Local state, sector theory and measurement in AQFT

京都大学　数理解析研究所,
名古屋大学　情報科学研究科　 岡村 和弥 [1]

1　導入

量子論において，状態概念は物理量代数の双対概念として物理的状況・実験設定を指定するために欠かすことのできない役割を果たしている。状態の違いは物理的状況・実験設定の違いであり，そのマクロに見た質的な差をセクターとして様々な測定過程を介して確率論的に捉えるのである。しかしながら，状態の指定それ自体が非常に難しい作業であり，物理的にも数学的にも理想化が入らざるを得ないのも事実である。とはいえ，相対論的場の量子論において全時空領域にわたる状態の指定など (理想化せずには) 到底不可能であるし，そもそも，状態変化の記述を物理的に現実的な形で実現できるとは考えづらい。それ故，本稿では場の量子論の文脈において状態概念をより融通のきく形式で整備し，それをセクター理論および測定理論と結びつけて議論する。この一環で定義される概念が「局所状態 (local state)」であり，有界時空領域では状態の機能を持ちながら全時空領域においては量子操作 (quantum operation) として理解すべき概念である。

本稿の一部の内容は幾つかの報告集の記事 (特に過去の RIMS 講究録) とも重複しているため，重複する内容（特に次章の準備）については簡潔な記述にとどめる。尚，小嶋泉氏との共著 [25] (発展的内容は [22] 参照) には本格的かつ体系的に量子論の新しい定式化についてまとめられており，本稿に関連する作用素環論の詳細事項については [5, 35, 36] を参照していただきたい。

2　準備：量子論の代数的定式化とセクター概念

$\mathcal{X}$ が C*-代数とする。ω は $\mathcal{X}$ 上の線型汎関数であって，$\omega(A^*A) \geq 0$ および $\omega(1) = 1$ を満たすとき $\mathcal{X}$ 上の状態であると呼ばれる。$E_{\mathcal{X}}$ で $\mathcal{X}$ 上の状態全体を表す。状態とは，非可換代数上に一般化された期待値を与える汎関数 (期待値汎関数) である。C*-代数 $\mathcal{X}$ とその上の状態 ω の組 $(\mathcal{X}, \omega)$ を C*-確率空間と呼ぶ。

公理 1 (物理量と状態 [26, 25])**.** 物理系の物理量のなす代数は C^*-代数 $\mathcal{X}$ によって与えられる。そして，物理系の実験設定・測定状況は $\mathcal{X}$ 上の状態 ω を与えることに指定される。

C^*-代数 $\mathcal{X}$ の状態空間 $E_{\mathcal{X}}$ には次のような近傍から生成される位相が導入される：任意の $A_i \in \mathcal{X}$, $\varepsilon_i > 0$（$i = 1, 2, \cdots, n$）に対し，

$$O_\omega(\{A_i, \varepsilon_i\}_{i=1}^n) = \{\omega' \in E_{\mathcal{X}} \mid |\omega(A_i) - \omega'(A_i)| < \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

この位相は有限個の量を有限精度で測る状況に対応したものである。任意の $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\omega$, 単位ベクトル $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{X}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\omega)$ への表現（対合を保つ

[1]連絡先 okamura@math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

準同型写像のこと）π_ω で $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle$ および $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たす 3 つ組 $\{\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega\}$ を $\mathcal{X}$ の ω に伴う GNS 表現と呼ぶ (GNS 表現定理)。GNS 表現は各状態に対してユニタリー同値を除いて一意に定まる。$S \subset \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対し，

$$S' = \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mid AB = BA, B \in S\} \tag{1}$$

を S の可換子と呼ぶ。$S'' := (S')'$ を S の再可換子と呼ぶ。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の *-部分代数 $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ を満たすものを（$\mathcal{H}$ 上の）von Neumann 代数と呼ぶ。$\pi_\omega(\mathcal{X})''$ は状態 ω において生成される自然な（$\mathcal{H}_\omega$ 上の）von Neumann 代数である。

定義 1 (セクター [19])**.** 因子状態の準同値類をセクターと呼び，その全体 $F_\mathcal{X}/\approx$ を $\widehat{\mathcal{X}}$ で表す。

セクターはマクロに見て異なる構造の分類指標の一単位である。一般化された熱力学的純粋相および確率論での根源事象の統合概念であって，ミクロから創発する動的な背景を持ちながら熱力学的な安定性に支えられており，マクロの基本単位であってミクロな内部構造も持ち合わせている。

以下ではセクターの定義に用いた用語の説明を行う。$\omega \in E_\mathcal{X}$ は，対応する von Neumann 代数 $\pi_\omega(\mathcal{X})''$ の中心が自明，すなわち，$\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) := \pi_\omega(\mathcal{X})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{X})' = \mathbb{C}1$ のとき，因子状態であると呼ばれる。$\mathcal{X}$ 上の因子状態全体を $F_\mathcal{X}$ で表す。$\mathcal{X}$ の 2 つの表現 π_1, π_2 はどの π_1-正規状態 [2] も π_2-正規であり，その逆も成立するとき準同値であるといい，$\pi_1 \approx \pi_2$ で表す。$\mathcal{X}$ の 2 つの表現 π_1, π_2 は，どの π_1-正規状態も π_2-正規でなく，その逆も成立するとき無縁であるといい，$\pi_1 \between \pi_2$ で表す。正値線型汎関数に対しても GNS 表現を用いて同様に定義される。本稿で与えたセクターの定義の根拠が次の定理にある。

定理 2. *2 つの因子状態は準同値であるか，無縁であるかの二者択一である。*

セクターの定義から次は容易に了解される：

$$\text{同一のセクターに属する} \Rightarrow \text{準同値}, \qquad \text{異なるセクターに属する} \Rightarrow \text{無縁}$$

状態空間 $E_\mathcal{X}$ は先ほどの位相でコンパクト局所凸空間である。それ故，Choquet の積分論が適用可能で，各 $\omega \in E_\mathcal{X}$ に対し，ω を重心にもつ $(E_\mathcal{X}, \mathcal{B}(E_\mathcal{X}))$ 上の正則 Borel 確率測度が存在する。無縁性が状態識別の基準であるという立場から状態の積分分解について議論しよう [3]：

定義 3 (準中心測度＝無縁な分解を与える測度)**.** $(E_\mathcal{X}, \mathcal{B}(E_\mathcal{X}))$ 上の正則 Borel 確率測度 μ が準中心測度であるとは次の性質を満たすときをいう：任意の $\Delta \in \mathcal{B}(E_\mathcal{X})$ に対して，

$$\int_\Delta d\mu(\rho)\, \rho \;\between\; \int_{E_\mathcal{X} \setminus \Delta} d\mu(\rho)\, \rho. \tag{2}$$

[2](1) von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上の状態 ω は任意の正の有界増大ネット $A_\alpha \nearrow A$ に対し，$\lim_\alpha \omega(A_\alpha) = \omega(A)$ を満たすとき正規状態という。$\mathcal{M}_{*,1}$ で $\mathcal{M}$ 上の正規状態全体を表す。
(2) $\mathcal{X}$ を C^*-代数，π を $\mathcal{X}$ の表現とする。$\omega \in E_\mathcal{X}$ が π-正規であるとは，$\pi(\mathcal{X})''$ 上の正規状態 ρ が存在して，$\omega(X) = \rho(\pi(X))$, $X \in \mathcal{X}$ を満たすことをいう。

[3]「直交性」の概念を出発点とする状態の積分分解については 5 章と比較の上で [5, 24, 25] 等を参照して頂きたい。

無縁な分解を与える測度を準中心測度と呼ぶ理由については次の定理が明確な解答を与える：

定理 4 (冨田分解定理 [5, Theorem 4.1.25] の系)**.** (1) ω の準中心測度 μ と中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ の von Neumann 部分代数 $\mathfrak{B}$ は一対一対応する。μ, $\mathfrak{B}$ にこの対応があるとき，$L^\infty(\mu) := L^\infty(E_\mathcal{X}, \mu)$ は次で定義される写像 $\kappa_\mu : L^\infty(\mu) \to \mathfrak{B}$ により $\mathfrak{B}$ と *-同型である：

$$\langle \Omega_\omega | \kappa_\mu(f) \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle = \int d\mu(\rho)\ f(\rho)\ \rho(X). \tag{3}$$

(2) 状態 ω において，中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ に対応する準中心測度 μ_ω（ω の中心測度と呼ぶ）は $F_\mathcal{X}$ に準台をもつ。$\mathcal{X}$ が可分ならば，μ_ω は $F_\mathcal{X}$ に台をもつ。

中心の von Neumann 部分代数の包含関係で大きい代数であればあるほど，対応する準中心測度はより細かい積分分解を与える。その中でも中心測度は最大であって，各状態に対し一意に存在する。それ故に，因子状態を状態の基本単位にする。言い換えれば，中心測度は $F_\mathcal{X}$ に準台をもち，中心測度は状態をセクターへと分解する唯一の重心測度である。物理的には，中心測度が中心に対応した状態の積分分解を与える確率測度であることから了解されるように，中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ はあらゆる物理量 ($\pi_\omega(\mathcal{X})''$ の元) と可換な物理量の極大系であって，これを用いることによりこの状態 (およびその GNS 表現) を用いて指定できる限りの実験 (測定) 状況で共通のパラメータで状態を分解できるということを意味している。準中心分解とはこの観点から中心測度より“粗い”分解であり，ある程度セクターを“束”にしてまとめて扱う場合に対応している。

公理 2 (セクターと確率空間 [26, 25])**.** $\mathcal{X}$ を系の物理量代数とする。状態空間のマクロな基本単位はセクターによって与えられ，系の状態が $\omega \in E_\mathcal{X}$ であるときに $\Delta \in \mathcal{B}(E_\mathcal{X})$ に属するセクターが出現する確率は $\mu_\omega(\Delta)$ で与えられる。

この公理を認めることで先の議論を測度論的確率論の現実的な状況 (測定過程等) へと応用可能になる [25, 26]。統計学的な議論の展開については [23, 24, 27] を参照して頂きたい。

3　代数的場の量子論の基本事項

代数的場の量子論 [1, 16] とは端的に言って，

「時空自由度に依存した量子系を扱う理論体系」への代数的アプローチ

である。場の量子論の数学的基盤が未だ出来上がっていないため，この手法（の一般に提示されるような一辺倒なあり方）だけでは限界があるのだが，von Neumann が量子論の数学的基礎の追究という動機を持って作用素環の研究を始めたことから歴史的には自然な研究手法であって（von Neumann 以後の歴史的な経緯は私には荷が重いため省く），そのため，荒木先生と Haag-Kastler による提唱に必然性はあったと思っており，私個人としても有望だと考えている。

局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ とは，Minkowski 空間 M_4 の二重錐の集合 $\mathcal{K} = \{\mathcal{O} = (a + V_+) \cap (b - V_+) \mid a, b \in M_4\}$　($V_+ = \{x \in M_4 \mid x^2 = x_0^2 - \sum_{j=1}^3 x_i^2 > 0, x_0 > 0\}$ は M_4 の前方光錐) から C*-代数への写像（正しくは圏論における函手）$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ であって，以下の 3 条件を満たすものである：

1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ ならば，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$；

2) $\mathcal{K}$ の元 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が空間的であるとき，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ の任意の元と $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ の任意の元は互いに可換である。ここで，2 つの時空領域 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が空間的であるとは，一方の領域 $\mathcal{O}_1$ の因果的補集合 $\mathcal{O}_1' = \{x \in M_4 \mid (x-y)^2 < 0, y \in \mathcal{O}_1\}$ に対し $\mathcal{O}_1' \supset \mathcal{O}_2$ を満たすときをいう；

$\mathcal{A} := \overline{\cup_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}\mathcal{A}(\mathcal{O})}$ は全ての局所ネットから生成される最小の C*-代数である。また，$Aut(\mathcal{A})$ で $\mathcal{A}$ 上の *-自己同型写像全体を表す。

3) Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ の作用 (*-準同型) $\alpha_g : \mathcal{P}_+^{\uparrow} \to Aut(\mathcal{A})$, $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$, に対して共変である，すなわち，$\alpha_g(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(g\mathcal{O})$ が任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ と $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$ に対して成り立つ。

この抽象的な定義の物理的動機は有界な時空領域において測定可能な物理量の全体を指定することで物理系を特徴づけることを第一に，因果的制約および相対論的制約を加味したものである。言い換えるならば，定義からして明示的なのだが，局所ネットは時空自由度に依存しているため，考察対象の物理系と接する（外部）系と対比が可能となるようなマクロなスケールで自然な条件を課している。場の量子論とはミクロとマクロの対比から系の動力学を探り記述する物理体系であると言える。

代数的量子論の記述形式に則れば，系の状態を指定する必要がある。代数的場の量子論において基準となる状態があり，その代表格が「真空状態」である。ω_0 が真空状態であるとは，ω_0 は $\mathcal{A}$ 上の状態であって以下の 3 条件を満たすことを言う：

A) ω_0 は $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$-不変状態である，すなわち，任意の $A \in \mathcal{A}$ および $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$ に対して

$$\omega_0(\alpha_g(A)) = \omega_0(A); \tag{4}$$

この条件から ω_0 に対する GNS 表現 $(\pi_0, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$ において α_g はユニタリー実現する：任意の $A \in \mathcal{A}$ および $g \in \mathcal{P}_+^{\uparrow}$ に対して

$$\pi_0(\alpha_g(A)) = U_g \pi_0(A) U_g^*. \tag{5}$$

加えて，このユニタリー表現は $U_g\Omega = \Omega$ を満たす。この U_g を用いることで続く条件が記述できる：

B) Poincaré 群 $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ の並進部分群 $\mathbb{R}^4$ に関する U_g の生成子 $P = (P_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ のスペクトルは閉前方光錐 $\overline{V_+} = \{x \in M_4 \mid x^2 = x_0^2 - \sum_{j=1}^3 x_i^2 \geq 0, x_0 \geq 0\}$ に含まれる；

C) 任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ に対して，Ω_0 は $\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$ に対する巡回分離ベクトルである；

A) は時空に関する一様性，**B)** は最低エネルギーの存在と粒子的振舞いをする励起の存在に関する条件である。**C)** は Reeh-Schlieder 定理から得られる性質で，真空表現における表現空間が局所ネットにより生成および分離されるという特筆すべき特徴である。物理的状況・実験設定の記述には本来全時空にわたる物理量代数 $\mathcal{A}$ 上の状態を指定することなど到底不可能であるが，一種の理想化・極限として想定することは可能であり，そのような位置づけの下に採用される状態である。この状態を基準として，与えられた局所ネット

$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$ において物理的な励起を記述する状態を考察する理論が DHR(Doplicher-Haag-Roberts) 理論である。

本稿では今後，真空状態 ω_0 に対する GNS 表現は可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}_0$ 上の忠実 ($\ker(\pi_0)=\{0\}$) な既約表現であることを仮定する。加えて，以下の 2 つ条件件を課す：

1 (Haag 双対性). 非有界な時空領域 $\tilde{O}$ に対して $\mathcal{A}(\tilde{O})=\overline{\cup_{\mathcal{O}\subset\tilde{O},\mathcal{O}\in\mathcal{K}}\mathcal{A}(\mathcal{O})}$ と定義する。任意の 2 重錐 $\mathcal{O}$ に対して，$\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''=\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}'))'$ が成り立つとき，局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$ は Haag 双対性を満たすという。

2 (性質 B). $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ の内部に含まれる時空領域とするとき，任意の射影作用素 $E\in\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ に対し，$W^*W=E, WW^*=1$ を満たす $W\in\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ が存在する。

Haag 双対性は局所ネットが因果的部分順序集合 (causal partially ordered set) として因果的完備 (causally complete) であるという要求であり，性質 B は III 型 W*-代数のもつ特徴を物理的に読み換えたものである。性質 B は Borchers により Poincaré 群作用のユニタリー実現可能性，4 元運動量のスペクトルの正値性の仮定から導出された。

$\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2\in\mathcal{K}$ に対して，$\overline{\mathcal{O}_1}\subsetneq\mathcal{O}_2$ ならば $\mathcal{O}_1\Subset\mathcal{O}_2$ と表す。以下の集合を導入する：

$$\mathcal{K}_{\Subset}=\{\Lambda=(\mathcal{O}_1^{\Lambda},\mathcal{O}_2^{\Lambda})\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}\mid\mathcal{O}_1\Subset\mathcal{O}_2\},\tag{6}$$

$$\mathcal{K}_{\Subset}^{DC}=\{\Lambda=(\mathcal{O}_1^{\Lambda},\mathcal{O}_2^{\Lambda})\in\mathcal{K}_{\Subset}\mid\mathcal{O}_1^{\Lambda}\text{ と }\mathcal{O}_2^{\Lambda}\text{ は 2 重錐 }\}.\tag{7}$$

4 分裂性質と局所状態

局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$ を考察する限り，各 $\mathcal{O}\in\mathcal{K}$ における物理量代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ 上の正規状態 $\mathcal{A}(\mathcal{O})_{*,1}$ を考察する行為自体は大変自然である。この考え方の延長上で $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})_*|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$ のもつ前層構造に着目し，$\mathcal{A}(\mathcal{O})_*$ の貼り合わせにより，考察している有界時空領域における状態の指定を行う発想がある [14, 17]。けれども，貼り合わせにおいて同値関係を入れているために局所的に状態を指定しただけでは $\mathcal{A}$ 上の状態は決まらず，全時空領域を被覆するように各 $\mathcal{O}\in\mathcal{K}$ における $\mathcal{A}(\mathcal{O})_{*,1}$ の元を指定しなければならない[4]。しかし，そのことと $E_{\mathcal{A}}$ の局所正規 (locally normal) な元の指定とは物理的にほぼ等価である。それ故，$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})_*|\mathcal{O}\in\mathcal{K}\}$ のもつ前層構造の物理的解釈とも整合的な利用方法を考えなければならない。新しい方向性を考えるうえで次の性質に着目したいと思う：

定義 5 (分裂性質)**.** $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ を局所ネットとする。$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ は任意の $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2\in\mathcal{K}$ で $\overline{\mathcal{O}_1}\subsetneq\mathcal{O}_2$ を満たすものに対して I 型因子環 $\mathcal{N}$ で $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)\subset\mathcal{N}\subset\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$. を満たすものが存在するとき分裂性質 (*split property*) を満たすという。

[4] 誤解が生じないよう，コメントをつけておきたい。本稿では未だ関係が見いだせていないが，前双対のなす前層構造を考察する利点は時空 1 点 $x\in M_4$ での状態を芽 (germ) として扱えることにある [17]。[17] で議論されているようにこの観点と演算子積展開 (operator product expansion, OPE) は大変結びつきが強い。この議論を受けて，Bostelmann[4] では (分裂性質より強い) 核型条件に似た条件と 1 点上で定義された量子場との関係が見出された上で OPE が数学的に厳密に正当化され，Buchholz-Ojima-Roos[3] では (熱的な非平衡状態の定義・特徴づけの目的で) 時空 1 点における物理量が議論された。したがって，前双対のなす前層構造の利用は大変有益かつ有用であることは間違いないものであり，あくまで直観的なレベルでは正しいことでも修正が必要な場合があることと (当然ではあるが) 万能でない点をここでは指摘しただけにすぎない。そして，その修正の新たな方向性が本稿の主題である「局所状態」なのである。

この性質の重要性をいち早く見抜いたのは [6] である。性質 B・既約性等の条件のもとで真空表現 π_0 において分裂性質を満たすことと等価な条件が知られている：

定理 6 (Werner[38]+D'Antoni-Longo[7])**.** 次の 3 条件は等価である：
(1) $\{\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ は分裂性質を満たす；
(2) 任意の $\varphi\in\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''_{*,1}$ に対し，$\pi_0(\mathcal{A})''=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の単位的完全正値写像 T で $T(X)=\sum_j C_j^*XC_j$, $C_j\in\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_2))''$ の表示をもち，$T(X)=\varphi(X)1$, $X\in\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1))''$ を満たすものが存在する；
(3) $\mathcal{O}_3$ と $\mathcal{O}_4$ とが空間的に離れているとき，

$$\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_3))''\vee\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_4))''\cong\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_3))''\otimes\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}_4))''. \tag{8}$$

本稿において特に重要な条件は (2) であり，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ 上の正規状態が少し広い領域 $\mathcal{O}_2$ 上で内部的な完全正値写像として大域的に拡張されることである。これはよくよく考えれば自然な発想であり，有界時空領域において状態を指定することも一種の物理操作であるから完全正値写像として定義される量子操作の特殊なクラスとして解釈できるのである。各 $\varphi\in\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''_{*,1}$ に対し (2) により得られる写像は $\mathcal{O}_2$ と因果的な領域においては恒等的な作用をするので，これは所謂 "局所的な (local)" 量子操作である。以上の考察を受けて，局所状態の概念を次のように定義する：

定義 7 (局所状態)**.** $\mathcal{A}$ 上の単位的完全正値写像 T は次の条件を満たすとき，$\Lambda=(\mathcal{O}_1^\Lambda,\mathcal{O}_2^\Lambda)\in\mathcal{K}_\Subset$ を局在領域とする $\mathcal{A}$ 上の局所状態と呼ばれる：
(1) 任意の $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{A}((\mathcal{O}_2^\Lambda)')$ に対して，

$$T(AB)=T(A)B. \tag{9}$$

(2) $\varphi\in\mathcal{A}(\mathcal{O}_1^\Lambda)_{*,1}$ で，任意の $X\in\mathcal{A}(\mathcal{O}_1^\Lambda)$ に対して，

$$T(X)=\varphi(X)1, \tag{10}$$

を満たすものが存在する。
$E^L_{\mathcal{A}}(\Lambda)$ で Λ を局在領域とする $\mathcal{A}$ 上の局所状態の集合を表す。

「局所状態」という名前はあくまで有界時空領域上の状態の指定であって大域的な状態指定でない点からつけられたものであることに注意されたい。π_0 は忠実な (既約) 表現であるので，定理 6 の等価な条件を満たすとき，$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ も分裂性質をもつ。性質 B と分裂性質を満たす局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ は任意の $\Lambda\in\mathcal{K}_\Subset$ に対して $\Lambda=(\mathcal{O}_1^\Lambda,\mathcal{O}_2^\Lambda)$ を局在領域とする $\mathcal{A}$ 上の局所状態をもつことを示すことができる (定理 6 と同様の証明で)。

T を $E^L_{\mathcal{A}}(\Lambda)$ の元，π を $\mathcal{A}$ の表現とする。$\pi\circ T$ は $\mathcal{A}$ から $\pi(\mathcal{A})''$ への単位的完全正値写像である：

$$(\pi\circ T)(A):=\pi(T(A)),\quad A\in\mathcal{A}. \tag{11}$$

$\pi\circ T\in\mathrm{CP}(\mathcal{A},\pi(\mathcal{A})'')$ に対しては GNS 表現定理および Stinespring 表現定理が適用できる。ただし，C*-代数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への完全正値写像の全体を $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表す。それ故，局所状態を次のように定義しても良いと考えられる：

定義 8 (局所状態の異なる定義)**.** $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \pi(\mathcal{A})'')$ は次を満たすとき $\Lambda \in \mathcal{K}_{\Subset}$ を局在領域とする $\mathcal{A}$ から $\pi(\mathcal{A})''$ への局所状態と呼ばれる：
(1) 任意の $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}((\mathcal{O}_2^\Lambda)')$ に対して，$T(AB) = T(A)\pi(B)$.
(2) $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1^\Lambda)_{*,1}$ で $T(X) = \varphi(X)1$, $\forall X \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1^\Lambda)$ を満たすものが存在する。
$E^L_{\mathcal{A},\pi(\mathcal{A})''}(\Lambda)$ で $\Lambda \in \mathcal{K}_{\Subset}$ を局在領域とする $\mathcal{A}$ から $\pi(\mathcal{A})''$ への局所状態の集合を表す。

尚，上でのGNS表現定理とStinespring表現定理とは，それぞれHilbert加群及びHilbert空間とそれらの上の有界線型作用素を用いて完全正値写像を表示する定理である。以下の2つの定理では，$\mathcal{A}$ を C*-代数，$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする。Hilbert $\mathcal{M}$-加群とは $\mathcal{M}$-値内積を持つ完備な右 $\mathcal{M}$-加群のことである。

定理 9 (GNS表現定理 [31, 33])**.** $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ に対し，Hilbert $\mathcal{M}$-加群 E_T, *-準同型写像 $\pi_T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^a(E_T)$ ($\mathcal{B}^a(E_T)$ は E_T に (左から) 作用する随伴可能有界作用素のなす C^*-代数) および $\xi_T \in E_T$ で

$$T(A) = \langle \xi_T | \pi_T(A)\xi_T \rangle, \quad A \in \mathcal{A} \tag{12}$$

と $E_T = \overline{\mathrm{span}}(\pi_T(\mathcal{A})\xi_T\mathcal{M})$ を満たすものが存在する。3つ組 (π_T, E_T, ξ_T) を T の GNS 表現とよぶ。

Hilbert $\mathcal{M}$-加群 E に対し，E' で E 上の右 $\mathcal{M}$-線型 $\mathcal{M}$-値線型汎関数の全体を表し，$E^* = \{\xi^* \in E' \mid \xi^*\eta = \langle \xi|\eta\rangle, \eta \in E\}$ と定める。$E' = E^*$ が成立する Hilbert $\mathcal{M}$-加群 E は自己双対であると呼ばれる (Rieszの定理の一般化が成立する Hilbert $\mathcal{M}$-加群と解釈できる)。任意の Hilbert $\mathcal{M}$-加群 E に対し，E' は自己双対 Hilbert $\mathcal{M}$-加群であるような，次を満たす $\mathcal{M}$-値内積を持つ：

$$\eta(\xi) = \langle \eta | \xi^* \rangle, \quad \eta \in E', \xi \in E. \tag{13}$$

E' への $\mathcal{M}$ の作用は $(\eta \cdot M)(\xi) := M^*\eta(\xi)$, $\xi \in E$, $\eta \in E'$ で定める。自己双対 Hilbert $\mathcal{M}$-加群に対しては $\mathcal{B}^a(E)$ が W*-代数となることが知られている。更には，埋め込み $E \ni \xi \mapsto \xi^* \in E'$ が存在するように，$\mathcal{B}^a(E)$ の元 C は一意に $\mathcal{B}^a(E')$ の元 $\tilde{C}$ へと拡張される (この対応は *-等長同型)。これらの事実を用いて，T の GNS 表現から，$\widetilde{\pi_T}(A) := \widetilde{\pi_T(A)}$ と定めることで

$$T(A) = \langle \xi_T^* | \widetilde{\pi_T}(A)\xi_T^* \rangle, \quad A \in \mathcal{A} \tag{14}$$

を得る。本稿では以後，E_T^* と E_T を同一視することにより，$\widetilde{\pi_T}$, E_T^*, ξ_T^* それぞれを改めて π_T, E_T, ξ_T と表し，$(\pi_T, E_T, \xi_T) = (\widetilde{\pi_T}, E_T^*, \xi_T^*)$ を T の GNS 表現と呼ぶ。

定理 10 (Stinespring表現定理 [34, 2, 32])**.** $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ に対し，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 上の表現 π と $V \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ からなる Stinespring 表現と呼ばれる3つ組 $(\pi, \mathcal{K}, V)$ が存在して次を満たす：

$$T(A) = V^*\pi(A)V, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{15}$$

加えて，$\mathcal{K} = \overline{\mathrm{span}}(\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H})$ を満たす T の Stinespring 表現は極小であると呼ばれ，T の極小 Stinespring 表現を $(\pi_T^s, \mathcal{K}_T, V_T)$ で表す。T の極小 Stinespring 表現は必ず存在し，ユニタリー同値を除いて一意である。

5 局所状態からのセクター理論

DHR(-DR) 理論 [9, 10, 11, 12, 13] とは，真空を基準として，

$$\text{局在励起＝時空的に局在した励起} \tag{16}$$

を基本単位に据える理論である。時空的に局在している状況とは言い換えれば因果的な領域では励起がなく真空と区別がつかない状況である。この状況の（標準的な定式化における）数学的な記述は以下のようになる：

DHR 選択基準 局在励起を表す物理的な $\mathcal{A}$ の表現 (の族) は局在している領域 $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ の因果的補集合 $\mathcal{O}'$ においては真空表現 π_0 とユニタリー同値である：

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}. \tag{17}$$

DHR 選択基準は，性質 B の仮定の下，表現のレベルである表現 π における π-正規状態を同時に扱う場合に対応しているので，この選択基準は物理的にも数学的にも妥当であるといえる。DHR 選択基準を満たす表現に対し次の命題が成立する。

命題 11. $\mathcal{O}$ に局在化した DHR 選択基準を満たす表現 π に対し，次を満たす $\mathcal{A}$ の *-自己準同型 ρ が存在する：
(1) $\pi = \pi_0 \circ \rho$,
(2) $\rho(A) = A,\ A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')$。
これらの条件を満たす $\mathcal{A}$ の *-自己準同型は局在自己準同型と呼ばれる。

この命題の証明は 1 (Haag 双対性). を本質的に用いている。この命題を通して得られる局在自己準同型の全体

$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \{\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}) \mid \exists \mathcal{O} \in \mathcal{K} \text{ s.t. } \rho(A) = A, A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}')\} \tag{18}$$

が局所ネット $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})|\mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ で記述される系の局在励起を表す。$\mathrm{DR}(\mathcal{A})$ は真空からの“ずれ”として局在励起を集めてきたものであって，$\mathrm{DR}(\mathcal{A})$ の元には演算が入る。その演算の意味は $\mathrm{DR}(\mathcal{A})$ を“ C*-圏 ”として扱うことで理解できる。Doplicher-Roberts の有名な結果 [12] から，$\mathrm{DR}(\mathcal{A})$ はあるコンパクト群 G のユニタリー表現のなす圏 $\mathrm{Rep}(G)$ と圏として同値である。この結果は局在励起を識別するラベルはあるコンパクト群 G の表現 γ によって供給されることを物理的に意味している。このラベルは通常「量子数」と呼ばれ，内部対称性（時空以外に関する対称性）を表すコンパクト群 G の既約表現がその最小単位になる。また，この結果は内部対称性の起源を明らかにするものであり，実験データをセクター理論的に解析するなかで DHR 選択基準を満たす表現を集めることで内部対称性を抽出できる。

ここでは議論しなかったが，実は (真空表現において)Haag 双対性を満たす局所ネットでは“対称性の破れ”は起こらない。Haag 双対性の代わりに本質的双対性 (essential duality) を満たす局所ネットを考察することで“ 対称性の破れ ”が起きる場合を扱うことができる。それ故，上の DHR 理論はあくまで“ 対称性の破れ ”が起こらない系での局在励起とそれに関わる内部対称性の理論であり物理的には非常に限られた状況での量子場の記述に他ならない点を注意しておく。“ 対称性の破れ ”が起きる場合への DHR 理論の拡張は [19, 20] を参照していただきたい。

本稿の主題である局所状態に基づけば DHR 理論はより簡単なものになるうえ，状態概念に基づいたより自然な議論が可能になる。それについて以下で見ていこう。

定義 12 (性質 DHR[10, I, pp.228, (A.4)])**.** $\mathcal{A}$ の表現 π は任意の $\Lambda \in \mathcal{K}^{DC}_{\Subset}$ と射影作用素 $E \in \pi^d(\mathcal{O}_1^\Lambda) := \pi(\mathcal{A}((\mathcal{O}_1^\Lambda)'))'$ に対して，等長作用素 $W \in \pi^d(\mathcal{O}_2^\Lambda)$ で $WW^* = E$ および $W^*W = 1$ を満たすものが存在するとき性質 DHR を満たすと呼ばれる。

命題 13 ([10, I, A.1. Proposition])**.** ω を $\mathcal{A}$ 上の状態であって，ある 2 重錐の増大列 $\{\mathcal{O}_n\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \|(\omega - \omega_0)|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}_n')}\| = 0 \tag{19}$$

を満たすものとする。GNS 表現 π_ω が性質 DHR を満たすならば，2 重錐 $\mathcal{O}$ で

$$\pi_\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \tag{20}$$

を満たすものが存在する。このとき， $\mathcal{A}$ 上の局在自己準同型 ρ で $\pi_\omega = \pi_0 \circ \rho$ を満たすものが存在する。

任意の $T \in E^L_{\mathcal{A}}(\Lambda)$ に対して，$(\pi_{T,0}, \mathcal{K}_{T,0}, V_{T,0})$ で $\pi_0 \circ T$ の極小 Stinespring 表現を表す。以下は容易に示される：

$$\begin{aligned}(\omega_0 \circ T)(X) &= \omega_0(T(X)) = \langle \Omega | (\pi_0 \circ T)(X)\Omega\rangle \\ &= \langle \Omega | V_{T,0}^* \pi_{T,0}(X) V_{T,0}\Omega\rangle \\ &= \langle V_{T,0}\Omega | \pi_{T,0}(X) V_{T,0}\Omega\rangle, \quad X \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

並びに，$\|(\omega_0 \circ T - \omega_0)|_{\mathcal{A}((\mathcal{O}_2^\Lambda)')}\| = 0$。したがって，次の定理が成立する：

定理 14. T を Λ を局在領域とする $\mathcal{A}$ 上の局所状態とする。$\pi_{T,0}$ が性質 DHR を満たすならば，$\mathcal{O}_2^\Lambda$ を局在領域とする $\mathcal{A}$ 上の局在準同型 ρ_T で

$$(\pi_0 \circ T)(X) = V_T^* \pi_0(\rho_T(X)) V_T, \quad X \in \mathcal{A}. \tag{21}$$

を満たすものが存在する。ただし，V_T は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ の元である。

この定理は性質 DHR が DHR 選択基準の局所状態版であることを示している。

DHR 理論は真空状態 ω_0 を基準状態とするセクター理論である。しかしながら，重要な基準状態は真空状態だけではなく，たとえば，β-KMS 状態 ω_β, $\beta > 0$ などがある [19, 20]。それ故，一般の局所状態に対して $\mathcal{A}$ の表現 π と結びつけることでセクター理論を展開する。von Neumann 代数に値をとる完全正値写像の積分分解という路線で議論していくことになるが，一般の完全正値写像に物理的意味を与えられるとは限らないけれども，少なくとも局所状態には状態概念の一般化という重要な物理的意味が与えられている点が肝要である。局所状態以外でも物理的意味が与えられた完全正値写像に対しても同様の議論 (数学的には全く同一な議論) でセクターを考察できる事実は今後セクター概念の適用可能性と動的過程・創発過程との関係を深めるうえで重要であろう。これからの議論の先行研究は 2 章での状態の積分分解に関する参考文献と [15, 29] である。以下，$\mathcal{A}$ を C*-代数，$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とする。

Paschke[31] による Radon-Nikodým 型定理をまずは眺めよう：$T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ に対して，$T_1 \leq T_2$ を $T_2 - T_1 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ を満たすこととして定義する。

命題 15 (Paschke[31]). $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ の 2 つの元 T_1 と T_2 は $T_1 \le T_2$ を満たしているとする。このとき，$R \in \pi_{T_2}(\mathcal{A})'$ で $0 \le R \le 1$ および

$$T_1(A) = \langle \xi_{T_2} | R\pi_{T_2}(A)\xi_{T_2}\rangle, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{22}$$

を満たすものが存在する。ただし，$\pi_{T_2}(\mathcal{A})'$ は $\pi_{T_2}(\mathcal{A})$ の $\mathcal{B}^a(E'_T)$ における可換子である。

定理 16 (Paschke[31]). $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ とする。$[0,T] = \{T' \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M}) \mid 0 \le T' \le T\}$ と $\{R \in \pi_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1\}$ の間にアファイン順序同型が存在する。

Paschke によるこれらの結果は Arveson の先行研究 [2] を一般化したものである：

命題 17 (Arveson[2]). $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ の 2 つの元 T_1 と T_2 は $T_1 \le T_2$ を満たしているとする。このとき，$R \in \pi^s_{T_2}(\mathcal{A})'$ で $0 \le R \le 1$ および

$$T_1(A) = V^*_{T_2} R\pi^s_{T_2}(A)V_{T_2}, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{23}$$

を満たすものが存在する。

定理 18 (Arveson[2]). $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ とし，$(\pi^s_T, \mathcal{K}_T, V_T)$ を T の極小 Stinespring 表現とする。$[0,T] = \{T' \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H})) \mid 0 \le T' \le T\}$ と $\{R \in \pi^s_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1\}$ の間にアファイン順序同型が存在する。

$\mathcal{M} \subset \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ より $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M}) \subset \mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ であるから，任意の $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ に対して極小 Stinespring 表現 $(\pi^s_T, \mathcal{K}_T, V_T)$ が存在する。しかしながら，$R \in \{R \in \pi^s_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1\}$ に対応した $T_R(A) := V^*_T R\pi^s_T(A)V_T$, $A \in \mathcal{A}$, は $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ の元ではあっても $\mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ の元になるとは限らない。そこで，

$$\{R \in \pi^s_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1, T_R \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})\} \tag{24}$$

を考えると，これは定理 16 から $\{R \in \pi_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1\}$ とアファイン順序同型である。アファイン順序集合 $\{R \in \pi^s_T(\mathcal{A})' \mid 0 \le R \le 1, T_R \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})\}$ から生成される von Neumann 代数を $\pi^s_T(\mathcal{A})^c$ で表す。

命題 19. $T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ で $T = T_1 + T_2$ とする。以下の条件は等価であり，以下の等価な条件を満たすとき T_1 と T_2 とは直交するといい $T_1 \perp T_2$ で表す：
(1) $(\pi^s_T, \mathcal{K}_T, V_T) = (\pi^s_{T_1}, \mathcal{K}_{T_1}, V_{T_1}) \oplus (\pi^s_{T_2}, \mathcal{K}_{T_2}, V_{T_2})$；
(2) 射影作用素 $P \in \pi_T(\mathcal{A})'$ が存在して，

$$T_1(A) = V^*_T P\pi^s_T(A)V_T, \quad T_2(A) = V^*_T(1-P)\pi^s_T(A)V_T, \quad A \in \mathcal{A}; \tag{25}$$

(3) $T' \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ が $T' \le T_1$ および $T' \le T_2$ を満たすならば，$T' = 0$ である。

GNS 表現の場合には次の形になる：

命題 20. $T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ で $T = T_1 + T_2$ とする。以下の条件は等価であり，以下の等価な条件を満たすとき T_1 と T_2 とは直交するといい $T_1 \perp T_2$ で表す：
(1) $(\pi_T, E_T, \xi_T) = (\pi_{T_1}, E_{T_1}, \xi_{T_1}) \oplus (\pi_{T_2}, E_{T_2}, \xi_{T_2})$；
(2) 射影作用素 $P \in \pi_T(\mathcal{A})'$ が存在して，

$$T_1(A) = \langle \xi_T | P\pi_T(A)\xi_T\rangle, \quad T_2(A) = \langle \xi_T | (1-P)\pi_T(A)\xi_T\rangle, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{26}$$

更に，(1) もしくは (2) が成り立つとき，次の性質が成立する：
(3) $T' \in \mathrm{CP}(\mathcal{A},\mathcal{M})$ が $T' \le T_1$ および $T' \le T_2$ を満たすならば，$T' = 0$ である。
E_T が自己双対ならば，(3) から (1) および (2) が導かれる。

定義 21. 3 つ組 $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ は以下の条件を満たすとき $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ を重心にもつ CP-測度空間であるという：
(1) $(S, \mathcal{B}(S))$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 S 上の Borel 空間である；
(2) μ は $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の $\mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$-値測度であって，$\mathcal{B}(S)$ の互いに素な部分集合族 $\{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，$\rho \in \mathcal{M}_*$ と $A \in \mathcal{A}$ に対し，

$$\rho(\mu(\cup_i \Delta_i, A)) = \sum_i \rho(\mu(\Delta_i, A)), \tag{27}$$

を満たし，更に $T(A) = \mu(S, A)$, $A \in \mathcal{A}$ を満たす。

定義 22. 3 つ組 $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ は，CP-測度空間であって任意の $\Delta \in \mathcal{B}(S)$ に対して $\mu(\Delta, \cdot) \perp \mu(\Delta^c, \cdot)$ を満たすとき，T を重心にもつ直交 CP-測度空間であるといわれる。

定義 23. (1) $(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1)$ と $(S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ を T を重心にもつ CP-測度空間とする。$(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1)$ が $(S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ に優越される（$(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1) \prec (S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ で表す）とは，

$$\{\mu_1(\Delta_1, \cdot) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \mid \Delta_1 \in \mathcal{B}(S_1)\} \subseteq \{\mu_2(\Delta_2, \cdot) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \mid \Delta_2 \in \mathcal{B}(S_2)\}, \tag{28}$$

および，任意の $\rho \in \mathcal{M}_{*,1}$（$\mathcal{M}$ 上の正規状態）に対して，射影作用素 $P \in L^\infty(S_2, \rho \circ \mu_2)$ で

$$(L^\infty(S_1, \rho \circ \mu_1), L^2(S_1, \rho \circ \mu_1)) \cong (PL^\infty(S_2, \rho \circ \mu_2)P, PL^2(S_2, \rho \circ \mu_2)),$$

を満たすものが存在する。ただし，$(\rho \circ \mu_j)(\cdot) := \rho(\mu_j(\cdot, 1))$, $j = 1, 2$ である。
(2) $(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1)$ と $(S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ が等価である $(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1) \approx (S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ とは $(S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1) \prec (S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2)$ および $(S_2, \mathcal{B}(S_2), \mu_2) \prec (S_1, \mathcal{B}(S_1), \mu_1)$ が成立することを言う。

T を重心にもつ直交 CP-測度空間の $\approx$-同値類のなす圏 $\mathcal{O}_T$ を各同値類の代表元の優越関係を射として定義し，$\pi_T^s(\mathcal{A})^c$ の可換 W^*-部分代数のなす圏 $W^*(\pi_T^s)$ を W*-代数の包含関係を射とすることで定義する。次の定理は本章の主定理である：

定理 24 (完全正値写像に対する冨田定理)**.**
各 $T \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ に対し，$\mathcal{O}_T$ と $W^*(\pi_T^s)$ は圏同値である。
$[(S, \mathcal{B}(S), \mu)] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_T)$ と $\mathcal{B} \in \mathrm{Ob}(W^*(\pi_T^s))$ とが圏同値の一対一対応にあるとし，$(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ を $[(S, \mathcal{B}(S), \mu)]$ の代表元とする。このとき，*-同型写像 $\kappa_\mu : L^\infty(S, \nu) \to \mathcal{B}$ で次で定義されるものが存在する：

$$V_T^* \kappa_\mu(f) \pi_T^s(A) V_T = \int f(s)\, d\mu(s, A), \quad f \in L^\infty(S, \nu), A \in \mathcal{A}. \tag{29}$$

ただし，ν は μ と同値な正値測度である（ν の選び方には依存しない）。

定義 25. $T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ とする。
(1) T_1 と T_2 とが準同値 $T_1 \approx T_2$ であるとは π_{T_1} と π_{T_2} とが準同値であるときを言う。
(2) T_1 と T_2 とが無縁 $T_1 \between T_2$ であるとは，π_{T_1} と π_{T_2} が無縁であるときを言う。

命題 26. $T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$，$T = T_1 + T_2$ とする。以下の条件は等価である：
(1) $T_1 \between T_2$；
(2) 射影作用素 $P \in \mathfrak{Z}_T^s(\mathcal{A}) = \pi_T^s(\mathcal{A})'' \cap \pi_T^s(\mathcal{A})'$ であって，

$$T_1(A) = V_T^* P \pi_T^s(A) V_T,\ T_2(A) = V_T^*(1-P)\pi_T^s(A)V_T, \quad A \in \mathcal{A},$$

を満たすものが存在する。

GNS 表現の場合も同様に成立する：

命題 27. $T_1, T_2 \in \mathrm{CP}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ とし，$T = T_1 + T_2$ とする。以下の条件は等価である：
(1) $T_1 \between T_2$；
(2) 射影作用素 $P \in \mathfrak{Z}_T(\mathcal{A}) = \pi_T(\mathcal{A})'' \cap \pi_T(\mathcal{A})'$ であって，

$$T_1(A) = \langle \xi_T | P\pi_T(A)\xi_T \rangle,\ T_2(A) = \langle \xi_T | (1-P)\pi_T(A)\xi_T \rangle, \quad A \in \mathcal{A},$$

を満たすものが存在する。

定義 28. $(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ は対応する可換 W^*-代数が $\mathfrak{Z}_T^s(\mathcal{A})$ の W^*-部分代数であるとき準中心 CP-測度空間であると呼ばれる。特に，$(S, \mathcal{B}(S), \mu)$ は対応する可換 W^*-代数が $\mathfrak{Z}_T^s(\mathcal{A})$ であるとき中心 CP-測度空間であると呼ばれる。

6　場の量子論における測定過程論

T を $E^L_{\mathcal{A},\pi(\mathcal{A})''}(\Lambda)$ の元とし，(π_T, E_T, ξ_T) を T の GNS 表現とする。そして，$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{Z}_T(\mathcal{A})$ の可換 W*-部分代数とし，$P : \mathcal{B}(S) \to \mathcal{B}$ を PVM とする。このとき，次で定義される $\mathcal{I}_T : \mathcal{B}(S) \times \pi_T(\mathcal{A})'' \to \pi(\mathcal{A})''$ が思いつくだろう：

$$\mathcal{I}_T(\Delta; A) = \langle P(\Delta)\xi_T | A\xi_T \rangle, \quad \Delta \in \mathcal{B}(S), A \in \pi_T(\mathcal{A})''. \tag{30}$$

この写像が完全正値インストゥルメント [29, 30] のもつ性質を満たすことは容易に確認できる。それ故，局所状態と完全正値インストゥルメントは無関係な概念ではなく，場の量子論のような表現の間の移行を基本に据えるべき理論において局所的な状態準備とそれを実行・検証するための測定方法を不可分な形で統一的に記述する方向性を示唆している。

参考文献

[1] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, Oxford Univ. Press, (1999).

[2] W. Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math. **123**, 141-224 (1969).

[3] D. Buchholz, I. Ojima and H. Roos, Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297**, 219 - 242 (2002).

[4] H. Bostelmann, "Lokale Algebren und Operatorprodukte am Punkt," Ph.D. Thesis, Universität Göttingen, 2000; electronic version available at http://webdoc.sub.gwdg.de/diss/2000/bostelmann/.

[5] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (vol.1) (2nd printing of 2nd ed.), (Springer, 2002).

[6] D. Buchholz, Product states for local algebras, Comm. Math. Phys. **36**, 287-304 (1974).

[7] C. D'Antoni and R. Longo, Interpolation by type I factors and the flip automorphism, J. Funct. Anal. **51**, 361-371 (1983).

[8] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Comm. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).

[9] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969); *ibid.* **15**, 173-200 (1969).

[10] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Local observables and particle statistics, I & II, Comm. Math. Phys. **23**, 199-230 (1971); *ibid.* **35**, 49-85 (1974).

[11] S. Doplicher and J.E. Roberts, Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130**, 75-119 (1989).

[12] S. Doplicher and J.E. Roberts, A new duality theory for compact groups, Invent. Math. **98**, 157-218 (1989).

[13] S. Doplicher and J.E. Roberts, Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990).

[14] K. Fredenhagen and R. Haag, Generally covariant quantum field theory and scaling limits, Comm. Math. Phys. **108**, 91 (1987).

[15] I. Fujimoto, Decomposition of completely positive maps, J. Operator Theory **32**, 273-297 (1994).

[16] R. Haag, *Local Quantum Physics –Fields, Particles, Algebras–* (2nd ed.), Springer-Verlag, (1996).

[17] R. Haag and I. Ojima, On the problem of defining a specific theory within the frame of local quantum physics, Ann. Inst. Henri Poincaré **64**, 385-393 (1996).

[18] R. Harada and I. Ojima, A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality –Stern-Gerlach experiment as a typical example–, Open Sys. Inf. Dyn. **16**, 55-74 (2009).

[19] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria – Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions –, Open Sys. Inf. Dyn. **10**, 235-279 (2003).

[20] I. Ojima, Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004).

[21] I. Ojima,"Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[22] 小嶋 泉,『量子場とミクロ・マクロ双対性』, 丸善出版, (2013).

[23] I. Ojima and K. Okamura, Large deviation strategy for inverse problem I, Open Sys. Inf. Dyn. **19**, (2012), 1250021.

[24] I. Ojima and K. Okamura, Large deviation strategy for inverse problem II, Open Sys. Inf. Dyn. **19**, (2012), 1250022.

[25] 小嶋 泉, 岡村 和弥,『無限量子系の物理と数理』, サイエンス社, (2013).

[26] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Derivation of Born Rule from Algebraic and Statistical Axioms (2013), arXiv:1304.6618.

[27] K. Okamura, The quantum relative entropy as a rate function and information criteria, Quant. Inf. Process. **12**, 2551-2575, (2013).

[28] M. Ohya and D. Petz, *Qunatum Entropy and Its Use*, (Springer, Berlin, 1993).

[29] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous obsevables, J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984).

[30] M. Ozawa, Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, Publ. RIMS **21**, 279–295 (1985).

[31] W.L. Paschke, Inner product modules over B*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **182**, 443-468 (1973).

[32] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (2002).

[33] M. Skeide. Generalized matrix C*-algebras and representations of Hilbert modules, Math. Proc. Royal Irish Academy, **100A** 11-38, (2000).

[34] W.F. Stinespring, Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 211-216 (1955).

[35] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, 1979).

[36] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, (Springer, 2002).

[37] 大矢 雅則，梅垣 寿春,『確率論的エントロピー』,『量子論的エントロピー』，共立出版，(1983, 1984).

[38] R. Werner, Local preparability of states and the split property in quantum field theory, Lett. Math. Phys. **13**, 325-329 (1987).