



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DE L'AQUILA

*Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea in Fisica*

TESI DI LAUREA

**IL DECADIMENTO DEL PROTONE
ASPETTATIVE E PROSPETTIVE
DI RICERCA**

Relatori
Prof. Francesco Vissani

Prof. Flavio Cavanna

Laureando
Vincenzo Caracciolo

*Ai miei Genitori ed ai miei Nonni,
con amore e gratitudine.*

*È evidente che esiste il colore, il gusto dolce e
quello amaro; in realtà ci sono solo atomi e vuoto.*

Democrito 420 a.C.

Non c'è niente di più pratico di una buona teoria.

I. Kant

Indice

| | |
|---|------------|
| Elenco delle figure | vi |
| Elenco delle tabelle | vii |
| Introduzione | 1 |
| 1 Concetti fondamentali | 5 |
| 1.1 Il Modello Standard | 5 |
| 1.1.1 Limiti del Modello Standard | 9 |
| 1.1.2 Il numero barionico e leptonico | 9 |
| 1.2 Legge del decadimento radioattivo | 11 |
| 2 Analisi dei canali di decadimento | 13 |
| 2.1 Canali di decadimento | 13 |
| 2.1.1 Cinematica del decadimento | 14 |
| 2.2 Operatori effettivi | 20 |
| 2.3 Vita media del nucleone | 24 |
| 2.3.1 Stime dei tassi di decadimento | 26 |
| 3 Evoluzione delle costanti di accoppiamento | 29 |
| 3.1 Teorie rinormalizzabili | 29 |
| 3.2 Correzioni radiative | 32 |
| 3.3 Correzione al secondo ordine del propagatore fotonico . . . | 35 |
| 3.3.1 Regolarizzazione dimensionale | 39 |
| 4 Teorie di Grande Unificazione | 42 |
| 4.1 Possibili mediatori | 42 |
| 4.1.1 Effetto dei nuovi bosoni vettori di SU(5) | 43 |
| 4.1.2 Effetto dei nuovi bosoni vettori di SO(10) | 45 |
| 4.2 Costante di accoppiamento rinormalizzata | 46 |
| 4.3 Evoluzione delle costanti di accoppiamento | 47 |
| 4.3.1 SU(5) → SM | 48 |
| 4.3.2 SU(5) → MSSM | 55 |
| 4.3.3 SO(10) | 58 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.4 | Supersimmetria e decadimento del protone | 62 |
| 4.4.1 | Stime dei tassi di decadimento con accoppiamento di Yukawa | 64 |
| 5 | Prospettive di ricerca | 68 |
| 5.1 | Massa espota | 68 |
| 5.2 | Eventi di fondo | 72 |
| 5.2.1 | Neutrini solari ed atmosferici | 72 |
| 5.2.2 | Interazione dei neutrini atmosferici | 76 |
| 5.3 | Aspettative per rivelatori ad argon | 76 |
| 5.4 | Stato attuale della ricerca sperimentale | 82 |
| | Discussioni | 84 |
| | Appendice | 85 |
| A | Spinori | 85 |
| A.1 | Identità di Fierz | 85 |
| A.2 | Identità algebriche delle matrici γ | 85 |
| B | Integrali notevoli | 86 |
| B.1 | Proprietà della funzione $\Gamma(x)$ di Eulero | 86 |
| B.2 | Parametrizzazione di Feynman | 86 |
| B.3 | Integrali D dimensionali | 87 |
| C | Calcolo esplicito della (3.46) | 88 |
| C.1 | Calcolo di $N^{\mu\nu}(p, k)$ | 88 |
| C.2 | Derivazione della (3.51) | 89 |
| D | Beta-function | 92 |
| D.1 | Coefficienti b_i delle β -function (SM) | 92 |
| D.2 | Coefficienti Δb_i delle β -function (MSSM) | 94 |
| E | Flusso dei neutrini atmosferici | 96 |
| E.1 | Programma flusso_neutrini_atm.f | 96 |
| | Bibliografia | 100 |
| | Ringraziamenti | 107 |

Elenco delle figure

| <i>N. figura e sua descrizione</i> | <i>Pagina</i> |
|--|---------------|
| 2.1 Diagrammi in cui $(uud) \rightarrow e^+ \bar{u}u$ oppure $(uud) \rightarrow e^+ \bar{d}d$. Se ai primi tre diagrammi il quark “spettatore” u viene sostituito con un quark d , otteniamo tre diagrammi che contribuiscono al decadimento del neutrone. | 25 |
| 3.1 Grafico a loop del primo ordine in α perturbativo della QED. | 33 |
| 3.2 Grafico al primo ordine perturbativo in α | 34 |
| 3.3 (QED) – Contributi radiativi del II ordine in α | 34 |
| 3.4 Scattering Møller | 35 |
| 3.5 Correzione al propagatore fotonico | 36 |
| 4.1 Previsione delle intersezioni delle tre costanti di accoppiamento del Modello Standard nel caso di $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_l \otimes U(1)_Y$. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica. | 55 |
| 4.2 MSSM. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica. . . . | 57 |
| 4.3 $SO(10) \rightarrow G_{PS} \rightarrow SM$. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica. | 62 |
| 4.4 Interazione tra fermioni mediata da tripletto colorato dell’Higgs nel modello $SU(5)$ minimale. | 64 |
| 4.5 Interazioni tra fermioni e scalari mediato da tripletto colorato dell’Higgsino nel modello $SU(5)$ minimale. | 65 |
| 4.6 Decadimento del protone a causa dell’esistenza dell’Higgsino nel modello $SU(5)$ | 65 |
| 5.1 Flusso dei primari. | 73 |
| 5.2 Illustrazione schematica di una cascata di raggi cosmici. . | 75 |
| 5.3 Flusso neutrini. | 75 |

Elenco delle tabelle

| <i>N. tabella e sua descrizione</i> | <i>Pagina</i> |
|--|---------------|
| 2.1 Decadimenti a due corpi con $\Delta B = \Delta L$ | 15 |
| 2.2 Decadimenti a tre corpi con $\Delta B = \Delta L$ | 15 |
| 2.3 Decadimenti a due corpi con $\Delta B = -\Delta L$ | 16 |
| 2.4 Decadimenti a tre corpi con $\Delta B = -\Delta L$ | 16 |
| 2.5 Decadimenti a due corpi con $\Delta B = \Delta L$ (antileptoni e fotoni). | 16 |
| 2.6 Decadimenti che coinvolgono tre o più leptoni. | 17 |
| 2.7 Modi inclusivi | 17 |
| 2.8 Operatori effettivi invarianti per $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ | 21 |
| 2.9 Costanti di accoppiamento di Yukawa | 27 |
| 4.1 Mediatori massivi con $B - L = \frac{2}{3}$ | 43 |
| 4.2 Valori sperimentalisti usati per la verifica dell'esistenza di una M_X in cui le cariche restaurano la simmetria SU(5). I dati si riferiscono alle misure alla scala M_Z | 53 |
| 4.3 Particelle del Modello Standard. | 53 |
| 4.4 Valori ottenuti applicando il primo metodo descritto nella (4.40) (l'errore statistico è 3σ). | 54 |
| 4.5 Confronto tra i valori ricavati con il secondo metodo descritto precedentemente. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ | 54 |
| 4.6 Particelle del MSSM | 56 |
| 4.7 Valori calcolati per il modello SU(5) \rightarrow MSSM. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ | 57 |
| 4.8 Valori calcolati per il modello $SO(10) \rightarrow G_{PS} \rightarrow SM$. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ | 61 |
| 5.1 Efficienze Icarus | 78 |
| 5.2 Stime τ/B Icarus | 80 |
| 5.3 ICARUS - Massa esposta necessaria per superare di un ordine di grandezza gli attuali limiti sperimentali. | 81 |

Tutti sanno che una cosa è impossibile da realizzare, finché arriva uno sprovveduto che non lo sa e la inventa.

—A. Einstein—

Introduzione

Nel 1938 Stuckelberg osservava che sia il protone che il neutrone non decadevano in nessuna particella leggera, come ad esempio l'elettrone o il neutrino, suggerendo l'esistenza di una “legge di conservazione della carica pesante” [1]:

[...]oltre la legge di conservazione della carica elettrica esiste una ulteriore legge di conservazione: non è stata osservata nessuna transizione in una trasformazione di materia di una particella pesante in una particella leggera. Ciò richiede l'esistenza di una legge di conservazione della carica pesante.

Lo stesso approccio fu seguito da Wigner più tardi [2]:

[...] è concepibile che una legge di conservazione del numero di particelle pesanti sia responsabile della stabilità del protone allo stesso modo di come la legge di conservazione della carica sia responsabile della stabilità. Priva della legge di conservazione in questione, il protone potrebbe disintegrarsi, sotto l'emissione di un quanto leggero, in un positrone.

Le prime misure della vita media del protone arrivarono nel 1954 [3] e successivamente nel 1967 [4]. Col passare del tempo, però, la situazione cambiò. Da osservazioni sperimentali ci si accorse della netta presenza di materia barionica su quella antibarionica, spiegabile, ad esempio, tramite l'esistenza di processi di violazione del numero barionico. Nel 1967 't Hooft, a causa delle anomalie di Bell-Jackiw in una teoria di gauge, dimostrava che effetti non perturbativi potevano dar luogo ad interazioni che violano il numero barionico e leptonico* [5]; non molto tempo dopo vide la luce il primo modello di teoria di grande unificazione basato sul gruppo SU(5) [6], che a causa dei bosoni di gauge aggiuntivi e alla presenza del bosone di Higgs, comportava la violazione sia del numero leptonico che di quello barionico. In questo contesto, tuttavia, maturava uno dei

*Nella teoria elettrodebole tali processi sono soppressi da un fattore proporzionale a $\exp(-16\pi^2/g^2) \cong 10^{-37}$.

maggiori successi della fisica degli ultimi decenni: la scoperta del Modello Standard (SM).

Il modello standard è compatibile con le esperienze di fisica delle particelle elementari ed è libero da inconsistenze di natura matematica. Le interazioni sono tutte descritte da teorie di gauge e quindi, la forma delle costanti di accoppiamento e i bosoni mediatori sono determinati dall'esistenza di simmetrie di gauge. A differenza di queste notevoli proprietà, tuttavia, il modello standard è lontano da essere la teoria ultima delle particelle elementari. Infatti l'interazione forte ed elettrodebole sono fortemente indipendenti l'una dall'altra, rispecchiando il fatto che il gruppo di gauge del modello standard è costruito *ad hoc* tramite il prodotto diretto di tre distinti gruppi di gauge, ognuno con una propria costante di accoppiamento. Un altro problema risiede nel complicato schema, del tutto arbitrario, con il quale si rappresentano i fermioni. Non è spiegato, infatti, il motivo dell'esistenza di tre famiglie fermioniche o la violazione della parità nelle interazioni deboli, ma non in quelle forti. Non è chiarita la quantizzazione della carica elettrica dei fermioni. Infatti, non esiste nessun motivo a priori perché i quark debbano avere carica frazionaria, quando per i leptoni la carica è unitaria. Il modello standard possiede anche molti parametri liberi completamente arbitrari come la massa dei fermioni, gli angoli di mescolamento della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), la massa del campo di Higgs, ecc.. Inoltre esso non ingloba la quarta forza fondamentale: la gravità.

Un modo per determinare o limitare alcuni dei parametri liberi del modello standard è prendere in considerazione teorie con un maggior numero di simmetrie. Mi riferisco in particolare allo studio di teorie di grande unificazione (GUT), in cui l'interazione forte, debole ed elettromagnetica sono contenute in un unico gruppo di gauge con una singola costante di accoppiamento. In generale le teorie di grande unificazione hanno più generatori oltre quelli del modello standard che, associati alle nuove simmetrie, possiedono la carica di colore. Ciò rende i nuovi mediatori responsabili di processi di violazione del numero barionico contemplando la possibilità del decadimento del protone o del neutrone legato. Un meccanismo tipico è quello di un quark che si trasforma in un positrone con l'emissione di uno dei nuovi mediatori (X), che, assorbito da un altro quark, emette un antiquark. Ottenendo, ad esempio, un decadimento del tipo $p \rightarrow e^+ \pi^0$ con una vita media proporzionale alla quarta potenza della massa del mediatore (M_X). Massa il cui valore è cruciale per qualsiasi predizione e che è fortemente vincolata al modello di grande unificazione considerato. In queste teorie le differenze esistenti tra le tre interazioni fondamentali, ma anche tra gli stessi fermioni, sono dovute ad una rottura spontanea del gruppo di gauge unificato in suoi sottogruppi. La filosofia delle GUT è che se si potessero condurre esperimenti ad una scala degli impulsi $Q^2 \gg M_X^2$, la rottura spontanea della simmetria prima citata,

potrebbe essere ignorata. Tutti i fermioni verrebbero visti allo stesso modo e tutte le interazioni sarebbero simili. In particolare l’evoluzione delle costanti di accoppiamento del Modello Standard si intersecherebbero in corrispondenza di M_X . Infatti, conoscendo la dipendenza delle costanti di accoppiamento da Q^2 , è possibile individuare il valore di M_X . Tuttavia, le grosse differenze a basse energie tra l’interazione debole, forte, elettromagnetica e la dipendenza logaritmica delle loro costanti di accoppiamento rispetto a Q^2 determinano un enorme valore per M_X , come dimostreremo nei capitoli successivi. Vedremo che $M_X \gtrsim 10^{15} \text{GeV}$, il che rende la vita media del protone estremamente grande e quindi gli esperimenti molto complessi. Significa, infatti, usare apparecchiature di grandi dimensioni e dover ridurre al minimo eventuali eventi spuri prodotti dai raggi cosmici. Per questo tutti gli esperimenti di questo tipo si svolgono sotto terra sfruttando la schermatura naturale offerta dal terreno contro i raggi cosmici.

Forse, però, l’aspetto più interessante di queste teorie di unificazione delle forze della natura si manifesta nella sua applicazione alla cosmologia. L’esistenza di un universo di materia è sempre stato un problema di difficile soluzione per i cosmologi. Da uno stato iniziale di energia si sarebbe dovuta formare una uguale quantità di materia ed antimateria; tuttavia le nostre conoscenze attuali escludono la presenza di grosse quantità di antimateria nel nostro universo. Infatti, se il numero barionico si conserva, così come prescrive il Modello Standard, allora l’asimmetria barionica deve essere pensata come conseguenza di un’asimmetria iniziale del Big–Bang. Invece, se le teorie di grande unificazione sono corrette, il netto affermarsi di materia barionica nell’universo può essere spiegato dinamicamente con la violazione del numero barionico nei primi istanti del Big–Bang. Quando la temperatura dell’universo in espansione è scesa al di sotto di M_X , producendo così la rottura della simmetria del gruppo di gauge della GUT, è possibile che le particelle X sopravvissute abbiano prodotto più quark che antiquark, e quindi più barioni che antibarioni; questa ipotesi fu per la prima volta formulata dal fisico russo Andrei Sakharov 1967 [7]. Molti dei modelli di GUT servono anche a spiegare perché le masse dei neutrini seppure diverse da zero risultino relativamente piccole. Il motivo è legato all’origine della violazione del numero leptónico connesso ad una rottura spontanea della simmetria che si verificherebbe a grande scala, simmetria che nel modello standard è nascosta. Inoltre la presenza di un termine di massa per i neutrini potrebbe contribuire, con un meccanismo diverso, alla spiegazione dell’eccesso di materia barionica esistente nel nostro universo [8]. Si tratta, infatti, di interazioni deboli con violazione del numero barionico che si potrebbero verificare per la presenza del termine di massa dei neutrini e che risulterebbero particolarmente efficienti ad alte temperature.

L’importanza dello studio del decadimento del protone risiede nella

Introduzione

difficoltà di indagare direttamente le caratteristiche di una fisica tanto estrema. Infatti, come già lo studio del decadimento β ha permesso la comprensione dell'interazione elettrodebole, così l'analisi del decadimento del nucleone potrebbe essere, forse, l'unico mezzo per comprendere la fisica delle GUT.

Tali teorie di grande unificazione non inglobano la forza gravitazionale; inoltre, non si può escludere la possibilità che alcune proprietà di queste teorie possano risultare inconsistenti con altri fatti sperimentali. Malgrado ciò, le potenzialità delle GUT sono molto interessanti tanto da renderle oggetto di intensi studi e solo i riscontri sperimentali ne decreteranno il successo o l'insuccesso.

Una cosa ho imparato nella mia lunga vita: che tutta la nostra scienza è primitiva ed infantile, eppure è la cosa più preziosa che abbiamo.

—A. Einstein—

Capitolo 1

Concetti fondamentali

Il Modello Standard dà una dettagliata descrizione dell'elettromagnetismo e dell'interazione forte che è compatibile con tutte le osservazioni sperimentali. Con questo capitolo ricostruiamo le principali proprietà del MS, soffermandoci su una breve descrizione dei suoi limiti. Il motivo di ciò è stabilire un punto di partenza su cui basare, nei capitoli successivi, la nostra discussione. Per lo stesso motivo presentiamo anche un breve excursus dei concetti fondamentali di un generico decadimento.

1.1 Il Modello Standard

Il Modello Standard è una teoria di campo quantizzato che descrive l'interazione forte ed elettrodebole dei quark e dei leptoni. Queste sono i due tipi di particelle elementari oggi note che formano la materia. La peculiarità di questo modello è che le forze sono introdotte come interazioni di gauge [9]. Possiamo distinguere tre settori: il primo è il settore materia, definito dai campi fermionici; il secondo è caratterizzato dai bosoni vettori; il terzo è il cosiddetto settore della rottura spontanea della simmetria. Quest'ultimo descrive un meccanismo per generare la massa dei fermioni e dei bosoni, ma non è ben definito, esistendo più di un modello possibile. Il più noto è quello con un solo doppietto di autointerazione e il modello standard corrispondente acquista l'attributo di minimale.

Il settore materia è descritto da fermioni organizzati in tre famiglie sia per i leptoni che per i quark, come mostrato nella (1.1).

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \\ u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ t \\ b \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Il settore dei bosoni di gauge si può suddividere in due parti caratterizzate da un tipo di interazione, l’interazione forte e l’interazione elettrodebole. L’interazione forte è introdotta nel Modello Standard tramite un vettore di una teoria di gauge $SU(3)$ [10, 11, 12], chiamata cromodinamica quantistica (QCD). Tutti i quark trasformano come una rappresentazione fondamentale di $SU(3)$,

$$q^\alpha \longrightarrow \left(e^{-i \frac{\lambda^a \theta^a}{2}} \right)^{\alpha\beta} q_\beta \quad (1.2)$$

quindi l’indice α nella (1.2), chiamato colore va da 1 a $N_c = 3$. I bosoni mediatori responsabili dell’interazione forte sono chiamati gluoni e sono in numero di otto per via del numero di generatori del gruppo $SU(3)_c$ e per questo dotati di colore. Di conseguenza l’interazione forte agisce solo sui quark.

L’interazione elettrodebole, invece, è basata su un gruppo di gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, noto come modello Glashow–Weinberg–Salam (GWS). La strada percorsa per la determinazione del modello GWS è molto affascinante, per questo la riportiamo in breve. Nel 1957 Schwinger [13] propose un modello con un tripletto carico $W^{\pm 0}$ di bosoni vettori, identificando il W^0 con il fotone e il W^\pm coi bosoni mediatori dell’interazione debole, ma privi di accoppiamento assiale. Nel 1958 Bludman [14] propose una teoria di gauge con un gruppo $SU(2)$ per descrivere l’interazione debole. Bludman identifica il nuovo bosone di gauge neutro come una nuova corrente neutra. Nel 1961 Glashow [15] unifica l’interazione debole ed elettromagnetica con una teoria di gauge $SU(2) \otimes U(1)$. Un modello simile fu sviluppato anche da Salam e Ward [16]. Successivamente Weinberg [17] e Salam [18] perfezionarono il modello suggerendo la possibilità che i bosoni vettori possano acquistare massa tramite il meccanismo di Higgs [19]. Weinberg suggeriva che la teoria può essere rinormalizzata, ma la dimostrazione della rinormalizzabilità fu data solo molti anni dopo da ’t Hooft, Veltman, Lee e Zinn–Justin [20]–[24]. Originariamente il modello di Weinberg e Salam descriveva solo l’interazione elettrodebole per i leptoni. In seguito Weinberg [25, 26] mostra la possibilità di incorporare gli adroni nel modello arricchendolo con un meccanismo ideato da Glashow, Iliopoulos e Maiani (GIM) [27]. Tale meccanismo suggeriva l’introduzione di un quarto quark, chiamato *charm* e prediceva la conservazione della stranezza nelle interazioni di corrente neutra. Inoltre nel 1973 Kobayashi e Maskawa [28] dimostravano che, supponendo l’esistenza di tre famiglie fermioniche per i quark ed introducendo la matrice di CKM, il modello non risultava invariante per trasformazioni CP*.

Chiusa questa breve parentesi storica ritorniamo alla discussione del Modello Standard, con la descrizione del modello GWS, modello costituito

*Questo, ad esempio, è il motivo delle violazioni di CP osservate nel sistema $K-\bar{K}$.

da quark e leptoni organizzati in doppietti “left” e singoletti “right” di $SU(2)_L$, supponendo la non esistenza del neutrino “right”. I generatori del gruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sono quattro a cui corrispondono quattro campi di gauge comunemente indicati con $W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu$ e B^μ . Grazie ad una opportuna combinazione lineare di essi si individuano i bosoni fisici responsabili delle interazioni elettrodEBoli e cioè W^+, W^-, Z^0 e il fotone A , dati dalle seguenti relazioni:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [W_1 \mp W_2] , \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ Z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Tale modello, infatti, predice interazioni di corrente neutra del tipo $\nu + Y \rightarrow \nu + Y'$ mediato dallo Z^0 , ricevendo le prime conferme sperimentali da [29, 30]. Inoltre per la presenza sia di Z^0 sia di A in interazioni di correnti neutre abbiamo:

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad (1.5)$$

dove θ_W , g e g' sono rispettivamente l’angolo di Weinberg, le costanti di accoppiamento dei gruppi $SU(2)_L$ e $SU(1)_Y$, mentre e è la carica elettrica dell’elettrone.

Abbiamo già accennato che il settore della rottura spontanea della simmetria, basato sul meccanismo di Higgs è stato incluso nel Modello Standard per generare lo spettro delle masse dei bosoni W^+, W^-, Z^0 , A e dei fermioni [19]. In particolare viene introdotto per spiegare termini di massa del modello, che come termini del tipo:

$$m_W^2 W_\mu W^\mu \quad \text{oppure} \quad -m \bar{\psi} \psi = -m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (1.6)$$

rompono l’invarianza di gauge. Proprio per evitare questo, si può introdurre un doppietto di $SU(2)_L$ ^{*}:

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

con ipercarica

*Come abbiamo già avuto modo di dire, questa è la scelta più semplice e per questo va sotto il nome di minimale.

$$Y_H = \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

tale che la carica elettrica di H^+ e H^0 sia rispettivamente +1 e 0. La lagrangiana corrispondente è del tipo:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) - V(\phi) + \mathcal{L}_Y \quad (1.9)$$

dove

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a \right) \phi \quad (1.10)$$

mentre

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^+ \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2 \quad (1.11)$$

è un potenziale scalare e \mathcal{L}_Y sono i termini di Yukawa responsabili delle masse dei fermioni. Quando il doppietto di Higgs prende valore di aspettazione,

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

con

$$v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.13)$$

i bosoni vettori dell'interazione debole acquistano massa pari a

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad (1.14)$$

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W} = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (1.15)$$

Sapendo che

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (1.16)$$

dove G_F è la costante di Fermi*, si trova $v \cong 250 GeV$. Usando $\sin^2 \theta_W$ (che può essere ottenuto misurando processi di corrente neutra) tale modello predice le masse m_W e m_Z , misurate per la prima volta nel 1987 [31]. Successivamente, con la scoperta del quark top nel 1994 [32], è stato confermato e completato il settore fermionico del Modello Standard. Tuttavia il bosone di Higgs non è stato ancora osservato.

1.1.1 Limiti del Modello Standard

Il Modello Standard, pur non avendo nessuna inconsistenza con le predizioni sperimentali, ha numerosi parametri liberi e diverse questioni irrisolte. Infatti, lo schema dei gruppi di gauge e le sue rappresentazioni sono complicati e del tutto arbitrarii. Non si conosce il motivo per cui il Modello Standard è il prodotto diretto di tre gruppi di gauge o perché l’interazione forte conserva la parità mentre in quella debole è violata; perché la terza famiglia leptonica è più pesante della seconda e a sua volta questa è più pesante della prima; non è chiara la ragione per cui le costanti di accoppiamento delle varie interazioni sono diverse; o perché i leptoni hanno carica unitaria mentre quella dei quark è frazionaria. A complicare il quadro si inserisce il grande numero dei parametri che la teoria non definisce. Infatti esistono 3 costanti di accoppiamento, i parametri μ e λ del potenziale $V(\phi)$ nella (1.11), 6 costanti di Yukawa per i quark, 3 angoli della matrice CKM e una fase CP, tre costanti di Yukawa per le masse dei leptoni carichi (se invece esiste anche il ν_R si devono aggiungere almeno altre 3 costanti di Yukawa per le masse dei neutrini, 3 angoli di mescolamento, ed una fase di violazione CP) per un totale di 18 (o 25) parametri liberi. Tuttavia la presenza, tra i parametri liberi, di quantità molto piccole, può far pensare all’esistenza di dinamiche nascoste. Mi riferisco ad esempio al rapporto tra le masse dei neutrini (supposte diverse da zero) e quelle dei fermioni, oppure tra quelle dei fermioni e dei bosoni W^\pm e Z^0 .

1.1.2 Il numero barionico e leptonico

Convenzionalmente, nel Modello Standard, ad ogni barione si associa un numero barionico (B) pari ad uno e un numero leptonico (L) nullo, viceversa per i leptoni. Le corrispondenti antiparticelle possiedono numero barionico o leptonico opposto. Invece, i bosoni del Modello Standard, hanno numero leptonico e barionico nullo. Tuttavia i bariioni hanno una struttura interna formata da altre particelle, i quark, che si distinguono in sei famiglie o saponi. Questo implica che il numero barionico può essere espresso nel seguente modo:

* $G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$

$$B = \frac{1}{3} (N_q - N_{\bar{q}}) \quad (1.17)$$

dove con N_q e $N_{\bar{q}}$ abbiamo indicato il numero di quark ed antiquark che determinano la struttura del barione di riferimento. L'esigenza di introdurre il fattore $1/3$ è per rispettare la convenzione di $B = 1$ per i barioni [33]. Per i leptoni la situazione potrebbe essere simile ai barioni. Tuttavia (fatta eccezione per le oscillazioni dei neutrini) non si osservano fenomeni di mescolamento tra leptoni di differenti generazioni, come invece accade per interazioni deboli con gli adroni. Questo ha indotto la necessità di introdurre un numero leptonico per ogni famiglia:

$$\begin{cases} L_e &= N_{l_e} - N_{\bar{l}_e} \\ L_\mu &= N_{l_\mu} - N_{\bar{l}_\mu} \\ L_\tau &= N_{l_\tau} - N_{\bar{l}_\tau} \end{cases} \quad (1.18)$$

a cui segue un numero leptonico totale pari alla somma dei tre:

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau \quad (1.19)$$

Uno dei successi del Modello Standard è proprio l'esistenza di simmetrie accidentali che prevedono la conservazione del numero barionico e leptonico. Infatti, proprio l'assenza dell'instabilità del protone o del neutrone legato è attribuita alla conservazione del numero barionico. Si potrebbe pensare, quindi, a violazioni di tali leggi di conservazione. Sarebbe anche lecito chiedersi se può essere ammessa una violazione, ad esempio della carica elettrica, invece che del numero barionico. Però la conservazione del numero barionico è legata solo ad una simmetria globale, mentre quella della carica elettrica è legata ad una simmetria di gauge. Infatti non esiste nessun modo accettabile di violare la carica elettrica senza supporre l'esistenza di una massa non nulla per il fotone. Potremmo anche speculare su una improbabile simmetria locale associata alla conservazione del numero barionico. Ciò implicherebbe l'esistenza di un "fotone barionico" privo di massa*, che indurrebbe una differenza tra massa inerziale e massa gravitazionale [34] mai osservata. Quindi la conservazione del numero barionico non può essere associata ad una simmetria di gauge ed esiste la possibilità di introdurre, come vedremo nei paragrafi successivi, dei termini nella lagrangiana del Modello Standard che violino la conservazione del numero barionico. Di conseguenza, l'esistenza della conservazione del numero barionico si riduce inevitabilmente ad un problema di verifica sperimentale. Tuttavia ci aspettiamo che i processi di violazione del numero

*La massa è nulla perché le interazioni potrebbero avvenire anche a grandi distanze.

barionico abbiano una frequenza molto inferiore rispetto alle altre interazioni note. Infatti la scala temporale dell’interazione debole è dell’ordine dei 10^{-10} secondi, invece i limiti attuali (si vedano le tabelle del paragrafo 2.1) sulla vita media del protone sono dell’ordine di 10^{32} anni. Addirittura esistono lavori come quelli di ’t Hooft [35] con i quali si suggerisce la possibilità di violare il numero barionico e leptónico per effetto tunnel nei processi di interazione debole. Per esempio la reazione $p + n \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu$ oppure $p + n \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_e$ potrebbe verificarsi con una probabilità estremamente bassa proporzionale a $\exp(-4\pi \sin^2 \theta_W / \alpha) \cong e^{-400}$. Per giunta esistono anche modelli di violazione del numero barionico basati su interazioni gravitazionali.

Non solo quindi la conservazione del numero barionico non è un principio fondamentale, ma l’evidente eccesso di materia barionica rispetto a quella anti-barionica nel nostro universo, fa sospettare l’esistenza di processi che hanno violato la conservazione del numero barionico nei primi istanti dell’universo, quando era ancora molto caldo e denso. Processo interpretabile supponendo l’esistenza di una nuova interazione che si manifesta, ad esempio, tramite il decadimento del protone. Questo è esattamente ciò che molti modelli di GUT prescrivono, modelli in cui sia il numero barionico che leptónico sono esplicitamente violati.

1.2 Legge del decadimento radioattivo

In questa tesi, occupandoci di decadimento del protone, è utile rivedere in generale i concetti relativi al decadimento. In fisica atomica e subatomica è frequente la situazione per cui un generico stato quantistico K può decadere in uno stato Y . Si possono fare molti esempi a riguardo: la diseccitazione di un atomo di idrogeno con emissione di fotoni; il decadimento β o α di un nucleo, ecc.. Viceversa, uno stato a cui è proibito decadere è detto stabile. Ad esempio, un elettrone è una particella stabile, poiché la conservazione della carica e della energia gli impediscono qualsiasi decadimento. Chiamiamo con Γ il tasso di decadimento, cioè il numero di stati K che decadono nell’unità di tempo. Indichiamo con N_0 il numero iniziale di tali stati, e con $N(t)$ il numero di essi al tempo t . La variazione di N in un tempo infinitesimo dt sarà:

$$dN(t) = -N(t)\Gamma dt \quad (1.20)$$

e integrando otteniamo che

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \quad (1.21)$$

è il numero di stati superstiti al tempo t . La (1.21) è la legge del decadimento radioattivo. Osserviamo che l'equazione (1.21) indica la probabilità ($e^{-\Gamma t}$) che una certa frazione di stati K non decadano. Dalla (1.21) possiamo calcolare la vita media dello stato K, che sarà:

$$\frac{\int_0^\infty t N(t) dt}{\int_0^\infty N(t) dt} = \Gamma^{-1} \quad . \quad (1.22)$$

Spesso, però, uno stato iniziale K può decadere in diversi canali di decadimento. Per esaminare questo caso consideriamo una particella che può decadere in h modi diversi tutti indipendenti gli uni dagli altri. Indichiamo con Γ_i il tasso di decadimento per ogni modo i-esimo. Allora la variazione di stati K in un tempo infinitesimo è

$$\frac{dN(t)}{dt} = -N(t) \sum_{i=1}^h \Gamma_i \quad (1.23)$$

e quindi, integrando:

$$N(t) = N_0 e^{-\sum_{i=1}^h \Gamma_i t} \quad . \quad (1.24)$$

In questo caso il tasso di decadimento totale è

$$\Gamma = \sum_{i=1}^H \Gamma_i \quad (1.25)$$

e la vita media è

$$\tau = \left(\sum_{i=1}^H \Gamma_i \right)^{-1} \quad . \quad (1.26)$$

Molto spesso è utile definire il “branching fraction” o rapporto di diramazione:

$$BR_i \equiv \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \quad , \quad (1.27)$$

e la vita media parziale:

$$\tau_i = (\Gamma_i)^{-1} = \frac{\tau}{BR_i} \quad , \quad (1.28)$$

con i quali si evidenzia quanto un modo di decadimento è più probabile rispetto ad un altro.

I concetti della fisica sono libere creazioni dello spirito umano, e non sono, nonostante le apparenze, determinati unicamente dal mondo esterno.

—A. Einstein—

Capitolo 2

Analisi dei canali di decadimento

In questo capitolo esamineremo quali sono i possibili decadimenti del protone supponendo la violazione del numero barionico e discuteremo la necessità di individuare degli operatori effettivi (effective operators) che possano predire tali canali di decadimento.

2.1 Canali di decadimento

Il Modello Standard si basa sull'esistenza di tre distinte famiglie fermioniche, i quark e i leptoni. Per molti aspetti il fatto che le particelle siano organizzate in due gruppi (leptoni e quark) con proprietà simili non è spiegabile nell'ambito del modello standard. Potrebbe però, per esempio, essere legato all'interpretazione data ai leptoni come quarta carica di colore, come Pati e Salam hanno suggerito nel 1974 [36]. Tra l'altro, gli ultimi esperimenti sull'oscillazione dei neutrini quali Super-Kamiokande [37], MACRO [38], KamLAND [39] ecc., stanno mettendo a dura prova la conservazione del numero leptonico per famiglia. È quindi nostra intenzione considerare la non conservazione del numero barionico, unico modo per ipotizzare il decadimento del protone*. Vale la pena osservare che sia la non conservazione del numero leptonico, quanto la non conservazione del numero barionico implicano, nella lagrangiana del Modello Standard minimale, solo una rottura di una simmetria globale. Non solo, quindi, la conservazione del numero barionico non è necessaria come simmetria fondamentale, ma, oltre tutto, potrebbe spiegare il motivo dell'eccesso

*Ci preme tuttavia assicurare il lettore che questo non influirà sullo stato della sua esistenza. Infatti, assumendo che una persona di $100Kg$ viva 100 anni, e che la vita media del protone sia $\tau_p \approx 10^{33}$ anni, il numero medio di protoni decaduti è $\approx 5 \cdot 10^{-4}$ (avendo assunto che il corpo umano è fatto al 75% di acqua e il rimanente di carbonio).

nel nostro universo di materia barionica rispetto a quella antibarionica. Tuttavia, è indispensabile mantenere la conservazione di alcune grandezze fondamentali quali lo spin, l'energia o la carica elettrica, solo per citarne alcune. Infatti se supponiamo l'esistenza di processi con violazione del numero barionario, per la conservazione dello spin, si dimostra che *

$$\Delta B + \Delta L = 2n \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (2.1)$$

Quindi, il decadimento di un singolo nucleone ($\Delta B = 1$), deve essere accompagnato da una violazione del numero leptonico. Alla luce di ciò, è interessante notare come il gruppo di gauge $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ soddisfi, in particolare, l'invarianza per $B - L^\dagger$. Ci piace pensare che questo potrebbe essere il “residuo fossile” di una rottura spontanea di un gruppo di gauge unificato contenente il Modello Standard. Quindi possiamo cercare di elencare quei canali di decadimento in cui $\Delta B = \Delta L$, processi avulsi dal Modello Standard, ma che possono essere descritti in termini di una teoria effettiva (effective theory) invariante per $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ come sarà chiarito nei prossimi paragrafi. Tali eventi sono schematizzabili come un barione che decade in un antileptone e in uno o più mesoni. Nella tabella numero 2.1 e 2.2 abbiamo elencato quei canali di decadimento rispettivamente a due corpi e a tre corpi, che soddisfano tale regola di selezione. Nella tabella 2.5 e 2.6 sono riportati i canali di decadimento con fotoni o con più di due leptoni. In tutte e quattro le tabelle sono indicati i limiti sperimentali per le vite medie parziali oggi note [40]. Ci preme osservare che taluni di quei processi violano la stranezza, mentre per altri è conservata, ma in nessuno di essi $\Delta B = \Delta S$. Tale scelta non è casuale e sarà più chiara in seguito. Nelle tabelle 2.3 e 2.4, invece, elenchiamo processi in cui la regola di selezione è $\Delta B = -\Delta L$, rispettivamente per eventi a due e tre corpi. Vogliamo inoltre far notare che la verifica sperimentale è possibile solo per modi con particelle cariche, infatti decadimenti che coinvolgono i neutrini sono di difficile identificazione e ancora più complicato risulta la distinzione tra ν o $\bar{\nu}$ come prodotti del decadimento protonico.

2.1.1 Cinematica del decadimento

Considerando un decadimento a due corpi di un protone libero (nucleo di idrogeno) la quantità di moto di entrambi i prodotti del decadimento sono uguali in modulo, verso, ma con direzione opposta. Per un decadimento a tre corpi, invece, le cose cambiano. Ponendoci nel sistema di riferimento

*La dimostrazione della (2.1) è alquanto semplice e passa per l'osservazione che le uniche due categorie di particelle ad avere spin semintero sono i barioni ed i leptoni.

†In seguito presenteremo ulteriori argomenti a supporto di questa tesi.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|--------------------------------------|---|
| $N \rightarrow e^+ \pi$ | $> 158 (n), > 1600 (p)$ |
| $N \rightarrow \mu^+ \pi$ | $> 100 (n), > 473 (p)$ |
| $N \rightarrow \nu \pi$ | $> 112 (n), > 25 (p)$ |
| $p \rightarrow e^+ \eta$ | > 313 |
| $p \rightarrow \mu^+ \eta$ | > 126 |
| $n \rightarrow \bar{\nu} \eta$ | > 158 |
| $N \rightarrow e^+ \rho$ | $> 217 (n), > 75 (p)$ |
| $N \rightarrow \mu^+ \rho$ | $> 228 (n), > 110 (p)$ |
| $N \rightarrow \bar{\nu} \rho$ | $> 19 (n), > 162 (p)$ |
| $p \rightarrow e^+ \omega$ | > 107 |
| $p \rightarrow \mu^+ \omega$ | > 117 |
| $n \rightarrow \bar{\nu} \omega$ | > 108 |
| $N \rightarrow e^+ K$ | $> 17 (n), > 150 (p)$ |
| $p \rightarrow e^+ K_S^0$ | > 120 |
| $p \rightarrow e^+ K_L^0$ | > 51 |
| $N \rightarrow \mu^+ K$ | $> 26 (n), > 120 (p)$ |
| $p \rightarrow \mu^+ K_S^0$ | > 150 |
| $p \rightarrow \mu^+ K_L^0$ | > 83 |
| $N \rightarrow \bar{\nu} K$ | $> 86 (n), > 670 (p)$ |
| $n \rightarrow \bar{\nu} K_S^0$ | > 51 |
| $p \rightarrow e^+ K^*(892)^0$ | > 84 |
| $N \rightarrow \bar{\nu} K^*(892)^0$ | $> 78 (n), > 51 (p)$ |

Tabella 2.1: Decadimenti a due corpi con $\Delta B = \Delta L$.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|-----------------------------------|---|
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^-$ | > 82 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^0 \pi^0$ | > 147 |
| $N \rightarrow e^+ \pi^0 \pi^0$ | > 52 |
| $p \rightarrow \mu^+ \pi^+ \pi^-$ | > 133 |
| $p \rightarrow \mu^+ \pi^0 \pi^0$ | > 101 |
| $n \rightarrow \mu^+ \pi^0 \pi^-$ | > 74 |
| $n \rightarrow e^+ K^0 \mu^-$ | > 18 |

Tabella 2.2: Decadimenti a tre corpi con $\Delta B = \Delta L$.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|------------------------------|---|
| $n \rightarrow e^- \pi^+$ | > 65 |
| $n \rightarrow \mu^- \pi^+$ | > 49 |
| $n \rightarrow e^- \rho^+$ | > 62 |
| $n \rightarrow \mu^- \rho^+$ | > 7 |
| $n \rightarrow e^- K^+$ | > 32 |
| $n \rightarrow \mu^- K^+$ | > 57 |

Tabella 2.3: Decadimenti a due corpi con $\Delta B = -\Delta L$.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|-----------------------------------|---|
| $p \rightarrow e^- \pi^+ \pi^+$ | > 30 |
| $n \rightarrow e^- \pi^+ \pi^0$ | > 29 |
| $p \rightarrow \mu^- \pi^+ \pi^+$ | > 17 |
| $n \rightarrow \mu^- \pi^+ \pi^0$ | > 34 |
| $p \rightarrow e^- \pi^+ K^+$ | > 75 |
| $p \rightarrow \mu^- \pi^+ K^+$ | > 245 |

Tabella 2.4: Decadimenti a tre corpi con $\Delta B = -\Delta L$.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|---|---|
| $p \rightarrow e^+ \gamma$ | > 670 |
| $p \rightarrow \mu^+ \gamma$ | > 478 |
| $n \rightarrow \nu \gamma$ | > 28 |
| $p \rightarrow e^+ \gamma \gamma$ | > 100 |
| $n \rightarrow \bar{\nu} \gamma \gamma$ | > 219 |

Tabella 2.5: Decadimenti a due corpi con $\Delta B = \Delta L$ (antileptoni e fotoni).

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|-----------------------------------|---|
| $p \rightarrow e^+ e^+ e^-$ | > 793 |
| $p \rightarrow e^+ \mu^+ \mu^-$ | > 359 |
| $p \rightarrow e^+ \nu \nu$ | > 17 |
| $n \rightarrow e^+ e^- \nu$ | > 257 |
| $n \rightarrow \mu^+ e^- \nu$ | > 83 |
| $n \rightarrow \mu^+ \mu^- \nu$ | > 79 |
| $p \rightarrow \mu^+ e^+ e^-$ | > 529 |
| $p \rightarrow \mu^+ \mu^+ \mu^-$ | > 675 |
| $p \rightarrow \mu^+ \nu \nu$ | > 21 |
| $p \rightarrow \mu^+ e^- \mu^+$ | > 6 |
| $n \rightarrow 3\nu$ | > 0.0005 |
| $n \rightarrow 5\nu$ | |

Tabella 2.6: Decadimenti che coinvolgono tre o più leptoni.

| Modo | Vita media parziale ($10^{30} anni$) |
|-------------------------------------|---|
| $N \rightarrow e^+ qualunque$ | > 0.6 (n, p) |
| $N \rightarrow \mu^+ qualunque$ | > 12 (n, p) |
| $N \rightarrow \nu qualunque$ | |
| $N \rightarrow e^+ \pi^0 qualunque$ | > 0.6 (n, p) |
| $N \rightarrow 2 corpi, \nu-libero$ | |

Tabella 2.7: Modi inclusivi

del centro di massa del protone, la conservazione del quadrupolo ci impone che:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 &= 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 &= m_p\end{aligned}\tag{2.2}$$

dove con m_p abbiamo indicato la massa a riposo del protone, invece con p_i ed ϵ_i gli impulsi e l'energie dei prodotti del decadimento, con $i = 1, 2, 3$. Poiché il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, il numero delle soluzioni sarà infinito. Possiamo comunque valutare il valore massimo e minimo dell'energia per una delle tre particelle i . Per raggiungere tale scopo, consideriamo due delle tre particelle come un unico sistema in modo da ricondurci al caso del decadimento a due corpi. Indichiamo, quindi, con M_{12} una particella virtuale che ha impulso ed energia pari a:

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\tag{2.3}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_1 + \epsilon_2\tag{2.4}$$

e massa pari a:

$$\begin{aligned}M_{12}^2 &= (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - p_1 p_2 \cos \theta)\end{aligned}\tag{2.5}$$

dove θ è l'angolo compreso tra \vec{p}_1 e \vec{p}_2 . L'energia della terza particella sarà:

$$\epsilon_3 = \frac{m_p^2 + m_3^2 - M_{12}^2}{2m_p} .\tag{2.6}$$

Tuttavia M_{12} non è costante, ma dipende dai limiti cinetici imposti dalla conservazione del quadrupolo. Quando M_{12} assume valore massimo ϵ_3 acquista valore minimo e viceversa. Il valore minimo di ϵ_3 si ottiene quando $\vec{p}_3 = 0$, cioè quando $\cos \theta = -1$ e in tal caso

$$(\epsilon_3)_{min} = m_3 .\tag{2.7}$$

Il valore massimo, invece, si ottiene per $\cos \theta = 1$, per cui $M_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2$ e quindi

$$(\epsilon_3)_{max} = \frac{m_p^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_p} \quad . \quad (2.8)$$

Ad esempio, per un processo del tipo $p \rightarrow e^+ \pi^0 \pi^0$, abbiamo che

$$135 \text{ MeV} \lesssim \epsilon_\pi \lesssim 469 \text{ MeV} \quad 0.51 \text{ MeV} \lesssim \epsilon_{e^+} \lesssim 430 \text{ MeV} \quad (2.9)$$

Se, al contrario, il protone è legato le condizioni cinematiche sono differenti a causa del moto di Fermi dei protoni che inducono effetti sui prodotti del decadimento. Schematizzando i nucleoni come contenuti all'interno di un potenziale a mo' di gas di Fermi, il loro impulso sarà:

$$K_F = (3\pi^2 \rho)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad (2.10)$$

dove ρ è la distribuzione dei protoni che assumiamo pari alla densità nucleare a simmetria centrale detta di Saxon-Woods [41], la cui forma è:

$$\rho(r) = \frac{Z}{A} \rho_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \quad , \quad (2.11)$$

dove Z ed A sono il numero atomico ed il peso atomico dell'atomo di riferimento, mentre ρ_0 , c ed a sono delle costanti tipiche dell'elemento. Quindi la distribuzione angolare dei mesoni relativa a quella delle particelle "compagne" risente dell'impulso iniziale del protone. Inoltre la massa effettiva del protone, sarà degradata dall'energia di legame E_0 :

$$m_p|_{eff} = m_p - |E_0| \quad . \quad (2.12)$$

Bisogna anche considerare la posizione casuale del protone in accordo con la (2.11) e quindi la posizione del mesone figlio. Infatti se il mesone è creato all'interno di un nucleo, bisogna opportunamente valutare le possibili interazioni di assorbimento, scattering o di scambio del mesone stesso con un nucleone legato.

Nel prossimo paragrafo studieremo i possibili operatori effettivi che possiamo scrivere a partire dal Modello Standard e che violano la conservazione del numero barionico.

2.2 Operatori effettivi

È lecito supporre che alcuni o tutti i canali di decadimento elencati nel paragrafo 2.1, possano essere descritti da operatori effettivi, nell'idea che esistano dei mediatori molto massivi che ne spiegano la “bassa” frequenza di decadimento*. Infatti, eventuali processi che si verificano a “basse” energie†, ad esempio il decadimento del protone, potrebbero essere descritti in termini di una teoria di campo effettiva invariante per $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ in modo tale da rompere l'invarianza di B ed eventualmente, in accordo con la (2.1), anche quella di L. Nel caso in cui tale interazione coinvolga una coppia di fermioni e un numero qualsiasi di derivate o bosoni, l'invarianza per $SU(3)_c$ immediatamente implica la conservazione del numero barionico. Ciò significa che, per avere una violazione del numero barionico, i fermioni nella lagrangiana effettiva devono essere in numero almeno pari a quattro. In questo caso la dimensione canonica sarà $d \geq 6$ e la costante di accoppiamento effettiva dipenderà dalla massa del mediatore esotico‡:

$$\mathcal{G} \propto M^{4-d} \quad . \quad (2.13)$$

Il caso particolarmente interessante di non conservazione del numero barionico, in cui B è violato e l'accoppiamento (\mathcal{G}) è minimo, è descritto da un operatore effettivo formato da tre quark e un leptone per cui $d = 6$.

Consideriamo quali operatori effettivi violino le simmetrie accidentali del Modello Standard (B ed L). Ad esempio rilasciando la condizione che B sia violato, esiste un operatore effettivo con due leptoni e due scalari la cui dimensione è $d = 5$. Nella tabella numero 2.8 presentiamo alcuni di questi con la relativa dimensionalità, le regole di selezione e un processo tipico indotto da questi operatori [42].

Da quanto scritto nella 2.8 possiamo classificare gli operatori con violazione del numero barionico in due gruppi:

- quelli in cui il numero barionico è violato da una sola unità, $|\Delta B| = 1$,

*Ovviamente tali particelle non sono incluse nel Modello Standard. D'altra parte, visto gli ordini di grandezza dei limiti sperimentalisti delle vite medie dei nucleoni (si vedano le tabelle dal numero 2.1 al numero 2.7), si può supporre che la loro massa M sia molto maggiore della massa dei mediatori dell'interazione debole, $M \gg m_Z$.

†Per basse energie in questo contesto intendiamo $E \lesssim m_Z$.

‡La filosofia applicata è simile a quella ideata da Fermi per lo studio del decadimento β , $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$. Infatti, per descrivere il processo, propose la seguente lagrangiana effettiva $\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{p} \gamma^\lambda n] [\bar{e} \gamma^\lambda \nu] + h.c.$, dove $G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ racchiudeva i dettagli della teoria allora sconosciuti ed oggi è nota col nome di costante di accoppiamento di Fermi [43, 44]. Per maggiori dettagli si veda [45, Paragrafo 11.1].

| Operatore effettivo | d | Regole di selezione | Processo tipico |
|---------------------|----|---|---------------------------------|
| $ll\phi\phi$ | 5 | $\Delta B = 0, \Delta L = \pm 2$ | $nn \rightarrow ppe^-e^-$ |
| $qqql$ | 6 | $\Delta B = \Delta L = \pm 1$ | $p \rightarrow e^+\pi^0$ |
| $qqql^c\phi$ | 7 | $\Delta B = -\Delta L = \pm 1$ | $n \rightarrow e^-\pi^+$ |
| $qqqqqq$ | 9 | $\Delta B = \pm 2, \Delta L = 0$ | $n \leftrightarrow \bar{n}$ |
| $qqql^cl^c\phi$ | 10 | $\Delta B = -\frac{1}{3}\Delta L = \pm 1$ | $n \rightarrow \nu\nu e^-\pi^+$ |
| $qqql^cl^c\phi$ | 11 | $\Delta B = \frac{1}{3}\Delta L = \pm 1$ | $n \rightarrow \nu^c\nu^c e^+$ |
| $qqqqqql$ | 12 | $\Delta B = \Delta L = \pm 2$ | $H \leftrightarrow \bar{H}$ |

Tabella 2.8: Operatori effettivi invarianti per $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Abbiamo usato la seguente nomenclatura: q sta per quark, l per leptone, ϕ per scalare, l'indice c indica la coniugazione di carica e il simbolo H indica l'idrogeno.

- e gli altri, in cui il numero barionico è violato da due unità $|\Delta B| = 2$.

Il primo gruppo in accordo con la (2.1) induce necessariamente una violazione del numero leptonico. Ad esso appartengono processi con differenti regole di selezione, come si può osservare ed in particolare contempla il decadimento protonico con dimensionalità più bassa possibile ($d = 6$). Per il secondo gruppo, invece, possiamo distinguere due casi*:

- i) processi senza violazione del numero leptonico, $\Delta L = 0$,
- ii) processi con violazione del numero leptonico uguale a quella del numero barionico, $|\Delta B = \Delta L| = 2$.

Il primo sottogruppo è caratterizzato da processi di natura *non leptonici* come l'oscillazione del neutrone in un anti-neutrone ($n \leftrightarrow \bar{n}$) o doppi decadimenti nucleonici in mesoni come $nn \rightarrow \pi^0\pi^0$, $np \rightarrow \pi^0\pi^+$. Mentre il secondo sottogruppo è caratterizzato da processi *semi-leptonici* come l'affascinante oscillazione di un atomo di idrogeno in un altro di antimateria.

Dopo questa breve digressione, ci concentreremo sugli operatori di dimensione più bassa: $d = 6$. Come detto, l'espressione generica della lagrangiana effettiva è del tipo:

$$\mathcal{L}_{effettiva} \sim \frac{\alpha}{M^2} (qqql) + \text{h.c.} \quad (2.14)$$

*Sempre in accordo alla (2.1).

e per questo possiamo costruire sei operatori effettivi invarianti per $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e per il gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$ ^{*}:

$$O_{abcd}^{(1)} = (\bar{d}_{\alpha aR}^c u_{\beta bR}) (\bar{q}_{i\gamma cL}^c l_{jdL}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ij} \quad (2.15)$$

$$O_{abcd}^{(2)} = (\bar{q}_{i\alpha aL}^c q_{j\beta bL}) (\bar{u}_{\gamma cR}^c l_{dR}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ij} \quad (2.16)$$

$$O_{abcd}^{(3)} = (\bar{q}_{i\alpha aL}^c q_{j\beta bL}) (\bar{q}_{k\gamma cL}^c l_{ldL}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \quad (2.17)$$

$$O_{abcd}^{(4)} = (\bar{q}_{i\alpha aL}^c q_{j\beta bL}) (\bar{q}_{k\gamma cL}^c l_{ldL}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \times (\vec{\tau}\epsilon)_{ij} \cdot (\vec{\tau}\epsilon)_{kl} \quad (2.18)$$

$$O_{abcd}^{(5)} = (\bar{d}_{\alpha aR}^c u_{\beta bR}) (\bar{u}_{i\gamma cR}^c l_{dR}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.19)$$

$$O_{abcd}^{(6)} = (\bar{u}_{\alpha aR}^c u_{\beta bR}) (\bar{d}_{i\gamma cR}^c l_{dR}) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.20)$$

Dove α, β e γ sono gli indici di $SU(3)_c$; i, j, k ed l sono gli indici di $SU(2)$; a, b, c e d sono gli indici di famiglia; i pedici L ed R indicano rispettivamente il campo left e quello right, il primo doppietto, il secondo scalare di $SU(2)$; C indica la coniugazione di carica per ottenere l'invarianza di Lorentz; ϵ_{ij} e $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sono i tensori totalmente antisimmetrici rispettivamente per $SU(2)$ e per $SU(3)$ con $\epsilon_{12} \equiv \epsilon_{123} = 1$.

Questi operatori sono gli unici di dimensione sei che possono essere costruiti all'interno del Modello Standard. Si può notare come l'invarianza del gruppo $U(1)_Y$ necessiti l'uso della matrice di coniugazione di carica C per conservare l'invarianza di Lorentz. La contrazione degli indici di colore di $SU(3)$, con il tensore di Levi–Civita garantisce l'invarianza per il gruppo di colore, mentre per soddisfare l'invarianza per $SU(2)$, a causa della presenza del campo di Majorana, si rende necessario introdurre un tensore antisimmetrico come nella $O^{(3)}$ o nella $O^{(4)}$. Tra l'altro quest'ultimo è formato da termini di natura tripletto, rispecchiando le possibili rappresentazioni che si costruiscono a partire da doppietti fermionici di $SU(2)$ [†]. Studiando con attenzione gli operatori (2.15)–(2.20), si possono individuare alcune importanti proprietà. Si nota, infatti, che tutti

*Questi operatori sono stati originariamente costruiti da Weinberg in un lavoro del 1978. Cfr. [42, 46]

[†]Infatti a partire da un doppietto ψ di $SU(2)$ si possono costruire singoletti e tripletti. Ad esempio $\psi^t C \sigma_2 \psi$ è un singoletto, mentre $\psi^t C \sigma_2 \vec{\sigma} \psi$ è un tripletto. Infatti il primo sotto una trasformazione

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\sigma}\vec{\alpha}/2} \psi \implies \delta\psi = \frac{i\vec{\sigma}\vec{\alpha}}{2} \psi \quad (2.21)$$

$$\psi^t \rightarrow \psi^t e^{i\vec{\sigma}\vec{\alpha}/2} \implies \delta\psi^t = \psi^t \frac{i\vec{\sigma}\vec{\alpha}}{2} \quad (2.22)$$

rimane invariato, mentre il secondo si comporta come un vettore (\vec{x}) di $SO(3)$ gruppo isomorfo ad $SU(2)$, $\delta x^i = \epsilon^{ijk} \alpha^k x^j$ [45, 54, 50]. Per dimostrare che $\psi^t C \sigma_2 \vec{\sigma} \psi$ è un tripletto è sufficiente verificare che

$$\delta(\psi^t C \sigma_2 \sigma^i \psi) = \epsilon^{ijk} \psi^t C \sigma_2 \sigma^j \psi \alpha^k \quad (2.23)$$

questi operatori, proprio come voluto, possono descrivere il decadimento del protone, infatti $\Delta B = -1$ e inoltre conservano $B - L$. In altre parole, le interazioni (2.15)–(2.20) conservano la differenza del numero bariónico B e del numero leptónico L , consentendo al nucleone di decadere solo in un antileptone e non in un leptone. Quindi, i canali di decadimento che tali operatori descrivono sono quelli elencati nella tabella numero 2.1. Osserviamo che tali termini possono contenere solo operatori che distruggono quark di tipo s, ma nessuno operatore che ne crea. Quindi i processi in cui $\Delta S = \Delta B$ sono proibiti. Ad esempio un decadimento tipo $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ ha $\Delta B = -1$ e $\Delta S = 1$ ed è permesso, mentre uno del tipo $n \rightarrow K^- e^+$ ha $\Delta S = -1$ ed è proibito. Consideriamo ora i processi per cui $\Delta S = 0$ e $\Delta B = -1$. Notiamo che gli operatori (2.18) e (2.20) non contribuiscono al decadimento del protone*. Inoltre dalle proprietà dell’isospin si possono ottenere le seguenti relazioni circa la frequenza di decadimento [46]:

$$\Gamma(n \rightarrow e^+ \pi^-) = 2\Gamma(p \rightarrow e^+ \pi^0) \quad (2.24)$$

$$\Gamma(n \rightarrow \nu^c \pi^0) = \frac{1}{2}\Gamma(p \rightarrow \nu^c \pi^+) \quad (2.25)$$

Per dimostrare le relazioni (2.24) e (2.25) è necessario invocare la conservazione dello spin isotopico nelle interazioni forti e il fatto che nelle condizioni di $\Delta S = 0$ e $\Delta B = -1$ gli operatori (2.18) e (2.20) hanno isospin pari a $1/2$. Ricordiamo che $Q = I_3 + B/2$ quindi $I_3(p) = 1/2$, $I_3(n) = -1/2$ e per i processi (2.24) $\Delta I_3 = -1/2$, mentre per i processi (2.25) $\Delta I_3 = 1/2$. Se poniamo l’attenzione solo sulle proprietà dell’isospin, possiamo indicare operatori con isospin uguale con simboli uguali e tralasciare gli stati su cui l’isospin non è definito. In questo modo, possiamo sinteticamente scrivere gli elementi di matrice dei rispettivi processi indicati nella (2.24) e nella (2.25) nel seguente modo:

$$\langle \pi^- | O | n \rangle, \quad \langle \pi^0 | O | p \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle \pi^0 | O' | n \rangle, \quad \langle \pi^+ | O' | p \rangle \quad (2.27)$$

dove, proprio per la conservazione dell’isospin, $I_3(O) = -1/2$ e $I_3(O') = 1/2$. Quindi

usando le proprietà seguenti: $\left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^i}{2} \right] = i\epsilon^{jil} \frac{\sigma^l}{2}$; $\sigma_1^t = \sigma_1$, $\sigma_3^t = \sigma_3$, $\sigma_2^t = -\sigma_2$.

*Infatti se si sostituiscono i campi u e d con quelli ad isospin semintero $\pm 1/2$, abbiamo ad esempio che nell’operatore $O^{(6)}$ il prodotto di $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, matrice antisimmetrica per una simmetrica su due indici, data dai campi $\bar{u}_{R\alpha}^c u_{R\beta} d_{R\gamma}^c$, è nullo.

$$O | p \rangle = | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \quad (2.28)$$

$$O | n \rangle = | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \quad (2.29)$$

Dalle proprietà dell'algebra dell'isospin possiamo identificare gli stati con isospin totale assegnato ottenendo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \pm | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \right) = | 0, 0 \rangle \quad (2.30)$$

$$| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = | 1, -1 \rangle \quad (2.31)$$

da cui segue che

$$O | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1, 0 \rangle + | 0, 0 \rangle) \quad (2.32)$$

$$\langle \pi^0 | O | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 (| 1, 0 \rangle + | 0, 0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} M \quad (2.33)$$

dove M è necessario perché i bra e i ket non sono normalizzati ad uno. Invece

$$\langle \pi^- | O | n \rangle = \langle -1, 1 | 1, -1 \rangle = M \quad (2.34)$$

quindi

$$\sqrt{2} \langle \pi^0 | O | p \rangle = \langle \pi^- | O | n \rangle \quad (2.35)$$

da cui la (2.24). In modo analogo si dimostra la (2.25).

2.3 Vita media del nucleone

I canali di decadimento nelle tabelle numero 2.1–2.7 possono essere interpretati come processi mediati da un bosone molto massivo. Con riferimento a quanto scritto nei paragrafi precedenti e in particolare alla (2.14), vogliamo ora valutare la dipendenza della vita media del protone in funzione della costante di accoppiamento α_X/M_X^2 . Dalla (2.14) possiamo scrivere [47, Capitolo 8] che la frequenza differenziale del decadimento protonico è:

$$d\Gamma = \Pi_f \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 q_f \cdot W \quad (2.36)$$

dove l'indice f indica le particelle nello stato finale, V è un volume arbitrario in cui si può pensare che avvenga il processo, che nel calcolo esplicito scompare, q è il quadrimpulso della particella f e W è la probabilità di transizione per unità di tempo. Più nel dettaglio, W dipende dal modulo quadro dell'elemento di matrice del decadimento. A questo punto è utile produrre dei grafici di Feynman del decadimento di un protone. A tale proposito riportiamo in figura 2.1 alcuni grafici di Feynman relativi al seguente processo:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0 \quad (2.37)$$

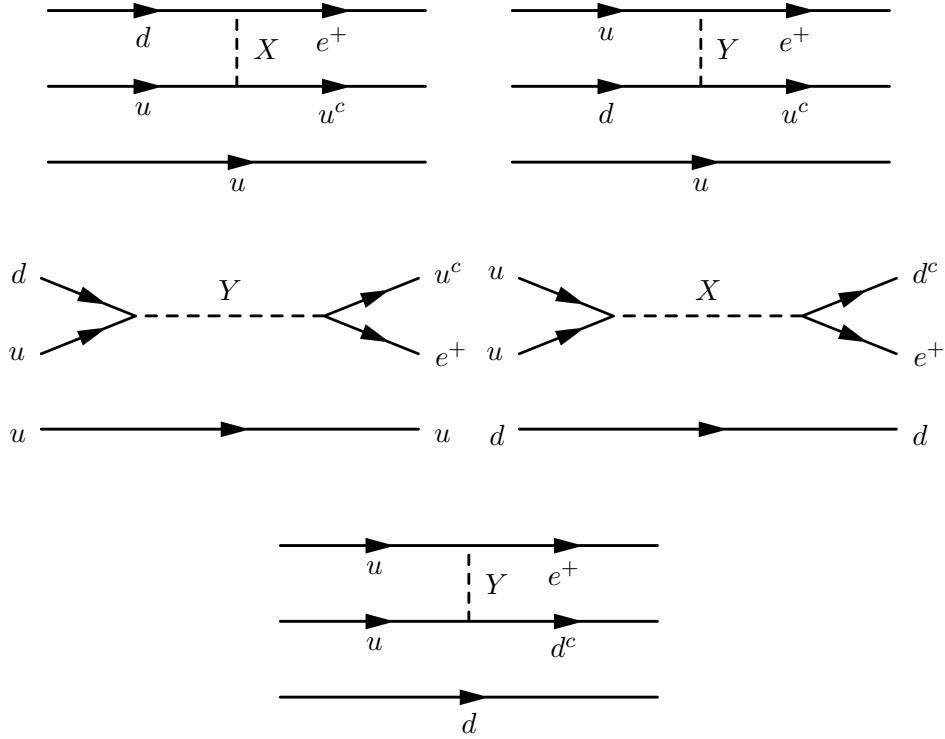


Figura 2.1: Diagrammi in cui $(uud) \rightarrow e^+ \bar{u}u$ oppure $(uud) \rightarrow e^+ \bar{d}d$. Se ai primi tre diagrammi il quark “spettatore” u viene sostituito con un quark d , otteniamo tre diagrammi che contribuiscono al decadimento del neutrone.

In figura 2.1 abbiamo indicato con X ed Y due diversi mediatori, con cariche elettriche rispettivamente di $4/3$ e di $1/3$. Entrambi accoppiano

quark e leptoni e sono dotati di carica di colore. Malgrado la possibile esistenza di due diversi mediatori, possiamo immaginare che le loro masse siano simili, cioè $M_X \sim M_Y$. Ritornando alla (2.36) dovremmo poter essere in grado di calcolare l'elemento di matrice di uno dei decadimenti mostrati per determinare la vita media del protone. Purtroppo il calcolo richiede metodi non perturbativi. Infatti, non esiste un modo per calcolare processi di interazione dovuti a quark legati. Tuttavia, la via più semplice, che ci permette comunque di ottenere una espressione seppure molto approssimata per la vita media, consiste in una analisi di natura dimensionale del processo, dalla quale otteniamo:

$$\tau_p \sim \frac{1}{\alpha_X^2} \frac{M_X^4}{m^5} \quad (2.38)$$

dove con m abbiamo voluto indicare la scala tipica dei processi adronici. Nel seguito porremo $m = m_p$.

2.3.1 Stime dei tassi di decadimento

In questo paragrafo, sulla base di quanto detto nel paragrafo 2.3 ed in particolare sfruttando la (2.38), procediamo ad esaminare quali possono essere gli ordini di grandezza di un decadimento protonico.

Il problema maggiore, come già detto, consiste nel valutare quale contributo al calcolo è apportato dalla corrente adronica determinata non da particelle libere, ma da un sistema legato di quark formanti il protone iniziale o il mesone finale. Possiamo supporre che $m = m_p$ (m_p = massa del protone) e fissando $\tau_p \gtrsim 10^{33}$ anni* e $\alpha_x \sim \alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$ otteniamo una stima per:

$$M_X \Big|_{m_p} \gtrsim 10^{15} \text{ GeV}. \quad (2.39)$$

Considerando l'ipotesi di α_X più piccole di α , si possono usare le costanti di Yukawa. Ricordiamo che, nel Modello Standard, queste vengono introdotte *ad hoc* in modo da ottenere i giusti valori sperimentali per le masse leptoniche. Si ha esigenza introdurne una per ogni leptone carico. L'accoppiamento di Yukawa è del tipo $g_Y \bar{l}_L \Phi l_R + h.c.$, avendo indicato con Φ il doppietto di Higgs. Quando quest'ultimo prende valore di aspettazione il leptone l diventa massivo e la massa acquistata è pari a

$$m_l = \frac{y_l \langle \phi \rangle}{\sqrt{2}} \quad . \quad (2.40)$$

*In accordo con le misure presentate nel paragrafo 2.1.

Tra l'altro, dalla relazione che lega i bosoni vettori W^\pm , mediatori dell'interazione debole, e il campo di Higgs stesso, otteniamo,

$$\langle \phi_0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_F}} \quad , \quad (2.41)$$

dove $G_F \approx 1.17 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$ è la costante di Fermi, determinabile, ad esempio, analizzando il decadimento del μ . Quindi

$$g_l = m_l \sqrt{2\sqrt{2}G_F} \quad . \quad (2.42)$$

Definiamo, in analogia a quanto fatto per le costanti di accoppiamento di gauge, anche la seguente espressione:

$$\alpha_l = \frac{g_l}{4\pi} \quad . \quad (2.43)$$

Non di meno, nell'ipotesi che i neutrini oscillino, possiamo estendere i risultati poc'anzi individuati anche a loro. Le oscillazioni indicano scale di massa intorno a 10–50 meV. I cosiddetti “limiti sperimentali diretti”, invece, sono dell'ordine degli eV per il ν_e . Per gli altri due neutrini i limiti sono molto peggiori [40], ma nel contesto di oscillazioni a tre neutrini si applica anche ad essi il limite di qualche eV (o i limiti cosmologici, ancora più restrittivi). Nel presente contesto ci limitiamo a valutare la costante di accoppiamento di Yukawa per il neutrino elettronico assumendo $m_\nu = 1$ eV. Consideriamo adesso la possibilità che α_X nella (2.38) sia dell'ordine di α_l e riportiamo nella tabella numero 2.9 le costanti di Yukawa con il relativo valore di α_X , mentre nella formula (2.44) riportiamo i corrispondenti valori per M_X .

Tabella 2.9: Costanti di accoppiamento di Yukawa

| g_l | Particella | $\alpha_X \sim \frac{g_l^2}{4\pi}$ |
|-------------------|------------|------------------------------------|
| $3 \cdot 10^{-6}$ | e | $7 \cdot 10^{-13}$ |
| $6 \cdot 10^{-4}$ | μ | $3 \cdot 10^{-8}$ |
| $6 \cdot 10^{-2}$ | τ | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| 10^{-9} | ν_e | $8 \cdot 10^{-20}$ |

$$\begin{aligned} M_X \Big|_{g_l}^{(e)} &\sim 10^{10} \text{ GeV}, & M_X \Big|_{g_l}^{(\mu)} &\sim 10^{12} \text{ GeV}, \\ M_X \Big|_{g_l}^{(\tau)} &\sim 10^{14} \text{ GeV}, & M_X \Big|_{g_l}^{(\nu_e)} &\sim 4 \cdot 10^6 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le stime dimensionali eseguite in questi paragrafi possono essere corrette da calcoli più precisi che tengano conto di tre questioni fondamentali:

- i) occorre scrivere in dettaglio gli operatori che descrivono il decadimento a partire da una teoria ben precisa;
- ii) bisogna valutare l'evoluzione delle costanti di accoppiamento fino alla scala di interesse per il decadimento del nucleone;
- iii) è necessario valutare gli elementi di matrice adronica. Ad esempio, per il decadimento $p \rightarrow \pi^0 e^+$ l'operatore $O^{(5)}$ mette in gioco una ampiezza del tipo:

$$\langle \pi^0 | (d^t(0) C^{-1} u(0)) u^t(0) | p \rangle = \xi m_P^2 U_\alpha(\vec{p}) \quad (2.45)$$

dove abbiamo indicato con $d(0), u(0)$ gli operatori di campo, con $U_\alpha(\vec{p})$ lo spinore del protone e con ξ una costante dell'ordine dell'unità.

In breve l'equazione (2.38) va corretta introducendo un fattore adimensionale η , che incorpora tutte queste correzioni. Facendo riferimento a Langacker [48], η risulta compreso tra 0.5 e 10. Questo suggerisce che la stima dimensionale (2.38) dia il giusto ordine di grandezza per la vita media del protone.

La conoscenza scientifica non gode di un accesso immediato alla realtà di cui parla, non è come aprire gli occhi e constatare che si è fatto giorno.

—A. Einstein—

Capitolo 3

Evoluzione delle costanti di accoppiamento

In questo capitolo mostreremo come una teoria rinormalizzabile prescrive l'esistenza di costanti di accoppiamento che variano logaritmicamente con il quadrupolo trasferito. Queste variazioni sono dovute ai “loop” di particelle virtuali sia fermioniche che bosoniche, le cosiddette correzioni radiative, che in altre parole sono fluttuazioni quantistiche. Focalizzeremo l'attenzione principalmente sulle correzioni radiative del secondo ordine in α , che sono chiamate correzioni radiative a 1-loop. In particolare discuteremo il caso della QED ed estenderemo i risultati al Modello Standard, che ci permetterà di discutere l'evoluzione delle costanti di accoppiamento nel contesto di teorie di grande unificazione.

3.1 Teorie rinormalizzabili

In questa sezione calcoleremo la correzione radiativa del propagatore fottonico nell'ambito di una teoria rinormalizzabile, la QED. Prima di procedere è opportuno fornire alcune informazioni su cosa sia una teoria rinormalizzabile.

La nostra interpretazione del mondo fisico spesso usa tecniche matematiche di natura perturbativa, facendo uso delle serie di funzioni. Accade non di rado però, che tali serie siano costituite da termini divergenti. Questo in molti casi crea problemi. Fortunatamente nell'ambito della fisica teorica quantistica (QFT) Tomonaga, Shwinger, Feynman e Dyson negli anni '50 risolsero il problema definendo il processo di rinormalizzazione. Una teoria è detta rinormalizzabile se essa rimane finita rimuovendo tutte le divergenze tramite la ridefinizione di un numero finito di parametri come la massa e la carica elettrica. Tale ridefinizione fa leva sull'inosservabilità dei parametri “nudi”, quelli cioè che vengono introdotti per definire

la teoria. Viceversa una teoria non rinormalizzabile necessita di un numero infinito di parametri da “curare”. Questo è quanto accade, ad esempio, nel caso di accoppiamenti a quattro fermioni. Tuttavia ci preme osservare che anche una teoria non rinormalizzabile può descrivere buona fisica, si pensi ad esempio al caso del decadimento β interpretato da Fermi. Comunque una teoria rinormalizzata ha un forte carattere predittivo e non dipende dal tipo di “cura” (regolarizzazione) usata, ottenendo valori teorici compatibili con quelli sperimentali. Invece in una teoria non rinormalizzabile le predizioni dipendono fortemente dalla “cura” usata. Poiché la rinormalizzabilità di una teoria di campo dipende dal tipo di divergenze che si incontrano nel processo perturbativo, una analisi dimensionale è già in grado di dare delle importanti informazioni. A tal proposito scriviamo la lagrangiana di interazione come somma di termini del tipo

$$\mathcal{L} = \sum_k \mathcal{L}_k \quad (3.1)$$

dove ogni termine \mathcal{L}_k è il prodotto di una costante G_k , di campi spinoriali, scalari e loro derivate, senza preoccuparci di come accoppiarli né di introdurre indici spinoriali o matrici γ_μ . Scriviamo quindi:

$$\mathcal{L}_k = G_k \partial^{C_k} \psi^{A_k} \phi^{B_k} \Phi^{W_k} , \quad (3.2)$$

avendo indicato con ψ un campo fermionico, con ϕ un campo bosonico privo di massa, con Φ un campo bosonico massivo e con ∂ l’operatore di derivata che può essere applicato a ψ , a ϕ e a Φ . Ovviamente la dimensionalità totale della lagrangiana, in unità naturali, deve essere pari a $[M^4]$, ciò implica che definendo*

$$d_k = \frac{3}{2} A_k + B_k + C_k + W_k , \quad (3.3)$$

la dimensione della costante è

$$[G_k] = [M^{4-d_k}] . \quad (3.4)$$

A questo punto consideriamo un generico diagramma di Feynman formato da f_e linee fermioniche esterne, b_e linee bosoniche esterne per i bosoni privi di massa, Φ_e linee bosoniche esterne per i bosoni massivi, f_i linee

*Si rende necessario ricordare che la dimensione di un campo fermionario è pari a $[M^{\frac{3}{2}}]$, diversamente, quella per un campo scalare è pari ad $[M]$ così come quella per l’operatore di derivazione.

fermioniche interne, b_i , linee bosoniche interne per i bosoni privi di massa, w_i linee bosoniche interne per i bosoni massivi e V_k vertici del tipo \mathcal{L}_k . L'espressione dell'elemento di matrice, considerando solo le dipendenze con i quadrimpulsi sarà:

$$I \equiv \int d^{4L}K \frac{K^{C+2w_i}}{(K+m)^{f_i}(K^2+m^2)^{b_i+w_i}} \quad (3.5)$$

dove L è il numero di loop da eseguire, mentre C deriva dalle derivate nei vertici e per questo

$$C = \sum_k V_k C_k \quad . \quad (3.6)$$

Quindi l'integrale può essere riscritto come:

$$I \sim \int K^{D-1} dK \quad (3.7)$$

con

$$D = 4L - f_i - 2b_i + \sum_k V_k C_k \quad (3.8)$$

A seconda del valore di D si avrà un contributo divergente o convergente*. Nello specifico se $D = 0$ avremo una divergenza logaritmica, se $D < 0$, I è convergente, altrimenti negli altri casi l'integrale diverge. In realtà da una analisi più dettagliata si evince che anche potenze di K con D dispari corrispondono a divergenze con D degradate di una unità. Quindi $D = 1$ corrisponde ad una divergenza logaritmica e non lineare. Inoltre può anche accadere che due termini divergenti si elidono vicendevolmente. Se però $D \geq 0$ e non si hanno cancellazioni, la “cura” consiste nell'introduzione di controtermini, a cui corrispondono grandezze fisiche arbitrarie, costrutti puramente teorici su cui l'indagine sperimentale non può essere eseguita.

Ritornando al calcolo precedente, possiamo semplificare l'espressione di D usando quanto segue. Notiamo che su ogni vertice k terminano A_k linee fermioniche delle quali quelle interne hanno due “terminazioni” e quelle esterne una sola. Poiché il numero totale di questi vertici, contati anche due volte è $\sum_k V_k A_k$, ne segue che

* D è noto come grado di divergenza superficiale.

$$f_e + 2f_i = \sum_k V_k A_k \quad , \quad (3.9)$$

analogamente

$$b_e + 2b_i = \sum_k V_k B_k \quad , \quad (3.10)$$

$$w_e + 2w_i = \sum_k V_k W_k \quad . \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda i “loop” invece, occorre ricordare che ad ogni propagatore è associato un $\int d^4 K$ e ad ogni vertice una delta di Dirac funzione degli impulsi $\delta(\sum K)$ che elimina un integrale. Escludendo una sola delta, quella che contiene la conservazione del quadrimpulso delle sole linee esterne, abbiamo:

$$L = f_e + b_i + w_i - \left(\sum_k V_k - 1 \right) \quad . \quad (3.12)$$

quindi usando la (3.12), la (3.8) e la (3.3) otteniamo:

$$D = 4 - \frac{3}{2} f_e - b_e + 2w_e + \sum_k V_k (d_k + W_k - 4) \quad . \quad (3.13)$$

Questa espressione è importantissima, infatti si osserva, che nel momento in cui $d_k + W_k - 4 > 0$, D dipende dal numero di vertici e quindi la teoria non è rinormalizzabile in quanto servirebbero un numero infinito di costanti da ridefinire. Ad esempio nel caso della teoria del bosone massivo intermedio, meglio nota con l’acronimo IVB, in cui $b_e = 0$ e $W_k \neq 0$, si nota che D dipende dal numero di vertici ed infatti la teoria non è rinormalizzabile. D’altra parte, nel caso della QED per la quale $W_k = 0$, è evidente come la richiesta che D non aumenti con l’aumentare del numero di vertici si rifletta sulla necessità di costruire una lagrangiana in cui la dimensione della costante G non sia minore di $[M^0]$. Questa è in realtà una condizione necessaria per ogni teoria rinormalizzabile.

3.2 Correzioni radiative

La QED, quindi, è una teoria abeliana rinormalizzabile *, questo ci consente di calcolare le correzioni radiative tramite un’opportuna ridefinizione

*Per maggiori informazioni si può cfr. [49, Capitolo 19]

della sua costante di accoppiamento. Di seguito esamineremo quest'ultimo aspetto che ci permetterà di individuare la dipendenza delle cariche dal quadrimpulso scambiato.

Già nel calcolo dei grafici di Feynman al primo ordine perturbativo in α troviamo dei contributi, detti a loop, che divergono. Questi sono mostrati in figura 3.1. Il primo, chiamato diagramma della flut-

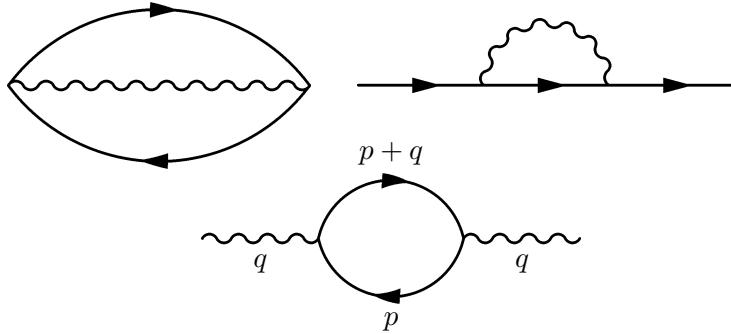


Figura 3.1: Grafico a loop del primo ordine in α perturbativo della QED.

tuazione quantistica del vuoto, è privo di linee esterne e per questo non prescrive nessuna transizione; il secondo rappresenta un termine di self-energy per l'elettrone; mentre il terzo è un termine di self-energy per il fotone, chiamato termine di polarizzazione del vuoto, in analogia alla polarizzazione indotta, ad esempio, da un campo elettrostatico su un dielettrico. L'elemento di matrice del terzo dei tre è

$$\mathcal{M} = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int Tr[\varepsilon_{r\alpha}(q)\gamma^\alpha iS_F(q+p)\gamma^\beta iS_F(p)\varepsilon_{r\beta}(q)]d^4p \quad (3.14)$$

dove

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad . \quad (3.15)$$

È facile osservare che \mathcal{M} è divergente, infatti, da una stima dimensionale

$$\mathcal{M} \sim \int \frac{d^4p}{p^2} \sim \int \frac{p^3 dp}{p^2} \sim p^2. \quad (3.16)$$

Per superare questo tipo di difficoltà, come accennato in precedenza, si adottano due procedure chiamate *regolarizzazione* e *rinormalizzazione*. La prima consiste in una opportuna modifica dell'integrale. La seconda interviene in una ponderata ridefinizione dei parametri di ingresso, in modo tale che, rimuovendo la regolarizzazione, l'integrale rimanga finito. Focalizziamo l'attenzione sui diagrammi del secondo ordine in α mostrati in

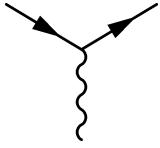


Figura 3.2: Grafico al primo ordine perturbativo in α .

figura 3.3, interpretabili come l'espansione del grafico in figura 3.2 all'ordine e^3 . I primi due prescrivono la correzione al propagatore fermionico, il terzo dà la correzione al vertice, mentre l'ultimo al propagatore fotonico. Noi ci concentreremo su quest'ultimo che, come vedremo nel dettaglio, sarà responsabile del "running" della costante di accoppiamento, ossia della dipendenza della carica con il quadrimpulso scambiato. Vale la pena far notare che seppure i primi tre grafici, presi singolarmente, influenzino la ridefinizione della carica, globalmente i loro contributi si elidono vicendevolmente. Infatti, considerando tutti e quattro i grafici di figura 3.3, avremmo, per la carica rinormalizzata, la seguente definizione*

$$e_r = \frac{Z_1}{Z_2} \sqrt{Z_3} e_o , \quad (3.17)$$

ma si dimostra che $Z_2 = Z_1$, dove Z_1 è introdotto a causa della self-energy dell'elettrone, Z_2 a causa della correzione al vertice e Z_3 , invece, è dovuto alla correzione al propagatore fotonico e sarà calcolato esplicitamente nelle pagine che seguono.

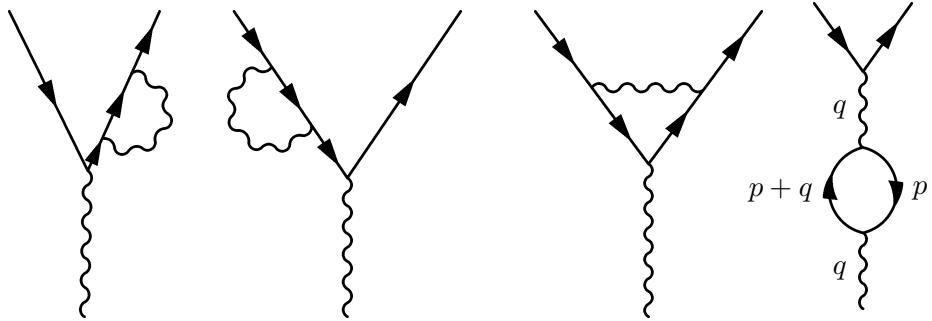


Figura 3.3: Questi sono i quattro contributi radiativi al secondo ordine perturbativo rispetto al diagramma in figura 3.2.

*Con e_o oppure e_{bare} abbiamo indicato il parametro della lagrangiana da cui si parte per i calcoli dei diagrammi di Feynman.

3.3 Correzione al secondo ordine del propagatore fotonico

Con riferimento ai diagrammi di Feynman al primo e secondo ordine perturbativo dello scattering elastico di due elettroni in figura 3.4, ci proponiamo di studiare il comportamento del propagatore fotonico per analizzare il ruolo della carica rinormalizzata*.

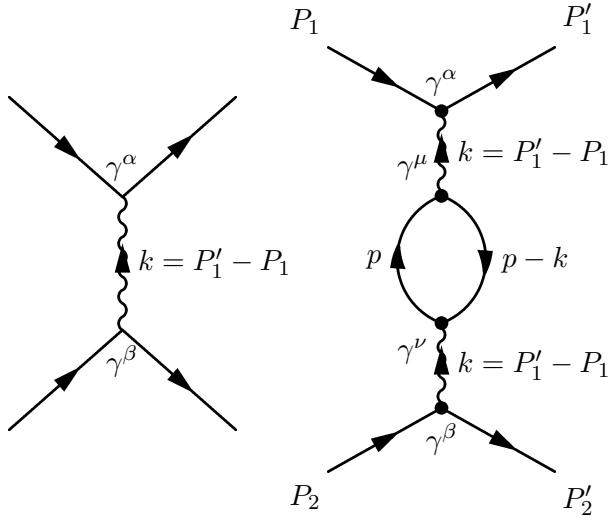


Figura 3.4: I due grafici di Feynman rappresentano lo scattering elettrone–elettrone (scattering Møller) rispettivamente al primo e al secondo ordine perturbativo.

Di seguito scriviamo gli elementi di matrice dei due grafici, indicando con \mathcal{M}_1 l'elemento di matrice del primo e con \mathcal{M}_2 quello del secondo.

$$\mathcal{M}_1 = (ie)^2 \bar{u}(p'_1) \gamma^\alpha u(p_1) i D_{\alpha\beta}(k) \bar{u}(p'_2) \gamma^\beta u(p_2) \quad (3.18)$$

con

$$D_{\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.19)$$

*Cfr. [47, Capitoli 9 e 10]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= (ie)^2 \bar{u}(p'_1) \gamma^\alpha u(p_1) iD_{\alpha\mu}(k) \frac{-(ie)^2}{(2\pi)^4} \int Tr [\gamma^\mu iS_F(p-k) \gamma^\nu iS_F(p)] d^4 p \cdot \\ &\quad \cdot iD_{\nu\beta}(k) \bar{u}(p'_2) \gamma^\beta u(p_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{M}_2 = (ie)^2 \bar{u}(p'_1) \gamma^\alpha u(p_1) \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} \bar{u}(p'_2) \gamma^\beta u(p_2) \quad (3.21)$$

dove

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k) = iD_{\alpha\mu}(k) (ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) iD_{\nu\beta}(k) \quad (3.22)$$

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-(ie)^2}{(2\pi)^4} \int Tr [\gamma^\mu iS_F(p-k) \gamma^\nu iS_F(p)] d^4 p . \quad (3.23)$$

Notiamo che il contributo al propagatore fotonico può essere graficato nel modo mostrato in figura 3.5, a cui associamo



Figura 3.5: Correzione del secondo ordine al propagatore fotonico.

$$iD_{\alpha\beta} \longrightarrow iD_{\alpha\beta} + iD_{\alpha\mu}(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) iD_{\nu\beta} . \quad (3.24)$$

Esplicitando S_F otteniamo

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{Tr \{ \gamma^\mu [\gamma_\rho(p^\rho + k^\rho) + m] \gamma^\nu [\not{p} + m] \}}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] [p^2 - m^2 + i\epsilon]} d^4 p \quad (3.25)$$

L'estensione della condizione di Lorentz (invarianza di gauge) al nuovo propagatore fotonico fissa la sua forma. Infatti, ricordando la sua espressione in funzione dello spazio-tempo,

$$D_{\mu\nu}(x) = \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D_{\mu\nu}(k) e^{-ikx} \quad (3.27)$$

§3.3 – Correzione al secondo ordine del propagatore fotonico

imponendo la condizione di Lorentz,

$$\partial^\mu D_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (3.28)$$

abbiamo

$$k^\mu D_{\mu\nu}(k) = 0 \quad (3.29)$$

e quindi

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0 \quad . \quad (\text{condizione di trasversalit\`a}) \quad (3.30)$$

Da cui la pi\`u generale espressione per $\Pi_{\mu\nu}(k)$, come mostrato in appendice C.2 dal calcolo diretto della (3.25), \`e

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (3.31)$$

D'altra parte, un diagramma di Feynman al primo ordine ha una espressione del tipo

$$\int d^4 k J_1^\alpha(-k) D_{\alpha\beta}(k) J_2^\beta(k) \quad (3.32)$$

ma poich\'e la corrente si conserva,

$$k_\mu J^\mu(k) = 0 \quad (3.33)$$

e sostituendo la (3.24) nella (3.32) il termine in $B(k^2)$ della (3.31) si annulla. A questo punto possiamo riscrivere la (3.24) come segue:

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 - e^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + i\epsilon} \right] + o(e^2) \quad , \quad (3.34)$$

dove $o(e^2)$ indica la possibilit\`a di considerare anche contributi superiori al secondo. Ricordando che

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n \quad (3.35)$$

§3.3 – Correzione al secondo ordine del propagatore fotonico

e considerando che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \rightarrow 0^*$ possiamo riscrivere la (3.34) come segue:

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 - e^2 \frac{A(k^2)}{k^2 + i\epsilon} \right] \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon + e^2 A(k^2)} \quad (3.36)$$

Poiché il fotone è privo di massa, occorre imporre l'esistenza di un polo nel propagatore fotonico per $k = 0$ nella (3.36),

$$A(0) = A(k^2 = 0) = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Sviluppando $A(k^2)$ in serie di Taylor intorno a $k^2 = 0$,

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \quad (3.38)$$

dove

$$A'(0) = \left[\frac{dA(k^2)}{d(k^2)} \right]_{k^2=0} \quad (3.39)$$

e $\Pi_c(k^2)$ è il resto della funzione, tale che $\Pi_c(k^2) \rightarrow 0$ per $k^2 \rightarrow 0$. Sostituendo $A(k^2)$ nella (3.34) e moltiplicando per e^2 , rinormalizziamo la carica elettrica nel seguente modo:

$$e_r = Z_3^{\frac{1}{2}} e + o(e^3) \quad (3.40)$$

con

$$Z_3 = \left[1 - \frac{1}{2} e^2 A'(0) \right]^2 \quad (3.41)$$

Ricordiamo che la (3.40) sarà la carica elettrica di cui le particelle sono dotate in un processo di interazione. Quindi l'espressione del propagatore fotonico diventa:

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_r^2 + \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_r^4 \Pi_c(k^2) + O(e_r^6) \quad (3.42)$$

Nella sezione successiva procederemo nel calcolo esplicito dei contributi $A'(0)$ e $\Pi_c(k^2)$, con l'obiettivo di rendere l'integrale del loop convergente.

*Ricordiamo che la convenzione usata è la seguente: $\hbar = c = 1$ con $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \simeq \frac{1}{137}$.

3.3.1 Regolarizzazione dimensionale

La regolarizzazione permette di controllare la divergenza dei “loop” grazie ad una attenta modifica della teoria, collegata, tramite una procedura di limite, alla teoria originaria.

Di regolarizzazioni ne esistono diversi tipi. Una delle più note è il metodo del cut-off, che ha però lo spiacevole svantaggio di introdurre un termine di massa per il fotone rompendo l’invianza di gauge, tuttavia rimediabile tramite una faticosa procedura di rinormalizzazione. Il metodo degli integrali dimensionali, invece, risulta uno strumento molto più pratico poiché non rompe alcuna simmetria. Quest’ultima procedura, infatti, è particolarmente usata in QED e in tutte le teorie di gauge non abeliane come la QCD. In questo paragrafo mostreremo, tramite la regolarizzazione dimensionale, la dipendenza dal quadrimpulso della costante di accoppiamento eletromagnetica e mostreremo come assorbire il contributo divergente del loop nella costante di accoppiamento ridefinita.

Per iniziare è necessario ricordare che un generico integrale del tipo

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s)^n} \quad (3.43)$$

avrà una soluzione definita tramite la funzione $\Gamma(x)$ di Eulero*:

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n - \frac{D}{2}}} \quad (3.44)$$

con $n > \frac{D}{2}$.

Come primo passo applichiamo l’integrazione dimensionale alla (3.25). A tal proposito definiamo

$$4 - \eta = D \quad (3.45)$$

con η parametro positivo, che in seguito sarà fatto tendere a zero riottenendo la dimensione iniziale. Grazie a ciò abbiamo:

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{Tr \{ \gamma^\mu [\gamma_\rho(p^\rho + k^\rho) + m] \gamma^\nu [\not{p} + m] \}}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] [p^2 - m^2 + i\epsilon]} d^D p \quad (3.46)$$

*Si veda l’appendice B.1.

§3.3 – Correzione al secondo ordine del propagatore fotonico

Affinché possiamo procedere nei calcoli è necessario calcolare il numeratore dell'integrandino*

$$N^{\mu\nu}(p, k) \equiv Tr [\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)] \quad (3.47)$$

per poi usare la parametrizzazione di Feynman[†] che ci permette di scrivere

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m^2 + (k^2 + 2pk)x + i\epsilon]^2} d^D(p). \quad (3.48)$$

e sostituendo $p = q - kx$ otteniamo:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \Pi(k^2) \quad (3.49)$$

con[‡]

$$\Pi(k^2) = \frac{\mu^{4-D} f(D) \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{8\pi^{4-D} \frac{1}{2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{2-\frac{D}{2}}} \quad (3.50)$$

È facile a questo punto osservare come la condizione di gauge (3.30) sia automaticamente soddisfatta nella (3.49). Ricordando che $D = 4 - \eta$ e sviluppando la (3.50) per $\eta \rightarrow 0$ otteniamo la teoria originaria con

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} - \ln \pi \right) + \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{k^2 x(1-x) - m^2}{\mu^2} \right] . \end{aligned} \quad (3.51)$$

È interessante notare come, per la presenza di $1/\eta$, la divergenza del “loop” sia ora contenuta nel primo addendo del secondo membro della (3.51).

Dal confronto della (3.31) e della (3.38) con la (3.49), emerge che

$$\Pi(k^2) = A'(0) + \Pi_c(k^2) . \quad (3.52)$$

Ricordando che $\Pi_c(k^2 = 0) = 0$, $\Pi(0) = A'(0)$ otteniamo

*Si veda l'appendice C.1.

[†]Si veda l'appendice B.2.

[‡]Per i calcoli esplicativi della (3.50) e della (3.51) si rimanda all'appendice C.2.

$$e_r^2 \Pi_c(k^2) = e_r^2 [\Pi(k^2) - \Pi(0)] \quad (3.53)$$

da cui risulta che

$$\begin{aligned} A'(0) = \Pi(0) &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} - \ln \pi \right) + \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x)x \ln \left[-\frac{m^2}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

e

$$\Pi_c(k^2) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x)x \ln \left[1 - \frac{k^2 x(1-x)}{m^2} \right] . \quad (3.55)$$

Quindi, ricordando l'espressione per la carica rinormalizzata (3.40) e quella per la correzione al primo ordine del propagatore fotonico (3.42), si nota come la divergenza sia stata assorbita da e_r , che ora può essere opportunamente ridefinita sfruttando l'indeterminazione della carica di particella libera (e_{bare}). D'altro canto, visto la (3.42), possiamo definire una nuova costante di accoppiamento efficace, dipendente dall'impulso scambiato

$$e_{eff}^2(k^2) = e_r^2 [1 + e_r^2 \Pi_c(k^2)] . \quad (3.56)$$

Questa per $-k^2 = Q^2 \gg m^2$ ha la seguente forma:

$$e_{eff}^2 = e_r^2 \left[1 + \frac{e_r^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \ln \frac{Q^2}{m^2} + \text{cost.} \right] \quad (3.57)$$

Con ciò notiamo che la costante di accoppiamento efficace varia in base al quadrimpulso scambiato e , inoltre, dipende dalla scala della massa m della particella virtuale che genera il "loop". Invece e_r è la carica che entra nelle ampiezze osservabili e Z_3 della (3.40) è una relazione tra la carica osservabile di una particella fisica reale e la carica "nuda" e_o di una particella non in interazione, che è un costrutto teorico ed è completamente inosservabile.

Per quanto le leggi della matematica si riferiscano alla realtà, esse non sono certe, e per quanto siano certe, esse non si riferiscono alla realtà.

—A. Einstein—

Capitolo 4

Teorie di Grande Unificazione

Il modello standard nel corso degli anni ha avuto molto successo ma, come abbiamo evidenziato, trascina con sé diverse limitazioni e suggerisce alcune domande. In questo capitolo vedremo come estendere il Modello Standard a scale di energia più alte tramite l'uso di teorie effettive invocando i risultati dei capitoli precedenti e assorbendo queste teorie in scenari più complessi caratterizzati da modelli di grande unificazione.

4.1 Possibili mediatori

Abbiamo più volte ripetuto che la massa che compare nella (2.13) è presumibile che sia quella del propagatore scambiato nel processo di violazione del numero barionico. Quindi, assumendo che le interazioni (2.15)–(2.20) sono mediate dallo scambio di un bosone massivo, si possono individuare i numeri quantici di quest'ultimo studiando gli operatori effettivi, che così scritti, suggeriscono che venga scambiato un propagatore scalare. È così che per gli operatori $O^{(1)}$, $O^{(2)}$, $O^{(3)}$, $O^{(5)}$ il propagatore deve avere ipercarica pari ad $1/3$, deve essere un singoletto di $SU(2)$ e un anti-tripletto di colore; l'operatore $O^{(4)}$, invece, deve essere mediato da un tripletto di $SU(2)$, con ipercarica $1/3$ e deve essere un anti-tripletto di colore; mentre per $O^{(6)}$ troviamo che deve essere mediato da un bosone con ipercarica $4/3$ che è anche un singoletto di $SU(2)$ e un anti-tripletto di $SU(3)$.

Nella tabella 4.1 abbiamo riportato i numeri quantici dei suddetti bosoni scalari accompagnati anche dai loro accoppiamenti tipici.

Facciamo notare che operatori costituiti da una coppia di fermioni “left” e da una “right” ($RRLL$), possono essere opportunamente riarrangiati per essere mediati da un propagatore vettoriale. Infatti, esaminando

| Bosoni mediatori | $SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y$ | Tipo di accoppiamento | Operatore |
|---------------------|------------------------------|---|--------------------------------------|
| S_1 | $(\bar{3}, 1, \frac{1}{3})$ | $q_L q_L, u_R d_R, q_L^c l_L^c, u_R^c e_R^c, d_R^c \nu_R^c$ | $O^{(1)}, O^{(2)}, O^{(3)}, O^{(5)}$ |
| S_2 | $(\bar{3}, 3, \frac{1}{3})$ | $q_L q'_L, q_L^c l_L^c$ | $O^{(4)}$ |
| S_3 | $(\bar{3}, 1, \frac{4}{3})$ | $u_R u'_R, d_R^c e_R^c$ | $O^{(6)}$ |
| V_1 | $(\bar{3}, 2, \frac{5}{6})$ | $q_L u_R, q_L^c e_L^c, l_L^c d_R^c$ | $O^{(1)}, O^{(2)}$ |
| V_2 | $(\bar{3}, 2, -\frac{1}{6})$ | $q_L d_R, q_L^c \nu_R^c, l_L^c u_R^c$ | $O^{(1)}$ |

Tabella 4.1: Mediatori massivi con $B-L = \frac{2}{3}$. Abbiamo usato la seguente nomenclatura: q sta per quark, l per leptone, mentre l'indice c indica la coniugazione di carica.

gli operatori $O^{(1)}$ e $O^{(2)}$ e sfruttando l'identità di Fierz*, abbiamo

$$O^{(1)} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ij} \left[\bar{d}_R^\alpha \gamma^\mu l_L^i \right] \left[\bar{q}_L^{\beta i} \gamma_\mu u_R^\gamma \right] = \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ij} \left[\bar{u}_R^\beta \gamma^\mu l_L^i \right] \left[\bar{q}_L^{\gamma i} \gamma_\mu d_R^\alpha \right] (-1) \quad (4.2)$$

$$O^{(2)} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ij} \left[\bar{q}_L^{\alpha i} \gamma_\mu e_R \right] \left[\bar{u}_R^\gamma \gamma_\mu q_R^{\beta j} \right] \quad (4.3)$$

Alla luce di ciò otteniamo che processi descritti dall'operatore $O^{(1)}$ possono essere mediati da un bosone vettore con ipercarica pari a 5/6 oppure -1/6 ed essere un anti-tripletto di colore; invece, $O^{(2)}$ sarà mediato solo dal primo dei due. Questi ultimi due mediatori sono anch'essi riportati nella tabella 4.1 con i loro accoppiamenti tipici.

A questo punto è interessante verificare se alcuni di questi mediatori sono predetti da teorie di grande unificazione. Di seguito, valuteremo il caso del gruppo $SU(5)$ e di quello $SO(10)$. Ci concentriamo in particolare sul contributo dovuto allo scambio dei nuovi bosoni vettori che (a differenza dei bosoni di Higgs) accoppiano ai fermioni con costanti dell'ordine dell'unità.

4.1.1 Effetto dei nuovi bosoni vettori di $SU(5)$

Il modello $SU(5)$ classifica i 15 fermioni levogiri di ogni generazione in due multipletti [6]:

$$15 = \bar{5} \oplus 10 \quad . \quad (4.4)$$

*Si veda l'appendice A.1.

La rappresentazione fondamentale è

$$\Psi_5 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^c \\ -\nu^c \end{pmatrix}_R \quad (4.5)$$

che comprende tre quark di diverso colore e una coppia di anti-leptoni. Mentre il decupletto è dato dal seguente prodotto tensoriale antisimmetrico:

$$(5 \otimes 5)_A = 10 . \quad (4.6)$$

Il gruppo $SU(5)$ ha 24 generatori, infatti se indichiamo con 5 lo stato della rappresentazione fondamentale, abbiamo

$$\bar{5} \otimes 5 = 24 \oplus 1 \quad (4.7)$$

di cui 12 come vedremo sono i generatori del Modello Standard. Infatti ogni stato 5 ha i seguenti numeri quantici

$$5 \longrightarrow (3, 1, -1/3) \oplus (1, 2, 1/2) , \quad (4.8)$$

che lo identificano rispetto ai sottogruppi del Modello Standard $SU(3)$, $SU(2)$, e $U(1)$. Dal calcolo abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar{5} \otimes 5 = & (8, 1, 0) \oplus (1, 1, 0) \oplus (\bar{3}, 2, 5/6) \oplus (3, 2, -5/6) \oplus \\ & +(1, 3, 0) \oplus (1, 1, 0) . \end{aligned} \quad (4.9)$$

È semplice individuare nei primi due e nel quinto i generatori del modello standard, mentre il terzo e il quarto sono dodici nuovi generatori. Infatti, $(8, 1, 0)$ sono gli otto bosoni che mediano le interazioni tra i quark nelle interazioni forti che corrispondono al sottogruppo $SU(3)_c$ (i gluoni); i tre campi $(1, 3, 0)$ sono i bosoni W^+ , W^- e W^0 , corrispondenti al sottogruppo $SU(2)_L$ e, infine, ritroviamo anche il bosone legato al sottogruppo $U(1)_Y$, cioè $(1, 1, 0)$. I nuovi dodici bosoni sono $(\bar{3}, 2, -5/6)$ e $(\bar{3}, 2, 5/6)$. Di quelli discussi nella tabella 4.1 notiamo che il gruppo $SU(5)$ contiene solo V_1 . Questo vuol dire che $SU(5)$ contempla la possibilità del decadimento del protone e ingloba i processi descritti dagli operatori effettivi $O^{(1)}$ e $O^{(2)}$ scritti come nella (4.1)

4.1.2 Effetto dei nuovi bosoni vettori di SO(10)

In questo paragrafo ci occuperemo solo dell'identificazione dei generatori del gruppo per confrontarli con i mediatori in tabella 4.1. Il modello $SO(10)$ può essere decomposto sia nel gruppo $SU(5)$ che in quello di Pati–Salam.

La rappresentazione fondamentale del gruppo $SO(10)$ è il decupletto **10***. Per semplicità procediamo alla identificazione dei generatori passando per la seguente decomposizione:

$$SO(10) \longrightarrow SU(5) \otimes U(1) \quad (4.10)$$

che ci permette di scrivere il decupletto di $SO(10)$ come:

$$\mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \bar{\mathbf{5}} \quad . \quad (4.11)$$

Poiché $SO(10)$ è un gruppo ortogonale esso avrà 45 generatori, infatti:

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{54} \quad (4.12)$$

da cui

$$\mathbf{45} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{24} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \quad . \quad (4.13)$$

Osserviamo che oltre ai 24 generatori di $SU(5)$, esistono altri 21 generatori dei quali ci interessa identificare i numeri quantici rispetto al Modello Standard. Per la (4.7) e la (4.8)

$$\mathbf{1} = (1, 1, 0) \quad (4.14)$$

invece per la (4.6) e la (4.8) abbiamo:

$$\mathbf{10} = (\bar{3}, 1, -2/3) \oplus (3, 2, 1/6) \oplus (1, 1, 1) \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{10}} = (3, 1, 2/3) \oplus (\bar{3}, 2, -1/6) \oplus (1, 1, -1) \quad . \quad (4.16)$$

Da cui si evince che il modello $SO(10)$ contiene, tramite il decupletto 10, anche il bosone vettore V_2 elencato nella tabella 4.1.

*Per convenzione scriveremo in grassetto i multipletti solo per il gruppo $SO(10)$.

4.2 Costante di accoppiamento rinormalizzata

Nel capitolo precedente abbiamo ripercorso la filosofia che si cela dietro una teoria rinormalizzabile. Abbiamo visto come le correzioni radiative del propagatore intervengono nella ridefinizione delle costanti di accoppiamento determinando l’evoluzione di queste col quadrimpulso scambiato. Ora vogliamo estendere tali risultati al Modello Standard che, essendo composto da tre gruppi di gauge, $SU(3)_c \otimes SU(2)_l \otimes SU(1)_Y$, possiede altrettante costanti di accoppiamento. Dalla (3.57), usando la (3.35) e sostituendo la carica elettrica e con una carica generica g , possiamo scrivere:

$$g^2 = g_0^2 \frac{1}{1 - g_0^2 \frac{b}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^2} \quad (4.17)$$

dove g_0 è la carica in corrispondenza di una massa μ_0 , b è un coefficiente che dipende dalla teoria in esame, che sarà meglio chiarito nel seguito e g è il valore della carica in funzione del quadrimpulso μ . Dalla (4.17) otteniamo:

$$-\frac{1}{2} (g^{-2} + g_0^{-2}) = \frac{b}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) \quad (4.18)$$

e ponendo $t = \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)$ e differenziando, otteniamo:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{b}{(4\pi)^2} g^3 \quad . \quad (4.19)$$

Come visto per la QED (3.57) anche per un qualsiasi gruppo di gauge G_i , variando la scala degli impulsi, la costante di accoppiamento effettiva obbedisce all’equazione (4.19) dove chiamiamo $\beta = \frac{b}{(4\pi)^2}$ la β -function, la quale è di particolare interesse perché contiene la dipendenza dal numero e dal tipo di particelle virtuali che contribuiscono al calcolo della correzione del propagatore. Quindi per un generico gruppo di gauge G_i , otteniamo

$$g_i^{-2}(\mu) = g_i^{-2}(\mu_0) - \frac{b_i}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) \quad . \quad (4.20)$$

Il valore dei coefficienti b_i in presenza di vettori, fermioni o scalari, vale:

$$b_i = -\frac{11}{3} t_2(V, G_i) + \frac{4}{3} t_2(F, G_i) + \frac{1}{3} t_2(S, G_i) \quad (4.21)$$

e

$$t_2(R, G) \delta^{ab} = Tr\{T^a(R, G) T^b(R, G)\} \quad (4.22)$$

dove $T^a(R, G_i)$ sono i generatori del gruppo G_i con rappresentazione R, (F sta per fermione, V per vettore ed S per scalare). Inoltre dalle proprietà della rappresentazione aggiunta si dimostra che

$$t_2(V, SU(n)) = n \quad \text{con } n > 1 \quad (4.23)$$

Il significato di b_i è cruciale per il proseguo della nostra discussione, per cui è necessario chiarirne adeguatamente il ruolo. Il coefficiente b_i , come già detto, tiene conto del numero e del tipo di particelle virtuali che entrano in gioco nelle fluttuazioni quantistiche del propagatore. Notiamo che nella formula (3.14) compare la traccia sugli indici di Dirac rendendo l'elemento di matrice un invariante di Lorentz. Il caso della (3.14) è però relativo ad una teoria di gauge $U(1)$ per cui il generatore associato è uno scalare pari ad uno e per questo non è evidente. In generale però, associato alla carica di un gruppo, si accompagnano i generatori del gruppo stesso. Questi vanno prescritti ai vertici dei grafici di Feynman. Ciò implica che nell'elemento di matrice di ogni “loop” compaiono anche i generatori del gruppo dei quali si richiede la traccia affinché l'elemento di matrice stesso rimanga un invariante di Lorentz. È per questo motivo che, assorbita nella b_i , compare la traccia dei generatori.

4.3 Evoluzione delle costanti di accoppiamento

Abbiamo visto che la costante di accoppiamento effettiva di un gruppo di gauge G_i dipende logaritmicamente dal quadrimpulso trasferito. Possiamo chiederci se nell'ambito della teoria del Modello Standard le sue tre costanti di accoppiamento tendono allo stesso valore limite al crescere del quadrimpulso. Ciò permetterebbe di individuare un gruppo di gauge che unifichi le tre interazioni del Modello Standard. Questa idea conduce alla formulazione di uno schema teorico noto col nome di teoria di grande unificazione. Il cardine di tale modello è l'uso di un solo gruppo di gauge e quindi di una sola costante di accoppiamento che lo parametrizzi, nell'idea che ciò sia l'espressione dell'unificazione delle forze. In altre parole l'idea di base di una grande unificazione è che oltre una elevata scala energetica, il gruppo del Modello Standard G_{SM} è contenuto in un gruppo più grande G_{GUT} . G_{GUT} , inevitabilmente, possiede delle simmetrie aggiuntive, che restringono l'arbitrarietà di alcuni parametri nel Modello Standard. In corrispondenza della scala energetica elevata, M_X , il gruppo G_X si rompe

spontaneamente generando il sistema di costanti di accoppiamento che osserviamo a basse energie. Lo schema più semplice di GUT che possiamo supporre è il seguente:

$$G_{GUT} \xrightarrow{M_X} G_{SM} \xrightarrow{M_Z} SU(3)_c \otimes U(1)_{em} \quad (4.24)$$

A volte è possibile anche rompere un gruppo G_{GUT} in sottogruppi intermedi prima di arrivare al gruppo del Modello Standard G_{SM} . È ovvio, quindi, che un modello di grande unificazione, essendo tale, deve necessariamente contenere il Modello Standard, di conseguenza G_{GUT} deve possedere un rango minimo pari a quattro*. La corretta riproduzione delle particelle del Modello Standard è una altra fondamentale richiesta che un gruppo G_{GUT} deve necessariamente soddisfare. Quindi G_{GUT} deve riprodurre lo spettro dei fermioni osservati e deve, inoltre, possedere una rappresentazione complessa. Infatti, una importante proprietà del Modello Standard è la violazione della parità nelle interazioni deboli. Ciò implica l'esistenza di campi con chirialità diverse, “left” e “right” e con rappresentazioni diverse, cioè non equivalenti sotto $SU(2)$. A tale proposito l'esistenza di una rappresentazione complessa in G_{GUT} garantisce che un elemento coniugato del gruppo non può essere uguale all'elemento stesso. Gli unici gruppi che ammettono rappresentazioni complesse sono $SU(n)$ con $n \geq 3$, $SO(4n+2)$ ed E_6 [†]. Quanto detto restringe i possibili gruppi di grande unificazione a $SU(n)$, a partire da $n \geq 5$, a $SO(4m+2)$ con $m \geq 2$ e ad E_6 .

Nel seguito analizzeremo le proprietà predittive del modello standard alla luce di un eventuale gruppo di grande unificazione $SU(5)$ ed $SO(10)$.

4.3.1 $SU(5) \rightarrow SM$

Il gruppo $SU(5)$ è definito dalla sua rappresentazione fondamentale: il gruppo di matrici unitarie 5×5 con determinante uguale ad uno [‡]. Una generica trasformazione può essere scritta come:

$$U = \exp \left\{ -i \sum_{m=0}^{23} \theta^m T^m \right\} \quad (4.25)$$

*Il rango è il numero massimo di generatori del gruppo che commutano tra di loro. Il Modello Standard ne ha quattro, due generatori per il gruppo $SU(3)$, uno da $SU(2)$ e l'ultimo da $U(1)$. Infatti per un gruppo $SU(n)$ il rango è pari a $n - 1$.

[†]Una dettagliata discussione dei gruppi $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, e dei gruppi eccezionali come E_6 si può trovare in [50, 51].

[‡] $SU(5)$ è stato uno dei primi modelli di grande unificazione ideati (1974). È anche conosciuto col nome di *gruppo minimale di grande unificazione* per la cui realizzazione si sono adoperati Georgi, Glashow, Quin e Weinberg. Cfr. [6].

dove i generatori $T^m = \frac{1}{2}\lambda^m$ sono hermitiani e a traccia nulla con la normalizzazione seguente:

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} . \quad (4.26)$$

Poichè un gruppo della forma $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$ può essere contenuto in uno della forma $SU(N+M)$, è lecito scegliere $SU(N)$ tale da agire sui primi N indici della rappresentazione di $SU(N+M)$ ed $SU(M)$ sui restanti M indici. Infatti $SU(5)$ ha due rappresentazioni a dimensione cinque, $\mathbf{5}$ e $\bar{\mathbf{5}}$, già menzionate nel paragrafo 4.1.1, con la seguente decomposizione:

$$\mathbf{5} \rightarrow (3, 1, -1/3) \oplus (1, 2, 1/2) \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{5}} \rightarrow (\bar{3}, 1, 1/3) \oplus (1, \bar{2}, -1/2) \quad (4.28)$$

dove il doppietto $\bar{2}$ è equivalente a 2 perchè operiamo con rappresentazioni di $SU(2)$. Seguendo la (4.27) possiamo raggruppare gli antiquark down e il doppietto leptonic del Modello Standard in una unica rappresentazione:

$$\bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \quad (4.29)$$

Dalla (4.6) otteniamo il decupletto di $SU(5)$, che si decomponne nel seguente modo:

$$10 = (\bar{3}, 1, -2/3) \oplus (3, 2, 1/6) \oplus (1, 1, 1) \quad (4.30)$$

il che mostra che la 10 include u^c , q e l^c rispettivamente. In questo modo ogni generazione del Modello Standard è accomodata in

$$\bar{\mathbf{5}} \oplus 10. \quad (4.31)$$

Usando la (4.29) e la (4.6) otteniamo la forma esplicita del decupletto*:

*Dal prodotto tensoriale della (4.6) abbiamo che $10_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} (5_a 5'_b - 5_b 5'_a)$. Ad esempio il termine $10_{54} = -10_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-v_e e' + e v'_e)$ la cui ipercarica, per la (4.27) è pari ad 1 e quindi il termine 10_{54} corrisponde a $(1, 1, 1)$ nella (4.30) ossia ad e^c . Come altro esempio il termine $10_{12} = -10_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_1 d'_2 - d_2 d'_1)$ ha ipercarica $-2/3$, come il coniugato di quark up e per la conservazione del colore 10_{12} è equiparabile a $\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} u_\gamma^c$ che trasforma come un tripletto coniugato $(\bar{3})$ di $SU(3)$. Quindi $10_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_3^c$. Procedendo in modo analogo si determina la struttura completa del decupletto.

$$10 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u^2 & -d^2 \\ -u_2^c & -u_1^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^c \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^c & 0 \end{pmatrix}_L \quad (4.32)$$

dove il coefficiente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un termine convenzionale di normalizzazione.

Per quanto accennato prima, vogliamo verificare se a distanze molto piccole, quando il quadrimpulso trasferito è molto più grande delle masse dei bosoni vettoriali più pesanti, la simmetria $SU(5)$ viene restaurata e se tutte le interazioni dei bosoni vettoriali intermedi tra di loro e con altre particelle (fermioni e bosoni) determinano una singola costante di accoppiamento, cioè una singola carica g_5 . È necessario quindi poter confrontare le tre cariche del Modello Standard con quelle del gruppo $SU(5)$.

La derivata covariante di questo gruppo è:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{m=0}^{23} A_\mu^m \frac{\lambda^m}{2} \quad (4.33)$$

mentre per il Modello Standard*

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{n=1}^8 G_\mu^n \frac{\lambda^n}{2} + ig \sum_{j=1}^3 W_\mu^j \frac{\tau^j}{2} + ig' Y B_\mu \quad . \quad (4.34)$$

Per quanto detto vogliamo verificare se ad una scala energetica in cui $\mu > \mu_0 = M_X$ si verifica che

$$g_5 = g_3 = g = g' \quad . \quad (4.35)$$

Ovviamente, però, il confronto tra costanti di accoppiamento di sottogruppi diversi è lecito quando queste sono normalizzate. Tale normalizzazione, come vedremo di seguito, passa attraverso quella dei generatori del proprio gruppo. Per i gruppi non abeliani non ci sono grossi problemi, dato che sono tutti normalizzati allo stesso modo:

$$Tr\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (4.36)$$

*Nella formula (4.34) abbiamo tacitamente indicato con g_s la carica di $SU(3)_c$, con g quella di $SU(2)_L$ e con g' la carica del gruppo $U(1)_Y$.

Invece le differenze sorgono per i gruppi abeliani e quindi per g' . In questo caso, confrontando la (4.33) con la (4.34), occorre soddisfare la seguente relazione:

$$ig_5 \frac{\lambda^0}{2} A_\mu^0 = ig' Y B_\mu \quad (4.37)$$

sapendo che

$$\frac{\lambda^0}{2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

che l'ipercarica del quintupletto è:

$$Y_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e che A_μ^0 è identificabile con B_μ , allora:

$$Y_{SM} \equiv Y = -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\lambda^0}{2} \implies g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_5 \quad . \quad (4.38)$$

Come abbiamo già visto il calcolo dei “loop” ci permette di scrivere:

$$\alpha_i^{-1}(M_X) = \alpha_i^{-1}(M_Z) - \frac{b_i}{2\pi} \ln \left(\frac{M}{M_Z} \right) \quad (4.39)$$

dove M_X ed M_Z sono due valori del quadrimpulso trasferito e in particolare M_Z è il valore del quadrimpulso trasferito pari al valore della massa del bosone vettore Z^0 ; $\alpha_i^{-1}(M_z)$ è la costante di accoppiamento associata al gruppo G_i valutata in M_Z . M_X rappresenta il valore del quadrimpulso in cui le costanti di accoppiamento tendono allo stesso valore. A causa della dipendenza logaritmica è lecito aspettarsi che $M_X \gg M_Z$ e quest’ultima è, tra l’altro, molto maggiore delle masse delle particelle il cui contributo viene considerato nel calcolo. La nostra intenzione è quindi quella di verificare l’esistenza di M_X .

Per verificare questo abbiamo adottato due procedure equivalenti. La prima consiste nell'individuare quel valore di M_X che soddisfi l'uguaglianza tra sole due costanti di accoppiamento, per poi sostituire il valore ottenuto nella terza e quindi confrontare se le tre cariche, calcolate tutte in M_X , si sovrappongono. Detta in altri termini:

$$\exists! M_X^{(i+j)} \mid \alpha_i(M_X^{(i+j)}) = \alpha_j(M_X^{(i+j)}) \quad \text{con } i \neq j \quad \text{e} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.40)$$

e verificare se

$$\alpha_1(M_X^{(i+j)}) = \alpha_2(M_X^{(i+j)}) = \alpha_3(M_X^{(i+j)}) \quad (4.41)$$

Invece il secondo metodo consiste nell'individuare quel valore di M_X tale che $\alpha_i(M_X) = \alpha_j(M_X)$ con $i \neq j$ e poi confrontare, estrapolando all'indietro, il valore di $\alpha_k(M_Z)$ con k, j, i diversi, con il valore sperimentale di $\alpha_k(M_Z)$. Ovviamente poiché le costanti di accoppiamento sono tre, ogni metodo è ripetuto tre volte, esaurendo tutte le possibili combinazioni. Per eseguire i calcoli occorre ricordare la (4.20), (4.33), (4.34), (4.38) e che

$$\begin{aligned} g \sin \theta_w &= g' \cos \theta_w = e \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi} \end{aligned} \quad (4.42)$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha_3(\mu) &\equiv \frac{g_3^2(\mu)}{4\pi} = \alpha_{strong}(\mu) \\ \alpha_2(\mu) &\equiv \frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} = \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_w} \\ \alpha_1(\mu) &\equiv \frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_w} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nella tabella 4.2 riportiamo i valori sperimentali usati ed i relativi errori statistici [40].

Resta da calcolare le quantità b_i che sono determinate dall'ordine del gruppo cioè dal numero di bosoni e dal numero di saperi fermionici. È quindi utile riportare nella tabella 4.3 i numeri quantici delle particelle del Modello Standard.

Riprendendo la (4.21) occorre determinare il valore di b_3 , b_2 e b_1 rispettivamente legate ad $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$. Mentre il calcolo esplicito

| Parametro | Valore | Errore (1σ) |
|-------------------|-------------|----------------------|
| α_{strong} | 0.1213 | 0.0018 |
| α^{-1} | 127.918 | 0.018 |
| $\sin^2 \theta_w$ | 0.23120 | 0.00015 |
| M_Z | 91.1876 GeV | 0.0021 GeV |

Tabella 4.2: Valori sperimentali usati per la verifica dell'esistenza di una M_X in cui le cariche restaurano la simmetria SU(5). I dati si riferiscono alle misure alla scala M_Z .

| Simbolo | SU(3) | SU(2) | U(1) | Campo |
|---------|-------|-------|----------------|----------|
| q_l | 3 | 2 | $\frac{1}{6}$ | Fermione |
| u_r | 3 | 1 | $\frac{2}{3}$ | Fermione |
| d_r | 3 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | Fermione |
| L_l | 1 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | Fermione |
| l_r | 1 | 1 | -1 | Fermione |
| g^a | 8 | 1 | 0 | Vettore |
| W^i | 1 | 3 | 0 | Vettore |
| B | 1 | 1 | 0 | Vettore |
| H | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | Scalare |

Tabella 4.3: Particelle del Modello Standard.

§4.3 – Evoluzione delle costanti di accoppiamento

è mostrato in appendice D.1, esse valgono rispettivamente -7, -19/6 e 41/10.

A questo punto non ci resta che elencare i risultati ottenuti per entrambi i metodi descritti.

Per il primo metodo si veda la tabella numero 4.4. I valori ottenuti

| Carica | $\alpha_1(M_X^{(3)}) = \alpha_2(M_X^{(3)})$ | $\alpha_1(M_X^{(4)}) = \alpha_3(M_X^{(4)})$ | $\alpha_3(M_X^{(5)}) = \alpha_2(M_X^{(5)})$ |
|------------|---|---|---|
| α_1 | 0.02733 ± 0.00007 | 0.02358 ± 0.00003 | 0.02358 ± 0.00004 |
| α_2 | 0.02481 ± 0.00014 | 0.022698 ± 0.00088 | 0.02484 ± 0.00009 |
| α_3 | 0.02119 ± 0.00030 | 0.02119 ± 0.00031 | 0.02763 ± 0.00031 |

Tabella 4.4: Valori ottenuti applicando il primo metodo descritto nella (4.40) (l'errore statistico è 3σ).

con il secondo metodo, invece, sono riportati nella tabella 4.5 insieme ai corrispettivi valori sperimentali per il loro confronto *.

| Carica | Valore teorico | Valore sperimentale |
|-----------------|---------------------|-----------------------|
| α_3 | 0.1213 ± 0.0018 | 0.07118 ± 0.00018 |
| α_2^{-1} | 29.575 ± 0.020 | 25.774 ± 0.080 |
| α_1^{-1} | 59.006 ± 0.092 | 70.01 ± 0.24 |

Tabella 4.5: Confronto tra i valori ricavati con il secondo metodo descritto precedentemente. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ .

Come si può vedere entrambi i metodi mostrano che il Modello Standard non è consistente con la grande unificazione. Cioè non è compatibile con l'ipotesi di una singola costante di accoppiamento ad una qualche scala di energia. A tal proposito si veda l'immagine numero 4.1, in cui è mostrato l'evoluzione delle tre costanti di accoppiamento nella zona di intersezione.

Per superare questa difficoltà, tenendo ferma l'ipotesi che esista una teoria che sintetizzi in un solo gruppo di gauge le tre interazioni, possiamo modificare il Modello Standard in maniera opportuna, sacrificandone però il carattere predittivo. Possiamo supporre l'esistenza di particelle pesanti, non ancora scoperte, che possono contribuire in maniera decisiva ai valori delle b_i tale da far convergere le tre cariche. Iniziamo introducendo il Modello Standard Supersimmetrico Minimale (MSSM), che discuteremo nel prossimo paragrafo.

*I dati sperimentali sono stati calcolati sfruttando la (4.43) e usando i valori di α_{strong} , α e $\sin^2 \theta_w$ presenti nella tabella numero 4.2

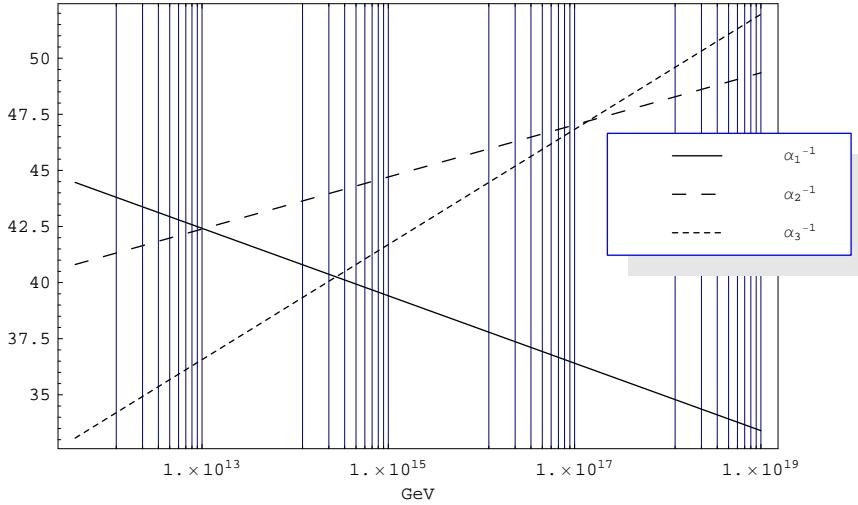


Figura 4.1: Previsione delle intersezioni delle tre costanti di accoppiamento del Modello Standard nel caso di $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_l \otimes U(1)_Y$. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica.

4.3.2 $SU(5) \rightarrow$ MSSM

Storicamente si fanno risalire i primi lavori su gruppi supersimmetrici da parte di Miyazawa al 1966, che sfortunatamente passarono inosservati. Solo intorno agli anni settanta, grazie al lavoro di due gruppi distinti, uno sovietico (1971) e l'altro dell'Europa occidentale (CERN-1972), si riscoprì la supersimmetria dando corso a lavori di notevole interesse che confluiirono nella formulazione del Modello Standard Supersimmetrico Minimale.

Il modello in questione è di notevole complessità e prevede numerose estensioni. Noi, qui, non abbiamo la pretesa di trattarlo in maniera sistematica, ma mostreremo il ruolo che svolge nell'ottica dell'evoluzione delle costanti di accoppiamento, passando attraverso la “zoologia” delle sue particelle.

Il MSSM, come accennavamo, richiede l'esistenza di altre particelle. Infatti oltre a quelle che abbiamo già descritto per il Modello Standard esiste un campo scalare di Higgs e inoltre è necessario introdurre un partner bosonico per ogni fermione del Modello Standard e viceversa. I nuovi bosoni sono chiamati squark, selettrone, sneutrino e così via, mentre i nuovi fermioni sono chiamati fotino, gluino, higgsino e via dicendo. Il motivo per cui queste particelle non sarebbero ancora state osservate è legato alla loro massa, che supponiamo sia la stessa per tutte. Nella tabella 4.6 elenchiamo le particelle del MSSM, i loro numeri quantici e il

corrispondente partner.

| M.S.S.M. | S.M. | SU(3) | SU(2) | U(1) | Campo |
|---------------|-------|-------|-------|----------------|----------|
| \tilde{q}_l | q_l | 3 | 2 | $\frac{1}{6}$ | Scalare |
| \tilde{u}_r | u_r | 3 | 1 | $\frac{2}{3}$ | Scalare |
| \tilde{d}_r | d_r | 3 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | Scalare |
| \tilde{L}_l | L_l | 1 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | Scalare |
| \tilde{l}_r | l_r | 1 | 1 | -1 | Scalare |
| \tilde{g}^a | g^a | 8 | 1 | 0 | Fermione |
| \tilde{W}^i | W^i | 1 | 3 | 0 | Fermione |
| \tilde{B} | B | 1 | 1 | 0 | Fermione |
| \tilde{H} | H | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | Fermione |
| \tilde{H}_1 | H_1 | 1 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | Fermione |

Tabella 4.6: Particelle del MSSM. Nella colonna SM sono elencate le particelle del Modello Standard corrispondenti a quelle supersimmetriche. Si può notare come esiste, oltre a H , un nuovo doppietto di Higgs H_1 , che è uno scalare. Notiamo, anche, come i numeri quantici delle particelle supersimmetriche siano gli stessi dei partner del Modello Standard.

Nel quadro del MSSM ci proponiamo di studiare l’evoluzione delle costanti di accoppiamento. Ovviamente il modello non può contraddirre i dati sperimentali, ossia i valori noti delle cariche per “energie basse”. Questo ci induce a pensare di suddividere l’evoluzione in tre distinti regimi, discriminati dal valore di due masse, M_S ed M_X . Precisiamo meglio il concetto. L’idea è che per energie minori di M_S , valgono i discorsi fatti nel paragrafo precedente, mentre per energie superiori a M_S , entrano in gioco le nuove particelle introdotte dal MSSM e quindi, in corrispondenza di M_X , le tre cariche tendono allo stesso limite, unificando la teoria del MSSM in un gruppo di grande unificazione SU(5). È quindi necessario calcolare le correzioni alle β -function per opera delle nuove particelle. Correzioni che chiamiamo con Δb_1 , Δb_2 e Δb_3 , rispettivamente per i gruppi $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ e $SU(3)_c$ e che, come detto, entrano in gioco quando il quadrimpulso scambiato supera il valore di M_S . Il valore delle tre correzioni è: $5/2$, $25/6$ e 4^* . Nel caso in esame di processo a due step, l’equazione (4.39) si modifica nel seguente modo:

$$\frac{1}{\alpha_i(M_Z)} = \frac{1}{\alpha_X} + \frac{b_i}{2\pi} t + \frac{\Delta b_i + b_i}{2\pi} h \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (4.44)$$

dove $t = \ln(M_s/M_z)$ e $h = \ln(M_X/M_S)$.

Risolvendo il sistema

*Si veda l’appendice D.2 per il calcolo esplicito.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5\alpha}(1 - \sin^2\theta_w) \\ \frac{1}{\alpha}(\sin^2\theta_w) \\ \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{2\pi} & \frac{\Delta b_1 + b_1}{2\pi} \\ 1 & \frac{b_2}{2\pi} & \frac{\Delta b_1 + b_2}{2\pi} \\ 1 & \frac{b_3}{2\pi} & \frac{\Delta b_1 + b_3}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_X} \\ t \\ h \end{pmatrix}$$

otteniamo le predizioni di α_X^{-1} , M_S e M_X elencate nella tabella numero 4.7. Con l'immagine numero 4.2 mostriamo le tre cariche in corrispondenza

| Parametro | Valore teorico | Errore |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| α_X^{-1} | 23.3 | 0.4 |
| M_S | 22 GeV | 12 GeV |
| M_X | $3.06 \cdot 10^{16}$ GeV | $0.52 \cdot 10^{16}$ GeV |

Tabella 4.7: Valori calcolati per il modello SU(5) —> MSSM. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ

za di M_X . Dai calcoli eseguiti è chiaro che la scala energetica intermedia M_S è prossima ad M_Z , anche se esistono ragioni indipendenti per cui $M_S \lesssim$ TeV. Tra l'altro, l'assunzione fatta che le masse delle particelle supersimmetriche siano tutte uguali è al quanto arbitraria. Malgrado ciò, questa ci permette di ottenere delle indicazioni ragionevoli.

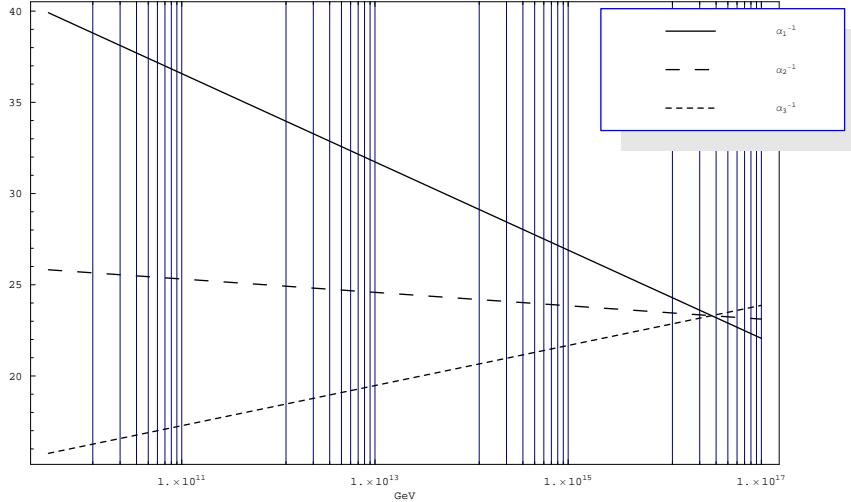


Figura 4.2: MSSM. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica.

4.3.3 SO(10)

In questo paragrafo esamineremo l’evoluzione delle costanti di accoppiamento nel gruppo $SO(10)$, introdotto per la prima volta da Fritzsch e Minkowski [52]. In generale i gruppi $SO(N)$ sono molto interessanti perché privi di anomalie, fatta eccezione per il gruppo $N = 6$. Inoltre non tutti i gruppi $SO(N)$ hanno una rappresentazione complessa, ma solo i gruppi $SO(4n+2)$. Per questo motivo il più piccolo gruppo ortogonale di rango* ≥ 4 , con rappresentazione complessa, è proprio $SO(10)$. Un vantaggio di quest’ultimo è l’esistenza di una rappresentazione spinoriale† a 16 dimensioni che contiene tutti i campi di materia di una generazione, compreso il neutrino destrogiro. Inoltre il modello $SO(10)$ conserva la parità e le sue possibili decomposizioni, già accennate nel paragrafo 4.1.2, sono:

$$SO(10) \longrightarrow SU(5) \otimes U(1) \longrightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} SO(10) \longrightarrow & \quad SO(6) \otimes SO(4) \cong \\ & \quad SU(4) \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes D \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\longrightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_{B-L} \otimes SU(2) \otimes SU(2) \quad (4.47)$$

$$\longrightarrow SU(3)_c \otimes SU(2) \otimes U(1)_Y . \quad (4.48)$$

La possibilità di una simmetria intermedia, prima della simmetria di grande unificazione è un aspetto importante di una teoria di GUT. Infatti l’evoluzione delle costanti di accoppiamento sarà influenzata dalla presenza di tali sottogruppi intermedi. In questo paragrafo tralascieremo la decomposizione in $SU(5)$ perché già trattata per discutere la rottura del gruppo $SO(10)$ nel gruppo $SU(4) \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L \otimes D \longrightarrow G_{SM}$ dove D è un gruppo discreto e $SU(4) \otimes SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ è il gruppo di Pati–Salam (G_{PS}) [36]. La presenza di G_{PS} introduce una scala energetica intermedia M_{PS} che svolge lo stesso ruolo discusso per M_S nel paragrafo 4.3.2. Cioè per $Q^2 < M_{PS}^2$ ci troviamo in una zona descritta dal Modello Standard; per $M_{PS}^2 < Q^2 < M_X^2$ siamo nel regime del gruppo $G_{PS} \otimes D$ e per $Q^2 > M_X^2$ l’unificazione delle tre costanti di accoppiamento è completa. Per quanto detto, fino alla scala M_{PS} possiamo scrivere:

$$\alpha_i^{-1}(M_Z) = \alpha_i^{-1}(M_{PS}) + \frac{b_i}{2\pi}t , \quad t = \ln \frac{M_{PS}}{M_Z} \quad (4.49)$$

*Il rango di un gruppo ortogonale $SO(N)$ è pari a $N/2$ per N pari e $(N-1)/2$ per N dispari.

†Dato un gruppo $SO(2n)$ la dimensione della rappresentazione spinoriale più piccola è pari a 2^{n-1} .

con $i = 1, 2, 3$. Mentre per $M_{PS}^2 < Q^2 < M_X^2$

$$\alpha_i^{-1}(M_Z) = \alpha_i^{-1}(M_X) + \frac{b_i}{2\pi} t + \frac{b'_i + b_i}{2\pi} h , \quad h = \ln \frac{M_X}{M_{PS}} . \quad (4.50)$$

Come già accaduto per il MSSM $\subset SU(5)$, così ora, nel regime di $Q^2 > M_{PS}^2$ esistono alcune particelle aggiuntive, dovute alla presenza del gruppo di Pati–Salam. È necessario, quindi, individuarle e determinare quali sono i loro numeri quantici rispetto al Modello Standard. Questo ci consentirà di poter valutare le correzioni da apportare alle “ β -function” passando per il calcolo delle b'_i . Le particelle del gruppo $SO(10)$ vengono collocate in un multipletto a 16 dimensioni, inglobando così anche il neutrino “right”. Nel gruppo di Pati–Salam queste particelle vengono alloggiate nei seguenti multipletti:

$$\mathbf{16} = \Psi_L + \overline{\Psi_R} \quad (4.51)$$

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} u & u & u & \nu \\ d & d & d & e^- \end{pmatrix}_L \quad \overline{\Psi_R} = \overline{\begin{pmatrix} u & u & u & \nu \\ d & d & d & e^- \end{pmatrix}_R} \quad (4.52)$$

Poiché G_{PS} si può rompere in $SU(3)_c \otimes U(1)_{B-L} \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ possiamo scrivere il quadrupletto di $SU(4)$ usando i numeri quantici di $SU(3)_c \otimes U(1)_{B-L}$:

$$4 = (3, 1/3) \oplus (1, -1) \quad (4.53)$$

$$\bar{4} = (\bar{3}, -1/3) \oplus (1, 1) . \quad (4.54)$$

I generatori del gruppo saranno in numero di 15, infatti:

$$4 \otimes \bar{4} = 1 \oplus 15 \quad (4.55)$$

$$= (1, 0) \oplus (1, 0) \oplus (8, 0) \oplus (3, 4/3) \oplus (\bar{3}, -4/3) . \quad (4.56)$$

Sapendo che:

$$Y = T_{3R} + \frac{B - L}{2} \quad (4.57)$$

possiamo scrivere i generatori del modello di Pati–Salam (4.55) rispetto al Modello Standard:

$$(8, 1, 0) \oplus (3, 1, 2/3) \oplus (\bar{3}, 1, -2/3) \oplus (1, 1, 0) \quad (4.58)$$

Il primo termine rappresenta gli otto gluoni; i due tripletti di colore sono, invece, due nuovi generatori, mentre l'ultimo è un singoletto che non possiede nessuna carica e che per questo non interviene nel calcolo dei “loop”. A questi vanno aggiunti i mediatori dei gruppi $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$, che naturalmente sono tripletti “left” e “right”:

$$(1, 2, 1) \otimes (1, \bar{2}, 1) = (1, 1, 1) \oplus (1, 3, 1) \quad SU(2)_L \quad (4.59)$$

$$(1, 1, 2) \otimes (1, 1, \bar{2}) = (1, 1, 1) \oplus (1, 1, 3) \quad SU(2)_R . \quad (4.60)$$

Sotto il Modello Standard, per la (4.57) hanno i seguenti numeri quantici:

$$(1, 3, 1) \longrightarrow (1, 3, 0) \quad (4.61)$$

$$(1, 1, 3) \longrightarrow (1, 1, 1) \oplus (1, 1, 0) \oplus (1, 1, -1) . \quad (4.62)$$

I tre tripletti “left” sono già presenti nel Modello Standard, mentre gli altri tre “right” sono scalari nuovi, di cui $(1, 1, 0)$ non partecipa al calcolo a causa dell'assenza di cariche. A questi vanno aggiunti altri campi scalari come mostreremo di seguito. Abbiamo già avuto modo di sottolineare che il modello $SO(10)$ permette di accomodare i 15 fermioni chirali del Modello Standard più il neutrino “right handed” in un unico multipletto. La presenza del neutrino “right” gioca una funzione estremamente importante, poiché la massa dei neutrini riveste un indiscutibile ruolo nella fenomenologia delle particelle elementari [53]–[55]. Tuttavia l'indagine sperimentale ci suggerisce che, supponendo l'esistenza del neutrino “right”, questo dovrebbe avere una massa sufficientemente elevata da essere prodotto con estrema rarità. Un buon metodo per spiegare questo ipotetico fenomeno è l'esistenza del così detto meccanismo di “seesaw” [56]–[58]. È quindi interessante notare che è possibile implementare tale meccanismo nel gruppo $SO(10)$ [59]–[62] semplicemente scegliendo, tra i vari possibili campi di Higgs, il multipletto a 126 componenti. In questo modo il meccanismo di “seesaw” trovare una collocazione naturale nel gruppo $SO(10)$:

$$\mathbf{16} \otimes \mathbf{16} = \mathbf{10}_s \oplus \mathbf{120}_a \oplus \mathbf{126}_s . \quad (4.63)$$

Nello specifico i nuovi campi contenuti nel multipletto $\mathbf{126}$, rilevanti per il modello Pati–Salam,

$$4 \otimes 4 = 6_a \oplus 10_s \quad (4.64)$$

§4.3 – Evoluzione delle costanti di accoppiamento

sono $\Delta = (10, 1, 3)$ e $\bar{\Delta} = (\bar{10}, 3, 1)$. Dobbiamo però individuare quali sono i numeri quantici di tali particelle sotto il Modello Standard. Per questo, ricordando la (4.53) e esplicitando la (4.64) come segue,

$$(4 \otimes 4)_s = (6, 2/3) \oplus (1, -2) \oplus (3, -2/3) \quad (4.65)$$

otteniamo:

$$(10, 3, 1) = (6, 3, 1/3) \oplus (1, 3, -1) \oplus (3, 3, -1/3) \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} (\bar{10}, 1, 3) &= (\bar{6}, 1, 2/3) \oplus (\bar{6}, 1, -1/3) \oplus (\bar{6}, 1, -4/3) \oplus (1, 1, 2) \oplus (1, 1, 0) \\ &\oplus (\bar{3}, 1, 4/3) \oplus (\bar{3}, 1, 1/3) \oplus (\bar{3}, 1, -2/3) . \end{aligned} \quad (4.68)$$

A questi va aggiunto un ulteriore campo di Higgs, che per il Modello Standard ha i numeri quantici $(1, 2, 1/2)$, necessario per la simmetria “left”–“right”. Tenendo conto di questi nuovi campi, le correzioni alle b'_i nella (4.50) risultano:

$$b'_1 = -\frac{113}{30} \quad (4.69)$$

$$b'_2 = \frac{41}{6} \quad (4.70)$$

$$b'_3 = \frac{7}{3} . \quad (4.71)$$

Quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5\alpha}(1 - \sin^2\theta_w) \\ \frac{1}{\alpha}(\sin^2\theta_w) \\ \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{2\pi} & \frac{b'_1+b_1}{2\pi} \\ 1 & \frac{b_2}{2\pi} & \frac{b'_2+b_2}{2\pi} \\ 1 & \frac{b_3}{2\pi} & \frac{b'_3+b_3}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_X} \\ t \\ h \end{pmatrix}$$

otteniamo le predizioni di α_X^{-1} , M_{PS} e M_X elencate nella tabella numero 4.8.

| Parametro | Valore teorico | Errore |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|
| α_X^{-1} | 41.13 | 0.03 |
| M_{PS} | $2.4 \cdot 10^{13}$ GeV | $0.2 \cdot 10^{13}$ GeV |
| M_X | $2.0 \cdot 10^{15}$ GeV | $0.2 \cdot 10^{14}$ GeV |

Tabella 4.8: Valori calcolati per il modello $SO(10) \rightarrow G_{PS} \rightarrow SM$. Gli errori statistici indicati si intendono riferiti a 1σ

Mentre in figura 4.3 è riportata l’evoluzione delle tre costanti di accoppiamento. Dal grafico si nota la zona in cui le tre cariche risentono unicamente della fisica del Modello Standard, per poi cambiare drasticamente in corrispondenza di M_{PS} e convergere nello stesso punto all’altezza di M_X in cui la simmetria del modello $S0(10)$ è restaurata. Si nota tra l’altro che in corrispondenza di $M \sim 10^{13}$ GeV, ancora nella zona del Modello Standard, la costante α_3^{-1} divenne più piccola di α_2^{-1} e si mantengono tali fino all’unificazione.

Usando i dati in tabella 4.8 e con riferimento alla (2.38) otteniamo una stima della vita media per il decadimento del protone $\tau_p \sim 10^{33}$ anni.

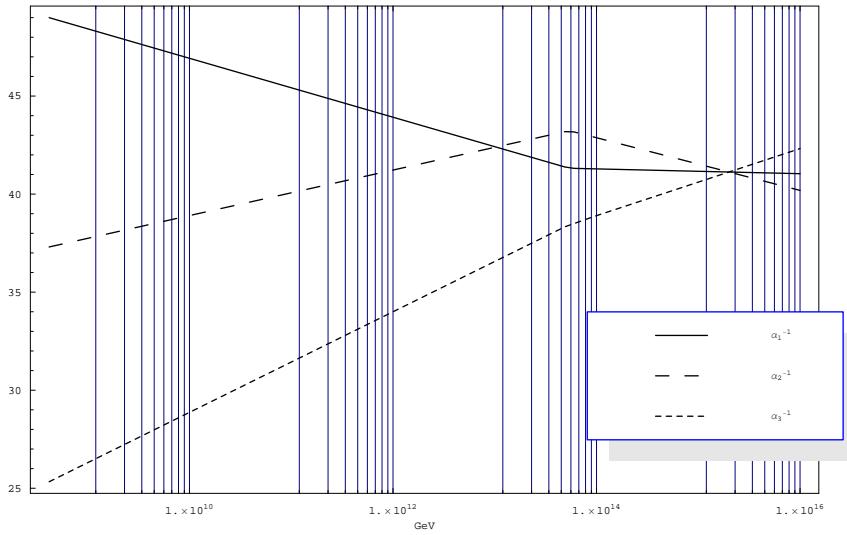


Figura 4.3: $SO(10) \rightarrow G_{PS} \rightarrow SM$. Il grafico è tracciato in scala semilogaritmica.

4.4 Supersimmetria e decadimento del protone

In SUSY-GUT il decadimento del protone può avvenire attraverso processi caratteristici (mediante processi a 1-loop) che discutiamo qui di seguito e portano a stime un po’ diverse da quelle esposte nel capitolo 2.3.1.

La presenza del bosone di Higgs nel modello supersimmetrico SU(5), necessario per generare la massa dei fermioni, implica l’esistenza di meccanismi capaci di indurre il decadimento del protone. Proprio perché il termine di massa coinvolge due fermioni e il bosone di Higgs è utile studiare le combinazioni possibili tra due fermioni. Sfruttando quanto detto nel paragrafo 4.1.1:

$$(\bar{5} \oplus 10) \otimes (\bar{5} \oplus 10) \quad (4.72)$$

produce il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \bar{5} \otimes 10 &= 5 \oplus \bar{45} \\ 10 \otimes 10 &= \bar{5} \oplus 45 \oplus 50 \\ \bar{5} \otimes \bar{5} &= \bar{10} \oplus \bar{15} \end{aligned} . \quad (4.73)$$

Delle possibili rappresentazioni del bosone di Higgs, la scelta della 5 va sotto il nome di modello minimale. Seppure dalla (4.73) esiste la possibilità di rappresentare un campo di Higgs con una rappresentazione 50-dimensionale, il doppietto di Higgs, che dà massa ai fermioni carichi, è contenuto solo nelle rappresentazioni 45- e 5-dimensionali. Tra l'altro, nel prodotto tensoriale (4.72), non compare la rappresentazione di Higgs 24 necessaria per la rottura spontanea da

$$SU(5) \longrightarrow SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (4.74)$$

il che ci conforta, visto che le masse fermioniche sono molto più piccole delle rispettive masse M_X delle GUT. Però il prodotto tensoriale tra un campo di Higgs 5-dimensionale e 24-dimensionale, può comunque dar luogo ad una rappresentazione 45-dimensionale:

$$5 \otimes 24 = 5 \oplus 45 \oplus 70 \quad (4.75)$$

quindi anche se la 45 non è esplicitamente contenuta nella lagrangiana di $SU(5)$ può comparire per la presenza di un operatore effettivo che coinvolga la rappresentazione 5- e 24- dimensionale di un campo di Higgs. Quindi gli accoppiamenti possibili sono del tipo:

$$10 \cdot 10 \cdot 5_H ; \quad 10 \cdot \bar{5} \cdot \bar{5}_H . \quad (4.76)$$

Da tali termini di Yukawa si dimostra l'esistenza di un canale di decadimento dominante per il protone che è mediato dall'Higgsino.

4.4.1 Stime dei tassi di decadimento con accoppiamento di Yukawa

Continuando i ragionamenti precedenti, in questo paragrafo stimiamo i tassi di decadimenti del nucleone per la presenza dell'accoppiamento di Yukawa.

Indicando con Y e \mathcal{Y} le costanti di Yukawa, possiamo scrivere:

$$Y \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5_H = qY_1 u^c H_u + qY_2 q T + u^c Y_3 e^c T \quad (4.77)$$

$$\mathcal{Y} \cdot 10 \cdot \bar{5} \cdot \bar{5}_H = q\mathcal{Y}_1 d^c H_d + q\mathcal{Y}_2 l \bar{T} + u^c \mathcal{Y}_3 d^c \bar{T} + e^c \mathcal{Y}_4 l H_d \quad (4.78)$$

Si noti che l'unica libertà che abbiamo per produrre il corretto spettro delle masse dei fermioni a destra della (4.77) è una ponderata scelta degli accoppiamenti a sinistra. Ad esempio, dal calcolo dettagliato della seconda equazione della (4.77) e (4.78) [48, formula (3.65)] si ottiene: $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_4$, implicando che $m_d = m_e$, cioè che le masse dei quark up delle tre famiglie sono uguali alle masse dei leptoni carichi.

Ritornando agli operatori che possono produrre il decadimento del protone, contraiamo i termini con T e \bar{T} della (4.77) e (4.78) otteniamo l'operatore:

$$\frac{Y_2 \mathcal{Y}_2}{M_T^2} q q q l \quad (4.79)$$

che è in relazione al grafico 4.4. In questo caso è possibile che la massa

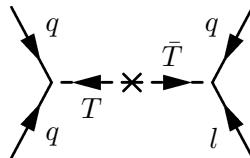


Figura 4.4: Interazione tra fermioni mediata da tripletto colorato dell'Higgs nel modello $SU(5)$ minimale.

del tripletto colorato dell'Higgs sia dell'ordine delle masse alla scala della grande unificazione. Quindi la presenza delle costanti di accoppiamento di Yukawa, presumibilmente inferiori ad uno, renderebbe la transizione più lenta rispetto agli operatori di dimensione 6 già incontrati.

Tuttavia il modello SUSY $SU(5)$ ingloba anche i partner supersimmetrici, il che rende necessario aggiungere, ai termini (4.76), i seguenti:

$$\Psi_1 \tilde{\Psi}_2 \tilde{H} + \tilde{\Psi}_1 \Psi_2 \tilde{H} + \Psi \tilde{\Phi} \tilde{\bar{H}} + \tilde{\Psi} \bar{\Phi} \tilde{\bar{H}} \quad (4.80)$$

avendo identificato Ψ con il decupletto, Φ con il quintupletto e con il simbolo $\tilde{}$ (tilde), invece, il corrispondente partner supersimmetrico. Questi introducono operatori con dimensione $d = 5$ del tipo:

$$\frac{Y_2 \mathcal{Y}_2}{M_T} \tilde{q} q \tilde{q} l \quad (4.81)$$

in relazione con il grafico 4.5. Subito si nota che ora l'operatore è inversa-

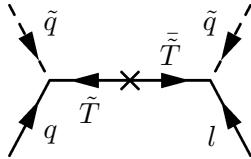


Figura 4.5: Interazioni tra fermioni e scalari mediato da tripletto colorato dell'Higgsino nel modello $SU(5)$ minimale.

mente proporzionale alla massa del tripletto colorato dell'Higgsino, \tilde{T} . A partire da queste considerazioni è possibile costruire un processo del tipo mostrato in figura 4.6, in cui l'accoppiamento è proporzionale a

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{Y_2 \mathcal{Y}_2}{M_T} \frac{1}{\tilde{m}} \quad (4.82)$$

dove \tilde{m} è una massa dell'ordine delle particelle supersimmetriche. Purtroppo

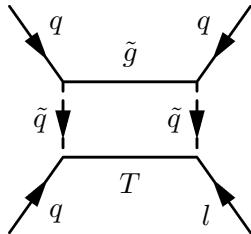


Figura 4.6: Decadimento del protone a causa dell'esistenza dell'Higgsino nel modello $SU(5)$.

però la (4.82) contiene una grossa indeterminazione teorica non solo su M_T come già accennato, ma anche su \tilde{m} e sulle costanti di accoppiamento di Yukawa, parametri che dipendono fortemente dalla teoria delle masse dei fermioni. Ad aggravare la situazione c'è la forma molto rozza dell'elemento di matrice del diagramma 4.6, la (4.82), derivata da considerazioni di natura esclusivamente dimensionali. Tuttavia, continuando su questa

strada, supponendo che le costanti di Yukawa Y_2 e \mathcal{Y}_2 siano dello stesso ordine di grandezza delle \mathcal{Y}_1 e \mathcal{Y}_4 , responsabili della massa dei fermioni carichi e ricordando la (2.42) e la (2.43) scriviamo:

$$\tau_p \propto \frac{\left[(4\pi)^2 M_T \tilde{m}\right]^2}{\alpha_u \alpha_d} \frac{1}{m_p^5} . \quad (4.83)$$

ottenendo:

$$\tau_p \propto \left[\frac{(4\pi)^2}{G_F} \frac{M_T}{m_u m_d} \tilde{m} \right]^2 \frac{2\pi^2}{m_p^5} . \quad (4.84)$$

Sostituendo $m_u = 4 \text{ MeV}$, $m_d = 8 \text{ MeV}$ [40], $M_T \sim M_x \sim 10^{16} \text{ GeV}$ in accordo ai dati della tabella 4.7, otteniamo:

$$\tau_p \sim 10^{25} \cdot (\tilde{m} \text{ in } \text{GeV})^2 \text{ anni} \quad (4.85)$$

e se $\tilde{m} \cong 1 \text{ TeV}$ allora

$$\tau_p \sim 10^{31} \text{ anni} . \quad (4.86)$$

Tuttavia sostituendo m_d con $m_s = 130 \text{ MeV}$ abbiamo

$$\tau_p \sim 10^{28} \text{ anni} \quad (4.87)$$

il che fa pensare che un processo del tipo $p \longrightarrow K^+ \nu$ possa essere favorito in SU(5)-SUSY. Infatti, SU(5)-SUSY ha come processi dominanti:



In verità le stime calcolate sono abbastanza rozze e vanno prese con le dovute cautele. Vari effetti possono contribuire ad aumentarle di almeno due ordini di grandezza [63].

Malgrado ciò, se confrontiamo le stime (4.86) e (4.87) con i valori sperimentali riportanti nel paragrafo 2.1 sembrano essere in contraddizione perché troppo basse. Infatti, recentemente [64, 65, 66] è stata sottolineata l'inadeguatezza del modello minimale supersimmetrico SU(5) come teoria di grande unificazione, proprio a causa della sbagliata previsione sulla vita

media del decadimento del protone. Tuttavia le incertezze teoriche in gioco potrebbero comunque essere sufficienti a evitare l'esclusione di SU(5) SUSY-minimale come modello di GUT accettabile. A tale proposito è interessante considerare gli articoli di Senjanovic [67, 68]. Tra l'altro, già nel 1998 si è osservato che le indeterminazioni teoriche sulle masse delle particelle supersimmetriche possono indurre una diminuzione della velocità del decadimento e riportare così le previsioni nei limiti sperimentali [69].

Per confronto notiamo che usando i dati dell'accoppiamento di gauge di tabella 4.7 e la (2.38) otteniamo un valore per la vita media del protone pari a $\tau_p \sim 10^{37}$ anni.

La teoria è quando si sa tutto e niente funziona. La pratica è quando tutto funziona e nessuno sa il perché. In questo caso abbiamo messo insieme la teoria e la pratica: non c'è niente che funziona e nessuno sa il perché!

—A. Einstein—

Capitolo 5

Prospettive di ricerca

In questo capitolo come prima cosa mostreremo che un esperimento che ha come obiettivo lo studio del decadimento del protone deve essere costruito con una grande massa esposta (exposure), a causa della rarità del fenomeno. Purtroppo proprio questa necessità è corresponsabile della presenza del fondo. Infatti, tutti gli esperimenti di questo tipo incontrano come problema principale la gestione del fondo. Vale a dire tutti quegli eventi che il rivelatore identifica, ma che non sono generati dal decadimento del protone. È essenziale, quindi, ponderare la scelta del composto con cui il rivelatore viene costruito, conciliando stabilità e purezza della molecola con costi e prestazioni. Si rendono indispensabili l'uso di raffinate tecniche di "purificazione" del composto per eliminare la presenza di isotopi radioattivi. Purtroppo, è la radioattività ambientale, la causa maggiore di eventi indesiderati. Proprio per questo motivo, tali esperimenti sono alloggiati in camere sotterranee a riparo dal grosso del flusso dei raggi cosmici. Malgrado ciò, i neutrini ugualmente riescono a raggiungere l'esperimento e a causare la fetta principale di eventi di fondo (fondo irriducibile). Proprio per diminuire l'impatto di quest'ultimi si possono implementare tecniche di ricostruzione delle tracce e fare uso di misure calorimetriche.

5.1 Massa esposta

Dalle discussioni precedenti risulta chiaro che l'accoppiamento per il decadimento del protone sia un evento estremamente raro. È ragionevole, quindi, voler valutare la quantità di massa ed il tempo di funzionamento necessari ad un rivelatore ideale per identificare almeno un evento.

Osservando un numero di particelle N per un tempo T e potendo individuare, tra queste, un numero S diverso da zero di particelle decadute, otteniamo il tasso di decadimento come

$$\Gamma = \frac{S}{NT\epsilon} \quad (5.1)$$

dove con ϵ , abbiamo indicato l'efficienza del rivelatore. L'errore associato a Γ è ovviamente determinabile tramite le usuali formule per la propagazione degli errori. Indichiamo con M la massa del rivelatore e con MT la *massa esposta*. Chiamiamo con A_i e Z_i il peso atomico ed il numero atomico dello i -esimo atomo del composto di cui è fatto il rivelatore. Supponendo che

$$Z_i \approx \frac{1}{2}A_i \quad (5.2)$$

possiamo approssimare come segue:

$$\sum_i Z_i \approx \frac{1}{2} \sum_j A_j \quad (5.3)$$

avendo esteso la sommatoria su tutti gli atomi che compongono la molecola. In questo modo possiamo valutare il numero di protoni scrivendo

$$N \approx \frac{M}{m_p} \frac{\sum_i A_i}{\sum_j Z_j} \approx \frac{M}{2m_p} \quad . \quad (5.4)$$

Quindi sostituendo nella (5.1), abbiamo:

$$MT \approx \frac{2Sm_p}{\varepsilon\Gamma} \quad . \quad (5.5)$$

Da considerazioni di carattere sperimentale già incontrate in precedenza (tabelle 2.1–2.7), il canale di decadimento con limite sperimentale più grande ha

$$\tau_p/BR(p \longrightarrow e^+ \pi^0) \gtrsim 1.6 \cdot 10^{33} \text{ anni} \quad . \quad (5.6)$$

Di conseguenza, il valore della massa esposta MT necessario per rivelare almeno un evento supponendo una quasi perfetta efficienza del rivelatore* dovrà non essere inferiore a

*L'efficienza del rivelatore in esperimenti di questa natura è fortemente vincolata alla capacità di riuscire a discriminare al meglio un segnale di fondo rispetto all'evento che si vuole cercare.

$$MT \simeq 5 \text{ Kt} \cdot \text{ anni} \quad (5.7)$$

Poiché tale evento è estremamente raro da esigere un numero elevato di protoni N , la sua distribuzione è di natura poissoniana:

$$P(\nu | S) = \frac{e^{-S} S^\nu}{\nu!} \quad . \quad (5.8)$$

Con $P(\nu | S)$, abbiamo indicato la funzione di distribuzione della probabilità di rivelare ν eventi con un esperimento in cui la massa esposta e la τ_p presunta sono tali da far pensare ad un valore medio di eventi rivelati pari ad S . Il livello di confidenza che si verifichi almeno un evento è quindi

$$\text{CL} \equiv P(\nu > 1 | S) = 1 - P(0 | S) \quad . \quad (5.9)$$

Ciò vuol dire che il livello di confidenza sarà del 63% per un valore medio atteso pari ad $S = 1$, mentre, con $S = 3$ e quindi una massa esposta pari a $MT \approx 15 \text{ Kt} \cdot \text{ anni}$, il livello di confidenza potrà essere pari al 95%.

Consideriamo adesso il caso in cui sia presente un fondo sperimentale. In generale, nell'analisi degli eventi si possono verificare due condizioni. Una in cui si riscontra un chiaro eccesso di segnali oltre il fondo (B), nel qual caso è possibile misurare la vita media del protone. L'altro in cui non sono rivelati oltre al fondo altri significativi segnali. In quest'ultimo caso sarà possibile dare solo un limite inferiore alla vita media del protone.

Il numero medio di candidati per il decadimento, in entrambi i casi, è dato da

$$\mu = \Gamma E \varepsilon + B \quad (5.10)$$

dove abbiamo indicato $E = NT$. Come già ricordato prima, la distribuzione degli eventi è di natura poissoniana con parametri $\Gamma, E, \varepsilon, B$. Quindi, la distribuzione delle probabilità di rivelare ν segnali dall'esperimento (trigger) è

$$\mathcal{F}(\nu | \Gamma, E, \varepsilon, B) = \frac{e^{-(\Gamma E \varepsilon + B)} (\Gamma E \varepsilon + B)^\nu}{\nu!} \quad . \quad (5.11)$$

La trattazione del primo caso, assumendo un fondo noto con certezza, non si discosta da quanto detto precedentemente. Invece, di seguito, riportiamo l'analisi per il secondo caso.

Noi siamo interessati a cosa un esperimento può dirci circa il tasso di decadimento, quindi vogliamo ottenere l'espressione della $\mathcal{F}(\Gamma | \nu)$ a partire dalla (5.11). Per questo motivo applichiamo il teorema di Bayes*

*Cfr. [40, capitolo 31], [70, capitoli 3 e 9].

alla (5.11) ed otteniamo:

$$\mathcal{F}(\Gamma, E, \varepsilon, B | \nu) = \alpha \mathcal{F}(\nu | \Gamma, E, \varepsilon, B) \mathcal{F}_o(\Gamma, E, \varepsilon, B) , \quad (5.12)$$

dove α è una costante di normalizzazione ed $F_o(\Gamma, E, \varepsilon, B)$ è la probabilità a priori delle grandezze $\Gamma, E, \varepsilon, B$. Supponendo che il tasso di decadimento, l'efficienza, l'esposizione E ed il fondo siano tutti indipendenti gli uni dagli altri, possiamo scrivere:

$$\mathcal{F}_o(\Gamma, E, \varepsilon, B) = \mathcal{F}_o(\Gamma)\mathcal{F}_o(E)\mathcal{F}_o(\varepsilon)\mathcal{F}_o(B) . \quad (5.13)$$

Le quantità $\mathcal{F}_o(\Gamma)$, $\mathcal{F}_o(\varepsilon)$, $\mathcal{F}_o(E)$ e $\mathcal{F}_o(B)$, sono le probabilità a priori*, cioè indicano lo stato di conoscenza di ogni parametro prima dell'esecuzione dell'esperimento. Possiamo quindi riscrivere la (5.12) come segue:

$$\mathcal{F}(\Gamma, E, \varepsilon, B | \nu) = \alpha \mathcal{F}(\nu | \Gamma, E, \varepsilon, B) \mathcal{F}_o(\Gamma)\mathcal{F}_o(\varepsilon)\mathcal{F}_o(E)\mathcal{F}_o(B) \quad (5.14)$$

Conoscendo le probabilità a priori (5.13), possiamo rendere la (5.14) indipendente dai parametri E, ε e B , procedendo con la così detta *marginalizzazione*, ovvero con la seguente integrazione

$$\mathcal{F}(\Gamma | \nu) = \int \int \int \mathcal{F}(\Gamma, E, \varepsilon, B | \nu) d\varepsilon dB dE , \quad (5.15)$$

mentre la costante di normalizzazione α , sarà tale che

$$\int_0^\infty \mathcal{F}(\Gamma | \nu) d\Gamma = 1 . \quad (5.16)$$

Allora, otteniamo il limite sperimentale $\tilde{\Gamma}$ sul tasso di decadimento (cioè la probabilità che $\Gamma_{vero} \gtrsim \tilde{\Gamma}$ con un livello di confidenza pari a CL) risolvendo, rispetto a $\tilde{\Gamma}$, la seguente equazione:

$$CL = \int_0^{\tilde{\Gamma}} \mathcal{F}(\Gamma | \nu) d\Gamma . \quad (5.17)$$

*In letteratura si usa il termine *prior* per indicarle.

5.2 Eventi di fondo

Un esperimento con una grossa massa esposta coinvolge inevitabilmente un grande numero di eventi che possono essere ridotti, ma non eliminati completamente. È per questo motivo che vengono attrezzati laboratori sotterranei ed usati materiali a bassa radioattività naturale. In questo modo si può vantaggiosamente sfruttare la naturale schermatura dai raggi cosmici offerta da uno spessore di roccia sufficientemente elevato. Purtroppo però ciò non risulta sufficiente ad impedire che i neutrini possano interferire con l'esperimento stesso. È quindi necessario valutare l'impatto di questo tipo di fondo, detto irriducibile, sulla misura della vita media del protone.

5.2.1 Neutrini solari ed atmosferici

Nei primi decenni del XX secolo gli studi sul decadimento β portano alla scoperta di una nuova particella elementare: il neutrino. È Pauli che nel 1930 promuove l'ipotesi che una particella elettricamente neutra di spin 1/2 viene creata ed emessa contemporaneamente all'elettrone in un decadimento β . Da allora la fisica del neutrino ha fatto grossi passi in avanti. Oggi conosciamo la natura leptonica di tali particelle che sono state con successo integrate nel quadro del Modello Standard. Tuttavia i neutrini ancora sono oggetto di raffinati esperimenti per comprendere aspetti che a tutt'oggi ci sfuggono.

Poiché i neutrini costituiscono il fondo per ricerche sul decadimento del protone è indispensabile conoscere il loro flusso e la loro probabilità di interazione. Le sorgenti di neutrini sono essenzialmente due: il sole e le interazioni dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre*. Per questo motivo è in uso chiamare i primi neutrini solari ed i secondi neutrini atmosferici. Di seguito esamineremo il ruolo dei due tipi di neutrini per capire in che modo possono disturbare un esperimento volto alla misura della vita media del protone.

I neutrini solari sono prodotti a seguito delle reazioni di fusione all'interno del sole. Il loro flusso sulla superficie terrestre è dell'ordine di $65 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ con una energia che varia da 1 MeV a 20 MeV circa. Proprio a causa della loro bassa energia non possono dar luogo a reazioni del tipo:



oppure



*A patto di non collocare l'esperimento in prossimità di una centrale nucleare o di un acceleratore di particelle.

§5.2 – Eventi di fondo

Infatti, tali processi, le prime di corrente carica e le seconde di corrente neutra, si possono verificare solo se l'energia cinetica del neutrino è superiore alla differenza delle masse:

$$E_\nu > m_l + m_{N'} - m_N + m_h \quad (5.20)$$

ad esempio, nel caso in cui N sia un protone ed N' un neutrone, l sia un positrone ed h sia un π^0 occorre che $E_\mu > 130\text{MeV}$.

Diversamente dai neutrini solari, i neutrini atmosferici raggiungono spettri energetici più elevati. È noto che l'atmosfera della terra è continuamente raggiunta da un flusso isotropo di raggi cosmici, particelle cariche la cui composizione chimica è per il 90% circa protoni, il 9% nuclei di elio ed il restante tutti gli altri elementi.

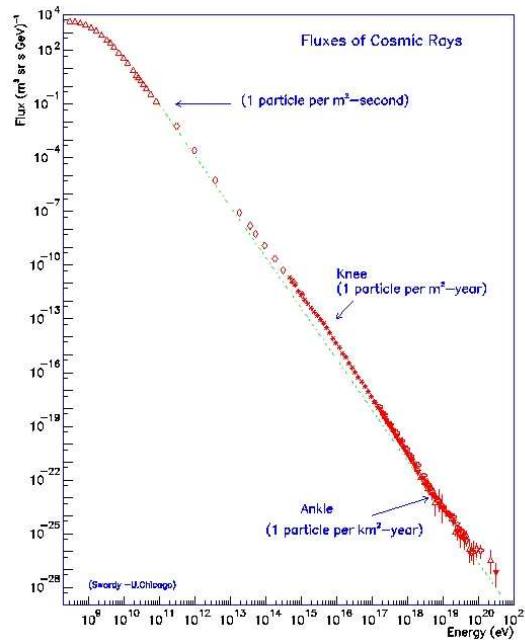


Figura 5.1: Flusso dei primari.

Il loro flusso è proporzionale a:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-(\gamma+1)} \quad (5.21)$$

dove γ assume valori diversi in regimi energetici diversi. La figura 5.1 mostra il flusso dei raggi cosmici primari. I raggi cosmici che penetrano

nell’atmosfera, i primari, interagiscono con essa producendo una cascata di particelle secondarie tra cui proprio i neutrini, che per questo sono detti neutrini atmosferici. Questi ultimi sono i più abbondanti raggi cosmici presenti sulla superficie della terra.

Possiamo schematizzare il meccanismo di produzione dei neutrini atmosferici nel modo seguente (figura 5.2). Un primario interagisce con un nucleo di un elemento presente in atmosfera. Dopo una serie di reazione vengono prodotti dei pioni carichi che decadendo in muoni producono neutrini muonici e a seguito del decadimento dei muoni vengono prodotti neutrini elettronici, come mostrato di seguito:

$$p + X \longrightarrow \sum_{i=1}^n X'_i + \pi^{(+)} \quad (5.22)$$

$$\pi^{(+)} \longrightarrow \mu^{(+)} + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) \quad (5.23)$$

$$\mu^{(+)} \longrightarrow e^{(+)} + \nu_e (\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu) \quad . \quad (5.24)$$

Dal calcolo cinematico si dimostra che le energie medie dei tre neutrini sono simili. Inoltre i processi descritti sopra implicano che il rapporto tra il numero totale di neutrini muonici su elettronici è circa 2:

$$\frac{N_{\nu_\mu} + N_{\bar{\nu}_\mu}}{N_{\nu_e} + N_{\bar{\nu}_e}} \cong 2 \quad . \quad (5.25)$$

Per stimare da un punto di vista quantitativo il flusso di neutrini atmosferici che possiamo aspettarci al suolo abbiamo usato i dati relativi all’esperimento Super Kamiokande sfruttando un programma fortran realizzato dal dott. Paolo Lipari che implementando i suddetti dati sperimentali genera il flusso di neutrini atmosferici ($dN/d(\ln E)$ $cm^2 \cdot s \cdot sr$) in prossimità dei laboratori che ospitano l’esperimento Super Kamiokande. Usando un secondo programma fortran* integriamo il flusso su tutto l’angolo solido, considerando anche le piccole correzioni dovute alla oscillazione dei neutrini. In figura 5.2.1 riportiamo il flusso dei neutrini atmosferici così ottenuto.

*Allegato nella appendice E.

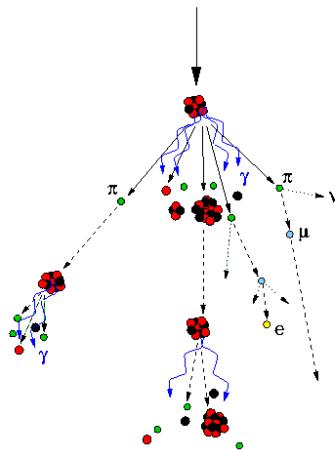


Figura 5.2: Illustrazione schematica di una cascata di raggi cosmici.

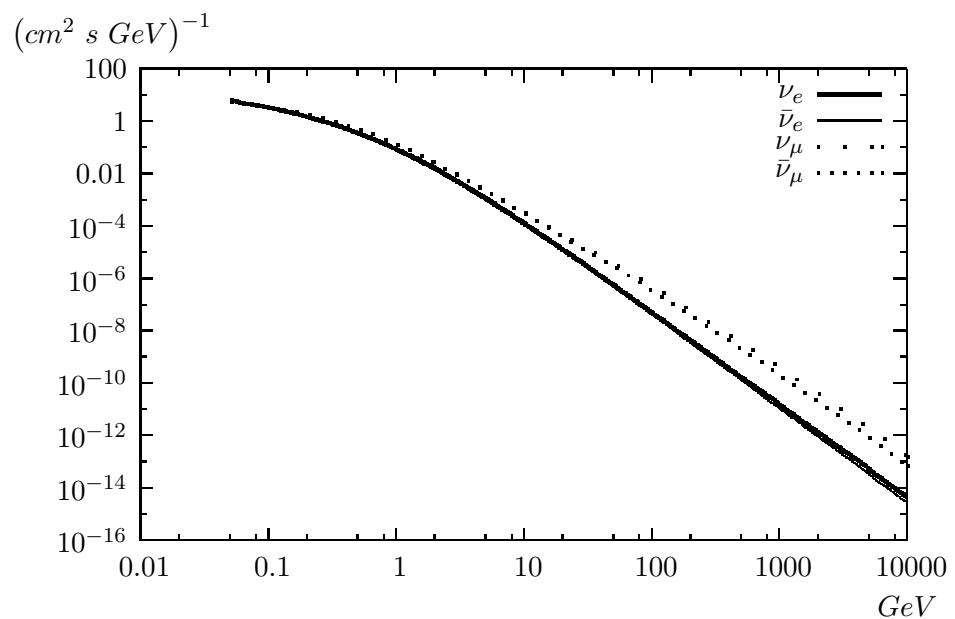


Figura 5.3: Flusso neutrini.

5.2.2 Interazione dei neutrini atmosferici

Il calcolo del numero di eventi prodotti dal flusso di neutrini atmosferici in un rivelatore è determinato dal prodotto di convoluzione del flusso di neutrini con la loro sezione d’urto. Lavorando sugli stessi dati usati per creare la figura 5.2.1, possiamo fare una rozza stima di quanti eventi ci aspettiamo. Da [71] abbiamo:

$$\sigma(\nu N \rightarrow e^+ h) = 10^{-38} \cdot 2m_p E_\nu \quad cm^2 \quad (5.26)$$

e supponendo una massa esposta di $5Kt\cdot\text{anni}$, ci aspetteremmo circa 500 eventi di fondo. Invece se restringiamo la finestra energetica nelle vicinanze della massa del protone, con una apertura di circa $50 MeV$:

$$m_p < E_\nu < m_p + 50 MeV \quad (5.27)$$

ci aspettiamo una decina di eventi. Tuttavia è lecito attendersi che tali valori siano sovrastimati per due ragioni fondamentali. La prima è dovuta alla mancata implementazione da parte nostra della condizione di impulso nullo (o quasi nullo tenendo conto del moto di Fermi). L’altro motivo riguarda il reale valore della sezione d’urto. Infatti la (5.26) è tipica di un processo di “deep inelastic scattering”, sovrastimando la reale sezione d’urto, ad esempio, per un processo di produzione di un pion. Possiamo valutare l’errore che stiamo commettendo confrontando il valore della sezione d’urto ad 1 GeV riferendoci al grafico di figura 29 di [72], da cui si nota una sovrastima della sezione d’urto (5.26) di un fattore circa 10.

5.3 Aspettative per rivelatori ad argon

Nel 1977 [73] Rubbia suggerisce una nuova tecnologia per la ricostruzione accurata di tracce in esperimenti con una grossa massa sensibile: le camere a proiezione temporale costituite da argon liquido (LAr TPC). La peculiarità principale delle LAr TPC risiede nel fatto che, in condizioni di elevata purezza dell’argon, le tracce di ionizzazione possono essere trasportate praticamente senza deformazioni per distanze dell’ordine dei metri sotto l’azione di un opportuno campo elettrico. La formazione dell’immagine è fornita da un insieme di elettrodi disposti all’estremità del percorso di deriva degli elettroni. La lettura delle tracce è garantita dall’induzione della carica, che permette la non distruzione delle stesse, consentendo l’uso di più elettrodi disposti su piani differenti e con orientazioni differenti. Ciò garantisce una precisa ricostruzione tridimensionale delle tracce e dispone di poter eseguire precise misure calorimetriche. Inoltre la

possibilità di misure accurate del deposito locale di energia (dE/dx) permette di semplificare l'identificazione del tipo di particella rivelata. Oltre ciò, l'argon liquido risulta un mezzo ideale per la sua elevata densità, alto potere di ionizzazione e di scintillazione e costi relativamente contenuti.

Nell'ottica di un esperimento volto alla identificazione del decadimento del protone, per identificare in maniera sufficientemente sicura la sua presenza è necessario sviluppare una procedura ottimale. È quindi utile suddividere il processo di analisi dati in diversi step. Bisogna identificare ogni possibile canale di decadimento del protone che può essere rivelato dall'esperimento. Occorre individuare il numero di eventi di fondo che possono confondersi con i primi e quindi valutare l'efficienza dell'esperimento per ogni canale di decadimento. La possibilità di ottimizzare tale procedura dipende esclusivamente dalla progettazione dell'esperimento. Esperimenti basati su LAr TPC per la ricerca del decadimento del protone sono LANND [74] ed ICARUS [75]. Per quanto riguarda quest'ultimo, da analisi Monte Carlo [76] si sono potute stimare le efficienze per i vari canali di decadimento, che riportiamo nella tabella (5.1).

Nel paragrafo 5.1 abbiamo discusso il metodo statistico per calcolare il limite sperimentale del tasso di decadimento. Ora ci proponiamo di applicare tale metodo per stimare il limite sperimentale della vita media del protone, nel caso in cui non ci sia un netto affermarsi di eventi su segnali di fondo nell'esperimento ICARUS. Con riferimento alla (5.10), indicando con

$$S = \Gamma E \varepsilon \quad (5.28)$$

tale che applicando il teorema di Bayes* alla (5.11), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S, B \mid \nu) &= \\ \alpha \mathcal{F}(\nu \mid S, B) \mathcal{F}_o(S, B) & , \end{aligned} \quad (5.29)$$

Se assumiamo che il fondo è noto con certezza, ossia:

$$\mathcal{F}_o(B) = \delta(B - B_0) \quad (5.30)$$

otteniamo, marginalizzando la (5.29):

$$\mathcal{F}(S \mid \nu) = \quad (5.31)$$

$$= \alpha \int_0^\infty \frac{e^{(S+B)}(S+B)^\nu}{\nu!} \delta(B - B_0) dB \quad (5.32)$$

$$= \alpha \frac{e^{(S+B_0)}(S+B_0)^\nu}{\nu!} . \quad (5.33)$$

*Cfr. [40, capitolo 31], [70, capitoli 3 e 9].

| Canale di decadimento | Efficienza (%) | Fondo (5 kTon × year) |
|-----------------------------------|----------------|-----------------------|
| $p \rightarrow e^+ \pi^0$ | 45.30 | 0.005 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^0)$ | 15.10 | 9.73 |
| $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ | 96.75 | 0.005 |
| $p \rightarrow \mu^- \pi^+ K^+$ | 97.55 | 0.005 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^-$ | 18.60 | 0.125 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ (\pi^-)$ | 29.50 | 6.01 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^+ \pi^-)$ | 16.30 | 19.68 |
| $p \rightarrow \pi^+ \bar{\nu}$ | 41.85 | 3.91 |
| $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ | 44.80 | 0.04 |
| $p \rightarrow \mu^+ (\pi^0)$ | 17.85 | 20.81 |
| | | |
| $n \rightarrow e^- K^+$ | 95.95 | 0.000 |
| $n \rightarrow e^+ \pi^-$ | 44.35 | 0.040 |
| $n \rightarrow e^+ (\pi^-)$ | 25.55 | 26.73 |
| $n \rightarrow \mu^- \pi^+$ | 44.75 | 0.12 |
| $n \rightarrow \mu^- (\pi^+)$ | 21.05 | 14.56 |
| $n \rightarrow \pi^0 \bar{\nu}$ | 45.10 | 2.37 |

Tabella 5.1: Stime, tramite simulazioni Monte Carlo, delle efficienze ICARUS. Le particelle racchiuse tra parentesi indicano particelle prodotte dal decadimento, ma non rivelabili perché assorbite dal nucleo a cui apparteneva il nucleone decaduto.

Per trovare il valore limite del segnale \tilde{S} occorre risolvere la (5.17), che nel caso specifico assume la forma:

$$CL = \int_0^{\tilde{S}} \mathcal{F}(S | \nu) dS = \frac{\int_0^{\tilde{S}} e^{(S+B_0)} (S+B_0) dS}{\int_0^{\infty} e^{(S+B_0)} (S+B_0) dS} . \quad (5.34)$$

Per semplificare il calcolo del CL , può essere usato il seguente integrale notevole:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^m e^{-x} dx = -e^{-x} \sum_{r=0}^m \frac{m! x^{(m-r)}}{(m-r)!} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (5.35)$$

e facendo il seguente cambio di variabile $x = S + B_0$ otteniamo:

$$CL = 1 - \frac{e^{-(S+B_0)} \sum_{r=0}^{\nu} \frac{(S+B_0)^{\nu}}{r!}}{e^{-B_0} \sum_{r=0}^{\nu} \frac{B_0^r}{r!}} . \quad (5.36)$$

Risolvendo la (5.36) per un livello di confidenza del 90% e usando i dati del fondo in tabella 5.1 possiamo calcolare quali limiti sperimentali sono raggiungibili per la vita media parziale del nucleone con una massa efficace di $5 \text{ KTon} \times \text{anno}$, che riportiamo in tabella 5.2.

$$\tau_{nucleone}/B = \frac{MT\varepsilon}{Sm_{nucleone}} \frac{N_{nucleone}}{A} \quad (5.37)$$

dove MT è la massa esposta, $m_{nucleone}$ è la massa del tipo di nucleone in esame, $N_{nucleone}$ il numero di nucleoni in esame contenuti nel nucleo di Argon * ed A il suo numero atomico. Dalla tabella 5.2 si nota come già con una massa esposta di $5 \text{ Kton} \times \text{anno}$ ICARUS sarà in grado di migliorare i limiti sperimentali per diversi canali di decadimento. Nella Tabella 5.3 mostriamo quali debbano essere i valori per la massa esposta necessari per migliorare di un ordine di grandezza gli attuali limiti sperimentali del [40]. Nella stessa abbiamo anche indicato quanti anni di funzionamento sono richiesti per ottenere lo stesso risultato supponendo una massa esposta di $5 \text{ Kton} \times \text{anni}$. Notiamo, in particolare, che per i canali favoriti nei modelli supersimmetrici come $p \rightarrow k^+ \bar{\nu}$ occorre una massa esposta di $59.2 \text{ Kton} \times \text{anni}$, o 12 anni di presa dati con $5 \text{ Kton} \times \text{anni}$. Mentre per i canali tipici dei modelli non supersimmetrici come $p \rightarrow e^+ \pi^0$ la massa esposta richiesta è molto più grande.

*Per l'argon $Z = 18$ ed $A = 40$.

| Canale di decadimento | $\tau_{nucleone}/B$ (10^{30} anni) | Limiti del PDG (10^{30} anni) |
|-----------------------------------|--|-------------------------------------|
| $p \rightarrow e^+ \pi^0$ | 265 | 1600 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^0)$ | 30.0 | 1600 |
| $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ | 566 | 670 |
| $p \rightarrow \mu^- \pi^+ K^+$ | 571 | 245 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^-$ | 109 | 82 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ (\pi^-)$ | 72.5 | 82 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^+ \pi^-)$ | 24.6 | 82 |
| $p \rightarrow \pi^+ \bar{\nu}$ | 117 | 25 |
| $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ | 262 | 473 |
| $p \rightarrow \mu^+ (\pi^0)$ | 266 | 473 |
| | | |
| $n \rightarrow e^- K^+$ | 686 | 32 |
| $n \rightarrow e^+ \pi^-$ | 317 | 158 |
| $n \rightarrow e^+ (\pi^-)$ | 41.7 | 158 |
| $n \rightarrow \mu^- \pi^+$ | 320 | 100 |
| $n \rightarrow \mu^- (\pi^+)$ | 432 | 100 |
| $n \rightarrow \pi^0 \bar{\nu}$ | 199 | 112 |

Tabella 5.2: Previsioni teoriche del limite sperimentale della vita media del protone raggiungibile tramite l'esperimento ICARUS con una massa efficace di 5 Kton × anno.

| Canale di decadimento | Massa esposta necessaria (Kton × anni) | Limiti PDG (10^{30} anni) | Anni di attesa con 5 Kton × anni |
|-----------------------------------|---|---------------------------------|-------------------------------------|
| $p \rightarrow e^+ \pi^0$ | 302 | 1600 | 60.4 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^0)$ | 2666.7 | 1600 | 533.4 |
| $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ | 59.2 | 670 | 12 |
| $p \rightarrow \mu^- \pi^+ K^+$ | 21.5 | 245 | 4 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^-$ | 37.6 | 82 | 7.5 |
| $p \rightarrow e^+ \pi^+ (\pi^-)$ | 56.6 | 82 | 11.3 |
| $p \rightarrow e^+ (\pi^+ \pi^-)$ | 166.7 | 82 | 33.3 |
| $p \rightarrow \pi^+ \bar{\nu}$ | 10.7 | 25 | 2 |
| $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ | 90.3 | 473 | 18 |
| $p \rightarrow \mu^+ (\pi^0)$ | 88.9 | 473 | 18 |
| $n \rightarrow e^- K^+$ | 2.4 | 32 | 0.5 |
| $n \rightarrow e^+ \pi^-$ | 24.9 | 158 | 5 |
| $n \rightarrow e^+ (\pi^-)$ | 189.5 | 158 | 38 |
| $n \rightarrow \mu^- \pi^+$ | 15.6 | 100 | 3.1 |
| $n \rightarrow \mu^- (\pi^+)$ | 23.2 | 100 | 3.2 |
| $n \rightarrow \pi^0 \bar{\nu}$ | 28.2 | 112 | 5.6 |

Tabella 5.3: ICARUS - Massa esposta necessaria per superare di un ordine di grandezza gli attuali limiti sperimentalisti.

5.4 Stato attuale della ricerca sperimentale

Attualmente l'unico esperimento sul decadimento del protone è l'esperimento giapponese Super-Kamiokande* [77]. Esso è ospitato presso i laboratori sotterranei nelle vicinanze della città di Kamioka a circa 250 Km da Tokyo. L'esperimento è costituito da un enorme contenitore d'acqua, circa 50 Kton (con un volume fiduciale per la ricerca del protone di circa 22 Kton), alloggiato ad una profondità di circa 1000 m all'interno della "Mozumi Mine", corrispondente a 2700 m di acqua equivalente (m.w.e). Il fenomeno fisico principale su cui si basa è la così detta radiazione Čerenkov [78]. Una particella carica che attraversa il rivelatore con una velocità superiore a quella della luce nel mezzo, produce una luce rivelata da una serie di fotomoltiplicatori piazzati sulla superficie interna del rivelatore. Tramite un sofisticato sistema di elaborazione dati è possibile, il più delle volte, ricostruire il processo verificatosi individuando il tipo di particella rivelata. Malgrado questo tipo di tecnologia sia meno efficiente di quella a LAr TPC essa ha prodotto e produce importanti risultati sperimentali. Ha migliorato, ad esempio, le misure sulle vite medie parziali per vari canali di decadimento, quali: $p \rightarrow e^+ \pi^0$ e $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$ [79, 80] e attualmente, dopo 1489 giorni di presa dati per i canali di decadimento seguenti $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$, $n \rightarrow \bar{\nu} K^0$, $p \rightarrow \mu^+ K^0$ e $p \rightarrow e^+ K^0$ non ha rivelato nessuna evidenza del decadimento del nucleone, ma ha potuto definire i seguenti limiti sperimentali [81]: $2.3 \cdot 10^{33}$, $1.3 \cdot 10^{32}$, $1.3 \cdot 10^{33}$, $1.0 \cdot 10^{33}$ anni per le vite medie parziali dei decadimenti sopra elencati, con un livello di confidenza pari al 90%. Attualmente si stanno sostituendo tutti i fotomoltiplicatori, operazione che probabilmente terminerà nel mese di giugno 2006. Osserviamo, tuttavia, che nei rivelatori Čerenkov il K^+ prodotto dal decadimento del protone è invisibile a causa del suo impulso (340 MeV) che è al di sotto della soglia necessaria per la produzione di luce Čerenkov in acqua ($P_{so}(K^+) = 562$ MeV). Quindi la sua identificazione è di tipo indiretta e passa tramite la rivelazione dei prodotti del suo decadimento. Ciò riduce l'efficienza a solo 4.4% o 6.5% corrispondentemente a due differenti metodi [80]. Notiamo che esistono varie proposte sperimentali per proseguire lo studio del decadimento del protone ingrandendo la massa del rivelatore a luce Čerenkov di un ordine di grandezza (UNO, HyperKamiokande, MEMPHYS).

Recentemente è stato proposto un nuovo rivelatore, il LENA (Low Energy Neutrino Astronomy) [82] che potrebbe migliorare l'analisi del canale $p \rightarrow \bar{\nu} K^+$. Il rivelatore proposto consiste di un grosso volume di liquido scintillatore[†] di forma cilindrica, approssimativamente di 30 m di

*Esso è la continuazione dell'esperimento Kamiokande. L'acronimo NDE originariamente significava Nucleon Decay Experiment, ma oggi è spesso inteso come Neutrino Detector Experiment.

[†]Come scintillatore per l'esperimento LENA è stato proposto il PXE (phenyl-o-

diametro e 90 m di lunghezza, con una copertura di fotomoltiplicatori del 30%, utile per ricerche in vari campi: astrofisica, geofisica, e fisica delle particelle elementari. I possibili siti proposti dove il nuovo rivelatore potrebbe essere collocato sono una miniera sotterranea al centro della Finlandia (Pyhäsalmi, CUPP: Center of Underground Physics in Pyhäsalmi) oppure sul fondo del mare in prossimità di Pilos in Grecia. In entrambi i casi lo schermo offerto è di circa 4000 m di acqua equivalente (m.w.e.) e sono luoghi lontani da reattori nucleari, la presenza dei quali causerebbe un grosso fondo per la ricerca di neutrini da resti di supernovae ($\bar{\nu}_e$). Il pregio di un rivelatore come LENA consiste nel poter rivelare direttamente le particelle K^+ . Infatti, le simulazioni basate su tecniche Monte Carlo hanno dimostrato una efficienza del 65% per il canale di decadimento sopra citato. Ciò permetterà di raggiungere un limite inferiore per la vita media del protone via $p \longrightarrow K^+ \bar{\nu}$ di 4×10^{34} anni se l'esperimento rimarrà attivo per 10 anni [84].

xylylethane), accuratamente studiato con funzioni di “Counting Test Facility” (CFT) per il rivelatore BOREXINO al laboratorio sotterraneo del Gran Sasso [83]. Attualmente sono in studio le proprietà ottiche di una miscela di PXE e derivati di oli minerali [84, Vedi citazione 3].

Discussioni

In questa tesi abbiamo considerato l’ipotesi di processi con violazione del numero barionico o leptonico connessi con l’esistenza di nuova fisica a energie molto maggiori di quelle tipiche del Modello Standard. Infatti, nei capitoli 3 e 4 mostriamo che i modelli di grande unificazione presi in considerazione suggeriscono scale energetiche dell’ordine di 10^{15} – 10^{16} GeV.

Nei capitoli 2 e 4 abbiamo stimato la vita media del decadimento del protone. A tale proposito, nell’ambito di modelli di grande unificazione sia supersimmetrici che non supersimmetrici, abbiamo trovato ordini di grandezza “vicini” agli attuali limiti sperimentali.

Abbiamo anche considerato la situazione sperimentale attuale e quella attesa nel prossimo futuro. In particolare ci siamo concentrati sui rivelatori ad argon liquido e discusso quali masse e tempi di presa dati sarebbero necessari per migliorare di un ordine di grandezza gli attuali limiti sperimentali come evidenziato nella tabella 5.3.

In conclusione la presente tesi si propone di recuperare ed attualizzare le discussioni di tematiche di interesse nella fisica delle particelle elementari, qual è il decadimento del protone.

Appendice A

Spinori

A.1 Identità di Fierz

$$[\overline{\Psi_{1L}}(R)\gamma^\mu\Psi_{2L(R)}] [\overline{\Psi_{3L}}(R)\gamma_\mu\Psi_{4L(R)}] = [\overline{\Psi_1}\gamma^\mu\Psi_4] [\overline{\Psi_3}\gamma_\mu\Psi_6] \quad (\text{A.1})$$

$$[\overline{\Psi_{1L}}\Psi_{2R}] [\overline{\Psi_{3R}}\Psi_{2R}] = -\frac{1}{2} [\overline{\Psi_{1L}}\gamma^\mu\Psi_{4L}] [\overline{\Psi_{3R}}\gamma_\mu\Psi_{2R}] \quad (\text{A.2})$$

A.2 Identità algebriche delle matrici γ

Consideriamo un numero intero D e un insieme di matrici γ , che chiamiamo $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$ le quali soddisfano la seguente relazione di anticommutazione,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Se le matrici γ sono di dimensione

$$f(D) \times f(D) \quad (\text{A.3})$$

ed I è la matrice unità, allora sono soddisfatte le identità seguenti:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \gamma^\lambda &= D \cdot I \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda &= -(D-2)\gamma^\alpha \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda &= (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= f(D) [g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}] \\ \text{Tr}(\underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu}_{\text{numero dispari}}) &= 0 \end{aligned}$$

Appendice B

Integrali notevoli

B.1 Proprietà della funzione $\Gamma(x)$ di Eulero

Definiamo

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} \quad (\text{B.1})$$

da cui

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in N \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma(x) \simeq \frac{1}{x} \quad \text{per } x \ll 1 \quad (\text{B.6})$$

B.2 Parametrizzazione di Feynman

A differenza dell'integrale (3.43) che contiene un solo fattore quadratico, spesso si adoperano integrali con differenti fattori quadratici a denominatore. Questo tipo di integrale può essere ridotto come la (3.43) grazie ad una tecnica ideata da Feynman. A tale proposito possiamo sfruttare quanto segue.

Consideriamo la seguente identità:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b} \int_a^b \frac{dt}{t^2} \quad (\text{B.7})$$

e definiamo x , parametro di Feynman con

$$t = b + (a - b)x \quad (\text{B.8})$$

l'equazione (B.7) può essere riscritta come segue:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[b + (a - b)x]^2} \quad (\text{B.9})$$

più in generale derivando rispetto ad a si ottiene:

$$\frac{1}{a^n b} = \int_0^1 \frac{n x^{n-1}}{[b + (a - b)x]^{n+1}} dx \quad (\text{B.10})$$

Questo metodo sarà usato nel paragrafo C.2.

B.3 Integrali D dimensionali

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s)^n} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-\frac{D}{2}-1}} \quad (\text{B.12})$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-\frac{D}{2}-1}} \quad (\text{B.13})$$

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^{\frac{D}{2}} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-\frac{D}{2}}} \quad (\text{B.14})$$

Appendice C

Calcolo esplicito della (3.46)

C.1 Calcolo di $N^{\mu\nu}(p, k)$

In questa sezione discuteremo il calcolo della (3.47).

Forti delle identità delle matrici γ presentate nell'appendice A.2 e della linearità della traccia, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(p, k) &\equiv \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\mu (\gamma^\alpha p_\alpha + \gamma^\rho k_\rho + m) \gamma^\nu (p^\lambda \gamma_\lambda + m)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha \gamma^\nu p^\lambda \gamma_\lambda + \gamma^\mu \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu p^\lambda \gamma_\lambda + \gamma^\mu \gamma^\nu m^2] + \\ &\quad + \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha \gamma^\nu m + \gamma^\mu \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu m + \gamma^\mu \gamma^\nu m p^\lambda \gamma_\lambda] . \end{aligned}$$

È facile osservare che il secondo addendo dell'ultimo membro sia nullo. Rimane da calcolare il primo addendo:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha \gamma^\nu p^\lambda \gamma_\lambda] &= f(D) [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2 + p^\mu p^\nu] \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda k_\rho p_\lambda] &= f(D) [k^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} kp + p^\mu k^\nu] \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu m^2] &= f(D) g^{\mu\nu} m^2 \end{aligned}$$

e mettendo in evidenza otteniamo:

$$N^{\mu\nu}(p, k) = f(D) \{(p^\mu + k^\mu) p^\mu + (p^\nu + k^\nu) p^\mu + [m^2 - p(k+p)] g^{\mu\nu}\} \quad (\text{C.1})$$

C.2 Derivazione della (3.51)

In questo paragrafo partendo dalla (3.46) svolgeremo i calcoli per determinare la (3.51).

La (3.46) è

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^4} \cdot \int \frac{Tr \{ \gamma^\mu [\gamma_\rho(p^\rho + k^\rho) + m] \gamma^\nu [\not{p} + m] \}}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon] [p^2 - m^2 + i\epsilon]} d^D p \quad (\text{C.2})$$

Sfruttando quanto detto nell'appendice B.2 fissiamo,

$$a = (p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \quad (\text{C.3})$$

$$b = p^2 - m^2 + i\epsilon \quad (\text{C.4})$$

e sostituendo nella (3.46), troviamo

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m^2 + (k^2 + 2pk)x + i\epsilon]^2} \quad (\text{C.5})$$

definendo $p = q - kx$ otteniamo

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \frac{k^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q - kx, k)}{[q^2 - m^2 + k^2(1-x)x + i\epsilon]^2} \quad (\text{C.6})$$

Per semplificare il numeratore (C.1) usiamo la (B.1) sottraendo e sommando

$k^2(1-x)xg^{\mu\nu}f(D)$, la cui espressione diventa:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(q, k) &= f(D) \{ [2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] + [m^2 - k^2 x(1-x)] g^{\mu\nu} \} + \\ &\quad - f(D) [2kx(1-x) (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] . \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Riscrivendo la (C.6) nella forma compatta:

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k^2) = -e^2 \frac{k^{4-D}}{(2\pi)^4} f(D) \int_0^1 dx \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, x) \quad (\text{C.8})$$

ne determineremo esplicitamente l'espressione passando per il calcolo degli integrali $I_i^{\mu\nu}(k, x)$.

$$I_1^{\mu\nu} \equiv \int d^D q \frac{[2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}]}{[q^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \quad (\text{C.9})$$

che per la (B.13) e la (B.14)

$$I_1^{\mu\nu} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{2}D)g^{\mu\nu}}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{1-\frac{D}{2}}} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (\text{C.10})$$

$$I_2^{\mu\nu} \equiv [m^2 - k^2(1-x)x] g^{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \quad (\text{C.11})$$

per la (B.14) e la (B.3):

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu} &= [m^2 - k^2(1-x)x] g^{\mu\nu} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{2-\frac{D}{2}}} \\ &= -i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{2}D)g^{\mu\nu}}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{1-\frac{D}{2}}} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &= -I_1^{\mu\nu} \end{aligned}$$

di conseguenza solo $I_3^{\mu\nu}$ è significativo, la cui espressione è

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} &= -[2kx(1-x)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= -[2kx(1-x)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{2-\frac{D}{2}}} \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

quindi

$$(ie)^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \frac{k^{4-D}}{(2\pi)^4} f(D) \int_0^1 dx I_3^{\mu\nu}(k, x)$$

e ricordando la (3.49)

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \Pi(k^2) \quad (\text{C.13})$$

con

$$\Pi(k) = \frac{k^{4-D} f(D) \Gamma(2 - \frac{1}{2}D)}{8\pi^{4-D} \frac{1}{2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[k^2 x(1-x) - m^2]^{2-\frac{D}{2}}} \quad (\text{C.14})$$

che è la (3.50). Per continuare nel calcolo ed esplicitare la (3.50) abbiamo bisogno delle espressioni seguenti:

$$x^{-\frac{\eta}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + o(\eta) \quad (\text{C.15})$$

$$f(D) = f(4 - \eta) = 4 + \eta f'(4) + o(\eta) \quad \text{con } f(D=4) = 4 \quad (\text{C.16})$$

e delle proprietà delle funzioni di Eulero (B.1), abbiamo:

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\eta} - \frac{f'(4)}{2} - \ln \pi \right) + \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{k^2 x(1-x) - m^2}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

ossia la (3.51).

Appendice D

Beta-function

D.1 Coefficienti b_i delle β -function (SM)

Per calcolare i valori di b_3 , b_2 e b_1 rispettivamente legate a $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, occorre ricordare la (4.21):

$$b_i = -\frac{11}{3}t_2(V, G_i) + \frac{4}{3}t_2(F, G_i) + \frac{1}{3}t_2(S, G_i) \quad (\text{D.1})$$

e sfruttare le informazioni contenute nella tabella 4.3 ricordando che il contributo al calcolo apportato da ogni campo di Weyl o di Majorana va diviso per 2.

Calcolo di b_3

Per quanto scritto nella (4.23)

$$t_2(V, SU(3)_c) = 3 \quad . \quad (\text{D.2})$$

Per calcolare $t_2(F, SU(3)_c)$ ricordiamo che la normalizzazione dei generatori (4.36) ci suggerisce $t_2 = \frac{1}{2}$. Dalla tabella numero 4.3 esistono 4 campi di Weyl su cui $SU(3)_c$ agisce e per ognuno di essi ci sono tre famiglie, quindi:

$$t_2(F, SU(3)_c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \quad . \quad (\text{D.3})$$

L'ultimo termine nella (4.21) è nullo perché non esistono campi scalari su cui opera la simmetria di colore $SU(3)_c$. Quindi abbiamo:

$$b_3 = -\frac{11}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = -7 \quad (\text{D.4})$$

Calcolo di b_2

Analogamente a quanto detto sopra e tenendo presente che anche per $SU(2)$ i campi di Weyl sono quattro per tre famiglie, abbiamo

$$t_2(V, SU(2)_L) = 2 \quad (\text{D.5})$$

$$t_2(F, SU(2)_L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \quad . \quad (\text{D.6})$$

In questo caso però vi è da considerare il contributo del doppietto di Higgs, campo scalare per cui per la (4.36)

$$t_2(S, SU(2)_L) = \frac{1}{2} \quad (\text{D.7})$$

quindi

$$b_2 = -\frac{11}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{19}{6} \quad . \quad (\text{D.8})$$

Calcolo di b_1

Il calcolo di b_1 è legato al valore dell'ipercarica delle particelle virtuali che intervengono nei processi a 1-loop che stiamo considerando. Occorre però fare attenzione e ricordare che noi stiamo descrivendo uno scenario in cui il Modello Standard è contenuto nel gruppo $SU(5)$. Questo ci impone di tenere in debita considerazione la (4.38). Premesso ciò, visto l'ordine del gruppo:

$$t_2(V, U(1)_Y) = 0 \quad (\text{D.9})$$

D'altra parte i fermioni di Weyl da considerare sono tutti quelli del Modello Standard e ognuno di loro ha una molteplicità pari a tre per via del numero di famiglie. Quindi:

$$\begin{aligned} t_2(F, U(1)_Y) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left[6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Il contributo scalare è dato dal doppietto di Higgs e quindi:

$$t_2(S, U(1)_Y) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \quad . \quad (\text{D.11})$$

Sommando tutti i contributi e moltiplicandoli per i coefficienti visti nella (4.21), abbiamo:

$$b_1 = 4 + \frac{1}{10} = \frac{41}{10} \quad . \quad (\text{D.12})$$

D.2 Coefficienti Δb_i delle β -function (MSSM)

Per calcolare le correzioni alle β -function per il MSSM, bisogna valutare i valori di Δb_3 , Δb_2 e Δb_1 rispettivamente legate a $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, tramite l'espressione della (4.21):

$$b_i = \left[-\frac{11}{3}t_2(V, G_i) + \frac{4}{3}t_2(F, G_i) + \frac{1}{3}t_2(S, G_i) \right] \quad (\text{D.13})$$

e sfruttando le informazioni contenute nella tabella 4.6. Ricordiamo che il contributo al calcolo apportato da ogni campo di Weyl o di Majorana va diviso per 2. In questo contesto sostanzialmente occorre ripetere i ragionamenti fatti nell'appendice D.1 per applicarli alle nuove particelle del MSSM.

Calcolo di Δb_3

Per la (4.36) considerando i nuovi fermioni su cui opera il gruppo $SU(3)_c$ del modello MSSM, cioè i gluini, abbiamo:

$$t_2(F, SU(3)_c) = \frac{1}{2} \cdot 3 \quad . \quad (\text{D.14})$$

Invece come scalari di colore abbiamo gli squark, per cui

$$t_2(S, SU(3)_c) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \quad (\text{D.15})$$

da cui otteniamo che

$$\Delta b_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 4 \quad . \quad (\text{D.16})$$

Calcolo di Δb_2

Analogamente a quanto visto per b_2 per SU(2) abbiamo quattro campi scalari per famiglie (sleptoni) e l'higgs H_1 che danno:

$$t_2(S, SU(2)_L) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{D.17})$$

Mentre i fermioni aggiuntivi sono un solo tripletto di SU(2) più i due higgsini da cui

$$t_2(F, SU(2)_L) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \quad (\text{D.18})$$

quindi:

$$\Delta b_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \right] + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 2 \right] = 1 \quad . \quad (\text{D.19})$$

Calcolo di Δb_1

Il calcolo di Δb_1 è legato al valore dell'ipercarica delle particelle virtuali che intervengono nei processi a 1-loop che stiamo considerando. Occorre però fare attenzione e ricordare che noi stiamo descrivendo uno scenario in cui il MSSM è contenuto nel gruppo SU(5). Questo ci impone di tenere in debita considerazione la (4.38). D'altra parte i fermioni di Weyl da considerare sono solo i due higgsini, quindi:

$$t_2(F, U(1)_Y) = \frac{3}{5} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 2 \cdot 2 \quad . \quad (\text{D.20})$$

Il contributo scalare è dato da tutti gli sfermioni e dal nuovo doppietto di Higgs H_1 ,

$$\begin{aligned} t_2(S, U(1)_Y) &= \frac{3}{5} 3 \left[6 \left(\frac{1}{6} \right)^2 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right] 2 \\ &\quad + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^2 2 \quad . \end{aligned}$$

Sommando tutti i contributi e moltiplicandoli per i coefficienti visti nella (4.21), abbiamo

$$\Delta b_1 = \frac{5}{2} \quad . \quad (\text{D.22})$$

Appendice E

Flusso dei neutrini atmosferici

E.1 Programma flusso_neutrini_atm.f

```
c
c      Programma per calcolare i flussi
c      di neutrini ed antineutrini muonici upgoing
c      a Kamioka
c

PROGRAM table_energy_flux
IMPLICIT NONE
INTEGER i,n_steps,id
REAL e_n,incr_e_n
REAL e_n_min,e_n_max

REAL cos_min,cos_max
REAL s
REAL sk_ne,sk_ae
REAL sk_nm,sk_am

REAL k

DATA cos_min,cos_max/-1.0,+1.0/
DATA n_steps/200/
DATA e_n_min,e_n_max/0.051,1.e4/

OPEN(unit=10,file='total_flux.d',status='unknown')

CALL FLUX_NU_INI
```

```

k=8.*atan(1.)      ! l'integrazione azimuthale, 2 Pi

e_n=e_n_min
incr_e_n=(e_n_max/e_n_min)**(1./n_steps)
sk_ne=0.
sk_ae=0.
sk_nm=0.
sk_am=0.
DO I=1,n_steps+1

    id=1
    PRINT *,I
    CALL integra(e_n,id,cos_min,cos_max,s)
    sk_ne=s * k

    id=2
    CALL integra(e_n,id,cos_min,cos_max,s)
    sk_ae=s * k

    id=3
    CALL integra0sc(e_n,id,cos_min,cos_max,s)
    sk_nm=s * k

    id=4
    CALL integra0sc(e_n,id,cos_min,cos_max,s)
    sk_am=s * k

    WRITE(10,10000) e_n,sk_ne,sk_ae,sk_nm,sk_am
    e_n=e_n*incr_e_n

ENDDO
10000 FORMAT(5(e10.4,1x))
END
c
c
c
c
c
SUBROUTINE integra(e_n,id,a,b,s)
IMPLICIT NONE
REAL FLUX_NU
EXTERNAL FLUX_NU
REAL e_n,a,b
INTEGER j,jmax
REAL eps
REAL s,os,st,ost
INTEGER n,it
REAL tnm,del,x,sum
INTEGER id
DATA eps,jmax/1.e-6,12/
c
c      Questa routine integra i flussi di mu e antimu

```

```

c      sugli angoli di zenith; i flussi sono presi da Paolo Lipari.
c      Come routine di integrazione uso
c      Simpson con check della convergenza.
c
c      ost=-1.e30
c      os=-1.e30
c      st=0.5*(b-a)*(FLUX_NU(id,e_n,b)+FLUX_NU(id,e_n,a))
c      s=(4.*st-ost)/3.
c      os=s
c      ost=st
c      it=1
c      DO j=2,jmax
c          tnm=it
c          del=(b-a)/tnm
c          x=a+0.5*del
c          sum=0.
c          DO n=1,it
c              sum=sum+FLUX_NU(id,e_n,x)
c              x=x+del
c          ENDDO
c          st=0.5*(st+sum*del)
c          s=(4.*st-ost)/3.
c          IF (ABS(s-os).lt.eps*ABS(os)) RETURN
c          os=s
c          ost=st
c          it=it*2
c      ENDDO
c      RETURN
c      END
c
c      SUBROUTINE integra0sc(e_n,id,a,b,s)
c      IMPLICIT NONE
c      REAL FLUX_NU_OSC
c      EXTERNAL FLUX_NU_OSC
c      REAL e_n,a,b
c      INTEGER j,jmax
c      REAL eps
c      REAL s,os,st,ost
c      INTEGER n,it
c      REAL tnm,del,x,sum
c      INTEGER id
c      DATA eps,jmax/1.e-6,12/
c
c      Questa routine integra i flussi di mu e antimu
c      sugli angoli di zenith; i flussi sono presi da Lipari.
c      Come routine di integrazione uso
c      Simpson con check della convergenza.
c
c      ost=-1.e30
c      os=-1.e30
c      st=0.5*(b-a)*(FLUX_NU_OSC(id,e_n,b)+FLUX_NU_OSC(id,e_n,a))
c      s=(4.*st-ost)/3.

```

```
os=s
ost=st
it=1
DO j=2,jmax
    tnm=it
    del=(b-a)/tnm
    x=a+0.5*del
    sum=0.
    DO n=1,it
        sum=sum+FLUX_NU_0SC(id,e_n,x)
        x=x+del
    ENDDO
    st=0.5*(st+sum*del)
    s=(4.*st-ost)/3.
    IF (ABS(s-os).lt.eps*ABS(os)) RETURN
    os=s
    ost=st
    it=it*2
ENDDO
RETURN
END

FUNCTION FLUX_NU_0SC(id,e_n,cos)
IMPLICIT NONE

INTEGER id
REAL FLUX_NU_0SC

REAL FLUX_NU
EXTERNAL FLUX_NU

REAL e_n,cos
REAL pmumu,length,rearth,alti
DATA rearth,alti /6371.0,15.0/

length=-rearth*cos + sqrt((rearth+alti)**2-rearth**2*(1.0-cos**2))
pmumu=1.0-sin(1.267 * 2.5e-3 * length / e_n)**2
FLUX_NU_0SC=FLUX_NU(id,e_n,cos)*pmumu

RETURN
END

c      include "kamioka_flux.f"
c      Kamioka_flux.f e' il programma creato da Paolo Lipari
```

Bibliografia

- [1] E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **11**, 299 (1938)
Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III).
- [2] E. P. Wigner, Proc. Am. Phil. Soc. **93**, 521 (1949)
Invariance in Physical Theory.
- [3] F. Reines, C. L. Cowan and M. Goldhaber, Phys. Rev. **96** (1954) 1157.
Conservation Of The Number Of Nucleons.
- [4] H. S. Gurr, W. R. Kropp, F. Reines and B. Meyer, Phys. Rev. **158** (1967) 1321. *Experimental Test Of Baryon Conservation.*
- [5] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8
Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies.
- [6] H. Georgi, S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438-441 (1974)
Unity of All Elementary Particle Forces.
- [7] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967) 32 [JETP Lett. **5** (1967) SOPUA,34,392-393.1991 UFNAA,161,61-64.1991) 24].
Violation Of CP Invariance, C Asymmetry, And Baryon Asymmetry Of The Universe.
- [8] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. B **174**, 45 (1986).
Baryogenesis Without Grand Unification.
- [9] Chen-Ning Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191-195 (1954)
Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance.
- [10] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598.
Spin And Unitary Spin Independence In A Paraquark Model Of Baryons And Mesons.
- [11] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965) B1006.
Three-Triplet Model With Double SU(3) Symmetr.

Bibliografia

- [12] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47** (1973) 365. *Advantages Of The Color Octet Gluon Picture.*
- [13] J. S. Schwinger, Annals Phys. **2** (1957) 407. *A Theory Of The Fundamental Interactions.*
- [14] S. A. Bludman, Nuo. Cim. **9** (1958) 433.
- [15] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579. *Partial Symmetries Of Weak Interactions.*
- [16] A. Salam and J. C. Ward, Phys. Lett. **13** (1964) 168. *Electromagnetic And Weak Interactions.*
- [17] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264. *A Model Of Leptons.*
- [18] A. Salam (1969). *Elementary Particle Theory.* Stockholm: edited by Svartolm (Almqvist & Wiksell) p 367.
- [19] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 132; **13** (1964) 321; Phys. Rev. **145** (1966) 1156.
F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 321.
G.S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13** (1965) 585.
T. W. B. Kibble, Phys. Rev. **155** (1967) 1554.
- [20] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33** (1971) 173.
Renormalization Of Massless Yang-Mills Fields.
- [21] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **35** (1971) 167.
Renormalizable Lagrangians For Massive Yang-Mills Fields.
- [22] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **50** (1972) 318.
Combinatorics Of Gauge Field.
- [23] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **5** (1972) 3121, 3137, 3155. *Spontaneously Broken Gauge Symmetries.I, II, III.*
- [24] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **7** (1973) 1049.
Spontaneously Broken Gauge Symmetries. Iv. General Gauge Formulation
- [25] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **27**, 1688 (1971).
Physical Processes In A Convergent Theory Of The Weak And Electromagnetic Interactions.
- [26] S. Weinberg, Phys. Rev. D **5**, 1412 (1972).
Effects Of A Neutral Intermediate Boson In Semileptonic Processes.

Bibliografia

- [27] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2** (1970) 1285.
Weak Interactions With Lepton - Hadron Symmetry.
- [28] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.
CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction.
- [29] F. J. Hasert *et al.*, Phys. Lett. B **46** (1973) 121.
Search For Elastic Muon Neutrino Electron Scattering.
- [30] F. J. Hasert *et al.* [Gargamelle Neutrino Collaboration] Phys. Lett. B **46** (1973) 138.
Observation Of Neutrino-Like Interactions Without Muon Or Electron In The Gargamelle Neutrino Experiment.
- [31] G. Arnison *et al.* [UA1 Collaboration], Phys. Lett. B **122**, 103 (1983);
*Experimental Observation Of Isolated Large Transverse Energy Electrons With Associated Missing Energy At $S^{**}(1/2) = 540\text{-Gev}$.*
Phys. Lett. B **126**, 398 (1983); *Experimental Observation Of Lepton Pairs Of Invariant Mass Around 95-Gev/ $C^{**}2$ At The Cern SpS Collider.*
Phys. Lett. B **129**, 273 (1983); *Further Evidence For Charged Intermediate Vector Bosons At The SpS Collider.*
P. Bagnaia *et al.* [UA2 Collaboration], Phys. Lett. B **129**, 130 (1983).
Evidence For $Z_0 \rightarrow E^+ E^-$ At The Cern Anti-P P Collider.
- [32] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. D **50** (1994) 2966;
*Evidence for top quark production in anti-p p collisions at $s^{**}(1/2) = 1.8\text{-TeV}$.*
F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 225
[arXiv:hep-ex/9405005]. *Evidence for top quark production in anti-p p collisions at $s^{**}(1/2) = 1.8\text{-TeV}$.*
- [33] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 661.
Is Baryon Number Conserved?
- [34] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **98**, 1501 (1955). *Conservation Of Heavy Particles And Generalized Gauge Transformations.*
- [35] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976) [Erratum-ibid. D **18**, 2199 (1978)].
Computation Of The Quantum Effects Due To A Four-Dimensional Pseudoparticle.
- [36] Jogesh C. Pati and Abdus Salam, Phys. Rev. D **10**, 275-289 (1974)
Lepton number as the fourth “color”.

- [37] J. Hosaka *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], arXiv:hep-ex/0508053. *Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I.*
Y. Ashie *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **71** (2005) 112005 [arXiv:hep-ex/0501064]. *A measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I.*
Y. Ashie *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 101801 [arXiv:hep-ex/0404034]. *Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation.*
- [38] M. Ambrosio *et al.* [MACRO Collaboration], Phys. Lett. B **434** (1998) 451 [arXiv:hep-ex/9807005]. *Measurement of the atmospheric neutrino-induced upgoing muon flux using MACRO.*
- [39] T. Araki *et al.* [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 081801 [arXiv:hep-ex/0406035]. *Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion.*
- [40] *Review of Particle Physics (2004)*
- [41] D. Woods and David S. Saxon, Phys. Rev. **95**, 577 (1954)
Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering.
- [42] G. Costa and F. Zwirner, Nuovo Cimento **9** (1986)
Baryon and Lepton Number Nonconservation.
- [43] E. Fermi, Nuovo Cim. **11** (1934) 1.
Trends To A Theory Of Beta Radiation. (In Italian)
- [44] E. Fermi, Z. Phys. **88** (1934) 161.
An Attempt Of A Theory Of Beta Radiation. 1
- [45] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li (1992). *Gauge Theory of Elementary Particle Physics.* Oxford: Clarendon Press.
- [46] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **43** (1979)
Baryon- and Lepton- Nonconserving Process.
S. Weinberg, Phys. Rev. D **22** (1980) 1694.
Varieties Of Baryon And Lepton Nonconservation.
- [47] F. Mandl, G. Shaw (1999). *Quantum field Theory - Revised Edition.*
Gran Bretagna: Biddles Ltd, Guildford and King's Lynn.
- [48] P. Langacker, Phys. Rept. **72** (1981) 185.
Grand Unified Theories And Proton Decay.
- [49] J.D. Bjorken, S.D. Drell (1965) *Relativistic Quantum Fields.*
New York: McGraw-Hill Press.

Bibliografia

- [50] H. Georgi (1999). *Lie Algebras in Particle Physics: from isospin to unified theories.*
USA: Perseus Book.
- [51] R. Slansky, Phys. Rept. **79** (1981) 1.
Group Theory For Unified Model Building.
- [52] H. Fritzsch and P. Minkowski, Annals Phys. **93** (1975) 193.
Unified Interactions Of Leptons And Hadrons.
- [53] Y. Fukuda et al (Super-Kamiokande Col.), Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1810.
Constraints on neutrino oscillation parameters from the measurement of day-night solar neutrino fluxes at Super-Kamiokande.
- [54] Michio Kaku (1993). *Quantum Field Theory - A Modern Introduction.* Oxford: Oxford University Press.
- [55] SNO Collaboration, Phys. Rev. Lett **89** (2002) 011301.
Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory.
- [56] M. Magg and Ch. Wetterich, Phys. Lett. B **94** (1980) 61.
Neutrino Mass Problem And Gauge Hierarchy.
- [57] R. N. Mohapatra and G. Senjanović, Phys. Rev. D **23** (1981) 165.
Neutrino Masses And Mixings In Gauge Models With Spontaneous Parity Violation.
- [58] J. Bernabéu, <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/0012312> .
Neutrinos.
- [59] P. Minkowski, Phys. Lett. B **67** (1977) 421.
 $\mu \rightarrow e \gamma$ At A Rate Of One Out Of 1-Billion Muon Decays?
- [60] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in: *Supergravity*, eds. D. Freedman and P. van Nieuwenhuizen (North Holland, Amsterdam, 1979) p. 315.
- [61] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 912.
Neutrino Mass And Spontaneous Parity Nonconservation.
- [62] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. D **23** (1981) 165.
Neutrino Masses And Mixings In Gauge Models With Spontaneous Parity Violation.
- [63] K. S. Babu, J. C. Pati and F. Wilczek, Phys. Lett. B **423** (1998) 337
[arXiv:hep-ph/9712307]; J. C. Pati [arXiv:hep-ph/0204240]; S. Dimopoulos, S. Raby and F. Wilczek, Phys. Lett. **B112**, 133 (1982); J.

Bibliografia

- Ellis, D.V. Nanopoulos, and S. Rudaz, Nucl. Phys. **B202**, 43 (1982); J. Hisano, H. Murayama and T. Yanagida, Nucl Phys. B402, 46 (1993); K.S. Babu and S.M. Barr, Phys. Lett. B381, 137 (1996); P. Nath and R. Arnowitt, [hep-ph/9708469].
- [64] H. Murayama and A. Pierce Phys. Rev. D **65** 055009 (2002).
Not even decoupling can save the minimal supersymmetric $SU(5)$ model.
- [65] T. Goto and T. Nihei, Phys. Rev. D **59** (1999) 115009 [arXiv:hep-ph/9808255].
Effect of $RRRR$ dimension 5 operator on the proton decay in the minimal $U(5)$ SUGRA GUT model.
- [66] K. Kobayashi at al., arXiv:hep-ex/0502026 v1, (2005)
Search for nucleon decay via modes favored by supersymmetric grand unification models in Super-Kamiokande-I.
- [67] B. Bajc, P. Fileviez Perez and G. Senjanovic, arXiv:hep-ph/0210374.
Minimal supersymmetric $SU(5)$ theory and proton decay: Where do we stand?
- [68] B. Bajc, P. Fileviez Perez and G. Senjanovic, Phys. Rev. D **66** (2002) 075005 [arXiv:hep-ph/0204311].
Proton decay in minimal supersymmetric $SU(5)$.
- [69] Z. Berezhiani, Z. Tavartkiladze and M. Vysotsky, arXiv:hep-ph/9809301.
 $d = 5$ operators in SUSY GUT: Fermion masses versus proton decay.
- [70] G. D'Agostini, hep-ph/9512295 (1995)
Probability and Measurement Uncertainty in Physics.
- [71] Lev B. Okun (1986). *Leptoni e quark.*
Mosca: Edizioni Mir (Roma: Editori Riuniti).
- [72] C. H. Llewellyn Smith, Phys. Rept. **3** (1972) 261.
Neutrino Reactions At Accelerator Energies.
- [73] C. Rubbia, *The Liquid/Argon Time Projection Chamber: A New Concept For Neutrino Detector*, CERN-EP/77-08 (1977)
- [74] D. B. Cline, F. Sergiampietri, J. G. Learned and K. McDonald, Nucl. Instrum. Meth. A **503** (2003) 136 [arXiv:astro-ph/0105442].
LANND: A massive liquid argon detector for proton decay, supernova and solar neutrino studies, and a neutrino factory detector.
D. B. Cline, arXiv:astro-ph/0506546.
A unique detector for proton decay and neutrino oscillations study (LANND).

- [75] S. Amerio *et al.* [ICARUS Collaboration], Nucl. Instrum. Meth. A **527** (2004) 329. *Design, construction and tests of the ICARUS T600 detector.*
- [76] ICARUS Collab. *Nucleon decay searches: study of nuclear effects and backgrounds.* ICARUS/TM 2001/04 October 9, 2001.
The ICARUS detector at the Gran Sasso: an upgraded analysis. ICARUS TM 05-XX May 6 2005.
- [77] Y. Fukuda *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. A **501** (2003) 418.
The Super-Kamiokande detector.
- [78] E. Segré. *Nuclei e Particelle: introduzione alla fisica nucleare e subnucleare - seconda edizione.* Bologna: Zanichelli, 1982.
- [79] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562 [arXiv:hep-ex/9807003].
- [80] Y. Hayato *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1529 [arXiv:hep-ex/9904020].
Search for proton decay through $p \rightarrow \text{anti-}nu K^+$ in a large water Cherenkov detector.
- [81] K. Kobayashi *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **72** (2005) 052007 [arXiv:hep-ex/0502026].
Search for nucleon decay via modes favored by supersymmetric grand unification models in Super-Kamiokande-I.
- [82] L. Oberauer, F. von Feilitzsch and W. Potzel, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **138** (2005) 108.
A large liquid scintillator detector for low-energy neutrino astronomy.
- [83] H. O. Back *et al.* [Borexino Collaboration], arXiv:physics/0408032.
Phenylxylylethane (PXE): A high-density, high-flashpoint organic liquid scintillator for applications in low-energy particle and astrophysics experiments.
- [84] T. M. Undagoitia *et al.*, Phys. Rev. D **72** (2005) 075014 [arXiv:hep-ph/0511230].
Search For The Proton Decay $P \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ In The Large Liquid Scintillator Low Energy Neutrino Astronomy Detector Lena.

Cerca di diventare non un uomo di successo, ma piuttosto un uomo di valore.

—A. Einstein—

Ringraziamenti

Sono molte le persone che devo ringraziare per avermi permesso di raggiungere, con questa tesi, un traguardo importante della mia vita.

Innanzi tutto i miei più cari ringraziamenti sono rivolti al prof. Francesco Vissani, che oltre a darmi l'opportunità di lavorare su un argomento estremamente interessante, mi ha concesso il suo sostegno e soprattutto la sua amicizia.

Desidero, poi, ringraziare il prof. Flavio Cavanna per i suoi preziosi consigli e la sua sempre cortese disponibilità.

Voglio anche ringraziare tutti gli amici che mi hanno accompagnato durante il corso di laurea: Andrea, Adriano, Angelo, Carla, Cristina, Daniela, Donatella, Federica, Francesco S., Gianfranco (my personal referee), Giulia, Laura, Lopoc (Lorenzo), Manuela, Maria Laura, Luzio, Marcella, Natalia, Nicola, Par_iss(e) (Pietro), Piero, Simone e tutti gli amici del laboratorio “ex-esp3”.

Un abbraccio particolare a tutta la mia famiglia, gli zii, le zie e i nonni che in questi anni mi hanno consigliato e supportato. Grazie a papà, mamma, Antonio, Maria Teresa e Silvia per tutto il loro affetto e per essermi stati sempre vicino soprattutto nei momenti più difficili. GRAZIE!

