

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Estudios sobre lentes gravitacionales con objetos relativistas

por Ernesto Fabián Eiroa

Directores de Tesis: Dres. Gustavo E. Romero y Diego F. Torres

Lugar de trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Mayo de 2002

Resumen

En esta Tesis se estudian distintas clases de lentes gravitacionales, trabajando con fuentes y/o lentes relativistas.

Se hace una revisión de distintos objetos relativistas como ser agujeros negros, núcleos galácticos activos y agujeros de gusano, y se resumen los aspectos básicos de la teoría de lentes gravitacionales.

Se muestra que algunas fuentes de rayos gama no identificadas ubicadas a altas latitudes pueden ser el resultado de la amplificación gravitacional, debido a una estrella dentro de una galaxia interpuesta, de las regiones interiores de núcleos galácticos activos débiles y distantes. Las regiones de rayos gama más interiores pueden sufrir gran amplificación, mientras que no hay amplificación para las frecuencias de radio, resultando en la ausencia de contrapartes fuertes.

Se analizan los efectos de cromaticidad introducidos por el tamaño finito de la fuente cuando la lente gravitacional es un agujero de gusano. Estos efectos permiten distinguir entre los agujeros de gusano y otros objetos de materia ordinaria por medio del análisis de las curvas de luz y de los espectros. Se discute también la posibilidad de detección astronómica de dichos efectos.

Se estudia el escenario donde la lente gravitacional es un agujero negro de Reissner-Nordström, obteniéndose, en el límite de campo fuerte las posiciones y las amplificaciones de las imágenes relativistas. El formalismo desarrollado se aplica al caso de un agujero negro cargado poco masivo ubicado en el halo galáctico y se compararan los resultados con los obtenidos para el caso de un agujero negro de Schwarzschild de igual masa.

Palabras clave: Relatividad general – Lentes gravitacionales – Agujeros negros – Agujeros de gusano – Núcleos galácticos activos – Fuentes de rayos gama.

Studies on gravitational lensing with relativistic objects

Abstract

In this Thesis different gravitational lensing scenarios are studied, working with relativistic sources and/or lenses.

A review of different relativistic objects like black holes, active galactic nuclei and wormholes is made, and the basical aspects of gravitational lensing theory are given.

It is shown that some unidentified gamma-ray sources placed at high latitudes might be the result of gravitational amplification of the inner regions of distant and faint active galactic nuclei. The innermost gamma-ray regions could have great amplifications, while there is no amplification for radio frequencies, resulting in the absence of strong counterparts.

The chromaticity effects introduced by the finite size of the source when the gravitational lens is a wormhole are analyzed. These effects allow to discriminate between wormholes and other objects of ordinary matter by the analysis of the light curves and the spectra. The possibility of astronomical detection of these effects is also discussed.

The scenario where the gravitational lens is a Reissner-Nordström black hole is studied, obtaining, in the strong field limit the positions and amplifications of the relativistic images. The formalism is applied to a low mass charged black hole placed in the galactic halo and the results are compared with those obtained for a Schwarzschild black hole of the same mass.

Key words: General relativity – Gravitational lensing – Black holes – Wormholes – Active galactic nuclei – Gamma ray sources.

Agradecimientos

Son muchas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta Tesis. Quisiera agradecer al Instituto de Astronomía y Física del Espacio, a todo su personal científico y de apoyo y en particular al grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación donde se llevó a cabo la mayor parte del trabajo correspondiente a esta Tesis. Al Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires, donde realizo mis tareas docentes, que me permitieron solventar mis gastos de manutención durante estos años. Al Grupo de Astrofísica Relativista y Radioastronomía, perteneciente al Instituto Argentino de Radioastronomía. A mi consejero de estudios, el Dr. Mario Castagnino. Y muy especialmente quisiera agradecer a mis directores, los Dres. Gustavo E. Romero y Diego F. Torres por su paciencia y aliento constante.

Índice General

1	Introducción	1
2	Objetos relativistas	5
2.1	Relatividad general	5
2.2	Agujeros negros	8
2.2.1	Geometría de Schwarzschild	8
2.2.2	Agujeros negros de Schwarzschild	11
2.2.3	Agujeros negros de Kerr-Newman	14
2.3	Núcleos galácticos activos	15
2.3.1	Características principales	15
2.3.2	Clasificación	17
2.3.3	Producción de energía	17
2.4	Agujeros de gusano	18
2.4.1	Aspectos básicos	18
2.4.2	Historia	19
2.4.3	Agujeros de gusano atravesables	20
2.4.4	Condiciones de energía	25
2.4.5	Causalidad	28
3	Lentes gravitacionales: aspectos básicos	31
3.1	Un poco de historia	31
3.2	Ecuación general de la lente	34
3.3	Lente puntual	36
3.4	Lente extendida	37
3.5	Tiempo de retardo	38
3.6	Modelo de Chang-Refdal	40
3.7	Profundidad óptica	42
3.8	Eventos de tránsito con fuente extendida	43
4	<i>Lensing</i> gravitacional y fuentes de rayos gama no identificadas	47
4.1	Introducción	47
4.2	<i>Lensing</i> gravitacional de núcleos galácticos activos	49
4.3	Curvas de luz y espectros	51
4.4	Escala temporal y número de eventos	62

4.5	Conclusiones	65
5	Agujeros de gusano como lentes gravitacionales	67
5.1	Introducción	67
5.2	Fuente extendida	70
5.3	Cromaticidad en <i>microlensing</i> de estrellas	71
5.4	Mezclado	72
5.5	La curva de color DIA	76
5.6	Medición de la curva de color DIA	79
5.7	Cromaticidad en <i>microlensing</i> extragaláctico	82
5.8	Conclusiones	88
6	Agujeros negros como lentes gravitacionales	89
6.1	Introducción	89
6.2	Ecuaciones básicas	90
6.3	Ángulo de deflexión en términos de integrales elípticas	95
6.4	Límite de campo fuerte	96
6.5	Imágenes primaria y secundaria	101
6.6	Ejemplo: agujero negro en el halo galáctico	102
6.7	Conclusiones	105
7	Conclusiones finales	107
A	Unidades	109
A.1	Constantes físicas fundamentales	109
A.2	Unidades geométricas	109
A.3	Constantes astrofísicas	110
A.4	Factores de conversión	110
B	Cosmología	111
B.1	Geometría de Robertson-Walker	111
B.2	Corrimiento al rojo	112
B.3	Dinámica del modelo de FLRW	113
B.4	Distancias	115
	Bibliografía	117

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la relatividad general de A. Einstein, enunciada en el año 1915, predice que los cuerpos masivos distorsionan la estructura geométrica del espacio-tiempo haciendo que las partículas y fotones que se mueven en sus vecindades no sigan trayectorias rectilíneas. Los efectos gravitatorios sobre la radiación electromagnética fueron sucesivamente verificados experimentalmente a partir de 1919. La primera sugerencia de utilizar el campo gravitacional de objetos astrofísicos como una lente que actúe sobre la luz proveniente de fuentes lejanas fue realizada por el propio A. Einstein en 1936. Desde entonces, y en particular gracias a los trabajos pioneros realizados por S. Refsdal en la década de los '60, los estudios de óptica en espacio-tiempos curvos han llevado a importantes descubrimientos en astronomía. La teoría de las lentes gravitacionales predice, entre otras cosas, la posible formación de imágenes múltiples de una fuente de fondo, o la aparición de arcos o de anillos (anillos de Einstein). También predice la amplificación de la intensidad de un objeto lejano, haciendo posible la observación de objetos débiles o muy distantes, que de otro modo no podrían ser detectados. Así, las lentes gravitacionales pueden actuar como telescopios naturales. En 1979 se descubrió que un quasar doble era en realidad uno sólo, cuya luz es afectada por el *lensing*¹ gravitacional de una galaxia interpuesta en la línea visual, dando lugar a dos imágenes. A partir de este descubrimiento, las lentes gravitacionales dejaron de ser una curiosidad teórica para transformarse en herramientas muy útiles en varias ramas de la astrofísica. En particular, los efectos de *microlensing* sobre estrellas de las Nubes de Magallanes o del Bulge galáctico han revelado la presencia de objetos oscuros de baja masa en el halo de nuestra propia Galaxia. Por otro lado, la observación de imágenes distorsionadas gravitacionalmente de cuasares ópticos y campos de galaxias ha sido utilizada para determinar la existencia de grandes concentraciones de materia oscura, hallar la distribución de masa en los cúmulos galácticos, estudiar galaxias interpuestas en la línea de la visual y fijar cotas a la constante de Hubble. Recientemente, incluso, se han utilizado técnicas de *microlensing* para estudiar la presencia de objetos de masa sub-estelar en galaxias de gran corrimiento al rojo.

¹del inglés, *lens* (lente)

Se denominan objetos relativistas a aquellos objetos que pueden ser explicados, en forma directa o indirecta, a través de la teoría de la relatividad general y no en el marco de la física newtoniana. Entre estos objetos se pueden mencionar los agujeros negros, los núcleos galácticos activos y los agujeros de gusano.

Los agujeros negros muestran los efectos de la gravedad en su forma más extrema. Estos objetos se forman cuando la materia colapsa a dimensiones tales que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. La primera descripción teórica de los agujeros negros en el marco de la teoría de la relatividad general la dio K. Schwarzschild en 1916. Si un cuerpo esférico tiene un tamaño menor que un cierto valor (radio de Schwarzschild), la radiación (o cualquier otra cosa) no puede escapar del mismo. Se forma un horizonte: las partículas y la luz pueden entrar pero no pueden salir del mismo. La teoría de Schwarzschild fue considerada una curiosidad matemática hasta que J. R. Oppenheimer y H. Snyder en el año 1939 sugirieron que la implosión de una estrella podría dar lugar a la formación de un agujero negro. Pero fue en la décadas del '60 y del '70 cuando se produjeron grandes avances en la teoría de estos objetos compactos. Kerr encontró en 1963 una descripción matemática exacta más general que la de Schwarzschild, la de un agujero negro rotante. A fines de los '60, S. Hawking y R. Penrose probaron que la teoría de Einstein lleva siempre a una singularidad y a un horizonte, independientemente de la forma en que se produzca el colapso. Así los agujeros negros pueden ser descriptos por sólo tres cantidades: su masa, su momento angular y su carga. Estos objetos compactos no pueden ser observados en forma directa, pero en los últimos 30 años se han encontrado indicios sólidos de la existencia de agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias y de agujeros negros de unas pocas masas solares en el halo galáctico.

Los núcleos galácticos activos (AGNs²) son objetos extremadamente compactos que emiten una enorme cantidad de energía. Pueden llegar a emitir una potencia que supera la luminosidad total de las estrellas de una galaxia grande por un factor de 100. Sus tamaños, en cambio, son del orden del sistema solar y contienen gas que se mueve a velocidades muy altas, cercanas a la de la luz. Las galaxias que poseen estas fuentes de energía en su centro se denominan galaxias activas. Aunque la radiación que producen los núcleos galácticos activos predomina en alguna parte del espectro, dependiendo del objeto, emiten en general mucha radiación con un espectro muy amplio. Algunos núcleos galácticos activos emiten cantidades comparables de radiación en radio, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos gama. El modelo estándar que describe estos objetos supone que los núcleos galácticos activos tienen en su interior un agujero negro masivo y que la energía que producen se debe a la interacción de éste con la materia que lo rodea. Dentro de los distintos tipos de núcleos galácticos activos están los cuasares, las galaxias Seyfert y las radio galaxias. De todos ellos, los que muestran un comportamiento más espectacular son los cuasares, descubiertos en 1963.

Los agujeros de gusano son regiones del espacio-tiempo con una topología no trivial. Estos objetos, que por el momento son construcciones teóricas, poseen dos

²del inglés *active galactic nuclei*

bocas conectadas por una garganta. Las bocas no están ocultas por horizontes de eventos, como en el caso de los agujeros negros y no hay, además, ninguna singularidad que impida el pasaje de un lado al otro. Después del trabajo de M. S. Morris y K. Thorne en 1988, se han estudiado muchas soluciones de las ecuaciones de Einstein que dan lugar a agujeros de gusano. Las soluciones estáticas tienen en común que requieren una densidad de energía negativa en la garganta del agujero. A nivel microscópico esto es posible (efecto Casimir), pero no es claro que puedan existir cantidades macroscópicas de “materia exótica”. La existencia de agujeros de gusano naturales es un tema abierto.

Los núcleos galácticos activos que emiten rayos gama son fuentes ideales para *microlensing* ya que son muy compactos. En esta Tesis se exploran las consecuencias del *lensing* de cuasares de rayos gama por objetos compactos en galaxias interpuestas, en un intento de explicar la naturaleza algunas de las fuentes de rayos gama no identificadas a altas latitudes, recientemente detectadas por el instrumento EGRET del satélite Compton. Un grupo de 67 núcleos galácticos activos han sido ya detectados por el experimento EGRET, y todos ellos tienen contrapartidas a bajas frecuencias, por ejemplo, son fuentes luminosas en la banda de radio, con flujos de alrededor de 1 Jy para frecuencias de aproximadamente 1 GHz. Las fuentes no identificadas, por el contrario, no tienen contrapartidas conocidas, aunque se piensa que en particular las fuentes de altas latitudes, también sean, en su mayoría, núcleos galácticos activos lejanos. En esta Tesis se investiga si el fenómeno de *lensing* gravitacional puede ayudar a explicar el origen de estas fuentes.

Contrariamente a lo que sucede con los objetos de campo débil como ser las enanas marrones y las estrellas normales, los estudios de *lensing* donde las lentes sean objetos compactos relativistas no han sido muy desarrollados y hay aún un gran potencial de nuevos descubrimientos en este campo. En la presente Tesis se exploran algunos aspectos de la teoría de *lensing* gravitacional involucrando agujeros negros y agujeros de gusano con el objetivo específico de realizar predicciones observacionales que puedan ser adecuadamente contrastadas con instrumentos existentes.

En definitiva, en esta Tesis se analizan diversos tópicos en *lensing* gravitacional trabajando con lentes y/o fuentes relativistas como ser agujeros negros, núcleos galácticos activos y agujeros de gusano, explorando las implicancias observacionales y buscando proveer las herramientas para contrastar algunas de las ideas más interesantes de la astrofísica relativista contemporánea.

En el Capítulo 2 se estudian las características principales de distintos objetos relativistas que actuarán como lentes (agujeros negros, agujeros de gusano) o como fuentes (núcleos galácticos activos) en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 se resumen los aspectos básicos del *lensing* gravitacional con campo débil que se utilizarán en los capítulos siguientes.

El Capítulo 4 contiene resultados originales sobre la posibilidad de que fuentes de rayos gama no identificadas, que se encuentran a altas latitudes, sean en realidad núcleos galácticos activos que sufren *lensing* gravitacional. Para esto se analizan las

curvas de luz y espectros en rayos gama de cuasares de fondo muy débiles, cuando la luz es magnificada por objetos compactos en una galaxia interpuesta. Se tendrán en cuenta no sólo los efectos de *microlensing* de las lentes individuales sino también los efectos de *macrolensing* de la galaxia donde las lentes se alojan. Este tipo de estudios nunca se han realizado antes a frecuencias gama donde los efectos de la amplificación diferencial de la luz son importantes cuando se trabaja con fuente extendida, como se hará aquí.

En el Capítulo 5 se muestran nuevos resultados sobre la posibilidad que un agujero de gusano (u otro objeto que pudiese tener masa negativa), de unas pocas masas solares, actúe como lente gravitacional. Trabajando con fuente extendida, se estudian las curvas de luz así como las distorsiones espectrales inducidas durante los eventos y se comparan con los correspondientes a lentes ordinarias (de masa positiva). La introducción de una fuente extensa permite remover los infinitos que aparecen en las curvas de luz cuando la fuente es puntual y el análisis espectral provee un método mucho más confiable de identificación que la mera curva de luz.

En el Capítulo 6 se analiza el *lensing* gravitacional con campo fuerte. La lente es un agujero negro de Reissner-Nordström, obteniéndose las expresiones de las posiciones de las imágenes relativistas y de sus amplificaciones en el límite de campo fuerte. El formalismo desarrollado se aplica a un agujero negro ubicado en el halo galáctico. Se comparan los resultados con los correspondientes a un agujero negro de Schwarzschild de igual masa y se analizan las posibilidades de detección astronómica de las imágenes relativistas.

El Capítulo 7 contiene las conclusiones finales de esta Tesis.

En el Apéndice A se incluyen las constantes físicas fundamentales, el sistema de unidades geométricas y algunas constantes astrofísicas que se usan en esta Tesis.

En el Apéndice B se resume el modelo cosmológico estándar.

Capítulo 2

Objetos relativistas

Se denominan objetos relativistas a aquellos que para su descripción requieren, en forma directa o indirecta, del uso de la teoría de la relatividad general. En este Capítulo se analizan las características principales de los agujeros negros, los núcleos galácticos activos y los agujeros de gusano. Estos objetos relativistas, actuarán como lentes o como fuentes en los eventos de *lensing* gravitacional que se estudiarán en los Capítulos siguientes.

2.1 Relatividad general

En esta Sección se resumen los aspectos básicos de la teoría de la relatividad general y la notación que se utilizará a lo largo de esta Tesis. Para un estudio más completo se sugiere ver por ejemplo [1],[2],[3],[4] o [5]. La convención de signos que se seguirá es la de Misner, Thorne & Wheeler [1].

La teoría de la relatividad general es una teoría clásica de campos. La matemática que utiliza es la geometría diferencial (ver por ejemplo [1], [6] o [7]). El espacio y el tiempo se unen para formar una entidad llamada espacio-tiempo. El espacio-tiempo forma una variedad diferenciable¹ pseudo-Riemanniana² de cuatro dimensiones. En el marco de esta teoría la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo alrededor del objeto que produce el campo gravitatorio.

Para cada punto de la variedad diferenciable se tiene el espacio vectorial tangente, donde se pueden definir vectores y tensores. La geometría de la variedad queda determinada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que es simétrico, por lo que tiene diez componentes independientes. El elemento de longitud se define a partir de la métrica como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde se utilizó la convención de Einstein para la suma (cuando aparece un índice repetido “arriba” y “abajo” se está sumando sobre ese índice). Los índices griegos

¹conjunto localmente como R^n

²con métrica no definida positiva

van de 0 a 3, el índice 0 representa al tiempo $dx^0 = cdt$ y los otros tres el espacio, y suelen agruparse con un índice latino que va de 1 a 3.

Mediante un cambio de coordenadas³, la métrica puede llevarse localmente a la forma de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La traza de $\eta_{\mu\nu}$ se denomina signatura, que con las convenciones de signo adoptadas aquí vale +2.

Se puede definir el producto interno entre vectores a partir de la métrica:

$$U \cdot V = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu. \quad (2.3)$$

y la norma de un vector V^μ como

$$\|V\|^2 = V \cdot V = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu. \quad (2.4)$$

Se dice que un vector es de tipo temporal si $\|V\|^2 < 0$, de tipo espacial si $\|V\|^2 > 0$ y nulo o tipo luz si $\|V\|^2 = 0$ (como la métrica no es definida positiva, $\|V\|^2 = 0$ no significa que V sea cero).

También se pueden definir las operaciones de “subida” y “bajada” de índices⁴:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad (2.5)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

donde $T^{\alpha\beta}$ es un tensor de segundo rango.

A partir de la métrica se puede definir la conexión (o símbolos de Christoffel), cuyas componentes en una base coordenada son

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), \quad (2.7)$$

con $g^{\alpha\mu} = (g_{\alpha\mu})^{-1}$ o sea $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$ y donde las comas denotan derivadas parciales, por ejemplo $g_{\mu\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma}$.

La conexión no es un tensor, pero es muy importante pues le da “forma” a la variedad. Como es simétrica en los índices inferiores ($\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$) tiene 40 componentes independientes.

A partir de la conexión se define la derivada covariante:

$$V_{;\nu}^\mu = V_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu V^\alpha, \quad (2.8)$$

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_\alpha, \quad (2.9)$$

³pasando a coordenadas de Lorentz

⁴no se hará aquí distinción entre vectores y 1-formas

$$T_{;\gamma}^{\mu\nu} = T_{,\gamma}^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\nu} T^{\mu\alpha} \quad (2.10)$$

$$T_{\mu\nu;\gamma} = T_{\mu\nu,\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} T_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} T_{\mu\alpha} \quad (2.11)$$

que es un tensor que extiende la noción de derivada parcial a un espacio curvo. Es fácil de ver que

$$g_{\mu\nu;\gamma} = 0, \quad (2.12)$$

en todo punto de la variedad.

Una partícula masiva libre se moverá en una geodésica de tipo temporal cuya curva se parametriza de manera natural usando el tiempo propio $d\tau$ (definido por $c^2 d\tau^2 = -ds^2$):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.13)$$

Definiendo la tetra-velocidad $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ y el tetra-impulso $p^\mu = mU^\mu$ donde m es la masa de la partícula, la ecuación de las geodésicas se puede escribir como

$$p_{;\alpha}^{\mu} p^{\alpha} = 0. \quad (2.14)$$

La Ec. (2.13) no es aplicable a los fotones, ya que el tiempo propio no está definido. En este caso se elige como parámetro para la curva tipo luz $x^\mu(\lambda)$, al parámetro afín λ tal que $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, de modo hay que modificar la Ec. (2.13) reemplazando el tiempo propio por el parámetro afín λ y además sigue siendo válida la Ec. (2.14).

La curvatura en cada punto de la variedad es determinada por el tensor de Riemann, cuyas componentes en una base coordenada son

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \quad (2.15)$$

que verifica las propiedades:

$$R_{\beta(\gamma\delta)}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2!} (R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha}) = 0, \quad (2.16)$$

y

$$R_{[\beta\gamma\delta]}^{\alpha} \equiv \frac{1}{3!} (R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} - R_{\gamma\beta\delta}^{\alpha} + R_{\gamma\delta\beta}^{\alpha} - R_{\delta\gamma\beta}^{\alpha} + R_{\delta\beta\gamma}^{\alpha} - R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha}) = 0 \quad (2.17)$$

que reducen la cantidad de componentes independientes del tensor de Riemann de 256 a 20. Además verifica las identidades de Bianchi:

$$R_{\beta[\gamma\delta;\mu]}^{\alpha} = \frac{1}{3} (R_{\beta\gamma\delta;\mu}^{\alpha} + R_{\beta\mu\gamma;\delta}^{\alpha} + R_{\beta\delta\mu;\gamma}^{\alpha}) = 0. \quad (2.18)$$

El tensor de Riemann determina la diferencia de aceleración entre dos partículas cercanas en caída libre:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = R_{\nu\gamma\delta}^{\mu} U^\nu U^\gamma \xi^\delta \quad (2.19)$$

donde ξ es un vector diferencial que conecta un punto de la la geodésica con tetravelocidad U con un punto cercano en la geodésica de la otra partícula con igual tiempo

propio τ .

A partir del tensor de Riemann se pueden construir el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad (2.20)$$

el escalar de Ricci

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu}, \quad (2.21)$$

y el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Los tensores de Ricci y de Einstein son simétricos, por lo que tienen 10 componentes independientes. Además en todo punto

$$R_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad G_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (2.23)$$

Se mencionó al principio de esta Sección que la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo. La curvatura del espacio-tiempo se relaciona con la distribución de materia y energía por medio de las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

donde G es la constante universal de gravitación de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & S_j \\ S_i & \mathcal{T}_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

con ρ la densidad de energía, S_j es el flujo de energía (generalización del vector de Poynting) y $\mathcal{T}_{ij}$ es el *stress* (generalización de la noción de tensión). Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales a derivadas parciales de segundo orden para las componentes de la métrica.

Es usual en el marco de la teoría de la relatividad general usar el sistema de unidades “geométricas” en el cual $c = 1$ y $G = 1$ (ver Apéndice A). Este sistema de unidades es el que se usará en las secciones restantes de este Capítulo.

2.2 Agujeros negros

2.2.1 Geometría de Schwarzschild

Una de las soluciones más simples de las ecuaciones de Einstein es la que corresponde a un espacio-tiempo esféricamente simétrico y vacío. Esta geometría es denominada geometría de Schwarzschild, quien la descubrió en 1916 [8], y corresponde al espacio tiempo vacío alrededor de un objeto esférico de masa M .

La simetría esférica significa que el espacio-tiempo posee superficies bidimensionales cerradas sobre las cuales no es posible distinguir un punto de otro. La manera usual de etiquetar los puntos sobre esta superficie es por medio de dos ángulos, θ y φ . Las otras dos coordenadas que distinguen una superficie esférica de otra se denominan t y r . La coordenada r se elige de modo que la superficie de cada esfera sea la usual $4\pi r^2$. La coordenada temporal es representada por t . Estas coordenadas se denominan coordenadas de Schwarzschild.

El elemento de línea en las coordenadas de Schwarzschild viene dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.26)$$

El teorema de Birkhoff establece que la solución de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Es importante señalar que las componentes de la métrica no dependen de t . La geometría exterior al objeto es estática, independientemente si el mismo es estático, colapsante, en expansión u oscilante, mientras mantenga su simetría esférica.

La cantidad $r_H = 2M$ se denomina radio de Schwarzschild. Examinando la Ec. (2.26) es fácil ver que g_{rr} diverge cuando $r = r_H$. Los objetos astrofísicos comunes tienen tamaños mucho mayores que el radio de Schwarzschild, por ejemplo para el Sol $R_\odot \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$ y $r_H \approx 3 \text{ km}$, por lo que la divergencia de g_{rr} no es un problema en este caso, ya que en el interior del objeto la Ec. (2.26) no es válida y debe ser reemplazada por otra que tenga en cuenta la estructura interna del mismo (solución interior).

Para analizar las posibles trayectorias de una partícula de masa m es conveniente usar las simetrías de la geometría de Schwarzschild. Como la métrica es independiente del tiempo, la energía por unidad de masa $\tilde{E} = E/m$ se conserva, y como es independiente de φ se conserva el impulso angular por unidad de masa $\tilde{L} = L/m$. Debido a la simetría esférica el movimiento queda confinado a un plano que se puede elegir que sea el ecuatorial ($\theta = \pi/2$). Las ecuaciones que gobiernan las órbitas serán [1]:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \tilde{V}^2, \quad (2.27)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}, \quad (2.28)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.29)$$

donde $\tilde{V}^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$ es el potencial efectivo.

Dependiendo de los valores de $\tilde{E}$ y $\tilde{L}$ se podrán tener

- (i) Órbitas ligadas con $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. Casos particulares, órbitas circulares con

$$r = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right),$$

donde el signo (+) corresponde a una órbita circular estable y el (−) a una órbita circular inestable.

- (ii) Órbitas no ligadas, donde la partícula retorna al infinito.
 (iii) Órbitas en espiral hacia el objeto de masa M ubicado en $r = 0$. Captura de la partícula por el objeto de masivo.

Para los fotones⁵, se conservan la energía y el impulso angular y las ecuaciones de movimiento quedan

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 - V^2, \quad (2.30)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.32)$$

donde $V^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}$ es el potencial efectivo y λ es el parámetro afín.

Definiendo el parámetro de impacto $b = L/E$, las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = b^{-2} - B(r)^{-2}, \quad (2.33)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \quad (2.34)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{b \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.35)$$

con $B^{-2}(r) = r^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ el potencial efectivo.

Para los fotones existe una sólo órbita ligada, que es inestable y de radio $r_{\text{ps}} = 3M$. La esfera de radio r_{ps} se denomina esfera de fotones y corresponde a $b = 3\sqrt{3}M$. Un fotón proveniente del infinito con $b \gg 3\sqrt{3}M$ se desvía un cierto ángulo $0 < \alpha < 2\pi$ para volver luego al infinito. Si $0 < b - 3\sqrt{3}M \ll M$ el fotón da varias vueltas alrededor de la órbita ubicada en $r = 3M$ (sin alcanzarla) para retornar luego al infinito. En el caso en que sea $b < 3\sqrt{3}M$, el fotón va cayendo con una trayectoria en forma de espiral hacia el objeto masivo, entrando en la región con $r < 2M$.

Para más detalles sobre las órbitas en la geometría de Schwarzschild ver [1].

⁵o cualquier otra partícula de masa nula

2.2.2 Agujeros negros de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild, dada por la Ec. (2.26), en el caso de una masa puntual M diverge en $r = 0$ ($g_{tt} \rightarrow \infty$) y en $r = 2M$ ($g_{rr} \rightarrow \infty$).

En $r = 0$ es de esperar que hubiese problemas, pues ya en la teoría de Newton el campo gravitatorio de una masa puntual diverge en el punto donde la masa está ubicada. En el caso de la geometría de Schwarzschild, si se considera una partícula masiva que se mueve en una geodésica radial, las componentes no nulas del tensor de Riemann en un sistema de coordenadas ortonormal que viaja con la partícula son [1]:

$$\begin{aligned} R_{\hat{r}\hat{\rho}\hat{r}\hat{\rho}} &= \frac{-2M}{r^3}, & R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}} = \frac{M}{r^3}, \\ R_{\hat{\theta}\hat{\varphi}\hat{\theta}\hat{\varphi}} &= \frac{2M}{r^3}, & R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\rho}\hat{\varphi}\hat{\rho}\hat{\varphi}} = \frac{-M}{r^3}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

y el invariante de curvatura es

$$I = R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (2.37)$$

Es claro que el tensor de Riemann diverge en $r = 0$, y además usando la ecuación de desviación geodésica (2.19), una partícula experimentará fuerzas de marea que tienden a infinito cuando $r = 0$. Esto indica que en $r = 0$ hay una singularidad física real.

En cambio para $r = 2M$ las componentes del tensor de Riemann son todas finitas y una partícula que pase por $r = 2M$ soportará una fuerza de marea finita. ¿Que sucede entonces en $r = 2M$? Para $r = 2M$ hay un cambio de signo en g_{tt} , que se vuelve positiva para $r < 2M$ y en g_{rr} , que se vuelve negativa para $r < 2M$. O sea que r pasa a ser la coordenada temporal y t se vuelve una coordenada espacial. El tiempo propio que tarda una partícula en caída libre que parte del reposo de un radio inicial r_i y con impulso angular $\tilde{L} = 0$, en llegar a un radio final r_f es, a partir de la Ec. (2.27):

$$\Delta\tau = - \int_{r_i}^{r_f} \left(\frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{4M}{3} \left[\left(\frac{r_i}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_f}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (2.38)$$

En particular, r_f puede valer $2M$ o incluso ser menor, siendo siempre el tiempo propio finito. De la Ec. (2.29) y usando la Ec. (2.27) se tiene que el tiempo coordenado que tarda la partícula en ir de r_i a r_f vale

$$\begin{aligned} \Delta t &= - \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} dr \\ &= \frac{4M}{3} \left[\left(\frac{r_i}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r_f}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 4M \left[\left(\frac{r_i}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{r_f}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\ &\quad + \ln \left| \frac{\left[\left(\frac{r_f}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \left[\left(\frac{r_i}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{r_f}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \left[\left(\frac{r_i}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right]} \right|. \end{aligned} \quad (2.39)$$

De esta última ecuación es fácil ver que la partícula demora un tiempo infinito en llegar a $r_f = 2M$. O sea que tarda un tiempo propio finito en llegar a $r_H = 2M$, pero un tiempo coordenado infinito.

Todo esto indica que el problema en $r = 2M$ son las coordenadas de Schwarzschild r, t . Manteniendo las coordenadas θ, φ que son naturales por la simetría esférica y reemplazando r, t por u, v definidas por:

$$u = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) & \text{si } r > 2M \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) & \text{si } r < 2M \end{cases} \quad (2.40)$$

$$v = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) & \text{si } r > 2M \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) & \text{si } r < 2M \end{cases} \quad (2.41)$$

Estas coordenadas, descubiertas por M. D. Kruskal [9] y por G. Szekeres [10] en forma independiente en 1960, se denominan coordenadas de Kruskal-Szekeres.

La geometría de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres toma la forma

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) (du^2 - dv^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.42)$$

donde ahora r no se considera una coordenada sino una función de u, v definida en forma implícita por la ecuación

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) = u^2 - v^2. \quad (2.43)$$

Esta métrica no presenta ningún problema en $r = 2M$. Hay una singularidad para $r = 0$, pero esta es física, como se vio anteriormente.

En la Fig. 2.1 se muestran esquemáticamente las coordenadas de Kruskal-Szekeres. De las Ecs. (2.40, 2.41) que definen estas coordenadas, es fácil ver que $u + v > 0$, luego las regiones del plano (u, v) que corresponden a estas ecuaciones son las rotuladas como I y II⁶. La región I, denominada interior, corresponde a $0 \leq r < 2M$ y la región II, llamada exterior, a $r > 2M$. Las superficies de r constante son hipérbolas con asíntotas en $v = \pm u$ en el diagrama de Kruskal-Szekeres. Las regiones de t constante son rectas que pasan por el origen. De la Ec. (2.42) es fácil ver que una geodésica radial nula debe cumplir $\left|\frac{dv}{du}\right| = 1$, o sea ir a 45° con la vertical. Para una geodésica temporal debe ser $\left|\frac{dv}{du}\right| > 1$, o sea con un ángulo menor a 45° con la vertical, y para las de tipo espacial $\left|\frac{dv}{du}\right| < 1$ y un ángulo mayor a 45° con la vertical.

Una partícula masiva podrá solamente moverse en curvas cuyas rectas tangentes tengan siempre un ángulo menor a 45° con la vertical, y hacia tiempos crecientes,

⁶Las regiones III y IV pueden ignorarse en el caso de los agujeros negros, pero son importantes para el estudio de los agujeros de gusano (puente de Einstein-Rosen).

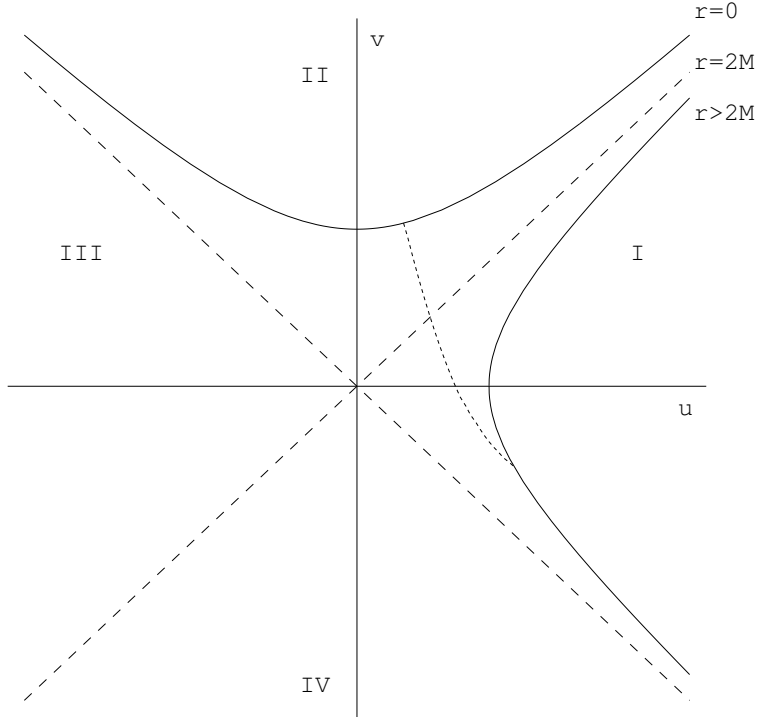


Figura 2.1: Esquema de un agujero negro de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. La línea $v = u$ que separa las regiones I y II corresponde al horizonte ubicado en $r_H = 2M$. Cualquier partícula que ingrese en la región I, representada por la línea de puntos, nunca más podrá salir y terminará finalmente en la singularidad ubicada en $r = 0$.

o sea hacia mayores valores de v . Dentro de la región I, si $\frac{dv}{du} < 0$ se moverá hacia valores menores de r y si $\frac{dv}{du} > 0$ hacia valores mayores de r . Si se encuentra (o ingresa) en la región II, sólo podrá moverse hacia valores de r cada vez menores, no pudiendo permanecer en reposo, ya que en esta región las hipérbolas con r constante son casi horizontales, y terminará finalmente en la singularidad ubicada en $r = 0$. Con un fotón sucederá lo mismo, con la única diferencia en que se mueve en rectas a 45° con la vertical.

Cualquier partícula masiva o de masa nula que ingrese en la región interior, no podrá salir y terminará irremediabilmente en la singularidad. Un observador exterior no podrá recibir ninguna información (partículas, fotones, etc) que provenga de la región interior. Como cualquier evento que se produzca dentro de la región II permanecerá desconocido para los observadores de la región I, el límite entre las dos regiones, ubicado en $r_H = 2M$ se denomina horizonte de eventos.

Esta estructura, formada por una singularidad ubicada en $r = 0$ rodeada por un horizonte de eventos, de radio $r_H = 2M$, se denomina agujero negro de Schwarzschild.

2.2.3 Agujeros negros de Kerr-Newman

Los campos gravitatorio y electromagnético exteriores de un agujero negro estacionario están determinados por sólo tres cantidades: la masa M la carga Q y el momento angular intrínseco S [1]. Un agujero negro rotante cargado se denomina de Kerr-Newman. La existencia de impulso angular no nulo rompe la simetría esférica. La generalización de las coordenadas de Schwarzschild adaptadas a esta situación son las coordenadas de Boyer y Lindquist. En estas coordenadas, φ se define como el ángulo alrededor del eje de simetría y t es la coordenada temporal para la cual todo es estacionario. Las coordenadas r y θ son mas o menos arbitrarias, se eligen de modo que sean ortogonales a φ y t , ortogonales entre sí, y que coincidan con las coordenadas correspondientes de Schwarzschild para $S = 0$. En general las coordenadas t y φ no pueden tomarse ortogonales entre sí.

Escrita en las coordenadas de Boyer y Lindquist, la geometría de Kerr-Newman tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{-\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (2.44)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (2.45)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.46)$$

$$a = \frac{S}{M}. \quad (2.47)$$

Casos particulares:

- Si $S = 0$ y $Q = 0$ se recupera la geometría de Schwarzschild.
- Si $S \neq 0$ y $Q = 0$ se denomina geometría de Kerr.
- Si $S = 0$ y $Q \neq 0$ se recupera la simetría esférica, se pueden usar las coordenadas de Schwarzschild y la geometría resultante se denomina de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.48)$$

El horizonte, de la misma forma que en el caso del agujero negro de Schwarzschild se encuentra donde $g_{rr} = 0$ y esto sucede en

$$r_H = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}. \quad (2.49)$$

Las partículas masivas y los fotones pueden ingresar al horizonte, pero ninguna partícula ni fotón pueden salir de la región interior al mismo.

En la geometría de Kerr-Newman existe por fuera del horizonte una región llamada ergo-esfera. En esta región el agujero negro “arrastra” a las partículas o

fotones, obligandolos a girar alrededor del agujero negro en la misma dirección en que éste rota, no pudiendo permanecer estacionarios ni girando en sentido contrario. La ergo-esfera está ubicada entre el horizonte r_H y la superficie donde se anula g_{tt} , denominada límite estático, ubicado en:

$$r_0(\theta) = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.50)$$

Notar que la ergo-esfera y el horizonte coinciden en los polos. Para más detalles ver [1].

Las coordenadas de Boyer y Lindquist, siendo la generalización de las coordenadas de Schwarzschild son singulares en el horizonte. Igual que en el caso de los agujeros negros de Schwarzschild se pueden construir sistemas de coordenadas que no sean singulares en el horizonte, por ejemplo las coordenadas de Kerr (ver [1]).

2.3 Núcleos galácticos activos

2.3.1 Características principales

Los núcleos galácticos activos producen enormes cantidades de energía (en algunos casos llegan a tener 10^4 veces la luminosidad de una galaxia típica) en un volumen muy chico ($\ll 1 \text{ pc}^3$) [11]. La radiación es emitida en un rango muy amplio de frecuencias. Su luminosidad puede ser prácticamente constante en varias bandas de frecuencia. Las líneas espectrales de emisión (y a veces de absorción) también tienen características peculiares. En el óptico y en el ultravioleta suelen tener líneas cuyo flujo total es del orden del 10 % o menos del flujo continuo y cuyo ancho sugiere velocidades del orden de 10^4 km/seg .

En la mayor parte de los casos, todavía no se pueden obtener imágenes donde se logren resolver los núcleos galácticos activos, pero en ciertos casos es posible hacerlo en las frecuencias de radio, donde se encuentran estructuras variables con velocidades aparentes del orden de diez veces la velocidad de la luz.

Los núcleos galácticos activos muestran además una importante evolución cosmológica. Las galaxias activas más luminosas son miles de veces más numerosas a un corrimiento al rojo de 2.5 que en la actualidad. Esto sugiere la existencia de alguna causa que hace que las galaxias más jóvenes sean más proclives a desarrollar núcleos galácticos activos.

Existe un gran consenso entre los investigadores del tema en que la fuente de energía de los núcleos galácticos activos es la acreción de materia hacia agujeros negros masivos. Es difícil observar directamente esta acreción, por lo que se debe trabajar con señales indirectas.

Las características salientes de los núcleos galácticos activos se resumen a continuación [11]:

- (i) Muy pequeño tamaño angular.

Cuando un núcleo galáctico activo está lo suficientemente cerca como para que

la galaxia que lo hospeda sea visible, el núcleo aparece en el óptico como un punto brillante cuyo flujo puede igualar o exceder al del resto de la galaxia.

(ii) Alta luminosidad.

Las luminosidades de los núcleos galácticos activos conocidos están en el rango de $10^{42} - 10^{48} \text{ erg s}^{-1}$. La luminosidad de una galaxia típica es de $10^{44} \text{ erg s}^{-1}$, o sea que los núcleos galácticos activos tienen luminosidades que van entre 10^{-2} y 10^4 veces las de una galaxia típica.

(iii) Emisión continua de amplio espectro.

Una galaxia típica emite casi toda su energía dentro de una década de frecuencia (en escala logarítmica). Pero la mayoría (aunque no todos) de los núcleos galácticos activos tienen un espectro continuo completamente distinto del de una galaxia normal. Si L es la luminosidad y ν es la frecuencia, $\frac{dL}{d \log \nu}$ es aproximadamente constante desde el infrarrojo hasta los rayos X, y a veces hasta los rayos gama. La luminosidad que emiten en la banda de radio es generalmente un orden de magnitud mayor que la de una galaxia normal y en algunos casos es varios órdenes de magnitud mayor. En rayos X, la emisión de los núcleos galácticos activos supera en 3 o 4 órdenes de magnitud a los de las galaxias normales. Algunos emiten radiación gama con fotones de hasta 1 TeV con flujos de energía iguales o superiores a los de bandas de energía más bajas.

(iv) Líneas de emisión.

Los núcleos galácticos activos suelen tener líneas de emisión muy prominentes, lo que contrasta con los espectros de la mayoría de las estrellas y galaxias, donde las líneas suelen ser débiles y principalmente de absorción.

(v) Variabilidad.

La mayoría de los núcleos galácticos activos, a diferencia de las galaxias normales, tienen variaciones en el flujo electromagnético del orden del 10 % en escalas temporales de algunos años. En longitudes de onda más cortas, por ejemplo en rayos X, se ha observado una variabilidad aún mayor. Algunos varían sobre escalas temporales de días y aún de horas, a lo largo de todo el espectro electromagnético.

(vi) Polarización.

La mayoría de las estrellas no presentan polarización de la luz y lo mismo sucede con las galaxias. La mayoría de los núcleos galácticos activos están débilmente polarizados, típicamente con valores de polarización lineal de 0.5-2 %, pero hay una minoría con polarizaciones del 10 %. La polarización detectada depende además de la banda observada.

(vii) Emisión en radio.

Muchos de los núcleos galácticos activos son fuertes emisores en radio y se conoce mucho sobre esta emisión, pues es en esta banda donde se obtienen

mejores resoluciones, del orden del milisegundo de arco, usando interferometría de muy larga base (VLBI⁷).

2.3.2 Clasificación

Los núcleos galácticos activos se suelen agrupar en diferentes clases según sus características principales. Algunos tipos de núcleos galácticos activos son

- Quasares: Acronismo de *quasi-stellar radio source*⁸. Se caracterizan por ser puntuales, emitir con espectro amplio y poseer líneas de emisión anchas y también angostas. Se subdividen en varios tipos. Algunos emiten fuertemente en radio (*radio loud*⁹, OVV), y otros no (*radio quiet*¹⁰).
- Objetos BL Lac: Se pensó que el primer objeto observado de este tipo era una estrella variable en la constelación Lacerta, por eso se los denominó de esta forma. Son puntuales, presentan un espectro amplio, pero no presentan líneas de emisión. Tienen emisión en radio.
- Galaxias Seyferts: Pueden ser puntuales o no, el espectro es amplio, algunos presentan líneas anchas o angostas de emisión, otros no. Emiten débilmente en radio.
- Blazares: Se suele usar este nombre para agrupar los objetos BL Lac y los quasares OVV en una sola categoría. La característica principal es que emiten fuertemente en radio con un espectro “chato” (ley de potencia con índice casi cero) y son muy variables sobre escalas de tiempos cortas.

2.3.3 Producción de energía

La acreción de materia hacia una estrella de neutrones o un agujero negro puede resultar en la emisión de radiación del orden del 10 % de la masa. En nuestra galaxia esto ocurre en numerosas fuentes binarias de rayos X cuya componente relativista tiene una masa del orden de $1-10 M_{\odot}$. La manera más simple de generar grandes cantidades de energía en un volumen muy pequeño es la acreción de materia en un agujero negro masivo [12, 13]. Hay bastantes observaciones acumuladas que sugieren la existencia de objetos muy masivos y oscuros ($10^7 - 10^9 M_{\odot}$) en el centro de las galaxias que hospedan núcleos galácticos activos [14]. Un conjunto muy denso de estrellas de neutrones y agujeros negros por lo general evoluciona transformandose en un agujero negro muy masivo, del orden de $10^7 - 10^9 M_{\odot}$. El modelo estándar que describe los núcleos galácticos activos se basa en la producción de energía debido a la acreción de materia hacia un agujero negro muy masivo ubicado en el centro de

⁷del inglés, *very long base interferometry*

⁸del inglés fuente de radio cuasi-estelar.

⁹del inglés “intensos en radio”.

¹⁰del inglés, “tranquilos en radio”.

una galaxia activa. Para más detalles ver el libro de Krolic [11].

Los mecanismos de producción de la radiación electromagnética proveniente de los núcleos galácticos activos dependen de la banda analizada. El modo más natural de acreción, a través de un disco, lleva naturalmente a la producción de un fuerte continuo en óptico y en ultravioleta por un mecanismo de radiación en cuasi-equilibrio termodinámico. El proceso básico responsable de la emisión en radio es la radiación sincrotón. Varios mecanismos de radiación pueden contribuir en la producción del continuo de rayos X y de rayos gama en los núcleos galácticos activos: radiación de frenado, dispersión por efecto Compton inverso, radiación sincrotón y aniquilación electrón-positrón.

2.4 Agujeros de gusano

2.4.1 Aspectos básicos

Se denominan agujeros de gusano a una especie de túneles que conecten a través del espacio-tiempo diferentes regiones de un universo o bien universos distintos. En el primer caso se trata de un universo que es una variedad diferenciable múltiplemente conexa y en el segundo caso el agujero de gusano conecta dos variedades que corresponden a universos distintos (que forman una variedad múltiplemente conexa que se puede llamar multi-universo). Esto se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.2. En términos más precisos [15]:

Definición: Un agujero de gusano es cualquier región del espacio-tiempo con una frontera topológicamente simple y un interior topológicamente no trivial.

Los agujeros de gusano se pueden dividir en dos categorías principales: Lorentzianos y Euclídeos. La diferencia reside en la variedad diferenciable donde se encuentre el agujero de gusano, si es pseudo-Riemanniana (con métrica de Lorentz) o si es Riemanniana (con métrica Euclídea).

Los agujeros de gusano Lorentzianos pueden ser permanentes o transitorios. También pueden ir entre dos universos distintos o entre dos regiones del mismo universo. Según su tamaño pueden clasificarse en macroscópicos o microscópicos.

Los agujeros de gusano Lorentzianos, macroscópicos y permanentes (o cuasi-permanentes), que además permitan el pasaje (a escala humana) de una región a otra del Universo, o entre dos universos distintos, se denominan atravesables. Estos agujeros de gusano son los más interesantes, ya que en caso de existir, permitirían la comunicación entre regiones distantes de un mismo universo o entre universos distintos.

Los agujeros de gusano Euclídeos no son de interés para esta Tesis. Su estudio está relacionado con los intentos de obtener una teoría cuántica de la gravedad.

Para un estudio más completo de los agujeros de gusano ver el libro de M. Visser [15].

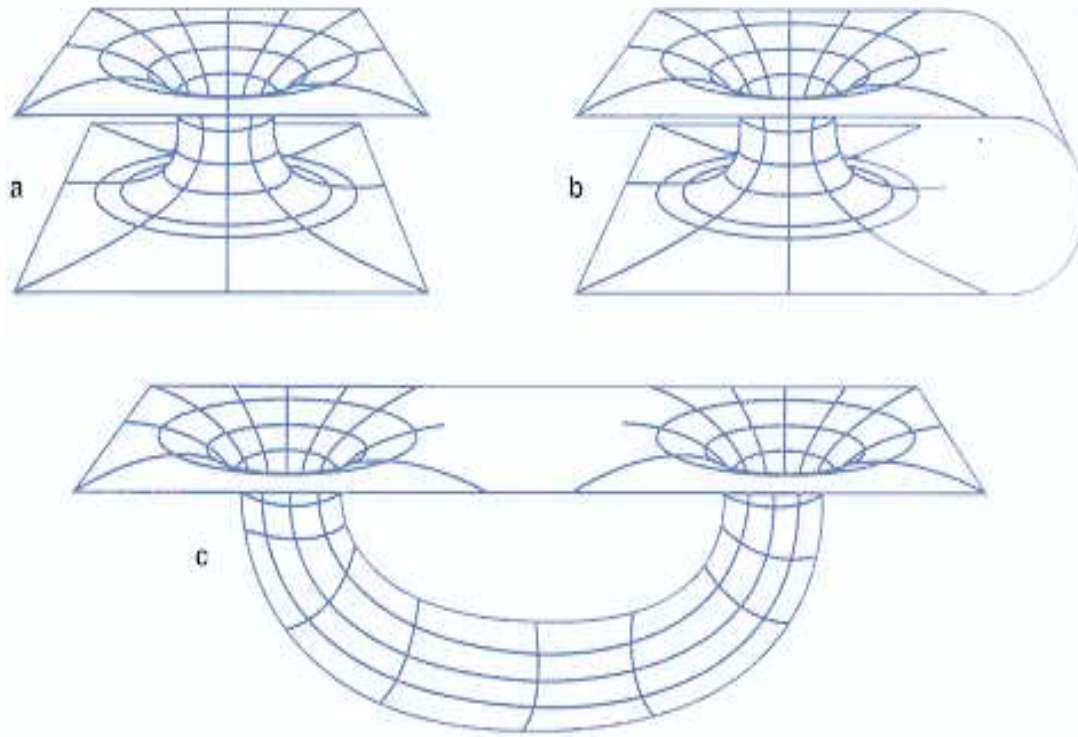


Figura 2.2: Topologías correspondientes a agujeros de gusano. Estos pueden conectar dos universos distintos, como en (a), o dos regiones de un mismo universo, como en (b) y (c).

2.4.2 Historia

El primer trabajo sobre lo que hoy llamamos agujero de gusano fue publicado por A. Einstein y N. Rosen en 1935 [16]. En este trabajo trataron de construir un modelo de partícula elemental que fuese en todas partes finita y libre de singularidades. Como modelo de partícula resultó un fracaso, pero dio lugar al primer modelo de agujero de gusano, denominado puente de Einstein-Rosen. El puente puede ser sin carga (extensión de la geometría de Schwarzschild), también llamado agujero de gusano de Schwarzschild, o cargado (extensión de la geometría de Reissner-Nordström).

Los agujeros de gusano de Schwarzschild son dinámicos, no estáticos. La garganta pasa de circunferencia cero, a medida que transcurre el tiempo, a un valor máximo, para luego contraerse nuevamente a cero. Esta expansión y contracción es tan rápida que ningún observador que se mueva a velocidades menores que las de la luz puede atravesar el agujero de gusano de Schwarzschild. Además poseen un horizonte en el pasado (anti-horizonte), que como en el caso de los agujeros blancos es inestable ante pequeñas perturbaciones (para más detalles ver [1]).

El tema de los agujeros de gusano permaneció dormido durante veinte años hasta la aparición del trabajo de J. A. Wheeler [17] en el año 1955. En este trabajo acerca

de los “geones” aparece el primer diagrama de un agujero de gusano en la literatura científica. Los geones son soluciones inestables pero de larga vida de las ecuaciones de Einstein y Maxwell combinadas. En una publicación posterior (1957), C. W. Misner y J. A. Wheeler [18] estudiaron la geometría de variedades de topología no trivial con la idea de explicar toda la física clásica. Fueron los primeros en usar topología abstracta, homología, cohomología y formas diferenciales en física. La palabra agujero de gusano ¹¹ aparece por primera vez en este trabajo.

Durante los treinta años siguientes se produjeron grandes avances en distintos aspectos relacionados con la teoría de la relatividad general (especialmente en la década del '60 y la primera mitad de los '70), pero se dedicó muy poco esfuerzo al tema de los agujeros de gusano Lorentzianos. El trabajo de M. S. Morris y K. S. Thorne [19] sobre agujeros de gusano atravesables, publicado en 1988, produjo un renacimiento del tema. En este trabajo se cambia el enfoque del problema, analizando las condiciones que se deben cumplir para tener un agujero de gusano con una geometría razonable, que permita el paso entre las regiones asintóticamente planas del mismo. Las soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein que dan lugar a agujeros de gusano, tienen el problema que requieren densidades de energía negativa cerca de la garganta. Si bien existen sistemas físicos que violan esta condición de energía a nivel microscópico (por ejemplo el efecto Casimir), no hay ejemplos a nivel macroscópico. Otra dificultad que presentan los agujeros de gusano atravesables, es que es posible obtener soluciones que violen causalidad [20, 21, 22]. A partir de estos trabajos pioneros, surgieron una gran cantidad de publicaciones dedicadas al tema con nuevas soluciones estáticas y dinámicas, sobre causalidad y sobre posibilidades de detección astronómica de este tipo de objetos.

2.4.3 Agujeros de gusano atravesables

En el caso de los agujeros de gusano atravesables, estáticos (no rotantes e independientes del tiempo) y esféricamente simétricos, la métrica puede escribirse, sin pérdida de generalidad, en la forma [15]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.51)$$

donde l es la distancia propia radial.

Se pedirá además que:

- (i) l cubra todo el rango $(-\infty, +\infty)$.
- (ii) Para que no haya horizontes de eventos $\phi(l)$ debe ser finito para todo l .
- (iii) El agujero de gusano conecte dos regiones asintóticamente planas del Universo (o de dos universos distintos). O sea que cuando $l \rightarrow \pm\infty$ la métrica debe ser

¹¹en inglés, *wormhole*

plana. Para que esto ocurra debe ser

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{r(l)}{|l|} = 1 \quad (2.52)$$

y

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \phi(l) = \phi_{\pm}, \quad (2.53)$$

con $\phi_{\pm}$ finito.

- (iv) Las componentes de la métrica deben ser funciones de l por lo menos dos veces derivables.
- (v) $r(l)$ tendrá un mínimo, que por simplicidad se supondrá que es único y aislado, que se notará r_0 , y se denominará radio de la garganta del agujero de gusano. Sin pérdida de generalidad, se puede elegir $l = 0$ en la garganta del agujero de gusano.

Estos son los requerimientos mínimos para tener un agujero de gusano que sea atravesable en principio. Para que también pueda ser atravesable desde un punto de vista práctico, hay que agregar la condición que la fuerza gravitacional en la garganta del agujero no sea muy grande.

Para simplificar se adoptan las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) y se reescribe la métrica de la Ec. (2.51) en la forma:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.54)$$

donde $\phi(r)$ se denomina función de corrimiento al rojo y $b(r)$ función de forma.

Para ver que la métrica de la Ec. (2.54) da lugar a un agujero de gusano, se puede tomar un tiempo fijo t y como la geometría es esféricamente simétrica, se puede elegir, sin pérdida de generalidad, el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Luego se tiene que

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\varphi^2. \quad (2.55)$$

Se puede hacer una inmersión¹² en un espacio euclídeo de mayor dimensión, con coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , cuya métrica tiene la forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.56)$$

La superficie inmersa¹³ es axialmente simétrica y puede ser descripta por una única función $z(r)$. En esta superficie la métrica queda

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.57)$$

¹²en inglés, *embedding*

¹³en inglés, *embedded*

Comparando las Ecs. (2.55) y (2.57), $z(r)$ debe satisfacer

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (2.58)$$

De esta última ecuación es claro que $r \in [r_0, +\infty)$, con $r_0 = b(r_0) \equiv b_0$ el radio de la garganta, y por que $b(r)$ se denomina la función de forma. Como dz/dr diverge en la garganta, r no es una buena coordenada para ser usada en las cercanías de la misma. Es mejor usar la distancia propia medida por observadores estáticos:

$$l(r) = \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right)^{-1/2} dr. \quad (2.59)$$

Cuando $l \rightarrow \pm\infty$ el espacio debe ser asintóticamente plano, luego

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad l \rightarrow \pm\infty \quad (2.60)$$

y además

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b(r)}{r}} \quad (2.61)$$

y

$$\frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}. \quad (2.62)$$

Para simplificar las ecuaciones que siguen y facilitar la interpretación física de los resultados es conveniente usar un sistema de referencia propio (con una base de vectores ortonormales), en el cual los observadores permanecen en reposo en el sistema de coordenadas (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} &= e^{-\phi} \mathbf{e}_t, & \mathbf{e}_{\hat{r}} &= \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right)^{1/2} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (2.63)$$

En este sistema de coordenadas la métrica adopta la forma de Minkowski:

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

y el tensor de Einstein tendrá sólo cuatro componentes no nulas dadas por [19]:

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{b'}{r^2}, \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= \frac{-b}{r^3} + \frac{2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) \phi'}{r}, \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \phi' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right], \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde las primas representan derivadas respecto de r . Reemplazando en las ecuaciones de Einstein

$$G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (2.65)$$

se ve que las únicas componentes no nulas del tensor de energía-momento T deber ser $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$ y $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$. Como los vectores de la base son los usados por observadores estáticos, cada una de las componetes de T tiene una interpretación física sencilla:

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r), \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\mathcal{T}(r), \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p(r) \quad (2.66)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de energía, $\mathcal{T}(r)$ es la tensión por unidad de área medida en la dirección radial y $p(r)$ es la presión medida en las direcciones laterales (ortogonales a la radial). Un caso particular es un fluido perfecto, para el cual $\mathcal{T} = -p$.

Reemplazando T y G en las ecuaciones de Einstein y trabajando un poco se tiene que

$$b' = 8\pi\rho r^2, \quad (2.67)$$

$$\phi' = \frac{-8\pi\mathcal{T}r^3 + b}{2r(r-b)}, \quad (2.68)$$

$$\mathcal{T}' = (\rho - \mathcal{T})\phi' - \frac{2(p + \mathcal{T})}{r}. \quad (2.69)$$

Estas últimas, son tres ecuaciones diferenciales que relacionan cinco funciones de r : b , ϕ , ρ , $\mathcal{T}$ y p . Para poder resolver el problema es necesario hacer algún tipo de hipótesis acerca de la materia o campos que dan lugar al tensor de energía-momento. Esto se hace usualmente por medio de ecuaciones de estado $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\rho)$ y $p = p(\rho)$. Las tres ecuaciones de campo más las dos ecuaciones de estado, forman un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales para las cinco funciones incógnita mencionadas arriba. Para construir agujeros de gusano “razonables” se suele seguir un camino inverso: elegir la forma del agujero adoptando $b(r)$ y $\phi(r)$ para fijar la geometría y luego encontrar como deben ser $\rho(r)$, $\mathcal{T}(r)$ y $p(r)$ para obtener la geometría buscada. Para esto es conveniente reescribir las Ecs. (2.67), (2.68) y (2.69) en la forma:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi r^2} \quad (2.70)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\phi'}{8\pi r^2} \quad (2.71)$$

$$p = \frac{r}{2} [(\rho - \mathcal{T})\phi' - \mathcal{T}'] - \mathcal{T} \quad (2.72)$$

Como se vio anteriormente, la función $b(r)$ es la que determina la forma del agujero de gusano y la función $\phi(r)$ está relacionada con las fuerzas gravitacionales (de marea) que sufren las partículas al atravesar el agujero de gusano (ver por ejemplo [19, 15]). $\phi(r)$ se puede elegir de modo que la fuerza gravitacional de marea sea pequeña (e incluso cero). Una vez elegidas $b(r)$ y $\phi(r)$ por medio de las Ecs. (2.70)-(2.72) se hallan ρ , τ y p .

Para buscar una relación general entre ρ y τ se pueden restar las Ecs. (2.70) y (2.71)

$$\begin{aligned}\rho - \mathcal{T} &= \frac{1}{8\pi r^2} \left[b' - \frac{b}{r} + 2(r-b)\phi' \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{r^2} \left(b' - \frac{b}{r} \right) + 2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{e^{2\phi}}{r} \left[e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right]' \end{aligned} \quad (2.73)$$

Como

$$e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \Big|_{r_0} = 0 \quad (2.74)$$

y

$$e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) > 0 \quad \forall r > r_0, \quad (2.75)$$

entonces $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left[e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right]' > 0 \quad \forall r \in (r_0, r_0 + \delta), \quad (2.76)$$

luego

$$\rho(r) - \mathcal{T}(r) < 0 \quad \forall r \in (r_0, r_0 + \delta) \quad (2.77)$$

y en la garganta la condición es algo más débil:

$$\rho(r_0) - \mathcal{T}(r_0) \leq 0 \quad (2.78)$$

Para hallar estas dos últimas ecuaciones no hizo falta hacer ninguna suposición adicional sobre $b(r)$ y $\phi(r)$. ¿Qué tipo de materia satisface estas ecuaciones? No la materia normal, es necesaria la presencia de materia “exótica” en la región cercana a la garganta.

Un observador que se mueva con velocidad radial v a través de la garganta, verá una densidad de energía que es la proyección del tensor de energía-momento en la dirección $e_{\hat{0}'} = \gamma e_{\hat{t}} + \gamma v e_{\hat{r}}$:

$$\rho' = T_{\hat{0}'\hat{0}'} = \gamma^2(\rho_0 - \tau_0) + \tau_0. \quad (2.79)$$

donde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. O sea que si el observador se mueve suficientemente rápido verá una densidad de energía negativa.

Esto se estudia en mayor detalle en la próxima Sub-sección.

2.4.4 Condiciones de energía

En un sistema de coordenadas ortonormal, elegido convenientemente, el tensor de energía-momento se puede poner en la forma diagonal:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

cuyas componentes son la densidad de energía y las tres presiones principales.

Existen al menos siete condiciones de energía en relatividad general [15]:

- Condición nula de energía (NEC¹⁴)

Para cualquier vector nulo k^μ

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (2.81)$$

que en términos de las presiones principales es

$$\rho + p_j \geq 0 \quad \forall j. \quad (2.82)$$

- Condición débil de energía (WEC¹⁵)

Para cualquier vector de tipo temporal V^μ

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (2.83)$$

que en términos de las presiones principales es

$$\rho \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho + p_j \geq 0 \quad \forall j. \quad (2.84)$$

Significa que la densidad de energía local medida por cualquier observador (de tipo temporal) es positiva.

- Condición fuerte de energía (SEC¹⁶)

Para cualquier vector de tipo temporal V^μ

$$(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}) V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (2.85)$$

donde $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ es la traza del tensor energía-momento. La condición fuerte se puede expresar en términos de las presiones principales como:

$$\rho + p_j \geq 0 \quad \forall j \quad \text{y} \quad \rho + \sum_j p_j \geq 0. \quad (2.86)$$

¹⁴del inglés, *null energy condition*.

¹⁵del inglés, *weak energy condition*.

¹⁶del inglés, *strong energy condition*.

- Condición dominante de energía (DEC¹⁷)

Para cualquier vector de tipo temporal V^μ

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0 \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu}V^\nu \text{ no es de tipo espacial.} \quad (2.87)$$

En términos de las presiones principales se puede escribir como:

$$\rho \geq 0 \quad \text{y} \quad p_j \in [-\rho, \rho] \quad \forall j. \quad (2.88)$$

Significa que la densidad de energía medida localmente es siempre positiva y que el flujo de energía es tipo temporal o nulo.

Es fácil ver que $\text{DEC} \implies \text{WEC} \implies \text{NEC}$ y que $\text{SEC} \implies \text{NEC}$.

Además de las condiciones de energía anteriores, se pueden definir condiciones de energía promediadas:

- Condición nula promediada de energía (ANEC¹⁸)

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu d\lambda \geq 0, \quad (2.89)$$

donde Γ es una curva nula y λ es una parametrización afín de la curva cuyo vector tangente es k^μ .

Para poner esta condición en términos de las presiones principales, se puede definir la función de normalización η y los cosenos directores $\cos\theta_i$ por

$$k^\mu = \eta(1; \cos\theta_i), \quad (2.90)$$

luego

$$\int_{\Gamma} (\rho + \sum_i p_i \cos^2 \theta_i) \eta^2 d\lambda \geq 0. \quad (2.91)$$

- Condición débil promediada de energía (AWEC¹⁹)

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu ds \geq 0, \quad (2.92)$$

donde Γ es una curva de tipo temporal y s denota la parametrización usando el tiempo propio de la curva, cuyo vector tangente es V^μ . Como s es el tiempo propio se tiene que:

$$V^\mu = \gamma(1; v \cos\theta_i), \quad (2.93)$$

con v la velocidad y $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Luego

$$\int_{\Gamma} \gamma^2 (\rho + v^2 \sum_i p_i \cos^2 \theta_i) ds \geq 0. \quad (2.94)$$

¹⁷del inglés, *dominant energy condition*.

¹⁸del inglés, *average null energy condition*.

¹⁹del inglés, *average weak energy condition*.

- Condición fuerte promediada de energía (ASEC²⁰)

$$\int_{\Gamma} (T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + \frac{1}{2} T) ds \geq 0, \quad (2.95)$$

donde Γ es una curva de tipo temporal y T , es igual que antes, la traza del tensor energía-momento. Esta condición se puede escribir en la forma:

$$\int_{\Gamma} \left[\gamma^2 (\rho + v^2 \sum_i p_i \cos^2 \theta_i) - \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \sum_i p_i \right] ds \geq 0 \quad (2.96)$$

Las condiciones AWEC y ANEC son independientes. La condición ASEC se reduce a la condición ANEC cuando $v \rightarrow 1$.

Estas condiciones de energía se utilizan como hipótesis en muchos teoremas sobre singularidades y en teoremas sobre la termodinámica de los agujeros negros (ver [15] y referencias allí citadas).

Existen sistemas físicos que violan alguna (o varias) de las condiciones de energía. Entre ellos el más conocido es el efecto Casimir que ha sido verificado experimentalmente. El efecto Casimir se produce cuando la presencia de conductores eléctricos distorsiona el cero de energía del vacío en electrodinámica cuántica (ver por ejemplo [23]). El resultado es una densidad de energía ρ negativa, lo que viola las condiciones de energía nula, débil, fuerte y dominante. El efecto es muy pequeño; para placas realistas, la masa de las propias placas es mucho más grande que la energía de Casimir, por lo que no se violan en general las condiciones de energía promediadas.

La radiación de Hawking [24] de los agujeros negros, proceso físico aún no verificado experimentalmente, también viola las condiciones de energía. Un observador estático que se encuentre justo sobre el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild aislado (rodeado por vacío), verá un valor negativo para la densidad de energía [25, 26, 27], de modo que se viola la condición nula de energía. Esta densidad de energía negativa está asociada con la creación de partículas cerca del horizonte, partículas que luego se evaporan, dando lugar a un flujo de energía negativa hacia dentro del horizonte, que hace que este se contraiga en respuesta a la evaporación.

Las violaciones a las condiciones de energía son efectos cuánticos muy pequeños, del orden de $\hbar$. No está claro al momento de escribir esta Tesis que pueda haber violaciones macroscópicas de las condiciones de energía, ni argumentos suficientemente fuertes que lo prohiban. Para un estudio detallado de distintos ejemplos de sistemas que violan alguna de las condiciones de energía ver [15].

²⁰del inglés, *average strong energy condition*.

Volviendo al tema de los agujeros de gusano, las Ecs. (2.77) y (2.78) muestran que en una región finita alrededor de la garganta se viola la condición nula de energía y además se viola (o casi) en la garganta misma. Como consecuencia, se violan también las condiciones débil, fuerte y dominante. Luego se necesita materia “exótica”, que aquí se definirá como aquella que viola la condición nula de energía, para poder formar la garganta.

En el libro de M. Visser [15] se muestra, usando la ecuación de Raychaudhuri, que para un agujero de gusano atravesable y esféricamente simétrico se viola la condición nula promediada a lo largo de una geodésica nula radial, y se viola también la condición débil promediada en el caso de una geodésica de tipo temporal con suficiente velocidad.

Hasta acá se analizaron en esta Tesis los agujeros de gusano atravesables esféricamente simétricos y estáticos. En general, los agujeros de gusano pueden ser asimétricos y con una geometría dependiente del tiempo. El estudio del caso general es bastante difícil y requiere del uso de técnicas globales. Para el caso general, existe el teorema de censura topológica [30], cuya recíproca establece que un espacio-tiempo “razonable” que contenga un agujero de gusano atravesable y que cumpla las ecuaciones de Einstein debe violar la condición nula promediada de energía.

2.4.5 Causalidad

Desde el mismo momento en que se encontraron las primeras soluciones de las ecuaciones de Einstein que dan lugar a agujeros de gusano atravesables, se descubrió que estos podrían transformarse en “máquinas del tiempo”, induciendo una diferencia de tiempo entre las bocas. Esto puede lograrse por medio de un movimiento relativista de una de las bocas [20, 21] o exponiendo una de las bocas a un campo gravitatorio intenso [22].

La Fig. 2.3 muestra esquemáticamente como un agujero de gusano atravesable esférico puede convertirse en una máquina del tiempo [20] por medio del movimiento relativista de una de sus bocas. Las bocas están inicialmente cerca una de otra y fuera del agujero de gusano el espacio-tiempo es casi plano (Minkowski). Luego la boca 1 permanece en reposo mientras que la boca 2 acelera hasta velocidades cercanas a la de la luz para luego desacelerar y retornar a la posición original. En un entorno de la boca que fue acelerada el tiempo propio es entonces menor al de la boca que permaneció en reposo. De este modo, en tiempos posteriores, si se atraviesa el agujero de gusano desde la boca 1 hacia la boca 2, se podría viajar hacia atrás en el tiempo.

Otra manera de introducir una diferencia de tiempo entre las bocas del agujero de gusano es por medio de la dilatación temporal producida por corrimiento al rojo gravitacional [22]. Si las bocas del agujero de gusano se ubican en posiciones

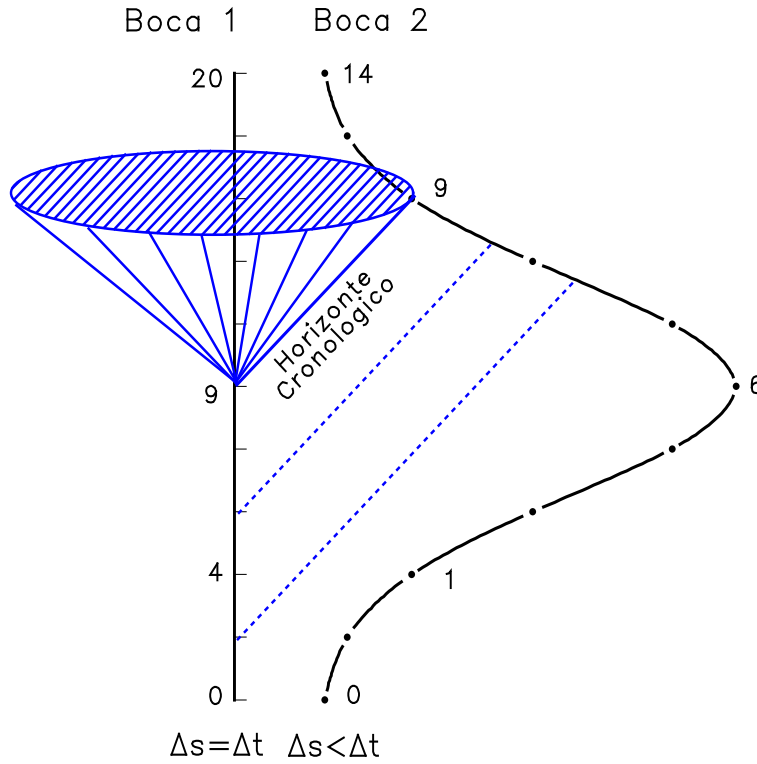


Figura 2.3: Esquema de la máquina del tiempo de Morris, Thorne & Yurtsever. La boca 1 del agujero de gusano permanece en reposo mientras que la boca 2 es acelerada hasta velocidades cercanas a la de la luz para luego retornar a la posición inicial y detenerse. Un observador que ingrese a la boca 1 en $t < 9$ saldrá por la otra boca en un tiempo posterior al de ingreso al agujero de gusano. En cambio, si el observador ingresa a la boca 1 en un instante $t > 9$ retornará por la otra boca al punto inicial en un tiempo menor al de partida.

diferentes en un campo gravitatorio no uniforme durante un cierto tiempo, se induce una diferencia de tiempo entre las mismas dada por

$$\Delta T = \int_i^f \left[\sqrt{-g_{00}(x_1)} - \sqrt{-g_{00}(x_2)} \right] dt. \quad (2.97)$$

Como el tiempo evoluciona de manera distinta en las dos bocas del agujero de gusano, para construir una máquina del tiempo sólo hace falta esperar lo suficiente como para tener el desfase de tiempo necesario entre las bocas, que debe ser mayor que el tiempo que demore el observador en pasar de una boca a la otra.

La posibilidad de construir máquinas del tiempo o, de manera más precisa, curvas cerradas temporales, constituye un problema grave, ya que implica una violación del principio de causalidad, generando paradojas que se pueden clasificar en dos tipos [15]:

- (i) Paradojas de consistencia: Por ejemplo, un viajero vuelve al pasado y lo modifica de manera tal que no vuelve al pasado.
- (ii) Paradojas de información: El viajero vuelve al pasado y le lleva un libro a su autor, de manera que este no necesita escribirlo, o sea se crea información de la nada.

Para resolver estas paradojas se hicieron varias propuestas, que se pueden separar en cuatro clases [15]:

- (i) La física debe reescribirse eliminando el principio de causalidad. De este modo se permitirían los viajes en el tiempo. Por ejemplo, usando variedades que no sean de Hausdorff, es decir que permitan ramificaciones.
- (ii) Conjetura de consistencia de Novikov [21, 28]: Existe una historia única del Universo y esta historia debe ser consistente. Esta consistencia genera restricciones sobre los eventos posibles en las cercanías de una curva cerrada temporal.
- (iii) Conjetura de protección cronológica de Hawking [29]: Se asume como principio básico que los viajes en el tiempo no son posibles. Los agujeros de gusano podrían existir, pero efectos cuánticos evitarían la posibilidad de transformarlos en máquinas del tiempo.
- (iv) No puede existir ningún proceso físico que de lugar a curvas cerradas temporales. De este modo los agujeros de gusano no podrían existir.

La solución de este problema probablemente se da en el marco de una teoría cuántica de la gravitación, que aún no existe. Para una discusión más completa ver [15, 31].

Capítulo 3

Lentes gravitacionales: aspectos básicos

En este Capítulo se analizan los aspectos básicos de las lentes gravitacionales con campo débil. Solamente se desarrollarán los aspectos relevantes con respecto a esta Tesis. Para un estudio más completo se sugiere consultar el libro de P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco [32] o las monografías de J. Wambsganns [33], y de R. Narayan & M. Bartelmann [34].

3.1 Un poco de historia

Aún antes de la aparición de la teoría de la relatividad general de A. Einstein se especulaba con la posibilidad de que la gravedad pudiese afectar la trayectoria de un rayo de luz. H. Cavendish calculó, alrededor de 1784 en un trabajo no publicado, usando la teoría corpuscular de la luz y la teoría de la gravitación de Newton, el ángulo de deflexión de la luz al pasar cerca de un cuerpo masivo. J. Soldner publicó en 1801 [35] un trabajo en el cual investigó el error en las posiciones angulares de las estrellas debido a la deflexión de la luz. El valor clásico para el ángulo de deflexión de un rayo de luz que pasa a una distancia r de un objeto de masa M , considerando ángulos pequeños, viene dado por

$$\alpha_{\text{Newt}} = \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (3.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz en el vacío.

A. Einstein [36] obtuvo en 1911 el mismo valor para el ángulo de deflexión usando el principio de equivalencia y una métrica espacial euclídea. En cambio, usando las ecuaciones completas de la teoría de la relatividad general, el propio Einstein obtuvo en 1915 [37] un valor que es el doble del Newtoniano, debido a la curvatura de la métrica:

$$\alpha = 2\alpha_{\text{Newt}} = \frac{4GM}{c^2 r}. \quad (3.2)$$

Este valor fue verificado para el Sol por el conocido experimento de Eddington en 1919 [38], con un margen de error del orden del 30%, y más recientemente con un error menor al 0.02% [39].

A. S. Eddington [40] fue el primero en señalar en el año 1920 que si dos estrellas están suficientemente bien alineadas pueden ocurrir imágenes múltiples. A. Einstein en 1936 [41] calculó la deflexión, debida, a una estrella, de la luz de otra estrella de fondo. Encontró que las luminosidades aparentes cambian por la deflexión de la luz y que una imagen puede resultar muy amplificada si la lente y la fuente están muy alineadas con el observador. Encontró además que la separación angular de las dos imágenes es demasiado pequeña como para ser resuelta por los telescopios ópticos de la época.

F. Zwicky [42, 43] fue el primero en señalar en 1937 que las galaxias pueden dar lugar a imágenes de fuentes de fondo con una separación suficiente para ser observadas. También señaló que la deflexión de la luz por galaxias podría amplificar galaxias de fondo y que así se podrían observar galaxias que de otro modo no serían vistas. Además calculó la probabilidad de *lensing* por galaxias, concluyendo que es del orden del 1 % para una fuente con un corrimiento al rojo suficientemente grande.

Todas estas ideas permanecieron en el ámbito de la especulación teórica hasta el surgimiento de la radioastronomía y el descubrimiento de los cuasares en el año 1963 [44]. Estos objetos son ideales como fuentes para eventos de *lensing*. Los cuasares se encuentran a gran distancia, de modo que la probabilidad que sufran deflexión gravitacional por galaxias interpuestas es bastante alta y son suficientemente brillantes para ser detectados aún a distancias cosmológicas. Además su región de emisión óptica es muy compacta, mucho más pequeña que la de una galaxia típica. La amplificación puede ser entonces muy grande y las imágenes múltiples bien separadas y fácilmente detectables.

En la misma época se produjo un resurgimiento del tema. Yu. G. Klimov [45] en 1963 consideró el *lensing* de galaxias por galaxias, concluyendo que si hay alineamiento suficiente, ocurrirá una imagen en forma de anillo que podría ser separada fácilmente del campo de galaxias, mientras que si el alineamiento es imperfecto, aparecen imágenes múltiples difíciles de distinguir de galaxias dobles o múltiples. S. Liebes [46] consideró el *lensing* de estrellas por estrellas, de estrellas sobre cúmulos globulares en nuestra galaxia, de estrellas sobre estrellas si ambas son miembros del mismo cúmulo globular y la posibilidad de que estrellas de nuestra galaxia actúen como lentes sobre estrellas de la galaxia de Andrómeda.

S. Refsdal [47] analizó en forma completa el tema de las lentes puntuales, consideró también el retraso temporal para las dos imágenes, debido a los diferentes tiempos de viaje de los rayos de luz correspondientes a ambas imágenes y mostró que se puede usar la óptica geométrica para considerar los efectos del *lensing* gravitacional. En otro trabajo [48], Refsdal describió como la constante de Hubble H_0 puede en principio ser medida por medio del *lensing* gravitacional de una fuente variable. Como el tiempo de viaje para las distintas imágenes es diferente, las variaciones intrínsecas de la fuente se observarán a tiempos diferentes en las imágenes. El retraso temporal entre las imágenes es proporcional a la diferencia entre las lon-

gitudes absolutas de los caminos ópticos, que a su vez es proporcional a H_0^{-1} . En otras dos publicaciones [49, 50], Refsdal analizó la posibilidad de testear teorías cosmológicas y de determinar las masas y las distancias de estrellas usando el efecto de *lensing* gravitacional.

N. Sanitt fue el primero en considerar masas extendidas como lentes en el año 1971 [51], trabajando con galaxias como lentes y cuasares como fuentes. R. R. Bourassa y sus colaboradores [52, 53, 54] analizaron en la década del '70 las propiedades de una lente con distribución de masa esferoidal. En estos trabajos se estudió por primera vez lentes con distribución de masa sin simetría esférica y además aparece la primer discusión sobre cáusticas en *lensing* gravitacional. K. Chang y S. Refsdal [55] encontraron en 1979, que una estrella ubicada en una galaxia que actúa como lente puede producir cambios en la luminosidad de una fuente de fondo con escalas del orden del año. Aunque la separación de las imágenes causada por la estrella no es observable, si lo es en cambio en la amplificación, proveyendo un método para encontrar objetos compactos en la galaxia.

En 1979, D. Walsh, R. F. Carswell & R. J. Weymann [56] detectaron el primer ejemplo de *lensing* gravitacional, el quasar QSO 0957+561A,B; lo que produjo un avance muy importante en el tema de las lentes gravitacionales. Esta fuente consiste de dos imágenes separadas por 6 segundos de arco. La similitud de espectro de ambas imágenes, en óptico y en radio, y la detección posterior de la galaxia que actúa como lente, con corrimiento al rojo $z \approx 0.36$, permitió verificar que A y B son en realidad las imágenes de un único quasar con $z \approx 1.4$. A partir de este descubrimiento surgieron una enorme cantidad de trabajos, tanto en el plano teórico como en el observacional.

B. Paczynski en 1986 [57] mostró que una de cada millón de estrellas en la nube de Magallanes puede sufrir una amplificación importante por el efecto de lente gravitacional de una estrella interpuesta en el halo de nuestra galaxia. Estos eventos de magnificación que se denominan eventos de *microlensing*, tienen escalas temporales que van desde dos horas a dos años para masas de la lente entre $10^{-6}M_\odot$ y $10^2M_\odot$. Para poder estudiar estos eventos de *microlensing* es necesario monitorear las curvas de luz de millones de estrellas, separando los eventos de *lensing* de las estrellas intrínsecamente variables. Las técnicas actuales permiten hacerlo y se han detectado algunos eventos de *microlensing* [58, 59, 60, 61]. Esto permite estudiar la naturaleza y la distribución de masa en nuestra galaxia.

Los anillos de Einstein fueron descubiertos por primera vez, en frecuencias de radio, por J. N. Hewitt et al. [62] en el año 1987. En la actualidad se conocen varios anillos de Einstein en radio y permiten obtener los modelos más detallados sobre las distribuciones de masa de las galaxias que actúan como lentes.

A mediados de la década del '80 se descubrieron arcos luminosos gigantes de color azul [63, 64, 65], que Paczynski [66] explicó como imágenes de galaxias de fondo que están muy distorsionadas y elongadas debido al efecto de lente gravitacional producido por un cúmulo de galaxias interpuesto. Estos arcos luminosos gigantes requieren un alineamiento muy especial entre el cúmulo y la galaxia de fondo.

La cantidad de trabajos publicados sobre lentes gravitacionales viene creciendo

en forma sostenida en los últimos 40 años [33], haciendo que este tema se transforme en una parte importante de la astrofísica contemporánea.

3.2 Ecuación general de la lente

La propagación general de la luz en espacios curvos es un problema teórico complicado. Sin embargo, para casi todos los problemas astrofísicos relevantes se puede asumir que la geometría del Universo es la de Robertson-Walker, que las inhomogeneidades que producen la deflexión de la luz son perturbaciones locales y que el observador y la fuente se encuentran en regiones del Universo localmente planas. Además se supondrá en este Capítulo que el campo gravitatorio es débil, es decir que cerca de la lente el espacio-tiempo es una perturbación a primer orden del espacio de Minkowski (aproximación de campo débil). Esta aproximación es válida si el potencial Newtoniano Φ es pequeño, $|\Phi| \ll c^2$ y la velocidad característica de la lente es pequeña, $v \ll c$.

La Fig. 3.1 muestra la geometría típica de una lente gravitacional. Un rayo de luz proveniente de la fuente (S) es deflectado un ángulo α por la lente (L) y llega al observador (O). En la mayoría de los casos de interés astrofísico los ángulos son pequeños. De la Fig. 3.1, usando consideraciones geométricas, se puede hallar la ecuación general de la lente:

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os}} \alpha(\theta). \quad (3.3)$$

Para resolver el problema de *lensing* hay que hallar $\alpha(\theta)$ en cada caso particular e invertir la Ec. (3.3) para obtener las posiciones angulares de las imágenes θ en función de la posición angular de la fuente β .

La deflexión gravitacional conserva el brillo superficial (a causa del teorema de Liouville) [32], pero modifica el ángulo sólido aparente de la fuente. El flujo total recibido por el observador, de una imagen producida por *lensing* gravitacional, cambia entonces en proporción al cociente entre las áreas de la imagen y de la fuente, resultando en una amplificación (o magnificación) dada por:

$$A = \frac{I_{obs}}{I_0} = \frac{\text{área de la imagen}}{\text{área de la fuente}}, \quad (3.4)$$

donde I_0 es el flujo total emitido por la fuente y I_{obs} es el flujo observado correspondiente a la imagen. Si hay varias imágenes, para obtener la amplificación total hay que sumar las amplificaciones correspondientes a cada una de las imágenes.

Como el cambio en las áreas viene dado por el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación $\theta \rightarrow \beta$, se tiene que

$$A = \left| \det \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right|^{-1}. \quad (3.5)$$

Luego la amplificación es función de θ , determinada por la ley de deflexión $\alpha(\theta)$.

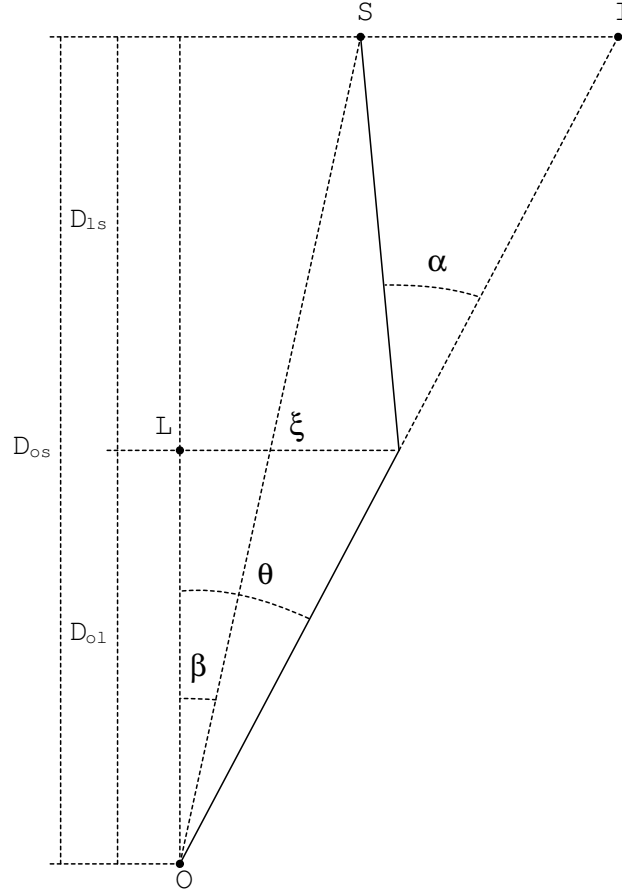


Figura 3.1: Diagrama de la lente gravitacional. Se muestran las posiciones del observador (O), la lente (L), la fuente (S) y la imagen (I). D_{ol} , D_{os} , D_{ls} son, respectivamente, las distancias observador-lente, observador-fuente y lente-fuente. α es el ángulo de deflexión y ξ es el parámetro de impacto.

El determinante de la matriz Jacobiana puede tener cualquier signo, cuando es positivo (negativo) se dice que la imagen tiene paridad positiva (negativa). Las regiones en el plano de la lente donde el determinante Jacobiano tiene distinto signo están separadas por curvas donde aquel vale cero, que se denominan curvas críticas. En estas curvas la amplificación diverge. Las proyecciones sobre el plano de la lente de las curvas críticas se denominan cáusticas. Si una fuente puntual se encuentra sobre una cáustica su amplificación será infinita. Esto en el caso real no ocurre, ya que las fuentes reales son extendidas y su magnificación es el promedio ponderado sobre toda la fuente, resultando en un valor finito.

Para una lente con simetría circular, el problema se transforma en unidimensional

y la amplificación vendrá dada por

$$A = \left| \frac{\beta}{\theta} \frac{d\beta}{d\theta} \right|^{-1}. \quad (3.6)$$

3.3 Lente puntual

En esta Sección se estudia la lente mas simple: la lente puntual o lente de Schwarzschild. En este caso la fuente, la lente y el observador determinan un plano donde se formarán las imágenes puntuales, de modo que la ecuación tridimensional (3.3) se transforma en una ecuación unidimensional.

El primer paso para resolver el problema es hallar el ángulo de deflexión $\alpha(\theta)$. La teoría de la relatividad general predice que cuando un rayo de luz pasa cerca de una masa puntual M , utilizando la métrica de Schwarzschild linealizada, sufre un ángulo de desviación α dado [1, 2] por

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 r_0}, \quad (3.7)$$

donde r_0 es la distancia mínima del rayo de luz a la lente, que coincide en esta aproximación con el parámetro de impacto ξ . Para que la aproximación de campo débil sea válida se debe verificar que $\xi \approx r_0 \gg R_S$, donde $R_S = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild de la lente. Suponiendo que los ángulos son pequeños, reemplazando la Ec. (3.7) en la Ec. (3.3) se tiene que

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os}} \frac{4GM}{c^2 \xi}. \quad (3.8)$$

Como $\xi = \theta D_{ol}$ entonces

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os} D_{ol}} \frac{4GM}{c^2 \theta}. \quad (3.9)$$

Llamando radio (angular) de Einstein a

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os} D_{ol}}}, \quad (3.10)$$

se obtiene la ecuación de la lente puntual:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (3.11)$$

Resolviendo la Ec. (3.11) se obtienen las posiciones de las imágenes

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right). \quad (3.12)$$

Por lo tanto si $\beta \neq 0$ hay dos imágenes, una a cada lado de la fuente. Si $\beta = 0$, se tiene simetría de rotación alrededor del eje óptico, de modo que en lugar de las dos imágenes se obtiene un anillo de radio angular $\theta = \theta_E$, llamado anillo de Einstein.

La lente puntual es un caso particular de la lente con simetría circular, luego las ampliaciones de las imágenes pueden calcularse usando la Ec. (3.6), resultando

$$A_{1,2} = \frac{\tilde{\beta}^2 + 2}{2|\tilde{\beta}|\sqrt{\tilde{\beta}^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

donde $\tilde{\beta} = \beta/\theta_E$. La imagen 1 se encuentra fuera del anillo de Einstein y tiene paridad positiva, mientras que la imagen 2 se encuentra dentro del anillo de Einstein y tiene paridad negativa. La ampliación total es

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\tilde{\beta}^2 + 2}{|\tilde{\beta}|\sqrt{\tilde{\beta}^2 + 4}}. \quad (3.14)$$

Llamando radio de Einstein en el plano de la lente a

$$R_E = \theta_E D_{ol} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls} D_{ol}}{D_{os}}}, \quad (3.15)$$

y definiendo $b = \beta D_{ol}$ como la posición de la fuente en el plano de la lente, podemos escribir la Ec. (3.14) en la forma

$$A = \frac{B^2 + 2}{|B|\sqrt{B^2 + 4}}, \quad (3.16)$$

donde $B = b/R_E$ la posición de la fuente en el plano de la lente en unidades del radio de Einstein.

3.4 Lente extendida

En el caso más general el deflector tiene una distribución de masa tridimensional $\rho(\mathbf{r})$ que puede ser proyectada a lo largo de la línea visual sobre el plano de la lente para obtener una densidad de masa superficial $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ dada por

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{D_{os}} \rho(\mathbf{r}) dz, \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{r}$ es un vector tridimensional en el espacio y $\boldsymbol{\xi}$ es un vector bidimensional en el plano de la lente. El ángulo de deflexión $\boldsymbol{\alpha}$ es entonces la suma sobre todos los elementos de masa en el plano de la lente

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \Sigma(\boldsymbol{\xi}')}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d\boldsymbol{\xi}', \quad (3.18)$$

donde se usó la Ec. (3.7). Definiendo la densidad de masa superficial crítica como

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2 D_{os}}{4\pi G D_{ol} D_{ls}}, \quad (3.19)$$

y la densidad de masa superficial adimensional, también llamada convergencia o focalización:

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}}, \quad (3.20)$$

y usando que $\xi = D_{ol} \theta$, la Ec. (3.18) queda

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{os}}{\pi D_{ls}} \int \frac{(\theta - \theta') \kappa(\theta')}{|\theta - \theta'|^2} d\theta'^2. \quad (3.21)$$

Como

$$\nabla_{\theta} \ln |\theta - \theta'| = \frac{(\theta - \theta')}{|\theta - \theta'|^2}, \quad (3.22)$$

se puede definir

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\theta') \ln |\theta - \theta'| d\theta'^2, \quad (3.23)$$

de modo que

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{os}}{D_{ls}} \nabla \psi(\theta), \quad (3.24)$$

ψ se denomina potencial de deflexión y verifica la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \psi(\theta) = 2\kappa(\theta). \quad (3.25)$$

La ecuación general de la lente se puede escribir entonces como

$$\beta = \theta - \nabla \psi(\theta), \quad (3.26)$$

que puede ponerse en la forma:

$$\nabla_{\theta} \left[\frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 - \psi(\theta) \right] = 0. \quad (3.27)$$

Definiendo

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 - \psi(\theta), \quad (3.28)$$

se tiene que

$$\nabla_{\theta} [\phi(\theta)] = 0. \quad (3.29)$$

$\phi(\theta)$ se denomina potencial de Fermat y su significado físico se estudiará en la próxima Sección.

3.5 Tiempo de retardo

Los rayos de luz correspondientes a diferentes imágenes siguen distintos caminos, por lo cual demorarán distintos tiempos en llegar al observador. La diferencia en el tiempo de arribo de distintas imágenes se denomina tiempo de retardo y se puede separar en dos partes: una debido a las diferentes longitudes de los caminos seguidos

por los rayos, llamada geométrica, y otra debido a las diferentes profundidades del pozo de potencial gravitacional que los distintos rayos de luz deben atravesar, denominada potencial.

El retardo temporal Δt es la diferencia en tiempo coordinado al cual los rayos de luz llegan al observador y viene dado por

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t_{\text{geom.}} + \Delta t_{\text{pot.}} \quad (3.30)$$

Usando el modelo cosmológico estándar de Friedman-Lemaître con métrica de Robertson-Walker se tiene que [32]:

$$\Delta t_{\text{geom.}} = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{2D_{ls}} \left[(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\beta})^2 - (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\beta})^2 \right], \quad (3.31)$$

y

$$\Delta t_{\text{pot.}} = -\frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} [\psi(\boldsymbol{\theta}_2) - \psi(\boldsymbol{\theta}_1)], \quad (3.32)$$

donde z_L es el corrimiento al rojo de la lente. Luego el retardo temporal quedará:

$$\Delta t = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} \left[\left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}_2) \right) - \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}_1) \right) \right], \quad (3.33)$$

que en términos del potencial de Fermat ϕ se puede escribir como:

$$\Delta t = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} [\phi(\boldsymbol{\theta}_2) - \phi(\boldsymbol{\theta}_1)]. \quad (3.34)$$

Las distancias D_{os} , D_{ol} y D_{ls} que aparecen en la Ec. (3.33), dependen de la constante de Hubble; por lo tanto es posible determinar esta última midiendo el retardo temporal entre diferentes imágenes y usando un buen modelo para el potencial gravitacional ψ de la lente.

Es útil definir la función de retardo temporal $\mathcal{T}$ como la diferencia entre el tiempo que demora un rayo de luz en llegar desde la fuente al observador luego de desviarse debido a la lente, y el tiempo que demoraría si la lente no estuviese presente. Esta función $\mathcal{T}$ se puede escribir como:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} \left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2 - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right] + \text{constante}, \quad (3.35)$$

luego

$$\Delta t = \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_2) - \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_1). \quad (3.36)$$

Usando el potencial de Fermat, $\mathcal{T}$ quedará

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 + z_L}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} \phi(\boldsymbol{\theta}) + \text{constante}, \quad (3.37)$$

y usando la Ec. (3.29) se obtiene que su gradiente vale cero:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} [\mathcal{T}(\boldsymbol{\theta})] = 0. \quad (3.38)$$

De esta última ecuación se sigue que las imágenes producidas por las lentes gravitacionales están situadas en lugares que corresponden a puntos estacionarios (máximos, mínimos o puntos de ensilladura) en el tiempo de viaje de la luz. Este es el principio de Fermat para las lentes gravitacionales.

El principio de Fermat expresado usando el potencial ϕ , por medio de la Ec. (3.29), tiene la ventaja que ϕ no depende de los parámetros cosmológicos. Toda la física de las lentes gravitacionales puede desarrollarse a partir del potencial de Fermat y del principio de Fermat dado por la Ec. (3.29).

3.6 Modelo de Chang-Refdal

Si una estrella que se encuentra en una galaxia actúa como lente, el campo gravitatorio de la galaxia perturbará al de la estrella. La deflexión de la luz debida solamente a la estrella se denomina *microlensing* y la debida a la galaxia como un todo, *macrolensing*. En esta Sección se describe el modelo de Chang-Refdal [32, 55].

La ecuación de la lente puede escribirse en el plano del deflector como [32]:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - R_E^2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \begin{pmatrix} \kappa + \gamma & 0 \\ 0 & \kappa - \gamma \end{pmatrix} \mathbf{r} - \mathbf{d}_0 = 0, \quad (3.39)$$

donde el sistema de coordenadas está centrado en la micro-lente, con la orientación de la base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ elegida de manera de diagonalizar la matriz cuadrupolar; la fuente puntual se encuentra en $\mathbf{r}_0$ y la posición de la imagen es $\mathbf{r}$. El tercer término en la Ec. (3.39) proviene de la deflexión en el plano de la lente debido a la microlente, considerada como una masa puntual M , R_E es el radio de Einstein usual. Los términos cuarto y quinto en la Ec. (3.39) surgen de la deflexión debida a la galaxia como un todo. En el cuarto término, κ y γ son, respectivamente, la focalización y el parámetro de deformación (o *shear*) de la macro-lente en la posición de la masa puntual. $\mathbf{d}_0$ depende de la deflexión producida por la galaxia en la ubicación de la micro-lente, su único efecto es cambiar la posición no perturbada de la fuente $\mathbf{r}_0$ en una constante. Se ignorará $\mathbf{d}_0$ asumiendo una posición de la fuente $\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}_0$ en el plano de la lente.

Definiendo nuevas coordenadas $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$, en el plano de la lente y en el plano de la fuente, respectivamente, como

$$\mathbf{X} = \frac{\sqrt{|1 - \kappa + \gamma|}}{R_E} \mathbf{r}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_E \sqrt{|1 - \kappa + \gamma|}} \mathbf{b}, \quad (3.41)$$

la ecuación de la lente se transforma en

$$\mathbf{Y} = \varepsilon \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^2}, \quad (3.42)$$

donde

$$\varepsilon = \text{sign}(1 - \kappa + \gamma), \quad (3.43)$$

y

$$\Lambda = \frac{1 - \kappa - \gamma}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (3.44)$$

La solución de la Ec. (3.42) puede encontrarse reduciendo el problema a una ecuación de cuarto orden en X^2 [32]:

$$\begin{aligned} & \Lambda^2 X^8 - \left[2\varepsilon\Lambda(\Lambda + 1) + Y_1^2 + \Lambda^2 Y_2^2 \right] X^6 + \\ & + \left[\Lambda^2 + 4\Lambda + 1 + 2\varepsilon(Y_1^2 + \Lambda Y_2^2) \right] X^4 - \left[2\varepsilon(\Lambda + 1) + Y_1^2 + Y_2^2 \right] X^2 + 1 = 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde $X = |\mathbf{X}|$ y los subíndices denotan las distintas componentes.

La Ec. (3.45) puede resolverse de manera estándar. Para cualquier solución real y positiva X^2 , se puede tomar el valor positivo de X y obtener la posición de la imagen por

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{Y_1}{\varepsilon\Lambda - \frac{1}{X^2}} \\ X_2 &= \frac{Y_2}{\varepsilon - \frac{1}{X^2}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Luego el número de imágenes viene dado por el número de soluciones reales y positivas de la Ec. (3.45). La amplificación para cualquier imagen viene dada por el determinante de la matriz Jacobiana:

$$A_i = \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right|^{-1} = \frac{1}{|1 - \kappa + \gamma|} \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right|^{-1}. \quad (3.47)$$

Como

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \varepsilon\Lambda + \frac{X_1^2 - X_2^2}{X^4} & \frac{2X_1 X_2}{X^4} \\ \frac{2X_1 X_2}{X^4} & \varepsilon - \frac{X_1^2 - X_2^2}{X^4} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

entonces

$$A_i = \frac{1}{|1 - \kappa + \gamma|} \frac{(X_1^2 + X_2^2)^2}{\left| \Lambda(X_1^2 + X_2^2)^2 + \varepsilon(1 - \Lambda)(X_1^2 - X_2^2) - 1 \right|}. \quad (3.49)$$

La amplificación total para una fuente puntual es entonces

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (3.50)$$

donde n es el número de imágenes y A_i se obtienen reemplazando las soluciones de la Ec. (3.42) (dadas por la Ec. (3.46)) en la Ec. (3.49).

Para la lente de Chang-Refdal las curvas críticas, donde el determinante de la matriz Jacobiana es cero, son óvalos de Cassini dados por

$$\Lambda (X_1^2 + X_2^2)^2 + \varepsilon (1 - \Lambda) (X_1^2 - X_2^2) - 1 = 0. \quad (3.51)$$

Para obtener las cáusticas hay que proyectar, usando la ecuación de la lente, las curvas críticas sobre el plano de la fuente.

Cuando no hay *shear* ($\gamma = 0$), entonces $\Lambda = 1$, y la geometría de la lente tiene simetría axial, de manera que se puede usar la ecuación unidimensional para la lente:

$$Y = \varepsilon X - \frac{1}{X}, \quad (3.52)$$

la cual tiene como soluciones

$$X_{\pm} = \frac{\varepsilon Y}{2} \pm \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \varepsilon}, \quad (3.53)$$

para $Y^2 > -4\varepsilon$. Así para $\varepsilon = 1$ se obtienen siempre dos soluciones, y cuando $\varepsilon = -1$ hay dos soluciones para $|Y| > 2$ y ninguna para $|Y| < 2$.

La amplificación de cualquier imagen es

$$A_{\pm} = \frac{1}{|1 - \kappa|} \frac{X_{\pm}^4}{|X_{\pm}^4 - 1|}, \quad (3.54)$$

y la amplificación total es entonces:

$$A = A_+ + A_-, \quad (3.55)$$

reemplazando la Ec. (3.54) en la Ec. (3.55) y usando la Ec. (3.53), con un poco de álgebra se tiene que

$$A = \frac{1}{|1 - \kappa|} \frac{Y^2 + 2\varepsilon}{|Y| \sqrt{Y^2 + 4\varepsilon}}. \quad (3.56)$$

En este caso, la curva crítica está en $X = 1$, la cual da una cáustica degenerada en $Y = 0$ para $\varepsilon = 1$ y una cáustica circular de radio $Y = 2$ para $\varepsilon = -1$.

3.7 Profundidad óptica

La probabilidad de observar un evento de *microlensing* se expresa usualmente en términos de la profundidad óptica, que es la probabilidad que, en un cierto instante de tiempo, una fuente dada esté dentro del radio de Einstein angular (θ_E) de alguna lente. Esta probabilidad se puede calcular haciendo el cociente entre el ángulo sólido cubierto por los círculos de Einstein de las lentes, dividido por el ángulo sólido observado. La profundidad óptica es entonces la integral sobre la densidad

numérica de lentes $n(D_{ol})$, por el área encerrada por el anillo de Einstein de cada lente, es decir

$$\tau = \frac{1}{\delta\omega} \int dV n(D_{ol}) \pi \theta_E^2, \quad (3.57)$$

donde $dV = \delta\omega D_{ol}^2 dD_{ol}$ es el volumen de una cáscara esférica infinitesimal con radio D_{ol} que subtiende un ángulo sólido $\delta\omega$. Llamando $\rho(D_{ol})$ a la densidad (de masa) de los deflectores, se tiene que

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_{os}} \rho(D_{ol}) \frac{D_{ol} D_{ls}}{D_{os}} dD_{ol}. \quad (3.58)$$

La escala temporal típica para un evento de *microlensing* es el tiempo de Einstein, que es el tiempo que tarda una lente que se mueve con velocidad transversal v en atravesar el radio de Einstein R_E :

$$t_E = \frac{R_E}{v}. \quad (3.59)$$

El número de eventos de *microlensing* esperados en un intervalo de tiempo Δt , si todos los eventos tienen las mismas escalas temporales será luego

$$N = \frac{2}{\pi} n \tau \frac{\Delta t}{t_E}, \quad (3.60)$$

donde n es la densidad numérica de lentes y τ la profundidad óptica.

3.8 Eventos de tránsito con fuente extendida

Cuando la fuente es extendida, debemos tomar en cuenta las contribuciones provenientes de las diferentes partes de la misma. La amplificación total observada, resulta entonces de integrar sobre toda la superficie de la fuente:

$$A = \frac{\int \int \mathcal{I}(\mathbf{r}) A_p(\mathbf{r}) dS}{\int \int \mathcal{I}(\mathbf{r}) dS}, \quad (3.61)$$

donde $\mathcal{I}(\mathbf{r})$ es la distribución de intensidad superficial de la fuente y $A_p(\mathbf{r})$ es el valor de la amplificación correspondiente a cada punto de la misma. Para una fuente circular:

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_S} \mathcal{I}(r, \varphi) A_p(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_S} \mathcal{I}(r, \varphi) r dr d\varphi}, \quad (3.62)$$

donde (r, φ) son coordenadas polares en un sistema de referencia centrado en la fuente (por ejemplo una estrella) y r_S es el radio de la fuente.

Es conveniente expresar las longitudes en unidades del radio de Einstein (R_E), modo que la amplificación queda

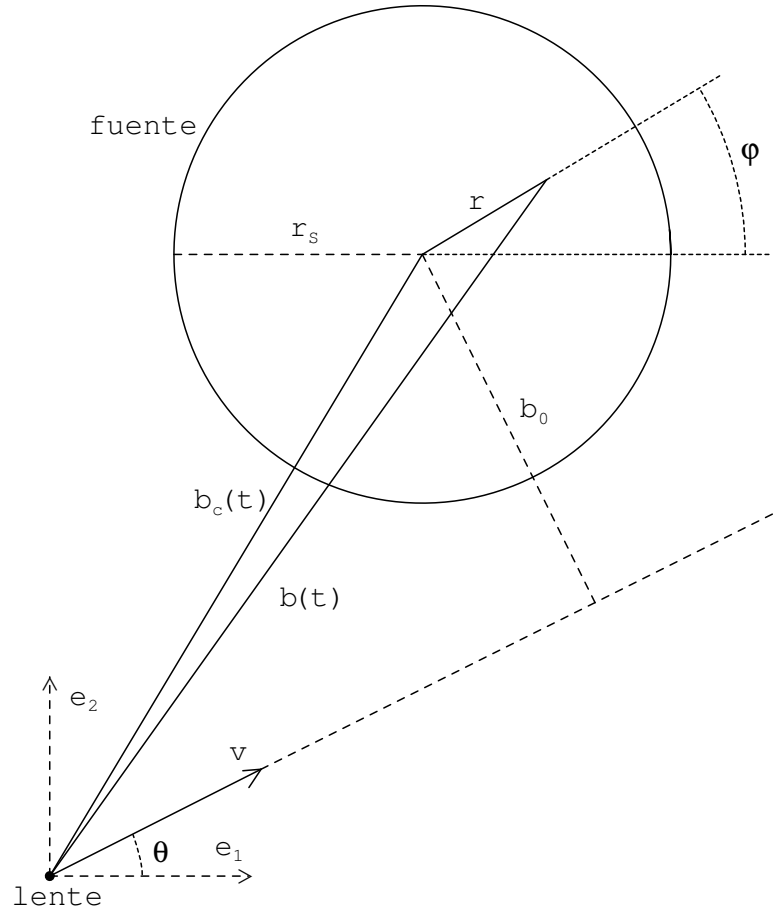


Figura 3.2: Consideraciones geométricas para obtener la evolución de la separación lente-fuente. La fuente está proyectada sobre el plano de la lente y cada punto sobre la superficie de la misma es considerado para calcular los efectos de *microlensing*.

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_S} \mathcal{I}(R, \varphi) A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_S} \mathcal{I}(R, \varphi) R dR d\varphi}, \quad (3.63)$$

con $R = r/R_E$ y $R_S = r_s/R_E$.

Si la intensidad superficial no depende de φ

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_S} \mathcal{I}(R) A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{2\pi \int_0^{R_S} \mathcal{I}(R) R dR}. \quad (3.64)$$

Una de las consecuencias más importantes de la amplificación gravitacional es su capacidad de causar cambios aparentes en el brillo de una fuente, debidos al cambio

en la posición relativa de la misma con respecto a la lente, a causa del movimiento transversal. La amplificación resultante para este evento de tránsito, será una función del tiempo y dependerá de la masa de la lente, la velocidad transversal, las distancias de la fuente y de la lente al observador y del tamaño y forma de la fuente. Los gráficos de la amplificación en función del tiempo en un evento de tránsito se denominan curvas de luz.

En la Fig. 3.2 se muestra esquemáticamente un evento de tránsito con una fuente extendida circular. La micro-lente se mueve con velocidad transversal constante $\mathbf{v}$. Por lo general, la amplificación A_p se puede escribir en función de la separación $\mathbf{b}(t)$ entre la lente y cada punto de la fuente, en el plano de la lente. Dicha separación evolucionará en el tiempo como:

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_c(t) + \mathbf{r}, \quad (3.65)$$

donde $\mathbf{b}_c(t)$ es la posición del centro de la lente en el instante t y $\mathbf{r}$ es la posición de cualquier punto de la fuente respecto al centro de la misma. Como

$$\mathbf{b}_c(t) = \mathbf{b}_0 - \mathbf{v}t, \quad (3.66)$$

donde $\mathbf{b}_0$ es la posición del centro de la lente en el instante de máxima aproximación entre la lente y la fuente, elegido como $t = 0$. Luego se tiene que

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0 - \mathbf{v}t + \mathbf{r}, \quad (3.67)$$

que en componentes queda

$$b_1(t) = -b_0 \sin \theta - vt \cos \theta + r \cos \varphi, \quad (3.68)$$

$$b_2(t) = b_0 \cos \theta - vt \sin \theta + r \sin \varphi, \quad (3.69)$$

donde $0 \leq r \leq r_S$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $v = |\mathbf{v}|$ y $b_0 = |\mathbf{b}_0|$ es la mínima distancia entre la lente y el centro de la fuente, correspondiente a $t = 0$. Entonces

$$b(t) = |\mathbf{b}(t)| = \sqrt{(-b_0 \sin \theta - vt \cos \theta + r \cos \varphi)^2 + (b_0 \cos \theta - vt \sin \theta + r \sin \varphi)^2}. \quad (3.70)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden adimensionalizar usando el radio de Einstein R_E para las longitudes y el tiempo de Einstein $t_E = R_E/v$, que es el tiempo que tarda la lente en atravesar el radio de Einstein, para los tiempos, de modo que:

$$B_1(T) = -B_0 \sin \theta - T \cos \theta + R \cos \varphi, \quad (3.71)$$

$$B_2(T) = B_0 \cos \theta - T \sin \theta + R \sin \varphi, \quad (3.72)$$

$$B(T) = \sqrt{(-B_0 \sin \theta - T \cos \theta + R \cos \varphi)^2 + (B_0 \cos \theta - T \sin \theta + R \sin \varphi)^2}, \quad (3.73)$$

donde $B_{0,1,2} = b_{0,1,2}/R_E$, $R = r/R_E$ y $T = t/t_E$.

Cuando la simetría del problema lo permite, por ejemplo en el caso de la lente puntual, se puede tomar $\theta = 0$ sin pérdida de generalidad, de modo que

$$B_1(T) = -T + R \cos \varphi, \quad (3.74)$$

$$B_2(T) = B_0 + R \sin \varphi, \quad (3.75)$$

$$B(T) = \sqrt{(-T + R \cos \varphi)^2 + (B_0 + R \sin \varphi)^2}. \quad (3.76)$$

Reemplazando B por $B(T)$ en la expresión de la amplificación, se obtiene la amplificación dependiente del tiempo.

Capítulo 4

Lensing gravitacional y fuentes de rayos gama no identificadas

En este Capítulo se propone que algunas de las fuentes de rayos gama no identificadas EGRET¹ puedan ser el resultado de la amplificación gravitacional de las regiones interiores de núcleos galácticos activos débiles y distantes. Estos objetos tienen regiones emisoras de rayos gama lo suficientemente pequeñas como para ser afectadas por el *microlensing* de estrellas que se encuentren en galaxias interpuestas. Se calcula la amplificación gravitacional teniendo en cuenta los efectos de la galaxia que contiene a la lente y se muestra que, mientras las regiones de rayos gama más interiores pueden ser magnificadas hasta mil veces, no hay amplificación en las frecuencias de radio, llevando a la ausencia observada de contrapartes fuertes. Se predicen también algunos nuevos efectos en la evolución espectral en gama de los núcleos galácticos activos que sufren *microlensing*. Dentro de un rango razonable de los parámetros de *lensing*, y/o tipos de fuentes, se pueden explicar las detecciones EGRET a altas latitudes, tanto las variables como las no variables, por medio del *microlensing*. El mismo fenómeno puede tener una importante incidencia en las futuras detecciones GLAST² a altas latitudes.

4.1 Introducción

El tercer catálogo EGRET de fuentes de rayos gama incluye observaciones realizadas entre el 22 de abril de 1991 y el 3 de octubre de 1995 y contiene una lista de 271 detecciones puntuales [67]. Alrededor de dos tercios de ellas no tienen contrapartes concluyentes a frecuencias más bajas, y son denominadas fuentes no identificadas.

Estas fuentes de rayos gama no identificadas pueden dividirse en dos grupos. El primero, a bajas latitudes, está relacionado probablemente con varias poblaciones

¹EGRET: *Energetic Gamma-Ray Experiment Telescope* (Telescopio de Rayos Gama Energéticos). Instrumento del satélite Compton, que funcionó entre los años 1991 y 2000.

²GLAST: *Gamma-ray Large Area Space Telescope* (Telescopio Espacial de Rayos Gama de Gran Área). Su lanzamiento está programado para el año 2006.

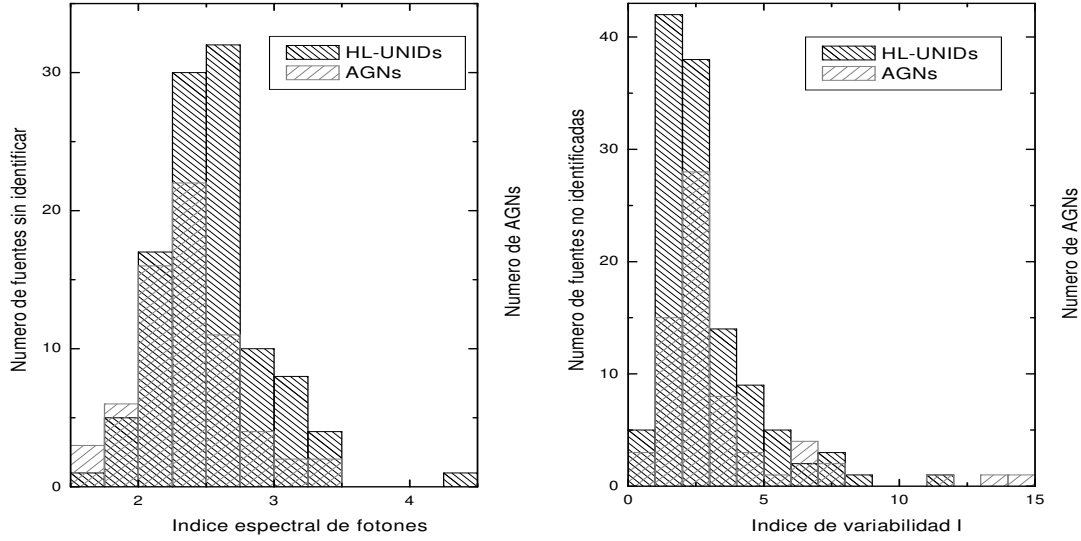


Figura 4.1: Izquierda: Distribución del índice espectral de fotones de todas las fuentes no identificadas con latitudes galácticas $|b| > 10$ grados (HL-UNIDs). Una aproximación Gaussiana daría una media igual a 2.6 y una desviación igual a 0.3. La mayoría de las fuentes tienen un espectro empinado, consistente con una población de núcleos galácticos activos (AGNs). Derecha: Histograma para el índice de variabilidad I de cada una de las fuentes no identificadas a altas latitudes ($I = 1$ es el valor medio de I para los pulsares). Una curva Gaussiana tendría en este caso una media $I = 2$, un valor 2σ sobre el valor esperado para una población no variable, y una desviación igual a 0.7. Más de la mitad de estas fuentes están clasificadas como probablemente variables. Tomando sólo aquellas fuentes que tienen $|b| > 40^\circ$, ambos valores medios son aún más altos. Ver Torres et al. [74, 75] para más detalles.

galácticas, como pulsares no observados en radio, remanentes de supernova interactuantes, estrellas de tipo temprano con fuertes vientos estelares, binarias de rayos X, etc. (ver [68] y referencias ahí citadas). El segundo grupo de fuentes no identificadas está formado por detecciones en latitudes medias y altas. Gehrels et al. [69] mostraron -en forma independiente del modelo que se adopte- que las fuentes a latitudes medias son diferentes de las poblaciones brillantes de fuentes no identificadas a lo largo del plano galáctico. Algunas de las detecciones a latitudes medias ($5^\circ < |b| < 30^\circ$) se piensa que están asociadas con el cinturón de Gould ([69], [70]), una región de formación estelar violenta ubicada a ~ 600 pc de la Tierra. Otras pocas fuentes, a latitudes más altas, pueden ser el resultado de electrones que son acelerados en las ondas de choque de cúmulos de galaxias en formación [71]. Sin embargo, para la mayoría de las fuentes no identificadas a altas latitudes, no parece haber otra explicación que sean núcleos galácticos activos no observados aún en

energías mas bajas [72].

Una población de núcleos galácticos activos formada por 66 miembros fue detectada por EGRET en rayos gama [67]. El espectro de los fotones y el índice de variabilidad de las fuentes no identificadas a altas latitudes ajustan bien con los de los núcleos galácticos activos en gama. En la Fig. 4.1, se muestran las distribuciones correspondientes, con el histograma de los núcleos galácticos activos adaptado de Torres et al. [74]. El criterio de variabilidad usado aquí es el esquema I , pero otros criterios de variabilidad llevan a resultados similares [75]. Los estudios de población ya remarcaron que parte de la muestra de las fuentes no identificadas a altas latitudes es consistente con una población isótropa, un hecho que sostiene un origen extragaláctico [77].

Todos los núcleos galácticos activos identificados en gama contienen también fuentes fuertes en radio con espectro plano, como se espera de fuentes en forma de chorro que emiten radiación sincrotón, donde el flujo gama es el resultado de la dispersión por efecto Compton inverso [78]. Se puede preguntar entonces, ¿por qué las fuentes no identificadas a altas latitudes no son detectadas a frecuencias más bajas, en particular en la banda de radio, si también son núcleos galácticos activos? Aquí se propone que algunas de estas fuentes son el resultado de la amplificación por *lensing* gravitacional de núcleos galácticos activos de fondo, muy corridos al rojo; blazares cuyas regiones emisoras de rayos gama son lo suficientemente pequeñas como para ser afectadas por *microlensing* de estrellas en galaxias interpuestas.

4.2 *Lensing* gravitacional de núcleos galácticos activos

Como los núcleos galácticos activos tienen regiones de emisión de diferente tamaño para diferentes longitudes de onda, se espera una amplificación diferencial de la luz. Las regiones más interiores de los núcleos galácticos activos, responsables de la emisión en gama, tienen tamaños lineales $x \sim 10^{14}$ – 10^{15} cm (ver Blandford y Levinson [76]). Para que exista *lensing* gravitacional significativo se requiere que $D_{ol}/D_{os} \times x/2 < R_E$, donde D_{ol} y D_{os} son las distancias diámetro-angulares entre la lente (L), o la fuente (S), y el observador (O), y R_E es el radio de Einstein de la lente. Para corrimientos al rojo típicos (es decir, $z \sim$ unas pocas décimas para la lente, y $z \sim 0.8 - 3$ para la fuente), en un modelo cosmológico estándar, se obtiene que las estrellas de unas pocas masas solares tienen radios de Einstein ~ 500 veces más grandes que las proyecciones de las regiones emisoras de rayos gama de los núcleos galácticos activos, de modo que estas últimas pueden ser perfectamente amplificadas. Al mismo tiempo, como la emisión en radio se origina lejos del chorro, los tamaños correspondientes a las regiones de radio ($x > 10^{17}$ cm) exceden el radio de Einstein de las lentes y llevan a la ausencia de contrapartes en radio. En el caso de la emisión óptica, si es la misma población de partículas la que da lugar -en la misma región- a los rayos gama (a través de la dispersión por efecto Compton inverso) y emisión óptica (por medio de radiación sincrotón), entonces se puede esperar

amplificación gravitacional en el óptico. En algunos casos con alta profundidad óptica (de *lensing*), se puede esperar variaciones de intensidad simultáneas en ambas bandas, algo que podría ser en principio verificado con las mejores capacidades y la precisión en la localización de fuentes del satélite GLAST a lanzarse en los próximos años. El monitoreo óptico de fuentes de tipo estelar dentro de las cajas de error de GLAST podría llevar a la identificación de nuevos blazares de rayos gama, y a algún conocimiento de su distribución de corrimiento al rojo. Un hecho interesante es que la evolución espectral que se predice en este Capítulo sólo sucederá en la banda de rayos gama, pues esto depende críticamente en el tamaño de las esferas de rayos gama (dado por la opacidad a la producción de pares), un proceso que no sucede en la banda óptica. La idea que algunas propiedades extremas de los núcleos galácticos activos lejanos puede ser el resultado de *microlensing* gravitacional no es nueva [79, 80, 81]. Sin embargo, los efectos de *microlensing* sobre la emisión de rayos gama no se han discutido en detalle todavía.

Se asume usualmente que la probabilidad a priori de encontrar un pequeño grupo de objetos distantes amplificados gravitatoriamente está por debajo del 1%. En realidad, resultados recientes [82], que tienen en cuenta el agrupamiento de lentes en galaxias interpuestas, dan valores entre $10^{-2} - 10^{-3}$ para la probabilidad a priori de encontrar fuentes gravitatoriamente amplificadas en direcciones del cielo tomadas al azar. Además, para aquellas direcciones donde hay *lensing* gravitacional, la probabilidad de que suceda con profundidad óptica mayor a 0.2 es muy alta. En el caso que se estudia en este Capítulo, el número de fuentes compactas potenciales que emiten rayos gama es extremadamente grande: sólo en la última versión del Catálogo de Véron-Cetty & Véron's (2001) [83]—el cual es todavía muy incompleto para altos corrimientos al rojo— contiene más de 10^3 blazares identificados, más de 10^4 quasares y otros núcleos galácticos activos menos energéticos. Se espera que la sensibilidad mejorada de la misión GLAST descubra más de 10^4 núcleos galácticos activos emisores de rayos de rayos gama [73]. Si el número real de núcleos galácticos activos emisores de rayos de rayos gama por debajo del límite de detección EGRET es alrededor de 10^7 (lo cual puede ser una hipótesis conservadora: aproximadamente 1 blazar en gama por 10^4 galaxias), podrían producir fuentes a altas latitudes que carezcan de contrapartes claras a bajas frecuencias. Aún cuando se consideren probabilidades reducidas para *microlensing* con grandes amplificaciones (i.e. $\sim \tau/A^2$, donde τ es la profundidad óptica local y A la amplificación), todavía se encuentra que un puñado de las fuentes detectadas a altas latitudes ya observadas por EGRET, y quizás algunos cientos de las fuentes a ser observadas por GLAST, pueden ser el resultado de *microlensing*. Por ejemplo, considerando una probabilidad de *lensing* al azar de 5×10^{-3} , y un valor local de τ de $\mathcal{O}(1)$ (valores más grandes aún son posibles por la presencia de componentes superlumínicas en los blazares—ver más adelante en este Capítulo) y amplificaciones de ~ 100 , se pueden producir por *lensing* ~ 5 fuentes a altas latitudes (ver más adelante) sin contrapartes a energías más bajas. Por supuesto, si un gran número de blazares distantes están, por decir, un orden de magnitud por debajo de la sensibilidad de GLAST, de modo que no necesitan enormes amplificaciones para ser detectados, el número de casos de *microlensing* po-

dría incrementarse mucho. Suponiendo un factor de amplificación de 10, el número de casos podría incrementarse a varios cientos en la muestra más grande que vendrá de la futura misión GLAST.

4.3 Curvas de luz y espectros

En esta Sección se considera un blazar emisor de rayos gama lejano y débil cuyo flujo está por debajo del límite de sensibilidad de EGRET y cuyo flujo en radio es del orden de mJy, también por debajo de la sensibilidad de las *all-sky surveys*³ típicas. Se supondrá que hay una galaxia interpuesta en la línea visual. Para la lente se usará el modelo de Chang-Refdal explicado en el Capítulo 3.

El radio de las regiones internas de los núcleos galácticos activos dependen de la energía como una ley de potencias, $r_\gamma \propto E^p$ con $p \in [1, 2]$ [76]. Luego las gama-esferas más grandes serán las que corresponden a los fotones de mayor energía. Esta dependencia del tamaño de la fuente con la energía llevará naturalmente a efectos de cromaticidad durante los eventos de *microlensing*. Se puede definir una fuente de referencia de radio r_{ref} y energía en rayos gama E_{ref} , de manera tal que

$$R_\gamma(E) = R_{\text{ref}} \left(\frac{E}{E_{\text{ref}}} \right)^p, \quad (4.1)$$

donde $R_\gamma(E) = r_\gamma(E)/R_E$ y $R_{\text{ref}} = r_{\text{ref}}/R_E$ son los radios adimensionalizados usando el radio de Einstein de la micro-lente. Se asume también que la intensidad intrínseca de la fuente es uniforme, y que su espectro sigue aproximadamente una ley de potencias:

$$I_0(E) = I_{\text{ref}} \left(\frac{E}{E_{\text{ref}}} \right)^{-\xi} \quad (4.2)$$

con $\xi \in (1.7, 2.7)$ [11], donde I_{ref} es la intensidad de la fuente tomada como referencia. La distribución de intensidad superficial de la fuente será entonces

$$\mathcal{I}_0(E) = \frac{I_0(E)}{\pi R_\gamma(E)^2}, \quad (4.3)$$

luego usando la Ec. (3.64), la amplificación podrá ser calculada por

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_\gamma(E)} A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{\pi (R_\gamma(E))^2}. \quad (4.4)$$

donde $(R, \varphi) = (r/R_E, \varphi)$ son coordenadas polares en un sistema de referencia ubicado en el centro de la fuente y $A_p(R, \varphi)$ es la amplificación total (suma de todas las imágenes) correspondiente a cada punto de la fuente.

Para hallar las curvas de luz se considera un evento de tránsito como el que se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.2. Se supone que la micro-lente se mueve

³del inglés: muestras de todo el cielo

con velocidad transversal constante $\mathbf{v}$ y se elige como el origen de tiempo ($t = 0$) el instante en que la fuente y la micro-lente se encuentran a la menor distancia. La distancia mínima entre la micro-lente y el centro de la fuente es b_0 , y θ es el ángulo entre la velocidad $\mathbf{v}$ y el eje $\mathbf{e}_1$ de la macro-lente. Se reemplazan las Ecs. (3.68) y (3.69) en la Ec. (3.41) y se sigue el procedimiento indicado en la Sección 3.6 para obtener la amplificación correspondiente a cada punto de la fuente, $A_p(R, \varphi, T)$, donde $T = t/t_E$ es el tiempo en unidades del tiempo de Einstein, $t_E = R_E/v$. Luego se reemplaza $A_p(R, \varphi, T)$ en la Ec. (4.4) y se integra para obtener la amplificación total en función del tiempo, $A(T)$.

Usando que $A = I/I_0$, se puede definir $J \equiv I/I_{\text{ref}} = A(E/E_{\text{ref}})^{-\xi}$, la intensidad en unidades de I_{ref} . Se adoptará también $p = 1.1$, $\xi = 2$, y una fuente de referencia con radio adimensional $R_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-3}$ y energía en rayos gama $E_{\text{ref}} = 0.1$ GeV [76].

Para calcular los parámetros de la macro-lente κ y γ se usará, siguiendo a Romero et al. [81]

$$\kappa = \frac{\Sigma_c}{\Sigma_{\text{crit}}} \frac{a_g}{\sqrt{a_g^2 + d^2}} \quad (4.5)$$

$$\gamma = \frac{\Sigma_c}{\Sigma_{\text{crit}}} \left(\frac{a_g}{\sqrt{a_g^2 + d^2}} - \frac{2a_g \sqrt{a_g^2 + d^2}}{d^2} + \frac{2a_g^2}{d^2} \right) \quad (4.6)$$

donde Σ_c es la densidad en el centro de la galaxia, a_g es el radio del núcleo de la galaxia, d es la distancia de la micro-lente al centro de la galaxia y Σ_{crit} es la densidad crítica, definida por $\Sigma_{\text{crit}} \equiv c^2 D_s / 4\pi G D_l D_{ls}$.

Llamando $p = \Sigma_c / \Sigma_{\text{crit}}$ y $\chi = d/a_g$ se tiene que

$$\kappa = p \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2}} \quad (4.7)$$

$$\gamma = p \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2}} - \frac{2\sqrt{1 + \chi^2}}{\chi^2} + \frac{2}{\chi^2} \right) \quad (4.8)$$

Si $\chi \ll 1$, γ puede ser aproximada por

$$\gamma = p \frac{\chi^2}{4} \left(\frac{3}{2} \chi^2 - 1 \right) \quad (4.9)$$

Si la micro-lente está ubicada a una distancia del centro de la galaxia mucho menor que el radio del núcleo, $d \ll a_g$, entonces $\chi \approx 0$ y

$$\gamma = 0, \kappa = p$$

Para esta tesis se adoptará

$$\gamma = 0, \kappa = 0$$

$$\gamma = 0, \kappa = 0.4$$

$$\gamma = 0, \kappa = 0.8$$

Para estudiar otras situaciones donde γ no es cero se usará

$$p = 2, \chi = 10 \Rightarrow \kappa = 0.20, \gamma = -0.16$$

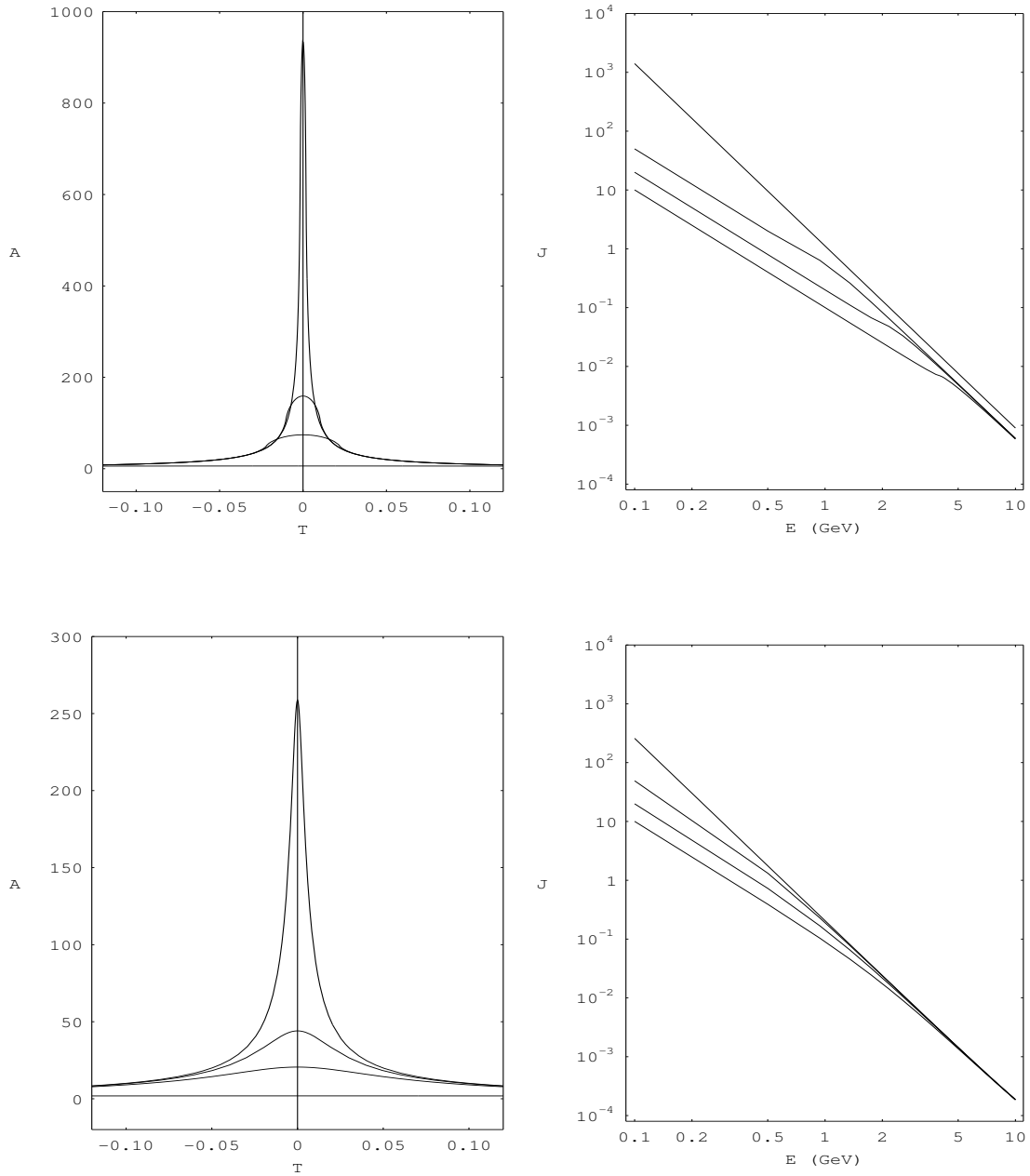


Figura 4.2: Resultados del *lensing* para un parámetro de impacto adimensional $u = B_0/R_s = b_0/r_s = 0.5$ (panel superior) y 2 (panel inferior). Notar la característica específica (un *break* cambiante en la ley de potencias del espectro) en la evolución espectral. En los paneles de la izquierda se muestran las curvas de luz, de arriba hacia abajo $E = 0.1$ GeV, 0.5 GeV, 1 GeV, 10 GeV. En los de la derecha, la evolución espectral, de arriba hacia abajo $T = vt/R_E = 0, 0.02, 0.05$, y 0.10. Los parámetros de *lensing* son $\kappa = 0$, $\gamma = 0$.

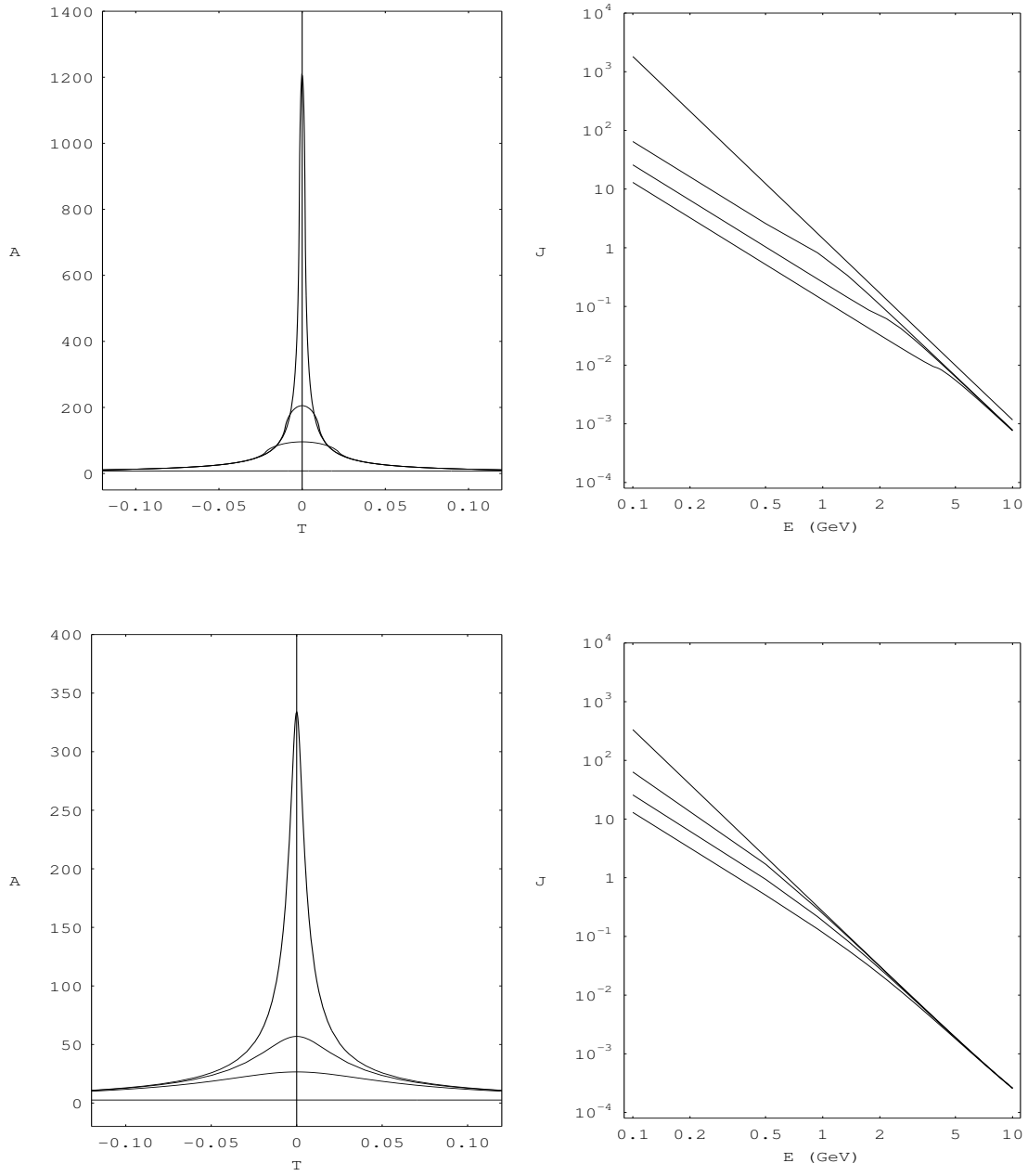


Figura 4.3: Igual que la Fig. 4.2, con $\kappa = 0.4$ y $\gamma = 0$.

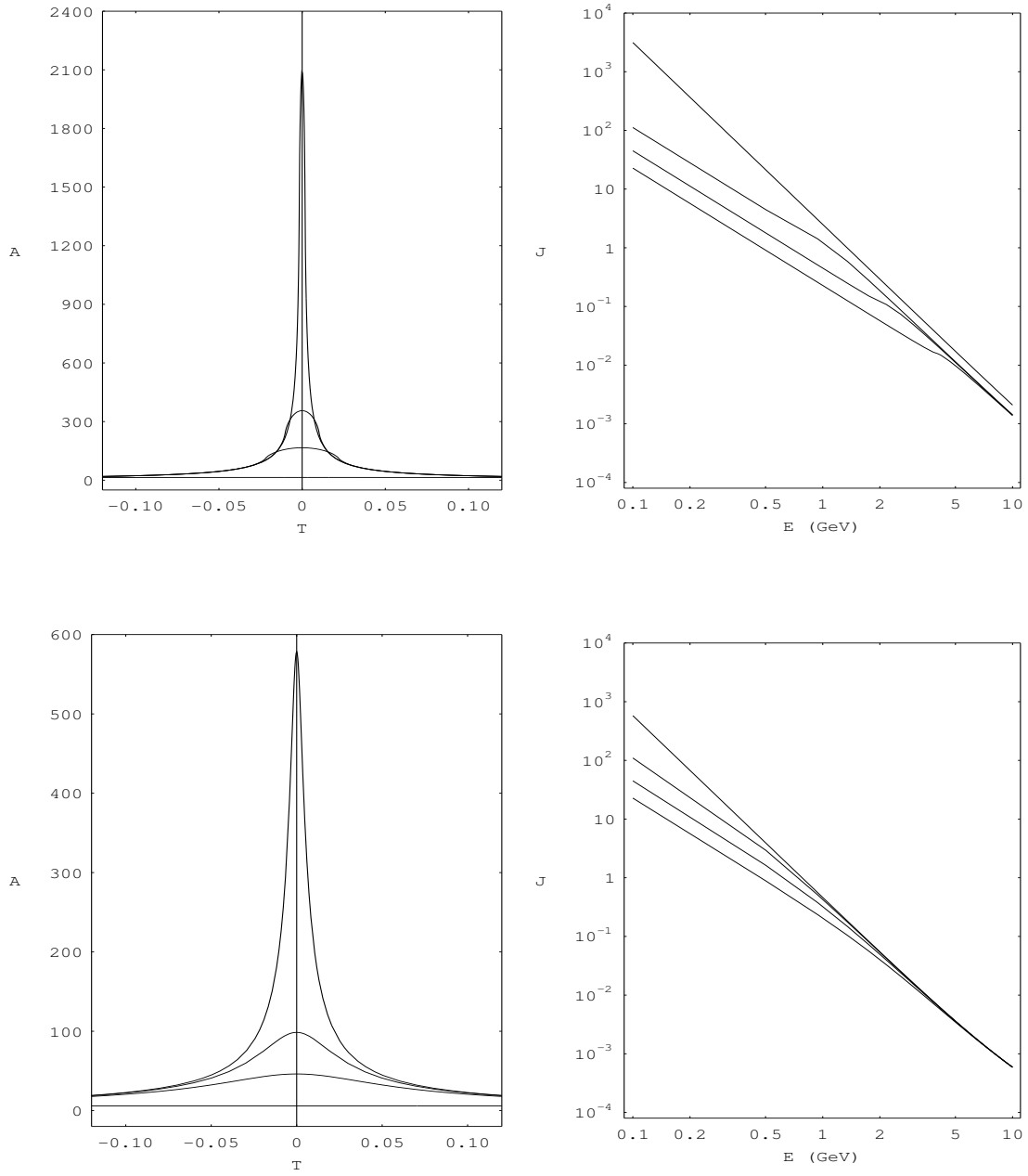


Figura 4.4: Igual que la Fig. 4.2, con $\kappa = 0.8$ y $\gamma = 0$.

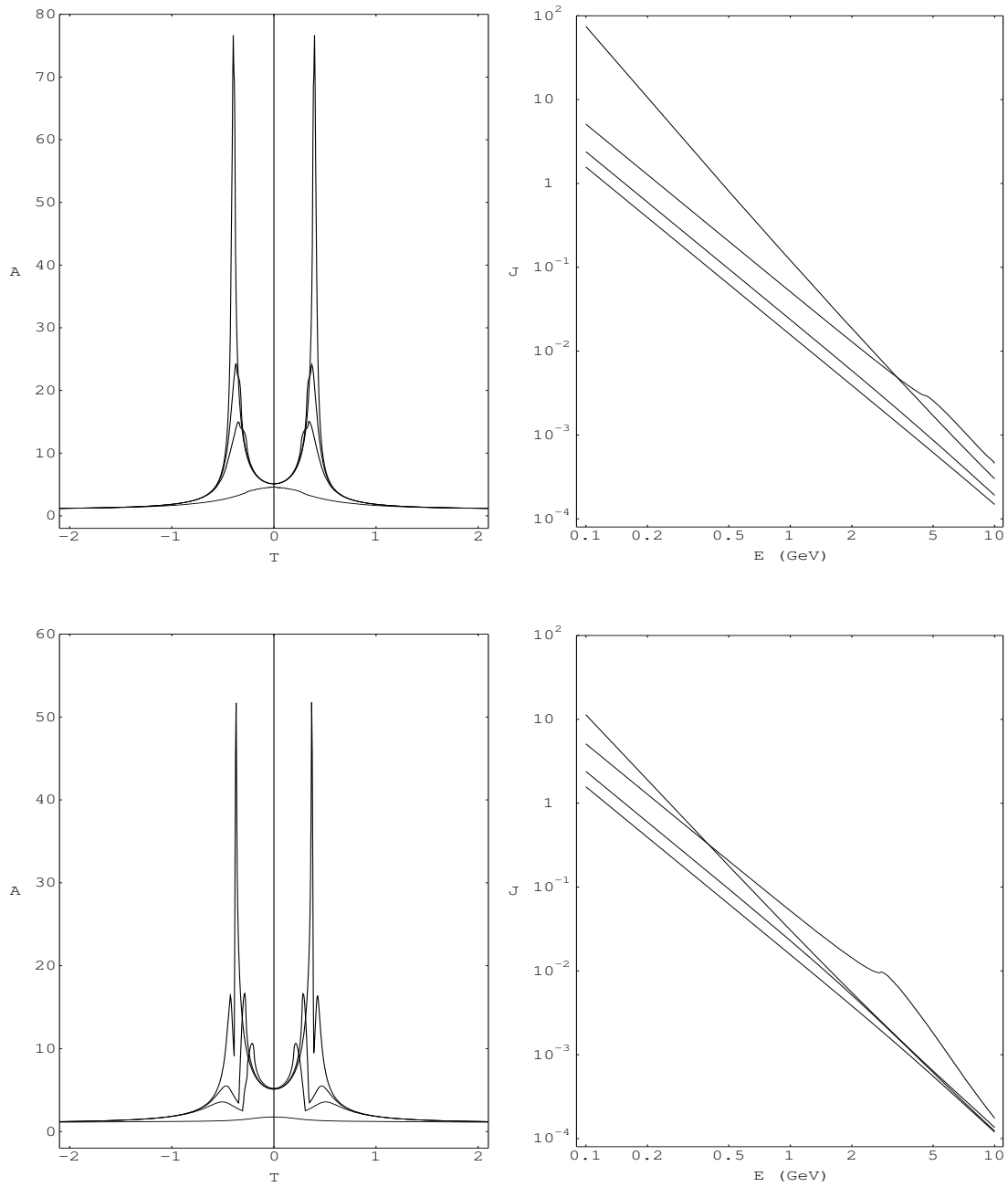


Figura 4.5: Resultados del *lensing* para un parámetro de impacto adimensional $u = B_0/R_s = b_0/r_s = 0.5$ (panel superior) y 2 (panel inferior). Izquierda: curvas de luz, de arriba hacia abajo $E=0.1$ GeV, 0.5 GeV, 1 GeV, 10 GeV. Derecha: espectros, de arriba hacia abajo $T=0.4$, 0, 0.8 y 1.2. Los parámetros de *lensing* son $\kappa = 0.20$, $\gamma = -0.16$ y $\theta = 0^\circ$.

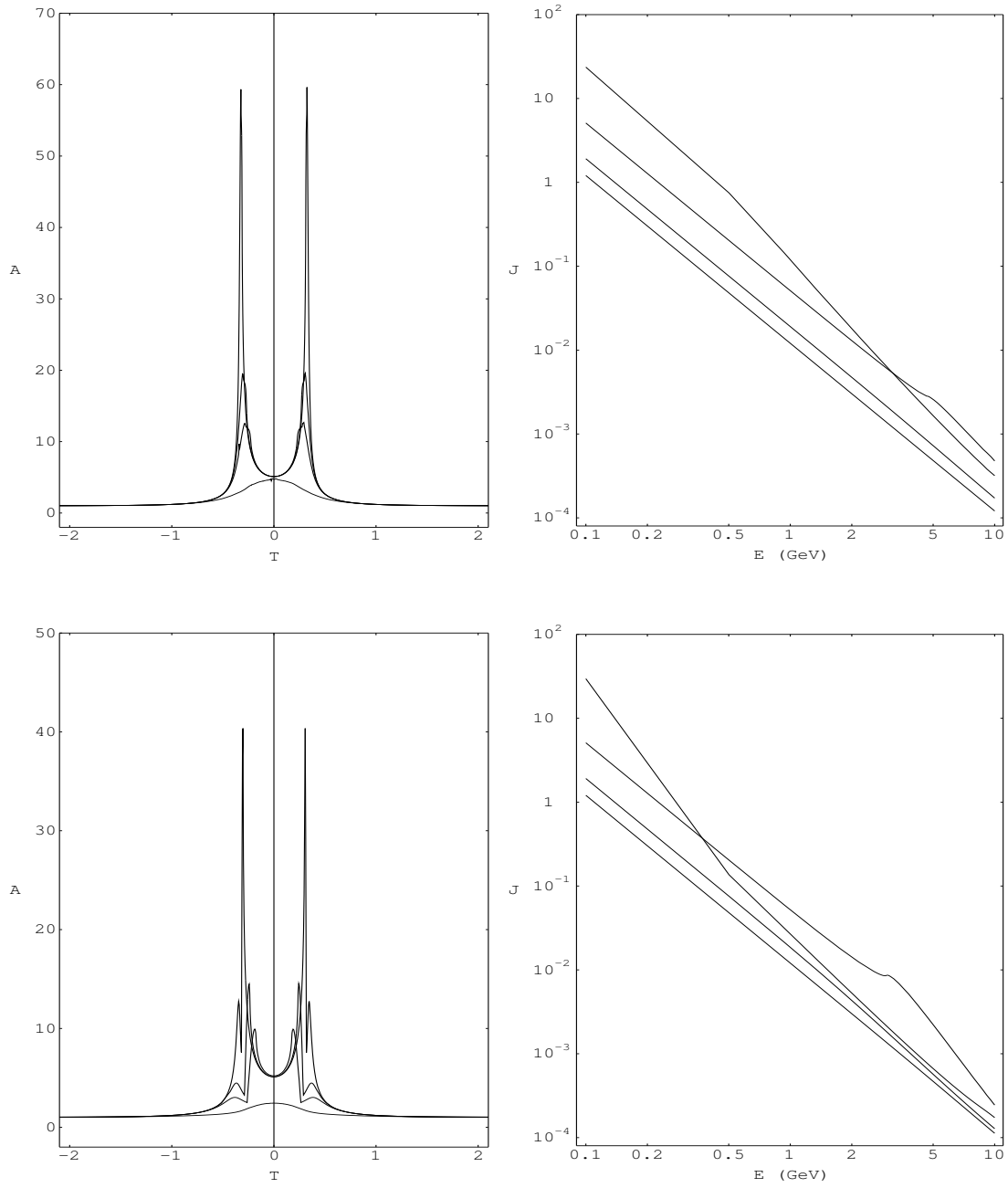


Figura 4.6: Igual que la Fig. 4.5, con $\theta = 90^\circ$.

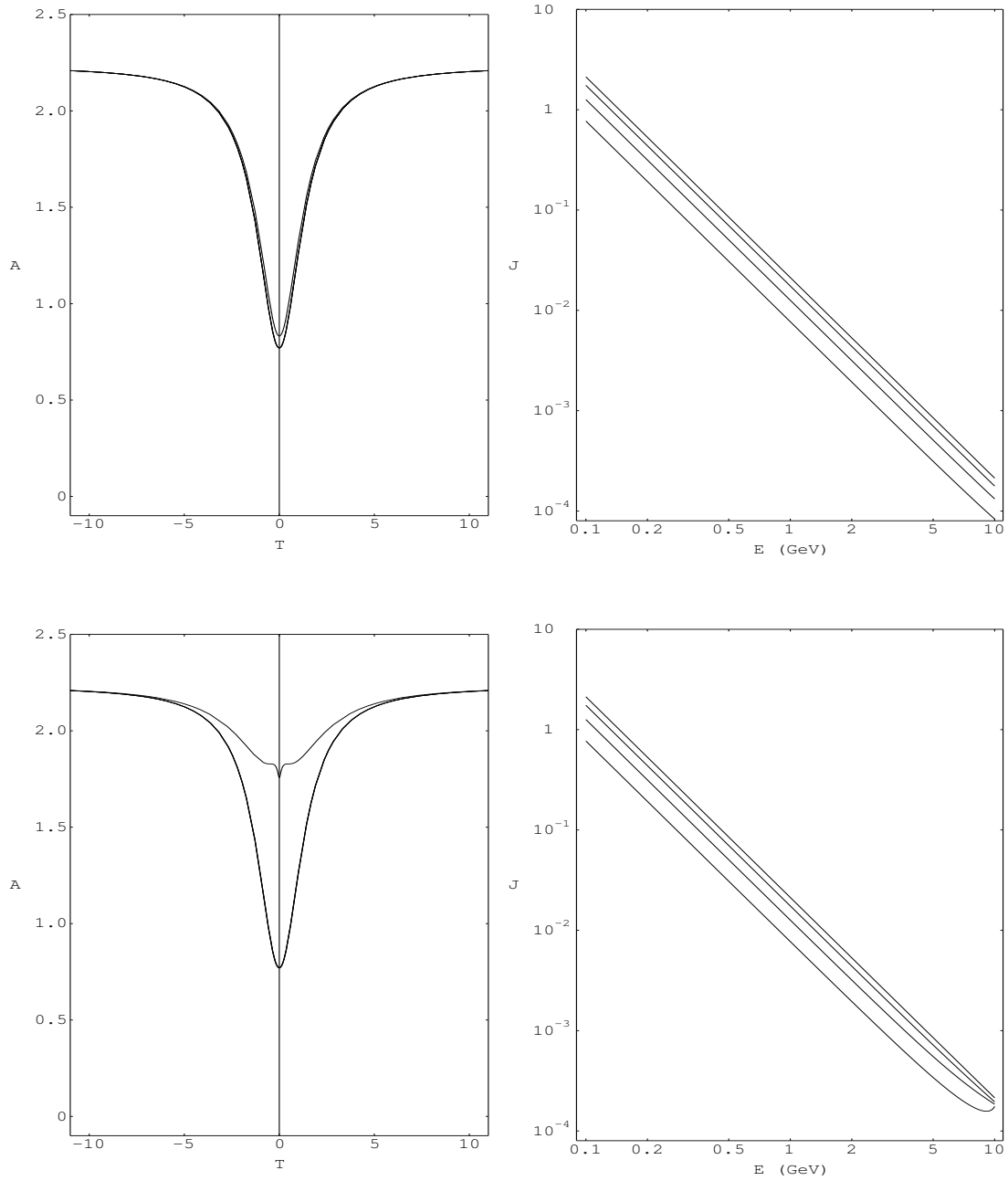


Figura 4.7: Resultados del *lensing* para un parámetro de impacto adimensional $u = B_0/R_s = b_0/r_s = 0.5$ (panel superior) y 2 (panel inferior). Izquierda: curvas de luz, de arriba hacia abajo $E=0.1$ GeV, 0.5 GeV, 1 GeV, 10 GeV (las tres últimas en la misma curva). Derecha: espectros, de arriba hacia abajo $T=1, 1.3, 0.7$ y 0. Los parámetros de *lensing* son $\kappa = 0.89$, $\gamma = -0.34$ y $\theta = 0^\circ$.

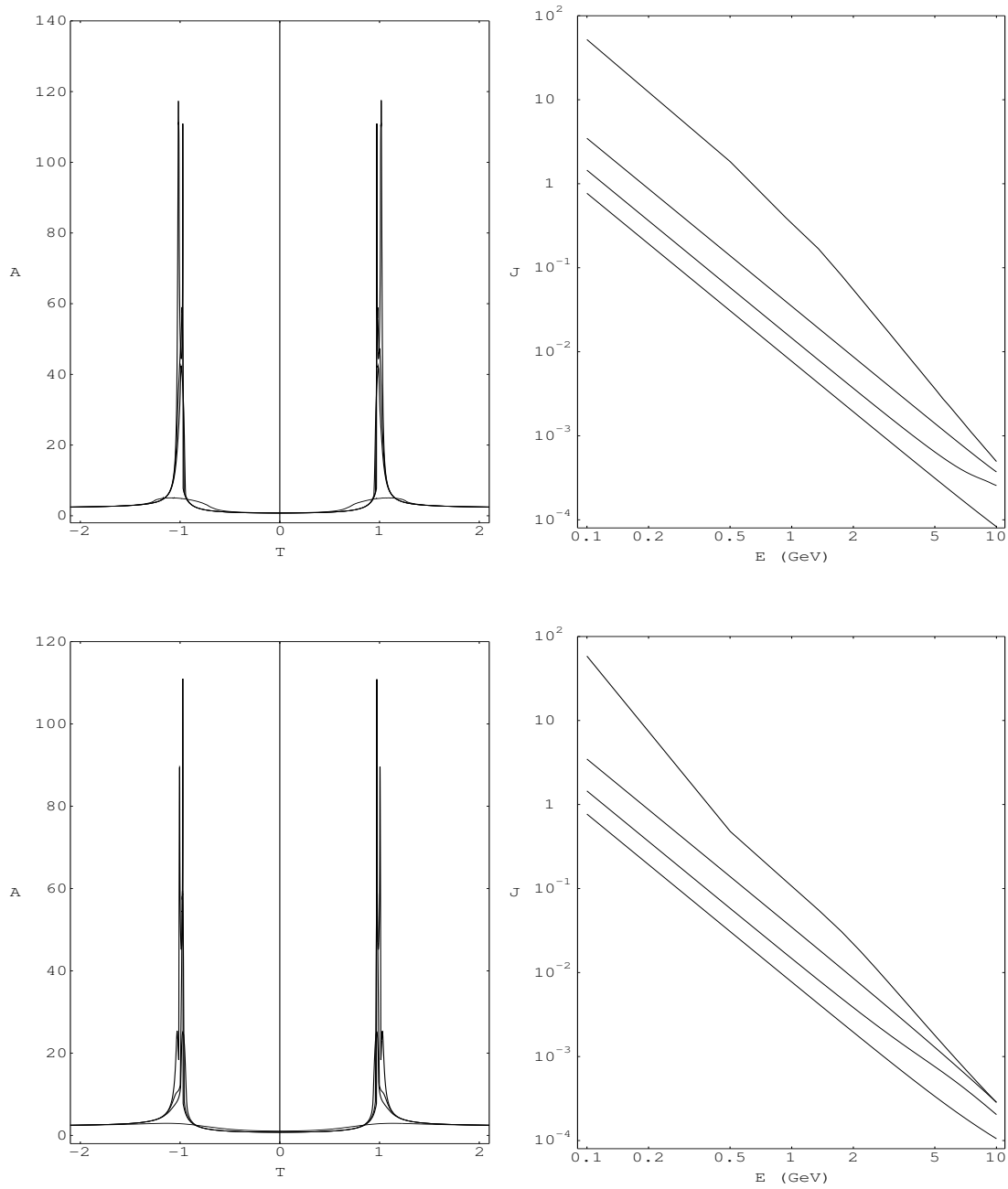


Figura 4.8: Resultados del *lensing* para un parámetro de impacto adimensional $u = B_0/R_s = b_0/r_s = 0.5$ (panel superior) y 2 (panel inferior). Izquierda: curvas de luz, de arriba hacia abajo $E=0.1$ GeV, 0.5 GeV, 1 GeV, 10 GeV. Derecha: espectros, de arriba hacia abajo $T=5$, 2, 1 y 0. Los parámetros de *lensing* son $\kappa = 0.89$, $\gamma = -0.34$ y $\theta = 90^\circ$.

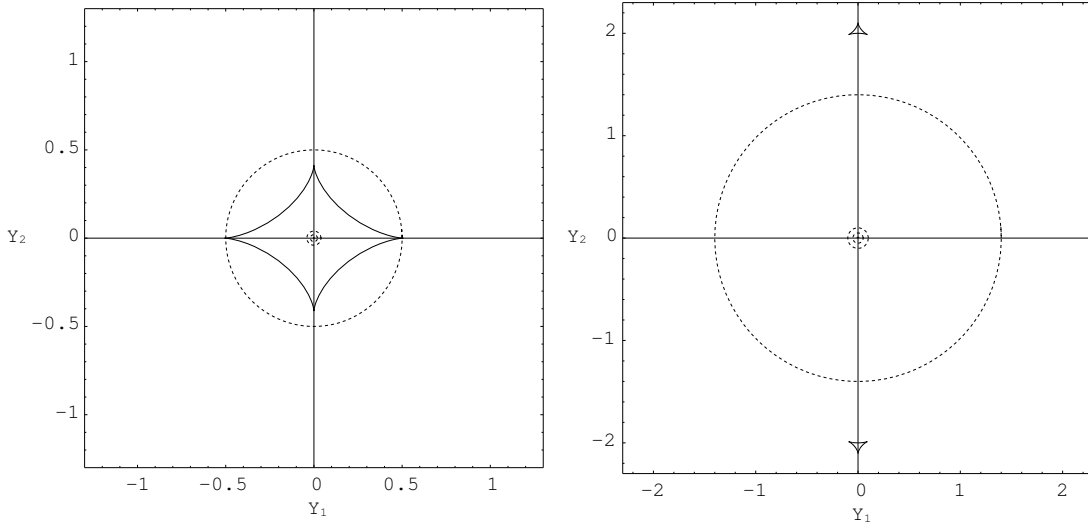


Figura 4.9: Izquierda: cáustica para $\kappa = 0.20$ y $\gamma = -0.16$ (curva con forma de diamante). Derecha: cáusticas para $\kappa = 0.89$ y $\gamma = -0.34$ (curvas con forma de triángulo). Las fuentes dentro de las cáusticas dan lugar a cuatro imágenes y aquellas fuera a dos imágenes. Para comparación, los círculos punteados representan las gama-esferas, la más grande corresponde a 10 GeV, luego 1 GeV, 0.5 GeV y 0.1 GeV.

$$p = 2, \chi = 2 \Rightarrow \kappa = 0.89, \gamma = -0.34$$

En las Figs. 4.2, 4.3 y 4.4, se muestran los resultados de los cálculos con $\gamma = 0$ para distintos valores de κ y parámetros de impacto $u = b_0/r_s = B_0/R_s$. La emisión gama del núcleo galáctico activo de fondo puede ser amplificada considerablemente. Esta amplificación puede hacer que una fuente que de otro modo no podría ser vista, exceda el límite de detección sólo si hay *lensing* gravitacional. Vale la pena señalar también que la gama-esfera correspondiente a 10 GeV, cuyo tamaño es similar a los de las regiones que emiten en el óptico de algunos núcleos galácticos activos típicos, sufre una amplificación despreciable, mientras que las curvas de menor energía –bien dentro del rango EGRET– todas muestran amplificaciones que superan el factor 100. Un requerimiento crítico para que un evento de *microlensing* ocurra es que el tamaño de la fuente proyectada en el plano de la lente no sea más grande que el anillo de Einstein de la lente. Solamente fuentes cuyo tamaño sea mucho menor que el radio de Einstein tendrán grandes amplificaciones. Como los núcleos galácticos activos tienen regiones de emisión de distintos tamaños para las diferentes longitudes de onda de la radiación emitida, se observará una amplificación diferencial, como se ve en las Figs. 4.2, 4.3 y 4.4. Las regiones más interiores de los núcleos galácticos activos tienen dimensiones de alrededor de $10^{14} - 10^{15}$ cm [76] y pueden ser amplificadas significativamente (ver próxima Sección). En cambio, para la emisión en radio, que se origina lejos del chorro, los tamaños de las regiones emisoras ($> 10^{17}$ cm) son

más grandes que el radio de Einstein de las lentes, resultando en la ausencia de contrapartes en radio.

De las figuras se ve también que la amplificación aumenta cuando aumenta la focalización κ y, como es de esperar, con la disminución del parámetro de impacto u .

Este fenómeno tiene también una signatura espectral particular, producida por la amplificación diferencial de las distintas regiones gama. Los espectros presentan un quiebre marcado en la pendiente a energías medias. Este quiebre (o *break*), previsto sólo para eventos de *mícro-lensing*, y su peculiar evolución temporal – se va corriendo hacia energías cada vez más altas a medida que va pasando el tiempo en el evento de tránsito– puede usarse como una prueba específica para diferenciar este de otros fenómenos (ver los paneles derechos de las Figs. 4.2-4.4).

Las Figs. 4.5-4.6, con $\kappa = 0.20$ y $\gamma = -0.16$, muestran un comportamiento diferente. En este caso la amplificación no es tan espectacular como cuando $\gamma = 0$. Se tienen amplificaciones más modestas, que no llegan a 100. Pero la nueva característica más notoria es que para las gama-esferas de menor energía (0.1 - 1 GeV) aparecen dos picos (en lugar de uno). ¿Por qué aparecen estos dos picos? Cuando $\gamma = 0$ las cáusticas degeneran en un punto. El pico resultante se produce cuando la cáustica pasa por encima o muy cerca de la fuente, debido al movimiento relativo entre la lente y la fuente. Cáusticas con curvas más complicadas pueden producir curvas de luz con picos múltiples. En la Fig. 4.9 (panel izquierdo) se muestra la cáustica correspondiente a las Figs. 4.5-4.6. También se muestran, para comparación, los tamaños de las gama-esferas para las diferentes energías. Al analizar la figura, se ve que la gama-esfera más grande, correspondiente a $E = 10 \text{ GeV}$ es más grande que la cáustica. Para esta gama-esfera aparece un sólo pico, debido a que cuando pasa por encima de la cáustica la cubre completamente. Para las gama-esferas más chicas esto no ocurre, y el movimiento relativo entre la fuente y la lente hace que haya dos cruces nítidos de la cáustica, resultando en dos picos diferentes en el perfil temporal.

Las Figs. 4.7-4.8 muestran las curvas de luz y los espectros para $\kappa = 0.89$ y $\gamma = -0.34$, y en la Fig. 4.9 (panel derecho) las cáusticas correspondientes. El cambio principal es que ahora las cáusticas son dos curvas cerradas disconexas muy pequeñas, y además ubicadas sobre el eje Y_2 . Cuando $\theta = 0^\circ$ no hay cruce de cáusticas, de modo que la amplificación es despreciable. En cambio cuando $\theta = 90^\circ$, hay cruce de cáusticas en dos tiempos muy diferentes, inclusive para las gama-esferas de mayor tamaño, observándose siempre dos picos dentro del rango estudiado, con amplificaciones de alrededor de 100 para las gama esferas más pequeñas.

4.4 Escala temporal y número de eventos

La escala temporal de variabilidad para un evento de *lensing* gravitacional es el tiempo de Einstein:

$$t_E = \frac{R_E}{v} = \frac{2\sqrt{GM}}{vc} \sqrt{\frac{D_{ls}D_{ol}}{D_{os}}}. \quad (4.10)$$

Como D_{ls} , D_{ol} y D_{os} en el caso de *lensing* de núcleos galácticos activos son distancias cosmológicas que no se miden en forma directa (sólo se observan los corrimientos al rojo de la fuente y de la lente), hay que introducir un modelo cosmológico para calcular estas distancias. Usando el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para el Universo (ver Apéndice B), la distancia propia entre dos objetos con corrimientos al rojo z_1 y z_2 es:

$$D = \int_{z_1}^{z_2} \frac{cdz}{H_0(1+z)^2 \sqrt{1 + \Omega_0 z}} \quad (4.11)$$

donde H_0 es la constante de Hubble, y Ω_0 es el cociente entre la densidad y la densidad crítica del Universo en el momento actual.

Por ejemplo: para $M_1 = 0.1M_\odot$, $H_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $z_s = 1$, $z_1 = 0.1$, $\Omega_0 = 0.2$, y $v = 5000 \text{ km s}^{-1}$, $t_E \sim 170$ días, mientras el semi-ancho de los picos que se muestran en la Fig. 4.2 es de alrededor de 9 días. Esto puede resultar en una fuente variable para períodos separados de visualización de EGRET (típicamente de ~ 15 días cada uno). Si, en cambio, $M_1 \sim 5M_\odot$ y $v \sim 1000 \text{ km s}^{-1}$, el semi-ancho de los picos es ~ 1000 días, y la fuente gama será vista muy probablemente como una detección no variable. Las velocidades elegidas son típicas para objetos extragalácticos. Para galaxias con corrimientos al rojo $z \sim 0.1$ o mayores, sus velocidades de recesión superan en mucho a las usadas arriba (por más de un orden de magnitud). Estas últimas son velocidades relativas, involucrando pequeñas componentes transversales de la velocidad de recesión y movimientos propios de la estrella dentro de la galaxia y de la misma galaxia (con respecto a su cúmulo). Un ejemplo desarrollado (para BL LAC 0846+51) puede encontrarse en Nottale [84], para el cual cita valores de velocidad en el rango $300 < v < 3000 \text{ km/s}$.

Se mencionó anteriormente que para que ocurra un evento de *microlensing*, se necesita que el tamaño lineal de la fuente, x , proyectado sobre el plano de la lente, sea menor que el radio de Einstein; luego

$$x < 2R_E \frac{D_{os}}{D_{ol}}. \quad (4.12)$$

Como para los valores típicos de corrimiento al rojo considerados antes

$$R_E = 2.23 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \text{ cm}, \quad (4.13)$$

y el valor menor de la región de emisión es de alrededor de $10^{14} - 10^{15}$ cm, se puede obtener la siguiente relación entre el tamaño de la fuente y la masa de la lente:

$$x < 6.37 \times 10^{17} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \text{ cm.} \quad (4.14)$$

Para una fuente con $x \approx 0.002 R_E$, es decir el radio de Einstein 500 veces más grande que el tamaño de la fuente, se necesitará entonces, $M/M_{\odot} \approx 5$, lo que hace que muchas de las estrellas de una galaxia puedan producir fuertes efectos de *lensing* gravitacional sobre las regiones mas interiores de núcleos galácticos activos.

Para una distribución de masa de las lentes dada por $N(M) \propto M^{-\alpha}$ para $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$ [87], el número de eventos de *microlensing* esperados, producidos por estrellas con masas en el rango (M_1, M_2) , incluido en el rango total de masa $(M_{\min}, M_{\max})$, durante Δt días de observación es [85]

$$N_{M_1-M_2}^{\Delta t} = 2.16 \sqrt{\kappa \tau} \frac{v}{c} \frac{D(\alpha, M_1, M_2)}{B(\alpha, M_{\min}, M_{\max})} \frac{\Delta t}{30 \text{ días}} \quad (4.15)$$

donde τ es la profundidad óptica y las funciones B y D son, respectivamente,

$$B(\alpha, M_{\min}, M_{\max}) = \begin{cases} \frac{\left[\left(\frac{M_{\max}}{M_{\odot}} \right)^{2-\alpha} - \left(\frac{M_{\min}}{M_{\odot}} \right)^{2-\alpha} \right]}{2-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 2 \\ \ln \left(\frac{M_{\max}}{M_{\min}} \right) & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} \quad (4.16)$$

y

$$D(\alpha, M_1, M_2) = \begin{cases} \frac{2 \left[\left(\frac{M_2}{M_{\odot}} \right)^{\frac{3}{2}-\alpha} - \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^{\frac{3}{2}-\alpha} \right]}{3-2\alpha} & \text{si } \alpha \neq \frac{3}{2} \\ \ln \left(\frac{M_2}{M_1} \right) & \text{si } \alpha = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$

y se asumió que $z_s \sim 0.9$ y $z_l \sim 0.1$ para fijar el coeficiente numérico. Claramente, el número total de eventos dependerá fuertemente (aparte de la esperada influencia de τ y κ) de la velocidad de la fuente y del índice α , llamado índice de Salpeter, usualmente tomado como 2.35 [87].

Un caso particularmente interesante de fuentes son los blazares donde la emisión de alta energía se produce en una componente superlumínica con velocidad aparente $v > c$ en el plano de la lente [80]. Estos producirán fuentes de rayos gama con los niveles más altos de variabilidad. Durante la vida útil de EGRET, cientos de eventos pueden esperarse para profundidades ópticas en el rango 0.2–0.4. Aún para valores de τ tan bajos como 10^{-3} , si la fuente es aparentemente superlumínica, el número de eventos esperados en el tiempo de observación de EGRET es superior a 10. En cambio, las fuentes cuyas velocidades en el plano de la lente son mucho menores que c (por ejemplo, alrededor de 3000 km s^{-1}) sólo producirán unos pocos eventos. Todo esto se muestra en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3. Es interesante señalar que la mayoría de los eventos son producidos por objetos de masa sub-estelar. Estos objetos presentan

v/c	Rango total de masa (en $M_{\odot}$)	$N_{10^{-2}-10^{-1}}^{5 \text{ años}}$	$N_{10^{-1}-1}^{5 \text{ años}}$	$N_{1-20}^{5 \text{ años}}$	$N_{total}^{5 \text{ años}}$
3.5	1 – 20	— — —	— — —	5.4	5.4
	10^{-1} – 20	— — —	12.2	1.8	14.0
	10^{-2} – 20	35.0	4.9	0.7	40.7
0.1	1 – 20	— — —	— — —	0.15	0.15
	10^{-1} – 20	— — —	0.35	0.05	0.40
	10^{-2} – 20	1.00	0.14	0.02	1.16
0.01	1 – 20	— — —	— — —	0.015	0.015
	10^{-1} – 20	— — —	0.035	0.005	0.040
	10^{-2} – 20	0.100	0.014	0.002	0.116

Tabla 4.1: Distribución por masa de la micro-lente del número de eventos de *lensing* para una galaxia con $\gamma = 0$, $\kappa = 0.4$ y $\tau = 10^{-3}$. El índice de Salpeter es $\alpha = 2.35$.

v/c	Rango total de masa (en $M_{\odot}$)	$N_{10^{-2}-10^{-1}}^{5 \text{ años}}$	$N_{10^{-1}-1}^{5 \text{ años}}$	$N_{1-20}^{5 \text{ años}}$	$N_{total}^{5 \text{ años}}$
3.5	1 – 20	— — —	— — —	76	76
	10^{-1} – 20	— — —	172	26	198
	10^{-2} – 20	494	70	11	575
0.1	1 – 20	— — —	— — —	2.2	2.2
	10^{-1} – 20	— — —	4.9	0.7	5.6
	10^{-2} – 20	14.1	2.0	0.3	16.4
0.01	1 – 20	— — —	— — —	0.22	0.22
	10^{-1} – 20	— — —	0.49	0.07	0.56
	10^{-2} – 20	1.41	0.20	0.03	1.64

Tabla 4.2: Idem Tabla 4.1 con $\gamma = 0$, $\kappa = 0.4$ y $\tau = 0.2$. El índice de Salpeter es $\alpha = 2.35$.

v/c	Rango total de masa (en $M_{\odot}$)	$N_{10^{-2}-10^{-1}}^{5 \text{ años}}$	$N_{10^{-1}-1}^{5 \text{ años}}$	$N_{1-20}^{5 \text{ años}}$	$N_{total}^{5 \text{ años}}$
3.5	1 – 20	— — —	— — —	107	107
	10^{-1} – 20	— — —	244	37	281
	10^{-2} – 20	699	99	15	813
0.1	1 – 20	— — —	— — —	3.1	3.1
	10^{-1} – 20	— — —	7.0	1.0	8.0
	10^{-2} – 20	20.0	2.8	0.4	23.2
0.01	1 – 20	— — —	— — —	0.31	0.31
	10^{-1} – 20	— — —	0.70	0.10	0.80
	10^{-2} – 20	2.00	0.28	0.04	2.32

Tabla 4.3: Idem Tabla 4.1 con $\gamma = 0$, $\kappa = 0.4$ y $\tau = 0.4$. El índice de Salpeter es $\alpha = 2.35$.

radios de Einstein pequeños, lo que indica que sólo las regiones más internas de los núcleos galácticos activos serán amplificadas. Además esto traerá escalas temporales más chicas, que dentro de este modelo, dará lugar a fuentes más variables de rayos

gama.

4.5 Conclusiones

En este Capítulo se desarrolló el formalismo para el *microlensing* gravitacional de núcleos galácticos activos emisores de rayos gama. Se calculó la amplificación gravitacional teniendo en cuenta los efectos de la galaxia que contiene a la lente. Se mostró que el *microlensing* gravitacional de las regiones más interiores de núcleos galácticos activos distantes, puede producir fuentes no identificadas compatibles con aquellas observadas a altas latitudes galácticas. Mientras se obtienen grandes valores de amplificación para los rayos gama, resulta una amplificación despreciable en la banda de radio. En el caso de la emisión óptica, si es la misma población de partículas la que da lugar a los rayos gama y a la emisión óptica, entonces también se puede esperar amplificación de la luminosidad en el óptico. Este resultado permite explicar la existencia de fuentes gama que a altas latitudes parecen comportarse como blazares, pero en radio carecen de la contrapartida habitual asociada a la emisión sincrotrónica. La evolución espectral en gama provee una signature específica para los eventos de *microlensing* que puede ser usada para diferenciar éste de otra clase de fenómenos.

Capítulo 5

Agujeros de gusano como lentes gravitacionales

En este Capítulo se estudian los efectos de cromaticidad introducidos por el tamaño finito de la fuente en eventos producidos por supuestos agujeros de gusano que actúan como lentes gravitacionales¹. Se muestra que estos efectos permiten distinguir entre lentes de masa ordinaria y de masa negativa por medio del análisis espectral de los eventos de *microlensing*. Se discuten situaciones galácticas y extragalácticas.

Para el caso galáctico se analizan los cambios de color producidos por oscurecimiento del limbo en un escenario donde la lente gravitacional es un objeto tipo agujero de gusano con una estrella como fuente extensa. Los resultados se comparan con aquellos obtenidos por mezclado. Se estudia la posibilidad real de detección de la curva de luz usando el método DIA.

En el caso extragaláctico se toma como fuente un núcleo galáctico activo y como lente un agujero de gusano que se encuentra fuera de la galaxia.

5.1 Introducción

Se estudió en el Capítulo 2 que muchas de las soluciones de las ecuaciones de Einstein correspondientes a agujeros de gusano presentan una densidad de energía negativa y abren la posibilidad de tener una masa total negativa. Las estructuras de agujeros de gusano estáticas requieren la violación de la condición de energía promedio nula en la garganta del agujero para poder existir. Dicho de otra manera, la materia que forma el agujero de gusano debe ejercer repulsión gravitacional de modo de permanecer estable y evitar el colapso. Aunque se conocen violaciones de la condición de energía (por ejemplo el efecto Casimir), en la actualidad no se sabe si puede existir “materia exótica” en cantidades macroscópicas en la naturaleza. Aún así los agujeros de gusano son candidatos naturales como objetos de masa negativa de tamaño estelar. Si realmente existiesen agujeros de gusano en el Universo (o sea

¹Debe tenerse en cuenta que cualquier forma de masa negativa, no solo agujeros de gusano, produciría los mismos efectos observacionales.

si la topología después del Big-Bang fuese múltiplemente conexa), entonces debería haber firmas electromagnéticas observables que pudiesen llevar a su identificación. Sin embargo, sólo un puñado de trabajos se dedican a desarrollar pruebas observacionales para la existencia de agujeros de gusano. En este Capítulo se trata de transformar la especulación en torno de la existencia de masas negativas de tamaño estelar en una cuestión experimental, cuya respuesta pueda encontrarse por medio de observaciones astrofísicas.

Cramer et al. [88] y Torres et al. [89] han estudiado recientemente los efectos producidos cuando una masa negativa actúa como micro-lente (por ejemplo un agujero de gusano de tamaño estelar) sobre la luz proveniente de una fuente puntual (para un estudio de *macrolensing* ver [90]). Estos autores mostraron que las curvas de luz típicas que se esperan en eventos donde agujeros de gusano actúen como micro-lentes deben ser muy distintas de las producidas por lentes de masa ordinaria (positiva). En el caso estándar, ocurre un pico simétrico en el tiempo. Si la lente, en cambio, es un agujero de gusano, la repulsión gravitacional crea una zona oscura, la umbra, deflectando los rayos de luz que de otro modo llegarían al observador. El agujero de gusano actúa básicamente como una lente divergente. Sin embargo, la luz se concentra en el borde de la región de umbra produciendo dos picos separados de gran intensidad que se observan antes y después del evento de ocultación. Estos dos picos son cada uno asimétricos bajo inversión temporal, aunque son imágenes especulares uno del otro. En el primer pico, el flujo observado se va incrementando hasta diverger y luego cae a cero. El infinito, o “cáustica”, es consecuencia del modelo ideal adoptado en los cálculos, con una fuente puntual de fondo. Un modelo más realista debería considerar una fuente extendida con una dada distribución de intensidad sobre ella.

Recientemente, Anchordoqui et al. [91] buscaron, en las bases de datos de explosiones de rayos gama, firmas de *microlensing* por agujeros de gusano. Aunque detectaron algunos candidatos interesantes, no obtuvieron resultados concluyentes. Explosiones de rayos gama peculiarmente asimétricos [92], aunque poco comunes, pueden probablemente ser explicados por medio de hipótesis más convencionales, como bolas de fuego que precesan (ver, por ejemplo, Ref. [93]). Aún en el caso de *microlensing* galáctico, curvas altamente asimétricas pueden ser el efecto de *microlensing* por sistemas estelares binarios [94]. Entonces, aunque las lentes binarias produzcan curvas de luz asimétricas con diferentes formas de aquellas que serían producidas por agujeros de gusano, se necesitan otros discriminadores que no sean las curvas de luz de manera de poder identificar los eventos de *microlensing* producidos por agujeros de gusano.

En la Sección 5.2 se extiende el análisis de Cramer et al. [88] y Torres et al. [89] al caso de una fuente extensa. Esto permite presentar curvas de luz más realistas para los eventos donde agujeros de gusano actúen como micro-lentes. Así, usando el formalismo introducido en Ref. [95], calculamos los efectos de una fuente de tamaño

finito sobre las características espectrales del *microlensing*. En la Sección 5.3 se muestra que el oscurecimiento del limbo en la distribución de intensidad de una fuente estelar induce efectos de cromaticidad específicos que son muy diferentes de los correspondientes al caso de masa positiva. Así observaciones ópticas multicolores pueden usarse para la búsqueda de agujeros de gusano galácticos naturales.

La detección de efectos de fuente extensa a partir de mediciones de color en lugar de fotometría de banda única, es interesante por dos motivos (ver Ref. [96] para una discusión más profunda). Primero, porque detectando las curvas de color se revela la naturaleza extendida de la fuente: si la fuente se aproxima mucho a la cáustica de la lente pero no la cruza, la amplificación inducida puede ser siempre imitada por cambios en los parámetros de *lensing* de un objeto puntual. En contraste, los cambios de color no pueden ser imitados por ninguno de esos cambios: un evento de *lensing* con fuente puntual es siempre acromático. En segundo lugar, la curva de color permite medir el movimiento propio de la lente bastante fácilmente, sin necesidad de ajustar la curva de luz completa.

Sin embargo, las mediciones de las curvas de luz pueden ser obstaculizadas por mezclado² de luz causado por fuentes cercanas y de fondo, lo cual da lugar a efectos de cromaticidad. Han et al. [95] demostraron que aún para una pequeña fracción (menos del 2%) de luz mezclada, los cambios de color causados por mezclado pueden ser equivalentes en magnitud a aquellos causados por oscurecimiento del limbo. Por lo tanto, para obtener predicciones para una curva de luz, es esencial tener en cuenta el mezclado y eliminar, de alguna manera, sus efectos.

En las Secciones 5.4, 5.5 y 5.6 se analizan los efectos de cromaticidad producidos en el caso de un evento donde la micro-lente es un agujero de gusano (u otro objeto de masa negativa) por mezclado de otras estrellas y se estima la probabilidad de realizar una observación real de las curvas de color usando el método de análisis de imagen por diferencia (DIA), que se encuentra dentro de las capacidades tecnológicas actuales.

Además, en la Sección 5.7 se estudia el *microlensing* extragaláctico tomando como lente un agujero de gusano y como fuente un núcleo galáctico activo, teniendo en cuenta las variaciones del tamaño de la fuente con las longitudes de onda observadas. Esto extiende el trabajo realizado previamente por Torres et al. [89], quienes primero consideraron esta clase de eventos en rayos gama adoptando una fuente puntual. Se muestra también en este caso que la evolución espectral durante el evento con un agujero de gusano como microlente presenta signatures peculiares que permiten su identificación.

Las conclusiones de este Capítulo se muestran en la Sección 5.8.

²en inglés, *blending*

5.2 Fuente extendida

Cramer et al [88] modificaron la Ec. (3.16) para tener en cuenta la posibilidad de que la masa de la lente pueda ser negativa. Hallaron que la amplificación total de una fuente puntual de fondo debido a una única masa puntual que actúa como lente gravitacional viene dada por

$$A_p = \frac{B^2 \pm 2}{B\sqrt{B^2 \pm 4}}, \quad (5.1)$$

donde el signo más (menos) corresponde al caso de masa positiva (negativa) y $B = b/R_E$ es la separación más corta entre la lente y la fuente (en el plano de la lente) en unidades del radio del anillo de Einstein, $R_E = \sqrt{\frac{4G|M|}{c^2} \frac{D_{ls}D_{ol}}{D_{os}}}$, definido en el Capítulo 3.

Cuando la fuente es extendida, debemos tomar en cuenta las contribuciones provenientes de las diferentes partes de la misma. Para una fuente circular, con una distribución de intensidad uniforme, usando la Ec. (3.64) la amplificación resulta entonces:

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_*} A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{\pi R_*^2}. \quad (5.2)$$

donde (R, φ) son coordenadas polares en un sistema de referencia centrado en la fuente (por ejemplo una estrella) y $R_* = r_*/R_E$ es el radio de la fuente en unidades del radio de Einstein.

En el Capítulo 2 se mostró que si la lente se mueve con velocidad transversal constante v , la separación lente-fuente, en unidades del radio de Einstein, $B(T)$ evoluciona en el tiempo de acuerdo con la Ec. (3.76). Reemplazando ahora B por $B(T)$ en Ec. (5.1), se obtiene la amplificación dependiente del tiempo para cada punto de la fuente extendida. Para calcular las curvas de luz para el caso de masas negativas, se toma el signo menos en la Ec. (5.1) y se reemplaza en la Ec. (5.2).

En la Fig. 5.1 se muestran diferentes curvas de luz para distintos parámetros de impacto $u = b_0/r_* = B_0/R_*$, calculadas asumiendo una fuente circular de brillo uniforme y radio $R_* = 0.1$. Estas curvas deben ser comparadas con las curvas del caso idealizado presentadas por Torres et al. [89] en su Figura 1. La diferencia principal es que en el caso de fuente extensa las divergencias quedan eliminadas, y no hay una transición discontinua cuando se entra o se sale de la zona de umbra. Las características básicas del evento de *microlensing*, sin embargo, permanecen. Para $B_0 < 2$, tenemos dos aumentos de intensidad sucesivos, separados por un periodo de ausencia total de radiación. Los picos individuales son bastante asimétricos. En el caso $B_0 > 2$, hay un sólo evento, simétrico ante inversión temporal y similar a lo que se observa en el caso estándar.

Las fuentes de fondo reales en eventos de *microlensing* pueden presentar distribuciones de brillo no uniformes en sus superficies y que su emisión pueda depender de la frecuencia observada. Estas complicaciones pueden resultar en efectos de cromaticidad, es decir en cambios espectrales inducidos por *lensing* diferencial durante

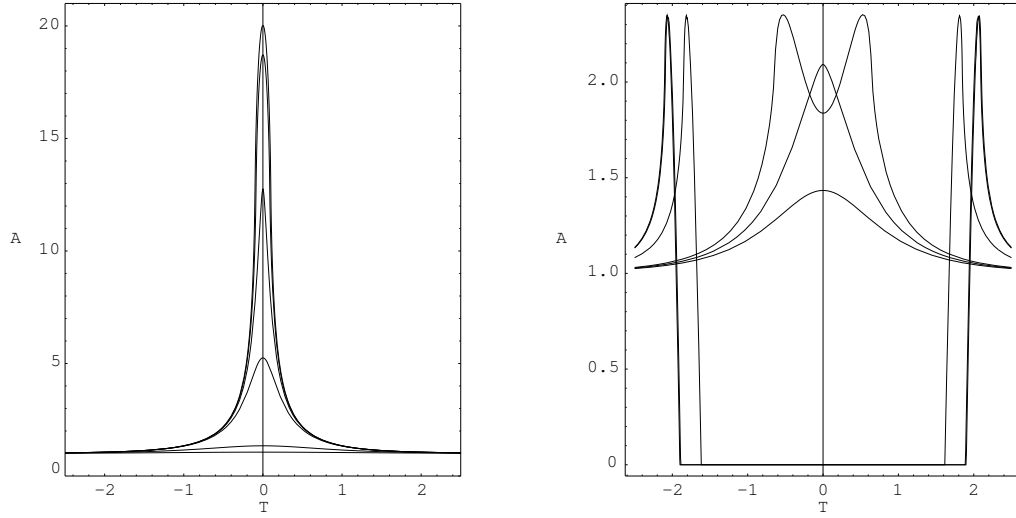


Figura 5.1: Curvas de luz para un evento de *microlensing* con fuente extensa producidas por una lente de masa positiva (panel izquierdo) y una lente de masa negativa (panel derecho). El eje vertical da la amplificación total de la intensidad de fondo. Las diferentes curvas corresponden a diferentes parámetros de impacto [$u=0, 0.5, 1, 2, 10$, y 20 , de arriba hacia abajo, en el caso de lente de masa positiva; y $u=0$ y 2 (en la misma curva), $10, 20, 21$, y 22 , de izquierda a derecha en el caso de lente de masa negativa]. El radio de la fuente es $R_* = 0.1$. Ver el texto principal para más detalles.

el evento. En las secciones siguientes se calculan estos cambios en orden de establecer si pueden proveer una signatura específica para *microlensing* por agujeros de gusano.

5.3 Cromaticidad en *microlensing* de estrellas

Las estrellas son más brillantes en su centro. El oscurecimiento del perfil de intensidad de una estrella hacia su borde se denomina “oscurecimiento del limbo”. Estas emiten radiación como un cuerpo negro con una temperatura efectiva T_{eff} , y como consecuencia su emisión depende de la frecuencia. Para calcular los efectos de cromaticidad debidos a estas características, se puede representar el perfil de intensidad de una estrella típica por [95]:

$$\mathcal{I}_\nu(r) = 1 - C_\nu \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_*} \right)^2} \right), \quad (5.3)$$

donde los coeficientes de oscurecimiento del limbo en las bandas I y U pueden tomarse como $C_{\nu_1} = 0.503$ y $C_{\nu_2} = 1.050$, respectivamente, para una estrella K-

gigante con $T_{\text{eff}} = 4750\text{K}$. Reescribiendo la intensidad superficial en unidades del radio de Einstein:

$$\mathcal{I}_\nu(R) = 1 - C_\nu \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_*} \right)^2} \right), \quad (5.4)$$

donde $R_* = r_*/R_E$ es el radio adimensional de la estrella.

La amplificación dependerá ahora de la frecuencia ν y vendrá dada por

$$A_\nu = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_*} \mathcal{I}_\nu(R) A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{2\pi \int_0^{R_*} \mathcal{I}_\nu(R) R dR} \quad (5.5)$$

El cambio de color producido por oscurecimiento del limbo puede ser calculado por [95]

$$\Delta(m_{\nu_1} - m_{\nu_2}) = -2.5 \log \left(\frac{A_{\nu_1}}{A_{\nu_2}} \right). \quad (5.6)$$

En la Fig. 5.2 se muestran varias curvas de color para lentes de masa positiva (panel izquierdo) y masa negativa (panel derecho). Las diferentes curvas corresponden a diferentes parámetros de impacto $u = b_0/r_* = B_0/R_*$ que se muestran en la leyenda de la figura. El radio de la estrella se tomó, como antes, igual a $R_* = 0.1$. En el caso de una lente ordinaria, se ve que a medida que se acerca a la estrella, el color de la fuente observada se vuelve más rojo debido a la amplificación diferencial de las regiones más frías. Cuando la lente se mueve hacia la zona interior de la estrella, el centro caliente comienza a dominar la amplificación, produciendo un cambio dramático en la pendiente de la curva de color. Este es básicamente el resultado recientemente encontrado por Han et al. [95].

En las curvas de color cuando la lente tiene masa negativa, se ve una clara diferencia de comportamiento. Los cambios espectrales comienzan mucho antes que en la situación estándar. Inicialmente la fuente también se hace más roja y luego experimenta un cambio cuando las longitudes de onda más cortas comienzan a dominar. Contrariamente a lo que sucede en el caso con masa positiva, la tendencia espectral cambia nuevamente, con la fuente volviéndose más y más fría hasta que desaparece mientras transita la umbra. Cuando la fuente reaparece se observa el comportamiento inverso.

5.4 Mezclado

En la Sección anterior se vio que un evento de *microlensing* con fuente extensa puede volverse cromático como resultado del oscurecimiento del limbo. Pero la curva de luz también puede volverse cromática por otro efecto: mezclado. Básicamente, el flujo luminoso de una estrella que actúe como fuente puede ser afectado por la mezcla de luz proveniente de otras estrellas que no se pueden resolver, lo que

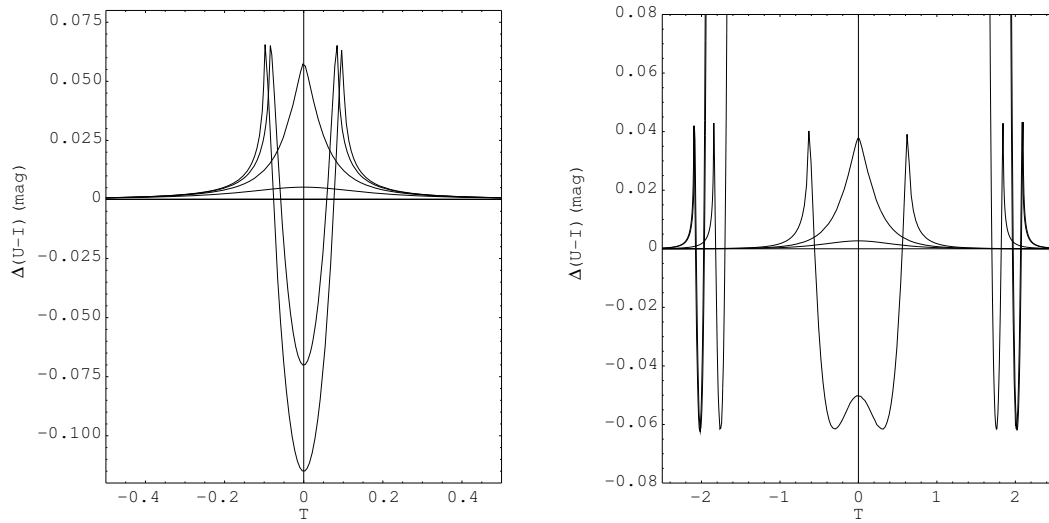


Figura 5.2: Curvas de color para un evento de *microlensing* con una fuente extensa de brillo superficial variable producido por una lente puntual de masa positiva (panel izquierdo) y una lente puntual de masa negativa (panel derecho). Las diferentes curvas tienen los mismos parámetros de impacto que en la Fig. 5.1. En el caso en que la lente es una masa negativa, de izquierda a derecha, $u=0$ y 2 (en la misma curva), 10, 20, 21, and 22. En el caso de lente de masa positiva, de izquierda a derecha, $u=0, 0.5, 1, 2, 10$ y 20 (las últimas dos en la misma curva). El radio de la fuente es $R_* = 0.1$. Ver el texto principal para más detalles.

resulta en un cambio en la curva de luz. Si consideramos ambos efectos al mismo tiempo, oscurecimiento del limbo y mezclado, la curva de luz generada fue hallada recientemente por Han et al. [96] y viene dada por la expresión

$$\Delta(m_{\nu_2} - m_{\nu_1}) = -2.5 \log \left[\left(\frac{A_{\nu_2} + f_{\nu_2}}{A_{\nu_1} + f_{\nu_1}} \right) \left(\frac{1 + f_{\nu_2}}{1 + f_{\nu_1}} \right)^{-1} \right], \quad (5.7)$$

donde f_{ν_i} son las fracciones de luz mezclada en las longitudes de onda de las bandas individuales. Estas fracciones dependen de la situación particular y serán distintas para diferentes fondos. Los cambios de color debidos sólo al efecto de mezclado serán la diferencia entre la curva de color del evento de oscurecimiento del limbo afectado por mezclado (Ec. (5.7)) y la curva de color para oscurecimiento del limbo solamente (dada por la Ec. (5.6)). Para facilitar la comparación con el caso estándar (masa positiva), se toman aquí los coeficientes de mezclado como $f_U = 1.39$ y $f_I = 1.04$, y una estrella de radio $R_* = 0.1$ como fuente [96]. Los nuevos resultados, que incluyen el efecto del mezclado, para distintos valores del parámetro de impacto $u = b_0/r_* = B_0/R_*$, se muestran en las Figs. 5.3 y 5.4.

En la Sección 5.3 se mostró que las curvas de luz sin mezclado presentan una región de umbra en el caso de lentes de masa negativa (la luz no llega al observador)

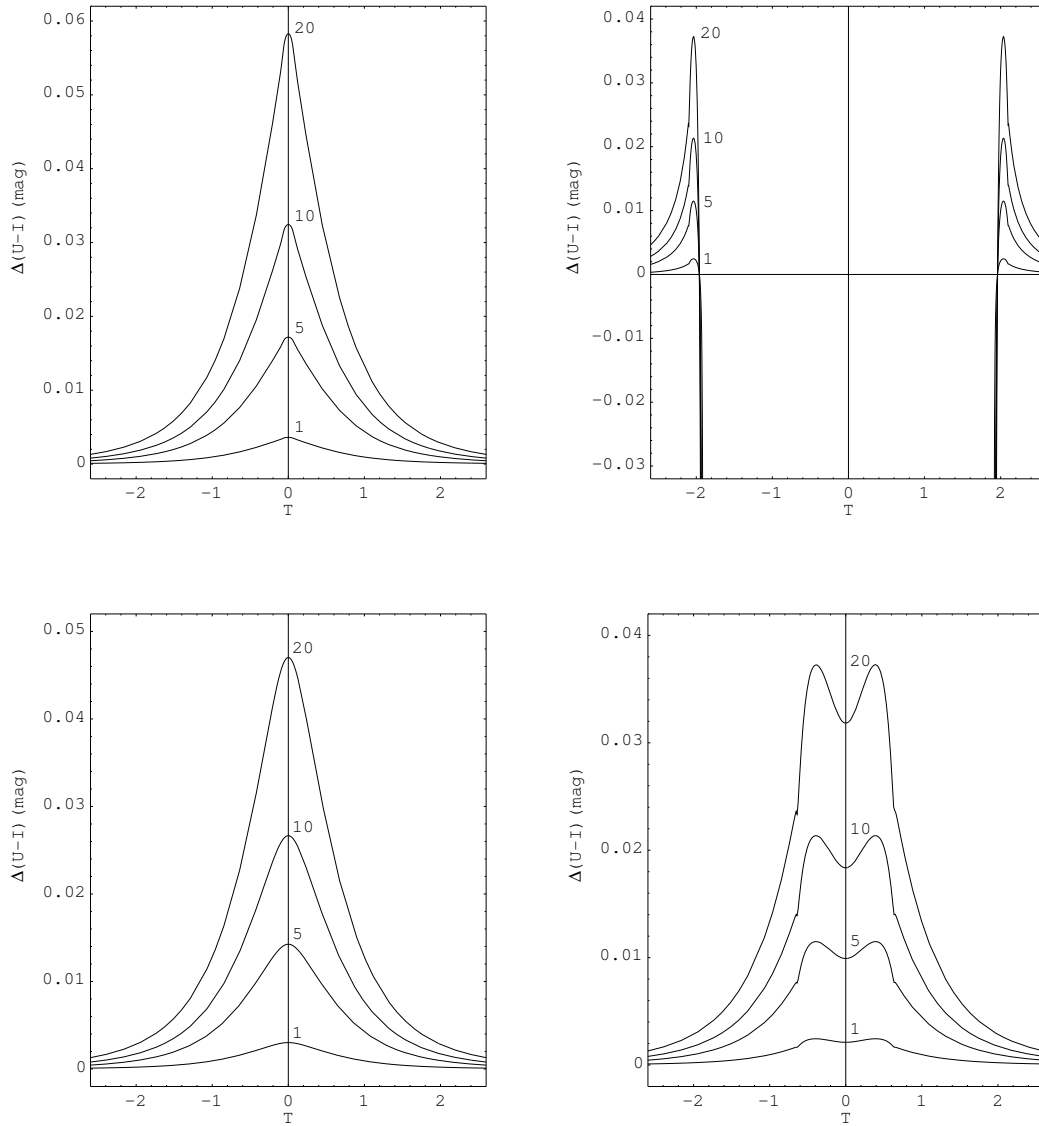


Figura 5.3: Cambios de color producidos por mezclado en eventos de *microlensing*. En cada curva se muestra el número de estrellas mezcladas. Arriba, izquierda: Lente de masa positiva, parámetro de impacto $u = 0.5$. Arriba, derecha: Lente de masa negativa, el mismo parámetro de impacto. Abajo, izquierda: Lente de masa positiva, $u = 2$. Abajo, derecha: Lente de masa negativa, $u = 20$. La estrella que actúa como fuente tiene radio adimensional $R_* = 0.1$.

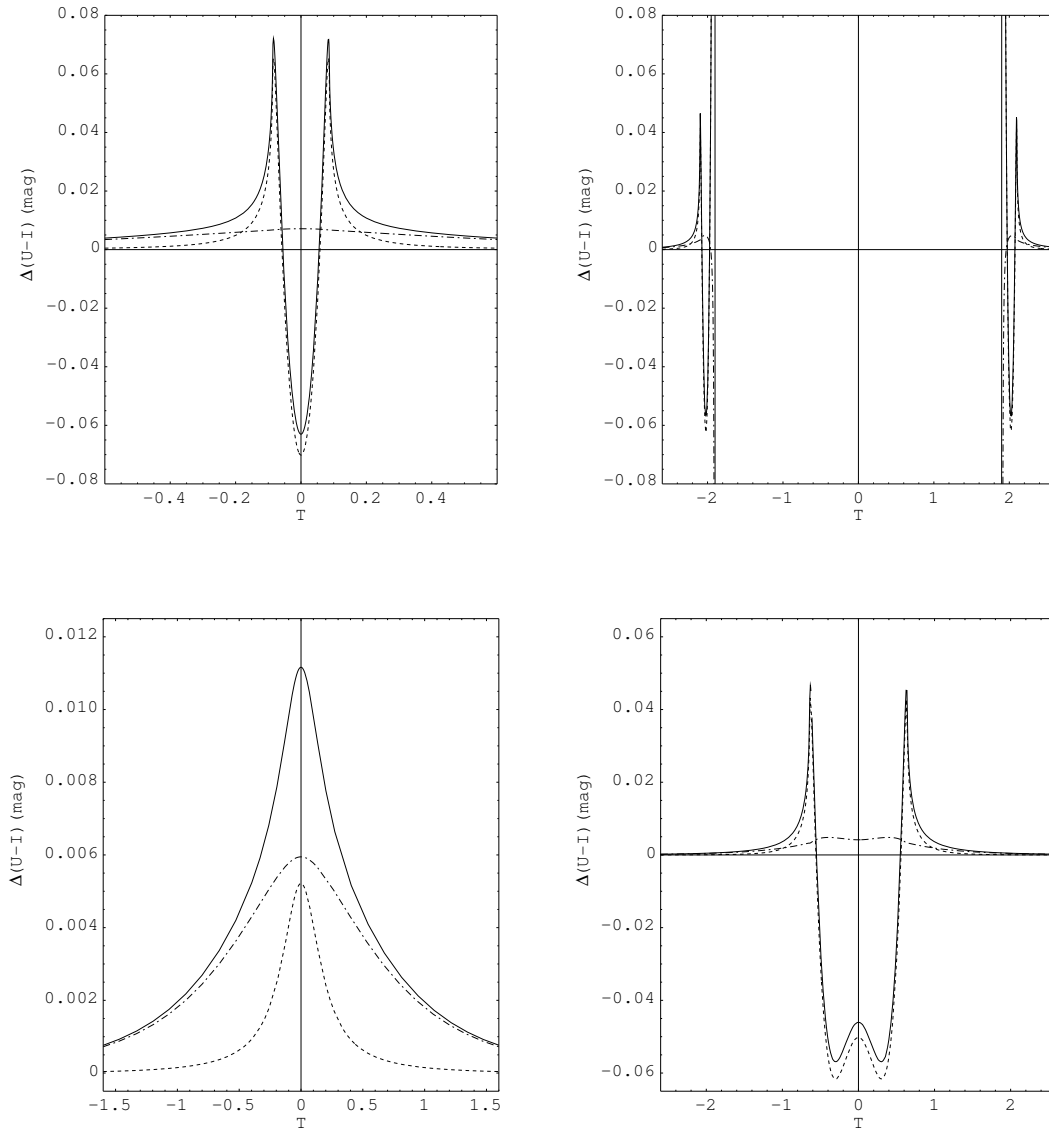


Figura 5.4: Contribución completa y contribuciones parciales a los efectos de cromaticidad en *microlensing*. La línea de trazo lleno es la curva de color completa de un evento afectado por mezclado (dos estrellas mezcladas), la línea de puntos representa la curva de color si el mismo evento no fuese afectado por mezclado, mientras que la línea de puntos y rayas muestra solamente los cambios de color debidos al efecto de mezclado. Arriba, izquierda: Lente de masa positiva, parámetro de impacto $u = 0.5$. Arriba, derecha: Lente de masa negativa, el mismo parámetro de impacto. La umbra no está presente, en su lugar hay una “meseta” ($\Delta(U - I) \approx -0.31$), que domina la región de la umbra en las curvas de color, producida solamente por la luz mezclada. Esta meseta no se muestra en la figura para poder mostrar en detalle las partes superiores de la curva de color. Abajo, izquierda: Lente de masa positiva, $u = 2$. Abajo, derecha: Lente de masa negativa, $u = 20$. La estrella que actúa como fuente tiene radio adimensional $R_* = 0.1$.

cuando el parámetro de impacto es pequeño ($u < 20$). Cuando se considera el mezclado, en cambio, la umbra no está más presente y en su lugar hay una "meseta" ($\Delta(U - I) \approx -0.31$) en las curvas de luz, producida sólo por la luz mezclada. Esta meseta no se muestra directamente en las figuras para poder mostrar en detalle la parte superior de la curva de color. Este efecto nuevo tiene importantes implicancias en la curva de luz completa, como muestra la Fig. 5.4.

En el caso de una lente ordinaria, las curvas de color afectadas por mezclado son muy similares a las fotométricas, ver la Sección 5.3 para comparación. Cuando la lente se acerca el color de la fuente observada se va volviendo más rojo debido a la amplificación diferencial de las zonas más frías. Cuando la lente se mueve hacia el interior de la estrella, el centro caliente comienza a dominar la amplificación, produciendo un cambio dramático en la pendiente.

Para la curva de color con oscurecimiento del limbo (línea punteada en la Fig. 5.4), los cambios espectrales comienzan mucho antes que en la situación estándar. Inicialmente, la fuente también se vuelve más roja, y luego experimenta un cambio cuando las longitudes de onda más cortas comienzan a dominar. Al contrario de lo que sucede con las lentes de masa positiva, la tendencia espectral cambia nuevamente, con la fuente apareciendo cada vez más fría hasta desaparecer en la umbra. Cuando la fuente aparece de nuevo, se observa el comportamiento inverso. Si ahora tomamos en cuenta también el efecto de mezclado, la existencia de la meseta previamente mencionada, en lugar de la región de umbra, hace que la curva de color cambie su tendencia nuevamente, hacia la región azul. Durante el tránsito, la contribución que domina la curva de color es la de la luz mezclada. Tiene sentido: los flujos mezcla provienen de estrellas cuya luz no es desviada por el objeto tipo agujero de gusano, de modo que la umbra está ausente. El mezclado, al contrario de lo que ocurre en el caso positivo (donde la forma de la curva de color se mantiene con ligeros cambios en los valores reales de $\Delta(U - I)$), afecta notablemente la forma de la curva de color en un evento de *microlensing* con un agujero de gusano.

La diferencia entre las curvas de luz positiva y negativa (que se muestran para su comparación en el mismo conjunto de figuras) continúa siendo muy clara, y por lo tanto, estos efectos combinados permiten distinguir entre los distintos tipos de lentes. En las dos siguientes secciones se muestra que la curva de color puede ser realmente observada con la tecnología actual en casos típicos.

5.5 La curva de color DIA

El análisis de imagen por diferencia (DIA³) es un método para medir variaciones de color libres de mezclado restandole a la imagen observada una imagen de referencia. El flujo será, en DIA, $F_\nu = F_{\nu,\text{obs}} - F_{\nu,\text{ref}} = (A_\nu - 1)F_{\nu,0}$, donde $F_{\nu,\text{obs}} = A_\nu F_{\nu,0} + B_\nu$

³del inglés *difference image analysis*

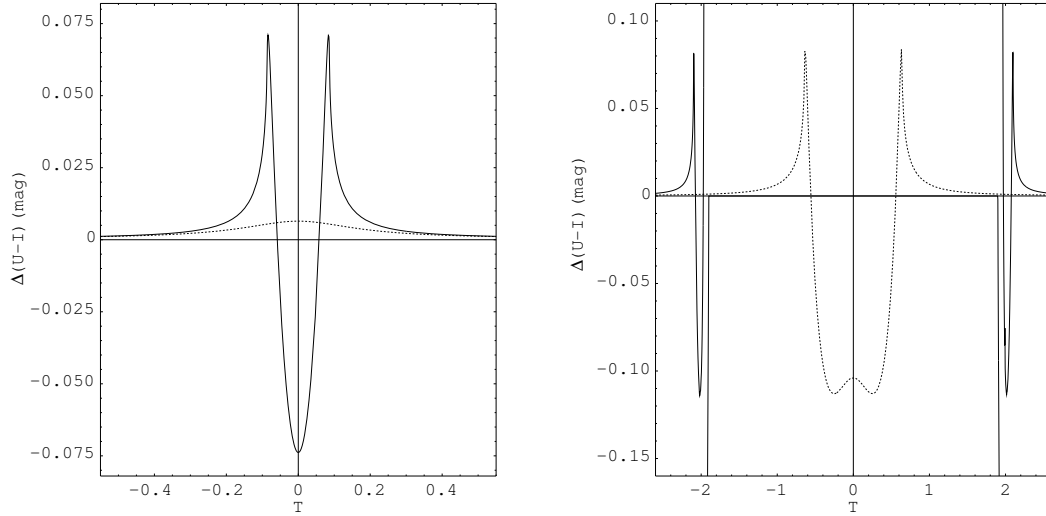


Figura 5.5: Curvas de color DIA. Izquierda: Lente de masa positiva, parámetro de impacto $u = 0.5$ (curva de trazo continuo) y $u = 2$ (línea de puntos). Derecha: Lente de masa negativa, $u = 0.5$ (curva de trazo continuo) y $u = 20$ (línea de puntos). La estrella que actúa como fuente tiene radio adimensional $R_* = 0.1$.

y $F_{\nu,\text{ref}} = F_{\nu,0} + B_\nu$ corresponden a los flujos de la fuente medidos de las imágenes obtenidas a lo largo del proceso de *microlensing*, y de la imagen de referencia (sin *lensing*), respectivamente, y B_ν es el flujo mezclado. Luego, la curva de color DIA viene dada por [96]

$$\Delta(m_{\nu_2} - m_{\nu_1})_{\text{DIA}} = -2.5 \log \left[\left(\frac{A_{\nu_2}(t) - 1}{A_{\nu_1}(t) - 1} \right) \left(\frac{A_{\nu_2}(t_{\text{ref}}) - 1}{A_{\nu_1}(t_{\text{ref}}) - 1} \right)^{-1} \right]. \quad (5.8)$$

La ventaja de medir esta curva, en lugar de la dada por la Ec. (5.7), es que esta no depende de los parámetros de mezclado $f_{\nu,i}$ (equivalentemente, $B_{\nu,i}$). Eligiendo t_{ref} de la condición $\Delta(m_{\nu_2} - m_{\nu_1})_{\text{DIA}} = 0$, cuando la fuente de referencia no sufre amplificación. Básicamente, $t_{\text{ref}} \rightarrow \infty$. Nuevamente, se fijará la atención en las bandas U e I de una estrella fuente K-gigante con radio adimensional $R_* = 0.1$ y $T_{\text{eff}} = 4750K$. Los resultados para lentes de masa positiva y negativa con diferentes parámetros de impacto $u = b_0/r_* = B_0/R_*$ se muestran en la Fig. 5.5.

Aún cuando la curva de color DIA puede tener distinta forma comparada con la producida sólo por oscurecimiento del limbo, ambas dependen de los mismos parámetros, A_{ν_1} y A_{ν_2} . Luego, se puede extraer la misma información de ambas curvas, pero con indeterminaciones mucho menores en el caso de la curva DIA, debido a la ausencia de mezcla.

Es interesante comparar, la curva de color DIA recién presentada con la curva fotométrica de oscurecimiento del limbo presentada en la Fig. 5.2, o en los paneles

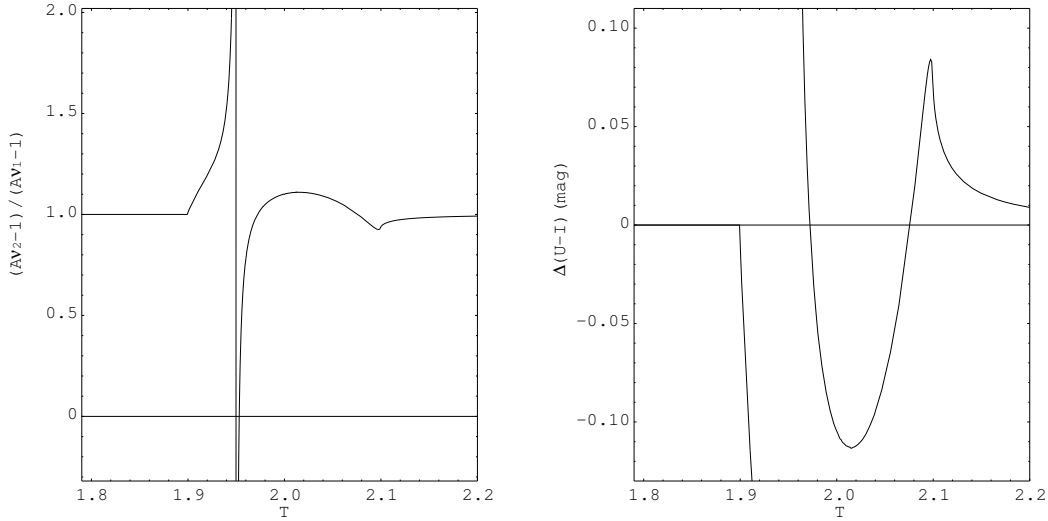


Figura 5.6: Izquierda: Ejemplo de la evolución parcial del cociente $(A_{\nu_2}-1)/(A_{\nu_1}-1)$ en el caso de una lente de masa negativa. Derecha: curva de color DIA en el mismo intervalo temporal. El parámetro de impacto es $u = 0.5$, y $R_* = 0.1$, para ambas figuras.

derechos de la Fig. 5.4, líneas punteadas. La diferencia analítica entre ambas curvas se reduce al reemplazo $\frac{A_{\nu_2}}{A_{\nu_1}} \rightarrow \frac{A_{\nu_2}-1}{A_{\nu_1}-1}$ dentro de la función logaritmo usada en la definición de magnitud. Este cambio aparentemente simple tiene grandes implicancias en la curva de color de la lente de masa negativa cuando $u < 20$ ($b_0 < 2R_E$). En particular, si A_{ν_1} o A_{ν_2} son menores que 1, pero no ambos, el cociente $(A_{\nu_2}-1)/(A_{\nu_1}-1)$ es menor que cero, obteniendo que el cambio de color no este definido. Esto sucede justo antes de la umbra, cuando grandes variaciones en la amplificación ocurren repentinamente a tiempos ligeramente diferentes para distintas frecuencias, siendo esta la causa del aparente pico extra en la curva de color DIA. En la Fig. 5.6 se muestra el comportamiento del cociente $(A_{\nu_2}-1)/(A_{\nu_1}-1)$ para las dos frecuencias usadas.

Es bueno remarcar que la curva DIA para lentes de masa positiva es completamente similar a la fotométrica, pues no hay ningún instante para el cual $A_{\nu_1} - 1$ y $A_{\nu_2} - 1$ tengan diferente signo.

El comportamiento de la curva de color DIA para lentes de masa negativa merece un estudio más profundo. Para explorar exactamente la forma de la curva que pueda ser medida realmente, se necesita implementar un código numérico con un cierto agrupamiento en el tiempo (correspondiente a un dado tiempo de integración de un telescopio). Si uno de los picos es producido por un sólo punto, se puede perder en el proceso de agrupamiento, pero puede aclarar el comportamiento de lo que podría observarse realmente. Se adaptó el código numérico usado en Ref. [96] al

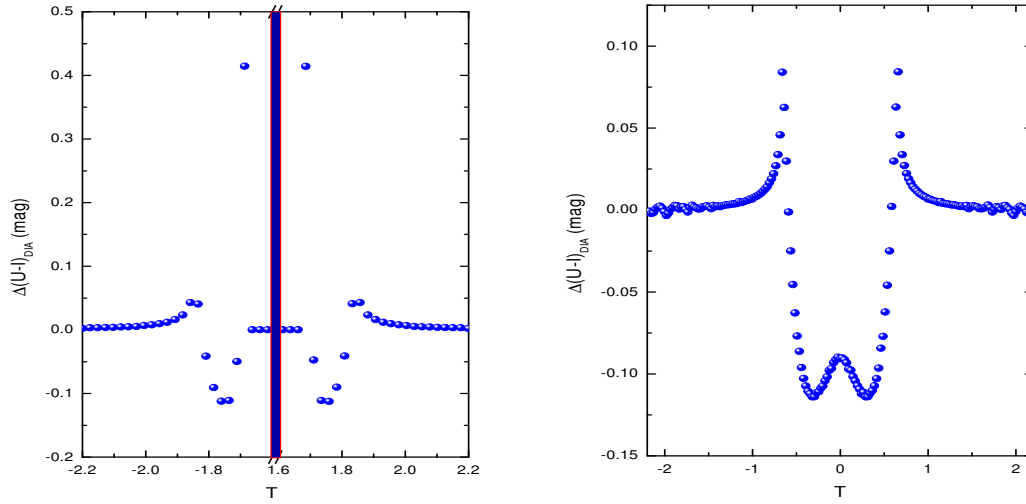


Figura 5.7: Curvas de color DIA para una lente de masa negativa obtenidas con un código numérico, por agrupamiento del intervalo temporal, para un parámetro de impacto $u = 10$ (izquierda) and 20 (derecha). El lado izquierdo presenta un quiebre en el eje x de la curva de color, donde se encuentra la umbra, de modo de mostrar más detalles. La estrella que actúa como fuente tiene radio adimensional $R_* = 0.1$.

caso de lentes de masa negativa. La Fig. 5.7 muestra dos ejemplos obtenidos con este código. Estas curvas muestran el comportamiento cualitativo esperado en toda su extensión.

5.6 Medición de la curva de color DIA

Aunque los cambios de color son usualmente pequeños, pueden ser medidos con las capacidades tecnológicas actuales. Siguiendo a Han et al. [96], se puede escribir la indeterminación en el flujo de una estrella que actúa como fuente, relacionandolo con la señal-ruido como $\delta m_\nu = \frac{\delta F_{\nu,0}/F_{\nu,0}}{0.4 \ln 10} = \frac{1.09}{S/N}$. De esta forma, la incertidumbre en el color medido esta relacionada con S/N por $\delta \left[\Delta \left(m_{\nu_2} - m_{\mu_{\nu_1}} \right)_{\text{DIA}} \right] \sim \sqrt{2} \delta m_\nu \sim \frac{1.54}{S/N}$. Si $S/N = 10$, entonces $\delta \left[\Delta \left(m_{\nu_2} - m_{\mu_{\nu_1}} \right)_{\text{DIA}} \right] \sim 0.15$. La señal medida de la imagen sustraída es proporcional a la variación del flujo de la fuente, $S \propto (A_\nu - 1) F_{0,\nu} t_{\text{exp}}$, donde t_{exp} es el tiempo de exposición. El ruido proviene de la fuente y también de las estrellas de fondo mezcladas [96], $N \propto [A_\nu F_{0,\nu} + B]^{1/2} t_{\text{exp}}^{1/2}$, donde B representa el flujo promedio total de las estrellas no resueltas dentro de un disco de observación de radio θ_{visual} . Luego, la relación señal-ruido viene dada por $S/N = (A_\nu - 1) F_{0,\nu} \left(\frac{t_{\text{exp}}}{A_\nu F_{0,\nu} + B} \right)^{1/2}$. Como se quiere comparar estas estimaciones de error con aquellas correspondientes al caso positivo, se tomarán aquí *mutatis mutandis* los mismos parámetros usados en la Sección 5 of Ref. [96].

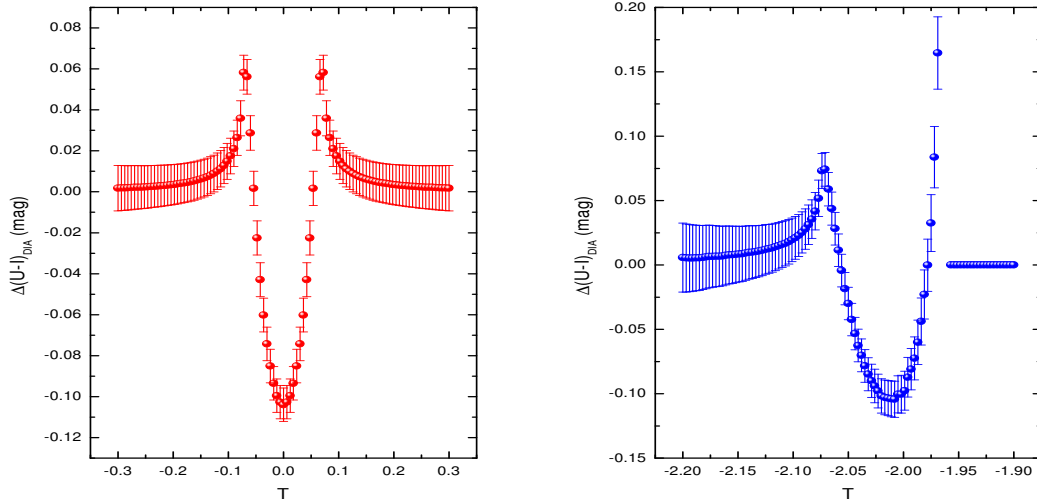


Figura 5.8: Izquierda: Estimación del error en la curva de color DIA para una lente de masa positiva, parámetro de impacto $u = 0.9$ y una estrella de radio $R_* = 0.07$ como fuente. Otros parámetros se discuten en el texto. Derecha: Ejemplo de la estimación del error en la evolución parcial (izquierda de la umbra) de la curva de luz para una lente de masa negativa. Los parámetros usados son los mismos que en el panel izquierdo.

Se tomará primero el tamaño de la fuente como 0.07 veces el radio de Einstein, y la escala temporal como [96]. La fuente es una estrella tipo K con $I = 14.05$ mag. Se asume que las observaciones serán realizadas con un telescopio de 1 m con una cámara CCD que puede detectar 12 fotones por segundo para una estrella con $I = 20$ mag. La exposición, t_{exp} , se considera variable de manera de permitir que la señal medida sea $\sim 4 \times 10^4$ fotones, lo cual está en el rango de respuesta de régimen lineal de las cámaras CCD modernas. En realidad, $t_{\text{exp}} = \frac{4 \times 10^4 \text{ fotones}}{A_\nu F_{0,\nu}}$, y por lo tanto será distinto para cada magnificación. La estimación de B se hace suponiendo que la luz mezclada proviene de estrellas más débiles (es decir con magnitudes más grandes) que el límite de saturación, cuando la densidad numérica estelar es $\sim 10^6$ estrellas grado^{-2} . Esta densidad numérica corresponde a $I \sim 18.1$ [96]. El flujo de fondo se normaliza para estrella en el disco visual con $\theta_{\text{visual}} = 2$ segundos de arco. En el caso de una lente de masa positiva, el tiempo de exposición requerido para obtener el flujo de 10^4 fotones es sólo de unos pocos segundos, y esto sucede debido a las enormes amplificaciones que la lente produce (hasta 20 veces alrededor de $t = 0$).

En el caso en que la lente sea de masa negativa, la presencia de la umbra domina parte de la estimación del error también. En particular, para magnificaciones menores que 1, la S/N no está bien definida, pues se hace negativa. Pero esto sucede

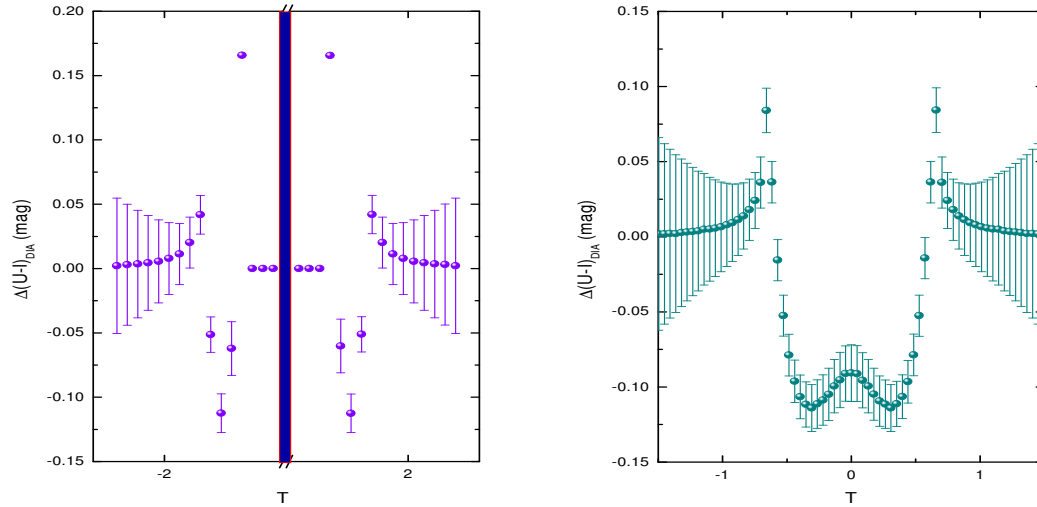


Figura 5.9: Estimación del error en la curva de color DIA para una lente de masa negativa, parámetro de impacto $u = 10$ (de nuevo mostrando un corte, izquierda) y 20 (derecha), y una estrella de radio $R_* = 0.1$ como fuente.

justo antes de la umbra, para un sólo punto en el gráfico con agrupamiento, y no afecta la estimación correcta de la curva previamente ascendente (por ejemplo a la izquierda de la umbra). Además no tiene sentido asignar un error a una señal ausente, la umbra. Se encuentra que S/N puede ser alrededor de 80 para el caso negativo, con tiempos de exposición ligeramente más largos que en el caso de masa positiva, alrededor de 8 – 10 segundos. Esta diferencia es producida por valores de amplificación generalmente más bajos, la cual es del orden de 1, en lugar del rango 10 – 20 alcanzado en el caso de masa positiva. En la Fig. 5.8 se muestra caso de $u = 0.9$. Vale la pena señalar que la escala natural de *microlensing*, la escala de tiempos de Einstein, representa la mitad del tiempo mostrado en el eje x del panel izquierdo en la Fig. 5.8. De esta manera, la lente de masa negativa tiene una evolución temporal más larga, pues el pico particular que se muestra sucede en una escala temporal para la cual casi ocurre el evento de *microlensing* completo en el caso de masa positiva. En la Fig. 5.9 se muestran los casos con parámetros de impacto $u = 10$ and $u = 20$, para los cuales se investigó anteriormente las curvas de color. Es interesante señalar que, debido a los bajos valores de amplificación para los primeros o los últimos tiempos, el error se incrementa significativamente en estas regiones. Esto se ve claramente en el panel derecho de la Fig. 5.9. Sobre todo esta claro que dentro de las capacidades observacionales actuales puede distinguirse entre lentes ordinarias y exóticas, por medio del análisis de los efectos de cromaticidad en el *microlensing* gravitacional.

En este momento, la mayoría de los experimentos de *microlensing* no usan el método DIA en el análisis de sus datos. Sin embargo, esto está comenzando a

cambiar, ver por ejemplo Ref. [97], y se transformará en una práctica común en el futuro cercano. Si los sistemas de alerta de *microlensing* son adaptados para tener en cuenta las posibles curvas de color y de luz producidas por lentes de masa negativa, se estará en posición de hacer búsquedas extensivas –y de establecer cotas sobre la posible existencia– de objetos tipo agujeros de gusano.

5.7 Cromaticidad en *microlensing* extragaláctico

En esta Sección se analiza el *microlensing* extragaláctico, que fue considerado previamente por Torres et al. [89] usando fuentes puntuales. Se estudian las curvas de luz producidas por un agujero de gusano extragaláctico de masa estelar cuando este cruza la línea visual de una fuente de fondo compacta, concretamente un núcleo galáctico activo. Como discutieron Torres et al. [89], un requerimiento crítico para observar una amplificación importante durante un evento de *microlensing* es que el tamaño de la fuente, proyectado sobre el plano de la lente, no sea más grande que el anillo de Einstein de la lente. Esto es necesario porque de otra forma la luz proveniente de afuera del anillo sería dominante y suavizaría la variabilidad inducida gravitatoriamente. En el caso de un núcleo galáctico activo, como el tamaño de las regiones emisoras varía con la longitud de onda, la amplificación gravitacional será más efectiva a aquellas longitudes de onda a las cuales la fuente es más compacta. Las longitudes de onda que maximizan las amplificaciones son las que corresponden al rango de energía de los rayos gama [89].

La opacidad de la propagación de los fotones gama en el campo de rayos X producidos por el objeto es la que determina cuán compacta es la región central de rayos gama de un núcleo galáctico activo. Como la opacidad es función de la energía de los fotones, el tamaño de la fotosfera de rayos gama observable dependerá también de la energía observada. La amplificación diferencial durante el evento de *microlensing*, dará lugar entonces a efectos de cromaticidad. Para calcular estos efectos, se adoptará un radio de la fotosfera dado por la altura máxima a la cual los fotones de energía E son absorbidos por creación de pares en el campo de radiación X del disco de acreción interno. De acuerdo con Becker & Kafatos [98], este tamaño es

$$r_\gamma \propto E^{\alpha/(2\alpha+3)}, \quad (5.9)$$

donde α es el índice espectral en rayos X del campo de radiación del disco de acreción. En los cálculos, se adoptará un valor promedio $\alpha = 1.1$ [11]. Las fotosferas mas grandes serán entonces aquellas observadas a las energías más altas. Para calcular los efectos de *microlensing* sobre los núcleos galácticos activos, se define una fuente de referencia con radio r_{ref} y energía (en gama) E_{ref} , tal que

$$R_\gamma(E) = R_{\text{ref}} \left(\frac{E}{E_{\text{ref}}} \right)^{\alpha/(2\alpha+3)}, \quad (5.10)$$

donde $R_\gamma = r_\gamma/R_E$ y $R_{\text{ref}} = r_{\text{ref}}/R_E$ son los radios en unidades del radio de Einstein

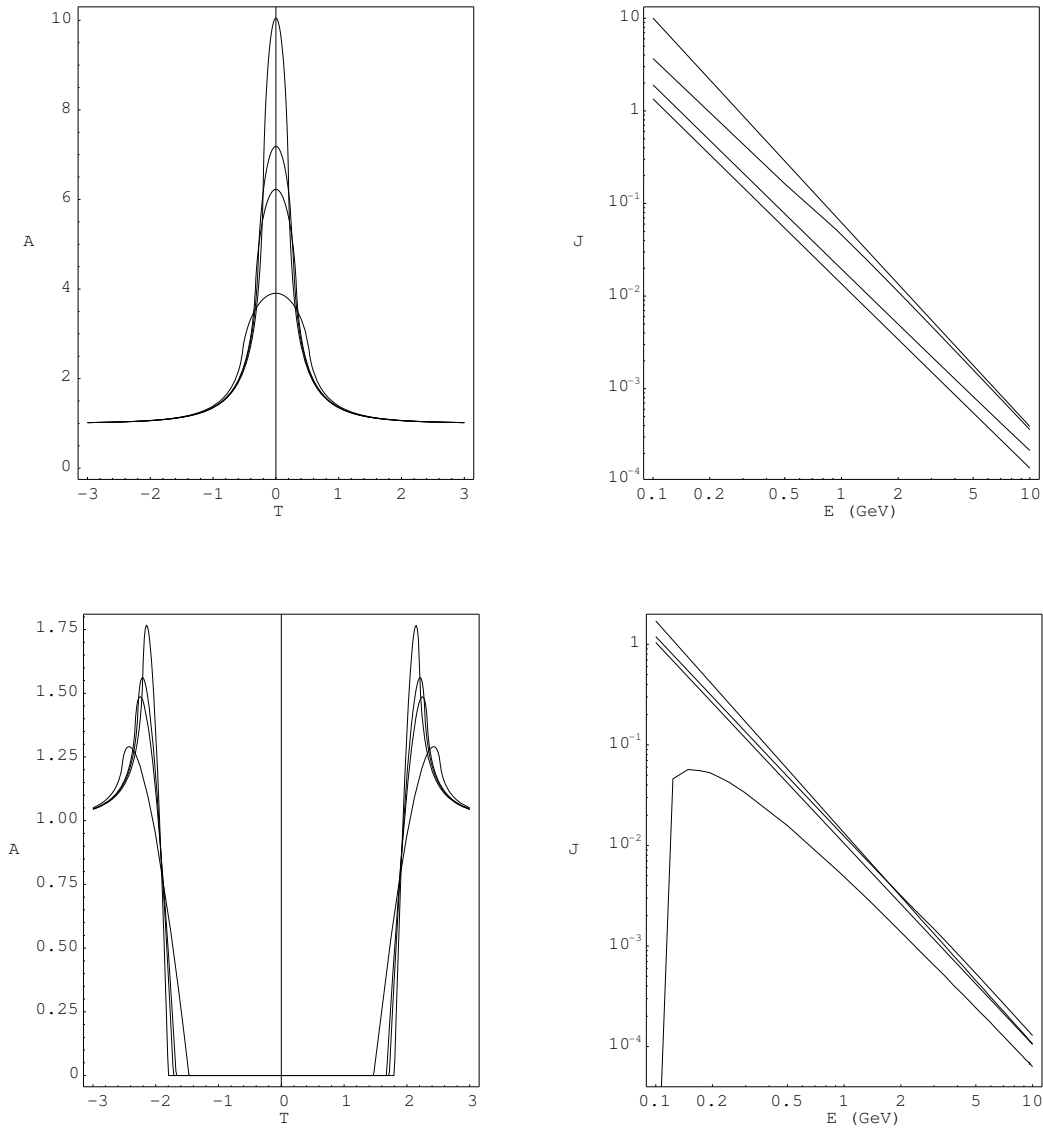


Figura 5.10: Curvas de luz (a la izquierda) para un evento de *microlensing* de un núcleo galáctico activo emisor de rayos gama producido por una lente de masa positiva (panel superior) y una lente de masa negativa (panel inferior). Parámetro de impacto $u = 0$. Las diferentes curvas corresponden a las amplificaciones de las diferentes regiones del objeto. Las energías consideradas son 10GeV, 1GeV, 500MeV, and 100MeV, y corresponden, tanto en el caso positivo como en el negativo, a las curvas que se muestran en los diagramas de la izquierda de abajo hacia arriba. Los cambios espectrales correspondientes a la fuente completa se muestran en los paneles del lado derecho. Para el caso positivo el espectro evoluciona de arriba hacia abajo a medida que el tiempo aumenta de $T = 0$ to $T = 1$. En el caso negativo, en cambio, la evolución de las curvas en el tiempo es, de arriba hacia abajo, $T = 2.1$, $T = 2.4$, $T = 3.0$, y finalmente la curva para $T = 1.8$. Ver el texto principal para más detalles.

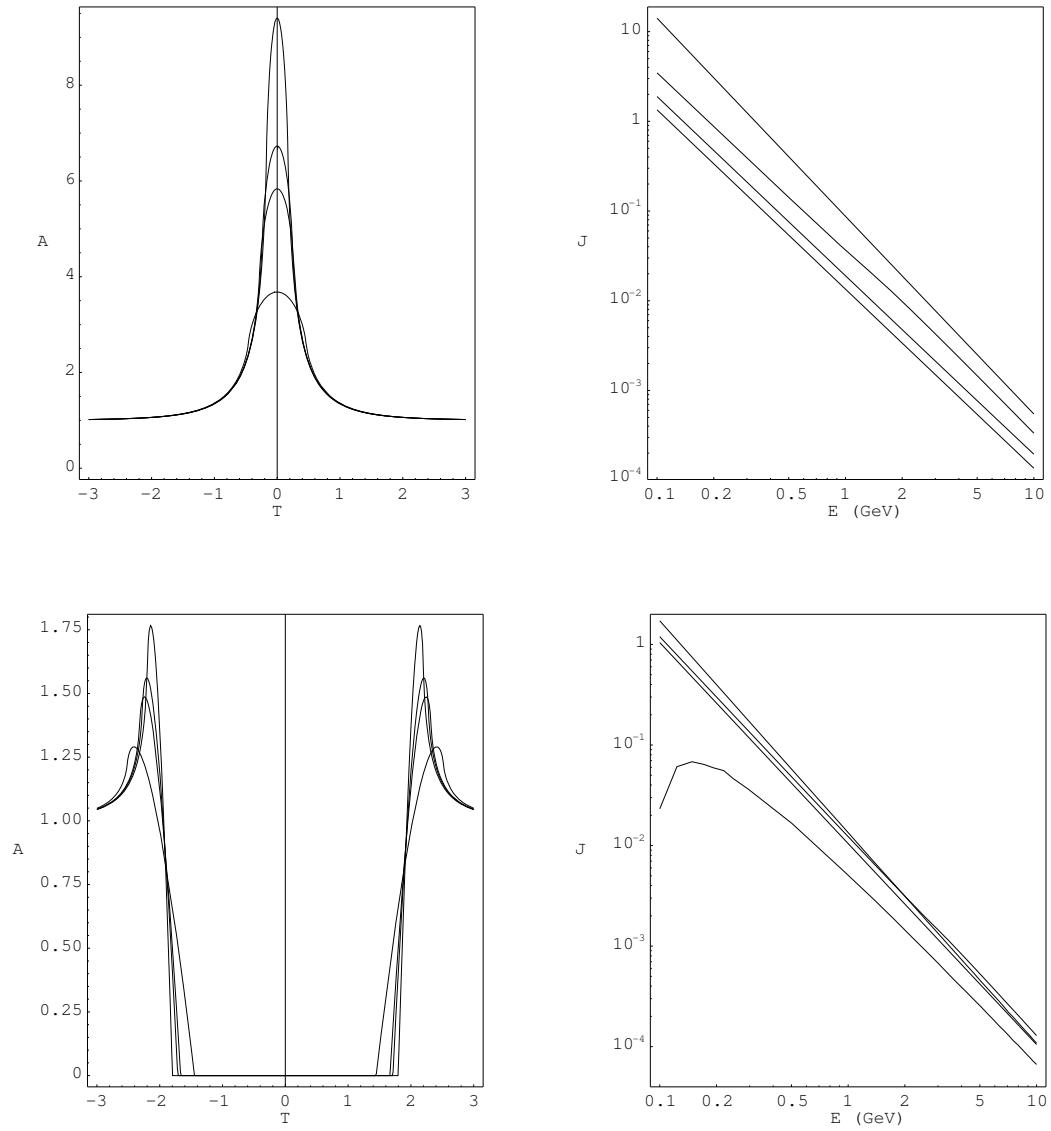


Figura 5.11: Idem Fig. 5.10, pero con $u = 0.5$

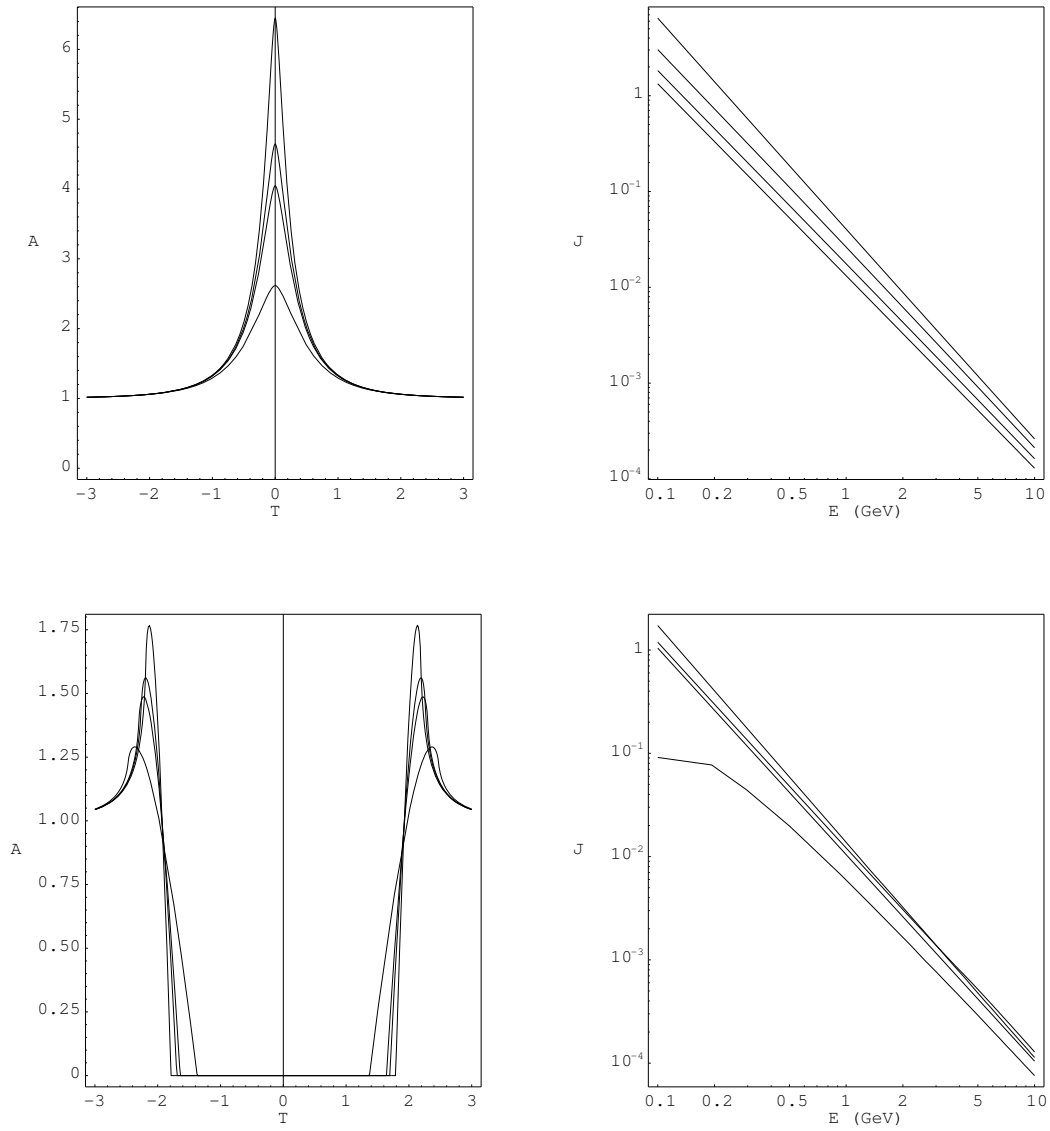


Figura 5.12: Idem Fig. 5.10, pero con $u = 1$

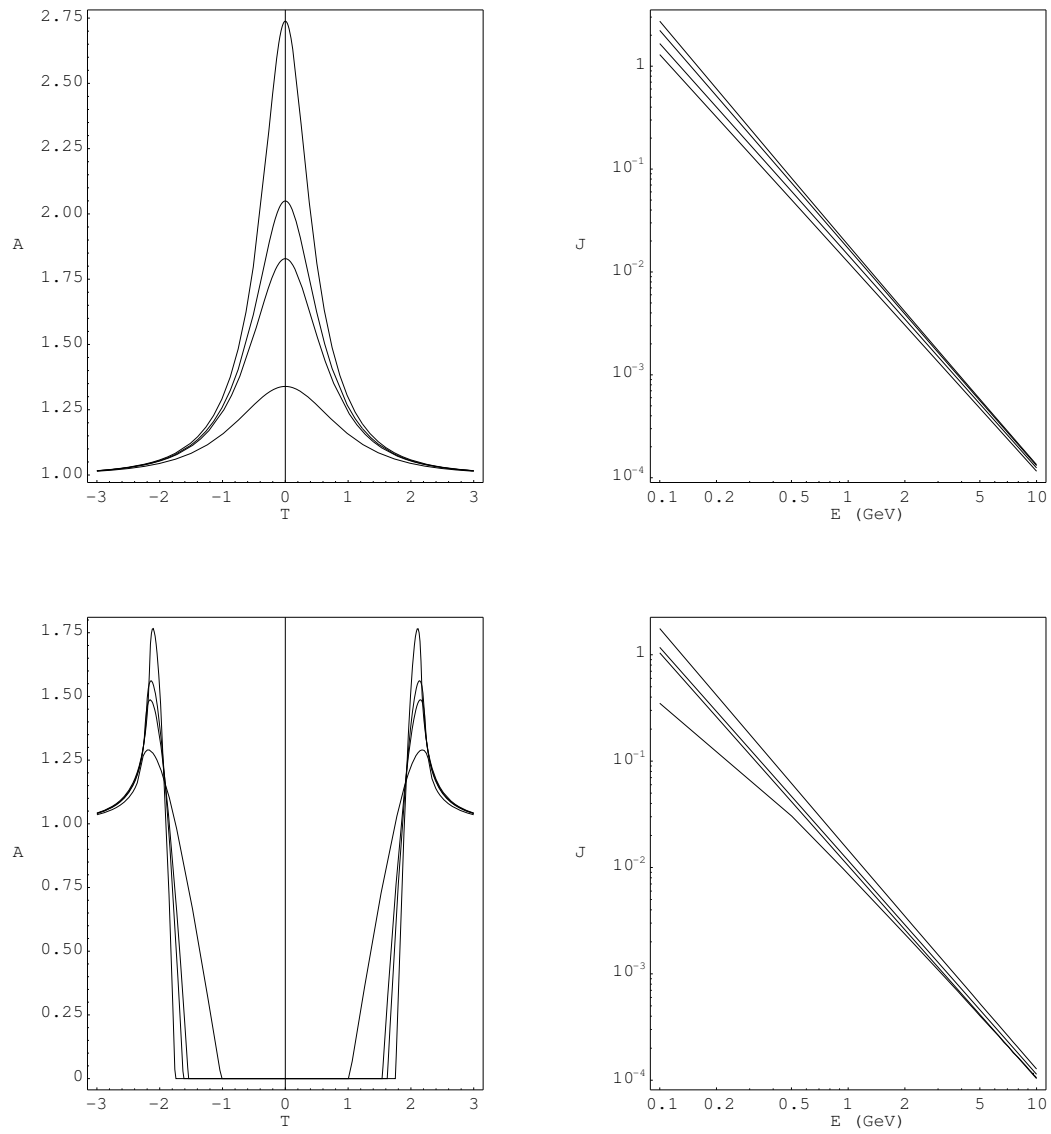


Figura 5.13: Idem Fig. 5.10, pero con $u = 2$

(R_E) .

La intensidad de la fuente (sin la lente) es uniforme y su espectro sigue aproximadamente una ley de potencias:

$$I_0(E) \propto E^{-\xi} \quad (5.11)$$

con ξ típicamente en el rango $\xi \in (1.7, 2.7)$. Se puede escribir esta última ecuación en la forma:

$$I_0(E) = I_{\text{ref}} \left(\frac{E}{E_{\text{ref}}} \right)^{-\xi}, \quad (5.12)$$

donde I_{ref} es la intensidad de una fuente de referencia. Se asume que la distribución de intensidad es constante a una dada energía

$$\mathcal{I}_0(E) = \frac{I_0(E)}{\pi (R_\gamma(E))^2}. \quad (5.13)$$

Luego, la amplificación total de la fuente, debida a la micro-lente, puede ser calculada por

$$A = \frac{I}{I_0} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_\gamma(E)} \mathcal{I}_0(E) A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_\gamma(E)} \mathcal{I}_0(E) R dR d\varphi}. \quad (5.14)$$

Como $\mathcal{I}_0(E)$ no depende de (R, φ) , se tiene que

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_\gamma(E)} A_p(R, \varphi) R dR d\varphi}{\pi (R_\gamma(E))^2}. \quad (5.15)$$

De la Ec. (5.12) y la Ec. (5.14) se obtiene:

$$I = AI_0 = AI_{\text{ref}} \left(\frac{E}{E_{\text{ref}}} \right)^{-\xi}. \quad (5.16)$$

Introduciendo el parámetro de impacto mínimo (adimensional) como:

$$u = \frac{B_0}{R_\gamma(E)}. \quad (5.17)$$

Adoptando $\xi = 2$, $R_{\text{ref}} = 0.2$, y $E_{\text{ref}} = 100$ MeV, se puede usar la Ec. (5.15) y la Ec. (5.16) para calcular las curvas de luz esperadas y la evolución espectral durante el evento de *microlensing*. Los resultados se muestran, para varios parámetros de impacto, en las Figs. 5.10-5.13, donde J es el cociente entre I e I_{ref} .

El punto principal a enfatizar en la evolución espectral de las imágenes de la fuente es que, cuando la lente es un agujero de gusano, el espectro emerge de la umbra a su nivel más bajo (la curva de abajo en los gráficos de los espectros) y luego salta a su máximo, del cual decrece lentamente manteniendo su pendiente en el diagrama logarítmico. Esto ocurre porque después del tránsito la intensidad debe

recobrase desde el valor nulo de la umbra. Los efectos del oscurecimiento diferencial también aparecen como un claro quiebre en el espectro a tiempos tempranos del tránsito. Este quiebre, con endurecimiento a energías más bajas, es el resultado de que las gama-esferas más pequeñas y menos energéticas emergen de la umbra después que las más energéticas y grandes, y estando entonces inicialmente menos amplificadas. El quiebre en el espectro se aprecia mejor en la Fig. 5.12, donde el parámetro de impacto es $u = 1$.

En el caso de las lentes de masa positiva (conjunto de paneles superiores en las figuras) la evolución es más suave, decreciendo la emisión en todas las longitudes de onda después del tránsito. Los efectos de cromaticidad en este caso están limitados a un pequeño cambio en la pendiente a energías medianas.

5.8 Conclusiones

En este Capítulo se desarrolló el formalismo para *microlensing* gravitacional de fuentes extensas cuando la lente es un objeto tipo agujero de gusano. En el caso galáctico, se estudiaron los efectos de cromaticidad introducidos por el tamaño finito de la fuente y la distribución no uniforme de intensidad sobre ella (oscurecimiento del limbo), encontrando un conjunto de características muy peculiares que permiten una clara identificación de cualquier lente que tenga una densidad de energía negativa. Construyendo una curva de color completa, tomando en cuenta también los efectos del mezclado, se analizaron las posibilidades de una detección real de los efectos de cromaticidad. Estos efectos de cromaticidad, cuando se combinan con las curvas de luz, proveen una herramienta única para el estudio de la posible existencia de agujeros de gusano naturales. En el caso extragaláctico, la dependencia del tamaño de las regiones emisoras de rayos gama con la energía en los núcleos galácticos activos, lleva a una amplificación diferencial de las distintas regiones de los mismos. Las amplificaciones y los espectros presentan grandes diferencias cuando la microlente es de masa negativa con respecto al caso positivo.

Los objetos astronómicos de masa negativa, si es que existen, serán detectados a través de los efectos que producen sobre la luz proveniente de fuentes lejanas. Si una búsqueda consistente da lugar a un resultado negativo, se podrá establecer, desde un punto de vista estadístico, un límite a la cantidad de masa negativa en el universo. Este tipo de búsqueda ya ha comenzado. El grupo MOA⁴ neocelandés está adaptando sus alertas para tener en cuenta el tipo de eventos discutidos en este Capítulo [99].

⁴ *Microlensing Observations in Astrophysics*

Capítulo 6

Agujeros negros como lentes gravitacionales

En este Capítulo se estudia el escenario de *lensing* gravitacional con campo fuerte, donde la lente es un agujero negro de Reissner-Nordström. Se obtienen las ecuaciones básicas y se muestra que, igual que en el caso de un agujero negro de Schwarzschild, además de las imágenes primaria y secundaria, se forman dos conjuntos infinitos de imágenes relativistas. Se encuentran expresiones analíticas para las posiciones y las ampliaciones de las imágenes relativistas. El formalismo se aplica al caso de un agujero negro poco masivo ubicado en el halo galáctico.

6.1 Introducción

En los Capítulos anteriores se trabajó siempre con campo débil. Cuando la lente es un objeto muy compacto (por ejemplo un agujero negro) no es válida la aproximación de campo débil para parámetros de impacto muy cercanos al objeto. Virbhadra y Ellis estudiaron recientemente la situación de campo fuerte [100]. Obtuvieron la ecuación de la lente usando una métrica de fondo asintóticamente plana y analizaron el caso de un agujero negro de Schwarzschild ubicado en el centro de nuestra galaxia como lente, usando métodos numéricos. Además de las imágenes primaria y secundaria, encontraron que existe un conjunto infinito de imágenes relativistas débiles a ambos lados del eje óptico. Frittelli et al. [101] hallaron una ecuación de la lente exacta sin ninguna referencia a una métrica de fondo y compararon sus resultados con los de Virbhadra y Ellis para el caso de un agujero negro de Schwarzschild. Bozza et al. [102] obtuvieron expresiones analíticas para las posiciones y la ampliación de las imágenes relativistas usando la aproximación del límite de campo fuerte.

En este Capítulo se estudia el problema de un agujero negro de Kerr-Newman lentamente rotante que actúa como lente. La introducción de objetos cargados en la teoría de las lentes gravitacionales con campo fuerte se justifica por el hecho que se piensa que los agujeros negros cargados son el resultado final del colapso catastrófico de estrellas magnetizadas muy masivas ($M > 35 M_{\odot}$). Aunque la acreción

selectiva de los alrededores podría neutralizar al agujero negro cargado si está en un medio de alta densidad, si el agujero negro de Kerr-Newman está rodeado por una magnetósfera co-rotante con carga opuesta existe la posibilidad de que no se descargue tan rápidamente. Este tipo de configuración presentaría una carga neta igual a cero vista desde el infinito y por lo tanto podría sobrevivir por un lapso de tiempo significativo ($10^3 - 10^5$ años) si está ubicado en un medio de baja densidad [103]. Es más, la magnetósfera podría tener efectos observacionales debido a la aceleración electrostática en caídas de potencial en las regiones polares, similares a los que presentan los pulsares [103]. El viento relativista producido por el agujero negro de Kerr-Newman podría ser responsable de la emisión de radiación gama detectable [104]. Luego, el estudio de otras posibles firmas observacionales de los agujeros negros cargados presenta particular interés.

En la Sección 6.2 de este Capítulo se introducen las ecuaciones básicas usando la métrica de Reissner-Nordström para el agujero negro y una métrica de fondo plana. El caso de Reissner-Nordström también puede ser usado para estudiar agujeros negros de Kerr-Newman lentamente rotantes. Los objetos altamente rotantes rompen la simetría esférica, introduciendo complicaciones en los cálculos de *lensing*, que no llevan a resultados cualitativamente diferentes. En la Sección 6.3 se usa la aproximación de límite de campo fuerte para obtener expresiones analíticas de las posiciones y las ampliaciones de las imágenes relativistas. En la Sección 6.4 se calculan las posiciones y las ampliaciones de las imágenes primaria y secundaria usando la aproximación de campo débil. En la Sección 6.5 se aplica el formalismo a un agujero negro pequeño (7 masas solares) en el halo galáctico. Finaliza el Capítulo con la Sección 6.6, donde se sacan algunas conclusiones.

En este Capítulo se usan unidades geométricas (ver apéndice A).

6.2 Ecuaciones básicas

En el Capítulo 2 se vio que los agujeros negros están caracterizados únicamente por tres cantidades: M (masa), Q (carga) y S (momento angular intrínseco). Escrita en las coordenadas t, r, θ, φ de Boyer y Lindquist, la geometría de Kerr-Newman tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{-\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (6.1)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (6.2)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (6.3)$$

$$a = \frac{S}{M}. \quad (6.4)$$

La geometría de Kerr-Newman posee simetría axial respecto del eje de rotación (z). El horizonte de eventos está ubicado en

$$r_H = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}. \quad (6.5)$$

Un agujero negro no rotante corresponde a un agujero negro isótropo con carga Q . La métrica es la de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2. \quad (6.6)$$

El horizonte está ubicado en

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (6.7)$$

y el radio de la esfera de fotones es

$$r_{ps} = \frac{3}{2}M \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{Q^2}{M^2}} \right). \quad (6.8)$$

Se estudia situación que muestra la Fig. 6.1. Se considera que el espacio-tiempo de fondo es asintóticamente plano, con el observador y la fuente ubicados en la región plana del espacio-tiempo, y puede ser inmerso, si es necesario, en un Universo de Robertson-Walker en expansión. De la Fig. 6.1 se puede ver que la ecuación de la lente puede expresarse [100]

$$\tan \beta = \tan \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os}} (\tan \theta + \tan(\alpha - \theta)), \quad (6.9)$$

donde β y θ son, respectivamente, las posiciones angulares de la fuente y de la imagen y α es el ángulo de deflexión debido al agujero negro.

Siguiendo la Sección 8.5 de [2], se tiene que el ángulo de deflexión para un rayo de luz es

$$\alpha(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r_0} + \frac{Q^2}{r_0^2}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}} - \pi, \quad (6.10)$$

donde r_0 es la distancia de mayor acercamiento. El parámetro de impacto es

$$J(r_0) = r_0 \left(1 - \frac{2M}{r_0} + \frac{Q^2}{r_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.11)$$

Del diagrama de la Fig. 6.1 es fácil ver que

$$J(r_0) = D_{ol} \sin \theta. \quad (6.12)$$

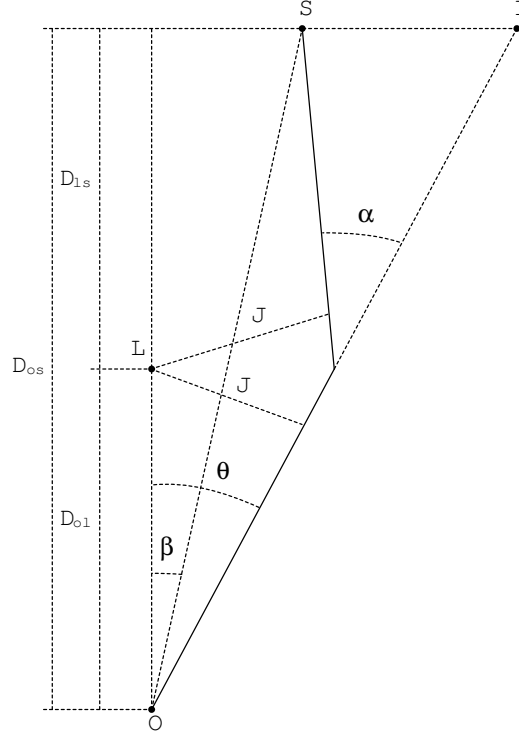


Figura 6.1: Diagrama de la lente gravitacional. Se muestran las posiciones del observador (O), la lente (L), la fuente (S) y la imagen (I). Las distancias observador-lente, observador-fuente y lente-fuente son, respectivamente, D_{ol} , D_{os} , D_{ls} . α es el ángulo de deflexión y J es el parámetro de impacto.

Definiendo las distancias y la carga en términos del radio de Schwarzschild ($2M$):

$$x = \frac{r}{2M}, \quad x_0 = \frac{r_0}{2M}, \quad b = \frac{J}{2M},$$

$$d_{ol} = \frac{D_{ol}}{2M}, \quad d_{os} = \frac{D_{os}}{2M}, \quad d_{ls} = \frac{D_{ls}}{2M},$$

$$q = \frac{Q}{2M},$$

se tiene que

$$\alpha(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{q^2}{x^2}\right)}} - \pi, \quad (6.13)$$

$$b(x_0) = x_0 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = d_{ol} \sin \theta, \quad (6.14)$$

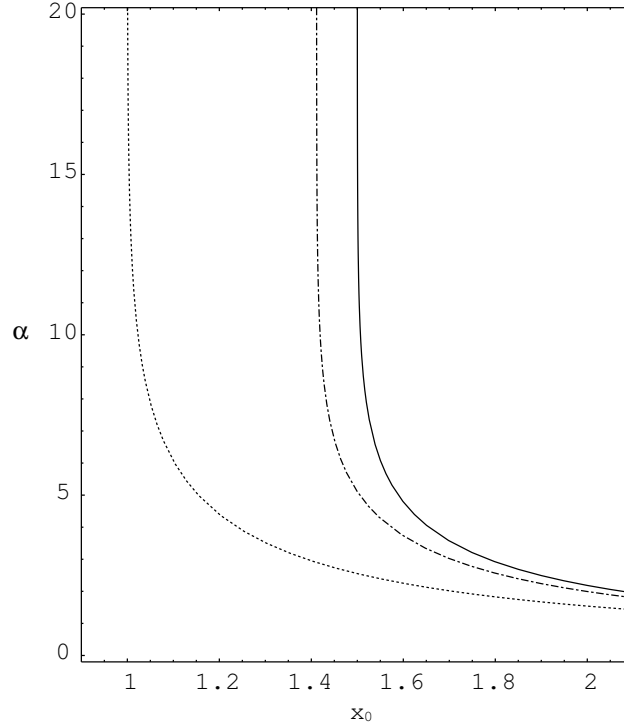


Figura 6.2: El ángulo de deflexión α (en radianes) se grafica en función de la distancia de mayor acercamiento x_0 . La línea de trazo continuo corresponde a $Q = 0$, la de rayas y puntos a $|Q| = 0.5M$ y la de puntos a $|Q| = M$. En cada curva la asíntota vertical esta ubicada en $x_0 = x_{ps}$.

$$x_H = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - q^2}, \quad (6.15)$$

$$x_{ps} = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{9}q^2} \right). \quad (6.16)$$

El ángulo de deflexión α para un rayo de luz que pasa a la derecha del agujero negro se grafica en función de la distancia de mayor acercamiento x_0 en la Fig. 6.2. Se ve que cuando x_0 toma valores cercanos a x_{ps} el ángulo de deflexión α es más grande que 2π , de modo que el rayo de luz puede dar varias vueltas alrededor del agujero negro antes de llegar al observador. De este modo, además de las imágenes primaria y secundaria (con $|\alpha| < 2\pi$), se tienen dos conjuntos infinitos de imágenes relativistas, uno producido rodeando el agujero negro en sentido horario ($\alpha > 0$) y el otro rodeandolo en sentido antihorario ($\alpha < 0$). Estas imágenes están ubicadas, respectivamente, del mismo lado y del lado opuesto de la fuente. En la Fig. 6.3 se muestra esto en forma esquemática.

Para una dada posición de la fuente β , se debe resolver la Ec. (6.9) con las Ecs.

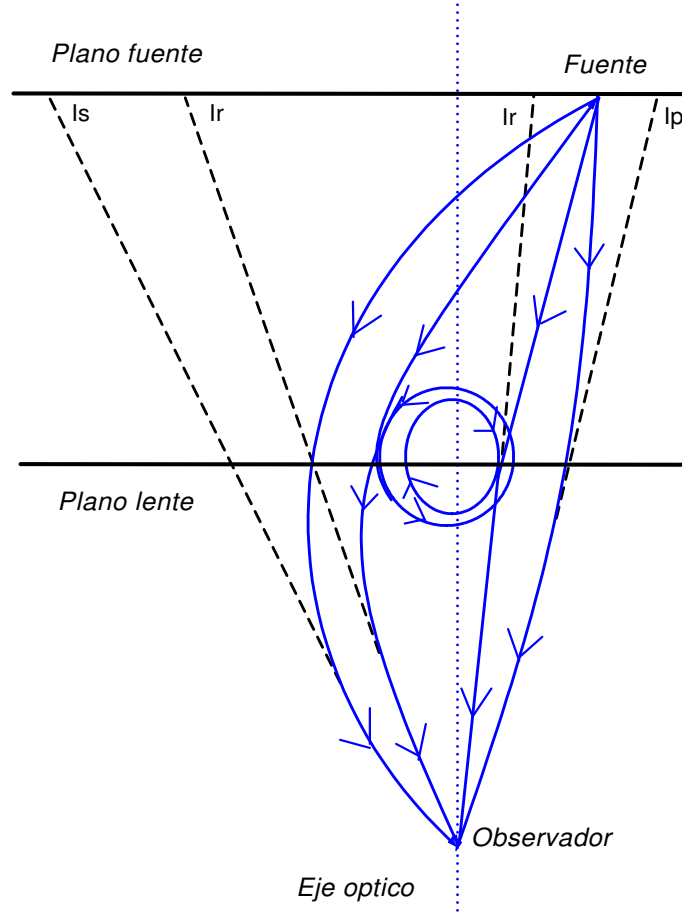


Figura 6.3: Las imágenes primaria (I_p) y secundaria (I_s) se forman cuando el ángulo de deflexión es (en módulo) menor que 2π . Las imágenes relativistas (I_R) se obtienen cuando el ángulo de deflexión es (en módulo) mayor que 2π (se muestran la primera que se forma al rodear al agujero negro con sentido horario y la primera con sentido antihorario).

(6.13) y (6.14) para obtener las posiciones de las imágenes. La ecuación trascendente (6.9) es difícil de resolver aún en forma numérica.

La amplificación para una lente con simetría circular viene dada por

$$A = \left| \frac{\sin \beta}{\sin \theta} \frac{d\beta}{d\theta} \right|^{-1}. \quad (6.17)$$

Derivando ambos miembros de la Ec. (6.9) y con un poco de algebra, se tiene que

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \left(\frac{\cos \beta}{\cos \theta} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{d_{ls}}{d_{os}} \left[1 + \left(\frac{\cos \theta}{\cos(\alpha - \theta)} \right)^2 \left(\frac{d\alpha}{d\theta} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (6.18)$$

donde

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\alpha}{dx_0} \frac{dx_0}{d\theta}, \quad (6.19)$$

con

$$\frac{d\alpha}{dx_0} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{-x^4 (x_0 - 2q^2) + x_0^4 (x - 2q^2)}{x_0^5 x^3 \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{q^2}{x^2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}} dx, \quad (6.20)$$

obtenida derivando la Ec. (6.13) y

$$\frac{dx_0}{d\theta} = \frac{x_0^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{d_{ol}} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2} \right)^{-1}}}{\frac{1}{2d_{ol}} (2x_0^2 - 3x_0 + 2q^2)}, \quad (6.21)$$

obtenida derivando ambos miembros de la Ec. (6.14) y haciendo algunos trucos algebraicos.

6.3 Ángulo de deflexión en términos de integrales elípticas

Es conveniente expresar las integrales of Ecs. (6.13) y (6.20) en términos de integrales elípticas estándar. La Ec. (6.13) puede ponerse en la forma

$$\alpha(x_0) = \frac{2x_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2}}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} - \pi, \quad (6.22)$$

donde

$$P(x) = x^4 + x_0^2 \left(1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2} \right)^{-1} (-x^2 + x - q^2), \quad (6.23)$$

es un polinomio de cuarto grado. Las cuatro raíces de $P(x)$ dependen sólo de x_0 y q , y son reales para $x_0 > x_{ps}$ y $|Q| \leq M$. Llamando a estas raíces $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$, la primera de ellas es $r_1 = x_0$ y las otras tienen expresiones muy largas (que no se dan aquí por falta de espacio) que pueden ser obtenidas con programas estándar. Luego la integral exacta de la Ec. (6.13) se puede escribir como

$$\alpha(x_0) = G(x_0)F(\phi_0, \lambda) - \pi, \quad (6.24)$$

con

$$G(x_0) = \frac{4x_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{x_0} + \frac{q^2}{x_0^2}}} \frac{1}{\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}}, \quad (6.25)$$

y

$$F(\phi_0, \lambda) = \int_0^{\phi_0} \left(1 - \lambda \sin^2 \phi \right)^{-\frac{1}{2}} d\phi, \quad (6.26)$$

una integral elíptica de primera especie con argumentos

$$\phi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(r_2 - r_4)}{(r_1 - r_4)}}, \quad (6.27)$$

$$\lambda = \frac{(r_1 - r_4)(r_2 - r_3)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}. \quad (6.28)$$

La derivada del ángulo de deflexión puede expresarse:

$$\frac{d\alpha}{dx_0} = F(\phi_0, \lambda) \frac{dG}{dx_0} + G(x_0) \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dx_0} + G(x_0) \frac{\partial F}{\partial \phi_0} \frac{d\phi_0}{dx_0}, \quad (6.29)$$

y escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx_0} = & F(\phi_0, \lambda) \frac{dG}{dx_0} + G(x_0) \left(-\frac{E(\phi_0, \lambda)}{2(\lambda - 1)\lambda} - \frac{F(\phi_0, \lambda)}{2\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(2\phi_0)}{4(\lambda - 1)\sqrt{1 - \lambda \sin^2 \phi_0}} \right) \frac{d\lambda}{dx_0} + \frac{G(x_0)}{\sqrt{1 - \lambda \sin^2 \phi_0}} \frac{d\phi_0}{dx_0}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde

$$E(\phi_0, \lambda) = \int_0^{\phi_0} (1 - \lambda \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad (6.31)$$

es una integral elíptica de segunda especie con los argumentos ϕ_0 y λ dados arriba.

6.4 Límite de campo fuerte

En esta Sección se harán algunas aproximaciones. La primera es que cuando la fuente y la lente están casi alineadas se puede reemplazar $\tan \theta$ por θ y $\tan \beta$ por β . Para las imágenes relativistas que se producen cuando los rayos de luz dan la vuelta alrededor del agujero negro con sentido horario, se puede escribir $\alpha = 2n\pi + \Delta\alpha_n$ con n entero y $0 < \Delta\alpha_n \ll 1$, de modo que $\tan(\alpha - \theta)$ puede ser aproximada por $\Delta\alpha_n - \theta$. Como en el caso del *lensing* por un agujero negro de Schwarzschild, si un rayo de luz emitido por la fuente S llega al observador después de dar la vuelta alrededor del agujero negro, α debe tomar valores muy cercanos a un múltiplo de 2π .

Luego la ecuación de la lente toma la forma [102]:

$$\beta = \theta - \frac{D_{ls}}{D_{os}} \Delta\alpha_n = \theta - \frac{d_{ls}}{d_{os}} \Delta\alpha_n, \quad (6.32)$$

y el parámetro de impacto es

$$b \approx \frac{D_{ol}}{2M} \theta = d_{ol} \theta. \quad (6.33)$$

Las imágenes relativistas se forman cuando el rayo de luz pasa muy cerca de la esfera de fotones. Por lo tanto es conveniente escribir la distancia de mayor acercamiento x_0 como

$$x_0 = x_{\text{ps}} + \varepsilon, \quad (6.34)$$

donde $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Bozza et al [102] mostraron que para el agujero negro de Schwarzschild el ángulo de deflexión puede ser aproximado por:

$$\alpha = -2 \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{18} \varepsilon \right) - \pi. \quad (6.35)$$

De la Fig. 6.2 se puede ver que las curvas que representan el ángulo de deflexión tienen una forma muy parecida para los diferentes valores de Q . Por lo tanto, se buscará aquí una aproximación similar

$$\alpha = -A \ln(B\varepsilon) - \pi, \quad (6.36)$$

donde A y B son números positivos que solamente dependen de $q = Q/2M$.

A y B se eligen de modo que se cumpla la condición:

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} (\alpha_{\text{exacto}} - \alpha_{\text{aprox.}}) = 0, \quad (6.37)$$

con α_{exacto} dado por la Ec. (6.13)¹ y $\alpha_{\text{aprox.}}$ dado por la Ec. (6.36). La Ec. (6.37) puede ser escrita en la forma

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} \left[\alpha_{\text{aprox.}} \left(\frac{\alpha_{\text{exacto}}}{\alpha_{\text{aprox.}}} - 1 \right) \right] = 0, \quad (6.38)$$

de modo que una condición necesaria (pero no suficiente) es que

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} \frac{\alpha_{\text{exacto}}}{\alpha_{\text{aprox.}}} = 1. \quad (6.39)$$

Como $\alpha \rightarrow \infty$ cuando $x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}$, usando la regla de L'Hospital en el límite de la Ec. (6.39), es fácil hallar A :

$$A = \lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} \left[-(x_0 - x_{\text{ps}}) \frac{d\alpha_{\text{exacto}}}{dx_0} \right], \quad (6.40)$$

con $\frac{d\alpha_{\text{exacto}}}{dx_0}$ dada por la Ec. (6.20)².

Para obtener B , se reemplaza la Ec.(6.36) en la Ec. (6.37):

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} [\alpha_{\text{exacto}} + A \ln B(x_0 - x_{\text{ps}}) + \pi] = 0, \quad (6.41)$$

¹O en términos de integrales elípticas por la Ec. (6.24).

²O en términos de integrales elípticas por la Ec. (6.30).

la cual, usando propiedades de los logaritmos puede ser expresada como

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} A \ln \left[B(x_0 - x_{\text{ps}}) \exp \left(\frac{\alpha_{\text{exacto}} + \pi}{A} \right) \right] = 0, \quad (6.42)$$

de modo que

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} B(x_0 - x_{\text{ps}}) \exp \left(\frac{\alpha_{\text{exacto}} + \pi}{A} \right) = 1, \quad (6.43)$$

luego

$$B = \lim_{x_0 \rightarrow x_{\text{ps}}} \frac{\exp \left[\frac{-(\alpha_{\text{exacto}} + \pi)}{A} \right]}{(x_0 - x_{\text{ps}})}. \quad (6.44)$$

En la Tabla 6.1 se muestran los valores de A y B para algunos valores de Q .

$ Q $	0	$0.1M$	$0.25M$	$0.5M$	$0.75M$	$1M$
A	2.00000	2.00224	2.01444	2.06586	2.19737	2.82843
B	0.207338	0.207979	0.21147	0.225997	0.262085	0.426782

Tabla 6.1: Valores numéricos para los coeficientes A y B . Ver el texto para su explicación.

En la Fig. 6.4 se grafica el cociente $\alpha_{\text{exacto}}/\alpha_{\text{aprox.}}$ para $0 \leq \varepsilon \leq 0.05$. El error que se comete al usar $\alpha_{\text{aprox.}}$ es muy pequeño, menor al 1.5 por ciento para $|Q| \leq 0.5M$ y menor al 2 por ciento para $0.5M \leq |Q| \leq M$.

El parámetro de impacto dado por la Ec. (6.14) puede ser aproximado, usando un desarrollo de Taylor de segundo orden en ε , por

$$b = C + D\varepsilon^2, \quad (6.45)$$

con

$$C = \frac{(3 + \sqrt{9 - 32q^2})^2}{4\sqrt{6 - 16q^2 + 2\sqrt{9 - 32q^2}}}, \quad (6.46)$$

y

$$D = \frac{72 - 256q^2}{(9 - 32q^2 + \sqrt{9 - 32q^2})\sqrt{6 - 16q^2 + 2\sqrt{9 - 32q^2}}}, \quad (6.47)$$

donde se hizo uso de las Ecs. (6.16) y (6.34). Invertiendo la Ec. (6.45) para obtener ε :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{b - C}{D}}, \quad (6.48)$$

reemplazando las Ecs. (6.33) y (6.48) en la Ec. (6.36) se tiene que

$$\alpha \approx -A \ln \left(B \sqrt{\frac{d_{\text{ol}}\theta - C}{D}} \right) - \pi. \quad (6.49)$$

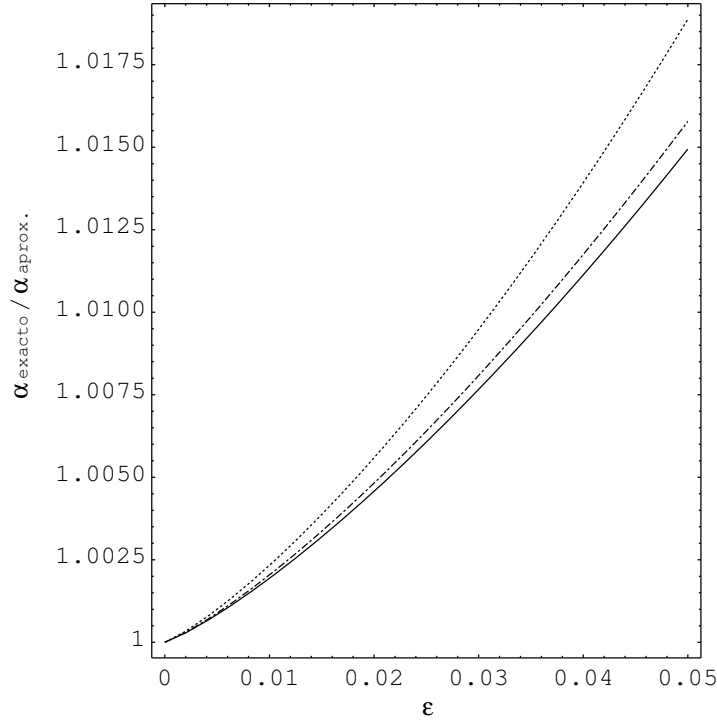


Figura 6.4: El cociente $\alpha_{\text{exacto}}/\alpha_{\text{aprox.}}$ se grafica en función de $\varepsilon = x_0 - x_{\text{ps}}$. La línea de trazo continuo corresponde a $Q = 0$, la de rayas y puntos a $|Q| = 0.5M$ y la de puntos a $|Q| = M$.

La posición de la n -ésima imagen relativista puede ser aproximada por medio de un desarrollo de Taylor alrededor de $\alpha = 2n\pi$

$$\theta_n \approx \theta_n^0 - \rho_n \Delta\alpha_n, \quad (6.50)$$

con

$$\theta_n^0 = \theta(\alpha = 2n\pi), \quad (6.51)$$

y

$$\rho_n = - \left. \frac{d\theta}{d\alpha} \right|_{\alpha=2n\pi}. \quad (6.52)$$

Invirtiendo la Ec. (6.49) se tiene que

$$\theta = \frac{1}{d_{\text{ol}}} \left\{ \frac{D}{B^2} \exp \left[\frac{-2}{A} (\alpha + \pi) \right] + C \right\}, \quad (6.53)$$

luego

$$\theta_n^0 = \frac{1}{d_{\text{ol}}} \left\{ \frac{D}{B^2} \exp \left[\frac{-2}{A} (2n + 1)\pi \right] + C \right\}, \quad (6.54)$$

y

$$\rho_n = \frac{2D}{d_{ol}AB^2} \exp \left[\frac{-2}{A}(2n+1)\pi \right]. \quad (6.55)$$

De la Ec. (6.50)

$$\Delta\alpha_n \approx \frac{\theta_n - \theta_n^0}{-\rho_n}, \quad (6.56)$$

reemplazando esta última en la ecuación de la lente, Ec. (6.32):

$$\begin{aligned} \beta &= \theta_n + \frac{d_{ls}}{d_{os}} \frac{\theta_n - \theta_n^0}{\rho_n} \\ &= \left(1 + \frac{d_{ls}}{d_{os}\rho_n} \right) \theta_n + \frac{d_{ls}}{d_{os}\rho_n} \theta_n^0. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Usando que $\rho_n \propto \frac{1}{d_{ol}}$, entonces $\frac{d_{ls}}{d_{os}\rho_n} \propto \frac{d_{ls}d_{ol}}{d_{os}} \gg 1$, se puede despreciar el 1 dentro del paréntesis para obtener las posiciones aproximadas de las imágenes relativistas:

$$\theta_n = \theta_n^0 + \frac{d_{os}\rho_n}{d_{ls}} \beta. \quad (6.58)$$

Vale la pena señalar que el segundo término en la última ecuación es una corrección pequeña sobre θ_n^0 . Cuando la fuente y la lente están alineadas, $\beta = 0$ y se obtienen los anillos de Einstein relativistas con radio angular $\theta_n^E = \theta_n^0$.

La amplificación de la imagen n-ésima viene dada por

$$A_n \approx \left| \frac{\beta}{\theta_n} \frac{d\beta}{d\theta_n} \right|^{-1}, \quad (6.59)$$

la cual, usando la Ec. (6.58), da como resultado

$$A_n = \left| \left(\theta_n^0 + \frac{d_{os}\rho_n}{d_{ls}} \beta \right) \frac{d_{os}\rho_n}{\beta d_{ls}} \right|, \quad (6.60)$$

despreciando el término con $\left(\frac{d_{os}\rho_n}{d_{ls}} \right)^2$ se tiene que

$$A_n \approx \frac{1}{|\beta|} \frac{d_{os}}{d_{ls}} \theta_n^0 \rho_n. \quad (6.61)$$

Como resulta que $A_n \propto \frac{d_{os}}{\beta d_{ls} d_{ol}^2}$, entonces las amplificaciones de las imágenes relativistas son muy pequeñas salvo que el observador, la lente y la fuente estén altamente alineados.

Con un tratamiento similar para las imágenes formadas cuando los rayos de luz dan vueltas alrededor del agujero negro con sentido anti-horario, las posiciones de las imágenes relativistas serán

$$\theta_n = -\theta_n^0 + \frac{d_{os}\rho_n}{d_{ls}} \beta, \quad (6.62)$$

y las ampliaciones vendrán dadas nuevamente por la Ec. (6.61), pero con paridad opuesta.

Para obtener la ampliación total de las imágenes relativistas, se deben tener en cuenta las imágenes a ambos lados del eje óptico y sumar

$$A_R = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{2}{|\beta|} \frac{d_{os}}{d_{ls}} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^0 \rho_n, \quad (6.63)$$

la cual, usando que la suma de una serie geométrica da como resultado $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$ for $|a| < 1$, se tiene que

$$A_R \approx \frac{1}{|\beta|} \frac{d_{os}}{d_{ls} d_{ol}^2} \frac{4D}{AB^2} \left(\frac{D}{B^2} \frac{e^{-12\pi/A}}{1 - e^{-8\pi/A}} + C \frac{e^{-6\pi/A}}{1 - e^{-4\pi/A}} \right). \quad (6.64)$$

6.5 Imágenes primaria y secundaria

En la última Sección se encontró que las imágenes relativistas tienen ampliaciones muy pequeñas salvo que el alineamiento sea muy alto. En esta Sección se obtendrán las posiciones y las ampliaciones de las imágenes primaria y secundaria en la aproximación de que el ángulo de la fuente (β) es pequeño.

Un ángulo β muy pequeño implica, de la ecuación de la lente, que α es también muy pequeño para las imágenes primaria (P) y secundaria (S), de manera que se puede usar la aproximación de campo débil para obtener las posiciones y las ampliaciones. El primer paso es calcular el ángulo de deflexión α . Desarrollando en serie el integrando de la Ec. (6.13) y calculando la integral se tiene que

$$\alpha = \frac{2}{x_0} + \left[\left(\frac{15}{16} \pi - 1 \right) - \left(2 + \frac{3}{4} \pi \right) q^2 \right] \frac{1}{x_0^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x_0^3} \right). \quad (6.65)$$

La carga sólo introduce una pequeña corrección en el término de segundo orden del ángulo de deflexión. Como es usual en la aproximación de campo débil, se usará un desarrollo a primer orden, tomando $\alpha \approx 2/x_0$ y $b \approx x_0 \approx d_{ol} \theta$. Introduciendo α en la ecuación de la lente, e invirtiéndola para obtener las posiciones de las imágenes, se tiene:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right) \approx \theta_E + \frac{1}{2} \beta, \quad (6.66)$$

$$\theta_s = \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right) \approx -\theta_E + \frac{1}{2} \beta, \quad (6.67)$$

donde $\theta_E = \sqrt{\frac{2d_{ls}}{d_{os}d_{ol}}}$ es el radio angular del anillo de Einstein. Usando la Ec. (6.17), las ampliaciones vienen dadas por:

$$A_p = \frac{\left(\frac{\beta}{\theta_E} \right)^2 + 2}{2 \left| \frac{\beta}{\theta_E} \right| \sqrt{\left(\frac{\beta}{\theta_E} \right)^2 + 4}} + \frac{1}{2} \approx \frac{\theta_E}{2|\beta|}, \quad (6.68)$$

$$A_s = \frac{\left(\frac{\beta}{\theta_E}\right)^2 + 2}{2 \left|\frac{\beta}{\theta_E}\right| \sqrt{\left(\frac{\beta}{\theta_E}\right)^2 + 4}} - \frac{1}{2} \approx \frac{\theta_E}{2|\beta|}, \quad (6.69)$$

$$A_{wf} = A_p + A_s \approx \frac{\theta_E}{|\beta|} = \frac{1}{|\beta|} \sqrt{\frac{2d_{ls}}{d_{os}d_{ol}}}. \quad (6.70)$$

Dividiendo la Ec. (6.64) por la Ec. (6.70) se tiene que

$$\frac{A_R}{A_{wf}} = \left(\frac{d_{os}}{d_{ls}d_{ol}}\right)^{\frac{3}{2}} f(q), \quad (6.71)$$

donde

$$f(q) = \frac{4D}{\sqrt{2}AB^2} \left(\frac{D}{B^2} \frac{e^{-12\pi/A}}{1 - e^{-8\pi/A}} + C \frac{e^{-6\pi/A}}{1 - e^{-4\pi/A}} \right). \quad (6.72)$$

$f(q)$ toma valores entre 1×10^{-2} y 3×10^{-2} , para $|q| \in [0, 0.5]$, y el otro factor es aún mas pequeño en las situaciones de interés astrofísico, de modo que las imágenes relativistas están mucho menos amplificadas que las imágenes de campo débil. Para dar un ejemplo, el factor que multiplica a $f(q)$, si la lente se encuentra a mitad de camino entre el observador y la fuente, es $(\mathcal{D}/2M)^{-3/2}$, con $\mathcal{D} \approx D_{os}/4$, el cual, salvo que el agujero negro sea muy masivo y/o esté muy cerca de la Tierra, hará que la amplificación sea extremadamente pequeña.

6.6 Ejemplo: agujero negro en el halo galáctico

En esta Sección se toma como lente un agujero negro con masa $M = 7M_\odot$, momento angular despreciable ($S \approx 0$) y carga Q ubicado en el halo galáctico ($D_{ol} = 4\text{kpc}$) [105]. La fuente es una estrella con radio $R_s = R_\odot$ ubicada en la protuberancia galáctica ($D_{os} = 8\text{kpc}$).

Las posiciones y las amplificaciones de las imágenes relativistas para una fuente puntual están dadas, respectivamente, por las Ecs. (6.58), (6.62) y (6.61). Las imágenes de campo débil se forman cerca del radio angular del anillo de Einstein $\theta_E \approx 2.669\text{mas}$ (milisegundos de arco). Las imágenes relativistas tienen un radio angular del orden de los anillos de Einstein relativistas, el más externo es θ_1^E y los otros se acercan a θ_∞^E . En la Tabla 6.2 se muestran las posiciones angulares del horizonte, de la esfera de fotones, del anillo de Einstein relativista más externo y el valor límite de los anillos de Einstein relativistas para diferentes valores de Q .

La fuente es extensa, por lo tanto hay que integrar sobre su perfil de luminosidad para obtener la amplificación:

$$A = \frac{\iint_S \mathcal{I} A_p dS}{\iint_S \mathcal{I} dS} \quad (6.73)$$

$ Q $	0	$0.1M$	$0.5M$	M
θ_H (mas)	3.455×10^{-8}	3.447×10^{-8}	3.224×10^{-8}	1.727×10^{-8}
θ_{ps} (mas)	5.181×10^{-8}	5.171×10^{-8}	4.876×10^{-8}	3.455×10^{-8}
θ_1^E (mas)	8.987×10^{-8}	8.973×10^{-8}	8.595×10^{-8}	6.957×10^{-8}
θ_∞^E (mas)	8.977×10^{-8}	8.960×10^{-8}	8.581×10^{-8}	6.910×10^{-8}

Tabla 6.2: Posiciones angulares del horizonte, la esfera de fotones, el anillo de Einstein relativista más externo (θ_1^E) y el valor límite de los anillos de Einstein relativistas (θ_∞^E) para diferentes valores de Q .

donde $\mathcal{I}$ es la distribución superficial de intensidad de la fuente y A_p es la amplificación correspondiente a cada punto de la fuente. Se tomará la fuente como uniforme, de modo que

$$A = \frac{\iint_S A_p dS}{\iint_S dS}. \quad (6.74)$$

Para ambos casos, el relativista y el de campo débil, las amplificaciones para una fuente puntual son proporcionales a $1/\beta$:

$$A \propto I = \frac{\iint_S \frac{1}{\beta} dS}{\iint_S dS}. \quad (6.75)$$

Para obtener I se usan coordenadas polares (R, φ) en el plano de la fuente, con $R = 0$ en el eje óptico, y se toma la fuente como un disco $D(R_C, R_S)$ de radio R_S con centro en R_C . Luego

$$I = \frac{\iint_{D(R_C, R_S)} \frac{1}{\beta} R dR d\varphi}{\pi R_S^2}, \quad (6.76)$$

y, usando que $\beta = R/D_{os}$ es la posición angular de cada punto de la fuente, se tiene que

$$I = \frac{\iint_{D(\beta_C, \beta_S)} \frac{1}{\beta} \beta d\beta d\varphi}{\pi \beta_S^2} = \frac{\iint_{D(\beta_C, \beta_S)} d\beta d\varphi}{\pi \beta_S^2}. \quad (6.77)$$

donde $D(\beta_c, \beta_s)$ es el disco con radio angular $\beta_s = 5.8 \times 10^{-4}$ mas con centro en β_c . La última integral puede ser calculada en términos de integrales elípticas [102]:

$$\begin{aligned} I = & \frac{2 \text{Sign}[\beta_s - \beta_c]}{\pi \beta_s^2} \left[(\beta_s - \beta_c) E \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{4\beta_s\beta_c}{(\beta_s - \beta_c)^2} \right) + \right. \\ & \left. + (\beta_s + \beta_c) F \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{4\beta_s\beta_c}{(\beta_s - \beta_c)^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.78)$$

donde

$$F(\phi_0, \lambda) = \int_0^{\phi_0} (1 - \lambda \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi, \quad (6.79)$$

$$E(\phi_0, \lambda) = \int_0^{\phi_0} (1 - \lambda \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad (6.80)$$

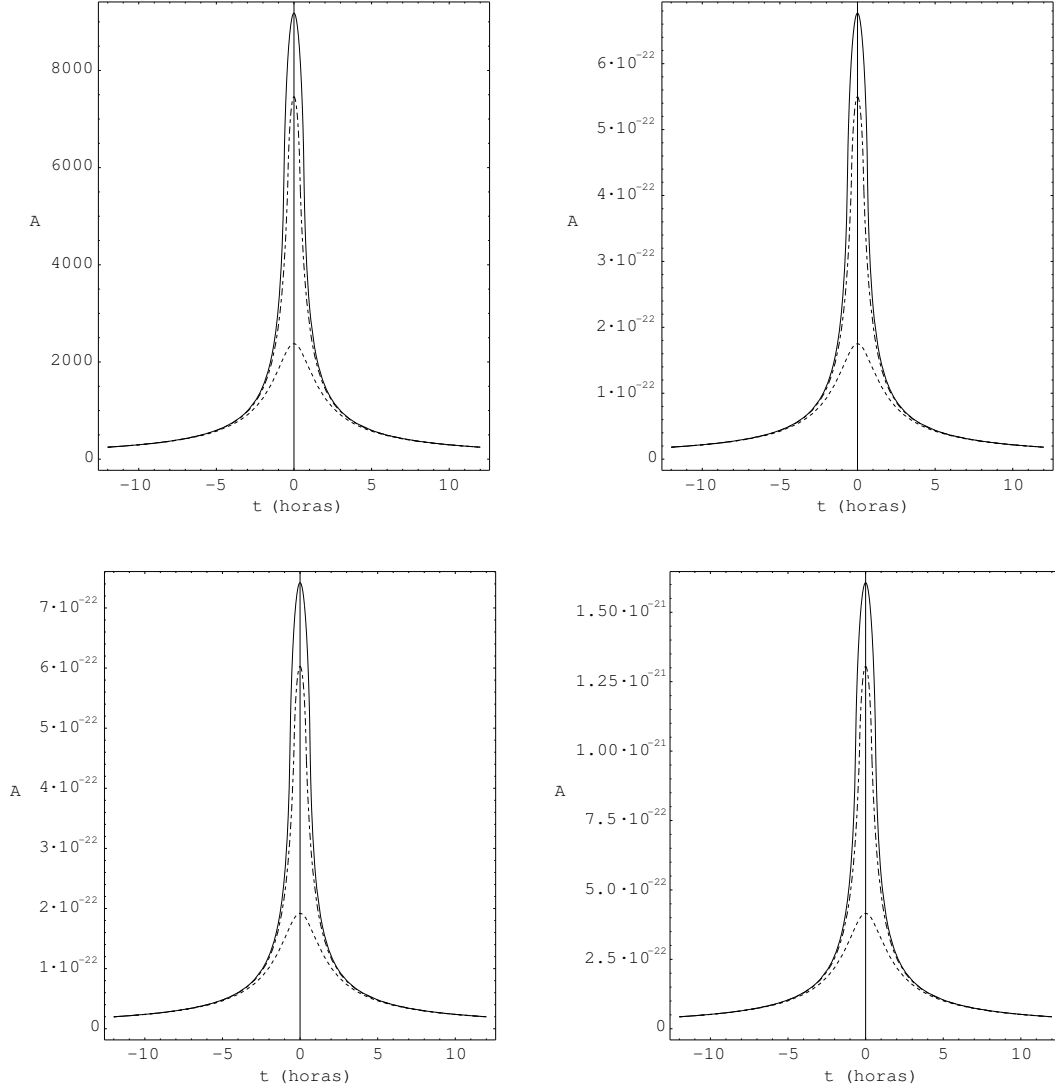


Figura 6.5: Curvas de luz para un evento de *lensing* debido a agujero negro con masa $M = 7M_{\odot}$ y carga Q ubicado en el halo galáctico. La fuente es una estrella de radio $R_s = R_{\odot}$ ubicada en el protuberancia galáctica. Panel superior, izquierda: amplificación total de las imágenes primaria y secundaria. Panel superior, derecha: $Q = 0$, amplificación total de las imágenes relativistas. Panel inferior, izquierda: $|Q| = 0.5 M$, amplificación total de las imágenes relativistas. Panel inferior, derecha: $|Q| = M$, amplificación total de las imágenes relativistas. En todos los gráficos, la línea de trazo continuo corresponde a $\beta_0 = 0$, la línea de rayas y puntos a $\beta_0 = 0.8\beta_s$ y la línea de puntos a $\beta_0 = 2\beta_s$.

son integrales elípticas de primera y segunda especie respectivamente, con argumentos ϕ_0 y λ .

En la Fig. 6.5 se muestran las curvas de luz para un evento de tránsito. La velocidad relativa entre la lente y la fuente es $v = 300 \text{ km/s}$. La posición angular del centro de la fuente está dada por $\beta_c = \sqrt{\beta_0^2 + \left(\frac{vt}{D_{\text{os}}}\right)^2}$, donde β_0 es la posición angular mínima del centro de la fuente correspondiente a $t = 0$. Se puede ver que el evento de tránsito dura sólo unas pocas horas, con gran amplificación para las imágenes de campo débil y, como era esperable, una amplificación despreciable para las imágenes relativistas. Sin embargo, es interesante remarcar que con la presencia de carga la amplificación de las imágenes relativistas aumenta con respecto al caso de Schwarzschild. Para una carga $|Q| = 0.5M$ se obtiene una amplificación alrededor de un 10 % mayor que para un agujero negro similar pero sin carga. En el caso de $|Q| = 1M$ la amplificación total de las imágenes relativistas es alrededor de un 140 % mayor que el valor correspondiente para un agujero negro de Schwarzschild de la misma masa.

6.7 Conclusiones

En este Capítulo se desarrolló el formalismo de *lensing* gravitacional para un agujero negro cargado. Se encontraron las posiciones y amplificaciones de las imágenes relativistas usando el límite de campo fuerte. Las imágenes relativistas son más prominentes cuando existe un gran alineamiento entre el observador, la lente, y la fuente. Ellas son, sin embargo, muy débiles, aún con alineamiento completo, pero mucho más fuertes que en el caso de los agujeros negros de Schwarzschild para valores altos de la carga. La separación angular de las imágenes relativistas es mucho menor que la resolución angular que permiten las tecnologías actuales en la banda óptica. Sin embargo, para agujeros negros locales (por ejemplo en el Cinturón de Gould, una región de formación estelar ubicada a 600 pc) si se pudiesen usar fuentes de fondo de rayos X, las separaciones angulares del orden del μas podrían resolverse con técnicas espaciales.

El instrumento de la NASA Constellation-X [106], a ser lanzado en el año 2008, será optimizado para estudiar las características de la línea $K\alpha$ del hierro y determinará la masa y el impulso angular de los agujeros negros para un gran número de sistemas. Constellation-X proveerá una medición indirecta de las propiedades de la región que se encuentre dentro de unos pocos radios del horizonte de eventos. El instrumento planeado por la NASA denominado MAXIM³ [107], con una resolución del orden del microsegundo de arco en rayos X, será capaz de tomar imágenes directas en rayos X de regiones del orden del tamaño del horizonte de eventos de un agujero negro. Ambos instrumentos espaciales tendrán la habilidad de encontrar pruebas de la existencia de agujeros negros, y posiblemente, distinguir entre diferentes soluciones de agujeros negros. El proyecto ARISE⁴ usará la técnica

³del inglés *Micro-Arcsecond X-ray Imaging Mission* (Misión de imágenes en rayos X de microsegundos de arco)

⁴del inglés *Advanced Radio Interferometry between Space and Earth* (Interferometría Avanzada en Radio entre el Espacio y la Tierra).

de interferometría de muy larga base (VLBI). Estará basado en un radiotelescopio espacial inflable de 25 metros que trabajará entre 8 y 86 GHz, que será lanzado en el año 2008 [108]. ARISE tendrá una resolución de 15 micro-segundos o mejor, 5-10 veces mejor de lo que se obtiene con instrumentos basados en tierra. En las frecuencias de 43 y 86 GHz, esto implicaría resoluciones de semanas luz a meses luz en cuasares distantes y complementaría las observaciones en rayos gama y rayos X. ARISE, entonces, podría también estudiar lentes gravitacionales con resoluciones de decenas de micro-segundos, y de esta forma podría ser importante en la detección de agujeros negros cargados. Sin embargo, no sólo se necesita resolución para detectar las imágenes relativistas. El problema principal es que son muy débiles. Esto seguramente será un desafío para las observaciones, si en algún momento pueden ser posibles, aumentado por el hecho que las imágenes relativistas están ubicadas cerca de las no relativistas, las cuales son mucho más intensas.

Capítulo 7

Conclusiones finales

En esta Tesis se realizó una revisión de distintos tipos de objetos relativistas y de los aspectos básicos de la teoría de las lentes gravitacionales.

Se utilizó una estrella dentro de una galaxia interpuesta como lente gravitacional para explicar la posibilidad que algunas fuentes de rayos gama no identificadas ubicadas a altas latitudes sean en realidad núcleos galácticos activos que sufren amplificación gravitacional diferencial que hace que sean muy amplificadas las regiones interiores emisoras de rayos gama con respecto a otras frecuencias, resultando en la ausencia de contrapartes en radio observada. Se hizo un desarrollo del modelo, se utilizaron los datos disponibles y además se realizó un análisis sobre las posibles observaciones futuras con instrumentos que entrarán en funcionamiento en los próximos años. Los resultados dieron lugar a dos trabajos [111, 112].

Otro aspecto poco desarrollado en trabajos anteriores, que sólo analizaron fuentes puntuales, es el tema de los agujeros de gusano como lentes gravitacionales. Se investigó en esta Tesis por primera vez el caso de fuente extensa, tanto galáctica como extragaláctica, hallándose las curvas de luz y los espectros, que presentan características singulares, que permitirán distinguir estos fenómenos de otros y poner un límite a la cantidad de masa negativa que puede existir en el Universo. Esto resultó en las publicaciones [113, 114].

Las lentes gravitacionales con campo fuerte, es decir, donde las lentes gravitacionales son objetos muy compactos, es otro aspecto muy poco estudiado anteriormente. En esta Tesis se estudió por primera vez un agujero negro cargado como lente gravitacional. La presencia de infinitas imágenes relativistas, muy débiles comparadas con las no relativistas y ubicadas muy cerca de la esfera de fotones se analizó con cuidado, obteniéndose las posiciones y amplificaciones de las mismas, comparándose los resultados con el caso de los agujeros negros de Schwarzschild, y discutiéndose lo difícil de su observación astronómica. Esto también dió lugar a una publicación [115].

En definitiva, en los casi dos años empleados en la realización de los trabajos presentados en esta Tesis se exploraron aspectos muy interesantes y poco estudiados de la astrofísica relativista contemporánea, dando lugar a varias publicaciones en revistas internacionales.

Apéndice A

Unidades

A.1 Constantes físicas fundamentales

$$c = 2.998 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad \text{velocidad de la luz en el vacío}$$

$$G = 6.673 \times 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2} \quad \text{constante de gravitación universal}$$

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-27} \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}} \quad \text{constante de Planck}$$

$$m_e = 9.110 \times 10^{-28} \text{ g} \quad \text{masa del electrón}$$

$$M_p = 1.673 \times 10^{-24} \text{ g} \quad \text{masa del protón}$$

$$e = 4.803 \times 10^{-10} \text{ ues} = 4.803 \times 10^{-10} \left(\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{carga del electrón}$$

A.2 Unidades geométricas

Son las habituales en los textos de relatividad general, y se definen tomando $c = 1$ y $G = 1$. Luego $1 \text{ s} = 2.998 \times 10^{10} \text{ cm}$ y $1 \text{ g} = 7.425 \times 10^{-29} \text{ cm}$.

Las otras constantes físicas fundamentales quedan, en unidades geométricas:

$$\hbar = 2.612 \times 10^{-66} \text{ cm}^2$$

$$m_e = 6.764 \times 10^{-56} \text{ cm}$$

$$M_p = 1.242 \times 10^{-52} \text{ cm}$$

$$e = 1.381 \times 10^{-34} \text{ cm}$$

A.3 Constantes astrofísicas

Entre paréntesis se muestran los valores en unidades geométricas.

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g } (1.477 \times 10^5 \text{ cm}) \quad \text{masa solar}$$

$$R_{\odot} = 6.960 \times 10^{10} \text{ cm} \quad \text{radio solar}$$

$$L_{\odot} = 3.90 \times 10^{33} \frac{\text{erg}}{\text{s}} (1.07 \times 10^{-26}) \quad \text{luminosidad solar}$$

$$H_0 = h_{50} \times 50 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} (h_{50} \times 5.9 \times 10^{-29} \text{ cm}^{-1}) \quad \text{constante de Hubble}$$

$$(\text{con } 1 \leq h_{50} \leq 2)$$

A.4 Factores de conversión

Factores de conversión para algunas unidades muy usadas en astrofísica:

$$1 \text{ lt-yr} = 9.461 \times 10^{17} \text{ cm} \quad \text{año-luz}$$

$$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} \quad \text{parsec}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg } (1.324 \times 10^{-61} \text{ cm}) \quad \text{electrón-Volt}$$

$$1 \text{ segundo (de arco)} = 4.8481 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Apéndice B

Cosmología

En varios Capítulos de esta Tesis se trabajó con objetos astronómicos ubicados a distancias cosmológicas. En este Apéndice se resumen los aspectos básicos del modelo cosmológico estándar, también llamado modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Para un tratamiento más completo ver, por ejemplo, los libros de E. W. Kolb & M. S. Turner [109] o de P. J. E. Peebles [110]

B.1 Geometría de Robertson-Walker

A partir de las observaciones astronómicas se asume que el Universo a gran escala (≈ 500 Mpc) es homogéneo e isótropo (principio cosmológico). Las observaciones indican además que el Universo está en expansión.

El principio cosmológico permite hacer una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies de tiempo constante que son perfectamente homogéneas e isótropas. Se pueden adoptar coordenadas comovientes, en las cuales cada galaxia se idealiza como fija, con coordenadas espaciales x^i y la coordenada temporal t es el tiempo propio de cada galaxia. La expansión del Universo, es decir el cambio de la distancia propia entre galaxias, se representa por coeficientes de la métrica dependientes del tiempo. En estas coordenadas, la métrica se puede escribir, usando unidades geométricas (ver Apéndice A), en la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (\text{B.1})$$

que se denomina métrica de Robertson-Walker, donde $a(t)$ es una función del tiempo llamada factor de escala y k es una constante que con una elección adecuada de las coordenadas vale 0, 1 o -1.

En la métrica de Robertson-Walker el escalar de curvatura tridimensional vale

$${}^{(3)}R = \frac{6k}{a^2(t)}. \quad (\text{B.2})$$

Para $k = 0$ se obtiene el espacio euclídeo plano, que se denomina Universo de plano de Robertson-Walker. Si $k = 1$ la parte espacial puede considerarse como la superficie esférica tridimensional de radio $a(t)$ inmersa en un espacio euclídeo de cuatro

dimensiones. Este modelo se llama Universo cerrado o esférico de Robertson-Walker. Cuando $k = -1$ se obtiene una geometría que no es finita, modelo denominado Universo abierto o hiperbólico de Robertson-Walker.

La distancia propia entre galaxias que tienen el mismo valor de φ y θ es, a partir de la Ec. (B.1):

$$d_{\text{prop}} = a(t) \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr. \quad (\text{B.3})$$

Como el valor de la integral es fijo, pues sólo depende de las posiciones fijas de las galaxias y del modelo elegido, la función de escala será la que determine la evolución de las distancias propias entre las galaxias. Si el Universo se expande, es decir las distancias propias entre galaxias aumentan, $a(t)$ será una función creciente del tiempo.

B.2 Corrimiento al rojo

Se define el corrimiento al rojo z como

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} - 1, \quad (\text{B.4})$$

donde λ_e y λ_r son, respectivamente, las longitudes de onda de la radiación electromagnética emitida por la fuente y recibida por el observador comoviente.

Si la fuente emite la radiación electromagnética en un instante t_e y el observador la recibe en un instante t_r , no es difícil ver que

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}, \quad (\text{B.5})$$

luego

$$z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1. \quad (\text{B.6})$$

Como el Universo está expandiéndose, $a(t_r) > a(t_e)$, de modo que el corrimiento es hacia el rojo.

Desarrollando el factor de escala en serie de Taylor:

$$a(t) = a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0 H_0^2}{2} (t - t_0)^2 + \dots \right], \quad (\text{B.7})$$

donde t_0 es el instante actual, $H_0 \equiv \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t_0}$ es la constante de Hubble, $q_0 \equiv \left. \frac{-\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right|_{t_0}$ es el parámetro de desaceleración y el punto indica la derivada respecto del tiempo.

Para fuentes cercanas al observador el corrimiento al rojo es pequeño ($z \ll 1$), usando las Ecs. (B.6) y (B.7), tomando $t_r = t_0$ y que para una geodésica nula $t_0 - t_e = d$ (distancia propia entre la fuente y el observador) se tiene que

$$z \approx H_0 d, \quad (\text{B.8})$$

que se denomina Ley de Hubble.

B.3 Dinámica del modelo de FLRW

En las secciones anteriores se describió la cinemática del modelo estándar, donde la evolución del Universo viene dada por el factor de escala $a(t)$. Para poder determinar $a(t)$ es necesario usar las ecuaciones de Einstein. Se asumirá que el tensor de energía-momento es el de un fluido perfecto, caracterizado sólo por la densidad de energía $\rho(t)$ y la presión $p(t)$:

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho(t), p(t), p(t), p(t)). \quad (\text{B.9})$$

Usando la Ec. (B.1) para obtener el tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$, y reemplazando $T^{\mu\nu}$ y $G^{\mu\nu}$ en las ecuaciones de Einstein, se obtienen

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k}{a^2(t)} = \frac{8\pi}{3}\rho(t) \quad \text{componente } 0-0, \quad (\text{B.10})$$

$$2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k}{a^2(t)} = -8\pi p(t) \quad \text{componentes } i-i. \quad (\text{B.11})$$

Además la única componente de la ley de conservación $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ que da un resultado no trivial es la que tiene $\mu = 0$:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)a^3(t)) = -p(t)\frac{d}{dt}a^3(t). \quad (\text{B.12})$$

Las Ecs. (B.10), (B.11) y (B.12) están relacionadas por las identidades de Bianchi y sólo dos son independientes. Usualmente se eligen como ecuaciones independientes la Ec. (B.10), denominada ecuación de Friedmann y la Ec. (B.12), que suele llamarse ecuación de Lemaître. Estas ecuaciones tienen tres funciones incógnita: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Para poder resolverlas es necesaria la ecuación de estado $p = p(\rho)$.

Derivando la Ec. (B.10) respecto de t y usando la Ec. (B.12) se obtiene que

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}[\rho(t) + 3p(t)]a(t). \quad (\text{B.13})$$

Como en este modelo se toma $\rho(t) + 3p(t) > 0$, entonces $\ddot{a}(t) < 0 \forall t$ o sea la función $a(t)$ será convexa (cóncava hacia abajo) y como $\dot{a}(t_0) > 0$ (expansión del Universo), existirá un tiempo finito en el pasado, que se elige usualmente igual a cero, para el cual el factor de escala se anula y todo el Universo se reduce a un punto. Ese instante se denomina gran explosión (*big bang*). O sea que en el modelo de FLRW el Universo se expande a partir de una singularidad y el tiempo transcurrido desde que comenzó la expansión hasta hoy se denomina edad del Universo t_0 .

La ecuación de Friedmann se puede escribir en la forma

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi}{3}\rho(t)a^2(t) - k. \quad (\text{B.14})$$

Si $k = 0$ o $k = -1$, $\dot{a}(t)$ no se anula nunca, y como en el instante actual es positiva, será siempre positiva, o sea el Universo continúa expandiéndose indefinidamente. Si

$k = 1$, en cambio, $\dot{a}$ se anula para $a_{\max} = \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}}$ donde $a(t)$ alcanza el máximo (ya que $\ddot{a} < 0$) y luego decrece. O sea que si $k = 1$ el Universo se expande hasta $a_{\max}$ para contraerse luego hasta $a = 0$.

Definiendo

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}, \quad (\text{B.15})$$

donde $\rho_0 = \rho(t_0)$ es la densidad de energía en el momento actual y $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi}$ es la densidad crítica. Reemplazando en la ecuación de Friedmann se tiene que

$$\Omega_0 - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \quad (\text{B.16})$$

donde $a_0 = a(t_0)$. Luego

$$\begin{aligned} \Omega_0 < 1 &\Rightarrow k = -1 && \text{Universo abierto} \\ \Omega_0 = 1 &\Rightarrow k = 0 && \text{Universo plano} \\ \Omega_0 > 1 &\Rightarrow k = 1 && \text{Universo cerrado} \end{aligned}$$

En los dos primeros casos el Universo se expande para siempre y en el último se expande hasta alcanzar un radio máximo $a_{\max}$, para contraerse luego hasta $a = 0$. Es importante señalar que todo esto no depende de la ecuación de estado que se utilice y es una propiedad general del modelo de FLRW.

Si el Universo es abierto, plano o cerrado dependerá entonces del valor de $\Omega_0 = \rho_0/\rho_c$. Los datos disponibles indicarían que $\Omega_0 < 1$ y el Universo sería abierto. El modelo inflacionario para el Universo temprano (ver [110]) predice un valor de $\Omega_0 = 1$ y el Universo resultaría plano. No se conoce en la actualidad con gran precisión el valor de Ω_0 , sospechándose que puede existir gran cantidad de materia oscura no detectada, lo que aumentaría notablemente su valor. Hay un cierto consenso en cuanto a que $0.1 \leq \Omega_0 \leq 2$, o sea que el Universo puede ser abierto o cerrado, pero no muy lejos de ser plano.

El Universo presenta dos épocas principales: la era dominada por la radiación y la era dominada por la materia.

En la era dominada por la radiación, que corresponde al Universo temprano, la densidad de energía está principalmente en la forma de radiación o de partículas relativistas, que tienen una ecuación de estado $p = \frac{1}{3}\rho$.

En la era dominada por la materia, que es la época actual, la densidad de energía se debe principalmente a la materia ordinaria que se encuentra en las galaxias, cuyas velocidades aleatorias son pequeñas, y se comporta como polvo: $p = 0$.

B.4 Distancias

Cuando se observa un objeto distante, lo que se mide en forma directa es el corrimiento al rojo, por lo que es útil obtener una relación entre éste y la distancia propia.

La distancia propia se puede calcular como

$$d_{\text{prop}} = - \int_{t_1}^{t_2} dt = - \int_{a(t_1)}^{a(t_2)} \frac{da}{\dot{a}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{a_0}{(1+z)^2 \dot{a}} dz, \quad (\text{B.17})$$

donde se usó la Ec.(B.6) y z es el corrimiento al rojo del objeto.

Para $z \leq 10$ se está en la era dominada por la materia, en la cual la presión es despreciable, de modo que, usando la Ec. (B.12) se obtiene que

$$\rho(t)a^3(t) = \rho_0 a_0^3. \quad (\text{B.18})$$

Reemplazando esta última ecuación en la ecuación de Friedmann, y usando las Ecs. (B.6) y (B.16)

$$\dot{a}(t) = a_0 H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 z}. \quad (\text{B.19})$$

Luego, reemplazando la Ec. (B.19) en la Ec. (B.17) se tiene que la distancia propia entre dos objetos con corrimientos al rojo $z_1 < z_2$ es

$$d_{\text{prop}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{1 + \Omega_0 z}} dz. \quad (\text{B.20})$$

Bibliografia

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [3] L. D. Landau, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford, 1975).
- [4] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1973).
- [5] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [6] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1980).
- [7] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette & M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977).
- [8] K. Schwarzschild, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin Kl.Math.-Phys 189 (1916).
- [9] M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
- [10] G. Szekeres, Publ. Mat. Debrecen **7**, 285 (1960).
- [11] J. H. Krolik, *Active Galactic Nuclei*, (Princeton University Press, Princeton, 1999).
- [12] E. E. Salpeter, Ap. J. **140**, 796 (1964).
- [13] Ya. B. Zeldovich, Sov. Phys.-Dokl **9**, 195 (1964).
- [14] J. Kornmendy & D. O. Richstone, Ann. Rev. Astron. Astrop. **33**, 581 (1995).
- [15] M. Visser, *Lorentzian Wormholes* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [16] A. Einstein & N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935).
- [17] J. A. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).
- [18] C. W. Misner & J. A. Wheeler, Ann. Phys. (NY) **2**, 525 (1957).

- [19] M. S. Morris & K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [20] M. S. Morris, K. S. Thorne & U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [21] I. D. Novikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **95**, 796 (1989) [Sov. Phys. JETP **68**, 439 (1989)].
- [22] V. P. Frolov & I. D. Novikov, Phys. Rev. **D42**, 1057 (1990).
- [23] C. Itzykson & J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw Hill, New York, 1980).
- [24] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974) y Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [25] P. Candelas, Phys. Rev. **D21**, 2185 (1980).
- [26] D. W. Sciama, P. Candelas & D. Deutsch Adv. Phys. **30**, 327 (1981).
- [27] V. P. Frolov & K. S. Thorne, Phys. Rev. **D39**, 2125 (1989).
- [28] I. D. Novikov, Phys. Rev. **D45**, 1989 (1992).
- [29] S. W. Hawking, Phys. Rev. **D46**, 603 (1992).
- [30] J. L. Friedman, K. Schleich & D. M. Witt, Phys. Rev. Lett. **71**, 1486 (1993).
- [31] G. E. Romero & D. F. Torres, Mod. Phys. Lett. **A16**, 1213 (2001).
- [32] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [33] J. Wambsganss, *Gravitational Lensing in Astronomy*, Living Reviews in Relativity, **1**, 1998-12 (1998) [astro-ph/9812021].
- [34] R. Narayan & M. Bartelmann, *Lectures on Gravitational Lensing*, 1996 [astro-ph/9606001].
- [35] J. Soldner, Berliner Astron. Jahrb. p. 161 (1804).
- [36] A. Einstein, Annalen der Physik, **35**, 898 (1911).
- [37] A. Einstein, Sitzungber. Preuß. Akad. Wissensch., erster Halbband, p. 831 (1915).
- [38] F. W. Dyson, A. S. Eddington & C. R. Davidson, Mem. R. Astron. Soc., **62**, 291 (1920).
- [39] D. E. Lebach, B. E. Corey, I. I. Shapiro, M. I. Ratner & J. C. Weber et al., Phys. Rev. **D75**, 1439 (1995).

- [40] A. S. Eddington, *Space, Time, and Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1920).
- [41] A. Einstein, *Science* **84**, 506 (1936).
- [42] F. Zwicky, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 290 (1937).
- [43] F. Zwicky, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 679 (1937).
- [44] M. Schmidt, *Nature*, **197**, 1040 (1963).
- [45] Yu. G. Klimov, *Sov. Phys. Doklady*, **8**, 119 (1963).
- [46] S. Liebes Jr., *Phys. Rev.* **133**, B835 (1964).
- [47] S. Refsdal, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, **128**, 295 (1964).
- [48] S. Refsdal, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, **128**, 307 (1964).
- [49] S. Refsdal, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, **134**, 315 (1966).
- [50] S. Refsdal, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, **132**, 101 (1966).
- [51] N. Sanitt, *Nature*, **234**, 199 (1971).
- [52] R. R. Bourassa, R. Kantowski & T. D. Norton, *Ap. J.*, **185**, 747 (1973).
- [53] R. R. Bourassa & R. Kantowski, *Ap. J.*, **195**, 13 (1975).
- [54] R. R. Bourassa & R. Kantowski, *Ap. J.*, **205**, 674 (1976).
- [55] K. Chang & S. Refsdal, *Nature*, **282**, 561 (1979).
- [56] D. Walsh, R. F. Carswell & R. J. Weymann, *Nature*, **279**, 381 (1979).
- [57] B. Paczyński, *Ap. J.*, **304**, 1 (1986).
- [58] C. Alcock, C. W. Akerlof, R. A. Allsman et al., *Nature* **365**, 621 (1993).
- [59] E. Aubourg, P. Bareyre, P. Bréhin et al., *Nature* **365**, 623 (1993).
- [60] A. Udalski, M. Szymański, J. Kaluzny, M. Kubiak, W. Krzemiński et al., *Acta Astron.* **43**, 289 (1993).
- [61] C. Alard, en *Astrophysical Applications of Gravitational Lensing*, Proc. IAU Symp. **173**, eds. C. S. Kochanek & J. N. Hewitt (Kluwer, Boston, 1995).
- [62] J. N. Hewitt, E. L. Turner, C. R. Lawrence, D. P. Schneider, J. E. Gunn et al. *Ap. J.* **321**, 706 (1987).
- [63] G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier & J. P. Picat, *Astron. & Astrophys.* **172**, L14 (1987).

- [64] G. Soucail, Y. Mellier, B. Fort, F. Hammer & G. Mathez, *Astron. & Astrophys.* **184**, L7 (1987).
- [65] R. Lynds & V. Petrosian *BAAS* **18**, 1014 (1986).
- [66] B. Paczyński, *Nature* **325**, 572 (1987).
- [67] R. C. Hartman et al., *Ap. J. S.* **123**, 79 (1999).
- [68] G. E. Romero, en: A. Carraminana, O. Reimer, D. J. Thompson (eds.), *The Nature of Unidentified Galactic High-energy Gamma-ray Sources*, pag. 65 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001).
- [69] N. Gehrels, D. J. Macomb, D. L. Bertsch, D. J. Thompson, R. C. Hartman, *Nature* **404**, 363 (2000).
- [70] I. Grenier, *Astron. & Astrophys.* **364**, L93 (2000).
- [71] T. Totani & T. Kitayama, *Ap. J.* **545**, 572 (2000).
- [72] O. Reimer & D. J. Thompson, *Proceedings of ICRC*, en prensa (astro-ph/0108348)(2001).
- [73] N. Gehrels & P. Michelson, *Astroparticle Phys.* **11**, 277 (1999).
- [74] D. F. Torres, G. E. Romero, J. Combi, P. Benaglia, B. Punsly & H. Andernach, *Astron. & Astrophys.* **370**, 468 (2001).
- [75] D. F. Torres, M. E. Pessah & G. E. Romero, *Astronomische Nachrichten* **322**, 223 (2001).
- [76] R. D. Blandford & A. Levinson, *Ap. J.* **441**, 79 (1995).
- [77] M. E. Özel & D. J. Thompson, *Ap. J.* **463**, 105 (1996).
- [78] J. R. Mattox, J. Schachter, L. Molnar, R. C. Hartman & A. R. Patnaik, *Ap. J.* **481**, 95 (1997).
- [79] J. Ostriker & M. Vietri, *Nature* **318**, 446 (1985).
- [80] Gopal-Krishna, K. Subramanian, *Nature* **349**, 766 (1991).
- [81] G. E. Romero, G. Surpi & H. Vucetich, *Astron. & Astrophys.* **301**, 641 (1995).
- [82] E. L. Turner, comunicación personal a D. F. Torres (2001).
- [83] M.-P. Véron-Cetty & P. Véron, 2001, *Astron. & Astrophys.* **374**, 92 (2001).
- [84] L. Nottale, *Astron. & Astrophys.* **157**, 383 (1986).

- [85] G. Surpi, G. E. Romero, H. Vucetich, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* **32**, 153 (1996).
- [86] D. P. Schneider, E. L. Turner, J. E. Gunn et al., *Astron. J.* **95**, 1619 (1988).
- [87] E. E. Salpeter, *Ap. J.* **121**, 161 (1955).
- [88] J. G. Cramer, R. L. Forward, M. S. Morris, M. Visser, G. Benford, G. A. Landis, *Phys. Rev.* **D51**, 3117 (1995).
- [89] D. F. Torres, G. E. Romero & L. A. Anchordoqui, *Phys. Rev.* **D58**, 123001 (1998); D. F. Torres, G. E. Romero & L. A. Anchordoqui, (*Honorable Mention, Gravity Foundation Research Awards 1998*), *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 1575 (1998).
- [90] M. Safonova, G. E. Romero & D. F. Torres, *Mod. Phys. Lett.* **A16**, 153 (2001) [astro-ph/0104075].
- [91] L. A. Anchordoqui, G. E. Romero, D. F. Torres & I. Andruchow, *Mod. Phys. Lett.* **A14**, 791 (1999).
- [92] G. E. Romero, D. F. Torres, L. A. Anchordoqui, I. Andruchow, B. Link, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **308**, 799 (1999).
- [93] S. F. Portegies Zwart, C-H. Lee, H.K. Lee, *Ap. J.* **520**, 666 (1999).
- [94] A. Udalski, M. Szymański, S. Mao et al., *Ap. J.* **436**, L103 (1994).
- [95] C. Han, S-H. Park, J-H. Jeong, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **316**, 97 (2000).
- [96] C. Han, & S-H. Park, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **320**, 41 (2001).
- [97] P. R. Wozniak et al., *Difference image analysis of the OGLE-II bulge data II: Microlensing events*, astro-ph/0106474.
- [98] P. A. Becker, M. Kafatos, *Ap. J.* **453**, 83 (1995).
- [99] P. Yock, comunicación personal a D. F. Torres (2002).
- [100] K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis, *Phys. Rev.* **D62**, 084003 (2000). [astro-ph/9904193].
- [101] S. Frittelli, T. P. Kling, E. T. Newman, *Phys. Rev.* **D61**, 064021 (2000).
- [102] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane, G. Scarpetta, *Gen. Rel. Grav.*, **33**, 1535 (2001). [gr-qc/0102068].
- [103] B. Punsly, *Ap. J.*, **498**, 640 (1998).

- [104] B. Punsly, G. E. Romero, D. F. Torres, J. A. Combi, *Astron. & Astrophys.*, **364**, 552 (2000).
- [105] B. Punsly, *Black Hole Gravitohydromagnetics* (Springer Verlag, Heidelberg, 2001).
- [106] Constellation-X web page: <http://constellation.gsfc.nasa.gov/>
- [107] Maxim web page: <http://maxim.gsfc.nasa.gov/>
- [108] Ulvestad J. S., 1999, astro-ph/9901374.
- [109] E. W. Kolb & M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, Calif., 1990).
- [110] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1993).
- [111] D. F. Torres, G. E. Romero & E. F. Eiroa, “Gravitational Lensing as a Possible Explanation for some Unidentified Gamma-ray Sources at High Latitudes”, *Ap. J.* **569**, 600 (2002). [astro-ph/0112549].
- [112] E. F. Eiroa, D. F. Torres, G. E. Romero, J. Wambsganss & M. E. Pessah, “Gravitational Microlensing of Gamma-ray Blazars”, enviado a Monthly Notices Royal Astron. Soc. [astro-ph/0205441].
- [113] E. F. Eiroa, G. E. Romero & D. F. Torres, “Chromaticity Effects in Microlensing by Wormholes”, *Mod. Phys. Lett.* **A16**, 973 (2001). [gr-qc/0104076].
- [114] D. F. Torres, E. F. Eiroa & G. E. Romero, “On the Possibility of an Astronomical Detection of Chromaticity Effects in Microlensing by Wormhole-like Objects”, *Mod. Phys. Lett.* **A16**, 1849 (2001). [gr-qc/0109041].
- [115] E. F. Eiroa, G. E. Romero & D. F. Torres, “Reissner-Nordström Black Hole Lensing”, *Phys. Rev.* **D**, en prensa (2002). [gr-qc/0203049].