



P2 - 7432

Г.В.Ефимов, Х.Намсрай

К ПОСТРОЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 0 И 1

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

We regret that some of the pages in the microfiche copy of this report may not be up to the proper legibility standards, even though the best possible copy was used for preparing the master fiche.

## **Ранг публикаций Объединенного института ядерных исследований**

Препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований /ОИЯИ/ являются самостоятельными публикациями. Они издаются в соответствии со ст. 4 Устава ОИЯИ. Отличие препринтов от сообщений заключается в том, что текст препринта будет впоследствии воспроизведен в каком-либо научном журнале или аperiodическом сборнике.

### **Индексация**

Препринты, сообщения и депонированные публикации ОИЯИ имеют единую нарастающую порядковую нумерацию, составляющую последние 4 цифры индекса.

Первый знак индекса - буквенный - может быть представлен в 3 вариантах:

“Р” - издание на русском языке;

“Е” - издание на английском языке;

“Д” - работа публикуется на русском и английском языках.

Препринты и сообщения, которые рассылаются только в страны-участницы ОИЯИ, буквенных индексов не имеют.

Цифра, следующая за буквенным обозначением, определяет тематическую категорию данной публикации. Перечень тематических категорий изданий ОИЯИ периодически рассылается их получателям.

Индексы, описанные выше, проставляются в правом верхнем углу на обложке и титульном листе каждого издания.

### **Ссылки**

В библиографических ссылках на препринты и сообщения ОИЯИ мы рекомендуем указывать: инициалы и фамилию автора, далее - сокращенное наименование института-издателя, индекс, место и год издания.

Пример библиографической ссылки:

*И.И.Иванов. ОИЯИ, Р2-4985, Дубна, 1971.*

P2 - 7432

Г.В.Ефимов, Х.Намсрай

К ПОСТРОЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 0 И 1

*Направлено в ТМФ*

Ефимов Г.В., Намсрай Х.

P2 - 7432

К построению нелокальной квантовой электродинамики  
частиц со спином 0 и 1

Построена нелокальная квантовая электродинамика частиц со спином  
0 и 1, удовлетворяющая условиям унитарности, макропричинности, реля-  
тивистской и градиентной инвариантности и конечности.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна, 1973

Efimov G.V., Namsrai Kh.

P2 - 7432

On the Construction of Non-Local Quantum  
Electrodynamics of Bosons with Spin 0 and 1

Non-local quantum electrodynamics of particles with spin 0  
and 1 is constructed in the Duffin-Kemmer's formalism. The pertur-  
bation theory of interactions of mesons with the electromagnetic  
fields is considered. S-matrix is finite, unitary, causal and gauge  
invariant.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1973

## § 1. Введение

В настоящее время существуют два пути исследования электромагнитных свойств скалярных и векторных бозонов, исходящих из волнового уравнения второго порядка Клейна-Гордона и Прока и из уравнений первого порядка, выведенных впервые в работах [1] и имеющих формально такой же вид, как и уравнения Дирака

$$(i\beta_\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0, \quad (I.1)$$

где  $\psi$  имеет 16 компонент и  $\beta_\mu$  — четыре шестнадцатирядные матрицы  $(\beta_\mu \partial_\mu = \beta_0 \partial_0 - \beta_j \partial_j; \beta_0^+ = \beta_0, \beta_j^+ = -\beta_j, j = 1, 2, 3)$ .

Описание, основанное на уравнениях Дэффина-Кеммера, обладает следующими достоинствами: во-первых, линейные уравнения (I.1) описывают свойства свободных частиц со спином, равным нулю ( $\psi$  имеет пять компонент), так и единице ( $\psi$  имеет десять компонент), причем в обоих случаях матрицы  $\beta_\mu$  удовлетворяют одним и тем же соотношениям

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = g_{\mu\nu} \beta_\lambda + g_{\lambda\nu} \beta_\mu, \quad (I.2)$$

где  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, g_{\mu\nu} = 0, \nu \neq \mu$ .

Во-вторых, поскольку матрицы  $\beta_\mu$  удовлетворяют одним и тем же соотношениям (I.2), то общие формулы для матричных элементов, определяющих различные процессы взаимодействия частиц со спином 0 и 1, имеют одинаковый вид. Вероятности этих процессов для частиц обоих видов, конечно, отличаются, т.е. отличаются следы произведений пятирядных и десятирядных матриц  $\beta_\mu$  [2].

Для пятирядных матриц

$$Sp\{\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\lambda}\beta_{\sigma}\dots\beta_{\tau}\beta_{\xi}\beta_{\eta}\} = \begin{cases} g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}\dots g_{\tau\xi} + g_{\mu\lambda}\dots g_{\sigma\xi}g_{\tau\nu} & \text{если } n \text{ — четное число} \\ 0, & \text{если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Для десятирядных матриц:

$$\begin{aligned} Sp\beta_{\nu}\beta_{\mu} &= 6g_{\nu\mu}, \\ Sp\beta_{\lambda}\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\sigma} &= 3(g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}), \\ Sp\beta_{\lambda}\beta_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\sigma}\beta_{\tau} &= g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}g_{\tau\tau} + g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau}g_{\tau\lambda} + 2(g_{\lambda\mu}g_{\sigma\tau}g_{\tau\nu} + g_{\nu\sigma}g_{\tau\lambda}g_{\tau\mu} + \\ &+ g_{\sigma\tau}g_{\tau\lambda}g_{\tau\mu} - g_{\lambda\sigma}g_{\tau\mu}g_{\tau\nu}) \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В-третьих, исследование ряда теории возмущений для  $S$ -матрицы формально будет таким же, как и в спинорной электродинамике, и, следовательно, вычисление матричных элементов  $S$ -матрицы может производиться с помощью фейнмановских диаграмм и правил, с единственным различием, что вместо пропагаторов электронов следует подставить пропагаторы заряженных бозонов. Кроме того, вершинам диаграмм соответствует теперь  $\beta_{\mu}$ , а не  $\gamma_{\mu}$ . Более того, в этой схеме доказательство градиентной инвариантности теории выглядит весьма просто. Построение, таким образом,  $S$ -матрицы будет технически проще, чем в вариантах, основанных на уравнениях второго порядка [3,4].

Итак, мы будем строить  $S$ -матрицу нелокальной теории электромагнитных взаимодействий частиц со спином 0 и 1, на основе уравнений первого порядка (1.1).

## § 2. Постановка задачи

Исходный лагранжиан, описывающий электромагнитное

взаимодействие скалярных и векторных частиц, выбирается в форме

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{in}(x), \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{2} : \partial_\nu A_\mu(x) \partial_\nu A_\mu(x) : + : \bar{\psi}(x) (i\beta \partial_\mu - M) \psi(x) :,$$

$$\mathcal{L}_{in}(x) = e : \bar{\psi}(x) \beta \psi(x) A_\mu(x; \ell) :,$$

здесь  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_0$ ,  $\gamma_0 = 2\beta^2 - 1$ .

Нелокальность в лагранжиан взаимодействия входит через поля фотонов

$$A_\mu(x; \ell) = \mathcal{K}(\ell^2 \square) A_\mu(x) = \int d^4 y \mathcal{K}(x-y) A_\mu(y),$$

где  $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(\ell^2 \square) \delta^{(4)}(x)$  принадлежит подходящему пространству, нелокальных обобщенных функций <sup>15)</sup>, а параметр  $\ell$  имеет смысл элементарной длины.

Наша задача состоит в том, чтобы найти  $S$ -матрицу в виде ряда по теории возмущений. Формально  $S$ -матрица записывается в виде

$$S = T \exp \left\{ i e \int d^4 x \bar{\psi}(x) \beta \psi(x) A_\mu(x; \ell) \right\}. \quad (2.2)$$

Для получения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (2.2) в ряд по  $e$  и перейти к  $N$ -произведению операторов поля  $A_\mu(x)$  и  $\psi(x)$  согласно теореме Вика,

По определению, будем считать, что "хронологическая"



свертка размазанного электромагнитного поля записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) &= \delta_{\mu\nu} \mathcal{D}(x-y) = \overline{A_\mu(x; \epsilon)} A_\nu(y; \epsilon) = \\ &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k \frac{[\mathcal{K}(\ell^2 k^2)]^2}{-k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В соответствии с результатами [5, 6] будем предполагать, что факторизатор  $V(\ell^2 k^2) = [\mathcal{K}(\ell^2 k^2)]^2$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $V(z)$  - целая функция в комплексной  $z$ -плоскости
- порядка роста  $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$ ,
- 2)  $[V(z)]^* = V(z^*)$ ,
- 3)  $V(x) \geq 0$  при вещественных  $x$ ,
- 4)  $V(0) = 1$ ,
- 5)  $\int_0^\infty du V(u) < \infty$  для спина  $S=0$ ,
- $\int_0^\infty du u^2 \log u V(u) < \infty$  для спина  $S=1$ .

Пропэгаторы заряженных частиц спина  $S=0$  и  $S=1$  записываются в виде (см. [7]):

$$\begin{aligned} T^c(x-y) &= \overline{\psi(x)} \psi(y) = \langle 0 | T^* (\psi(x) \overline{\psi}(y)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p \tilde{T}^c(p) e^{-ipx} \\ \tilde{T}^c(p) &= \frac{1}{M - \hat{p} - i\epsilon} = \frac{\hat{p}(\hat{p} + M) - p^2 + M^2}{M(M^2 - p^2 - i\epsilon)}, \end{aligned}$$

где  $\hat{p} = p_\mu \beta_\mu = p_0 \beta_0 - \vec{p} \vec{\beta}$ .

Таким образом, мы получаем обычный ряд теории возмущений с единственными отличиями, что причинная функция фотонного поля заменяется функцией (2.3).

### § 3. Регуляризационная процедура

Как неоднократно подчеркивалось нами ранее [4-6], построение  $S$ -матрицы по теории возмущений возможно лишь в рамках определенного математического аппарата, связанного с введением промежуточной регуляризации.

Сформулируем теперь регуляризационную процедуру, которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений.

В квантовой электродинамике в ряду теории возмущений подлежат регуляризации, во-первых, нелокальные пропагаторы фотона, и, во-вторых, замкнутые циклы, образованные пропагаторами заряженных частиц.

Для нелокального фактора  $V(\epsilon^2 k^2)$  в области  $k^2 < 0$  справедливо представление Меллина

$$V(\epsilon^2 k^2) = \frac{1}{2i} \int_{-p-i\infty}^{-p+i\infty} ds \frac{v(s)(-\epsilon^2 k^2)^s}{\sin \pi s}, \quad (3.1)$$

где  $0 < p < a$ . Функция  $v(z)$ :

1) регулярна в полуплоскости  $\text{Re } z > -2$ ; в этой области

$$|v(x+iy)| \leq C \frac{e^{\pi |y|}}{(1+|y|)^N \Gamma(1+\frac{|x|}{S})}$$

при любых  $A, C$  и некотором  $C > 0$ ;

2) в точке  $z = -1$  имеет нуль, по крайней мере, первого порядка;

$$3) \quad v(0) = 1,$$

$$4) \quad [v(z)]^* = v(z^*).$$

Представление (3.1) справедливо при  $\kappa^2 < 0$ . Для перехода в область  $\kappa^2 > 0$  необходимо перейти от интегрирования в  $\zeta$ -плоскости от контура  $L_0$  к контуру  $L_\theta$  ( $0 < \theta \leq \pi/2$ ), где

$$L_\theta = \left[ \zeta: \zeta = -1 - \lambda + a e^{\pm i(\frac{\pi}{2} - \theta)}, 0 < \lambda < 1, \forall a \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right],$$

как показано на рис. 1:

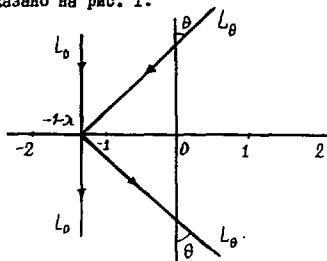


Рис. 1.

Введем регуляризованную функцию

$$\tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{\beta-i\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) e^{\delta \zeta^2}}{\sin \pi \zeta} e^{2\zeta(-\kappa^2 - i\epsilon)} \zeta^{-1} \quad (3.2)$$

Функция  $\tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2)$  при  $\delta > 0$ :

5) определена во всей комплексной  $\kappa^2$ -плоскости и регулярна везде, кроме разреза вдоль луча  $[0, +\infty)$ ;

$$6) \tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2) = O\left(\frac{1}{|\kappa^2|^{2+\lambda}}\right) \text{ при } |\kappa^2| \rightarrow \infty;$$

$$7) \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2) = \tilde{\mathcal{D}}(\kappa^2).$$

Для функции  $\tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2)$  существует фурье-образ

$$\mathcal{D}^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d^4\kappa e^{-i\kappa x} \tilde{\mathcal{D}}^\delta(\kappa^2) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{\beta-i\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta)}{\sin \pi \zeta} e^{2\zeta} e^{\delta \zeta^2} \mathcal{D}(x, \zeta),$$

где

$$\mathcal{D}(x, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 k \, e^{-ikx} (-k^2 - i\varepsilon)^{-\frac{s-1}{2}} = i \frac{2^{\frac{s-1}{2}} \Gamma(1+\frac{s}{2})}{4\pi^2 \Gamma(1-\frac{s}{2})} e^{-i\pi^{\frac{s}{2}}} (x^2 - i\varepsilon)^{-\frac{s-1}{2}}.$$

Легко видеть, что функция  $\mathcal{D}^{\delta}(x)$  ограничена в точке  $x=0$ . В смысле обобщенных функций

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{D}^{\delta}(x) = \mathcal{D}(x).$$

Таким образом, при  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{D}^{\delta}(x)$  является локально интегрируемой, и произведение типа  $\prod_{ij} \mathcal{D}^{\delta}(x_i - x_j)$  также локально интегрируемо.

Если теперь в качестве формфактора  $V(\ell^2 k^2)$  выбрать функции, удовлетворяющие условию  $V(\ell^2 k^2) \rightarrow 0$ , при  $k^2 \rightarrow \pm \infty$ , например,  $\exp\{-(\ell^2 k^2)^2\}$  или  $\exp\{-(\ell^2 k^2)^{2N}\}$ , где  $N=1, 2, \dots$ , то вместо функции  $\mathcal{V}(\varepsilon)/\sin \pi \varepsilon$  в выражениях (3.1) и (3.2) следует подставить функцию

$$\frac{1}{2N} \frac{1}{\sin(\pi \frac{\varepsilon}{2N}) \Gamma(1 + \frac{\varepsilon}{2N})}. \quad (3.3)$$

Для снятия регуляризации в матричных элементах  $\mathcal{S}$ -матрицы достаточно перейти к евклидовой метрике по всем внутренним импульсам в интегралах, соответствующих любым связным диаграммам Фейнмана, поскольку  $\widehat{\mathcal{D}}^{\delta}(k^2)$  регулярна в полуплоскости  $\text{Im} k^2 \geq 0$ . После этого можно перейти к пределу  $\delta \rightarrow 0$ , поскольку функции  $\widehat{\mathcal{D}}(k^2)$  убывают при  $k^2 \rightarrow -\infty$  (подробнее см. [5]).

Опишем теперь процедуру регуляризации заряженных циклов. Интегралы, соответствующие замкнутым циклам:

$$\text{Sp} \left[ \beta T^c(x_1 - x_2) \beta T^c(x_2 - x_3) \dots \beta T^c(x_n - x_1) \beta T^c(x_n - x_1) \right], \quad (3.4)$$

оставленным только из пропагаторов заряженных полей скалярных или векторных бозонов, будем регуляризовать с помощью

частично видоизмененной циклической регуляризации Паули-Виллерса (см. , например, /8/). Это означает, что причинные функции заряженных частиц регуляризуются не по отдельности, а замкнутыми циклами. Если цикл имеет  $n$  вершин, тогда регуляризованное выражение равно:

$$\sum_j C_j \Lambda_j^{sn} Sp \left\{ \beta T_{M_j}^c(x_1-x_2) \beta T_{M_j}^c(x_2-x_3) \beta \dots \beta T_{M_j}^c(x_n-x_1) \right\},$$

где проведены замены

$$M \rightarrow M_j = M \Lambda_j, \\ e \rightarrow e_j = e \Lambda_j^s.$$

Здесь  $s$  - спин заряженной частицы, в нашем случае  $s=0$  или  $1$ .

$\Lambda_j$  ( $j=1,2,\dots,8$ ) - большие безразмерные параметры регуляризации, мы их выберем в виде  $\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j$ , где  $\Lambda \gg 1$ , а  $\epsilon_j \ll 1$ . Коэффициенты  $C_0, C_j$  ( $j=1,\dots,8$ ) удовлетворяют системе уравнений

$$C_0 + \sum_{j=1}^8 C_j \Lambda_j^k = 0, \quad k=0,1,\dots,4 \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^8 C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j = a_m \quad m=0,2,4, \quad (3.6)$$

где  $a_m$  - произвольные постоянные. В рамках этой регуляризации сходятся интегралы от любых замкнутых циклов, и существует конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Действительно, в случае скалярных заряженных частиц ( $s=0$ ) наибольшая степень импульса в числителе под знаком интеграла

$$\int d^4p \sum_j C_j \Lambda_j^{sn} Sp \left\{ \beta \widetilde{T}_{M_j}^c(p+k_1) \beta \widetilde{T}_{M_j}^c(p+k_2) \beta \dots \beta \widetilde{T}_{M_j}^c(p+k_n) \right\} \quad (3.7)$$

не может превосходить порядка диаграммы, т.е. числа  $n$ , так как

$$(\hat{p}^2 - p^2) \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_m} (\hat{q}^2 - q^2) = 0$$

в случае пятирядных матриц для любых  $p$  и  $q$ , если  $m$  — нечетное число. Поэтому, максимальная расходимость будет квадратичной.

В случае векторных заряженных бозонов ( $s=1$ ) наибольшая степень импульса в числителе в (3.7) равна  $2n$ , так что интегралы, соответствующие любым заряженным циклам векторных бозонов, расходятся не быстрее четвертой степени по импульсу<sup>\*)</sup>.

Поэтому уравнения (3.5) обеспечивают сходимость интегралов от регуляризованной функции (3.2). Уравнения (3.6) являются условиями, при которых в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  не возникает никаких бессмысленных расходящихся выражений. Этот вопрос более подробно обсужден в работах [4, 9].

#### § 4. Ряд теории возмущений

Перейдем теперь к вычислению матричных элементов, соответствующих следующим примитивным неприводимым диаграммам Фейнмана:

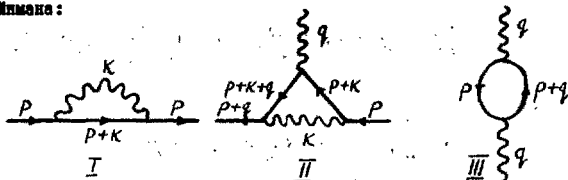


Рис. 2

\*) Поскольку теория заряженного векторного поля во внешнем электромагнитном поле относится к классу перенормируемых [3].

# I. Диаграмма собственной энергии

Рассмотрим диаграмму собственной энергии, представленную на рис. 2(1). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$-i : \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) : ,$$

где

$$\Sigma(x-y) = -ie^2 \beta_\mu T^c(x) \beta_\mu \mathcal{D}(x-y).$$

Переходя в импульсное представление и воспользовавшись нашей регуляризационной процедурой, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(\rho) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (-ie^2) \int d^4x \, e^{ipx} \beta_\mu T^c(x) \beta_\mu \mathcal{D}^\delta(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(ie^2)}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{V(k^2)}{-k^2 - i\epsilon} \beta_\mu \frac{M^2 - (\rho-k)^2 + (\hat{\rho} - \hat{k})(\hat{\rho} - \hat{k} + M)}{M(M^2 - (\rho-k)^2 - i\epsilon)} \beta_\mu. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Воспользуемся далее представлением (3.2) для пропагатора  $V(k^2)/(-k^2 - i\epsilon) = \tilde{\mathcal{D}}^\delta(k^2)$ , тогда после некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(\rho) &= \frac{2}{4\pi} M \left\{ \left[ \mathcal{B} + \frac{\hat{\rho}}{M} + (1-\mathcal{B}) \frac{\hat{\rho}^2}{M^2} \right] \mathcal{T}_{2,0}(M^2 \ell^2, \frac{\rho^2}{M^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ 2(1-\mathcal{B}) \frac{\hat{\rho}^2}{M^2} + \frac{\hat{\rho}}{M} \right] \mathcal{T}_{1,0}(M^2 \ell^2, \frac{\rho^2}{M^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1-\mathcal{B}) \mathcal{B} \mathcal{T}_{1,1}(M^2 \ell^2, \frac{\rho^2}{M^2}) + (1-\mathcal{B}) \frac{\hat{\rho}^2}{M^2} \mathcal{T}_{2,0}(M^2 \ell^2, \frac{\rho^2}{M^2}) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{B} = \beta_\mu \beta_\mu, \quad \hat{\rho} = \beta_\mu \rho_\mu = \beta_0 \rho_0 - \vec{\beta} \vec{\rho};$$

$$\mathcal{T}_{a,b}(M^2 \ell^2, \frac{\rho^2}{M^2}) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta + i00}^{-\beta + i\infty} d\zeta \frac{\mathcal{V}(\zeta) (M^2 \ell^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} H_{a,b}(\zeta, \frac{\rho^2}{M^2}),$$

где

$$\frac{a+b}{2} < \beta_{a+b} < \frac{a+b+1}{2};$$

$$H_{a,b}(\xi, \frac{p^2}{M^2}) = \frac{\Gamma(-b-\xi)}{\Gamma(1-\xi)} \int_0^1 du u^{-\xi} (1-u)^{\xi+a} \left(1 - \frac{p^2}{M^2} u\right)^{\xi+b} =$$

$$= \frac{\Gamma(-b-\xi)}{\Gamma(a+2)} \Gamma(\xi+a+1) F(-\xi-b, 1-\xi; a+2; \frac{p^2}{M^2}).$$

Подсчитаем электромагнитную поправку к массе частицы в двух пределах  $M^2 \ell^2 \ll 1$  и  $M^2 \ell^2 \gg 1$ . Имеем

1). Для  $M^2 \ell^2 \ll 1$

$$\tilde{\Sigma}(M) = \frac{32}{8\pi} \cdot \frac{B(B-1)}{6} \frac{V'(-1)}{M^2 \ell^2} \cdot M \left(1 + O(M^2 \ell^2 \log \frac{1}{M^2 \ell^2})\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{32}{4\pi} \frac{V'(-1)}{M^2 \ell^2} M; & s=0, \\ -\frac{2}{4\pi} \frac{V'(-1)}{M^2 \ell^2} M, & s=1 \end{cases} \quad (4.2)$$

2). Для  $M^2 \ell^2 \gg 1$

$$\tilde{\Sigma}(M) = \frac{2}{2} \frac{V'(-\frac{1}{2})}{M \ell} M \left(1 + O\left(\frac{1}{M^2 \ell^2}\right)\right).$$

Интересно подсчитать разность масс  $\pi^+$  и  $\pi^0$  мезонов. Так как  $\pi^0$ -мезон электрически нейтрален, разность масс  $M_{\pi^+} - M_{\pi^0}$  будет определяться только собственной электромагнитной энергией  $\pi^+$ -мезона.

Будем грубо считать  $\pi^+$ -мезон равномерно заряженным шаром, радиус которого  $\ell$  определяется

$$\ell^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle_{\text{эксп}} \simeq \frac{5}{3} \frac{0,19}{M_{\pi}^2} = \frac{0,32}{M_{\pi}^2},$$

где  $\langle r^2 \rangle_{\text{эксп}} \simeq (0,6 \cdot 10^{-13} \text{ см})^2 = \frac{0,19}{M_{\pi}^2}$ , согласно [10]. Для заряженного шара  $V'(-1) = 9/2$  (см. [11]).

Подставляя эти величины в (4.2), получим

$$M_{\pi^+} - M_{\pi^0} = \delta M = 2 M_{\pi} \frac{3}{4\pi} \frac{9}{2 \cdot 0,32} = 3,4 \text{ МэВ},$$



что находится в грубом соответствии с экспериментальным значением 4,6 Мэв. Ясно, что подбирая распределение заряда в  $\pi^+$ -мезоне соответствующим образом, легко добиться полного совпадения с экспериментальным значением разности масс.

## 2. Вершинная диаграмма и статистические характеристики бозонов

Рассмотрим теперь вершинную диаграмму, представленную на рис. 2(П). Этой диаграмме соответствует матричный элемент

$$i e : \bar{\Psi}(x) \Gamma_{\mu}(x, z/y) \Psi(z) A_{\mu}(y) :,$$

где введена вершинная функция третьего порядка

$$\Gamma_{\mu}(x, z/y) = i e^2 \beta_{\nu}^c T^c(x-y) \beta_{\mu}^c T^c(y-z) \beta_{\nu}^c \mathcal{D}(x-z).$$

Переходя к импульсному представлению, согласно принятой нами регуляризационной процедуре, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu}(p, q) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (i e^2) \int d^4 y d^4 z e^{i p z + i q y} \beta_{\nu}^c T^c(y) \beta_{\mu}^c T^c(z-y) \beta_{\nu}^c \mathcal{D}^{\delta}(z) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \tilde{\mathcal{D}}^{\delta}((p-k)^2) \beta_{\nu}^c \tilde{T}^c(p+k) \beta_{\mu}^c \tilde{T}^c(k) \beta_{\nu}^c = \\ &= \frac{e}{4\pi^2 2i} \left\{ 2 \int_{-p-i\infty}^{-p+i\infty} d\tau \frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)}{\Gamma(1-\tau)} + \frac{1}{M^2} \int_{-p'+i\infty}^{-p'-i\infty} d\tau \frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)}{\Gamma(-\tau)Z} - 6 M^2 \int_{-p''+i\infty}^{-p''-i\infty} d\tau \frac{\mathcal{F}_{\mu}(z)Z}{(1+\tau)\Gamma(1-\tau)} \right\} \rho(\tau) \end{aligned}$$

$(0 < p < 1) \quad (0 < p' < 1) \quad (1 < p'' < 2)$

где

$$\rho(\tau) = \frac{\mathcal{V}(\tau)(M^2 e^2)^5 Z^5}{[\sin \pi \tau]^2 \Gamma(1+\tau)}, \quad Z = x + y - \alpha \gamma \frac{p^2}{M^2} - \alpha \gamma \frac{q^2}{M^2} - \alpha x \frac{(p+q)^2}{M^2},$$

$$\mathcal{F}_{i\mu}(z) = \delta \mathcal{L}(z) f_{i\mu} = \int_0^1 d\alpha d\alpha' d\alpha'' \tilde{z}^i \delta(\tau - \alpha - \alpha' - \alpha'') f_{i\mu} \quad (i=1,2,3),$$

а функции  $f_{\mu}$  определяются следующим выражением:

$$f_{\mu} = \beta_{\nu} \left\{ N \beta_{\mu} \left(1 - \frac{B}{4}\right) - \frac{1}{4} \mathcal{D}_{\mu} \beta_{\mu} \mathcal{T}_{\mu} + \left(1 - \frac{B}{4}\right) \beta_{\mu} C \right\} \beta_{\nu},$$

$$f_{\mu} = \beta_{\nu} N \beta_{\mu} C \beta_{\nu}$$

$$f_{\mu} = \beta_{\nu} \left(1 - \frac{B}{4}\right) \beta_{\mu} \left(1 - \frac{B}{4}\right) \beta_{\nu} = \frac{1}{16} \beta_{\mu}^2 (2-4).$$

Здесь

$$N = \hat{q}^2 - [\hat{\mathcal{D}} \hat{q}]_+ + 2(q \mathcal{D}) - q^2 + M^2 + M(\hat{q} - \hat{\mathcal{D}}) + \hat{\mathcal{E}}^2 - \mathcal{D}^2,$$

$$\mathcal{D}_{\rho} = [\hat{q}_{\rho}]_+ - 2q_{\rho} + M \beta_{\rho} - [\beta_{\rho} \hat{\mathcal{D}}]_+ + 2\mathcal{D}_{\rho},$$

$$\mathcal{T}_{\rho} = -[\beta_{\rho} \hat{\mathcal{D}}]_+ + M \beta_{\rho} + 2\mathcal{D}_{\rho},$$

$$C = M^2 - M \hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{D}}^2 - \mathcal{D}^2,$$

$$\mathcal{D} = xq - 2\rho, \quad B = \beta_{\mu} \beta_{\mu},$$

$$\eta = (5-B)B = \begin{cases} 6 & \text{для спина } I \\ 4 & \text{для спина } 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что верхняя часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_{\mu} \bar{u}(\vec{p} + \vec{q}) \Gamma_{\mu}(\rho, q) u(\vec{p}) = 0,$$

где  $u(\vec{p})$  и  $\bar{u}(\vec{p} + \vec{q})$  — спиноры, описывающие бозон в начальном и конечном состояниях.

Это равенство основано на использовании тождества

$$q_{\mu} \left\{ \frac{1}{M - \hat{\rho}'} \beta_{\mu} \frac{1}{M - \hat{\rho}} \right\} = \frac{1}{M - \hat{\rho}'} - \frac{1}{M - \hat{\rho}},$$

если  $q = \rho' - \rho$ .

Для того, чтобы получить статистические величины, характеризующие электромагнитные свойства бозонов, мы должны вычислить

вершинную функцию на массовой поверхности. При переходе к массовой оболочке ( $p^2 = p'^2 = M^2$ ;  $q^2 \rightarrow 0$ ) возникает инфракрасная расходимость. Мы регуляризуем ее с помощью формального приема, который состоит в том, что в причинную функцию  $\tilde{\mathcal{D}}(k^2)$  вводится отличная от нуля "масса" фотона  $\lambda$ . При вычислении матричных элементов используем соотношения

$$(\hat{p} - M)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(\hat{p}' - M) = 0,$$

а также

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &= \hat{p}_\mu \psi, & -i\partial_\mu \psi - i\partial_\nu S_{\mu\nu} \psi + M\hat{p}_\mu \psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} &= -\partial_\nu \bar{\psi} S_{\mu\nu}, & -i\partial_\mu \bar{\psi} - i\partial_\nu \bar{\psi} S_{\mu\nu} - M\bar{\psi} \hat{p}_\mu &= 0, \end{aligned}$$

или в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &= \hat{p}_\mu \psi, & (p'_\mu + p_\nu S_{\mu\nu} - M\hat{p}_\mu)\psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} &= -\bar{\psi} \hat{p}_\mu, & \bar{\psi}(p'_\mu + p_\nu S_{\mu\nu} - M\hat{p}_\mu) &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{p}_\mu \hat{p}_\nu - \hat{p}_\nu \hat{p}_\mu).$$

После элементарных, но длинных выкладок функция  $\psi(\hat{p}_\mu + \hat{p}'_\mu(p, q))\psi$  приводится к следующему виду

$$\psi(\hat{p}_\mu + \hat{p}'_\mu(p, q))\psi = \bar{\psi}\hat{p}_\mu \left( e + \frac{e}{2M} F_0(q^2) \right) \psi + \mathcal{Q}_{\mu\nu} q_\nu F_1(q^2) + Q_{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2), \quad (4.3)$$

где антисимметричные тензоры

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu} = \frac{e}{2M} \bar{\psi} S_{\mu\nu} (2B-4)\psi \quad \text{и} \quad Q_{\mu\nu} = -\frac{e}{2M} \bar{\psi} S_{\mu\nu} (2B-5)\psi.$$

определяют, как мы увидим ниже, дипольный и квадрупольный моменты бозона со спином 1., соответственно, а функции  $F_i(q^2)$  ( $i=0,1,2$ ) принимают вид

$$F_i(q^2) = \frac{e}{2M} \frac{1}{2i} \left\{ 2 \int_{-\beta+100}^{\beta-100} d\tau \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\Gamma(1-\tau)} + \frac{1}{M^2} \int_{-\beta+100}^{\beta-100} d\tau \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\Gamma(1-\tau)} - 6M^2 \int_{-\beta+100}^{\beta-100} d\tau \frac{\partial \mathcal{L}_i}{(1+\tau)\Gamma(1-\tau)} \right\} \rho(\tau),$$

здесь

$$t_0 = \frac{1}{7} \left\{ \frac{q^2}{2} \left[ \frac{5}{2} \alpha - \frac{3}{2} + 2x(\alpha+x) \right] + 2M^2 \left[ i + \alpha(1-\eta) \right] \right\},$$

$$u_0 = \frac{q^4}{4} x \alpha (1-\alpha-x) + M^4 \left\{ (1-\alpha^2) \left[ \frac{5}{2} (\alpha-x) + 1-4\alpha \right] + \alpha + \alpha^2 (2+\alpha) \right\} +$$

$$+ \frac{q^2 M^2}{2} \left\{ (1-\alpha-x)(1-x)(5x+1-\alpha^2) + x(x+\alpha)(2-\alpha^2+1/\alpha^2) + 2(1-x-\frac{\alpha}{2}) \cdot \right.$$

$$\cdot (\alpha(x-\alpha+1)+2x) - \alpha^2(1+\alpha) - 9x\alpha - 4x - 2\alpha - x\alpha^2 \left. \right\},$$

$$b_0 = \frac{1}{16}(\eta-4), \quad b_1 = b_2 \equiv 0.$$

Остальные члены, которые дают вклад в дипольный и квадрупольный моменты, имеют более простой вид:

$$t_1 = \frac{M}{4} \left\{ (1-\alpha)\eta + 12\alpha - 4 \right\},$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{M^3}{2} (1-\alpha^2)(7\alpha-3) + \frac{1}{2} M x q^2 [3(1-\alpha-x) - \alpha^2] \right\},$$

$$t_2 = \frac{M}{4} \left\{ (1-\alpha)\eta + \frac{21}{2}\alpha - \frac{9}{2} \right\},$$

$$a_2 = M^3 \left[ (1-\alpha^2) \frac{1}{2} (3\alpha-1) - \alpha x (1-\alpha-x) \right] + \frac{M}{2} x q^2 (1-\alpha-x - \frac{\alpha^2}{2}).$$

Выражение (4.3) имеет общую форму для скалярных и векторных бозонов. Рассмотрим член, пропорциональный матрице  $\beta_\mu$ , при  $q^2=0$  и  $M^2 \rho^2 \ll 1$ :

$$\Lambda(0) = \frac{1}{2M} F_0(0) = \frac{2}{4\pi} \left\{ [\log M^2 \rho^2 + v'(0)] \left( \frac{1}{2} - \frac{25}{96}(\eta-4) \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \log \frac{\lambda^2}{M^2} - \frac{v'(-1)}{M^2 \rho^2} \frac{\eta-4}{16} + \frac{37}{36} \frac{\eta-4}{32} + \frac{20}{3} \right\}.$$

Для скалярной частицы

$$\Lambda^S(0) = \frac{2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\log M^2 \rho^2 + v'(0)) + 2 \log \frac{\lambda^2}{M^2} + \frac{20}{3} \right\}$$

и для векторной частицы

$$\Lambda^V(0) = \frac{2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{48} (\log M^2 \rho^2 + v'(0)) - \frac{v'(-1)}{8M^2 \rho^2} + \frac{37}{36} \frac{1}{16} + \frac{20}{3} + 2 \log \frac{\lambda^2}{M^2} \right\}.$$

Эти члены определяют перенормировку заряда бозона

$$\epsilon_r^{(v,s)} = e(1 + A^{(v,s)}(0)).$$

Тогда, принимая во внимание тождество

$$e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu = e \bar{\psi} \left\{ \frac{p_\mu + p'_\mu}{2M} - \frac{1}{2M} \gamma_{\mu\nu} q_\nu \right\} \psi A_\mu = \left\{ \bar{\psi} \gamma_\mu e \frac{p_\mu}{2M} - \partial_\mu q - \partial_\mu q \right\} A_\mu,$$

перепишем выражение (4.3) в виде

$$e \bar{\psi} (\not{p}_\mu + \not{p}'_\mu) \psi A_\mu = \left\{ \bar{\psi} e \frac{p_\mu}{2M} \psi - (1 - \xi(0)) \partial_\mu q - (1 - \xi(0)) \partial_\mu q \right\} A_\mu. \quad (4.4)$$

Для обсуждения статических электромагнитных характеристик заряженных бозонов мы должны перейти к статическому пределу в формуле (4.4).

Рассмотрим сначала случай спина ноль. При этом

$$Q_{\mu\nu} = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu\nu} \psi(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu\nu} B \psi(x) = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right),$$

и в статическом пределе получим

$$Q_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow \vec{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{v} \rightarrow 0,$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\vec{v}$  — скорость скалярной частицы и  $\vec{E}$  — электрическое поле.

Таким образом, магнитный момент отсутствует у скалярных бозонов.

Поле векторных частиц  $\phi_\mu(x)$  имеет компоненты

$$\phi_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{d^3k}{k^2 \omega} \left( a_\mu(k) e^{-ikx} + a_\mu^\dagger(k) e^{ikx} \right),$$

где  $a_\mu(k)$  — соответствует частице, а  $a_\mu^\dagger(k)$  — античастице. Положим  $a_0(k) = 0$ , что означает отсутствие античастиц, а в статическом

пределе вектор  $q_\mu(\vec{k})$  имеет три компоненты

$$q_\mu(\vec{k}) = \begin{cases} a_0 = \frac{|\vec{k}|}{M} a_3 \rightarrow 0 \\ \vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{\omega}{M} a_3, \quad \omega = \sqrt{M^2 + \vec{k}^2}, \end{cases}$$

здесь  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  - вектор поляризации покоящейся векторной частицы, так что вектор спина равен

$$\vec{S} = i [\vec{a}^* \times \vec{a}],$$

а тензор квадрупольного момента

$$T_{ij} = a_i^* a_j + a_j^* a_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\vec{a}^* \vec{a}).$$

В этом случае мы имеем

$$\bar{\Psi} S_{\mu\nu} (B-2) \Psi = -M (\phi_\mu^* \phi_\nu - \phi_\nu^* \phi_\mu),$$

а

$$\bar{\Psi} S_{\mu\nu} (2B-5) \Psi = -\frac{1}{M} (G_{\mu\rho}^* G_{\rho\nu} - G_{\nu\rho}^* G_{\rho\mu}) - M (\phi_\mu^* \phi_\nu - \phi_\nu^* \phi_\mu),$$

где

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu.$$

В статическом пределе получим

$$\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{e}{2M} \vec{S} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

и

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{e}{2M^2} \left\{ \frac{i}{4} T_{ij} (\partial_i E_j + \partial_j E_i) \right\},$$

здесь  $\vec{\mathcal{H}}$  - магнитное поле.

Таким образом, тензоры  $\mathcal{Q}_{\mu\nu}$  и  $\mathcal{Q}_{\mu\nu}$  определяют дипольный и квадрупольный моменты векторного бозона соответственно. Мы

считаем, что  $M^2 e^2 \ll 1$  и получим поправку с точностью до ( $M^2 e^2$ ):

$$\delta \mu_1 = -F_1(0) = \frac{2}{2\pi} \left[ \log \frac{1}{M^2 e^2} - v'(0) + \frac{1}{2} \right],$$

$$\delta \mu_2 = -F_2(0) = \frac{32}{8\pi} \left[ \log \frac{1}{M^2 e^2} - v'(0) + \frac{43}{54} \right],$$

а при  $M^2 e^2 \gg 1$  имеем

$$\delta \mu_1 = \delta \mu_2 = \frac{2}{2} \frac{v(-1/2)}{M e} + O\left(\frac{1}{M^2 e^2}\right).$$

### 3. Диаграмма поляризации вакуума

Рассмотрим диаграмму поляризации вакуума, представленную на рис. 2(В). Член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, представим в виде:

$$-i : A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) :,$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x-y) = i e^2 S_P \left[ \beta_\mu T^c(x-y) \beta_\nu T^c(y-x) \right].$$

Используя принятый нами метод регуляризации, получим в импульсном пространстве:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) e^{iq(x-y)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{reg } \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) &= \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \sum_j G_j A_j^{s_2} S_P \left\{ \beta_\mu \frac{1}{M_j - (\hat{q} + \hat{k}) - i\epsilon} \beta_\nu \frac{1}{M_j - \hat{k} - i\epsilon} \right\} = \\ &= \frac{i e^2}{4(2\pi)^4} \int d^4 k \sum_j G_j A_j^{s_2} \left[ (q_\nu q_\mu - q_\mu^2 g_{\mu\nu}) \left( \zeta_1 v^2 + \left( \frac{1}{2} \zeta_1 - 1 \right) \frac{\kappa_\epsilon^2}{M_j^2} \right) + g_{\mu\nu} \left( \kappa_\epsilon^2 + 2M_j^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q^2}{2} (1-v^2) \right) \right] \left[ \kappa_\epsilon^2 + M_j^2 - \frac{q^2}{4} (1-v^2) \right]^{-2}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \zeta_1 = \begin{cases} 2 & \text{спин } s=0 \\ 6 & \text{спин } s=1 \end{cases},$$

Выполнив интегрирование по  $K_E$ , получим

$$\text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^s(q) = \frac{2}{4\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \int_0^1 dx (4x - 4x^2 - 1) \left[ \log\left(1 - \frac{q^2}{M^2} x(1-x)\right) + \sum_{j=1}^s c_j \log\left(\lambda_j - \frac{q^2}{M^2} x(1-x)\right) \right]$$

для скалярной частицы,

$$\text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^v(q) = \frac{2}{16\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \int_{-1}^1 dv \left\{ 6v^2 \left[ -\mathcal{D} - \log(1-\mathcal{D}) - \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j^2 \log \lambda_j^2 \right] + 4 \left[ (1-\mathcal{D}) \log(1-\mathcal{D}) + \mathcal{D} + \sum_{j=1}^s c_j \lambda_j^2 \log \lambda_j^2 - \mathcal{D} \sum_{j=1}^s c_j \log \lambda_j^2 \right] \right\}$$

для векторной частицы, где  $\mathcal{D} = \frac{q^2}{4M^2} (1-v^2)$ ,  $v = 1-2x$ .

Согласно нашим дополнительным условиям (3.6), в пределе  $\lambda_j \rightarrow \lambda \rightarrow \infty$  суммы по  $j$  в квадратных скобках равны  $\alpha_0$  и  $\alpha_2$ , либо исчезают, если  $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ , и мы получим (полагая  $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{s,v}(q) &= \lim_{\lambda_j \rightarrow \lambda \rightarrow \infty} \text{reg} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{s,v}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \tilde{\Pi}^{s,v}(q^2), \\ \tilde{\Pi}^s(q^2) &= \frac{2}{24\pi} \frac{q^2}{M^2} \int_0^1 dv \frac{v^4}{1 - \frac{q^2}{4M^2} (1-v^2)}, \\ \tilde{\Pi}^v(q^2) &= \frac{2}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ \left( 2 - 2 \frac{q^2}{M^2} x(1-x) - 3(1-2x)^2 \right) \log\left(1 - \frac{q^2}{M^2} x(1-x)\right) - \right. \\ &\quad \left. - 3(1-2x)^2 \frac{q^2}{M^2} x(1-x) + 2 \frac{q^2}{M^2} x(1-x) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно после несложных преобразований второй член принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^v(q^2) &= -\frac{2}{8\pi} q^4 \int_{4M^2}^{\infty} du \frac{1}{u^2(u-q^2-i\varepsilon)} \sqrt{\frac{u-4M^2}{u}}, \\ &\int_{-1}^1 dv \left\{ \Phi_1\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{u-4M^2}{u}}\right) + \Phi_2\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{u-4M^2}{u}}\right) \frac{u}{M^2} \right\}, \\ \Phi_1(x) &= 2-3(1-2x)^2, \quad \Phi_2(x) = -2x(1-x). \end{aligned}$$



Итак, в рамках принятой нами регуляризации поляриза-  
ционные операторы конечны при снятии регуляризации и совпадают с  
перенормированными выражениями в обычной локальной теории / 7/.  
Они нормированы условием  $\tilde{\Pi}(0)=0$ . Это означает, что, по крайней  
мере, во втором порядке теории возмущений не происходит пере-  
нормировки заряда, т.е. физический заряд скалярной и  
векторной заряженных частиц совпадает с затравочным.

#### 4. Тождество Уорда

В нашей схеме при  $q=0$  имеет место тождество Уорда

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}(p, 0) = - \frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_{\mu}}.$$

Для доказательства этого соотношения рассмотрим тождество

$$\frac{\partial \tilde{T}^c(p)}{\partial p_{\mu}} = \tilde{T}^c(p) \beta_{\mu} \tilde{T}^c(p). \quad (4.5)$$

Дифференцируя  $\tilde{\Sigma}(p)$  по  $p_{\mu}$  и используя тождество (4.5), находим

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_{\mu}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(-ie^2)}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{\mathcal{D}}^{\delta}(k^2) \beta_{\nu}^{\delta} \tilde{T}^c(p-k) \beta_{\mu} \tilde{T}^c(p-k) \beta_{\nu}. \quad (4.6)$$

Выбирая другие импульсные переменные и полагая  $q=0$ ,  $p_1=p_2=p$ ,  
имеем

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}(p, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{\mathcal{D}}^{\delta}(k^2) \beta_{\nu}^{\delta} \tilde{T}^c(p-k) \beta_{\mu} \tilde{T}^c(p-k) \beta_{\nu}.$$

Сравнивая это равенство с выражением (4.6), получаем тождество  
Уорда:

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_{\mu}} = - \tilde{\Gamma}_{\mu}(p, 0). \quad (4.7)$$

## § 5. Градиентная инвариантность $S$ -матрицы

Разложение  $S$ -матрицы по нормальным произведениям операторов не взаимодействующих электромагнитного поля  $A_\mu$  и поля  $\psi$  имеет вид:

$$S = \sum_{n, m, \ell} \frac{1}{n! m! \ell!} \int d^4 k_1 \dots d^4 k_n \int d^4 p_1 \dots d^4 p_m \int d^4 q_1 \dots d^4 q_\ell \cdot \quad (5.1)$$

$$F_{\mu_1 \dots \mu_n} (k_1, k_n; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_\ell) : A_{\mu_1}(k_1) \dots A_{\mu_n}(k_n) \psi(p_1) \dots \psi(p_m) \bar{\psi}(q_1) \dots \bar{\psi}(q_\ell) :$$

Требование градиентной инвариантности означает, что в разложении (5.1) коэффициентные функции  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\dots)$  удовлетворяют условиям:

$$k_{\mu_i} F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\dots) = 0, \quad (5.2)$$

$$k_\mu k_\nu F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\dots) = 0.$$

При этом надо иметь в виду, что каждое из условий (5.2) выполняется, когда все остальные импульсы, от которых зависит функция  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\dots)$ , лежат на массовой оболочке.

Легко видеть, что полученная  $S$ -матрица будет градиентно-инвариантна. Действительно, в рассмотренной нами канонической электродинамике частиц со спином 0 и 1 выполнено тождество

Уорда:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \tilde{\Sigma}(p) = -\tilde{\Gamma}_\mu(p, 0).$$

поскольку оно является, как показано выше, следствием тождества

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{M - \hat{p}} = \frac{1}{M - \hat{p}} \hat{p}_\mu \frac{1}{M - \hat{p}}. \quad (5.3)$$

Так как нам не надо делать никаких вычитаний бесконечных контрчленов, то в ряду теории возмущений не могут возникнуть никакие

опасные члены, которые могли бы нарушать тождество (4.7), когда справедливо (5.3).

Доказательство градиентной инвариантности в форме (5.2) в ряду теории возмущений довольно просто и основано на использовании тождества

$$K_{\mu} \left\{ \frac{1}{M-\beta_1} \beta_{\mu} \frac{1}{M-\beta_2} \right\} = \frac{1}{M-\beta_1} - \frac{1}{M-\beta_2},$$

если  $K = \beta_1 - \beta_2$ .

Диаграмма поляризации вакуума градиентно-инвариантна согласно выбранной нами регуляризационной процедуре.

#### § 6. Замечание о факторах порядка роста $\rho \geq 1$

Используемые нами формфакторы порядка роста  $\rho < 1$  растут при  $k^2 \rightarrow +\infty$  как

$$V(-c^2 k^2) \sim \exp\{(c^2 k^2)^\rho\}, \quad (6.1)$$

где  $\ell$  - параметр, имеющий смысл "элементарной" длины. Это приводит к тому, что матричные элементы  $S$ -матрицы в теории возмущений растут с ростом энергии как  $\exp\{(\ell^2 s)^\rho\}$ , где  $s$  - энергетическая переменная. Таким образом, при энергиях  $s \sim 1/\ell^2$  рядом теории возмущений уже нельзя пользоваться.

Если же в качестве формфактора фотона выбрать целые функции, удовлетворяющие условию

$$V(-c^2 k^2) \rightarrow 0, \quad (6.2)$$

при  $k^2 \rightarrow \pm\infty$ , то порядок таких целых функций будет больше или равен единице. В этом случае также существует промежуточная регуляризационная процедура, позволяющая перейти к евклидовой метрике.

Введение в теорию формфакторов, удовлетворяющих условию (6.2), приводит к тому, что  $S$ -матрица также будет удовлетворять всем общим требованиям, разложение теории возмущений будет свободно от ультрафиолетовых расходимостей, а добавки, связанные с введением нелокальности в теорию будут реально малы при любых энергиях.

Чтобы не загромождать суть дела лишними выкладками, мы покажем это в случае квантовой электродинамики, а обобщение его на теорию скалярных и векторных бозонов очевидно.

### Диаграмма собственной энергии

Для простоты выберем формфактор вида  $\exp\{-(k^2\epsilon^2)^2\}$ , и тогда вместо функции (4.1), получим следующее выражение для  $\tilde{\Sigma}(\rho)$  в спинорной электродинамике ( $\beta_\mu \rightarrow \delta_\mu$ ):

$$\tilde{\Sigma}(\rho) = \text{const} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{\Gamma(\zeta)(M^2\epsilon^2)^{2\zeta}}{\sin 2\pi\zeta \Gamma(1+2\zeta)} F(\zeta, \rho), \quad (6.3)$$

где функция

$$F(\zeta, \rho) = \frac{1}{\Gamma(1-2\zeta)} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^{2\zeta} (1-u\zeta)^{2\zeta} (2M-u\rho) \quad (6.4)$$

регулярна в полуплоскости  $\text{Re } 2\zeta > -1$ , а  $s = \frac{\rho^2}{M^2}$ .

При  $s \gg 1$  возникают следующие ситуации: под знаком интеграла (6.3) появляется полюс первого порядка в точках

$\zeta = 1, 2, 3, \dots$ , а в этих точках фазовый множитель вида  $\exp(2\pi i \zeta)$ , возникающий из функции (6.4), исчезает.

Итак, запишем функцию  $F(\zeta, \rho)$  в виде:

$$F(\zeta, \rho) = \frac{1}{\Gamma(1-2\zeta)} \left[ \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^{2\zeta} (1-u\zeta)^{2\zeta} + e^{2\pi i \zeta} \int_0^1 du \left(\frac{1-u}{u}\right)^{2\zeta} (u\zeta-1)^{2\zeta} \right] (2M-u\rho),$$

## Л и т е р а т у р а

1. R.Duffin. Phys.Rev. 54, 1114 (1938);  
N.Kemmer. Proc.Roy.Soc. 173, 91 (1939).
2. Harish-Chandra. Proc.Roy.Soc. 186, 502 (1946).
3. R.Feynman. Phys.Rev. 76, 769 (1949);  
P.Matthews. Phys.Rev. 80, 292 (1950);  
M.Shienblatt, R.Arnouitt. Phys.Rev., D1, 1603 (1970).
4. V.A.Alebastron, G.V.Efimov and Sh.Z.Seltzer.  
Annals of Physics 76, 251 (1973).
5. Г.В.Ефимов. Commun.Math.Phys. 2, 42 (1967); 7, 138 (1968);  
ЯФ, 4, 432 (1966). Препринт ИТФ-68-52, 54,55, Киев (1968).  
Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I, 256 (1970).
6. G.V.Efimov. Annals of Physics, 71, 466 (1972).
7. А.И.Ахмезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика.  
Физматгиз, М., 1959.  
Т.Kinoshita, Y.Nambu. Progr.Theor.Phys., 2, 473, 749 (1950).
8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957;  
Д.А.Славнов. ДАН СССР, 143, 570 (1962); ИЭТФ 42, 1543 (1962);  
47, 224 (1964).
9. В.А.Алебастрон, Г.В.Ефимов, Ш.З.Сельцер. ОМНН, P2-6865, Дубна, 1972.
10. D.A.Christensen. Phys.Rev. D1, 1469 (1970).
11. Г.В.Ефимов. ЭЧАЯ, том 5, вып. I, (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел  
29 августа 1973 года.

# Тематические категории публикаций Объединенного института ядерных исследований

Индекс

Тематика

1. Экспериментальная физика высоких энергий
2. Теоретическая физика высоких энергий
3. Экспериментальная нейтронная физика
4. Теоретическая физика низких энергий
5. Математика
6. Ядерная спектроскопия и радиохимия
7. Физика тяжелых ионов
8. Криогеника
9. Ускорители
10. Автоматизация обработки экспериментальных данных
11. Вычислительная математика и техника
12. Химия
13. Техника физического эксперимента
14. Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15. Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16. Дозиметрия и физика защиты

## Условия обмена

Препринты и сообщения ОИЯИ рассылаются бесплатно, на основе взаимного обмена, университетам, институтам, лабораториям, библиотекам, научным группам и отдельным ученым более 50 стран.

Мы ожидаем, что получатели изданий ОИЯИ будут сами проявлять инициативу в бесплатной посылке публикаций в Дубну. В порядке обмена принимаются научные книги, журналы, препринты и иного вида публикации по тематике ОИЯИ.

Единственный вид публикаций, который нам присылать не следует, - это репринты /оттиски статей, уже опубликованных в научных журналах/.

В ряде случаев мы сами обращаемся к получателям наших изданий с просьбой бесплатно прислать нам какие-либо книги или выписать для нашей библиотеки научные журналы, издающиеся в их странах.

## Отдельные запросы

Издательский отдел ежегодно выполняет около 3 000 отдельных запросов на высылку препринтов и сообщений ОИЯИ. В таких запросах следует обязательно указывать индекс запрашиваемого издания.

## Адреса

Письма по всем вопросам обмена публикациями, а также запросы на отдельные издания следует направлять по адресу:

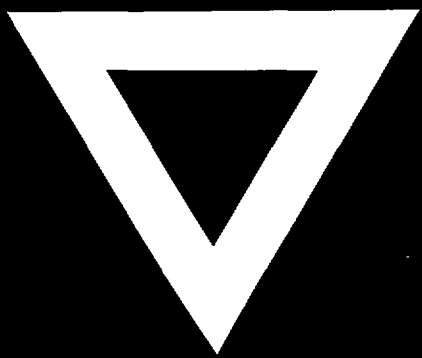
*101000 Москва,  
Главный почтамт, п/я 79.  
Издательский отдел  
Объединенного института  
ядерных исследований.*

Адрес для посылки всех публикаций в порядке обмена, а также для бесплатной подписки на научные журналы:

*101000 Москва,  
Главный почтамт, п/я 79.  
Научно-техническая библиотека  
Объединенного института  
ядерных исследований.*

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.  
Заказ 16757. Тираж 600. Уч.-изд. листов 1,21.  
Редактор Б.Б. Колесова. Подписано к печати 3/9-73 г.





**28 . 5 . 74**