$$

С необходимой точностью можно положить  $M_i^+ \sim 2m_i$ ,  $M_i^- \sim 0$ . Тогда приходим к интегралу типа стандартного:

$$(\Delta E)_{\text{ит}}(d^6) = -\frac{4a}{3\pi^2(m_1+m_2)} \int d\vec{p} d\vec{p}' \int d\vec{q}^2 d\vec{q}'^2 \int \frac{d\vec{k}^2}{\epsilon_{ik}\epsilon_{ik'}\epsilon_{ip}\epsilon_{ip'}}. \quad (3.29)$$

Точно так же вклад от суммы симметричных неприводимых диаграмм с кулоновским и поперечным фотонами представляется в виде

$$(\Delta_{\bar{E}} E)_{ct} (a^6 b \omega d) = - \frac{Ad}{3\pi^2 (m_1 m_2)} \int d\vec{p} \Psi_p^2 \int d\vec{q} (p^2 + q^2) \Psi_q^2 \int \frac{d\vec{k}}{\epsilon_{ik} \epsilon_{ik} \vec{p}^2 \vec{q}^2} \quad (3.30)$$

Учитывая замены переменных  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , позволяющие учитывать свойства симметрии подынтегральных выражений, при сравнении  $(\Delta E)_{\pi}$  и  $(\Delta E)_{ct}$  не-трудно установить равенство

$$\langle \Psi_c | (K_{ct}), |\Psi_c \rangle = \langle \Psi_c | (K_{\pi}), |\Psi_c \rangle \quad (3.31)$$

Вычисление поправки от приводимой диаграммы

$$(\Delta E_{\pi})'_{\pi} = \langle \Psi_c | (K_{\pi} G_0 K_{\pi}), |\Psi_c \rangle \quad (3.32)$$

начнем с интегрирования по  $K_0$  и  $K'_0$ . Применяя интегральное представ-ление для  $\delta$ -функции и известные формулы типа

$$i\pi^{-1} \int d\omega_0 (k_0^2 - E^2 + i\epsilon)^{-1} \exp(-ik_0 t) = (ik_0^{-1}) \exp(-ik_0 t), \quad (3.33)$$

приходим к интегралам по трёхимпульсам  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}$ ,  $\vec{q}$ . Выделяя обычным образом логарифмические поправки, запишем

$$(\Delta_{\bar{E}} E)'_{\pi} = \frac{4\pi^{-2}}{96 m_1 m_2} \int d\vec{p} \Psi_p^2 \int d\vec{q} \Psi_q^2 \int d\vec{k} \left[ \frac{(\vec{p} \vec{k})^2 + (\vec{p} \vec{q})^2 + 6\vec{p}^2 (\vec{p}^2 + \vec{q}^2)}{M_{ik} + M_{2k}} \right] \bullet$$

$$\bullet (p_1 \epsilon_{ik} K_0 K_{\pi})^{-1} \{ (M_{ik} + K_{\pi})^2 (1-2) + 2(M_{ik} + K_{\pi})(M_{2k} + K_{\pi})^{-1} \} \quad (3.34)$$

Заметим что

$$(M_{ik} + M_{2k})^{-1} = M_{ik}^{-1} M_{2k}^{-1} (M_{ik}^{-1} + M_{2k}^{-1})^{-1} \Phi_k \quad (3.35)$$

а при вычислении логарифмической поправки положим  $M_{ik}^{-1} \sim 2w_1$ ,  $M_{ik}^{-1} \sim 0$ . В результате исследуемый вклад принимает вид

$$(\Delta E)'_{\pi} = \frac{4A}{6\pi^2 (m_1 m_2)} \int d\vec{p} \Psi_p^2 \int d\vec{q} \Psi_q^2 \int d\vec{k} \frac{\vec{p}^2 \vec{k}^2 + 6\vec{p}^2 \vec{k}^2}{\epsilon_{ik} \epsilon_{ik} \vec{p}^2 \vec{q}^2} \quad (3.36)$$

Интегралы, определяющие величины  $(\Delta E)_{\pi}$  и  $(\Delta E)'_{\pi}$ , легко выражаются через стандартный. В частности,

$$\int d\vec{p} \cdot p^2 \Psi_p^2 \int d\vec{q} \Psi_q^2 \int \frac{d\vec{k}^2}{\epsilon_{ik} \epsilon_{ik}} \cdot (\vec{p} \vec{k} \vec{q})^{-1} = 4 \frac{\pi^4}{d} I_{ct} \quad (3.37)$$

Таким образом, суммарный логарифмический вклад от двухфотонных диаграмм имеет значение

$$\Delta_{\bar{E}} E = (\Delta_{\bar{E}} E)_{ct} + (\Delta_{\bar{E}} E)_{\pi} + (\Delta_{\bar{E}} E)'_{\pi} = \frac{1}{2} E_F \alpha^2 b \omega d \quad (3.38)$$

Основной вклад от трёхфотонной диаграммы  $K_{\pi} G_0 K_{\pi} K_{\pi}$  имеет порядок  $a^6 b \omega d$  и его можно выделить, используя ряд существенных упрощений. Так, в функции Грина  $G_0$  можно учесть лишь положительно-частотную часть. В этом случае формируется проекция ядра  $K_{\pi}$  на состояния с положительными частотами. В используемом приближении оно, кроме того, не зависит от нулевой компоненты виртуального импульса. Соот-

всего имеющая часть квазипотенциала преобразуется к виду

$$(K_T G_0 K_0 G_0 K_T) = \Delta V_d u_1^+ u_2^+ \cdot F J_c F u_1 u_2 \Delta V_d, \quad (3.39)$$

где  $\Delta V_d = u_1^+ u_2^+ K_0 \chi_{11} \chi_{22} (E^2 - k^2 k^2 (E^2)^{-2}) u_1 u_2$ .

Интеграл, возникающий при вычислении поправки  $\Delta \bar{E}$ , может быть приведён к стандартному, если не учитывать при разложении степеней переменных  $\vec{p}, \vec{k}, \vec{E}, \vec{q}$ . Поэтому воспользуемся приближением (1.7) для волновой функции и запишем

$$\Delta \bar{E} = 14 \epsilon \omega^4 (2\pi)^6 \int d\vec{p} d\vec{k} \Delta V_d(E, \vec{k}) F(\vec{k}) \bar{f}(E, \vec{k}) F(\vec{E}) \Delta V_d(E, 0). \quad (3.40)$$

Здесь с требуемой точностью можно положить

$$F(\vec{k}) = -2\mu \Psi_k, \quad \Delta V_d(E, \vec{k}) = \pi \epsilon \ell (E \mu \epsilon \omega k^2)^{-1} (E^2 \mu \epsilon \omega k^2 - \vec{k}^2). \quad (3.41)$$

Перемножая матрицы с учётом симметрии подынтегрального выражения, для величины  $\Delta \bar{E}$  получим

$$\Delta \bar{E} = -\frac{A}{m_e m_h} \int \frac{d\vec{p}}{E^2 \mu \epsilon \omega} \Psi_k \int d\vec{k} \bar{f}(E, \vec{k}) (E^2 - \vec{k}^2)^2 \left[ 4 - \frac{6E^2 \vec{k}^2 + 3E^2 \vec{k}^2}{E^2 - \vec{k}^2} \right]. \quad (3.42)$$

Исключая из произведения векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{k}$  фактор  $(E^2 - \vec{k}^2)^2$  и используя значение стандартного интеграла, находим

$$\Delta \bar{E} = \frac{5}{4} E_F^2 \ell \mu \epsilon \omega^{-1}. \quad (3.43)$$

Результаты вычисления вкладов в сверхтонкое расщепление основного уровня мюония симметризированы на рис. I

$$\Delta E(n) = n \cdot \ell^2 \epsilon \ell \mu \epsilon \omega^{-1}, \quad \epsilon = \frac{5}{3} \frac{\ell^4 C_0^3}{(m_e + m_\mu)^2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} - V_c \rightarrow n = \frac{1}{4}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{III} \end{array} \right\} - V_c \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{IV} \end{array} \right\} \rightarrow n = -2,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{III} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{IV} \end{array} \right\} \rightarrow n = \frac{1}{2}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{III} \end{array} \right\} \rightarrow n = \frac{5}{4}.$$

Рис. I

Учитывая поправку к кулоновской волновой функции, находим суммарный логарифмический вклад в сверхтонкое расщепление основного уровня мюония, равный полученному ранее в работе <sup>10</sup> на основе нескольких иного подхода:

$$\Delta E = 2 \ell^2 \frac{m_e}{m_\mu} E_F \ell \mu \epsilon \omega^{-1} \cong 11 \text{ kHz}. \quad (3.44)$$

Следует, однако, заметить, что в связи с наличием в настоящее время

научтённого вклада в сверхтонкое расщепление основного уровня мюонов величиной

$$O\left(d^2 \frac{m_e}{m_\mu} E_F \ln \frac{m_e}{m_\mu}\right) \simeq 10 \text{ kHz} \quad (3.45)$$

на данном этапе нельзя сделать окончательных выводов относительно результата сравнивания теоретического и экспериментального значений сверхтонкого расщепления основного уровня в мюонах.

Авторы приносят благодарность А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе, Л.Д. Соловьеву и О.А. Хрусталёву за интерес к работе, полезные обсуждения и замечания, а также А.А. Бойкову и Н.Е. Ионько за помощь в работе.

#### Литература

1. E.Fermi. Z.Phys., 60, 320, 1930.
2. E.Karplus, A.Klein. Phys.Rev. 87, 848, 1952.
3. H.Bethe, E.Salpeter. Phys.Rev. 84, 1232, 1951; J.Schwinger. Proc. Nat.Acad.Sci.USA, 37, 452, 1951.
4. T.Fulton et.al. Phys. Rev. 44, 1802, 1971.
5. Н.Е.Ионько, Ю.Н.Тихляев. ТМФ 12, 56, 1972.
6. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе. Извест. Сиб. 29, 390, 1963.
7. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИИИ Р-1572, Дубна, 1964.
8. Н.Е.Ионько, Ю.Н.Тихляев, Р.Н.Фаустов. ТМФ 44, 424, 1980.
9. E.N.Faustov. JINR-preprint E2 6939, 1973.
10. G.T.Bedwin, D.R.Yennie. Phys.Rept. 43G, 267, 1978.

## QUANTUM EFFECTS IN THE SCHWINGER MODEL

N.P.Ilieva, V.N.Pervushin  
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

### 1. Introduction

It is twenty years that the Schwinger model<sup>/1/</sup> serves as a theoretical laboratory where new mathematical and physical ideas are checked<sup>/2-7/</sup>. In fact, the ideas such as the  $\theta$ -vacuum, confinement, infrared instability of gauge fields led to a new interpretation of this model.

In the present paper we study the Schwinger model in the spirit of quantum representations and ideas of thirties a la Fock, Weyl, Jordan and others. The aim of this paper is the investigation of some purely quantum effects of motions of the fermionic and bosonic vacuum in the massless Schwinger model. We would like to emphasize that this model gives an example of the dependence of physical results in quantum theory on the choice of the vacuum and on the global properties of the gauge field configuration space.

In section 2 the Dirac vacuum collective motions are investigated.

Section 3 is devoted to the topological degeneration of the gauge field vacuum.

In the theory we keep the Planck constant  $\hbar$  as a parameter to avoid an incorrect interpretation of quantum effects via classical mechanisms<sup>/4/</sup>.

## 2. The Jordan Effect

An interesting fact was pointed out first in several works by Jordan, Born, Socolov and others in the thirties<sup>/8/</sup>, and again by Mattis and Lieb<sup>/9/</sup> in 1965.

They have considered a fermionic system in one space dimension, described by the following Hamiltonian

$$H = i\hbar \int dx \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi \quad *) \quad (1)$$

which is just the Hamiltonian for a Dirac particle in two-dimensional space-time.

The two-component spinors

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi^+(x) = (\psi_1^+, \psi_2^+)$$

satisfy usual anticommutation relations

$$\{\Psi_i(x), \Psi_j^+(y)\} = \delta_{ij} \delta(p-q) \quad (2)$$

all other anticommutators vanish.

Performing fermionic operators as plane-wave expansions:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{ipx} \begin{pmatrix} a_1(p) \\ a_2(p) \end{pmatrix}$$

---

\*) The realization for  $\gamma^{\mu}$ -matrices chosen is

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1$$

and

$$g_{00} = -g_{11} = 1$$

we have at least two possibilities to realize relations (2). First of them is just straightforward:

$$\begin{aligned}\{a_i(p), a_j(q)\} &= \{a_i^+(p), a_j^+(q)\} = 0 \\ \{a_i(p), a_j^+(q)\} &= \delta_{ij} \delta(p-q)\end{aligned}\quad (3.1)$$

and the vacuum is defined as

$$a_i(p)|0\rangle = 0 \quad (4.1)$$

It corresponds to the Hamiltonian

$$H = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp p [a_i^+(p)a_i(p) - a_i^+(p)a_i(p)], \quad (5.1)$$

which has also negative eigenvalues, so it is physically not acceptable (operators  $a_1(-p)$ ,  $a_2(p)$ ,  $p > 0$ , create states with negative energies).

To the second realization we come after a suitable redefinition of  $a$  and  $a^+$ :

$$\begin{aligned}a_i(p) &= b(p)\theta(p) + c^+(p)\theta(-p) \\ a_i(p) &= b(p)\theta(-p) + c^+(p)\theta(p)\end{aligned}\quad (6)$$

Here  $\theta(p)$  is the step-function

$$\theta(p) = \begin{cases} 1, & p \geq 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$$

It acts as a projection operator on the states with positive ( $\theta(p)$ ) and negative ( $\theta(-p)$ ) energies for the solutions of the free Dirac equation for  $\Psi(x)$ .

In this case the commutation relations are

$$\begin{aligned}\{b(p), b(q)\} &= \{b^+(p), b^+(q)\} = 0 \\ \{b(p), b^+(q)\} &= \delta(p-q) \\ \{c(p), c(q)\} &= \{c^+(p), c^+(q)\} = 0 \\ \{c(p), c^+(q)\} &= \delta(p-q)\end{aligned}\quad (3.II)$$

and the vacuum is defined by

$$\delta(p)|0\rangle = c(p)|0\rangle = 0 \quad (4.II)$$

It corresponds to the Dirac filling in all negative energy states, so the Hamiltonian already has nonnegative eigenvalues only:

$$H = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \left[ \delta^+(p) \delta(p) + c^+(p) c(p) \right] \quad (5.II)$$

All this means that we have introduced the Dirac vacuum.

Jordan and the others have discovered that the filling in all negative energy states changes the axial current commutator.

Instead of the trivial one

$$[j_{50}(x), j_{50}(y)] = 0$$

(where  $j_{5\mu}(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \Psi(x) - \epsilon_{\mu\nu\lambda} j^\nu(x)$ ), which follows for the case (I), in the case (II) we obtain

$$[j_{50}(x), j_{50}(y)] = \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) \quad (7)$$

This is just what was later called the Schwinger term or the Schwinger anomaly.

The commutator (7) is very similar to the one for a scalar field, where

$$i[\partial_\mu \phi(x), \phi(y)] = \hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y)$$

if we put

$$j_{5\mu}(x) = \frac{i}{\sqrt{J\hbar}} \partial_\mu \hat{\phi}(x) \quad (8)$$

This correspondence was later called a bosonization.

Adding to the free Hamiltonian (1) an interaction term (of a Coulomb type)

$$H_1 = \frac{e^2}{2} \int dx \left( \partial_\mu j_0(x) \right)^2$$

we come in fact to the Hamiltonian of the massless Schwinger model in the gauge  $A_4 = 0$  /4-7/. It is not difficult to obtain the divergence of the axial current, using Heisenberg equation of motion for the component  $j_{50}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} j_{50}(x) = \frac{i}{\hbar} [H_0 + H_1, j_{50}(x)]$$

In the first case we come to the conservation law:

$$\partial_\mu j_{5\mu} = 0 \quad (9.I)$$

But when the Dirac vacuum is present, the Coulomb interaction leads to the well-known axial anomaly

$$\partial_\mu j_{5\mu}(x) = \frac{e^2}{(\pi\hbar)^{3/2}} \phi \quad (9.II)$$

This equation may be rewritten (using (8)) as a relativistically invariant equation for a scalar field

$$(\hbar \partial_\mu)^4 \phi = m^2 \phi \quad (10)$$

where

$$m = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi}} e \quad (11)$$

(i.e. the Schwinger model mass). Quantum nature of this phenomenon is evident because of its proportionality to the Planck constant  $\hbar$ . From such a point of view the real physical reason for the axial anomaly and for the appearance of this massive scalar field (i.e. for the bosonization) is just the Dirac sea.

It is interesting to note that the importance of the Dirac vacuum in the anomalous axial-current divergence in four-dimensional space-time has been recently discovered by Gribov<sup>10/</sup>.

It is easy to see that the chiral charge in the model with Dirac vacuum introduced is not conserved

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_5 \neq 0 \quad , \quad Q_5 = \int dx j_{50} = \int dx \frac{\partial_0 \phi}{\sqrt{\pi\hbar}} \quad (12)$$

It is clear that the physical cause of this is the Dirac vacuum "polarization" induced by Coulomb (gauge) field. So different vacua lead to theories with different symmetries and with one and the same local dynamics (Hamiltonian).

Note, that in such a treating of this problem there is no topological vacuum degeneration at all.

Here we would like to remember that the  $\Theta$ -vacuum in the Schwinger model is used for an artificial partial restitution of the chiral symmetry of the effective action for the corresponding scalar field

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int dx \left[ (\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right] \quad (13)$$

It is evident that chiral topological transformations with an operator

$$\xi^n = \exp\{i\pi n Q_5\} \quad , \quad n=0,\pm 1,\pm 2, \dots \quad (14)$$

do not leave it invariant, i.e.

$$\xi^n H_{\text{eff}} \xi^{-n} \neq H_{\text{eff}}$$

To avoid this some special states are constructed<sup>/6/</sup>

$$|\theta\rangle_{\text{phys.}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi^n e^{in\theta} |0\rangle$$

and for the matrix elements (i.e. in brackets) the chiral symmetry holds on which is treated as a good agreement with the symmetry of the initial fermionic Lagrangian.

Coleman<sup>/4/</sup> has shown that the effect of such a  $\theta$ -vacuum is entirely reproduced by a classical constant electric field, but with additional parameter  $\theta$ . He pointed out that here rises a question: why is it necessary to introduce this  $\theta$ -parameter connected with chiral symmetry restituted in the massive Schwinger model though there this symmetry is broken from the beginning by the mass term?

As becomes clear from the papers by Jordan and the others just the same question may be addressed to the massless model too: why is it necessary to restitute the classical Lagrangian symmetry, broken in the quantum theory by the filling in the Dirac sea?

### 3. The Josephson Effect

There exists another reason to introduce the  $\theta$ -vacuum which is not connected with the chiral symmetry at all. Here we propose a new physical interpretation of  $\theta$ -vacuum in the Schwinger model based on the pioneering works on gauge theories by Fock and Weyl<sup>/11/</sup>. They have introduced gauge transformations as  $U(1)$ -phase transformations in quantum theory

$$e^{i \frac{\lambda(x)e}{\hbar c} (i\hbar \partial_\mu + \frac{e}{c} A_\mu)} e^{-i \frac{\lambda(x)e}{\hbar c}} \equiv \frac{e}{c} (A_\mu + \partial_\mu \lambda) \quad (15)$$

The expression in brackets is just the Fock redefinition of the quantum-mechanical momentum  $i\hbar \partial_\mu$  in the presence of an electromagnetic field. Equality (15) is entirely classical and it is not always valid in quantum theory. The matter is that the Weyl phase is defined on the circle while the function  $\lambda(x)$  has as a region of definition the line  $R(1)$ . And it is important what must we choose as a basic element of the gauge transformations.

We shall illustrate the dependence of the results on this choice on the example of the free two-dimensional electrodynamics in temporal gauge ( $A_0=0$ ):

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2} (\partial_0 A_i)^2 \quad (16)$$

The Lagrangian (17) is invariant under stationary gauge transformations

$$A'_i(x, t) = e^{i \frac{\lambda(x)}{\hbar}} (A_i(x, t) + i \hbar \frac{\partial}{\partial t}) e^{-i \frac{\lambda(x)}{\hbar}} \quad (17)$$

So we have to solve the Schrödinger equation

$$H_0 \Psi_t = \varepsilon \Psi_t, \quad H_0 = \frac{1}{2} \int \hat{E}^2 dx, \quad (18)$$

$$\hat{E} = \partial_0 \hat{A}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial A_i(x)} \quad (19)$$

with the additional condition on the wave function

$$\Psi'(A') = \Psi(A) \quad (20)$$

For an infinitesimal transformation

$$\Psi(A_i + \frac{\partial_0 \lambda}{\hbar}) = \Psi(A) + \frac{i}{\hbar} \int dx (\hat{E} \Psi) \partial_0 \lambda + O(\lambda^2)$$

eq. (20) becomes a transversality condition for the electric field

$$\partial_0 \hat{E} \Psi = 0$$

if the function  $\lambda(x)$  is a smooth one and vanishes at spatial infinities

$$\lim_{|x| \rightarrow \pm \infty} \lambda(x) = 0$$

The extension of this condition to the Weyl basic element

$$\beta_i(x) = \exp\{i \lambda(x)/\hbar\}$$

leads to a nontrivial topology of the gauge field configuration space. In this case we find

$$\lim_{|x| \rightarrow \pm \infty} \exp\{i \lambda^{(n)}(x)/\hbar\} = 1$$

(21)

$$[ \text{or } \lambda^{(n)}(\infty) - \lambda^{(n)}(-\infty) = 2\pi n \hbar ]$$

We have a map of the line  $R(1)$  onto the circle  $U(1)$ , characterized by an integer  $n$ . This number shows how many times the line  $R(1)$  has turned around the circle  $U(1)$ . This nontrivial topology disappears in the classical limit ( $\hbar=0$ ). But in the quantum case the gauge transformations group (17) and the configuration space  $\{A_i(x)\}$  are not simply connected. Their topology coincides with that of the closed paths on the ring. So the "points"

$$A^{(n)}(x, t) = e^{i\lambda^{(n)}(x)/\hbar} \left( A_+ + i\hbar \frac{\partial}{e} \right) e^{-i\lambda^{(n)}(x)/\hbar}, \quad (22)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

are physically identical and the wave function there takes one and the same values (of course, up to the phase factor)

$$\Psi(A^{(n+1)}) = e^{i\theta} \Psi(A^{(n)}), \quad |\theta| < \pi \quad (23)$$

Thus we obtain the following system of equations

$$\hat{H}\Psi = \epsilon \Psi$$

$$\partial_x \hat{E} \Psi = 0$$

$$\Psi(A^{(n+1)}) = e^{i\theta} \Psi(A^{(n)})$$

Its solution is a plane wave in the configuration space

$$\Psi \sim \exp \left\{ \frac{iE}{\hbar} \int dx A_+(x) \right\} = \exp \left\{ iN \frac{2\pi E}{e} \right\} \quad (24)$$

where the quantity

$$N[A] = \frac{e}{2\pi\hbar} \int dx A_+(x) \quad (25)$$

is a continuous generalization of the Pontryagin index<sup>12/</sup> and changes by an integer under gauge transformations (22)

$$N[A^{(n)}] = N[A] + \frac{\lambda^{(n)}(\infty) - \lambda^{(n)}(-\infty)}{2\pi\hbar} = N[A] + n$$

It is easy to find the spectrum of the constant electric field using (23), (24)

$$\hat{E}\Psi = \frac{e}{2\pi} (2\pi k + \theta) \Psi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Its minimal (in module) value (when  $k=0$ ) coincides just with Coleman's classical electric vacuum field (the  $\theta$ -vacuum).

Thus we have seen that the  $\theta$ -vacuum is related to the topological properties of the gauge field and appears as a field analogy of the Josephson effect (consisting in the existence of undamped currents due to discontinuity of the wave function phase).

The collective motion of the gauge field (which suggests the existence of a longitudinal dynamics of the latter) described by eq. (24) has a finite energy density

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{2} \left[ \frac{e}{2\pi} (2\pi k + \theta) \right]^2, \quad V = \int dx \quad (26)$$

So we have obtained a consistent relativistically invariant quantum theory. Let us consider the spectral representation of

its Green function in the physical sector

$$G(N(t_2)/N(t_1)) = \left\langle \begin{array}{c} e^{-itH} \\ N_1 \end{array} \right\rangle_{N_2} = \sum_{\epsilon} e^{-i\epsilon(t_2-t_1)} \psi_1 \psi_2^* = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{\epsilon} e^{-\frac{i\hbar(2\pi k+\theta)^2(t_2-t_1)}{2M}} e^{i(2\pi k+\theta)(N_2-N_1)}$$

where

$$M = \frac{1}{V} \left( \frac{2\pi\hbar}{e} \right)^2 ; \quad N_i = N(t_i)$$

This expression can be transformed into a sum over homotopy classes<sup>/13/</sup> in the configuration space:

$$G(N(t_2)/N(t_1)) = \sqrt{\frac{M}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}} \sum_n e^{i\hbar\theta} e^{i\frac{S_n}{\hbar}}$$

Here

$$S_n[t_1, t_2, N] = \int_{t_1(n)}^{t_2} dt L(t) ,$$

$$L = \frac{1}{2V} \left( \frac{2\pi\hbar}{e} \right)^2 \dot{N}^2 \quad (27)$$

is the effective classical action. Now becomes evident that the variable  $\dot{N}$  has no consistent interpretation in the classical relativistic theory. But, in fact, classical approximation is not necessary. From the collective motion Lagrangian (27) it follows that the region of quantum theory validity is proportional to the one-space "volume"  $V$  ( $L_q \sim M^3, M^3 \sim V$ ). Thus Weyl's superposition on the gauge symmetry as of a quantum theory one extends quantum representations to the whole region where gauge field is defined. In other words, QED in two space-time dimensions has no classical interpretation similarly to the situation with the Dirac equation.

The main difference of this approach from that one in paper<sup>/14/</sup> is the dynamical treatment of the Pontryagin index

$$\Im[A] = \frac{e}{2\pi\hbar} \int dx dt F_{0i} = \int dt \dot{N} = N \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} \neq 0$$

A simple "classical" method to reproduce all these nonclassical results without gauge fixing consists in projecting the action and the Pontryagin index onto the general solution of the constraint equation

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \implies \partial_i^2 A_0 - \partial_i \partial_0 A_i = 0 \quad (28)$$

In its general solution we have to take into account the singular infrared solution of the homogeneous equation with an arbitrary time-dependent coefficient:

$$A_0 = C(t)x + (\partial_i^{-1}) \partial_i A_i$$

So we find for the Lagrangian and the variable  $N$

$$L = \frac{1}{2} C^2(t) V \quad (29)$$

$$N = (e/2\pi\hbar) C(t) V$$

From (29) immediately follows the Lagrangian (27) (which was standing in the Green function). This classical theory is only an intermediate step in constructing a consistent quantum theory with relativistically-invariant observables.

The same procedure may be carried out for the massless Schwinger model

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(x) (i\hbar\partial - eA) \Psi(x), \quad (30)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \mu, \nu = 0, i$$

and we come to the Coleman Hamiltonian  $1/4$

$$H = \int dx \left[ i\bar{\Psi} \partial_\mu \Psi - \frac{e^2}{2} j_\mu (\partial_\mu^{-2}) j_\mu + \hat{\beta} \frac{e^2}{2\pi} x j_\mu \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{e\hat{\beta}}{2\pi} \right)^2 V \quad (31)$$

with

$$\hat{\beta} = 2\pi k + \theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

but with the only difference that it describes also the collective motion (26) of the gauge  $\theta$ -vacuum (see the Appendix). The Hamiltonian (31) is equivalent to the following effective Hamiltonian for the scalar field (pion), defined with (8):

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int dx \left\{ (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + (\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{e^2}{\pi\hbar} \left[ \hat{\phi} + \sqrt{\pi\hbar} \left( \frac{\hat{\beta}}{2\pi} \right) \right]^2 \right\}$$

It is invariant under joint transformations of the Dirac and gauge vacuum

$$\sigma^n H_{\text{eff}} \sigma^{-n} = H_{\text{eff}}$$

$$\sigma^n = \exp \left\{ i\pi n (Q_5 + 2N) \right\}$$

### Discussion of the Results

The Schwinger model gives a good example of the dependence of the vacuum on the global symmetry of the quantum theory, and vice versa, of the influence of the choice of the ground state (vacuum) on the symmetry of the theory.

In particular, we have seen that the physical reason for the chiral symmetry breaking in the model is the Dirac vacuum "polarization"<sup>8/</sup> induced by Coulomb field. Understanding of this fact makes unnecessary the partial restitution of this symmetry by an artificial  $\theta$ -vacuum introduction.

We have shown that the topological vacuum degeneration in QED is connected with topological properties of the gauge field itself (regarding the gauge invariance principle as a quantum theory symmetry following Fock and Weyl). Then the gauge-field configuration space is not simply connected and has the topology of a ring. This leads to the nontrivial infrared dynamics and to the existence of constant electric fields (a field analogy of the Josephson effect). The exact solution of the Schwinger model indicates the physical role of the gauge field topology in the infrared dynamics collectivisation (apart from the instanton approach). As is shown in papers<sup>15,16/</sup>, a generalization of the Josephson field effect to quantum chromodynamics gives rise to a physical picture of the "infrared vacuum" as a quantum liquid with singularities forming bags.

The authors would like to thank B.M.Barbashov, A.V.Efremov, A.V.Radyushkin, V.S.Gerdjikov and Ya.A.Smorodinsky for discussions. One of the authors (E.I.) is grateful to prof. V.A.Meshcheryakov for the possibility to work in the Laboratory of Theoretical Physics of JINR.

### Appendix

Let us consider the action of the Schwinger model

$$S = \int dx dt \left[ \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 - ej^\mu A_\mu + ik \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right] \quad (A1)$$

projected on the subspace of solutions of the classical equation for the temporal component of the gauge field:

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_1^2 A_0 = \partial_1 \partial_0 A_0 - ej_0 \quad (A2)$$

(As is known<sup>17/</sup>, the projection of the action on a subspace of the constraint equations of type of (A2) describes the whole classical and quantum dynamics of electromagnetic fields in QED<sub>(8+1)</sub>). Into the general solution of eq. (A2) we include a singular solution of the homogeneous equation

$$A_0 = C(t)x + \partial_0(\partial_1^{-1})A_1 - e(\partial_1^{-2})j_0 \quad (A3)$$

where  $(\partial_1^{-1}), (\partial_1^{-2})$  are abbreviations for the reversible operators,  $C(t)$  is a zero mode of eq. (A2) which describes the collective excitation of the field and is related to the covariant variable  $\dot{N}$  by the projection of "the Pontryagin Index"

$$\dot{N} = \int dx \dot{N};$$

$$N = \frac{e}{2\pi\hbar} \int dx F_{01} = \frac{e}{2\pi\hbar} [VC(t) - e \int dx (\partial_1^{-1})j_0] \quad (A4)$$

where  $V = \int dx$  is a "volume" of space  $R(1)$ .

We substitute the solution (A3) into eq. (A1) and change the physical variable  $\Psi \rightarrow \Psi^{(1)}$

$$\Psi = \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar} (\partial_1^{-1}) A_1 \right\} \Psi^{(1)}$$

That leads to the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} C^2(t) V + \frac{e^2}{2} \int dx j_0 (\partial_1^{-1}) j_0 - \\ - C(t) e \int dx (x j_0 + \partial_1^{-1} j_0) + i \hbar \int dx \bar{\Psi}^{(1)} \partial \Psi^{(1)}$$

The Hamiltonian of the theory is given by

$$H = p \dot{N} + p_\Psi \dot{\Psi} - L = \\ = \int dx [ \bar{\Psi} i \hbar \partial \Psi - \frac{e^2}{2} j_0 (\partial_1^{-2}) j_0 + \bar{p} \frac{e^2}{2\pi} x j_0 ] + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{e p}{2\pi} \right)^2 V$$

where the momentum  $\bar{p}$  is defined by the equation  $\hbar \bar{p} = \delta S / \delta \dot{N}$  and has the spectrum

$$\bar{p} \Psi = (2\pi k + \theta) \Psi$$

which follows from the condition (48)

We might obtain the same result in axial gauge<sup>4/</sup> ( $A_0 = 0$ ). For this we must take into account that the transition from the temporal ( $A_0 = 0$ ) to axial gauge is defined up to the integration constant

$$\partial_0 A_1 = \partial_1 A_0 \stackrel{ph}{\Rightarrow} A_0 \stackrel{ph}{=} \int dx (\partial_0 A_1) + C(t)$$

This constant may be determined from the topology of the gauge field.

## REFERENCES

1. J.Schwinger. *Phys.Rev.*, 128, 2425 (1962).
2. A.S.Wightman. Introduction to some aspects of relativistic dynamics of quantum fields, Lectures at Cargese, Corsica, 1964.
3. J.Lowenstein and A.Swieca. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 68, 172 (1971).
4. S.Coleman. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 101, 239 (1976).
5. S.Coleman, R.Jackiw and L.Susskind. *Ann.Phys. (N.Y.)*, 93, 267 (1975).
6. J.Kogut and L.Susskind. *Phys.Rev.*, D11, 3594 (1975).
7. N.V.Krasnikov et al. *Teor.Mat.Fiz.*, 45, 313 (1980).
8. P.Jordan. *Zs.Phys.*, 93, 464 (1935); 98, 759; 99, 109; 102, 243 (1936); 105, 114; 229 (1937).  
M.Born, N.Hagendra. *Math. Proc. Ind. Acad. Sci.*, 3, 318 (1936).  
A.A.Socolov. *Phys.Zs. der Sovijet Union*, 12, 148 (1937).
9. D.C.Mattis, E.H.Lieb. *Journ. Math.Phys.*, 6, 304 (1965).
10. V.N.Gribov. Preprint KFKI-1981-66.
11. V.Fock. *Zs.Phys.*, Bd. 39, S226 (1927).  
H.Weyl. *Zs.Phys.*, Bd. 42, S375 (1927).
12. A.Belavin et al. *Phys.Lett.*, 59B, 85 (1975).
13. B.R.Pollard. An Introduction to Algebraic Topology, Lecture notes, University of Bristol, 1966-1977.
14. C.D.Callan et al. *Phys.Lett.*, 63B, 334 (1976).
15. V.N.Pervushin. *Teor.Mat.Fiz.*, 45, 394 (1980).
16. V.N.Pervushin. Preprint JINR, E2-82-365, Dubna, 1982.
17. И.В.Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965.  
J.D.Bjorken, S.D.Drell. *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.

# КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И СОСТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

Ю.В.Новожилов

Ленинградский государственный университет

## I. Введение

Базисные состояния в пространстве Фока [1, 2] построены на произведениях операторов рождения, примененных к вакууму. Если операторы рождения зависят от координат, то базисное состояние содержит операторы рождения в различных точках пространства. Операторы рождения преобразуются при калибровочных преобразованиях, и эти преобразования определяют поведение базисных фоковых векторов. Однако физические состояния калибровочно-инвариантны, и возникает задача о построении таких состояний, отправляясь от представления о пространстве Фока.

Общая схема построения мультилокальных калибровочных инвариантов в калибровочной теории хорошо известна. Нас интересует вопрос о том, в какой степени эта схема может быть осуществлена в рамках кинематического подхода, т.е. без явного использования гамильтониана или уравнений движения и при соответствующем выборе калибровочного условия. Очевидно, что в кинематическом подходе калибротка не должна приводить к появлению условий динамического характера, ограничивающих возможные калибровочные функции (как это, например, имеет место в кулоновской калибровке). Примерами допустимых калибровок в этом смысле могут служить аксиальная калибровка  $A_3 = 0$ , светоподобная калибровка  $A_- = 0$  и калибровка  $A_0 = 0$ . Но такие калибровки не определяют потенциал однозначно. Остаточную калибровочную свободу будем описывать

функцией  $\delta(x)$ , зависящей только от некоторых координат, которые определяются выбранной калибровкой. В случае аксиальной и свето-подобной калибровок  $x = (x^1, x^2)$ , в случае калибровки  $A_0 = 0$   $x$  включает все пространственные переменные.

Калибровочное поле  $A_\mu$  преобразуется по правилу

$$A'_\mu = S A_\mu S^{-1} + \frac{1}{g} S \partial_\mu S^{-1}, \quad A_\mu = \frac{1}{2i} A_\mu^\alpha \lambda_\alpha. \quad (I.1)$$

Пусть  $a^+(n, x)$  и  $a(n, x)$  - операторы рождения и поглощения частиц, характеризуемые набором квантовых чисел  $n$  и зависящие от тех координат, с которыми связана остаточная калибровочная свобода  $\delta(x)$ . Эти частицы могут быть как скалярными, так и векторными (в том числе и глюонами). Квантовые числа  $n$  не меняются при калибровочном преобразовании. Ограничимся такими значениями  $n$ , при которых операторы рождения и поглощения преобразуются однородно при (I.1):

$$a^{'}(n, x) = S(x) a^+(n, x) S^{-1}(x). \quad (I.2)$$

В калибровке  $A_3 = 0$ , где квантовое число  $n$  состоит из импульса  $P_3$  и векторного индекса (для векторного поля), по правилу (I.2) преобразуются все операторы с  $P_3 \neq 0$ . В светоподобной калибровке однородно преобразуются все операторы с  $P_- \neq 0$ .

В калибровке  $A_0 = 0$  отбор соответствующего  $n$  затруднителен, так как потребовал бы разложения поля в интеграл Фурье по времени.

Если наложить периодические граничные условия по времени и принять калибровку  $\delta_0 A_0 = 0$ , то преобразовывать однородно по (I.2) будут операторы с отличной от нуля частотой.

Отметим, что в светоподобной калибровке нулевые моды  $P_- = 0$  не используются при построении базисных состояний в пространстве Фока, так как они не являются независимыми степенями свободы (см., например, [3]).

Вакуум  $|0\rangle$  предполагается калибровочно-инвариантным; как

обычно

$$a(n, x)|0\rangle = 0. \quad (I.3)$$

При построении калибровочно-инвариантных состояний необходимым элементом являются фазовые множители  $\Phi(x_1, x_2)$ , которые при преобразовании (I.1) сдвигают  $S(x)$  из точки  $x_2$  в точку  $x_1$ :

$$\Phi'(x_1, x_2) = S(x_1) \Phi(x_1, x_2) S^{-1}(x_2). \quad (I.4)$$

Фазовый множитель выражается через упорядоченную экспоненту, содержащую интеграл по контуру от калибровочного поля:

$$\Phi(x_1, x_2) = P \exp \int_{x_2}^{x_1} g A_k dx^k. \quad (I.5)$$

Калибровочно-инвариантное состояние с  $L$ -операторами рождения отличается от  $L$ -частичного фоковского состояния наличием фазовых множителей (I.5), связывающих операторы рождения в различных точках пространства

$$W_{n_1 \dots n_L}^{(L)}(x_1 \dots x_L) = \text{Tr} \{ a^+(n_1, x_1) \Phi(x_1, x_2) a^+(n_2, x_2) \Phi(x_2, x_3) \dots a^+(n_L, x_L) \Phi(x_L, x_1) \} \quad (I.6)$$

Подаяя в (I.6)  $\Phi(x_1, x_L)$ , мы получаем стандартное фоковское состояние с точностью до нормировки.

В методе функционалов Фока [2] оператор рождения  $a^+(n, x)$  сопоставляется умножению на некоторую произвольную комплексную функцию  $\xi(n, x)$ , а состояние изображается функционалом  $\Omega$  от  $\xi(n, x)$ . При этом оператор поглощения сопоставляется образованию функциональной производной по  $\xi(n, x)$

$$a^+(n, x) \Omega = \xi(n, x) \Omega, \quad a(n, x) \Omega = \frac{\delta \Omega}{\delta \xi(n, x)}. \quad (I.7)$$

Скалярное произведение функционалов  $\Omega$  и  $\Omega_2$  удобно записывать в голоморфном представлении [4, 5], когда по

Фоковским функциям  $\xi(n, x)$  интегрируется с гауссовой мерой. Для одной степени свободы, когда  $\xi = x + iy$  есть комплексное число,

$$(\Omega_1, \Omega_2) = \int \Omega_1^*(\xi) \Omega_2(\xi) e^{-\xi \xi^*} \frac{d\xi d\xi^*}{2\pi i}. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача определения инвариантных состояний в рамках метода функционалов Фока сводится к нахождению фазовых множителей (1.5) посредством функций  $\xi(n, x)$  и производных по ним  $\delta/\delta \xi(n, x)$ .

## 2. Кинематический потенциал и инвариантные состояния

Калибровочная инвариантность состояний (1.6) есть следствие трансформационных свойств потенциала и операторов рождения (1.1) и (1.2). Инвариантность состояний сохранится, если вместо полного квантовополевого потенциала  $A_k$  в фазовые множители подставить любой другой квантовополевой потенциал с теми же трансформационными свойствами (1.1). Используем это обстоятельство для того, чтобы в (1.6) вместо  $A_k$  ввести такой кинематический потенциал, для определения которого не нужно привлекать динамические соображения.

Предположим, что кинематический потенциал  $V_k(x)$  обладает следующими свойствами:

(а)  $V_k$  коммутирует со всеми операторами рождения

$$[V_k^a, a_g^+(n, x)] = 0. \quad (2.1)$$

Это значит, что  $V_k(x)$  определяется только посредством операторов рождения. Если нет других полей, то потенциал  $V_k$  будет зависеть от координат только посредством операторов рождения.

(б)  $V_k$  зависит лишь от одной степени свободы.

Таким образом, мы ищем потенциал  $V_k$  в виде

$$V_k(x) = V_k(a^+(n, x)) \equiv V_k(n, x).$$

Предположение (а) естественно в рамках метода функционалов, где все состояния построены на операторах рождения. Предположение

(б) выделяют кинематический потенциал простейшего вида. Из (2.1) известно, что потенциал  $V_k$  не может быть армитовым; соответствующие фазовые множители типа (I.5), но с потенциалом  $V_k$ , не будут унитарными. Однако фазовые множители с потенциалом  $V_k$  будут удовлетворять условиям самосогласованности:

$$\Phi(x_1, x_2) \Phi(x_2, x_3) = \tilde{\Phi}(x_1, x_3), \quad \Phi(x, x) = 1,$$

где  $\tilde{\Phi}$  преобразуется также, как и  $\Phi$ .

Чтобы определить  $V_k$  нужно задать еще граничные условия в асимптотической области. Эти условия тесно связаны с вопросом о том, существуют ли калибровочно-инвариантные одиночестичные состояния, т.е., например, глюоны или цветные скалярные мезоны. В духе (I.6) одиночестичное состояние можно было бы определить как предел двучастичного

$$\text{Tr} \{ a^+(n, x_1) \Phi(x_1, x_2) a^+(n_2, x_2) \Phi(x_2, x_3) \} |0\rangle,$$

когда одна из координат удаляется в асимптотическую область. Изучение асимптотики требует знания динамики, что выходит за рамки нашей задачи. Мы предположим, что одиночестичных инвариантных состояний не существует.

Рассмотрим для простоты случай калибровочной группы  $SU(2)$ . В соответствии со сделанными предположениями определим кинематический потенциал  $V_k$  уравнением

$$[\hat{a}^+(n, x), V_k(n, x) \hat{a}^+(n, x)] = \frac{1}{2g} [\hat{a}^+(n, x), \partial_k \hat{a}^+(n, x)], \quad (2.2)$$

где  $\hat{a}^+ = a^+ \tau_2$ . Легко проверить, что преобразование (I.2) для операторов рождения ведет к правилу (I.1) для потенциала. Из (2.2) следует, что потенциал  $V_k$  не несет продольного импульса в калибровках  $A_3 = 0$  и  $A_- = 0$ .

В представлении (I.7) оператор рождения соответствует умножению на произвольную комплексную  $2 \times 2$  матрицу с нулевым следом:

$$\hat{a}^+(n, x) \mathcal{Q} = \hat{\xi}(n, x) \mathcal{Q}, \quad \text{Tr } \hat{\xi} = 0. \quad (2.3)$$

При заданных  $\eta$  и  $x$  матрица  $\zeta$  зависит от шести вещественных параметров. Вместо обычных параметров - комплексных векторных компонент  $\xi_a$  - для решения (2.2) удобно ввести иную параметризацию, учитывающую явно инвариантность  $\xi_a \xi_a$  [6]:

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(n, x) &= \zeta(n, x) \hat{\nu}(n, x), \\ \hat{\nu}(n, x) &= \alpha(n, x) \tau_3 \alpha^{-1}(n, x),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где  $\zeta$  - инвариантная комплексная функция,  $\zeta^2 = \xi_a \xi_a$ . Унимодулярная матрица  $\alpha$  содержит четыре независимых параметра. Соотношение (2.4) определяет  $\alpha$  с точностью до умножения справа на комплексную диагональную матрицу. При калибровочных преобразованиях (1.2) матрица  $\alpha$  преобразуется по левым индексам как спинор

$$\alpha'(n, x) = \zeta'(x) \alpha(n, x)\tag{2.5}$$

и инвариантна по правым индексам. Поэтому матрицы

$$C_{nm}(x) = \alpha^{-1}(n, x) \alpha(n, x),\tag{2.6}$$

относящиеся к двум степеням свободы  $\eta$  и  $\eta$ , являются калибровочными инвариантами.

Вектор состояния  $\Omega$  есть функционал от матриц (2.4). Скалярное произведение записывается в виде

$$\begin{aligned}(\Omega_1, \Omega_2) &= \\ &= \int \Omega_1^* \{5, \alpha\} \Omega_2 \{5, \alpha\} \prod_n e^{-55^* \mu(n, x)} \frac{(55^*)^2}{(2\pi)^2} d\Gamma(n, x) \frac{d5 d5^*}{(2\pi)^2},\end{aligned}\tag{2.7}$$

где  $d\Gamma(n, x)$  - нормированный элемент объема матрицы  $\alpha$  как функции четырех независимых параметров. Конкретный вид этих параметров зависит от характера задачи. Переход к полярным координатам матрицы  $\alpha$  повлек за собой существенное усложнение

гауссовой экспоненты

$$\mu(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \{ \alpha^* \alpha T_3 (\alpha^* \alpha)^{-1} T_3 \}.$$

Свойства эрмитовости операторов, вводимых параметризацией (2.4), следуют непосредственно из (2.7) и конкретной параметризации матрицы  $\alpha$ . Например, величины  $5' = \sqrt{\mu} 5$  и  $\partial/\partial 5'$  эрмитово сопряжены и играют роль фокусских операторов рождения и поглощения по отношению к функционалам  $5^2 S_2$ .

Оператор поглощения  $a_\delta(n, x)$  определяется перестановочным соотношением

$$[a_\delta(n, x), a_{\delta'}^+(n', x')] = \delta_{\delta\delta'} \delta_{nn'} \delta(x-x'),$$

условием эрмитовой сопряженности  $a_\delta$  и  $a_{\delta'}^+$  и видом (2.4) оператора рождения в представлении (1.7). Матрица оператора поглощения имеет вид

$$\hat{a} = a_\delta \tau_\delta = \hat{\nu} \frac{\partial}{\partial 5} + \frac{1}{5} \hat{d}, \quad \operatorname{Tr} \hat{a} = \operatorname{Tr} (\hat{\nu} \hat{d}) = 0, \quad (2.8)$$

где оператор  $\hat{d}$  связан только с переменными, параметризующими матрицу  $\alpha$ . Плотность числа частиц в состоянии  $n$  зависит лишь от инвариантного параметра  $5$ :

$$N_n = 5_n \frac{\partial}{\partial 5_n}$$

Матричные элементы оператора  $\hat{d}$  удобно записывать через производные по матричным элементам матрицы  $\alpha$ :

$$d_{11} = -\alpha_{12} \alpha_{21} (\alpha_{11} \frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} + \alpha_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha_{22}}) - \alpha_{11} \alpha_{22} (\alpha_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha_{12}} + \alpha_{21} \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}}), \quad (2.9)$$

$$d_{12} = \alpha_{12} \alpha_{21}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} + \alpha_{12}^2 \alpha_{11} \frac{\partial}{\partial \alpha_{12}} + \alpha_{21}^2 \alpha_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}} + \alpha_{12}^2 \alpha_{21} \frac{\partial}{\partial \alpha_{22}}$$

etc.

Генератор калибровочных преобразований выражается только через

переменные матрицы  $\alpha$ . Плотность генератора в состоянии  $n$  есть

$$G(n, x) = i \epsilon_{abc} t_a a_b^+(n, x) a_c(n, x) = \hat{v}(n, x) \hat{d}(n, x)$$

в векторном представлении. Чтобы получить генератор в спинорном представлении, следует учесть неоднозначность в определении матрицы  $\alpha$  по (2.4), а именно, возможность умножения справа на диагональную матрицу, что дает для спинорного представления

$$G^{sp} = G - \hat{v} \Delta,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (\alpha_{11} \partial_{11} - \alpha_{12} \partial_{12} + \alpha_{21} \partial_{21} - \alpha_{22} \partial_{22}).$$

Обратимся к построению кинематического потенциала  $V_k$  и фазовых множителей. Из уравнения (2.2) и параметризации (2.4) находим, что  $V_k$  определяется матрицей  $\alpha$ :

$$V_k(n, x) = \frac{1}{2} \alpha(n, x) \partial_x \alpha^{-1}(n, x). \quad (2.9)$$

Формула (2.9) напоминает выражение для чисто калибровочного потенциала. Однако матрица  $\alpha$  не является унитарной. Неэрмитова напряженность, построенная на (2.9), равна нулю. Эрмитова напряженность, вычисленная с помощью (2.9) и эрмитово сопряженного потенциала, будет отлична от нуля.

Фазовый множитель (I.5), содержащий кинематический потенциал (2.9), представляет собой произведение двух матриц

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = \alpha(n, x_1) \alpha^{-1}(n, x_2). \quad (2.10)$$

В силу (2.6) трансформационные свойства (I.5) выполняются автоматически. Фазовый множитель (2.10) является простейшим, так как зависит только от одного состояния  $n$ .

Теперь в нашем распоряжении имеются все элементы, необходимые для построения калибровочно-инвариантных многочастичных состояний (I.6). Введем в общую формулу (I.6) фазовые множители согласно (2.10). Каждый из фазовых множителей в (I.6) может быть

связан с одним из значений  $S$ :  $\varphi_{(x_1, x_{l+1})} = \varphi_{S_l}(x_1, x_{l+1})$ .  
Общее выражение для многочастичных инвариантных состояний есть

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \hat{a}^+(n_1, x_1) \varphi_{(x_1, x_2)} \hat{a}^+(n_2, x_2) \varphi_{(x_2, x_3)} \dots \right\} |0\rangle = \\ & = \text{Tr} \left\{ \hat{a}^+(n_1, x_1) \varphi_{S_1}(x_1, x_2) \hat{a}^+(n_2, x_2) \varphi_{S_2}(x_2, x_3) \dots \right\} |0\rangle = \\ & = \text{Tr} \left\{ B_{S_1 S_2}(n_1, x_1) B_{S_2 S_3}(n_2, x_2) \dots \right\} |0\rangle \quad (2.II) \end{aligned}$$

$$B_{\ell S}(n, x) = \omega^{-1}(\ell, x) \xi(n, x) \alpha(s, x) \quad (2.II)$$

Таким образом, в общем случае многочастичные инвариантные комбинации состоят из блоков-матриц, которые зависят от одной точки пространства и трех состояний. Каждый из блоков  $B_{\ell S}(n, x)$  калибровочно-инвариантен в отдельности; взятие следа произведения блоков  $B_{\ell S}$  в окончательной формуле (2.II) не имеет отношения к калибровочной инвариантности, оно необходимо для того, чтобы из инвариантов  $B_{\ell S}$  набирать многочастичные состояния. Одной и той же фокусской конфигурации операторов рождения (когда все  $\varphi = I$ ) соответствует согласно (2.II) множество инвариантных конфигураций, отличающихся выбором фазовых множителей.

### 3. Инвариантные состояния

Инвариантные операторы  $B_{\ell S}(n, x)$  можно подразделить на два класса в зависимости от того, совпадают ли квантовые числа  $\ell$  и  $S$ , или они различны. Если  $\ell = S$ , то связь между операторами  $B_{\ell S}(n, x)$  и  $\hat{a}^+(n, x)$  осуществляется с помощью изовекторных величин, относящихся к степеням свободы  $S$ , если же  $\ell \neq S$ , то  $B_{\ell S}$  связано с  $a^+$  изоспинорными величинами по степеням свободы  $\ell$  и  $S$ . Эти классы отличаются также различными свойствами симметрии многочастичных состояний.

А. Случай  $\ell = S$ . Здесь удобно вместо матриц  $\alpha$  пользоваться

ваться комплексной матрицей группы  $O(3)$   $R_{ab}$ , записывая инвариантный оператор в виде

$$B_{ss}(n, \alpha) = R_{ab}^{-1}(s) R_{\delta_3}(n) \tau_a \zeta(s), \quad (3.1)$$

$$R_{ab} \tau_b = \alpha \tau_a \alpha^{-1}.$$

Если фазовые множители отнесены к некоторому стандартному состоянию  $S_c$ , общему для всего набора многочастичных состояний, то переход от операторов рождения к инвариантному оператору

$B_{S_c S_c}$  можно рассматривать как неунарное преобразование для всех степеней свободы  $n$ , кроме  $n = S_c$ :

$$\hat{a}^+(n, x) \rightarrow B_{S_c S_c}(n, x) = \alpha^{-1}(S_c, x) \hat{a}^+(n, x) \alpha(S_c, x).$$

Состояние  $S_c$  служит при этом системой отсчета калибровочных фаз.

Двухчастичное инвариантное состояние (2.II) имеет вид

$$\text{Tr}\{B_{nn}(n, x_1) B_{nn}(n, x_2)\} |0\rangle = \quad (3.2)$$

$$= \zeta(n, x_1) \zeta(n, x_2) \text{Tr}\{\hat{v}(n, x_1) \hat{v}(n, x_2)\}.$$

В этих же обозначениях синглетное двухчастичное состояние, составленное в пренебрежении фазовыми множителями, есть

$$\zeta(n, x_1) \zeta(n, x_2) \text{Tr}\{\hat{v}(n, x_1) \hat{v}(n, x_2)\}.$$

Приведем также трехчастичное состояние (2.II), в котором фазы отнесены к первой частице

$$\text{Tr}\{B_{nn}(n, x_1) B_{nn}(n, x_2) B_{n_n}(n, x_3)\} |0\rangle =$$

$$= 2i \varepsilon_{abc} \left( R_{ba}^{-1}(n) \nu_a(m) \right) \left( R_{cf}^{-1}(n) \nu_f(s) \right) \zeta(x_1, x_1) \zeta(n_2, x_2) \zeta(n_3, x_3). \quad (3.3)$$

Неинвариантное синглетное состояние трех частиц в наших переменных приобретает вид

$$E_{abc} \nu_a(n, x_1) \nu_b(m, x_2) \nu_c(s, x_3) \zeta(n_1, x_1) \zeta(m_2, x_2) \zeta(s_3, x_3) |0\rangle$$

Таким образом, результат перехода от неинвариантных состояний к инвариантным вполне прост.

Свойства симметрии инвариантных состояний отличаются от обычной бозе-симметрии фоковских состояний, если калибровочные фазы относятся к одной из частиц в наборе. Чтобы восстановить бозе-симметрию, нужно симметризовать по тем частицам, которые служат системой отсчета фаз. Например, в случае двухчастичного состояния вместо (3.2) следует писать

$$\zeta(n, x_1) \zeta(m, x_2) \text{Tr} \{ \hat{\nu}(n, x_1) \hat{\nu}(m, x_2) + \hat{\nu}(n, x_2) \hat{\nu}(m, x_1) \} \quad (3.4)$$

Неунитарность перехода от переменных  $\xi(n, x)$  к переменным  $B_{ss}(n, x)$  проявляется в том, что скалярное произведение для степени свободы  $n$  становится зависящим от  $\alpha(s_a, x) \equiv \alpha_{s_a}$

$$\exp(-\xi_a \xi_a^*) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} [ \alpha_{s_a}^* \alpha_{s_a} B (\alpha_{s_a}^* \alpha_{s_a})^{-1} B^* ] \right\}$$

Интегрирование по стандартному состоянию  $s_a$  будет охватывать также интегралы по другим степеням свободы, фазы которых относены к стандартному состоянию.

Инвариантные состояния ортогональны неинвариантным состояниям при несовпадающих координатах операторов рождения, так как вакуумное среднее от  $R_{ab}$  равно нулю:  $\langle 0 | R_{ab} | 0 \rangle = 0$ . Разумеется, при совпадающих координатах обычные многочастичные состояния-синглеты инвариантны сами по себе и равны состояниям (2.II). Однако в квантовой теории поля вложение возможно обойтись

без многочастичных состояний с соглашающимися координатами.

Б. Случай  $\ell \neq S$ , так что инвариантный оператор рождения  $B_{\ell S}(n, x)$  содержит только одну матрицу с заданным числом  $S$ . Удобно, чтобы квантовое число фазового множителя совпадало с квантовым числом одного из соседних операторов рождения. Тогда основной блок  $B_{\ell S}(S, x)$  имеет простейший вид по сравнению со всеми другими выборами фазовых множителей [6]:

$$B_{\ell S}(x) \equiv B_{\ell S}(S, x) = \alpha^{-1}(\ell, x) \alpha(S, x) \tau_3 \tilde{\zeta}(S, x), \quad (3.5)$$

а инвариантное двухчастичное состояние есть

$$\text{Tr} \{ B_{\ell S}(x_1) B_{S \ell}(x_2) \}. \quad (3.6)$$

Однако многочастичные состояния в этом случае не имеют простой симметрии. Использование оператора (3.5) обеспечивает лишь циклическую симметрию. Это обстоятельство не свидетельствует против инвариантных состояний данного класса, так как по своему определению (1.6) инвариантные состояния не должны обладать симметрией фокусовых состояний. Но в кинематическом подходе к построению фазовых множителей естественно требовать, чтобы получающиеся состояния были близки по свойствам симметрии к свободным состояниям.

Как и в случае состояний класса А, свойства ортогональности состояний, построенных из блоков (3.5), определяются интегрированием в скалярном произведении (2.7) по фазе инварианта  $\tilde{\zeta}$  и по углам в матрице  $\alpha$  (для каждой точки  $x$  и каждого состояния  $n$ ). Скалярное произведение многочастичного состояния класса Б и обычного неинвариантного состояния будет пропорционально вакуумному среднему от матрицы  $\alpha$ . Так как  $\langle 0 | \alpha | 0 \rangle = 0$  для группы  $SU(2)$ , то инвариантные состояния класса Б также ортогональны неинвариантным состояниям.

Обобщение развитой выше теории на случай группы  $SU(N)$  не представляет затруднений. Все рассматриваемые величины - операторы рождения и поглощения, кинематический потенциал и фазовые множители следует описывать  $N \times N$ -матрицами. Параметризация произвольной комплексной матрицы  $\tilde{\zeta}$  в этом случае будет

непосредственным обобщением (2.4):

$$\hat{\xi} = \alpha \hat{\zeta} \alpha^{-1}, \quad \hat{\zeta} = \lambda_n \zeta_n, \quad n=1,2\dots N-1, \quad (3.7)$$

где  $\lambda_n$  -диагональные матрицы группы  $SU(N)$ , а матрица  $\alpha$  определена с точностью до умножения справа на диагональную матрицу. При заданных  $n$  и  $x$  матрица  $\alpha(n, x)$  зависит от  $2N(N-1)$  вещественных параметров.

Уравнение (2.2) для кинематического потенциала теперь заменяется уравнением

$$[\hat{a}^+(n, x), [V_k(n, x), \hat{a}^+(n, x)]] = \frac{i}{\hbar} [\hat{a}^+(n, x), \partial_k \hat{a}^+(n, x)], \quad (3.8)$$

из которого следует кинематический потенциал того же вида (2.9), что и ранее, и, следовательно, фазовые множители (2.10), но с матрицами, введенными по (3.7).

Отметим, что хотя формальные выражения для инвариантных состояний мало отличаются от случая группы  $SU(2)$ , вычисление скалярных произведений быстро усложняется с ростом  $N$ , как из-за громоздкости весовой экспоненты

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} [\alpha^+ \alpha \hat{\zeta} (\alpha^+ \alpha)^{-1} \hat{\zeta}^+] \right\},$$

так и необходимости интегрирования по группе. Здесь может быть полезен опыт интегрирования по матрицам в решеточных теориях [?].

### Литература

1. Fock V.A. Zs. f. Phys. 75, 622, 1932.
2. Fock V.A. Sov. Phys. 6, 425, 1934.
3. Franke V., Novozhilov Yu., Prokhvatilov E., Lett. Math. Phys. 5, 437, 1981.
4. Klauder J.R. Annals of Physics 11, 123, 1960.
5. Bargman V. Comm. Pure Appl. Math. 14, 187, 1961.
6. Новожилов В.В. Вестник ЛГУ, № 16, 69, 1983.
7. Mehta M.L. Random Matrices and the Statistical Theory. 1967, Academic Press, N.-Y., Itzykson C., Zuber J.-B. Journ. Math. Phys. 21, 411, 1980;

КРИТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ  
В ПРОБЛЕМЕ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ  
В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

В.А.Миронский

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Успех феноменологического описания /1/ спонтанного нарушения киральной симметрии в физике адронов не оставляет сомнений в реальности этого явления. Однако реализация динамики такого нарушения в квантовой хромодинамике (КХД) – единственном кандидате на роль теории сильных взаимодействий – остается нерешенной задачей. Представляет поэтому интерес получить ограничения на возможный механизм спонтанного нарушения киральной симметрии непосредственно из уравнений КХД. В настоящем докладе рассматриваются такие ограничения, следующие из асимптотических (определяющих ультрафризетовую асимптотику) уравнений для функций Грина КХД. Показано, что динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД формируется в области, где бегущая константа связи  $\tilde{\alpha}(q^2)$  превышает некоторое критическое значение  $\tilde{\alpha}_c > 0$ , и определена ультрафризетовая асимптотика динамической массовой функции кварков. При получении этих результатов существенно используется условие сохранения аксиально-векторных токов, связанных с киральной группой  $SU_L(K) \times SU_R(K)$  ( $K$  – число кварковых ароматов). Как оказывается, это условие выступает как доопределение пространства допустимых решений уравнения для динамической массовой функции фермиона.

Задача определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции кварка  $\tilde{m}_0(q^2) = \frac{4\alpha(q^2)/M^2}{(q^2 - (q^2_A(q^2) - B(q^2)))}$  (пропагатор фермиона  $S(q) = \frac{1}{(q^2 - (q^2_A(q^2) - B(q^2)))}$ ) впервые рассматривалась в работах /2,3/. Используя метод операторных разложений, для асимптотики функции  $\tilde{m}_0(q^2)$  в евклидовой области в поперечной калибровке были получены выражения вида

$$\tilde{m}_0(q^2) \sim \frac{1}{q^2} \left( \frac{C_0 q^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2+b}} \quad (\text{работа } /2/), \quad (Ia)$$

$$\tilde{m}_0(q^2) \sim \frac{1}{q^2} \left( \frac{C_0 q^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2+b}-1} \quad (\text{работа } /3/), \quad (Ib)$$

где  $b = \frac{11 - 2K/3}{8\pi^2}$ ,  $M$  - размерный параметр квантовой хромодинамики. Однако вывод, использовавшийся в этих работах, был подвергнут критике /4,5/. Суть критики сводится к тому, что асимптотическое уравнение для массовой функции кварка в КХД с нулевой затравочной массой допускает также решение вида

$$\tilde{m}_0(q^2) \sim \left( \frac{C_0 q^2}{M^2} \right)^{-\frac{1}{2+b}}. \quad (2)$$

Как было указано в /4,5/, аргументация против этого решения, спиральящаяся на метод операторных разложений, является неубедительной, так как при обосновании самого этого метода априори принимается быстро убывающее решение вида (1).

Возникает необычная ситуация. С одной стороны, динамическая массовая функция определяется из точных уравнений для функций Грина. С другой стороны, ультрафиолетовая асимптотика этой функции не определяется однозначно из асимптотического уравнения. Единственный вывод, к которому можно отсюда прийти, состоит казалось бы в том /5/, что определить ультрафиолетовую асимптотику динамической массовой функции нельзя без определения ее поведения в предасимптотической области - задача весьма сложная.

Как будет, однако, показано ниже, ситуация оказывается иной: лишь регулярное решение (1) удовлетворяет асимптотическому уравнению в КХД с кирально-инвариантным лагранжианом (т.е. с сохраняющимися аксиально-векторными токами). Как хорошо известно, из-за сингулярного характера на малых расстояниях уравнения для функций

Границы в КД должны быть доопределены. В теории возмущений такое доопределение сводится к перенормировке. В настоящей работе будет указана процедура доопределения этих уравнений при учете явления спонтанного нарушения киральной симметрии; характер доопределения однозначно определяется самой сутью этого явления. Как оказывается, динамическая массовая функция кварка должна удовлетворять более жестким ограничениям, чем те, которые следуют из рассматривавшегося в 4,5/ уравнения для массовой функции с нулевой затравочной массой. В результате однозначно отбирается асимптотика вида (16).

При спонтанном нарушении киральной симметрии массовая функция  $m^{(0)}(q^2)$  в фермionном пропагаторе отлична от нуля, а  $(\Lambda^2 - 1)$  бесцветных аксиально-векторных токов  $\bar{J}_{5\mu}^{\zeta} = \bar{V} \bar{J}_5 \lambda^2 V^{\zeta}$  ( $\zeta = 1, \dots, \Lambda^2 - 1$ ) сохраняются. Из уравнений движения

$$\bar{J}_{5\mu}^{\zeta} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m^{(0)}(\Lambda) (\bar{V} \bar{J}_5 \lambda^2 V)^{\zeta} = 0, \quad (3)$$

где  $m^{(0)}(\Lambda)$  - затравочная масса фермиона,  $\Lambda$  - параметр обрезания. Поэтому для определения дивергенции  $\bar{J}_{5\mu}^{\zeta}$  следует рассмотреть поведение в локальном пределе ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ) составного оператора  $(\bar{V} \bar{J}_5 \lambda^2 V)_h$ . Ответ известен [1]:

$$(\bar{V} \bar{J}_5 \lambda^2 V)_h = \left( \frac{C_0 \Lambda^2}{C_0 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2\Lambda^2}} (\bar{V} \bar{J}_5 \lambda^2 V)_\mu, \quad (4)$$

где  $\mu$  - ренормгрупповой параметр. Из (3) и (4) получаем условие, гарантирующее обращение в нуль дивергенции аксиально-векторного тока в локальном пределе:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m^{(0)}(\Lambda) \bar{Z}_m^{-1} = 0, \quad \bar{Z}_m = \left( \frac{C_0 \Lambda^2}{C_0 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2\Lambda^2}} \quad (5)$$

Таким образом, равенство нулю затравочной массы в локальном пределе ( $m^{(0)} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m^{(0)}(\Lambda) = 0$ ), вообще говоря, не гарантирует сохранения аксиально-векторного тока. Такой гарантей является достаточно быстрое  $m^{(0)}(\Lambda) = 0$  ( $\left( \frac{1}{C_0 \Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2\Lambda^2}}$ ) убывание при  $\Lambda \rightarrow \infty$  затравочной массы в теории с обрезанием. В частности, условие (5) выполняется при выборе  $m^{(0)}(\Lambda) = 0$ , т.е. когда лагранжиан теории с обрезанием является кирально-инвариантным.

Как будет сейчас показано, условие (5) является реализацией для

определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции кварка в КХД.

Перенормированная функция  $B^{(u)}(q^2)$ , соответствующая точке вычитания  $\mu$ , удовлетворяет уравнению

$$B^{(u)}(q^2) = Z_{\mu} m^{(u)}(\mu) + \frac{4}{\pi} \int d^4 k \frac{K^{(u)}_{\mu\mu; \mu\mu}(q, k)}{q^2 - k^2} \frac{\int d^4 q' \bar{V}^{(u)}(q', k) \bar{V}^{(u)}(q)}{q'^2}, \quad (6)$$

где  $Z_{\mu}$  - константа перенормировки фермионного пропагатора;  $\lambda$  - вспомогательный параметр, который во всех конечных выражениях должен быть устремлен к бесконечности;  $K^{(u)}_{\mu\mu; \mu\mu'}$  - ядро Бете-Солитера; в наихудшем приближении в калибровке Ландау ядро имеет вид

$$K^{(u)}_{\mu\mu; \mu\mu'} = \frac{4i}{3(2\pi)^4} \bar{g}^{(u)}(q^2) \frac{(\bar{f}^{(u)})_{\mu\mu'} d_{\mu\mu}(q-k)}, \quad (7)$$

$$d_{\mu\mu}(k) = - \frac{g_{\mu\mu} - \lambda k_{\mu} k_{\mu}}{k^2}.$$

Так как ультрафиолетовые асимптотики функции  $B^{(u)}(q^2)$  и  $K^{(u)}_{\mu\mu; \mu\mu'}$  не чувствительны к массовому члену, то их вид не должен меняться при учете спонтанного нарушения киральной симметрии. Поэтому в главном приближении для них будем использовать выражения, следующие из ренормализационной группы:

$$A^{(u)}(q^2) \approx 1, \\ K^{(u)}_{\mu\mu; \mu\mu'} = \frac{4i}{3(2\pi)^4} \bar{g}^{(u)}(q-k) \bar{f}^{(u)}_{\mu\mu'}(\bar{f}^{(u)})_{\mu\mu'} d_{\mu\mu}(q-k). \quad (8)$$

Как обычно, для определения ультрафиолетовой асимптотики функции  $B^{(u)}(q^2)$  в уравнении (6) удобно перейти в евклидовскую область. Ренормгрупповые аргументы показывают [2], что в пределе  $q^2 \rightarrow \infty$  основной вклад в интегралах правой части уравнения (6) дает область  $k^2, (q-k)^2 \gg M^2$ . В этой области

$$S^{(u)}(k) \approx - \frac{1}{\bar{f}^{(u)}(q-k)} \approx - \frac{1}{\bar{f}^{(u)}}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в (6) и переходя в евклидовскую область, получаем уравнение

$$B^{(u)}(q^2) = m^{(u)}(\mu) + \frac{4}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\bar{g}^{(u)}(q-k)}{(q-k)^2} \frac{B^{(u)}(k)}{k^2} \quad (10)$$

(мы учили, что в этом приближении  $\frac{1}{q^2} = 1$ , см. (8)). В главном логарифмическом приближении в области  $q^2 > K^2$ ,  $(q-K)^2 > M^2$  функцию  $\tilde{g}^4(q-K^2)$  можно заменить на  $\tilde{g}^4(q^2)$  при  $q^2 > K^2$  и на  $\tilde{g}^4(K^2)$  при  $q^2 < K^2$ . Поэтому, интегрируя в (10) по углам, в этом приближении получаем уравнение

$$B^{(w)}(q^2) = m^{(w)}(1) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{q^2}^{\infty} \frac{\tilde{g}^4(K^2) B^{(w)}(q^2)}{K^2} dK^2 + \frac{\tilde{g}^4(q^2)}{4\pi^2 q^2} \int_{q^2}^{\infty} B^{(w)}(K^2) dK^2 \quad (II)$$

(нижний предел интегрирования  $q^2$  в этом асимптотическом уравнении остается неопределенным).

Для определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции мы должны решить уравнение (II) и затем в решении перейти к пределу  $1 \rightarrow \infty$  так, чтобы выполнялось условие сохранения аксиально-векторных токов (5).

Легко проверить, что решение уравнения (II) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dq^2} \left[ \frac{q^2}{\tilde{g}^4(q^2)} \frac{d}{dq^2} \right] B^{(w)}(q^2) = B^{(w)}(q^2) \quad (12)$$

и граничному условию

$$\left\{ q^2 \frac{d}{dq^2} + \left( 1 - \frac{d \ln \tilde{g}^4(q^2)}{d \ln q^2} \right) (B^{(w)}(q^2) - m^{(w)}(1)) \right\} \Big|_{q^2=K^2} = 0. \quad (13)$$

Для наших целей достаточно знать, что общее решение уравнения (12) имеет вид

$$B^{(w)}(q^2) = C_1 B_1 + C_2 B_2, \quad (14)$$

где (так нетрудно проверить прямой подстановкой) функции  $B_i$  имеют асимптотику вида

$$\begin{aligned} B_1 &\sim \left( \ln \frac{q^2}{M^2} \right)^{-\frac{1}{2\pi^2}} \\ B_2 &\sim \frac{1}{q^2} \left( \ln \frac{q^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2\pi^2}-1} \end{aligned} \quad (15)$$

(напомним, что в этом приближении  $\tilde{g}^4(q^2) \approx \frac{2}{\ln q^2 M^2}$ ). Из граничного условия (13) получаем

$$C = -\frac{C_1}{\omega^4 \Lambda^4} \left( \ln \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4} \right)^{\frac{1}{238}-2} + m^{\alpha} \left( \ln \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4} \right)^{\frac{1}{238}}. \quad (16)$$

Отсюда и из условия (5) находим, что константа  $C_1$  в локальном пределе равна нулю. Поэтому ультрафаинстровая асимптотика динамической массовой функции имеет вид

$$m_0(q) = \frac{B_0(q^4)}{\Lambda^4 \omega(q^4)} \underset{q^4 \rightarrow 0}{\approx} C \frac{1}{q^2} \left( \ln \frac{q^4}{\Lambda^4} \right)^{\frac{1}{238}-1}. \quad (17)$$

Подчеркнем, что доказать равенство  $C_1 = 0$  удалось благодаря использованию выбранной процедуры перехода к локальному пределу. Если бы переход к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$  осуществлялся непосредственно в уравнении (II), т.е. в граничном условии (13), то определить  $C_1$  было бы нельзя: граничному условию с  $\Lambda = \infty$  удовлетворяют обе функции  $B_0$ . Этот факт отражает то, что (как уже отмечалось) равенство нулю затравочной массы  $m^{\alpha} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} m^{\alpha}(\Lambda)$  не гарантирует сохранения аксиально-векторного тока  $\delta_{\mu\nu}$ . Существенно, что выбор процедуры перехода однозначно определяется физическим содержанием задачи (условием сохранения тока  $\delta_{\mu\nu}$ ).

В принципе размерная константа  $C$  в выражении (17) должна выразиться через параметр КХД  $M$ . Сделать это в явном виде непросто (для этого требуется знать решение уравнения для массовой функции при всех  $q^4$ ). Можно, однако, выразить константу  $C$  через феноменологический параметр  $\langle 01(\bar{\nu} \nu)_{\mu} 10 \rangle$ . Действительно, в теории с обрезанием

$$\begin{aligned} \langle 01(\bar{\nu} \nu)_{\mu} 10 \rangle &= - \lim_{x \rightarrow 0} \text{Sp} \langle 01 T(\bar{\nu}(x) \bar{\nu}(0))_{\mu} 10 \rangle \simeq \\ &\simeq \frac{C}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4 k S^{(N)}(k) \simeq - \frac{3K^6}{2} \left( \ln \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4} \right)^{\frac{1}{238}}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны /1/

$$\langle 01(\bar{\nu} \nu)_{\mu} 10 \rangle \simeq \left( \frac{\ln \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4}}{\ln \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4}} \right)^{\frac{1}{238}} \langle 01(\bar{\nu} \nu)_{\mu} 10 \rangle. \quad (19)$$

Из (18), (19) находим

$$C = -\frac{2}{3Kb} \frac{101(\sqrt{q^2})_{\lambda=10}}{\left(\ln \frac{q^2}{M^2}\right)^{1/2}} \quad (20)$$

(заметим, что в силу (19) константа  $C$  является ренорминвариантной).

Нетрудно этот результат обобщить на случай  $m_W = \frac{C_0}{\mu_0} m_W^0$ ,  $\frac{C_0}{\mu_0} \neq 0$ , когда кроме спонтанного имеет место еще и явное нарушение киральной симметрии. В этом случае из (16) находим,

$$m(q^2) = \frac{C}{q^2} \left( \ln \frac{q^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2-2\beta}} + m_W \left( \frac{C_0}{\mu_0} \frac{q^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2-2\beta}} \quad (21)$$

Отметим следующий характерный момент. Нетрудно проверить, что если решение  $\psi_1$  с логарифмической асимптотикой (см. (15)) формируется в области  $K^2 > q^2$ , то соответствующее спонтанному нарушению киральной симметрии решение  $\psi_1$  формируется в области  $K^2 < q^2$  и поэтому не зависит от величины параметра обрезания  $\Lambda$ . Это является указанием на то, что динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД формируется не на малых расстояниях.

Обсудим особенности перехода к локальному пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$  в уравнении (II) с точки зрения теории интегральных уравнений. Рассмотрим вспомогательное уравнение вида

$$\lambda \psi_\lambda(q^2) = \int_{q^2}^{\infty} dk^2 K(q^2, k^2) \psi_\lambda(k^2), \quad (22)$$

$$K(q^2, k^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \theta(k^2 - q^2) \frac{\bar{g}^2(k^2)}{k^2} + \theta(q^2 - k^2) \frac{\bar{g}^2(q^2)}{q^2} \right], \quad (23)$$

которое при  $\lambda = 1$  и  $\lambda = \infty$  совпадает с уравнением (II). В пространстве квадратично-интегрируемых функций ядро  $K(q^2, k^2)$  является фредгольмовским (Гильберта-Шмидта) [6], так как

$$\iint_{q^2, k^2} dk^2 dq^2 K(q^2, k^2) < \infty.$$

Как известно [6], спектр собственных значений такого уравнения по модулю ограничен сверху:  $|q^2|/\lambda < \infty$ . С другой стороны, два возможных решения уравнения (22) имеют асимптотику вида (ср. с (15))

$$B_{1\lambda} \sim \left(\frac{q^2}{\lambda \mu}\right)^{-\frac{1}{2\pi\beta\lambda}}, \quad (24)$$

$$B_{2\lambda} \sim \frac{1}{q^2} \left(\frac{q^2}{\lambda \mu}\right)^{\frac{1}{2\pi\beta\lambda}-1}, \quad (25)$$

и так как оба этих решения при всех  $\lambda > 0$  удовлетворяют граничному условию на бесконечности  $(\frac{q^2}{\lambda \mu} \frac{\partial B_{1\lambda}}{\partial q} + (1 - \frac{\lambda \mu \beta}{q^2}) \frac{1}{q^2} B_{1\lambda})|_{q \rightarrow \infty} = 0$ ; ср. с (13)), то формально уравнение допускает решение при всех  $\lambda > 0$ . Противоречие устраняется тем, что функция  $B_{1\lambda}$  не является квадратично-интегрируемой. Таким образом, условие сохранения аксиально-векторного тока, отбирающее быстро убывающее при  $q^2 \rightarrow \infty$  решение, выступает как условие доопределения пространства допустимых решений. Учтем это доопределение при анализе динамики спонтанного нарушения киральной симметрии.

Введем параметр инфракрасного обрезания  $q_0$  в точное уравнение для динамической массовой функции (6) с  $\Lambda = \infty$  и  $m^0 = 0$ . Будем говорить, что критическое значение бегущей константы связи для нарушения киральной симметрии равно нулю, если это уравнение имеет нетривиальное решение при сколь угодно большом значении  $q_0$ . Если же величина таких  $q_0$  ограничена сверху,  $q_0 \leq \zeta < \infty$ , то будем говорить, что критическое значение  $\alpha_c = \alpha(\zeta)$ . Из этого определения ясно, что величина  $\zeta$  определяет верхнюю границу той области импульсов, где в основном формируется динамика спонтанного нарушения киральной симметрии. Приведем соображения, показывающие, что в КД критическая константа  $\alpha_c > 0$ .

Напомним, что, как следует из тождества Уорда для верхины аксиально-векторного тока  $\delta\Gamma_{5\mu}$ , между функцией  $B_{0\lambda}(q^2)$  и волновой функцией гольстоуновского бозона  $\Lambda'(q)$  имеет место соотношение вида (1)

$$\Lambda'(q) = 2i \tilde{E} \lambda^2 S(q) \delta_{0\lambda} B_{0\lambda}(q^2) S(q), \quad (26)$$

где  $\tilde{E}$  — константа слабого распада  $\pi$ -мезона.

Из (6) и (26) следует уравнение для волновой функции гольстоуновского бозона:

$$[S(q) \Lambda'(q) S(q)]_{nm} = \int dk K_{nm;nm'}(q,k) \Lambda'(k). \quad (27)$$

В силу (26) это уравнение фактически является нелинейным. Переходим к линейной версии этого уравнения:

$$[S_0(q)\tilde{J}(q)S_0(q)]_{nm} = \frac{1}{\lambda} S_0(q) K_{nm;nm}^{(0)}(q, 0) \tilde{J}^2_{nm}(q), \quad (28)$$

где  $S_0(q) = S(q)|_{b_0=0} = \frac{1}{\lambda} \tilde{J}(q)$ ;  $K_{nm;nm}^{(0)} = K_{nm;nm}|_{b_0=0}$ ;  $\lambda$  - свободный параметр, который введен здесь из следующих соображений. Уравнение (28) является уравнением для волновой функции гольдстоуновского бозона в пределе, когда динамическая масса равна нулю. Из общих физических соображений следует ожидать, что уменьшение массы возможно лишь при ослаблении взаимодействия между фермионом и антифермионом в гольдстоуновском бозоне. Поэтому собственные значения  $\lambda$  - решений уравнения (28), соответствующих спонтанному нарушению киральной симметрии, должны быть больше единицы (очевидно, условие  $\tilde{J}^2 < 1$  означает ослабление взаимодействия). Покажем, что при достаточно большом значении параметра инфракрасного обрезания  $q_0$  собственные значения  $\lambda$  - решений, удовлетворяющих условию сохранения аксиально-векторных токов, становятся меньше единицы. Это и будет означать, что критическая константа  $\alpha_c > 0$ .

При достаточно больших значениях  $q_0 \gg M$  уравнение (28) при замене  $q^2 \tilde{J}(q) \rightarrow B_\lambda(q^2)$  (где  $105\lambda = \tilde{J}^2$ ) переходит в асимптотическое уравнение (22). При  $q = q_0$  решение уравнения (22) удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dq} B_\lambda(q^2) \Big|_{q^2=q_0^2} = 0. \quad (29)$$

Подставляя в (29) решение  $B_\lambda$ , отвечающее спонтанному нарушению киральной симметрии, находим, что при  $q_0 \rightarrow \infty$

$$\lambda \simeq \frac{1}{278} \frac{1}{1 + \ln \frac{q_0^2}{M^2}} \rightarrow 0, \quad (30)$$

что и требовалось показать.

Вопрос о величине критического значения  $\alpha_c$  тесно связан с вопросом о механизме спонтанного нарушения киральной симметрии. В работах [7] был предложен механизм нарушения, тесно связанный с явлением рождения сверхкритическим кулоновским полем  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon}$ ,

$\tilde{\chi} > \tilde{\chi}_c \simeq 137$ , фермион-антифермионных пар /8/; в этом подходе константа  $\alpha_c$  является аналогом критической константы  $\frac{\tilde{\chi}_c}{4\pi^2} \simeq 1$ .

### Литература

1. J.Gasser, H.Leutwyler. Phys. Rep., 87, 79(1982).
2. K.Lane. Phys. Rev., D10, 2605 (1974).
3. H.D.Politzer. Nucl. Phys., B117, 397 (1976).
4. P.Langacker. Phys. Rev. Lett., 34, 1592 (1976).
5. H.Pagels. Phys. Rev., D19, 3080(1979).
6. Н.И.Ахмезер, И.М.Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Москва:Наука,1966.
7. P.I.Fomin, V.A.Miransky. Phys. Lett., B64, 166(1976);  
V.A.Miransky, V.P.Gusynin, Yu.A.Sitenko. Phys. Lett., B100,  
157 (1981);  
В.А.Миронский, П.И.Фомин. ЯФ, 35, 1563(1982).
8. Я.Б.Зельдович, В.С.Попов. УФН, 105, 403 (1971).

О СЛОЖЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ  
В КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Р.П.Гайда, Ю.Б.Ключковский, В.И.Третяк

Институт прикладных проблем механики и математики  
АН Украинской ССР, Львов

I. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивно развивающаяся в настолщее время релятивистская теория прямого взаимодействия (РПВ) между частицами позволяет, избегая известных трудностей теоретико-полевых моделей, получать удобное описание процессов рассеяния при высоких энергиях в терминах определяемых феноменологически потенциалов взаимодействия<sup>1-3</sup>. Важное место в таких подходах занимает релятивистская задача сложения взаимодействий, состоящая в описании взаимодействия в системе  $N$  ( $> 3$ )-частиц по известным взаимодействиям внутри составляющих ее кластеров. Исходными требованиями, предъявляемыми к решению этой задачи, являются пуанкаре-инвариантность и разделимость (см. <sup>1,3,4</sup>). Поскольку в РПВ условия пуанкаре-инвариантности выражаются по-разному в различных формализмах (см. <sup>3</sup>), то и решения указанной задачи, опиравшиеся на эти условия, могут существенно отличаться между собой в различных подходах.

Наиболее подробно задача сложения взаимодействий изучена в релятивистской гамильтоновой механике<sup>1,4-7</sup>. Однако отсутствие прямой физической интерпретации канонических координат в зоне взаимодействия усложняет исследование связанных состояний (во

всяком случае, для системы в целом) и введение взаимодействия с внешними полями.

Лагранжиева релятивистская механика <sup>/3,8-15/</sup> выделяется среди других одновременных трехмерных формализмов РТВ линейностью системы уравнений, выражавших условия пуанкаре-инвариантности. Поэтому здесь допустим простой принцип суперпозиции лагранжианов взаимодействия различных подсистем системы  $N$ -частиц. Благодаря использованию ковариантных координат частиц  $\vec{X}_a$ ,  $a = 1, \dots, N$  можно также применять суперпозицию лагранжианов прямого взаимодействия частиц и их взаимодействия с внешним, в частности, электромагнитным полем. Если от лагранжиева формализма перейти к другим <sup>/3,9,13/</sup> - например, к ньютоновому или гамильтоновому (см. <sup>/3,9,13/</sup>), то тем самым можно получить и в них соответствующие правила сложения взаимодействий.

Настоящая работа посвящена обсуждению отмеченных вопросов в рамках квазирелятивистской механики, учитывающей некоторое конечное число членов разложения потенциалов взаимодействия по  $c^{-1}$ . В разделе 2 мы исследуем общую структуру лагранжиана взаимодействия произвольного кластера в квазирелятивистском приближении любого порядка. Затем (разд.3) рассмотрим переход к гамильтонову формализму и получим в нем правило сложения взаимодействий во втором квазирелятивистском приближении, соответствующее суперпозиции попарных лагранжианов взаимодействия. В разделе 4 в том же приближении рассмотрена система заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Изложение ведется в мгновенной форме динамики, как и в <sup>/8-11,3/</sup>, однако не составляет принципиальных трудностей распространить полученные результаты на любую форму лагранжиевой динамики <sup>/13-15/</sup>.

## 2. КЛАСТЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим лагранжиан системы  $N$ -частиц в виде

$$L = L_f - U + L_{ext}, \quad (1)$$

где  $L_f = - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}$  описывает свободные частицы,  $U$  - потенциал прямого взаимодействия и  $L_{ext}$  - лагранжиан взаимодействия с внешним полем;  $\vec{v}_a = \dot{\vec{X}}_a$  - скорости частиц. В

разделах 2 и 3 ограничимся замкнутой системой частиц, которой соответствуют два первых слагаемых в (1).

Условия цуанкаре-инвариантности в трехмерной лагранжиевой механике формулируются с помощью десяти векторных полей Ли-Беккунда  $X_\alpha$ ,  $\alpha=1, \dots, 10$ , определяющих реализацию алгебры Цуанкаре в бесконечном продолжении конфигурационного пространства системы частиц на высшие производные  $\dot{x}_\alpha = d^s \ddot{x}_\alpha / dt^s$ ,  $s=0, 1, \dots, 8$ ,  $\ddot{x}_\alpha = \ddot{U}_\alpha$ . В мгновенной форме динамики они имеют вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} x_\alpha^s \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha^s} = D - \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Psi_i = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},$$

$$\Upsilon_i = \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_{ijk} x_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_{\alpha k}^s}; \quad (2)$$

$$\mathcal{K}_i = \sum_{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \left[ D^s \left( -t \delta_i^s + \frac{1}{c^2} x_{\alpha i} v_\alpha^s \right) \right] \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha^s}. \quad (3)$$

Генераторы  $\mathcal{H}$  и  $\Psi_i$  соответствуют временным и пространственным трансляциям,  $\Upsilon_i$  и  $\mathcal{K}_i$  – пространственным и лоренцевым поворотам;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;  $\delta_i^s$  и  $\epsilon_{ijk}$  – символы Кронекера и Леви-Чивита. Цуанкаре-инвариантность описания будет соблюдена, если  $U$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$X_\alpha U = D \Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 10, \quad (4)$$

причем функции  $\Psi_\alpha$  должны обеспечивать выполнение условий совместности системы (4):

$$X_\alpha \Psi_\beta - X_\beta \Psi_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{10} c_{\alpha\beta}^\gamma \Psi_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 10, \quad (5)$$

где  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  – тензор структурных констант группы Цуанкаре.

Если предположить, что лагранжиан взаимодействия  $U$  для системы  $N$ -частиц допускает кластерное разложение вида

$$U = \sum_{N'=2}^N \sum_{\{N'\}} U_{N'} = \sum_{1 \leq a < b \leq N} U_{ab} + \sum_{1 \leq a < b < c \leq N} U_{abc} + \dots, \quad (6)$$

где сумма берется по всем  $N'$  – частичным кластерам, то линейность системы уравнений (4), (5) разрешает принять аналогичное предположение для  $\Psi_\alpha$  и получить замкнутую систему уравнений, относящуюся к любому  $N'$  – частичному кластеру. Далее опус-

каем явное указание на количество частиц в кластере.

Условия (4) требуют <sup>3,8</sup>, чтобы лагранжиан прямого взаимодействия  $U$  не содержал явно общего параметра эволюции (времени)  $t$ , зависел от координат частиц лишь через разности  $\hat{x}_a - \hat{x}_b \equiv \vec{r}_{ab}$  (трансляционная инвариантность), был трехмерным скаляром и удовлетворял условиям лоренц-инвариантности, которые удобно записать в виде

$$\hat{K}_i U = D(c^{-2} R_i U - \Phi_i). \quad (7)$$

Здесь  $\Phi_i$  -функции, которые в силу условий совместимости (5) являются трансляционно-инвариантными, не зависящими явно от  $t$  компонентами 3-вектора, и удовлетворяют уравнениям

$$\hat{K}_i \Phi_j - \hat{K}_j \Phi_i = c^{-4} S_{ij} U, \quad (8)$$

где

$$\hat{K}_i = K_i - R_i c^{-2} D, \quad (9)$$

$$S_{ij} = c^2 (\hat{K}_i R_j - \hat{K}_j R_i) = \sum_{1 \leq a < b \leq N} \beta_a \beta_b (v_{abi} v_{abj} - v_{abj} v_{abi}), \quad (10)$$

$$R_i = \sum_{a=1}^{N'} \beta_a x_{ai}, \quad \beta_a \in \mathbb{R}, \quad \sum_{a=1}^{N'} \beta_a = 1; \quad \vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b. \quad (II)$$

Пусть функции  $U, \Phi_i$  в (7), (9) описывают фиксированный  $N'$ -частичный кластер. Рассмотрим решение уравнений (7), (8) в рамках последовательных приближений по  $c^{-2}$ . Эта задача решена в <sup>7,9</sup> для  $N' = 2$  до второго порядка по  $c^{-2}$  включительно. Здесь изложим общее решение для произвольного кластера и порядка приближения.

Представим искомые функции  $U, \vec{\Phi}$  в виде

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-2n} U^{(n)}, \quad \vec{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-2n} \vec{\Phi}^{(n)} \quad (12)$$

Учитывая, что, согласно (3) и (9), оператор  $\hat{K}_i$  мы можем представить в виде  $\hat{K}_i = \mathcal{G}_i + c^{-2} \mathcal{B}_i$ , где  $\mathcal{G}_i$  - генератор преобразований Галилея,  $\mathcal{G}_i = -t \mathcal{P}_i - \mathcal{G}_i$ ,  $\mathcal{G}_i = \sum_a \partial / \partial v_a^i$ , после подстановки рядов (12) в уравнения (7), (8) получим, принимая во внимание трансляционную инвариантность функций  $U^{(n)}, \vec{\Phi}^{(n)}$ , следующие соотношения:

$$G_i U^{(n)} = \hat{B}_i U^{(n-1)} - V_i U^{(n-1)} + D \Phi_i^{(n)} = F_i^{(n)}, \quad (13)$$

$$G_i \Phi_j^{(n)} - G_j \Phi_i^{(n)} = \hat{B}_i \Phi_j^{(n-1)} - \hat{B}_j \Phi_i^{(n-1)} - S_{ij} U^{(n-2)} = F_{ij}^{(n)}, \quad (14)$$

здесь  $V_i = D R_i = \sum_{a=1}^{N'} \beta_a U_{ai}$ .

В уравнениях (13), (14) можно перейти от индивидуальных скоростей частиц  $\vec{v}_a$  к новым переменным: "коллективной" скорости

$\vec{V}$  и некоторым  $(N-1)$ - относительным скоростям, явный выбор которых для нас несущественный. Тогда вместо оператора  $G_i$  нужно писать  $\partial/\partial V^i$  и общее решение уравнений (13), (14) имеет вид (см., например <sup>16</sup>, с. 50-51)

$$\Phi_i^{(n)} = V^i \int_0^1 d\tau \tau F_{ji}^{(n)}(\tau \vec{V}, \dots), \quad (15)$$

$$U^{(n)} = V^i \int_0^1 d\tau F_{ij}^{(n)}(\tau \vec{V}, \dots) + \Psi_n, \quad (16)$$

где  $\Psi_n$  - произвольные галилей-инвариантные (т.е. не содержащие  $\vec{V}$ ) функции. Мы ограничились частным решением (15), так как выбор другого решения для  $\Phi_i^{(n)}$  приводит к появлению в  $U^{(n)}$  слагаемых типа полной производной по  $t$ .

Анализ цепочки решений (15), (16) для последовательности  $n = -0, 1, \dots$  приводит к следующим выводам:

$$1. \quad \vec{\Phi}^{(0)} = 0, \quad \vec{\Phi}^{(1)} = 0; \quad U^{(0)} = \Psi_0. \quad (17)$$

2. Для любого  $n > 0$  функции  $U^{(n)}$  и  $\vec{\Phi}^{(n+1)}$  являются полиномами по  $\vec{V}$  степеней  $2n$  и  $2n-1$  соответственно.

3. Если  $\Psi_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$  - бесконечно дифференцируемые функции в некоторой области изменения своих аргументов, то тем же свойством обладают  $U^{(n)}$  и  $\vec{\Phi}^{(n)}$  для всех  $n \leq m$ .

Функции  $F_i^{(n)}$ ,  $F_{ij}^{(n+1)}$ , определенные в формулах (13), (14), допускают представление в виде

$$F_i^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n-1} F_{i(s)}^{(n)}, \quad F_{ij}^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{2(n-1)} F_{ij(s)}^{(n+1)}, \quad n > 0, \quad (18)$$

где  $F_{i,j}^{(n)}$  и  $F_{i,j}^{(n+1)}$  – однородные функции  $\vec{V}$  порядка  $s$ . Это позволяет взять интегралы в (15), (16) и представить решение уравнений (13), (14) в следующих эквивалентных формах ( $n > 0$ ) :

$$\Phi_i^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{2(n-1)} \frac{V^s}{s+2} F_{j,i}^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{2(n-1)} \frac{(-1)^s}{(s+2)!} V^s W_s F_{j,i}^{(n+1)}, \quad (19)$$

$$U^{(n)} = \sum_{s=0}^{2n-1} \frac{V^s}{s+1} F_{j,i}^{(n)} + \Psi_n = \sum_{s=0}^{2n-1} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} V^s W_s F_{j,i}^{(n)} + \Psi_n. \quad (20)$$

Здесь операторы  $W_s$ ,  $s = 0, 1, \dots$ , определяются рекуррентными соотношениями

$$W_0 = id; \quad W_s = V^s W_{s-1} G_j, \quad s > 0. \quad (21)$$

Во второй форме записи (19), (20) все функции можно считать выраженными в терминах индивидуальных скоростей частиц  $\vec{v}_a$ . Соотношения (19), (20) позволяют получать общие выражения для лагранжиана взаимодействия в  $n$ -ом порядке по  $s^{-2}$ , если известны лагранжианы в предыдущих порядках  $k < n$ .

Если ограничиться двухчастичными (в лагранжиевом формализме) взаимодействиями ( $N' = 2$ ) и положить  $\Psi_0 = \psi_0(r)$ ,  $\Psi_1 = \psi_1(\vec{r}, \vec{v})$ , то формулы (19)–(20) воспроизводят результат работы [9]. Только при очень частном (и, по-видимому, лишнем физического содержания) выборе  $\psi_1$  лагранжиан  $U^{(2)}$  может не содержать ускорений [9]. В типичных случаях  $U^{(2)}$  зависит от ускорений (а возможно, и высших производных), так что соответствующие уравнения движения имеют порядок выше второго. Исключая производные выше первой в малых членах уравнений движения, приходим к нелинейным выражениям для релятивистских "сил" [9, 13].

$$\vec{v}_a^i = \mu_a^i(x, v) \equiv \sum_{b \neq a} \mu_{ab}^i + \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \mu_{abc}^i + \dots \quad (22)$$

### 3. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВО ВТОРОМ КВАЗИРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКИ

Решение задачи о сложении взаимодействий в гамильтоновом формализме путем перехода от лагранжиева описания реализуется здесь

во втором квазирелятивистском приближении для взаимодействий со статическим нерелятивистским пределом в предположении, что лагранжиан взаимодействия является суммой попарных выражений.

Пусть в лагранжиане

$$L = \sum_a \left( \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \frac{m_a v_a^6}{16c^4} \right) - U^{(0)} - \frac{1}{c^2} U^{(1)} - \frac{1}{c^4} U^{(2)} + O(c^{-6}) \quad (23)$$

потенциалы  $U^{(n)}$ ,  $n=0,1,2$  обладают двухчастичной кластерной структурой:

$$U^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_a \sum_{a \neq b} U_{ab}^{(n)}, \quad (24)$$

причем  $U_{ab}^{(0)} = \mathcal{U}_{ab}(\tau_{ab})$ ,  $\tau_{ab} = |\vec{\tau}_{ab}|$ ;  $U^{(1)}$  зависит от координат  $\vec{x}_a$  и скоростей  $\vec{v}_a$  частиц, а  $U^{(2)}$  содержит также ускорения  $\vec{a}_a$  (общий вид функций  $U_{ab}^{(1)}$  и  $U_{ab}^{(2)}$  найден в [9]).

Для лагранжиана (23) отличными от нуля импульсами Остроградского

$$\vec{\Phi}_{a,\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-D)^{\lambda-1} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_a^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-2n} \vec{\Phi}_{a,\sigma}^{(n)} \quad (25)$$

будут только два первых ( $\sigma=0,1$ ). Переход к каноническим переменным  $q$ ,  $p$  по методу работы [13] осуществляется согласно формулам

$$\vec{q}_a = \vec{x}_a - \frac{1}{m_a} \vec{\Phi}_{a,1} + O(c^{-6}), \quad (26)$$

$$\vec{p}_a = \tilde{\vec{\Phi}}_{a,0} + O(c^{-6}) \approx m_a \vec{v}_a + \frac{1}{c^2} \vec{\Phi}_{a,c}^{(1)} + \frac{1}{c^4} \vec{\Phi}_{a,c}^{(2)} + O(c^{-6}); \quad (27)$$

здесь и ниже тильда обозначает операцию исключения высших производных  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{a}_a$  с помощью нерелятивистских уравнений движения. Соответствующий (25) гамильтониан можно записать в виде

$$H = \sum_a \left( \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{p_a^4}{8m_a^3 c^2} + \frac{p_a^6}{16m_a^5 c^4} \right) + H_{int}^{(0)} + \frac{1}{c^2} H_{int}^{(1)} + \frac{1}{c^4} H_{int}^{(2)} + O(c^{-6}) \quad (28)$$

где

$$H_{int}^{(0)} = U^{(0)}(q), \quad H_{int}^{(1)} = U^{(1)}(q, \frac{p}{m}), \quad (29)$$

$$H_{int}^{(2)} = \tilde{U}^{(2)}(q, \frac{p}{m}) + \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \left\{ \left[ \tilde{\Phi}_{\alpha,0}^{(1)}(q, \frac{p}{m}) \right]^2 - \frac{p_{\alpha}^6}{8m_{\alpha}^4} \right\}; \quad (30)$$

фигурирующие здесь функции аргументов  $(q, p/m)$  строятся из тех же функций от  $(x, v)$  подстановкой  $\tilde{x}_a = \tilde{q}_a$ ,  $\tilde{v}_a = \tilde{p}_a/m_a$ , соответствующей нулевому приближению преобразований, обратных к (26), (27).

Результаты вычисления выражения (30) запишем в виде суммы линейных и нелинейных по константе взаимодействия членов

$$H_{int}^{(2)} = H_{int}^{(2)L} + H_{int}^{(2)NL}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} H_{int}^{(2)L} = & \frac{1}{16} \sum_{a \neq b} \sum_{\alpha} \frac{1}{m_a^2 m_b^2} \left\{ \left[ p_a^2 p_b^2 - 2(\tilde{p}_a \tilde{p}_b)^2 + 4 \frac{m_b}{m_a} p_a^2 (\tilde{p}_a \tilde{p}_b) \right] u_{ab} + \right. \\ & + 2 p_a^2 \left[ (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_b)^2 - 2 \frac{m_b}{m_a} (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_a) (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_b) \right] \frac{1}{q_{ab}} \frac{du_{ab}}{dq_{ab}} + \\ & \left. + (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_a)^2 (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_b)^2 \left( \frac{1}{q_{ab}} \frac{d}{dq_{ab}} \right)^2 u_{ab} \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{a \neq b} \sum_{\alpha} \frac{1}{m_a m_b} \left\{ -(\tilde{p}_a \tilde{p}_b) [u_{1ab} - 3(\tilde{p}_a \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \tilde{p}_a})] + (\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_a) (\tilde{p}_b \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \tilde{q}_{ab}}) - \right. \\ & \left. - \frac{m_b}{m_a} p_a^2 \left[ (\tilde{p}_b \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \tilde{p}_b}) + 2(\tilde{p}_a \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \tilde{p}_a}) \right] \right\} + \tilde{u}_2^L(q, \frac{p}{m}), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{int}^{(2)NL} = & \frac{1}{8} \sum_{a \neq b} \sum_{c \neq (a,b)} \frac{1}{m_a m_b} \left\{ \frac{\tilde{p}_b \tilde{p}_c}{m_c} u_{ab} u_{ac} + \right. \\ & + \left[ 2(\tilde{q}_{ac} \tilde{p}_b) \left( \frac{\tilde{q}_{ab} \tilde{p}_b}{m_b} - \frac{\tilde{q}_{ac} \tilde{p}_c}{m_c} \right) - \frac{p_b^2}{m_b} (\tilde{q}_{ab} \tilde{q}_{ac}) \right] \frac{u_{ab}}{q_{ac}} \frac{du_{ac}}{dq_{ac}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\vec{q}_{ab}\vec{p}_b)\left(\frac{\vec{q}_{ab}\vec{p}_b}{m_b} - \frac{\vec{q}_{ac}\vec{p}_c}{m_c}\right)\frac{(\vec{q}_{ab}\vec{q}_{ac})}{q_{ab}q_{ac}} \frac{du_{ab}}{dq_{ac}} \frac{du_{ac}}{dq_{ac}} \} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum \left\{ m_a \left( \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \vec{p}_a} \right)^2 + \frac{1}{m_b} \left[ -\left( \vec{p}_b \cdot \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \vec{p}_a} \right) u_{ab} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\vec{q}_{ab}\vec{p}_b)\left(\vec{q}_{ab} \cdot \frac{\partial u_{1ab}}{\partial \vec{p}_a}\right) \frac{1}{q_{ab}} \frac{du_{ab}}{dq_{ab}} \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{4} \sum_{a \neq b} \sum_{c \neq a} \left[ \vec{q}_{ab} \left( \frac{\vec{p}_a}{m_a} + \frac{\vec{p}_b}{m_b} \right) \left( \vec{q}_{ac} \cdot \frac{\partial u_{1ac}}{\partial \vec{p}_a} \right) \frac{1}{q_{ac}} \frac{du_{ac}}{dq_{ac}} + \right. \\
& \left. + \tilde{u}_2^{HA}(q, \frac{p}{m}) \right]; \quad (32)
\end{aligned}$$

здесь  $\vec{q}_{ab} = \vec{q}_a - \vec{q}_b$ ,  $q_{ab} = |\vec{q}_{ab}|$ ;  $u_{ab} = u_{ab}(q_{ab})$ ,  $u_1 = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} u_{1ab}$ ,  $u_2$  - произвольные галилей-инвариантные функции.

Выражение (31) является суммой попарных слагаемых, тогда как (32) соответствует трехчастичным и, возможно, - если функция  $u_2(x, \dot{x}, \dot{\dot{x}})$ , содержащаяся в  $U^{(2)}$ , нелинейна по ускорениям - четырех - и т.д. частичным кластерам. Появление таких многочастичных членов является следствием исключения ускорений в исходном лагранжиане и в импульсах Остроградского, а также связано с переходом от лагранжевых переменных к каноническим.

Выражения (28), (31) и (32) определяют общий вид гамильтониана системы  $N$  частиц во втором квазирелятивистском приближении и могут рассматриваться как решение задачи сложения взаимодействий в рамках гамильтонова формализма с точностью до членов  $c^{-4}$ .

Общее решение квантовой релятивистской задачи сложения взаимодействий в гамильтоновой теории дано С.Н.Соколовым<sup>5,6</sup> при заданных потенциалах "первичных" (существенно  $N'$  - частичных,  $N' = 2, \dots, N$ ) взаимодействий. Предложенный здесь способ построения гамильтониана  $N$  -частичной системы позволяет использовать преимущества лагранжева формализма - простое правило сложения взаимодействий, а также возможность конкретизации вида галилей-инвариантных функций  $u_{ab}$ ,  $u_{1ab}$ ,  $u_2$ , определяющих струк-

туру величин (31), (32), для того или иного типа взаимодействий (см. 9, 10). С точки зрения физической интерпретации результатов теории важно также то, что благодаря лагранжевому происхождению полученных выражений нам известна связь канонических переменных с ковариантными координатами частиц, заданная соотношениями (26), (27).

Применяя преобразование (26), (27) к остальным девяти лагранжевым интегралам движения (см. 9), можно получить полный набор десяти канонических генераторов. При этом импульс  $\vec{P}$  и момент импульса  $\vec{J}$  системы имеют свободночастичный вид (как и должно быть в мгновенной форме динамики 3), а генератор лоренцевых поворотов

$$\vec{K} = -t \vec{P} + \sum_a \vec{q}_a \left\{ m_a + \frac{\vec{P}_a^2}{2m_a c^2} - \frac{\vec{P}_a^4}{8m_a^3 c^4} + \frac{1}{2c^2} \sum_{b \neq a} \left[ u_{ab}(q) + \frac{1}{c^2} U_{ab}^{(4)}(q, \frac{\vec{P}}{m}) \right] \right\} - \frac{1}{4c^4} \sum_a \sum_b \frac{\vec{P}_b(\vec{q}_{ab} \cdot \vec{P}_a)}{m_a m_b} u_{ab} + O(c^{-6}) \quad (33)$$

содержит член, зависящий от взаимодействия и являющийся в рассматриваемом приближении суммой попарных выражений.

Изложенные здесь результаты показывают, что за пределами первого постニュтонаовского приближения 3 требования пуанкаре-инвариантности не допускают в гамильтоновском формализме простого принципа суперпозиции взаимодействий и, таким образом, приводят к неизбежности многочастичных членов в гамильтониане системы  $N$  частиц ( $N > 3$ ).

#### 4. СИСТЕМА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В качестве конкретного примера, иллюстрирующего получение правил сложения взаимодействий (как прямых межчастичных, так и взаимодействий частиц с внешним полем) в ньютоновом и гамильтоновом формализмах на основе линейного принципа суперпозиции в лагранжиевом описании, рассмотрим систему частиц с зарядами  $e_a$  во внешнем электромагнитном поле. Функция Лагранжа (I) для такой системы во втором квазирелятивистском приближении состоит из двух частей: во-первых, лагранжиана замкнутой системы вида (23), (24),

где  $U_{ab} = e_a e_b / r_{ab}$  - кулоновский потенциал,  $U_{ab}^{(1)}$  соответствует известному лагранжиану Дарвина (см. 17/), для которого  $U_{ab} = 79,10/$ , а  $U_{ab}^{(2)}$  - лагранжиану Голубенкова-Смородинского 18/ (см. также 9,10/), когда

$$U_{ab} = \frac{e_a e_b}{8 r_{ab}} [3(\vec{v}_a \vec{v}_b) r_{ab}^2 - (\vec{r}_{ab} \vec{v}_a) (\vec{r}_{ab} \vec{v}_b)]; \quad (34)$$

во-вторых, стандартного минимального лагранжиана взаимодействия частиц с внешним электромагнитным полем 17/

$$L_{ext} = - \sum_a e_a (\varphi_a - \frac{1}{c} \vec{v}_a \vec{A}_a), \quad (35)$$

где  $\varphi_a = \varphi(\vec{x}_a, t)$ ,  $\vec{A}_a = \vec{A}(\vec{x}_a, t)$  - потенциалы поля в точке нахождения  $a$ -той частицы.

Уравнения движения ньютоновского типа вида (22) можно найти способом, описанным в 9/. Мы не будем здесь приводить полученные выражения ввиду их громоздкости; их особенностями является, во-первых, появление уже в первом квазирелативистском приближении трехчастичных (а во втором - четырехчастичных) членов 9/, что согласуется с общей структурой таких уравнений движения 13/; во-вторых, наличие внешних полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые входят не только в виде обычной силы Лоренца, но и в некоторые интерференционные члены, перемешивающие межчастичные взаимодействия и взаимодействие с внешним полем. Своим происхождением, как и многочастичные "силы", они обязаны процедуре исключения высших производных (ускорений и т.д.) в уравнениях движения 13/.

При переходе к гамильтонову формализму 13/ следует принять во внимание, что из-за явной зависимости  $L_{ext}$  от времени гамильтониан системы не является энергией. Более того, в общем случае система во внешнем поле не является пуанкаре-инвариантной и не обладает набором соответствующих интегралов движения.

Переход к каноническим переменным определяется формулами (26) и

$$p_{ai} = m_a v_{ai} + \frac{e_a}{c} A_{ai} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}_{ai,0}^{(1)} + \frac{1}{c^4} \dot{\varphi}_{ai,0}^{(2)} - \frac{e_a}{m_a c^5} \dot{\varphi}_{a,1}^{(2)} \frac{\partial A_{ai}}{\partial x_a^i}. \quad (36)$$

Вводя для произвольной функции  $f(x, v, t)$  обозначение

$$f^* = f^*(q, p, t) = f(q, \frac{1}{m}q, t), \quad (37)$$

где

$$\vec{\eta}_a = \vec{p}_a - \frac{e_a}{c} \vec{A}(\vec{q}_a, t) \quad (38)$$

- "кинематический" импульс, приходим к функции Гамильтона системы вида (28), где в свободночастичных членах  $\vec{p}_a$  заменено на

$\vec{\eta}_a$ ,

$$H_{int}^{(0)} = U^{(0)*} + \sum_a e_a \Psi_a^*, \quad H_{int}^{(1)} = U^{(1)*}, \quad H_{int}^{(2)} = H_{int}^{(2)H} + H_{int}^{(2)HL} + H_{ext}^{(2)}. \quad (39)$$

Здесь выражения  $H_{int}^{(0)}$  и  $H_{int}^{(2)HL}$  получены из (31) и (32) подстановкой  $\vec{\eta}_a$  вместо  $\vec{p}_a$  (т.н. минимальное введение взаимодействия с внешним полем) и учетом явного вида функций  $u_{ab}$ ,  $u_{1ab}$ ,  $u_{2ab}$ , в частности,  $u_{1ab} = 0$ ,  $\tilde{u}_2^{(1)} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2^{(1)} = & -\frac{1}{16} \sum_{a \neq b} \sum_{b \neq c} \sum_{c \neq d} \frac{e_a e_b^2 e_c^2 e_d}{m_b m_c q_{ab}^3 q_{cd}^3} \left[ 3q_{bc} (\vec{q}_{ab} \vec{q}_{cd}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{q_{bc}} (\vec{q}_{ab} \vec{q}_{bc}) (\vec{q}_{bc} \vec{q}_{cd}) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Дополнительное слагаемое  $H_{ext}^{(2)}$  в (40) имеет вид

$$\begin{aligned} H_{ext}^{(2)} = & \frac{1}{16} \sum_{a \neq b} \sum \left\{ \frac{2 e_a e_b^2}{m_a^2 m_b q_{ab}} \left[ 2(\vec{q}_{ab} \vec{\eta}_a) \vec{\eta}_a - \eta_a^2 \vec{q}_{ab} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{q_{ab}^2} (\vec{q}_{ab} \vec{\eta}_a)^2 \vec{q}_{ab} \left. \right] \vec{F}_b^* + \frac{e_a^2 e_b^2}{m_a m_b} \left[ 3q_{ab} \vec{F}_a^* - \frac{1}{q_{ab}} (\vec{q}_{ab} \vec{F}_a^*) \vec{q}_{ab} \right] \vec{F}_b^* \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{8} \sum_{a \neq b \neq c} \sum \frac{e_a^2 e_b^2 e_c}{m_a m_b q_{bc}^3} \left[ 3q_{ab} \vec{q}_{bc} - \frac{1}{q_{ab}} (\vec{q}_{ab} \vec{q}_{bc}) \vec{q}_{ab} \right] \vec{F}_b^*, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\vec{F}_a(\vec{x}_a, \vec{v}_a, t) = \vec{E}(\vec{x}_a, t) + \frac{1}{c} \vec{v}_a \times \vec{H}(\vec{x}_a, t) \quad (42)$$

зависит от напряженностей внешнего поля, а не его потенциалов, и нарушает принцип минимального введения взаимодействия с внешним электромагнитным полем в гамильтониан системы частиц. Отметим, что гамильтониан (39), как и исходный лагранжиан (35), обладает калибровочной инвариантностью.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели некоторые возможности применения лагранжиевой формулировки классической РПВ для изучения задачи сложения взаимодействий. Эти возможности опираются на два важных достоинства указанного подхода, а именно: линейность уравнений, выражавших условия пуанкаре-инвариантности, и использование физических координат частиц в качестве исходных переменных. В рамках лагранжиева формализма, допускающего суперпозицию потенциалов взаимодействия отдельных кластеров, составляющих систему частиц, найдены общие выражения для потенциала любого кластера в произвольном конечном приближении по  $C^{-2}$ . В результате перехода к гамильтонову формализму, осуществленного явно во втором приближении по  $C^{-2}$  и в предположении попарности лагранжианов взаимодействия, получено общее выражение для гамильтониана  $N$ -частичной системы (а также остальных канонических генераторов группы Пуанкаре), которое можно рассматривать как правило сложения взаимодействий в каноническом формализме. Для системы  $N$  заряженных частиц, находящейся во внешнем электромагнитном поле, найдено в том же приближении правило сложения как междучастичных взаимодействий, так и взаимодействий отдельных зарядов с внешним полем. Следует подчеркнуть, что исходя из предположения о минимальности взаимодействия с внешним полем в лагранжиевом формализме мы пришли к неминимальному введению взаимодействия с полем в функции Гамильтона. Результаты, полученные в ньютоновом и гамильтоновом формализмах могут быть использованы для расчета релятивистских поправок в движении систем заряженных частиц в заданном электромагнитном поле. Некоторые задачи этого типа рассматривались Н.П.Клепиковым<sup>19</sup> в рамках четырехмерного гамильтонова формализма, использующего лаф-фовы формы с минимальным введением взаимодействия зарядов с внешним электромагнитным полем.

Необходимо сделать также некоторые замечания о проблеме разделимости (сепарабельности)<sup>4</sup>, обычно возникающей при решении задачи сложения взаимодействий. В рассматриваемом приближении, как можно убедиться на основе выражений (31), (32), при двухчастичном потенциале  $\mathcal{U}_{ab}(\tau_{ab})$  и функции  $\mathcal{U}_{1ab}$ , убывающих на бесконечности, трудности с разделимостью могут возникнуть только за счет функции  $\mathcal{U}_2$  в (32). Так как с точки зрения условий пуанкаре-инвариантности галилей-инвариантная функция  $\mathcal{U}_1$  произвольна<sup>9,10</sup>, то, ограничивая ее выбор, можно указать широкий класс моделей, удовлетворяющих требованию разделимости взаимодействия. Однако сюда не включаются некоторые лагранжианы с нерелятивистским кулоновским потенциалом, допускающие теоретико-полевую интерпретацию<sup>9,10</sup>. Таким примером является лагранжиан Голубенко-ва-Смородинского, для которого функция  $\mathcal{U}_2$  имеет вид (34). Нетрудно заметить, что соответствующее ей четырехчастичное слагаемое в (40)  $H_{int}^{(2)N^A}$  не является разделимым. Аналогичные трудности возникают также в ньютоновом формализме. Они связаны, по нашему мнению, с тем фактом, что разложения в ряд по степеням параметра  $s^{-1}$  в моделях, допускающих теоретико-полевую интерпретацию, включают разложения по степеням запаздывания (опережения); очевидно, что с ростом расстояния между некоторыми классерами системы запаздывание взаимодействия между ними становится большим. В этом смысле квазирелятивистские приближения, достаточно удобные для рассмотрения связанных систем, обладают ограниченной применимостью в многочастичных задачах рассеяния; в последнем случае более естественны приближения по константе связи.

#### Литература

1. С.Н.Соколов.-В кн.: Труды Междунар. семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля.-Протвино; 1978, т.1, с. 303.
2. С.Н.Соколов.-В кн.: Труды Междунар. симпозиума по проблеме нескольких тел в ядерной физике.-Дубна; 1980, с.44.
3. Р.П.Гайда.-ЭЧАЯ, 13, вып. 2, 427 (1982).
4. С.Н.Соколов.-ТМФ, 23, 355 (1975).
5. С.Н.Соколов.-ДАН СССР, 233, 575 (1977).

6. С.Н.Соколов.-*TM*, 36, 193 (1978).
7. Foldy L.L., Krajcik R.A.-*Phys. Rev D.*, 12, 1700 (1975).
8. Р.А.Гайда, В.Б.Ключковский, В.И.Третяк.-*TM*, 44, 194 (1980).
9. Р.П.Гайда, В.Б.Ключковский, В.И.Третяк.-*TM*, 45, 180 (1980).
10. Gaida R.P., Tretyak V.I. *Acta Phys. Pol.* B11, 509 (1980).
11. Tretyak V.I., Gaida R.P.-*Acta Phys. Pol.* B11, 523 (1980).
12. Р.П.Гайда.-В кн.: *Труды У Междунар. семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля.*-Протвино, 1982, т. I, с. 304.
13. Р.П. Гайда, В.И.Третяк.-Препринт ИТФ-82-87Р, Киев, 1982.
14. В.И.Третяк.-Препринт ИТФ-82-68Р, Киев, 1982.
15. Р.П.Гайда, В.Б.Ключковский, В.И.Третяк.-Докл. АН УССР, сер.А, № 5, 77 (1982); *TM*, 55, 88 (1983).
16. R.M.Santilli: *Foundations of Theoretical Mechanics. vol.1.* New York e.a., Springer, 1978.
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.-*Теория поля.*-М.: Наука, 1973.
18. В.Н.Годубенков, Я.А.Смородинский.-*МЭТФ*, 31, 330 (1956).
19. Н.П. Клепиков.-*TM*, 37, 218 (1983).

# МГНОВЕННАЯ ФОРМА РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ФОРМАЛИЗМА СИНГУЛЯРНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Р.Л.Гайдя, А.А.Дувиряк, Ю.Б.Ключковский

Институт прикладных проблем механики и математики  
Академии наук Украинской ССР, Львов

## I. ВВЕДЕНИЕ

Формализм сингуллярных лагранжианов<sup>1/</sup> в последние годы вызывает значительный интерес как один из способов описания релятивистских систем прямо взаимодействующих частиц<sup>2/</sup> (см. также обзоры<sup>3,4/</sup>). Этот формализм, в отличие от трехмерных подходов лагранжиева, ньютона или гамильтонова<sup>5/</sup>, использует четырехмерные координаты мировых линий частиц в пространстве Минховского  $M^4$ ; избыточные переменные исключаются с помощью связей, следующих из сингуллярности функции Лагранжа. Наличие этих связей позволяет записать уравнения движения в виде обычных дифференциальных уравнений, а не интегро-дифференциально-разностных, как в явно ковариантном формализме типа Фоккера<sup>6/</sup> (см. также<sup>5,7/</sup>).

Формализм сингуллярных лагранжианов тесно связан<sup>4/</sup> с каноническим формализмом со связями Гамильтона-Лирака<sup>1,8/</sup>. С другой стороны, его взаимосвязь с другими подходами, используемыми в релятивистской теории прямых взаимодействий, в частности, трехмерными<sup>5/</sup>, практически не изучалась, укажем только работу<sup>9/</sup>,

где установлено соответствие с явно ковариантным формализмом Дро-Венсана, а также попытку Такабаяси<sup>3/3</sup> сопоставить модели с сингулярным лагранжианом некоторые действия типа Фоккера (как будет показано ниже, его результат некорректен; см. разд.5).

Целью настоящей работы является разработка способа перехода от уравнений движения в формализме сингулярных лагранжианов к трехмерным уравнениям типа Ньютона в мгновенной форме динамики в рамках разложений по параметру  $c^{-2}$  (т.н. квазирелятивистские приближения), а также нахождение соответствующих интегралов движения. В частности, здесь получено и исследовано первое квазирелятивистское приближение для модели Доминичи, Гомеша и Донги (DGL)<sup>1/2</sup>.

## 2. МОДЕЛЬ DGL И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТАКАБАЯСИ

Модель DGL<sup>1/2</sup>, описывавшая систему двух частиц с одинаковыми массами  $m$ , является одной из наиболее простых и изученных в формализме сингулярных лагранжианов. Модель постулирует параметрически-инвариантное действие

$$S = \int L d\tau, \quad L = -\sqrt{W(\rho^2)} \left( \sqrt{-\dot{x}_1^2} + \sqrt{-\dot{x}_2^2} \right) \quad (1)$$

с функцией Лагранжа  $L$ , заданной на  $TQ$ , где конфигурационное пространство  $Q = M_4 \times M_4$ ; здесь  $\rho^2 = (x_1^{\mu} - x_2^{\mu})(x_{1\mu} - x_{2\mu})$ ,  $x_a^{\mu}$  ( $a = 1, 2$ ;  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) - координаты  $a$ -й частицы в  $M_4$ ,  $\dot{x}_a^{\mu} = dx_a^{\mu} / d\tau$ , где  $\tau$  - некоторый параметр эволюции. Метрику в  $M_4$  принимаем в виде  $\| \eta_{\mu\nu} \| = \text{diag} (-1, 1, 1, 1)$ . Функция  $W$ , описывающая взаимодействие, выражается через нерелятивистский потенциал  $U$  (здесь  $\rho = \sqrt{\rho^2}$ ):

$$W(\rho^2) = m^2 c^2 + m U(\rho). \quad (2)$$

Пуанкаре-инвариантность лагранжиана (1), согласно первой теореме Нетер, приводит к существованию 10 интегралов движения

$$P_{\mu} = \sum_{a=1}^2 \sqrt{W} \frac{\dot{x}_{a\mu}}{\sqrt{-\dot{x}_a^2}}, \quad M_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^2 \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{-\dot{x}_a^2}} (x_{a\mu} x_{a\nu} - x_{a\nu} x_{a\mu}) \quad (3)$$

Матрица Гессса  $\partial^2 L / \partial \dot{x}_a^{\mu} \partial \dot{x}_b^{\nu}$  лагранжиана (1) вырождена; следствием этого является наличие (в случае  $dW/d\rho^2 \neq 0$ ) первичной лагранжиевой связи<sup>1/1</sup>, которую можно записать

$$\sqrt{W} \zeta = P_\mu \dot{\rho}^\mu \approx 0 \quad (4)$$

(символ  $\approx$  здесь обозначает слабое равенство, выполняющееся на уравнениях Эйлера-Лагранжа). Условие стабильности связи

(4) приводит к вторичной лагранжевой связи  $P_\mu \dot{\rho}^\mu \approx 0$ .

Уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (1) можно привести к виду, инвариантному относительно замены параметра эволюции для каждой частицы отдельно (исходный лагранжиан такой линейной параметрической инвариантностью обладать не может, см. <sup>10/</sup>); отметим, что интегралы движения (3) и первичная связь (4) уже обладают этим свойством. Проводя теперь в них репараметризацию  $x_\alpha(\tau) \mapsto x_\alpha(\tau_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2$ ), приходим к уравнениям Тахабаяси

$$\frac{W}{\sqrt{-\dot{x}_\alpha^2}} \frac{d}{d\tau_\alpha} \frac{\dot{x}_\alpha}{\sqrt{-\dot{x}_\alpha^2}} - (-1)^\alpha 2 \frac{dW}{dp^2} \rho_\alpha \left( \delta_\mu^\nu - \frac{\dot{x}_\alpha^\nu \dot{x}_\alpha^\mu}{\dot{x}_\alpha^2} \right) \quad (5)$$

(в работе <sup>13/</sup> выполнен обратный переход от двухпараметрических уравнений (5) к однопараметрическому действию (1)) и соответствующими первичной связи и первым интегралам.

Фиксируя, наконец, произвольные параметры  $\tau_\alpha$  как координатные времена частиц,

$$\tau_\alpha = \frac{1}{c} x_\alpha^0 = t_\alpha, \quad (6)$$

получаем трехмерную форму уравнений Тахабаяси <sup>13/</sup>, которую после некоторых упрощений с учетом (2) можно преобразовать к системе независимых уравнений

$$m \dot{v}_\alpha^i - \frac{(-1)^\alpha [\tilde{\tau}^i - (t_1 - t_2) v_\alpha^i]}{\gamma_\alpha^2 \rho (1 + U(\rho)/mc^2)} \frac{dU}{d\rho} = 0, \quad (7)$$

$$P_j \tilde{\tau}^j - c P_0 (t_1 - t_2) = 0, \quad (8)$$

где использованы трехмерные обозначения  $x_\alpha^i(t_\alpha)$  для координат и  $v_\alpha^i(t_\alpha) = \dot{x}_\alpha^i(t_\alpha)$  — для скоростей частиц ( $i = 1, 2, 3$ ); при этом

$$\rho = \sqrt{\tilde{\tau}^2 - c^2(t_1 - t_2)^2}, \quad \tilde{\tau}^2 = \tilde{\tau}^i \tilde{\tau}_i, \quad \tilde{\tau}^i = x_i^i(t_1) - x_i^i(t_2);$$

$$\dot{x}_\alpha^0 = c, \quad -\dot{x}_\alpha^2 = c^2 (1 - v_\alpha^2/c^2) = c^2 \gamma_\alpha^{-2}.$$

Интегралы движения (3) принимают вид

$$P_i = \frac{1}{c} \sqrt{W} \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha v_{\alpha i}, \quad E = c P_0 = c \sqrt{W} \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha; \quad (9)$$

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} = \frac{1}{c} \sqrt{W} \sum_{a=1}^4 \varepsilon_{ijk} x_a^j v_a^k \gamma_a, \\ K_i = \frac{1}{c} M_{i0} - \frac{1}{c} \sqrt{W} \sum_{a=1}^4 (-t_a v_{ai} + x_{ai}) \gamma_a. \quad (10)$$

### 3. ПЕРЕХОД К МГНОВЕННОЙ ФОРМЕ ДИНАМИКИ

Система семи уравнений (7), (8) служит для нахождения места искомых функций  $x_a^i(t_a)$  и зависимости  $t_1(t_2)$  (или наоборот), фиксирующей соответствующие точки мировых линий двух частиц, "одновременные" в терминах единого первоначального параметра эволюции  $\tau$ . Для перехода к мгновенной форме динамики, в которой одновременная конфигурация системы определяется на гиперплоскости  $x^0 = \text{const}$ , удобно ввести новые переменные

$$t = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2, \quad \theta = c(t, -t_2) = x_1^0 - x_2^0; \quad (II)$$

$$t_1 = t + (1-\lambda)\theta/c, \quad t_2 = t - \lambda\theta/c \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (I2)$$

Тогда уравнение /8/ с учетом /9/ записывается в виде

$$x = \theta - \frac{1}{c} \sum (t_1, t_2) = \theta - \frac{1}{c} \frac{\tilde{\gamma}_i (\gamma_1 v_1^i + \gamma_2 v_2^i)}{\gamma_1 + \gamma_2} = 0, \quad (I3)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  обозначают выражения /12/, и его роль состоит в исключении избыточной переменной  $\theta$  – "относительного времени" двух частиц.

Мы предлагаем алгоритм перехода к мгновенной форме динамики, основанный на разложении в ряд по параметру  $c^{-1}$ , что соответствует так называемым квазирелятивистским приближениям<sup>5</sup>.

Пусть  $A(x_a^i(t_a), v_a^i(t_a), \dot{v}_a^i(t_a); t_1, t_2) = A(t_1, t_2; \frac{\theta}{c})$  – некоторая физическая величина; ее значение с учетом связей (I3) можно представить в виде

$$A(t_1, t_2, \frac{\theta}{c})|_{x=0} = \int d\theta \frac{dx}{d\theta} A\left(t + (1-\lambda)\frac{\theta}{c}, t - \lambda\frac{\theta}{c}, \frac{1}{c}\theta\right) \delta(x(\theta)) = A_{\text{inst}}(t). \quad (I4)$$

Учитывая, что, согласно /13/,

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \frac{1}{c^2} (D_1 - \lambda D) \sum, \quad (I5)$$

где  $D_a = \sum_{\sigma=0}^{\infty} x_{ai}^{\sigma+1} \partial/\partial x_{ai}^{\sigma}$ ;  $\dot{x}_{ai} = d^{\sigma} x_{ai}/dt^{\sigma}$ ;  $D = D_1 + D_2$ , и представляем сдвиги в аргументах функций  $A$  и  $\sum$  с помощью экспоненты от операторов  $D_a$  (ср. /7/), имеем

$$A_{\text{inst}}(t) = \int d\theta \exp\left\{\frac{\theta}{c} (D_1 - \lambda D)\right\} \delta\left(\theta - \frac{1}{c} \sum(t, t)\right) \times$$

$$\times A(t, t, \theta/c) \left[ 1 - \frac{1}{c^2} (D_i - \lambda D) \Xi(t, t) \right]. \quad (16)$$

Разлагая экспоненту в ряд и выполняя интегрирование, после некоторых преобразований находим:

$$A_{inst}(t) = \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{c^{2s} s!} (D_i - \lambda D)^{s-1} \Xi^s(t, t) (D_i - \lambda D) \right\} A(t, t, \frac{t}{c^2} \Xi(t, t)). \quad (17)$$

Полученное выражение удобно для нахождения приближенных по  $c^{-2}$  для уравнений движения, когда  $A$  — левая сторона уравнений (7), или для интегралов движения (9), (10).

#### 4. ПЕРВОЕ КВАЗИРЕЛТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для нахождения приближенных (с заданной точностью по  $c^{-2}$ ) выражений для  $A_{inst}$  на основе (17) следует учесть разложение в ряд по  $c^{-2}$  исходной величины  $A$  и функции  $\Xi$ , определенной в (13):

$$A = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c^{-2\sigma} A^{(\sigma)}, \quad \Xi = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c^{-2\sigma} \Xi^{(\sigma)}. \quad (18)$$

Мы ограничимся рассмотрением первого квазиравтивистского приближения, учитывавшего члены до порядка  $c^{-2}$ . При этом оказывается, что если в нерелятивистском приближении выполняется равенство  $DA^{(0)} = 0$ , как это имеет место для уравнений движения или их первых интегралов, то  $A_{inst}^{(0)}(t)$  не зависит от произвольного числа  $\lambda$ .

Применив предложенный алгоритм к левой стороне уравнений (7), находим уравнения движения ньютонаского типа в мгновенной форме динамики:

$$\dot{v}_{ai} = M_{ai}^{(0)} + \frac{1}{c^2} M_{ai}^{(1)}, \quad (19)$$

где

$$M_{ai}^{(0)} = (-1)^a \frac{\tau_i}{m\tau} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \quad (a=1, 2), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_{ai}^{(1)} = & \frac{1}{2m\tau} \left\{ 2v_i^2 \tau_i + (\vec{r} \cdot \vec{v}_1 + \vec{r} \cdot \vec{v}_2) v_i \right\} \frac{dU(\tau)}{d\tau} + \\ & + \frac{\tau_i}{8m} (\vec{r} \cdot \vec{v}_1 + \vec{r} \cdot \vec{v}_2) (\vec{r} \cdot \vec{v}_1 - 3\vec{r} \cdot \vec{v}_2) \left( \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} \right)^2 U(\tau) + \frac{\tau_i}{m^2 \tau} U(\tau) \frac{dU(\tau)}{d\tau} \end{aligned} \quad (21)$$

(здесь  $\tau_i = \tilde{\tau}_i(t, t)$ ;  $v_i = \dot{\tau}_i$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  обозначает скалярное произведение 3-векторов); аналогичное выражение для  $\mu_{2i}^{(1)}$  получается из (21) перестановкой индексов частиц. Функции  $\mu_{ai}^{(0)}$ ,  $\mu_{ai}^{(1)}$  удовлетворяют условиям Каури-Хилла (см. 75, 12) планкаре-инвариантности кьютонова формализма в соответствующем приближении.

Аналогично находим квазирелятивистские интегралы движения:

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^2 m \vec{v}_a \left( 1 + \frac{v_a^2}{2c^2} \right) + \frac{1}{2c^2} \left\{ (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \mathcal{U}(t) - (\vec{r} \cdot \vec{v}_1 + \vec{r} \cdot \vec{v}_2) \frac{\vec{r}}{r} \frac{d\mathcal{U}}{d\tau} \right\}; \quad (22)$$

$$E = \sum_{a=1}^2 \left( mc^2 + \frac{mv_a^2}{2} + \frac{3mv_a^4}{8c^2} \right) + \mathcal{U}(t) + \frac{1}{2c^2} \left\{ (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{2} v^2) \mathcal{U}(t) - \left[ (\vec{r} \cdot \vec{v}_1) (\vec{r} \cdot \vec{v}_2) + \frac{1}{4} (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 \right] \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{U}(r)}{dr} - \frac{1}{4mc^2} \mathcal{U}^2(t) \right\}; \quad (23)$$

$$\vec{J} = \sum_{a=1}^2 [\vec{x}_a \times \vec{v}_a] \left\{ m \left( 1 + \frac{v_a^2}{2c^2} \right) + \frac{1}{2c^2} \mathcal{U}(t) \right\} + [\vec{x}_1 \times \vec{x}_2] (\vec{r} \cdot \vec{v}_1 + \vec{r} \cdot \vec{v}_2) \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{U}}{d\tau} \quad (24)$$

$$\vec{K} = -t \vec{P} + \sum_{a=1}^2 m \vec{x}_a \left( 1 + \frac{v_a^2}{2c^2} \right) + \frac{1}{2c^2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \mathcal{U}(t) \quad (25)$$

(Здесь  $[\vec{a} \times \vec{b}]$  - векторное произведение 3-векторов).

Исходя из общего вида квазирелятивистской функции Лагранжа в мгновенной форме динамики /12, 5/, путем конкретизации произвольных функций можно подобрать лагранжиан, приводящий к уравнениям движения (19)-(21) и их интегралам (22)-(25):

$$L = L_f + L_{int} = \sum_{a=1}^2 \left( -mc^2 + \frac{mv_a^2}{2} + \frac{mv_a^4}{8c^2} \right) - \mathcal{U}(t) + \frac{1}{2c^2} \left\{ (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{2} v^2) \mathcal{U}(t) - \left[ (\vec{r} \cdot \vec{v}_1) (\vec{r} \cdot \vec{v}_2) + \frac{1}{4} (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 \right] \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{U}(r)}{dr} + \frac{1}{4mc^2} \mathcal{U}^2(t) \right\}. \quad (26)$$

Отметим нелинейность по константе взаимодействия лагранжиана (26) и соответствующего выражения для энергии (23).

## 5. 0 ФОККЕРОВСКОМ ДЕЙСТВИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ

Трехмерный лагранжиан для модели DGL можно было бы получить в любом приближении по  $c^{-2}$  методом, разработанным в /7/, если можно было бы воспользоваться фоккеровским представлением для действия  $(I)$ , предложенным Такабаяси /3/:

$$S = S_f + S_{int} = - \sum_{a=1}^2 mc \int \sqrt{-\vec{x}_a^2} dt_a - \iint \Phi(\rho, \dot{\zeta}) \delta(\zeta) d\tau_1 d\tau_2, \quad (27)$$

где  $\Phi = 2\sqrt{\dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2} \mathcal{U}(\rho)$ , а  $\zeta$  определено в /4/. Однако оказывается,

что действие (27) не соответствует модели DGL и не приводит к уравнениям Тахабалси (5).

Действительно, вычисление уравнений экстремалей для действия (27) с произвольными  $\Phi$  и  $\zeta(x, \dot{x})$  приводит к системе (здесь  $a \neq b$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_a} \frac{\dot{x}_a^m}{\sqrt{-\dot{x}_a^2}} - \int d\tau_b \left\{ \delta(\zeta) \left( \frac{d}{dx_a} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_a^m} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a^m} \right) + \delta'(\zeta) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_a^m} \frac{d\zeta}{dx_a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d\Phi}{dx_a} \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{x}_a^m} - \Phi \frac{\partial \zeta}{\partial x_a^m} \right) + \delta''(\zeta) \Phi \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{x}_a^m} \frac{d\zeta}{d\tau_a} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

После интегрирования по частям и ряда упрощений система (28) преобразуется в систему обыкновенных уравнений четвертого порядка со связью

$$\mathcal{L}_{\alpha\mu}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = 0, \quad \zeta = 0; \quad (29)$$

коэффициенты у четвертых производных в  $\mathcal{L}_{\alpha\mu}$  имеют вид

$$C_{\alpha\mu\mu\nu} = 0, \quad C_{\alpha\mu\mu\nu} = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{x}_a^m} \frac{\partial \zeta}{\partial \dot{x}_b^m} \left( \frac{d\zeta}{dx_a} \right)^{-2} \Phi \quad (a \neq b). \quad (30)$$

Таким образом, действие (27) не порождает уравнений второго порядка (5).

Вычисление трехмерного лагранжиана взаимодействия, соответствующего действию (27), дает в приближении  $c^{-2}$  выражение

$$L_{int} = -U(r) + \frac{1}{2c^2} \left\{ \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \frac{3}{2} v^2 \right) U(r) - \left[ \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right) \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right) - \frac{1}{4} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right)^2 \right] \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\}, \quad (31)$$

отличающееся от (26).

Результаты настоящего раздела ставят под сомнение возможность сопоставления сингулярным лагранжианам типа (I) фоккеровского действия вида (27).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в настоящей работе результаты устанавливают взаимосвязь между моделью DGL формализма сингулярных лагранжианов и трехмерным ньютоновым формализмом в мгновенной форме динамики в первом квазиреалистическом приближении. Предложенный алгоритм позволяет вычислять соответствующие выражения (функции  $\mu_a^i$  и

интегралы движения ) в любом заданном приближении по  $C^{-2}$  . Его можно обобщить на произвольную форму динамики, заданную геометрически ( см. <sup>11</sup> ), для этого достаточно вместо (6) выбрать в качестве параметров  $T_a = \bar{b}(x.)$ , где  $\bar{b}$  - функция, определяющая форму динамики.

Вопрос о соотношении формализма сингулярных лагранжианов, представленного в литературе несколькими конкретными моделями <sup>2,4,13</sup>, и трехмерного лагранжиана описания <sup>5,12</sup> в настоящее время является открытым. Он представляет интерес в связи с тем, что последний формализм, развитый в общем виде, позволяет проводить сравнение с полевыми теориями <sup>5</sup>, что делает возможной физическую интерпретацию некоторых моделей с прямым взаимодействием.

Развитый здесь подход не дает возможности найти трехмерную функцию Лагранжа, исходя непосредственно из сингулярного лагранжиана типа (1). Построение трехмерного регулярного лагранжиана через сингулярный четырехмерный в общем случае может оказаться невозможным. В частности, обобщение модели  $DGL$  на систему двух частиц с разными массами <sup>2</sup>, исследованное с помощью предложенного алгоритма, приводит к квазирелативистским ньютоновым уравнениям движения, лагранжиан для которых подобрать не удается. Эти результаты, а также исследование других моделей формализма сингулярных лагранжианов <sup>4</sup> будут опубликованы отдельно.

Авторы благодарны С.Н.Соколову и В.И.Третяку за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

#### Литература

1. Sudarshan E.C.G., Mukunda N. *Classical dynamics: A modern perspective*. - New York: J.Wiley, 1974.
2. Dominici D., Gomis J., Longhi G. *Nuovo Cim.*, 48 B, 152 (1978); 48 A, 257 (1978); 56 A, 263 (1980).
3. Takabayasi T. *Progr.Theor.Phys.Suppl.*, No.67, 1 (1979).
4. Longhi G. *Lect.Notes Phys.*, 162, 135 (1982).
5. Гайдя Р.П. *ЭЧАЯ*, 13, вып.2, 427 (1982).
6. Hoyle F., Narlikar J.V. *Action at a distance in physics and cosmology*. - San Francisco: Freeman, 1974.
7. Gaida R.P., Tretyak V.I. *Acta Phys.Pol.*, B.11, 509 (1980).

8. Todorov I.T. *Lect. Notes Phys.* 162, 213 (1982).
9. Illosa I.A., Marqués F., Molina A. *Ann. Inst. H. Poincaré*, A 32, 303 (1980).
10. Giachetti R., Sorace E. *Lett. Nuovo Cim.* 26, 1 (1979).
11. Гайдя Р.П., Киржаковский В.Б., Третяк В.И. Докл. АН УССР, сер. А, № 5, 7 (1982); ТМФ, 55, 88 (1983).
12. Гайдя Р.П., Киржаковский В.Б., Третяк В.И. ТМФ, 45, 180 (1982).
13. G. Longhi. *Lecture Notes Phys.* 162, 149 (1982).

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ НЕЛБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ В ПОСТОЯННЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ

Ш.С.Агаев, В.Ч.Жуковский, О.Ф.Семенов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

А.С.Вшивцев

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

## I. Введение

В последние годы большой интерес представляет исследование влияния температурных эффектов в калибровочных теориях. Это связано с возможностью существования фазовых переходов в таких теориях и их следствий для различных аспектов адронной физики, космологии и т.д.<sup>1/</sup>. Д.А.Хиринц и А.Д.Линде использовали аналогии между сверхпроводимостью и механизмом Ингтса в калибровочных теориях указали на существование фазового перехода в область восстановленной симметрии.

Для оценки критической температуры фазовых переходов и вычисления термодинамических параметров в калибровочных теориях в ряде работ<sup>2,3,4/</sup> были разработаны теоретико-возмущениеческие методы. Так, в работе Бернарда<sup>2/</sup> выведены правила Фейнмана, позволяющие вычислить температурные функции Грина, статистические суммы и соответствующие термодинамические параметры системы. Применяя операторный метод вместе с функционально-диаграммными методами, в случае малой константы связи, Вайзберг<sup>3/</sup>, Долан и Джакин<sup>4/</sup> нашли температурный эффективный потенциал и эффективные массы бозонов. В указанных работах показано существование критической температуры  $T_{cr}$ . При температурах выше критической минимум эф-

фективного потенциала находится в нуле, т.е. происходит восстановление нарушенной симметрии.

Исследование свойств кварк-глюонной плазмы при высоких температурах и больших плотностях в квантовой хромодинамике представляет особый интерес. Существование такой плазмы предполагает нарушение конфайнмента при высоких плотностях и температурах и связано с моделью образования адронов, как конденсата кварк-глюонной плазмы. Есть основания полагать, что фазовый переход адроны - кварк-глюонная плазма существует. В работе<sup>5/</sup> приводятся доводы в пользу такого перехода. Авторы, использовав методы ренормгруппы, показали, что теория возмущения с увеличением барийонной плотности дает все более точные результаты. Это связано с асимптотической свободой теории. Кроме того, при высоких плотностях ими было найдено уравнение состояния, которое в пределе приближается к уравнению состояния идеального релятивистского кварк-глюонного газа. Дальнейшее развитие теории термодинамических свойств КХД сделано в работах Кислиндера и Морли<sup>6/</sup>, указавших на необходимость учета калибровки при конечных температурах. В общей форме было доказано отсутствие новых, по сравнению с теорией возмущений, расходимостей. Вычисление термодинамических потенциалов проводилось разными авторами. Исследуя КХД методами теории возмущений при конечных плотностях, Фридман, Маклеран<sup>7/</sup>, и Балуны<sup>8/</sup> вычислили  $\mathcal{L}$ -потенциал кварк-глюонной плазмы в четвертом порядке по константе связи  $g$ . Вычисление  $\mathcal{L}$  - потенциала при ненулевых температурах и химическом потенциале с точностью до  $O(g^3)$  проведено в работе<sup>9/</sup>.

Укажем, что основные черты теории присутствуют как в случае модели калибровочной теории группы  $SU(2)$ , так и в  $SU(3)$ . В последнем случае происходит лишь некоторое математическое усложнение, обусловленное более высоким рангом группы<sup>10/</sup>. Учитывая изложенное, мы ограничимся рассмотрением модели плазмы в калибровочной теории с группой  $SU(2)$ . В настоящей работе в однопараметровом приближении вычислен  $\mathcal{L}$  - потенциал кварк-антикварковой плазмы во внешнем цветном магнитном поле, заданном потенциалами с разной изотопической ориентацией. Мы не будем рассматривать влияния флюктуаций "глюонного" поля, а ограничимся рассмотрением кваркового сектора. Это определяется тем, что рассматриваемое поле должно создаваться постоянным внешним током, причем, в

силу нелинейности теории, флуктуации гравитационного поля будут сопровождаться изменениями этого тока. В результате приходится решать нелинейную задачу с двумя взаимодействующими полями, что оказывается затруднительным. В некоторых работах<sup>11, 12</sup> авторы, исследуя проблему стабильности состояний с такими полевыми конфигурациями, оставляют без внимания это обстоятельство. Полученные результаты содержат явную зависимость от калибровки и способа поддержания постоянства внешнего тока и как следствие не являются точными.

## 2. Общие формулы

Выше отмечалось, что при вычислении термодинамических потенциалов кварк-гравитационной плазмы используются различные подходы. Мы положим в основу вычислений метод, основанный на использовании техники функционального интегрирования, дополненный методом собственного времени Шингера<sup>13</sup>. Такой подход при рассмотрении влияния температуры в КЭД был применён Дитриком в работе<sup>14</sup>.

Мы рассмотрим плазму для трех различных типов массивных частиц, характеризующихся следующими значениями спина и изоспина:  $S = 0$ ,  $T = 1/2$ ;  $S = 0$ ,  $T = 1$ ;  $S = 1/2$ ,  $T = 1/2$ . Химический потенциал каждой системы будем полагать равным нулю. Другими словами, числа частиц и античастиц равны, а наша система является цветоднейтральной.

Как известно, большая статистическая сумма квантованных полей представляет собой амплитуду вероятности перехода "вакуум-вакуум" евклидовой квантовой теории поля:

$$\mathcal{Z} = \exp(-\beta \mathcal{S}) = \exp(-S_\beta), \quad 11$$

здесь  $S_\beta$  - эффективное /принтегрированное по всем квантовым/ флуктуациям/ евклидово действие частиц во внешнем классическом поле. На квантовые флуктуации наложено условие периодичности по четвертой координате /"минимуму времени"/, что обозначается индексом  $\beta$ . Период указанных флуктуаций связан с обратной температурой следующим образом  $\beta = 1/T$ . Плотность  $\mathcal{S}$  - потенциала или при  $M = 0$  плотность свободной энергии равна

$$\mathcal{F} = \mathcal{S}/V = -S_\beta/\beta V, \quad 12$$

то есть это евклидова лагранжиева плотность со знаком минус. Плотность свободной энергии в однопетлевом приближении можно записать в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{F}^{(1)} \quad /3/$$

где  $\mathcal{F}^{(0)} = H^2/2$ ,  $\mathcal{F}^{(1)} = -\omega_p^{(0)}/\beta V$ . В однопетлевом приближении  $\mathcal{R}$  - потенциал плазмы определяется в виде функционального интеграла по материальным полям частиц  $\varphi$  и  $\varphi^*$ :

$$\beta \mathcal{R}^{(1)} = -\ln \left[ \int [d\varphi^*] [d\varphi] \exp(-S_E) \right] \quad /4/$$

В этом выражении  $S_E$  - евклидово действие для соответствующего типа частиц

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \varphi^* G_{s,\tau}^{-1}(p) \varphi, \quad /5/$$

$G_{s,\tau}(p)$  - выражение в которые входит пропагатор частицы или квадрированный пропагатор, причем указанные функции содержат зависимость от спина, изоспина и внешнего неабелева поля. Вычисляя гауссов интеграл (4) для  $\mathcal{R}^{(1)}$  получим следующее выражение:

$$\beta \mathcal{R}^{(1)} = \ln \det G_{s,\tau}^{-1}(p). \quad /6/$$

В формулах (5) и (6) в соответствии с  $1/2, 14/ \rho_4 = \omega_n 2\pi/\beta$ , где  $\omega_n = \kappa$ , при  $S = 0$ ; и  $\omega_n = \kappa + 1/2$ , при  $S = 1/2$ ,  $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  / - минимая энергия, а интегрирование по ней переходит в суммирование следующим образом:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{enS} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad /7/$$

Вычисляя (6) методом Швингера с учетом соотношения

$$\ln \det G_{s,T}^{-1}(p) = \text{Tr} \ln G_{s,T}^{-1}(p)$$

вместо (6) получим

$$\mathcal{F}^{(4)} V \beta = V \text{Tr} \ln G_{s,T}^{-1}(p) =$$

$$= -\frac{V}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2ns} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[ \int \frac{ds}{s} \exp \left\{ -s G_{s,T}^{-1}(p) \right\} \right] \quad / 8 /$$

В (8)  $\text{Tr}^c$  означает суммирование по цветовым индексам и интегрирование по  $p$ ,  $\text{Tr}^{-1}$  - только суммирование по спиновым и цветовым индексам. Для  $G_{s,T}^{-1}(p)$  во внешнем поле имеет место следующие явные выражения:

$$S = 0, T = I/2$$

$$G_{0,1/2}^{-1}(p) = (p_\mu - \frac{1}{2} g \tau^a A_{a\mu})^2 + m^2,$$

$$S = 0, T = I \quad / 9 /$$

$$G_{0,1}^{-1}(p) = p^2 + m^2 - 2i \epsilon_{abc} p_\mu A_a^{\mu\nu} g - \epsilon_{abc} \epsilon_{def} A_e^{\mu} A_{df} g^2/4,$$

$$S = I/2, T = I/2$$

$$G_{1/2,1/2}^{-1}(p) = p^2 + m^2 - 2 p_\mu A_a^{\mu\nu} g + A_a^{\mu} A_{a\mu} g^2/4 + 3 \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\nu\nu} g^2/2,$$

где  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tau_a \tau_a^{\mu\nu}$ ,  $a, b, c, k, l = 1, 2, 3$ ,  $\tau_a$  - матрицы Цапли,  $g$  - затравочная постоянная взаимодействия,  $A_a^{\mu}$  - потенциалы внешнего поля.

### 3. Переформированные лагранжианы при нуле температуры

Зададим конкретный вид внешнего поля воспользовавшись классификацией полей, основанной на использовании собственных значений матрицы  $Y_{ab} = -A_a^{\mu} A_b^{\mu}$ . Постоянное и однородное хромомагнитное поле  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\nu\nu} = g \mathcal{J}^2 = H$  зададим неабелевыми постоянными

потенциалами:

$\Lambda_1^{\mu} = (0, \sqrt{\lambda}, 0, 0)$  ;  $\Lambda_2^{\mu} = (0, 0, \sqrt{\lambda}, 0)$  ;  $\Lambda_3^{\mu} = (0, 0, 0, 0)$  / 10 /  
где  $\lambda$  - собственные значения матрицы  $Y_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu}$ . В ре-  
зультате преобразований из (8) получим выражения для  $\mathcal{F}_{s,T}^{(u)}(H, T)$ :

$$\mathcal{F}_{s,T}^{(u)}(H, T) = -2 \int_{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s(p_1^2 + m^2 + gH/2)} \operatorname{ch} s \sqrt{gH(p_1^2 + p_2^2)} \Theta_3\left(\frac{4\pi s}{\beta^2}\right) / \text{II a} /$$

$$\mathcal{F}_{s,T}^{(u)}(H, T) = -\frac{1}{2} \int_{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s(p_1^2 + m^2 + gH)} \left\{ 1 + 2 e^{-s gH/2} \operatorname{ch} s \sqrt{(gH/2)^2 + 4gH(p_1^2 + p_2^2)} \right\} \Theta_3\left(\frac{4\pi s}{\beta^2}\right) / \text{II b} /$$

$$\mathcal{F}_{s,T}^{(u)}(H, T) = -8 \int_{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-s(p_1^2 + m^2 + gH/2)} \cdot \operatorname{ch} s \sqrt{(gH/2)^2 + gH(p_1^2 + p_2^2)} \Theta_2\left(\frac{4\pi s}{\beta^2}\right) / \text{II b} /$$

Здесь  $\Theta_2(x)$  и  $\Theta_3(x)$  - тета-функции Якоби, определяемые со-  
отношениями

$$\Theta_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x(n+1/2)^2}, \quad \Theta_3(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i x n^2}$$

Далее в выражениях (II a, b, в) выделим в  $\mathcal{F}_{s,T}^{(u)}(H, T)$  части, яв-  
но не связанные с температурой, используя соотношения для функций  
Якоби:

$$\Theta_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2/x} \right\}, \quad / \text{II} /$$

$$\Theta_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta_3(1/x).$$

Обозначив в (II а, б, в) слагаемые с  $n = 0$  /не содержащие температуру/ через  $\mathcal{F}_{s,T}^{(0)}(H)$ , а температурную часть через  $\Delta\mathcal{F}_{s,T}^{(n)}(H, T)$ , найдем

$$\mathcal{F}_{s,T}^{(n)}(H, T) = \mathcal{F}_{s,T}^{(0)}(H) + \Delta\mathcal{F}_{s,T}^{(n)}(H, T). \quad / 13 /$$

Заметим также, что  $\mathcal{F}_{s,T}^{(n)}(H)$  с точностью до знака совпадает с одноплетевой поправкой к эффективному лагранжиану для соответствующего типа частиц во внешнем поле. Учитывая сказанное и проводя интегрирование по  $d^3 p$ , для одноплетевых поправок получим следующие выражения:

$$-\mathcal{F}_{0,1/2}^{(n)}(H) = \mathcal{L}_{0,1/2}^{(n)}(H) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left\{ e^{-sgH/2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{sgH\pi}} e^{-sgH/4} \Phi\left(\frac{\sqrt{sgH}}{2}\right) \right\}, \quad / 14 \text{ а} /$$

$$-\mathcal{F}_q^{(n)}(H) = \mathcal{L}_{q,1}^{(n)}(H) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left\{ 2e^{-sgH/2} + e^{-sgH} - 3 + \sqrt{sgH\pi} e^{-sgH/4} \left[ \Phi\left(\frac{\sqrt{sgH}}{4}\right) + \Phi\left(\frac{3\sqrt{sgH}}{4}\right) \right] \right\}, \quad / 14 \text{ б} /$$

$$-\mathcal{F}_{1/2,1/2}^{(n)}(H) = \mathcal{L}_{1/2,1/2}^{(n)}(H) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} e^{-sgH/2} \left\{ \text{ch} \frac{sgH}{2} + e^{-sgH/2} \frac{1}{4} \sqrt{sgH\pi} \Phi\left(\sqrt{sgH}\right) - 1 \right\}, \quad / 14 \text{ в} /$$

в выражениях (14 а, б, в) мы имеем аддитивные постоянные, необходимые для того, чтобы одноплетовая поправка  $\mathcal{L}_{s,T}^{(n)}(H)$  обращалась в нуль при выключении внешнего поля. Функция  $\Phi(x)$  в (14 а, б, в) - интеграл вероятности. Используя технику перенормировок, получим следующие перенормированные выражения для эффективных лагранжианов:

$$\mathcal{L}_{0,1/2}^{(n)}(H) = -\frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left\{ \frac{-sgH}{4} \Phi\left(\frac{\sqrt{sgH}}{2}\right) + e^{-sgH/2} - 1 + \frac{(sgH)^2}{24} \right\}, \quad / 15 \text{ а} /$$

$$\mathcal{L}_{g_e}^{\text{eff}}(H) = -\frac{1}{2} H^2 + \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left\{ 2e^{-sgh} + e^{-2sgh} + \right. \\ \left. + \sqrt{\pi sgh} e^{-\frac{1}{4} sgh} \left[ \Phi\left(\frac{\sqrt{5sgh}}{4}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{3sgh}}{4}\right) \right] - 3 + \frac{(sgh)^3}{3} \right\}, \quad / 15 \text{ б} /$$

$$\mathcal{L}_{1/2, 1/2}^{\text{eff}}(H) = -\frac{1}{2} H^2 + \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left\{ e^{-sgh/2} \operatorname{ch} \frac{sgh}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sqrt{\pi sgh} \Phi\left(\frac{\sqrt{5sgh}}{2}\right) - 1 + \frac{(sgh)^2}{24} \right\}, \quad / 15 \text{ в} /$$

Здесь логарифмически расходящиеся члены включены в перенормировку заряда. Обозначив неперенормированные величины индексом нуль, для перенормированного заряда и напряженности в (15) получим

$$H^2 = H_0^2 (1 + g_0^2 C_{s,T}), \quad g^2 = g_0^2 / (1 + g_0^2 C_{s,T}), \quad / 16 /$$

где

$$C_{s,T} = \frac{d_{s,T}}{96\pi^2} \int_{1/\mu^2}^\infty \frac{ds}{s} e^{-sm^2} = -\frac{d_{s,T}}{96\pi^2} \ln \frac{m}{\mu},$$

$$d_{s,T} = \begin{cases} 1 \text{ при } S = 0, T = 1/2, \\ 2 \text{ при } S = 0, T = 1, \\ 4 \text{ при } S = 1/2, T = 1/2. \end{cases} \quad / 17 /$$

В предельном случае слабого поля первый отличный от нуля член разложения эффективного лагранжиана (15 а, б, в) пропорционален величине  $(H/H_C)^3$ , где  $H_C = m^2/g$  и  $H/H_C \ll 1$ , что отличается от случая электродинамики /лагранжиана Гейзенберга - Эйлера/. Общее выражение для эффективного лагранжиана в случае слабого поля таково:

$$\mathcal{L}_{s,\tau}^{(1)} = \frac{m^4}{\pi^2} \left\{ \frac{\beta_{s,\tau}}{960} \left(\frac{H}{H_c}\right)^3 - \frac{\gamma_{s,\tau}}{112} \left(\frac{H}{H_c}\right)^4 \right\}, \quad / 18 /$$

где

	$\beta_{s,\tau}$	$\gamma_{s,\tau}$
$S = 0, \quad T = 1/2$	1	13/960
$S = 0, \quad T = 1$	2	303/40
$S = 1/2, \quad T = 1/2$	32	1

В противоположном случае сильного внешнего поля  $(H/H_c) \gg 1$  для однопетлевой поправки к лагранжиану получим выражение

$$\mathcal{L}_{s,\tau}^{(1)} = \delta_{s,\tau} \frac{(gH)^2}{182\pi^2} \ln \left( \frac{H_c}{H} \right), \quad / 19 /$$

где

	$\delta_{s,\tau}$
$S = 0, \quad T = 1/2$	1
$S = 0, \quad T = 1$	2
$S = 1/2, \quad T = 1/2$	8

Легко видеть, что в случае сильного внешнего поля эффективный лагранжиан имеет поведение, аналогично тому, как ведёт себя эффективный лагранжиан Гайзенберга - Эйлера в КЭД.

#### 4. Термодинамический потенциал кварк-антикварковой плазмы

Для получения полного выражения  $\mathcal{F}_{s,\tau}^{(1)}(H, T)$  вычислим температурную часть  $\Delta \mathcal{F}_{s,\tau}^{(1)}(H, T)$ . Прократегрировав (II а, б, в) по  $d^3p$  и  $dS$ , получим точные выражения:

$$\Delta \mathcal{F}_{0,1/2}^{(1)}(H, T) = - \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2} \left\{ \left( m^2 + \frac{gH}{2} \right) K_2 \left( \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + \frac{gH}{2}} \right) - \right.$$

$$\left. - 2 \left( m^2 + \frac{gH}{4} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{-n(gH/4)}{2T\sqrt{m^2 + gH/4}} \right)^k \frac{K_{k-2} \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + \frac{gH}{4}}}{(2k-1)(k-1)!} \right\}, \quad / 20 а /$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{F}_{0,1}^{(1)}(H, T) = & -\frac{T^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2} \left\{ (m^2 + gH) K_2^n \left( \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + gH} \right) + \right. \\
 & + \frac{m^2 + gH}{2} K_2^n \left( \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + 2gH} \right) \quad + \quad / 20 \text{ a} / \\
 & \left. + (m^2 + \frac{7}{16} gH) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{5^{2k-1} 3^{2k-1}}{4^{2k-1}} \frac{(n gH)^k}{(2T \sqrt{m^2 + 9gH/16})^k} \right\} \\
 & \times \frac{K_{k-2} \left( \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + \frac{9}{16} gH} \right)}{(2k-1)(k-1)!},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{F}_{1/2,1/2}^{(1)}(H, T) = & -\frac{T^2}{\sigma^2} 8m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left\{ K_2^n \left( \frac{nm}{T} \right) + \right. \\
 & + \left( 1 + \frac{gH}{m^2} \right) K_2^n \left( \frac{n}{T} \sqrt{m^2 + gH} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(n gH)^k}{(2mT)^k} \frac{K_{k-2} \left( \frac{nm}{T} \right)}{(2k-1)(k-1)!} \left. \right\}. \quad / 20 \text{ b} /
 \end{aligned}$$

В предельном случае высокой температуры и слабого поля, т.е. при условии

$$gH \ll m^2 \ll T^2, \quad / 21 /$$

из выражений (20 а, б, в) найдем  $\Delta \tilde{F}_{s,T}^{(1)}(H, T)$ :

$$\Delta \tilde{F}_{s,T}^{(1)}(H, T) = -\lambda_{s,T} \frac{g^2}{90} T^4 + \mu_{s,T} m^2 T^2 + \gamma(T). \quad / 22 /$$

Первое слагаемое в (22) соответствует закону Стефана - Болыцмана,  $\gamma(T)$  - остаточный член линейно зависящий от температуры;

$\mu_{s,T} = C T m^3$  / С - некоторая числовая константа/; для  $\lambda_{s,T}$  имеем

$$S = 0, \quad T = 1/2 \quad \lambda_{s,T} \quad \mu_{s,T} \quad / 23 /$$

$$S = 0, T = 1$$

$$3$$

$$1/8$$

$$S = 1/2, T = 1/2$$

$$14$$

$$1/3$$

В предельном случае низких температур и сильных полей

$$\sqrt{m^2 + gH} / T \gg 1$$

$$/ 24 /$$

аргумент функций Макдональда в (20 а, б, в) значительно больше единицы при любых  $\nu$ . Используя соответствующую асимптотику функций Макдональда и ограничившись в (20) лишь первым слагаемым, получим следующие выражения:

$$\Delta \tilde{F}_{0,1/2}^{(1)}(H, T) = -\frac{\sqrt{2} T^{5/2}}{g^{3/2}} (m^2 + \frac{gH}{2})^{3/4} e^{-\sqrt{m^2 + gH} / T} -$$

$$/ 25 \text{ a} /$$

$$- \frac{T^2 gH}{4\pi} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{gH}} e^{-\sqrt{m^2 + gH} / T}$$

$$\Delta \tilde{F}_{0,1}^{(1)}(H, T) = -\frac{\sqrt{2} T^{5/2}}{g^{3/2}} (m^2 + gH)^{3/4} e^{-\sqrt{m^2 + gH} / T} + \frac{1}{2} (m^2 + gH)^{3/4} e^{\sqrt{m^2 + gH} / T} +$$

$$/ 25 \text{ б} /$$

$$+ \left\{ \frac{\pi gH}{2T} (m^2 + \frac{7}{16} gH) e^{-\sqrt{m^2 + 7gH/16} / T} \right\},$$

$$\Delta \tilde{F}_{1/2,1/2}^{(1)}(H, T) = -\frac{2\sqrt{2} T^{5/2}}{g^{3/2}} \left\{ (m^{3/4} + \frac{m}{2} \sqrt{\frac{gH}{2T}}) e^{-m/T} + \right.$$

$$/ 25 \text{ в} /$$

$$+ (m^2 + gH)^{3/4} e^{-\sqrt{m^2 + gH} / T} \}$$

Заметим, что в выражениях (25 а, б, в) степенная температурная функция имеет экспоненциальный множитель, который соответствует энергетическому порогу образования пар  $E \geq 2\sqrt{gH}$  в сильных внешних полях  $H \gg m^2/g$ . В выражении для  $\Delta \tilde{F}_{1/2,1/2}^{(1)}(H, T)$  отсутствует линейная по  $gH$  поправка при члене пропорциональном линейной степени температуры. В случае КЭД, как следует из работы Дитриха<sup>14/</sup>, такая поправка существует.

### Литература.

1. Д.А.Кирхнит. Письма НЭТФ, 15, 745, (1972) ,  
D.Kirzhnits and A.Linde. Phys.Lett., 42B, 471 (1972).
2. C.Bernard. Phys.Rev., D9, 3312 (1974).
3. S.Weinberg. Phys.Rev., D9, 3357 (1974).
4. L.Dolan and R.Jackiw. Phys.Rev., D9, 3320 (1974).
5. J.Collins and M.Perry. Phys.Rev.Lett., 34, 135 (1975).
6. M.Kisslinger and P.Morley. Phys.Rev., D13, 2765, 2771 (1976).
7. B.Freedman and L.McLerran. Phys.Rev., D16, 1169 (1977).
8. V.Baluni. Phys.Rev., D17, 2092 (1978).
9. J.Kapusta. Nucl.Phys., B148, 461 (1979).
10. H.Flyvbjerg. Nucl.Phys., B176, 379 (1980).
11. H.Leutwyler. Nucl.Phys., B179, 129 (1981).
12. R.Anishetty. Phys.Lett., 108B, 295 (1982).
13. J.Schwinger. Phys.Rev., 82, 664 (1951).
14. W.Dittrich. Phys.Rev., D19, 2383 (1979).

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ КАРТИНА ВАКУУМНЫХ ЭФФЕКТОВ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

В.Ч.Жуковский, И.Б.Морозов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

## I. Введение

Можно считать хорошо установленным к настоящему времени, что вакуумное состояние в ККД  $1/1$  и в модельных калибровочных теориях с калибровочной группой  $SU(2)^{2,3}$  имеет нетривиальную структуру. По-видимому, в ближайшем будущем мы не будем иметь возможность провести достаточно полное исследование его в рамках точных квантовых методов. В связи с этим предпринимаются попытки изучения вакуумных эффектов в квантовой теории поля, в частности, в электродинамике (В.С.Попов, М.С.Маринов  $4,5/$ ) и в неабелевой теории с калибровочной группой  $SU(2)^{6/}$  квазиклассическими методами. Предлагаемая работа представляет собой развитие работы  $6/$  с иной точки зрения.

В работе  $6/$  использовался метод "минимого времени", до того успешно применяющийся в электродинамике  $4,5/$ . Преимуществом этого метода является его простота и наглядность, в то же время ему недостаёт явной релятивистской ковариантности. Кроме того, этот метод оперирует с классическим действием, тогда как поляризация вакуума обусловлена квантовыми поправками, т.е. эффективным действием  $8/$ , связь между которыми не вполне ясна. Далее, использо-

вавшаяся в статье <sup>1/6/</sup> аналогия изотопического спина с вектором намагниченности ферромагнетика не позволяет исследовать отличные от  $O(3)$  калибровочные группы (нетрудно видеть, что рассмотрение в работе <sup>1/6/</sup> свелось именно к группе  $O(3)$ ), таким образом, в этой статье рассмотрены только частицы с целочисленным изоспином.

Ниже будет предложен логичный квазиклассический подход к этой задаче. В разделе 2 проводится построение функционала однопетлевой поправки к действию внешнего калибровочного поля с использованием метода пятого параметра Фока <sup>1/7/</sup> (или "собственного времени" <sup>1/8/</sup>) и гамильтонова континуального интеграла <sup>1/9/</sup>. Необходимо отметить, что в отличие от, например, работы <sup>1/10/</sup>, мы не используем грассмановых переменных для описания изотопического спина. Это даёт возможность провести квазиклассическое вычисление вероятности распада вакуума в некоторых простых случаях; это сделано в разделе 3.

## 2. Однопетлевая поправка к действию и континуальный интеграл для частицы во внешнем калибровочном поле

Будем рассматривать скалярное в обычном пространстве поле  $\varphi$ , удовлетворяющее уравнению движения

$$(\hat{\Pi}^2 - m^2) \varphi = 0 ,$$

где  $\hat{\Pi}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu^\alpha \hat{T}_\alpha$  - внешнее калибровочное поле;  $\hat{T}_\alpha$  - оператор изотопического спина. Однопетлевая поправка к действию внешнего поля даётся известным выражением

$$W^{(1)} = -i T_2 \ln G , \quad (1)$$

где  $G$  - оператор, обратный к  $\hat{\Pi}^2 - m^2$ . Символ  $T_2$  здесь означает интегрирование по пространству и суммирование по дискретным цветовым индексам. Имея в виду построение квазиклассического приближения выражения (1), воспользуемся бесконечномерным приводимым представлением операторов  $\hat{T}_\alpha$ , записав (см., например, <sup>1/11/</sup>):

$$\hat{T}_\alpha = a_i^+ (\lambda_\alpha)_{ij} a_j , \quad (2)$$

где

$$[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0 , \quad [a_i^+, a_j] = \delta_{ij} , \quad (3)$$

и в качестве матриц  $(\lambda_a)_{ij}$  можно взять матричные представления генераторов рассматриваемой калибровочной группы. Заметим, что часто используется представление (2), (3), в котором коммутаторы в равенствах (3) заменяются на антикоммутаторы /10,12/. Пространство представления становится при этом конечномерным (а собственные значения операторов  $a_i$  - гравитационными переменными), поэтому построение квазицелесущего приближения при таком выборе представляется затруднительным. Другое преимущество выбора (3) состоит в том, что представление (2) при этом отбрасывает все неприводимые представления алгебры генераторов калибровочной группы при фиксированных  $(\lambda_a)_{ij}$ , отвечающих фундаментальному представлению /11/.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением калибровочной группы  $SU(2)$ , положив в формуле (2)  $i,j=1,2$  и  $\lambda_a = \sigma_a/2$ , где  $\sigma_a$  - матрицы Паули,  $a=1,2,3$ . Стандартным методом /11/ можно построить гильбертово пространство представления операторов (2) с базисными векторами

$$|j, m\rangle = \frac{(a_1^+)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}, \frac{(a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle, \quad (4)$$

где вакуумный вектор  $|0\rangle$  определяется посредством соотношений  $a_i|0\rangle = 0$ ,  $i=1,2$ . Величина  $j$  в выражении (4) представляет собой собственное значение оператора

$$\hat{j} = \frac{1}{2} (\hat{N}_1 + \hat{N}_2) \equiv \frac{1}{2} a_i^+ a_i$$

$m$  - собственное значение оператора

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2} (\hat{N}_1 - \hat{N}_2) \equiv \frac{1}{2} (a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2)$$

В силу соотношения

$$(\hat{T}_a)^2 = \hat{j}(\hat{j}+1)$$

$j$  представляет собой величину изоспина, а  $m$  - значение его проекции на третье изотопическое направление.

Для построения континуального интеграла нам понадобится базис когерентных состояний, определяемых условиями

$$a_i |\alpha_1 \alpha_2\rangle = \alpha_i |\alpha_1 \alpha_2\rangle,$$

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 | a_i^+ = \langle \alpha_1 \alpha_2 | a_i^*, \quad i=1,2.$$

Они могут быть выражены через вакуумное состояние:

$$|\alpha_1 \alpha_2\rangle = e^{\alpha_1^+ \alpha_2^+} |0\rangle,$$

нормировка и соотношение полноты для них имеют вид

$$\langle \alpha_1' \alpha_2' | \alpha_1 \alpha_2 \rangle = e^{\alpha_1' \alpha_2'},$$

$$\int d\alpha_1 d\alpha_1^* d\alpha_2 d\alpha_2^* e^{-\alpha_1^* \alpha_1} |\alpha_1 \alpha_2\rangle \langle \alpha_1 \alpha_2| = \hat{I}. \quad (5)$$

Полученный базис когерентных состояний в пространстве представления группы  $SU(2)$  мы используем при вычислении следа в выражении (1):

$$W^{(1)} = i \sum_{m=-3}^3 \frac{1}{(j+m)!(j-m)!} \int_C d^4x \int_S \int d\alpha_1^* d\alpha_2^* d\alpha_1^* d\alpha_2^* \times \\ \times d\alpha_2^* d\alpha_2^* d\alpha_2^* d\alpha_2^* (\alpha_1^* \alpha_2^*)^{j+m} (\alpha_1^* \alpha_2^*)^{j-m} \times \\ \times e^{-\alpha_1^* \alpha_1^* - \alpha_2^* \alpha_2^*} \langle x \alpha_1^* | e^{is(\hat{H}^2 - m^2)} | x \alpha_2^* \rangle, \quad (6)$$

где применено интегральное представление для  $\ln G^{1/8}$ :

$$\ln G = - \int_C \frac{ds}{S} e^{is(\hat{H}^2 - m^2)}. \quad (7)$$

Контур  $C$  интегрирования по  $S$  начинается в точке  $S=0$  и лежит полностью в четвёртом квадранте. Величина (7) определена (с точностью до перенормировки), строго говоря, только на тех состояниях  $|\Phi\rangle$ , для которых

$$\langle \Phi | (\hat{H}^2 - m^2) | \Phi \rangle \leq 0 \quad (8)$$

(нас интересуют только диагональные матричные элементы оператора (7)). Для теории поля в пространстве Минковского неравенство (8) удовлетворяется соответствующим выбором правила обхода особенностей в комплексной плоскости  $P^0$ . Мы автоматически учтём это обстоятельство, если с самого начала совершим в выражении (6) вибровский поворот  $P_0 \rightarrow iP_4$ ,  $x_0 \rightarrow -ix_4$ ,  $A_0^a \rightarrow iA_4^a$ . Тогда, при условии самосопряжённости операторов  $P_4$ ,  $x_4$ ,  $A_4^a$  оператор  $(\hat{H}^2 - m^2)$  будет отрицательно определён в смысле неравенства (8), что позволит осуществить поворот контура интегрирования по  $S$  в правой части соотношения (6).

Амплитуду перехода  $\langle x \alpha_1^* | e^{-is\hat{H}} | x \alpha_2^* \rangle$  ( $\hat{H} = m^2 - \hat{H}^2$ ), входя-

шую в (6), можно представить в виде континуального интеграла в фазовом пространстве системы

$$\langle x' \alpha' | e^{-iS\hat{H}} | x'' \alpha'' \rangle = \int [d^4 p] [d^4 x] [dd_1] [dd_1^*] [dd_2] [dd_2^*] e^{i \int} \quad (9)$$

с граничными условиями (см. /9/):

$$x_p(0) = x_p'', x_p(s) = x_p', \alpha_i(0) = \alpha_i'', \alpha_i^*(s) = \alpha_i'^*.$$

Для определения вида функционала  $\int$  в выражении (9) применим стандартную процедуру /13,14/, т.е. разобьём отрезок  $[0, s]$  на  $N$  ( $N \rightarrow \infty$ ) частей и воспользуемся разложением единичного оператора (см. (5)). Амплитуда в левой части соотношения (9) примет вид

$$\langle x' \alpha' | e^{-iS\hat{H}} | x'' \alpha'' \rangle = \int \prod_{k=1}^{N-1} (dx^{(k)} \prod_{i=1}^2 dd_i^{(k)} dd_i^{*(k)}) \prod_{k=1}^N e^{-d_i^{(k)} \alpha_i^{(k)}} x$$

$$\times \langle x^{(k)} \alpha^{(k)} | (1 - i \frac{s}{N} \hat{H}) | x^{(k-1)} \alpha^{(k-1)} \rangle, \quad (10)$$

где положено

$$x_p^{(0)} = x_p'', x_p^{(N)} = x_p', \alpha_i^{(0)} = \alpha_i'', \alpha_i^{*(N)} = \alpha_i'^*.$$

Окончательное выражение для конечно-разностной аппроксимации континуального интеграла (9) получится, если мы вставим в матричный элемент, входящий в правую часть соотношения (10), единичный оператор

$$\hat{I} = \int d^4 p \left( \prod_{i=1}^2 dd_i^{(k-1/2)} dd_i^{*(k-1/2)} \right) e^{-d_i^{(k-1/2)} \alpha_i^{(k-1/2)}} x$$

$$\times | p^{(k)} \alpha^{(k-1/2)} \rangle \langle p^{(k)} \alpha^{(k-1/2)} |. \quad (II)$$

Верхний индекс у  $\alpha_i^{(k-1/2)}$  имеет символический характер и означает, что функция  $\alpha_i(t)$  берётся в точке, лежащей между точками  $\tau^{(k-1)}$  и  $\tau^{(k)}$ . Таким образом, число точек разбиения аргумента функций  $\alpha_i(t)$  и  $d_i^*(t)$  вдвое больше, чем для функций  $p_p(t)$  и  $x_p(t)$ .

Как известно /15/, значение гамильтонова континуального интеграла зависит от способа его конечно-разностной аппроксимации, поэтому вид функционала классического действия  $\int$  в выражении (9)

будет определяться местом, в которое мы вставим оператор (II), а также и выбором разложений единичных операторов (5) и (II). В выражение (10) входит матричный элемент оператора  $\hat{\Pi}^2 \equiv \hat{\Pi}_\mu \hat{\Pi}_\nu^*$ , который содержит некоммутирующие операторы  $a^+$ ,  $a$  в четвёртой степени. Поэтому, аналогично тому, как это сделано в работе /10/, в этом слагаемом вставим единичный оператор (II) между операторами  $\hat{\Pi}_\mu$ . Для остальных слагаемых этот вопрос несущественен. Предложенный способ аппроксимации позволяет избежать появления калибровочно-неинвариантных членов в действии /10/.

Функционал действия  $S$  в калибровке  $\partial_\mu A^\mu = 0$  принимает окончательный вид:

$$S = \int_0^s d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - i d_i^* d_i - \mathcal{H}) , \quad (12)$$

где  $\mathcal{H} = m^2 - (p_\mu - e A_\mu^\alpha (\lambda_a)_{ij} d_i^* d_j)^2$ , а конечно-разностная аппроксимация подынтегрального выражения определена согласно правилам:

$$\begin{aligned} p_\mu \dot{x}^\mu d\tau &\rightarrow p_\mu^{(k)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}) , \\ -i d_i^* d_i d\tau &\rightarrow -i d_i^{*(k)} (d_i^{(k)} - d_i^{(k-1/2)}) - \\ &\quad -i d_i^{*(k-1/2)} (d_i^{(k-1/2)} - d_i^{(k-1)}) , \\ -\mathcal{H} d\tau &\rightarrow (\tau^{(k)} - \tau^{(k-1)}) \left[ -m^2 + \left( p_\mu^{(k)} - e A_\mu^\alpha (x^{(k)}) \right) \right. \\ &\quad \times (\lambda_a)_{ij} d_i^{*(k)} d_j^{(k-1/2)} \left. \right) x \\ &\quad \times \left( p_\mu^{(k)} - e A_\mu^\alpha (x^{(k-1)}) (\lambda_a)_{\alpha\beta} d_n^{*(k-1/2)} d_\beta^{(k-1)} \right) . \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. Проблемы построения квазиклассического приближения

Задача построения последовательного квазиклассического приближения для одноплетевой вакуумной поправки к действию неабелева калибровочного поля до настоящего времени не решена. Основные трудности сводятся к тому, что групповое пространство калибровочной группы обладает нетривиальной топологией. Если в декартовом пространстве координаты  $x^\mu$  изменяются в неограниченных пределах, то групповое (цветовое, изотопическое) пространство замкнуто, не имеет границ и, следовательно, допускает множество различных экстремальных траекторий, связывающих две точки. При этом дей-

ствие зависит не только от начального и конечного положений, но и от числа обходов частицей замкнутой траектории в групповом пространстве. Не до конца ясными являются также вопрос о переходе от переменных  $\alpha_i, \alpha_i''$  к динамическим переменным частицы с калибровочными степенями свободы на классических траекториях, т.е., например, к вектору изоспина  $T_a$ , и связанная с этим проблема корректного вычисления следа по калибровочным переменным в квазиклассическом приближении.

В то же время развитый ранее <sup>16/</sup> квазиклассический подход, в основе которого лежит метод мнимого времени В.С.Попова, позволяет получать разумные оценочные результаты для вероятности распада вакуума в неабелевом поле и точные квантовые результаты в постоянном калибровочном поле абелева типа (см. ниже). Хотя метод мнимого времени и не является достаточно обоснованным, в особенности в применении к неабелевым калибровочным полям, полученные с его помощью результаты, такие как известные инстанционные решения, позволяют надеяться на возможность успешного построения последовательного квазиклассического приближения в теории неабелевых калибровочных полей.

Приведём теперь некоторые общие соображения относительно квазиклассического предела соотношений, полученных в предыдущем разделе, и рассмотрим два конкретных примера, изучавшихся ранее в методе мнимого времени в работе <sup>16/</sup>. Полученное выше представление амплитуды перехода в виде континуального интеграла (9) может быть кратко переписано в виде

$$\langle q'' | e^{-iS^H} | q' \rangle = \int [dp][dq] e^{iS} . \quad (14)$$

Здесь  $q'$  и  $q''$  - начальное и конечное значения координат точки в "суперпространстве", объединяющем координаты обычного координатного пространства Минковского  $\chi^a$  и некоего "калибровочного" пространства  $\xi^a$ :  $q = (\chi^a, \xi^a)$ ;  $S = S(q', q'')$  - действие "частицы", движущейся за "время"  $s$  от  $q'$  до  $q''$ ;  $p = (p_a, \pi_a)$  - импульс, сопряжённый координате  $q$ . Формально квазиклассический предел правой части (14) можно записать, согласно <sup>16/</sup>, как

$$\int [dp][dq] e^{iS} = \sum_m C_m(q', q'', s) e^{iS_m} , \quad (15)$$

где суммирование ведётся по всем классическим траекториям между

$q'$  и  $q''$  за "время"  $s$ ,  $S_m$  - действие на  $m$ -ой траектории,  $C_m$  - предэкспонента, значение которой, вообще говоря, не известно. В предположении тривиальной топологии декартова пространства  $C_m$  выражается через определитель Ван Флека (см., например, [16]):

$$C_m = \left[ (\det \partial^2 S_m / \partial q' \partial q'') / (2\pi)^f \right]^{1/2} \quad (16)$$

( $f$  - размерность пространства).

Классический аналог квантового оператора Гамильтона, полученный выше (12), перепишем в виде  $\mathcal{H} = m^2 - (p_m - eA_m^a T_a)^2$ , где  $T_a$  - классический вектор изоспина "частицы". Поскольку квадратичная форма в  $\mathcal{H}$  вблизи массовой поверхности  $(p - eAT)^2 = m^2$  является отрицательно определённой, то определение функции Лагранжа

$$L = -\mathcal{H} - p_m \dot{x}^m + \pi_a \dot{\xi}^a, \quad (17)$$

отличается от общепринятого знаком перед  $p \dot{x}$ , при этом  $\dot{x} = -\partial \mathcal{H} / \partial p$ , а действие имеет вид

$$S = - \int_0^s \mathcal{H} ds - \int_{x_0}^{x''} p_m dx^m + \int_{\xi_0}^{\xi''} \pi_a d\xi^a. \quad (18)$$

Отсюда получаем функцию Лагранжа в явном виде

$$L = -\frac{\dot{x}^2}{4} - m^2 - eAT\dot{x} + \pi \dot{\xi}. \quad (19)$$

"Время" виртуальной "частицы"  $s$  станет собственным временем частицы, если, следуя Фоку [77], минимизировать действие по  $s$ , потребовав, чтобы  $\partial S / \partial s = 0$ , т.е.  $\mathcal{H} = 0$ . При этом частица выходит на массовую поверхность и

$$m^2 - (p - eAT)^2 = 0, \quad (20)$$

т.е.  $\dot{x}^2 = 4m^2$ , и для действия получим

$$S = -m \int \sqrt{dx^2} - \int eA_m^a T_a dx^m + \int \pi_a d\xi^a, \quad (21)$$

где интервал  $\sqrt{dx^2} = 2m ds$ . Требование калибровочной инвариантности действия (21), как показано в [6], приводит к отождествлению  $\int \pi_a d\xi^a = \int T_3 d\psi$ , где  $\psi$  - азимутальный угол вектора  $\vec{T}$ .

Для однопетлевой вакуумной поправки к действию поля можно записать квазиклассическое выражение

$$W^{(1)} = \int d\pi \int d^4x \int \frac{ds}{s} C_m^1 e^{iS_m}, \quad (22)$$

где  $C'_m$  - предэкспонента, отличаящаяся от  $C_m$  на фактор, связанный с квазиклассическим переходом в вычислении следа по калиброчным степеням свободы;  $S'_m$  взято в совпадающих точках  $\varphi' = \varphi''$ .

Вычисление интеграла по  $S$  связано с обходом особенностей  $S = S_n$  подынтегрального выражения (в случае абелева постоянного электрического поля - это простые полюсы, - см. ниже). С другой стороны, решения уравнения  $\partial S / \partial S = 0$  при  $\varphi' = \varphi''$  определяют периодическое движение частицы с некоторым периодом  $\Delta S$ , имеющим, вообще говоря, как действительную, так и мнимую части. В приведенных ниже примерах моменты времени  $S = S_n = n \Delta S$  совпадают с особенностями подынтегрального выражения в (22), так что в итоге

$$W^{(1)} = \sum_m \sum_n \int d\Omega \int d^4x C_{m,n} e^{i S_{m,n}} , \quad (23)$$

где  $S_{m,n}$  - приращение действия за  $n$  периодов движения частицы на массовой поверхности (20).

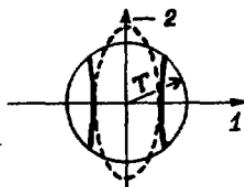
Рассмотрим теперь пример с постоянным электрическим полем неабелева типа, т.е. заданным постоянными потенциалами с различной изотопической ориентацией (неабелевы потенциалы):

$$A_M^1 = a_1 \delta_m^0, \quad A_M^2 = a_2 \delta_m^1, \quad A_M^3 = 0 . \quad (24)$$

Тогда уравнение массовой поверхности примет вид

$$\tilde{m}^2 - (\rho^0 - ea_1 T_1)^2 + (\rho^1 - ea_2 T_2)^2 = 0 , \quad (25)$$

где  $\tilde{m}^2 = m^2 + p_2^2 + p_3^2$ ,  $\rho^0 = \text{const}$ . В пространстве изоспина уравнение (25) описывает отрезки гипербол - проекций на плоскость большого круга замкнутых траекторий на поверхности сферы  $T_0^2 = \text{const} = T^2$  (в симметричном случае  $\rho^0 = \rho^1 = 0$  они изображены на рисунке).



Собственное время при  $\rho^0 = \rho^1 = 0$  равно

$$S = \frac{\alpha \beta}{2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{T_3} , \quad T_3 = \sqrt{T_3^2(0) - (T^2 - T_3^2(0))(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}) \sin^2 \psi} , \quad (26)$$

где  $\alpha = (ea_1)^{-1}$ ,  $\beta = (ea_2)^{-1}$ , а приращение действия за период собственного времени  $\Delta S$  есть

$$\Delta S = -2 \tilde{m}^2 \Delta S + \frac{\beta}{\alpha} (T^2 - T_3^2(0)) T^2 \int \frac{d\psi}{T_3 (T^2 - T_3^2)} . \quad (27)$$

Интегралы в (26), (27) определяют как действительную, так и мнимую части  $\Delta S$  и  $\Delta S'$ . Действительный период обращения по одной из замкнутых траекторий на сфере равен

$$\operatorname{Re} \Delta S = \pi / \tilde{m}^2 , \quad (28)$$

а приращение действия за период

$$\operatorname{Re} \Delta S = 2\pi \left( T - \sqrt{T^2 - T_3^2(0)} \right) \equiv \delta , \quad (29)$$

где  $T_3(0)$  — начальное значение  $T_3$  (при  $S=0$ ). Мнимая часть периода возникает из-за точек ветвления  $T_3$  при  $\sin \psi = \pm i$ . В этом случае  $P^1$  и  $T_2$  чисто мнимые, и движение в плоскости I-II изопространства происходит, согласно (25), по замкнутой эллиптической траектории (см. рисунок). Приращение мнимой части действия за период мнимого времени определяется вкладом первого члена в (27), который в квазиклассическом случае при  $\beta \gg \alpha$  логарифмически велик:

$$\operatorname{Im} \Delta S = -2\tilde{m}^2 \operatorname{Im} \Delta S \equiv \Delta \sim \ln \beta / \alpha . \quad (30)$$

Наличие мнимой части  $\operatorname{Im} \Delta S' \neq 0$  приводит к появлению ненулевой мнимой части лагранжиана поля  $\operatorname{Im} \mathcal{L} = (\operatorname{Im} W^{(1)} / \int d^4x) = 1/2 \omega$ , связанной с вероятностью распада вакуума  $\omega$ .

Многократный обход эллипса за  $n > 1$  периодов мнимого собственного времени экспоненциально подавлен  $\sim \exp(-n\Delta)$ . В то же время необходимо учитывать вклады всех возможных обходов траектории на сфере  $T_a^2 = T^2$  за  $n=1, 2, 3, \dots$  периодов действительного времени и сложить соответствующие амплитуды с соответствующими фазовыми множителями  $\exp(in\delta)$  — в этом состоит проявление нетривиальной топологии калибровочного пространства.

В абелевом случае, когда электрическое поле  $E$  задаётся потенциалом

$$A_\mu^a = -S^{a3} S_M^0 E x^3 , \quad (31)$$

получим действие

$$S = -m^2 S - \frac{e^2 E}{2} x^3 x^0 + \frac{e^2 E}{4} (x_3^2 - x_0^2) \operatorname{cth} e^2 E S + \\ + (x_1^2 + x_2^2) / 4S , \quad (32)$$

где  $e^2 = e T_3$ ,  $T_3 = \text{const}$ ,  $x^M = x^M - x^{M*}$ . Отсюда для определителя Ван

Флека имеем:

$$C_m = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \det \frac{\partial^2 S}{\partial x' \partial x''} \right]^{1/2} = \frac{e'E}{(4\pi)^2 s \sinh e'E s} \quad (33)$$

Ясно, что подынтегральное выражение в (22) имеет особенности при  $e'E s = -i\pi n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) (случай  $n=0$  исключён условием  $W^{(4)} \Big|_{E \rightarrow 0} = 0$ ). В то же время уравнение  $\partial S / \partial s = 0$ , т.е.

$$-m^2 - \frac{(e'E)^2}{4} (x^2 - t^2) \frac{1}{\sinh^2 e'E s} - \frac{1}{4s} (x^2 + y^2) = 0 \quad (34)$$

при  $x, y, z, t \rightarrow 0$  и  $s \neq 0$  имеет решения лишь при  $s = s_n = -in\pi/e'E$ , т.е. на полюсах  $C_{m,n}$ . Тогда, раскрывая особенность в (34), получим:

$$(s - s_n)^2 = -\frac{x^2 - t^2}{4m^2} \quad (35)$$

Для мнимых  $s \rightarrow s_n$  и  $\bar{z} = 0$  это равенство удовлетворяется только при мнимых  $t \rightarrow i0$ .

В мнимом собственном времени движение в электрическом поле происходит как в магнитном поле при действительных  $s$  — по замкнутым траекториям в  $\mathcal{X}$  — пространстве. Заметим, что изоспиновая степень свободы благодаря интегралу  $T_3 = \text{const}$  фактически выключена и мы можем оштати перейти в следе по изоспиновым переменным к сумме по дискретным значениям  $T_3$ , причём нас интересует вклад одного из возможных  $T_3$ .

Приращение действия за  $n$  обходов траектории равно

$$\text{Im } \Delta S_n = -m^2 s_n = -n\pi m^2 / e'E \quad (36)$$

Вычисляя интеграл по  $s$  с помощью теоремы о вычетах, получим известный результат  $/8/$ :

$$\text{Im } W^{(4)} = \frac{(e'E)^2}{16\pi^3} \int d^4x \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \exp(-n\pi \frac{m^2}{e'E}) \quad (37)$$

откуда следует значение вероятности распада вакуума  $W = 2 \text{Im } W^{(4)}$  в электрическом поле абелева типа (31). Подчеркнём, что в данном случае результат оказался точным, поскольку учтён вклад всех периодов движения в мнимом собственном времени, чего нельзя сделать ни в нестационарном электромагнитном поле  $/4/$ , ни в постоянном электрическом поле неабелева типа (24).

## Литература

1. Flyvbjerg H. Nucl.Phys., 1980, B176, 379.
2. Savvidy G.K. Phys.Lett., 1977, 71B, 133.  
Matinyan S.G., Savvidy G.K. Nucl.Phys., 1978, B134, 539.
3. Nielsen N.K., Olesen P. Nucl.Phys., 1978, B144, 376.
4. Попов В.С. КЭТФ, 1971, 61, 1334.
5. Маринов М.С., Попов В.С. ЯФ, 1972, 15, 1271.
6. Агаев Ш.С., Жуковский В.Ч., Вшивцев А.С.-Труды 5-го Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля.-Протвино: ИФВЭ, 1982, т.1, с.262-277.
7. Фок В.А. Работы по квантовой теории поля.-Л.: изд-во ЛГУ, 1957.
8. Schwinger J. Phys.Rev., 1951, 82, 664.
9. Березин Ф.А. УФН, 1980, 132, 497.
10. Борисов Н.В., Кулиш П.П. ТМФ, 1982, 51, 335.
11. Гурвиц Ф. Введение в теорию групп.- В сб.: Теория групп и элементарные частицы /под ред. Д.Иваненко -М.: Мир ,1967, с.88-91
12. Barducci A., Casalbuoni R., Lusanna L. Nuovo Cim., 1976, A35, 377; Nucl.Phys., 1977, B124, 93.
13. Tobocman W. Nuovo Cim., 1956, 2, 1213.
14. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.-М.: Наука , 1978.
15. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, 194.
16. Маринов М.С. Континуальный интеграл в квантовой теории.- В сб.: Элементарные частицы. Шестая школа физики ИТЭФ, вып.2- М.: Атомиздат , 1979,с.55-91.

## РАДИАЦИОННЫЙ СДВИГ МАССЫ ФЕРМИОНА ВО ВНЕШНЕМ ХРОМОМАГНИГНОМ ПОЛЕ

В.Ч.Жуковский, И.Б.Морозов, А.В.Борисов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

В связи с построением моделей вакуума КД большое число работ в последнее время было посвящено изучению различных радиационных процессов в неабелевых внешних полях<sup>1-4/</sup>.

В настоящей работе вычислена радиационная поправка к энергии фермиона со спином 1/2 (для краткости будем называть его кварком), движущегося во внешнем постоянном однородном хромомагнитном поле, и исследовано влияние на него нестабильности этого поля, обнаруженной в работе<sup>3/</sup>.

Рассмотрим сначала случай калибровочной группы  $SU(3)$  и зададим внешнее поле вектор-потенциалом

$$A_\mu^a = \delta^{ab} A_\mu, \quad A_\mu = B \delta_{\mu a} x_i, \quad (1)$$

что соответствует постоянному однородному хромомагнитному полю напряженности  $B$ , направленному по оси  $x^3$  обычного пространства ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) и оси  $a = 8$  цветового  $SU(3)$ -пространства ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ). Полное поле представляется, как обычно<sup>2,3/</sup>, в виде суммы классического внешнего поля  $A_\mu^a$  (1) и квантовых флуктуаций около него  $Q_\mu^a$ . Взаимодействие с внешним полем учитывается точно (представление Фарри), а с квантованным полем глюонов  $Q_\mu^a$  — по теории возмущений.

В низшем порядке теории возмущений по перенормированной кон-

станте связи  $g$  (см. ниже (9)) радиационная поправка к энергии кварка во внешнем поле записывается в виде

$$\Delta E = -ig^2 T_0^{-1} \int d^4x d^4x' \bar{\psi}_l(x') \gamma^\mu (T_a)_{\ell\ell} S_{j\mu}(x', x) \cdot (2)$$

$$\cdot \gamma^\nu (T_b^+)_{\ell\ell} \psi_\ell(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x', x).$$

Здесь  $\psi_\ell(x)$  - волновая функция кварка цвета  $\ell$  ( $\ell = 1, 2, 3$ ) ;  $T_a$  - генераторы группы  $SU(3)$  ;  $\gamma^\mu$  - матрицы Дирака;  $S$  и  $D$  - пропагаторы соответственно кварка и глюона во внешнем поле;  $T_0$  - "время взаимодействия".

Указанные пропагаторы диагональны по цветовым индексам:

$$S_{\ell\ell}(x', x) = \delta_{\ell\ell} S_{(1)}(x', x), \quad (3)$$

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x', x) = \delta^{ab} D_{\mu\nu}^{(a)}(x', x).$$

Для кварка диагональность - следствие сохранения его цвета в силу специального вида внешнего поля (1). Диагональность же глюонного пропагатора обеспечивается стандартным переходом от вещественных компонент глюонного поля  $Q_\mu^a$  к их комплексным комбинациям, соответствующим состояниям с определенным зарядом по отношению к внешнему полю  $A_\mu^a$ . Пропагаторы  $S_{(1)}$  и  $D_{\mu\nu}^{(a)}$  удовлетворяют уравнениям, совпадающим соответственно с обычными электродинамическими уравнениями для фермionов с массой  $m$  и зарядами  $e_\ell = g(T_b)_{\ell\ell} = \frac{1}{3}g$  ( $1, 1, -2$ ) и безмассовых векторных бозонов с аномальным магнитным моментом (равным 1) и зарядами  $g_a = 0$  ( $a = 1, 2, 3, 8$ ) ,  $g_a = (-1)^a \bar{g}$  ( $a = 4, 5, 6, 7$ ) .  $\bar{g} = g\sqrt{3}/2$  .

Заметим, что для глюонного пропагатора используется обобщенная фейнмановская калибровка, в которой духовые поля не дают вклада в массовый оператор в  $1/5$  изм. порядке теории возмущений.

Явный вид пропагаторов  $S_{(1)}$  и  $D_{\mu\nu}^{(a)}$  можно найти либо методом собственного времени<sup>6/</sup>, либо используя точные волновые функции кварков<sup>7/</sup>  $\psi_l(x)$  и глюонов<sup>8/</sup>  $Q_\mu^a(x)$  во внешнем поле в полной аналогии с КЭД<sup>9/</sup>.

Особый интерес представляет основное состояние кварка в хромомагнитном поле. Для радиационной поправки к энергии основного состояния находим следующее выражение:

$$\Delta E_0 = \frac{g^2 m}{(4\pi)^2} \int_0^1 du \int_0^\infty dp \exp\left(-\frac{i}{\beta} \rho u^2\right) \left\{ 2i (e^{-i\sigma} + \right. \\ \left. + u e^{2i\tau} \cdot e^{i\sigma}) \left[ \frac{1}{k} (e^{2i\tau} - 1) + (1 - e^{-2i\sigma}) \right]^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{1+u}{\rho} \right\}, \quad (4)$$

где  $\sigma = \rho(1-u)$ ,  $\tau = k\rho u$ ,  $k = 2/3$  и параметр  $\beta = gB/m^2$ . (5)

Заметим, что (4) получено в предположении, что кварк имеет заряд  $e_1 = \bar{g}/3$  (цвет  $\bar{b} = 1$ ), и, следовательно, промежуточный кварк имеет заряд  $e_3 = -2\bar{g}/3$ , а заряд глюона в силу закона сохранения равен  $\bar{g}$  (так что  $\bar{b} = 2/3$  есть отношение зарядов кварка и глюона).

Ограничиваясь приближением сравнительно слабого внешнего поля, когда  $\beta \ll 1$ , находим следующее асимптотическое выражение для сдвига энергии:

$$\Delta E_0 = \frac{g^2 m}{(4\pi)^2} \left[ -R\sqrt{\beta} - \frac{1}{2} \beta \ln \beta + i\pi\beta \right], \quad (6)$$

где  $R = \pi (2^{-1/2} - 1) \zeta(1/2) > 0$  ( $\zeta(z)$  - дзета-функция).

Отметим, что главный член в  $\Delta E_0$  имеет порядок  $(gB)^{1/2}$  и не зависит от заряда и массы кварка. Это обусловлено тем, что внешнее поле оказывается ввиду  $\beta \ll 1$  слабым для кварка, но сверхсильным для безмассового заряженного глюона. Поскольку в вещественной части  $\Delta E_0$  опущены члены порядка  $\beta$ , то мы отбросили также член нейтральных компонент глюонного поля, который, как и в КЭД<sup>7/7</sup>, линеен по  $\beta$ .

Укажем, что выражение для  $\Delta E_0$ , найденное в работе<sup>8/8</sup>, в которой рассматривалась аналогичная задача, является ошибочным: в нем отсутствует минимая часть, а также основной член порядка  $\sqrt{\beta}$ . Следующий же по малости член порядка  $\beta \ln \beta$  отличается от нашего численным множителем.

Аналогично можно рассмотреть случай фермionов с изотопическим спином 1 в теории с калибровочной группой  $SU(2)$  (присоединенное представление). Эта задача решалась в работе<sup>9/9</sup>, но не была

доведена до конца. Внешнее однородное хромомагнитное поле  $F_{\mu\nu}^a$  (теперь  $a = 1, 2, 3$ ) имеет отличные от нуля компоненты  $F_{12}^3 = -F_{21}^3 = B$ . В выбранном представлении фермионы  $\Psi^a$  и калибровочные бозоны имеют по отношению к такому полю заряды  $-g, 0, +g$ . Ограничимся случаем фермиона с зарядом  $+g$  в основном состоянии. Тогда промежуточный бозон в диаграмме низшего порядка для радиационной поправки  $\Delta E_0$  к энергии оказывается заряженным, а промежуточный фермион — нейтральным. В результате для поправки  $\Delta E_0$  получается выражение

$$\Delta E_0 = \frac{2g^2 m}{(4\pi)^2} \int_0^1 du \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \exp\left(-\frac{i}{\bar{\beta}} \rho u^2\right) \left\{ e^{-i\sigma} \times \left(1 + ue^{2i\sigma}\right) \left[u + (1-u) \frac{\sin \sigma}{\bar{\beta}} e^{-i\sigma}\right]^{-1} \right\}^{(7)} - (1+u) \right\}.$$

Здесь  $\bar{\beta} = gB/m^2$ ,  $\sigma = \rho(1-u)$ . Заметим, что в (7) исправлены две ошибки, содержащиеся в аналогичном результате работы <sup>9/</sup>.

Отметим, что подынтегральные выражения по переменной  $\rho$  в (4) и (7) имеют особенности в комплексной плоскости  $\rho$ . Используя принцип причинности <sup>6/</sup>, нетрудно показать, что их следует обходить в нижней полуплоскости:  $\operatorname{Im} \rho < 0$ .

Для слабого поля, когда  $\bar{\beta} \ll 1$ , из (7) находим выражение, аналогичное (6) :

$$\Delta E_0 = \frac{2g^2 m}{(4\pi)^2} \left[ -R\sqrt{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} \bar{\beta} \ln \bar{\beta} + i\pi \bar{\beta} \right], \quad (8)$$

где, как и в (6), опущено линейное по  $\bar{\beta}$  слагаемое в вещественной части.

Аналогичные вычисления можно провести для случая, когда фермионы принадлежат фундаментальному представлению группы  $SU(2)$ . Результат для  $\Delta E_0$  в этом случае совпадает с (8) .

Как видно из выражений (6) и (8), радиационная поправка имеет положительную минимумную часть. Это означает, что основное состояние фермиона в постоянном хромомагнитном поле неустойчиво.

Очевидно, что эта неустойчивость обусловлена нестабильностью самого поля <sup>3/</sup>.

Минимальную часть можно интерпретировать следующим образом. Она соответствует вероятности захвата фермионом калибровочного бозона из бозонной пары, рожденной нестабильным внешним полем. Вероятность рождения такой пары в единице четырехмерного объема равна по порядку величины <sup>3/</sup>  $W \sim g^2 B^2$ . Фермион в основном состояниях локализован в области пространства объемом порядка  $V \sim (1/\sqrt{gB})^2 (1/m)$ . Вероятность рождения пары в этом объеме в единицу времени  $\rho = W V \sim gB/m$ , и вероятность захвата фермионом одного из родившихся бозонов в единицу времени

$$W \sim \alpha_s \rho \sim g^2 (gB/m) \sim \text{Im } \Delta E_0,$$

где  $\alpha_s = g^2/4\pi$  — параметр теории возмущений.

Положительный знак  $\text{Im } \Delta E_0$ , отвечающий классической "раскачке" фермионного поля, соответствует поглощению рожденных внешним полем частиц (обычно  $\text{Im } \Delta E < 0$ , если идет процесс с испусканием реальных частиц).

В заключение заметим, что константа связи  $g$  является "бегущей", т.е. зависит от характерного переданного импульса  $Q$  (см., напр., <sup>10/</sup>):

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = 4\pi \left[ B \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right]^{-1}, \quad B = \frac{1}{3}(4N - 2N_f), \quad (9)$$

где  $N_f$  — число фермионных ароматов,  $N$  — размерность калибровочной группы,  $\Lambda$  — характерный размерный параметр теории. В данном случае характерная передача импульса, очевидно,  $Q \sim \sqrt{gB}$ , и параметр теории возмущений принимает вид:

$$\alpha_s = 4\pi \left[ B \ln \frac{gB}{\Lambda^2} \right]^{-1}.$$

Условие применимости полученных выше результатов ( $gB \ll m^2$ ,  $\alpha_s \ll 1$ ) выполняется поэтому для достаточно тяжелых фермионов:  $\Lambda^2 \ll gB \ll m^2$ .

### Литература

1. On the 'QCD vacuum. Symp., Copenhagen, 9 - 13 June, 1980. - *Phys. scr.*, 23, № 5/2, 1000 (1981).
2. G.K.Savvidy. *Phys. Lett.*, 71 B, 133 (1977);  
S.G.Matinyan, G.K.Savvidy. *Nucl. Phys.*, B134, 539 (1978).
3. N.K.Nielsen, P.Olesen. *Nucl. Phys.*, B144, 376 (1978).
4. H.B.Nielsen, P.Olesen. *Nucl. Phys.*, B160, 380 (1979);  
*J.Ambjørn*, P.Olesen. *Nucl. Phys.*, B170, 60 (1980).
5. E.S.Fradkin, I.V.Tyutin. *Phys. Rev.*, D2, 2841 (1970).
6. Ю.Швингер. Частичы, источники, поля. Т. 1, М., Мир, 1973;  
т. 2, М., Мир, 1976.
7. А.А.Соколов, И.М.Тернов. Релятивистский электрон. М., Наука, 1974, § 23.
8. J.Sapirstein. *Phys. Rev.*, D20, 3246 (1979).
9. G.McKeon. *Can. J. Phys.*, 57, 944 (1979).
10. Л.Б.Окунь. Лептоны и кварки. М., Наука, 1981.

# ОБ ИНФРАКРАСНОЙ АСИМПТОТИКЕ КВАНКОВОГО ПРОПАГАТОРА В СВЕТОПОДОБНОЙ КАЛИБРОВКЕ

М.П.Некрасов, В.Е.Рочев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

1. Изучение инфракрасного поведения функций Грина представляется одной из наиболее значительных проблем квантовой хромодинамики<sup>1-6, 11, 16/</sup>. Решение этой задачи, однако, наталкивается на ряд трудностей, обусловленных самодействием глюонов и неабелевой изотопической структурой взаимодействия глюонов и夸克ов. Учитывая результаты работ<sup>1, 2/</sup>, можно, по-видимому, полагать, что в инфракрасной области осуществляется сингулярная асимптотика глюонного пропагатора вида  $\mathcal{D}(k) \sim M^2/(k^2)^2$ . Однако результаты для夸克ового пропагатора, полученные с учетом такого поведения глюонного пропагатора, весьма противоречивы: исследования уравнений Шинглера-Дайсона с учетом тождеств Уорда - Славнова приводят одних авторов к регулярному решению<sup>3, 4/</sup>, других - к квазивсвободному виду夸克ового пропагатора<sup>5/</sup> или к решению с существенной особенностью<sup>6/</sup>. Сюда следует добавить исследования в квазиклассическом приближении, которые также привели к регулярному решению<sup>7/</sup>. Таким образом, вопрос об инфракрасном поведении夸克ового пропагатора еще далек от окончательного решения.

В настоящей работе инфракрасное поведение夸克ового пропагатора исследуется методом функционального интегрирования в приближении мягких бозонов. Это приближение основывается на предположении, что главный вклад в инфракрасную асимптотику фермionного пропагатора дают мягкие бозоны. Это приближение хорошо работает в квантовой электродинамике и в случае некоторых других моделей<sup>8-10/</sup>.

Вопрос об асимптотике夸克ового пропагатора в рамках этого подхода обсуждался в работе<sup>11/</sup>, в которой был получен предварительный результат о квазивсвободном поведении夸克ового пропагатора при некотором выделенном значении коэффициента в дополнительной тензорной структуре глюонного пропагатора. В настоящей работе проводится подробное исследование инфракрасного поведения夸克ового пропагатора методом мягких бозонов. Исследование проводится параллельно в четырехмерной ( $K\chi D_4$ ) и в двумерной ( $K\chi D_2$ ) хромодинамике. Обе теории рассматриваются в светоподобной аксиальной калибровке  $\eta^2 = 0$  ( $\eta$  - аксиальный вектор). Во втором пункте работы формулируется метод мягких бозонов для случая неабелевой калибровочной теории. В п.3 рассмотрена  $K\chi D_4$  в случае  $SU(2)$  -симметрии и показано, что夸克овый пропагатор в рассматриваемом приближении есть конечная при любом значении  $p^2$  функция, не имеющая особенностей динамического происхождения. Этот результат получен при любом значении введенного пара-

метра  $b$  при дополнительной тензорной структуре глюонного пропагатора, кроме одного исключительного случая  $b=1$ , в котором кварковый пропагатор имеет простой полюс в точке  $p^2=m^2$ , где  $m$  – затравочная масса кварка. В п.4 на примере КХД<sub>2</sub> показано, что результат с простым полюсом в теориях с сингулярным поведением бозонного пропагатора не является устойчивым относительно сделанных приближений и среди неучтенных членов в уравнении для пропагатора выделены те члены, которые приводят к доминирующим поправкам к "главному" приближению. В п.5 формулируется модифицированный метод мягких бозонов, учитывающий выделенные в п.4 члены, при помощи которого вычисляется фермионный пропагатор в теориях, моделирующих инфракрасное поведение кваркового пропагатора в КХД<sub>2</sub> и КХД<sub>4</sub>, а именно, в двумерной электродинамике (КЭД<sub>2</sub>) и в модели "абелева хромодинамики" (AX)/12/. В обоих случаях показано, что фермионный пропагатор есть кинечная функция  $p^2$  и не имеет простого полюса при любом значении параметра  $b$ . Показано также, что учет асимптотически свободного ультрафиолетового поведения бозонного пропагатора в модели AX не меняет полученного результата.

2. Для вычисления инфракрасной асимптотики кваркового пропагатора воспользуемся представлением в виде функционального интеграла

$$(2\pi)^d \delta(p-q)\tilde{S}(p) = N^{-1} \int dA \det(i\hat{\partial} - m + g t^a \hat{A}^a) \tilde{S}(p, q|A) e^{iL(A)}, \quad (1)$$

где  $\tilde{S}(p)$  – кварковый пропагатор в импульсном представлении;  $L(A)$  – классическое действие калибровочного поля  $A$ ;  $\det(i\hat{\partial} - m + g t^a \hat{A}^a)$  – фермионный детерминант;  $\tilde{S}(p, q|A)$  – функция Грина уравнения Дирака во внешнем классическом поле  $A$ ;  $d$  – число измерений пространства – времени;  $t^a$  – матрицы фундаментального представления группы  $SU(N)$ .

Чтобы определить поведение кваркового пропагатора вблизи массовой поверхности, нужно в формуле (1) соответствующим образом эффективно учесть фермионный детерминант, классическое действие калибровочного поля и  $\tilde{S}(p, q|A)$ . Воспользуемся для этого методом мягких бозонов/8, 9/ (см. также /10/), согласно которому для получения главного вклада в инфракрасную асимптотику кваркового пропагатора в формуле (1) достаточно провести функциональное усреднение только по мягкой компоненте поля  $A$ .

Определим в этом приближении сначала функцию Грина во внешнем поле  $\tilde{S}(p, q|A) = \langle p | S(A) | q \rangle$ .  $S(A)$  удовлетворяет уравнению

$$(i\hat{\partial} - m + g t^a \hat{A}^a) S(A) = -1. \quad (2)$$

Введем функцию  $S'(A)$ , определенную соотношением

$$S'(A)(i\hat{\partial} + m + g t^a \hat{A}^a) = S(A). \quad (3)$$

Уравнение для  $S'(A)$  имеет вид

$$S'(A)[(i\hat{\partial} + g t^a \hat{A}^a)^2 - m^2] = -1 \quad (4)$$

и его формальное решение в виде интеграла по пятому параметру Фока можно записать в виде

$$S'(\mathbf{A}) = i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 + \partial^2) - \epsilon r} F(r), \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$F(r) = e^{ir\partial^2} e^{ir(i\partial + g t^a \hat{A}^a)^2}.$$

Дифференцированием по  $r$  легко получить уравнение, которому удовлетворяет функция  $F(r)$ ,

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial r} F(r) = e^{ir\partial^2} H(\mathbf{A}) e^{-ir\partial^2} F(r), \\ F(0) = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$H(\mathbf{A}) = \partial^2 + (i\partial + g t^a \hat{A}^a)^2. \quad (7)$$

В импульсном представлении формула (5) имеет вид

$$S'(\mathbf{p}, \mathbf{q} | \mathbf{A}) = i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)} F(r; \mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (8)$$

Функция  $F(r; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle \mathbf{p} | F(r) | \mathbf{q} \rangle$ , согласно (6), удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial r} F(r; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} H(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \mathbf{A}) e^{ir(k^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})} F(r; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{q}), \\ F(0; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2\pi)^d \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \end{cases} \quad (9)$$

где функция  $H(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \mathbf{A}) = \langle \mathbf{p} | H(\mathbf{A}) | \mathbf{p} - \mathbf{k} \rangle$  согласно (7) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \mathbf{A}) = 2gp^\mu t^a \tilde{A}_\mu^a(k) - gk^\mu (g_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu}) t^a \tilde{A}_\nu^a(k) + \frac{1}{2} g^2 \left[ \frac{1}{N} g^{\mu\nu} \delta^{bc} + t^a (d^{abc} g^{\mu\nu} + f^{abc} \partial^{\mu\nu}) \right] \int \frac{dk'}{(2\pi)^d} \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{A}_\nu^c(k - k'). \quad (10)$$

В формуле (10)  $f^{abc}$  и  $d^{abc}$  – структурные константы группы  $SU(N)$ .

В приближении мягких бозонов в формуле (10) следует оставить только первое слагаемое в правой части. Это приближение хорошо работает в абелевых теориях  $/8-10/$  и основывается на предположении, что главный вклад в инфракрасной области дают быстро спадающие на бесконечности потенциалы. Для таких потенциалов вклад второго члена в правой части, очевидно, мал по сравнению с первым членом. Вклад третьего квадратичного члена можно оценить при помощи следующих размерных соображений. Пусть при  $k \rightarrow 0$ ,  $\tilde{A}(k) \sim 1/k^\lambda$ , тогда третий квадратичный член при  $k \rightarrow 0$  ведет себя как  $1/k^{2\lambda - d}$ , где  $d$  – число измерений пространства-времени. Таким образом, при  $\lambda < d$  вклад третьего члена в формуле (10) пренебрежим по сравнению с первым членом. В случае, например, КХД<sub>4</sub>,  $d = 4 + 2\epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$  в инфракрасной области и, следовательно, мы можем пренебречь квадратичным членом в формуле (10) для потенциалов не более сингулярных, чем  $\tilde{A}(k) \sim 1/k^4$  при  $k \rightarrow 0$ . Уравнение для  $F(r; \mathbf{p}, \mathbf{q})$  при этом принимает вид

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial r} F(r; p, q) = 2g \int \frac{dk}{(2\pi)^d} p^\mu t^\alpha \tilde{A}_\mu^a(k) e^{-ir(k^2 - 2pk)} F(r; p - k, q), \\ F(0; p, q) = (2\pi)^d \delta(p - q). \end{cases} \quad (11)$$

В уравнении (11) сделаем, как обычно, следующий упрощающий шаг, пренебрегая  $k$  по сравнению с  $p$  в экспоненте и в  $F(r; p - k, p)$ <sup>10</sup>. Интерпретация этого приближения будет обсуждаться в п.5. Уравнение (11) при этом принимает вид

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial r} F(r; p, q) = 2gp^\mu t^\alpha A_\mu^a(2r) F(r; p, q), \\ F(0; p, q) = (2\pi)^d \delta(p - q) \end{cases} \quad (12)$$

и его решение можно записать в виде упорядоченной экспоненты

$$F(r; p, q) = (2\pi)^d \delta(p - q) T \exp \left[ i \int_0^r dr' p^\mu t^\alpha A_\mu^a(2r') \right]. \quad (13)$$

Согласно формулам (3) и (8),  $\tilde{S}(p, q | A)$  имеет вид

$$\tilde{S}(p, q | A) = \tilde{S}_1(p, q | A) + \tilde{S}_2(p, q | A), \quad (14)$$

где

$$\tilde{S}_1(p, q | A) = (\hat{p} + m) i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} F(r; p, q), \quad (15)$$

$$\tilde{S}_2(p, q | A) = i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} \int \frac{dq'}{(2\pi)^d} F(r; p, q') g t^\alpha \hat{A}^a(q' - q). \quad (16)$$

Для того чтобы теперь получить кварковый пропагатор  $\tilde{S}(p)$ , нужно подставить формулы (14-16) в формулу (1) и провести функциональное усреднение по полю  $A$ . При этом, пренебрегая, как обычно, в инфракрасной области вкладом массивных фермионных петель, полагаем фермионный детерминант равным единице. Действие калибровочного поля  $L(A)$  в инфракрасной области эффективно учтем в гауссовом виде

$$L(A) = \frac{1}{2} A^a \mathcal{D}^{-1} A^a. \quad (17)$$

В случае КХД<sub>2</sub> в аксиальнойной калибровке формула (17) есть попросту определение действия калибровочного поля, если  $\mathcal{D}$  есть свободный пропагатор поля  $A$ . В случае КХД<sub>4</sub> формула (17) есть anzatz для учета в инфракрасной области нелинейных членов в лагранжиане калибровочного поля. В духе работы<sup>10</sup> будем считать, что  $\mathcal{D}$ -инфракрасная асимптотика глюонного пропагатора.

Итак, с учетом сделанных приближений кварковый пропагатор можно записать в виде

$$\tilde{S}(p) = \tilde{S}_1(p) + \tilde{S}_2(p), \quad (18)$$

<sup>10</sup>) Как известно<sup>8, 9/</sup>, такое приближение вполне оправдано в КХД<sub>4</sub> (в классе ковариантных калибровок, где оно приводит к правильной инфракрасной асимптотике электронного пропагатора). Более того, результаты работы<sup>9/</sup> показывают, что учет зависимости от  $k$  в уравнении (11) в этом случае приводит к тому же результату.

где

$$(2\pi)^d \delta(p - q) \tilde{S}_1(p) = (\hat{p} + m) i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} \langle F(r; p, q) \rangle_0, \quad (19)$$

$$(2\pi)^d \delta(p - q) \tilde{S}_2(p) = i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} \langle \int \frac{dq'}{(2\pi)^d} F(r; p, q) g^{ab} \hat{A}^a(q' - q) \rangle_0. \quad (20)$$

В формулах (19, 20) знаком  $\langle \dots \rangle_0$  обозначено функциональное усреднение по полям  $A$ . Далее в тексте будет приведено вычисление только  $\tilde{S}_1(p)$ . Вычисление  $\tilde{S}_2(p)$  полностью аналогично вычислению  $\tilde{S}_1(p)$  и будет опущено. Вклад величины  $\tilde{S}_2(p)$  в квarkовый пропагатор  $S(p)$  оказывается либо пренебрежимым, либо того же порядка, что и  $\tilde{S}_1(p)$ . В каждом конкретном случае это будет оговариваться в тексте.

Для того чтобы провести соответствующее усреднение в формулах (18, 20), воспользуемся итерационным разложением формулы (13) и тем свойством, что функциональное среднее от нечетной степени поля равно нулю, а от четной степени с точностью до независящего от  $n$  нормировочного множителя равно

$$\begin{aligned} & \langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n}}^{a_{2n}}(x_{2n}) \rangle_0 = \\ & = \left( \frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_P P \{ \delta^{a_1 a_2} \mathcal{D}_{\mu_1 \mu_2}(x_1 - x_2) \dots \delta^{a_{2n-1} a_{2n}} \mathcal{D}_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}}(x_{2n-1} - x_{2n}) \}. \quad (21) \end{aligned}$$

В формуле (21) суммируются все возможные одновременные перестановки  $(a_i, \mu_i, x_i)$ . С учетом формулы (21) соответствующее функциональное среднее в формуле (19) есть

$$\begin{aligned} & \langle F(r; p, q) \rangle_0 = (2\pi)^d \delta(p - q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2ig^2)^n}{n!} (i^{a_1} \dots i^{a_{2n}}) \int_0^r dr_1 \dots \int_0^{r_{2n-1}} dr_{2n} \times \\ & \times \sum_P P \{ \delta^{a_1 a_2} \dots \delta^{a_{2n-1} a_{2n}} P_r \{ [p \mathcal{D}(2p(r_1 - r_2)) p] \dots [p \mathcal{D}(2p(r_{2n-1} - r_{2n})) p] \} \}. \quad (22) \end{aligned}$$

Функциональное среднее в формуле (20) имеет аналогичный вид.

3. Для того чтобы при помощи формул (19, 20, 22) определить квarkовый пропагатор в КХД<sub>4</sub>, надо знать инфракрасное поведение глюонного пропагатора. Воспользовавшись результатами работ /1, 2/, будем считать, что инфракрасная асимптотика глюонного пропагатора в аксиальной калибровке имеет поведение  $\sim 1/k^4$ . Такое поведение, как известно, приводит к линейному росту эффективного потенциала в приближении обмена одним "одетым" глюоном<sup>13)</sup>. Наиболее общий вид  $\tilde{D}_{\mu\nu}(k)$  в светоподобной калибровке при этом предположении есть

<sup>13)</sup> В позаведшихся в последние время работах /13/ приводятся аргументы, основанные на применении аксиона Дельбурсго-Веста /14/, согласно которым асимптотика глюонного пропагатора имеет вид  $1/k^4 \ln k^2$ . Мы не будем в настоящей работе обсуждать возможность такой модификации.

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k) = \frac{M^2}{(k^2)^2} \{ (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu}{k \eta}) - B \frac{k^2}{(k \eta)^2} \eta_\mu \eta_\nu \}, \quad (23)$$

где  $M$  – некоторая константа размерности массы. Первая тензорная структура в формуле (23) совпадает со структурой свободного пропагатора. Вторая тензорная структура, как показано в работе<sup>11</sup>, в размерной регуляризации важна для борьбы с инфракрасными расходимостями. В связи с этим положим  $B = b(d/2 - 2)$ , где  $d$  – число измерений пространства-времени.

Таким образом, при  $d = 4$  вторая тензорная структура в формуле (23) отсутствует, что обеспечивает калибровочную инвариантность эффективного потенциала, однако при  $d = 4 + 2\epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  она дает несуществующий вклад в формуле (22). Отметим здесь еще то обстоятельство, что величина  $b$  из размерных соображений не может быть пропорциональной какой-либо степени  $k^2$  или  $(k \eta)$ , поэтому в классе степенных асимптотик  $b$  есть константа.

В  $x$ -пространстве формула (23) имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x) = \frac{i^{1-d}}{16\pi^{d/2}} M^2 (x^2)^{2-d/2} \{ (d/2 - 2) (g_{\mu\nu} - \frac{x_\mu \eta_\nu + x_\nu \eta_\mu}{x \eta}) - (1 - B) (d/2 - 3) \frac{x^2}{(x \eta)^2} \eta_\mu \eta_\nu \}, \quad (24)$$

В формуле (24) нельзя снять размерную регуляризацию, положив  $d = 4$ , однако при  $B = b(d/2 - 2)$  величина  $x^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$  оказывается конечной (расходимости при разных тензорных структурах сокращаются при сворачивании их с вектором  $x^\mu$ ). В соответствии с этим имеем следующую формулу:

$$p^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(2r, p) p^\nu = \frac{i}{(4\pi)^2} M^2 p^2 (1 - b), \quad (25)$$

Рассмотрим особый случай  $b = 1$ . В этом случае в формуле (22) отличие от нуля только первый член суммы, и кварковый пропагатор имеет квазисвободный вид (функция  $\tilde{S}_2(p)$  при  $b = 1$  равна нулю).

$$\tilde{S}(p) \sim \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2}. \quad (26)$$

Отметим, что такой же результат при выделенном значении коэффициента при второй тензорной структуре в инфракрасной асимптотике глюонного пропагатора был получен в работах<sup>5, 11</sup> в аксиальной калибровке  $\eta^2 \neq 0$ . В рассматриваемом подходе, однако, можно исследовать инфракрасное поведение кваркового пропагатора для более широкого класса значений коэффициента  $b$ . В случае  $b \neq 1$  воспользуемся тем фактом, что  $p \mathcal{D}(2r, p) p$ , как это видно из формулы (25), не зависит от  $r$ . Вследствие этого свойства в формулах (22) действие оператора перестановок  $P_r$  оказывается эквивалентным единичному, в результате чего удается распутать произведение  $t$ -матриц и провести интегрирование по переменным  $r_i$ . Формула (22) при этом принимает вид

$$\langle F(r; p, q) \rangle_0 = (2\pi)^4 \delta(p - q) \sum_{n=0}^{\infty} \left( -a M^2 p^2 r^2 \frac{b-1}{2} \right)^n \frac{C_n}{n!}, \quad (27)$$

где  $a \equiv g^2 / 4\pi^2$ ,

$$C_n = \frac{1}{(2n)!} \sum P_n (\delta^{n_1 n_2} \dots \delta^{n_{2n-1} n_{2n}}), \quad (28)$$

В случае группы  $SU(2)$ ,  $\tau^a = \sigma^a/2$ , где  $\sigma^a$  – матрицы Паули, и  $C_n$  есть

$$C_n = \frac{1}{4^n} \frac{(3/2)_n}{(1/2)_n}. \quad (29)$$

С учетом (29) формула (27) принимает вид

$$\langle F(r; p, q) \rangle_0 = (2\pi)^4 \delta(p - q) \Phi\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -aM^2 p^2 r^2 \frac{b-1}{2}\right), \quad (30)$$

где  $\Phi$  – вырожденная гипергеометрическая функция<sup>14/</sup>. При  $r \rightarrow \infty$  выражение (30) пропорционально фактору  $\exp(-aM^2 p^2 r^2 \frac{b-1}{2})$ , следовательно,  $\tilde{S}_1(p)$ , вычисление по формуле (19), при  $b > 1$  будет регулярной функцией от  $p^2$ . Проделав соответствующие вычисления можно получить явный вид функции  $\tilde{S}_1(p)$ :

$$\tilde{S}_1(p) \sim (m + \hat{p}) \frac{m^2 - p^2}{aM^2 p^2 \frac{1-b}{2}} \Psi\left(1; \frac{1}{2}; \frac{(m^2 - p^2)^2}{aM^2 p^2 \frac{1-b}{2}}\right), \quad (31)$$

где  $\Psi$  – другая вырожденная гипергеометрическая функция. Функция  $\tilde{S}_2(p)$  имеет аналогичный вид:

$$\tilde{S}_2(p) \sim \frac{1}{6} \frac{\hat{\eta}}{p\eta} \left[ \Psi\left(1; \frac{1}{2}; \frac{(m^2 - p^2)^2}{aM^2 p^2 \frac{1-b}{2}}\right) - 3\Psi\left(2; \frac{1}{2}; \frac{(m^2 - p^2)^2}{aM^2 p^2 \frac{1-b}{2}}\right) \right]. \quad (31.a)$$

При  $b < 1$  интеграл по  $r$  в формулах (18, 20) расходится на бесконечности, поэтому в этом случае результаты (31, 31a) следует понимать в смысле аналитического продолжения. Из формул (31, 31a) видно, что квартовый пропагатор в рассматриваемом приближении при  $b \neq 1$  есть конечная при любом значении  $p^2$  функция. Имеющийся в выражениях (31, 31a) разрез, начинающийся в точке  $p^2 = 0$ , не имеет динамического происхождения, поскольку его начало и вид не зависят от параметров теории.

Отметим, что если в формуле (31) положить  $m = 0$ , то полученное выражение с точностью до коэффициента при  $aM^2 p^2$  совпадет с результатом для инфракрасной асимптотики квартового пропагатора, полученным в работе<sup>14/</sup> (вместо  $(1-b)/2$  в указанной работе стоит цветовой фактор, равный  $3/4$  в случае группы  $SU(2)$ ). В этой работе инфракрасное поведение квартового пропагатора в случае безмассовой КХД<sub>4</sub> исследуется в независимом от рассматриваемого у нас подходе, основанном на анализе уравнений Швингера – Дайсона с учетом тождества Уорда – Славнова в аксиальной калибровке  $(p\eta) = 0$ . При этом выражение типа (31a), пропорциональное  $\hat{\eta}$ , в работе<sup>14/</sup> отсутствует. Отмеченное совпадение результатов, полученных в различных подходах, дает дополнительное указание на то, что инфракрасная асимптотика квартового пропагатора в КХД<sub>4</sub> есть конечная функция  $p^2$ .

В заключение данного пункта отметим, что полностью аналогичная картина для инфракрасного поведения фермionного пропагатора получается и в

абелевом случае с бозонным пропагатором (23). Эта модель, введенная в качестве модельного приближения к КХД<sub>4</sub> в инфракраской области<sup>/12/</sup>, названная "абелевой хромодинамикой" (АХ), была рассмотрена в приближении мягких бозонов в работе<sup>/16/</sup>. Наше рассмотрение подтверждает правильность гипотезы о том, что модель АХ воспроизводит инфракрасную структуру хромодинамики.

4. Возникает вопрос об устойчивости полученных выше результатов относительно сделанных приближений. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо к главному члену (26) разложения  $\tilde{S}(p)$  при  $p^2 = m^2$  получить поправочные члены. К сожалению, в случае КХД<sub>4</sub> сделать это крайне затруднительно, поскольку для этого пришлось бы учитывать поправки к формуле (17), эффективно учитывающей в инфракрасной области нелинейные члены самодействия глюонов.

Для выяснения вопроса о роли поправочных членов рассмотрим модель КХД<sub>2</sub>, обладающую сходным с КХД<sub>4</sub> поведением глюонного пропагатора на больших расстояниях. В аксиальной калибровке нелинейные члены самодействия глюонов в КХД<sub>2</sub> отсутствуют и  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$  в формуле (22) есть свободный пропагатор

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu}{k\eta}) = \frac{\eta_\mu \eta_\nu}{k\eta}. \quad (32)$$

Также как и в КХД<sub>4</sub>, в КХД<sub>2</sub> функция  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$  "плохо" определена. Это находит отражение в том, что в  $x$ -пространстве  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$  не является однозначно определенной функцией<sup>/17/</sup>:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\eta_\mu \eta_\nu (|x_+| + \xi x_+ + \zeta) \delta(x_-). \quad (33)$$

В формуле (33)  $x_\pm = (x_0 \pm x_1)/\sqrt{2}$ ,  $\eta_\mu = 1/\sqrt{2}(1,1)$ ,  $\xi$  и  $\zeta$  — некоторые произвольные параметры.

Параметры  $\xi$ ,  $\zeta$  можно фиксировать при помощи следующих дополнительных соображений. Потенциал статического точечного источника  $i_\mu = g \delta_{\mu 0} \delta(x_1)$  есть

$$A_\mu(x) = -g \int d\mathbf{x}_0 \tilde{\Gamma}_{\mu 0}(x_0, x_1) = \frac{1}{2} g \frac{\eta_\mu}{\eta_0} \{ |x_1| + \xi \epsilon(\eta_1) x_1 + 2 \zeta \eta_0 \}. \quad (34)$$

Из формулы (34) видно, что параметр  $\zeta$  имеет смысл постоянного члена в поле точечного источника и поэтому является неким калибровочным параметром и может быть без потери общности отброшен<sup>/17/</sup>. Из выражения для напряженности поля

$$E = -\partial_1 A_0(x) = -\frac{1}{2} g \{ \epsilon(x_1) + \xi \epsilon(\eta_1) \} \quad (35)$$

видно, что параметр  $\xi = 0$ , если мы хотим, чтобы сила не зависела от калибровочного вектора. Таким образом, в формуле (33) следует положить  $\xi = \zeta = 0$ . Такой выбор пропагатора в  $x$ -пространстве соответствует определению знаменателя в формуле (32) в смысле главного значения.

Определив таким образом функцию  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$ , легко получить, что  $p_\mu \mathcal{D}^{\mu\nu}(2r p) p_\nu = 0$ . Следовательно, инфракрасная асимптотика квarkового пропагатора в КХД<sub>2</sub> в рассматриваемом приближении имеет квазисвободный вид (28).

Для того чтобы вычислить поправочные члены к формуле (28), найдем сначала поправку  $F_1(r; p, q)$  к функции  $F(r; p, q) = F_0(r; p, q)$ , определенной формулой (13).  $F_1(r; p, q)$  определяется уравнением

$$\begin{cases} -i \frac{\partial}{\partial r} F_1(r; p, q) = V_1(r) F_0(r; p, q) + H_0(r) F_1(r; p, q), \\ F_1(0; p, q) = 0, \end{cases} \quad (36)$$

где  $H_0(r) = 2gp^\mu t^\nu A_\mu^\nu(2rp)$ ,  $V_1(r) = H - H_0$ .

Итерационное решение уравнения (36) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1(r; p, q) = & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r dr_1 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n i H_0(r_1) \dots i H_0(r_n) \times \\ & \times \int_0^{r_n} d\nu i V_1(\nu) \times \left( \sum_{k=0}^n \int_0^{\nu} d\nu_1 \dots \int_0^{\nu_{k-1}} d\nu_k i H_0(\nu_1) \dots i H_0(\nu_k) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Представим теперь  $V_1(r)$  как сумму двух слагаемых

$$V_1(r) = H_1(r) + v_1(r), \quad (38)$$

где  $H_1(r)$  – поправка к  $H_0(r)$ , соответствующая второму и третьему членам в правой части формулы (10). Поскольку в светоподобной калибровке квадратичный член в формуле (10) равен нулю, то

$$H_1(r) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \{-g^\mu_{\mu\nu} (g_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu}) t^\nu \tilde{A}^\mu(k) |e^{-2ipk}| - i g^\mu t^\nu \gamma_+ (\partial^\mu A_\mu^\nu(2rp))\}. \quad (39)$$

Второй поправочный член в (38) соответствует дополнительному приближению в формуле (11), когда мы пренебрегали  $k$  по сравнению с  $p$  в функциях, явно зависящих от  $r$ . Включая в  $v_1(r)$ , как и в случае  $H_1(r)$ , только линейные по  $k$  члены (члены, пропорциональные высшим степеням  $k$  войдут в высшие поправки), получим

$$v_1(r) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} e^{-2ipk} \{-2gp^\mu t^\nu \tilde{A}_\mu(k) k^\nu \partial/\partial p^\nu\} = -i2gt^\mu p^\mu (\partial^\nu A_\mu^\nu(2rp)) \partial/\partial p^\nu. \quad (40)$$

Вычисление показывает, что если подставить соотношения (39), (40) в формулу (37), то  $H_1(r)$  дает нулевой вклад в  $\tilde{S}(p)$ , в то время как вклад от  $v_1(r)$  пропорционален полусумме второго порядка по  $(m^2 - p^2)$ , т.е. доминирует над "главным" членом (28) при  $p^2 \sim m^2$ . Отсюда следует, что результат (26) для квакрового пропагатора не является устойчивым относительно дополнительного приближения в уравнении (11), т.е. в теориях с сильными инфракрасными особенностями, в отличие от КЭД<sub>4</sub>, необходимо более точно учитывать в (11) зависимость от  $k$ . Таким образом, для более последовательного решения вопроса об инфракрасном поведении квакрового пропагатора в случае КХД<sub>2</sub> и в случае КХД<sub>4</sub> при выделении значения па-

раметра  $b = 1$ , необходимо, как это показал проведенный анализ, провести более аккуратное построение решения уравнения (11).

5. Дифференциальное уравнение (11) с учетом начального условия легко свести к интегральному уравнению

$$F_1(r; p, q) = (2\pi)^d \delta(p - q) + 2i \int_0^r dr' \int \frac{dk}{(2\pi)^d} p^\mu \mp \tilde{A}_\mu^a(k) e^{ir(k^2 - 2pk)} F(r; p - k, q). \quad (41)$$

Итерационное решение уравнения (41) имеет вид

$$F(r; p, q) = (2\pi)^d \delta(p - q) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r; p, q), \quad (42)$$

где

$$F_n(r; p, q) = (2i\pi)^n \int_0^r dr_1 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{dk_n}{(2\pi)^d} [p^{\mu_1} \mp \tilde{A}_{\mu_1}^{a_1}(k_1) \dots \\ \dots p^{\mu_n} \mp \tilde{A}_{\mu_n}^{a_n}(k_n)] \exp[i \sum_{i=1}^n r_i (k_i^2 - 2pk_i) + 2i \sum_{i>j} r_i k_i k_j] (2\pi)^d \delta(p - q - \sum_{i=1}^n k_i). \quad (43)$$

В формуле (43) в духе приближения, сделанного в формуле (10), отброшены слагаемые  $\sim k \tilde{A}(k)$ . После функционального усреднения формула (43) принимает вид

$$< F_{2n}(r; p, q) >_0 = (2\pi)^d \delta(p - q) \frac{(-2i\pi^2)^n}{n!} \int_0^r dr_1 \dots \int_0^{r_{2n-1}} dr_{2n} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{dk_{2n}}{(2\pi)^d} \times \\ \times \exp[i \sum_{i=1}^n r_i (k_i^2 - 2pk_i) + 2i \sum_{i>j} r_i k_i k_j] (t^{a_1} \dots t^{a_{2n}}) \times \\ \times \sum_{p \in \{a_i, k_j\}} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2) \delta^{a_1 a_2} (p \mathcal{D}(k_1) p) \dots (2\pi)^d \delta(k_{2n-1} + k_{2n}) \delta^{a_{2n-1} a_{2n}} (p \mathcal{D}(k_{2n-1}) p). \quad (44)$$

Рассмотрим какую-либо перестановку в формуле (44). Пусть она содержит фактор  $\delta(k_1 + k_j)$ . После интегрирования по  $k_1$  (пусть для определенности  $i > j$ )  $(r_i, r_j)$  — член в экспоненте в формуле (44) преобразуется следующим образом:

$$i r_i (k_i^2 - 2pk_i) + i r_j (k_j^2 - 2pk_j) + 2i \sum_{s=1}^{i-1} r_i k_i k_s + 2i \sum_{r=1}^{j-1} r_j k_j k_r + \\ + i(r_j - r_i)(k_j^2 - 2pk_j) - 2ir_i k_j \sum_{s=1, s \neq j}^{i-1} k_s + 2ir_j k_i \sum_{r=1}^{j-1} k_r. \quad (45)$$

Отбросим в формуле (45) второе и третье слагаемые в правой части. Это приближение эквивалентно выбрасыванию из фейнмановских интегралов в теории возмущений членов  $k_i k_j$  при  $i \neq j$ , сохранив при этом  $k_i^2$ , где  $k_{i,j}$  – импульсы виртуальных бозонов. Такое приближение успешно использовалось при изучении инфракрасной структуры квантовой электродинамики и известно как  $(k_i, k_j)$  приближение<sup>9/</sup>. Отметим, что отбрасывание также  $k^2$  – членов в формуле (45), как это нетрудно увидеть, эквивалентно приближению, рассмотренному в разделах 2, 3, 4.

Подставив формулу (44) с учетом (45) в формулы (42) и (19), получим следующее выражение для  $\tilde{S}_1(p)$ :

$$\tilde{S}_1(p) = (\hat{p} + m) i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2ig^2)^n}{n!} (t^{a_1} \dots t^{a_{2n}}) \times \\ \times \int_0^r dr_1 \dots \int_0^{r_{2n-1}} dr_{2n} \sum_p P_p \{ \delta^{a_1 a_2} \dots \delta^{a_{2n-1} a_{2n}} \} P_p \{ (r_1 - r_2, p) \dots (r_{2n-1} - r_{2n}, p) \}, \quad (46)$$

где

$$I(r, p) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} p_\mu \tilde{D}^{\mu\nu}(k) p_\nu e^{ir(k^2 - 2pk)}. \quad (47)$$

Наличие члена  $k^2$  в экспоненте в выражении (47) сильно усложняет задачу распутывания произведения  $t$ -матриц и вычисления интегралов по  $r_i$  в формуле (46). Поэтому в рассматриваемом в данном пункте уточненном приближении ограничимся изучением инфракрасного поведения фермионного пропагатора в абелевых моделях КЭД<sub>2</sub> и АХ, которые, по-видимому (см. замечание в конце п.3), правильно воспроизводят инфракрасную структуру КХД<sub>2</sub> и КХД<sub>4</sub>. В обоих случаях формула (46) принимает вид

$$\tilde{S}_1(p) = (\hat{p} + m) i \int_0^\infty dr e^{-ir(m^2 - p^2 - i\epsilon)} + J(r, p), \quad (48)$$

где

$$J(r, p) = -4ig^2 \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 I(r_1 - r_2, p). \quad (49)$$

Функция  $I(r, p)$  с учетом граничного условия  $I(r, 0) = 0$  в случае КЭД<sub>2</sub> есть

$$I(r, p) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-irp^2} - 1}{r}, \quad (50)$$

а в случае модели АХ

$$I(r, p) = -\frac{M^2}{(4\pi i)^{d/2}} r^{1-d/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-irp^2)^n}{n!} \frac{n-1+b(d/2-2)(d/2-2+n)}{(d/2-2+n)(d/2-3+n)}. \quad (51)$$

Подставив формулы (50, 51) в формулу (49), получим выражение для  $J(r, p)$  в виде абсолютно сходящегося бесконечного ряда степеней  $(-irp^2)$ . В обоих случаях функция  $J(r, p)$  регулярна (в случае модели AX можно снять размерную регуляризацию, положив  $d = 4$ ). Для того чтобы выяснить аналитические свойства функции  $\tilde{S}_1(p)$  необходимо знать асимптотики функции  $J(r, p)$  по  $r$  в нуле и на бесконечности. При  $r \rightarrow 0$ ,  $J(r, p) \rightarrow 0$  в обоих случаях, что обеспечивает сходимость интеграла по  $r$  в нуле в формуле (48). При  $r \rightarrow \infty$ ,  $J(r, p)$  в случае КЭД<sub>2</sub> имеет асимптотику

$$J(r, p)_{r \rightarrow \infty} = -ir \frac{g^2}{\pi} (1 - \gamma) - r \frac{g^2}{2} + ir \frac{g^2}{\pi} \ln(r p^2) + O(1), \quad (52)$$

где  $\gamma = 0,57 \dots$  – постоянная Эйлера. Первое слагаемое в выражении (57) имеет смысл некоторой постоянной добавки к массе фермиона, которая возникает в  $1/N$ -приближении для кваркового пропагатора в КХД<sub>2</sub><sup>17, 18</sup>.

Второе слагаемое  $-r g^2/2$  обеспечивает сходимость интеграла в формуле (48) на бесконечности. Третье слагаемое не влияет на сходимость интеграла.

Анализ интеграла по параметру  $r$  в соответствующем выражении для  $\tilde{S}_2(p)$  показывает аналогичную картину. Отсюда следует, что учет зависимости от  $k$  в уравнении (11) ведет к тому, что полюсное поведение фермионного пропагатора в инфракрасной области в КЭД<sub>2</sub> сменяется на конечную функцию от  $p^2$  (при  $p^2 \geq 0$ ).

Аналогичная картина наблюдается в модели AX. В этом случае при  $r \rightarrow \infty$

$$J(r, p)_{r \rightarrow \infty} = -ir \frac{g^2 M^2}{32} - r^2 a M^2 p^2 \frac{b-1}{2} - \frac{g^2 M^2}{8\pi} (\ln r p^2 - 1 + \gamma) + \\ + ir \frac{a M^2}{2} \ln^2 r p^2 - ir a M^2 (1 - \gamma) \ln r p^2 + O(1), \quad (53)$$

где  $a = g^2/4\pi^2$ . В этом случае также возникает постоянная добавка к массе фермиона, полученная в работе<sup>15</sup> при исследовании уравнения Швингера-Дайсона в КХД<sub>4</sub>. Второй член при  $b \neq 1$  является главным в выражении (53) и совпадает с соответствующей асимптотикой в формуле (30), полученной в неабелевом случае. Однако при  $b = 1$ , в отличие от "рассмотренного" п.3 приближения, фермионный пропагатор не имеет полюса, поскольку третье слагаемое в выражении (53) обеспечивает сходимость интеграла по  $r$  в формуле (48) при любом  $p^2 > 0$ <sup>19</sup>. В случае  $p^2 = 0$  интеграл также сходится, поскольку в этом случае  $J(r, 0) = 0$ , как это видно из формул (51) и (49). Анализ интеграла по параметру  $r$  в соответствующем выражении для  $\tilde{S}_2(p)$  показывает аналогичную картину. Таким образом, учет зависимости от  $k$  в уравнении (11) не приводит к изменению результата для фермионного пропагатора в случае  $b \neq 1$ , т.е. в этом случае кварковый пропагатор есть конечная функция от  $p^2$ . Случай  $b = 1$  оказывается неустойчивым относительно сделанных приближений в п.л.2, 3, и учет членов, ведущих к доминирующими поправкам к формуле (26), приводит к тому, что кварковый пропагатор (в приближении AX) и в этом случае ( $b = 1$ ) есть конечная функция  $p^2$  при  $p^2 \geq 0$ .

<sup>18)</sup> Тем не менее случай  $b = 1$ , по-прежнему, выделяется, так как характер асимптотики  $J(r, p)$  меняется при  $b = 1$ .

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии ультрафиолетовой области теории на инфракрасную асимптотику кваркового пропагатора. Для этого рассмотрим модель АХ/16/, в которой бозонный пропагатор кроме члена вида  $1/k^4$ , описывающего инфракрасную асимптотику глюонного пропагатора, содержит также слагаемое вида  $1/k^2$ , отражающее асимптотически свободное поведение глюонного пропагатора в КХД<sub>4</sub>. При этом функция  $J(r, p)$  в формуле (48) получит аддитивную добавку  $J'(r, p)$ . При  $r \rightarrow 0$ ,  $J'(r, p) \rightarrow 0$ , а при  $r \rightarrow \infty$

$$J'(r, p)_{r \rightarrow \infty} = -i\pi p^2 + \frac{a}{2} \ln^2 r p^2 + a \gamma \ln r p^2 + O(1). \quad (54)$$

Первое слагаемое в формуле (54) имеет смысл некоторой дополнительной добавки к массе фермиона, второе и третье слагаемые всегда подавляются членом  $\sim -r \ln r$  в формуле (53). Отсюда видно, что ультрафиолетовая область не влияет на сходимость интеграла в формуле (48) и, следовательно, на результат для кваркового пропагатора.

6. Вышеприведенный анализ показывает, что в рассмотренном приближении кварковый пропагатор есть конечная функция  $p^2$  и не имеет полюсов при  $p^2 > 0$ . При этом остается не вполне ясным вопрос о наличии более мягких особенностей типа ветвлений.

Сопоставление нашего результата в случае КХД<sub>4</sub> с полученными ранее другими методами показывает качественное согласие с работами<sup>3, 4/</sup>, с работой<sup>7/</sup>, а также в некотором смысле с работой<sup>1/6/</sup> (в этой работе получена существенная особенность в точке  $p^2 = m^2$ , но структура ее такова, что на действительной оси пропагатор оказывается конечной функцией, равной нулю в точке  $p^2 = m^2$ ). В отличие от работы<sup>5/</sup>, в которой рассматривается вопрос о возможности существования решения с простым полюсом, в рассматриваемом у нас подходе *a priori* не предполагается вид асимптотики кваркового пропагатора.

Отметим, что в модифицированном приближении мягких бозонов, рассмотренном в п.5, в выражении для кваркового пропагатора появляются члены (см. формулы (48), (52), (53)), имеющие смысл некоторой аддитивной динамической добавки к затравочной массе кварка, которая была получена в случае КХД<sub>4</sub> в работе<sup>5/</sup>, и в случае КХД<sub>2</sub> в  $1/N$ -приближении в работах<sup>17, 18/</sup>. Различие результатов для кваркового пропагатора в случае КХД<sub>2</sub>, полученных в  $1/N$ -приближении и в теории КЭД<sub>2</sub>, моделирующей инфракрасное поведение КХД<sub>2</sub> при конечном  $N$ , обусловлено тем, что метод мягких бозонов учитывает непланарные графы, вымирающие в  $1/N$ -приближении.

Авторы признательны Б.А.Арбузову, А.И.Алексееву, В.А.Байкову, Э.Э.Босу, А.В.Куликову, С.С.Куреному и А.П.Самохину за полезные обсуждения.

<sup>3, 4/</sup> В работах<sup>3, 4/</sup> исследовался случай с безмассовыми кварками.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Байков В.А. - Препринт ИФВЭ, 81-106, Серпухов, 1981.
2. Mandelstam S. - Phys. Rev., 1979, D20, p. 3223; Baker M., Ball J.S., Zachariasen F. - Nucl. Phys., 1981, B186, p. 531; Алексеев А.И. - ЯФ, 1981, 33, с. 516.
3. Pagels H. - Phys. Rev., 1977, D15, p. 2991; Славнов А.А. - ТМФ, 1983, 54, с. 62.
4. Ball J.S., Zachariasen F. - Preprint CALT-68-841, Pasadena, 1981.
5. Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Байков В.А. - ЯФ, 1981, 34, с. 1374.
6. Harada K. - Progr. Theor. Phys., 1982, 68, p. 1324.
7. Cornwall J.M., Tiktopoulos G. - Phys. Rev., 1977, D15, p. 2937.
8. Логунов А.А. - ЖЭТФ, 1955, 29, с. 828; Бланк В.З. - ЦАН, 1955, 104, с. 706; Полов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. - М.: Атомиздат, 1976.
9. Барбашов Б.М. - ЖЭТФ, 1965, 48, с. 607; Fradkin E.S. - Nucl. Phys., 1966, 76, p. 588.
10. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Инфракрасные асимптотики функций Грина в (КЭД)з. - В сб.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. - У Международный семинар, Протвино: 1982, т. 1, с. 235-247.
11. Arbuзов В.А. - Preprint IHEP, 82-205, Serpukhov, 1982.
12. Арбузов Б.А., Куренной С.С. - ЯФ, 1982, 36, с. 1314.
13. Gardner E.J. - Oxford preprint 8/82, Oxford, 1982; Paccanoni F. - Preprint IFPD 40/82, Padova, 1982.
14. Delbourgo R., West P. - J.Phys., 1977, A10, p. 1049.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, т. 1, 1973.
16. Алексеев А.И., Байков В.А., Босс Э.Э. - Препринт ИФВЭ 83-5, Серпухов, 1983.
17. Callan C.G., Coote J.N., Gross D.J. - Phys. Rev., 1976, D13, p. 1649; Einhorn M.B. - Phys. Rev., 1976, D14, p. 3451.
18. t'Hooft G. - Nucl. Phys., 1974, B75, p. 461.

SUMMATION OF LEADING LOGARITHMS FOR FOUR-FERMION INTERACTION  
AND COMPOSITE VECTOR BOSON

A.V.Kulikov, V.E.Rochev

Institute for High Energy Physics, Serpukhov

<sup>10</sup>. It is well known that the usual scheme of constructing renormalized perturbative series based on the introduction of infinite counter-terms into the bare Lagrangian, does not work for quite a wide class of interactions, namely for the second-class interactions<sup>/1/</sup> ("non-renormalizable", by the traditional terminology). This fact, i.e. the impossibility to calculate the corrections in the framework of the renormalization program, is the main argument against using the second-class interactions for the description of the real world of elementary particles. In particular, due to this the Salam-Weinberg gauge model was preferred, rather than four-fermion Lagrangian in describing weak interactions. However, the traditional four-fermion theory wonderfully describes all effects of weak interactions at energies available (as well as neutral currents)<sup>/2,3/</sup>. Thus we have no physical reasons to refuse the non-renormalizable four-fermion interaction, except our inability to work with it in higher orders of perturbation theory.

Long ago the idea was stated (and by now it has become a "hackneyed truth") that the inapplicability of the standard perturbation theory to the second-class interactions is connected with the strong non-regularity of Green's functions in the expansion parameter. Due to this it was proposed to modify the perturbation theory and to insert the terms that are non-analytical (logarithmic) in the coupling constant. Such a modification may lead to the construction of a divergence-free perturbation theory. One of the arguments in favour of this view is that a similar situation also exists in super-renormalizable massless models: QED<sup>/8/</sup> and the Schwinger model<sup>/9/</sup>. In these examples strong infrared divergencies are analogous to the ultraviolet non-renormalizability and after eliminating the former we come to the necessity to introduce the terms with the coupling constant logarithms (CCL). It was shown in refs.<sup>/8/</sup> that such a modification of perturbative expansion by introducing CCL allows to construct a perturbation theory that is finite in each order. The same is true for exactly soluble non-renormalizable models<sup>/5,7,10/</sup>. The common feature of the models mentioned is that their coupling constant is dimensional and, as a consequence, the existence of a

priori limitations on the applicability region of perturbation theory. For example, in the four-fermion interaction this region is  $|k^2 G_F| \ll 1$ ,  $k$  being some specific momentum. The presence of such internal boundaries causes principal incompleteness of perturbation theory for models with a dimensional coupling constant and leads to the appearance of some parameters.

A general situation for the models with a dimensional coupling constant may be characterized in the following way<sup>7/</sup>: modification of perturbation theory (through introducing CCL) leads to the finiteness of all expansion terms, but there may appear parameters, whose fixation will bring us beyond the framework of perturbation theory.

In the present paper higher orders of perturbation theory for the four-fermion interaction are analyzed. The leading CCL are selected for the current-current amplitude (intermediate field propagator). The summation of these terms widens the range of applicability of perturbation theory and points to the existence of unstable bound states in the theory discussed.

2°. Consider a massless four-fermion interaction, whose Lagrangian has the form

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial^\mu \psi - g^2 / 2 (\bar{\psi} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) / 2 t^a \psi)^2. \quad (1)$$

Here  $\psi$  belongs to the SU(N)-group representation, whereas  $t$  are generators in the same representation:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c; \quad (2)$$

$$\text{Tr } t^a t^b = 1/2 N_f \delta^{ab},$$

where  $N_f$  is the number of fundamental multiplets. We also need the Casimir operator, described as

$$\sum_i t^a t^i = L t^a. \quad (3)$$

Using a usual trick, we introduce the auxiliary intermediate vector field  $B_\mu^a$  and represent Lagrangian (1) in the three-linear form:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \partial^\mu \psi + g \bar{\psi} \hat{B}^a t^a (1 + \gamma^5) / 2 \psi + 1/2 (B_\mu^a)^2. \quad (4)$$

The equivalence of (1) and (4) is obvious from relation

$$\int \partial B \exp i \int dx (B_j - 1/2 B^2) \sim \exp ig^2 / 2 \int dx j^2.$$

Three-linear interaction (4) leads to the following Feynmann rules:

$$\overline{\text{---}} \text{---} \text{---} = - \frac{1}{i} D_{\mu\nu}^{ab}(x - y) = - \frac{1}{i} g_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta(x - y)$$

$$\overline{\text{---}} \text{---} \text{---} = \frac{1}{i} S_c(x - y) = \frac{i}{2\pi} \frac{\hat{x} - \hat{y}}{[(x-y)^2 - 10]^2}$$

$$\bullet = ig t^a \gamma^\mu (1 + \gamma^5) / 2.$$

The basic subject of our investigation is the auxilary field propagator

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = 1/i \langle T(B_{\mu}^a(x) B_{\nu}^b(y)) \rangle, \quad (5)$$

which is connected with the current-current amplitude.

Now select the self-energy part  $\Pi$  of the full propagator (5):

$$\Delta = [\mathcal{D}^{-1} + \Pi]^{-1}. \quad (6)$$

The expansion of  $\Pi$  in perturbation theory series contains all one-particle irreducible diagrams.

Henceforth we often use the dimensionless variable  $\xi^2 = k^2 g^2 / 12\pi^2$ . As it is shown in //, the first terms of the diagram expansion of  $\Pi$  is  $|\xi^2 \ln(-\xi^2/10)/C|$  and the region of applicability for this approximation (in momentum space) is

$$|\xi^2 \ln(-\xi^2/C)| \ll 1, \quad (7)$$

with  $C$  as a parameter.

We can go beyond the boundaries of this region if summing all  $\Pi$ -expansion terms proportional to  $(\xi^2 \ln(-\xi^2/C))^n$ . The result of this summation will be valid in the region

$$|\xi^2| \ll 1, |\ln(-\xi^2/C)| \gg 1, |\xi^2 \ln(-\xi^2/C)| \sim 1. \quad (8)$$

This approximation (that of the so-called "leading logarithms" means the neglect of terms  $(\xi^2)^n \ln^{n-m} \xi^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) in comparison with the main terms  $(\xi^2 \ln \xi^2)^n$  in every order of perturbation theory.

The appearance of logarithms in the previous formulae is caused only by ultraviolet divergencies. Here lies the main difference between non-renormalizable theories and, say, electrodynamics, where logarithms appear from integration over the infrared region (double logarithmic asymptotics). There are no methods of the direct summation of these "ultraviolet" logarithms. That is why it is necessary to analyse separately both why logarithms appear in divergent diagrams and their selection criteria. Our next Section deals with this problem.

3°. The appearance of logarithmic terms more easily be understood if we consider the problem of constructing the perturbation theory not as "calculation of divergent integrals" but as the definition of the product of distributions with coinciding singularities. Consider the simplest example: a massless scalar loop in the  $d$ -dimensional space ( $d > 2$ ):

$$\text{Diagram} \sim \lambda^2 \Delta_0^2(x) = L_1(x). \quad (9)$$

In momentum space a convolution-type integral corresponds to this loop. Propagator  $\Delta_0(x)$  will be

$$\Delta_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp \frac{e^{-ipx}}{p^2} = \frac{1}{4\pi^{d/2}} \Gamma(d/2-1) (x^2)^{1-d/2} \quad (10)$$

(in this Section Euclidean metric is used).

Thus, the calculation of loop (9) is reduced to the definition of the Fourier-image of function  $(x^2)^{2-d}$ . However, the homogeneous distribution  $(x^2)^{-a}$  considered as a function of parameter  $a$  has poles at points  $a = d/2 + k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) and, consequently, there should be a supplement to its definition. Such a supplement breaks the homogeneity of the function  $(x^2)^{-a}$  which should be considered at the given points as an adjoint function of the first order<sup>11/</sup>. The Fourier-image of the adjoint distribution will be:

$$f[(x^2)^{-d/2-k}](p) = \frac{(-1)^{k+1} \pi^{d/2} 2^{-2k}}{k! \Gamma(k+d/2)} (p^2)^k \ln \frac{p^2}{C}. \quad (11)$$

Thus, loop (9) (with  $d$  even) is an adjoint distribution of the first order whose Fourier-image, according to (11), will be:

$$\tilde{L}_1(p) = \lambda^2 h_1(p^2)^{d/2-2} \ln p^2 / C_1. \quad (12)$$

By analogy we define the  $n$ -loop diagram that is again an adjoint function of the first order:

$$\text{Diagram} \sim \lambda^{n+1} \Delta_0^{n+1}(x) = L_n(x), \quad (13)$$

$$\tilde{L}_n(p) = \lambda^{n+1} h_n(p^2)^{n(d/2-1)-1} \ln p^2 / C_n. \quad (14)$$

In (12) and (14)

$$h_n = (-1)^{n(d/2-1)} (4\pi)^{-nd/2} \Gamma^{n+1}(d/2 - 1) / \Gamma(n(d/2-1)) \times \\ \times \Gamma((n+1)(d/2-1)).$$

It is essential that the aforesaid definition contains an arbitrariness i.e. the indefinite constant  $C_n$ . To fix this arbitrariness is the task of the complete theory. This problem cannot be solved by considering loop (9) apart from the context of a concrete model. For example, consider two physically different situations: the renormalizable and non-renormalizable ones. In the renormalizable case (let it be the massless  $\phi^4$ -theory in the four-dimensional space) the arbitrariness in defining  $L_1$  is fixed by infinite renormalizations of a charge and wave function. In this case it is possible to fix renormalizable perturbation theory in any order by the finite number of constants. As an example of a non-renormalizable situation we can choose a massless superpropagator (SP)<sup>17, 12/</sup>. As it was shown in<sup>17/</sup>, SP is a function of gauge transformation for four-fermion interaction. In Euclidean space SP in the coordinate representation is the function

$$f(x) = \exp[-\lambda/x^2] - 1. \quad (15)$$

(We consider SP at "non-physical value of the coupling constant" /13/  $\lambda > 0$  which corresponds to some gauge  $\alpha < 0/7/$ . It is sufficient for illustrative purposes of this Section). The Fourier-image of this function can easily be constructed with the help of, e.g. the Mellin representation for the exponent. As a result:

$$\tilde{f}(p) = -\frac{4\pi\lambda^2}{p^2} + \pi^2 \lambda^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} ds \frac{\Gamma(-s-2)\Gamma(-s)}{\Gamma(s+2)} \left(\frac{\lambda p^2}{4}\right)^s. \quad (16)$$

$(0 < \delta < 1)$

An  $n$ -loop diagram (13, 14) corresponds to term of the expansion of  $\tilde{f}$  in  $\lambda$ . Besides, in this case, according to (16), constant  $C_n$  is finite and written as

$$C_n = \frac{4}{\lambda} \exp \{ \psi(n+2) + \psi(n+1) - \psi(n) \}$$

( $\psi$  is a logarithmic derivative of  $\Gamma$ -function).

In the first place, the peculiarity of this non-renormalizable example is that the dimensional coupling constant  $\lambda$  is found under the log sign. Secondly, constant  $C_n$  is finite and defined by the exact solution  $\tilde{f}(p)$ , i.e. by the sum of all loops. But if construct a perturbation theory for  $\tilde{f}$  (see, e.g. /7/), then in virtue of a priori limitation on the region of applicability of perturbation theory  $\lambda p^2 \ll 1$ , the perturbative expansion will contain a dimensionless parameter, whose definition in the framework of perturbation theory is in principle impossible.

Thus, in the non-renormalizable situation the perturbation theory is non-analytical in its coupling constant and finite in every order. It is natural to make a similar assumption for FFI as well. In fact, it will be equivalent to the assumption on the existence of the well-defined exact solution (unknown in this case).

Go back to scalar loop (9). We have already ascertained why the logarithm appears in lower order (12) and found out that diagrams (13) also give only one logarithm (14). But higher orders of perturbation theory can give higher logarithms (i.e. adjoint functions of higher orders) as well. Summation of such leading logarithms is the aim of this paper. To explain the principle of selecting leading logarithms we consider as an example three typical diagrams of the fourth order (see Fig. 1).

Diagrams (a), (b) and (c) have the corresponding expressions in  $x$ -space

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^a(x) &\sim \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_o^2(x-x_1) \Delta_o^2(x_1 - x_2) \Delta_o^2(x_2) \\ \mathfrak{I}^b(x) &\sim \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_o(x-x_1) \Delta_o(x_1) \Delta_o(x_2) \Delta_o(x-x_2) \Delta_o^2(x_1 - x_2) = \\ &= \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_o(x-y_1-y_2) \Delta_o(y_1 + y_2) \Delta_o(y_2) \Delta_o(x-y_2) \Delta_o^2(y_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathcal{D}^a(x) \sim \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_0(x-x_1) \Delta_0^3(x_1-x_2) \Delta_0(x_2) \Delta_0(x) = \\ = \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_0(x-y_1-y_2) \Delta_0^3(y_1) \Delta_0(y_2) \Delta_0(x).$$

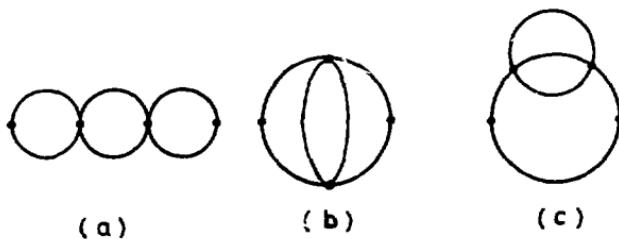


Fig. 1.

Diagram  $\mathcal{D}^a$  contains two divergent integrations, and each of them is connected with the homogeneity breaking and, consequently, with the appearance of logarithms as well. The corresponding Fourier-image will be an adjoint function of the third order, i.e. it will contain a cubed logarithm. On the contrary, in the diagrams  $\mathcal{D}^b$  and

$\mathcal{D}^c$  one of the integrations is convergent and, consequently, does not break the homogeneity. Correspondingly, in momentum space these diagrams are adjoint functions of lower (second) order. Note, that though diagram  $\mathcal{D}^c$  is more "singular" ( $\Delta_0^3$ ) as compared to  $\mathcal{D}^b$  ( $\Delta_0^2$ ), their powers of logarithm in momentum space are equal (as it was previously shown in (12)-(14)). Thus, diagram  $\mathcal{D}^a$  in the region of large logarithms becomes leading. By this example we can see formulate a general principle of selecting leading logarithms: the leading contribution is made by diagrams with the maximal number of non-integrable poles.

4<sup>o</sup>. Proceed to the analysis of diagrams that appear during the expansion in series (6). The first expansion terms are shown in Fig. 2. As it was shown above, the maximal breaking of homogeneity (and the maximal power of logarithm in momentum space) is caused by the diagrams with the maximal number of non-integrable poles ("divergent integrations"). In Fig. 2 there are (a), (c), (d). Diagram (b) vanishes, and the rest (e)-(f) are not leading. Most easily it can be understood if  $\delta$ -propagator be contracted in the point. Then, neglecting the matrix structure, we come to the correspondence: diagram (2d) transforms into (1a), (2g) - into (1c) and the rest of diagrams of the 6-th order in Fig. 2 are of topological

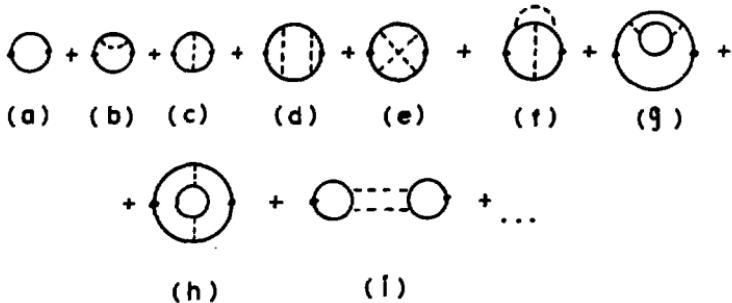


Fig. 2.

structure (1b). So, up to the 6-th order ladder type diagrams will be the leading ones. Obviously, in an arbitrary order the ladder diagram also has a maximal (for this order) number of non-integrable poles (see (18)). Note, that after contraction of a propagator into the point the ladder diagrams acquire a topological chain structure. An arbitrary diagram can be obtained from the ladder one by a finite permutation of vertices. However, even minimal changes connected with the mutual permutation of adjacent vertices (see Fig. 3)

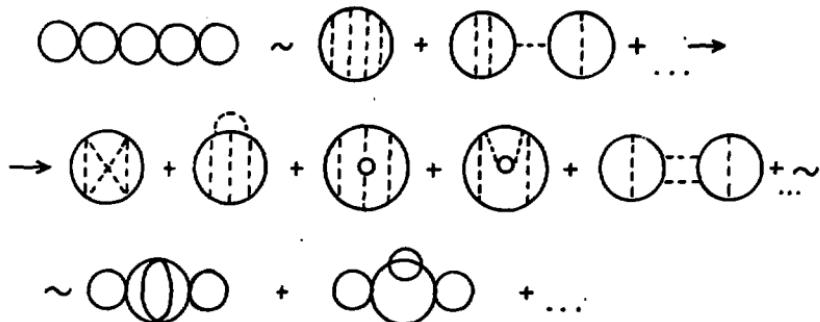


Fig. 3.

break the chain topology and lead to the appearance of insertions of the type (b), (c) in Fig. 1. These insertions contain a logarithm of a lower power than in the corresponding chain. It is clear that the permutation of more than one vertex or the flip-over of the line end in more than one vertex lead to further reduction of the power of logarithms.

Thus, the ladder-type diagrams alone lead to the maximal power of logarithms in momentum space.

5°. In  $2(n+1)$  order of perturbation theory the ladder diagram for self-energy part of auxiliary field propagator (5), (6) takes the form:

$$\begin{aligned} -i \prod_{\mu\nu(2n+2)}^{ab} (x-y) &= -(ig)^{2n+2} \left(-\frac{1}{i}\right)^n \int \prod_{m=1}^n dx_m \times \\ &\times Sp \frac{1+\gamma^5}{2} \prod_m \frac{1}{i} S_c(x_{m-1} - x_m) \gamma^{a_m} \text{Tr} \prod_m t^{a_m}. \end{aligned} \quad (18)$$

By  $\prod_m$  in (18) we designate the product over  $m = 1, 2, \dots, n, n+1, n, \dots, 2, 1, 0$ ;  $x_0 = x$ ,  $x_{n+1} = y$ ;  $a_0 = \mu$ ,  $a_{n+1} = \nu$ ;  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = b$ .

Substituting into (18) expression

$$S_c(k) \otimes S_c(-k) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k e^{-ikx} F(k) P_{ab}(k) \gamma^a \otimes \gamma^b,$$

where  $g^2 F(k) = k^2 g^2 / 96 \pi^2 \ln(-k^2 g^2 - i0) / 12 \pi^2 C \equiv 1/8 \xi^2 \ln(-\xi^2 - i0) / C$  and  $P^{ab} = -g^{ab}/2 - k^a k^b / k^2$ , and after the Fourier transformation we obtain

$$\begin{aligned} \prod_{\mu\nu(2n+2)}^{ab} (k) &= -(g^2 F)^{n+1} Sp \frac{1+\gamma^5}{2} \prod_{m=0}^n \gamma^{a_m} \gamma^{a_{m+1}} \times \\ &\times \prod_{m=n}^0 \gamma^{a_m} \gamma^{a_m} \times \text{Tr} \prod_m t^{a_m} \times \prod_{m=0}^n P_{r_m s_m}. \end{aligned} \quad (19)$$

The convolutions of  $t$ -matrices can easily be calculated with (3), and in order to calculate the trace of  $\gamma$ -matrices we note that

$$\begin{aligned} \gamma^a \gamma^i \gamma^b P_{ab}(k) &= \gamma^i - \hat{k} \gamma^i \hat{k} / k^2 \equiv \Gamma^i, \\ \gamma^a \Gamma^i \gamma_a &= -2 \Gamma^i, \\ \text{and } \gamma^a \gamma^i \gamma^b P_{ab} &= -2 \Gamma^i. \end{aligned} \quad (20)$$

A consistent substitution of (20) into (19) leads to the final expression

$$\prod_{\mu\nu(2n+2)}^{ab} (k) = (g^2 F)^{n+1} (-4L)^n Sp \Gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\nu \times \text{Tr} t^a t^b.$$

Summation all of the orders gives:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\pi_{\mu\nu}^{ab} \frac{g^2 F}{2N_f \frac{1+4Lg^2 F}{1+4Lg^2 F}}. \quad (21)$$

Here

$$\pi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2,$$

and  $N_f$  is the number of fermion multiplets. The changes necessary for calculations of other variants of FFI are quite obvious. For example, we get a vector-vector variant by the following substitution in (21):

$$2 = Sp \frac{1+y^5}{2} \rightarrow Sp 1 = 4,$$

and in the absence of isotopy it follows from (2) and (3) that  $N_f \Rightarrow 2$ ,  $L \Rightarrow 1$ . The full propagator of auxiliary field  $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k)$  in the case of SU(2)-group and V-A interaction will be

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \delta^{ab} + \pi_{\mu\nu}^{ab} \frac{1-1/8 \xi^2 \ln(-\xi^2 - 10)/C}{1+1/4(N_f-1/2) \xi^2 \ln(-\xi^2 - 10)/C}. \quad (22)$$

Next, write down an auxiliary field propagator obtained from the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -g^2/2(\psi \gamma^\mu \psi)^2;$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + \pi_{\mu\nu}^{ab} \frac{1 + 1/2 \xi^2 \ln(-\xi^2 - 10)/C}{1 + 3/2 \xi^2 \ln(-\xi^2 - 10)/C}. \quad (23)$$

Expressions (22) and (23) do not result from the summation of some partial class of diagrams but represent the exact sum of all leading logarithms of the type  $(\xi^2 \ln \xi^2)^n$  in all orders of perturbation theory. The attempts to sum some classes of diagrams in FFI have already been made earlier [14-17], but with the assumptions not being justified and, consequently, the region of being applicability completely vague. The introduction of non-physical cutting  $\Lambda$  and complicated topological structure of FFI diagrams prevented the summation of all diagrams even in chain approximation. From this point of view introduction of the auxiliary field  $B$  and selection of one-particle irreducible part  $\Pi$ , whose topology in region (8) is rather simple, proved to be extremely useful for calculations. This topological structure is not given as a model assumption but appeared as a result of our principle of selecting leading logarithms (ultraviolet by their origin). The discussions made proved the result of summation to be valid in region (8), which is sufficient for important physical consequences.

6°. The expressions obtained for propagators have a pole singularity in complex  $k^2$ -plane. This singularity corresponds to unstable bound state with quantum numbers of the vector particle.

The expression  $Re[1 + \Pi](k^2) = 0$

defines the particle mass. In this case the equation will take the form

$y(x) = 1 + x(\ln x - c') = 0$ , (24)  
 with  $x = \xi^2$ , and  $a = 3/2$  for VxV interaction and  $a = \frac{1}{4}(N_f - 1/2)$  for V-A interaction with SU(2)-symmetry;  $C' = f_{\text{na}} C$ . Depending on the  $C'$ -values, the graph of function  $y(x)$  will be the same as in Fig. 4.

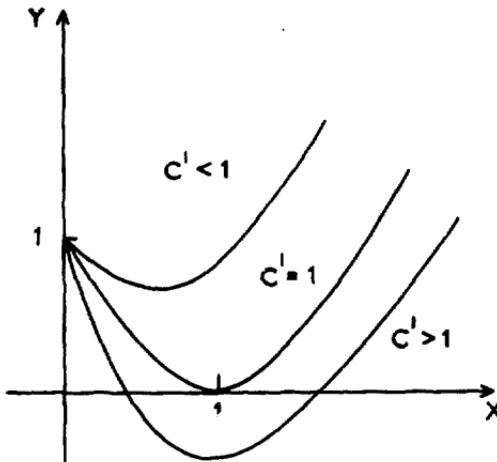


FIG. 4.

Thus, at  $C' > 1$  there exist two solutions of (24), and  $x_1 < 1 < x_2$ . The lesser solution  $x_1$  lies in the region of applicability of the result of the leading logarithms summation and corresponds to the aforesaid vector bound state. The greater solution  $x_2$  lies, generally speaking, beyond this region and its interpretation as a real bound state is not reasonable.

At large  $C'$   $x_1$  and  $x_2$  will have approximate values

$$x_1 \approx 1/C' [1 + \mathcal{O}(\ln C'/C')] \quad (25)$$

$$x_2 \approx e^{C'} + \mathcal{O}(1).$$

In accordance with the notation adopted, mass  $M$  of the bound state corresponding to the smaller solution is equal to:

$$M = \sqrt{\frac{12\pi^2}{C' a g^2}}. \quad (26)$$

The width of the bound state is:

$$\Gamma = \frac{a g^2}{12\pi} M^3. \quad (27)$$

If identify FFI (1) with the weak one/3/, i.e. put  $g^2/2 = 2\sqrt{2} G_F$ , then at  $M = 80$  GeV

$$\Gamma = 0.2 N_c \text{ GeV.}$$

Note, that parallel to isovector bound state in FFI considered there may exist bound states of another spin. Such states will appear as poles of the corresponding scattering amplitudes.

The authors are grateful to B.A. Arbuzov, A.I. Oksak and Yu.F. Pirogov for fruitful discussions.

#### REFERENCES

1. Bogoliubov N.N. and Shirkov D.V. - Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience, New York, 1959.
2. Hung P.Q. and Sakurai J.J. - Nucl. Phys., 1978, 143B, p. 81.
3. Bjorken J.D. - Phys. Rev., 1979, 19D, p. 335.
4. Lee T.D. - Phys. Rev., 1962, 128, p. 899.
5. Arbuzov B.A., Filippov A.T. - JEIP, 1965, 49, p. 990.
6. Arbuzov B.A. Proceedings of the 1970 CERN School of Physics, 1971, CERN-7, Geneva, p. 1.
7. Rochev V.E. - Preprint IHEP 83-27, Serpukhov, 1983.
8. Jackiw R. and Templeton S. - Phys. Rev., 1981, 23D, p. 2291; Templeton S. - Phys. Lett., 1981, 103B, p. 134.
9. Rusev D.G., Sitenko Yu.A., Fomin P.I. - Ukrainian Phys.J., 1982, 27, p. 1790.
10. Okubo S. - Prog. Theor. Phys., 1954, 11, p. 80.
11. Gel'fand I.M. and Shilov G.E. - Generalized Functions, 1964, Vol. 1, Academic Press, New York.
12. Volkov M.K. - Particles and Nuclei (USSR), 1971, 1, p. 33.
13. Arbuzov B.A., Atakishiev N.M., Filippov A.T. - Sov. J. of Nucl. Phys., 1968, 8, p. 385.
14. Polubarinov I.V. - Nucl. Phys., 1958, 8, p. 444.
15. Nambu Y., Jona-Lasinio G. - Phys. Rev., 1961, 122, p. 345.
16. Masleyev N.N., Tikhonin F.F. - Sov. J. of Theor. Math. Phys., 1970, 4, p. 33.
17. Müller J.W.-Z. für Naturforsch., 1970, 25a, p. 1017. .

МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ  
В МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЕХКВАРКОВЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ  
И РАСПАДЫ МЕЗОНОВ

М.К.Волков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

**I. Введение**

В работах <sup>1-4/</sup> было показано, как на основе эффективного лагранжиана с локальным четырехкварковым взаимодействием можно построить известные феноменологические лагранжианы, описывавшие взаимодействия скалярных, псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов при низких энергиях. При введении электромагнитных взаимодействий кварков с фотонами в этом подходе автоматически возникает модель векторной доминантности <sup>7,1,2/</sup>.

Наша модель является развитием идей, изложенных в работах <sup>5-7/</sup>. Опишем кратко основные черты этого подхода. Все мезоны рассматриваются как составные двухкварковые системы. Взаимодействие мезонов друг с другом происходит только через кварковые петли. Через кварковые петли происходит и взаимодействие мезонов с фотонами и  $W$ -бозонами (далее - с лептонами, слабые взаимодействия <sup>12/</sup>). При построении феноменологических мезонных лагранжианов будет рассматриваться только однопетлевое приближение с петлями расходящегося типа. Расходящиеся интегралы устраняются перенормировкой мезонных полей. Эти перенормировки полностью определяют силу взаимодействия мезонов друг с другом - феноменологические мезонные вершины. Все феноменологические вершины, описан-

сывающие сильные взаимодействия скалярных, псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонных квартетов, удается выразить через одну вершину  $\mathcal{J}_p$ , описывающую распад  $\rho \rightarrow 2\pi$  ( $\mathcal{F}_{\rho/2\pi}^2 \approx 3$ ). При этом оказывается, что сильная вершина, описывающая взаимодействие пинов друг с другом и с кварками  $\mathcal{J}_p$ , связана с  $\mathcal{J}_p$  простым соотношением  $\mathcal{J}_p = \sqrt{6} \mathcal{J}$  и равна  $\mathcal{F}_{\rho/4\pi}^2 \approx 1/2$ . Тем самым в секторе, описывающем взаимодействия скалярных и псевдоскалярных мезонов, появляются основания для использования обычной теории возмущений даже при описании сильных взаимодействий <sup>1)</sup>.

В следующем разделе будет показано, как с помощью метода функционального интегрирования из лагранжиана с четырехкварковыми взаимодействиями скалярного и псевдоскалярного типов можно получить обобщенную сигма-модель, описывающую взаимодействие скалярных и псевдоскалярных мезонных квартетов. При этом массы токовых кварков, присутствующие в исходном чисто квартовом лагранжиане с взаимодействием типа ток-ток, после введения бозонных полей заменяются на массы составляющих кварков в лагранжиане, соответствующем обобщенной сигма-модели.

В третьем разделе обсуждаются формулы для масс псевдоскалярных и скалярных мезонов. В четвертом разделе на основе распада  $\rho \rightarrow 3\pi^0$  фиксируется разность масс составляющих  $u$ - и  $d$ -кварков и даются оценки значений масс как составляющих, так и токовых  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков. Отметим, что в нашей модели между значениями масс составляющих и токовых кварков существует однозначная связь.

В пятом разделе обсуждаются распады  $\rho' \rightarrow 3\pi$  и  $\rho' \rightarrow \rho 2\pi$ , близкие к распаду  $\rho \rightarrow 3\pi$ .

В шестом разделе выводятся феноменологические лагранжианы, описывающие взаимодействия векторных и псевдовекторных мезонов, а также взаимодействия этих мезонов со скалярными и псевдоскалярными бозонами.

В седьмом разделе вводятся электромагнитные взаимодействия и показывается, как в нашем подходе возникает модель векторной доминантности.

В восьмом разделе приводятся результаты вычисления ширин ряда распадов мезонов.

1) Аналогичная оценка величины константы  $\mathcal{J}$  получена в работе /8/.

Наконец, в заключении дано краткое обсуждение полученных результатов.

## 2. Обобщенная sigma-модель

Рассмотрим эффективный кварковый лагранжиан с локальным взаимодействием типа ток-ток

$$\mathcal{L}(q, \bar{q}) = \bar{q}(\hat{i}\partial - M_0)q + \frac{G_1}{2}[(\bar{q}_\alpha q)^2 + (\bar{q}_5 \gamma_5 \gamma_\alpha q)^2] - \frac{G_2}{2}[(\bar{q}_\alpha \gamma_\nu \gamma_\lambda q)^2 + (\bar{q}_5 \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\lambda q)^2], \quad (1)$$

где  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$  — цветные кварковые поля (в (1) предполагается суммирование по цветовым индексам);  $\lambda_\alpha$  — матрицы Гелл-Манна ( $0 \leq \alpha \leq 8$ ,  $\lambda_0 = \sqrt{2}I$ );  $M_0 = (m_u m_d m_s)$  — матрица, соответствующая массам токовых кварков. Член с  $M_0$  нарушает киральную симметрию лагранжиана.

С помощью производящего функционала  $W(p, \bar{q})$  можно ввести бозонные поля  $\bar{b}_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha, A_\alpha$ :

$$W(p, \bar{q}) = \frac{1}{N} \int d\bar{q} dq \exp \{ i [\mathcal{L}(q, \bar{q}) + \bar{q} \bar{q} + \bar{q} q] \} = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{N} \int d\bar{q} dq \prod_{\alpha=0}^8 d\bar{b}_\alpha d\varphi_\alpha dV_\alpha dA_\alpha \exp \{ i [\mathcal{L}'(q, \bar{q}, \bar{b}, \varphi, V, A) + \bar{q} \bar{q} + \bar{q} q] \},$$

где

$$\mathcal{L}'(q, \bar{q}, \bar{b}, \varphi, V, A) = \bar{q}(\hat{i}\partial - M_0 + \bar{b} + i\gamma_5 \bar{\varphi} + \hat{V} + \gamma_5 \hat{A})q - \frac{\bar{b}_\alpha^2 + \varphi_\alpha^2}{2C_1} + \frac{V_\alpha^2 + A_\alpha^2}{2C_2}, \quad (3)$$

$$\bar{b} = \lambda_\alpha b^\alpha, \quad \bar{\varphi} = \lambda_\alpha \varphi^\alpha, \quad \hat{V} = \gamma^\mu \lambda_\alpha V_\mu^\alpha, \quad \hat{A} = \gamma^\mu \lambda_\alpha A_\mu^\alpha.$$

После введения мезонных полей в выражении (2) можно провести интегрирование по кварковым полям. В результате под знаком экспоненты возникает феноменологический мезонный лагранжиан <sup>1-41</sup>. Однако можно убедиться, что вакуумное сжатие полей  $\bar{b}_\alpha$ ,  $\bar{b}_5$  и  $\bar{b}_\rho$  в этом лагранжиане не будет равно нулю. Чтобы добиться равенства нулю для вакуумных сжатий у всех полей, следует переопределить поля  $\bar{b}_\alpha$ ,  $\bar{b}_5$  и  $\bar{b}_\rho$ , вводя новые значения масс кварков в лагранжиан (3):

$$\frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 + \tilde{b}_3}{\sqrt{3}} + \tilde{b}_3 - m_u^* + m_u = \frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 + \tilde{b}_3}{\sqrt{3}} + \tilde{b}_3, \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 + \tilde{b}_3}{\sqrt{3}} - \tilde{b}_3 - m_d^* + m_d = \frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 + \tilde{b}_3}{\sqrt{3}} - \tilde{b}_3,$$

$$\frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 - 2\tilde{b}_3}{\sqrt{3}} - m_s^* + m_s = \frac{\sqrt{2}\tilde{b}_0 - 2\tilde{b}_3}{\sqrt{3}}.$$

Новые массы夸克ов  $m_u$ ,  $m_d$  и  $m_s$  определяются условиями

$$\langle \tilde{b}_0 \rangle_0 = \langle \tilde{b}_3 \rangle_0 = \langle \tilde{b}_s \rangle_0 = 0. \quad (5)$$

Как показут дальнейшие оценки, значения масс  $m_u$ ,  $m_d$  и  $m_s$  соответствуют массам составляющих夸克ов. Переход от токовых масс  $m_i^*$  к массам составляющих夸克ов  $m_i$  связан с процессом спонтанного нарушения киральной симметрии. Действительно, на первом этапе поля  $\tilde{b}_0$ ,  $\tilde{b}_3$  и  $\tilde{b}_s$  могут полностью поглотить токовые массы  $m_i^*$  и мы получим кирально-симметричную ситуацию в夸к-чеволовой части лагранжиана (3). Однако поскольку вакуумные ожидания этих полей не равны нулю, нам необходимо вводить новые массы夸克ов  $m_i$ , чтобы обеспечить равенства (5). При этом происходит спонтанное нарушение киральной симметрии.

С новыми полями лагранжиан (3) принимает форму

$$\mathcal{L}' = \bar{q} [i\partial^{\mu} - m_u] \Gamma^{\mu} \mathcal{S}^{\nu} + \tilde{\bar{b}}^{\mu} + i\gamma_5 \bar{\varphi} + \hat{V} + \gamma_5 \hat{A}^{\mu}] q - \frac{\tilde{b}_0^2 + \varphi_0^2}{2G_2} + \frac{V_0^2 + A_0^2}{2G_2}. \quad (3')$$

Здесь введена матрица  $\mathcal{S}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & m_u - m_d \\ m_u - m_s & 0 \end{pmatrix}$ , которую при вычислении夸克овых петель удобно будет объединить с  $\tilde{b}'$ -полями.

Проводя интегрирование по夸克овым полям в (2) с лагранжианом (3'), получаем:

$$W(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{N} \int_{\mu=0}^{\mu_0} \int \prod_{\mu=0}^{\mu_0} d\tilde{b}_0^{\mu} d\varphi^{\mu} dV^{\mu} dA^{\mu} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \tilde{\bar{b}}^{\mu} \left( \tilde{b}^{\mu}, \varphi^{\mu}, V^{\mu}, A^{\mu} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{\eta} \left( i\partial^{\mu} - m_u \right) \mathcal{S}^{\mu} \tilde{\bar{b}}^{\mu} + i\gamma_5 \bar{\varphi} + \hat{V} + \gamma_5 \hat{A}^{\mu} \right] \right\} \eta \right\},$$

где  $\mathcal{L}''(\tilde{\sigma}, \varphi, V, A)$  - эффективный мезонный лагранжиан

$$\mathcal{L}''(\tilde{\sigma}, \varphi, V, A) = -\frac{\tilde{\sigma}_u^2 + \varphi_u^2}{2C_1} + \frac{V_u^2 + A_u^2}{2C_2} - i T_2 m_u \left\{ I_1 + \frac{1}{i\delta - m_u} \left[ \tilde{\sigma}, S + i\gamma_5 \bar{\varphi} + \bar{V} + i\gamma_5 \bar{A} \right] \right\}, \quad (6)$$

Обратимся теперь к определению той части лагранжиана (6), которая описывает взаимодействие скалярных и псевдоскалярных мезонов. Для этого надо рассмотреть расходящиеся кварковые петли с одним, двумя, тремя и четырьмя внешними мезонными концами. Этими диаграммами исчерпывается класс расходящихся диаграмм. Они приводят к следующим выражениям

1.  $-4 I_1 m_u T_2 (\tilde{\sigma} + S),$
  2.  $(2 I_2 - 4 I_2 m_u^2 + \rho^2 I_2) T_2 (\tilde{\sigma} + S)^2 + (2 I_2 + \rho^2 I_2) T_2 (\bar{\varphi}^2),$
  3.  $4 I_2 m_u T_2 \left\{ (\tilde{\sigma} + S) \left[ (\tilde{\sigma} + S)^2 + \bar{\varphi}^2 \right] \right\},$
  4.  $-I_2 T_2 \left\{ [(\tilde{\sigma} + S)^2 + \bar{\varphi}^2] I^2 - [(\tilde{\sigma} + S), \bar{\varphi}] I^2 \right\},$
- где  $\rho$  - импульс мезона,

$$I_1 = -i \frac{3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{m_u^2 - k^2}, \quad I_2 = -i \frac{3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(m_u^2 - k^2)^2}. \quad (8)$$

Возвращаясь к матрице  $M$  (формула (1)) с новыми массами  $m_u$ ,  $m_d$  и  $m_s$ , сумму выражений (7) можно записать в простой форме:

$$I-6 = \left[ \rho^2 I_2 + 2(I_2 + m_u^2 I_2) \right] \left[ \frac{1}{2} \left[ (\tilde{\sigma} - M)^2 + \bar{\varphi}^2 \right] - I_2 T_2 \left\{ [(\tilde{\sigma} - M)^2 + \bar{\varphi}^2] I^2 - [(\tilde{\sigma} - M), \bar{\varphi}] I^2 \right\} \right] -$$

$$- \left[ [(\tilde{\sigma} - M), \bar{\varphi}] I^2 \right]. \quad (9)$$

Производя перенормировку мезонных полей, обеспечивающую правильные коэффициенты при кинетических членах в бозонном лагранжиане (3)

$$\tilde{\sigma}_\alpha = g \tilde{\sigma}_\alpha^R, \quad \varphi_\alpha = g \varphi_\alpha^R, \quad g = (4 I_2)^{-1/2}, \quad (10)$$

приходим к искомому феноменологическому лагранжиану

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{\psi}^R, \psi^R) = & \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \bar{\psi}^R)^2 + (\partial_\mu \psi^R)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{I_2} + m_u^2 \right) T_2 \left[ \left( \bar{\psi}^R \frac{M}{g} \right)^2 + \bar{\psi}^R \psi^R \right] - \\
& - \frac{g^2}{2 C_1} \left[ (\psi_d^R)^2 + \left( \bar{\psi}_d^R - \frac{4m_u + 4m_d + 4m_s}{\sqrt{3}g} \right)^2 + \left( \psi_s^R + \frac{4m_u + 4m_d}{2g} \right)^2 + \left( \bar{\psi}_s^R - \frac{4m_u + 4m_d - 2m_s}{2\sqrt{3}g} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left( \bar{\psi}_u^R \right)_{(u=0,3,8)}^2 \right] - \frac{g^2}{4} T_2 \left[ \left( \bar{\psi}^R \frac{M}{g} \right)^2 + \bar{\psi}^R \psi^R \right]^2 - \left[ \left( \bar{\psi}^R \frac{M}{g} \right), \bar{\psi}^R \psi^R \right]^2 - \\
& - i T_2 \ln f_1 + \frac{g}{i \delta - m_u} \left( \bar{\psi}^R + i f_5 \psi^R \right) \}^{\prime}. \quad (II)
\end{aligned}$$

В последнем члене четырех у фигурной скобки означает, что из квартовых петель, соответствующих  $T_2 \ln f_1$ , вычтены все расходящиеся части. В дальнейшем индекс  $R$  у мезонных полей будет спускаться.

Для удовлетворения условий (5) из лагранжиана (II) получаем уравнения, связывающие значения масс токовых и составляющих квартов

$$m_u^0 = m_u (1 - 8 C_1 I_1),$$

$$m_d^0 = m_d \left\{ 1 - 8 C_1 \left[ I_1 - I_2 (m_d^2 - m_u^2) \right] \right\}, \quad (II)$$

$$m_s^0 = m_s \left\{ 1 - 8 C_1 \left[ I_1 - I_2 (m_s^2 - m_u^2) \right] \right\}.$$

### 3. Массы мезонов

Выпишем квадратичную часть лагранжиана (II) для псевдо-скаллярных мезонов

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m(\psi) = & \left( -\frac{g}{2} + m_u^2 \right) \psi_d^R \psi_d^R - \frac{m_u^2 + m_d^2}{2} \psi_s^R \psi_s^R - 2(m_u^2 - m_u m_d + m_d^2) \bar{K}^+ K^- - \\
& - 2(m_u^2 - m_u m_s + m_s^2) K^+ K^- - 2(m_u^2 - m_d m_s + m_s^2) \bar{K}^0 K^0 + \quad (III)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_d^2 - m_s^2}{\sqrt{3}} \psi_3 (\psi_s + \sqrt{2} \psi_0) - (m_u^2 + m_d^2) \frac{(\psi_s + \sqrt{2} \psi_0)^2}{3} - m_s^2 \frac{(\psi_s - \sqrt{2} \psi_0)^2}{3},
\end{aligned}$$

где  $C = g^2 (\frac{1}{2} C_1 - 8 I_1)$ . Для правильного описания массы мезона  $\eta'$  в лагранжиане (13) следует добавить член  $\frac{d}{2} \varphi_3^2$  с  $d = -8,4 \cdot 10^5$  МэВ<sup>2</sup>. Этот член обусловлен своим возникновением учетом гравитонных явлений [9]. В результате лагранжиан (13) можно будет записать в форме

$$\bar{\mathcal{L}}_m(\varphi) = -\frac{m_{\eta'}^2}{2} \varphi_3^2 - m_{\pi^+}^2 \pi^+ \pi^- - m_{\eta'}^2 K^+ K^- - m_{K^0}^2 \bar{K}^0 K^+ - \frac{m_{\eta'}^2}{2} \eta^2 - \frac{m_{\eta'}^2}{2} \eta'^2 + \frac{m_d^2 - m_u^2}{\sqrt{3}} \varphi_3 (\alpha \eta + \beta \eta'), \quad (14)$$

Здесь  $\alpha = \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta$  и  $\beta = \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta$ , где  $\theta = -11^\circ$  — угол смешивания,

$$\varphi_3 = \eta' \cos \theta - \eta \sin \theta,$$

$$\varphi_3 = \eta' \sin \theta + \eta \cos \theta.$$

Массы мезонов равны:

$$\begin{aligned} m_{\pi^+}^2 &= C + 2m_d(m_d - m_u), \\ m_{\eta'}^2 &= m_{\pi^+}^2 - (m_d - m_u)^2, \\ m_{K^+}^2 &= m_{\pi^+}^2 + 2m_s(m_s - m_u) - 2m_d(m_d - m_u), \\ m_{K^0}^2 &= m_{\pi^+}^2 + 2m_s(m_s - m_d) + 2m_u(m_d - m_u), \\ m_{\eta'}^2 &= \alpha + \beta - [(a - b)^2 + \frac{2}{3}(2m_s^2 - m_u^2 - m_d^2)^2]^{1/2}, \\ m_{\eta'}^2 &= \alpha + \beta + [(a - b)^2 + \frac{2}{3}(2m_s^2 - m_u^2 - m_d^2)^2]^{1/2}, \\ a &= \frac{m_{\pi^+}^2 + d}{2} + m_u m_d + \frac{m_s^2 - 2(m_u^2 + m_d^2)}{3}, \\ b &= \frac{m_{\pi^+}^2}{2} + m_u m_d + \frac{4m_s^2 - 5(m_u^2 + m_d^2)}{6}. \end{aligned} \quad (15)$$

После учета смешивания  $\varphi_3$  с  $\eta$  и  $\eta'$  мезонами, получаем окончательные формулы для массы  $\eta'$ .

$$m_{\pi^+}^2 = \frac{1}{2} \left\{ m_{\eta'}^2 + m_{\eta'}^2 - [(m_{\eta'}^2 - m_{\eta'}^2)^2 + (m_d^2 - m_u^2)^2 \frac{(2d)^2}{3}]^{1/2} \right\},$$

$$m_{\tilde{\pi}^0}^2 = \frac{1}{2} \left[ m_{\tilde{q}^0}^2 + m_{\tilde{q}'}^2 - \left[ (m_{\tilde{q}^0}^2 - m_{\tilde{q}'}^2)^2 + (m_{\tilde{q}^0}^2 - m_{\tilde{q}'}^2)^2 \frac{(2g)^2}{3} \right]^{1/2} \right]. \quad (16)$$

Смешивание  $\varphi_3$  с  $\eta$ -мезоном понижает массу  $\tilde{\pi}^0$  приблизительно на 1 MeV. Смешивание  $\tilde{\pi}^0$  с  $\rho'$  мало влияет на массу  $\tilde{\pi}^0$ .

Для определения величины суммы масс составных  $u$ - и  $d$ -кварков будет использовано соотношение Годбергера-Траймана

$$m_u + m_d = 2g F_\pi \quad (F_\pi = 95 \text{ MeV}). \quad (17)$$

Для определения массы  $\tilde{s}$ -кварка будет использована разность масс  $K^+$  и  $\tilde{\pi}^+$ -мезонов, следующая из (15):

$$m_{\tilde{\pi}^+}^2 - m_{K^+}^2 = 2(m_{\tilde{q}^+} - m_d)(m_{\tilde{q}^+} + m_d - m_u). \quad (18)$$

Наконец, для определения разности масс  $u$ -и  $d$ -кварков будет использована широка распада  $\eta \rightarrow 3\pi^0$ , пропорциональная квадрату разности  $(m_u - m_d)$ . Сразу заметим, что из формул (15) следует правильные знаки для разностей масс  $m_{\tilde{\pi}^0} - m_{K^0}$  и  $m_{\tilde{K}^0} - m_{\pi^0}$ , а именно,  $m_{\tilde{\pi}^0} > m_{K^0}$ , а  $m_{\tilde{K}^0} > m_{\pi^0}$ .

Численные значения для масс составляющих и токовых кварков будут получены в следующем разделе. Здесь мы обсудим еще массовые формулы для скалярных мезонов, следующие из лагранжиана (II)<sup>x</sup>. Квадратичная часть этого лагранжиана, содержащая скалярные мезоны, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(\sigma) = & -\frac{1}{2} \left[ m_\sigma^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + m_{\tilde{\sigma}}^2 (\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2) \right] + \\ & + m_{\sigma_0}^2 \sigma_0^2 + m_{\tilde{\sigma}_0}^2 \tilde{\sigma}_0^2 - (m_{\sigma_0}^2 - m_{\tilde{\sigma}_0}^2) \lg 2g \sigma_0 \tilde{\sigma}_0, \end{aligned} \quad (19)$$

<sup>x</sup>) При выводе массовых формул для скалярных частиц будем пренебречь малой разностью масс  $u$  и  $d$  кварков.

где

$$\begin{aligned} m_{\delta}^2 &= m_{\bar{K}}^2 + 4m_u^2, & m_{\bar{K}}^2 &= m_{\bar{K}}^2 + 2m_s(m_s + m_u), \\ m_{\bar{b}_0}^2 &= m_{\bar{K}}^2 + 2(m_s^2 + m_u^2), & m_{\bar{b}_0}^2 &= m_{\bar{K}}^2 + 4m_s^2. \end{aligned} \quad (20)$$

При тех значениях кварковых масс, которые будут получены в следующем разделе, можно видеть, что массы  $\bar{b}_0$ - и  $\bar{b}_s$ -мезонов хорошо согласуются с массами скалярных  $\mathcal{S}^0$ - и  $\mathcal{S}^+$ -резонансов ( $m_{\bar{b}_0} = 760$  МэВ,  $m_{\bar{b}_s} = 950$  МэВ;  $m_s = 770$  МэВ,  $m_s^+ = 975$  МэВ). В то же время массы  $\bar{\delta}$ - и  $\bar{K}$ -мезонов, следующие из (20) ( $m_{\bar{\delta}} = 500$  МэВ,  $m_{\bar{K}} = 840$  МэВ), существенно меньше экспериментальных значений. Возможно, это является следствием того факта, что в  $\bar{\delta}$ - и  $\bar{K}$ -мезонах большой вклад дает четырех夸克овые состояния /10/.

В лагранжиане (19) содержится недиагональный член, приводящий к идеальному смешиванию  $\bar{b}_0$ - и  $\bar{b}_s$ -мезонов:

$$\tan 2\chi_0 = \frac{4\sqrt{2}(m_s^2 - m_u^2)}{m_{\bar{b}_s}^2 - m_{\bar{b}_0}^2} = 2\sqrt{2}.$$

Подобная ситуация имела место и в лагранжиане (13) для псевдоскалярных мезонов. Идеальное смешивание нарушалось там членом  $\frac{1}{2}g_0^2$ , возникшим после учета глюонных аномалий.

В случае скалярных мезонов идеальное смешивание  $\bar{b}_0$ - и  $\bar{b}_s$ -мезонов тоже невозможно, поскольку в этом случае  $\mathcal{S}^+$ -мезон состоял бы только из странных夸克ов и распад  $\mathcal{S}^+ \rightarrow 2\pi$  был бы невозможен. Отклонение  $\chi$  от значения идеального угла смешивания  $\chi_0$  может произойти за счет учета аннигиляционного канала в скалярной части четырех夸кового лагранжиана (I). Для этого в лагранжиане (I) следует включить члены вида

$$g^2(\bar{q} \lambda_u q)(\bar{q} \lambda_s q), \text{ где } \lambda_u = \frac{\sqrt{2} \lambda_0 + \lambda_2}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_s = \frac{\lambda_0 - \sqrt{2} \lambda_2}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Найдем угол  $\chi$ , который соответствует экспериментальному значению ширины распада  $\mathcal{S}^+ \rightarrow 2\pi$  /II/:

$$\mathcal{S}^+ \rightarrow 2\pi = 26 \text{ МэВ.}$$

Та часть лагранжиана (II), которая описывает такие распады, имеет вид

$$\mathcal{L}(\varepsilon, \mathcal{S}^+, \pi) = \frac{2}{13} g m_u (\bar{b}_s + \sqrt{2} \bar{b}_0) \vec{\pi}^2 - 2 g m_u (\cos(\chi_0 - \chi) \varepsilon + \sin(\chi_0 - \chi) \mathcal{S}^+) \vec{\pi}^2. \quad (22)$$

С учетом физического угла смешивания  $\gamma$  массы  $\varepsilon$ - и  $\pi^0$ -мезонов и ширин распадов  $\varepsilon \rightarrow 2\pi$  и  $\pi^0 \rightarrow 2\pi$  принимают вид

$$\begin{aligned} m_\varepsilon^2 &= m_{\pi^0}^2 + (m_{\pi^0}^2 - m_\varepsilon^2) [2 \sin^2 \gamma - \sin 2\gamma \operatorname{tg} 2\gamma], \\ m_{\pi^0}^2 &= m_{\pi^0}^2 + (m_{\pi^0}^2 - m_\varepsilon^2) [2 \cos^2 \gamma + \sin 2\gamma \operatorname{tg} 2\gamma], \\ \Gamma_{\varepsilon \rightarrow 2\pi} &= \cos^2(\gamma_0 - \gamma) \frac{3(gm_\varepsilon)^2}{2\pi m_\varepsilon} \left[ 1 - \left( \frac{2m_\varepsilon}{m_\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\pi} &= \sin^2(\gamma_0 - \gamma) \frac{3(gm_\varepsilon)^2}{2\pi m_{\pi^0}} \left[ 1 - \left( \frac{2m_\varepsilon}{m_{\pi^0}} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Если выбрать для константы  $g$  значение, полученное в работах  $\Gamma=4,71$ ,  $g = 80/66$  ( $g^2 = 2/3$ ), а для масс квarkов взять значения, следующие из формул (17) и (18) ( $m_u = 240$  MeV,  $m_s = 476$  MeV), то для  $\gamma = 12^\circ$  получаем

$$m_\varepsilon = 750 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} = 965 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\varepsilon \rightarrow 2\pi} = 180 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\pi} = 26 \text{ MeV} \quad (24)$$

Здесь все величины хорошо соответствуют эксперименту, кроме ширин распада  $\varepsilon \rightarrow 2\pi$ . Если считать соотношение  $g_p = \sqrt{6} g$  приближенным и взять несколько большие значения для масс квarkов  $m_u = 280$  MeV,  $m_s = 500$  MeV,  $g = m_u/f_\pi \approx 80/66$ , то при  $\gamma = 18^\circ$  получаем:

$$m_\varepsilon = 800 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} = 1030 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\varepsilon \rightarrow 2\pi} = 350 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\pi} = 26 \text{ MeV} \quad (25)$$

#### 4. Распады $\rho \rightarrow 3\pi$ и массы квarkов

Перейдем теперь к описанию распадов  $\rho \rightarrow 3\pi$  и  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ . По ширине первого распада будем определять разность квarkовых масс  $m_u$  и  $m_d$ .

Выпишем ту часть лагранжиана (II), которая потребуется для описания вышеупомянутых распадов

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h, \varphi, \varepsilon, \delta) &= -\frac{g^2}{2} (h^2)^2 + 2g \{ (2m\delta^0 - 4\varepsilon) h^0 \varphi + (m\varepsilon - \frac{1}{2}\delta^0) (\varphi^0 + h^0) + \\ &+ 2m(\delta^+ h^- + \delta^- h^+) \varphi + 4 \{ h^0 (h^- \delta^+ + h^+ \delta^-) - h^+ h^- \delta^0 \} \} + \\ &+ m^2 (\varphi h^0 + 3\varepsilon \delta^0), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Delta = m_d - m_u, \quad 2m = m_u + m_d, \quad g = \frac{m}{F_K},$$

$$M^2 = m_d^2 - m_u^2, \quad \varepsilon = \frac{\bar{b}_g + \bar{b}_g'}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\alpha \eta + \beta \eta'}{\sqrt{3}}.$$

Приведенное здесь выражение для  $\varepsilon$ -резонанса соответствует случаю идеального смешивания компонент  $\bar{b}_g$  и  $\bar{b}_g'$ , следующего из лагранжиана (II). Для простоты мы сначала рассмотрим этот случай, а затем перейдем к описанию более физической ситуации, рассмотренной в конце предыдущего раздела.

Импульс распада  $\eta \rightarrow 3\bar{\pi}$  определяется тремя группами диаграмм, изображенных на рис. I

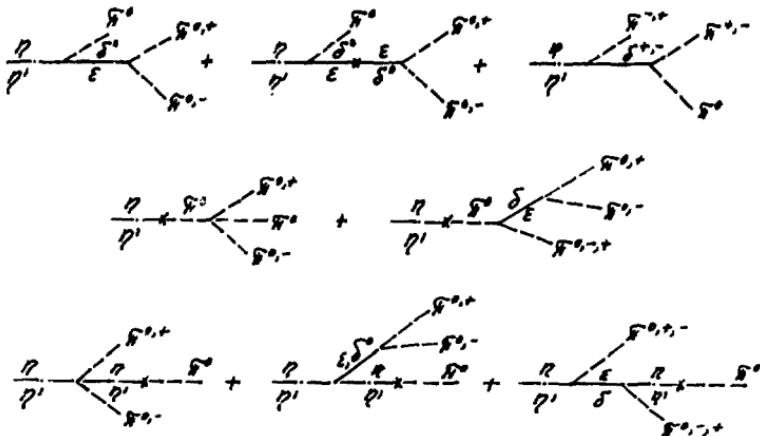


Рис. I. Диаграммы, описывавшие распады  $\eta \rightarrow 3\bar{\pi}$  и  $\eta' \rightarrow 3\bar{\pi}$ .

Предполагая, что  $\Delta \ll 2m$ , получаем для амплитуды распада  $\eta \rightarrow 3\bar{\pi}^0$  выражение

$$T_{\eta \rightarrow 3\bar{\pi}^0} = - \frac{\alpha g^2}{\sqrt{2} F_K^2} \alpha, \quad (27)$$

где

$$a = U + V - 3UV + \frac{(2m)^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} (V-1) + \\ + \frac{(2m)^2}{3} \left( \frac{\alpha^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} + \frac{\beta^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} \right) (3 - V - 2U), \quad (28)$$

$$V = \frac{(2m)^2}{m_\pi^2 - S_0}, \quad U = \frac{(2m)^2}{m_\delta^2 - S_0}, \quad S_0 = m_\pi^2 + \frac{m_\eta^2}{3}.$$

При описании распада  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ , помимо диаграмм, изображенных на рис.1, следует принять во внимание также диаграмму с промежуточным  $\rho$ -мезоном (рис.2) <sup>x)</sup>

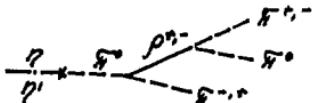


Рис.2. Дополнительная диаграмма, описывающая распад  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ .

В распад  $\rho \rightarrow 3\pi^0$  такие диаграммы не дают вклада, однако они почти полностью определяют величину параметра наклона процесса  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ . Амплитуда этого распада равна

$$T_{\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = -\alpha \frac{N^2}{13 f_\pi^2} \left( \alpha - \beta \frac{S_0 - S_\rho}{m_\rho^2} \right), \quad (29)$$

где

<sup>x)</sup> Лагранжиан, описывающий взаимодействие  $\rho$ -мезонов с пionами, будет получен в шестом разделе.

$$B = \left(\frac{m_\eta}{2m}\right)^2 \left\{ 3U(Z+UV) - Z - 4U^2 - \frac{(2m)^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} \left( Z + \frac{3(2m)^2}{2(m_\eta^2 - S_0)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(2m)^2}{3} \left( \frac{\alpha^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} + \frac{\beta^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} \right) (Z - U^2) \right\}, \quad (30)$$

$$Z = V^2, \quad S_3 = (p_\eta - p_{\pi^0})^2.$$

Посмотрим, какие значения  $\Delta$  получаются в случае идеального смещивания полей  $\bar{b}_0$  и  $\bar{b}_\rho$  и при той связи констант  $g$  и  $g_\rho$ , которая получена в <sup>1-4,71</sup>:  $g_\rho = \sqrt{6}g$ . Из (17) следует, что  $2m = 480$  МэВ, а из (20) и (23)  $m_\rho^2 = m_\pi^2 + 4m^2$ ,  $m_\rho = 500$  МэВ. Для остальных масс можно использовать их экспериментальные значения <sup>111</sup>. Тогда при  $\Delta = m_\eta - m_\pi = 3,5$  МэВ получаем

$$\Gamma_{\eta \rightarrow 3\pi^0} = 0,31 \text{ КэВ}, \quad \Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0,19 \text{ КэВ}, \quad \bar{b}_\eta = \frac{6}{9} = -0,17, \quad (31)$$

где  $\Gamma$  — ширины распадов,  $\bar{b}_\eta$  — параметр наклона. Экспериментальные значения равны <sup>111</sup>.

$$\Gamma_{\eta \rightarrow 3\pi^0} = 0,25 \pm 0,04 \text{ КэВ}, \quad \Gamma_{\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0,20 \pm 0,03 \text{ КэВ}, \quad \bar{b}_\eta = -0,19 \pm 0,02. \quad (32)$$

Из формулы (15) следует, что  $m_{\pi^0} > m_{\eta^0}$ , но значение этой разности значительно меньше экспериментального.

Рассмотрим теперь случай, соответствующий более реальному смещению полей  $\bar{b}_0$  и  $\bar{b}_\rho$ . При  $\gamma = 12^\circ$  в формулах (28) и (30) необходимо сделать следующие замены:

$$V \rightarrow V' = (2m)^2 \left[ \frac{\cos^2(\theta - \gamma)}{m_\pi^2 - S_0} + \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{(m_\rho^2 - S_0)^2} \right], \quad (33)$$

$$Z \rightarrow Z' = (2m)^2 \left[ \frac{\cos^2(\theta - \gamma)}{(m_\pi^2 - S_0)^2} + \frac{\sin^2(\theta - \gamma)}{(m_\rho^2 - S_0)^2} \right].$$

Тогда при значениях масс  $m_\varepsilon$  и  $m_{\mu^0}$ , приведенных в (24) и при  $\Delta = 5$  МэВ, получаем

$$\Gamma_{\rho \rightarrow 3\pi^0} = 0.27 \text{ кэВ}, \Gamma_{\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0.16 \text{ кэВ}, \bar{b}_\rho = -0.18. \quad (34)$$

Считая такое согласие с экспериментальными данными вполне удовлетворительным, приходим к следующим значениям масс составляющих кварков:

$$m_u = 237,5 \text{ МэВ}; m_d = 242,5 \text{ МэВ}; m_{\mu^0} = 476 \text{ МэВ}. \quad (35)$$

Если для регуляризации интегралов (8) использовать обрезание на верхнем пределе при  $\Lambda = 1130$  МэВ, что соответствует значению  $g^2 = g_{\pi^0}^2 = 2\pi$ , то из формулы (12) получается следующие оценки для масс токовых кварков:

$$m_u' = 3,8 \text{ МэВ}; m_d' = 5,1 \text{ МэВ}; m_{\mu^0}' = 160 \text{ МэВ}. \quad (36)$$

Полученные оценки вполне соответствуют современным представлениям о величинах масс составляющих и токовых кварков <sup>12)</sup>.

В заключение этого раздела рассмотрим еще случай, когда  $2m = 560$  МэВ и  $g_\rho \neq \sqrt{2\pi} g$ . Тогда при  $\gamma = 18^\circ$ ,  $\Delta = 4$  МэВ и массах  $m_\varepsilon$  и  $m_{\mu^0}$ , данных в (25), получаем:

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = 0.16 \text{ кэВ},$$

$$m_u = 278 \text{ МэВ}, m_d = 282 \text{ МэВ}, m_{\mu^0} = 503 \text{ МэВ}, \Gamma_{\rho \rightarrow 3\pi^0} = 0.27 \text{ кэВ}, \quad (37)$$

$$m_u' = 4,6 \text{ МэВ}, m_d' = 5,9 \text{ МэВ}, m_{\mu^0}' = 180 \text{ МэВ}, \bar{b}_\rho = -0,22.$$

### 5. Распады $\rho' \rightarrow 3\pi$ и $\rho' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ .

Механизмы распадов  $\rho' \rightarrow 3\pi$  и  $\rho' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  очень близки и только что описанному распаду  $\rho \rightarrow 3\pi$ . Поэтому есть смысл сразу же описать и эти процессы.

Начнем с распадов  $\rho' \rightarrow 3\pi^0$  и  $\rho' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ . Их амплитуды полностью аналогичны амплитудам (27) и (29), только  $\alpha$  теперь следует заменить на  $\beta$ , а  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_5$ ,  $\rho_{\eta\eta}$  и  $m_\eta$  — заменить на  $\rho_{\eta\eta'}$  и  $m_{\eta'}$  и в четвертых членах в  $\alpha$  и  $\beta$  (формулы (28) и (30)) в знаменателях  $m_\eta$  надо заменить на  $m_{\eta'}$ . Тогда для случая  $2m = 480$  МэВ и  $\gamma = 12^\circ$  получаем:

$$\Gamma_{\rho' \rightarrow 3\pi^0} = 2,6 \text{ кэВ}; \Gamma_{\rho' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} = \frac{2}{3} \Gamma_{\rho' \rightarrow 3\pi^0}; \bar{b}_{\eta'} = -0,08. \quad (38)$$

Для случая  $2m = 560$  МэВ и  $\gamma = 18^\circ$  получаем:

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow 3\pi^0} = 1,4 \text{ кэВ}; \Gamma_{\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0} \approx \frac{2}{3} \Gamma_{\eta' \rightarrow 3\pi^0}; \bar{G}_{\eta'} = -0,12. \quad (39)$$

Заметим, что эти оценки довольно близки к значениям, полученным в работе <sup>191</sup>.

Рассмотрим наконец распады  $\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0$ . Величины этих распадов определяются диаграммами, подобными тем, которые изображены на рис. Iв, только без перехода последнего  $\eta$ -мезона в  $\pi^0$ . Амплитуда распада  $\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0$  имеет вид

$$T_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0} = d \beta \frac{(2g)^2}{3\sqrt{2}} \left( \bar{\alpha} - \bar{\beta} \frac{S_3^0 - S_3^+}{2m_{\eta'}} \right) = d \beta \frac{(2g)^2}{3\sqrt{2}} \left( \bar{\alpha} + \bar{\beta} T_{\eta'} \right), \quad (40)$$

где  $S_3^0 = (\rho_{\eta'} - \rho_{\eta})^2$ ;  $S_3^+ = (m_{\eta'} - m_{\eta})^2$ ;  $S_3^- = (m_{\eta'} - m_{\eta^0})^2$ ;  $T_{\eta'} = (\omega_{\eta} - m_{\eta})$  — кинетическая энергия  $\eta$ -мезона, а  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  равны

$$\bar{\alpha} = -3 + (2m)^2 \left[ \frac{\cos^2(\chi_{\eta} - \chi)}{m_{\eta}^2 - S_3^0} + \frac{\sin^2(\chi_{\eta} - \chi)}{m_{\eta^0}^2 - S_3^0} + \frac{d}{m_{\eta}^2 - S_3^0} + \frac{2}{m_{\eta}^2 - S_3^0 m_{\eta^0}^2} \right] + \frac{m_{\eta} (m_{\eta} + 3m_{\eta^0} - m_{\eta^0})}{m_{\eta}^2 - S_3^0 + m_{\eta^0}^2 m_{\eta'}^2}, \quad (41)$$

$$\bar{\beta} = -2m_{\eta} (2m)^2 \left[ \frac{\cos^2(\chi_{\eta} - \chi)}{(m_{\eta}^2 - S_3^0)^2} + \frac{\sin^2(\chi_{\eta} - \chi)}{(m_{\eta^0}^2 - S_3^0)^2} + \frac{d}{(m_{\eta}^2 - S_3^0)^2} - \frac{1}{(m_{\eta}^2 - S_3^0 + m_{\eta^0}^2 m_{\eta'}^2)^2} \right].$$

В формулах (41) помимо диаграмм с промежуточными  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  и  $\pi^-$ -мезонами учтена также диаграмма с промежуточным  $\pi^0$  (1300)-мезоном. Поправочный коэффициент  $d$  выбирается из условия, чтобы эффективный лагранжиан типа (22)

$$\mathcal{L}(\varepsilon', \pi) = 2\sqrt{d} g m \varepsilon' \pi^2 \quad (42)$$

правильно описывал распад  $\varepsilon' \rightarrow 2\pi^0$ , средняя ширина которого равна  $\sim 400$  МэВ <sup>111</sup>.

Для случая  $2m = 480$  МэВ,  $\chi = 12^\circ$  получаем ( $d = 3$ )

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0} = 125 \text{ кэВ}; \Gamma_{\eta' \rightarrow \eta 2\pi^0} = 3 \Gamma_{\eta' \rightarrow 0\pi^0\pi^0}; \bar{G}_{\eta'} = 0,07 \text{ МэВ}^{-1} \quad (43)$$

Экспериментальные значения равны <sup>111,13</sup>

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta_2 \pi^0} = 61 \pm 22 \text{ кзВ}, \quad \Gamma_{\eta' \rightarrow \eta_2 \pi^0} = 183 \pm 65 \text{ кзВ}, \quad B_{\eta'} = (-0.48 \pm 0.18) m_b^{-1} \quad (44)$$

Значительно лучше получаются результаты для случая  $2m = 560$  МэВ,  $\chi = 18^\circ$  ( $d = 1,6$ )

$$\Gamma_{\eta' \rightarrow \eta_2 \pi^0} = 78 \text{ кзВ}; \quad \Gamma_{\eta' \rightarrow \eta_2 \pi^0} = 234 \text{ кзВ}; \quad B_{\eta'} = -0.2 m_b^{-1}. \quad (45)$$

## 6. Векторные и псевдовекторные мезоны

Обратимся теперь к описанию взаимодействия векторных и псевдовекторных мезонов. В предыдущем разделе мы видели, что при описании синглет-октетных компонент скалярных и псевдоскалярных мезонов, в конечных результатах всегда возникало идеальное смешивание этих компонент. Однако учет глюонных аномалий и аннигиляционных каналов приводит к заметному отклонению от идеального смешивания. Поскольку при описании векторных и псевдовекторных мезонов таких причин для отклонения от идеального угла смешивания возникать не должно, нам будет удобно в лагранжианах (1) и (3) сразу работать с матрицами  $\lambda_u$  и  $\lambda_g$  (см. (21)) вместо  $\lambda$  и  $\lambda_g$  и компонентами  $V_u(A_u)$ ,  $V_g(A_g)$  вместо  $V_u(A)$  и  $V_g(A_g)$ . Тогда, как мы убедимся ниже, в квадратичной части эффективного мезонного лагранжиана не будет возникать недиагональных членов.

Суммируя расходящиеся петлевые диаграммы с двумя, тремя и четырьмя векторными концами, приходим к выражению

$$-\frac{1}{3} I_2 T^2 \{ \bar{V}_{\mu\nu} - i [\bar{V}_\mu, \bar{V}_\nu] \}^2,$$

где  $\bar{V}_{\mu\nu} = \lambda_u [2_\mu V_\nu - 2_\nu V_\mu] + i [\bar{V}_\mu, \bar{V}_\nu]$  — коммутатор операторов  $\bar{V}_\mu = \lambda_u V_\mu^u$ . После проведения перенормировки  $V_\mu^u = \sqrt{\frac{3}{2}} g V_\mu^R$

лагранжиан, описывающий взаимодействия векторных полей, приводится к виду<sup>1)</sup>

1) Для упрощения записи формула индекс  $R$  у полей  $V_\mu^R$  будет опускаться в дальнейшем. При использовании градиентно-неинвариантной регуляризации получаем  $m_v^2 = \frac{3}{2} g^2 \left[ \frac{1}{C_x} - 4(I_1 + m_u^2 I_2) \right]^{1/2}$ .

$$\mathcal{L}(V) = \frac{m_\nu^2}{2} (V_\mu^\nu)^2 - \frac{i}{8} T_2 \left\{ \bar{V}_{\mu\nu} - i \frac{g_P}{2} [\bar{V}_{\mu\nu}, \bar{V}_\nu] \right\}^2 - i T_2 \ln \left\{ 1 + \frac{i}{\delta - m_\nu} \frac{g_P}{2} \bar{V} \right\}, \quad (46)$$

где  $g_P = \sqrt{6} g$ ,  $m_\nu^2 = \frac{3}{2} \frac{g^2}{G_2}$ .

Рассматривая расходящиеся треугольные и четырехугольные диаграммы смешанного типа, где помимо векторных мезонов участвуют во взаимодействии также скалярные и псевдоскалярные мезоны (рис.3), приходим к следующему лагранжиану взаимодействия:

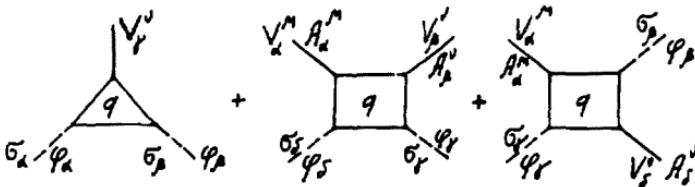


Рис.3. Диаграммы, описывающие взаимодействия смешанного типа баронов, фермионов и векторов.

$$\mathcal{L}(\bar{b}, \bar{\varphi}, V) = \frac{i}{4} T_2 \left\{ \bar{D}_\mu \left( \bar{b} - \frac{m}{g} \right) \bar{D}^\mu \left( \bar{b} - \frac{m}{g} \right) + \bar{D}_\mu \bar{\varphi} \bar{D}^\mu \bar{\varphi} \right\}, \quad (47)$$

где  $\bar{D}_\mu \bar{a} = \partial_\mu \bar{a} - i \frac{g_P}{2} [\bar{V}_\mu, \bar{a}]$  — ковариантная производная от скалярных и псевдоскалярных полей. В полученный лагранжиан содержатся члены, описывающие распад  $\rho \rightarrow 2\pi$ , по ширине которого фиксируется константа  $g_P$  ( $g_P^2/4\pi \approx 3$ ). Если предположить, что константы  $g_P$  и  $G_2$  одинаковы для взаимодействий всех сортов夸克ов, то из лагранжианов (46) и (47) получается следующие формулы для масс векторных мезонов:

$$m_\rho^2 = m_\omega^2 = m_\rho^2 = \frac{3g^2}{2G_2}, \quad m_{\kappa^*}^2 = m_\rho^2 + \frac{3}{2}(m_\rho - m_\omega)^2. \quad (48)$$

При этом  $\rho$ - и  $\omega$ -мезоны состоят только из  $u$ - и  $d$ -кварков, а  $\varphi$ -мезон - из  $s$ -кварков. Равенство масс  $\rho$ ,  $\omega$ - и  $\varphi$ -мезонов не соответствует эксперименту. Согласие с экспериментом можно получить, вводя с помощью тождеств Голдбергера - Траймана различные  $g$  для различных сортов кварков, а именно<sup>1)</sup>

$$g_{u,d} = \frac{m}{F_\pi} \text{ (см. (17))}, \quad g_\rho = \frac{m_\rho}{F_\rho} (F_\rho = F_\pi), \quad g_K = \frac{m_\rho m_\pi}{2 F_K}.$$

Тогда для значений  $2m = 560$  МэВ;  $m_\rho = 503$  МэВ;  $F_\pi = 1,26 F_\rho$ ;  $F_\rho = F_\pi = 1,35 F_K$  (см. 123/), получаем из (48)

$$m_\varphi = m_\rho \frac{m_\pi F_\pi}{m F_\rho} = 1024 \text{ МэВ}, \quad m_{K^*} = \left[ \left( \frac{m_\rho m_\pi}{2m} \right)^2 F_\rho^2 m_\rho^2 + \frac{3}{2} (m_\rho - m)^2 \right]^{1/2} = 897 \text{ МэВ}.$$

Экспериментальные значения равны  $m_\varphi = 1020$  МэВ,  $m_{K^*} = 892$  МэВ.

Перейдем теперь к описанию взаимодействия псевдовекторных мезонов. Они описываются расходящимися кварковыми петлями только двух типов - с двумя и четырьмя внешними мезонными концами. После проведения перенормировки, совпадающей с перенормировкой векторных полей  $A_\mu = \frac{g}{2} A_\mu^a$ , для псевдовекторного лагранжиана получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A) = & \frac{(m_\rho^2 + 6m_\pi^2)}{2} (A_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4} (A_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{g^2}{32} T_2 \{ [ \bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu ]_- \}^2 - \\ & - i T_2 \ln \left\{ 1 + \frac{i}{\delta - m_\pi^2} \frac{g^2}{2} \hat{\bar{A}} \hat{A}_\mu \right\}'. \end{aligned} \quad (49)$$

Взаимодействие псевдовекторных мезонов с псевдоскалярными мезонами описывается расходящимися диаграммами только четырехугольного типа (рис. 3б, в). Они приводят к лагранжиану вида

<sup>1)</sup>Неравенства  $g_\rho > g_{u,d}$ ,  $g_K > g_{u,d}$  следуют также из формулы (10), если учесть зависимость  $I_2$  от масс кварков. Для  $2m = 480$  МэВ согласие с экспериментом получается при  $F_K = 1,35 F_\pi$ ,  $F_\rho = 1,5 F_\pi$ .

$$\mathcal{L}(\varphi, A) = \frac{g^2}{16} T_2 \left\{ \bar{\varphi}, \bar{A}_\mu \right\}_+^2, \quad (50)$$

где под знаком  $T_2$  стоит квадрат антикоммутатора.

В лагранжиан взаимодействия скалярных и псевдоскалярных мезонов дает вклад расходящиеся диаграммы как треугольного, так и четырехугольного типов (рис.4,3б,в). Их совместный вклад имеет вид

$$\mathcal{L}(\bar{B}, A) = -3m^2 (A_\mu^\mu)^2 + g^2/16 T_2 \left\{ \left( \bar{B} - \frac{M}{g} \right), \bar{A}_\mu \right\}_+^2 \quad (51)$$

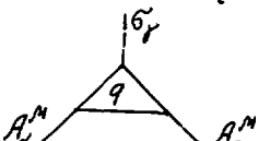


Рис.4. Треугольная диаграмма, описывающая взаимодействие скалярных и псевдовекторных мезонов.

Из лагранжианов (49) и (51) получаем следующие формулы для масс псевдовекторных мезонов:

$$m_{A_1}^2 = m_\rho^2 + 6m_u^2, \quad m_{A_2}^2 = m_\rho^2 + \frac{3}{2}(m_s + m_u)^2, \quad (52)$$

$$m_{A_4}^2 = m_\rho^2 + 6m_u^2, \quad m_{A_5}^2 = m_\rho^2 + 6m_s^2,$$

что приводит к таким численным оценкам ( $2m = 480$  МэВ):

$$m_{A_1} \approx 113 \text{ МэВ}; \quad m_{A_2} \approx 1200 \text{ МэВ}; \quad m_{A_4} \approx 113 \text{ МэВ}; \quad m_{A_5} \approx 1400 \text{ МэВ}.$$

Экспериментальные значения масс псевдовекторных мезонов равны <sup>11/</sup>

$$m_{A_1} = 1175 \text{ МэВ}; \quad m_{A_2} = 1230 \text{ МэВ}; \quad m_{A_4} = 1283 \text{ МэВ}; \quad m_{A_5} = 1418 \text{ МэВ}.$$

В заключение этого раздела приведем еще лагранжианы, описывающие смешанные взаимодействия мезонов  $\bar{B}, \varphi, A$  и  $\varphi, A, V$ .

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, A) = \frac{g^2}{4} T_2 \left( \bar{A}_\nu \left[ \left\{ \bar{\psi}, 2, \bar{\psi} \right\}_+ - \left\{ 2, \bar{\psi}, \bar{\psi} \right\}_+ \right] \right), \quad (53)$$

$$\mathcal{L}(\psi, A, V) = i \frac{3}{4} g T_2 \left( \left\{ \bar{A}_\nu, \bar{\psi} \right\}_+ [M, \bar{V}]_- - \left\{ \bar{A}_\nu, M \right\}_+ [\bar{\psi}, \bar{V}]_- \right).$$

Общий лагранжиан для всех рассмотренных здесь взаимодействий можно записать в очень компактной форме, следуя работе

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, V, A) = & -\frac{1}{8} T_2 \left( G_\nu^{\mu\nu} G_{\nu\mu\nu} \right) - \frac{1}{8} T_2 \left( G_\mu^{\mu\nu} G_{\mu\nu\nu} \right) + \\ & + \frac{1}{4} T_2 \left( \partial_\mu \left( \bar{\psi} - \frac{M}{g} \right) - \frac{g^2}{2} \left\{ \bar{A}_\mu, \bar{\psi} \right\}_+ \right)^2 + \frac{1}{4} T_2 \left( \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{g^2}{2} \left\{ \bar{A}_\mu, \left( \bar{\psi} - \frac{M}{g} \right) \right\}_+ \right)^2 \end{aligned} \quad (54)$$

$$G_\nu^{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{V}^\nu - \partial_\nu \bar{V}^\mu - i \frac{g^2}{2} \left( [\bar{V}^\mu, \bar{V}]_- + [\bar{A}^\mu, \bar{A}^\nu]_- \right),$$

$$G_\mu^{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}^\nu - \partial_\nu \bar{A}^\mu - i \frac{g^2}{2} \left( [\bar{A}^\mu, \bar{V}]_- + [\bar{V}^\mu, \bar{A}^\nu]_- \right),$$

а  $\partial_\mu \bar{\psi}$  — ковариантная производная (см. (47)).

#### 7. Электромагнитные взаимодействия и первая компактность

Электромагнитные взаимодействия вводятся в нашей модели градиентно-инвариантным способом на основе исходного кваркового лагранжиана (1). Поэтому на начальном этапе фотоны могут взаимодействовать с заряженными мезонами только через кварковые петли. В отличие от мезонов, являющихся составными объектами, кинетический член для фотонов вводится самостоятельно в лагранжиан (1). Учет кварковых петель приводит только к перенормировке электромагнитных полей и заряда.

Часть лагранжиана, описываемая электромагнитными взаимодействиями

вия, имеет вид

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{Э.М.}} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}')^2 - i T_2 \ln \left\{ 1 - \frac{e}{i\delta - m_u} Q \hat{A}' \right\},$$

где

$$F_{\mu\nu}' = \partial_\mu A_\nu' - \partial_\nu A_\mu', \quad Q = \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \frac{\lambda_4}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \frac{\lambda_4 - \sqrt{2}\lambda_5}{3} \right).$$

Здесь  $Q$  – оператор заряда кварков.

$$\gamma_{\mu} \circlearrowleft q \circlearrowright k + \gamma_{\mu} \circlearrowleft q \circlearrowright p^\circ + \gamma_{\mu} \circlearrowleft q \circlearrowright \omega + \gamma_{\mu} \circlearrowleft q \circlearrowright \varphi$$

Рис.5. "Расходящиеся кварковые петли с внешними фотонами"  
 $A = p$ -,  $\omega$ - и  $\varphi$ -мезонами.

После вычисления расходящейся собственно энергетической диаграммы фотона (рис.5а) получаем следующее выражение для  $\bar{\mathcal{L}}_{\text{Э.М.}}$ .

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{Э.М.}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - i T_2 \ln \left\{ 1 - \frac{e'}{i\delta - m_u} Q \hat{A}' \right\},$$

где

$$A_\mu = \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{e^2}{g_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_\mu', \quad e' = \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{e^2}{g_p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e. \quad (55)$$

Помимо собственно энергетических диаграмм с участием фотона имеются еще расходящиеся диаграммы смешанного типа, описываемые переходами  $\gamma p^\circ$ ,  $\gamma \omega$  и  $\gamma \varphi$  (рис. 5б, в, г.). Учет этих диаграмм приводит к возникновению в лагранжиане членов вида

$$\frac{1}{2} \frac{e'}{g_p} F_{\mu\nu} \left( p_{\mu\nu}^\circ + \frac{1}{3} \omega_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi_{\mu\nu} \right).$$

В результате та часть лагранжиана, которая описывает электромагнитные взаимодействия мезонов и кварков, принимает форму

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Э.М.}} = & \frac{m_p^2}{2} (\omega_{\mu}^2 + p_{\mu}^{\circ 2}) + \frac{m_\varphi^2}{2} \varphi_{\mu}^2 - \frac{1}{4} (p_{\mu\nu}^{\circ 2} + \omega_{\mu\nu}^2 + \varphi_{\mu\nu}^2 + F_{\mu\nu}^2) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{e'}{g_p} F_{\mu\nu} \left( p_{\mu\nu}^\circ + \frac{1}{3} \omega_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi_{\mu\nu} \right) - i T_2 \ln \left\{ 1 - \frac{1}{i\delta - m_u} \left( \frac{1}{2} \hat{V} - e' Q \hat{A} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Произведем диагонализацию кинетических членов с помощью замены полей:

$$p_\mu^\circ = \tilde{p}_\mu^\circ + \frac{e'}{g_p} A_\mu; \quad \omega_\mu = \tilde{\omega}_\mu + \frac{e'}{3g_p} A_\mu; \quad \varphi_\mu = \tilde{\varphi}_\mu - \frac{\sqrt{2}e'}{3g_p} A_\mu. \quad (57)$$

Электромагнитное поле и заряд  $e'$  перенормируются при этом следующим образом:

$$\tilde{A}_\mu = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e'^2}{g_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} A_\mu, \quad \tilde{e} = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{e'^2}{g_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} e' = \left[\left(1 - \frac{4}{3} \frac{e'^2}{g_p^2}\right) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{e'^2}{g_p^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} e \rightarrow \tilde{e} = e. \quad (58)$$

Легко видеть, что в результате двух перенормировок (55) и (58) электрический заряд принимает свое первоначальное значение. Окончательный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ЭМ}} = \frac{m_p^2}{2} (\tilde{\rho}_\mu^2 + \tilde{\omega}_\mu^2) + \frac{m_\rho^2}{2} \tilde{\rho}_\mu^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\rho}_\mu^2 + \tilde{\omega}_\mu^2 + \tilde{\phi}_\mu^2 + \tilde{f}_\mu^2) + \left(\frac{e}{3g_p}\right)^2 (5m_p^2 + m_\rho^2) \tilde{A}_\mu^2 +$$

$$+ \frac{e}{g_p} \left[ m_p^2 \left( \tilde{\rho}_\mu^2 + \frac{\tilde{\omega}_\mu^2}{3} \right) - \frac{\sqrt{2}}{3} m_\rho^2 \tilde{\phi}_\mu^2 \right] \tilde{A}_\mu - i T \bar{u} u \left[ 1 + \frac{1}{i \delta m_u} \frac{g_p}{2} \tilde{V} \right]. \quad (59)$$

Нетрудно убедиться теперь, что фотоны могут взаимодействовать с заряженными частицами только через посредство нейтральных векторных мезонов. Тем самым автору модели получилась модель, описываемая векторную доминантность. под знаком логарифма член с фотонами полностью поглотился векторными мезонами.

Подобным же образом можно включить в нашу модель и слабые взаимодействия, вводя в лагранжиан (1) вместо  $\partial_\mu$  ковариантную производную  $\partial_\mu$ , характерную для теории Вайнберга-Салама. Такая процедура проделана в работе [2]. Здесь мы ограничимся лишь этой ссылкой, указав, что в секторе электрослабых взаимодействий также получается модель векторной доминантности не только для взаимодействия фотонов, но и для  $W$ -бозонов.

### 8. Сильные и электромагнитные распады мезонов

Чтобы продемонстрировать, как работает наша модель, приведем здесь результаты вычисления ширин сильных и радиационных распадов скалярных, псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов [1, 2, 4, 14-16]. С точки зрения наших методов вычисления все распады можно разбить на две категории. Первые из них идут через скользящие кварковые петли аномального типа. Типичным примером распада этой категории является распад  $\Lambda^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Как правило, это радиационные распады и при их вычислении используется та часть полученного нами лагранжиана, которая записана в форме  $T \bar{u} u \{ \dots \}$ .

Результаты вычисления ширин этих распадов собраны в таблице I.

Таблица I

Процессы	Теория (кэВ)	Эксперимент (кэВ)/II/
$\pi^0 \rightarrow \eta\eta$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$(7,854 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}$
$\eta \rightarrow \eta\eta$	$0,38 (0,48, F_\pi = 1.5 F_\eta)$	$0,32 \pm 0,05$
$\eta' \rightarrow \eta\eta$	$5,8 (5, F_\pi = 1.5 F_{\eta'})$	$5,32 \pm 0,56$
$\eta' \rightarrow \omega\eta$	$9,8$	$7,8 \pm 1,4$
$\eta' \rightarrow \rho\eta$	$9,7$	$8,4 \pm 4,5$
$\rho \rightarrow \pi^0\eta$	$86,8$	$68 \pm 8$
$\rho \rightarrow \eta\eta$	$54$	$55 \pm 14 /I7/$
$\omega \rightarrow \pi^0\eta$	$804$	$861 \pm 50$
$\omega \rightarrow \eta\eta$	$6,4$	$3 \pm 2,5 /I7/$
$\eta \rightarrow \eta\eta$	$145 (110, F_\pi = 1.5 F_\eta)$	$63 \pm 8$
$\delta \rightarrow \omega\eta$	$114$	Экспериментальных данных нет
$\delta \rightarrow \rho\eta$	$15$	
$\delta \rightarrow \eta\eta$	$1,3$	
$\varepsilon \rightarrow \eta\eta$	$3$	

Ко второй категории распадов принадлежат распады, идущие через расходящиеся кварковые петли. Для вычисления ширин этих распадов будут использоваться эффективные вершины полученных нами феноменологических мезонных лагrangианов. Результаты расчетов ширин таких распадов собраны в таблице II. Это в основном сильные распады. Отличительной чертой этих распадов является то, что их ширина, как правило, зависит от величины масс составляющих кварков (или константы  $g = m/F_\pi$ ) и масс мезонов, в то время как ширины распадов первой категории зависят только от константы  $F_\pi$  и масс мезонов. Поэтому в таблице II будут приведены для сравнения два набора теоретических результатов, соответствующих значениям кварковых масс  $2m = 480$  МэВ и  $2m = 560$  МэВ.

В таблицах I и II мало внимания удалено многочисленным распадам псевдоскалярных мезонов основного октета. Такие распады подробно описаны на основе нелинейной киральной квантовой теории в наших обзорах /19,20/. Поскольку выведенная здесь сигма-модель очень близка по своим результатам и следствиям к рассмотренной в

Таблица II

Процессы	Теория $(m=240\text{MeV}, m_c=75\text{MeV})$	Теория $(m=240\text{MeV}, m_c=75\text{MeV})$	Эксперимент /II/
$\pi \rightarrow 2\pi$	180 MeV	350 MeV	300-400 MeV
$\pi^+ \rightarrow 2\pi^-$	26 MeV	26 MeV	$(25,7 \pm 1)$ MeV
$\delta \rightarrow 2\pi$	40 MeV	75 MeV	$(54 \pm 7)$ MeV
$\eta \rightarrow 3\pi^0$	0,27 keV	0,27 keV	$(0,25 \pm 0,04)$ keV
$\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	0,16 keV	0,16 keV	$(0,20 \pm 0,03)$ keV
$\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \eta'$	0,98 eV	0,88 eV	$(0,81 \pm 0,22)$ eV /18/
$\eta' \rightarrow 3\pi^0$	2,6 keV	1,4 keV	-
$\eta' \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	1,7 keV	0,9 keV	-
$\eta' \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-$	375 keV	234 keV	$(183 \pm 65)$ keV
$A_1 \rightarrow \pi \pi$	326 MeV	326 MeV	$(315 \pm 45)$ MeV
$A_1 \rightarrow \pi \eta$	57 MeV	35 MeV	-
$A_1 \rightarrow \pi \eta'$	480 keV	480 keV	-
$\rho \rightarrow \pi \pi$	154 MeV	154 MeV	$(154 \pm 5)$ MeV
$\rho \rightarrow K^+ K^-$	2 MeV	2 MeV	$(2,06 \pm 0,04)$ MeV

/19,20/ нелинейной кирельной модели, то результаты, полученные там, следуют также и из предлагаемого здесь подхода. Поэтому сейчас мы не будем на них останавливаться.

### 9. Заключение

Основным достоинством предлагаемой модели является то, что с ее помощью удается построить феноменологические лагранжианы, описывающие взаимодействия 36 сортов мезонов (скалярные, псевдоскалярные, векторные и псевдовекторные нонеты) с использованием минимального числа произвольных параметров. Этими параметрами являются массы составляющих夸ксов и константа пионного распада  $f_\pi$  (тем самым и константа сильного взаимодействия  $g = \frac{m_q/m_d}{2f_\pi}$ ).

Если использовать полученную в нашей модели связь констант  $g_p = \sqrt{6}g$  (формула (46)), то оказывается, что сильная константа  $g$  является довольно малой величиной ( $g^2/4\pi = 1/2$ ), так что можно использовать теорию возмущений по этой константе связи. Вводя в рассмотрение электромагнитные и слабые взаимодействия /1,2/, мы автоматически приходим к модели векторной доминантности. При этом возникает возможность описать в рамках

нашей модели практически все распады упомянутых выше мезонов, а также такие важные низкоэнергетические характеристики их, как длины рассеяния, параметры наклона, электромагнитные и слабые формфакторы, поляризуемость и т.п. Расчеты показывают, что согласие с экспериментом получается вполне удовлетворительное /1,2,4,14-16, 21,22/. Удается также сделать и ряд предсказаний (см. таблицы I и II).

Менее строгие результаты получаются при выводе массовых формул. Здесь начинает участвовать большее число произвольных параметров, поскольку к вышеупомянутым константам присоединяются параметры  $C_1$  и  $C_2$ . Полученные формулы могут претендовать лишь на качественное согласие с экспериментом. Особенно сильное расхождение с экспериментом наблюдается в предсказании масс скалярных  $\delta$ - и  $\tilde{\Lambda}$ -мезонов, что может быть следствием больших вкладов в эти резонансы от четырех夸克овых состояний /10/.

Интересные результаты получаются при оценке величин масс кварков, участвующих в этой модели. Оказывается, что первоначальные массы кварков, фигурирующие в исходном чисто кварковом лагранжиане с эффективным четырех夸ковым взаимодействием типа ток-ток, совпадают по величине со значениями масс токовых кварков. В то же время массы кварков, появляющиеся после введения в этот лагранжиан бозонных полей, равны массам составляющих кварков. При этом величины масс токовых и составляющих кварков однозначно связаны друг с другом. Это свидетельствует о логической замкнутости рассмотренной здесь модели.

#### Литература

1. М.К.Волков, Д.Эберт. ЯФ, 36, 1265 (1982).
2. D.Ebert, M.K. Volkov. Z.Phys.C, 16, 205 (1983).
3. М.К.Волков, Д.В.Креопалов. Препринт ОИЯИ Е2-83-19, Дубна, 1983.
4. М.К.Волков, Д.В.Креопалов. Препринт ОИЯИ, Р2-83-310, Дубна, 1983.
5. Y.Nambu, G.Jona-Lasinio. Phys.Rev., 122, 345 (1961).
6. T.Eguchi. Phys.Rev., D14, 2755 (1976).
7. K.Kikkawa. Progr.Theor.Phys., 56, 947 (1976).
8. С.Б.Герасимов. ЯФ, 29, 513 (1979).
9. М.К.Волков. ЭЧАЯ, 13, 1070 (1982).

- IO. Н.Н.Ачаков, С.А.Девянин, Г.Н.Местаков. Препринт ИМ СО АН СССР, ТФ-121, Новосибирск, 1981.
- II. Particle Data Group. Phys.Lett., 111B, N 4 (1982).
- I2. M.D.Scadron. Rep.Progr.Phys., 44, 213 (1981).
- I3. G.R.Kalbfleish. Phys.Rev., D 10, 916 (1974).
- I4. D.Ebert, M.K.Volkov. Preprint PHE 82-6, Zeuthen 1982.
- I5. M.K.Волков. Препринт ОИЯИ Р2-82-338,Дубна,1982.
- I6. M.K.Волков, Д.В.Креопалов. Препринт ОИЯИ, Е4-82-355,Дубна, 1982.
- I7. D.E.Andrews et al. Phys.Rev.Lett., 38, 198 (1977).
- I8. Ф.Бинон и др. ЯФ, 33, 1534 (1981).
- I9. M.K.Волков. ЭЧАЯ, 10, 693 (1979).
20. D.Ebert, M.K.Volkov. Fortschr.Phys., 29, 127 (1981).
21. M.K.Волков, Д.В.Креопалов. Препринт ОИЯИ, Р2-82-476, Дубна, 1982.
22. M.K.Волков, А.А. Осипов. Препринт ОИЯИ, Е2-83-177, Дубна, 1983.
23. H.Pagels. Phys.Rep., C16, 219 (1975).

ANOMALIES IN LOCAL CONSERVATION LAWS FOR AXIAL CURRENTS  
(A FUNCTIONAL APPROACH)

A.A.Andrianov

Leningrad State University

L.Bonora

Instituto di Fisica dell'Università di Padova,  
Instituto Nazionale di Fisica Nucleare -  
Sezione di Padova, Italy

The anomalous behavior of divergencies of axial or chiral currents in gauge field theories is a quite remarkable fact<sup>/1/</sup> which states the incompatibility of the gauge and chiral invariances on the quantum level<sup>/2/</sup>. Traditionally, the anomalies concern the physics of the decays of pseudoscalar mesons<sup>/1,3/</sup>. In so far as they are not subjected to the radiative corrections (the Adler-Bardeen theorem<sup>/4/</sup>) the generated sum rules have proved to be a simple and convenient tool in the analytical search into the structure of confined states of fundamental fermions (quarks<sup>/5/</sup> or preons<sup>/6/</sup>).

In this report we are discussing the constructive problem of how to reproduce the anomaly of the axial or chiral current in those gauge models which make use of the approximate space-time

kinematics of quantum fields.

The development of numerical and analytical methods based on the approximate space-time description is induced<sup>/7/</sup> by the increasing interest to the phenomena beyond the weak coupling regime of the standard perturbation theory. Such a description yields the ultraviolet finiteness of the field theory in a natural fashion. Among these non-perturbative approaches the lattice realizations of gauge field theories have taken the significant place<sup>/8/</sup>, due to the achievements in the computation of meson spectra<sup>/8/</sup> and in the numerical evidence for the confinement<sup>/9/</sup> and for the various phase transitions<sup>/10/</sup>.

However the complexity of any non-perturbative calculations need not be stressed. Moreover the well-known ambiguities exist in constructing the extensions of field dynamics onto an approximated space-time<sup>/7,11/</sup>. Therefore it is important to have in stock the quantitative principles which help to reduce the variety of the above extensions and to control over the field quantization after the space-time modification.

For the gauge field theories including fermions the required restrictions follow from the gauge and chiral symmetry of the classical action combined with the anomalous violation of local conservation laws of axial fermionic currents in the quantum case.

In this point the lattice approach is not so flawless. The attempts to preserve the gauge and global chiral invariances of the fermion vacuum functional give rise to the fermion replication<sup>/12/</sup>. The interaction of fermion doubles with the gauge field leads to the cancellation of their anomalous contributions into local conservation laws of axial currents. Thus the presence of fermion doubles becomes the drawback in obtaining the continuous gauge theory from the discrete one.

These arguments force to seek different non-perturbative schemes providing the ultraviolet regularization, the gauge and (global) chiral invariances and the reproduction of anomalies in axial current conservation laws if any exist according to the perturbative analysis of diagrams<sup>/1,2/</sup>.

The approach under discussion was developed in<sup>/13,14/</sup>. It ge-

neralizes the lattice approach in the sense that the ultraviolet regularization is obtained merely by the choice of a finite number of modes in the Hilbert space of fermion wave functions. Obviously it is consistent with the second quantization procedure. When one calculates the averages of any products of bilinear fermionic operators (currents) this rather old idea can be embodied by the fermion functional integral in its traditional implementation à la Berezin<sup>15</sup>. The main question is how to retain the gauge symmetry of the functional averages after a finite mode regularization and what a fate is expected for anomalies.

Let's consider the functional integral over fermions as a limit of the sequence of finite dimensional grassmannian integrals generated by a set of embedded finite dimensional subspaces of the Hilbert space of four-dimensional spinors. In order to ensure the mathematical consistency we deal with the Euclidean and compact (region of) space-time and in line with the Fermi statistics we pose the antiperiodic boundary conditions for fermion wave functions. Then the partition function of massive Dirac particles in the external vector gauge field can be described by the following integral:

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_{\{\Psi, \bar{\Psi}(0) = -\Psi, \bar{\Psi}(\beta)\}} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \bar{\Psi}(\mathcal{D} - i\mathbf{m}) \Psi(\tau, x) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\mathcal{D} = -i\Gamma_\mu(\partial_\mu + V_\mu)$  is a covariant Dirac operator,  $V_\mu(x) = T^\alpha V_\mu^\alpha(x)$  is a vector gauge field and  $T^\alpha$  are (anti-hermitian) generators of a gauge group. The ultraviolet regularization is provided by the definition of grassmannian variables on the finite dimensional subspace:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\Rightarrow \sum_{n=1}^N c_n \langle x | \psi_n \rangle, \quad \bar{\Psi}(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \langle \psi_n | x \rangle, \\ \{c_n, c_m\} &= \{\bar{c}_n, \bar{c}_m\} = \{c_n, \bar{c}_m\} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

The projector onto the chosen subspace can be depicted by means of the Dirac symbols:

$$P_N(V) = \sum_{n=1}^N |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (3)$$

In these denotations the regularized fermionic determinant is given by the approximated functional integral,

$$\begin{aligned} Z_N(D) &= \det [(D - im)_N] = \int \prod_{n=1}^N d\psi_n d\bar{\psi}_n \times \\ &\times \exp \left( - \sum_{n,m=1}^N \bar{\psi}_n \langle \psi_n | D - im | \psi_m \rangle c_m \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Herein one can regard

$$(D - im)_N = I - P_N + P_N (D - im) P_N.$$

If we employ "the dynamical frame" in the spinor space which depends on the external field and behaves as the fundamental representation of the gauge group then the action in (4) holds invariant provided that the Dirac operator transforms accordingly (in the adjoint representation)

$$|\psi_n(V^\Omega)\rangle = \Omega^{-1} |\psi_n(V)\rangle, \quad \Omega \equiv \Omega(x),$$

$$V_\mu^\Omega = \Omega^{-1} V_\mu \Omega + \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega, \quad D^\Omega = \Omega^{-1} D \Omega. \quad (5)$$

Hence the gauge invariance of the regularized partition function (4) as a whole will be ensured too.

In order to find out the general conditions on the spinor bases yielding the gauge symmetry it is helpful to examine the infinitesimal gauge transformation of the partition function keeping in mind the functional dependence of the frame on the gauge field. Let's take  $\Omega \approx I + \omega(x)$ , then

$$\begin{aligned}
 \det [(\mathcal{D} - im)_N] \rightarrow \det [(\mathcal{D} - im)_N] \times \\
 \times \left\{ I + \text{Tr} \left( (\mathcal{D} - im)_N^{-1} \left\{ P_N [\mathcal{D}, \omega] P_N + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \int d^4x (\tilde{D}_\mu \omega)^\alpha(x) \left( \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha(x)} \mathcal{D} P_N + P_N \mathcal{D} \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha(x)} \right) \right\} \right) \right\}, \tag{6}
 \end{aligned}$$

where  $\tilde{D}_\mu \equiv \partial_\mu + [V_\mu]$  and the identity  $PP'P=0$  is applied. The trace symbol should be referred to the overall operator and matrix structure.

If one takes into account cancellations under the trace and projection operations the required condition on the gauge invariance preserving bases can be expressed by the equation

$$P_N [Q_N, [\mathcal{D}, P_N]] P_N = 0, \tag{7}$$

where

$$Q_N = [P_N, \omega] - \int d^4x (\tilde{D}_\mu \omega)^\alpha(x) \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha(x)}.$$

We see that the assumption

$$Q_N = 0 \tag{8}$$

or explicitly

$$\tilde{D}_\mu^{\alpha\beta} \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\beta(x)} = [P_x, P_N], \quad P_x \equiv |x\rangle\langle x|,$$

is quite sufficient for our goal. Evidently this equation has the solution for the projector which conforms to (5):

$$P_N (V^\Omega) = \Omega^{-1} P_N \Omega. \tag{9}$$

On the other hand such a property is more general than (5). Na-

Only it is also acceptable that the basis spinors exhibit the properties of the adjoint representation in a given space-time point. The latter implies that they transform according to the representation of the local gauge group on the left and according to the representation of the group of internal symmetry on the right, in the polarization space. Presumably the above group transformations are entirely induced by the local gauge group transformations in a marked point. Below, when discussing the lattice approach we shall show an appropriate example.

The comparison of (6) and (7), (8) gives that as a rule the conserved vector current has a sophisticated form due to the presence of variational derivatives of projectors:

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{\delta(\ln Z_N)}{\delta V_\mu^\alpha(x)} = -\text{Tr} \left\{ (\not{D} - im)_N x \right. \quad (10)$$

$$\left. x \left[ |x\rangle i T^\alpha \not{V}_\mu \langle x| + \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha(x)} \not{D} P_N + P_N \not{D} \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha(x)} \right] \right\}.$$

There exist two (!) bases in which the conserved vector current takes the standard form in agreement with the common equations of motion. It happens when the derivatives of the projector do not contribute in (7):

$$[\not{D}, P_N] = 0 \quad (11)$$

or

$$[\omega(x), P_N] = 0, \quad D_\mu^{\alpha\beta} \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\beta(x)} = 0. \quad (12)$$

The first basis<sup>13/</sup> is a basis of eigenfunctions of the covariant Dirac operator. The second one results in the lattice approximation and needs the finite-difference modification of the Dirac operator<sup>7/</sup>.

It is convenient to describe the gauge symmetry preserving bases of squared-integrable spinors using the representation (11) by means of the gauge invariant transition matrix:

$$|\tilde{\Psi}_n\rangle = \sum_{n'=1}^{\infty} |\Psi_{n'}^D\rangle B_{n'n}(V), \quad (13)$$

$$(B^{-1})_{nn'} = B_{nn'}^*, \quad B_{n'n}(V^{\mathcal{L}}) = B_{n'n}(V).$$

The projector onto the finite dimensional subspace of  $\widehat{\Psi}_N$ ,<sup>s</sup> can be constructed from  $B_{n'n}$ :

$$\langle \Psi_n^D | P_N | \Psi_m^D \rangle \equiv g_{nm} = \sum_{\ell=1}^N B_{n\ell}(V) B_{m\ell}^*(V). \quad (14)$$

Its variational derivatives form the independently conserved contributions into the vector current:

$$\begin{aligned} j_\mu^\alpha = & - \sum_{n,m=1}^{\infty} [(\mathcal{D} - im)_N^{-1}]_{nm} \left\{ \delta_{nm} \frac{\delta \lambda_n}{\delta V_\mu^\alpha(x)} + \right. \\ & \left. + (\lambda_n + \lambda_m) \frac{\delta g_{mn}}{\delta V_\mu^\alpha(x)} \right\}, \quad \mathcal{D} \Psi_n^D = \lambda_n \Psi_n^D, \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$[(\mathcal{D} - im)_N^{-1}]_{nm} = \sum_{\ell, \ell'=1}^N B_{n\ell} [B^+ (\lambda - im) B]_{\ell\ell'}^{-1} B_{m\ell'}^*.$$

The axial currents are external currents in the pure vector gauge field theory, they could be extracted only by variation of the more general field of mixed chirality. This is because the  $\gamma_5$ -transformation acts on the Dirac operator as follows:

$$\exp(-\gamma_5 \omega) \mathcal{D} \exp(-\gamma_5 \omega) \sim \mathcal{D} + \gamma_5 (\mathcal{D} \omega)(x).$$

Let's extend the gauge field and the Dirac operator respectively,

$$y^A = A + i \gamma_5 A = -A^+, \quad \mathcal{D}_W = \mathcal{D}_V + \gamma_5 A. \quad (16)$$

Then the variational axial current reveals three pieces again:

$$j_{\mu 5}^\alpha = - (\gamma_5 \gamma_\mu)_{ij} \frac{\delta \ln Z_N(W)}{\delta A_{ij}^\alpha} \Big|_{y^A = A} = i \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D} - im)_N^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ P_N \frac{\delta \mathcal{D}_W}{\delta A_\mu^\alpha(x)} P_N + \frac{\delta P_N(W)}{\delta A_\mu^\alpha(x)} \mathcal{D} P_N + P_N \mathcal{D} \frac{\delta P_N(W)}{\delta A_\mu^\alpha(x)} \right] \right\}_{A=0}. \quad (17)$$

If the regularization is arranged in one of the bases (5), (9) the gauge covariance of axial currents will be reached. However the canonical structure of them appears in the eigenfunction basis of the  $\mathcal{D}_W$ -operator when the derivatives of the projector vanish due to the identity  $P P' P = 0$ . In the arbitrary

basis the above derivatives cause the optional anomalies in the local conservation law of the axial current:

$$\tilde{D}_M^{\alpha\beta} j_{\mu 5}^{\beta} = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ 2\delta_{nm} (\lambda_n - iM) \bar{\psi}_n(x) \tilde{t}_5 T^{\alpha} \psi_n(x) + \right. \\ \left. + \tilde{D}_\mu^{\alpha\beta} \frac{\delta S_{mn}}{\delta A_\mu^\beta(x)} (\lambda_m + \lambda_n) \right\} \left[ (\not{D} - iM)_N^{-1} \right]_{nm} \quad (18)$$

Herein the  $\not{D}$ -representation has been used.

One can hope that in the limit of the complete spinor space,  $N \rightarrow \infty$ , the harmful terms with derivatives die out because

$$P_N \Rightarrow I, \quad \frac{\delta P_N}{\delta V_\mu^\alpha} \Rightarrow 0,$$

in the strong sense. But the real situation may prove much worse due to the too weak convergence of the iterated fermionic propagator to the exact value and due to singular properties of the latter one in the four-dimensional space-time. Eventually the limit of last terms in Eqs.(10),(15),(17),(18) can differ from zero. In this case one should care for the redefinition of  $\mathcal{L}_N \mathcal{Z}_N$  by means of subtraction of an appropriate local polynomial of gauge fields so that the modified effective action would determine the conventional vector and axial currents, though hold the gauge symmetry (and, of course, would be free of divergences). These requirements are connected with the existence of the gauge invariant, finite and unitary S-matrix in the Minkowski region of momenta<sup>1,2/</sup>. If this program fails the corresponding basis could be hardly considered as an acceptable one.

Fortunately this is an abstract problem in the pure vector gauge theory, the  $\not{D}$ -basis fulfills all above requirements in a maximally simple fashion. But the problem inevitably emerges when the gauge fields have the mixed chirality. The unambiguous solution exists for hermitian gauge potentials (16), this is a  $\not{D}_W$ -basis. More details and the manifest form of the anomaly can be found in our papers<sup>14,16/</sup>. However the W-field does not suit to describe the left- or right-handed fermions, it does not bear the left(right) chiral gauge symmetry. The relevant gauge potential is rather

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} [W_+ (1 + \gamma_5) + W_- (1 - \gamma_5)] = W + \gamma_5 A, \quad (19)$$

which is non-hermitian if  $W_{\pm}^{aH} = (W_{\pm}^{aH})^*$ .

Nevertheless the possible way to construct the euclidean analog of Weyl fermions turns out to pass through the hermitian  $W$ -potential. Indeed let's examine the direct analytical continuation of left-handed fermions into the euclidean space-time when  $W_+ = 0$ ,  $W_- = 2V$  in (19). The corresponding Weyl-Dirac operator becomes non-hermitian:  $D_- = \frac{1}{2} D_{2V} (1 - \gamma_5)$ . If one exploits the  $D_{2V}$ -basis to regularize the fermionic determinant the latter will amount<sup>/16/</sup> to the square root of the determinant of the vector gauge theory:  $Z_- = (Z_V)^{1/2}$ . Thus the expected anomaly (if any) disappears in contradiction with the perturbative<sup>/2/</sup> and cohomological<sup>/17/</sup> analysis in the Minkowski space. The Fujikawa's non-perturbative method<sup>/18/</sup> which is related to ours does not yield the desirable result for color handed fermions: his anomaly does not satisfy the Wess-Zumino consistency conditions<sup>/19/</sup>.

The functional integral for euclidean left-handed fermions can be obtained through the theory with the gauge potential

$$W = \frac{1}{2} W_- (1 + i \varepsilon \gamma_5), \quad \varepsilon = \varepsilon^*,$$

at the intermediate stage. The appropriate basis is certainly a  $W$ -basis. The next step is thought of as the analytical continuation from  $\varepsilon = 1$  to  $\varepsilon = i$ . Then the free right-handed fermions decouple with the left-handed, the resulting anomaly satisfies the  $W$ -Z. consistency conditions and corresponds to the traditional Minkowski space calculations (see<sup>/16/</sup> for comments).

It looks as follows:

$$\tilde{D}_{\mu}^{ab} j_-^b(x) = \mathcal{A}_1 + \quad (20) \\ + \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} (T^a \partial^{\mu} (W_-^{\nu} \partial^{\lambda} W_-^{\rho} + \frac{i}{2} W_-^{\nu} W_-^{\lambda} W_-^{\rho}))$$

where the  $\mathcal{A}_1$ -term can be dropped out by a suitable redefinition of the effective action<sup>/16/</sup>.

Now let's briefly sketch out the second type of possibilities to preserve the gauge symmetry which originate from the lattice regularization (12). The projector onto a spinor space generated by the choice of a cubic space-time lattice with the link  $\Delta$  can be presented in such a symbolic form<sup>[13]</sup>:

$$\bar{P}_M = \sum_{n=1}^M |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|, \quad \langle x|\alpha_n\rangle \cong \frac{1}{\Delta^2} \delta_{x,\alpha_n}, \quad (21)$$

where  $M = (L/\Delta)^4$  is the number of lattice points,  $L^4$  is a volume of the (region of) space-time. The fermion action by Wilson<sup>[7]</sup> acquires the finite-difference Dirac operator:

$$S = \frac{i}{2\Delta} \sum_{\{\alpha_n\}} \left[ \sum_{\mu} \bar{\psi}(\alpha_n + \vec{\mu}\Delta) \gamma_{\mu} U_{\mu}^{\dagger} \psi(\alpha_n) - h.c. \right], \quad (22)$$

where the unitary "gauge field"  $U_{\mu}$  is bilocally covariant,

$$U^{\Omega}(x, x + \vec{\mu}\Delta) = \Omega^{-1}(x) U_{\mu} \Omega(x + \vec{\mu}\Delta). \quad (23)$$

Let's proceed to the arbitrary singular basis connected with (21),

$$|\tilde{\alpha}_{\tilde{n}}\rangle = \sum_{n'=1}^M \sum_{s'=1}^{4\gamma} |\alpha_{n'}\rangle u_{n'}^{s'} B_{n'\tilde{n}}^{s'\tilde{s}}(U). \quad (24)$$

Herein  $u_n^s$  are orthonormalized spinors,  $\gamma$  is a dimension of the representation of the group of internal symmetry. Suppose we "regularize" the partition function in a new basis, reducing the amount of basis vectors. Then the gauge symmetry will still hold if the transition matrix  $B_{n'\tilde{n}}^{s'\tilde{s}}$  is left-covariant (not invariant!) under gauge transformations:

$$B_{n'\tilde{n}}^{s'\tilde{s}}(U^{\Omega}) = \sum_{s=1}^{4\gamma} [\Omega^{-1}(\alpha_n) \otimes I_4]^{ss'} B_{n'\tilde{n}}^{s'\tilde{s}}(U). \quad (25)$$

In this case the action (22) proves to be invariant taking into account (23). The global right covariance is also allowed with respect to the gauge transformation in a fixed (for all  $\tilde{n}$ ) point of the space-time.

The famous fermion doubling<sup>[7,12]</sup> is accounted for by the periodicity in momenta of the lattice fermion propagator. In particular, for the free fermion propagator,

$$D_{lattice}^{-1} = \Delta \left( \gamma_\mu \sin(\rho_\mu \Delta) \right)^{-1} \quad (26)$$

(massless fermions) within one momentum zone  $\{-\frac{\pi}{\Delta} < \rho_\mu < \frac{\pi}{\Delta}\}$  we find out 16 poles of the propagator (instead one) at the values:  $\rho = (0,0,0,0), (\frac{\pi}{\Delta}, 0,0,0), (\frac{\pi}{\Delta}, \frac{\pi}{\Delta}, 0,0) \dots$  The anomalies of different fermion species have opposite signs and cancel each other.

In order to solve this problem one can attempt to apply the finite-mode regularization in one of the bases (24) such that the unwanted parts of the momentum spectra be dropped out. The fee of this cure will be a long range interaction between fermions on the initial coordinate lattice. Thus our method generalizes (in a sense) the SLAC approach<sup>[21]</sup>. At the same time there is no discrepancy with the Nielsen-Ninomaya "No-Go" theorem<sup>[20]</sup>.

As a vivid example we exhibit the lattice basis of the momentum type:

$$B_{n\rho}^{ss'} = \left( \frac{\Delta}{2\pi} \right)^2 \exp(i\rho_\mu \alpha_n^\mu) \sum_{s'=1}^{4?} U_s^{ss'}(\alpha_n) U_{s'}^{(s)}(\rho), \quad (27)$$

where

$$U_s(\alpha_n) = \prod_{i=1}^n \begin{cases} U_{\mu_i}^+(\alpha_i) & \{\alpha_i, \mu_i\} \in \bar{\mathcal{C}} [\alpha_0, \alpha_n] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and contours  $\bar{\mathcal{C}}$  begin in a fixed (for all  $\alpha_n$ ) point  $\alpha_0$ . If we reduce the number of basis vectors in favour of the vicinity of the zero momentum,  $|\rho_\mu| < \Lambda$ , and take the continuum limit,

$$\Delta \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty, \Lambda \cdot \Delta \rightarrow \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

we will get the projector  $\bar{P}_\Lambda$  which cuts off the unwanted momenta with too high values and thereby 15 poles of the propagator (26). Of course, the basis (27) is gauge covariant in the sense of (25).

Furthermore the adequacy of the lattice and continuum propagators can be considerably improved if  $\varepsilon \ll 1$  (but  $\Lambda \rightarrow \infty$ ). At finite  $\Delta$ , after the above regularization, the long range interaction arises because of incompleteness of the part of the momentum basis. However it dies out in the continuum limit as far as the completeness recovers.

## REFERENCES

1. S.L.Adler. *Phys.Rev.*, 177, 2426 (1969).  
J.S.Bell, R.Jackiw. *Nuovo Cim.*, A60, 47, (1969).  
W.A.Bardeen. *Phys.Rev.*, 184, 1848 (1969).
2. D.J.Gross, R.Jackiw. *Phys.Rev.*, D6, 477 (1972).
3. See, for a review: D.I.Dyakonov, M.I.Bides. In: *Proceedings of the XVI Winter School of IAEI*, Leningrad, 123 (1981).
4. S.L.Adler, W.A.Bardeen. *Phys.Rev.*, 182, 1517 (1969).
5. G.'t Hooft. In: *Recent Developments in Gauge Theories*. New York, 135 (1980).
6. For a review, see: J.Preskill. Preprint HUTP-81/A051. Cambridge (1981).
7. K.G.Wilson. In: *New phenomena in Subnuclear Physics*. New York, (1977).
8. H.Hamber et al. *Phys.Lett.*, 108B, 314 (1982).
9. M.Greutz. *Com.Nucl.Part.Phys.*, 10, 163 (1981).
10. Yu.M.Makeenko, M.I.Polikarpov. Preprint ITEP-74, Moscow(1982)
11. G.Rhanot, R.Dashen. *Phys.Lett.*, 113B, 299 (1982).
12. L.H.Karsten, J.Smit. *Nucl.Phys.*, B183, 103 (1981).
13. A.Andrianov, L.Bonora, R.Gamboa-Saravi. *Phys.Rev.*, D26, 2821 (1982).
14. A.Andrianov, L.Bonora. Preprint TH.3539-CERN, Geneve (1983).
15. F.A.Berezin. *The method of second quantization*. Moscow,(1965) ( New York, 1966).
16. A.Andrianov, L.Bonora. Preprint IPPD 16/83. Padova (1983).
17. G.Becchi et al. *Ann.Phys.*, 98, 287 (1976).  
L.Bonora, P.Cotta-Ramusino. *Phys.Lett.*, B107, 87 (1981).
18. K.Fujikawa. *Phys.Rev.*, D21, 2848 (1980).
19. J.Wess, B.Zumino. *Phys.Lett.*, 37B, 95 (1971).
20. H.B.Nielsen, M.Minomiya. *Phys.Lett.*, 105B, 219 (1981).
21. S.D.Drell, M.Weinstein, S.Yankielowicz. *Phys.Rev.*, D14, 1627 (1976).

## АНАЛИЗ ПРИРОДЫ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ С ПОМОЩЬЮ УНИФОРМИЗУЮЩЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Крупа, В.А.Мещеряков, Ю.С.Суровцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. В последнее время проблеме изучения скалярных мезонов<sup>/1/</sup> посвящено значительное число работ<sup>/2-18/</sup>. Это связано с важной ролью таких мезонов в теоретической спектроскопии адронов: в  $q\bar{q}$  - системе мультиплет с  $L = 1$  является ненулевым без состояний с  $J^{PC} = 0^{++}$ ; кроме того, теоретически допускаются интересные возможности четырех夸克овых ( $qq\bar{q}\bar{q}$ ) состояний, смешанных  $q\bar{q}$  и глюонных и чисто глюонных систем с теми же квантовыми числами. Феноменологические модели компайонента, такие как MIT-модель "мешка"<sup>/5/</sup>, а также расчеты в квантовой хромодинамике на решетке (см., например, <sup>/6/</sup>) и на основе КДИ правых сумм<sup>/7/</sup> дают указания на то, что все эти эффекты могут встречаться в спектре масс ниже 1500 MeV.

Интерпретации экспериментальных данных, в которых наблюдаются скалярные резонансы (например,  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi, K\bar{K}$ ), основаны на необходимости учета влияния  $K\bar{K}$  - порога и, может быть, других порогов (в кваскалярной  $\delta$  - велике  $\pi\pi$  - рассеянии - порогов  $\eta\eta, \eta\eta'$  и т.д.), конечной ширине скалярных мезонов, эффективного кваскливого нарушения вследствие  $K^+ - K^0$  - разности масс, возможного влияния смешивания  $S^* - \delta$  - мезонов<sup>/3/</sup>. Для описания этих эффектов используются различные методы, и

получающиеся выводы не всегда однозначны (см., например, /2-4,8/). Поэтому в проблеме исследования скалярных мезонов остается первостепенной задача установления адекватного способа описания экспериментальных данных и на этой основе рецепта получения информации о скалярных резонансах.

В данной работе для решения этой задачи реализована идея доминирующего влияния ближайших особенностей с применением процедуры униформизации. Приводятся результаты обработки по методу  $\chi^2$  экспериментальных данных относительно изоскалярной  $\delta$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния в области энергий 0, 6 - 1,9 ГэВ и полученные параметры скалярных мезонов  $S^*$  и  $\epsilon$ .

2. Экспериментальные данные относительно  $\delta$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния обычно приводятся для фазы рассеяния  $\delta(s)$  и параметра упругости  $\eta(s)$ , которые связаны с элементом  $S$ -матрицы следующим образом:

$$S(\pi\pi \rightarrow \pi\pi) = \eta(s) e^{2i\delta(s)}, \quad (I)$$

где  $\delta = 4(q^2 + m_K^2)$  и  $q$  - модуль 3-импульса в с.п.м.  $\pi\pi$ -системы.

Экспериментальная фаза  $\delta$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния в изоскалярном канале возрастает от  $90^\circ$  около 870 МэВ до  $270^\circ$  при 1,2 ГэВ. Быстрое изменение  $\delta(s)$  при переходе через  $K\bar{K}$ -порог сопровождается резким падением от единицы параметра упругости  $\eta(s)$  точно выше порога. Такое поведение связывается с резонансным  $S^*$ -эффектом. Возникает естественный вопрос о возможности объяснения  $S^*$ -эффекта  $K\bar{K}$ -пороговым явлением<sup>7,37</sup>. Равличные анализы экспериментальных данных по  $\pi\pi$ - и  $K\bar{K}$ -фазам, рассматривавшие  $S^*$ -мезон, говорят в пользу его сильной связи с  $K\bar{K}$ -системой<sup>8,9,11</sup>, что подтверждает выводы кварт-квартовых моделей<sup>4,5/</sup>. Все это говорит о важности учета влияния  $K\bar{K}$ -канала на  $\pi\pi$ -систему.

Рассматривая аналитические свойства функции  $S(\pi\pi \rightarrow \pi\pi)$  в комплексной  $\delta$ -плоскости, учтем, помимо физического разреза  $(4m_K^2, +\infty)$  и левого разреза  $(-\infty, 0)$ , также точку ветвления, связанную с порогом открывшегося при  $\delta = 4m_K^2$  канала  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ , т.е. проведем такие разрез  $(4m_K^2, +\infty)$ . Это приводит к рассмотрению 4-листной римановой поверхности  $S$ -матрицы, листы которой пронумеруем в соответствии со знаками на них

функций  $\sqrt{\mathfrak{z} - 4m_x^2}$  и  $\sqrt{\mathfrak{z} - 4m_x^2}$ , связанных с точками ветвления на  $KK$ - и  $KK$ -порогах, следующим образом: листам I (физическому), II, III, IV отвечают соответственно знаки  $(\sqrt{\mathfrak{z} - 4m_x^2}, \sqrt{\mathfrak{z} - 4m_x^2}) = = + +, - +, --, + -$ . Ближайшими к физической области особенностями, соответствующими резонансу, являются пары комплексно сопряженных полюсов на II листе и, как мы увидим, во крайней мере пары полюсов на III листе. Этим парам полюсов отвечают пары комплексно сопряженных нулей, расположившихся в первом случае на I листе, во втором - на IV листе. Несобходимость таких нулей вытекает из условия унитарности.

Учет точки ветвления  $\mathfrak{z}_{KK} = 4m_x^2$  легко проводится переходом к переменной  $q$ . При этом вышеуказанный риманова поверхность отобразится на 2-листную поверхность. Аналитические свойства  $S(q)$  в комплексной  $q$ -плоскости изображены на рис. 1.

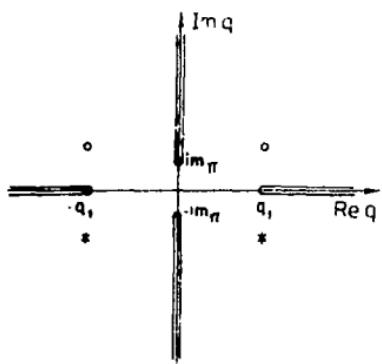


Рис. 1.

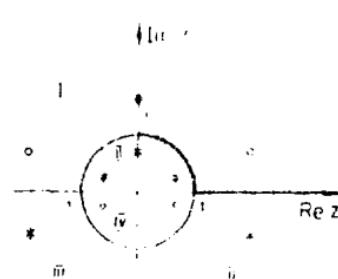


Рис. 2.

Функция  $S(q)$  имеет точки ветвления при  $q = \pm q_1$  (где  $q_1 = \sqrt{m_x^2 - m_x^2}$ ), соответствующие  $KK$ -порогу. Левый разрез преобразовался в разрезы на мнимой оси с началом в точках  $q = \pm im_x$ . Отрезок на действительной оси  $(0, q_1)$  соответствует части физической области  $4m_x^2 < \mathfrak{z} < 4m_x^2$ . Упругая  $S$ -матрица ( $\eta = 1$ ) удовлетворяет следующим условиям:

а)  $S(q^*) = \frac{1}{S^*(q)}$ , б)  $S(-q^*) = S^*(q)$ , в)  $S(-q) = \frac{1}{S(q)}$ . (2)

Эти условия не независимы - любое из них может быть получено из двух остальных. Подобным же образом в упругой области удовлетворяет и  $S$  - матрица, аналитически продолженная на второй лист 2-листной  $q$  - поверхности. Отвечающие резонансу полосы и нули располагаются в  $q$  - плоскости в соответствии с условиями (2,а,б,в) (см. рис. 1, полосы обозначены звездочками (\*), а нули - кружочками (o)). Подобным образом можно вводить произвольное число резонансов. Соответствующий элемент  $S$  - матрицы удовлетворяет условию упругой унитарности  $|S(q)|^2 = 1$  (2a) при физических значениях  $q$  из упругой области, строго говоря, до  $4\pi$  - порога. Учесть эффекты абсорбции, связанные с процессами выше  $4\pi$  - порога, можно смещением нулей относительно полос. При этом вместе с нарушением условия (2a),  $|S(q)|^2 < 1$ , нарушается также по крайней мере одно из соотношений (2,б,в). Например, смещая только нули на величину  $-i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), оставляя их симметричными относительно мнимой оси, нарушим условия (2 а,в), сохраняя (2 б) и т.д. Однако вклад в  $\pi\pi$  - рассеяние неупругих каналов, открывавшихся выше  $4\pi$  - порога, незначителен вплоть до 1 ГэВ. В работе <sup>10</sup>, в которой информация о  $\pi\pi$  - рассеянии извлекалась из процесса  $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$ , была сделана оценка неупругости  $\pi\pi$  - амплитуды:  $|1 - \eta_e^1| \leq 2\%$ . При современной точности эксперимента эффектами такого порядка можно пренебречь и считать  $\pi\pi$  - взаимодействие полностью упругим в этой области. Поэтому далее принимаем  $\epsilon = 0$ , и условия (2а,б,в) выполняются вплоть до  $K\bar{K}$  - порога, то есть в интервале  $-q_1 \leq q \leq q_1$ .

3. Вышеописанная процедура выявления абсорбтивных эффектов не позволяет учесть сильное влияние  $K\bar{K}$  - канала в области энергий выше  $2m_K$ . Включить в рассмотрение точку ветвления, связанную с  $K\bar{K}$  - порогом, можно, переходя к новой переменной  $\chi$ :

$$\chi = \frac{q}{q_1} + \sqrt{\left(\frac{q}{q_1}\right)^2 - 1}, \quad (3)$$

отобразив таким образом 2-листную  $q$  - поверхность на  $\chi$  - плоскость. Этим завершается процедура униформизации - вся 4-листная риманова  $\mathcal{S}$  - поверхность отобразилась на  $\chi$  - плоскость, и относительно переменной  $\chi$   $S$  - матрица является однозначной функцией. На рис. 2 римскими цифрами обозначены те части  $\chi$  - плоскости, на которые отображаются соответствующие листы риман-

новой  $\mathcal{S}$  - поверхности; киркой линией указана физическая область для переменной  $\mathcal{Z}$ , часть окружности в первом квадранте, ограниченная точками  $\mathcal{L}$  ( $KK$ -порог) и  $\mathcal{I}$  ( $KK$ -порог), соответствует упругой области. Условия (2) для упругой  $\mathcal{S}$ -матрицы на первом и на втором листах  $\mathcal{S}$ -поверхности могут быть теперь записаны для  $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathcal{S}^*(\mathcal{Z}^{-1}) &= \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{Z}), & \text{б)} \quad \mathcal{S}(-\mathcal{Z}^*) &= \mathcal{S}^*(\mathcal{Z}), \\ \text{в)} \quad \mathcal{S}(-\mathcal{Z}^{-1}) &= \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{Z}), & \text{г)} \quad \mathcal{S}(\mathcal{Z}^{-1}) &= \mathcal{S}(\mathcal{Z}). \end{aligned} \quad (4)$$

Описываемые резонанс в упругой области полосы и нули, расположившиеся на  $\mathcal{S}$ -плоскости в точках  $\mathcal{Z}_0$  и  $\mathcal{Z}_0^*$ , теперь замут положения (рис.2): кули - в точках  $\mathcal{Z}_0, -\mathcal{Z}_0^*, \mathcal{Z}_0^{-1}, -\mathcal{Z}_0^{*-1}$ , полосы - в точках  $\mathcal{Z}_0^{*-1}, -\mathcal{Z}_0^{-1}, \mathcal{Z}_0^*, -\mathcal{Z}_0$ , в соответствии с условиями (2, а-г). Мы видим, что полосы и кули располагаются симметричными относительно окружности параметри. Это обеспечивает выполнение условия упругой унитарности:  $|\mathcal{S}(e^{i(\mathcal{Z}/2-\vartheta)})|^2 = 1$ . Учсть небольшие эффекты абордации при энергиях ниже  $2m_K$  можно было бы, например, смешением кули  $\mathcal{Z}_0$  по радиусу в направлении соответствующего полосы  $\mathcal{Z}_0^{*-1}$  (симметрично относительно миной оси смешается и куля  $-\mathcal{Z}_0^*$ ). Такой способ обеспечивает выполнение неравенства  $|\mathcal{S}(e^{i(\mathcal{Z}/2-\vartheta)})| < 1$  для  $0 < \vartheta < \pi/2$ . В последующем, как обсуждалось выше, незначительными абордирующими эффектами ниже  $KK$ -порога мы пренебрегаем, т.е. полосы и кули располагаются симметрично относительно окружности.

Естественной параметризацией вклада упругого резонанса в  $\mathcal{S}$ -матрицу является функция Бликке:

$$\mathcal{S}_0(\mathcal{Z}) = \frac{(\mathcal{Z}_0 - \mathcal{Z})(\mathcal{Z}_0^* + \mathcal{Z})(\mathcal{Z}_0^{-1} - \mathcal{Z})(\mathcal{Z}_0^{*-1} + \mathcal{Z})}{(1 - \mathcal{Z}_0^* \mathcal{Z})(1 + \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z})(1 - \mathcal{Z}_0^{-1} \mathcal{Z})(1 + \mathcal{Z}_0^{*-1} \mathcal{Z})}. \quad (5)$$

Эта функция удовлетворяет условиям (4) и дает характерное резонансное поведение фазы. Отметим, что резонансное поведение фазы и удовлетворение условий (4а, б, в) обеспечивается и полосами  $\mathcal{Z}_0^{*-1}$  и  $-\mathcal{Z}_0^{-1}$  и кулями  $\mathcal{Z}_0$  и  $-\mathcal{Z}_0^*$ , лежащими только в верхней  $\mathcal{Z}$ -полуплоскости. Однако необходимость учета в качестве ближайших особенностей, таких полосов  $\mathcal{Z}_0^*$  и  $-\mathcal{Z}_0$  и соответствующих им кули  $\mathcal{Z}_0^{-1}$  и  $-\mathcal{Z}_0^{*-1}$ , расположенных в нижней  $\mathcal{Z}$ -полуплоскости, помимо удовлетворения условий (4г), видна из

следующего простого примера. Пусть, с целью учета  $4\pi$ -порога мы сделали конформное отображение (3) (в этом случае  $q_1$  соответствует  $4\pi$ -порогу). Тогда форма типа (5) только с полосами  $z_0^{*-1}$  и  $-z_0^{-1}$  и кулями  $z_0$  и  $-z_0^*$  дает резонансное поведение фазы, и параметр упругости  $\eta$  разрез I в строго упругой области  $2\pi_k < \sqrt{b} < 4\pi_k$ . Для простоты можно не рассматривать полосы и кулы в левой  $z$ -половине (они введены для выполнения условий (4б,в), но их влияние незначительно). Тогда  $\eta$  равно отношению отрезка  $(z_0, z)$  к умноженному на  $|z_0|$  отрезку  $(z_0^{*-1}, z)$ :  $\eta = |z_0 - z| / |z_0| |z_0^{*-1} - z|$  — для  $z$  из физической области. Это отношение равно 1 при  $z = e^{i(\pi/2 - \alpha)}$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ), а выше  $4\pi$ -порога, при  $z = Re z > 1$ , резко падает от 1, как видно из рис. 2, резкий излом, который испытывает кривая, соответствующая физической области, в точке  $z = 1$  ( $4\pi$ -порог), приводит к столь же значительному уменьшению отрезка  $(z_0, z)$  по сравнению с возрастанием отрезком  $(z_0^{*-1}, z)$ . Однако из эксперимента известно, что  $\eta \ll 1$  вплоть до  $KK$ -порога. Исправить ситуацию с описанием можно только, добавив полосы и кулы в нижней  $z$ -половине в соответствии с (4г), симметричные относительно окружности для упругой унитарности ниже  $4\pi$ -порога и симметричные полосы и кулы в верхней  $z$ -половине — для упругой унитарности выше  $4\pi$ -порога, (см. рис. 2). Далее, точно выше  $KK$ -порога экспериментально упругость  $\eta$  резко падает. Добиться этого в описании параметризацией (5) можно, меняя положение полосов и кулей в нижней  $z$ -половине с сохранением их симметрии относительно окружности (для упругой унитарности выше  $KK$ -порога), то есть условия (4а,б,в) выполняются по отдельности в верхней и нижней  $z$ -половине, а условие (4г) нарушается вне физической области. При этом ясно, что измененное положение пары "полос-кулы", вообще говоря, меняется с энергией.

Поскольку эта энергетическая зависимость обусловлена влиянием каналов (в нашем случае  $KK, \eta\eta$ ), сильно связанных с резонансом ( $J^*$ ), пропадающим в исследуемом канале ( $0.97\pi$  — расстояние), т.е. идет от резонансов в этих каналах к обменов частицами, то надежда (оправдываемая последующим анализом данных) состоит в том, что эту зависимость удастся описать наложением выбором унiformизующей переменной (формула (3) с  $q_1$ ), соот-

всего имеющим  $KK$ -порогу) и помножением на инвариант  $\mathcal{Z}$  - полуимпенс-  
тность, помимо уже рассмотренной смешанной пары, возможно, дополнительных пар полюсов и нулей, симметричных относительно окружности. Таким образом, можно рассматривать произвольное число резонансов.

4. Кроме резонансов, в предлагаемом способе описания следует учесть также фон, идущий в основном от левого разреза. Этот разрез преобразовался в результате отображения (3) в разрезы на минимой оси ( $t = \sqrt{(m_K + m_n)(m_K - m_n)}$ ):  $(-i\infty, -im)$ ,  $(-im^{-1}, im^{-1})$ ,  $(im, i\infty)$ . Поскольку влияние левого разреза промышляется наиболее сильно в упругой области, то можно полагать, что и фон имеет в основном упругий характер. Если не интересоваться пороговыми поведением, то базу упругого фона можно традиционно взять в виде (см., например, [3, 11]),

$$\delta_B = a + \sqrt{3} \cdot b. \quad (6)$$

Другим используемым нами описанием фона, которое представляется более интересным и последовательным в нашем подходе, является аппроксимация разрезов на минимой оси ( $y$  - ось,  $x = x + iy$ ) полюсами и симметричными им относительно единичной окружности нулями (для упругости фона выше  $KK$ -порога). Отличие этого описания фона от (6) состоит в том, что выше  $KK$ -порога его вклад становится неупругим.

Итак, окончательная параметризация  $S$  - матрицы имеет следующий вид:

$$S = S_B \prod_{n=S, S, \dots} \frac{(x_n - x)(x_n^* + x)(x_n' - x)(x_n'^* + x)}{(1 - x_n^* x)(1 + x_n^* x)(1 - x_n'^* x)(1 + x_n'^* x)} f_n(x), \quad (7)$$

где для фона будем использовать два способа описания:

$$S_B = \begin{cases} e^{2i\delta_B(x)}, & (a) \\ \prod_m \frac{iy_m - x}{1 + iy_m x} & \end{cases}, \quad (b)$$

$f_n(x)$  - учитывает обсуждаемый выше вклад каналов, сильно связанных с рассматриваемыми резонансами (пары полюс-нуль в минимой  $\mathcal{Z}$  - полуимпенс-сторонности):

$$f_n(x) = \prod_i \frac{(x'_i - x)(x'_i + x)}{(1-x'_i x)(1+x'_i x)}. \quad (8)$$

В формуле (7) величинами со штрихами обозначены положения соответствующих резонансу полюсов и нулей в нижней  $\chi$  - полуплоскости, смещенных вследствие абсорбционных эффектов выше  $KK$  -порога. В (8) положения полюсов и нулей такие отмечены штрихами, чтобы подчеркнуть их расположение в нижней  $\chi$  -полуплоскости.

5. На основе предложенной формулы проанализируем экспериментальные данные по  $\phi$  - волновому  $KK$  - рассеянию в изоскалярном канале в интервале 0,6 - 1,9 ГэВ. Физически наиболее приемлемые решения различных фазовых анализов  $KK$  - рассеяния для изоскалярной  $\phi$  - волны могут быть, во-второму, разбиты на два набора, которые примерно согласуются в отношении фазы  $\delta^{(3)}$ , за исключением данных работы <sup>10/</sup>, расположенных выше  $KK$  -порога систематически ниже других экспериментальных точек. Главное различие этих двух наборов данных касается параметра упругости  $\eta^{(3)}$  в области  $2m_K \sqrt{s} \leq 1,15$  ГэВ: работы <sup>10,12,13/</sup> дает для  $\eta^{(3)}$  существенно меньшие значения, чем результаты работ <sup>14-18/</sup>.

Рассмотрим данные работы <sup>12/</sup> из первого набора, в которой в отличие от других работ содержатся результаты единого систематического фазового анализа  $KK$  - рассеяния во всей интересующей нас области. Во-первых, заметим, что мы реализуем идею доминирующего влияния ближайших особенностей, которая справедлива, вообще говоря, на довольно узком интервале энергий и требует проверки в более широкой области. Поэтому мы сначала разбили экспериментальные точки рассматриваемых данных на две группы: данные в интервале от 0,8 до 1,2 ГэВ - область резонансного  $S^+$  - эффекта - и от 1,1 до 1,5 ГэВ - здесь фаза  $\delta^{(3)}$  обнаруживает дальнейший рост в районе 1,3 - 1,4 ГэВ, что может быть интерпретировано как резонансный  $\epsilon$  - эффект. Далее мы обработали эти данные с помощью формулы (7,а) по методу  $\chi^2$ , предполагая  $f_{S^+, \epsilon}(x) = 1$  и вводя только один резонанс в каждой из областей. Полученные при этом параметры резонансов (со своим фоном для каждого резонанса) приведены в таблице I (первые две колонки).

Затем мы распространяем обработку на основе формулы (7,а) на данные во всей рассматриваемой области, вводя одновременно

оба резонанса. Если в результате параметры резонансов изменяются незначительно, то предлагаемый способ описания экспериментальных данных следует считать достаточно надежным. Причем это требование в основном относится к положениям полюсов на II листе, которые определяют истинные массы и ширины резонансов. Положения же полюсов на III листе, в значительной мере зависящие от аборситивных эффектов, могут, очевидно, существенно меняться в результате такой процедуры.

Результат такого анализа данных (в предположении  $f_{g^* \rightarrow \epsilon}(x) = 1$ ) приведен в третьей колонке таблицы 1 (положения полюсов на III листах обозначены как  $\sqrt{s_n} = m_n - i\Gamma_n/2$  и  $\sqrt{s'_n} = m'_n - i\Gamma'_n/2$ ,  $n = S^*, \epsilon, \dots$ ). Обработка подтвердились 64 экспериментальные точки. Свободными параметрами, подлежащими

Таблица I.

Параметры \ Интервалы энергий	0,8 - 1,2(ГэВ)	1,1-1,5(ГэВ)	0,6 - 1,9 (ГэВ)	
	фон (а)	фон (б)	фон (а)	фон (б)
$m_{g^*}$ (МэВ)	$997 \pm 6$		$999 \pm 7$	$1000 \pm 5$
$\Gamma_{g^*}$ (МэВ)	$41 \pm 9$		$55 \pm 8$	$48 \pm 6$
$m'_{g^*}$ (МэВ)	$942 \pm 16$		$965 \pm 30$	$971 \pm 8$
$\Gamma'_{g^*}$ (МэВ)	$147 \pm 60$		$62 \pm 40$	$152 \pm 15$
$m_{\epsilon}$ (МэВ)		$1570 \pm 175$	$1587 \pm 35$	$1552 \pm 15$
$\Gamma_{\epsilon}$ (МэВ)		$410 \pm 180$	$631 \pm 60$	$494 \pm 35$
$m'_{\epsilon}$ (МэВ)		$1710 \pm 250$	$1499 \pm 20$	$1516 \pm 15$
$\Gamma'_{\epsilon}$ (МэВ)		$350 \pm 300$	$459 \pm 55$	$369 \pm 32$
$\alpha$	$23^0 \pm 14^0$	$115^0 \pm 100^0$	$23^0 \pm 5^0$	полюс 2-го порядка при $\alpha = 0,028 \pm$ $\pm 0,06$ (ГэВ)
$\beta$	$65^0 \pm 17^0$	$110^0 \pm 100^0$	$38^0 \pm 5^0$	
$\chi^2/n.d.f.$	0,6	0,32	1,14	1,00

определение в результате минимизации  $\chi^2$ , являются положения полюсов и параметры фона - всего 10. Экспериментальная точка при  $\sqrt{s} = 0,99$  ГэВ вносит аномально большой вклад в  $\chi^2$ , поэ-

тому разумно исключить ее из рассмотрения. Из сравнения с первыми двумя колонками таблицы видно, что массы и ширины резонансов изменились в допустимых пределах, то есть предлагаемый способ определения параметров резонансов достаточно надежный.

В связи с обсуждавшейся ранее возможностью существования скалярного мезона  $\epsilon$  (700) мы ввели далее в формуле (7,а) полоса в нули, которые соответствовали бы этому резонансу. В результате минимизации  $\chi^2$  параметры фона  $a$  и  $b$  практически обратились в нуль, введение полосы на II листе и соответствующие им нули на I листе сместились в положение левого разреза, введенные полосы на II листе сместились на реальную ось выше  $4m_\pi^2$  и взаимно уничтожились с соответствующими им нулями на IV листе. Таким образом, мы естественно привели ко второму способу описания фона – (б): он описывается полосой 2-го порядка на II листе на реальной оси и соответствующими ему нулем на I листе, аппроксимирующим левый разрез; то есть фон описывается одним параметром. Результат анализа данных на основе формулы (7,б) (9 свободных параметров) приведен в 4-ой колонке таблицы I. Описание данных удовлетворительное.

Для удобства использования формул (7,а,б) укажем также соответствующие резонансам положения нулей в правой  $\chi$ -полуплоскости, установленные посредством анализа данных: в случае упругого фона (а):

$$\begin{aligned} \chi_{g+} &= 1,2273 + i0,17339, & \chi'_{g+} &= 0,84637 - i0,22365, \\ \chi_g &= 2,987 + i0,75566, & \chi'_g &= 0,34737 - i0,070805, \end{aligned}$$

в случае фона (б): нуль 2-го порядка на минной оси в точке

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 1,2634, & \chi_2 &= 0,72984 - i0,24186, \\ \chi_{g+} &= 1,2281 + i0,15318, & \chi'_{g+} &= 0,34796 - i0,05624. \end{aligned}$$

Энергетическая зависимость фазы  $\delta(s)$  и упругости  $\eta(s)$ , полученная на основе формул (7,а,б), приведена на рис. 3.

Проверялась также чувствительность пропитированных выше результатов к положению неупругого порога  $q_4$ , то есть  $\chi^2$  минимизировалось с еще одним свободным параметром  $q_4$ . Результат практически неотличим от предыдущего анализа.

6. С целью определения параметров  $I^0(J^P)=0^+(0^+)$  – мезонов предложен способ описания экспериментальных данных по  $\sigma$ -волновому  $KK$  – рассеянию в изоскалярном канале, основанный на

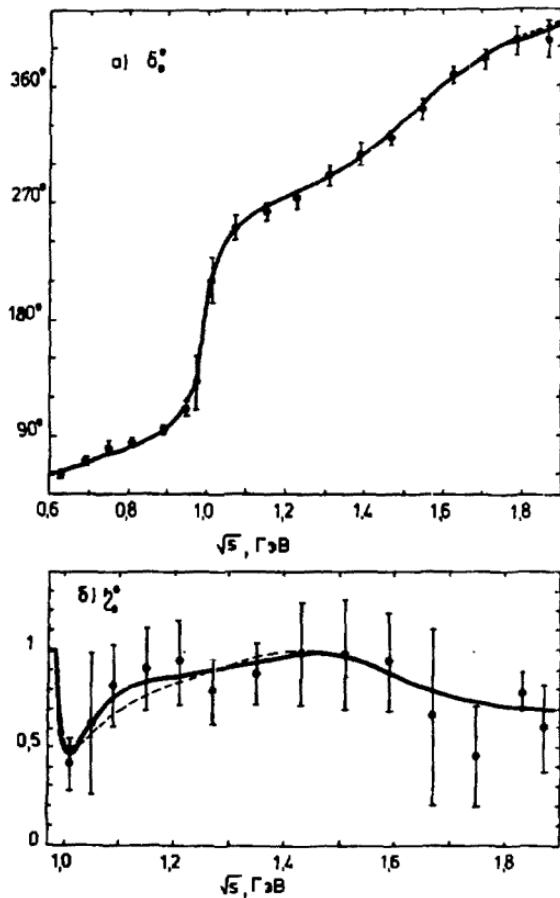


Рис. 3. Энергетические зависимости фазы  $\delta_0^0$  ( $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ ) и параметра упругости  $\eta_0^0$  ( $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ ), полученные с помощью предложенного метода описания экспериментальных данных: на основе формулы (7,а) - пунктирные кривые ( $\chi^2/ndf = 1,14$ ), на основе (7,б) - сплошные кривые ( $\chi^2/ndf = 1,0$ ). Анализировались 64 экспериментальные точки из работы [12]; на рисунке приведены только некоторые характерные точки.

реализации идеи доминирующего влияния ближайших особенностей с использованием процедуры униформизации. Аргументировано, что при учете точки ветвления, связанной с  $\bar{K}\bar{K}$  - порогом, приводящем к рассмотрению 4-листной римановой поверхности  $S$  - матрицы процесса  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ , ближайшими к физической области особенностями, соответствующими резонансу, являются две пары полюсов, расположенных в комплексно сопряженных точках на плоскости квадрата энергии: одна пара на II листе и другая - на IV. Для "упругого" резонанса эти пары полюсов находились бы точно одна над другой. Влияние абсорбтивных эффектов выше  $\bar{K}\bar{K}$  - порога смещает полюса на III листе. Условие-unitарности требует наличия нулей в  $S$  - матрице, расположенных при тех же значениях квадрата энергии, что и соответствующие полюса: полюсам на II листе отвечают нули на I листе, полюсам на III листе - нули на IV.

Выделение в рассмотрение второй пары полюсов (и соответствующих им нулей) является необходимым элементом описания резонанса в случае 4-листной римановой поверхности и существенным отличием от описания резонанса на 2-листной поверхности. В последнем случае ближайшими особенностями, соответствующими резонансу, является, как известно, пара комплексно сопряженных полюсов на втором листе.

Четырехлистная структура римановой поверхности учитывается с помощью униформизующей переменной  $\pi$  (формула (3)). Параметризацией резонансного вклада в  $\pi$  - плоскости является функция Ближе, построенная из указанных выше полюсов и нулей. Она берется (a) как "упругий" с линейно зависящей от энергии фазой (2 параметра) и (b) как аппроксимирующие левый разрез полюса и нули на реальной оси. В нашем случае оказалось достаточно одного полюса 2-го порядка и соответствующего ему нуля (один параметр). Получено хорошее описание экспериментальных данных работы<sup>[12]</sup> в области энергий 0,6 - 1,9 (ГэВ). Результаты обработки по методу  $\chi^2$ :

$$\chi^2/n.d.f. \approx 1.0; m_{g^*} = (1000 \pm 5) \text{ МэВ}, \Gamma_{g^*} = (48 \pm 6) \text{ МэВ}, m_{\epsilon} = (1552 \pm 15) \text{ МэВ}, \Gamma_{\epsilon} = (494 \pm 35) \text{ МэВ}.$$

Указаний на обсуждавшийся ранее скалярный мезон  $\epsilon$  (700) мы не обнаружили. Масса и ширина мезона  $\epsilon$  (1400) оказались больше получаемых в других анализах<sup>[2, 8, 13]</sup>. Кроме того, можно сделать качественный вывод о сильной связи  $S^*$  с другими каналами ( $\bar{K}\bar{K}$ ,  $\eta\eta$ ). Это видно из относительно большого смеще-

ния полюса на II-ем листе. Наоборот, из аналогичных соображений и из того, что упругость  $\eta(s)$  в окрестности  $\epsilon$  - мезона близка к I, делаем вывод об относительно сильной связи  $\epsilon$  - мезона с  $\pi\pi$ -системой по сравнению с другими каналами. Для получения более подробной и количественной информации о связях с различными каналами и более определенной интерпретации полюсов на II-ем листе необходим также анализ данных по крайней мере по процессу  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ .

Следует также проанализировать экспериментальные данные из второго набора, обсуждавшегося в разделе 5. Однако этот анализ требует больших усилий и осторожности, поскольку в этом случае в разных энергетических областях должны использоваться данные из различных работ и для получения приемлемой энергетической зависимости и разумных значений  $\chi^2$  нужно, возможно, ввести некие нормировочные множители, чтобы привести в соответствие качество этих различных экспериментальных данных. /14-18/

### Литература

1. Particle Data Group. Phys.Lett., 111 B, 9,10,128, 137 (1982).
2. D.Morgan. Phys.Lett., 51 B, 71 (1974).
3. N.N.Achasov, S.A.Devyanin, G.N.Shestakov. Phys.Lett., 88 B, 367 (1979); ЯФ, 32, 1098 (1980).
4. N.A.Törnqvist. Preprint HU-TET-82-1, Helsinki, 1982.
5. R.L.Jaffe. Phys.Rev., D 15, 267, 281 (1977).
6. K.Ishikawa et al. Phys.Lett., 116 B, 426 (1982).
7. V.A.Novikov et al. Nucl.Phys., B 165, 67 (1980).
8. A.C.Irving et al. Z.für Phys., C 10, 45 (1981).
9. G.Mennessier. Z. für Phys., C 16, 241 (1983).
10. S.D.Prgtopopescu et al. Phys.Rev., D 7, 1279 (1973).
11. S.M.Platte. Phys.Lett., 63 B, 224, 228 (1976).
12. B.Hyams et al. Nucl.Phys., B 64, 134 (1973).
13. A.D.Martin et al. Nucl.Phys., B 121, 514 (1977).
14. G.Grayler et al. Nucl.Phys., B 75, 189 (1974).
15. B.Hyams et al. Nucl.Phys., B 100, 205 (1975).
16. M.I.Cordon et al. Nucl.Phys., B 157, 250 (1979).
17. W.Wetzer et al. Nucl.Phys., B 115, 208 (1976).
18. N.M.Cason et al. Phys.Rev.Lett., 41, 271 (1978).

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОЦЕССАХ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЯ БОЗОНОВ НА НУКЛОНАХ В КХД

Ф.С.Садыхов, А.И.Мухтаров, С.К.Абдуллаев

Азербайджанский государственный университет, Баку

В последнее время из экспериментальных данных по лептон-нуклонным слабо-электромагнитным процессам, инициирующему рождению адронов с большим поперечным импульсом, по процессам аннигиляции и рождения лептонных и адронных пар получены новые важные сведения о свойствах кварковых и глюонных распределений внутри адронов. В частности, установлено различие в поведении функций распределения кварков различных сортов. Не менее успешно была развита квантовая хромодинамика /КХД/, на основе которой удалось описать указанные процессы и предсказать некоторые новые эффекты<sup>1/</sup>. Интенсивной хромодинамической обработке подвергаются разнообразные лептон-адронные взаимодействия, где асимптотическая свобода позволяет объяснить известный бъёркановский скейлинг, лежащий в основе партонных представлений о структуре адронов, описывает глюонные поправки к слабому взаимодействию. Исследование различных поляризационных эффектов при лептон-адронных взаимодействиях позволяет определить неупругие структурные функции, дает ценную информацию о свойствах кварк-глюонных распределений внутри адронов, создает благоприятные условия для проверки предсказаний калибровочной теории. Например, в экспериментах стенфордской группы изучено глубоконеупругое рассеяние продольно-поляризованных электронов на нуклонах и измерена Р-нечетная спиновая асимметрия<sup>2/</sup>. Результаты этой работы хорошо согласуются с предсказаниями единой теории слабо-электромагнитных взаимодействий<sup>3/</sup>.

В работах<sup>4,5/</sup> в рамках КХД были исследованы процессы электророждения пиона и обратного электророждения пиона на нуклоне с учетом слабых нейтральных токов /СНТ/ и определены структурные функции, обусловленные как кварк-глюонным, глюон-глюонным взаимодействиями, так и нейтральными токами. В работе<sup>5/</sup> также рассмотрена аннигиляция лептон-антисимметрических пар в адроны в модели Вайнберга-Салама.

В настоящей работе проводится исследование поляризационных эффектов в процессах прямого и обратного электророждения пиона на нуклоне и тормозного излучения электрона на нуклоне с образованием адронов в КХД с учетом СНТ.

Нами получено общее выражение эффективного сечения процессов  $eN \rightarrow eN\pi$  и  $\pi N \rightarrow N\bar{e}\bar{e}$  в КХД и модели Вайнберга-Салама в нашем порядке теории возмущения и произведено интегрирование по параметру  $x$ . При этом для степени поляризации конечного электрона /начальный электрон неполяризован/ получается следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_e(x) &= \frac{f_2}{3f_1(x)} && \text{без СНТ} \quad /1/ \\ P_e(x) &= \frac{f_2 + g_q F_2(x)}{3f_1(x) + g_q F_1(x)} && \text{с СНТ,} \quad /2/ \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \left( 2x(P_N k_1)(P_N k_2) - \frac{Q^2}{2}(P_N Q) \right), \\ f_2 &= -\frac{\mu Q^2}{2} ((k_1 s_q) + (k_2 s_q)), \\ g_q &= \omega_w Q^2 \left[ \sqrt{\pi} \alpha^{3/2} (Q^2 + M^2) \ell_q \right]^{-1} \quad /3/ \end{aligned}$$

Здесь  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  являются функциями векторных и аксиальных констант теории Вайнберга-Салама и импульсов частиц, из-за громоздкости выражений их здесь не приводим,  $P_N = x P_N$ ;  $Q$  - передаваемый импульс;  $k_1$  и  $k_2$  - импульсы лептонов;  $s_q$  и  $s_q$  - заряд и поляризация кварков;  $\omega$  и  $\omega_w$  - константы электромагнитного и слабого взаимодействий.

Изменение степени поляризации электрона  $P_e$  при фиксированных различных значениях  $x$  показано на рис. I. При увеличении  $x$  вклад СНТ на  $P_e$  существенно уменьшается. С ростом  $Q^2$  вл

ние СНТ на  $P_e$  значительно, но поляризация с учетом СНТ слабо зависит от  $Q^2$ .

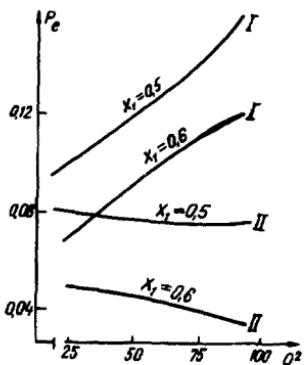


Рис.1 Изменение степени поляризации конечного электрона в реакции  $eN \rightarrow eN\pi$  при  $E = 120$  ГэВ,  $\theta_e = 60^\circ$ , I - без СНТ, II - с СНТ

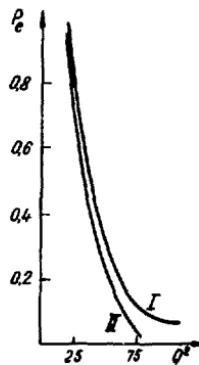


Рис.2 Зависимость  $P_e$  от квадрата передаваемого импульса в реакции  $eN \rightarrow eN\pi$  при  $E = 120$  ГэВ,  $\theta_e = 60^\circ$ , I - без СНТ, II - с СНТ

Используя функцию распределения  $U$  -кварков в нуклоне в ви-  
де 6/

$$f(x) = \frac{0.895}{\sqrt{x}} (1-x)^3 (1+2.3x), \quad z_1 = z_2 = 1/2 \quad 1/4$$

и интегрируя полученное выражение для сечения реакции  $eN \rightarrow eN\pi$  по  $x$  с точностью до членов  $\delta = 0,1/Q^2$  для степени поляризации находим

$$P_e = \frac{f_2}{3f_1}$$

без СНТ, 1/5

$$P_e = \frac{f_2 + g_q (3A_q V_e f_0 - 3V_q A_e f_1 - A_q A_e f_3)}{3f_1 + g_q (-3A_q A_e f_0 - V_q A_e f_2 + A_q V_e f_3)}$$

с СНТ, 1/6

где

$$f_0 = \frac{x_B Q^2}{2} \left( 1 + \delta \ln \frac{q}{p} \right) \left[ (P_N K_1) + (P_N K_2) \right],$$

$$f_1 = x_B \left[ 2x_B \left( 1 + 2\delta \ln \frac{q}{p} \right) (P_N K_1) (P_N K_2) - \frac{Q^2}{2} \left( 1 + \delta \ln \frac{q}{p} \right) (P_N Q) \right],$$

$$f_3 = \mu \left[ \frac{Q^2}{2} (K_1 S_q - K_2 S_q) - x_B (1 + \delta) \ln \frac{q}{p} \left( (P_N K_1) (K_2 S_q) + (P_N K_2) (K_1 S_q) \right) \right].$$

$x_B = Q^2/2m_N \Delta E$  - бърженовски параметр.

На рис.2 представлена зависимость  $P_e$  от квадрата передаваемого импульса. Поведение  $P_e$  с СНТ и без СНТ почти одинаковое и оно уменьшается с ростом  $Q^2$ . Интересно отметить, что поляризация конечного нуклона /обусловленная поляризацией кварка/ с изменением передаваемого импульса остается почти постоянной без учета СНТ, а с учетом СНТ она резко уменьшается /рис.3/.

Степень поляризации электрон-позитронных пар в процессе  $\pi^+ \rightarrow Ne\bar{e}$  определяется выражениями

$$P_2 = \frac{f_3' f_4'}{3f_1' f_2'} \quad \text{без СНТ, /8/}$$

$$P_2 = \frac{f_3' f_4' + g_q (-3A_e V_q f_1' f_2' - 3A_q V_e f_2' f_3' + A_e A_q f_4' f_3')}{3f_1' f_2' + g_q (3A_e A_q f_2' f_3' - A_e V_q f_1' f_3' - A_q V_q f_2' f_4')} \quad \text{с СНТ, /9/}$$

где

$$f_1' = \frac{x_q^2}{p^4} \left[ 2x_q (P_N K_1) (P_N K_2) - \frac{Q^2}{2} (P_N Q) \right],$$

$$f_2' = \frac{1}{4(P_N q_N)^2} \left[ x_1 z_2 (P_N q_N)^2 + 2(P_N Q)(q_N Q) - (1 + x_1)(P_N Q)(P_N q_N) - z_2 (P_N q_N)(q_N Q) \right],$$

$$f_3' = \frac{x_1^2}{p^4} \frac{Q^2}{2} (P_N K_2 - P_N K_1).$$

$$\begin{aligned}
 f'_q = & \frac{\mu}{x_2 z_2 \gamma (P_N q_\pi)} \left\{ 2x_2 z_2 (P_N q_\pi) (q_S) - x_2 (P_N S_q) / z_2 (q_\pi Q) + \right. \\
 & + x_2 (P_N Q) + x_2 z_2 (P_N q_\pi) \left. \right] - z_2 (q_\pi S_q) \left[ z_2 (q_\pi Q) + \right. \\
 & \left. + x_2 (P_N Q) - x_2 z_2 (P_N q_\pi) \right] \}.
 \end{aligned}$$

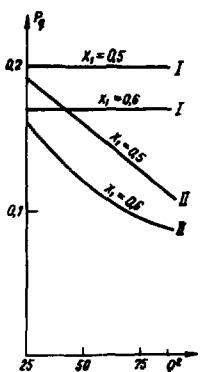


Рис.3 Зависимость поляризации конечного нуклона от  $Q^2$  в реакции  $eN \rightarrow eN\pi$  при  $E = 120$  ГэВ,  $\theta_\pi = 6^\circ$ , I - без СНТ, II - с СНТ

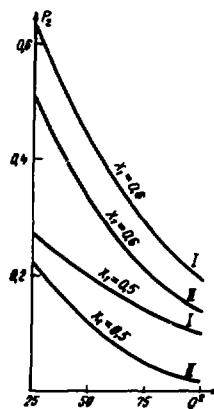


Рис.4 Зависимость степени поляризации пары от  $Q^2$  при  $E = 120$  ГэВ,  $\theta_\pi = 6^\circ$ , I - без СНТ, II - с СНТ

Как видно из рис.4, степень поляризации пары с ростом  $Q^2$  уменьшается и это очень чувствительно к значениями  $x$ . Максимальное значение поляризации возникает при относительно малых  $Q^2$  и влияние вклада СНТ является существенным.

Полученное нами сечение процесса  $\bar{p}N \rightarrow N\pi\bar{\pi}$  при распределении  $1/4$  квarkов в нуклоне интегрировано по  $x$ . При этом степень поляризации конечного электрона показана на рис.5. СНТ существенно изменяет  $P_2$  и при малых  $Q^2$  степень поляризации принимает даже

отрицательное значение. Такое поведение поляризации пар может дать ценную информацию о расположении夸рков в нуклоне.

Следует отметить, что поведение поляризации конечного нуклона в данной реакции в зависимости от  $Q^2$  почти такое же, что в процессе  $eN \rightarrow eN\pi^+$  (рис.6).

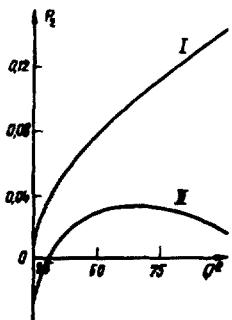


Рис.5 Поведение  $P_e$  после интегрирования по  $x$ .  
I - без СНТ, II - с СНТ

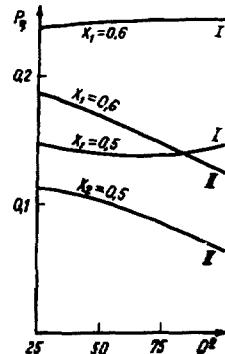


Рис.6 Поляризация конечного нуклона, I - без СНТ, II - с СНТ

В стандартной модели Вайнберга-Салама дифференциальное сечение процесса тормозного излучения  $eN \rightarrow e\gamma X$  может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\Omega_\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} \frac{m_e^2 E_e dE_e}{m_N E_\gamma q^4} \left\{ (1+S_1 S_2) (F_1 + \ell F_2) + (S_1 + S_2) (F_3 + \ell F_4) \right\}, \quad (10)$$

где

$$F_1 = \sum_q e_q^2 (\psi_1 + \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) + 2 V_e \sum_q e_q V_q (f_1 \psi_1 +$$

$$+ \beta_2 \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) + 2A_e \sum_q e_q A_q (\beta_1 \psi_3 + \beta_2 \psi_4) \times \\ \times (f_q''(x) - f_{\bar{q}}''(x));$$

$$F_2 = -2A_e \sum_q e_q V_q (\beta_1 \psi_5 + \beta_2 \psi_6) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) + \\ + 2V_e \sum_q e_q A_q (\beta_1 \psi_7 + \beta_2 \psi_8) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x));$$

$$F_3 = -2A_e \sum_q e_q V_q (\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) - \\ - 2V_e \sum_q e_q A_q (\beta_1 \psi_3 + \beta_2 \psi_4) (f_q''(x) - f_{\bar{q}}''(x));$$

$$F_4 = \sum_q e_q^2 (\psi_5 + \psi_6) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) + 2V_e \sum_q e_q V_q (\beta_1 \psi_5 + \\ + \beta_2 \psi_6) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x)) - 2A_e \sum_q e_q A_q (\beta_1 \psi_7 + \\ + \beta_2 \psi_8) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x));$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{2} G g^2 M_2^2}{\pi \omega (g^2 - M_2^2)}, \quad g^2 = (k_1 - k_2 - \kappa)^2,$$

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{2} G Q^2 M_2^2}{\pi \omega (Q^2 - M_2^2)}, \quad Q^2 = (k_1 - k_2)^2$$

$K_1(\ell)$ ,  $K_1(S_1)$  и  $K_2(S_2)$  - 4-импульсы /спиральности/ фотона, начального и конечного лейтонов;  $f_q''(x)$  и  $f_{\bar{q}}''(x)$  - функции распределения夸克ов и антикварков в ядре;  $\psi_i / i = 1 \div 8$  / - некоторые функции энергий и углов вылета частиц, из-за громоздкости выражений их здесь не приводим.

Пользуясь формулой /10/, определим Р-нечетную продольную спиновую асимметрию, обусловленной СИТ

$$A = -2A_e \frac{\sum e_q v_q (\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x))}{\sum e_q^2 (\psi_1 + \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x))}$$

/II/

Для численных оценок асимметрии  $A$  используя функции распределения夸арков  $1/4$  при значении  $x = 0,5$  с учетом валентных夸арков находим

$$A = -8 \cdot 10^{-4} \quad \frac{q^2}{m_N^2} \quad \text{для протона}$$

$$A = 15 \cdot 10^{-4} \quad \frac{q^2}{m_N^2} \quad \text{для нейтрона}$$

Другим Р-нечетным эффектом, указывающим на существовании нейтральных токов, является степень круговой поляризации тормозных фотонов

$$P_\gamma = -2A_e \frac{\sum e_q v_q (\beta_1 \psi_5 + \beta_2 \psi_6) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x))}{\sum e_q^2 (\psi_1 + \psi_2) (f_q''(x) + f_{\bar{q}}''(x))}$$

/12/

В случае, когда лейтон рассеивается назад и тормозной фотон уносит максимальную энергию при значении  $x \sim 1$  для степени круговой поляризации имеем

$$P_\gamma = 7,2 \cdot 10^{-4} \quad \frac{q^2}{m_N^2} \quad \text{для протона}$$

$$P_\gamma = -24 \cdot 10^{-4} \quad \frac{q^2}{m_N^2} \quad \text{для нейтрона}$$

#### Литература

1. H. Wahlen, Proc. of Summer institute on particle physics, CONF -810770, SLAC -245, 663 (1982)
2. C.Y.Prescott, et al., phys. Lett., B 77, 347 (1978)

3. S.Weinberg, Phys. Rev. Lett., 19, 1264 (1967)
4. Р.И.Михалков, К.А.Петросян, Ф.С.Садыхов, Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, IУ международный семинар, Протвино, том I, 338. (1981)
5. С.К.Абдуллаев и.др., Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, У международный семинар, Протвино, том I, 202 (1982)
6. P.C.Bossetti et al., Aachen-Bonn-CERN-London-Oxford-Saclay Collaboration, Oxford University, Preprint, 16/78 (1978)

# О ВОЗМОЖНОЙ СТРУКТУРЕ ХИГГСОВСКОГО СЕКТОРА В $SU(2)_X U(1)_X U(1)$ -МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А.Н.Лезнов, В.В.Хрущев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В стандартной теории электрослабых взаимодействий, основанной на калибровочной группе  $SU(2) \times U(1)$ , существенным образом используется механизм Хиггса спонтанного нарушения калибровочных симметрий. К настоящему времени кроме естественного требования простоты или минимальности числа хиггсовских полей известно только одно ограничение на структуру хиггсовского сектора в  $SU(2) \times U(1)$ -теории (кроме численных оценок некоторых параметров), которое связано с экспериментальным значением величины

$\rho = m_w^2/m^2 \cos^2 \theta_w \approx 1^{1/2}$ . Так как в основном приближении

$$\rho = \sum_{i=1}^n ((T^2 - T_3^2) v_i^2) / 2 \sum_{i=1}^n (T_3 v_i)^2,$$

где  $v_i/\sqrt{2}$  – действительные вакуумные средние хиггсовских полей,  $T_i$  – генераторы слабого изоспина, то хиггсовские поля, которые преобразуются как синглеты или дублеты относительно  $U(2)$ -преобразований, удовлетворяют условию  $\rho = 1$ .

С другой стороны, известно, что ряд вопросов теории частиц, таких, например, как число поколений фермионов, не может быть решен в рамках  $SU(2) \times U(1)$ -модели, т.е. необходим переход к более широкой группе калибровочных симметрий. Минимальным расширением стандартной модели является модель, основанная на группе  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ , которая рассматривалась рядом авторов [2-10]. В  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -модели существуют два нейтральных массивных  $Z$ -бозона, один с массой, как правило, меньшие массы стандартного  $Z$ -бозона, другой с массой, большей  $m_Z$  (теоретически равна приблизительно 90 ГэВ).

В настоящей работе мы накладываем определенное условие симметрии относительно глобальной группы на исходный лагранжиан для фермионных и хиггсовских полей до введения взаимодействий с калибровочными полями. Для  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -модели с двумя поколениями фермионов условие симметрии относительно  $U(4)$ -группы (вместе с требованиями самосопряженности представления для скалярных полей) приводят к выбору определенного её вариданта – так называемой дублет-синглетной модели. Исследуются источники нарушения исходной симметрии после введения взаимодействий между фермионными и хиггсовскими полями. Показано, что при определенном выборе заря-

дов фермионных полей, при котором удовлетворяется условие отсутствия аксиальных аномалий в  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -модели, механизмы образования масс фермионов первого и второго поколений различны, что может служить возможным объяснением наблюдаемой разности масс этих поколений.

Рассмотрим калибровочную группу  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$  с генераторами  $\{T_i, Y, N\}$ . Ковариантная производная равна

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig T_i A_\mu^i - ig' Y/2 B_\mu - ih N/2 C_\mu. \quad (1)$$

При  $h = 0$   $\mathcal{D}_\mu$  переходит в ковариантную производную стандартной модели.

Будем для удобства рассматривать только два поколения фермионов:

$$(f^L)^T = (\nu_e^L, e^L, \nu_\mu^L, \mu^L, u_1^L, d_1^L, c_i^L, s_i^L), (f^R)^T = (\nu_e^R, e^R, \nu_\mu^R, \mu^R, u_i^R, d_i^R, c_i^R, s_i^R), T$$

означает операцию транспонирования,  $i = 1, 2, 3$  – цветовой индекс квarks. Для электрического заряда справедлива формула  $Q = T_3 + Y/2$ .

Чтобы задать хиггсовский сектор модели, рассмотрим следующее условие. Мы знаем, что свободный лагранжиан системы с  $n$  безмассовыми фермионами обладает  $U_L(n) \times U_R(n)$ -киральной симметрией. Хиггсовский сектор предлагается строить таким образом, чтобы до введения взаимодействий с другими полями он обладал симметрией относительно какой-либо векторной подгруппы  $V_{L+R}$ , которая содержится в  $[U_L(n) \times U_R(n)]_{\text{diag}}$ .

В нашем случае в качестве такой подгруппы выберем векторную подгруппу  $SU(4) \times U(1)$ , которая после включения взаимодействий с другими полями и процедуры спонтанного нарушения калибровочных симметрий переходит в группу нарушенной симметрии ароматов квarks  $SU(4)_{\text{flavor}} \times U(1)_B$ . Более того, считая хиггсовские поля элементарными (в рассматриваемом нами диапазоне энергий), естественно потребовать, чтобы они принадлежали фундаментальным представлениям группы  $SU(4) \times U(1)$ , для которых барийный заряд равен нулю.

Рассмотрим подробно случай, когда хиггсовские поля принадлежат фундаментальному сомосопряженному представлению, размерность которого равна шести. Используя приведенное выше условие, получим, что плотность лагранжиана для фермионных и хиггсовских полей до включения взаимодействий между ними будет иметь вид

$$\mathcal{L}^0(x) = -(\mathbf{f}^L)^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \mathbf{f}^L - (\mathbf{f}^R)^+ \gamma_4 \gamma_\mu \partial_\mu \mathbf{f}^R - \frac{1}{4} \text{Sp}[(\partial_\mu X)^+ \partial_\mu X] - \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{1}{2} \text{Sp}(X^+ X) + \frac{L^2}{\lambda} \right]^2, \quad (2)$$

где  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ,  $X$  – антисимметричная относительно  $SU(4)$ -индексов матрица:  $X_{ij} = -X_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ .

Используем в качестве калибровочной группы взаимодействий между фермионными и хиггсовскими полями минимальное расширение группы электрослабых взаимодействий Глэшоу–Вайнберга–Салама, т.е.  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -группу (отметим, однако, что приведенное выше условие симметрии можно использовать для любой калибровочной группы, в том числе и для группы  $SU(2) \times U(1)$ ). В такой модели по сравнению со стандартной, появляется только один новый нейтральный бозон. Так как мы накладываем условие сим-

метрии относительно  $SU(4)$  только на  $\mathcal{I}^0(x)$ , то после введения  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -взаимодействий исходная глобальная симметрия будет нарушаться определенными членами в полном лагранжиане, которые приведены ниже.

На хиггсовских полях  $X_{ij}$  можно реализовать представления группы  $SU(2)_L$  несколькими способами<sup>11</sup>. В дальнейшем будем использовать решение (10.4) из работы<sup>11</sup>, которое соответствует разложению  $X_{ij}$  на синглет и сопряженный ему синглет, дублет и сопряженный ему дублет. Это решение удовлетворяет ограничению на возможный набор  $SU(2)$ -представлений для хиггсовских полей, которое следует из того, что экспериментальное значение параметра  $\rho$  приблизительно равно единице<sup>11</sup>. Причем заряженный ток хиггсовских частиц в этом случае (до спонтанного нарушения) отличен от нуля только для переходов между членами дублетов, а нейтральный ток диагонален по  $SU(4)$ -индексам.

Матрица  $X_{ij}$  выражается через синглет  $\Phi_1^0$  и дублет  $\Phi_2^T = (\Phi_2^+, \Phi_2^0)$  следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Phi}_1^0 & \bar{\Phi}_2^0 & \Phi_2^+ \\ -\bar{\Phi}_1^0 & 0 & -\Phi_2^- & \Phi_2^0 \\ -\bar{\Phi}_2^0 & \Phi_2^- & 0 & \Phi_1^0 \\ -\Phi_2^+ & -\Phi_2^0 & -\Phi_1^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

После введения взаимодействий между ферми-полями и полями Хиггса плотность лагранжиана рассматриваемой системы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \vec{A}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} \vec{C}_{\mu\nu}^2 - (\vec{f}^R)^+ \gamma_4 \gamma_\mu \vec{D}^R \vec{f}^R - \\ & - (\vec{f}^L)^+ \gamma_4 \gamma_\mu \vec{D}^L \vec{f}^L - (\vec{\Phi}_1^0 \vec{\Phi}_1^0)^+ \vec{D}_\mu^1 \vec{\Phi}_1^0 - (\vec{\Phi}_2^+ \vec{\Phi}_2)^+ \vec{D}_\mu^2 \vec{\Phi}_2 - \\ & - \lambda \left( \bar{\Phi}_1^0 \vec{\Phi}_1^0 + \bar{\Phi}_2^0 \vec{\Phi}_2^0 + \vec{\Phi}_2^+ \vec{\Phi}_2^+ + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 - \lambda_1 (\bar{\Phi}_1^0 \vec{\Phi}_1^0)^2 - \\ & - \lambda_{12} (\bar{\Phi}_1^0 \vec{\Phi}_1^0) (\bar{\Phi}_2^0 \vec{\Phi}_2^0 + \vec{\Phi}_2^+ \vec{\Phi}_2^+) - \mu_1^2 (\bar{\Phi}_1^0 \vec{\Phi}_1^0) - \mathcal{L}^Y, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{D}_\mu^1 &= \partial_\mu - i\hbar/2 n_1 \vec{C}_\mu, \\ \vec{D}_\mu^2 &= \partial_\mu - i\hbar/2 \vec{A}_\mu - i\hbar'/2 \vec{B}_\mu - i\hbar/2 n_2 \vec{C}_\mu, \\ \vec{D}_\mu^R &= \partial_\mu - i\hbar'/2 \vec{A}_\mu^R - i\hbar/2 \vec{B}_\mu^R - i\hbar/2 N^R \vec{C}_\mu, \\ \vec{D}_\mu^L &= \partial_\mu - i\hbar/2 \vec{A}_\mu^L - i\hbar'/2 \vec{Y}^L \vec{B}_\mu - i\hbar/2 N^L \vec{C}_\mu, \\ \mathcal{L}^Y &= \sum_{i,a} \vec{f}_{ia}^Y \vec{L}_a \vec{\Phi}_a^i \vec{f}_a^R + h.c., \end{aligned} \quad (5)$$

причем  $\Phi_1^i = \tilde{\Phi}_2 = i\sigma_2 \Phi_2^*$ , если  $i$  соответствует фермионам с  $T_3 = \frac{1}{2}$ , и  $\Phi_1^i = \Phi_2$ , если  $i$  соответствует фермионам с  $T_3 = -1/3$ .  $L_\alpha$  – левые дублеты фермионов.

При получении выражений (4) и (5) мы воспользовались следующими результатами. Набор хiggsовских полей, заданный матрицей (3), позволяет использовать условие работы<sup>12/</sup> для совпадения низкоэнергетического взаимодействия левых электронного и мюонного нейтрино в рассматриваемой и стандартных моделях. Чтобы такое совпадение имело место в данном случае, достаточно потребовать  $N(\phi_2) = N(\nu_e^L) = N(\nu_\mu^L) = 0$ . Известно также, что  $N(1)_N$  – взаимодействие может привести к возникновению аксиальных аномалий (АА) во взаимодействиях с участием фермионов. Условием отсутствия АА является справедливость для  $N$ -зарядов фермионов четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \text{Tr } N^L &= 0, \\ \text{Tr } Q^2 N^L &= \text{Tr } Q^2 N^R, \\ \text{Tr } Q(N^L)^2 &= \text{Tr } Q(N^R)^2, \\ \text{Tr } (N^L)^3 &= \text{Tr } (N^R)^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Если считать, что сокращение  $U(1)_N$  АА происходит внутри каждого поколения, как это имеет место для  $U(1)_Y$  АА в стандартной модели, то несложно получить:

- когда  $N$ -заряд правого нейтрино какого-нибудь поколения равен нулю, то  $N$ -заряды всех фермионов поколения равны нулю;
- когда  $N$ -заряд правого нейтрино какого-нибудь поколения отличен от нуля, то  $N$ -заряды левых фермионов равны нулю (при условии Джорджи-Вайнберга<sup>12/</sup>), а для правых фермионов рассматриваемого поколения могут задаваться матрицей  $N_1^R$  или матрицей  $N_2^R$ , где

$$\begin{aligned} N_1^R &= \text{diag}\{n, -n, n_{(i)}, -n_{(i)}\}, \\ N_2^R &= \text{diag}\{-\sqrt[3]{7}\sqrt{5}n, -7n, 5n_{(i)}, n_{(i)}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс  $(i)$  означает троекратное повторение произвольного числа  $n$ , что соответствует утроению за счет цвета кварков. При  $n = 1$  матрицы  $N_1^R$  и  $N_2^R$  совпадают с матрицами, приведенными в работе<sup>13/</sup>.

Выберем в качестве основного решения для  $N$ -зарядов фермионов первого и второго поколений матрицы  $N_1^L$ ,  $N_1^R$  и  $N_2^L$ ,  $N_2^R$  соответственно, которые задаются следующими формулами:

$$N_1^L = N_1^R = 0, \quad N_2^L = 0, \quad N_2^R = \text{diag}\{n, -n, n_{(i)}, -n_{(i)}\}. \quad (8)$$

Другое простое решение для  $N$ -зарядов фермионов, которое хотя явно нарушает условие Джорджи-Вайнберга, но, как следует из формул (9), не может привести к существенным противоречиям с имеющимися экспериментальными данными, имеет вид

$$N_1^L = N_1^R = 0, \quad N_2^L = N_2^R = \text{diag}\{3n, 3n, -n_{(i)}, -n_{(i)}\}. \quad (9)$$

Взаимодействия Юкавы при выборе решения (9) как для фермионов первого поколения, так и для фермионов второго поколения становятся возможными только после нарушения  $U(1)_N$ -инвариантности.

Для решения (8), если  $n \neq 0$ , условие  $U(1)_N$ -инвариантности не позволяет построить связи Юкавы для фермионов первого и второго поколений одновременно. Если  $N(\Phi_2) = n_2 = 0$ , то взаимодействие Юкавы возможно только для фермионов первого поколения, если  $n_2 = n$ , то взаимодействие Юкавы возможно только для фермионов второго поколения (при условии  $U(1)_N$ -инвариантности). В последнем случае квадраты масс нейтральных калибровочных бозонов определяются как собственные значения матрицы:

$$M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (gv_2)^2 & -gg'v_2^2 & -ghn_2v_2^2 \\ -gg'v_2^2 & (gv_2)^2 & gh'n_2v_2^2 \\ -ghn_2v_2^2 & gh'n_2v_2^2 & (hn_1v_1)^2 + (hn_2v_2)^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

причем поле фотона выражается через поля  $A_\mu^3$  и  $B_\mu$ , также как и в стандартной модели.

Таким образом, нарушение первоначальной глобальной симметрии лагранжиана  $\mathcal{L}_0(x)$ , как до спонтанного нарушения  $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -симметрии, так и после можно определить с помощью формул (4), (5). Отметим одно важное обстоятельство, которое заключается в том, что нарушение  $U(4)$ -симметрии и вклад различных взаимодействий в образование масс фермионов больше для фермионов второго поколения, которые обладают ненулевым  $N$ -зарядом. К тому же, если спонтанное нарушение симметрии происходит следующим образом:  $SU(2) \times U(1) \times U(1) \rightarrow U(1) \times U(1) \times U(1)$ , то на первом этапе только фермионы второго поколения приобретают массы за счет взаимодействия Юкавы, массы фермионов первого поколения на этом этапе могут быть отличны от нуля только за счет динамического механизма возникновения масс [14-17]. Это обстоятельство может служить возможным объяснением наблюдаемой разности масс между фермионами первого и второго поколений.

Авторы благодарны Б.А.Арбузову, А.А.Архипову, В.И.Саврину, М.В.Савельеву и С.Ф.Султанову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kim J.E. et al. - Rev. Mod. Phys., 1981, 53, 211.
2. Долгов А.Д., Захаров В.И., Окунь Л.Б. - ЯФ, 1973, 18, 876.
3. Fritzsh H., Minkowski P. - Nucl. Phys., 1976, B103, 61.
4. Pati J.C., Rajpoot S., Salam A. - Phys. Rev., 1978, D17, 131.
5. Darby D., Grammer G., Jr. - Nucl. Phys., 1978, B139, 490.
6. De Groot E.H., Gounaris G.J., Schildknecht D. - Phys. Lett., 1979, 85B, 399.
7. Уилье М. - Prog. Theor. Phys., 1979, 61, 269.
8. Deshpande N.G., Iskandar D. - Nucl. Phys., 1980, B167, 223.
9. Смирнов А.Ю. - Nuovo Cim., 1981, 64A, 297.
10. Robinett R.W., Rosner J.L. - Phys. Rev., 1982, D25, 3036.
11. Khrushchov V.V. - Prepr. ИНЭР 82-190, Серпухов, 1982.
12. Georgi H., Weinberg S. - Phys. Rev., 1978, D17, 275.
13. Chanowitz M.S., Ellis J., Gaillard M.K. - Nucl. Phys., B128, 506.
14. Namby Y., Iona-Lasinio G. - Phys. Rev., 1961, 122, 345; 124, 246.
15. Арбузов Б.А., Тавхелидзе А.Н., Фаустов Р.Н. - ДАН СССР, 1961, 139, 345.
16. Вакс В.Г., Ларкин А.И. - ЖЭТФ, 1961, 40, 282, 1992.
17. Weinberg S. - Transactions of the N.Y. Acad. of Sciences, 1977, Ser. II, vol. 38.

## ЭФФЕКТ ААРОНОВА-БОМА: КАК ПРОЦЕДУРА ВКЛЮЧЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОМОГАЕТ ЕГО ПОНЯТЬ?

В.Д.Скаржинский, В.П.Фролов

Физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР, Москва

### I. Введение

Эффект Ааронова - Бома */1,2/* является одним из замечательных квантовомеханических явлений, которое можно поставить в один ряд с такими предсказаниями квантовой механики, как квантование энергии связанных состояний, прохождение частиц через потенциальный барьер и т.п. Сущность эффекта состоит, в частности, в том, что квантовое состояние электрона, удерживаемого потенциальным барьером в неодносвязной области, где отсутствует магнитное поле, но отличен от нуля вектор-потенциал, зависит от калибровочно-инвариантных комбинаций вектор-потенциала,  $\phi \tilde{A} d\ell$  и в конечном счете от магнитного поля в запрещенной области. Этот в некотором смысле парадоксальный факт вызвал в 60-х годах острую дискуссию о роли электромагнитного потенциала в квантовой механике, а

также о концепции локальности /3-5/, в ходе которой было высказано немало интересных, но не всегда корректных утверждений. Уже в своих первых работах /2,3/ авторы убедительно показали, что данное явление кажется трудно объяснимым лишь с точки зрения классической физики, где изменение состояния системы может быть вызвано только действием некоторой силы, и напротив, оно представляется совершенно естественным в рамках обычной квантовой механики в ее традиционном толковании.

Тем не менее в последнее время эффект Ааронова - Бома вновь привлек к себе внимание как теоретиков, так и экспериментаторов после серии работ /6/, в которых утверждалось, что данный эффект является следствием ложных математических построений, не имеющих физических оснований, а соответствующие эксперименты объясняются плохой экранировкой магнитного поля. Хотя критический разбор /7/ этого утверждения показал его явную некорректность, однако сам факт возникновения последующей дискуссии /8/ свидетельствует о том, что теоретическое рассмотрение данного явления сталкивается с определенными трудностями как чисто математического, так и физического характера, которые мешают ясному пониманию сущности этого явления.

Так, в ряде работ при описании данного эффекта некритически используются многозначные потенциалы, а также волновые функции, зависящие от интегралов по путям. Это часто ведет к нарушению требования однозначности волновых функций и к неверным утверждениям о роли допустимых калибровочных преобразований. Подобная проблема возникает, например, при исследовании асимптотики волновой функции в задаче рассеяния на бесконечно длинном соленоиде, вектор-потенциал которого слабо убывает на бесконечности. Это вызывает искажение асимптотики, которое отражает, как и в случае кулоновского рассеяния, специфические физические характеристики рассеивателя и поэтому не может быть устранено никаким калибровочным преобразованием всюду вне соленоида. Подобное проявление дальнодействия потенциала ставит вопрос о его влиянии на процесс приготовления начального состояния электрона. В этой связи представляет определенный интерес рассмотрение эффекта Ааронова-Бома на торOIDальном соленоиде /9/, где, к сожалению, не удается найти точную волновую функцию из-за больших математических трудностей.

С другой стороны, в случае бесконечно тонкого соленоида вектор-потенциал неизбежно сингулярен вдоль него и вызывает соответствующую особенность волновой функции, однако это затруднение легко преодолевается тривиальным использованием теории обобщенных функций.

В данной работе мы уделяем основное внимание исследованию влияния процесса включения магнитного поля соленоида на состояние квантового электрона. Такая постановка вопроса позволяет исключить трудности, связанные с дальнодействием (слабым убыванием вектор-потенциала на бесконечности) и его возможным влиянием на процесс приготовления начального состояния системы. Кроме того, при таком подходе к задаче удается отделить классическое силовое воздействие на электрон вихревого электрического поля, возникающего в процессе включения, от квантовомеханических эффектов, связанных с появлением в пространстве вектор-потенциала, что способствует более ясному пониманию природы эффекта Ааронова - Бома.

Во втором разделе работы изучается влияние процесса включения магнитного поля в бесконечно длинном тонком соленоиде на рассеяние плоской волны и волновых пакетов.

В третьем разделе аналогичная задача решается для случая финитного движения электрона в цилиндрической полости между соленоидом конечного радиуса и ограничивающей коаксиальной цилиндрической поверхностью большего радиуса.

В обоих случаях дается ответ на вопрос, при каких условиях только по конечному состоянию электрона можно получить некоторую информацию о магнитном поле в области, недоступной для электрона.

## 2. Рассеяние электрона при включении магнитного поля в соленоиде

Здесь мы исследуем изменение движения электрона в процессе его рассеяния при включении магнитного поля в бесконечно длинном тонком соленоиде, расположенным вдоль оси  $OZ$ . Это поле описывается вектор-потенциалом

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z \frac{\alpha(t)}{\rho} \cdot \rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

определенным с точностью до калибровочного преобразования. Так

как поток магнитного поля  $\Phi(t) = \oint \vec{A} d\vec{l} = 2\pi\alpha(t)$  через произвольный контур  $C$ , охватывающий соленоид, фиксирован и не зависит от выбора калибровки, никаким калибровочным преобразованием нельзя обеспечить более быстрое убывание  $\vec{A}$  на бесконечности.

Магнитное поле

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A} = \vec{e}_z \Phi(t) \delta(x) \delta(y) = \vec{e}_z \frac{2}{\pi} \Phi(t) \delta(\rho^2) \quad (2.2)$$

сосредоточено на оси  $OZ$ , а индуцированное вихревое электрическое поле

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{e}_\varphi \frac{\dot{\Phi}(t)}{2\pi c \rho} \quad (2.3)$$

отлично от нуля во всем пространстве только во время включения. Заметим, что бесконечно тонкий соленоид рассматривается лишь ради простоты расчетов и легко может быть заменен соленоидом конечного радиуса. Кроме того, соленоид считается неэкранированным, "прозрачным", - в противном случае необходимо учитывать дополнительное рассеяние, обусловленное экранирующей поверхностью.

Движение электрона в данном поле описывается уравнением Шредингера с гамильтонианом, зависящим от времени:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2M} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{v}. \quad (2.4)$$

Вдоль оси  $OZ$  электрон движется свободно. Если составляющая волнового вектора  $\vec{k}$  вдоль нее задана, волновая функция электрона содержит тривиальный множитель

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left[-i\hbar \frac{k_z t}{2M} + i\vec{k}_z \cdot \vec{r}\right] \psi(x, y, t),$$

который не меняется при рассеянии и в дальнейшем будет опущен.

Симметрия задачи допускает отделение угловой переменной

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(\rho, t) \exp[i m \varphi], \quad (2.5)$$

где радиальные функции удовлетворяют уравнению

$$-i \frac{2M}{\hbar} \frac{\partial R_m}{\partial t} = \frac{\partial^2 R_m}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_m}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} [m - \beta(t)]^2 R_m, \quad (2.6)$$

$$\beta(t) \equiv \frac{e\alpha(t)}{\hbar c} = \frac{e\Phi(t)}{2\pi\hbar c},$$

которое в общем случае для произвольной функции  $\beta(t)$  решить не удается.

Поэтому сделаем упрощающее предположение, что магнитное поле включается скачком в момент времени  $t=0$ , так что функция  $\beta(t)$  имеет вид

$$\beta(t) = \beta \cdot \Theta(t), \quad \beta = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c}, \quad (2.7)$$

где  $\Theta$  – ступенчатая функция, а  $\Phi$  – устремившееся значение потока магнитного поля.

Для того чтобы решить нестационарное уравнение Шредингера (2.4) в этом приближении, нужно найти решение стационарного уравнения, описывающее рассеяние на постоянном сингулярном магнитном поле, сосредоточенном на оси  $OZ$ , и сшить его с соответствующим решением для свободного движения. Условием сшивания является непрерывность волновой функции в момент времени  $t=0$ ; как видно из уравнения (2.4), производная  $\dot{\Psi}$  при этом терпит разрыв при  $t=0$ .

Пусть при  $t < 0$  волновая функция является плоской монохроматической волной с волновым вектором  $\vec{k}$ :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} Et + i\vec{k}\vec{r}\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-i\hbar t \frac{\vec{k}^2}{2M} + i\vec{k}\rho \cos(\varphi - \varphi_{\vec{k}})\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение при  $t > 0$  будем искать в виде суперпозиции стационарных решений с заданной энергией:

$$\Psi(x, y, t) = \int d\vec{p} c(\vec{p}) \exp\left[-i\hbar t \frac{\vec{p}^2}{2M}\right] \Psi_{\vec{p}}(\vec{p}), \quad (2.9)$$

где  $\Psi_{\vec{p}}(\vec{p})$  – ортонормированные (на  $\delta$ -функции) решения стационарной задачи рассеяния электрона на сингулярном магнитном поле, сосредоточенном на оси  $OZ$ .

Как известно [2], решения  $\Psi_{\vec{p}}(\vec{p})$  можно представить в виде

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(p) R_m(p) \exp[im\varphi], \quad (2.10)$$

где радиальные функции  $R_m(p)$  удовлетворяют уравнению Бесселя:

$$R_m'' + \frac{1}{p} R_m' + p^2 R_m - \frac{1}{p^2} (m - \beta)^2 R_m = 0. \quad (2.11)$$

Учитывая граничное условие при  $p=0$ , имеем

$$R_m(p) = J_{m-\beta}(\rho p). \quad (2.12)$$

Коэффициенты  $C_m(\rho)$  определяются граничными условиями на бесконечности и имеют вид

$$C_m(\rho) = \exp\left[i\pi m - i\frac{\pi}{\rho}/m - \beta/ - im\varphi_{\rho}\right]. \quad (2.13)$$

Спектральная функция разложения (2.9) вычисляется из условия непрерывности волновой функции  $\Psi(x, y, t)$  при  $t = 0$  по формуле

$$C(\vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{\rho} \exp[i\vec{k}\vec{\rho}] \Psi_{\vec{\rho}}^*(\vec{\rho}). \quad (2.14)$$

Рассмотрим сначала случай  $\beta = n$ , где  $n$  – целое число. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{\rho}}(\vec{\rho}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi m - i\frac{\pi}{2}/m - n/ - im\varphi\right] \Psi_{(m)}(\rho, \varphi) \exp[im\varphi] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp[in(\varphi - \varphi_{\vec{\rho}} - \pi)] \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \exp[i\frac{\pi}{2}m'] J_{m'}(\rho, \varphi) \exp[im'(\varphi - \varphi_{\vec{\rho}})] = \quad (2.15) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp[in(\varphi - \varphi_{\vec{\rho}} - \pi)] \exp[i\vec{\rho}\vec{\rho}]. \end{aligned}$$

Выражение (2.14) перепишем в виде

$$C(\vec{\rho}) = \tilde{C}(\vec{\rho}) \exp[in(\varphi_{\vec{\rho}} + \pi)], \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\rho) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d\vec{\rho} \exp[i(\vec{k} - \vec{\rho})\vec{\rho} - in\varphi] = \\ &= \delta_{n,0} \delta(\vec{\rho} - \vec{k}) + \frac{n}{2\pi(\vec{k} - \vec{\rho})^2} \exp[-in(\varphi_{\vec{k} - \vec{\rho}} - \frac{\pi}{2})]. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Таким образом, волновая функция при  $t > 0$  имеет вид

$$\Psi(x, y, t) = \exp[in\varphi] \frac{1}{2\pi} \int d\vec{\rho} \tilde{C}(\vec{\rho}) \exp[-iht \frac{\rho^2}{2M} + i\vec{\rho}\vec{\beta}], \quad (2.18)$$

т.е. представляет собой суперпозицию плоских волн (волновой пакет) со спектром  $\tilde{C}(\rho)$ . Калибровочный множитель  $\exp[in\varphi]$  обеспечивает устранение вклада вектор-потенциала из средних значений всех физических величин. Он имеет особенность при  $\rho = 0$ , которая соответствует сингулярности вектор-потенциала данного поля и не

приводит к каким-либо трудностям. Это становится очевидным, если рассмотреть рассеяние на экранированном соленоиде конечного радиуса, где возникает такой же множитель, но волновая функция при  $\rho = 0$  обращается в нуль.

Спектральная функция  $\tilde{C}(\vec{\rho})$  волнового пакета (2.18) зависит от установленного значения потока магнитного поля. Эта зависимость естественно объясняется действием на начальную плоскую волну (2.8) вихревого электрического поля (2.3), которое и формирует данный волновой пакет. Заметим, что в случае  $\beta = n$  никакой рассеянной цилиндрической волны не возникает и все изменение падающей плоской волны сводится к ее деформации под действием импульсного электрического поля в момент времени  $t = 0$ .

Волновая функция (2.18) может быть представлена в явном, но физически менее наглядном виде:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) = & \left( \frac{M\rho - \hbar t k \exp[i(\varphi - \varphi_k)]}{M\rho - \hbar t k \exp[-i(\varphi - \varphi_k)]} \right)^{\frac{n}{2}} \exp[-i\hbar t \frac{k^2}{2M} + i\vec{k}\rho \vec{k}] \\ & \times \exp[-i\frac{\vec{k}n}{4} + i\frac{\vec{k}}{2} \left( \frac{\pi \vec{e}}{2} \right)^2] \left[ \tilde{J}_{\frac{n-1}{2}}(z) - i\tilde{J}_{\frac{n+1}{2}}(z) \right]; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$z = \frac{M}{4\hbar t} \left( \vec{\rho} - \frac{\hbar t}{M} \vec{k} \right)^2.$$

В частности, при  $n = 2$  имеем

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) = & \frac{M\rho - \hbar t k \exp[i(\varphi - \varphi_k)]}{M\rho - \hbar t k \exp[-i(\varphi - \varphi_k)]} \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{i}{2\vec{k}} \right) x \right. \\ & \left. \times \exp[-i\hbar t \frac{k^2}{2M} + i\vec{k}\rho \vec{k}] + \frac{i}{2\vec{k}} \exp[i\frac{M\rho^2}{2\hbar t}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь картину рассеяния при  $\beta \neq n$ . В этом случае стационарное решение  $\Psi_{\beta}(\vec{\rho})$  уже не приводится к виду (2.15), так как функция

$$\frac{1}{2\pi} \exp[i\beta(\varphi - \varphi_{\beta} - \pi)] \exp[i\vec{p}\vec{\rho}]$$

претерпевает разрыв при  $\varphi = 2\pi$  и поэтому не является решением стационарного уравнения Шредингера. Асимптотически при больших

значениях  $\rho[1-\cos(\varphi-\varphi_\beta)]$  стационарное решение  $\mathcal{Y}_\beta(\vec{\rho})$  содержит плоскую волну и расходящуюся цилиндрическую волну

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\beta(\vec{\rho}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[i\pi m - i\frac{\pi}{2}m\beta - im\varphi_\beta] \mathcal{J}_{im}(\rho\rho) \exp[i m \varphi] \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \exp[i\beta(\varphi-\varphi_\beta-\pi)] \exp[i\vec{\rho}\vec{\rho}] + \frac{1}{2\pi(\rho\rho)^{\frac{1}{2}}} f(\varphi) \exp[i\rho\varphi], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\varepsilon = 1$  при  $0 < \varphi - \varphi_\beta \leq \pi$  и  $\varepsilon = -1$  при  $-\pi \leq \varphi - \varphi_\beta < 0$ , а  $f(\varphi)$  – амплитуда рассеяния:

$$f(\varphi) = \frac{\sin \pi \delta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \exp[in(\varphi - \varphi_\beta - \pi) - i\frac{\varphi - \varphi_\beta}{2} - i\frac{\pi}{4}] \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_\beta}{2}}; \quad (2.22)$$

$$\beta = n - \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Заметим, что первый асимптотический член в (2.21) не нарушает однозначность решения, так как эта формула несправедлива при малых значениях  $\varphi - \varphi_\beta$ , где амплитуда падающей плоской волны уменьшается (область теми); при этом фазовый множитель перестраивается так, чтобы в асимптотической области волновая функция оставалась однозначной и непрерывной.

Волновая функция системы при  $t > 0$  будет, по-прежнему, определяться выражением (2.9), где

$$\begin{aligned} C(\vec{\rho}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d\vec{\rho} \exp[i\vec{k}\vec{\rho}] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-im(\varphi - \varphi_\beta - \pi) + i\frac{\pi}{2}m\beta] \mathcal{J}_{im}(\rho\rho) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-i\frac{\pi}{2}m + i\frac{\pi}{2}m\beta + in(\varphi_\beta - \varphi)] \mathcal{J}_{im}(\rho\rho) \mathcal{J}_{im}(\vec{k}\rho), \end{aligned} \quad (2.23)$$

но в отличие от случая  $\beta = n$ , она уже не является суперпозицией плоских волн. Напротив, асимптотически волновая функция при  $t > 0$  содержит не только суперпозицию плоских волн со спектром (2.23), но и суперпозицию расходящихся цилиндрических волн. Именно последние и несут информацию о наличии потока магнитного поля вдоль оси  $Oz$  и позволяют определять его величину по модулю целого числа,  $\beta = n - \delta$ . Выражение для волновой функции  $\mathcal{Y}(x, y, t)$  при  $t > 0$  в виде ряда по  $m$  достаточно громоздко и здесь не приводится.

Результаты, полученные для случая падающей плоской монохро-

матической волны при  $t < 0$  тривиально обобщается на случай волновых пакетов.

Пусть при  $t < 0$  волновая функция представляет собой волновой пакет:

$$\Psi(x, y, t) = \hbar \int d\vec{k} \alpha(\vec{k}) \frac{1}{2\pi} \exp\left[-i\hbar t \frac{\vec{k}^2}{2M} + i\vec{k}\vec{p}\right]. \quad (2.24)$$

Тогда решение при  $t > 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \hbar \int d\vec{k} \alpha(\vec{k}) \int d\vec{p} C(\vec{p}) \exp\left[-i\hbar t \frac{\vec{p}^2}{2M}\right] \mathcal{V}_{\vec{p}}(\vec{p}) = \\ &= \hbar \int d\vec{p} C(\vec{p}) \exp\left[-i\hbar t \frac{\vec{p}^2}{2M}\right] \mathcal{V}_{\vec{p}}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$C(\vec{p}) = \int d\vec{k} \alpha(\vec{k}) c(\vec{p}), \quad (2.26)$$

а спектральная функция  $C(\vec{p})$ , зависящая, конечно, и от волнового вектора  $\vec{k}$ , определяется выражениями (2.14), (2.16) и (2.23).

Опираясь на полученные результаты, можно заключить, что процесс включения магнитного поля в соленоиде приводит, во-первых, к деформации начального состояния – свободно распространяющегося волнового пакета –, аналогичной изменению импульса классической частицы под действием возникающего при включении электрического поля, и, во-вторых, к появлению (при  $\beta \neq n$ ) расходящегося цилиндрического волнового пакета – рассеяния Ааронова – Бома. Квантовый характер этого рассеяния становится очевидным, если учесть, что рассеянная волна возникает лишь в том случае, когда падающий волновой пакет охватывает соленоид (ось  $OZ$ ). Это заключение немедленно вытекает из формул (2.26) и (2.14). В квантовой механике классическая частица описывается узким волновым пакетом. Если классическая частица не пересекает соленоид, соответствующий волновой пакет не охватывает ось  $OZ$  и рассеивается только индуцированным электрическим полем. Таким образом, в классическом пределе возникает знакомая классическая картина рассеяния.

3. Изменение стационарных состояний электрона, движущегося вокруг соленоида, при включении поля

Рассмотрим финитное движение электрона в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими непроницаемыми поверхностями с радиусами  $a$  и  $b$ . Пусть внутри цилиндра меньшего радиуса  $a$  помещен соленоид, в котором в момент времени  $t=0$  создается магнитное поле, полный поток которого равен  $\Phi$ . В пространстве между цилиндрами это поле описывается вектор-потенциалом (2.1). Распределение магнитного поля и вектор-потенциала внутри соленоида здесь несущественно и может быть произвольным.

Волновая функция электрона при  $t>0$  может быть представлена в виде суперпозиции стационарных состояний с заданной энергией:

$$\Psi(x, y, t) = \sum_E C(E) \exp\left[-i \frac{E}{\hbar} t\right] \Psi_E(x, y). \quad (3.1)$$

(Тривиальный множитель  $\exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar} t k_y^2 + ik_y x\right]$ , описывающий свободное движение вдоль оси  $0z$  здесь опущен).

Стационарные состояния системы можно записать в виде

$$\Psi_E(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(\rho) \exp[im\varphi], \quad (3.2)$$

где радиальные волновые функции  $R_m(\rho)$  должны удовлетворять уравнению Бесселя

$$R_m'' + \frac{1}{\rho} R_m' + \rho^2 R_m - \frac{1}{\rho^2} (m - \beta)^2 R_m = 0, \quad E = \frac{\hbar^2 \rho^2}{2M}, \quad (3.3)$$

и граничным условиям

$$R_m(a) = R_m(b) = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда имеем

$$R_m(\rho) = C_m^{(1)} J_{im-\beta}(\rho a) + C_m^{(2)} N_{im-\beta}(\rho a),$$

где

$$C_m^{(1)} J_{im-\beta}(\rho b) + C_m^{(2)} N_{im-\beta}(\rho b) = 0, \quad (3.5)$$

$$C_m^{(1)} J_{im-\beta}(\rho a) + C_m^{(2)} N_{im-\beta}(\rho a) = 0.$$

Эти уравнения и условие нормировки волновой функции определяют возможные состояния системы, причем энергетический спектр задается уравнением

$$\int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p\alpha)} - \int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p\beta)} = 0. \quad (3.6)$$

Все корни этого уравнения вещественны, прости и симметричны относительно точки  $p=0$ . Для больших значений  $p\alpha$ ,  $p\beta$ , используя асимптотику функций Бесселя, получаем

$$P_{n,m}(\beta) = \frac{\pi n}{\beta - \alpha} + \frac{4(m-\beta)^2 - 1}{8\pi\alpha\beta} \frac{\beta - \alpha}{n} + \dots \quad (3.7)$$

Общее решение при  $t > 0$  имеет вид

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n,m} C_{n,m}(\beta) \exp\left[-i\frac{\hbar t}{2M} P_{n,m}^2(\beta)\right] \exp[i m \varphi] \times \quad (3.8)$$

$$\times \left[ \int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(\beta)\rho)} - \int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(\beta)\alpha)} \right] N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(\beta)\rho)} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(\beta)\alpha)},$$

где  $C_{n,m}(\beta)$  – произвольные постоянные, удовлетворяющие условию нормировки волновой функции

$$\sum_n \frac{4}{\pi P_{n,m}^2(\beta)} |C_{n,m}(\beta)|^2 \left[ N_{im-\beta i}^{-2}(p_{n,m}(\beta)\beta) - N_{im-\beta i}^{-2}(p_{n,m}(\beta)\alpha) \right] = 1. \quad (3.9)$$

Волновая функция, описывающая произвольное состояние системы без магнитного поля при  $t < 0$ , получается из (3.8) и (3.6), если положить  $\beta = 0$ :

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n,m} C_{n,m}(0) \exp\left[-i\frac{\hbar t}{2M} P_{n,m}^2(0)\right] \exp[i m \varphi] \times \quad (3.10)$$

$$\times \left[ \int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(0)\rho)} - \int_{im-\beta i}^{\beta i} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(0)\alpha)} \right] N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(0)\rho)} N_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(0)\alpha)}.$$

Чтобы получить полное решение задачи при всех значениях  $t$ , нужно слить решения (3.8) и (3.10) при  $t=0$ . Условие непрерывности волновой функции при  $t=0$  имеет вид

$$\sum_n C_{n,m}(0) R_{im}^{(p_{n,m}(0)\rho)} = \sum_n C_{n,m}(\beta) R_{im-\beta i}^{(p_{n,m}(\beta)\rho)}, \quad (3.11)$$

где введено обозначение

$$R_{lm, \beta l}(\rho_{n,m}(\beta) \rho) \equiv J_{lm, \beta l}(\rho_{n,m}(\beta) \rho) - \frac{J_{lm, \beta l}(\rho_{n,m}(\beta) \alpha)}{N_{lm, \beta l}(\rho_{n,m}(\beta) \alpha)} N_{lm, \beta l}(\rho_{n,m}(\beta) \rho). \quad (3.12)$$

Суммы в обеих частях соотношения (3.11) представляют собой ряды Фурье - Бесселя  $1/10/$ , что позволяет легко выразить коэффициенты  $C_{n,m}(o)$  и  $C_{n,m}(\beta)$  друг через друга. Таким образом, по начальному состоянию системы, заданному в виде произвольной суперпозиции стационарных состояний с энергетическим спектром  $\rho_{n,m}(o)$  и спектральными коэффициентами  $C_{n,m}(o)$ , можно однозначно определить спектральные коэффициенты  $C_{n,m}(\beta)$ , т.е. найти состояние, в которое переходит система после включения магнитного поля в соленоиде. Естественно, полученное состояние будет обладать другим энергетическим спектром, так как в процессе включения на электрон действовало индуцированное вихревое электрическое поле (2.3). Заметим, что классическая заряженная частица при таком воздействии также изменит свою энергию. Однако нас интересует здесь не это тривиальное изменение, а проявление специфического квантового эффекта взаимодействия с вектор-потенциалом, аналогичного эффекту Ааронова - Бома при рассеянии. Рассмотрим, в частности, вопрос о том, можно ли, анализируя состояние системы только при  $t > 0$  и не имея никакой информации о ее состоянии при  $t < 0$ , определить, имеется ли магнитное поле в соленоиде, т.е. в области  $\rho < a$ , недоступной для электрона? Ответ на этот вопрос, как и в случае рассеяния, зависит от величины уставновившегося потока магнитного поля.

Действительно, пусть  $\beta = \ell$ , где  $\ell$  - целое число. Тогда, производя замену индексов  $m - \ell = m'$  в соотношениях (3.6) и (3.8), получим для волновой функции системы при  $t > 0$  следующее выражение:

$$\Psi(x, y, t; \beta = \ell) = \exp[i\ell\varphi] \tilde{\Psi}(x, y, t; \beta = o), \quad (3.13)$$

где  $\exp[i\ell\varphi]$  - несущественный калибровочный множитель, всюду регулярный в области, где волновая функция отлична от нуля, а  $\tilde{\Psi}(x, y, t; \beta = o)$  - волновая функция некоторого другого состояния в отсутствие магнитного поля.

В противоположном случае подобное преобразование невозможно, волновая функция электрона при включенном поле существенно отличается от волновой функции в отсутствие магнитного поля. Ее энергетический спектр оказывается совершенно другим, причем он не только сдвигается при включении магнитного поля в соленоиде, как это имеет место в случае ротора <sup>1/5</sup>, но и деформируется так, что расстояния между уровнями энергии начинают зависеть от величины установленвшегося магнитного потока в соленоиде  $\beta$  (по модулю  $\ell$ ). Таким образом, совершенно очевидно, что волновая функция системы при  $t > 0$  содержит определенную информацию о магнитном поле в области, недоступной для электрона. Заметим, что, как и в случае рассеяния электрона, этот эффект проявляется лишь в том состоянии, когда волновая функция охватывает соленоид. Эффект исчезает, если в цилиндрической полости, в которой движется электрон, поставить непроницаемую для него перегородку. В этом случае волновую функцию электрона при включенном поле с помощью калибровочного преобразования можно свести к некоторой волновой функции в отсутствие поля. В классическом пределе, когда частица описывается компактным волновым пакетом, который не охватывает соленоид, эффект также исчезает.

Рассмотренный пример финитного движения представляется нам особенно поучительным при обсуждении эффекта Ааронова - Бома, так как он свободен от каких-либо математических неопределенностей, связанных как с сингулярностью вектор-потенциала при  $\rho = 0$ , так и с его слабым убыванием на бесконечности. С другой стороны, физическая проблема приготовления начального состояния системы здесь решается динамически и становится тривиальной.

Заметим также, что в рамках нестационарного подхода видна явная несостоинственность высказанного в работах <sup>1/6</sup> утверждения о допустимости многозначных волновых функций в многосвязном пространстве, так как в отсутствие поля пространство становится односвязным, волновые функции однозначными и условия сшивания не могут быть выполнены.

В целом нестационарный подход к эффекту Ааронова - Бома позволяет лучше понять различие ролей вектор-потенциала в классической и квантовой физике.

## Литература

1. W.Ehrenberg, R.E.Siday. Proc.Phys.Soc., B62, 8 (1949).
2. Y.Aharonov, D.Bohm. Phys.Rev., 115, 485 (1959).
3. Y.Aharonov, D.Bohm. Phys.Rev., 123, 1511 (1961); 125, 2192 (1962); 130, 1625 (1963).
4. W.Purry, N.Ramsay. Phys.Rev., 118, 623 (1960); M.Peshkin, I.Talmi, L.Tassie. Ann.Phys., 12, 426 (1961); B.S.DeWitt. Phys.Rev., 125, 218 (1962); L.Tassie, M.Peshkin. Ann.Phys., 16, 177 (1961).
5. Е.Л.Фейнберг. УФН, LXXVIII, вып. I, 53 (1962).
6. P.Bocchieri, A.Loinger. Nuovo Cim. A, 47, 475 (1978); 59, 121, (1980); 60, 164 (1981); Lett.Nuovo Cim., 25, 476 (1979); P.Bocchieri, A.Loinger, G.Siragusa. Nuovo Cim. A, 51, 1 (1979); 56, 55 (1980).
7. D.Bohm, B.J.Hiley. Nuovo Cim. A, 52, 295 (1979); A.Zeilinger. Lett.Nuovo Cim., 25, 333 (1979); M.Bawin, A.Burnel. Lett.Nuovo Cim., 27, 4 (1980); H.J.Rothe. Nuovo Cim. A, 62, 54 (1981); M.Peshkin. Phys.Repts., 80, 376 (1981); D.Greenberger. Phys.Rev. D, 23, 1460 (1981).
8. V.Klein. Lett.Nuovo Cim., 25, 33 (1979); Phys.Rev.D, 23, 1463 (1981); G.Casati, I.Guarneri. Phys.Rev.Lett., 42, 1579 (1979); D.H.Kobe. Ann.Phys., 123, 381 (1979); J.A.Mignaco, C.A.Novaes. Lett.Nuovo Cim., 26, 453 (1979); E.G.P.Rowe. Nuovo Cim. A, 56, 16 (1980); M.Breiteneker, H.R.Grüm. Nuovo Cim. A, 55, 453 (1980); S.M.Roy. Phys.Rev.Lett., 44, 111 (1980); G.A.Goldin, R.Menikoff, D.H.Sharp. J.Math.Phys., 22, 1664 (1981); E.C.Argall. Lett.Nuovo Cim., 33, 7 (1982).
9. В.Л.Любомир, Я.А.Смородинский. ЖЭФ, 75, 40 (1978).
10. Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, II. "Наука", М. 1974.

## ИНДУЦИРОВАННЫЙ ЯДЕРНЫЙ $\beta$ -РАСПАД В ИНТЕНСИВНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

И.М.Тернов, В.Н.Родионов, О.Ф.Дорофеев

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Скоро исполнится 50 лет с момента создания первой теории одного из интереснейших явлений ядерной физики - теории  $\beta$ -распада (Э.Ферми<sup>1/1</sup>, 1934 год). Уже в раннем периоде исследования этого процесса пытались воздействовать на его ход за счет внешних факторов: изменения температуры, давления, химического состава и др.<sup>1/2</sup>. Но эти попытки не приводили к желаемым результатам. Причина подобных неудач становится понятной, если учесть, что энергия упомянутых внешних воздействий не превышает нескольких электронвольт, в то время как характерная величина энергии, выделяющейся в ядерном  $\beta$ -распаде, лежит в области  $(10^{-3} - 10^{-2}) m c^2$ , где  $m$  - масса покоя электрона.

Последние годы развития физики характерны открытиями источников сверхсильных полей, статических и переменных во времени. Прежде всего это касается гигантских магнитных полей  $10^{12} - 10^{13}$  эрстед вблизи обнаруженных в 1967 году пульсаров - вращающихся нейтронных звезд. Значение напряженности таких полей приближается к критическому (так называемому швингеровскому) полю  $H_c = m^2 c^3 / (e \lambda) = 4.41 \cdot 10^{13}$  эрстед <sup>2/</sup>). Пульсары представляют собой<sup>2/</sup> Заметим, что эквивалентное этому значению электрическое поле способно "расшатать" электронно-позитронный вакуум и привести к рождению пар электронов и позитронов.

бий уникальные лаборатории для исследования вещества в экстремальных условиях, поскольку наряду с сверхсильными полями для них характерны и сверхвысокие плотности вещества ( $10^{14}$ - $10^{15}$  г/см<sup>3</sup>).

Подлинная революция в электронике и оптике, произшедшая в связи с развитием квантовой электроники, открыла невиданные возможности концентрации энергии в пространстве и в заданном частотном интервале. Важно заметить, что напряженность электрического поля световой волны лазера достигает  $10^8$ - $10^9$  В/см, то есть является сравнимой с напряженностью внутриатомных полей. Лабораторная техника создания электромагнитных волн большой интенсивности открывает новые возможности для наблюдения нелинейных эффектов взаимодействия частиц с волной.

В ближайшем будущем предполагается получить сверхмощные кванты электромагнитного поля методом обратного Комптон-эффекта. При этом лазерный луч направляется на движущийся релятивистский пучок электронов и электроны передают отраженному, как от зеркала, пучку фотонов свою энергию <sup>\*)</sup>(см. рис. I). Впервые такая схема получения фотонов с энергией  $\sim 1$  ГэВ была реализована на синхротроне ФИАН О.Ф.Куликовым <sup>4/</sup>.

Сверхсильные электромагнитные поля существуют также вблизи атомных ядер. В частности, на границе ядра урана значение напря-

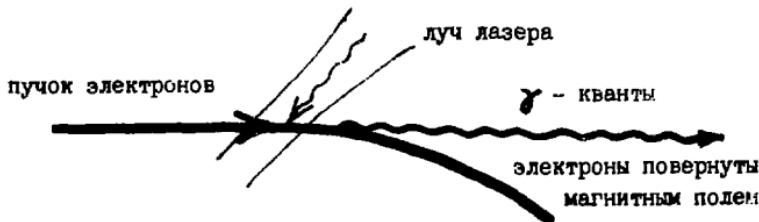


Рис. I. Схема использования обратного Комптон-эффекта для получения фотонов высоких энергий.

\*) В литературе <sup>3/</sup> имеются описания проектов (SLC, ВЛЭП) получения гигантских квантов электромагнитного поля с энергией  $\sim 100$  ГэВ от электронов и позитронов, ускоренных в специальных ускорителях - коллайдерах.

женностя поля достигает величины  $E \sim 10^{19}$  в/см. Еще более сильные поля могут быть получены при столкновении двух ядер урана, когда на короткое время образуется квазимолекула с зарядом  $Z = 184/6$ .

Перечисленные здесь примеры подчеркивают актуальность изучения возможности влияния на  $\beta$ -распада экстремальных электромагнитных полей. Этой проблемой мы заинтересовались уже давно. Рассматривая общие вопросы движения и излучения заряженных частиц во внешнем поле методом "точных решений", когда поведение электронов описывается волновой функцией в виде точного решения уравнения Дирака, мы вместе с Б.А.Лысовым и Л.И.Коровиной<sup>6/</sup> в 1964-65 годах рассмотрели  $\beta$ -распада нейтрона в сильном однородном магнитном поле.

Нам удалось показать, что поскольку внешнее магнитное поле существенно меняет характер движения заряженных частиц, это должно сказаться на структуре фазового пространства и тем самым оказать влияние на процесс  $\beta$ -распада. Так, в частности, магнитное поле приводит к возникновению резонансных особенностей в спектре энергии электронов распада. Резонанс имеет место, когда электрон после распада нейтрона захватывается на плоскую орбиту. Магнитное поле приводит к сильной локализации движения электрона, причем в полях, близких по напряженности к критическому значению  $H_c$ , электрон движется по окружности "квантового" радиуса  $R \approx \hbar/(mc)$ . В этом случае резонансные кривые энергетического спектра электронов имеют яркую дискретную структуру (см.рис. 2).

Влияние магнитного поля на полную вероятность  $\beta$ -распада нейтрона выражено слабее. Для случая  $H \ll H_c$  отношение вероятностей

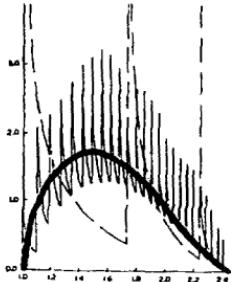


Рис. 2. Спектр энергии  $\beta$ -электронов  
для  $H = 0$  ———;  
для  $H = 0,1H_c$  - - -;  
для  $H = H_c$  - · - ·

распада имеет вид<sup>6/</sup>

$$\frac{W}{W^{\text{своб.}}} = 1 + Q(H/(H_c \cdot \epsilon_0^2))^2, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_0 = [m(z, n) - m(z+1, n-1)]/m = \Delta/(mc^2)$$

- максимальное энерговыделение в единицах электронной массы, а  $W_{\text{своб.}}$  - вероятность  $\beta$ -распада в отсутствие поля,  $Q$  - числовой множитель порядка единицы. Этот результат справедлив для неполяризованного нейтрона. Таким образом, поправки к вероятности процесса растут квадратично с ростом поля. Численная оценка другого случая, когда  $H=H_c(\varepsilon_0^2-1)/2$ , показала, что

$$W/W_{\text{своб.}} = 5(\varepsilon_0^2 - 1)/\varepsilon_0^2 = 2,1, \quad (2)$$

то есть вероятность  $\beta$ -распада нейтрона при этих значениях поля возрастает более чем в два раза по сравнению с  $W_{\text{своб.}}$ , а далее растет по линейному закону.

Были исследованы также спиновые эффекты (см. /6/), и установлено, что для нейтронов с ориентированным спином при  $H \ll H_c$  зависимость от магнитного поля появляется в членах, линейных по напряженности (см. также нашу работу /7/), где для исследования влияния магнитного поля следует исключить плоскую волну в конфигурации более общего вида, изучаемой там)

$$\begin{aligned} W/W_0 = \Phi_0 + a \zeta_n (\delta + \delta^3/3 - \varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0 + \delta)) (H/H_c) + \\ + (\varepsilon_0 \ln(\varepsilon_0 + \delta) - \delta) (H/H_c)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$a = 2\alpha_0(1 - \alpha_0)/(1 + 3\alpha_0^2), \quad \delta = (\varepsilon_0^2 - 1)^{1/2}.$$

Здесь  $\alpha_0 = G_A^A/G_V^V$  - отношение аксиальной и векторной констант слабого взаимодействия ( $\alpha_0 = 1,25$ ),  $\zeta_n = \pm 1$  - проекция спина нейтрона на направление внешнего магнитного поля,  $W_{\text{своб.}} = W_0 \cdot \Phi_0$  - вероятность свободного  $\beta$ -распада, а

$$\Phi_0 = 2 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \varepsilon (\varepsilon^2 - 1)^{1/2} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (4)$$

- функция Ферми. Характерно, что в случае  $\beta$ -распада во внешнем поле зависимость от поляризации нейтрона сохраняется в выражении для полной вероятности процесса. В свободном  $\beta$ -распаде подобная зависимость проявляется только в дифференциальной вероятности углового распределения электронов. Таким образом, проявление несохранения четности во внешнем магнитном поле обладает заметной спецификой /7/.

В дальнейшем та же идея рассмотрена в задаче о  $\beta$ -распаде нейтрона в однородном магнитном поле в работах /8, 9/.

в которых были получены близкие, к приведенным здесь, результаты в связи с исследованием ряда астрофизических процессов и проблем космологического "big bang". В окончательных формулах имеет место полное совпадение результатов. Например, при  $H \ll H_c$  для  $\beta$  - распада нейтрона получается

$$\frac{W}{W^{\text{своб.}}} = 1 - 0,06 \frac{\chi}{H/H_c} + 0,17 \left( \frac{H}{H_c} \right)^2. \quad (5)$$

В 1965 году А.Газазян предпринял попытки рассмотреть  $\beta$  - распад в поле плоской электромагнитной волны<sup>/10/</sup>. Однако сложность полученных им общих выражений (двукратный интеграл и бесконечная сумма) не дали возможности проведения каких-либо содержательных оценок. В 1974 году И.Баранов вернулся к той же задаче и провел оценки для случая сильного поля электромагнитной волны<sup>/11/</sup>. Эти оценки оказались, к сожалению, ошибочными.

В 1978 году мы совместно с В.Г.Жулего и А.И.Студеникиным<sup>/7/</sup> рассмотрели  $\beta$  - распад нейтрона в сложном электромагнитном поле: постоянное однородное магнитное поле, совмещенное с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль его силовых линий (конфигурация Редмонда). Как было впервые показано в работе<sup>/12/</sup>, уравнение Дирака для такой задачи имеет точное решение. Интерес к подобной задаче очевиден, поскольку она включает в себя как предельные случаи и поле плоской волны и постоянное однородное магнитное поле. При выключении электромагнитной волны результаты совпали с нашими работами<sup>/6/</sup>, а при  $H \rightarrow 0$  общие выражения нашли согласие с формулами работ<sup>/10, 11/</sup>, однако нам удалось продвинуться значительно дальше и показать, что в области значений параметра  $\chi = eE/(\hbar c \omega) \gg 1$  (предел постоянного скрещенного поля, здесь  $E$  - электрическая напряженность поля волны, а  $\omega$  - ее частота) все поправки к вероятности свободного  $\beta$  - распада нейтрона определяются отношением  $E/H_c$ :

$$\frac{W}{W^{\text{своб.}}} = 1 + 0,4 \left( \frac{E}{H_c} \right)^2 \quad (6)$$

и никаких чрезмерных отклонений от  $\frac{W}{W^{\text{своб.}}}$ , как это предсказывалось в работе<sup>/12/</sup>, не существует (см. также (3)).

В другом предельном случае, когда  $\chi = E/H_c \gg 1$ , мы приходим к иному результату (см. работу<sup>/7/</sup>):

$$\frac{W}{W^{\text{своб.}}} \approx \left( \frac{E}{H_c} \right)^3 (1 - a \frac{\chi}{\hbar c}). \quad (7)$$

Отсюда следует, что вероятность  $\beta$  - распада в сильном постоянном скрещенном поле увеличивается пропорционально  $\chi^3$ , в то время как для процесса распада в сильном постоянном магнитном поле ве-

роятность растет линейно с ростом поля. Это можно объяснить различным характером влияния внешнего поля на фазовый объем состояний конечных частиц в этих двух случаях. Той же причиной объясняется различие в численных коэффициентах в формулах (6) и (5), причем существенно, что в пределе скрещенного поля отсутствуют члены, линейные по полю.

Недавно внезапный интерес к рассматриваемой задаче был вызван в США. Это было отмечено серией работ В.Беккера и др. /13, 14/, в которых авторы рассмотрели ядерный  $\beta$ -распад трития и свинца в поле электромагнитной волны лазерного типа. При этом утверждалось, что скорость  $\beta$ -распада трития при малой величине энерговыделения  $\varepsilon_0 = 1,036$  может возрастать на 3-4 порядка (аналогично результату работы /12/). Важность изучения этого вопроса подчеркивалась исследованиями по лазерному термоядерному синтезу.

Критические замечания относительно справедливости этих результатов были высказаны в работах /15, 16/, тем не менее в них не содержалось альтернативных расчетов, полностью проясняющих ситуацию.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу об электронном  $\beta$ -распаде в поле плоской электромагнитной волны в обычном У-А варианте универсального слабого взаимодействия, причем амплитуда распада нейтрона в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$M = \frac{1}{2} G \{ \bar{\Psi}_p \gamma_\mu (1 + \alpha_0 \gamma_5) \Psi_n \bar{\Psi}_e \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi_{\bar{\nu}} \}, \quad (8)$$

где  $\Psi_p$ ,  $\Psi_n$ ,  $\Psi_e$ ,  $\Psi_{\bar{\nu}}$  - волновые функции протона, нейтрона, электрона и антинейтрино;  $G = 1,4149 \cdot 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup> - постоянная слабого взаимодействия. В рассматриваемой задаче существенным параметром является величина максимального энерговыделения  $\varepsilon_0$ . Поскольку это энерговыделение в общем случае достаточно мало, то  $\Psi_p$  и  $\Psi_n$  можно взять в нерелятивистском приближении, пренебрегая при этом взаимодействием тяжелых частиц с внешним полем. Волновые функции для электрона мы берем в виде точных решений уравнения Дирака для частицы во внешнем поле электромагнитной плоской волны (функции Волкова /17/).

Задача решается в представлении Фарри, когда в качестве волновых функций нулевого приближения теории возмущений выбираются точные решения уравнения Дирака. Плоская электромагнитная волна,

характеризуемая частотой  $\omega$  и напряженностью поля  $E$ , предполагается циркулярно-поляризованной ( $g = \pm 1$ ). При решении задачи о  $\beta$ -распаде возникают характерные параметры, входящие в выражение вероятности процесса:

$$\lambda = \hbar \omega / (mc^2), \chi = E/h_c, \xi = \chi/\lambda = eE/(mc\omega). \quad (9)$$

Параметр  $\xi$ , не содержащий  $\hbar$ , является, по существу, классической величиной: он представляет собой работу электрического поля на расстоянии, равном длине волны, выраженную в единицах энергии покоя электрона.

Не останавливаясь сейчас на деталях расчета полной вероятности (техника вычислений подробно изложена в работах <sup>18-20/</sup>), перейдем к обзору основных результатов. Прежде всего остановимся на случае электромагнитной волны со сравнительно малой частотой, когда  $\lambda = \hbar \omega / (mc^2) \ll 1$ .

Эта область включает энергии квантов, характерных для лазеров, когда  $\lambda \sim 10^{-6}$ . Анализ исходных выражений показывает, что электромагнитная волна вносит существенные изменения в энергетический спектр  $\beta$ -электронов. Дифференциальная вероятность оказывается зависящей от параметра  $\xi$ . Как видно из представленных на рис. 3 графиков, вместе с ростом параметра  $\xi$  спектр энергии электронов, образующихся в процессе  $\beta$ -распада, смещается в релятивистскую область, причем число возможных энергетических состояний электрона увеличивается по сравнению с  $\beta$ -распадом в отсутствие поля.

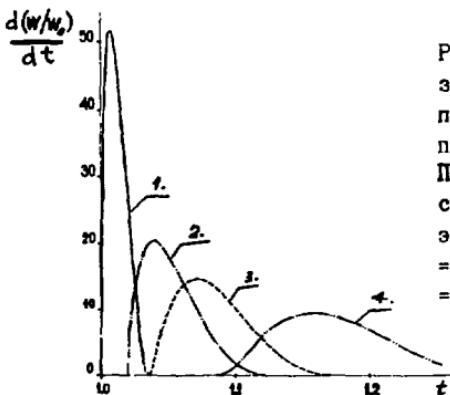


Рис. 3. Распределение по квазиэнергии электронов  $\beta$ -распада трития ( $E_0 = 1,036$ ) в поле электромагнитной волны. Параметр  $t = \bar{E}$  характеризует среднюю за период энергию электрона. 1.  $\xi = 0$ ; 2.  $\xi = 0,2$ ; 3.  $\xi = 0,27$ ; 4.  $\xi = 0,4$ .

Волна служит резервуаром энергии, которую получает электрон, поэтому спектр энергии не имеет обрыва при  $\bar{\epsilon} = \epsilon_0$ , как это имело место в свободном  $\beta$ -распаде. Более того, начиная со значений  $\bar{\epsilon} \approx 0,27$  для трития и  $\bar{\epsilon} \approx 2,4$  для нейтрона спектр энергии  $\beta$ -электронов вообще не имеет общих точек со спектром свободного распада.

Положение однако существенно меняется при переходе к полной вероятности  $\beta$ -распада. Из графиков рис.3 видно, что по мере роста параметра  $\bar{\epsilon}$  соответствующие кривые отличаются падением остроты пиков, то есть уменьшением спектральной вероятности. Численное интегрирование по спектру на ЭВМ, а также аналитический расчет приводят к следующим выражениям для полной вероятности  $\beta$ -распада: при  $\lambda \ll 1$ ,  $(E/H_c)(\epsilon_0^2 - 1)^{-3/2} \ll 1$

$$\frac{W/W_0}{W_0} = \Phi_0 + [\Phi_1 + \lambda \Phi_2] (E/H_c)^2, \quad (10)$$

где  $\Phi_0$  - функция Ферми (см.(4)),

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \ln(\epsilon_0 + (\epsilon_0^2 - 1)^{1/2}) + (\epsilon_0^2 - 1)(2\epsilon_0^4 - 9\epsilon_0^2 - 8)/30,$$

а  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  соответственно равны

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \epsilon_0 \ln(\epsilon_0 + (\epsilon_0^2 - 1)^{1/2})(1 + a \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 - 1}) - \frac{1}{2} (\epsilon_0^2 - 1)^{1/2} (1 + 4a \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 - 1}/3),$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{6} \epsilon_0 (1 + a \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 - 1}) \ln(\epsilon_0 + (\epsilon_0^2 - 1)^{1/2}).$$

Подная вероятность здесь зависит от ориентации спина ядра, что является отражением несохранения четности в слабых взаимодействиях и существованием выделенного волной направления в пространстве. Зависимость от поляризации волны выражена слабее.

Суммируя и усредняя (10) по поляризации волны, получим численно: для нейтрона

$$\frac{W/W_{\text{своб.}}}{W_{\text{своб.}}} = 1 + (0,4 + 0,3a \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 - 1})(E/H_c)^2, \quad (11)$$

для трития

$$\frac{W/W_{\text{своб.}}}{W_{\text{своб.}}} = 1 + 10^4 (1,3 + 0,1a \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0^2 - 1})(E/H_c)^2. \quad (12)$$

Как видно из этих результатов, зависимость от параметра  $\bar{\epsilon}$  в полной вероятности  $\beta$ -распада выпадает. Таким образом, в весьма широких пределах увеличение плотности потока энергии в волне не скажется на времени  $\beta$ -распада, практически независимо от энерговыделения  $\epsilon_0$ . Этот результат отрицает выводы работ <sup>11, 13, 14</sup>. Для известных  $\beta$ -активных ядер и реально существующих полей лазеров возможность наблюдения поправок к вероятности свободного  $\beta$ -распада представляется не слишком оптимистической. Хотя в гипотетическом случае, когда  $\epsilon_0 \rightarrow 1$ , величина электро-

магнитного поля, способного оказать существенное воздействие на вероятность  $\beta$ -распада, может оказаться весьма мало<sup>9</sup>.

Рассмотрим далее второй случай - область больших ч. 'тот, когда  $\lambda = \frac{1}{2}\omega/(mc^2) \gtrsim \varepsilon_0^{-1}$ . Как показывает дальнейший анализ выражений для вероятности ядерного  $\beta$ -распада, в случае воздействия мощной электромагнитной волны этот процесс может значительно усиливаться. При этом существует целая область значений параметров внешнего поля, для которых вероятность ядерного  $\beta$ -распада, индуцируемого интенсивной электромагнитной волной сильно возрастает.

Так, в частности, если энергия кванта волны окажется достаточной для сохранения энергетического баланса в одноквантовых реакциях, то при

$$\xi/(1+\xi^2)^{1/2} \ll \lambda/((\varepsilon_0 + \lambda)^2 - \xi^2 - 1)^{1/2}$$

вероятность  $\beta$ -распада оказывается существенно иной<sup>10</sup>.

В этом случае при  $\lambda \gg |\varepsilon_0| > 1$  вероятность ядерного  $\beta$ -распада может полностью определяться параметрами внешнего поля, поскольку с увеличением значений  $\lambda$  индуцированный вклад быстро возрастает ( $W/W_0 \sim \xi^2 \lambda^3 \ln \lambda$ ). Вероятности распадов при  $\varepsilon_0 > 1$  и  $\varepsilon_0 < 1$  практически совпадают и, таким образом, индуцированный ядерный  $\beta$ -распад в этих условиях протекает независимо от величины и знака параметра энерговыделения  $\varepsilon_0$ . Появление существенной частотной зависимости полной вероятности  $\beta$ -распада лишь в области достаточно больших энергий квантов волны можно трактовать как своеобразный фотозефект в ядерном  $\beta$ -распаде.

Полное сечение процесса  $\beta$ -распадного фотозефекта имеет вид

$$\sigma = G^2 \pi^4 r_0^2 \lambda^2 / (30 \pi^2 \alpha) \left\{ \left[ 1 + 5(1+g)/2 \right] \ln 2 \lambda - \right.$$

$$\left. - (95/24)(1+g) - 107/60 \right\} \alpha = e^2 / (4\pi c), \quad r_0 = e^2 / (mc^2)$$

и показательно, что оно не зависит от интенсивности волны  $\xi$ .

Большое значение в рассматриваемом приближении имеют поляризационные эффекты, непосредственно связанные с проявлением нарушения пространственной четности в слабых взаимодействиях при воздействии внешнего электромагнитного поля, в частности, при

$$\ln 2 \lambda \gg 1 \quad \sigma_{(g=-1)} / \sigma_{(g=+1)} \sim 1/6.$$

С точки зрения возможных экспериментальных приложений полученных результатов в области малых энергий квантов волны или при ис-

следовании воздействия на  $\beta$  - распад достаточно слабого постоянного магнитного поля или постоянного поля, образованного равными по величине электрическим и магнитным полями, особый интерес представляет анализ полевых поправок к вероятности процесса в двух характерных случаях: нерелятивистском и ультрарелятивистском.

В случае малого энерговыделения ( $\epsilon_0 - I \ll I$ ) из (3) с точностью до членов, квадратичных по напряженности магнитного поля, можно получить

$$W/W_0 = (4/105)(\epsilon_0^2 - 1)^{7/2} (1 + 7/2a (H/H_c) + (35/12)(H/H_c)^2) \quad (13)$$

Для релятивистского распада ( $\epsilon_0 \gg I$ ) влияние относительно слабого магнитного поля определяется выражением

$$W/W_0 = (\epsilon_0^5/15) [1 + 5a \frac{H}{H_c} (H/H_c) + 5(H/H_c)^2 (1n2 \epsilon_0 - 1)]. \quad (14)$$

В формулах (13, 14) не зависящие от магнитного поля слагаемые определяют соответствующие предельные значения для вероятности "свободного"  $\beta$ -распада и совпадают с известными в литературе значениями (см., например, /21/). Точные коэффициенты в слагаемых, зависящих от магнитного поля, вычислены нами и приводятся впервые. Поправки к вероятности процесса существенно зависят от величины отношения  $H/H_c$ , где  $\tilde{H}_c = H_c(\epsilon_0^2 - 1)$ .

Смысъ величины  $H_c$  можно установить, если учесть, что в магнитном поле характерной энергией является энергия циклотронного движения  $\hbar \omega_H = (H/H_c)mc^2$ . Действительно, если при напряженности поля  $H = \tilde{H}_c$  энергия  $\hbar \omega_H$  равна энергии покоя электрона, то в поле  $H = \tilde{H}_c$  та же энергия  $\hbar \omega_H$  соответствует максимальной кинетической энергии, выделяемой в нерелятивистском распаде. В случае релятивистского распада ( $\epsilon_0 \gg I$ ) эти рассуждения остаются в силе с той лишь разницей, что характерной частотой теперь является синхротронная частота обращения электрона по орбите  $\omega_c = eH/(m \epsilon_0)$ .

Таким образом, можно установить, что действительный параметр разложения вероятности по напряженности внешнего постоянного магнитного поля имеет вид

$$H/\tilde{H}_c = H/H_c(\epsilon_0^2 - 1) = \begin{cases} H/2H_c(\epsilon_0^2 - 1), & \epsilon_0 - I \ll I, \\ H/H_c \epsilon_0^2, & \epsilon_0 \gg I. \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда следует, что с уменьшением энерговыделения ( $\epsilon_0 \rightarrow I$ ) вели-

жение поля становится существенным даже в полях относительно малой напряженности по сравнению с  $H_c$ .

В постоянном скрещенном поле, а также в поле электромагнитной волны при малой энергии квантов  $\hbar\omega \ll mc^2(\varepsilon_0^2 - 1)$ , из формул (10) с точностью до квадратичных членов следует при  $\varepsilon_0 - 1 \ll I$

$$\frac{W}{W_0} = (4/105)(\varepsilon_0^2 - 1)^{7/2} (1 + 35(E/H_c)^2/8), \quad (16)$$

а при  $\varepsilon_0 \gg I$

$$\frac{W}{W_0} = \varepsilon_0^5 (1 + 10(E/H_c)^2(\ln 2 \varepsilon_0 - 4/3)). \quad (17)$$

Представляет интерес сравнить полученные результаты (16-17) с полученными ранее выражениями (13-14) в случае постоянного однородного магнитного поля.

Отличительной особенностью рассматриваемого здесь скрещенного поля по сравнению с чисто магнитным полем является возможность совершения им работы за счет электрической составляющей. Это приводит к тому, что характерный параметр, определяющий влияние поля на распад, имеет вид, отличный от рассмотренного ранее случая магнитного поля. Смысл параметра просто установить, используя качественные соображения. Действительно, в постоянном скрещенном поле  $H_c$  может быть сопоставлена величина поля, создающего на комптоновской длине волны электрона работу, равную его энергии покоя, тогда как в нерелятивистском распаде характерное поле, сопоставляемое  $H_c$ , создает на дебройлевской длине работу, равную максимальной кинетической энергии, выделяемой в распаде.

В ультрарелятивистском случае ( $\varepsilon_0 \gg I$ ) процедура определения  $H_c$ , как и в случае чисто магнитного поля, сохраняется, однако кинематические характеристики имеют другой вид, поэтому при  $\varepsilon_0 \gg I$  величина  $\tilde{H}_c = H_c \varepsilon_0^2$ .

Сравнение формул (13 - 14) с (16 - 17) показывает, что для неполяризованных ядер влияние поля, совершающего работу (постоянное скрещенное поле, поле электромагнитной волны) в случае малого энерговыделения ( $\varepsilon_0 - 1 \ll I$ ) оказывается более существенным. В ультрарелятивистском случае полевые поправки отличаются лишь численными множителями.

Следует подчеркнуть, что при  $\hbar\omega \gtrsim mc^2(\varepsilon_0^2 - 1)$  зависимость вероятности распада от частоты проявляется слабо и заметна только в квантовых поправках

$$\sim O[(\hbar\omega/(mc^2(\varepsilon_0^2 - 1)))^3].$$

Область частот  $\hbar\omega \gtrsim mc^2(\epsilon_0^2 - 1)$  характерна тем, что изменение полной вероятности в ней может стать весьма заметной даже при относительно низкой напряженности поля, поскольку вид квантовой поправки меняется и имеет вид  $(H/H_c)^2 \lambda^*$ , где  $\lambda^* = \hbar\omega/mc^2(\epsilon_0^2 - 1)^{1/2}$ .

Это изменение можно качественно пояснить, сопоставив дебори-левскую длину электрона распада  $\hbar/(\omega c(\epsilon_0^2 - 1)^{1/2})$  с длиной электромагнитной волны ( $c/\omega$ ). В том случае, когда  $c/\omega \lesssim \hbar/mc(\epsilon_0^2 - 1)^{1/2}$ , определение характерной длины изменяется и зависимость от частоты в этой области становится доминирующей. Как указывалось ранее, в пределе больших частот  $\lambda^* > 1$  полевая поправка может даже превзойти вероятность свободного распада и в этом случае параметром будет  $(E/H_c)^2 \lambda$ . Аналогичная ситуация может иметь место и в области  $\lambda^* < 1$ . В этом случае должно выполняться условие  $E \gg H_c(\epsilon_0^2 - 1)^{3/2}$  и характерным параметром длины будет  $l_0 \sim (emE)^{-1/3}$ .

На этой длине внешнее поле сообщает электрону распада энергию  $\sim m(E/H_c)^{2/3}$ .

Таким образом, полевой вклад в вероятность распада в случае  $(E/H_c)^{2/3} \gg (\epsilon_0^2 - 1)$  оказывается определяющим и полная вероятность пропорциональна  $(E/H_c)^{7/3}$ . Величина  $H_c$  очень велика и напряженность электромагнитного поля, способного привести к существенному изменению вероятности  $\beta$  - распада в этой области должна быть весьма значительной.

Важной проблемой в ядерной физике и физике высоких энергий является определение массы покоя нейтрино <sup>122</sup>. Проведенные недавно эксперименты позволяют оценить ее величину ( $m_\nu$ ) значением порядка десятков электронвольт. Эти оценки оказались чрезвычайно полезными в астрофизических приложениях <sup>123</sup>.

Не останавливаясь на деталях расчета, укажем, что во внешнем электромагнитном поле проявление  $m_\nu \neq 0$  может оказаться весьма значительным. В частности, в постоянном однородном магнитном поле  $H \ll H_c$ , интегрирование дифференциальной вероятности распада приводит к результату <sup>124</sup>/

$$\frac{W}{W_0} = \Phi_0 - \mu^2 \delta^3/6 + 1/2 \alpha \gamma \chi (\delta + \delta^3/3 - \epsilon_0 \ln |\epsilon_0 + \delta| - \mu^2 \delta/2) - 1/6 \chi^2 (\delta - \epsilon_0 \ln |\epsilon_0 + \delta|), \quad \mu = m_\nu/m.$$

В случае малого энерговыделения ( $\delta \ll 1$ ) отсюда можно получить,

что для неполяризованного ядра при значении поля  $H = \sqrt{3} H_c^v$ , где  $H_c^v = m_v^m/e$ , полевые поправки в тоиности компенсируют поправки по массе нейтрино. Для полей  $H \geq H_c$  доминирующий вклад в вероятность распада будут давать состояния  $\beta$ -электрона, близкие к основному. Выделяя случай  $H \geq H_c (\varepsilon_0^2 - 1)/2$ , для которого единственным возможным состоянием электрона в магнитном поле является основное ( $m_v = 0$ ), имеем

$W/W_0 = 1/2(1 + \varepsilon_0^2 \gamma_s) \chi (\delta + \delta^3/3 - \varepsilon_0 \ln |\varepsilon_0 + \delta| - \mu^2 \delta/2)$ ,  
откуда следует, что поправки, обусловленные  $m_v \neq 0$ , растут линейно с ростом напряженности магнитного поля  $H$  и при этом существенно зависят от ориентации спина ядра  $\gamma_s = \pm 1$ .

### Литература

1. E.Fermi. Zs. f. Phys. 8, 161, (1934).
2. Ю.А.Александров. Фундаментальные свойства нейтрона. М., Энергоиздат, (1982).
3. I.F.Ginzburg, G.L.Kotkin, V.G.Serbo, V.J.Telnov. Preprint 81-102, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, (1981).
4. О.Ф.Куликов, Ю.Я.Тельнов, Е.И.Филиппов, И.Н.Якименко. ЖЭТФ, 47, 1591, (1964);  
И.М.Тернов, А.М.Хапаев, Ю.И.Клименко. Вестник МГУ, Физика и астрономия, М1, 35, (1967).
5. В.Л.Гинзбург. УФН, 134, 469, (1981).
6. И.М.Тернов, Б.А.Лысов, Л.И.Коровина. Вестник МГУ, Физика и астрономия, М5, 58, (1965);  
Л.И.Коровина. Известия вузов, Физика, М6, 86, (1964).
7. И.М.Тернов, В.Н.Родионов, В.Г.Жулего, А.И.Студеникин. ЯФ, 28, 1454, (1978).
8. J.J.Mates, R.F.O'Connel. Phys.Rev. 180, 1289, (1969).
9. L.F.Canuto. Phys. Rev. 187, 2141, (1969).
10. А.Д.Газазян. Изв. АН Арм. ССР, XVIII, М1, 126, (1965).
11. И.Г.Баранов. Изв. вузов, Физика, М4, II5, (1974).
12. R.J.Redmond. Math.Phys. 6, 1163, (1965).
13. W.Becker, W.H.Louisell, J.D.McCullen, M.O.Scully.  
Phys.Rev.Lett. 47, 1262, (1981), 48, 653, (1982).
14. W.Becker et al. Appl. Phys., B28, 310, (1982).

15. H.R.Reiss. *Phys.Rev.Lett.*, **48**, 652, (1982), *Appl.Phys.*, **B28**, 310, (1982).
16. J.I.Gersten, M.H.Mittleman. *Phys.Rev.Lett.*, **48**, 651, (1982).
17. D.Volkov. *Zs. f. Phys.*, **24**, 250, (1935).
18. И.М.Тернов, В.Н.Родионов, О.Ф.Дорофеев. Препринт №8/1982, Физический факультет МГУ, М., (1982).
19. И.М.Тернов, В.Н.Родионов, О.Ф.Дорофеев. Труды У Международного семинара "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля", Протвино, т.1, 340, (1982); *ЯФ*, **37**, 875, (1983).
20. И.М.Тернов, В.Н.Родионов, О.Ф.Дорофеев. Препринт №14/82, Физический факультет МГУ, М., (1982); *ЖЭТФ*, **84**, 1225, (1983).
21. В.Гейзенберг. Теория атомного ядра. ИИЛ, М., (1953).
22. В.С.Козик, В.А.Любимов, Е.Г.Новиков, В.З.Нозик, Е.Ф.Третьяков *ЯФ*, **32**, 301, (1980).
23. В.Ф.Шварцман, В.Б.Брагинский, С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович, М.Д.Хлопин. Письма в *ЖЭТФ*, **36**, 222, (1982).
24. И.М.Тернов, В.Н.Родионов, В.Г.Жулего, А.Е.Лобанов, О.С.Лаврова, О.Ф.Дорофеев. Препринт №10, Физический факультет МГУ, М., (1983).

ON RADIATIVE DETECTION OF NEUTRAL PARTICLES  
PRODUCED IN  $e^+e^-$ -COLLISIONS

Yu.A.Gnedov, K.G.Klimenko, F.F.Tikhonin

Institute for High Energy Physics, Serpukhov

INTRODUCTION

The intensive theoretical elaborations of supersymmetry, as well as of supergravity<sup>/1/</sup>, brought us urgently to the necessity of the experimental research in this region. The basic direction here is a search for supersymmetric partners of ordinary particles and a graviton partner in a supergravitation doublet - the spin 3/2 gravitino  $\tilde{G}$ . The phenomenological analysis of possible mechanisms of their production and decay is quite as uncertain as their matter coupling constants and masses are; and, to this, the estimations of the latter, depending on the mechanism of supersymmetry breaking, vary in the extremely wide interval. For example, for  $m_{\tilde{G}}$  this interval is from  $10^{-7}$  keV<sup>/2/</sup> to hundreds of GeV<sup>/3/</sup>. However, it seems quite necessary to make attempts for their search already at the present accelerators, at least to impose restrictions on masses and coupling constants. Search for these particles in hadron beams<sup>/4/</sup> is hampered by large background processes; therefore it seems that experiments on the  $e^+e^-$ -colliding beams will be first real steps in this direction. Perhaps, the most attractive process here is the following one:

$e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{unobserved neutrals}$  (1)  
(see refs.<sup>/5/</sup>, especially the concluding sentence of paper<sup>/5e/</sup>).

Due to the richness of the supersymmetric particles spectrum and the miscellaneous content of their spins, masses and coupling constants, one needs thorough calculations of the photon spectra. These spectra are the only source of information for different cases, and this information may be used to define the properties of the components from "unobserved neutrals". In particular, it may be useful for the definition of their spin, as will be shown below. Unfortunately, previous works except ref.<sup>/11/</sup>, either underestimated this fact or contained incorrect calculations<sup>/5c, e/</sup>. In this paper we have also corrected the mistake of ref.<sup>/5e/</sup> caused by the erroneous account for the masses of photino  $\tilde{\gamma}$  produced in process (1). Also the analysis of the possibilities to extend the integration range over the photon azimuthal angle has been made, and

it was shown that one may place the detecting apparatus closer to the  $e^\pm$ -beams than it was supposed. This would help to increase the number of events. Note also, that the results given here may be referred equally well to more traditional questions, for example, counting the number of neutrino-types, search for neutral heavy leptons, etc.

### I. ON PHOTON AZIMUTHAL EMISSION ANGLE (ACCOUNT FOR $e^\pm$ -MASS)

The high-energy limit (up to the  $Z_0$ -production threshold) of the cross-section of process (1), where "unobserved neutrals" =  $\nu_i \bar{\nu}_i$ , has the form<sup>6/</sup>:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{\alpha G_F^2 s}{6\pi^2} [N_\nu (g_V^2 + g_A^2) + 2(g_V + g_A) + 2] \cdot \frac{1-x}{x(1-y^2)} [(1 - \frac{x}{2})^2 + \frac{1}{4} x^2 y^2]. \quad (2)$$

In this expression  $N_\nu$  is a possible number of neutrino types,  $g_V$  and  $g_A$  are the Salam-Weinberg constants,  $x = E_\gamma/E_{e^\pm}$ ,  $y = \cos\theta_\gamma$ . In

one of the earlier papers it was offered to use in practical calculations the integration range of cross-section (2) over  $y$  in the limit  $20^\circ < \theta_\gamma < 160^\circ$  in order to avoid possible mistakes because of the singular behaviour of the factor  $1/(1-y^2)$  at small  $\theta_\gamma$ . Then this suggestion was used in the analysis of possible experiments<sup>6/</sup>. At the same time, at these large angles we lose in the absolute value of the cross-section, since process (1) is a bremsstrahlung one. Besides, the rejected terms are sometimes comparable in magnitude with those taken into account. As an example, this may occur in the case of the single W-boson production in the reaction  $e^+e^- \rightarrow e^-W^+ \tilde{v}_e$ <sup>8/</sup>. Finally, the low-energy behaviour of the cross-section of process (1) may turn out to be useful, in particular, for the astrophysical applications<sup>9/</sup>. All these arguments lead to the necessity to take into account the  $e^\pm$  mass. The corresponding cross-section is given in the Appendix. It also includes the resonance factor corresponding to the  $Z_0$ -boson for the energies above the production threshold of the latter. For comparison with (2) we give the cross-section integrated over the whole interval of  $y$  (A.1), in which only the terms, comparable with (2), are present.

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\alpha G_F^2 s}{6\pi^2} [N_\nu (g_V^2 + g_A^2) + 2(g_V + g_A) + 2] \frac{1-x}{x} \cdot \frac{. (\ln \frac{s}{m_e^2} - 1) (1 - x + \frac{x^2}{2})}{.} \quad (3)$$

Practical calculations of the cross-sections both with the help of expression (A.1) and (3) (see ref.<sup>/5/</sup>) show that:

- 1) the augmentation to the cross section due to  $m$  is small (it is only 4%); and, which is, probably, more important,
- 2) expression (2) may be integrated up to very small  $\theta_\gamma$  (to  $1^\circ$  and smaller, though it seems that  $\theta_\gamma < 2^\circ \div 3^\circ$  are practically useless), and the difference with the corresponding integrated expression (A.1) is insignificant. However, the analysis performed shows that in the experiments one may be not "afraid" to narrow  $\theta_\gamma$  because of possible differences between the theory and practical results.

## 2. MASSIVE SPIN 1/2 PARTICLE PRODUCTION BY MECHANISM (1)

In recent experiments at DESY<sup>/10/</sup> no neutral heavy leptons with the electron quantum number have been found up to the masses  $\approx 24$  GeV. But it is possible that stable leptons with other quantum numbers exist with relatively small masses and mixed V- and A-type couplings. In supersymmetry theories photino, for example, belongs to this type of particles. In any case, the search for them in the processes of type (1) needs a thorough theoretical estimations of production probabilities. In the recent paper<sup>/5e/</sup> comparatively full analysis of this question is given, but, unfortunately, it is based on the expression for the cross-section which is not quite correct in that part which deals with the account for masses  $m\gamma$ . Besides, the "correct" part of the analyzed cross-section refers only to the (V-A)-variant of the photino interaction, while for the particles of this type one should most probably expect a mixture of the V- and A-variants as in the Salam-Weinberg case. In ref.<sup>/5e/</sup> the procedure of taking into account masses  $\gamma$  consisted, in fact, in multiplying cross-section (2) for the massless pair by the "P-wave factor"  $\beta^3 = (1 - 4m_\gamma^2/s(1-x))^{3/2}$ , taking into account the part  $x$  of the energy which is carried away by photon. Direct calculations do not justify such an assumption. To remove this inaccuracy, here we give the cross-section with account for the masses of the produced pair  $(\gamma\gamma) m_\gamma$ . The notations are the same as in (2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dxdy} &= \frac{aG_F^2 s}{12\pi^2} (g_V^2 + g_A^2) \frac{1-x}{x} \sqrt{1 - \frac{4m_\gamma^2}{s(1-x)}} \frac{1}{1-y^2} . \\ &\cdot \left[ (f_A^2 + f_V^2) \left[ 1 - \frac{m_\gamma^2}{s(1-x)} \right] \left[ \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} x^2 y^2 \right] + \right. \\ &\left. + 3(f_V^2 - f_A^2) \frac{m_\gamma^2}{s(1-x)} \left[ \frac{1}{2} x^2 - \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} x^2 y^2 \right] \right] \quad (4) \end{aligned}$$

where  $f_{A,V}$  are the coupling constants of the pair  $(\tilde{\gamma}\tilde{\gamma})$  with matter.

It can easily be seen, that in the case of pure versions of (V-A) ( $f_V = f_A$ ) this expression turns into (2) with the factor

$A = [1 - 4m_{\tilde{\gamma}}^2/s(1-x)]^{1/2} [1 - m_{\tilde{\gamma}}^2/s(1-x)]$ , but not with  $B = [1 - 4m_{\tilde{\gamma}}^2/s(1-x)]^{3/2}$  as it is stated in ref./5e/ (in accordance with the remark made in the introduction to this point). To demonstrate the difference between these two factors, we offer the table, which represents the ratio  $A/B$  for  $s = 1444$  GeV (PETRA energy) and  $m_{\tilde{\gamma}} = 10$  GeV for different  $x$ :

Table 1

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$A/B$	1.33	1.4	1.5	1.64	1.9	2.7	= 10

As may be seen from this Table, the difference between two cross-sections is rather substantial, even at small  $x$ . Moreover, the factorization proposed in ref./5e/ is absolutely unjustified in the case of the arbitrarily mixed variants V and A.

In our practical calculations we mean a possibility of performing the experiment at PETRA with energy  $19 \times 19$  GeV<sup>2</sup>. The Salam-Weinberg constants at  $\sin^2 \theta_w = 0.23$  were also used. The integration was carried out in the "traditional" interval  $20^\circ \leq \theta_y \leq 160^\circ$ . The V(A)-variant corresponds to  $f_{A(V)} = 0$ ,  $f_{V(A)} = 1$ , for  $(V+A)f_A = f_V = 1/2$ . One should pay attention to rather low values of cross-sections given below, i.e. in the average  $d\sigma/dx = 10^{-39}$  cm<sup>2</sup>. These values may increase essentially first with the growth of  $s(\sim s^2)$ , secondly, in the range of the peak caused by  $Z^0$ -boson, they increase approximately by 4 orders (it is trivial to include the corresponding factor, see Appendix), and, then in the case of the photino pair production the prefactor in (4)  $aG_F^2 s(g_V^2 + g_A^2)/12\pi^2$  is replaced by  $2a^3 s/3m_{\tilde{e}_R}^4$ , where  $m_{\tilde{e}_R}$  is scalar quark mass (unknown). The ratio

of the given "coupling constants" is in favour of the latter by 2-3 orders, so that the restriction  $\sigma \geq 10^{-38}$  cm<sup>2</sup> which is necessary for the experiment, becomes greater in the case of a photino already at energies  $s = 1444$  GeV<sup>2</sup> (PETRA) for the wide mass range of a scalar quark (up to  $m_{\tilde{e}_R} \approx 50$  GeV). One should also note, that  $x$ -depen-

dencies of different variants are such that they may be distinguished experimentally. And thus they will help to decide what pair is namely produced in the experiment. Here the greater the mass  $m_{\tilde{\gamma}}$  is, the larger is the difference between the interaction variants. However, Table 2 speaks for itself:

Table 2

x	m = 5 GeV			m = 10 GeV		
	$d\sigma(V)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )	$d\sigma(A)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )	$d\sigma(V-A)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )	$d\sigma(V)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )	$d\sigma(A)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )	$d\sigma(V-A)/dx$ ( $10^{-39} \text{ cm}^2$ )
0.1	33.4	29.7	31.6	32.1	19.4	25.7
0.2	13.4	11.8	12.6	12.6	7.20	9.9
0.3	6.98	6.07	6.52	6.42	3.46	4.93
0.4	3.99	3.45	3.72	3.49	1.79	2.64
0.5	2.35	2.02	2.18	1.87	0.93	1.40
0.6	1.36	1.18	1.27	0.88	0.46	0.66
0.7	0.73	0.67	0.70	0.22	0.14	0.18
0.8	0.32	0.34	0.33	~ 0	~ 0	~ 0
0.9	0.06	0.06	0.08	~ 0	~ 0	~ 0

## 3. GRAVITINO PRODUCTION IN PROCESS (1)

Again by "gravitino" we mean any spin 3/2 particle (not only of a supersymmetric type) - this may be heavy leptons, probably, quarks or "preons" composites. That is why one also chooses the type of interaction for them as a combination of V- and A-variants, namely

$$j_\mu^{3/2}(x) = f \bar{\psi}^\nu(x) \gamma_\mu (h_V + h_A \gamma^5) \psi_\nu(x) \quad (5)$$

where  $\psi_\nu(x)$  is the Rarita-Schwinger spin-vector. In practical calculations we put  $f = \sqrt{G_F}$ . Differential cross section corresponding to this current reads<sup>11/</sup>.

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{\alpha_F^2 (g_V^2 + g_A^2)}{2} \frac{[(1-x)(1-x-4m^2/s)]^{1/2}}{864\pi^2 x(1-x)} \left[ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2-2x+x^2}{1-y^2} \right].$$

$$\cdot \left[ (h_V^2 + h_A^2) \frac{g^6}{m^4} - (2h_V^2 + 8h_A^2) \frac{g^4}{m^2} + (26h_A^2 - 2h_V^2) Q^2 + (36h_V^2 - 40h_A^2) \frac{m^2}{G} \right] \quad (6)$$

In this expression  $Q^2 = s(1-x)$  the cross section with account of the initial particle masses is given in the Appendix with the same purpose as in the case for spin 1/2 pair production. For the case under consideration the integral over  $\theta_\gamma$  can be extended to the smallest values with no account for  $m_{\tilde{G}}^2$ . Nevertheless as we can

see in other works <sup>/5c, e/</sup>, integration was carried out in the limit of  $20^\circ < \theta_\gamma < 160^\circ$ . As an example, we chose  $m_{\tilde{G}} = 5$  GeV, and  $h_A = 0$ . The x-distribution is presented in Table 3.

Table 3

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\frac{d\sigma}{dx} (\tilde{G}\tilde{G}\gamma) pb$	0.577	0.181	0.072	0.030	0.012	0.004	0.001	≈ 0	≈ 0
$\frac{d\sigma}{dx} (\nu_i \bar{\nu}_i \gamma) pb$	0.439	0.176	0.092	0.053	0.032	0.019	0.011	0.006	0.002

In this Table photon x-distribution from  $e^+e^- \rightarrow \nu_i \bar{\nu}_i \gamma$  with  $N_\nu = 3$  (see formula (2)) is presented for comparison. The Table does not give the results for the cases  $h_\gamma = h_A = 0.5$  and  $h_\gamma = 0$ ,  $h_A = 0.5$ , though they were calculated, and for mass values in the interval of  $1 \text{ GeV} \leq m_{\tilde{G}} \leq 10 \text{ GeV}$  as well. These last cases do not change the general result, i.e. stronger dependence of photon x-distribution from  $e^+e^- \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}\gamma$ , than from  $e^+e^- \rightarrow \nu_i \bar{\nu}_i \gamma$  as one can see from Table 3.

This is just the result which is important for definition of the type of a pair produced in the process under investigation. In this connection one should make a note as follows. In Fayet's work <sup>/5c/</sup> a similar process ( $e^+e^- \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{G}$ ) has been discussed to with the view to search for gravitino, but for practical estimations he used cross section (2) which is suitable only if both particles from "unobserved neutrals" have spin 1/2. If so, we shall never be able to distinguish experimentally production of  $(\tilde{G}\tilde{G})$  or  $(\tilde{\gamma}\tilde{G})$  pair from that of the new neutrino pair if the number of types for the last one  $> 3$ . In case of "pure gravitino" (which corresponds to supergravitation) its coupling with matter is very small, that is

$\sqrt{8\pi G_{\text{Newton}}} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}^{-1}$ . Then the only possibility to observe gravitino production at modern accelerators is when its mass is also very small:  $m_{\tilde{G}} = 10^{-7} \text{ ev}$ . Then as one can see from formula (6)

this possibility of observation will be obliged to its first member in braces which is proportional to  $1/m_G^4$ . In this case the difference in the x-distribution for two processes is expressed as follows:

$$\frac{d\sigma}{dx}(e^+e^- \rightarrow \tilde{\nu}\tilde{\nu}) \approx (1-x)^3 \frac{d\sigma}{dx}(e^+e^- \rightarrow \nu_i \tilde{\nu}_i) \quad (7)$$

and this difference can be observed in experiment.

### CONCLUSION

Three main results of the paper are as follows.

1. In the case of  $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{"unobserved neutrals"}$  reaction the detection apparatus can be located in such a way as to cover the space as big as possible at an azimuthal angle  $\theta_\gamma$ , which helps to enlarge the counting rate.
2. In the expression for cross section of the process  $e^+e^- \rightarrow \gamma + \tilde{\nu} + \tilde{\nu}$  mass effect of a produced pair is carefully taken into account because earlier calculations<sup>/5e/</sup> were not correct. Evaluations of  $\gamma$  quantum distributions of this reaction are made with the proper factors, corresponding to the case of a massive pair ( $\gamma\gamma$ )
3. Production of particles of spin 3/2 in reactions of type (1) has been studied. x-dependence of photon distributions is shown to be able to serve as a signature for their search and it sharply differs from a smaller spins of a produced pair. The defect of work<sup>/5c/</sup> where the x-distribution is wrong, has been corrected.

### REFERENCES

1. Fayet P., Ferrara S. - *Phys. Rep.*, 1977, C32, p. 249;  
P. van Nieuwenhuizen. - *Phys. Rep.*, 1981, C68, p. 189.
2. Fayet P. - *Phys. Lett.*, 1977, 70B, p. 461.
3. L. Ibanez. - *Nucl. Phys.*, 1982; Ellis J., Ibanez, Ross G.G. - *Phys. Lett.*, 1982, 113B, p. 283.
4. Harrison P.R., Llewellyn Smith C.H. - *Nucl. Phys.*, 1983, B213, p. 223; Bergsma F. et al., - *CERN preprint EP/82-193*, 1982.
5. a) Иорфе Б.Л. и др. - ЖЭТФ, 1964, 47, 1905;  
b) Тихонин Ф.Ф. Препринт ИФВЭ 69-94, Серпухов, 1969;  
c) Fayet P. - *Phys. Lett.*, 1982, 117B, p. 460;  
d) Gnedov Yu.A., Tikhonin F.F. - *Preprint IHEP 83-45*, Serpukhov, 1983; e) Ellis J., Hagelin J.S. - *Phys. Lett.*, 1983, B122, 303.
6. Barbiellini G., Richter B., Siegriest J.T. - *Phys. Lett.*, 1980, 106B, p. 414.

7. Okada E.Ma.J. - Phys. Rev. Lett., 1978, 41, p. 287.
8. Чобан Э. - Ядерная физика, 1969, 2, с. 392.
9. Berends F.A., West G.B. - Phys. Rev. 1970, D1, p. 122.
10. Ellis J., Olive K.A. - CERN preprint TH.3328, 1982.
11. Duinker P. - Preprint Nikhef - H/83-1, 1983.
11. Klimenko K.G., Tikhonin F.F. - Preprint IHEP 83-26, Serpukhov, 1983.

### Appendix

With account for the initial particle masses  $m$ , the cross-section of the process  $e^+e^- \rightarrow \gamma \tilde{\nu}_i \nu_i$  takes the form

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{a G_F^2 s(1-x)}{6\pi^2 v x} \left\{ [N_\nu (g_V^2 + g_A^2) \phi_1(x,y) + N_\nu (g_V^2 - g_A^2) \phi_2(x,y) + \right. \\ \left. + 2((g_V + g_A) \phi_1(x,y) + (g_V - g_A) \phi_2(x,y)) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{-(1-s(1-x)m_Z^2)}{[(1-s(1-x)/m_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2/m_Z^2] + 2\phi_1(x,y)} \right\} \quad (A.1)$$

where

$$\phi_1(x,y) = \frac{1}{2} [1 + (1-x)^2 - 3\frac{m^2}{s} (2-x) + \frac{m^2}{s} \frac{x}{1-x} + \\ + 4\frac{m^4}{s^2} \frac{1}{(1-v^2 y^2)} - \frac{1}{4} x^2 - 2\frac{m^2}{s} (1-x - \frac{m^2}{s}) \cdot \frac{1 + v^2 y^2}{(1-v^2 y^2)^2}, \\ \phi_2(x,y) = \frac{3m^2}{s} \left[ (1 - \frac{1}{6} \frac{x^2}{1-x^2} - 2\frac{m^2}{s}) / (1-v^2 y^2) - 2\frac{m^2}{s} \frac{1 + v^2 y^2}{(1-v^2 y^2)^2} \right] \\ v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\frac{E^2}{e^+}}}$$

The cross-section of the reaction  $e^+e^- \rightarrow \gamma + \tilde{G} + \bar{\tilde{G}}$  is ( $m$  is the mass of initial leptons):

$$\begin{aligned}
\sigma = & \frac{g_F^2 \cdot 4}{64\pi^2} \sqrt{\frac{s}{s-4m^2}} \int_0^{1-\frac{4m^2}{s}} \frac{dx}{x(1-x)} \sqrt{(1-x)\left(1-\frac{4m^2}{s}-x\right)} \\
& \cdot \left( \left[ s(1-x) - \frac{m^2}{Z} + \frac{\Gamma^2}{4} \right]^2 + \frac{\Gamma^2}{Z} \frac{m^2}{Z} \right)^{-1} \{ F_1(x) [ g_V^2 [ 1 + (1-x)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 4u + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) [-2+2x-4ux+8u^2-x^2] ] + \right. \right. \\
& \left. \left. + g_A^2 [ 1 + (1-x)^2 - 12u + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) [-2+2x-x^2+16u-4ux-24u^2] ] \right] + \right. \\
& \left. + F_2(x) g_A^2 [ -4(1-x) + \frac{2}{v} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) [ (1-x)^2 - 4u(1-x) + 1 ] ] \right\}.
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
F_1(x) = & -\left(\frac{4}{3} + \frac{2(Q^2 - 2m_G^2)^2}{9m_G^2}\right) [m_G^2(h_V^2 - h_A^2) + \frac{1}{2}(Q^2 - 2m_G^2) \cdot \right. \\
& \cdot (h_V^2 + h_A^2)] + \frac{1}{3}(Q^2 - 4m_G^2)[\frac{10}{9} + \frac{(Q^2 - 2m_G^2)^2}{9m_G^4}] (h_V^2 + h_A^2) + \\
& + \frac{4}{9}(h_V^2 - h_A^2)] , \\
F_2(x) = & \frac{2(Q^2 + 2m_G^2)}{27Q^2} (10 + \frac{(Q^2 - 2m_G^2)^2}{m_G^4}) (h_V^2 + h_A^2) - \\
& - \frac{16}{27Q^2} (Q^2 - m_G^2)(h_V^2 - h_A^2) , \\
Q^2 = & s(1-x) , \quad u = m^2/s , \quad v = \sqrt{1-m^2/E^2} \cdot e^+.
\end{aligned}$$

MIRROR FERMIONS IN THE PROBLEM  
OF P-PARITY VIOLATION IN WEAK INTERACTION

A.G.Liparteliani, V.A.Monich, Yu.P.Nikitin, G.G.Volkov

Institute for High Energy Physics, Serpukhov

1. GAUGE  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U(1)$ -MODEL WITH MIRROR FERMIONS

To construct consistently a left-right LR-symmetric theory based on the diagonality principle, it is necessary to provide not only the diagonality of the Yukawa interaction, but also to compensate for the LR-diagram contributions (in particular, exclude them). This can be achieved by widening quark and leptonic families with new fermions with the quantum number "mirror" [1-11]. As an example of such an approach, we may offer a model of electroweak interactions based on the  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U(1)$ -gauge group. Quarks (leptons) should be distributed in multiplets as follows:

$$\begin{aligned} q_i^{1L} &= \begin{pmatrix} \nu_i(\theta_a) \\ \ell_i^- \end{pmatrix}_L, & q_i^{2L} &= \begin{pmatrix} E_i^0(\theta_a^*) \\ E_i^- \end{pmatrix}_L \\ q_i^{1R} &= \begin{pmatrix} \nu_i(\tilde{\theta}_a) \\ E_i^0 \end{pmatrix}_R, & q_i^{2R} &= \begin{pmatrix} E_i^0(\tilde{\theta}_a^*) \\ \ell_i^- \end{pmatrix}_R \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

where  $\nu_i(\theta_a)$  and  $E_i^0(\theta_a^*)$  are mutually orthogonal combinations of the states  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  and  $(E_1^0, E_2^0, E_3^0)$ , respectively.

Under such a construction of fermion multiplets, LR-diagrams do not occur at least at the one-loop level. For this it is necessary to exclude the mixing of light (ordinary) and mirror (heavy) partners,  $(\nu_i, E_i^0)$  and  $(\ell_i^-, E_i^-)$ , respectively. Spontaneous space symmetry breaking of electroweak interactions is connected with the fact that the masses of "mirror" objects seem to be greater than those of ordinary quarks and leptons. A similar mechanism responsible for the difference in masses of ordinary and mirror fermions, seems to arise in the model with the gauge  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U(1)_{B-L^-}$  symmetry, including two types of Majorana neutrino ( $\nu$  and  $N$ ). Indeed, the mechanism of the spontaneous breaking of  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U(1)_{B-L^-}$

symmetry to  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -symmetry violated the discrete LR-symmetry of the initial Lagrangian and resulted in the production of two Majorana neutrinos with different masses  $m_N \gg m_\nu$  [12-16]. The mechanism described is true only in the case of neutral components.

It is also worth to note, that in the given approach there is a hope that the contribution from the diagrams with the Higgs boson exchange is negligibly small, as compared to the contribution from the diagrams with the gauge vector boson exchange only.

Hence, the extension of the fermionic sector of matter fields in LR-symmetry models may be of great help in the solution of some problems, connected with the diagonality principle of neutral currents in rare processes, such as  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ ,  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$ ,  $K_L^0 \rightarrow \bar{\mu}e$ , etc. Quite remarkable is the application of this model in the enhancement of such rare processes as  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$ ,  $K_L^0 \rightarrow \bar{\mu}e$ , etc. For instance,

$$B(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3a}{32\pi} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{m_k^2}{m(W_R^+)^2} O_{1k} O_{2k} \right)^2, \quad (2)$$

where  $m_k$  are neutral mirror lepton masses,  $m(W_R^+)$  is the mass of a charged gauge  $W_R^+$ -boson,  $O_{ik}$  are the mixing parameters of the current operator of R-transitions

$$(E'_1, E'_2, E'_3) = \hat{O}(E'_1, E'_2, E'_3) \quad (3)$$

$$\frac{\Gamma(\mu \rightarrow 3e)}{\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)} \sim \frac{2a}{\pi} \ln^2 \frac{m(W_R^+)^2}{m(W_R^+)^2}, \quad k = 1, 2 \text{ or } 3 \quad (4)$$

from the experiment,  $B(\mu \rightarrow e\gamma) < 1.9 \cdot 10^{-10}$ ,  $B(\mu \rightarrow 3e) < 1.9 \cdot 10^{-9/18}$ .

## 2. THE ROLE OF NEUTRINO IN P-SYMMETRY BREAKING PROBLEM IN THEORIES WITH GAUGE $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -SYMMETRY

It is necessary to consider in which way the non-zero neutrino mass problem is connected with the question of the P-parity violation mechanism. The modern experimental limitations on neutrino masses are as follows:  $14 \text{ eV} < m(\nu_e) \leq 46 \text{ eV}$ ,  $m(\nu_\mu) \leq 65 \text{ KeV}$ ,  $m(\nu_\tau) \leq 250 \text{ MeV}$ . In the case of a massless neutrino one may introduce a one parameter  $U(1)$ -group of chiral transformations for the neutrino field  $\psi(x)$ :

$$u(a) \psi(x) u^{-1}(a) = \exp(i\gamma_5 a) \psi(x), \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (5)$$

where  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  are two-component Weyl fields which transform according to the Lorentz group representations  $(1/2, 0)$  and  $(0, 1/2)$ . The matrix  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  is taken here in the spinor representation.

The Lorentz transformations defined here as

$$\phi_{\pm} = \Lambda_{\pm} \phi_{\pm} \quad (6)$$

may be represented in the form

$$\Lambda_{\pm} = \exp\left[i\frac{\vec{\theta}}{2}(\vec{\theta} \pm i\vec{\beta})\right], \quad (7)$$

where  $\vec{\theta}$  and  $\vec{\beta}$  are rotation and boost parameters, respectively. The corresponding independent Weyl equations for the spinors have the form

$$\vec{\sigma} \vec{p} \vec{\phi}_{\pm} = \pm \phi_{\pm}, \quad (8)$$

where  $\phi_{\pm}$  correspond to the states with helicities  $\pm 1/2$ ,  $\vec{\sigma}$  are the Pauli matrices and  $\vec{p}$  is a neutrino momentum.

In paper [19] it was noted that the neutrino masslessness followed from  $\gamma_5$ -invariance of the weak interaction Hamiltonian, and all this led to the (V-A)-theory of weak interactions. A certain connection between the presence of a finite neutrino mass and a possible existence of LH weak charged currents is quite admissible. Then the case of a massless neutrino would correspond to the fulfilment of the condition  $m(W_R) = 0$ . If LH- and RH- neutrino fields are defined in the following way:  $\psi_R = (\phi^+, 0)$ ,  $\psi_L = (0, \phi^-)$ , then their superposition  $\psi_D = \psi_R + \psi_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi + \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi$  will be Lorentz-invariant

even if  $m_{\nu} \neq 0$ . In this the Weyl spinors are not any longer eigen functions of  $\vec{\sigma} \vec{p}$  at an arbitrary momentum (but they become such at high energies, when  $E_{\nu} \gg m_{\nu}$ ). Indeed, the spinors  $\phi_+$  and  $\phi_-$  satisfy then the Dirac equations

$$(E - \vec{\sigma} \vec{p}) \phi_+ - m \phi_- = 0, \quad (9)$$

$$m \phi_+ + (E + \vec{\sigma} \vec{p}) \phi_- = 0.$$

where  $\vec{p}$  is a particle momentum,  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  is a particle energy. Since under space reflections  $\phi_{\pm} \rightarrow \phi_{\mp}$ , then the theory invariance with respect to the P-transformations requires a unified consideration of  $(1/2, 0) + (0, 1/2)$  Weyl spinors. As a result, we come to the Dirac 4-component spinor  $\psi_D$ , where  $\psi_D^p \rightarrow \psi_D^p = \gamma_0 \psi_D^c$ ;  $\psi_D^c \rightarrow \psi_D^c = \gamma_2 \psi_D^*$ , and  $p$  and  $c$  are corresponding operators of the space reflection and charge conjugation

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note, that conservation of CP-invariance allows one to use only one Weyl spinor, since

$$\phi_{\pm}^C \phi_{\pm}^P = \sigma_2 \phi_{\pm}^*. \quad (10)$$

The invariance of the theory of massless particles with respect to combined conjugation (10) is a consequence of the invariance with respect to helicity group (5).

As it is desirable to construct a theory of electroweak interactions in such a way that it would be LR-symmetrical with further spontaneous P-symmetry breaking, then one should describe a neutrino with a four-component spinor, putting it in the left and right multiplets.

In this case we have a possibility to treat neutrino as a Majorana particle and not as a Dirac one:

$$\psi_M^C = \psi_M = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ -\sigma_2 \phi_+ \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Then it has only two independent components. Two other independent components will participate in the construction of another Majorana neutral lepton  $N$ , and here spontaneous breaking of P-parity will, consequently, lead to the difference in the masses of neutrino  $\nu$  and its mirror partner  $N$ . The above-considered problem was practically realized in the model with gauge  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)^Y$ -symmetry, where, apart from the Higgs multiplet  $(\phi \in \{1/2, 1/2, 0\})$  of scalar particles, the Higgs multiplets with quantum numbers  $\Delta_L = (1, 0, 2)$ ,  $\Delta_R = (0, 1, 2)$  were also considered.

The P-symmetry breaking was achieved by choosing the vacuum expectation values  $\langle \Delta_L \rangle_0 = 0$ ,  $\langle \Delta_R \rangle_0 = v \neq 0$ :  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \times \langle \Delta_R \rangle \neq 0 \rightarrow SU(2)_L \times U(1)^Y$ . Further breaking  $SU(2)_L \times U(1)^Y \rightarrow U(1)^Q$  takes place when a non-zero expectation value  $\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \neq 0$  appears.

The appearance of the neutrino mirror partner  $N$  with a large mass in the model is mainly connected with the appearance of Majorana mass terms of the type  $i \frac{m}{2} \overline{\psi}_M \psi_M$  in the Lagrangian. They violate the conservation law of the leptonic quantum number. The quoted models admit a direct experimental check, since they predict such rare processes as double neutrinoless  $\beta$ -decay and can describe  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$  decays in agreement with the upper experimental limits.

As a result, this approach allows one to relate a neutrino mass to that of the right helicity vector boson in the following way:

$$\frac{m_\nu^2}{e} = \frac{m}{m(W_R)}, \quad m(W_R) = m(N_R), \quad (12)$$

which provides a smooth connection between LR- and standard  $SU(2)_L \times U(1)$ -theories. Indeed, at  $m(W_R) \rightarrow \infty$ , the gauge  $SU(2)_L \times U(1)$ -symmetry is restored.

Thus, in the theory with the gauge  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -symmetry the existence not only of light leftneutrino, as well as of right antineutrino, but of heavy mirror right neutrino and left antineutrino is also admissible. The direct experimental observation of mirror leptons is somewhat complicated, on the one hand, because of their sterility  $m(W_R) \gg m(W_L)$ , and on the other hand, it is quite realistic due to their large masses.

### 3. BASIC FEATURES OF QUARTET MODELS

Our understanding of the problem of P-parity restoration would be far from being complete, if we do not consider quartet models based on the hypothesis of the quark and leptonic number doubling at the account of mirror fermions/1-11/. In such models the restoration of LR-symmetries may take place in the framework of a gauge group like  $G_L \times G_R \times U(1)$  or  $G_L \times G_R \times U(1) \times U(1)$ , where the unitary  $SU(4)$ -group (or symplectic  $SP(4)$ -group) is taken as  $G_{L(R)}$ -group. The symplectic  $SP(4)$ -group is a maximal  $SU(4)$ -subgroup, and it is free from axial Adler anomalies. Besides, many properties concerning symmetry breaking are analogous.

The  $G_{L(R)} = SU(4)$ -symmetry with a larger number of possible parameters will be considered here, since the stages with an intermediate symmetry  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  (see, e.g., variants B,C,D,E in fig. 1) are of great interest in the study of the problem of P-parity violation.

In such an approach leptons and quarks realize the fundamental representation of the  $SU(4)$ -group and are combined into quartets of the form/<sup>4/</sup>

$$C_i^{q,1} = \{C_i^q; C_i^1\} = \{u^i, d^i, u^i, d^i; \nu^i, e^i, L^i, L^{0i}\},$$

where index  $i$  runs over the values 1,2,3,... and corresponds to the families  $e, \mu, \tau, \dots$  for leptons and  $u, c, t, \dots$  for quarks. The objects  $L^i = (E^i, M^i, \Gamma^i, \dots)$   $L^{0i} = (E^0, M^0, \Gamma^0, \dots)$  are mirror leptons and  $U^i = (U, C, T, \dots)$   $D^i = (D, S, B, \dots)$  are mirror quarks.

The insertion of new quarks (leptons) into the theory agrees with the hypothesis that the ordinary world with LH-weak currents (LH world) is connected with the known quarks (leptons):  $(u^i, d^i, \nu^i, l^i)$  and the mirror world (i.e. the RH-one) is connected with the fermions  $(U^i, D^i, L^i, L^{0i})/1, 2, 4, 10/$ .

This section of the paper is devoted to the consideration of various types of spontaneous breaking of the initial  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U^Y(1)$  symmetry theory to  $U^Q(1)$  (see fig. 1). Thus, in the variant A the Weinberg-Salam  $SU(2)_L \times U(1)$ -symmetry is constructed as an intermediate one; as a result, the restoration of P-parity takes place only in the framework of the basic  $G_L \times G_R \times U^Y(1)$  group, i.e. at effec-

tive distances connected with the scale of this group  $r \sim 1/M_0$ ,  $M_0 \sim 10^3 \div 10^4$  GeV. In the variant B P-parity is restored at an intermediate stage in the framework of the "explicit"  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U^Y(1)$  gauge symmetry considered in Section 1. In variants C, D, E we consider intermediate stages characterized by gauge groups of the

$I$   $II$   
form  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  (where indices I (II) point to the fact that quarks and leptons within each generation are in general located

$I$   $II$   
differently in the corresponding multiplets of  $SU_L(2)$ ,  $SU_R(2)$ -group). Here the restoration of the LR-symmetry is connected with the permutation of ordinary and mirror fermions<sup>4,5,10/</sup>. The observed effects of P-parity violation in the modern experiments might be caused by the fact that mirror fermions are heavier than their corresponding basic partners.

In connection with this it would be rather interesting to search for the production of new heavy particles in electroweak processes. Indeed, no matter whether mirror quarks (leptons) have usual electromagnetic properties, they must participate in weak interactions with "light" quarks (leptons). The search for the reactions in which these "heavy" objects are produced, has been and is being carried out in modern experiments. We mean the experiments with the attempts to observe charged and neutral leptons in neutrino beams, muon experiments of the "beam-dump" type. The observation of the  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$  decays at the branching ratio of  $\gtrsim 10^{-10} \div 10^{-12}$  would be an indication of a possible existence of mirror neutral leptons.

Note, that in the framework of quartet models there is an attractive opportunity to obtain a proper value for the mass difference of u and d-quarks. Really, in the gauge theories with  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -symmetry the calculated value for the mass difference of u- and d-quarks has a wrong sign because of the contribution of the diagram with an intermediate photon. The contribution of such diagrams will, however, be suppressed, if one requires bare quark masses to be equal to zero:  $m_u = m_d = 0$ . In the framework of a quartet model a proper choice of the corresponding vacuum expectation value for the tensor (with respect to the gauge  $SU(4)_L \times SU(4)_R$ -group Higgs fields) which realizes the interaction between LH  $(u, d, \bar{u}, \bar{d})_L$  and RH  $(u, d, \bar{u}, \bar{d})_R$  quadruplets, easily provides the equality of the bare quark masses to zero.

#### 4. ELECTROWEAK INTERACTION LAGRANGIAN AND HIGGS FIELDS IN $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U^Y(1)$ GAUGE MODEL

Let us consider the mechanism of spontaneous violation of P-parity in quartet models<sup>10/</sup>. The scheme with the  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)$ -symmetry is characterized by the following commutation relations between the group generators:

$$\begin{aligned}
[F_L^\alpha, F_L^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} F_L^\gamma & [F_R^\alpha, F_R^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} F_R^\gamma \\
[F_L^\alpha, F_R^\beta] &= [F_L^\alpha, F^0] = [F_R^\alpha, F^0] = 0 & & \\
(F^0, F_L^\alpha, F_R^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 15),
\end{aligned} \tag{13}$$

where  $f_{\alpha\beta\gamma}$  are SU(4) group structure constants. Quarks and leptons from each family  $C_i^{q,1}$  correspond to the following representations of the group under consideration:

$$\begin{aligned}
q_L^i &= \frac{1+\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \\ \bar{d}_i \\ \bar{u}_i \end{pmatrix} \sim [4, 1, 1/3]; & q_R^i &= \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \\ \bar{d}_i \\ \bar{u}_i \end{pmatrix} \sim [\bar{1}, \bar{4}, 1/3], \\
l_L^i &= \frac{1+\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \\ \bar{e}_i \\ \bar{e}_i^0 \end{pmatrix} \sim [4, 1, -1]; & l_R^i &= \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \\ \bar{e}_i \\ \bar{e}_i^0 \end{pmatrix} = [1, \bar{4}, -1],
\end{aligned}$$

where the quantum numbers corresponding to the generators  $(\vec{T}_L, \vec{T}_R, Y)$  are given in the square brackets.

The multiplets of the scalar Higgs fields, such as the tensor multiplet  $\phi \sim [\bar{4}, 4, 0]$ , fundamental multiplets  $\eta_L \sim [4, 1, -1]$ ,  $\eta_R \sim [1, \bar{4}, -1]$  and the adjoint multiplets  $\chi_L (15, 1, 0)$  and  $\chi_R (1, 15, 0)$ , should be introduced into the considered scheme, so that the program of spontaneous violation be realized. Instead of the fields  $\chi_L^\alpha$ ,  $\chi_R^\alpha$  it is more convenient to examine the following linear combinations:

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1}^{15} \lambda^\alpha \chi_L^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{l} x_L^3 + \frac{x_L^8}{\sqrt{3}} + \frac{x_L^{15}}{\sqrt{6}}; x_L^1 - i x_L^2; x_L^4 - i x_L^5; x_L^9 - i x_L^{10} \\ x_L^1 + i x_L^2; -x_L^3 + \frac{x_L^8}{\sqrt{3}} + \frac{x_L^{15}}{\sqrt{6}}; x_L^6 - i x_L^7; x_L^{11} - i x_L^{12} \\ x_L^4 + i x_L^5; x_L^6 + i x_L^7; -\frac{2}{\sqrt{3}} x_L^8 + \frac{x_L^{15}}{\sqrt{6}}; x_L^{13} - i x_L^{14} \\ x_L^9 + i x_L^{10}; x_L^{11} + i x_L^{12}; x_L^{13} + i x_L^{14}; -\frac{3}{\sqrt{6}} x_L^{15} \end{array} \right] \\
\hat{\chi}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1}^{15} \lambda^\alpha \chi_R^\alpha,
\end{aligned} \tag{14}$$

where  $\lambda^\alpha$  are the Gell-Mann matrices for the SU(4)-group, and the strength tensors here for the gauge fields  $A_\mu^0$ ,  $A_{\mu L}^\alpha$ ,  $A_{\mu R}^\alpha$  corresponding to the generators  $F^0$ ,  $F_L^\alpha$ ,  $F_R^\alpha$  have the form

$$\begin{aligned}
F_{L\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu A_{L\nu}^a - \partial_\nu A_{L\mu}^a + g_L f_{\alpha\beta\gamma} A_{L\mu}^\beta A_{L\nu}^\gamma \\
F_{R\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a + g_R f_{\alpha\beta\gamma} A_{R\mu}^\beta A_{R\nu}^\gamma \\
F_{\mu\nu}^0 &\equiv \partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0
\end{aligned} \tag{15}$$

We can represent the Lagrangian density in the given model as

$$\begin{aligned}
L = -\frac{1}{4}(F_{L\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{R\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^0)^2 + \bar{q}_L \gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu D_\mu q_R + \\
+ \text{Tr}[(D_\mu \phi)^+(D_\mu \phi)] + f[\bar{q}_L \phi q_R + \bar{q}_R \phi^+ q_L] + \{ (D_\mu \hat{x}_L)^+(D_\mu \hat{x}_L) + \\
+ \frac{1}{2}\text{Tr}(D_\mu \eta_L)^2 + (L \rightarrow R) \} - P(\phi, \eta_L, \eta_R, x_L, x_R) + \\
+ (\text{gauge fixing terms}).
\end{aligned} \tag{16}$$

As usual, the symbols  $D_\mu$  denote the covariant derivatives of the corresponding fields:

$$\begin{aligned}
D_\mu q_L &\equiv \partial_\mu q_L + \frac{1}{2}g_0 A_\mu^0 [F^0, q_L] - ig_L A_{\mu L}^a \frac{\lambda^a}{2} q_L \\
D_\mu q_R &\equiv \partial_\mu q_R + \frac{1}{2}g_0 A_\mu^0 [F^0, q_R] - ig_R A_{\mu R}^a \frac{\lambda^a}{2} q_R \\
D_\mu \phi &\equiv \partial_\mu \phi - ig_L A_{L\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} \phi + ig_R A_{R\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} \phi, \\
D_\mu \hat{x}_L &\equiv \partial_\mu \hat{x}_L - \frac{1}{2}g_L A_{L\mu}^a [\lambda^a, \hat{x}_L], \\
D_\mu \hat{x}_R &\equiv \partial_\mu \hat{x}_R - \frac{1}{2}g_R A_{R\mu}^a [\lambda^a, \hat{x}_R], \\
D_\mu \eta_L &\equiv \partial_\mu \eta_L + \frac{1}{2}g_0 A_{\mu L}^0 \eta_L - ig_L A_{L\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} \eta_L, \\
D_\mu \eta_R &\equiv \partial_\mu \eta_R + \frac{1}{2}g_0 A_{\mu R}^0 \eta_R - ig_R A_{R\mu}^a \frac{\lambda^a}{2} \eta_R.
\end{aligned} \tag{17}$$

In expression (16)  $P$  stands for an arbitrary polynomial over the scale fields  $\phi, \eta_L, \eta_R, x_L, x_R$  (not higher than the fourth order), which is invariant with respect to the considered gauge group

$$\begin{aligned}
P = a_0 \text{Tr}(\phi^+ \phi) + a_1 \text{Tr}(\phi^+ \phi, 2 + a_2 \text{Tr}(\phi^+ \phi)^2 + b_0 \eta_L^+ \eta_L^- + \\
+ b_1 (\eta_L^+ \eta_L^-)^2 + b_{12} \eta_L^+ \eta_L^- \eta_R^+ \eta_R^- + c_0 \text{Tr}(\hat{x}_L \hat{x}_L^+) + \\
+ c_{11} \text{Tr}(\hat{x}_L \hat{x}_L^+ \hat{x}_L \hat{x}_L^+) + c_{12} \text{Tr}(\hat{x}_L \hat{x}_L^+) \text{Tr}(\hat{x}_R \hat{x}_R^+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \{ \text{Tr}(\hat{x}_L^\dagger x_L) \}^2 + d_1 \eta_L^+ x_L^\dagger x_L \eta_L + d_2 \eta_L^+ \phi \phi^\dagger \eta_L + d_3 \eta_L^+ \eta_L \text{Tr}(\phi^\dagger \phi) + \\
& + d_4 \eta_L^+ \eta_L \text{Tr}(x_L^\dagger x_L) + d_5 \eta_L^+ \eta_L \text{Tr}(\hat{x}_R^\dagger \hat{x}_R) + \\
& + l_{11} \text{Tr}(\hat{x}_L^\dagger x_L) \text{Tr}(\phi^\dagger \phi) + l_{12} \text{Tr}(\phi \phi^\dagger \hat{x}_L^\dagger \hat{x}_L) + (L \leftrightarrow R). \quad (18)
\end{aligned}$$

For simplicity the terms that are odd in fields  $\hat{x}_L^\dagger$ ,  $\hat{x}_R^\dagger$ ,  $\eta_L$ ,  $\eta_R$  are omitted in (18). One can get rid of them, demanding that the Lagrangian be invariant with respect to the corresponding discrete transformations, e.g. of the form  $G_1 = (\eta_L \rightarrow -\eta_L, x_L \rightarrow -x_L, \eta_R \rightarrow \eta_R, x_R \rightarrow x_R, \phi \rightarrow \phi)$  or  $G_2 = (\eta_L \rightarrow \eta_L, \eta_R \rightarrow -\eta_R, x_L \rightarrow x_L, x_R \rightarrow x_R, \phi \rightarrow \phi)$ . Lagrangian density (16) contains a LR-symmetry at  $g_L = g_R = g$ , i.e. a symmetry with respect to the following transformations:

$$A_L^a \rightarrow A_R^a, \quad \psi_L \rightarrow \psi_R, \quad \eta_L \rightarrow \eta_R, \quad x_L \rightarrow x_R, \quad \phi \rightarrow \phi^\dagger. \quad (19)$$

The polynomial  $P(\phi, \eta_L, \eta_R, x_L, x_R)$  also contains the LR-symmetry, but this does not mean that the vacuum expectation values of scalar fields must be left-right symmetrical.

The P-parity violation in the model considered may be smoothly introduced, i.e. left-right asymmetric vacuum expectations are assigned to the scalar Higgs fields.

Without any loss of generality, we shall choose for the field  $\phi$  its vacuum expectation value diagonal and real:

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & & & \\ & \bigcirc & & \\ a_3 & & & \\ & \bigcirc & & \\ a_4 & & & \end{pmatrix}. \quad (20)$$

The choice of (20) in the lower order in perturbation theory leads to the following values of quarks (leptonic) masses:

$$m_u = f a_1, \quad m_d = f a_2, \quad m_u = f a_3, \quad m_D = f a_4.$$

Tables 1a and 2a of the Appendix give mass matrices for the gauge fields caused by the appearance of the non-zero vacuum expectation values. Due to the electrical charge conservation, the vacuum expectation values for the scalar fields  $\eta_L$  and  $\eta_R$ ,  $x_L$  and  $x_R$ , may be taken in the form

$$\langle \eta_L \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \\ L \end{pmatrix}, \quad \langle \eta_R \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (21)$$

and

$$\langle \hat{\chi}_L \rangle_o = \sqrt{2} \begin{bmatrix} a_L & 0 & 0 & v_L \\ 0 & \beta_L & u_L & 0 \\ 0 & u_L & \gamma_L & 0 \\ v_L & 0 & 0 & \delta_L \end{bmatrix} \langle \hat{\chi}_R \rangle_o = (L \rightarrow R) \quad (22)$$

$$\text{here } a_L + \beta_L + \gamma_L + \delta_L = a_R + \beta_R + \gamma_R + \delta_R = 0.$$

The corresponding contributions to the mass matrices of the gauge vector fields caused by the non-zero vacuum expectation values of scalar fields are defined by formulae (3a-6a) (see Appendix).

Under this choice of vacuum expectation values only photon will remain massless. As a result, the  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)^Y$ -group is broken to  $U(1)^Q$  corresponding to the conservation of the electrical charge  $e = \frac{2g_R}{\sqrt{g^2 + 4g_0^2}}$ . The electromagnetic field has the form

$$A_\mu^0 = e \left[ \frac{1}{2g_0} A_\mu^0 + \frac{1}{g} (A_{\mu L}^3 + A_{\mu R}^3) + \frac{1}{\sqrt{3} g} (A_{\mu L}^8 + A_{\mu R}^8) - \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{3}} (A_{\mu L}^{15} + A_{\mu R}^{15}) \right].$$

## 5. QUARTET MODELS WITH STEP-BY-STEP GAUGE SYMMETRY BREAKING

### a. Intermediate $SU(2)_L \times U(1)$ -symmetry

If it is necessary to break the  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)^Y$ -group down to the standard  $SU(2)_L \times U(1)$ -symmetry, then the vacuum expectation values of the fields  $\phi$ ,  $\hat{\chi}_L$ ,  $\hat{\chi}_R$ ,  $\eta_L$ ,  $\eta_R$  must satisfy the following additional conditions:

$$\langle \phi \rangle_o \Rightarrow a_1 = a_2 = 0; \quad \langle \hat{\chi}_L \rangle \Rightarrow a_L = \beta_L, \quad u_L = v_L = 0 \quad (23)$$

$$\langle \eta_L \rangle_o + \chi_L = 0.$$

The  $SU(2)_L \times U(1)$ -symmetry group is defined by the generators

$$T_L^1 \equiv F_L^1, \quad T_L^2 \equiv F_L^2, \quad T_L^3 \equiv F_L^3, \quad Y = 2(Q - T_{3L})$$

$$Q = \frac{1}{2} F_0 + (F_L^3 + F_R^3) + \frac{1}{\sqrt{3}} (F_L^8 + F_R^8) - \sqrt{\frac{2}{3}} (F_L^{15} + F_R^{15}) \quad (24)$$

with the corresponding commutation relations

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad [T_i, Y] = 0. \quad (25)$$

Partons from any family  $C_i^q = (u^i, d^i, D^i, U^i)$  and  $C_i^1 = (\nu_i, l_i^-, E_i^-, E_i^0)$  may be put into multiplets of the  $SU(2)_L \times U(1)$ -group. For instance, in the case of leptons we have doublets  $\begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i^- \\ 1_i^+ \\ E_i^0 \end{pmatrix}_L$  with  $T = \frac{1}{2}$

$Y = -1$  and singlets with  $T = 0$   $(\nu_i)_R, (l_i)_R, (E_i^-)_R, (E_i^0)_R, (E_i^+)_L, (E_i^0)_L$  and with the hypercharge  $Y = 0, -2, -2, 0, -2, 0$ .

The Weinberg angle can easily be defined in the given scheme:

$$\sin^2 \theta_W = [4 + \frac{g^2}{4g_0^2}]^{-1}. \quad (26)$$

The small invariance subgroup of the vacuum  $P \subset G = SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)$  is defined from the condition that the corresponding generators  $\hat{F}_a \in P$  turn the vacuum state into zero:

$$\hat{F}_a | 0 \rangle = 0. \quad (27)$$

More precisely, for a concrete model condition (27) is deciphered as follows:

$$\begin{aligned} [F_L^a, \langle \phi \rangle_0] &= -\frac{\lambda^a}{2} \langle \phi \rangle_0 = 0 & [F_L^a, \langle \eta_R \rangle_0] &= [F_R^a, \langle \eta_L \rangle_0] = 0 \\ [F_R^a, \langle \phi \rangle_0] &= -\frac{\lambda^a}{2} \langle \phi \rangle_0 = 0 & [F_L^a, \langle \hat{\chi}_R \rangle_0] &= [F_R^a, \langle \hat{\chi}_L \rangle_0] = 0 \\ [F_L^a, \langle \eta_L \rangle_0] &= -\frac{\lambda^a}{2} \langle \eta_L \rangle_0 = 0 & & \\ [F_R^a, \langle \eta_R \rangle_0] &= -\frac{\lambda^a}{2} \langle \eta_R \rangle_0 = 0 & & \\ [F_L^a, \langle \hat{\chi}_L \rangle_0] &= -[\frac{\lambda^a}{2}, \langle \hat{\chi}_L \rangle_0] = 0 & & \\ [F_R^a, \langle \hat{\chi}_R \rangle_0] &= -[\frac{\lambda^a}{2}, \langle \hat{\chi}_R \rangle_0] = 0 & & \end{aligned} \quad (28)$$

All gauge fields corresponding to the small vacuum subgroup, remain massless, which follows directly from the formulae for gauge vector boson masses.

### b. Intermediate "Explicit" $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -Symmetry

One may consider a variant of the theory when at some intermediate stage of spontaneous breaking of the initial symmetry an "explicit" left-right  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$  symmetry is realized with the following arrangement of particles in the multiplets (as an example, further we consider only leptons  $C_i^1$  which are doublets with respect to the groups  $SU(2)_L$  and  $SU(2)_R$ )

$$\left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \right\} (T_L = \frac{1}{2}); \quad \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_R \right\} (T_R = \frac{1}{2}) \quad \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_R \right\} (T_L = 0) \quad \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \right\} (T_R = 0)$$

respectively, and singlets with respect to these groups:

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^- \\ E^0 \end{pmatrix}_{L,R} \right\}, (T_{L,R} = 0).$$

To realize such a breaking of the initial symmetry, it is necessary to impose the following requirements on the vacuum average values of scalar fields:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle \Rightarrow a_1 = a_2 = 0, \quad \langle \eta_L \rangle \Rightarrow x_L = 0, \quad \langle \eta_R \rangle_0 \Rightarrow y_L = 0 \\ \langle \hat{x}_L \rangle_0 \Rightarrow a_L = \beta_L, \quad u_L = v_L = 0, \quad \langle \hat{x}_R \rangle_0 \Rightarrow a_R = \beta_R, \quad u_R = v_R. \end{aligned} \quad (29)$$

Between the generators of the initial group  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)$  and the group  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$  there arises a correspondence:

$$F_{L,R}^i = T_{L,R}^i, \quad [T_L^i, T_R^j] = 0, \quad [T_{L(R)}^i, T_{L(R)}^j] = i \epsilon_{ijk} T_{L(R)}^k$$

$$[T_{L(R)}^i, Y] = 0, \quad Y = 2(Q - T_{3L} - T_{3R}), \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

### c. Intermediate $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U_L^I(1) \times U_R^{II}(1) \times U^Y(1)$ -Symmetry

Using the Higgs multiplets  $(\phi, \chi, \eta)$ , it is possible to break the symmetry  $SU(4)_R^I \times SU(4)_R^{II} \times U_L^I(1) \times U_R^{II}(1) \times U^Y(1)$  to the intermediate symmetry  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U_L^I(1) \times U_R^{II} \times U^Y(1)$  with the following multiplet contents of the considered particles of the set  $C_i^{\ell} (\nu_i, \ell_i, E_i^*, E_i^0)$  which are

$$1) \text{ doublets with } T_L^{\pm} = \frac{1}{2} \text{ and } T_R^{\pm} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \ell_i \\ E_i^* \end{pmatrix}_R$$

respectively,

$$\text{and 2) singlets with } T_L^I = 0, \quad T_R^{II} = 0$$

$$\{(\nu_i)_R, (\ell_i)_R, E_L^0, E_L^* \}, \{ (E_i^0)_R, (E_i^*)_R \} \text{ and } \{(\nu_i)_L, (e_i)_L\},$$

respectively. The generators of the new group are related to the generators of the original group as follows:

$$T_L^{(i)} = F_L^{(i)} \quad i = 1, 2, 3$$

$$T_R^{(1)} = F_R^{13}, \quad T_R^{(2)} = F_R^{14}, \quad T_R^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_R^8 - \sqrt{\frac{2}{3}} F_R^{15}$$

$$u_L^I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} F_L^8 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} F_L^{15}, \quad (30)$$

$$u_R^{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (F_R^3 + \frac{2}{\sqrt{3}} F_R^8 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} F_R^{15}),$$

$$[u_L^I, T_{L,R}^1] = 0, [u_R^{II}, T_{L,R}^1] = 0, [Y, T_{L,R}^1] = [Y, u_{L(R)}^{I(II)}] = 0.$$

For the vacuum expectations of scalar fields, when our method of symmetry breaking is applied, the following conditions are to be satisfied

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle_0 &\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \langle \eta_L \rangle_0 \Rightarrow x_L = 0, \langle \eta_R \rangle_0 \Rightarrow y_R = 0 \\ \langle x_L \rangle_0 &= \alpha_L = \beta_L, u_L = v_L = 0, \langle x_R \rangle_0 \Rightarrow y_R = \delta_R, u_R = v_R = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Then the mass term of the Lagrangian of gauge fields will have the form:

$$\begin{aligned} L_M &= \frac{g^2}{2} [(\alpha_L - \gamma_L)^2 + \frac{y_L^2}{2}] |A_{\mu L}^{4+15}|^2 + \frac{g^2}{4} (\alpha_R - \gamma_R)^2 |A_{\mu R}^{4+15}|^2 + \\ &+ \frac{g^2}{2} (\alpha_L - \delta_L)^2 |A_{\mu L}^{11-112}|^2 + \frac{g^2}{2} [(\beta_R - \gamma_R)^2 + \frac{x_R^2}{2}] |A_{\mu R}^{11-112}|^2 + \\ &+ \frac{g^2}{2} [(\gamma_L - \delta_L)^2 + \frac{y_L^2}{2}] |A_{\mu L}^{13-114}|^2 + \frac{g^2}{2} [(\alpha_R - \beta_R)^2 + \frac{x_R^2}{2}] |A_{\mu R}^{1+12}|^2 + \\ &+ \frac{g^2}{2} [2(\alpha_L - \gamma_L)^2 + y_L^2] |A_{\mu L}^{6+17}|^2 + \frac{g^2}{4} [2(\beta_R - \gamma_R)^2 + \frac{x_R^2}{4}] |A_{\mu R}^{6+17}|^2 + \\ &+ \frac{g^2}{2} (\alpha_L - \delta_L)^2 |A_{\mu L}^{9+110}|^2 + \frac{g^2}{2} (\alpha_R - \gamma_R)^2 |A_{\mu R}^{9+110}|^2 + \\ &+ \frac{y^2}{4} [\frac{g}{\sqrt{3}} \frac{A_\mu^0}{\mu L} + g(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{A_\mu^8}{\mu L} - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{A_\mu^{15}}{\mu L})]^2 + \frac{x_R^2}{4} [\frac{g}{\sqrt{3}} \frac{A_\mu^0}{\mu R} + g(\frac{A_\mu^3}{\mu R} - \frac{A_\mu^8}{\sqrt{3}} - \frac{A_\mu^{15}}{\sqrt{6}})]^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Taking into account  $2\alpha_L + \gamma_L + \delta_L = 0$ ,  $\alpha_R + \beta_R + 2\gamma_R = 0$  and assuming for simplicity that  $\gamma_R = \gamma_L$ ,  $\beta_L = \gamma_L$ ,  $x_R = y_L$ , one gets for the vacuum averages of Higgs fields:

$$\langle \hat{\chi}_L \rangle_o = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_L & \circ \\ a_L & \gamma_L \\ \circ & \delta_L \end{pmatrix} \quad \langle \hat{\chi}_R \rangle_o = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_R & \circ \\ \gamma_L & a_L \\ \circ & a_L \end{pmatrix}$$

and  $\delta_L = -2a_L - \gamma_L = a_R$ . Then the mass part of the Lagrangian of gauge fields is expressed by the formula

$$\begin{aligned}
 L_M = & \frac{g^2}{2} \{ [ (a_L - \gamma_L)^2 + \frac{Y_L^2}{2} ] |A_{\mu L}^{4+i15}|^2 + |A_{\mu R}^{11-i12}|^2 \} + \\
 & + \frac{g^2}{2} \{ (3a_L + \gamma_L)^2 [ |A_{\mu R}^{4+i15}|^2 + |A_{\mu L}^{11-i12}|^2 ] \} + \frac{g^2}{2} \{ [2(a_L + \gamma_L)]^2 + \frac{Y_L^2}{2} \} \times \\
 & \times \{ |A_{\mu L}^{13-i14}|^2 + |A_{\mu R}^{1+i12}|^2 \} + \frac{g^2}{2} \{ [(a_L - \gamma_L)^2 + \frac{Y_L^2}{2}] (|A_{\mu L}^{6+i7}|^2 + \\
 & + |A_{\mu R}^{6+i7}|^2) \} + \frac{g^2}{2} \{ (3a_L + \gamma_L)^2 [ |A_{\mu L}^{9+i10}|^2 + |A_{\mu R}^{9+i10}|^2 ] \} + \\
 & + \frac{Y_L^2}{4} \{ g_o A_{\mu}^0 + g \left( \frac{2}{\sqrt{3}} A_{\mu L} - \frac{1}{\sqrt{6}} A_{\mu R} \right) \}^2 + \frac{Y_L^2}{4} \{ g_o A_{\mu}^0 + g \left( A_{\mu R}^3 - \frac{A_{\mu R}^8}{\sqrt{3}} - \frac{A_{\mu R}^{15}}{\sqrt{6}} \right) \}^2. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Let us also give some useful formulae relating the initial gauge fields to the physical intermediate vector bosons:

$$\begin{aligned}
 \frac{A^3}{\mu L} = & \frac{w^3}{\mu L}, \quad m(w_L^3) = 0, \quad (T_L^3 = F_L^3), \\
 \frac{1}{3} \frac{A^8}{\mu L} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{A^{15}}{\mu L} = & z_L^1, \quad m(u_L) = 0, \quad (u_L^I = \frac{1}{\sqrt{3}} F_L^8 + \frac{2\sqrt{2}}{3} F_L^{15}), \\
 \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{A^8}{\mu L} - \frac{1}{3} \frac{A^{15}}{\mu L} = & z_L^2, \quad m(v_L) \neq 0, \quad (v_L = \frac{2\sqrt{2}}{3} F_L^8 - \frac{1}{3} F_L^{15}), \\
 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{A^8}{\mu R} - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{A^{15}}{\mu R} = & w_R^3, \quad m(w_R^3) = 0, \quad (T_R^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_R^8 - \frac{\sqrt{2}}{3} F_R^{15}), \quad (34) \\
 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{A^3}{\mu R} - \frac{2}{3} \frac{A^8}{\mu R} - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{A^{15}}{\mu R} = & z_R^1, \quad m(u_R^{II}) = 0, \\
 (u_R^{II}) = & - \frac{1}{\sqrt{3}} [ F_R^3 + \frac{2}{\sqrt{3}} F_R^8 + \sqrt{\frac{2}{3}} F_R^{15} ], \\
 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{A^3}{\mu R} - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{A^8}{\mu R} - \frac{1}{3} \frac{A^{15}}{\mu R} = & z_R^2, \quad m(v_R) = 0, \quad (v_R = \sqrt{\frac{2}{3}} F_R^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} F_R^8 - \frac{1}{3} F_R^{15}).
 \end{aligned}$$

In the matrix form relations (34) are represented in the following form:

$$\begin{pmatrix} w_L^3 \\ z_L^1 \\ z_L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_L^3 \\ A_L^8 \\ A_L^{15} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} w_R^3 \\ z_R^1 \\ z_R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_R^3 \\ A_R^8 \\ A_R^{15} \end{pmatrix} \quad (36)$$

The corresponding operators of the third spin projections  $v_{L,R}, u_{L,R}, t_{L,R}$  are expressed by the formulae

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & v_R &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ u_L &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & u_R &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ t_{3L} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & t_{3R} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

The operators of the electrical charge and weak hypercharge are defined by the relations

$$\begin{aligned} Q &= t_{3L} + t_{3R} - \frac{1}{\sqrt{3}}(u_L + u_R) + \frac{Y}{2} = \\ &= t_{3L} + t_{3R} - \frac{1}{\sqrt{3}}(u_L + u_R) + \sqrt{\frac{2}{3}}(v_L + v_R) + \frac{1}{2}F_O, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}Y = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_L + v_R) + \frac{1}{2}F_O, \quad F_{(\text{lepton})}^O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In our model the left-right symmetry of the Lagrangian is connected with the invariance with respect to the permutation  $\nu_1 \leftrightarrow E_1^0, \ell_1 \leftrightarrow E_1^-$ . The neutral fields  $w_{\mu L}^3 \approx T_{\mu L}^3, w_{\mu R}^3 \approx T_{\mu R}^3, T_{\mu L}^1 \approx U_{\mu L}^1, T_{\mu R}^1 \approx U_{\mu R}^1, B_{\mu} \approx Y$  remain massless. The mass parts of the Lagrangian are represented below:

$$L_M^{\text{neutral field}} = \frac{y^2}{4} [g_0 A_{\mu}^0 + g \sqrt{\frac{3}{2}} (\frac{2\sqrt{2}}{3} A_{\mu L}^8 - \frac{1}{3} A_{\mu L}^{15})]^2 + \frac{x_R^2}{4} [g_0 A_{\mu}^0 + g \sqrt{\frac{3}{2}} (\sqrt{\frac{2}{3}} A_{\mu R}^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{\mu R}^8 - \frac{1}{3} A_{\mu R}^{15})]^2 \quad (38)$$

$$(y_L^2 = x_R^2 = y^2), \\ L_M^{\text{neutral field}} = \frac{y^2}{4} [g_0 A_{\mu}^0 + g \sqrt{\frac{3}{2}} z_{\mu L}^2]^2 + \frac{y^2}{4} [g_0 A_{\mu}^0 + g \sqrt{\frac{3}{2}} z_{\mu R}^2]^2 = \\ = \frac{(4g_0^2 + 3g^2)}{8} y^2 \left[ \frac{A_{\mu}^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{g}{g_0} (\frac{z_{2L\mu} + z_{2R\mu}}{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{g^2}{g_0^2}}} \right] + \frac{3g^2 y^2}{16} (z_{2L}^{\mu} - z_{2R}^{\mu})^2 \quad (39)$$

$$B_{\mu} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} A_{\mu}^0 \frac{g}{g_0} + \frac{z_{2L}^{\mu} + z_{2R}^{\mu}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{g^2}{g_0^2}}} \quad \text{is a massless field with the hyper-}$$

$$\text{charge } Y = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} (V_L + V_R) + F_0.$$

#### d). Intermediate $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U^Y(1)$ -Symmetry

To break the symmetry  $SU_L^I(2) \times U^I(1) \times SU_R^{II}(2) \times U^{II}(1) \times U(1)$  to the  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U^Y(1)$  group, it is necessary to additionally introduce the Higgs multiplets

$$(\phi_1^0, \phi_2^-, \phi_3^-, \phi_4^0)_L, \quad (\phi_1^0, \phi_2^-, \phi_3^-, \phi_4^0)_R$$

with the following vacuum averages:  $(0, 0, 0, \lambda_L)$  and  $(\lambda_R, 0, 0, 0)$ . In this the mass term in Lagrangians (38), (39) gets an addition in the form

$$\begin{aligned}
\Delta L_M = & \frac{|\lambda_L|^2}{4} (|A_{\mu L}^{9-110}|^2 + |A_{\mu L}^{11-112}|^2 + |A_{\mu L}^{13-114}|^2 + \\
& + |g_0 A_{\mu L}^0 - g \sqrt{\frac{3}{2}} A_{\mu L}^{15}|^2) + \frac{|\lambda_R|^2}{4} (|A_{\mu R}^{1+12}|^2 + |A_{\mu R}^{4+15}|^2 + \\
& + |A_{\mu R}^{9+110}|^2 + |g_0 A_{\mu R}^0 + g (A_{\mu R}^3 + A_{\mu R}^8/\sqrt{3} + A_{\mu R}^{15}/\sqrt{6})|^2). \quad (40)
\end{aligned}$$

Under this choice of the Higgs fields the symmetry  $SU_L^I(2) \times SU_R^I \times U_Y^I(1)$  is not touched upon. One may put again  $\lambda_L = \lambda_R$ . As a result there emerges a left-right symmetric model of the type  $SU_L^I(2) \times SU_R^{II}(2) \times U_Y^I(1)$  where the generator  $\tilde{Y}$  is constructed by the rule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{Y} = & - \frac{1}{\sqrt{3}} (U_L + U_R) + \sqrt{\frac{2}{3}} (V_L + V_R) + \frac{1}{2} F_0 = (H_L + H_R) + \frac{1}{2} F_0 = \\
& = (\tilde{Y}_L + \tilde{Y}_R) \frac{1}{2}, \quad Q = (T_{3L} - T_{3R}) + \frac{\tilde{Y}}{2} = (T_{3L} + \frac{\tilde{Y}_L}{2}) + (T_{3R} + \frac{\tilde{Y}_R}{2}) \quad (41) \\
\tilde{Y} = & \tilde{Y}_L + \tilde{Y}_R.
\end{aligned}$$

The generators  $H_L$  and  $H_R$  are defined as

$$H_L = - \frac{1}{\sqrt{3}} U_L + \sqrt{\frac{2}{3}} V_L = \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & \tilde{Y}_L^{\text{leptonic}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\tilde{Y}_L}{2} \\ \text{---} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$H_R = - \frac{1}{\sqrt{3}} U_R + \sqrt{\frac{2}{3}} V_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \tilde{Y}_R^{\text{leptonic}} \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{Y}_R}{2} \\ \text{---} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

The operators  $H_L$  and  $H_R$  may be used to define the "left" quantum number of the "heaviness"  $h_L^1$  of the "left" fermions ( $\psi_L = \frac{1+i\gamma_5}{2} \psi$ )  
 $h_L^1(\nu_L, 1_L) = 0$ ,  $h_L^1(E_L^*) = -\frac{1}{2}$ ;  $h_L^1(E_L^0) = \frac{1}{2} h_L^1(\psi_L) = 0$  and, correspondingly, of the "right" quantum number  $h_R^1$  ("lightness")  $h_R^1(E_R^0, E_R^*) = 0$ ,  $h_R^1(\nu_R) = \frac{1}{2}$ ;  $h_R^1(1_R) = -\frac{1}{2} h_R^1(\psi_R) = 0$ . The earlier constructed scheme has a remarkable property of the left-right symmetry in the mutual permutation of "light" & "heavy" fermionic fields. This means that in this theory the restoration of the left-right symmetry in electroweak interactions at high energies is caused by the existence of "heavy" mirror fermions, similar to the ordinary ones that are already known

and are interacting at large distances in the V+A-way; the masses of the left and right gauge bosons coincide:  $m(W_L^{\pm,0}) = m(W_R^{\pm,0})$ . The further concretization of the model is connected with the next stage of the symmetry breaking  $SU_L^1(2) \times SU_R^1(2) \times U^Y(1)$  to the symmetry  $U^Q(1)$ . For this it is necessary to introduce into the theory one more pair of the quartet Higgs fields, for example,  $\phi_{IIL}^+ = (\phi_1^+, \phi_2^0, \phi_3^0, \phi_4^+)_L$  and  $\phi_{IIR}^+ = (\phi_1^+, \phi_2^0, \phi_3^0, \phi_4^+)_R$ , with the vacuum expectations  $\langle \phi_{IIL}^+ \rangle = (0, \lambda_{2L}, \lambda_{3L}, 0)$  and  $\langle \phi_{IIR}^+ \rangle = (0, \lambda_{2R}, \lambda_{3R}, 0)$ .

It can easily be shown that in the framework of such a scheme of electroweak interactions one has charged currents  $(\nu_i^1)_L, (E_i^0, E_i^1)_R$ , ( $m(W_L) = m(W_R)$ ), two neutral currents  $[T_{3L}^I + T_{3R}^I] Q \sin^2 \theta_W \tilde{Z}_1$  and the electromagnetic current. To this, one may demand  $m(\tilde{Z}_2) \gg m(\tilde{Z}_1)$ . The interaction of ordinary leptons (quarks) with the gauge vector neutral field  $\tilde{Z}_1$  coincides in form with the neutral current of the GWS-model. At the given stage of the spontaneous breaking, the scheme contains a certain left-right symmetry caused by the simultaneous permutation of "light" (ordinary) and "heavy" (mirror) fermions. Apart from electromagnetic interactions, the possibilities of the production of "heavy" particles in the "light" particle beam are connected with weak interactions, due to a possible mixing of the neutral states of  $\nu_i^1$  and  $E_i^0$ . In such a model, by introducing one more quartet Higgs field  $\phi (a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4)$  with the negligible vacuum expectations  $|a_i| \ll |\langle \eta_0 \rangle|, |\langle X \rangle_0|$  one can obtain a scheme in which the left and right worlds are mixed.

In the variant of the quartet model of electroweak interactions it is possible to consider the second charge, different from the electrical one. For this it is necessary to extend the initial group to  $SU_L^4(4) \times SU_R^4(4) \times U^Y_1(1) \times U^Y_2(1)$ , where the subgroup  $U^Y_1(1)$  is connected with the fourth colour of "light" (ordinary) leptons (quarks), and the subgroup  $U^Y_2(1)$  with that of "heavy" leptons and quark, respectively. It is natural, that this approach implies that the initial symmetry of quarks and leptons  $SU_L^{EW}(4) \times SU_R^{EW}(4) \times SU_L^1(4^C) \times SU_R^1(4^C)$  was successively broken in a chain fashion to  $SU_L(4) \times SU_R(4) \times SU_L^1(3^C) \times SU_R^1(3^C) \times U^Y_1(1) \times U^Y_2(1) \rightarrow SU_L^1(2) \times SU_R^1(2) \times SU_L^1(3^C) \times SU_R^1(3^C) \times U^Y_1(1) \times U^Y_2(1) \rightarrow SU_L^1(3^C) \times SU_R^1(3^C) \times U^Q_1(1) \times U^Q_2(1)$ . The symmetry groups  $SU_L^1(3^C)$  and  $SU_R^1(3^C)$  are connected with strong interactions of "light" (ordinary) quarks and "heavy" (mirror) quarks, respectively. Then the conserved charges  $Q_1$  and  $Q_2$  may be expressed in terms of the generators of the initial group as follows:

$$Q_1 = T_{3L} + H_{3R} + \frac{Y_1}{2}, \quad Q_2 = T_{3R} + H_{3L} + \frac{Y_2}{2}$$

$$Y_{1(\text{leptonic})} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix}, \quad Y_{2(\text{leptonic})} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

In such two-charge theory two charges should be ascribed to particles e.g. according to (44), for leptons  $1^{(Q_1, Q_2)}$  one has

$$Q_1(\nu_1) = 0, \quad Q_1(E_1^0) = 0, \quad Q_1(1^-) = -1(e_1), \quad Q_1(E_1^*) = 0$$

$$Q_2(\nu_1) = 0, \quad Q_2(E_1^0) = 0, \quad Q_2(1^-) = 0, \quad Q_2(E_1^*) = -1(e_2).$$

The attractiveness of the electroweak interaction model with the considered fassion of spontaneous breaking of gauge symmetry follows from the fact that "soft" parity violation is caused by the appearance of the mirror quark-partners and leptons, whose masses are apparently larger. The left-right symmetry of the initial Lagrangian is broken, but it may be restored by the  $A$ -permutation procedure of the ordinary and mirror objects  $P' = PA$ . As it follows from (44), the interaction of mirror and ordinary worlds can be  $(G_x \leq G_F/\sqrt{2})$  both weak and gravitational within each of the generations. As far as the electromagnetic coupling of left and right charged objects is concerned, the model with the gauge symmetry  $SU^L(4^C) \times SU^R(4^C) \times SU(4)_L \times SU(4)_R$  reveals a possibility to construct a two-charge theory. This way of introducing an additional electromagnetic field into the theory (another long-range interaction parallel to the ordinary one), allows to conserve a new charge if

residual symmetry of the theory is  $U^{Q_1}(1) \times U^{Q_2}(1)$ . In this case mirror quarks and leptons do not interact in the usual electromagnetic way. But if the symmetry  $U^{Q_1} \times U^{Q_2}(1)$  turns out to be only intermediate, i.e. it is broken further to  $U(1)^{Q(\text{electrical})}$ , then the electromagnetic interaction of mirror quarks and leptons with the ordinary world depends on the quantity of mixing of these groups. An interesting possibility in this model would be to introduce the magnetically charged particles parallel to the ordinary ones which are electrically charged. For this it is necessary to identify  $Q_1$  with the electrical charge and  $Q_2$  with the magnetic charge, respectively. Then quarks (leptons) would be either purely electrically ( $Q_1, 0$ ) or magnetically ( $0, Q_2$ ) charged.

e. Intermediate  $SU_L^1(2) \times SU_R^{II}(2) \times U^Y(1)$ -Symmetry  
(2-doublet scheme).

To continue the consideration of different variants of the initial gauge symmetry  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U^Y(1)$  breaking, let us examine the model based on the gauge group  $SU(2)_L \times SU^{II}(2)_R \times U(1)$ . This group is realized at one of the intermediate stages of the symmetry spontaneous breaking and has the following contents of the fermion multiplets:

$$\begin{pmatrix} \nu_i(\xi_L^i) \\ e_i \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} E_i^0(\xi_L^i) \\ E_i \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_i(\xi_R^i) \\ e_i \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} E_i^0(\xi_R^i) \\ e_i \end{pmatrix}_R \quad (45)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\nu_i(\xi_i) = \tilde{\nu}_i \cos \xi_i + \tilde{E}_i^0 \sin \xi_i, \quad E_i^0(\xi_i) = -\tilde{\nu}_i \sin \xi_i + \tilde{E}_i^0 \cos \xi_i.$$

The generators of the group are constructed from the symmetry generators  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)$  by the following rules:

$$(\xi_L = 0) \Rightarrow T_L^1 = F_L^1 + F_L^{13}, \quad T_L^2 = F_L^2 - F_L^{14} = F_L^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_L^8 - \sqrt{\frac{2}{3}} F_L^{15}$$

$$(\phi_R = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow T_R^1 = F_R^4 + F_R^{11}, \quad T_R^2 = F_R^5 - F_R^{15},$$

$$T_R^3 = F_R^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_R^8 - \sqrt{\frac{2}{3}} F_R^{15} \quad (46)$$

$$[T_L^i, T_L^k] = i \epsilon_{ikl} T_L^l; \quad 2Y = Q - (T_{3L} + T_{3R}) = F^0.$$

$$(R) \quad (R) \quad (R)$$

The considered symmetry breaking may be realized, if one demands that for the vacuum expectations of the Higgs fields the following conditions are satisfied:

$$\langle X_L \rangle_0 = \begin{bmatrix} k_L \cos \phi_L & 0 & 0 & k_L \sin \phi_L \\ 0 & -p_L \cos \psi_L & -p_L \sin \psi_L & 0 \\ 0 & -p_L \sin \psi_L & p_L \cos \psi_L & 0 \\ k_L \sin \phi_L & 0 & 0 & -k_L \cos \phi_L \end{bmatrix} \quad \langle X_R \rangle_0 = [L + R] \quad (47)$$

$$\sin \xi_{L(R)} (k_{L(R)} \cos \phi_{L(R)} - p_{L(R)} \cos \psi_{L(R)}) =$$

$$= -\cos \xi_{L(R)} (k_{L(R)} \sin \phi_{L(R)} + p_{L(R)} \sin \psi_{L(R)}),$$

$$\begin{aligned}
& \cos \xi_{L(R)} (k_{L(R)} \cos \phi_{L(R)} + p_{L(R)} \cos \psi_{L(R)}) = \\
& = \sin \xi_{L(R)} (k_{L(R)} \sin \phi_{L(R)} - p_{L(R)} \sin \psi_{L(R)}) \\
& (\text{if } \xi_L = 0, \text{ then } \phi_L = \psi_L + \pi) \quad (\text{if } \xi_R = \frac{\pi}{2}, \text{ then } \phi_R = \psi_R) \\
& \langle \xi_L \rangle_0 = 0 \quad \langle \xi_R \rangle_0 = 0, \quad \langle \phi \rangle = 0
\end{aligned}$$

If use one scalar multiplet  $\chi_L^1$ , which transforms in the adjoint representation at  $\phi_L = 0$ ,  $\psi_L = \pi$ ,  $k_L = p_L$

$$\langle \chi_L^1 \rangle_0 = k_L \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

then the  $SU(4)_L$  group will break to the subgroup  $SU(2)_L \times U(2)_L$ . The gauge bosonic masses corresponding to the group  $SU(4)_L$  are given by the mass number of the Lagrangian

$$\begin{aligned}
L_M = & 2k_L^2 g^2 [ |A_{\mu L}^{4+i5}|^2 + |A_{\mu L}^{11-i12}|^2 ] + 2g^2 k_L^2 [(A_{\mu L}^7)^2 + (A_{\mu L}^7)^2 + \\
& + (A_{\mu L}^9)^2 + (A_{\mu L}^{10})^2 ]. \quad (48)
\end{aligned}$$

The consideration of the second scalar multiplet  $\chi_L^2$  with the only, non-zero, non-diagonal vacuum expectations ( $\psi_L = -\pi/2$ ,  $\phi_L = \pi/2$ ,  $\tilde{k}_L = \tilde{p}_L$ )

$$\langle \chi_L^2 \rangle_0 = \tilde{k}_L \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

leads to an additional cascade symmetry breaking  $SU(2)_L \times U(2)_L$  to the subgroup of interest  $SU^I(2)_L$  with the following additional mass term:

$$\begin{aligned}
L_M = & 2g^2 k_L^2 |A_{\mu L}^{1+i2} - A_{\mu L}^{13-i14}|^2 + 2g^2 k_L^2 |A_{\mu L}^{4+i5} - A_{\mu L}^{11-i12}|^2 + \\
& + g^2 k_L^2 [2(A_{\mu L}^7)^2 + 2(A_{\mu L}^{10})^2 + (A_{\mu L}^3)^2 + \frac{5}{3}(A_{\mu L}^8)^2 + \frac{4}{3}(A_{\mu L}^{15})^2 - \\
& - \frac{2}{\sqrt{3}} A_{\mu L}^3 A_{\mu L}^8 + \frac{4}{\sqrt{6}} A_{\mu L}^3 A_{\mu L}^{15} + \frac{4}{3\sqrt{2}} A_{\mu L}^8 A_{\mu L}^{15} ]. \quad (49)
\end{aligned}$$

For left-handed group  $SU(4)_L$  we consider the case when  $\eta_L = 0$ . In an analogous way one considers the mechanism of the spontaneous breaking of the  $SU(4)_R$  symmetry to  $SU^{II}(2)_R$  at  $\eta_R = \pi/2$  ( $\phi_R = \psi_R$ )

As a result, at a certain stage of the spontaneous symmetry breaking we come to the subgroup of interest, which provides the left-right symmetry of the model, connected with the leptonic permutations  $\nu \leftrightarrow M^0$ . The case of the arbitrary angles  $\eta_L$  and  $\eta_R$ ,  $\eta_L + \eta_R = \pi/2$  is considered quite by analogy.

For further spontaneous symmetry breaking (e.g. through the chain  $SU^L(2)_L \times SU^{II}(2)_R \times U(1) \rightarrow SU^L(2)_L \times U(1) \rightarrow U^0(1)$ ) it is necessary to involve the sets of quartet multiplets of scalar fields. In this model the mass of the right-handed  $W_R$ -boson must not necessarily be increased as compared with the  $W_L$ -boson mass. They may be put equal. But from experiments on neutral currents it is necessary to demand that  $m(Z_R^0) > (2/3)m(Z_L^0)$ , or one must consider the extension of the symmetry group under study to the group  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1) \times U(1)$ .

And, finally, discuss the possibility of breaking of the group  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U^Y(1)$  to  $SU^L(2)_L \times U^U(1)_L \times SU^{II}(2)_R \times U^U(1)_R \times U^Y(1)$ .

The spontaneous breaking of the  $SU(4)_{L(R)}$  group to the subgroup  $SU(2)_{L(R)} \times U^U(1)_{L(R)}$  may be realized by introducing two scalar multiplets into the theory. One of them belongs to the regular representation of the  $SU(4)$  group with the vacuum expectation

$$\langle \chi_{L(R)} \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & k_{L(R)} \\ & k_{L(R)} & k_{L(R)} & k_{L(R)} \\ & k_{L(R)} & k_{L(R)} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

the other one belongs to the antisymmetrical representation  $\psi_{ij}$  of the  $SU(4)$  group. The covariant derivative is given by the expression of the form

$$D_\mu \psi_{ij} = \partial_\mu \psi_{ij} - igw_{\mu i}^1 \psi_{lj} - igw_{\mu j}^1 \psi_{il}, \quad w_\mu = \lambda^\alpha w_\mu^\alpha \quad (51)$$

with the vacuum expectation

$$\langle \psi \rangle_0 = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

The generators of the  $SU^L(2)_L \times U^U(1)_L \times U^U(1)_R$  group are related to the generators of the initial  $SU(4)_{L(R)}$  group through the following rules:

$$\begin{aligned}
T_{L(R)}^1 &= F_{L(R)}^1 + F_{L(R)}^{13}; & T_{L(R)}^2 &= F_{L(R)}^2 - F_{L(R)}^{14} \\
T_{L(R)}^3 &= F_{L(R)}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_{L(R)}^8 - \sqrt{\frac{2}{3}} F_{L(R)}^{15} \\
T_{L(R)}^U &= F_{L(R)}^6 + F_{L(R)}^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[T_{L(R)}^U, T_{L(R)}^i] &\approx 0; \quad Q = T_{3L} + T_{3R} + F^0.
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3.$

With the account for the above-mentioned scalar multiplets, the Lagrangian mass term takes the form

$$\begin{aligned}
L_M &= 16 g^2 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} A_{\mu L}^8 + \frac{1}{\sqrt{6}} A_{\mu L}^{15} \right)^2 - 4 g^2 c^2 (A_{\mu L}^6 - A_{\mu L}^9)^2 - \\
&- 4 g^2 c^2 (A_{\mu L}^7 + A_{\mu L}^{10})^2 + 4 g^2 c^2 (A_{\mu L}^{4-15} + A_{\mu L}^{11+112})^2.
\end{aligned}$$

The subgroups  $U_L^U(1)$  and  $U_R^U(1)$  condition neutral transitions like  $e^i \leftrightarrow E^{10}$ ,  $e^-_i \leftrightarrow E^{i-}$ ,  $\nu^i \leftrightarrow \nu^R_i$ ,  $e^{-i} \leftrightarrow e^{-i}$ ,  $E^0_i \leftrightarrow E^0_i$ ,  $E^-_i \leftrightarrow E^-_i$ . In order to go over to a more general model, it is necessary to take into account possible rotations  $(\alpha_{L,R}, \beta_{L,R})$  in the planes  $(\nu_\mu, M^0)_{L,R}$  and  $(\mu^-, M^-)_{L,R}$ , respectively.

The analysis carried out shows that parity restoration in the framework of quartet models takes place either at the level of the initial gauge  $SU(4)_L \times SU(4)_R$ -symmetry, which corresponds to the effective distance  $r \sim 1/M_0^0$  (where  $M_0 \sim 10^{4-10^3}$  GeV (variant A)), or already at the intermediate stages of the spontaneous symmetry breaking (see fig. 1) there emerge effects connected with the P-parity restoration. In the last case ( $L$ -R)-symmetry at the intermediate stages may be connected (see variants (C,D), (E, F)) with the permutation procedure of ordinary and mirror fermions, and the corresponding energy scales could then be located in the range 100-300 GeV. As a result, the P-parity breaking at low energies ( $E_{CMS} \sim 100$  GeV) is caused by that the masses of mirror quarks and leptons become heavier, as compared to the standard ones.

On the one hand, the possibilities to detect mirror objects obviously depend on the scale of their masses, and on the other hand, they are defined by mixing of the mirror (heavy) and ordinary worlds.

If the mirror world does not mix with the ordinary one, or it does mix, but inessentially, then there must exist stable or long-

living representatives of this world. A situation is possible which would lead to that mirror fermions would turn out to be sterile with respect to ordinary strong and electromagnetic interactions (the example of the two-charge approach), then at least the search for them in weak processes will remain possible. In the given case one cannot but mark out the specific role of neutrino experiments in detecting these objects. Since mirror fermions take part in weak interactions, described by  $SU(4)_L \times SU(4)_R$ -gauge group with the supposed scale  $m(W) \leq 10^4$ , then it seems interesting to look for such objects (in particular, leptons) with comparatively small masses. In particular, thus idea was used in the interpretation of the rare event detected in the "SCAT" chamber  $\nu_\mu + N \rightarrow M^0 \dots M^0 + \mu^- e^+ \nu$  (where  $M^0$  is a mirror partner for a 2 GeV neutrino). To calculate the  $M^0$ -lepton production cross-section, an effective Lagrangian based on the variant (D) was used. As a result, the following ratio is obtained:  $\sigma(\nu_\mu + M^0)/\sigma(\nu_\mu + \mu^-) \sim \frac{\text{tg}^2 \eta}{4} \left( \frac{m^2(W_L)}{m^2(W_R)} \right)^2$ . Note, that

in spite of that  $M^0$ -lepton was assumed to be a mirror one, its production may also be related to mixing in neutrino beam, realized through the neutral (V-A)-transition  $\nu_\mu \rightarrow M^0$ . The  $M^0$ -lepton lifetime depends on the intensity of charged (V+A)- and, maybe, (V-A)-transitions ( $M^0 \rightarrow \mu^-$ ). According to the estimations obtained, it is rather long:  $\tau(M^0) \sim 10^{-12}$  sec. This hypothesis was not experimentally verified, but one should not consider it completely closed. The modern estimations for the electromagnetically charged heavy leptons, according to the data obtained at  $e^+ e^-$  "PETRA" rings, satisfy the estimation  $m(L) \geq 16$  GeV. The upper limits on neutral "heavy" lepton masses are less reliable and depend on the value of mixing with ordinary leptons.

As we have already pointed out, in addition to neutrino experiments and those on  $e^+ e^-$ -annihilation, mirror objects can effectively show themselves up in the physics of rare decays ( $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\mu \rightarrow 3e$ ,  $K^0 \rightarrow \mu^- e^+$ ), as well as in "beam-dump" experiments on measuring the polarization of "direct" charged leptons.

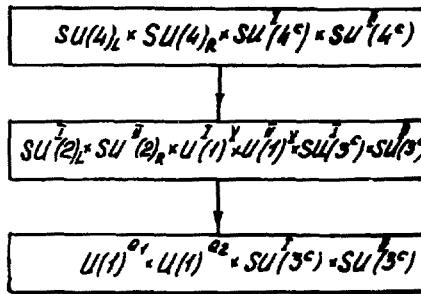
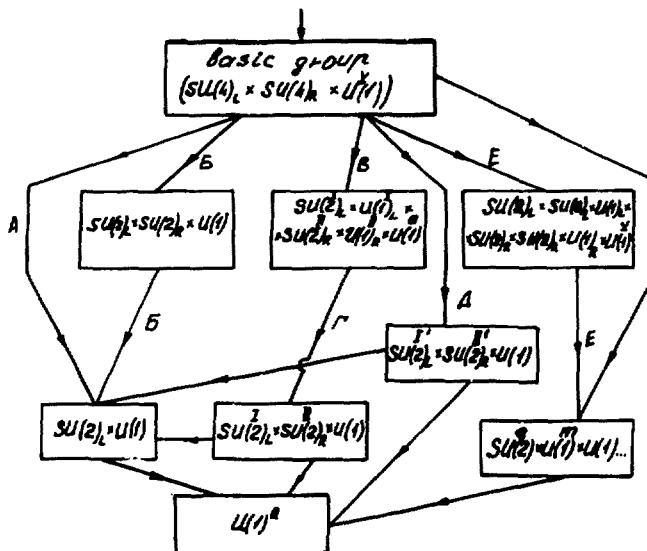


Fig. 1. The chain of gauge symmetry breaking  $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U^Y(1) \times SU^Y(4)^c \times SU^Y(4)^c$ .

### REFERENCES

1. Lee T.D., Yang C.N. - *Phys. Rev.*, 1956, 104, p.254.
2. Kobzarev I.Yu., Okun L.B., Pomeranchuk I.Ya. - *Sov. J. Yad. Fiz.*, 1966, 36, p.1154.
3. Arbuzov B.A., Filippov A.T. - *Physics of High Energies and Elementary Particles*. - "Naukova Dumka", Kiev, 1967, p. 597.
4. Barinov N.U., Volkov G.G. - *Preprint IHEP 76-165*, Serpukhov, 1976; *Sov. J. Yad. Fiz.*, 1978, 2, p.207.
5. Liparteliani A.G., Monich V.A., Nikitin Yu.P., Volkov G.G. - *Proc. Int. Conf. Neutrino 77*, 2, 302 ("Nauka", Moscow 1978); *Sov. J. Yad. Fiz.*, 1978, 27, p.1395.
6. Bilenki S., Petcov S., Pontecorvo B. - *Phys. Lett. B.*, 1977, 67, p.309.
7. Pati J.C., Salam A. - *Phys. Lett. B.*, 1975, 58, p.333.
8. Pati J.C., Salam A., Strathdee J. - *Phys. Lett. B.*, 1981, 108, p.121.
9. Volkov G.G., Nikitin Yu.P., Sokolov A.A. - *Preprint IHEP 76-36*, Serpukhov, 1976.
10. Volkov G.G., Liparteliani A.G., Nikitin Yu.P. - *Preprint IHEP 78-52*, Serpukhov, 1978; *Sov. J. Yad. Fiz.*, 1979, 30, p.728.
11. Okun L.B. - *Letters in JETP*, 1980, 31, p.156; *JETP*, 1980, 79, 694.
12. Pontecorvo B.M. - *Letters in JETP*, 1971, 13, p.281.
13. Bilenki S.M., Pontecorvo B. - *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, 17, p.569.
14. Fritzsch H., Minkowsky P. - *Phys. Lett. B.*, 1976, 62, p.72.
15. Gelmini G.B., Rocandelli M. - *Phys. Lett. B.*, 1981, 99, p.411.
16. Chikashige Y., Mohapatra R.N., Peccei R.D. - *Phys. Lett. B.*, 1981, 98, p.265.
17. Bowman J.D., et al. - *Phys. Rev. Lett.*, 1979, 42, p.566.
18. Korenchenko S.M. et al. - *JETP*, 1975, 70, p.3.
19. Mohapatra R.N. - *Preprint CCNY-IHEP-82/7*, 1982.
20. Mohapatra R.N., Senianovic G. - *Phys. Rev. Lett.*, 1980, 44, p.912.
21. Mohapatra R.N., Marshak R.E. - *Phys. Rev. Lett.*, 1980, 44, 1316.

### Appendix

Here we show the contributions of the vacuum expectation values of scalar fields  $\phi$ ,  $x$ ,  $\eta$  into the mass matrices of gauge fields in the quartet  $SU(4) \times SU(4) \times U(1)_R$ -model of electroweak interactions.

$$M_{ch}^+ \frac{g^2}{4}$$

$A_{\mu L}^{1+i2}$	$A_{\mu R}^{1+i2}$	$A_{\mu L}^{4+i5}$	$A_{\mu R}^{4+i5}$	$A_{\mu L}^{11-i12}$	$A_{\mu R}^{11-i12}$	$A_{\mu L}^{13-i14}$	$A_{\mu R}^{13-i14}$	$A_{\mu L}^{1-i2}$
$a_1^2 + a_2^2$	$-2a_1 a_2$							$A_{\mu L}^{1-i2}$
$-2a_1 a_2$	$a_1^2 + a_2^2$							$A_{\mu R}^{1-i2}$
		$a_1^2 + a_3^2$	$-2a_1 a_3$					$A_{\mu L}^{4-i5}$
		$-2a_1 a_3$	$a_1^2 + a_3^2$					$A_{\mu R}^{4-i5}$
				$a_2^2 + a_4^2$	$-2a_2 a_4$			$A_{\mu L}^{11+i12}$
				$-2a_2 a_4$	$a_2^2 + a_4^2$			$A_{\mu R}^{11+i12}$
						$a_3^2 + a_4^2$	$-2a_3 a_4$	$A_{\mu L}^{13+i14}$
						$-2a_3 a_4$	$a_3^2 + a_4^2$	$A_{\mu R}^{13+i14}$

(1a)

$A_{\mu L}^3$	$A_{\mu R}^3$	$A_{\mu L}^{6-17}$	$A_{\mu R}^{6-17}$	$A_{\mu L}^8$	$A_{\mu R}^8$	$A_{\mu L}^{9-110}$	$A_{\mu R}^{9-110}$	$A_{\mu L}^{15}$	$A_{\mu R}^{15}$	$A_{\mu L}^3$
$a_1^2 + a_2^2$	$-a_1^2 - a_2^2$	0	0	$\frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{6}}$	$A_{\mu L}^3$
$-a_1^2 - a_2^2$	$a_1^2 + a_2^2$	0	0	$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{6}}$	$\frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{6}}$	$A_{\mu R}^3$
0	0	$\frac{a_2^2 + a_3^2}{2}$	$-2a_2 a_3$	0	0	0	0	0	0	$A_{\mu L}^{6+17}$
0	0	$-2a_2 a_3$	$a_2^2 + a_3^2$	0	0	0	0	0	0	$A_{\mu R}^{6+17}$
$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	0	0	$(a_1^2 + a_2^2 + 4a_3^2) \frac{1}{3}$	$-(a_1^2 + a_2^2 + 4a_3^2) \frac{1}{3}$	0	0	$(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2) \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2) \frac{1}{3}$	$A_{\mu L}^8$
$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_2^2 - a_1^2}{\sqrt{3}}$	0	0	$-(a_1^2 + a_2^2 + 4a_3^2) \frac{1}{3}$	$(a_1^2 + a_2^2 + 4a_3^2) \frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2) \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2) \frac{1}{3}$	$A_{\mu R}^8$
0	0	0	0	0	0	$\frac{a_1^2 + a_2^2}{4}$	$-2a_1 a_4$	0	0	$A_{\mu L}^{9+110}$
0	0	0	0	0	0	$-2a_1 a_4$	$\frac{a_1^2 + a_2^2}{4}$	0	0	$A_{\mu R}^{9+110}$
$\frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{6}}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)$	0	0	$\frac{1}{6}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + a_3^2 + 2a_4^2)$	$-\frac{1}{6}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + a_3^2 + 2a_4^2)$	$A_{\mu L}^{15}$
$-\frac{a_1^2 + a_2^2}{\sqrt{6}}$	$\frac{a_1^2 - a_2^2}{\sqrt{6}}$	0	0	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}(a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)$	0	0	$-\frac{1}{6}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + a_3^2 + 2a_4^2)$	$\frac{1}{6}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + a_3^2 + 2a_4^2)$	$A_{\mu R}^{15}$

 $M_\phi^2 g^2$  $N^{-4}$

$$M_{ch} \frac{g^2}{4}$$

$A_\mu^{1-12}$	$A_\mu^{4-15}$	$A_\mu^{11+i12}$	$A_\mu^{13+i14}$	
$x^2$	$xy$	0	0	$A_\mu^{1+i2}$
$xy$	$y^2$	0	0	$A_\mu^{4+i5}$
0	0	$x^2$	$xy$	$A_\mu^{11-i12}$
0	0	$xy$	$y^2$	$A_\mu^{13-i14}$

(3a)

$$M_{ch} \frac{g^2}{4}$$

$A_\mu^{1+i2}$	$A_\mu^{4+i5}$	$A_\mu^{11-i12}$	$A_\mu^{13-i14}$	
$(\beta - \alpha)^2 + u^2 + v^2$	$u(\beta + y - \alpha)$	$v(\alpha + \delta - \beta)$	$-2uv$	$A_\mu^{1-i2}$
$u(\beta + y - \alpha)$	$(\alpha - y)^2 + u^2 + v^2$	$-2uv$	$v(\alpha + \delta - y)$	$A_\mu^{4-i5}$
$v(\alpha + \delta - \beta)$	$-2uv$	$(\beta - \delta)^2 + u^2 + v^2$	$u(\beta + y - \delta)$	$A_\mu^{11+i12}$
$-2uv$	$v(\alpha + \delta - y)$	$u(\beta + y - \delta)$	$(y - \delta)^2 + u^2 + v^2$	$A_\mu^{13+i14}$

(4a)

$A_{L\mu}^0$	$A_{L\mu}^3$	$A_{L\mu}^8$	$A_{L\mu}^{6-17}$	$A_{L\mu}^{15}$	$A_{R\mu}^3$	$A_{R\mu}^8$	$A_{R\mu}^{6-17}$	$A_{R\mu}^{15}$	$A_{\mu L}^0$
$\frac{g_0^2}{4}(x_L^2 + y_L^2 + x_R^2 + y_R^2)$	$\frac{g_0 g}{\sqrt{3}}(y_L^2 - x_L^2/2)$	$\frac{g_0 g}{2}x_L y_L$	$\frac{g_0 g}{2}x_L y_L$	$\frac{g_0 g}{2\sqrt{6}}(x_L^2 + y_L^2)$	$\frac{g_0 g x_R^2}{2}$	$\frac{g_0 g}{\sqrt{3}}(y_R^2 - x_R^2/2)$	$\frac{g_0 g}{2}x_R y_R$	$-\frac{g_0 g}{2\sqrt{6}}(x_R^2 + y_R^2)$	$A_{\mu L}^0$
$\frac{g_0 g}{2}x_L y_L$	$\frac{g^2 x_L^2}{4}$	$-\frac{g^2 x_L^2}{2\sqrt{3}}$	$\frac{g^2 x_L y_L}{4}$	$-\frac{g^2 x_L^2}{2\sqrt{6}}$	0	0	0	0	$A_{\mu L}^3$
$-\frac{g_0 g}{\sqrt{3}}(y_L^2 - x_L^2/2)$	$-\frac{g^2 x_L}{2\sqrt{3}}$	$\frac{g^2}{3}(y_L^2 + x_L^2/2)$	$-\frac{g^2 x_L y_L}{\sqrt{3}}$	$\frac{g^2(x_L^2 - y_L^2)}{3\sqrt{2}}$	0	0	0	0	$A_{\mu L}^8$
$-\frac{g_0 g x_L y_L}{2\sqrt{3}}$	$\frac{g^2}{4}x_L y_L$	$-\frac{g^2 x_L y_L}{\sqrt{3}}$	$\frac{g^2(x_L^2 + y_L^2)}{4}$	$-\frac{g^2 x_L y_L}{2}$	0	0	0	0	$A_{\mu L}^{6+17}$
$-\frac{g_0 g}{2\sqrt{6}}(x_L^2 + y_L^2)$	$-\frac{g^2 x_L^2}{2\sqrt{6}}$	$\frac{g^2}{3\sqrt{2}}(x_L^2 - y_L^2/2)$	$-\frac{g^2 x_L y_L}{2\sqrt{6}}$	$\frac{g^2(x_L^2 + y_L^2)}{24}$	0	0	0	0	$A_{\mu L}^{15}$
$\frac{g_0 g x_R^2}{2}$	0	0	0	0	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$A_{\mu R}^3$
$\frac{g_0 g}{\sqrt{3}}(y_R^2 - x_R^2/2)$	0	0	0	0	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$A_{\mu R}^8$
$-\frac{g_0 g x_R y_R}{2}$	0	0	0	0	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$A_{\mu R}^{6+17}$
$-\frac{g_0 g}{2\sqrt{6}}(x_R^2 + y_R^2)$	0	0	0	0	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$L \rightarrow R$	$A_{\mu R}^{15}$

(5a)

$A_{\mu}^3$	$A_{\mu}^8$	$A_{\mu}^{15}$	$A_{\mu}^6$	$A_{\mu}^7$	$A_{\mu}^9$	$A_{\mu}^{10}$	$A_{\mu}^3$
$2(u^2+v^2)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}(v^2) -$ $-2\sqrt{3}u^2$	$\frac{8}{\sqrt{6}}v^2$	$-2u(\gamma-\beta)$	0	$-2v(\alpha-\delta)$	0	$A_{\mu}^8$
$\frac{2}{\sqrt{3}}v^2 -$ $-2\sqrt{3}u^2$	$\frac{2}{3}v^2+6u^2$	$\frac{8}{3\sqrt{2}}v^2$	$-\frac{6u}{\sqrt{3}}(\beta-\gamma)$	0	$-\frac{2}{\sqrt{3}}v(\alpha-\delta)$	0	$A_{\mu}^{15}$
$\frac{8}{\sqrt{6}}v^2$	$\frac{8}{3\sqrt{2}}v^2$	$\frac{16}{3}v^2$	0	0	$\frac{8}{\sqrt{6}}v(\alpha-\delta)$	0	$A_{\mu}^6$
$M_N^{X(L, R)} = \frac{g^2}{4}$	$-2u(\gamma-\beta)$	$\frac{6}{\sqrt{3}}u(\beta-\gamma)$	0	$2(\beta-\gamma)^2$	0	0	$A_{\mu}^7$
0	0	0	0	$8u^2 +$ $+2(\beta-\gamma)^2$	0	0	$A_{\mu}^9$
$-2v(\gamma-\beta)$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}v(\alpha-\delta)$	$\frac{8\gamma}{\sqrt{6}}(\alpha-\delta)$	0	0	$2(\alpha-\delta)^2$	0	$A_{\mu}^{10}$
0	0	0	0	0	0	$8v^2 +$ $+2(\alpha-\delta)^2$	

(6a)

## СПИСОК УЧАСТНИКОВ СЕМИНАРА

### ИФВЭ

1. Логунов А.А.
2. Соловьев Л.Д.
3. Тюрик Н.Е.
4. Саврин В.И.
5. Арбузов Б.А.
6. Герштейн С.С.
7. Мествяриашвили М.А.
8. Савельев М.В.
9. Соколов С.Н.
10. Хрусталев О.А.
11. Алексеев А.И.
12. Архипов А.А.
13. Бажанов В.В.
14. Бабаев З.Р.
15. Ежела В.В.
16. Зиновьев Ю.М.
17. Киселев А.В.
18. Клименко К.Г.
19. Лезнов А.Н.
20. Лихолед А.К.
21. Липартелиани А.Г.
22. Оксак А.И.
23. Петров В.А.
24. Пирогов Ю.Ф.
25. Пронько Г.П.
26. Разумов А.В.
27. Рочев В.Е.
28. Рчеулиашвили Г.Л.
29. Самокин А.П.
30. Соловьев В.О.
31. Сторчах С.Н.
32. Тихонкин Ф.С.
33. Толстенков А.Н.
34. Трошик С.М.
35. Хрушев В.В.
36. Щелкачев А.В.
37. Волков Г.Г.
38. Строганов Ю.Г.

### ОИЯИ

39. Волков М.К.
40. Черников Н.А.
41. Барбашов Б.М.
42. Радюшкин А.В.
43. Первушин В.В.
44. Ефимов Г.З.
45. Кадышевский В.Г.

### ИЯИ АН СССР

46. Боголюбов Н.Н.
47. Вернов Ю.С.
48. Красников Н.В.
49. Матвеев В.А.
50. Тавхелидзе А.Н.

### МИ АН ГССР

51. Гарсеванишвили В.Р.

### ИФ АН АзССР

52. Атакишиев Н.М.

### ИТФ АН УССР

53. Енковский Л.Л.
54. Зиновьев Г.М.
55. Мирзакский В.А.

### СО ГУ

56. Ломсадзе Ю.М.
- СО АН СССР, г. Иркутск

57. Валл А.Н.

### СГУ

58. Тюхтяев Ю.Н.

### АзГУ

59. Садыхов Ф.С.

### ИФ АН БССР

60. Богуш А.А.
61. Стражев В.И.
62. Толкачев Е.А.

НИИЯФ МГУ

63. Замиралов В.С.

64. Курбатов А.Ф.

65. Мнацаканов М.Н.

ХФТИ

66. Ткач В.И.

ИТЭФ

67. Кайдалов А.Б.

68. Лебедев Д.Р.

69. Мекеенко Ю.М.

70. Тер-Мартиросян К.А.

ФИАН

71. Марков М.А.

72. Лебедев А.А.

73. Файнберг В.Я.

74. Говорков Б.Б.

75. Манько В.И.

76. Скаржинский В.Д.

77. Лалькаров О.Д.

78. Киржниц Д.А.

79. Воронов Б.Л.

80. Фролов В.П.

ГГУ

81. Капшай В.Н.

82. Линкевич А.Д.

НИИФ ЛГУ

83. Андриаков А.А.

84. Новожилов Ю.В.

ИАЭ

85. Кузнецов Г.И.

86. Смородинский Я.А.

МГУ

87. Власов А.А.

88. Дорофеев О.Ф.

89. Лоскутов Ю.М.

90. Славнов Д.А.

91. Жуковский В.Ч.

92. Родионов В.Н.

93. Борисов А.В.

94. Торосян Г.Т.

ВНИЦПВ

95. Шелест В.П.

96. Фаустов Р.Н.

97. Федосеев И.А.

ИМ СО АН СССР

98. Серебряков В.В.

УДН

99. Гордеев А.Н.

ИППММ

100. Гайда Р.П.

ИГУ

101. Парфенов Ю.В.

Карельский филиал АН СССР

102. Лейтес Д.А.

ГПИ

103. Соловцов И.Л.

МИРЭА

104. Вшивцов А.С.

НИИФВЭ ТГУ

105. Ткебучава Ф.Г.

106. Вашакидзе Ш.И.

107. Маргвелашвили П.И.

108. Слепченко Л.А.

ИТФ АН СССР

109. Николаев Н.Н.

ВНИИЭМ

110. Коноплева Н.П.

Иностранные участники семинара

111. Дюрр Г.-П. (ФРГ)

112. Мансфрид П. (Дания)

113. Мавродиев С.Ш. (НРБ)

114. Илчев А. (НРБ)

115. Эберт Д. (ГДР)

116. Винцек Э. (ГДР)

117. Физиев П.Л. (НРБ)

## СОДЕРЖАНИЕ

А.А.Логунов, М.А.Мествишили Эквивалентность тензоров энергии-импульса Гильберта и Белинфанте	3
Н.В.Красников Являются ли монополи неизбежным следствием теорий большого объединения?	44
В.П.Фролов, А.Н.Зельников Поляризация вакуума массивных полей в пространстве-времени вращающейся черной дыры	48
V.V.Bazhanov, Yu.G.Stroganov On Connection Between the Solutions of the Quantum and Classical Triangle Equations	51
Г.П.Пронько Метод обратной задачи рассеяния для релятивистской струны	54
А.В.Радюшкин Правила сумм и эксклюзивные процессы в квантовой хромодинамике	69
Н.В.Красников Треугольная аномалия при конечной температуре в КХД	87
А.В.Kiselev, V.A.Petkov Average Multiplicities in Deep Inelastic Processes and Their Interpretation	91
Н.Е.Нюнько, Ю.Н.Тюхтаев, Р.Н.Фаустов Сверхтонкое расщепление основного уровня позитрония с точностью до $a^6 \ln a$	104
Н.А.Бойкова, Ю.Н.Тюхтаев, Р.Н.Фаустов Поправки к сверхтонкому расщеплению основного уровня мюония относительного порядка $\frac{m_e}{m_\mu} a^2 \ln a$	116
N.P.Ilieva, V.N.Pervushin Quantum Effects in the Schwinger Model	128
Ю.В.Новожилов Калибровочная инвариантность и состояния в пространстве Фока	141
В.А.Миранский Критическая константа связи в проблеме спонтанного нарушения хиральной симметрии в квантовой хромодинамике	154

Р.П.Гайда, Ю.Б.Ключковский, В.И.Третяк О сложении взаимодействий в квазирелятивистской механике системы частиц	164
Р.П.Гайда, А.А.Дувиряк, Ю.Б.Ключковский Мгновенная форма релятивистских уравнений движения в одной модели формализма сингулярных лагранжианов	176
Ш.С.Агаев и др. Термодинамический потенциал неабелевой плазмы в постоянных калибровочных полях	188
В.Ч.Жуковский, И.Б.Морозов Квазиклассическая картина вакуумных эффектов в калибровочных теориях	200
В.Ч.Жуковский, И.Б.Морозов, А.В.Борисов Радиационный сдвиг массы фермиона во внешнем хромомагнитном поле	212
М.Л.Некрасов, В.Е.Рочев Об инфракрасной асимптотике кваркового пропагатора в свето- подобной калибровке	218
A.V.Kulikov, V.E.Rochev Summation of Leading Logarithms for Four-Fermion Interaction and Composite Vector Boson	232
М.К.Волков Мезонные лагранжианы в моделях с четырехкварковыми взаимо- действиями и распады мезонов	243
A.A.Andrianov, L.Bonora Anomalies in Local Conservation Laws for Axial Currents (A Functional Approach)	269
Д.Крупа, В.А.Мещеряков, Ю.С.Суровцев Анализ природы скалярных мезонов с помощью униформизующей переменной	281
Ф.С.Садыхов, А.И.Мухтаров, С.К.Абдуллаев Поляризационные эффекты в процес сах прямого и обратного электро- рождения бозонов на нуклонах в КХД	294
А.Н.Лезнов, В.В.Хрущев О возможной структуре хиггсовского сектора в $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ - модели электрослабых взаимодействий	308
В.Д.Скаржинский, В.П.Фролов Эффект Ааронова-Бома: как процедура включения магнитного поля помогает его понять?	309

И.М.Тернов, В.Н.Родионов, О.Ф.Дорофеев Индущирсванный ядерный $\beta$ -распад в интенсивном электромагнитном поле	323
Yu.A.Gnedov, K.G.Klimenko, F.Y.Tikhonin On Radiative Detection of Neutral Particles Produced in $e^+e^-$ -Collisions	337
G.G.Volkov et al. Mirror Fermions in the Problem of P-Parity Violation in Weak Interaction	346
Список участников семинара	377

Рукопись поступила в издательскую группу 8 сентября 1983 г.

**Труды VI Международного семинара "Проблемы физики высоких  
энергий и квантовой теории поля".**

Ответственный за выпуск С.Н.Соколов.

Редактор М.Л.Фоломешкина. Технический редактор Л.П.Тимкина.  
Корректоры: М.И.Онегина, Л.Н.Горина

Подписано к печати 23.09.83. Т-12891. Формат 70x100/16.  
Офсетная печать. Индекс 3624. Цена 3 руб. 34 коп.  
Заказ 3012. 22,24 уч.-изд.л. Тираж 290.

Институт физики высоких энергий, 142284,  
Серпухов, Московской обл.