

**Simulation und Messung verschiedener  
Hydrophonkomponenten zur akustischen Teilchendetektion**

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten  
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Karsten Sven Salomon

aus Fürth

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten der  
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 26.01.2007

Vorsitzender

der Prüfungskommission: Prof. Dr. E. Bänsch

Erstberichterstatte: Prof. Dr. G. Anton

Zweitberichterstatte: Prof. Dr. P. Müller

*Meiner Familie gewidmet*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Physikalische Grundlagen der Astroteilchenphysik</b>	<b>5</b>
1.1 Kosmische Strahlung und ihre Charakteristika . . . . .	5
1.2 Entstehung und Beschleunigung hochenergetischer Neutrinos . . . . .	7
1.3 Quellen hochenergetischer Neutrinos . . . . .	9
<b>2 Aktivitäten in der akustischen Teilchendetektion</b>	<b>15</b>
2.1 Testexperimente zum thermoakustischen und thermoelastischen Modell . . .	15
2.1.1 Protonenstrahlexperimente . . . . .	16
2.1.2 Laserstrahlexperimente . . . . .	17
2.2 Akustische Astroteilchenphysik . . . . .	18
2.2.1 Detektion in Wasser . . . . .	19
2.2.2 Detektion im Eis - SPATS . . . . .	22
2.2.3 Detektion in Salz - SALSA . . . . .	22
<b>3 Theorie zu elastischen Körpern, Flüssigkeiten und piezoelektrischen Materialien</b>	<b>25</b>
3.1 Einführung wichtiger Begriffe . . . . .	25
3.2 Bilanzgleichungen . . . . .	27
3.2.1 Die Massenbilanzgleichung (Kontinuitätsgleichung) . . . . .	27
3.2.2 Die Impulsbilanzgleichung . . . . .	28
3.2.3 Die Energiebilanzgleichung . . . . .	28
3.3 Das Hooke'sche Gesetz . . . . .	30
3.4 Die Piezo-Gleichung . . . . .	32
3.5 Dämpfungsmodelle . . . . .	35
3.6 Theorie zur Wellenerzeugung durch Wärmequellen . . . . .	36
3.6.1 Das thermoakustische Modell . . . . .	36
3.6.2 Das thermoelastische Modell . . . . .	39
3.7 Akustische Signale ultrahochenergetischer Neutrinos . . . . .	40
<b>4 Makroskopische Eigenschaften von Piezos</b>	<b>47</b>
4.1 Ersatzschaltbild eines Piezos . . . . .	48
4.2 Simulation der Impedanz . . . . .	53

---

4.2.1	Simulation im Zeitbereich . . . . .	54
4.2.2	Simulation im Frequenzbereich . . . . .	56
4.3	Einfluss der Piezogeometrie auf die Impedanz . . . . .	56
4.3.1	Zylinder . . . . .	56
4.3.2	Hohlzylinder . . . . .	58
4.4	Simulation der Verschiebungen . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Einfluß von Wasser bzw. Hüllenmaterial auf die Eigenschaften eines Piezos</b>	<b>68</b>
5.1	Simulation der Impedanz mit Ankopplung an Wasser . . . . .	70
5.2	Simulation der Verschiebung und der Richtungscharakteristik . . . . .	71
5.3	Eigenschaften verschiedener Hüllenmaterialien . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Interferometrische Messung der Verschiebung</b>	<b>79</b>
6.1	Theorie und Kalibration des Interferometers . . . . .	83
6.2	Messungen mit dem Interferometer . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Triggeralgorithmus für akustische Signale</b>	<b>93</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>99</b>
<b>9</b>	<b>Summary</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>105</b>
A.1	Kinematik axialsymmetrischer starrer Körper . . . . .	105
A.2	Modenkonversion bei verschiedenen Materialien . . . . .	106
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>108</b>



# Einleitung

Seit jeher versuchen Wissenschaftler der Frage nach dem Ursprung des Universums nachzugehen und somit mehr über dessen Entstehung und Entwicklung zu erfahren. Die meisten Erkenntnisse über das Universum stammen aus Beobachtungen von elektromagnetischer Strahlung. Optische Beobachtungen des Nachthimmels, der Sonne und der Planeten werden seit Jahrtausenden beschrieben. Seit etwa 400 Jahren stehen Fernrohre für astronomische Beobachtungen zur Verfügung. Große Fortschritte brachte das 19. Jahrhundert durch die Photographie und Spektroskopie als Mittel zur Beobachtung und Untersuchung. Es wurden eine Vielzahl von Geräten und Detektoren entwickelt, die den Messbereich für Frequenz- und somit Energiemessung des elektromagnetischen Spektrums weit über den optischen Bereich ausdehnten: Sowohl ins Infrarote und den Radiobereich, als auch bis in den Bereich von Gammastrahlung. Mittlerweile kann mit verschiedensten physikalischen Messverfahren ein breites Spektrum von elektromagnetischer Strahlung aus dem Weltall beobachtet werden. Bei der Beobachtung von höher energetischer elektromagnetischer Strahlung ergeben sich jedoch einige Schwierigkeiten. Photonen höherer Energien ( $E > 100 \text{ TeV}$ ) wechselwirken mit der diffusen  $2.7 \text{ K}$  Hintergrundstrahlung und werden zudem von besonders heißen und dichten Regionen, wie z.B. Gaswolken, absorbiert. So haben  $100 \text{ TeV}$  Photonen nur eine Reichweite von etwa  $100 \text{ Mpc}$ . Um weit entfernte Quellen und das Innere von Sternen und Galaxien untersuchen zu können, braucht man Informationsträger, die nicht durch galaktische und intergalaktische Magnetfelder abgelenkt werden und extrem schwach mit Materie wechselwirken, um intergalaktische Distanzen zu überwinden. Dazu bieten sich Neutrinos und bedingt andere kosmische Strahlen, wie höchstenergetische Protonen, an. 1912 entdeckte Viktor Hess in Ballonexperimenten die geladene kosmische Teilchenstrahlung. Diese wird jedoch aufgrund ihrer Ladung von interstellaren und intergalaktischen Magnetfeldern abgelenkt und gibt daher nur bei extrem hohen Energien und entsprechend geringer Ablenkung in intergalaktischen Magnetfeldern Auskunft über ihre Quellen. Die einzigen Teilchen, welche sich fast ungestört durch das All und durch Materie ausbreiten, sind Neutrinos. Sie können, da sie nur schwach wechselwirken, Gebieten sehr hoher Energiedichte entweichen und liefern somit ein direktes Bild von den Verhältnissen im Innern solcher Zonen. Die Untersuchung der geladenen kosmischen Strahlung und der Neutrinos erweitert die klassische Beobachtung des Sternenhimmels und verbindet somit Astronomie, Teilchenphysik und Kosmologie.

Auf bislang noch nicht vollständig verstandene Weise werden die Teilchen der kosmischen



Strahlung bis zu Energien von über  $10^{20}$  eV beschleunigt; Energien, welche selbst in ferner Zukunft wohl kaum in terrestrischen Beschleunigern erzeugt werden können. Bei der Suche nach dem Ursprung der kosmischen Strahlung oberhalb von  $E > 10^{16}$  eV (im Fachjargon „Knie“ genannt) spielen die höchstenergetischen Neutrinos eine große Rolle. Jedoch erschweren dieselben Eigenschaften, die Neutrinos als Informationsträger qualifizieren - der geringe Wirkungsquerschnitt und die große mittlere freie Weglänge - ihren Nachweis. Zudem nehmen die Neutrinoflüsse zu höheren Energien hin stark ab.

Eine Möglichkeit, trotz geringer Flüsse und kleiner Reaktionswahrscheinlichkeiten Neutrinos messen zu können, besteht in der Wahl eines extrem großen Detektorvolumens. Ebenfalls Verbesserung verschaffen geeignete Detektionsmethoden. Bisher stellt der Nachweis des Cerenkovlichts, welches von geladenen Sekundärteilchen aus einer Neutrinoreaktion emittiert wird, die vorherrschende Methode in der Hochenergie-Neutrino-Astronomie dar. Ausgedehnte natürliche transparente Volumina, wie z.B. Seen, Ozeane und Eis eignen sich aufgrund ihrer optischen Transparenz für blaues Cerenkovlicht als Medium zur Neutrinodektion. Gerade in den letzten Jahren ist eine schnelle Entwicklung der Neutrinoastrophysik zu verzeichnen, die mit der voranschreitenden Konstruktion immer größerer Cerenkov Neutrinooteleskope einhergeht. Momentan sind weltweit mehrere Neutrinooteleskope zum Nachweis kosmischer Neutrinos im Bau, in Planung oder haben bereits Daten genommen: AMANDA und IceCube im Eis der Antarktis, ANTARES, km3NET, NEMO und NESTOR im Mittelmeer und NT-200 im sibirischen Baikalsee. Bisherige Neutrinooteleskope konnten die Flußlimits für Neutrinos herabsetzen. Eine Neutrino emittierende Quelle wurde bisher jedoch nicht entdeckt. Dies motiviert den Bau noch größerer und somit sensitiverer Neutrinooteleskope, um diese Informationsträger für die Teilchenastronomie zu nutzen. Die Absorptionslänge von Licht im jeweiligen Detektionsmedium gibt die Instrumentierungsdichte vor. Somit ist eine optische Instrumentierung eines Detektorvolumens, welches größer als zehn Kubikkilometer ist, aus Kostengründen kaum realisierbar. Es wird deshalb nach alternativen Nachweisverfahren gesucht, die es ermöglichen das instrumentierte Volumen weiter zu erhöhen, um den sensitiven Bereich zu höheren Energien hin auszudehnen.

Eine alternative Möglichkeit zur optischen Detektion bietet die Messung des akustischen Drucksignals der Sekundärteilchen einer Neutrinoreaktion. Sie wurde vom russischen Physiker Guren Askaryan in den 50er Jahren entwickelt. Grundlage für die akustische Detektion ist das thermoakustische bzw. thermoelastische Modell das die Erzeugung eines charakteristischen Schallsignals durch einen teilcheninduzierten Schauer in Flüssigkeiten bzw. Festkörpern beschreibt. Ende der 80er Jahre wurde im Rahmen des DUMAND-Projekts über einen Einsatz von akustischen Sensoren diskutiert. Die Vorhersage von Askaryan wurde 1979 erstmals durch Messungen an einem Protonenbeschleuniger bestätigt, wodurch die Möglichkeit ultrahochenergetische Neutrinos ( $E > 1$  PeV) akustisch nachzuweisen motiviert wird. Die Reichweite von Schall in Wasser oder Eis liegt im relevanten Frequenzbereich in der Größenordnung von einem Kilometer und ist somit weitaus größer als die von Licht. Zusätzlich

zur Detektion in Wasser bzw. Eis kann auch über eine Instrumentierung von Salzstöcken nachgedacht werden. Man kann somit bei kleinerem Kostenaufwand - akustische Detektoren sind erheblich preiswerter als die optischen Detektoren - das effektive Volumen des Detektors gegenüber den optischen Cerenkov Detektoren vervielfachen. Dies ermöglicht in höhere Energiebereiche vorzudringen und würde bei der Detektion von Neutrinos aus astrophysikalischen Quellen neue Erkenntnisse bringen.

Im ANTARES Projekt werden beide Messmethoden, optische und akustische Neutrinodetektion verfolgt. Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist die akustische Detektion, insbesondere die Optimierung der Schallempfänger (sogenannte Hydrophone). Es wurden verschiedene, eigens auf die akustische Teilchendetektion in Wasser zugeschnittene, preiswerte Sensoren simuliert und getestet. Durch die geplanten in-situ Messungen im Mittelmeer sollen vor allem der akustische Untergrund und dessen Korrelations- und Absorptionslänge, sowie die Einsatztauglichkeit der Detektorelemente und der Elektronik getestet werden. Mit dem autonomen System AMADEUS wurden bereits in-situ Vorstudien durchgeführt. Es soll demnach Vorarbeit für ein zukünftiges akustisches Neutrino-teleskop geleistet werden.

In dieser Arbeit wurden Simulationsstudien zur Optimierung von akustischen Sensoren in Wasser durchgeführt. Zunächst werden in Kapitel 1 die physikalischen Grundlagen der Astroteilchenphysik bereit gestellt. Im Kapitel 2 werden anschließend bisherige Aktivitäten in der akustischen Teilchendetektion erläutert. Hierzu werden zum einen die Protonenstrahlexperimente und Laserstrahlexperimente erörtert, die dazu beigetragen haben, den thermoakustischen bzw. thermoelastischen Effekt zu verstehen. Zum anderen werden bereits durchgeführte und aktuell laufende Projekte zur akustischen Neutrinodetektion diskutiert. In Kapitel 3 werden theoretische Grundbegriffe und Gleichungen eingeführt, welche benötigt werden, um Piezokeramiken zu simulieren. Nachfolgend wird die Theorie des thermoakustischen, wie auch die des thermoelastischen Modells behandelt. Die makroskopischen Eigenschaften der simulierten Hydrophone werden in Kapitel 4 diskutiert. Diesbezüglich werden die einzelnen Randbedingungen an die Piezogleichungen diskutiert und Konsequenzen für den Bau von Hydrophonen behandelt. In Kapitel 5 wird ein Piezo in Wasser simuliert. Es folgt die Bereitstellung einer Messmethode mittels eines selbstgebauten fasergekoppelten optischen Interferometers (Kapitel 6). Abschließend wird in Kapitel 7 ein Triggeralgorithmus vorgestellt, um das gesamte Gebiet von Signalerzeugung mittels thermoakustischen Effektes über Detektion mittels Hydrophonen, bis zur Signalerkennung abzudecken.

Diverse Rechnungen und Simulationen für verschiedene Piezomaterialien befinden sich im Anhang.



# 1 Physikalische Grundlagen der Astroteilchenphysik

Zielsetzung der Astroteilchenphysik ist das Verständnis und der Nachweis von kosmischen Teilchen, deren Quellen und Entstehungs- bzw. Beschleunigungsmechanismen. Diese Strahlung wurde das erste mal 1912 von Viktor Hess in einer Reihe von Ballonflügen entdeckt [1]. Er wies nach, dass die Ionisation der Luft oberhalb von zwei Kilometern mit der Höhe deutlich zunimmt. Neben der Radioaktivität der Erde muss demnach noch eine weitere Strahlung, die kosmische Strahlung, existieren. Die Sonne konnte er als Quelle aufgrund der Winkelverteilung dieser Strahlung ausschliessen. Hess schuf mit dieser Entdeckung die Verbindung zwischen Astrophysik und Teilchenphysik.

## 1.1 Kosmische Strahlung und ihre Charakteristika

Die kosmische Strahlung besteht größtenteils aus geladenen Teilchen (vor allem Protonen), Gammaquanten und wahrscheinlich Neutrinos. Deren Eigenschaften und deren Entstehung wird später eingehend erläutert.

Das Energiespektrum der geladenen Strahlung überdeckt einen Bereich von 15 Größenordnungen ( $10^6$  eV- $10^{21}$  eV). Der Fluss der kosmischen Strahlung sinkt in diesem Energiebereich von mehr als einem Teilchen pro  $\text{cm}^2\text{s}$  für Energien unterhalb von 100 MeV auf weniger ein Teilchen pro  $\text{km}^2\text{a}$  für Energien oberhalb von  $10^{20}$  eV. Die Energieabhängigkeit des differentiellen Strahlungsflusses  $\frac{dN}{dE}$  wird gut durch ein Potenzgesetz mit dem spektralen Index  $\alpha$  beschrieben (siehe Abbildung 1.1). Der spektrale Index ändert sich an zwei Stellen: Bei  $4 \cdot 10^{15}$  eV wird das Spektrum steiler („Knie“ [2]), während es bei  $5 \cdot 10^{18}$  eV wieder seinen ursprünglichen Wert annimmt („Knöchel“ [3]). Für den differentiellen Fluss der geladenen kosmischen Strahlung gilt also:

$$-\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha} \text{ mit } \alpha \approx \begin{cases} 2.7 & \text{für } E < 10^{16} \text{ eV} \\ 3.1 & \text{für } 10^{16} \text{ eV} < E < 10^{18} \text{ eV} \\ 2.7 & \text{für } E > 10^{19} \text{ eV.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Der steilere Flussabfall ab dem Knie ist dadurch zu erklären, dass die Teilchen der kosmischen Strahlung ausreichend Energie haben, um das Magnetfeld der Milchstraße zu verlassen und somit für die Detektion verloren sind. Eine ebenso gute Erklärung ist die, dass mit  $10^{15}$  eV das Maximum an Energie erreicht ist, das eine Supernova freisetzen kann. Geht man davon aus, dass meist Supernovae die Quelle bzw. Beschleuniger kosmischer Strahlung

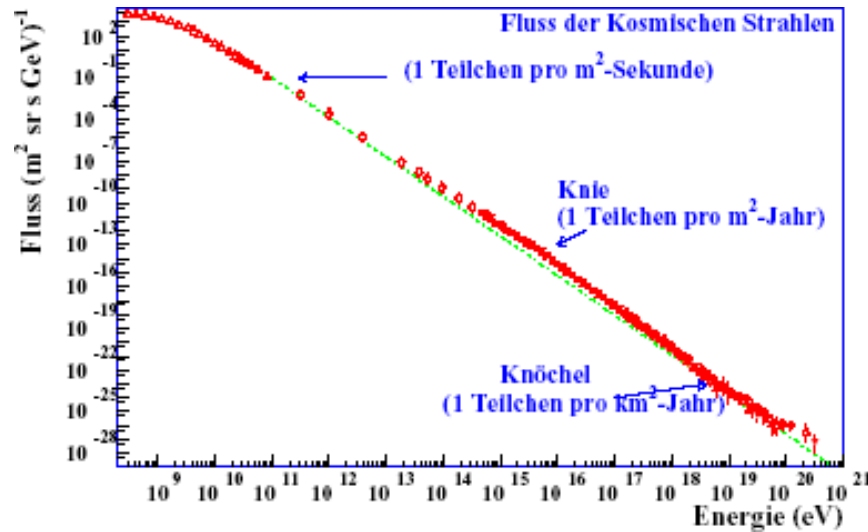


Abb. 1.1: Das Spektrum der geladenen kosmischen Strahlung. Die Energie ist gegen den differentiellen Fluss geladener Teilchen aufgetragen (aus [3]).

sind, so ist offensichtlich, dass für Ereignisse oberhalb dieser Energie eine andere Quelle verantwortlich sein muss, welche durchaus einen geringeren Fluss liefern kann.

Die Tatsache, dass Ereignisse bei Energien oberhalb des Knöchels überhaupt gemessen wurden, ist verwunderlich. Theoretisch erwartet man einen totalen Abbruch des Flussspektrums bei  $6 \cdot 10^{19}$  eV (bekannt als Greisen-Zatsepin-Kuzmin Cutoff), denn dies ist die Grenzenergie, ab welcher ein Proton (bzw. ein Kern) mit den Photonen der Hintergrundstrahlung wechselwirkt. Es wird dann das  $\Delta^+$  Teilchen erzeugt. Dieses zerfällt vorwiegend entweder in ein Pion und ein Neutron oder ein Pion und ein Proton. Die Protonen verlieren dabei einen Großteil ihrer Energie. Die mittlere freie Weglänge für diesen Prozess beträgt für Protonen 100 Mpc. Somit können die jenseits dieser Energien detektierten Teilchen nur aus nahen Quellen stammen.

Im Hinblick auf das Wechselwirkungsverhalten der kosmischen Strahlung kann diese in drei Gruppen unterteilt werden:

- Geladene kosmische Teilchen

Die geladene, primäre, kosmische Strahlung besteht im Wesentlichen aus leichten geladenen Kernen, überwiegend aus Protonen. Eine direkte Messung der primären kosmischen Strahlung mittels Ballon- [4] und Satellitenexperimenten [5, 6] ist aufgrund der auf einige Quadratmeter begrenzten Detektionsfläche nur bis zu einer Energie von  $10^{14}$  eV möglich. Darüberhinaus ist - da der Teilchenfluss mit steigender Energie stark sinkt - nur noch ein Nachweis von Folgeprodukten in erdgebundenen Detektoren möglich. Die Richtungsinformation, welche Aufschluss über den Ursprung der kosmischen Strahlung geben würde, bleibt nur für Strahlung geladener Teilchen oberhalb des

Knöchels ( $E > 10^{20}$  eV) erhalten. Eine Lokalisierung der kosmischen Beschleuniger unterhalb dieser Energie ist daher nur mit elektrisch neutralen Informationsträgern wie Photonen und Neutrinos möglich.

- Gammastahlung

Gammastrahlung kann sowohl hadronisch als auch rein leptonisch erzeugt werden. Die Strahlung wird bei niedrigen Energien durch Synchrotronstrahlung von Elektronen und bei höheren Energien durch inverse Compton-Streuung an hochenergetischen Elektronen erzeugt [7]. Gammastrahlung entsteht aber auch bei vielen hadronischen Zerfällen, wie zum Beispiel beim  $\pi^0$ -Zerfall. Gammastrahlung gibt somit keinen Aufschluss darüber, ob die Quelle, aus der sie stammt, ein Hadronenbeschleuniger ist [8]. Zudem wechselwirkt die Gammastrahlung bei Energien oberhalb  $E > 100$  TeV mit der diffusen 2.7 K Hintergrundstrahlung und hat demnach eine begrenzte Reichweite.

- Neutrinos

Neutrinos entstehen durch eine Reihe von Prozessen, wie z.B. bei der Wechselwirkung beschleunigter Protonen mit Materie, beim  $\beta$ -Zerfall oder beim Zerfall von Leptonen bzw. Mesonen. Darüber hinaus können sie durch Annihilation schwerer exotischer Teilchen entstehen, wie es zum Beispiel die topologischen Defekte oder supersymmetrische Teilchen sind (sogenannte „Top-Down-Szenarien“).

Ultrahochenergetische Neutrinos können nicht direkt aus dem Zerfall leichter Mesonen bzw. Leptonen entstehen, da diese - aufgrund ihrer kurzen Lebensdauer - durch Beschleunigung nicht auf solch hohe Energien gebracht werden können. Hochenergetische Neutrinos bieten demnach einen eindeutigen Hinweis für einen hadronischen Beschleunigungsmechanismus der Neutrinoquelle und qualifizieren diesen damit als eine mögliche Quelle der geladenen kosmischen Teilchenstrahlung. Die Identifikation konkreter Neutrinoquellen ist eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Astroteilchenphysik.

## 1.2 Entstehung und Beschleunigung hochenergetischer Neutrinos

Da das Ziel dieser Arbeit das Studium und die Optimierung von Hydrophonen für die akustische Detektion von hochenergetischen Neutrinos ist, wollen wir uns im folgendem auf die Neutrinos konzentrieren und deren Entstehungs- und Beschleunigungsmechanismen nachgehen.

Ganz allgemein kann man bei Neutrinos astrophysikalischen Ursprungs zwischen solchen aus hadronischen Quellen und solchen aus nichthadronischen Quellen unterscheiden. Die ersteren erfordern die Beschleunigung von Protonen („bottom up“ Modelle), welche dann

mit anderen Protonen oder Photonen wechselwirken. Die Produktions und Zerfallskette ist in Gleichung (1.2) dargestellt. Es entstehen entweder Neutrinos (links) oder Photonen (rechts).

$$\begin{aligned}
 p + p/\gamma &\rightarrow \pi^\pm + X & p + p/\gamma &\rightarrow \pi^0 + X \\
 &\hookrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu & &\hookrightarrow \gamma + \gamma \\
 &\hookrightarrow e^\pm + \nu_e + \nu_\mu & &
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Auf eine Unterscheidung zwischen Teilchen und Antiteilchen wurde in Gleichung (1.2) verzichtet. Ein geladenes Pion (Gleichung links) zerfällt in 99.9% aller Fälle in ein Myon und ein Myon-Neutrino. Das Myon wiederum zerfällt in ein Elektron ein Elektron-Neutrino und ein weiteres Myon-Neutrino. Das  $\pi^0$  (Gleichung rechts) zerfällt zu 98.8% in zwei Photonen. Tauon-Neutrinos werden praktisch nicht erzeugt. Bei hadronischen Quellen sollte daher das Neutrinoverhältnis  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 2 : 0$  betragen. Oszillationen zwischen den verschiedenen Neutrino flavours führen jedoch dazu, dass das Verhältnis bei Erreichen der Erde  $\nu_e : \nu_\mu : \nu_\tau = 1 : 1 : 1$  beträgt. Dieses Verhältnis wird bei Annahme des LMA-Modells<sup>1</sup> erwartet. Aktuelle Messungen propagieren dieses Modell [9, 10].

Es bleibt noch zu erläutern, wie die erwähnte Protonenbeschleunigung erfolgen kann. Dies lässt sich durch den Fermimechanismus erklären. Dabei wird das Proton an Gaswolken (Fermi-Beschleunigung 2. Art [11, 12]) oder Schockfronten (Fermi-Beschleunigung 1. Art) beschleunigt.

Bei der Fermi-Beschleunigung 2. Art wird die zur Beschleunigung notwendige Energie durch statistische Stöße an Gaswolken gewonnen. Diese Gaswolken sind magnetisiert, wie man aus Polarisationsmessungen des Lichtes weiß. Fliegt ein Proton mit Geschwindigkeit  $v$  einer Gaswolke, welche die Geschwindigkeit  $w$  besitzt entgegen, so beschreibt das Proton im Ruhesystem der Wolke (die dann einem statischem Magnetfeld entspricht) eine Kreisbahn und verlässt diese wieder. Im Laborsystem hat die Wolke eine zusätzliche elektrische Komponente und beschleunigt das Proton. Es hat im Laborsystem nach Verlassen der Wolke die Geschwindigkeit  $v + 2w$ . Indem ein Proton an mehreren Gaswolken beschleunigt wird, erhält das Proton statistisch mehr Energie, als es durch Kollision an den Gaswolken verliert. Protonen können so jedoch lediglich auf einige 100 GeV beschleunigt werden, was aus bisherigen Untersuchungen der Geschwindigkeiten von Gaswolken und deren statistischen Verteilung hervorgeht. Zwei aufeinander zufliegende Gaswolken können das Proton auf wesentlich höhere Energien beschleunigen.

Durch Schockwellen können ebenfalls Protonen beschleunigt werden und damit wesentlich höhere Energien erreicht werden. Protonen in einer Schockwelle werden hierbei immer wieder an der Schockfront beschleunigt (Fermi Beschleunigung 1. Art). Es findet somit im Laborsystem immer nur ein Energiegewinn statt. Der Energiegewinn der Protonen wird jedoch dadurch beschränkt, dass diese Synchrotronstrahlung emittieren.

---

<sup>1</sup>LMA: Large mixing angle

Diese so beschleunigten Protonen erzeugen mittels der Zerfallskette (1.2) hochenergetische Neutrinos. Diese Art der Neutrinoerzeugung wird „beam-dump“ Szenario genannt.

Neben der hadronischen Neutrinoquellen sind, wie bereits erwähnt, auch nichthadronische Quellen möglich. Diese werden in den sogenannten „top down“ Modellen beschrieben, in denen Neutrinos aus Zerfällen von nicht zum Standardmodell der Teilchenphysik gehörenden Teilchen erzeugt werden.

Eine Möglichkeit für die nichthadronische Neutrinoerzeugung bietet die Dunkle Materie Annihilation, wenn bei ihrem Zerfall Neutrinos entstehen. Ein Überschuss an Neutrinos aus Richtung des Erdinneren, der Sonne oder des Zentrums der Milchstraße wäre ein Hinweis darauf. Die dunkle Materie ist bisher jedoch nicht direkt nachgewiesen. Weiterhin ist die dunkle Materie nicht Bestandteil des Standardmodells der Teilchenphysik. Einige supersymmetrische Theorien sagen abhängig von ihren Parametern die Existenz kalter dunkler Materie voraus, deren Reliktdichte durch die Messungen der W-Map Sonde für diese Modelle festgesetzt ist [13]. Einige Modelle des supersymmetrischen Parameterraumes, die die Dunkle Materie beschreiben, erlauben Neutrinos aus Neutralinoannihilation bis in den TeV Bereich. Die meisten Modelle liefern jedoch nur für vergleichsweise niederenergetische Neutrinos (einige 100 GeV) signifikante Neutrinoflüsse [14].

Eine zweite Möglichkeit der nichthadronischen Neutrinoerzeugung stellt der Zerfall von topologischen Defekten dar. Topologische Defekte (TD) werden in diesem Modell durch einen nur im Rahmen der Quantenfeldtheorie zu verstehenden Phasenübergang zu Beginn des Universums erzeugt. Hochenergetische Neutrinos mit  $E > 10^{20}$  eV erfordern Massen der topologischen Defekte, die größer sind als  $10^{24}$  eV. Theorien zu topologischen Defekten konnten bislang nicht widerlegt werden, jedoch ist beim Zerfall von topologischen Defekten mit einer großen Anzahl an Gammaquanten zu rechnen. Studien der kosmischen Strahlung scheinen einem hohen Gammafluss bei hohen Energien zu widersprechen [15,16].

### 1.3 Quellen hochenergetischer Neutrinos

Die in den „bottom up“ Modellen beschriebene Beschleunigung der Protonen und der anschließende Zerfall von Mesonen in Neutrinos mittels „beam dump“ Szenarios wurden im letzten Kapitel erörtert. Die Umsetzung dieser beiden Schemata ist abhängig von der jeweiligen Teilchenquelle. In den folgenden kosmischen Prozessen bzw. Objekten werden Neutrinos mittels dieser Schemata erzeugt:

- **Erdatmosphäre**

im wortwörtlichen Sinne am naheliegendsten ist die Erzeugung von Neutrinos in der Erdatmosphäre, die aus dem Einfall kosmischer Strahlung resultiert. Diese besteht, wie bereits besprochen, zum Teil aus Protonen. Diese Neutrinos terrestrischen Ursprungs sind in speziell gebauten Neutrinoobservatorien bislang die einzigen eindeutig nachgewiesenen Neutrinos.



- **Sonne**

Ebenso wie auf der Erde fällt die kosmische Strahlung natürlich auch auf der Sonne ein, so dass eine Neutrinoerzeugung zu erwarten ist. Der entsprechende Fluss ist jedoch sehr gering.

Diese Neutrinos sind nicht mit denen zu verwechseln, die aufgrund der Kernfusion im Sonneninneren entstehen. Letztere heißen solare Neutrinos und entstehen durch  $\beta$ -Zerfall im  $pp$ -Zyklus der Sonne. Diese haben eine geringe Energie und werden bereits in Radio-Chemischen-Detektoren oder Cerenkov-Detektoren eingehend untersucht [17–20].

- **Supernovae**

Supernovae sind massereiche Sterne, welche einen gewaltigen eruptiven Ausbruch erleiden. In Supernovaexplosionen werden ebenfalls Neutrinos erzeugt. Dies steht zweifelsfrei fest, da bei der Supernova SN1987A das erste und bisher einzige mal niedereenergetische kosmische Neutrinos gemessen wurden [21–23]. Nicht nur Supernovae, sondern auch Supernovaüberreste (d.h. die bei der Supernova abgestoßene, mit großer Geschwindigkeit expandierende Materie) können Neutrinos höherer Energie produzieren, da sie Stoßwellen ausbilden, an denen Protonen durch den Fermimechanismus beschleunigt werden können.

- **Aktive Galaktische Kerne**

Aktive Galaktische Kerne (engl. active galactic nuclei, AGNs) sind Galaxienkerne, welche aus einem Schwarzen Loch mit bis zu etwa einer Milliarde Sonnenmassen bestehen, auf das Materie einfällt. Die einfallende Materie bildet um die Rotationsachse eine Scheibe, die sogenannte Akkretionsscheibe. Zudem kommt es bei AGNs entlang der Rotationsachse zur Ausbildung von Jets, d.h. von Materieauswürfen, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und eine Länge von mehreren Millionen Lichtjahren erreichen können. An Stoßwellen in der Akkretionsscheibe oder im Jet können Protonen beschleunigt werden. Anschließend ist eine Wechselwirkung mit der Wärmestrahlung der Akkretionsscheibe oder der Synchrotronstrahlung des Jets möglich. Somit kommen AGNs als Neutrinoquellen durchaus in Frage. Die Neutrinoproduktion ist in AGNs nur dann möglich, wenn beschleunigte Protonen vorliegen, was die bisherigen Beobachtungen zwar nahelegen, aber nicht einwandfrei belegen. Insofern hätte der Nachweis von in AGNs erzeugten Neutrinos entscheidende Konsequenzen für AGN-Modelle. In Abbildung 1.2 ist neben der hadronischen Beschleunigung in einem AGN auch die leptonische Beschleunigung dargestellt.

- **Gamma Ray Bursts**

Wenngleich der genaue Ursprung von Gamma Ray Bursts (GRBs) noch unklar ist, steht mittlerweile fest, dass es sich dabei um sehr kurzzeitige, intensive Strahlungs-

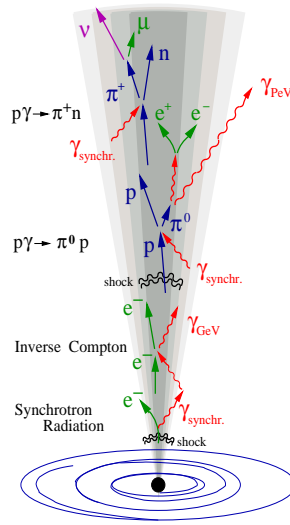


Abb. 1.2: Schematische Darstellung von leptonischer und hadronischer Beschleunigung in einem AGN (aus [24]).

blitze handelt [25]. Deren Ursprung kann in einem Abstand von bis zu mehreren Milliarden Lichtjahren liegen. Aufgrund der immensen freiwerdenden Energie erscheint es unausweichlich, dass Stoßwellen entstehen und somit die Erzeugung hochenergetischer Neutrinos möglich ist. GRBs sind von besonderem Interesse, da sie wie bereits erwähnt, von extrem kurzer Dauer sind, so dass der störende Untergrund in Neutrinoteleskopen entsprechend gering ist.

- **Pulsare**

Pulsare sind rotierende Neutronensterne, die von uns aus beobachtet ähnlich einem Leuchtturm regelmäßig Strahlungspulse aussenden. In der Umgebung eines Pulsars können u.a. schwere Kerne, insbesondere Kerne von Eisenatomen, beschleunigt werden. Wechselwirken diese mit der Strahlung des Pulsars, können freie Neutronen entstehen, die über den  $\beta$ -Zerfall in Protonen und Neutrinos zerfallen. Sofern der Pulsar von einem Nebel umgeben ist, können dort aufgrund der Wechselwirkung der Protonen weitere Neutrinos entstehen.

- **GZK Neutrinos**

GZK Neutrinos entstehen bei der Wechselwirkung hochenergetischer ( $E \geq 50 \text{ EeV}$ ) kosmischer Protonen mit der  $2.7 \text{ K}$  kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung [26, 27]. Dabei wird hauptsächlich das  $\Delta^+(1232)$  erzeugt, welches zum Teil in  $\pi^+$  und anschließend in hochenergetische Neutrinos zerfällt. Noch ist aus experimenteller Sicht umstritten, ob der GZK-cut-off existiert. Die Vermessung des Flussspektrums nach dem

Knöchel zeigt für verschiedene Experimente verschiedene Resultate, wie in Abbildung 1.3 ersichtlich.

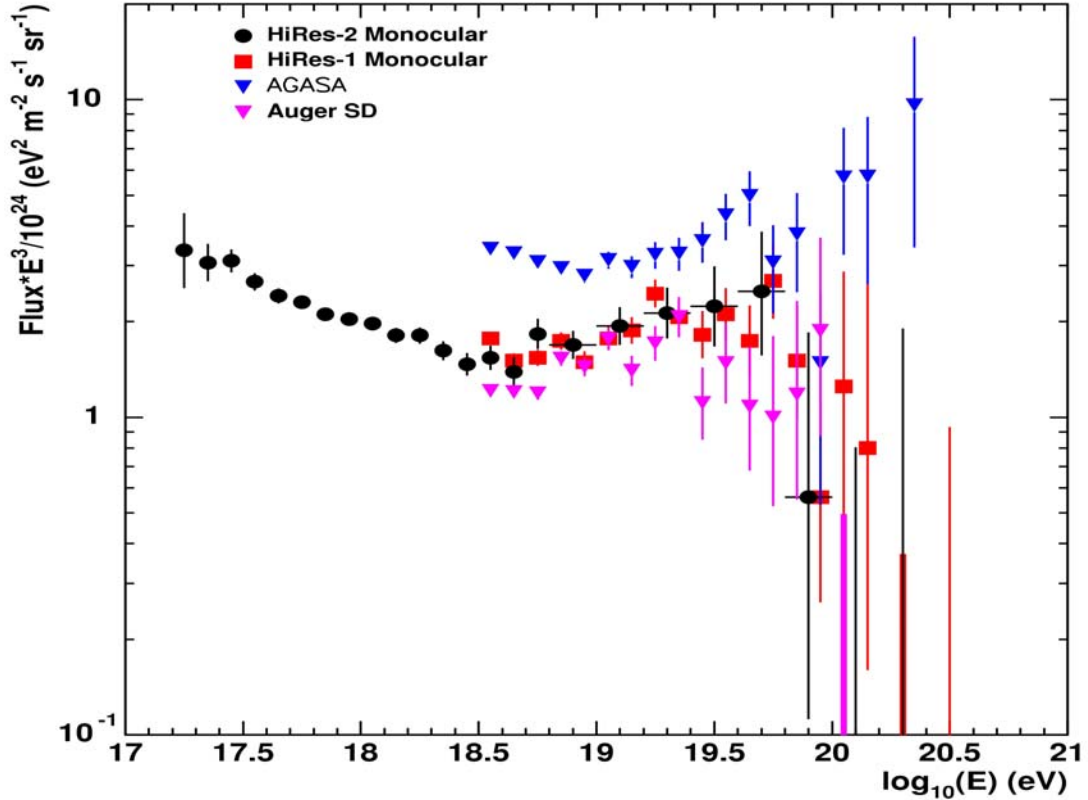


Abb. 1.3: Das Spektrum der kosmischen Strahlung am Knöchel; Messwerte aus verschiedenen Experimenten. Die Auger und HiRes Daten suggerieren die Existenz eines GZK cutoffs; AGASA sieht keinen GZK cutoff (aus [28]).

- **Z-Bursts**

Ähnlich den Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung sollte das Universum mit einem Hintergrund aus Neutrinos durchsetzt sein, die vom Urknall stammen. Diese haben sich abgekoppelt, als das Universum durch Expansion auf eine Temperatur von  $kT \approx 2$  MeV abgekühlt war [29]. Heute sollten diese Neutrinos eine Dichte von  $114 \text{ cm}^{-3}$  pro massive Neutrinosorte aufweisen und eine Schwarzkörperstrahlung von 1.9 K besitzen. Der einzige Wechselwirkungsprozess der kosmischen Strahlung, der sensitiv auf diese Hintergrundneutrinos wäre, wird durch das Z-Burst Szenario beschrieben [30]. Hierbei wechselwirkt ein ultrahochenergetisches Neutrino mit dem eben beschriebenen Neutrinohintergrund. Dabei entsteht ein Z-Boson. Dieses Z-Boson zerfällt zu 70% in hadronische Jets, welche eine Vielzahl an Neutrinos mit einer etwas geringeren Energie erzeugen. Dies würde zu einem sehr hohen Neutrinofluss um die

Z-Resonanz führen. Eine Messung dieser Neutrinos würde auch Aufschluss über die Neutrinomasse geben, da eine niedrigere Neutrinomasse diese Resonanz zu höheren Energien verschiebt.

In [31] wurde für verschiedene theoretische Modelle von Neutrinoquellen der erwartete Neutrinofluss zusammengetragen. Diese Daten sind mit den entsprechenden Referenzen in Abbildung 1.4 dargestellt. In dieser Abbildung ist auch das Waxman Bahcall (WB) Limit eingezeichnet. Dieses beschreibt eine modellunabhängige obere Grenze an den Fluss ultrahochenergetischer Neutrinos. Es wird dabei vom gemessenen ultrahochenergetischen Hadronenfluss der kosmischen Strahlung ausgegangen und die Annahme gemacht, dass diese von optisch dünnen Quellen emittiert wird<sup>2</sup>. Es sollte sich um optisch dünne Quellen handeln, da letztendlich Protonen mit Energien  $> 10^{11}$  GeV beobachtet wurden. Der Neutrinofluss des AGN in Abbildung 1.4 liegt über diesem WB Limit, da dort von einer optisch dichten Quelle ausgegangen wird. Die meisten derartigen Modelle sind jedoch durch das AMANDA Neutrinoobservatorium ausgeschlossen [32]. Auch die GZK-Neutrinos liegen über dem WB Limit. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Protonenfluss für Energien oberhalb des GZK-Cutoffs durch diesen Cutoff unter das WB Limit durch Neutrinoerzeugung gedrückt wird, wodurch eine Anhäufung des Neutrinoflusses um die GZK Grenze entsteht.

Insbesondere die Detektion von Neutrino emittierenden Punktquellen ist aus oben genannten Gründen interessant. Diese lassen sich jedoch wegen ihres geringen Wirkungsquerschnitts vor allem für hohe Energien sehr schwer detektieren, da dort der Fluss sehr gering ist. Es werden sehr große Detektionsvolumina benötigt, um Astronomie mit diesen Informationsträgern zu betreiben. Die Suche nach günstigen Detektionsmethoden ist demnach naheliegend, um große Volumina bestücken zu können. Hier bietet die akustische Teilchendetektion eine interessante und kostengünstige Methode.

---

<sup>2</sup>Optisch dünn bedeutet hier, dass die Quelle nicht größer als die mittlere freie Weglänge der Proton - Photon Wechselwirkung ist.

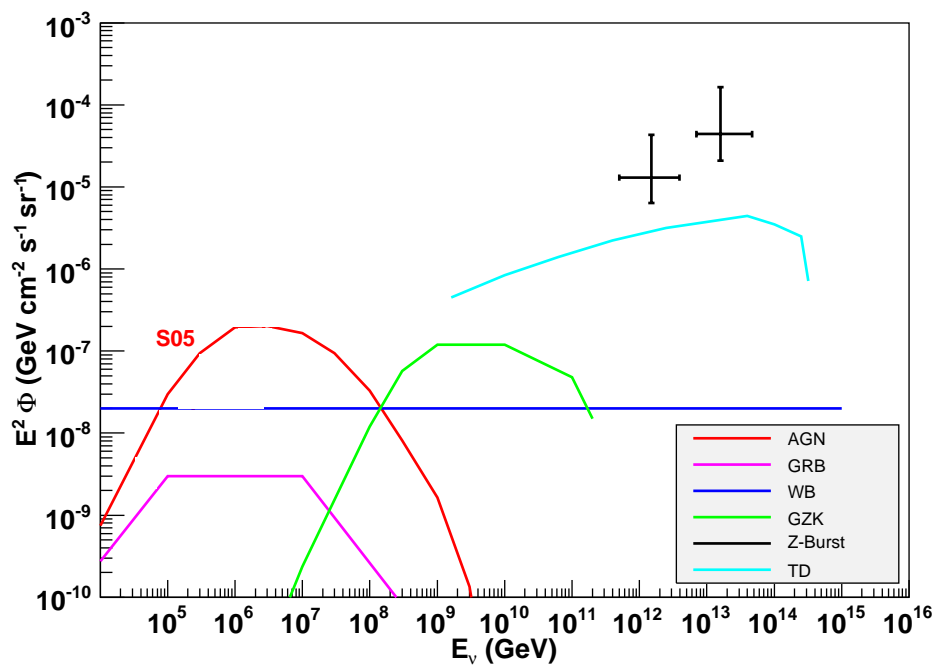


Abb. 1.4: Theoretische Vorhersagen des Gesamtflusses ultrahochenergetischer Neutrinos aller Neutrino flavours für verschiedene Modelle. AGN Modell S05 aus [33]; GRB aus [34]; WB aus [35]; GZK aus [36]; Z-Bursts aus [37]; TD aus [38] ( $m_\nu = 1$  eV).

## 2 Aktivitäten in der akustischen Teilchendetektion

Um akustische Astroteilchenphysik zu betreiben, benötigt man zunächst fundierte Kenntnisse darüber, wie Teilchen akustische Signale erzeugen. Dies wird durch das thermoakustische Modell für Flüssigkeiten und das thermoelastische Modell für Festkörper beschrieben (siehe Kapitel 3.6). Zur Verifikation dieser Modelle wurden verschiedene Experimente durchgeführt, um zu überprüfen, ob akustische Astroteilchenphysik machbar und sinnvoll ist. Diese sollen im ersten Unterkapitel näher beleuchtet werden. Anschließend werden bisherige Aktivitäten auf dem Gebiet der akustischen Detektion von Teilchen beschrieben.

### 2.1 Testexperimente zum thermoakustischen und thermoelastischen Modell

In diesem Kapitel werden durchgeführte Experimente zum Test der Schallerzeugung durch Teilchen beschrieben. Theoretisch wird diese Schallerzeugung durch das thermoakustische und thermoelastische Modell erklärt. Wichtig für beide Modelle ist die Energiedeposition, die den Quellterm für die akustischen Signale bildet. Für die Tests wurden deshalb Teilchen gewählt, bei welchen die Energiedeposition bekannt ist und welche experimentell leicht zu handhaben sind. Daher wurden zum einen Protonenstrahlen und zum anderen Laserstrahlen verwendet. Die Energiedeposition eines einzelnen Protons wird im wesentlichen durch Ionisation und Streuungen im Medium bestimmt und weist einen starken Peak am Ende der Energiedeposition auf (Bragg Peak). Ein Protonenstrahl weist darüber hinaus eine räumliche und zeitliche Verteilung der Protonen auf. Diese Parameter sind von den Eigenschaften des jeweiligen Beschleunigers abhängig. Für die Energiedeposition von Laserstrahlen gilt entlang der Strahlachse das Lambert'sche Gesetz, wonach die Strahlintensität exponentiell abnimmt. Das Strahlprofil ist in den beschriebenen Experimenten gaussförmig.

Im Falle des thermoelastischen Modells sei an dieser Stelle erwähnt, dass dieses bisher im Hinblick auf die astrophysikalische Teilchendetektion nicht explizit geprüft wurde. Alle Arbeitsgruppen, welche sich damit beschäftigen, haben vereinfacht das thermoakustische Modell mit für Eis modifizierten Parametern zu Rate gezogen.

### 2.1.1 Protonenstrahlexperimente

Sulak et al. beschreiben drei Experimente zur akustischen Teilchendetektion an Protonen in Wasser [39]. Desweiteren wurden Protonenstrahlexperimente in Uppsala [40] und am ITEP [41,42] durchgeführt. Diese Experimente werden im Folgenden vorgestellt.

#### Protonenstrahlexperiment am Linac Beschleuniger in Brookhaven/USA

Es wurden Protonen mit einer Energie von 200 MeV in Wasser eingeschossen. Die Pulsdauer wurde von  $3\ \mu\text{s}$  bis  $200\ \mu\text{s}$  variiert. Die Gesamtenergiedeposition betrug  $10\ \text{EeV} - 1\ \text{ZeV}$ . Es konnte ein linearer Zusammenhang zwischen akustischer Signalamplitude und Gesamtenergiedeposition gewonnen werden.

#### Protonenstrahlexperiment am Zyklotron in Harvard/USA

Am 158 MeV Zyklotron (Dies entspricht einer Protonenreichweite von 16 cm in Wasser) in Harvard konnte die Gesamtenergiedeposition auf  $10^{15}\ \text{eV}$  gesenkt werden. Desweiteren konnte der Strahldurchmesser von 1 cm bis 10 cm variiert werden. Jedoch war die Pulsdauer mit  $50\ \mu\text{s}$  lang. Dadurch war die Länge des akustischen Signals durch die Pulsdauer und nicht durch den Strahldurchmesser dominiert. Bei diesem Experiment wurde auch die Abhängigkeit der akustischen Signalamplitude von der Wassertemperatur ermittelt. Da die theoretische Signalerzeugung (Kapitel 3.6.1) linear vom Volumenausdehnungskoeffizienten abhängt, ist zu erwarten, dass kein akustisches Signal bei  $4\ ^\circ\text{C}$  vorhanden ist. In diesem Experiment wurde ein Nullsignal jedoch bei  $6\ ^\circ\text{C}$  festgestellt. Mikroblasen konnten zur Erklärung dieser Variation in einem Experiment mit Stickstoff, welcher in Wasser eingelassen wurde, explizit ausgeschlossen werden.

#### Zweites Protonenstrahlexperiment in Brookhaven/USA

Dieses Experiment wurde an einem 28 GeV Protonenstrahl durchgeführt. Die Energiedeposition konnte nicht unter  $10^{19}\ \text{eV}$  gesenkt werden. Der Strahldurchmesser war von 5 mm bis 20 mm variierbar. Mit einer Depositionszeit von  $2\ \mu\text{s}$  wird in diesem Experiment die Länge des akustischen Signals vom Strahldurchmesser dominiert. Der thermoakustische Effekt (vgl. Kapitel 3.6.1) ist Hauptursache der akustischen Signalerzeugung.

#### Protonenstrahlexperimente in Uppsala/Schweden

Am Gustav-Werner-Synchrozyklotron des Theodor Svedberg Labors in Uppsala, wurde von der Universität Erlangen-Nürnberg ein Experiment mit Protonenstrahlen durchgeführt [40]. Hierzu wurden Protonen in Wasser geschossen. Es stand eine Protonenenergie von 177 MeV zur Verfügung, was einem Bragg Peak bei 22cm in Wasser entspricht. Die Pulsdauer betrug etwa  $50\ \mu\text{s}$ . Die Protonenzahl wurde zwischen  $5.5 \cdot 10^6$  und  $5.5 \cdot 10^9$  Protonen variiert.

Die Beckengröße war aufgrund von Vorstudien mittels Simulation hinreichend groß gewählt (Maße: 60 cm × 60 cm × 150 cm), um die Signale klar trennen zu können. Desweiteren war es möglich, die Temperatur der 450 l des Leitungswassers<sup>1</sup> auf 0.1 ° C genau einzustellen. Dadurch war eine sehr genaue Überprüfung des thermoakustischen Modells möglich. Nachteil war die relativ lange Pulsdauer, wodurch Effekte des Strahldurchmessers nicht untersucht werden konnten. Es wurde ein Verschwinden des Signals bei 4.4 ° C festgestellt.

Neben der Erlanger Gruppe hat sich auch die Akustikgruppe von Desy Zeuthen an dem Protonenstrahlexperiment in Uppsala beteiligt. Diese Gruppe hat die akustische Signalzeugung in Eis untersucht. Hier konnte die Temperatur nur bedingt variiert werden. Zudem war aus technischen Gründen ein zu kleiner Eisblock vorhanden. Mit der in Eis etwa doppelt so schnellen Schallgeschwindigkeit für die Druckwelle konnte das Signal nicht mehr von Reflexionen getrennt werden. Eine Untersuchung der Abhängigkeit der Signalamplitude von der Strahlenergie war jedoch möglich und zeigte das erwartete Verhalten.

### Protonenstrahlexperimente am ITEP

Hier wurde das akustische Signal von Protonenstrahlen mit zwei Strahlenergien (125 MeV und 200 MeV) in Wasser gemessen. Das Signal wurde quasiperiodisch mit einer Pulsdauer von 70 ns eingeschossen. Gemessen wurde eine Gesamtenergieabgabe im Bereich von  $10^{16}$  eV bis  $1.2 \cdot 10^{19}$  eV für jeweils drei verschiedene Strahlweiten. Benutzt wurde der externe medizinische Protonenstrahl von ITEP. Es konnte ein linearer Zusammenhang der akustischen Signalstärke mit der Gesamtenergieabgabe festgestellt werden. Die Pulslänge des resultierenden akustischen Signals ist von der Protonenergie der einzelnen Protonen und der Gesamtenergieabgabe (Intensität × Protonenergie) abhängig, da sich mit der Protonenergie der Braggpeak verschiebt [41]. Signaltrennung war wegen Reflexionen nur bedingt möglich, da die verwendete Beckengröße (Höhe 64 cm, 31 cm Durchmesser) klein war. Als Strahldurchmesser wurden 10 mm, 20 mm und 45 mm gewählt.

In 2005 wurde am ARENA Workshop in Zeuthen ein weiteres Protonenstrahlexperiment vorgestellt, das am ITEP stattgefunden hat [42]. Protonenstrahlen mit zwei Strahlenergien (100 MeV und 200 MeV) wurden in ein Wasserbecken (Maße: 50.8 cm × 52.3 cm × 94.5 cm) eingeleitet. Das akustische Signal wurde mit drei verschiedenen, zuvor im Labor kalibrierten Hydrophonen ausgelesen. Es wurde ein linearer Zusammenhang zwischen Strahlintensität und akustischer Signalamplitude beobachtet. Die Signalform erwies sich wie erwartet als bipolar (siehe Kapitel 3.6.1).

#### 2.1.2 Laserstrahlexperimente

An einem gepulsten Nd:YAG - Laser wurde in Erlangen das thermoakustische Modell überprüft. Dazu wurde Laserenergie in Wasser eingestrahlt [43]. Der Absorptionskoeffizient für

---

<sup>1</sup>Die Füllhöhe des Beckens betrug 50 cm



die mit diesem Laser erzeugte Wellenlänge ( $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ) beträgt  $0.14 \text{ cm}^{-1}$ . Der geringe Absorptionskoeffizient kommt durch Vibrationsanregungen des Wassers zustande. Die Pulslänge betrug  $9 \text{ }\mu\text{s}$  bei einem Gauß'schen Strahlprofil mit einer Strahlbreite von  $0.5 \text{ cm}$  senkrecht zur optischen Achse. Bei Temperaturvariationen verschwand das akustische Signal wie erwartet bei  $4 \text{ }^\circ\text{C}$ . Die Signalamplitude skalierte desweiteren linear mit der Gesamtpulsenergie des Lasers. Das thermoakustische Modell konnte somit mit diesem Experiment bestätigt werden.

Weitere fachfremde Anwendungen des thermoakustischen Modells finden in der Medizintechnik statt. Hierbei soll mit Laserstrahlung Energie in Gewebe eingebracht werden, um mittels des über den thermoakustischen Prozess entstandenen akustischen Signals tomographische Bilder zu erhalten (thermoacoustic computed tomography) [44]. Anders als in der Astroteilchenphysik wird hier die Energiedeposition bestimmt, wohingegen in der Astroteilchenphysik diese Deposition als bekannt angenommen wird und somit der Entstehungsort zu berechnen ist. In der Astroteilchenphysik liegt die Schwierigkeit in der Untergrunddiskrimination, da dort das Signal zu Rausch-Verhältnis sehr schlecht ist. Eine weitere fachfremde Anwendung ist die Qualitätssicherung. Hier wird darüber nachgedacht, Laserquellen zur zerstörungsfreien Messung zu verwenden. Diesbezüglich werden durch die Laserstrahlung Wellen angeregt, welche dann vermessen werden können [45].

Bei Festkörpern sind beim Bestrahlen mit Lasern zwei Schallerzeugungsmechanismen möglich. Nach einem Mechanismus wird Material mit hoher Laserenergie beschossen, so dass dieses schmilzt und das verdampfende Material Schall erzeugt. Der andere Mechanismus, welcher zur zerstörungsfreien Messung genutzt werden kann, verwendet einen Laser mit geringerer Energie. Hier wird mit dem Laserstrahl Energie in das Medium eingebracht und die so entstandene Ultraschallstrahlung zur Qualitätsprüfung verwendet. Diese Art der Schallerzeugung wird durch das thermoelastische Modell beschrieben (Kapitel 3.6.2).

Ein weiteres Laserexperiment wird in [24] beschrieben. Ein gepulster Laser mit einer Pulsdauer von  $9 \text{ ns}$  und einer Wellenlänge von  $1056 \text{ nm}$  wurde dort in Eis eingestrahlt, um die dadurch entstandenen akustischen Signale zu untersuchen. Erwartet wurde ein Signal mit einer Schwerpunktsfrequenz von  $300 \text{ kHz}$ . Zur Messung wurden jedoch Mikrophone in Eis (so genannte Glaciophone) verwendet, deren Sensitivität bis  $35 \text{ kHz}$  ausgelegt ist. Die Signalamplituden sind dementsprechend gering.

## 2.2 Akustische Astroteilchenphysik

Durch die erläuterten Experimente mit Protonenstrahlen und Lasern in Wasser wurde klar gestellt, dass das thermoakustische Modell verstanden ist und akustische Teilchendetektion möglich ist. Dies eröffnet die Möglichkeit, auch in der Astroteilchenphysik die akustische Nachweismethode anzuwenden. Eine ausführliche Darstellung zur Berechnung der benötigten Detektorgeometrie und des effektiven Volumens eines möglichen Detektors zur akus-

tischen Astroteilchenphysik findet sich in [31]. Dort wurde ein  $1000 \text{ km}^3$  großer Detektor mit einer Instrumentierungsdichte von 200 Hydrophonen pro  $\text{km}^3$  propagiert. Aus diesen Studien ging hervor, dass die akustische Messung eine sinnvolle und realisierbare Methode zur Teilchendetektion darstellt. Diese unterstreichen die Wichtigkeit und die Notwendigkeit eines fundierten Verständnisses der akustisch sensitiven Elemente (Piezokeramiken) der Hydrophone. Dieses Verständnis wird in dieser Arbeit erarbeitet und bereitgestellt.

Als nächstes werden jedoch zunächst die zum Teil noch in den Startlöchern befindlichen Aktivitäten auf dem Gebiet der akustischen Astroteilchenphysik vorgestellt. Eine Übersicht sowohl über akustische Detektionsmethoden als auch über optische Detektion und Radiodetektion liefern [46–48]. Nach meiner Einschätzung gliedern sich die Aktivitäten in der akustischen Astroteilchenphysik momentan im Wesentlichen in zwei Hauptbestandteile auf: Ein Großteil der Studien beschäftigt sich mit der Durchführbarkeit akustischer Astroteilchenphysik. Von besonderem Interesse sind hierbei die Umgebungsparameter wie Schallgeschwindigkeit und Korrelationslänge des Untergrundrauschens an den unterschiedlichen geografischen Gebieten, sowie die Berechnung der erwarteten Signaturen. Ein zweiter Teil der Studien nutzt bereits existierende, militärische Hydrophonareale mit dem Ziel, Teilchenflusslimits mit diesen zu ermitteln. Im Folgenden werden die einzelnen Projekte genauer beschrieben. Dabei bieten die unterschiedlichen Detektionsmedien eine natürliche Gliederung.

### 2.2.1 Detektion in Wasser

#### Das DUMAND Projekt

Das DUMAND (Deep Underwater Muon And Neutrino Detector) Projekt existierte von 1976 bis 1995. Das Ziel von DUMAND war die Errichtung des ersten Hochenergie-Neutrino-Detektors in 4800 m Tiefe im Pazifischen Ozean in der Nähe von Hawaii. Geplant war die Implementation von optischen wie akustischen Detektionsmethoden. Zur akustischen Detektion war eine Instrumentierung mit insgesamt 52 Hydrophonen vorgesehen. Ein Teil dieser Hydrophone sollte an den in DUMAND geplanten neun Detektionslinien zwischen den Photomultipliern installiert werden. Vier weitere Hydrophone sollten im Abstand von 300 m um das Detektorareal platziert werden. Es waren 14 Sender geplant, wobei jeweils ein Sender am oberen Ende einer Detektorlinie platziert werden sollte und einer am unteren Ende der zentralen Detektorlinie. Zudem sollte je ein Sender mit den Hydrophonen platziert werden, die in 300 m Abstand vom Detektor lokalisiert werden sollten. Die Hydrophone wurden speziell von der Firma Benthos entwickelt und bereitgestellt. Es stellte sich bei ersten Tests jedoch heraus, dass Hydrophonhülle und Kabel nicht elektrisch geschirmt waren, was zu elektromagnetischen Einkopplungen führen konnte. Auch die DC-DC Konverter können sich dadurch äußerst störend auswirken [49]. Das DUMAND Projekt wurde aus finanziellen Gründen eingestellt.

### Das SAUND Projekt

SAUND (Study of Acoustic Ultra-high energy Neutrino Detection) ist ein Experiment, welches am militärischen Testcenter im Atlantischen Ozean AUTC (Atlantic Undersea Test and Evaluation Center) betrieben wird. Resultat dieses Projektes ist ein Flusslimit, welches mittels nur sieben Hydrophonen in Abstand von 1.5 km gewonnen wurde [50] und demnach mit publizierten Flusslimits anderer Detektionsmethoden, wie Radiodetektion oder optischen Neutrino Cerenkov Teleskopen, nicht konkurrieren kann [31]. Nachfolgeprojekt ist das SAUND II Experiment, welches eine größere Anzahl an Hydrophonen umfasst. Aktueller Stand [51] ist der Betrieb mit 50 Hydrophonen. Die Instrumentierungsdichte ist bei SAUND mit 1.5 km Hydrophonabstand relativ gering. Bei SAUND II beträgt dieser Abstand zwischen den Hydrophonen sogar 4 km. Dies führt zu sehr hohen Energieschwellen für die akustische Teilchendetektion. Das SAUND Projekt mußte bei militärischen Übungen „pausieren“, weshalb in diesen Zeiträumen keine Datenauslese möglich war. Eine Abschätzung der Sensitivität des Detektors ist in [52] zu finden.

### Die Baikal Neutrino Aktivitäten

Detektion von Luftschauern mittels Hydrophonen in 5 m Wassertiefe in Koinzidenz mit Szintillatoren wird in [53] vorgestellt. Diese Hydrophone werden im Winter von der Eisdecke ins Wasser eingelassen - eine Messung im Sommer ist nicht möglich. Es sollen die akustischen Signaturen der Sekundärteilchen der Luftschauer gemessen werden. Die ins Wasser treffenden Teilchen besitzen weniger Energie, als die Primärteilchen des Schauers, da sie in der Luft bereits sehr weit aufgefächert wurden. Dadurch resultieren schwächere Signale, welche sich zudem noch überlagern, so dass kein kohärentes Signal mehr erzeugt wird und eine Signaltrennung schwierig ist. Abhilfe soll durch die Koinzidenz mit den Szintillatoren geschaffen werden. Der aktuelle Aufbau besitzt jedoch eine relativ geringe Gesamtfläche der Szintillatoren, so dass die obere Energieschwelle für Schauer sehr niedrig ist. Eine akustische Detektion der Sekundärteilchen so niederenergetischer Luftschauer sollte schwierig sein. Eine weitere Aktivität zur akustischen Teilchendetektion im Baikalsee wurde auf dem ARENA Workshop 2005 vorgestellt. Es sollen nahe dem im Baikalsee vorhandenem Cerenkov-Neutrinoteleskopes zunächst 4 Hydrophone verwendet werden, um akustische Neutrinodetektion zu betreiben. Hierzu wurden speziell Hydrophone, Verstärker, eine Datenauslese und die Auswerteeinheit entwickelt [54].

### Das SADC Experiment

Das SADC (Sea Acoustic Detection of Cosmic Objects) Experiment will unter Verwendung eines bereits existierenden Hydrophon Arrays mit 2400 Detektoren der russischen Marine im Pazifik nahe Kamchatka akustische Teilchendetektion von hochenergetischen Neutrinos betreiben. Die Hydrophone sind an einem Titanrahmen mit einer Fläche von  $100 \times 20 \text{ m}^2$

befestigt. Das niedrige Frequenzband der existierenden Hydrophone ist für die akustische Teilchendetektion nicht optimiert, was zu sehr hohen Energieschwellen führt. Ein  $10^{20}$  eV Ereignis mit einer Amplitude von 2 mPa in 10 km Abstand reduziert sich durch diese Frequenzbandeinschränkung auf effektive  $19 \mu\text{Pa}$  [55]. Durch Beamforming soll das schlechte Signal zu Rauschverhältnis von  $0.2-0.01$  auf bis zu  $10-0.5$  erhöht werden können. Desweiteren soll ein portables Hydrophon Arreal MG-10M der russischen Marine verwendet werden. Dieses besitzt 132 zylindrisch angeordnete Hydrophone mit einem Durchmesser von 1.6 m, einer Höhe von 1 m und einer Masse von 1200 kg. In [56] werden erwartete Signale spezialisiert auf den Fall berechnet, daß SADCO nahe des optischen Cerenkov Neutrino Teleskops NESTOR vor Pylos errichtet wird [57, 58].

### Das ACORNE Experiment

Unter Nutzung eines militärischen Hydrophon Areals (RONA) des englischen Verteidigungsministeriums nahe Schottland wird ein R&D Programm<sup>2</sup> durchgeführt. Ziel der Studie von ACORNE (Acoustic COsmic Ray Neutrino Experiment) ist es, Untergrundstudien des Hydrophonareals durchzuführen. Desweiteren ist geplant, einen Laser in situ als akustische Kalibrationsquelle für Hydrophone zu verwenden. Die ACORNE Kollaboration will den gesamten Bereich der akustischen Teilchendetektion von der Monte Carlo Simulation der Teilchenschauer<sup>3</sup> und akustischer Signale, über Kalibrationsquellen, bis hin zur Hydrophonkalibration und Signalauswertung abdecken [59, 60].

### TREMAIL Hydrophon Areal

Acht Hydrophone des französischen militärischen Hydrophon Areals wurden benutzt, um Untergrundstudien nahe des Ortes des ANTARES Detektors zu betreiben. Leider war bei den verwendeten Hydrophonen eine große Ungewissheit bezüglich des Verstärkungsfaktor und der Sensitivität zu verzeichnen. Die Datennahme, wie sie in [46, 61] präsentiert wurde, wurde bei ungünstigen Meeresbedingungen genommen. Es herrschten 25-30 Knoten Windstärke, was das Rauschen deutlich erhöhte.

### AMADEUS und ANTARES

AMADEUS (Autonomous Module for the Acoustic DETection Under the Sea) wurde an der Universität Erlangen-Nürnberg entwickelt und gebaut. AMADEUS ist ein autonomes System, welches mit der Line 0 des ANTARES Detektors versenkt und wieder geborgen wurde, um Untergrundstudien zu erhalten. Bei diesem Projekt konnten viele Informationen bzgl. der Rauschquellen der Verstärker und der Elektronik gewonnen werden. Das Eigenrauschen

---

<sup>2</sup>R&D: Research and Development, engl. für Forschung und Entwicklung

<sup>3</sup>Diesbezüglich wurde das Programm CORSIKA, welches für Luftschauer konzipiert ist, für Wasser umformuliert

des Systems scheint bei Frequenzen über 20 kHz gegenüber dem Meeresrauschen dominiert zu haben, weshalb nur bedingt Aussagen über das Meeresrauschen möglich waren. In ANTARES ist geplant, zunächst drei Stockwerke mit akustischen Sensoren zu instrumentieren. Kurz darauf sollen drei weitere Stockwerke folgen. Drei Stockwerke reichen aus, um 18 Sensoren auszulesen<sup>4</sup>. Es ist geplant, die Sensoren kontinuierlich mit einer Frequenz von 200 kHz auszulesen. Die nötige Technik, Logistik und Planung finden ausschließlich in Erlangen statt. Unterstützung seitens der ANTARES Kollaboration findet in Form von Integration und bereitwilliger Herausgabe von diversen Ersatzteilen statt. Die Akustik-Gruppe in ANTARES, im Rahmen welcher diese Arbeit erstellt wurde, ist darüber hinaus bemüht, die gesamte Prozesskette von Simulation der Neutrinoereignisse, über Kalibrationsquellen bis hin zur Hydrophonkalibration nachzuvollziehen. Desweiteren entwickelt und simuliert die Akustik Gruppe in Erlangen individuell entworfene, auf die Anwendung der akustischen Neutrinodetektion bezogene Hydrophone. Die Simulation und Vermessung der sensitiven Elemente (Piezokeramiken) und der Hydrophone ist Aufgabe dieser Arbeit.

### **Akustik beim NEMO Experiment**

Das NEMO (NEutrino Mediteranean Observatory) Projekt ist ein Prototyp eines kubikkilometer großen optischen Cerenkov-Neutrinoteleskops. Ein Prototyp Modul, welches an festen Türmen aufgebaut ist, ist bereits in 2000 m Tiefe versenkt. Dieses befindet sich etwa 20 km vor der Küste von Catania (Italien). Desweiteren wurden dort vier kalibrierte Hydrophone an einer starren Struktur zur Auslese und zwecks Untergrundstudien versenkt [62].

#### **2.2.2 Detektion im Eis - SPATS**

In SPATS (South Pole Acoustic Test Setup) sollen drei akustische Strings mit je sieben Stockwerken im Eis am Südpol eingefroren werden. Dies ist notwendig, um in-situ Studien zu einem akustischen Detektor zu erhalten. Insbesondere sollen die Streulänge und die Absorptionslänge für Eis gemessen werden. SPATS ist das bis dato einzige Experiment, welches in Eis akustische Detektion betreiben will [63].

#### **2.2.3 Detektion in Salz - SALSA**

Salz ist neben Wasser und Eis eine weiteres Medium, welches in natürlichen Vorkommen in ausreichend reiner Form großvolumig vorhanden ist. Somit eignet sich dieses Medium ebenfalls zur akustischen Teilchendetektion. Die Instrumentierung der Salzstöcke ist dabei die schwierigste Angelegenheit, da die Kosten für die benötigten Bohrungen immens sind. Nichtsdestotrotz ist Salz interessant, da es im Vergleich zu Eis um den Faktor 2.56 stärkere Signale liefern sollte. Im Vergleich zu Wasser sollten die Signale sogar um einen Faktor 18.8

---

<sup>4</sup>Die Beschränkung auf 18 Sensoren berechnet sich durch die zur Verfügung stehenden Bandbreite pro Stockwerk

stärker sein [64]. Diese Werte ergeben sich aufgrund einer Modifikation des thermoakustischen Modells in Wasser durch Einsetzen der Parameter wie sie in Eis bzw. Salz vorliegen. SALSA ist ein Projekt, welches sowohl akustische als auch Radio-Cerenkov-Detektion in Salzstöcken betreiben will. Zu diesem Zweck ist zunächst geplant, eine Evaluation der verschiedenen Standorte durchzuführen. Neben kommerziellen Kriterien, wie Minen- und Abbaurechte sollen auch physikalische Parameter, wie Streulänge und Abschwächlänge sowohl für die akustischen Wellen als auch für die Radiowellen vermessen werden.



## 3 Theorie zu elastischen Körpern, Flüssigkeiten und piezoelektrischen Materialien

### 3.1 Einführung wichtiger Begriffe

Im folgenden werden die zur Beschreibung von elastischen Körpern und piezosensitiven Materialien benötigten Größen Permittivität, Deformationszustand und Spannungszustand eingeführt.

#### Die dielektrische Permittivität

Die Permittivität von Materie beschreibt die Durchlässigkeit von Materie für elektrische Felder. Obwohl üblicherweise durch eine Permittivitätszahl ausgedrückt, ist sie im Allgemeinen kein Skalar, sondern ein Tensor zweiter Stufe, welcher die kristalline Struktur der Materie widerspiegelt.

Die Permittivität wird häufig Dielektrizitätskonstante genannt. Tatsächlich ist sie aber nicht konstant, sondern in Materie stets frequenzabhängig. Sie kann zum Beispiel über das Modell des Lorentzoszillators gut beschrieben werden. Wenn die molekularen Dipole (und damit die atomaren Elektronenorbitale) dem äußeren Feld folgen können, ist der Frequenzgang nahezu konstant. Da die für diese Arbeit relevanten akustischen Signale lediglich Frequenzanteile bis 100 kHz enthalten, kann somit im Rahmen dieser Arbeit auf die Frequenzabhängigkeit der Permittivität verzichtet werden.

In anisotropen Materialien ist der Zusammenhang zwischen der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$  und der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  somit über folgenden linearen Zusammenhang gegeben:

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (3.1)$$

Hierbei ist  $\underline{\epsilon}$  der Permittivitätstensor zweiter Stufe<sup>1</sup>.

#### Der Deformationszustand eines Körpers

Allgemein entspricht die Bewegung eines realen Körpers der Bewegung eines starren Körpers mit Deformationen. Die Starrkörperbewegung wiederum lässt sich in Rotationen und Translationen unterteilen. Da die Starrkörperbewegung eines Piezos zu keinen messbaren

---

<sup>1</sup>In dieser Arbeit wird die Summenkonvention verwendet: Über gleiche Indices wird summiert.



Signalen führt, werden in diesem Kapitel lediglich die bei der Bewegung auftauchenden Deformationen berücksichtigt. Dies bedeutet, daß im weiteren eine Vernachlässigung von Rotation und Translation stattfindet.

Zu einer vorgegebenen Zeit ( $t = t_0 = 0$ ) werden einzelne Punkte des Körpers durch die Referenzkoordinaten  $\mathbf{R}$  beschrieben. Die Koordinaten zur aktuellen Zeit werden durch  $\mathbf{x}$  beschrieben. Die Verschiebung  $\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{R}$  des Körpers wird durch die Differenz von den aktuellen Koordinaten zu den Referenzkoordinaten beschrieben.

Die Differenz des Linienelementes der aktuellen Koordinaten zu den Referenzkoordinaten kann mittels der aktuellen Koordinaten (Eulersche Darstellung) bzw. mittels der Referenzkoordinaten (Lagrangesche Darstellung) ausgedrückt werden. In dieser Arbeit wird die Eulersche Darstellung betrachtet. Die Differenz der Linienelemente von aktuellen Koordinaten und Referenzkoordinaten wird dann über den Eulerschen Deformationstensor  $V_{kl}$  mittels der aktuellen Koordinaten ausgedrückt:

$$ds^2 - dS^2 = \left( \delta_{kl} - \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \frac{\partial R_i}{\partial x_l} \right) dx_k dx_l =: 2V_{kl} dx_k dx_l.$$

Wird der Eulersche Deformationstensor mittels der Gradienten  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  der Verschiebungen  $u_k = x_k - R_k$  ausgedrückt, so erhält man:

$$V_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{kl} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(x_i - R_i)}{\partial x_k} - \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial(x_i - R_i)}{\partial x_l} - \delta_{il} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right).$$

Für kleine Veränderungen verschwindet der quadratische Term im Eulerschen Deformationstensor. Der Eulersche Deformationstensor geht mit dieser Vernachlässigung der quadratischen Terme in den infinitesimalen Deformationstensor  $S_{kl}$  über:

$$S_{kl} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right). \quad (3.2)$$

In dieser Arbeit ist stets der infinitesimale Deformationstensor gemeint, wenn von Deformation bzw Deformationstensor gesprochen wird. Die Vernachlässigung des quadratischen Terms und somit der Gebrauch des vereinfachten Deformationstensors entspricht der Verwendung der klassischen Elastizitätstheorie. Zusammengefaßt kann gesagt werden, dass der Deformationstensor die Änderung des Linienelementes bezüglich der aktuellen Koordinaten beschreibt. Die Koordinaten  $S_{kl}$  des Deformationstensors sind ein Maß für lokale Deformation eines materiellen Punktes  $R_i$  am Ort  $x_i$  in der aktuellen Konfiguration. Eine wichtige Eigenschaft des Deformationstensors ist die, dass dessen Spur der relativen Volumenänderung entspricht [65].

### Der Spannungszustand eines Körpers

Kräfte auf einen Körper lassen sich in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte unterteilen. Volumenkräfte sind weitreichende Wechselwirkung wie z.B. die Gewichtskraft. Die Oberflächenkräfte sind Kontaktkräfte, Nah- oder Flächenkräfte. Will man in eine lokale Theorie

übergehen ist es zweckmäßig, die Volumenkraftdichte  $\rho \mathbf{f}$  (mit der Massenkraftdichte  $\mathbf{f}$ ) und die Oberflächenkraftdichte  $\mathbf{t}$  einzuführen.

Die Gesamtkraft  $\mathbf{F}$  auf einem Gebiet  $\Omega$  ist gegeben durch:

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} d^3r \rho \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} d^2r \mathbf{t}. \quad (3.3)$$

Die Oberflächenkraftdichte auf eine Oberfläche mit der Flächennormale  $\hat{\mathbf{n}}$  kann für beliebige Oberflächenelemente mit Einführung des Spannungstensors  $T_{ik}$  umformuliert werden. Es gilt:

$$(\mathbf{T}\hat{\mathbf{n}})_i := t_i.$$

Der Spannungstensor liefert also gerade den Teil der Oberflächenkraft, der in Normalenrichtung zeigt.

Mit Hilfe der Drehimpulserhaltung kann gezeigt werden, dass der Spannungstensor symmetrisch ist ( $T_{lk} = T_{kl}$ ).

## 3.2 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen sind die wichtigsten Gleichungen in der Strukturmechanik und Hydrodynamik. Sie sind unabdingbar, wenn man die Bewegungsgleichungen von Teilchen in Wasser bzw. in piezoelektrischen Materialien aufstellen will.

### 3.2.1 Die Massenbilanzgleichung (Kontinuitätsgleichung)

Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass der aus einem Volumen hinweggetragene Materiefluss mit der Dichteänderung im Volumen identisch ist. Sie beschreibt demnach eine Massenerhaltung der Masse  $M = \int_{\Omega} d^3r \rho$  in einem Gebiet mit der Materiedichte  $\rho$ .

$$0 = \frac{d}{dt}M = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r \rho = \int_{\Omega} d^3r \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right). \quad (3.4)$$

Mit der Vektoridentität  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  kann die Gleichung (3.4) auch umgeschrieben werden in

$$0 = \int_{\Omega} d^3r \left( \frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right). \quad (3.5)$$

Beide Varianten der Kontinuitätsgleichung (3.4) und (3.5) gelten für beliebige Volumenelemente, weshalb die Integration über das Volumen weggelassen werden kann. Konvektion von Materie ist durch die Kontinuitätsgleichung demnach immer mit einer lokalen Dichteänderung verbunden.

### 3.2.2 Die Impulsbilanzgleichung

Als Ausgangspunkt wird die Newton'schen Bewegungsgleichung betrachtet, welche die Impulserhaltung angibt. Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses im Gebiet  $\Omega$  entspricht den am Körper angreifenden Kräften:

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} d^3r \rho \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}. \quad (3.6)$$

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte an dem Punkt, auf welchen die Kraft  $\mathbf{F}$  wirkt, und  $\mathbf{u}$  ist die bereits in 3.1 eingeführte Verschiebung.

Die Kraft teilen wir wiederum in Oberflächenkraft und Volumenkraft ein. Mit dem Gaußschen Integralsatz kann das Oberflächenintegral in Gleichung (3.3) in ein Volumenintegral umgeformt werden. Die erhaltene Gleichung ist für jedes beliebige Volumen gültig, so daß die Integration weggelassen werden kann. Es folgt:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{d^2}{dt^2} u_i. \quad (3.7)$$

Zur Herleitung der Gleichung in anderen Koordinatensystemen ist die Divergenz des Spannungstensors in den entsprechenden Koordinatensystem auszuführen. Im Anhang A.1 wird dies explizit für Zylinderkoordinaten vorgeführt.

### 3.2.3 Die Energiebilanzgleichung

Betrachtet man wiederum ein Kontinuum im Volumen innerhalb eines abgeschlossenen Gebietes  $\Omega$ , so besagt die Energiebilanz für ein solches Kontinuum, dass die Nettorate der zugeführten Energie gleich dem Zuwachs an kinetischer und innerer Energie entspricht. Die zugeführte Energie entspricht zum einen der externen Arbeit und zum anderen der Absorption von Wärmestrahlung oder anderen Formen nicht mechanischer Energie.

Die Volumenkraft  $\rho \mathbf{f} d^3r$  auf ein Volumenelement  $d^3r$  im betrachteten Gebiet, welches sich mit  $\mathbf{v}$  bewegt, verrichtet die Leistung  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d^3r$ .

Die Oberflächenkraft auf ein Flächenelement am Rande des betrachteten Gebietes, das sich mit  $\mathbf{v}$  bewegt, verrichtet die Leistung  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}$ .<sup>2</sup>

Die nichtmechanische Leistung durch ein Flächenelement ist mit dem nichtmechanischen Energieflussvektor  $\mathbf{h}$  gegeben durch  $-\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}$ . Für nichtmechanischen Energieaustausch, der nur auf Wärmeleitung basiert, entspricht  $\mathbf{h}$  dem Wärmestromvektor  $\mathbf{q}$ . Der Wärmestromvektor ist für ein Material mit einer isotropen Wärmeleitfähigkeit  $K$  gegeben durch  $\mathbf{q} = -K \text{grad} T$ . Hierbei ist  $T$  die Temperatur. Die Gesamtenergie pro Einheitsvolumen  $E$  setzt sich aus der kinetischen Energie pro Einheitsvolumen  $\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2$  und der inneren Energie pro Einheitsmasse  $U$  zusammen.

<sup>2</sup>Beachte:  $\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}}$  ist die Kraft, die auf das Material in  $-\hat{\mathbf{n}}$  Richtung einwirkt.

Für die Energiebilanzgleichung ergibt sich somit insgesamt:

$$\int_{\Omega} d^3r \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} d^2r (\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r E = \int_{\Omega} d^3r \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dU}{dt} \right). \quad (3.8)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und dem Wissen, dass die Gleichungen für jedes beliebige Volumen gelten sollen, folgt aus Gleichung (3.8) die differentielle Form des Energiesatzes:

$$\rho \left( v_i \frac{dv_i}{dt} + \frac{dU}{dt} \right) = \rho v_i f_i + \frac{\partial (v_i T_{ji})}{\partial x_j} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i}. \quad (3.9)$$

Die Körperkräfte und die kinetische Energie in Gleichung (3.9) können mit Hilfe der Impulsbilanzgleichung (3.7) eliminiert werden. Wenn die Gleichung (3.7) von links mit  $v_i$  multipliziert und über  $i$  summiert wird, bekommt man eine weitere Energiegleichung:

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = \rho v_i f_i + v_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.10)$$

Subtrahiert man die Gleichung (3.10) von der Gleichung (3.9), so erhält man:

$$\rho \frac{dU}{dt} = T_{ij} d_{ij} - \frac{\partial h_i}{\partial x_i}. \quad (3.11)$$

Hierbei wurde die Symmetrie des Spannungstensors ausgenutzt und die Deformationsrate  $d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  eingeführt.

Die Deformationsleistung  $T_{ij} d_{ij}$  ist Teil derjenigen Leistung pro Einheitsvolumen, die durch Deformationen hervorgerufen wird. Die Gesamtleistung durch Deformation, die in Gleichung (3.9) vorkommt, wurde in zwei Teile aufgespalten:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (v_i T_{ji}) = v_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i} + T_{ij} d_{ij}. \quad (3.12)$$

Gleichung (3.10) ordnet dem ersten Teil von Gleichung (3.12) kinetische Energie und Arbeit gegenüber Volumenkräften zu, wohingegen Gleichung (3.11) den Term  $T_{ij} d_{ij}$  aus Gleichung (3.12) mit innerer Energie und dem nichtmechanischem Energiefluss verknüpft.

Die Energiebilanzgleichung (3.11) entspricht der Zeitdifferentiation des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik. Um dies zu veranschaulichen, wird ein System im thermodynamischen, lokalen Gleichgewicht betrachtet. Für den Spannungstensor gilt dann Gleichheit der Hauptdiagonaleinträge mit dem Druck  $p$ :

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + T'_{ij}. \quad (3.13)$$

Hierbei ist  $T'_{ij}$  dissipativ, also nur abhängig von der Deformationsrate  $d_{ij}$  und verschwindet identisch, wenn  $d_{ij}$  verschwindet.

Gleichung (3.11) wird daher mit der Kontinuitätsgleichung (3.5) und der spezifischen Entropie (Entropie pro Einheitsmasse)  $S$  zu:

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.14)$$

Hierbei ist die Entropieänderung für allgemeine Prozesse gegeben durch:

$$\dot{S} = \frac{1}{T\rho} (T'_{ij} d_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{q}). \quad (3.15)$$

Für reversible Prozesse, die im weiteren betrachtet werden, gilt  $T'_{ij} d_{ij} = 0$ .

Eine weitere, wichtige Variante der Energiebilanzgleichung ergibt sich mit der Definition der spezifischen Wärme bei konstantem Druck  $C_p$  bzw. konstantem Volumen  $C_V$ , dem isothermen Kompressionsmodul  $B$ , dem adiabatischem Kompressionsmodul  $B'$  und dem isobaren Volumenausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ :

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (3.16)$$

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (3.17)$$

$$B = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T; \quad B' = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = B \frac{C_p}{C_V} \quad (3.18)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (3.19)$$

Es folgen wichtige äquivalente Darstellungen für die Energiebilanzgleichung. Diese resultieren aus den oben angegebenen Definitionen und der Verwendung der Maxwell-Relationen:

$$\rho T \dot{S} = \frac{\rho C_V}{B\alpha} \dot{p} - \frac{C_p}{\alpha} \dot{\rho} \quad (3.20)$$

$$\rho T \dot{S} = \rho C_V \dot{T} - \frac{TB\alpha}{\rho} \dot{\rho}. \quad (3.21)$$

Für die durch Wärme absorbierte Energie pro Einheitsvolumen (Energiedichteverteilung)  $\epsilon$  gilt  $\dot{\epsilon} = -\operatorname{div} \mathbf{q}$  und damit gilt für reversible Prozesse  $\dot{\epsilon} = \rho T \dot{S}$ .

Es soll noch bemerkt werden, dass durch Integration von  $B$  und  $\alpha$  eine Zustandsgleichung<sup>3</sup> gewonnen werden kann. Aus einer Zustandsgleichung kann alternativ  $B$  und  $\alpha$  extrahiert werden.

### 3.3 Das Hooke'sche Gesetz

Die Oberflächenspannungen eines elastischen Körpers sind eng mit den Deformationen dieses Körpers verknüpft. Dies kann analog zum Federgesetz beschrieben werden. Dort sind die Auslenkungen der Feder zur Federkraft proportional. Das Hooke'sche Gesetz des elastischen

<sup>3</sup>Zustandsgleichung: Abhängigkeit einer thermodynamischen Variablen  $p, V$  oder  $T$  von den anderen beiden.

Körpers ist ebenso durch einen linearen Zusammenhang gegeben. Hier ist der Spannungstensor vom Deformationstensor linear abhängig:

$$T_{ik} = c_{iklm} S_{lm}. \quad (3.22)$$

Die Tensoren 4. Stufe  $c_{iklm}$  entsprechen den Elastizitätsmoduln. Unter Ausnutzung der Symmetrien des Spannungs- und Deformationstensor reduzieren sich die 81 Freiheitsgrade der Elastizitätsmoduln auf zunächst 36, da

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl}. \quad (3.23)$$

Durch die Existenz des Potentials  $T_{ij} = S_{ij}$  gilt auch  $c_{ijkl} = c_{klij}$ . Die Freiheitsgrade reduzieren sich damit auf 21.

Durch Ausnutzung weiterer Symmetrien lassen sich die Freiheitsgrade weiter reduzieren. Einen Spezialfall bilden isotrope Materialien<sup>4</sup>. Hier muss die Spannung unabhängig vom Koordinatensystem sein.

Die vollständigste koordinatenfreie Darstellung eines symmetrischen Tensors ist nur mittels der Einheitsmatrix zu erreichen. Für den Elastizitätstensor folgt dann:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk}.$$

Mit Gleichung (3.23) folgt:  $\mu = \nu$ . Ein isotroper Körper ist demnach durch zwei Materialparameter,  $\lambda$  und  $\mu$ , eindeutig charakterisiert. Diese beiden Parameter werden Lamé-Konstanten genannt.

Bei der Betrachtung der Elastizitätsmoduln gibt es bei genauer thermodynamischer Betrachtung zwei Definitionen. Diese können nämlich entweder bei konstanter Temperatur oder bei konstanter Entropie angegeben werden. In dieser Arbeit sind lediglich die Elastizitätsmoduln bei konstanter Entropie relevant, da Schallabstrahlung adiabatisch verläuft. Dies ist der Fall, weil die Konvektion der Temperatur im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit wesentlich langsamer verläuft, so dass der Temperaturfluss in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Auch durch die eben genannten Entropieänderungen entstehen Spannungen. Es folgt somit für einen isotropen Körper:

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} S_{kk} + 2\mu S_{ij} - \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) \frac{\alpha T}{C_p} (S - S_0) \delta_{ij}. \quad (3.24)$$

Hierbei ist  $\alpha$  der Volumenausdehnungskoeffizient des Mediums und  $C_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck.

Die Spur von (3.24) stimmt unter Verwendung von (3.13), (3.18), (3.21) und der Maxwellrelation  $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$  überein mit:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S dV + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V dS = -\frac{B'}{V} dV + \frac{T\alpha}{C_p} B' dS. \quad (3.25)$$

Das Hooke'sche Gesetz entspricht somit der Kombination aus der Energiebilanzgleichung und einer linearisierten Zustandsgleichung.

---

<sup>4</sup>z.B. Eis ist unter hohem Druck isotrop

### 3.4 Die Piezo-Gleichung

In den letzten Kapiteln wurde unter anderem der Zusammenhang von elektrischer Verschiebungsdichte und elektrischer Feldstärke mittels des Dielektrizitätstensors erklärt. Desweiteren wurde das Hooke'sche Gesetz beleuchtet.

Der piezoelektrische Effekt verbindet zusätzlich die durch das Hooke'sche Gesetz und die Impulsbilanzgleichung beschriebenen mechanischen Spannungen und Deformationen mit dem elektrischen Feld. Pyroelektrische Effekte werden hier nicht weiter behandelt, weshalb Temperatureffekte außer Acht gelassen werden ( $T - T_0 = 0$  K). Der Spannungstensor sei an jedem Punkt neben dem Deformationstensor zusätzlich vom elektrischem Feld  $\mathbf{E}$  abhängig. Die Kopplungskonstanten  $e_{ikl}$  (der piezoelektrische Tensor 3. Stufe) werden bei konstanter Deformation gewonnen und verknüpfen die mechanischen Größen mit den elektrischen<sup>5</sup>. Da es sich dabei um einen linearen Zusammenhang handelt, sind umgekehrt die elektrischen Größen mittels der gleichen Kopplungskonstanten mit mechanischen Größen verknüpft. Dies spiegelt sich in den Piezogleichungen wieder [66]:

$$T_{ik} = c_{iklm} S_{lm} + e_{ikl} E_l \quad (3.26)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{il} E_l \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0. \quad (3.29)$$

In Gleichung (3.28) wurde aufgrund einer Linearisierung die totale Zeitdifferentiation in eine partielle umgeschrieben. Dichteschwankungen sind aufgrund von Linearisierung ebenfalls irrelevant.

Weiterhin geht man bei der Beschreibung der Dynamik eines Piezos davon aus, dass das elektrische Feld im Vergleich zu den mechanischen Deformationen wesentlich schneller reagiert und somit quasistatisch ist. Diese Annahme kann gemacht werden, da akustische Wellen wesentlich langsamer sind als elektromagnetische. Aus diesem Grund kann auf eine elektrodynamische Behandlung verzichtet werden. Für die Zeitentwicklung kann man sich auf die mechanischen Größen beschränken, die durch Gleichung (3.28) gegeben sind. Volumenkräfte, wie Gravitation, werden in dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt. Die Divergenz der elektrischen Verschiebungsdichte verschwindet äquivalent, da keine Ladungsquellen vorhanden sind (Gleichung (3.29)).

Diese Gleichungen müssen nun im nächsten Schritt durch Randbedingungen ergänzt werden. Diese wären z.B. die Vorgabe einer Spannung, einer Ladung und bzw. oder einer Kraft. Sie

---

<sup>5</sup>Die Elastizitätsmoduln werden bei konstantem elektrischem Feld betrachtet. Es finden sich demnach in der Literatur explizite Angaben in Form hochgestellter Buchstaben der konstantgehaltenen Größe (z.B.  $c^E$ ,  $e^S$ ).

werden in Kapitel 4 genauer beschrieben.

### Voigtsche Notation der Piezo Gleichungen

Die Piezogleichungen in der Form (3.26)-(3.29) haben den entscheidenden Vorteil, dass Transformationen in beliebige Koordinatensysteme einfach ausgeführt werden können. Dies ist eine Konsequenz der Tensoreigenschaft. Auf der anderen Seite sind die Gleichungen jedoch schwer fassbar, so daß es wünschenswert ist, diese in Matrixform umzuschreiben. Dies ist unter Ausnutzung der speziellen Symmetrie der Elastizitätsmoduln möglich. Es kann somit ein Isomorphismus von der Tensorschreibweise zu einer einfacheren Matrixschreibweise angegeben werden. Die Transformationseigenschaften der Tensorstruktur gehen dabei natürlich verloren.

Es wird folgendes Mapping, die Voigtsche Notation, vorgenommen [66]:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \mapsto (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12})^t =: (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)^t$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} \mapsto (S_{11}, S_{22}, S_{33}, 2S_{23}, 2S_{13}, 2S_{12})^t =: (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)^t.$$

Analog gilt<sup>6</sup>:

$$c_{(ij)(kl)} \mapsto c_{\alpha\beta}, e_{n(ij)} \mapsto e_{n\alpha} \text{ mit } \begin{cases} ij \text{ bzw. } kl & \begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 & 23 & 13 & 12 \\ \alpha & \beta & \gamma & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \alpha \text{ bzw. } \beta & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Somit vereinfachen sich die Piezogleichungen folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} T_\alpha \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha\beta} & e_{\alpha j} \\ e_{i\beta} & \epsilon_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\beta \\ E_j \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Diese Gleichung ist eine zusammengefasste Darstellung der Gleichungen (3.26) und (3.27). Mit dieser Schreibweise des Spannungstensors und der elektrischen Verschiebungsdichte lässt sich nun die Bewegungsgleichung des Piezos aufstellen, indem die Divergenz des Spannungstensors bzw. der elektrischen Verschiebungsdichte betrachtet wird. Die Bewegungsgleichung resultiert mit Gleichung (3.7) in einer Differentialgleichung für die Verschiebungen  $u_i$  und das elektrische Potential  $V$ :

$$M_F \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ V \end{bmatrix} - \nabla \cdot \left( C_F \nabla \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ V \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (3.31)$$

<sup>6</sup>Beachte: Innerhalb dieser Arbeit laufen griechische Indices von 1 bis 6



Diese Gleichung fasst alle vier Piezogleichungen ((3.26)-(3.29)) zusammen. Der Ausdruck innerhalb der runden Klammer entspricht

$$([T_1, T_6, T_5], [T_6, T_2, T_4], [T_5, T_4, T_3], [D_1, D_2, D_3])^t.$$

Die  $4 \times 4$  Matrix  $M_F$  ist mit der  $3 \times 3$  Einheitsmatrix  $\mathbb{1}_3$  gegeben durch:

$$M_F = \begin{bmatrix} \rho \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und die  $12 \times 12$  Matrix  $C_F$  ist gegeben durch:

$$C_F = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{15} & c_{14} \\ c_{61} & c_{65} & c_{64} \\ c_{51} & c_{55} & c_{54} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{15} & c_{12} & c_{16} \\ c_{65} & c_{62} & c_{66} \\ c_{55} & c_{52} & c_{56} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{14} & c_{16} & c_{13} \\ c_{64} & c_{66} & c_{63} \\ c_{54} & c_{56} & c_{53} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -e_{11} & -e_{21} & -e_{31} \\ -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{61} & c_{65} & c_{64} \\ c_{21} & c_{25} & c_{24} \\ c_{41} & c_{45} & c_{44} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{65} & c_{62} & c_{66} \\ c_{25} & c_{22} & c_{26} \\ c_{45} & c_{42} & c_{46} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{64} & c_{66} & c_{63} \\ c_{24} & c_{26} & c_{23} \\ c_{44} & c_{46} & c_{43} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -e_{16} & -e_{26} & -e_{36} \\ -e_{12} & -e_{22} & -e_{32} \\ -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_{51} & c_{55} & c_{54} \\ c_{41} & c_{45} & c_{44} \\ c_{31} & c_{35} & c_{34} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{55} & c_{52} & c_{56} \\ c_{45} & c_{42} & c_{46} \\ c_{35} & c_{32} & c_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{54} & c_{56} & c_{53} \\ c_{44} & c_{46} & c_{43} \\ c_{34} & c_{36} & c_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -e_{15} & -e_{25} & -e_{35} \\ -e_{14} & -e_{24} & -e_{34} \\ -e_{13} & -e_{23} & -e_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_{11} & e_{15} & e_{14} \\ e_{21} & e_{25} & e_{24} \\ e_{31} & e_{35} & e_{34} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{15} & e_{12} & e_{16} \\ e_{25} & e_{22} & e_{26} \\ e_{35} & e_{32} & e_{36} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{14} & e_{16} & e_{13} \\ e_{24} & e_{26} & e_{23} \\ e_{34} & e_{36} & e_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, handelt es sich um sehr komplizierte gekoppelte partielle Differentialgleichungen.

Durch die spezielle hexagonale Symmetrie<sup>7</sup> der in dieser Arbeit betrachteten piezoelektrischen Materialien, reduzieren sich die Elastizitätsmoduln, der piezoelektrische Tensor und der Permittivitätstensor weiter. Es bleiben lediglich 12 Materialkonstanten übrig. Eine dieser Materialkonstanten ist die Dichte  $\rho$ . Die restlichen 11 Unbekannten werden implizit durch die Matrixschreibweise aus Gleichung (3.30) beschrieben. Dabei wird eine Polarisation des piezoelektrischen Materials in Richtung der  $x_3$ -Achse betrachtet:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Eigentlich sollte aus Symmetriegründen  $c_{66} = 0.5 \cdot (c_{11} - c_{12})$  gelten, jedoch weichen die Herstellerangaben für  $c_{66}$  hiervon ab. Diese Abweichung hat aber lediglich einen relativen Fehler von etwa 0.1%, was im Vergleich zum absoluten Fehler der Materialparameter von 10% vernachlässigbar ist. Sollen die Materialmatrizen für beliebige andere Polarisierungen berechnet werden, muss man zur Tensorschreibweise zurückkehren und die Rotation in das

---

<sup>7</sup>6mm Symmetrie [67]

entsprechende Koordinatensystem ausführen. Hierfür wurde eine Matlab-Routine geschrieben. Es wurde weiterhin eine Sammlung verschiedener Materialien angelegt, für welche alle 12 Materialparameter in Erfahrung gebracht werden konnten. Hiervon wurden Aluminium-Nitrit, PXE-5, PZT4, PZT5H, PZT5J, PZT5A, PZT7A und PZT8 genauer untersucht. Es sollte noch bemerkt werden, dass die piezoelektrischen Gleichungen in der angegebenen Form (3.30) die Verschiebung und das elektrische Feld als unabhängige Variablen betrachten. Andere unabhängige Variablen führen auf andere Kopplungstensoren. Diese können aber ineinander umgerechnet werden, weshalb auf alternative Darstellungen nicht weiter eingegangen wird. Der Vollständigkeit halber seien alle möglichen Kombinationen unabhängiger Variablen aufgelistet:

- Deformationen und elektrisches Feld,
- mechanische Spannungen und elektrische Verschiebungsdichte,
- Deformationen und elektrische Verschiebungsdichte,
- mechanische Spannung und elektrisches Feld (in dieser Arbeit verwendet).

### 3.5 Dämpfungsmodelle

In der Strukturmechanik ist es sehr schwierig, viskose geschwindigkeitsabhängige<sup>8</sup> Dämpfung vollständig zu beschreiben. Nur bei einigen wenigen Strukturen ist die komplette viskose Dämpfungsmatrix  $T'_{ij}$  bekannt.

Weit verbreitete Dämpfungsmodelle, wie sie in der mathematischen Modellierung für die dynamische Antwort zu simulierender Strukturen Verwendung finden, sind proportional zur Steifigkeit beziehungsweise zur Masse des Systems. Eine Linearkombination dieser beiden Dämpfungen wird als Rayleigh-Dämpfung bezeichnet. Dieses Dämpfungsmodell soll nun näher untersucht werden.

Die Dämpfung wird hier aufgeteilt in einen Formfestigkeitsparameter (stiffness damping parameter)  $\beta$  und einen Massenparameter (mass damping parameter)  $\alpha$ . Um dies zu veranschaulichen, müssen die Piezogleichungen (3.31) bezüglich der Zeitdifferentiation in Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_4 & 0 \\ 0 & \rho M_F \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \end{bmatrix} - \nabla \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_F & \beta C_F \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1}_4 \\ 0 & \alpha \rho M_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Hierbei ist  $\mathbb{1}_4$  die 4x4 Einheitsmatrix und  $\mathbf{w} := (\mathbf{u}^t, V)^t$ . Diese Art die Dämpfung zu beschreiben liegt einzig in der Numerik begründet. Eine reale viskose Dämpfungsmatrix wäre

<sup>8</sup>gemeint ist die Geschwindigkeit des Verschiebungsfeldes.

nicht zwangsweise eine Linearkombination aus Masse und Formfestigkeit. Der  $C_F$  Term bei  $\beta$  führt eine frequenzabhängige Dämpfung ein, die mit steigenden Frequenzen quadratisch zunimmt. Durch den  $M_F$  Term bei  $\alpha$  wird eine für alle Frequenzen konstante Dämpfung eingeführt. Eine Erhöhung der Dämpfung für höhere Frequenzen scheint vernünftig, da die Energiedissipation in Form von gleichen aber entgegengesetzten Kräften bei höheren Frequenzen zunehmen sollte. Nichtsdestotrotz ist das Rayleigh-Dämpfungsmodell nicht aus fundamentalen physikalischen Grundlagen zu motivieren. Es ist jedoch in der numerischen Simulation weit verbreitet. Die kritische Dämpfung ist für jede Schwingungsmoden anzuweisen. Im Rayleigh-Dämpfungsmodell gilt nach den obigen Ausführungen für das kritische Dämpfungsverhältnis  $\xi_i$  der  $i$ -ten Schwingungsmoden:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{2\pi f_i} + \beta 2\pi f_i \right). \quad (3.34)$$

Bei Vorgabe der kritischen Dämpfung bei zwei Frequenzen können die Dämpfungsparameter  $\alpha$  und  $\beta$  extrahiert werden. Eine Dämpfung von 1.5% der kritischen Dämpfung bei den Frequenzen  $50kHz$  und  $80kHz$  erwies sich bei der Simulation als praktikabel.

Eine andere Form der Energiedissipation ist die Strahlungsdämpfung auf der Oberfläche der Struktur. Die Vibration der Struktur verzerrt das Material und regt somit Druckwellen in der Umgebung an. Diese Art der Dämpfung ist insbesondere bei der Kopplung des Piezos an Wasser von besonderer Wichtigkeit und wurde mittels Kräftegleichgewicht an der Oberfläche modelliert (Kapitel 4).

### 3.6 Theorie zur Wellenerzeugung durch Wärmequellen

Die Energiedeposition von Teilchen in Wasser bzw. in elastischen Körpern erwärmt das jeweilige Material und es entstehen akustische Signale. Die Theorie dieser Schallerzeugung wird in diesem Kapitel erarbeitet.

Eine exakte Herleitung der Erzeugung akustischer Signale durch Wärmequellen findet sich in [67] und wurde zum Teil daraus adaptiert.

In dieser Arbeit sind akustische Signale in Wasser von Interesse. Im Hinblick auf diese Signale sollen schließlich die zu simulierenden Piezokeramiken optimiert werden. Nichtsdestotrotz wird hier der Vollständigkeit halber eine Einführung in die Schallerzeugung durch Wärmequellen in elastischen Körpern gegeben, da auf diesem Gebiet innerhalb der Astroteilchengemeinschaft keine Arbeiten vorhanden sind.

#### 3.6.1 Das thermoakustische Modell

In 1957 stellte G. Askaryan ein Modell auf, welches es erlaubt, akustische Signale aus der Energiedeposition von Teilchenschauern in Wasser zu berechnen [68]. In einem weiteren

Artikel führte er Berechnungen durch, um eine Prognose für die Detektion von Teilchenschauern mittels dieser Methode zu erhalten [69]. Auch J. Learned veröffentlichte eine detaillierte Analyse von erwarteten akustischen Signalen, welche durch geladene Teilchenschauer in Flüssigkeiten entstanden sind. Die Herleitung dieses Modells wird nun vorgestellt. Hierzu wird die viskose Dämpfungsmatrix vorgegeben:

$$T'_{ij} = (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.35)$$

Mit (3.35) und (3.13) resultiert  $T_{ij}$ . Wird dieses in die Impulsbilanzgleichung (3.7) eingesetzt folgt unmittelbar die Navier Stokes Gleichung. Hierbei sind  $\eta$  der Viskositätskoeffizient und  $\zeta$  die Kompressionsviskosität. Beide können vom thermodynamischen Zustand abhängen. Eine Flüssigkeit, deren viskose Spannung die Gleichung (3.35) erfüllt, heißt Newtonsche linear viskose Flüssigkeit. Es wird im weiteren jedoch lediglich eine nicht viskose Flüssigkeit betrachtet ( $T'_{ij} = 0$ ). Die Navier Stokes Gleichung vereinfacht sich demnach zur Eulergleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \frac{d}{dt} v_i. \quad (3.36)$$

Die Eulergleichung soll nun weiter vereinfacht werden. Hierzu betrachtet man für den Druck  $p$ , die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  der Verschiebungen und die Dichte  $\rho$  kleine Abweichungen (dargestellt durch gestrichene Größen) vom Gleichgewichtszustand (dargestellt durch mit 0 indizierte Größen):

$$p = p_0 + p' \quad (3.37)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (3.38)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'. \quad (3.39)$$

Für die Grundgleichungen (Impulsbilanz, Kontinuitätsgleichung und Energiebilanzgleichung) folgt nach dieser Linearisierung und unter Vernachlässigung quadratischer Terme:

$$\rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} p' \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\alpha}{C_p} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}. \quad (3.42)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die adiabatische Schallgeschwindigkeit durch  $c^2 = \frac{BC_p}{\rho C_V}$  gegeben ist. Hier ist  $\epsilon$  die durch Wärme deponierte Energiedichte ( $d\epsilon = \rho T dS$ ). Aus diesen linearisierten Gleichungen kann nun eine Wellengleichung für den Druck  $p$  aufgestellt werden. Hierzu wird die Divergenz der Impulsbilanzgleichung verwendet und nach Vertauschen der partiellen Zeit- und Geschwindigkeitsdifferentiation die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes durch die Dichte mittels der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt. Anschließend kann

die Dichte durch den Druck und einen Quellterm mittels einer Zeitdifferentiation der Energiebilanzgleichung (3.20) ersetzt werden. Es folgt die Grundgleichung der thermoakustischen Signalerzeugung:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\alpha}{C_p} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}. \quad (3.43)$$

Die inhomogene Wellengleichung (3.43) beschreibt das Druckfeld, welches durch eine Wärmedeposition mit einer Energiedichte von  $\epsilon(\mathbf{r}, t)$  erzeugt wurde. Zur Lösung dieser Wellengleichung wird die Greensfunktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$  der Wellengleichung angegeben.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{\delta \left( t' - \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.44)$$

Die Lösung der Gleichung (3.43) folgt durch Integration des Produktes aus dieser Greensfunktion und dem Quellterm<sup>9</sup> über den Raum und die Zeit. Bei dieser Integration wird darüber hinaus angenommen, dass die Energiedeposition instantan verläuft. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da akustische Prozesse mit Schallgeschwindigkeit stattfinden, wohingegen die Zeitskala der Energiedeposition durch die Geschwindigkeit der Teilchen gegeben ist, welche sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Dies resultiert mit der Anfangszeit  $t_0$  in folgender Bedingung für die Energiedichte:

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}) \delta(t - t_0). \quad (3.45)$$

Für den Druck folgt letztendlich:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{\mathbb{R}} dt' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \frac{\alpha}{C_p} \frac{\partial^2 \epsilon(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^2} = \frac{\alpha c^2}{C_p 4\pi} \frac{\partial}{\partial R} \int_{S_{\mathbf{r}}^R} d^2 r' \frac{\epsilon(\mathbf{r}')}{R}. \quad (3.46)$$

Hierbei erstreckt sich die Integration auf der rechten Seite über die Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{r}$  und dem Radius  $R = c(t - t_0)$ .

Es soll noch folgendes angemerkt werden: Der Volumenausdehnungskoeffizient  $\alpha$  und die spezifische Wärme  $C_p$  in Gleichung (3.43) werden bei einer festen Referenztemperatur betrachtet, da die Gleichungen linearisiert wurden. Diese Parameter sind jedoch temperaturabhängig und der Quotient  $\frac{\alpha}{C_p}$  verschwindet bei 4 °C (siehe Abbildung 3.1). Dies wird auch durch die Laserstrahlexperimente bestätigt [43]. Bei den Protonenstrahlexperimenten in Wasser hat sich gezeigt, dass das Signal bei 4 °C nicht verschwindet. Dies wird aber erwartet, da die Teilchen nicht nur Energie in Form von Wärme in das Wasser einbringen, sondern auch in Form von Hydratation und Ionisation. Es entsteht eine dem thermoakustischen Effekt entgegengesetzte Druckwelle, die die Temperatur des Nulldurchganges zu höheren Temperaturen hin verschiebt, was auch beobachtet wurde [40].

<sup>9</sup>Hier ist der Quellterm gegeben durch:  $\frac{\alpha}{C_p} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}$

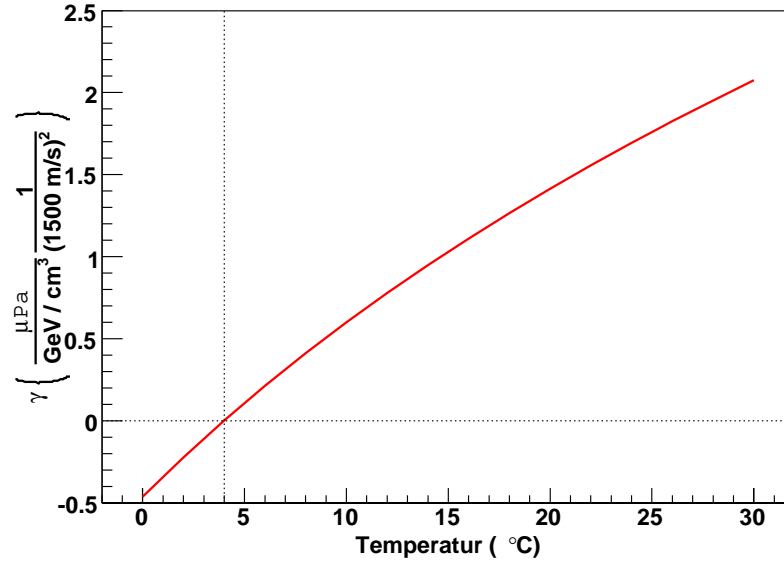


Abb. 3.1: Der für Wasser relevante Parameter  $\gamma = \frac{\alpha}{4\pi C_p}$  in Abhängigkeit von der Temperatur (aus [31]).

### 3.6.2 Das thermoelastische Modell

Das thermoelastische Modell für ein isotropes Material (z.B. Eis unter hohem Druck) wird hier erarbeitet. Das thermoelastische Modell geht von einem linearen Zusammenhang von Spannung und Verzerrung aus (Hooke'sches Gesetz). Die Spannung ist dann proportional zu den Verzerrungen und zur Entropie (siehe Gleichung (3.24)). Es folgt nach Linearisierung mit derselben Nomenklatur wie in den Gleichungen (3.38) und (3.39) und mit der Definition der übertragenen Wärme  $\epsilon = \rho T dS$  folgende Form für die Impulsbilanzgleichung:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \mu \epsilon_{ilm} \epsilon_{mkj} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{B\alpha}{C_p \rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}. \quad (3.47)$$

Hierbei ist  $B$  das adiabatische Kompressionsmodul. Es gilt im isotropen Körpern:  $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ .

In der Literatur ist es üblich, das Verschiebungsfeld in ein Potentialfeld  $\Phi$  und ein Vektorfeld  $\Psi$  mit  $\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$  aufzuteilen [45, 67]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit breitet sich die Wärmequelle in  $x_3$ -Richtung aus. Dann gilt:  $\Psi = (0, 0, \Psi)^t$ . Die beiden Potentiale erfüllen folgende Wellengleichungen:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\rho}{2\mu + \lambda} \ddot{\Phi} = \frac{B\alpha}{C_p \rho (2\mu + \lambda)} \epsilon \quad (3.48)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{\rho}{\mu} \ddot{\Psi} = 0 \quad (3.49)$$

Durch eine Wärmequelle wird demnach keine Scherwelle angeregt. Dies sieht man unmittelbar, da anfangs  $\Psi = 0$  und deshalb:  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ .

Für diesen Fall, dass keine Scherwellen erzeugt werden, wird die Spannung im isotropen Medium vollständig durch Angabe des Drucks beschrieben [70]. Es gilt:

$$p = -(\lambda + 2\mu)S_{kk} + \frac{(\lambda + \frac{2}{3}\mu)\alpha}{\rho_0 C_p} \epsilon. \quad (3.50)$$

Bildet man die Divergenz von Gleichung (3.47) und setzt Gleichung (3.50) ein, so folgt die Wellengleichung für das thermoelastische Modell:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \left(1 - \frac{4\mu}{3\lambda + 6\mu}\right) \frac{\alpha}{C_p} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}. \quad (3.51)$$

Hierbei ist die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwelle gegeben durch:  $c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ .

Die Gleichung (3.51) hebt den Zusammenhang von thermoakustischem und thermoelastischem Modell hervor. Falls der Lamé-Parameter  $\mu$  gegen Null strebt, geht das thermoelastische Modell in das thermoakustische Modell über. Dies ist bei Flüssigkeiten der Fall, da dort kein Schermodul vorhanden ist ( $\mu = 0$ ).

Für Eis gilt:  $\lambda \approx 2\mu$ . Bei Verwendung des thermoakustischen Modells anstelle des thermoelastischen Modells [71] mit den Parametern für Eis werden also um den Faktor  $\frac{3}{2}$  zu große Signalamplituden vorhergesagt. Im Vergleich zu Wasser weisen die Signale in Eis bei gleicher Energiedeposition dennoch etwa die vierfache Amplitude auf. Durch die zirka doppelte Schallgeschwindigkeit in Eis ist die Schwerpunktsfrequenz der Signale im Vergleich einer analogen Wärmequelle in Wasser um diesen Faktor höher.

### 3.7 Akustische Signale ultrahochenergetischer Neutrinos

Die Quelle der Schallsignale von neutrinoinduzierten Schauern entspricht der Energiedeposition durch diese Schauer in dem entsprechenden Medium. In Wasser wurden hierzu ausführliche Studien durchgeführt [31, 72]. Ein Neutrino kann dabei durch die schwache Wechselwirkung mit einem Nukleon entweder in CC-Reaktionen<sup>10</sup> ein geladenes Lepton und einen hadronischen Schauer erzeugen oder es wird in NC-Reaktion<sup>11</sup> ein hadronischer Schauer und ein Neutrino geringerer Energie erzeugt.

Es ist nun zunächst die entscheidende Frage, wie sich die Energie des Neutrinos auf den hadronischen Schauer bzw. den leptonischen Kanal aufteilt. In [31] wird diese Frage mittels ANIS<sup>12</sup> beantwortet. Durch diese Berechnung konnte gezeigt werden, daß die Energieaufteilung auf die jeweiligen Kanäle unabhängig von der anfänglichen Neutrinoenergie ist. Es

<sup>10</sup>CC: charged current reaction

<sup>11</sup>NC: neutral current reaction

<sup>12</sup>ANIS (All Neutrino Interaction) ist ein Open-Source-Programm, das den ersten Vertex von ultrahochenergetischen Neutrinoreaktionen berechnen kann

werden im Mittel acht Prozent der anfänglichen Neutrinoenergie in den hadronischen Kanal geleitet.

Nachdem nun bekannt ist, dass 92% der Energie in den leptonischen Kanal übergehen, soll zunächst dieser untersucht werden. Es ist also die Frage zu klären, wie im leptonischen Fall die Energiedeposition ins Wasser stattfindet. Ab einer Energie von  $5.6 \cdot 10^8$  GeV übersteigt die Reichweite von Tauonen in Wasser die der Myonen [73] und beträgt für diese Energie bereits 28 km. In die Berechnung der Weglänge gehen dabei die Lebensdauer, die Bremsstrahlung und die Wirkungsquerschnitte der schwachen Wechselwirkung ein. Für das Tauon ist darüberhinaus anzumerken, dass dieses aufgrund seiner großen Masse nicht nur in leichtere Leptonen (Elektron und Myon) zerfallen kann, sondern in etwa 60% aller Fälle in Hadronen zerfällt. Es entsteht dann wieder eine hadronische Komponente.

Sowohl für das Tauon, als auch für das Myon besitzt die Verteilung der Energiedeposition eine sehr große longitudinale Ausdehnung. Zwar ist die laterale Verteilung enger als bei der hadronischen Komponente, jedoch ist die Energiedepositionsdichte bei gleicher Anfangsenergie im Vergleich zur hadronischen Komponente sehr gering. Die Signalamplituden der akustischen Druckpulse aus diesen Kanälen sind folglich sehr gering.

Wenden wir uns nun der elektromagnetischen Komponente zu. Zum einen wird diese durch Photonen erzeugt. Diese können z.B. aus der Bremsstrahlung der Leptonen hervorgerufen werden. Zum anderen entsteht sie durch die Elektronen aus der primären Reaktion eines Elektronenneutrinos bzw. aus Elektron-Positron-Paarerzeugungen. Aus Betrachtungen des Wirkungsquerschnitts der Elektron-Nukleon Wechselwirkung geht hervor, dass dieser für sehr hohe Energien deutlich kleiner ist. Dieser Effekt wurde von Landau, Pomeranchuk und Migdal entdeckt und wird daher LPM-Effekt genannt [74–76]. Die Wirkungsquerschnitte der Bremsstrahlung und der Paarerzeugung werden üblicherweise durch Betrachtung des Impulsübertrags an einem einzelnen Streuzentrum ermittelt. Bei ultrahohen Energien findet eine destruktive quantenmechanische Interferenz zwischen den Streuamplituden statt [76, 77], die den Wirkungsquerschnitt reduziert. Durch den LPM-Effekt wird demnach auch die Energie des elektromagnetischen Schauers auf einer wesentlich größeren Weglänge deponiert. Bei Annahme einer konstanten Schauerbreite nimmt die Energiedepositionsdichte in gleicher Weise ab, wie die Weglänge durch den LPM-Effekt zunimmt. Sinkt die Energie einzelner Teilchen unter die Schwelle, bei der der LPM-Effekt einsetzt (ca. 1 EeV), so entstehen Subschauer, in denen die Energiedepositionsdichte groß ist. Gerade diese Bildung von Subschauern macht aufgrund ihrer statistischen Natur eine Parametrisierung der elektromagnetischen Schauer schwierig. Wie stark sich der LPM-Effekt auf die Depositionslänge auswirkt, sieht man anhand des folgenden Beispiels: Für einen 10 EeV Schauer beträgt die Depositionslänge 120 m; bei 100 EeV sind es bereits 380 m [72]. Die Depositionslänge skaliert durch den LPM-Effekt mit der Wurzel der Energie und ist im Vergleich zur Depositionslänge der Tauon- und Myonschauer relativ gering.

Obwohl lediglich acht Prozent der Neutrinoenergie in den hadronischen Kanal gehen, ist die-



ser aufgrund der relativ lokalen Energiedeposition von besonderem Interesse. Die gesamte Energie wird auf einer Strecke von etwa 15 m deponiert. In [31] ist das Energiedepositionsprofil eines primären Pions für die Schauerenergien  $10^3$  GeV und  $10^5$  GeV berechnet worden<sup>13</sup>. Das Profil der normierten Energiedepositionsdichte ist für diese beiden Energien unabhängig von der Anfangsenergie. Es wird demnach zu höheren Energien hin extrapoliert und angenommen, dass sich die normierte Energiedepositionsdichte nicht ändert. Das Schauerprofil bleibt also erhalten, die Amplitude der akustischen Signale der hadronischen Schauer skaliert dann linear mit der Energie des primären Hadrons.

In [52] wird die akustische Signalform für einen hadronischen und einen elektromagnetischen Schauer mit LPM-Effekt im Abstand von 1000 m berechnet (Abbildung 3.2). Beide Schauer besitzen bei dieser Simulation eine Energie von  $10^{20}$  eV. Es stellt sich heraus, dass das Signal des elektromagnetischen Schauers etwa um einen Faktor fünf geringer ist, als das eines hadronischen Schauers mit derselben Energie. Die Druckamplitude des durch den hadronischen Schauer erzeugten Schallsignals skaliert linear mit der Energie, da wie bereits erwähnt, die normierte Energiedepositionsverteilung erhalten bleibt. Die Amplitude des LPM-Schauers skaliert in einer groben Näherung mit der Wurzel der Energie, da die freie Weglänge beim LPM-Effekt mit der Wurzel der Energie skaliert, wodurch auch die Energiedeposition mit der Wurzel der Energie ansteigt. Durch die variable Länge des elektromagnetischen Schauers muss das Kirchhoff Integral zur Berechnung der akustischen Signalamplitude für jede Energie gelöst werden.

Es wurde angemerkt, dass in einer Neutrinowechselwirkung lediglich acht Prozent<sup>14</sup> der Energie in die hadronische Schauerkomponente transferiert werden. Ein Neutrino, das einen  $10^{20}$  eV leptonischen Schauer erzeugt, deponiert lediglich  $\frac{8\%}{92\%} \cdot 10^{20} \text{ eV} = 8.6957 \cdot 10^{18} \text{ eV}$  in den hadronischen Schauer. Dadurch ist die akustische Signalamplitude des leptonischen Schauers für diese Energie etwa doppelt so groß, wie die des hadronischen Schauers.

Das Signal der hadronischen Komponente stimmt nach einer linearen Skalierung der Energie und einer Skalierung des Ortes unter Annahme einer Zylinderwelle<sup>15</sup> ( $1/r$  Abstandsverhalten) mit den Berechnungen aus [31] für ein primäres Pion mit einer Energie von  $10^{14}$  eV überein.

Die Berechnung der Signale erfolgt durch Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.43). Diese Berechnung ergibt je nach Energiedepositionsdichte akustische Signale, wie die aus Abbildung 3.2. Diese Signale sollen mittels Hydrophonen detektiert werden. Die Optimierung von Hydrophonen basiert auf der Grundlage dieser berechneten Signaturen. Da die erwarteten akustischen Signale der hadronischen Komponente im Gegensatz zu der elektromagnetischen Komponente in der Signalform nicht variieren, wurden die Signaturen der hadronischen Komponente eines Schauers verwendet, um die Hydrophone zu optimieren. Das

<sup>13</sup>Höhere Energien sind mit der in [31] verwendeten Simulation (GEANT 4) nicht möglich

<sup>14</sup>In [52] wurden 20% aufgrund von Berechnungen aus [78] angenommen

<sup>15</sup>Dies ist im Fernfeld der Fall und für die hier betrachteten Abstände gerechtfertigt

Signal, auf welches die Hydrophone zu optimieren sind, und dessen Spektrum sind deshalb noch einmal explizit für das akustische Signal eines hadronischen Schauers mit einer Energie von  $10^{14}$  eV in Abbildung 3.3 angegeben. Es ist klar ersichtlich, dass die Schwerpunktsfrequenz etwa 15 kHz beträgt und signifikante Frequenzanteile bis etwa 100 kHz vorhanden sind. Die Optimierung der Hydrophone wird im nächsten Kapitel genau beschrieben.

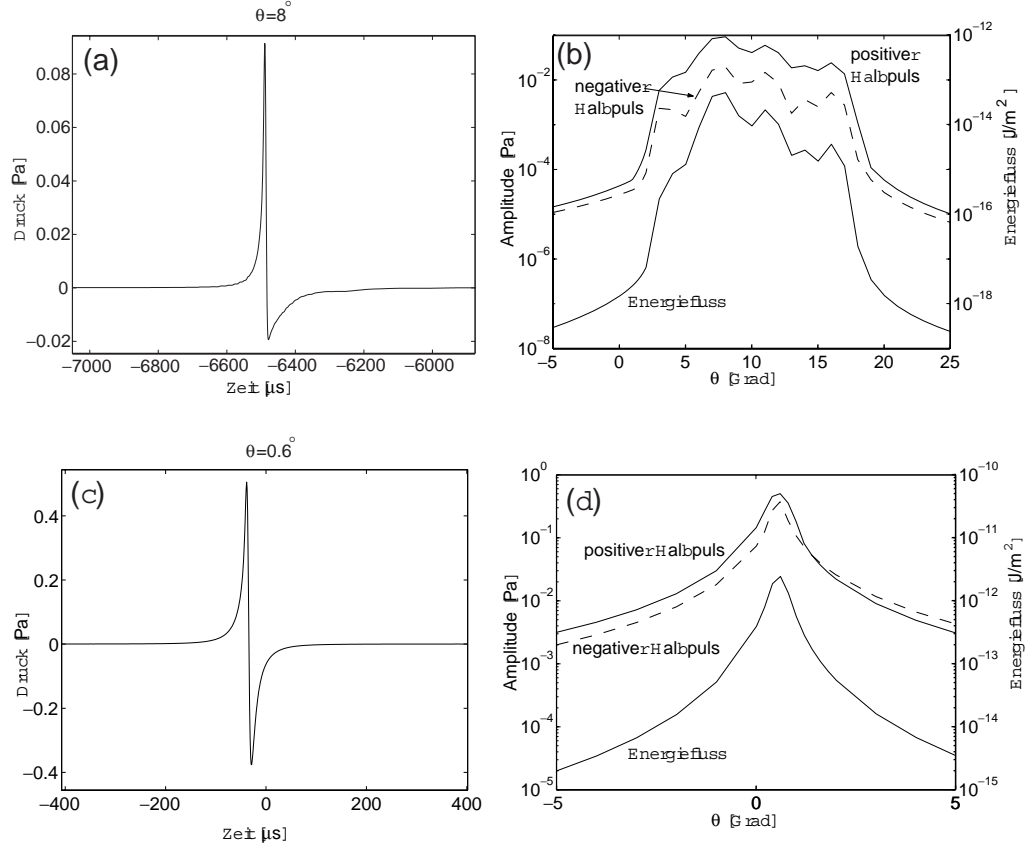


Abb. 3.2: Erwartete akustische Signale in jeweils 1 km Abstand und deren Winkelverteilung unter Berücksichtigung der Absorption. Der Winkel  $\theta$  ist hier der Winkel zwischen der Senkrechten zur Schauerrichtung und der Hydrophonposition, wobei der Ursprung beim Anfang des Schauers liegt.

a) Drucksignal eines elektromagnetischen Schauers mit der Gesamtenergie von  $10^{20}$  eV und dem Beobachtungswinkel  $\theta = 8^\circ$ .

b) Signalamplitude und Energiefluss ( $\frac{1}{c\rho} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dt$ ) des elektromagnetischen Schauers in Abhängigkeit vom Beobachtungswinkel.

c) Drucksignal eines hadronischen Schauers mit der Gesamtenergie von  $10^{20}$  eV und dem Beobachtungswinkel  $\theta = 0.6^\circ$ .

d) Signalamplitude und Energiefluss des hadronischen Schauers in Abhängigkeit vom Beobachtungswinkel. (aus [52])

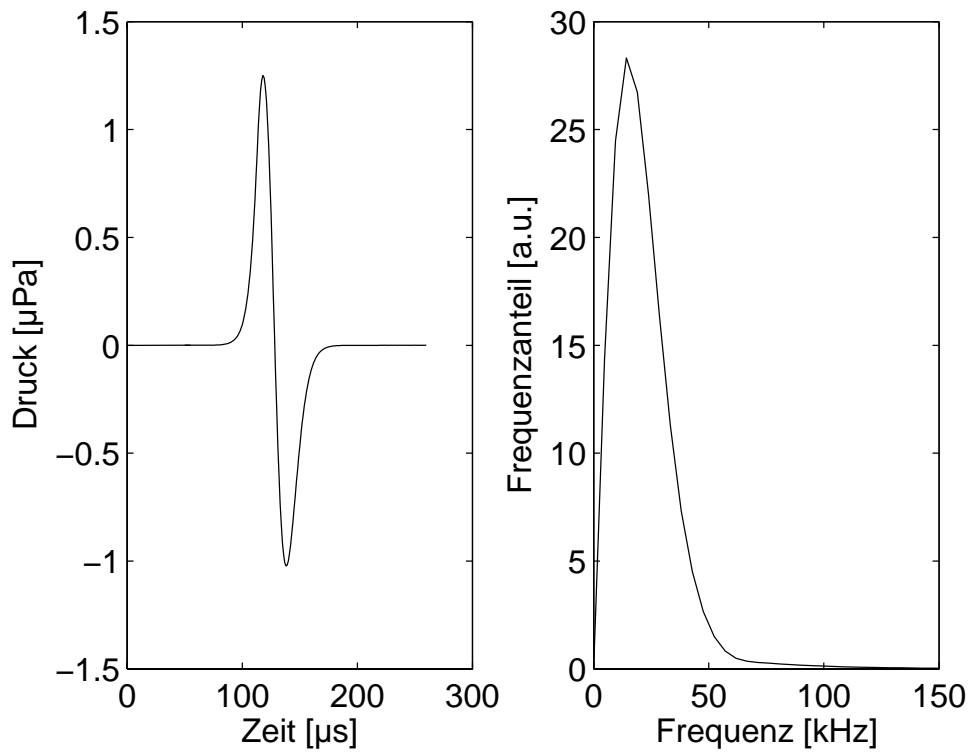


Abb. 3.3: *links*: Signal in 400 m Abstand bei einer Energie der hadronischen Komponente von  $10^{14}eV$ . *rechts*: Frequenzspektrum des Signals.



## 4 Makroskopische Eigenschaften von Piezos

Als makroskopische Eigenschaften eines Piezos werden in dieser Arbeit die elektrischen Größen Spannung und Strom, sowie die mechanische Verschiebung auf der Oberfläche des Piezos verstanden. Diese werden nun mittels Simulation und Messung untersucht und es werden Konsequenzen für den Bau von Hydrophonen bzw. Schallsendern extrahiert.

Zur Simulation von Piezos müssen die Piezogleichungen (3.26)-(3.29) gelöst werden. Zur Lösung dieser Gleichungen wurde die Finite-Elemente-Methode verwendet. Zum ersten mal wird diese Methode zur Lösung der piezoelektrischen Gleichungen in [79] beschrieben. Es wurden zwei Finite-Elemente (FE) Programme verwendet. Zum einen CAPA<sup>1</sup> und zum anderen das kommerzielle Programm FEMLAB. Bei FEMLAB stand zunächst Version 2.8 zur Verfügung. Ab Version 3.0 waren in FEMLAB explizit Piezogleichungen integriert. Die Piezogleichungen werden in FEMLAB mittels der schwachen Form gelöst. Hierzu werden die Gleichungen zuerst mit einer Testfunktion multipliziert. Anschließend wird über das betrachtete Gebiet integriert. Dies wird so gehandhabt, da dann insbesondere bei axialsymmetrischer Betrachtung die Konvergenz bei  $r = 0$  m gegeben ist. In den Vorgängerversionen, die zudem nicht sehr stabil liefen, mussten die Piezogleichungen noch explizit in Form von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit eingegeben werden. Während in FEMLAB der Präprozessor zur komfortablen Erstellung der Modelle, der Prozessor zum eigentlichen Lösen der Gleichungen und der Postprozessor zum Auslesen und Bearbeiten der Daten integriert sind, stand in CAPA lediglich der Prozessor zur Verfügung. Ein Texteditor diente in CAPA als Präprozessor und Matlab bzw. selbstgeschriebene Fortran-Programme als Postprozessor. Da eine automatisierte Variation der Piezogeometrie in FEMLAB nicht möglich ist, wurde in speziellen Untersuchungen ebenfalls Matlab sowohl als Präprozessor, als auch als Postprozessor für FEMLAB verwendet.

Simuliert wurden Zylinder bzw. Hohlzylinder aus piezoaktiven Material. Auch Kombinationen aus Hohlzylinder und Zylinder mit eventueller Kopplung an ein Hüllmaterial und an Wasser wurden simuliert. Bei beiden Geometrien war es möglich, die Symmetrie auszunutzen und somit axialsymmetrisch zu simulieren. Im Anhang A.1 wird die Transformation der Piezogleichungen in Zylinderkoordinaten explizit durchgeführt.

Im Folgenden wird zunächst ein sehr vereinfachtes Modell eines Piezos aus den Piezogleichungen abgeleitet. Anschließend wird mittels der erwähnten FE Programme die Antwort eines Piezos auf elektrische Signale untersucht. Zum einen kann man hierbei die elektrische

---

<sup>1</sup>CAPA wurde mir freundlicherweise vom Lehrstuhl für Sensorik zur Verfügung gestellt.

Antwort untersuchen, wodurch man die Impedanz des Piezos erhält. Zum anderen wird die mechanische Antwort - die Verformung (charakterisiert durch die Verschiebungen) eines Piezos - betrachtet. Dabei werden Implikationen für den Bau von Hydrophonen bzw. Kalibrationsquellen extrahiert. Anschließend wird die Antwort des Piezos auf mechanische Anregungen untersucht.

## 4.1 Ersatzschaltbild eines Piezos

Ausgehend von den Piezogleichungen (3.26)-(3.29) wird nun ein einfaches, eindimensionales Modell der Piezogleichungen erarbeitet. Es wird demnach lediglich die Polarisationsrichtung des Piezos berücksichtigt<sup>2</sup>. Die Bestimmungsgleichungen für den Piezo reduzieren sich zu:

$$T_3 = c_{33}S_3 - e_{33}E_3 \quad (4.1)$$

$$D_3 = \epsilon_{33}E_3 + e_{33}S_3. \quad (4.2)$$

Das so gewonnene Piezomodell kann mit einem Feder-Masse System assoziiert werden [80]. Dabei wird ein Piezostab oder Zylinder mit der Höhe  $h$ , Dichte  $\rho$  und der Elektrodenfläche  $A$  wie in Abbildung 4.1 dargestellt.

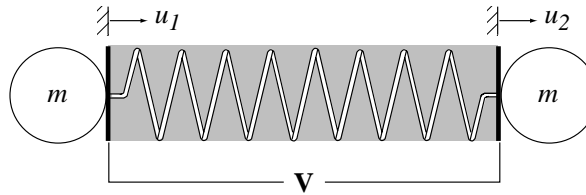


Abb. 4.1: Ersatzschaltbild eines Piezos. Die Verschiebungen  $u_1$ ,  $u_2$  an den Elektroden werden betrachtet. Zwischen Elektrodenflächen liegt die Spannung  $V$  an (aus [80]).

Das System aus Abbildung 4.1 wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$m\ddot{u}_1 = F_{Feder} + F_1 \quad (4.3)$$

$$m\ddot{u}_2 = -F_{Feder} + F_2 \quad (4.4)$$

Hierbei ist  $m$  die halbe Masse des Piezos:  $m = \frac{1}{2}\rho Ah$ .  $u_1$  und  $u_2$  sind die Verschiebungen der Massen.  $F_{Feder}$  ist die Federkraft  $F_{Feder} \equiv -AT_3$  und  $F_1$  sowie  $F_2$  sind externe Kräfte. Die elektrische Spannung ist in dieser Näherung gegeben durch  $V = hE_3$ . Die Ladung des Piezos ist gegeben durch  $Q = AD_3$ . Die Verzerrung ist gegeben durch  $S_3 \equiv \frac{u_1 - u_2}{h}$ . Desweiteren beschränken wir uns auf den symmetrischen Fall mit  $F_{ext} := F_1 = -F_2$  und  $u_1 = -u_2$ .

<sup>2</sup>Kraft und Verschiebungen wirken nur in die  $x_3$ -Richtung

Nach Subtraktion der Gleichung (4.3) von der Gleichung (4.4) erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$m\ddot{u}_1 + 2\delta\dot{u}_1 + \frac{2Ac_{33}}{h}u_1 = \frac{Ae_{33}}{h}V + F_{ext} \quad (4.5)$$

$$Q = \frac{A\epsilon_{33}}{h}V + \frac{2Ae_{33}}{h}u_1. \quad (4.6)$$

Hierbei wurde durch den Term  $2\delta\dot{u}_1$  eine viskose Dämpfung eingeführt. Soll diese mit der Rayleigh Dämpfung vergleichbar sein, so gilt für den Dämpfungsparameter  $2\delta = m\alpha + \frac{2Ac_{33}}{h}\beta$  mit dem Massenparameter  $\alpha$  und dem Formfestigkeitsparameter  $\beta$ .

Es können nun anhand dieses stark vereinfachten Modells die zwei kanonischen Fälle, das Senden und das Empfangen eines Piezos, erörtert werden. Beim Senden wird eine Spannung am Piezo angelegt und sowohl der resultierende Strom als auch die Wandlung in Verschiebungen werden betrachtet. Das Empfangen entspricht einer Transformation von Kraft zu Spannung bzw. zu elektrischer Ladung. Beide Fälle, Senden und Empfangen, werden in den nächsten beiden Abschnitten anhand dieses Modells eingehend untersucht.

### Sendeverhalten im vereinfachten Piezomodell

Die externen Kräfte in Gleichung (4.5) werden vernachlässigt ( $F_{ext} = 0$ ). Der Piezo kann folglich frei schwingen. Dissipative Kräfte durch Abstrahlung werden demnach ebenfalls vernachlässigt. Der Strom  $I$  ist durch die Zeitdifferentiation der Ladung gegeben. Die Gleichungen zum Senden ergeben sich damit aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) zu:

$$m\ddot{u}_1 + 2\delta\dot{u}_1 + \frac{2Ac_{33}}{h}u_1 = \frac{Ae_{33}}{h}V; \quad I = \frac{A\epsilon_{33}}{h}\dot{V} + \frac{2Ae_{33}}{h}\dot{u}_1. \quad (4.7)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen wird die Antwort des Systems auf harmonische Schwingungen betrachtet. Anlegen der elektrischen Spannung  $V(t) = V_0 e^{i2\pi f t}$  ergibt nach dem Einschwingvorgang (steady state Lösung)  $u_1(t) = u_0 e^{i2\pi f t}$ . Die Lösung für die Verschiebung folgt nach Einsetzen in Gleichung (4.7):

$$\frac{u_1}{V} = \frac{u_0}{V_0} = \frac{Ae_{33}}{-4\pi^2 f^2 mh + 4\delta i\pi f h + 2Ac_{33}}. \quad (4.8)$$

Die Impedanz  $Z$  ergibt sich unmittelbar zu:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{h}{i2\pi f \left( Ae_{33} + 2Ae_{33} \frac{u_0}{V_0} \right)}. \quad (4.9)$$

### Empfangsverhalten im vereinfachten Piezomodell

Beim Empfangen ist die elektrische Antwort des Piezos auf mechanische Krafteinwirkung von Interesse. Hierbei muss zwischen Stromempfänger und Spannungsempfänger unterschieden werden, je nachdem, welcher Verstärker in Praxis Verwendung findet. Beim Stromempfänger ist die Spannung equivalent Null. Beim Spannungsempfänger ist der Strom ohne



Beschränkung der Allgemeinheit (z.B. durch Umdefinition der Referenzspannung) äquivalent Null. Betrachten wir zunächst den Spannungsempfänger. Hier gilt:

$$m\ddot{u}_1 + 2\delta\dot{u}_1 + \frac{2A}{h} \left( c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}} \right) u_1 = F_{ext}; \quad 0 = \frac{Ae_{33}}{h} V + \frac{2Ae_{33}}{h} u_1. \quad (4.10)$$

Für eine harmonische Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 e^{i2\pi f t}$  sind die Lösungen  $u_1(t) = u_0 e^{i2\pi f t}$  und  $V(t) = V_0 e^{i2\pi f t}$ . Für die Verschiebung folgt nach einsetzen in Gleichung (4.10):

$$\frac{u_1(t)}{F_{ext}(t)} = \frac{u_0}{F_0} = \frac{1}{-m4\pi^2 f^2 + 4i\delta\pi f + \frac{2A}{h} \left( c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}} \right)}. \quad (4.11)$$

Für die Spannungssensitivität (kurz Sensitivität) gilt letztendlich:

$$\frac{V_0}{F_0} = -\frac{2e_{33}}{\epsilon_{33}} \frac{u_0}{F_0}. \quad (4.12)$$

Nachdem wir so den Spannungsempfänger diskutiert haben, stellen wir nun die Gleichungen für einen Stromempfänger auf. Hier ist die Spannung gleich Null. Die Bestimmungsgleichungen sind demnach:

$$m\ddot{u}_1 + 2\delta\dot{u}_1 + \frac{2A}{h} \left( c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}} \right) u_1 = F_{ext}; \quad I = \frac{2Ae_{33}}{h} \dot{u}_1. \quad (4.13)$$

Auch hier wird eine harmonische Kraft  $F_{ext}(t) = F_0 e^{i2\pi f t}$  als Anregung angenommen. Für die Lösungen folgt:  $u_1(t) = u_0 e^{i2\pi f t}$  und  $I(t) = I_0 e^{i2\pi f t}$ . Eine analoge Rechnung wie bei dem Spannungsempfänger liefert für die Stromsensitivität:

$$\frac{I_0}{F_0} = \frac{2Ae_{33}}{h} \frac{u_0}{F_0} \quad (4.14)$$

mit der Verschiebungsantwort auf die Krafteinwirkung

$$\frac{u_1(t)}{F_{ext}(t)} = \frac{u_0}{F_0} = \frac{1}{-m4\pi^2 f^2 + 4i\delta\pi f + \frac{2A}{h} c_{33}}. \quad (4.15)$$

Das Ergebnis für das Senden (Verschiebung und Impedanz) und das Empfangen (Sensitivität und Stromsensitivität) ist in Abbildung 4.2 beispielhaft für einen Piezo dargestellt. Es ist klar ersichtlich, dass das Maximum der Verschiebungen mit dem Maximum der Leitfähigkeit (Impedanzminimum) übereinstimmt. Dort liegt also eine mechanische Resonanz vor. Ein Maximum der Impedanz stimmt mit dem Spannungsmaximum aus einer externen periodischen Kraftanregung überein. Bei diesem Spannungsmaximum handelt es sich demnach um eine elektrische Resonanz. Im Fall der Impedanz wird dieses Maximum Antiresonanz genannt.

Desweiteren ist aus Abbildung 4.2 ersichtlich, dass es einen erheblichen Unterschied macht, welcher Verstärker benutzt wird. Demnach stimmt die Resonanz der Sensitivität bei Verwendung eines Spannungsverstärkers mit der Antiresonanz der Impedanz überein. Wird

hingegen ein Stromverstärker verwendet, so stimmen Resonanzen der Impedanz und der Stromsensitivität überein. Zusätzlich ist anzumerken, dass die Stromsensitivität für dieses Modell bis auf einen Faktor formell mit der Verschiebungsantwort bei elektrischer Anregung übereinstimmt. Sowohl Sensitivität, als auch die Impedanz nehmen für Frequenzen weit unterhalb der Resonanzfrequenz linear mit der Höhe des Piezos zu. Die Stromsensitivität ist in diesem Modell unabhängig von der Höhe des Piezos.

Die Piezogleichungen enthalten sowohl mechanische Größen, wie Kraft und Verschiebung, als auch elektrische Größen, wie Spannung und Strom. Ein Modell aus entweder nur mechanischen oder nur elektrischen Größen wäre wesentlich überschaubarer und einfacher zu handhaben. Es ist üblich, die Piezogleichung in rein elektrische Größen umzuformulieren, wie z.B. in [81, 82]. Dies ist auch sinnvoll, da die Impedanz eine verhältnismäßig leicht zu messende Größe darstellt und aus ihr sowohl die Resonanzen, als auch die Antiresonanzen resultieren.

Bei der Umformulierung unterscheidet man zwei verschiedene Verfahren. Zum einen kann man den Strom analog zur Kraft behandeln. In dieser mathematischen Analogie ist die Geschwindigkeit der Verschiebung proportional zur Spannung. Vorteil dieser Methode ist, dass mechanische Parallelschaltungen ebenfalls in Parallelschaltungen resultieren [83]. Nachteil ist, dass das resultierende System recht uneinsichtig ist, da die Spannung einer Geschwindigkeit entspricht. Bei der zweiten Methode, wie sie in der Praxis hauptsächlich Verwendung findet, nimmt man die Spannung als Analogon für die mechanische Kraft. Parallele Schaltungen aus Masse, Feder und Dämpfungselement gehen dabei in serielle Schaltungen der analogen Größen über. Tabelle 4.1 gibt eine Gegenüberstellung der mechanischen und der analogen elektrischen Gleichungen in der Kraft-Strom Analogie (F-I-Analogie) und der Kraft-Spannungs Analogie (F-U-Analogie).

	mechanisches Gesetz	F-U-Analogie	F-I-Analogie
Trägheitssatz	$F = m \frac{d}{dt} v$	$U = L \frac{d}{dt} I$	$I = 1/C \frac{d}{dt} U$
Hook'sches Gesetz	$F = D \int_{t_0}^t v dt'$	$U = C \int_{t_0}^t I dt'$	$I = 1/L \int_{t_0}^t U dt'$
Reibungsgesetz	$F = \delta v$	$U = RI$	$I = 1/RU$

Tab. 4.1: Vergleich der mechanischen Gesetzmäßigkeiten in F-U-Analogie und F-I-Analogie.

Hier sind  $m$ ,  $D$  und  $\delta$  die mechanischen Größen Masse, Steifigkeit und Dämpfung.

$L$ ,  $C$  und  $R$  sind die elektrischen Größen Induktivität, Kapazität und Widerstand.

Es ergibt sich das Ersatzschaltbild eines Piezos beim Senden bzw. Empfangen wie in Abbildung 4.3 bzw. 4.4 gezeigt. Die direkte Übersetzung des obigen einfachen Modells mit den Bezeichnungen aus Abbildung 4.3 führt auf folgende Werte für die seriellen Größen Induktivität  $L_1$ , Kapazität  $C_1$  und Widerstand  $R$ , sowie die parallele Kapazität  $C_P$ :

$$C_1 := \frac{Ae_{33}^2}{hc_{33}}, \quad L_1 := \frac{mh^2}{2A^2e_{33}^2}, \quad R_1 := \frac{\delta h^2}{A^2e_{33}^2} \quad \text{und} \quad C_P := \frac{\epsilon_{33}A^2}{h}.$$

Ein realer Piezo besitzt mehrere Resonanzen mit den dazugehörigen Antiresonanzen. Das angegebene Modell erklärt nur die erste Resonanz-Antiresonanz-Struktur. Höhere Resonanzen können durch weitere parallelgeschaltete  $LRC$ -Glieder beschreiben werden, wie in den Abbildungen 4.3 und 4.4 angedeutet. Die Größen der zusätzlichen  $LRC$ -Glieder können dann jedoch nicht mehr durch das angegebenen einfache Modell modelliert werden.

Betrachten wir dennoch zunächst nur eine Resonanz der Impedanz. Diese ist mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gegeben als:

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega \left( C_P + \frac{1}{-\omega^2 L_1 + i\omega R_1 + \frac{1}{C_1}} \right)}. \quad (4.16)$$

Als Grenzwerte der Impedanz für niedrige bzw. hohe Kreisfrequenzen  $\omega$  ergeben sich:

$$\omega \rightarrow 0 : Z \approx \frac{1}{i\omega(C_P + C_1)} \quad (4.17)$$

$$\omega \rightarrow \infty : Z \approx \frac{1}{i\omega C_P} \quad (4.18)$$

Die Impedanz verhält sich demnach außerhalb der Resonanz bzw. Antiresonanz rein kapazitiv. Die Resonanzfrequenz  $f_s$  bzw. Antiresonanzfrequenz  $f_p$  liegen bei<sup>3</sup> [83]:

$$f_s = \frac{1}{2\pi (L_1 C_1)^{1/2}} \quad (4.19)$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi \left( L_1 \frac{C_1 C_P}{C_1 + C_P} \right)^{1/2}}. \quad (4.20)$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass für relevante Dämpfungsstärken (im Ersatzschaltbild entspricht das dem Widerstand  $R_1$ ) die Lage der Resonanzfrequenz im Vergleich ohne Dämpfung nur gering zu niedrigeren Frequenzen verschoben wird<sup>4</sup>. Mit Hilfe der Grenzwerte für  $\omega$  und der Frequenzen  $f_s$  und  $f_p$  kann nun an eine Impedanzmessung ein Fit für die erste Resonanzstruktur vorgenommen werden.

Interessant ist erst der Fit für mehrere Resonanzen, die mit dem vereinfachten Modell nicht wiedergegeben werden. Dieser ist nicht so einfach auszuführen. Als Startwerte für einen Fit kann man hier aber die Annahme machen, dass die Resonanzstrukturen separiert sind. Es ist darüber hinaus günstiger die Parameter der elektrisch äquivalenten Größen durch Anpassung an den Quotienten aus Leitfähigkeit und Kreisfrequenz zu ermitteln. Dieser ist gegeben durch:

$$\frac{1}{i\omega Z} = C_P + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{i\omega R_k C_k - \omega^2 L_k C_k + 1}. \quad (4.21)$$

<sup>3</sup>Im Fall des Ersatzschaltbildes wird die Resonanzfrequenz auch Serienresonanz genannt, die Antiresonanzfrequenz hingegen Parallelresonanz. Daher die Indizes  $s$  und  $p$ .

<sup>4</sup>In [82] wird z.B. ein Ersatzschaltbild vollkommen ohne Widerstand angegeben. Dafür werden dort die Induktivität und die Kapazitäten als komplexe Größen behandelt, um Dämpfung beschreiben zu können.

Mit der oben gemachten Annahme, dass für die Lage der Resonanz der Widerstand irrelevant ist, gilt für den Fit zunächst für alle  $k$ :  $R_k = 0$ . Mit der Annahme, dass die Resonanzen separiert sind, können die Resonanzen einzeln betrachtet werden. Wird nur die  $l$ -te Resonanz betrachtet, so gilt für die  $LRC$ -Glieder in Abbildung 4.3 mit niedrigeren Resonanzfrequenzen ( $k \in [1; l-1]$ ) annähernd:  $\frac{C_k}{-\omega^2 L_k C_{k+1}} \rightarrow 0$ . Für diejenigen mit höheren Resonanzfrequenzen ( $k > l$ ) hingegen:  $\frac{C_k}{-\omega^2 L_k C_{k+1}} \rightarrow C_k$ . Soll nur diese Resonanz gefittet werden gilt demnach:

$$\frac{1}{i\omega Z} \approx C_p + \frac{C_l}{i\omega R_l C_l - \omega^2 L_l C_l + 1} + \sum_{k=l+1}^N C_k. \quad (4.22)$$

Die Summe erstreckt sich hier lediglich über die  $N$  Resonanzen, welche auch gefittet werden sollen. Es werden nun beginnend mit der höchsten Resonanz,- Antiresonanzstruktur sukzessive die Parameter angepaßt. Im Anschluss wird die Höhe der Resonanz durch Variation des Widerstandes angepaßt. Durch Variation der so erhaltenen Ausgangsparameter wird der Fit an eine Impedanzmessung schließlich abgeschlossen. Es wurde für die ersten beiden Resonanzen nach diesem Schema ein Fitverfahren geschrieben und im weiteren verwendet.

## 4.2 Simulation der Impedanz

Die Kenntnis der elektischen Impedanz spielt eine wesentliche Rolle beim Bau von Vorverstärkern, wie sie zum Bau von Hydrophonen Verwendung finden. Der Verstärkungsfaktor hängt z.B. bei Ladungsverstärkern wesentlich von der Eingangsimpedanz ab. Die Eingangsimpedanz entspricht dabei der Impedanz des Piezos. Es ist demnach unbedingt erforderlich, diese Eingangsimpedanz genau zu kennen.

Desweiteren trägt die Kenntnis des Realteils der Impedanz dazu bei, das Rauschverhalten des Piezos bzw. der Piezokeramik zu spezifizieren. Der Realteil der Impedanz  $Z$  ist proportional zur Rauschleistungsdichte  $\Phi$  im Frequenzintervall  $df$ :  $\Phi^2 df = 4\text{Re}(Z)kTdf$ . Hierbei ist  $k$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur des Piezos. Das Eigenrauschen des Piezos wird also durch die Impedanz bestimmt [84].

Zur Bestimmung der Impedanz standen verschiedene Piezogeometrien zur Verfügung. Diese wurden zum einen direkt vermessen, zum anderen wurden sie mittels der Finiten-Elemente-Programme CAPA und FEMLAB simuliert. Berücksichtigt wurden Impedanzbetrag und Phase der vorhandenen Piezokeramiken.

Die Messung wurde mittels eines Impedance-Gain/Phase-Analysators von Hewlet Packard durchgeführt. Alternativ kann die Impedanz auch durch einen Serienkreis aus Piezo und Kondensator ermittelt werden. Hierzu wird ein breitbandiges Spannungssignal angelegt<sup>5</sup> und die Spannungsantwort am Kondensator ermittelt. Daraus lässt sich durch Fourier-

---

<sup>5</sup> z.B. ein schmales Gausssignal

transformation die Impedanz des Piezos ermitteln [85]. Diese Methode wurde für spätere Messungen verwendet.

Zur Simulation der Impedanz können vier Strategien herangezogen werden. Zunächst kann entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich simuliert werden. Es ist dabei zu beachten, dass die Impedanz selbst stets im Frequenzbereich angegeben ist. Eine weitere Unterteilung der Simulationsmöglichkeiten ist durch Vorgabe der Randbedingungen gegeben. Es kann entweder die Spannung oder die Ladung auf der Oberfläche des Piezos vorgegeben werden. Somit stehen vier Möglichkeiten zur Verfügung, die Impedanz eines Piezos zu simulieren. Alle vier Methoden wurden mittels FEMLAB simuliert, in CAPA wurde nur der Fall einer Ladungsvorgabe im Zeitbereich verfolgt. Der Vergleich dieser vier Methoden ist zusammen mit den Ergebnissen einer Messung am Beispiel eines Piezozylinders in Abbildung 4.5 dargestellt. Aus dem Vergleich geht hervor, dass alle Simulationsmethoden sehr gute Übereinstimmung liefern. Die einzelnen Simulationsmethoden und deren Problematiken werden nun genauer beleuchtet.

#### 4.2.1 Simulation im Zeitbereich

Der Zeitbereich ist im Vergleich zum Frequenzraum intuitiver fassbar, so dass die Simulation im Zeitbereich auf den ersten Blick anschaulicher erscheint. Sie birgt jedoch einige Nachteile. Um eine möglichst gute Frequenzauflösung zu erhalten, muss die Simulation eine große Zeitspanne abdecken. Das reziproke dieser Gesamtzeit entspricht ja gerade der Frequenzauflösung. Die reziproke Breite des gewünschten Frequenzbandes wiederum ergibt letztendlich die nötige Schrittweite der zu speichernden Datenpunkte. Soweit ist noch kein Nachteil im Vergleich zur Berechnung im Frequenzraum ersichtlich. Es ist nach obiger Schilderung durchaus möglich, die gleiche Anzahl an Datenpunkten im Zeitraum zu berechnen wie bei einer vergleichbaren Rechnung im Frequenzraum. Der Nachteil liegt etwas tiefer begründet: Die Zeitschrittweite muss genügend klein gewählt werden, da bei zu grober Zeitdiskretisierung der Fehler bei der Zeitableitung in den Piezogleichungen zu groß wird. Die Fehlertoleranz kann dann nicht mehr eingehalten werden und die Gleichungen konvergieren nicht. Darüber hinaus müssen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich der Zeitableitung in Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden, was einer Verdopplung der Gleichungen entspricht. Hierdurch werden die Berechnungen im Zeitbereich um einen Faktor 10-50 langsamer als im Frequenzbereich.

#### Ermittlung der Impedanz durch Vorgabe der Ladung

Bei der Ermittlung der Impedanz durch Vorgabe der Ladung kann man sich vorstellen, dass ein kurzer Ladungspuls  $Q(t)$  auf die eine Stirnfläche des Piezos gegeben wird. Die andere Stirnfläche wird dabei geerdet. Ein kurzer Ladungspuls ist nötig, um ein möglichst breitbandiges Signal im Frequenzbereich zu erhalten. Aus der berechneten Spannungsantwort

$U(t)$  des Piezos auf dieser Stirnfläche ergibt sich dann die Impedanz im Fourierraum zu:

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{U}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = \frac{\tilde{U}(\omega)}{i\omega\tilde{Q}(\omega)}. \quad (4.23)$$

Hierbei bezeichnen die Größen  $I$  den Strom und  $\omega$  die Kreisfrequenz. Größen mit „ $\tilde{\phantom{x}}$ “ stellen die entsprechenden Größen im Fourierraum dar.

Das Simulationspaket CAPA bietet die Möglichkeit, Äquipotentialflächen zu definieren. Deren Definition ist nötig, da die Spannung bei realen Piezokeramiken durch eine Leitschicht (meistens Silber) auf eine Äquipotentialfläche gebracht wird. In der Simulation wurde folglich eine Stirnseite des Piezos als Äquipotentialfläche definiert und es wurde ein breitbandiges Ladungssignal  $Q(t)$ , ein Dreieckssignal, auf diese Stirnfläche gegeben. Die andere Seite wurde geerdet ( $U = 0$  V). Als Dämpfung wurde in CAPA die Rayleigh-Dämpfung verwendet. Die Dämpfungsparameter wurden so gewählt, dass nahe der niedrigsten Resonanzfrequenz die Dämpfung 1.5% der kritischen Dämpfung beträgt. Es wurden 100000 Zeitschritte bei einer Schrittweite von  $10^{-8}$  s gewählt.

Bei analoger Simulation in FEMLAB war es nicht möglich, Äquipotentialflächen zu definieren. Neben der Vorgabe der Ladung auf einer Stirnfläche, muss jedoch diese Stirnfläche zusätzlich eine Äquipotentialfläche sein. Um dies zu erreichen, bedient man sich eines Tricks. Man führt eine neue Variable ein, welche lediglich dem Potential an einem Punkt auf der Stirnfläche entspricht. Diese weitet man dann auf die gesamte Stirnfläche aus, so dass sie auf der gesamten Strinfläche zur Verfügung steht. Diese neue Variable kann nun als zusätzliche Randbedingung verwendet werden. Hierzu musste in FEMLAB direkt in das Gleichungssystem eingegriffen werden und die Differenz aus dieser neuen Variablen und der jeweils berechneten Spannung gebildet werden. Am betrachteten Bezugspunkt gibt es keine zusätzlichen elektrischen Zwangsbedingungen, da hier die Differenz zwangsläufig Null ergibt. Alle anderen Punkte der Stirnfläche werden mit dieser Bedingung auf das Potential dieses Punktes gezwungen. An diesem Beispiel wird klar, dass die Wahl und Vorgabe von geeigneten Randbedingungen von besonderer Wichtigkeit für die korrekte Lösung der Differentialgleichungen sind. Derartige Eingriffe ins Gleichungssystem waren in CAPA<sup>6</sup> nicht möglich, was keinen Spielraum für Variationsmöglichkeiten offen lässt. Trotz der relativ umständlichen Handhabung wurde diese Simulation in FEMLAB zur Berechnung der Impedanz durchgeführt, um einen direkten Vergleich mit den Berechnungen aus der Simulation mit CAPA zu erhalten.

### Ermittlung der Impedanz durch Vorgabe der Spannung

Die zweite Möglichkeit, die Impedanz aus Berechnungen im Zeitbereich zu erhalten, ist die Vorgabe eines breitbandigen Spannungspulses auf einer Stirnfläche bei gleichzeitiger Erdung

---

<sup>6</sup>Der Quelltext von CAPA stand leider nicht zur Verfügung und konnte daher nicht entsprechend angepasst werden.

der anderen. Als Spannungssignal wurde ein Dreieckssignal verwendet. Zur Berechnung des Stroms muss der Stromflußvektor  $\mathbf{j}(r) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , der für die einzelnen Oberflächenpunkte berechnet wird, über die Oberfläche integriert werden. In der axialsymmetrischen Simulation, wie sie in dieser Arbeit stets Verwendung findet, berechnet sich demnach der Strom  $\mathbf{I}$  für die Piezoscheiben zu  $\mathbf{I} = \int_0^R \mathbf{j}(r) 2\pi r dr$  ( $R$  ist der Radius der Piezoscheibe).

#### 4.2.2 Simulation im Frequenzbereich

Bei der Simulation im Frequenzbereich werden die Zeitdifferentiationen im Zeitbereich zu Multiplikationen mit der Kreisfrequenz im Frequenzbereich ( $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i2\pi f$ ; Hierbei sind  $t$  die Zeit und  $f$  die betrachtete Frequenz). Dadurch vereinfacht sich der Rechenaufwand des Gleichungssystems (3.33) erheblich, da die Verdopplung der Gleichungen zur Umformulierung in zeitliche Differentialgleichungen erster Ordnung nicht mehr nötig ist und eine Zeitdiskretisierung nicht vorgenommen werden muss.

Auch hier gibt es zwei Möglichkeiten, die Impedanz zu berechnen. Zum einen kann für alle Frequenzen eine konstante Ladung vorgegeben und somit die Spannung berechnet werden. Zum anderen kann für alle Frequenzen die Spannung konstant angenommen und der Strom berechnet werden. Bei beiden Methoden sind die sich ergebenden Probleme mit den Randbedingungen, wie bei der Berechnung im Zeitbereich erörtert, zu berücksichtigen.

Ein Vergleich der vier beschriebenen Methoden hat gezeigt, dass kein numerischer Unterschied vorhanden ist. Es stellt sich wie erwartet heraus, dass eine Simulation im Frequenzbereich wesentlich effektiver ist. Für weitere Untersuchungen wurde demzufolge stets im Frequenzbereich durch Anlegen einer harmonischen Spannung simuliert.

### 4.3 Einfluss der Piezogeometrie auf die Impedanz

Sowohl für den Schallempfang, als auch für das Senden ist es wünschenswert, den Piezo außerhalb der Resonanz zu betreiben, wenn ein breitbandiges Signal gesendet bzw. empfangen werden soll, da dann die Transferfunktion sehr einfach ist. In diesem Kapitel werden deshalb der Einfluss der Geometrie auf die Resonanz des Piezos untersucht und Schlussfolgerungen für den Bau von Hydrophonen bzw. Schallsendern gezogen.

#### 4.3.1 Zylinder

Es wurde erörtert, dass sich ein Piezo außerhalb der Resonanzen wie ein Kondensator verhält. Die Kapazität eines Kondensators in Zylinderform ist gegeben durch dessen Radius  $r$ , Höhe  $h$  und die Permittivität  $\epsilon$  des Materials zwischen den Elektroden. Für einen in  $x_3$ -Richtung polarisierten Piezo entspricht diese Permittivität gerade  $\epsilon_{33}$ . Für die Kapazität

folgt dann:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_{33} \frac{r^2 \pi}{h}. \quad (4.24)$$

Von weiterem Interesse ist der Einfluß der Geometrie auf die Resonanzstrukturen der Piezos. Dies wurde in den Simulationen untersucht. Hierbei muss zwischen der Resonanzfrequenz und Antiresonanzfrequenz unterschieden werden. Die Resonanz ist elektrischer Natur; die Impedanz nimmt hier ein Minimum ein, die Leitfähigkeit wird maximal. In der Antiresonanz kommt der mit der Resonanz gekoppelte mechanische Teil zum Tragen. Die mechanische Schwingung koppelt auf die elektrischen Größen zurück, so dass die Impedanz hier ein Maximum annimmt. Durch diese elektromechanische Kopplung, wie sie in den Piezogleichungen (3.26) - (3.29) zum Ausdruck kommt, sind bei der Messung der Impedanz sowohl Radialschwingungen als auch Höhenschwingungen berücksichtigt. Es wurde in einer Simulation untersucht, wann eine Modenkonversion stattfindet, d.h. ab welchem Verhältnis von Durchmesser zu Höhe eine Höhenschwingung in eine Radialschwingung übergeht.

Die Simulation ergab, dass die Modenkonversion für Piezozylinder nur vom Verhältnis Durchmesser zu Höhe ( $\frac{2r}{h}$ ) abhängt, wie in [86, 87] beschrieben. In der Simulation wurden 2500 Geometrien für das Piezomaterial PZT5A berechnet. In Abbildung 4.6 ist jeweils das Verhältnis  $\frac{2r}{h}$  für verschiedene  $h$  und  $r$  gegen die mit der Höhe normierten Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen aufgetragen. Eine Waagrechte in Abbildung 4.6 entspricht in dieser Auftragung einer reinen Höhenschwingung, da die Frequenz mit der Höhe multipliziert wurde. Reine Radialschwingungen sind durch eine lineare Abhängigkeit vom reziproken Durchmesser gekennzeichnet. Betrachtet man zunächst sehr kleine Werte von Durchmesser zur Höhe (Piezoscheibe ist hier viel höher als der Radius - dies entspricht einem Piezostab), so entspricht die niedrigste Resonanzfrequenz einer Höhenschwingung. Die davon ausgehende Waagrechte kennzeichnet demnach für alle Piezogeometrien jeweils die niedrigste Höhenschwingung (in Abbildung 4.6 ist das die niedrigste Waagrechte). Alle sich darunter befindenden Schwingungen sind reine Radialschwingungen. Dies geht aus einer doppeltlogarithmischen Auftragung klar hervor, wie sie in Abbildung 4.7 zu sehen ist. Hier gehorchen alle Resonanzen unterhalb der ersten Höhenschwingung dem zum Durchmesser reziproken Verhalten; es handelt sich demnach um reine Radialschwingungen. Bei weiterer Betrachtung stellt man zudem fest, dass diese niedrigste Waagrechte (niedrigste Höhenschwingung) bei ungeradzahligem Vielfachen des Durchmesser zu Höhe-Verhältnisses abknickt. Hier geht die Höhenschwingung also in eine Radialschwingung über.

Auffallend ist, dass in Abbildung 4.6 für kleines  $\frac{2r}{h}$  Verhältnis die Werte streuen. Eine genauere Analyse ergab, dass hier der Abtastfehler besonders stark zum tragen kommt. Bei der Simulation wurde in Frequenzschritten von 1 kHz abgetastet; der Abtastfehler ist dann in der Größenordnung des halben Frequenzbinnings multipliziert mit der maximal simulierten Höhe ( $0.5 \cdot 250 \text{ Hzm}$ ).

In weiteren Simulationen wurde das Binning halbiert und nur der Radius bei fester Höhe



(10 mm) variiert. Ergebnisse sind für dasselbe Material (PZT-5A) in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Berechnung für weitere Materialien findet sich im Anhang A.2.

Will man Neutrinos akustisch nachweisen, so ist es wünschenswert, Hydrophone zu verwenden, deren Resonanzfrequenz außerhalb des zu detektierenden Frequenzspektrums liegt. Die Resonanzfrequenz der Piezokeramik soll somit einen möglichst hohen Wert besitzen, so dass sie sich nicht störend auf das System auswirkt. Das signifikante Frequenzspektrum der zu detektierenden akustischen Signale erstreckt sich bis etwa 100 kHz (Abbildung 3.3). Die Resonanzfrequenz  $f_r$  des verwendeten Piezos sollte demnach oberhalb dieser Frequenz liegen ( $f_r > 100$  kHz). Bei einem Verhältnis von Durchmesser zu Höhe kleiner als 0.5 ist das Produkt aus Resonanzfrequenz und Höhe für PZT5A mit 1200 Hzmm am größten. Die Höhe  $h$  sollte demnach kleiner als 12 mm sein. Bei sehr dünne Piezos liegt zwar die erste Resonanz ebenfalls außerhalb des relevanten Bereichs, jedoch besitzen diese eine geringere Sensitivität, da diese, wie bereits am Ersatzschaltbild erörtert, von der Höhe abhängt. Bei zunehmender Höhe nimmt jedoch auch die Impedanz und somit das Eigenrauschen zu, was wiederum schlecht ist. Unterhalb der ersten Resonanz entspricht die Sensitivität etwa der derjenigen Sensitivität bei konstantem Druck ( $f \rightarrow 0$  in Gleichung (4.12)). Es wurde demnach eine Höhe von  $h = 10$  mm gewählt, wodurch sich bei einem Durchmesser zu Höhe Verhältnis von 0.5 ein Radius von  $r = 2.5$  mm ergibt, damit die Resonanz oberhalb von 100 kHz liegt.

Für sehr dünne Zylinder ist es üblich, eine Frequenzkonstante anzugeben. Diese beschreibt die planare bzw. radiale Wellengeschwindigkeit des Piezos und entspricht dem Produkt aus erster Resonanzfrequenz mit dem Durchmesser. Ein Vergleich der durchgeführten Simulation mit der vom Hersteller angegebenen Frequenzkonstanten ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Hier ist klar ersichtlich, dass ab einem Durchmesser zu Höhe Verhältnis von fünf die Simulation mit der Herstellerangabe für dünne Scheiben übereinstimmt. Die Streuung der Werte resultiert wieder aufgrund des Frequenzbinnings von 1 kHz.

### 4.3.2 Hohlzylinder

Kommerzielle Hohlzylinder werden in der Regel mit radialer Polarisierung hergestellt. Eine radiale Polarisierung existiert nur für Piezokeramiken, da hier die Polarisierung durch ein externes Feld aufgeprägt wird. Bei Angabe der Piezoparameter in Voigtscher Notation wird stets von einer Polarisierung des Piezos in  $x_3$ -Richtung ausgegangen. Bei der Simulation von Zylindern liegt jedoch eine Polarisierung in Radialrichtung vor. Es muss demnach auf die Tensorschreibweise zurückgegriffen werden, denn dort ist die Transformation in Radialrichtung einfach auszuführen. Auch die Hohlzylinder verhalten sich außerhalb der Resonanz rein kapazitiv. Die Kapazität eines Hohlzylinders ist durch die Höhe  $h$  des Hohlzylinders,

den Außenradius  $r_a$ , die Wandstärke  $d$  und die Permittivität  $\epsilon$  bestimmt<sup>7</sup>:

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_{33} \frac{h}{\ln\left(\frac{r_a}{r_a-d}\right)} \quad (4.25)$$

Bei den Hohlzylindern lässt sich keine einheitliche Auftragung der Resonanz-Antiresonanzfrequenzen finden, da hier drei Freiheitsgrade für die Geometrie vorhanden sind. Demzufolge sollten auch drei Schwingungsmoden existieren. Neben den geometrischen Schwingungen - Schwingung mit der Wanddicke  $d$  und der Höhe  $h$  - sind auch Ringmoden vorhanden, in denen der Piezo in Radialrichtung schwingt („atmet“). Wenn der Außenradius größer als die Höhe ist, ist die Ringmode die Schwingung mit der niedrigsten Frequenz, da die Wanddicke zwangsläufig kleiner ist als der Aussenradius. Zunächst wurde in der Simulation der Einfluss der Wanddickenschwingung außer acht gelassen. Dies wird dadurch erreicht, indem die Wandstärke so dünn gewählt wird, dass deren entsprechende Schwingungsmoden weit außerhalb des betrachteten Frequenzbereichs liegt. Eine Auftragung von Durchmesser zu Höhenverhältnis gegen das Produkt aus Höhe und Resonanzfrequenz bzw. Antiresonanzfrequenz lässt erkennen, wann eine Höhenmode bzw. eine Ringmode vorliegt. Eine Schwingungsmoden der Wandstärke ist in dieser Auftragung schwer zu identifizieren, da sie sowohl vom Verhältnis von Wandstärke und Höhe, als auch vom Verhältnis von Außenradius und Höhe abhängt. Aus der Auftragung nach Durchmesser zu Höhenverhältnis gegen das Frequenz-Höhe Produkt ist für die Wandstärkenschwingung keine geordnete Struktur zu erkennen, wie am Beispiel für die Wandstärke  $d = 1$  cm in Abbildung 4.9 gezeigt. Lediglich die Ringmode als niedrigste Schwingungsmoden ist noch klar zu erkennen. Um sicherzustellen, dass es sich wirklich um eine Höhenmode handelt, wurde deshalb für zwei dünne Wandstärken  $d$  simuliert. Es wurden  $d = 0.25$  mm und  $d = 1$  mm gewählt. Aus Abbildung 4.9 ist ersichtlich, dass für dünne Hohlzylinder nur Ringmoden und Höhenschwingungen eine Rolle spielen.

Bei der Variation der Geometrie konnte bei den dünnen Hohlzylindern ein Zusammenhang von Ringmode und Höhenmode festgestellt werden. Durch Simulation beim Anlegen einer periodischen Kraft in Radialrichtung stellt man fest, dass durch die Ringschwingung sehr gute Sensitivitäten erreicht werden. Somit liefern dünnwandigen Hohlzylinder für niedrige Frequenzen sogar eine bessere Sensitivität als die dickwandigen. Dickwandige Hohlzylinder wurden demnach nicht weiter betrachtet.

## 4.4 Simulation der Verschiebungen

Die Verschiebung auf der Oberfläche des Piezos kann mittels optischer Interferometrie vermessen werden. Eine Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Messmethode mittels eines eigens gebauten fasergekoppelten Interferometers wird in Kapitel 6 diskutiert. Hier werden

<sup>7</sup>Wird die Polarisierung in Radialrichtung betrachtet, so handelt es sich hierbei wieder um  $\epsilon_{33}$ .

die Erkenntnisse, die aus der Simulation gewonnen wurden, näher beleuchtet. Da die Messung der Verschiebung im Vergleich zu einer Impedanzmessung wesentlich aufwendiger ist, wird anhand der Simulation untersucht, in wie weit die Auslenkung aus der Impedanz hergeleitet werden kann.

Im Kapitel 4.1 wurde diskutiert, dass die Zeitdifferentiation der Verschiebung zum Strom proportional ist, der in den mechanischen Ersatzgrößen (alle elektrischen Bauteile parallel zu  $C_p$ ) fließt. Für alle Frequenzen erhält man auf diese Weise nur eine einzige Auslenkung für alle Positionen auf der Oberfläche des Piezos. Es kann sich demnach nur um eine gemittelte Auslenkung handeln. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass diese Aussage auch bei einer genaueren Analyse noch ihre Gültigkeit besitzt. Hierzu wurde aus der Simulation sowohl die Impedanz gewonnen, als auch die phasenrichtige Auslenkung auf der Oberfläche. Zur Mittelung der Auslenkung wurde die Verschiebung auf den Elektroden in Polarisationsrichtung des Piezos betrachtet, da bei der Herleitung des Ersatzschaltbildes ebenfalls nur diese Verschiebung relevant war. In Abbildung 4.10 (oben) ist die Verschiebung eines Piezos entlang dieser Oberfläche dargestellt. Zum Vergleich der oben geschilderten These wurden an die mit der FEMLAB-Simulation berechnete Impedanz die Parameter für ein Ersatzschaltbild gefittet. Nach Integration des Stroms im Frequenzraum, welcher durch die mechanisch äquivalenten Größen fließt, kann die gemittelte Auslenkung aufgrund des Ersatzbildes aus der Impedanz extrahiert werden. Diese kann nun mit der aus der FEMLAB-Simulation gewonnenen gemittelten Verschiebung verglichen werden, wie in Abbildung 4.10 (unten) dargestellt wird.

Es zeigt sich, dass durch eine Impedanzmessung die gemittelte Verschiebung auf der Elektrode eines Piezos extrahiert werden kann. Für Untersuchungen, bei denen die Phaseninformation der Auslenkung zwischen den Oberflächenpunkten relevant ist, reicht eine Impedanzmessung jedoch nicht mehr aus und es muss entweder auf eine Messung bzw. Simulation der Verschiebung entlang der Oberfläche zurückgegriffen werden. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Richtungscharakteristik eines Piezos ermittelt werden soll (vgl. Kapitel 5.2).

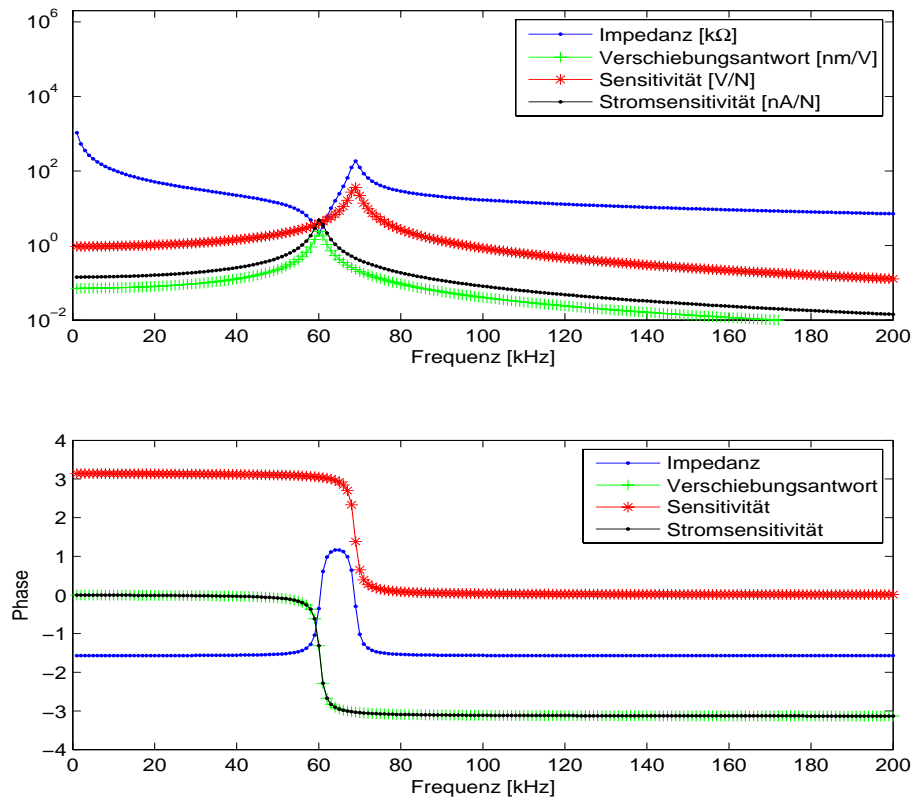


Abb. 4.2: Ergebnisse aus dem vereinfachten Modell für PZT5A mit der Höhe  $h = 20$  mm und dem Radius  $r = 10$  mm. Oben: Betrag der Impedanz (blau) in  $k\Omega$ , Betrag der Verschiebungsantwort auf Spannung in  $nm/V$  (grün), Betrag der Spannungsantwort auf Krafteinwirkung in  $V/N$  (rot) und der Betrag der Stromantwort auf Krafteinwirkung in  $nA/N$  (schwarz). Unten: Die Phase der jeweiligen Größen.

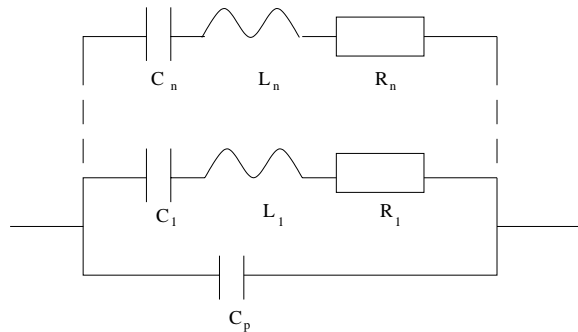


Abb. 4.3: Ersatzschaltbild eines Piezos beim Senden.

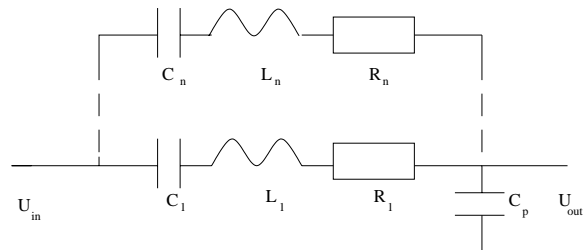


Abb. 4.4: Ersatzschaltbild eines Piezos beim Empfangen.

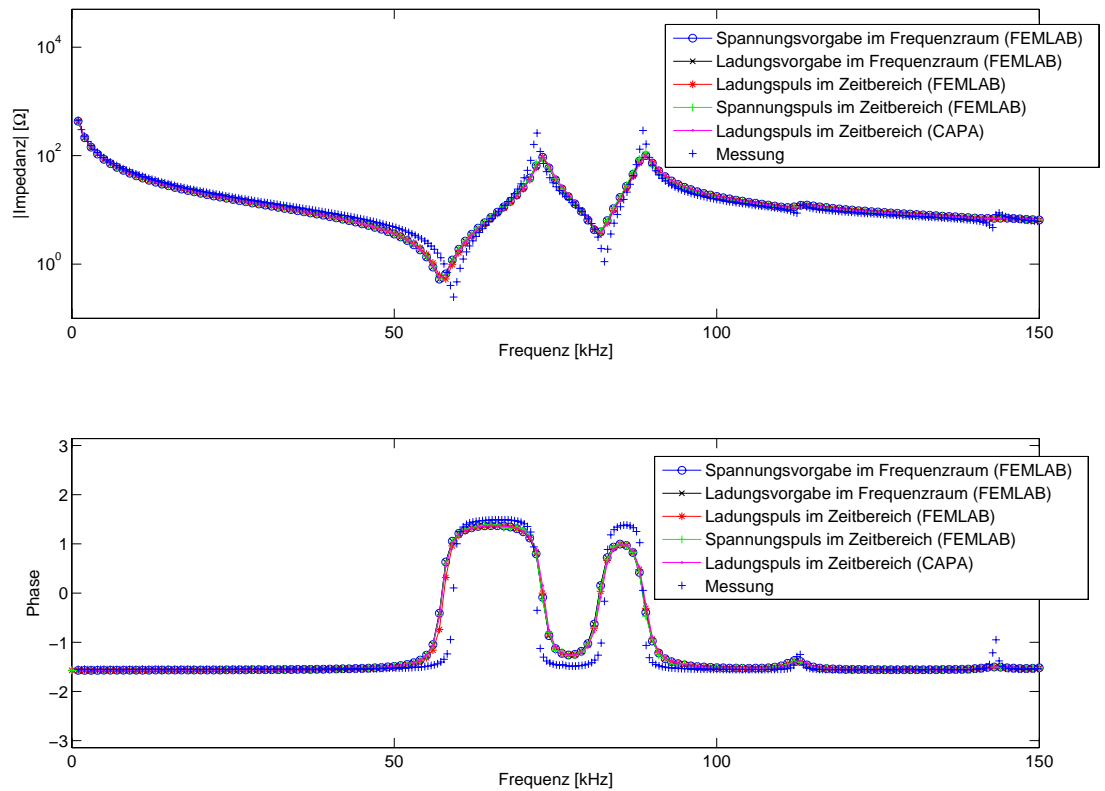


Abb. 4.5: Gezeigt ist die Impedanz eines Piezozylinders mit Radius 12.5mm und Höhe 20mm. Dargestellt sind die Ergebnisse aus den Simulationen mit FEMLAB bzw. CAPA (siehe Text) und einer Messung mit dem Impedance Phase Gain Analysator.

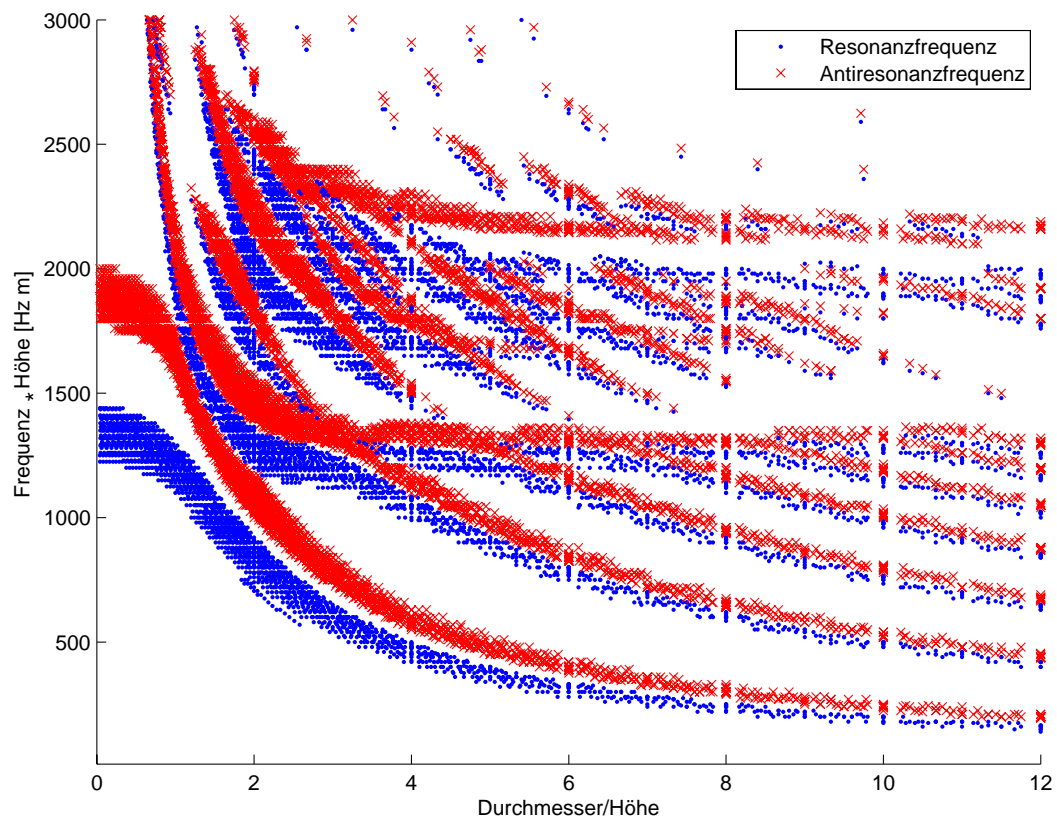


Abb. 4.6: Simulation von verschiedenen Piezogemetrien. Variiert wurden Radius und Höhe in jeweils 5 mm Schritten, so dass ein Gitter von  $R \in [5 \text{ mm}; 250 \text{ mm}] \times H \in [5 \text{ mm}; 250 \text{ mm}]$  resultierte.

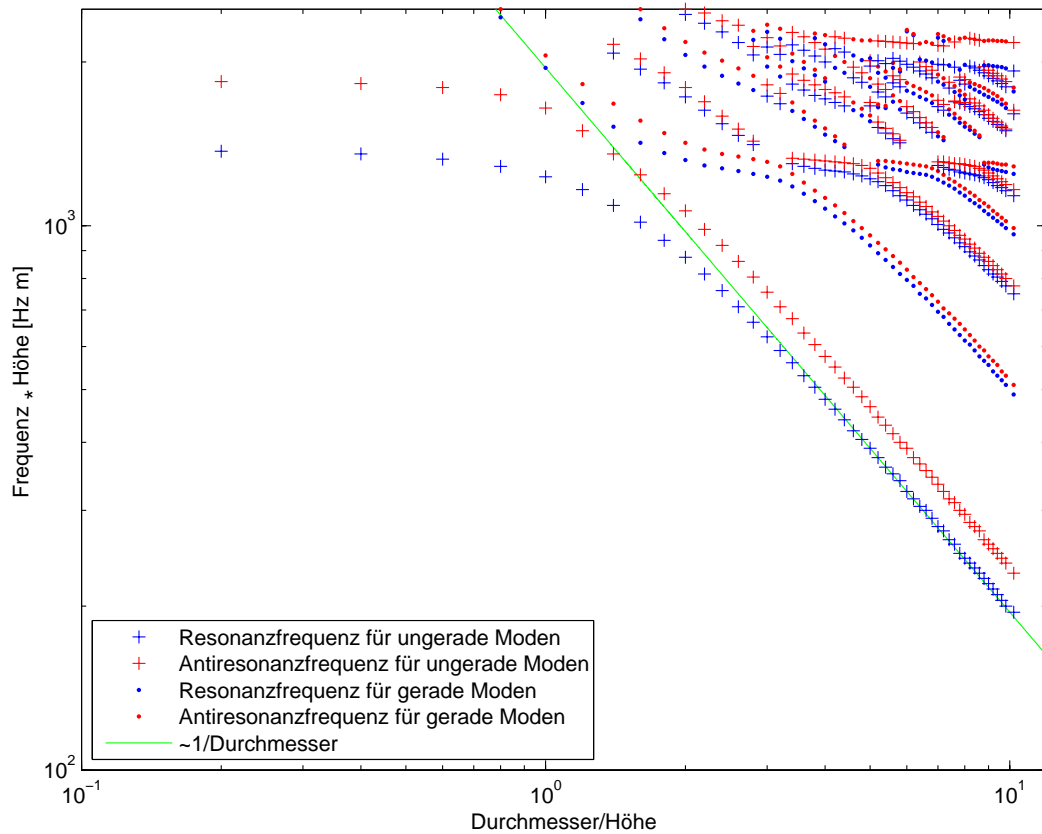


Abb. 4.7: Simulation von verschiedenen Piezogemetrien bei halbiertem Frequenzbinning. Variiert wurde der Radius  $R \in [1 \text{ mm}; 200 \text{ mm}]$  bei festgehaltener Höhe  $H = 10 \text{ mm}$ . Verdeutlicht wurde die erste Frequenz der reinen Radialmode durch die durchgezogene grüne Linie.

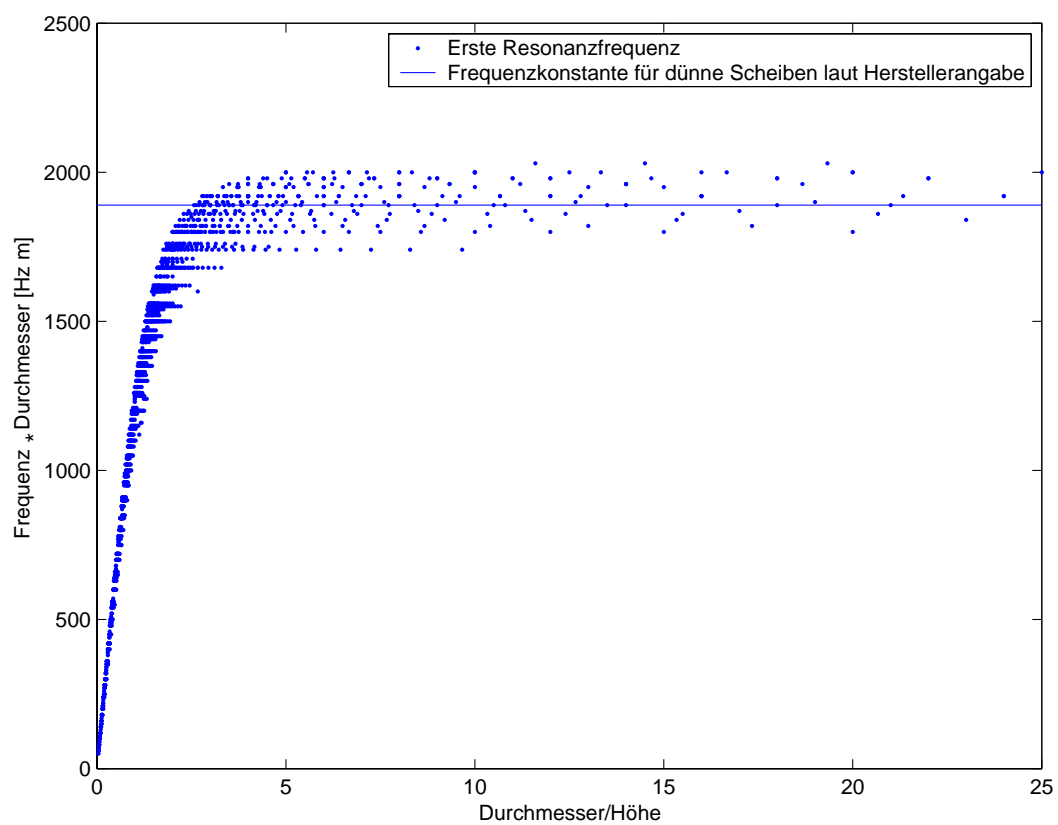


Abb. 4.8: Vergleich der simulierten Frequenzkonstanten mit der Herstellerangabe.



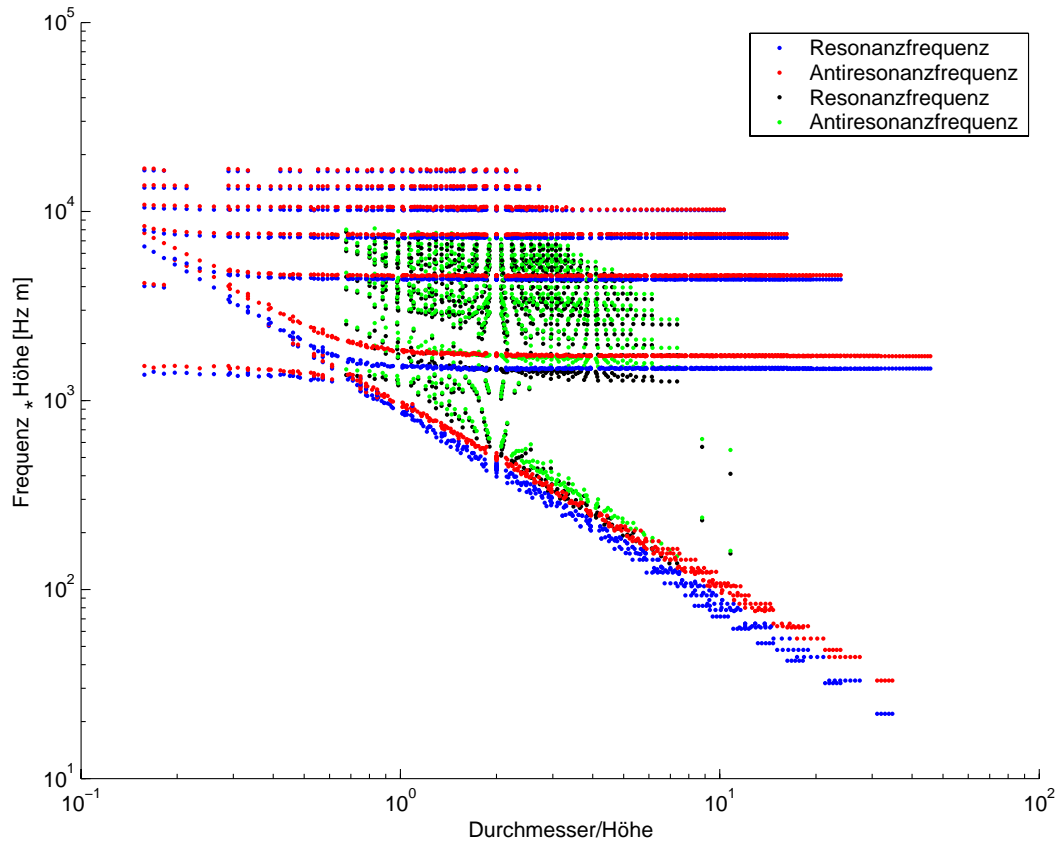


Abb. 4.9: Aufgetragen ist die Resonanzfrequenz (blau) und Antiresonanzfrequenz (rot) von Hohlzylindern bei Variation der Geometrie. Simuliert wurde ein Gitter aus Aussenradius und Höhe von  $r_a \in [6 \text{ mm}; 76 \text{ mm}]$  und  $h \in [6 \text{ mm}; 76 \text{ mm}]$  für die beiden Wandstärken  $d = 0.25 \text{ mm}$  und  $d = 1 \text{ mm}$ . Schwarz und grün sind Resonanz- bzw. Antiresonanzfrequenz für die Wandstärke  $d = 10 \text{ mm}$  mit  $r_a \in [11 \text{ mm}; 36 \text{ mm}]$  und  $h \in [12.5 \text{ mm}; 32.5]$ . Durch die Wandstärkenschwingung ist keine geordnete Struktur mehr erkennbar.

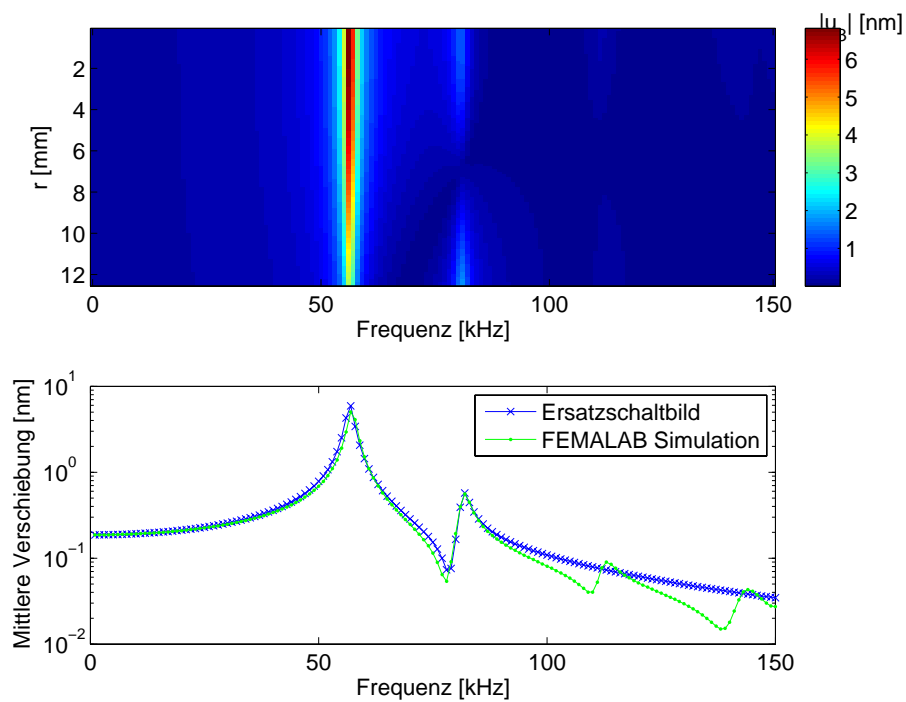


Abb. 4.10: *oben*: Verschiebung eines Piezozylinders entlang der Elektrode mit Radius 12.5 mm und Höhe 20 mm. *unten*: Gemittelte Verschiebung aus der FEMLAB Simulation desselben Piezozylinders (blau) und die aufgrund des Impedanzfits hervorgesagte Verschiebung dieses Piezos (grün).

## 5 Einfluß von Wasser bzw. Hüllenmaterial auf die Eigenschaften eines Piezos

Bisher konnten wichtige Erkenntnisse über die Eigenschaften eines Piezos gewonnen werden. In diesem Kapitel wird anhand von Simulationen näher untersucht, wie sich diese Eigenschaften verhalten, wenn ein Piezo im Wasser betrieben wird. Dabei kann der Piezo zum Senden von akustischen Drucksignalen, oder aber zum Wandeln von Drucksignalen in elektrische Signale verwendet werden. Weiterhin wird in diesem Kapitel erörtert, wie stark die Amplitude des gesendeten akustischen Signals eines Piezos ist.

Um eine Piezokeramik in Wasser zu beschreiben, wird die Grenzfläche zwischen diesen beiden Medien betrachtet. Die Beschleunigung der Oberfläche des Piezos (zweite Zeitdifferentiation der Verschiebung  $\ddot{\mathbf{u}}$  in Normalenrichtung) wirkt als Quellterm für die Wellengleichung des Wassers, das den Piezo umgibt:

$$\frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \nabla p = \hat{\mathbf{n}} \ddot{\mathbf{u}}. \quad (5.1)$$

Hier ist  $\rho$  die Dichte des Wassers. Die Normale  $\hat{\mathbf{n}}$  zeigt dabei vom Piezo weg in das Wasservolumen hinein. Der so entstandene Druck  $p$  wirkt seinerseits als externe Kraft  $\mathbf{F}$  in Normalenrichtung auf die Oberfläche des Piezos zurück:

$$\mathbf{F} = -p \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.2)$$

Diese beiden Randbedingungen ermöglichen eine Simulation des Piezos mit Ankopplung an Wasser.

Am Rand des simulierten Wasservolumens treten Reflexionen auf, welche die Signalcharakteristik verfälschen können. Um dies zu vermeiden, werden geeignete Randbedingung an das Wasservolumen gesetzt. Dazu stehen prinzipiell mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen kann das zu simulierende Volumen groß genug gewählt werden, so dass Reflexionen in dem betrachteten Zeitintervall keine Rolle mehr spielen. Diese Möglichkeit kommt aufgrund des immensen zusätzlichen Rechenaufwandes nicht in Frage, da zum einen ein deutlich größeres Volumen zu simulieren ist und zum anderen die Berechnungen im Zeitbereich durchgeführt werden müssen. Eine weitere Möglichkeit zur Unterbindung von Reflexionen besteht in der Verwendung von Finite Boundary Elementen. Es können aber auch Dämpfungselemente am Rand des Wasservolumens verwendet werden, in welche die zu simulierende Druckwelle ungehindert hineinläuft und in der Amplitude unterdrückt wird.

Sowohl Finite Boundary Elemente als auch Dämpfungselemente standen in FEMLAB nicht zur Verfügung.

Als Alternative können nicht reflektierende Randbedingungen hinzugefügt werden [88, 89]. Diese Randbedingungen konnten in FEMLAB durch Eingriff in das Gleichungssystem implementiert werden, so dass sie in dieser Arbeit Verwendung fanden. Bei der nicht reflektierenden Randbedingung handelt es sich um eine Unterdrückung der in das simulierte Wasservolumen zurücklaufenden Welle. Es soll demnach nur auslaufende Wellen geben. Für eine bestimmte Ausbreitungsrichtung der Druckwelle ist im zweidimensionalen Fall folgende Bedingung für eine vollständige Auslöschung anzuwenden<sup>1</sup>:

$$\left( \cos(\alpha) \frac{1}{c} \partial_t + \hat{\mathbf{n}} \nabla \right) p = 0. \quad (5.3)$$

Hierbei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen dem Wellenvektor und der Normalen  $\hat{\mathbf{n}}$  der Berandung. Um Reflexionen von Wellen verschiedener Richtungen zu vermeiden, muss im Prinzip für jeden Winkel  $\alpha_i$  zwischen Wellenvektor und der Normalen des Randes durch Multiplikation eine analoge Randbedingung gestellt werden [88]:

$$\left( \prod_i \left( \cos(\alpha_i) \frac{1}{c} \partial_t + \hat{\mathbf{n}} \nabla \right) \right) p = 0. \quad (5.4)$$

Da das Produkt über unendlich viele Winkel zu bilden ist, kann eine solche Randbedingung in einer Simulation unmöglich realisiert werden. Es wurde deswegen bei der Simulation ausgenutzt, dass sich die von einem Piezo gesendete Welle bereits nach kurzer Laufzeit im Fernfeld befindet und somit als Punktquelle betrachtet werden kann. Folglich wurde ein sphärisches Wasservolumen simuliert. Am Rand treffen Wellen unter dieser Annahme stets mit  $\alpha = 0^\circ$  ein. Somit vereinfacht sich die Randbedingung zu einem einzigen linearen Term. Dieser wurde in FEMLAB implementiert. Diese Randbedingung entspricht einer Impedanzanpassung der Schallwelle am Rand unter der Annahme eines senkrechten Schalleinfalls. Die Effektivität dieser Randbedingung wurde mittels einer einfachen Wellengleichung mit der Wellengeschwindigkeit  $c = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  im Zweidimensionalen Raum überprüft. Hierbei wurde ein kreisförmiges Volumen mit einer anfänglich gaussförmigen Druckwelle  $p(x, y, t = 0) = e^{-100(x^2 + y^2)}$  simuliert. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.1 für verschiedene Zeitschritte dargestellt. Durch diese einfache Randbedingung werden weniger als zwei Prozent der anfänglichen Druckwelle reflektiert, wie ein Vergleich der Druckamplituden für die Zeit  $t = 0$  s und  $t = 2$  s zeigt.

Die Randbedingung, so wie sie in Gleichung (5.4) gegeben ist, enthält eine Zeitableitung. Es wurde bereits geschildert, dass es wesentlich vorteilhafter ist, die Piezogleichungen im Frequenzraum zu lösen. Die Zeitableitung wird dann zu einer Multiplikation mit der Kreisfrequenz.

---

<sup>1</sup>Eine Herleitung kann in [88] nachgelesen werden.

	$C_p$ [pF]	$C_1$ [pF]	$C_2$ [pF]	$L_1$ [mH]	$L_2$ [mH]	$R_1$ [kΩ]	$R_2$ [kΩ]
Wasser	186.0	165.66	12.603	48.8	314.0	3.5	5.6
Luft	186.0	160.66	12.103	48.8	314.0	0.5	4.0

Tab. 5.1: Fitparameter für das Ersatzschaltbild, wie sie an die Simulation aus Abbildung 5.2 gefittet wurden.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der so konstuierten Simulation eines Piezos in Wasser erörtert. Diesbezüglich wird die Impedanz und die Verschiebung mit Wasserankopplung beim Senden diskutiert. Daraufhin werden verschiedene Hüllenmaterialien und deren Geometrie variiert. Anschließend wird der Schallempfang eines Piezos mit Hülle in Wasser untersucht.

## 5.1 Simulation der Impedanz mit Ankopplung an Wasser

Für die Simulation mit Wasser ist allein die beschriebene Kopplung von Wasser an den Piezo relevant. Der statische Druck kann für den Empfang vernachlässigt werden, denn dieser ändert die Materialparameter des Piezos nur gering. So variiert z.B.  $\epsilon_{33}$  laut Herstellerangabe bis 70 MPa lediglich um 3%. Effekte durch den statischen Druck können demnach vernachlässigt werden.

Das Wasser beeinflusst dennoch die elektrische Antwort eines Piezos beim Senden, denn es wirkt als Last auf den Piezo und macht sich somit effektiv als eine Kraft bemerkbar. Der Piezo strahlt Schall in das Wasser ab, wodurch dissipative Verluste resultieren. In der Simulation wurde die beschriebene Kopplung von Piezo und Wasser verwendet, um diese Kräfte zu beschreiben.

In Abbildung 5.2 ist das Ergebnis der Simulation und dessen Fit durch das elektrisch äquivalente Ersatzschaltbild dargestellt. Gefittet wurden die ersten beiden Resonanzen. Die Fitparameter sind in Tabelle 5.1 angegeben. Aus der Abbildung ist klar ersichtlich, dass der Einfluss des Wassers die Resonanzen dämpft. Es ist weiterhin zu sehen, dass die Resonanzen stärker als durch Dämpfung allein zu kleineren Frequenzen hin verschoben werden. Dies verdeutlicht die Gegenüberstellung der Fitparameter aus dem Ersatzschaltbild (Tabelle 5.1) detaillierter: Nicht nur die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  nehmen im Wasser zu, es müssen auch die Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  angepasst werden. Es nimmt also im Ersatzschaltbild nicht nur die Dämpfung, sondern effektiv auch die Formfestigkeit bzw. Steifigkeit durch den Einfluss von Wasser zu.

## 5.2 Simulation der Verschiebung und der Richtungscharakteristik

Es wurde bereits angemerkt, dass lediglich eine mittlere Verschiebung durch einen Fit mit dem Ersatzschaltbild gewonnen werden kann. Um insbesondere die Richtungscharakteristik zu erhalten, ist jedoch das phasenrichtige Verhalten der Verschiebung auf der gesamten Oberfläche relevant, denn jeder Punkt wirkt als Punktquelle und erzeugt so durch Überlagerung das Drucksignal. Auch auf die Amplitude der Verschiebung hat das Wasser Einfluss; die Lage der Resonanz wird im Vergleich nur gering verschoben. Es liegt aber eine erhebliche Resonanzverbreiterung vor. Ein direkter Vergleich der Verschiebung auf der Oberfläche eines Piezozylinders mit und ohne Wasser ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

Die Verschiebungen auf den einzelnen Punkten der Oberfläche des Piezos erzeugen Drucksignale. Die phasenrichtige Überlagerung dieser Signale entspricht dem Druck am betrachteten Raumpunkt. Zur Simulation der Richtungscharakteristik ist dieses Druckfeld zu berechnen. Das Druckfeld wurde aus bereits erörterten Gründen im Frequenzraum berechnet. Der berechnete Druck wurde mit dem Abstand vom Piezozentrum multipliziert, da hier lediglich die Winkelabhängigkeit des Druckfeldes von Interesse ist. Das Druckfeld nimmt, wie erwartet, mit  $\frac{1}{r}$  ab. Als Beispiel ist das auf den Abstand normierte Druckfeld eines Piezozylinders bei einer Frequenz von 100 kHz in Abbildung 5.4 dargestellt. Die erwartete Abstandsabhängigkeit im Fernfeld wurde demnach, wie bereits geschildert, durch Multiplikation mit dem Abstand vom Schallzentrum herausgerechnet. In Abbildung 5.5 ist die erhaltene Richtungscharakteristik aufgetragen.

Die Simulation erlaubt es, die Richtungscharakteristik eines Schallsenders zu extrahieren. Das frequenzabhängige Sendeverhalten im Fernfeld ist in Abbildung 5.6 am Beispiel eines Zylinders bei senkrechter Schallabstrahlung dargestellt. Dort ist die erwartete Druckamplitude im Abstand von 1 m vom Piezozentrum aufgetragen und entspricht somit der Transferfunktion eines Piezos beim Senden am betrachteten Raumpunkt. Es ist durch die doppellogarithmische Auftragung klar ersichtlich, dass bis 10 kHz ein mit der Frequenz quadratisches Verhalten ( $f^2$ -Verhalten) vorliegt. Multiplikation mit  $-\omega^2$  im Frequenzraum entspricht der zweiten Zeitableitung im Zeitbereich. Es wird unterhalb der Resonanzfrequenz also die zweite Zeitableitung des am Piezo angelegten Signals gesendet.

## 5.3 Eigenschaften verschiedener Hüllenmaterialien

Ein Piezo in Wasser muss zum Schutz vor Wasser und des Umgebungsdruckes in eine Hülle eingegossen werden. Ein zum Druckempfang verwendeter Piezo besitzt darüber hinaus noch einen Vorverstärker. Simuliert wurde das Senden eines Piezos ohne Hülle, da diese erst ab einer Dicke von  $\frac{\lambda}{4}$  zum tragen kommt [86]. Hierbei wird die Wellenlänge über die Schallgeschwindigkeit im Hüllenmaterial berechnet. Genau genommen gibt es für die Hülle die

Schallgeschwindigkeit der Scherwelle und der Longitudinalwelle. Zusätzliche Resonanzeffekte der Hülle treten demnach bereits bei dünnerer Hüllenstärke für die Scherwelle auf, da deren Schallgeschwindigkeit kleiner als die der Longitudinalwelle ist. Nichtsdestotrotz sind Effekte für realistische Materialien bei einer Hüllenstärke von 2 mm erst im Megaherzbereich zu erwarten, weshalb auf die Simulation der Hülle verzichtet wurde.

Für den Bau von Hydrophonen können dennoch für die Wahl des Hüllenmaterials einige Implikationen getroffen werden. Bei der Wahl des Hüllenmaterials sind mehrere Faktoren ausschlaggebend. So ist zum Beispiel darauf zu achten, dass das verwendete Hüllenmaterial mit der Ummantelung eines elektrischen Kabels chemisch verbunden werden kann. Recherchen<sup>2</sup> haben ergeben, dass Standardkoaxialkabel in der Regel aus drei verschiedenen Hüllmaterialien gefertigt werden. Es wird Polyvinylchlorid (PVC), Polyethylen (PE) oder Neopren verwendet. Eine Ankopplung von Polyurethan, welches sich zur Schallankopplung als besonders geeignet herausgestellt hat, an PE ist nur mit ätzenden Chemikalien möglich (Schwefelsäure Dichromat Mischung). PVC und Neopren lassen sich wesentlich einfacher mit Polyurethan verbinden. Aufrauhern der Oberfläche mit anschließender Behandlung mit Tetrahydrofuran (THF) reicht aus, um eine gute Verbindung zu erzielen. Thermoplaste wären zwar wesentlich druckstabiler und auch deren Wasserdampfdruckpermeabilität ist wesentlich geringer, jedoch ist deren Verarbeitungstemperatur zu hoch, um die Funktionsweise der Halbleiterelemente des Vorverstärkers noch garantieren zu können. Auch die Curietemperatur der piezosensitiven Materialien wird bei Verwendung einiger Thermoplaste überschritten, so dass Depolarisation auftritt und kein piezoelektrischer Effekt mehr vorhanden ist. Neben der chemischen Kopplung an das Kabel ist es bei der Wahl des Hüllenmaterials notwendig, die Hydrophone wasserdicht zu machen, um die Elektroden des Piezos und die Vorverstärker zu schützen. Die Hülle muss auch eine Druckstabilität aufweisen. Die Hydrophone sollen schließlich in einer Wassertiefe von 2400 m betrieben werden. Es werden deshalb vorwiegend Polyurethane und Gießharze zum Hydrophonbau verwendet. Harz und Polyurethan sind isotrope Materialien. Die Kenntniss der beiden Lamé Parameter  $\lambda$  und  $\mu$ , sowie der Dichte reichen demnach aus, um die Wellenausbreitung in diesen Medien vollkommen zu beschreiben. Für isotrope Materialien ist es jedoch üblich, das Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl (Poissonzahl)  $\nu$  anzugeben. Die Lamé Parameter lassen sich aus diesen berechnen:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (5.5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.6)$$

Bei Polymeren liegt die Dichte zwischen  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und  $2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Durch unterschiedliche Härterverhältnisse beim Gießen des Polymers lässt sich vorwiegend die Elastizität (gegeben

---

<sup>2</sup>Diskussion mit Lehrstuhl für Polymerwissenschaften

durch das Elastizitätsmodul  $E$ ) variieren. Diese liegt bei Polymeren zwischen 0.05 GPa und 8 GPa [90]. Dichte und Poissonzahl variieren im Vergleich dazu nicht sehr stark. Die Schallgeschwindigkeiten der Scherwelle  $c_s$  bzw. der Druckwelle  $c_p$  sind mit der Dichte  $\rho$  gegeben durch<sup>3</sup>:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (5.7)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (5.8)$$

Das Polymer mit einer Dichte von  $2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und einem Elastizitätsmodul von 0.05 GPa ist im Parameterraum dasjenige mit der geringsten Schallgeschwindigkeit. Auch für dieses Material spielt die Hülle erst ab einer Dicke von 3 mm ab einer Frequenz von 100 kHz eine Rolle. Es ist demnach gerechtfertigt, die Effekte der Hülle zu vernachlässigen.

---

<sup>3</sup>Der Index „s“ kommt vom englischen secondary und der Index „p“ von primary.



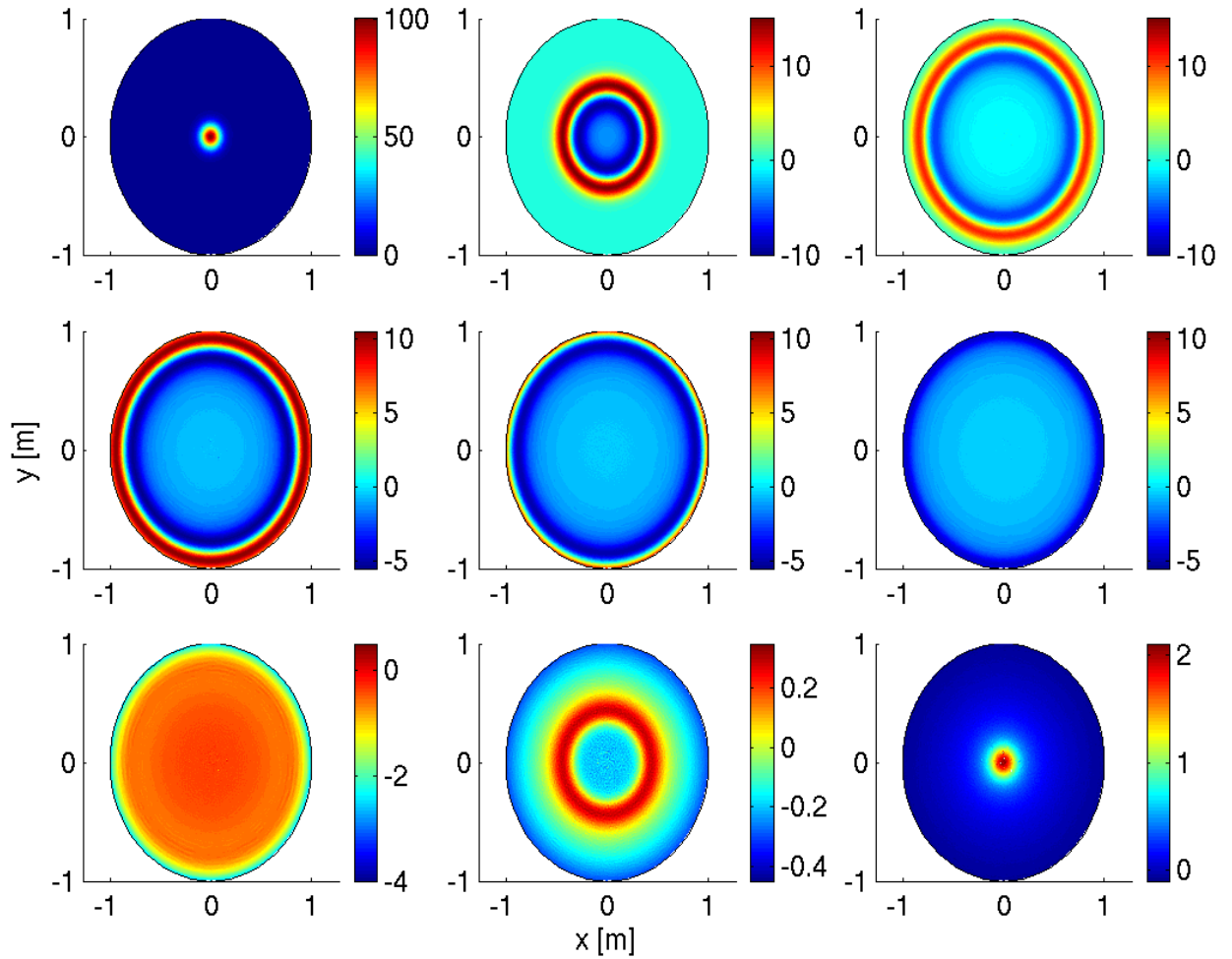


Abb. 5.1: Zweidimensionale Simulation für eine Wellenpropagation mit einer gaussförmigen Druckverteilung bei  $t = 0$  s und nichtreflektierenden Randbedingungen erster Ordnung. Die Farbkodierung entspricht dem Druck in  $cPA$ . Das Druckfeld ist von oben links nach unten rechts für folgende Zeitschritte dargestellt:  $t \in [0 \text{ s}, 0.5 \text{ s}, 0.8 \text{ s}, 0.9 \text{ s}, 1 \text{ s}, 1.1 \text{ s}, 1.2 \text{ s}, 1.6 \text{ s}, 2.0 \text{ s}]$

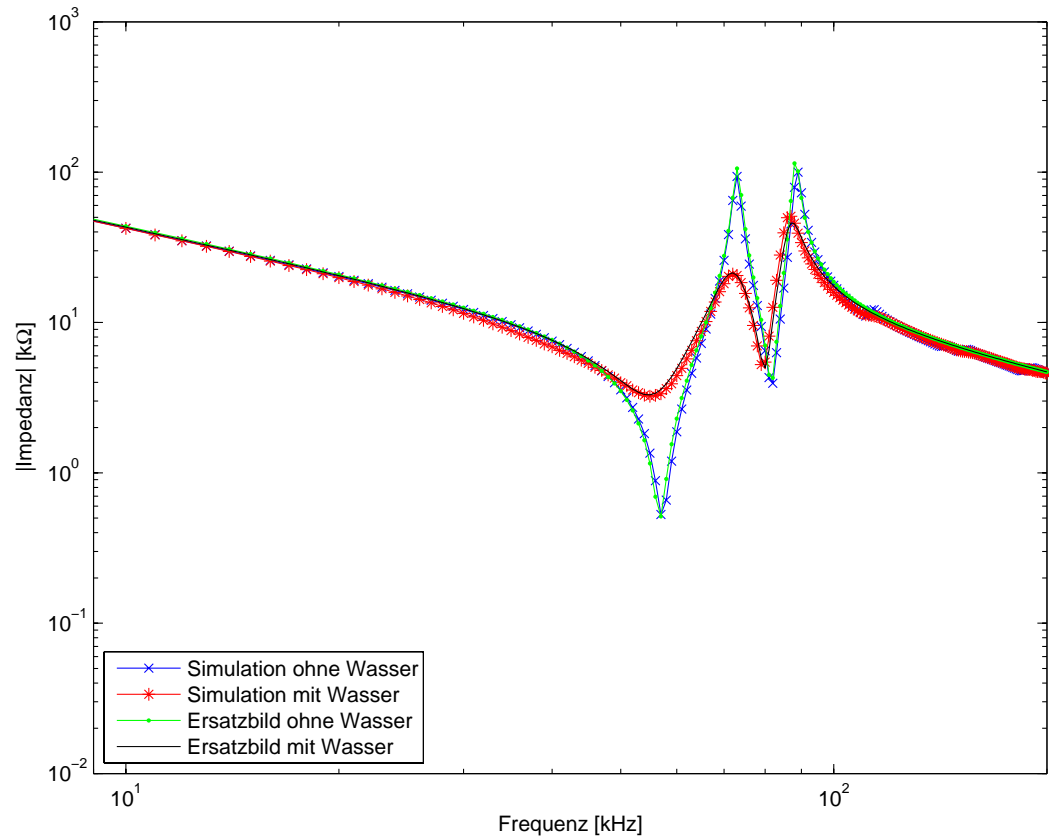


Abb. 5.2: Simulation der Impedanz eines Piezozylinders mit Radius  $12.5\text{mm}$  und Höhe  $20\text{mm}$  mit Wasserlast (rot) und ohne Wasserlast (blau). Fit bis zur zweiten Resonanz mit den Ersatzschaltbildern an die Simulationen (schwarz für Simulation mit Wasserlast und grün für die Simulation ohne Wasserlast).

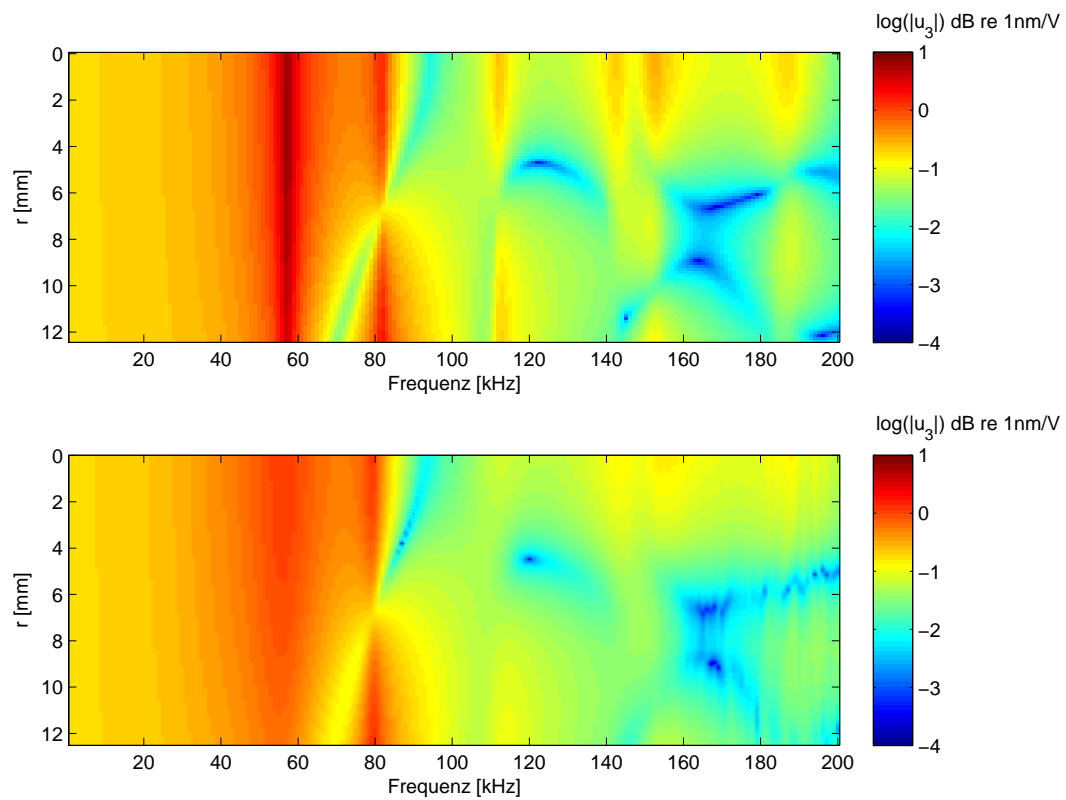


Abb. 5.3: Gezeigt ist die Verschiebung eines Piezozylinders mit Radius  $12.5\text{mm}$  und Höhe  $20\text{mm}$  auf dessen Stirnfläche. Dargestellt sind Ergebnisse der Simulation ohne Wasserlast (oben) und mit Wasserlast (unten). Die Resonanzverbreiterung und die Abschwächung der Amplitude ist klar ersichtlich.

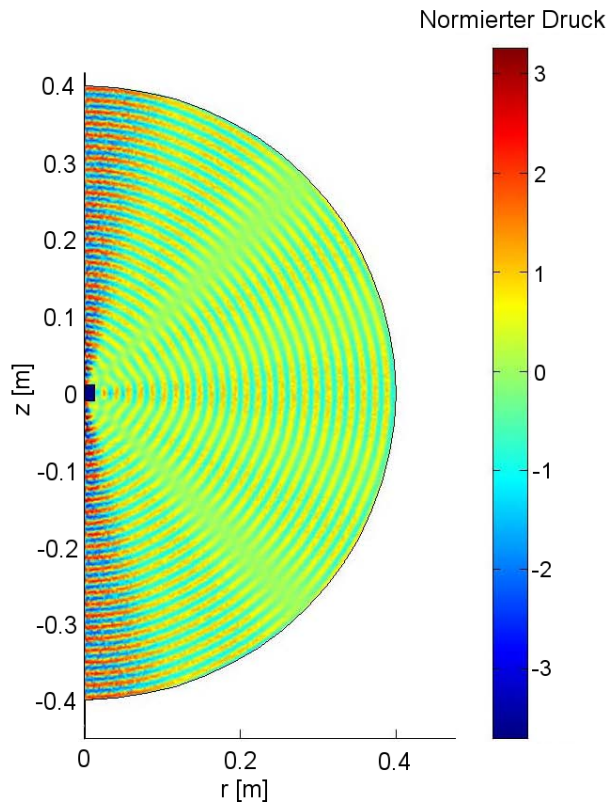


Abb. 5.4: Realteil des Druckfelds eines Piezozylinders mit Radius 12.5 mm und Höhe 20 mm bei Anlegen einer Spannung von 1 V. Das Druckfeld wurde mit dem Abstand vom Ursprung multipliziert. Das schwarze Quadrat am Ursprung ist der Piezo.

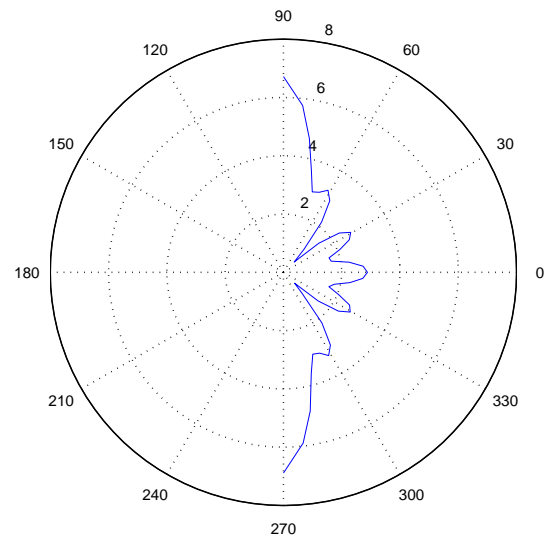


Abb. 5.5: Winkelabhängigkeit der Druckamplitude (Polardiagramm) aus Abbildung 5.4 extrahiert. Bei Null Grad strahlt der Piezo in Radialrichtung ab. Bei 90° in Längsrichtung.

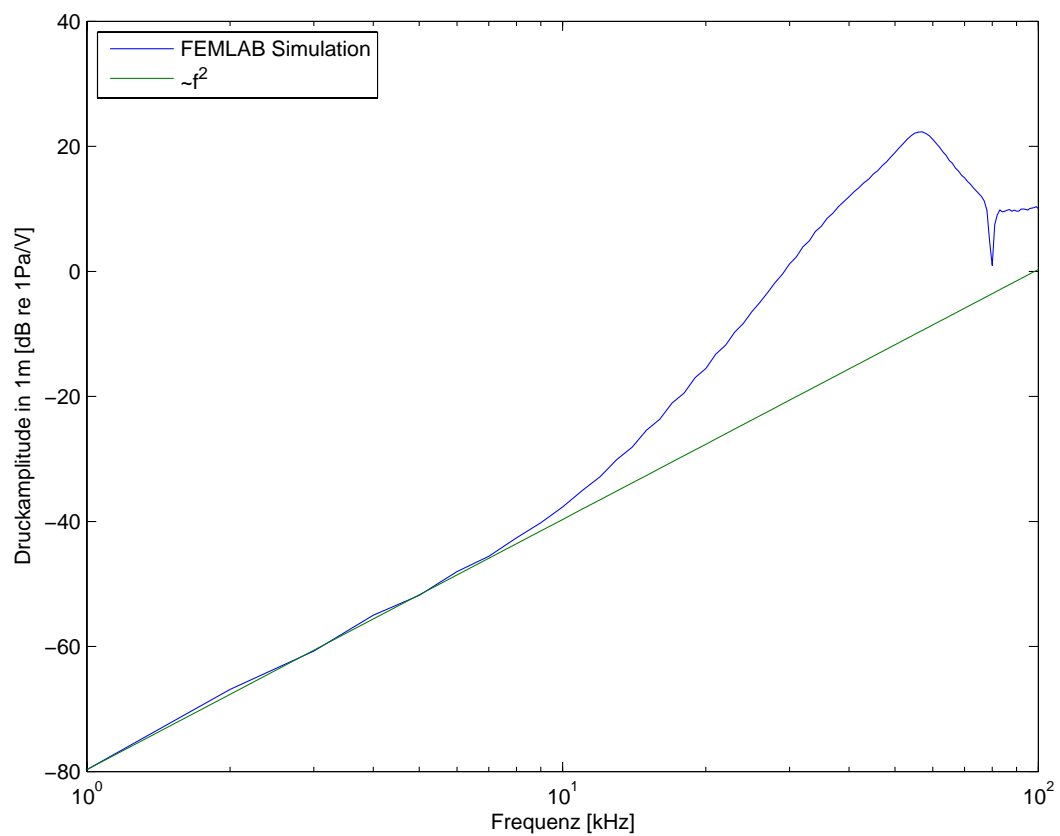


Abb. 5.6: Transferfunktion beim Senden: Aufgetragen ist die Druckamplitude in 1 m Abstand vom Schallzentrum bei senkrechter Abstrahlung (blau). Das  $f^2$ -Verhalten für niedrige Frequenzen ist mit aufgetragen (grün).

## 6 Interferometrische Messung der Verschiebung

Die durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen wurden anhand von Messungen verifiziert. Zu diesem Zweck wurden die makroskopisch zugänglichen Eigenschaften des Piezos vermessen. Diese Messungen beinhalten neben den elektrischen Eigenschaften auch die mechanischen Verschiebungen.

Die Verschiebungen der Piezos wurden mit einem Interferometer bestimmt. Hierzu wurde ein optisches Messgerät zur Messung im Bereich von Nanometern, ein Interferometer, gebaut. Es wurde dabei weitgehend auf Freistrahloptiken verzichtet, um die Bauweise möglichst kompakt zu halten. Ähnliche Interferometer finden bei der Atomic Force Microscopy (AFM) Verwendung, wo sie den Abstand des Cantilevers zum Messkopf ermitteln [91, 92].

Ziel dieses Kapitels ist es, zum einen den verwendeten Aufbau des optischen Interferometers und zum anderen dessen Funktionsweise und Kalibration zu erklären. Im Anschluss werden die Messergebnisse erörtert.

Der schematische Aufbau des Interferometers ist in Abb. 6.1 dargestellt. Das Herzstück des Interferometers ist ein faseroptischer Strahlteiler. Zum Betreiben des Interferometers wurde ein Monomode Strahlteiler verwendet. Dabei handelt es sich um einen Strahlteiler, wie er in ANTARES für den optischen Datentransfer Verwendung findet: Ein (2-1) Strahlteiler mit Teilungsverhältnis von 0.75 und 0.25. Der Kerndurchmesser beträgt  $9\mu m$ . Solche Glasfasern sind in der Telekommunikation gebräuchlich. Diese Fasern sind optimiert für die standardisierten Telekommunikationswellenlängen von  $1310nm$  und  $1550nm$ .

Der Aufbau aus Abb. 6.1 kann wie folgt beschrieben werden: Es wurde ein fasergekoppelter Laser mit einer Wellenlänge von  $1310\text{ nm}$  verwendet. Das in die Faser eingekoppelte Licht gelangt zum Strahlteiler. Von dort propagiert der Strahl weiter zum Faserende, wo abhängig vom Reflexionsgrad  $R_1$  der Faser ein Teil reflektiert wird. Der transmittierte Teil ( $1 - R_1$ ) wird am zu beobachtenden Objekt, dem Piezo, reflektiert (Reflexionsgrad:  $R_2$ ). Somit finden multiple Reflexionen zwischen Faserende und zu messendem Objekt statt. Hierbei wird jeweils ein Teil wieder zurück in die Faser geleitet. Die jeweiligen Teilstrahlen interferieren miteinander.

Das in die Faser zurückreflektierte Licht durchläuft wieder den Strahlteiler. Ein Teil wird zu einer Photodiode geleitet die im Infrarotbereich empfindlich ist. Der dort erzeugte Photostrom wird mit einem Stromverstärker verstärkt und die resultierende Spannung zur Intensitätsmessung des Laserlichtes ausgelesen. Der andere Teil des zurückreflektierten Lichts wird vom Strahlteiler zum Laser zurückgeleitet. Dort kann dieses Licht die spontane Emis-

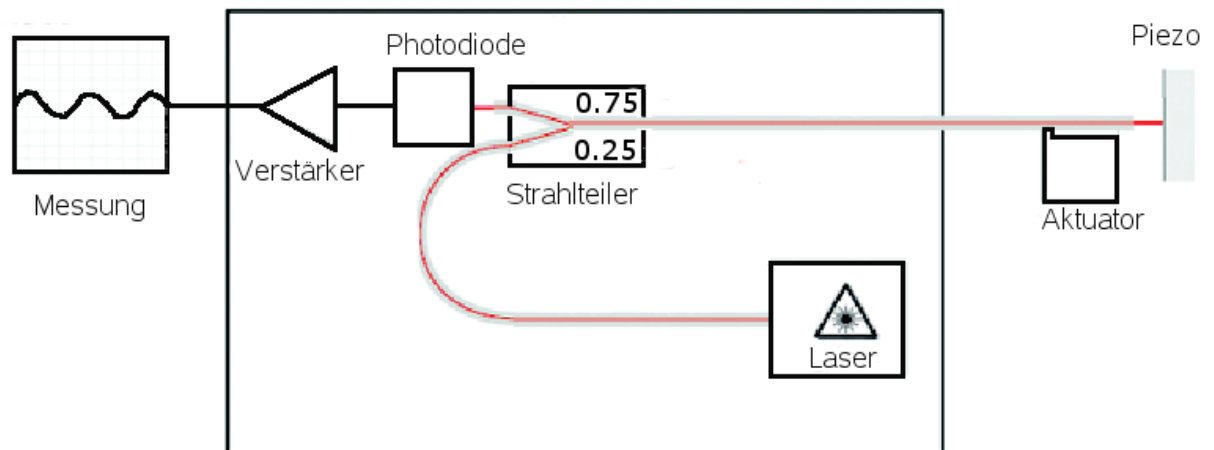


Abb. 6.1: Schematischer Aufbau des faseroptischen Interferometers

sion auslösen und somit die Ladungsinversion negativ beeinträchtigen. Es können somit unerwünschte Schwankungen im Strahlungsfluß entstehen. Um diesen Effekt gering zu halten wurde zum einen der Laser am Strahlteiler Ausgang mit geringem Teilungsverhältnis betrieben. Zum anderen wurde in dem Versuchsaufbau die in jeder Laserdiode vorhandene Photodiode für die Steuerung des Lasertreibers verwendet, um den Strahlungsfluß des Laser zu stabilisieren. Bei dem verwendeten Lasertreiber handelt es sich um ein fertiges Lasertreibermodul WK2D der Firma Lasercomponents. Um das Laserlicht daran zu hindern, durch Rückkopplung die Lasermode zu zerstören, kann das Licht auch mittels eines Faraday-Rotators von der Laserdiode isoliert werden. Ein Faraday-Rotator wurde jedoch nicht angeschafft, da das System ohne optischen Isolator aufgrund des Lasertreibers sehr stabil ist, was mittels Langzeitmessung überprüft wurde.

Als Kopplungen zwischen Glasfaser und Laser bzw. Photodiode stehen verschiedene standardisierte Kopplungsmöglichkeiten zur Verfügung. Es wurden FC/APC Stecker als Faseranschluss gewählt, da diese sowohl präziser in den Koppeleigenschaften als auch sehr robust<sup>1</sup> sind. Die schräg abgeschliffene Faser (APC= Angle polished cut) wurde für die Stecker gewählt, um dort Rückreflexionen möglichst gering zu halten. Der verwendete Verstärker besitzt zwei Verstärkungsstufen und wurde eigens für diesen Zweck entwickelt und von der Elektronikwerkstatt des Physikalischen Instituts zusammengebaut. Die Photodiode ist eine IndiumGalliumArsenid Photodiode und ist damit in der Lage, die Wellenlänge des Laserlichtes von 1310 nm zu detektieren.

Um eine gute Funktionsweise des Interferometers zu gewährleisten, muss sichergestellt sein, dass das Faserende, mit dem gemessen wird, einen sauberen Schliff aufweist. Nur so kann es als Spiegel wirken. Diesbezüglich wurden verschiedene Methoden getestet. Manuelles Isolieren und gezieltes Brechen durch Vorätzen mittels Flusssäure brachte brauchbare, aber kei-

<sup>1</sup>Viele Koppelvorgänge verändern die optischen Eigenschaften des Steckers nicht.

ne reproduzierbaren Ergebnisse. Mit einem handelsüblichen Faserschneider konnten schnell brauchbare und insbesondere reproduzierbare Ergebnisse erzielt werden. Zur Überprüfung, ob der Schnitt der Faser gelungen ist, wurde der Laser und die Ausleseeinheit (Photodiode, Verstärker und Spannungsmesser) bereits vor dem Schneiden angeschlossen. So konnte ein direkter Vergleich vor und nach dem Schnitt durchgeführt werden. Für den verwendeten Verstärker erwies sich bei maximalem Verstärkungsfaktor eine Erhöhung um 1.5 V als Indiz für einen guten Schnitt. Es stellte sich heraus, dass gerade geschliffene Steckverbinder (FC-PC-Stecker) bereits als Spiegel verwendet werden können. Der Aussenradius der Schutzschicht (engl. cladding) ist jedoch so dick, dass ein sehr nahes Heranfahren an den zu messenden Piezo erschwert ist, weshalb das selbst geschnittene Faserende für Messungen verwendet wurde.

Der Aufbau wurde auch mit Multimode Fasern und Strahlteiler getestet. Diese erwiesen sich jedoch nicht als praktikabel. Die Multimodefasern besitzen einen Kerndurchmesser von  $62.5 \mu\text{m}$ . Dieser Kerndurchmesser ermöglicht mehrere optische Ausbreitungswege innerhalb der Glasfaser. Dadurch kommt es zum einen schon innerhalb der Glasfaser zu zufälligen Interferenzen zwischen verschiedenen Lichtwegen, wodurch die Visibilität<sup>2</sup> für die angestrebten Messungen viel zu gering ist.

Die eigentlichen Messungen wurden an einem schwingungsgedämpften Tisch vorgenommen. Hierzu wurde ein Granitstein auf einen mit Luft gefüllten Fahrradreifen gestellt. Die schwere Masse des Steins wirkte als Tiefpass, um hohe Störfrequenzen zu unterdrücken. Der Schlauch wirkte dabei als Feder des Tiefpasses. Später wurde vom Lehrstuhl für Festkörperphysik ein optischer Tisch bereitgestellt. Durch die erhöhte Masse dieses Tisches wurde die Tiefpasswirkung verbessert.

Um Störeffekte weiter zu reduzieren, wurde ein PI-Regler entwickelt und gebaut<sup>3</sup>. Unerwünschte niederfrequente Schwankungen ( $< 100 \text{ Hz}$ ) der Photodiodenspannung werden hierbei über den Aktuator<sup>4</sup> des Interferometers nachgeregelt und kompensiert. Der PI-Regler versucht, ein Signal konstant zu halten. Dies wird durch eine Kombination aus einer proportionalem Nachregelung (Daher „P“) vom Steuersignal (hier: Photodiodenspannung) und dem integrierten Steuersignal „I“ mit einer regelbaren Zeitkonstanten realisiert. Der integrale Teil wird hier benötigt, um ein Überspringen zu vermeiden und somit den Regelkreis zu stabilisieren<sup>5</sup>. Der Regelkreis läuft dabei über einen Leistungsverstärker, um die zur Ansteuerung des Aktuators notwendige Spannung liefern zu können.

---

<sup>2</sup>Visibilität ist definiert als  $\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ ;  $I_{max}$  und  $I_{min}$  sind hierbei die Amplituden des Interferenzmaximums bzw. Minimums.

<sup>3</sup>Hierbei war die elektronischen Werkstatt des Physikalischen Instituts beim Zusammenbau von großer Hilfe.

<sup>4</sup>Ein Aktuator besteht aus vielen dünnen gestapelten, parallel verschalteten Piezoelementen. Mit diesen können relativ große Auslenkungen präzise angesteuert werden.

<sup>5</sup>Für sehr schnelle Schaltvorgänge kann darüber hinaus noch ein differentieller Teil „D“ für einen PID-Regler hinzugenommen werden.



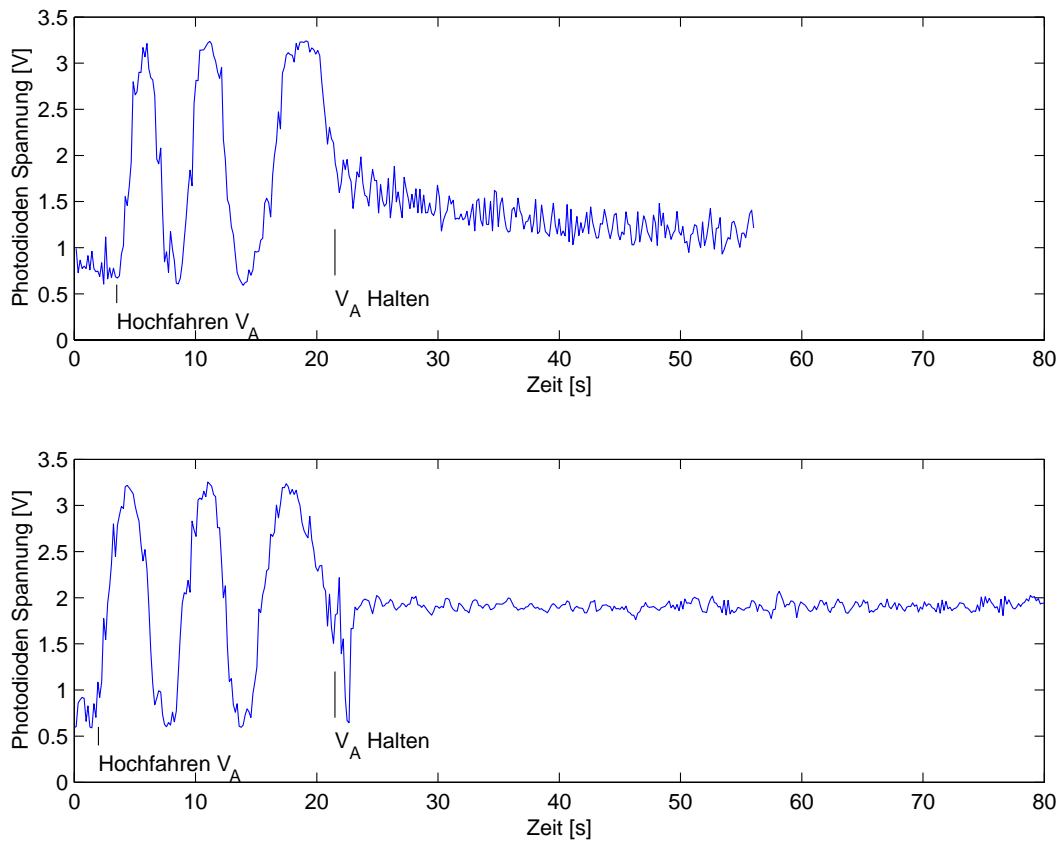


Abb. 6.2: Es wird jeweils zuerst durch Anlegen der Aktuatorspannung  $V_A$  die Glasfaser zum Messobjekt bewegt und das Interferenzbild gemessen. Bei einem Wert zwischen Maximum und Minimum wird  $V_A$  nicht weiter verändert. Der resultierende Photospannungswert wird im unteren Bild durch den Regelkreis stabilisiert, im oberen nicht. Dort ist der Piezocreep klar ersichtlich.

Der PI-Regelkreis dient aber nicht nur dazu, tiefe Frequenzen durch externe Störsignale auszugleichen. Wird am Aktuator eine Spannung angelegt, so wird die Verschiebung nur langsam eingestellt (Piezocreep). Auch Temperaturschwankungen dehnen die Glasfaser und den Piezo und wirken sich in der Messung störend aus. Beim Nachstellen mit dem Aktuator ist weiter die Hysterese zu berücksichtigen, die nicht in die Piezogleichungen eingeht. Die Hysterese ist eine Folge der Nichtlinearität des allgemeinen Deformationstensors und folgt demnach nicht aus den linearisierten Piezogleichungen. Die Nichtlinearität macht sich bei den Aktuatoren durch den großen Stellweg bemerkbar. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Piezokeramiken sind diese jedoch nicht weiter relevant. Der Piezocreep, die Hysterese und als auch zum Teil die Temperaturschwankungen werden durch den PI-Regler kompensiert. Der Unterschied mit und ohne den Regelkreis ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Nach Einschalten des PI-Reglers ist ein Überschwinger im Signal zu sehen, das vermutlich von elektromagnetischer

Einkopplung herrührt, aber nicht weiter stört.

## 6.1 Theorie und Kalibration des Interferometers

Die Interferenz findet bei der verwendeten optischen Anordnung (Abbildung 6.1) zwischen Faserende und Messobjekt statt. Zur Berechnung der Intensität wird der elektrische Feldstärkevektor betrachtet. Zunächst propagiert eine elektromagnetische Welle mit der Intensität  $I_0$  zum Faserende. Diese wird beschrieben durch  $E = \sqrt{I_0} e^{i(\omega t + kx)}$ . Hierbei sind  $\omega$  die Kreisfrequenz des Lichtes,  $k$  die Wellenzahl des Lichtes,  $t$  die Zeit und  $x$  der Ort der Welle. Zunächst findet eine Reflexion an der Glasfaser statt. Der Reflexionskoeffizient  $R_1$  von Glas zu Luft beträgt  $R_1 \approx 0.04$ . Für die Amplitude des elektrischen Feldes gilt nach der ersten Reflexion:  $A_A = \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{I_0}$ . Der restliche Lichtstrahl wird transmittiert. Davon wird ein Teil an dem Messobjekt reflektiert, das mit einem Goldplättchen beklebt ist. Der Reflexionskoeffizient  $R_2$  von Gold beträgt  $R_2 \approx 0.9$ . Nach erneuter Transmission von Luft in das Glas koppelt ein weiterer Teilstrahl zu dem direkt reflektierten in die Glasfaser. Dieser weist einen Gangunterschied von  $2x_a$  auf. Dabei ist  $x_a$  die absolute Strecke vom Glasfaserende zum Piezo. Die Amplitude für diesen zweiten Teilstrahl beträgt  $A_0 = (1 - R_1)\sqrt{R_2}\sqrt{I_0}$ . Es können beliebig viele weitere Teilstrahlen durch weitere Reflexion am Faserende und am Gold hinzukommen. Für deren Amplituden gilt jeweils  $A_n = A_0(R_1R_2)^{\frac{1}{2}n} |n \in \mathbb{N}$ . Es muss über alle Teilstrahlen, welche die Faser zurücklaufen, phasenrichtig summiert werden, was in einer geometrischen Reihe resultiert:

$$E = A_A e^{i(\omega t + kx)} + A_0 e^{i(\omega t + kx + 2\pi \frac{2x}{\lambda})} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sqrt{R_1 R_2} e^{i2\pi \frac{2x}{\lambda}} \right)^n. \quad (6.1)$$

Nach kurzer Rechnung folgt für das Betragsquadrat des elektrischen Feldes, das der Intensität entspricht die letztendlich gemessen wird:

$$|E|^2 = A_A^2 + \frac{A_A A_0 [2(1 - \sqrt{R_1 R_2}) - 4 \sin^2 \frac{2\pi x_a}{\lambda}] + A_0^2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2 \frac{2\pi x_a}{\lambda}} \quad (6.2)$$

Die Gleichung 6.2 entspricht dem erwarteten Interferenzmuster für den Fall, dass der Austrittswinkel des Laserstrahls beim Verlassen der Glasfaser null Grad beträgt. Dadurch, dass der tatsächliche Abstrahlwinkel fünf Grad beträgt, treten geometrische Modifikationen des obigen Modells auf, die vom absoluten Abstand der Glasfaser vom Messobjekt abhängen. Um dies in das oben angegebene Modell zu integrieren, ist das Verhältnis der ausgeleuchteten Fläche auf dem zu messenden Piezo und der Fläche des Glasfaserkerns relevant. Es muss demnach  $R_2$  mit diesem Verhältnis multipliziert werden, da durch den Abstrahlwinkel zusätzliche geometrische Verluste auftreten und deshalb weniger Intensität bei einer Reflexion in die Faser zurückgekoppelt wird (siehe Abbildung 6.3). Es resultiert ein effektiver

Reflexionsgrad am Messobjekt  $R'_2$ :

$$R'_2 = \frac{r_{Faser}^2 \pi}{(2x_a \tan(\alpha) + r_{Faser})^2 \pi} R_2. \quad (6.3)$$

Hierbei ist  $r_{Faser}$  der Radius des Glasfaserkerns und  $\alpha$  der halbe Abstrahlwinkel.

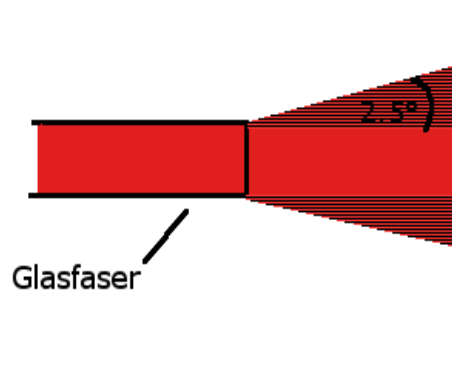


Abb. 6.3: Veranschaulichung der zusätzlichen Verluste bei der Reflexion aufgrund der Geometrie. Rot gestreift ist der Teil des Lichts, der nicht mehr in die Faser gekoppelt wird; Rot ist der Teil des Lichts, der zur Interferenz beiträgt. Der halbe Austrittswinkel mit  $2.5^\circ$  ist ebenfalls eingezeichnet.

Zur Überprüfung dieser Theorie wurde eine automatisierte Messung erstellt. Ein VBA-Skript<sup>6</sup> betreibt sowohl einen Motion Controller als auch das Oszilloskop. Wie bereits erwähnt, entspricht die Strecke von einem Maximum zum benachbarten Maximum der halben Wellenlänge des verwendeten Laserlichts. Der verfügbare Motion Controller besitzt eine Auflösung von  $0.1 \mu\text{m}$ , so daß bei einer Wellenlänge von  $1330 \text{ nm}$  nur knapp sieben Abtastpunkte pro Interferenzmuster zur Verfügung stehen. Um eine höhere Abtastrate zu erreichen wurde zum Test des oben angegebenen Modells ein fasergekoppelter Laser der Max-Planck-Forschergruppe verwendet, der sowohl eine größere Wellenlänge ( $\lambda = 1533 \text{ nm}$ ), als auch eine größere Kohärenzlänge besitzt. Das angegebene Modell beschreibt das Interferenzmuster hinreichend gut (Abbildung 6.4). Es ist noch anzumerken, dass anhand dieser Messung durch Fouriertransformation die Wellenlänge des verwendeten Lasers extrahiert werden kann. Dies ist ebenfalls in Abbildung 6.4 dargestellt.

Die Kalibration des Interferometers ist nötig, da der absolute Abstand vom Messobjekt nicht bekannt ist. Die Kalibration erfolgt prinzipiell durch Messung der Signalstärken eines Interferenzmaximums  $I_{Max}$  und des benachbarten Interferenzminimums  $I_{Min}$ , sowie der Messung von  $R_1 I_0$  das dem Photodiodensignal bei sehr großem Abstand zum Messobjekt

<sup>6</sup>VBA: Visual Basic for Applications unter Excel

entspricht. Maximum und Minimum werden hierbei mit Hilfe des im Interferometer integrierten Aktuators durch Anlegen einer entsprechenden Aktuatorspannung angesteuert. Es kann dann für die betrachtete Viertel Wellenlänge (Abstand Maximum zu Minimum) auf den Einfluss geometrischer Effekte verzichtet werden. Es folgt dann ein effektiver Wert für den Reflexionskoeffizient am Messobjekt  $R'_2$  zu:

$$R'_2 = \frac{1}{R_1} \left( 1 - \frac{2(\sqrt{I_{Min}} - \sqrt{R_1 I_0})}{\sqrt{I_{Min}} - \sqrt{I_{Max}}} \right)^2 \quad (6.4)$$

Hieraus kann prinzipiell mit Gleichung (6.3) der absolute Abstand berechnet werden. Es ist jedoch lediglich der relative Abstand von einem Referenzpunkt von Interesse. Ein geeigneter Referenzpunkt ist derjenige zwischen Interferenzmaximum und Minimum mit der größten Steigung, da dort das Interferometer am sensitivsten ist. Dieser ist jedoch schwer zu finden, ohne die Werte für die Kalibration direkt am Messplatz auszuwerten. Als Referenzpunkt wird deshalb die Mitte zwischen Maximum und Minimum gewählt. Dieser Punkt wird vor der Messung mittels des Aktuators angesteuert und entspricht dem Nullpunkt ( $0'$  in Abbildung 6.5). Hier ist keine Auslenkung des Messobjekts bei der Messung vorhanden. Dieser Abstand wird mittels des PI-Reglers stabilisiert. Dazu wird dem PI-Regler die aktuelle Photospannung als Referenzsignal übergeben. Das Interferometer ist nun kalibriert und für die Messung des Piezos bereit. Da sich ein Aktuator beim Anlegen einer Gleichspannung nahezu linear verhält, kann auch die komplette Kalibrationskurve mit dem Aktuator aufgenommen werden, wie in Abbildung 6.5 gezeigt.

Es sind lediglich kleine Änderungen vom Referenzpunkt von Interesse, deshalb kann die Kalibrationskurve um diesen Punkt linearisiert werden, wodurch die nötige Invertierung wesentlich einfacher ist. In der Literatur wird von vornherein eine Kosinusfunktion für die Kalibrationskurve verwendet [92], welche dann linearisiert wird. Diese Kosinusfunktion ist gegeben durch:

$$I = \frac{I_{Max} - I_{Min}}{2} \left( \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda} x \right) + 1 \right) + I_{Min}. \quad (6.5)$$

Diese ist ebenfalls mit der entsprechenden Linearisierung in Abbildung 6.5 aufgetragen. Die Steigung durch den Kosinusfit stimmt mit der Linearisierung des Fits mittels geometrischer Reihe sehr gut überein. Sowohl der relative Fehler der Linearisierung der Kosinusfunktion zur Fitfunktion mittels der geometrischen Reihe, als auch der relative Fehler von linearisierter geometrischer Reihe zum Fit mittels geometrischer Reihe ist für die typisch gemessenen Auslenkungen von maximal  $\frac{\lambda}{100}$  relativ gering, wie man in Abbildung 6.6 sehen kann. Für weitere Kalibrationen wurde demzufolge auf den linearisierten Kosinusfit zurückgegriffen, bei dem lediglich eine Messung von Maximalintensität und Minimalintensität benötigt wird. Die Intensität vom Bezugspunkt  $0'$  (Mittelwert von Maximum und Minimum) ist dann mit dieser Linearisierung gegeben durch:

$$I = -\frac{I_{Max} - I_{Min}}{2} \frac{4\pi}{\lambda} x. \quad (6.6)$$

Die zur Kalibration verwendeten Messungen des Maximums und des Minimums entsprechen Messungen der Gleichspannung nach dem Verstärker der Photodiode. Um nun die Auslenkung des zu vermessenden Piezos zu erhalten, muss an den Piezo entweder ein breitbandiges Spannungssignal angelegt werden, oder es muss ein Frequenzsweep von Sinusschwingungen durchgeführt werden. Bei beiden Methoden kommt der Frequenzgang des Verstärkers der Photodiode zum Tragen und kann das Signal verfälschen. Der Frequenzgang des Verstärkers wurde deshalb mittels eines Frequenzsweeps in einer automatisierten Messung ermittelt, um Effekte durch den Verstärker entfalten zu können (Abbildung 6.7).

In der beschriebenen Kalibration ist der Verstärkungsfaktor bei einem konstanten Photostrom bereits enthalten. Bei Messungen der Auslenkung eines Piezos bei verschiedenen Frequenzen ist demnach der frequenzabhängige Verstärkungsfaktor des Photostromverstärkers relativ zur Gleichspannungsverstärkung relevant. Der gemessene Verstärkungsverlauf aus Abbildung 6.7 wird durch den Niederfrequenzanteil dividiert. Der Kehrwert der so erhaltenen komplexwertigen Kurve muss mit dem Messergebnis der Verschiebung multipliziert werden, um die Frequenzcharakteristik des Verstärkers herauszurechnen. Dieser frequenzabhängige Faktor und die Phase sind in Abbildung 6.8 dargestellt.

## 6.2 Messungen mit dem Interferometer

Um einen Piezo zu vermessen, muss dieser zunächst mit einer dünnen Goldschicht versehen werden, um die Reflektivität bei der Messung zu erhöhen. Hierzu wird ein Glasplättchen mit Gold bedampft. Ein Teil dieses Glasplättchens, der wesentlich kleiner als die Oberfläche des Piezos ist, wird dann auf die zu vermessende Stelle des Piezos geklebt. Das Plättchen muss wesentlich kleiner als der Piezo sein, damit nicht die Eigenschwingungen des Plättchens vermessen werden. Diese liegen bei sehr kleinen Maßen im MHz Bereich. Es hat sich gezeigt, dass herkömmliches Goldspray, wie es im Dekorationshandel erhältlich ist, ebenfalls gute Resultate liefert. Jedoch sind durch die raue Oberfläche statistische Fluktuationen im Strahlungsfluss der reflektierten Laserstrahlen vorhanden, was zu zusätzlichem Rauschen führt. In Abbildung 6.9 ist ein Piezo bei der Messung dargestellt.

Die Frequenzantwort eines Piezos bei Anlegen von Spannung unterschiedlicher Frequenzen kann mit einer einzigen Messungen bestimmt werden. Dazu wird am Piezo weißes Rauschen als Spannung angelegt. Dadurch liegen am Piezo alle Frequenzinformationen vor. Mittels eines Netzwerkanalysators wird die am Interferometer erhaltene Photospannung abgegriffen, welche im direkten Zusammenhang mit dem Interferometer steht. Nachteil dieser Methode ist, dass mit dem verfügbaren Netzwerkanalysator<sup>7</sup> keine Phaseninformationen erhalten werden konnte.

Es kann, wie bei der Impedanzmessung, ein breitbandiges Signal verwendet werden, um mittels Fourieranalyse den Frequenzgang zu erhalten. Es wurde zur weiteren Vermessung

---

<sup>7</sup>Danke an den Lehrstuhl von Herrn Prof. Müller für die Bereitstellung

jedoch auf die Frequenzsweeps zurückgegriffen, da dann die Phaseninformation nicht durch Rauschen verfälscht wird und deshalb leichter ermittelt werden kann. Die Messung am Mittelpunkt der Stirnfläche des bisher ausführlich diskutierten Piezozylinders mit den Abmessungen  $R = 12.5$  mm und  $H = 20$  mm ist als Beispiel für eine solche Messung in Abbildung 6.10 aufgetragen. Es ist eine hervorragende Übereinstimmung von Theorie und Messung zu erkennen.

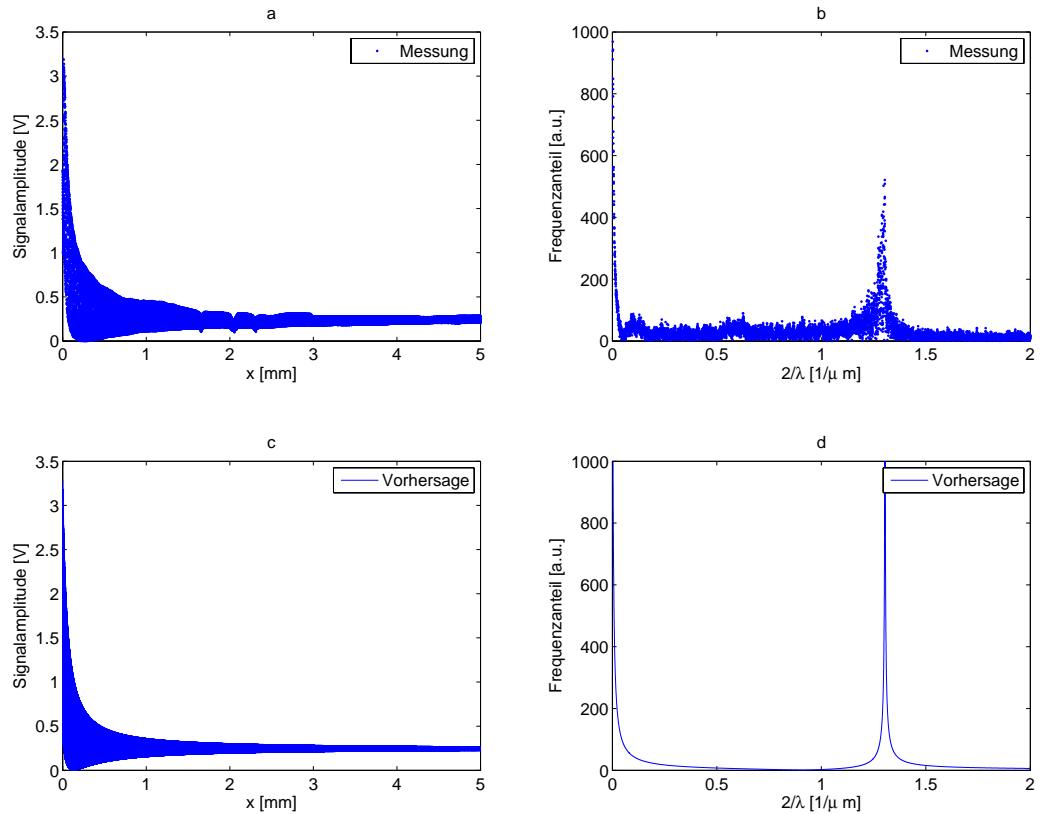


Abb. 6.4: Messung und Vorhersage des Interferenzmusters.

a: Gemessenes Interferenzmuster; gemessen wurden 50000 Messwerte. Der gesamte Verlauf wurde um das Minimum verschoben, da Streulicht in die Glasfaser einkoppelt.

b: Spektrum des Signals aus „a“. Klar ersichtlich ist der Peak bei der Wellenlänge des verwendeten Lasers mit 1533 nm.

c und d: Vorhersage von „a“ bzw. „b“. Es wurden keine Fitparameter verwendet. Lediglich der laterale Nullpunkt wurde um  $1\ \mu\text{m}$  verschoben, da bei der Messung dieser Nullpunkt (Faser hat Kontakt zum Piezo) nicht angesteuert wurde, um die Faser nicht zu zerstören.

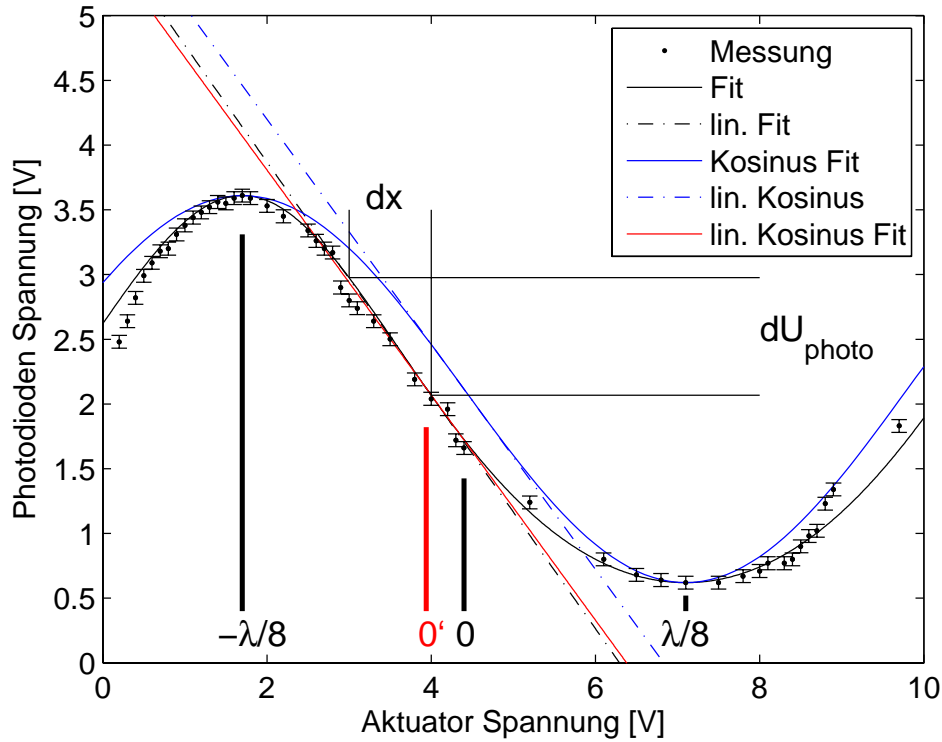


Abb. 6.5: Kalibration des Interferometers. Aufgetragen sind die Messwerte der Aktuatorspannung gegen die Photodiodenspannung (schwarze Punkte). Die Strecke zwischen Maximum und Minimum entspricht einem Viertel der Wellenlänge des verwendeten Lasers. Eingezeichnet ist weiterhin die Vorhersage aus dem Modell durch Vorgabe von Maximalwert, Minimalwert und dem Produkt  $R_1 I_0$ , wie im Text geschildert (schwarze durchgezogen) und deren Linearisierung (schwarz gestrichelt). Die blaue Linie ist der Kosinus Fit an die Messung des Interferenzminimums und Maximums. Die Linearisierung an den Mittelwert zwischen Maximum und Minimum an Kosinus Fit (blau gestrichelt) wird zu den Messwerten dieses Mittelwertes hin verschoben (rote Linie), um die Linearisierung an die Messung aus dem Kosinus Fit zu erhalten. Zur Messung wird die Spannungsänderung  $dU_{Photo}$  von diesem Referenzpunkt  $0'$  betrachtet und daraus die Auslenkung  $dx$  berechnet.



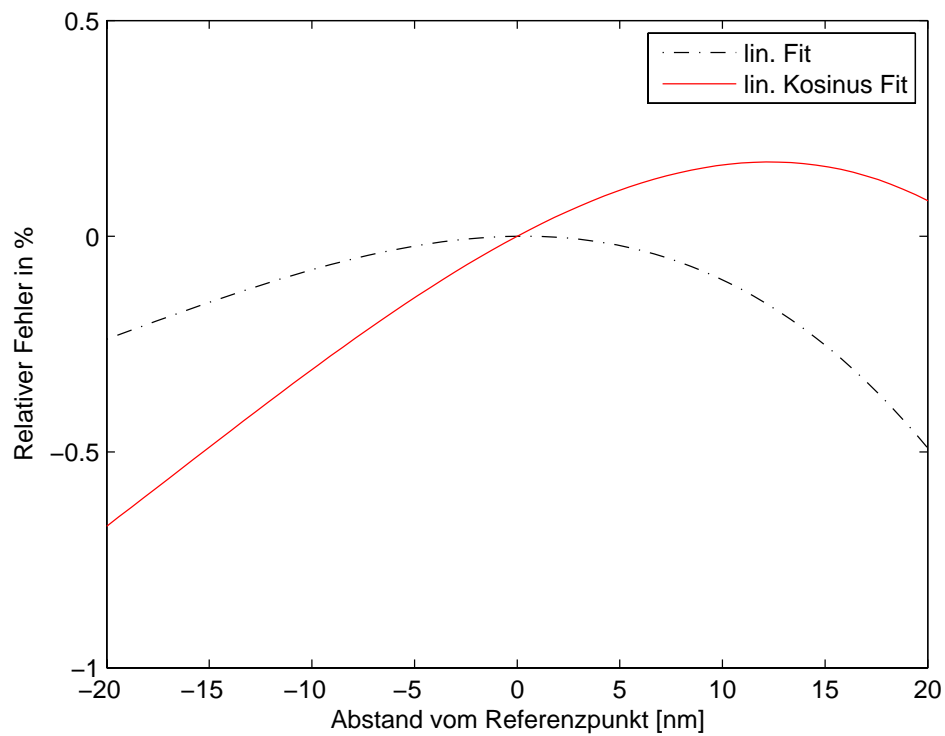


Abb. 6.6: Gezeigt ist der relative Fehler zwischen der theoretisch erwarteten Kalibrationskurve (Fit mittels geometrischer Reihe) und deren Linearisierung (schwarz gestrichelt). Weiterhin ist der relative Fehler zwischen dem linearisierten Kosinus und der theoretisch erwarteten Kurve eingezeichnet (rot).

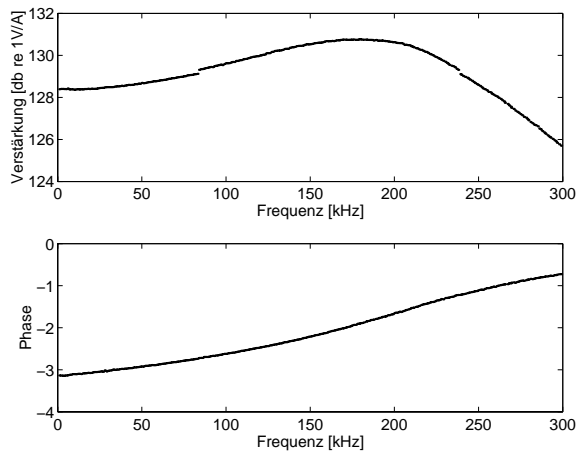


Abb. 6.7: Frequenzgang des Verstärkers der Photodiode bei den interferometrischen Messungen. *oben*: Verstärkungsfaktor des Verstärkers. *unten*: Phase des Verstärkers.

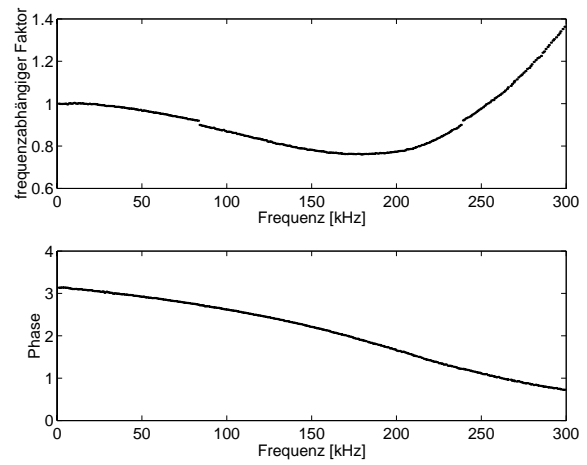


Abb. 6.8: Frequenzabhängiger Faktor zur Korrektur der Frequenzcharakteristik des Verstärkers der Photodiode (*oben*) und die zugehörige Phase (*unten*).

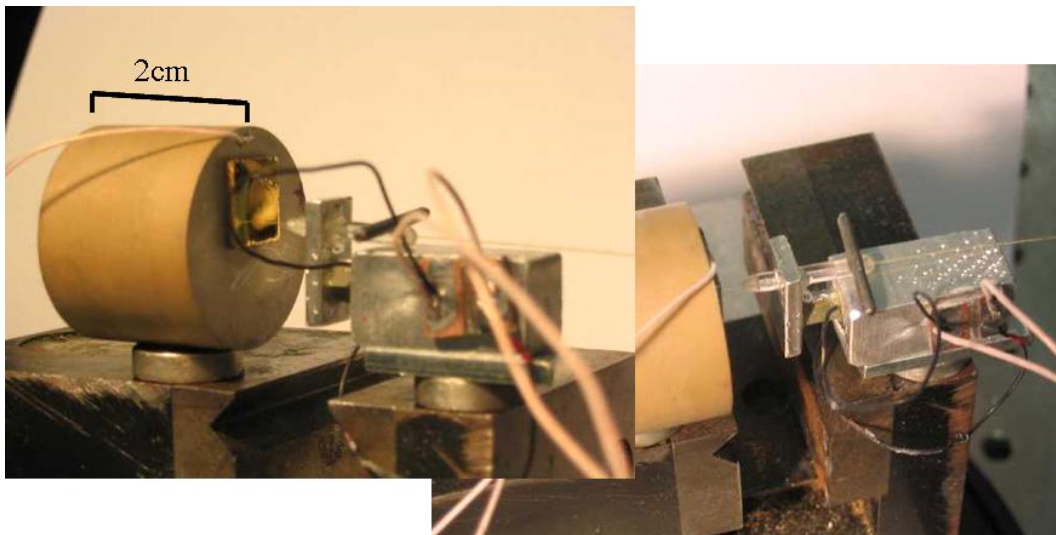


Abb. 6.9: Versuchsaufbau für die interferometrischen Messungen der Piezokeramiken.

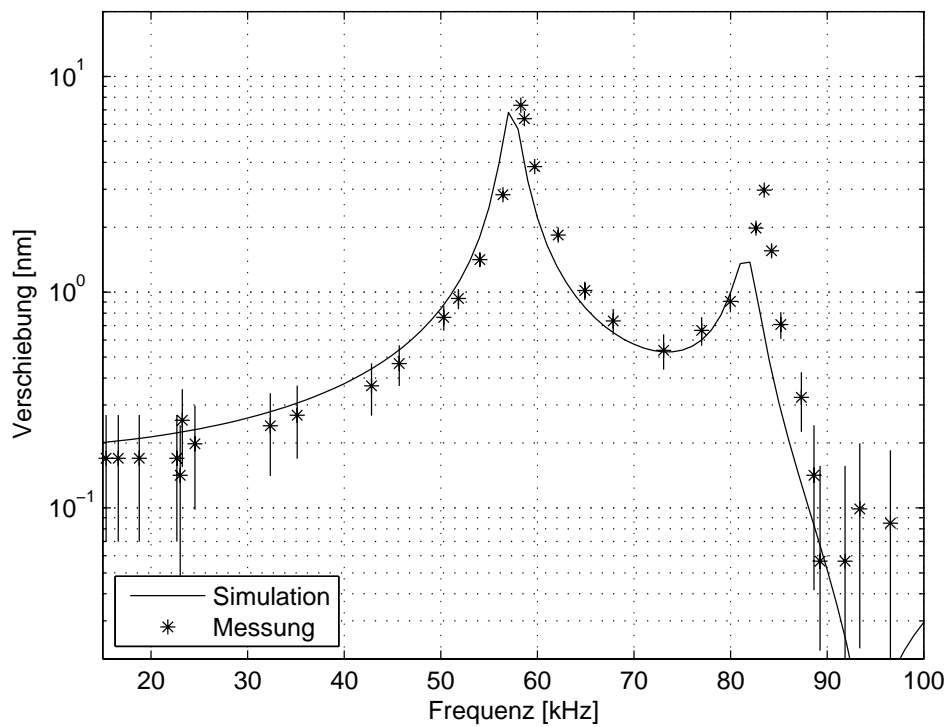


Abb. 6.10: Gezeigt ist das Ergebnis der Messung mit dem Interferometer am Beispiel des zentralen Punktes des Piezos (Sterne). Der Messfehler beträgt 0.1 nm. Das Ergebnis aus der FEMLAB Simulation ist ebenfalls aufgetragen (durchgezogene Linie).

## 7 Triggeralgorithmus für akustische Signale

In diesem Kapitel wird zunächst ein einzelnes Hydrophon als Empfänger betrachtet und die erwarteten Signaturen erörtert. Danach wird ein Triggeralgorithmus für zwei Hydrophone in Koinzidenz erarbeitet und dessen Effizienz und Reinheit wird untersucht. Alle Untersuchungen wurden an in-situ Daten aus dem AMADEUS-Experiment durchgeführt.

Es wurde bereits erläutert, dass AMADEUS ein autonomes System ist, welches mit der Line 0 des ANTARES Detektors versenkt und wieder geborgen wurde. Hierbei wurden akustische Signale aus in-situ Messungen im Meer gewonnen. Auf technische Details von AMADEUS wird nicht weiter eingegangen (Siehe dazu [93]). Für das in diesem Kapitel durchgeführte Studium wurden Signalperioden in AMADEUS mit niedrigen Signalamplituden als Rauschen definiert<sup>1</sup>. Anschließend wurden zu diesem Rauschen Signale addiert, um die Effizienz der hier vorgestellten Rekonstruktion zu erörtern. Die addierten Signale entsprechen dem durch das thermoakustische Modell vorhergesagtem Schalldruck, welcher mit der Transferfunktion der Piezokeramik und des Vorverstärkers von AMADEUS gefaltet wurde. Ein idealer Sender besitzt, wie bereits geschildert, einen quadratischen Frequenzgang. Es wird demnach die zweite Zeitableitung gesendet. Es wurde in [93] deshalb mit einem annähernd idealen Sender, welcher die Resonanz ausserhalb des relevanten Bereichs ( $> 100$  kHz) besitzt, das zweite Integral des erwarteten Signals als Spannung angelegt und das gesendete Signal mit AMADEUS aufgenommen. Die Verstärkung des Vorverstärkers wurde in AMADEUS so gewählt, dass sich eine Sensitivität von  $1 \text{ V/Pa}$  ergibt. Bei senkrechtem Schallempfang resultiert das in AMADEUS erwartete Signal aus Abbildung 7.1. Es ist klar ersichtlich, dass durch die Charakteristik des Piezos und des Vorverstärkers die bipolare Signatur stark verzerrt wird. Das Signal ist invertiert, da ein invertierender Verstärker verwendet wurde.

Es wurde untersucht, in wie weit die Ähnlichkeit verauschter Signale mit dem erwarteten Signal ausreicht, um auf derartige Signale zu triggern. In die Rauschdaten wurden hierzu die Signaturen aus Abbildung 7.1 addiert und es wurde versucht, diese zu lokalisieren. Dieses Triggern wird durch Berechnung des gefensternten Korrelationskoeffizienten  $r(t')$  erreicht. Mit einer Fensterfunktion  $w(t)$  ist das Ähnlichkeitsmaß zwischen dem Referenzsignal  $f(t)$  (erwartetes Signal in AMADEUS Abbildung 7.1) und dem Signal mit Rauschen  $g(t)$  gegeben

---

<sup>1</sup>Dies kann Eigenrauschen des Systems bzw. Meeresrauschen sein

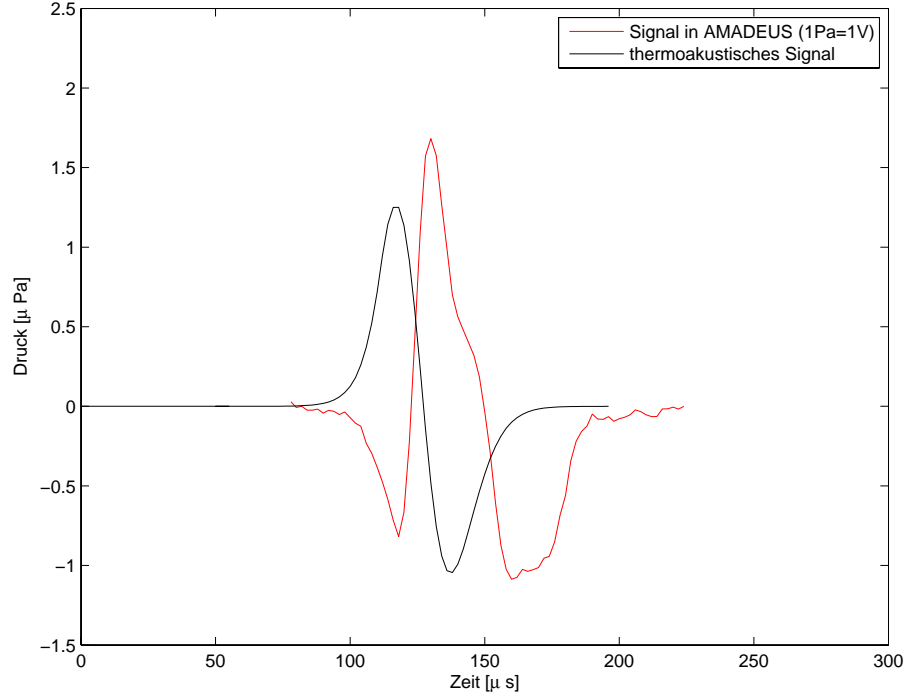


Abb. 7.1: Aufgetragen ist das durch das thermoakustische Modell erwartete Signal eines hadronischen Schauers in 400 m Abstand senkrecht zur Schauerachse (schwarz) und das durch diesen Schauer in AMADEUS erwartete Signal (rot).

durch:

$$r(t', i) = \frac{\int_{\mathbb{R}} dt w(t - t_0 * i) f(t) g(t + t')}{\left( \int_{\mathbb{R}} dt w(t - t_0 * i) f^2(t) \int_{\mathbb{R}} dt w(t - t_0 * i) g^2(t + t') \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.1)$$

Als Fensterfunktion wurde ein Rechteckssignal mit einer Dauer von  $256 \mu\text{s}$  gewählt. Dies entspricht etwa der 2.5-fachen Signaldauer. Die Zeit  $t_0$  entspricht der jeweiligen Verschiebung von einem Zeitfenster zum benachbarten Fenster. Die Länge von  $t_0$  wurde mit  $144 \mu\text{s}$  so gewählt, um einen großen Überlapp von  $112 \mu\text{s}$  zu erhalten. Dadurch ist sichergestellt, dass sich immer ein vollständiges Signal in einem Zeitfenster befindet. Die Amplitude wird in dem beschriebenen Ähnlichkeitsmaß nur insofern berücksichtigt, als dass durch ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis der Trigger besser anspricht.

Die beiden zeitlichen Muster  $g(t)$  und  $f(t)$  werden als gleich betrachtet, wenn sie sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, der die Amplitudenunterschiede wiedergibt. Das

ist genau dann der Fall, wenn in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung Gleichheit auftritt [94]:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dt f(t)g(t+t') \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} dt f^2(t) \int_{\mathbb{R}} dt g^2(t+t'). \quad (7.2)$$

Anders ausgedrückt muss der Korrelationskoeffizient  $r(t', i)$  im jeweiligem Zeitfenster maximiert werden.

Der Korrelationskoeffizient kann Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annehmen, wobei maximale Korrelation bei einem Wert von  $1$  vorliegt. In jedem Fenster wird demnach lediglich das Maximum dieses Korrelationskoeffizienten betrachtet und als Indiz genommen, ob das entsprechende Zeitfenster ein Signal enthält. Es sei noch angemerkt, dass durch die Lage dieses Maximums nicht nur auf das Zeitfenster getriggert werden kann. Es kann auch das Signal in dem entsprechendem Zeitfenster rekonstruiert werden.

Für das verwendete Rauschsignal ist jeweils das Maximum des Korrelationskoeffizienten mit dem hinzugefügten Signal bzw. ohne für alle berechneten Zeitfenster in einem Histogramm zusammengefasst (Abbildung 7.2). Es wurden dort Signalamplituden von  $80 \text{ mPa}$  addiert. Dies entspricht bei einer Detektion in  $400 \text{ m}$  Abstand einer Energie des hadronischen Schauers von  $5 \cdot 10^{18} \text{ eV}$  bzw. einer anfängliche Neutrinoenergie von  $6 \cdot 10^{19} \text{ eV}$ .

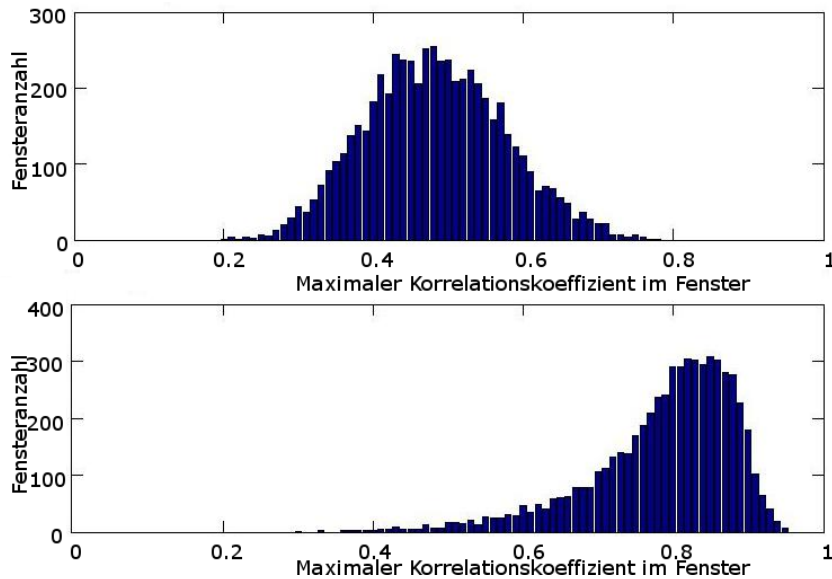


Abb. 7.2: Maximalwerte der Kreuzkorrelation des Rauschens mit dem erwartetem Signal für alle Zeitfenster (oben) und unten dasselbe mit in jedem Fenster addiertem Signal von  $80 \text{ mPa}$ .

Es ist ersichtlich, dass ein Triggern durch die Ähnlichkeit der Signatur möglich ist. Desweiteren ist anzumerken, dass lediglich das Maximum des Korrelationskoeffizienten in dem

entsprechendem Zeitfenster benötigt wird. Hier gibt es schnelle iterative Verfahren, wodurch der Rechenaufwand deutlich reduziert werden kann [94].

Eine Verbesserung kann durch Koinzidenz mit einem weiteren Kanal erreicht werden. In AMADEUS standen fünf Kanäle zur Verfügung, wovon ein Kanal eine geringere Verstärkung aufwies. Die gewählte Größe des Zeitfensters von  $256 \mu\text{s}$  für die Korrelation kann bei der Analyse von zwei Kanälen beibehalten werden, da mit dieser Fenstergröße die geometrischen Maße von AMADEUS (Zylinder mit Durchmesser 15.8 cm) kleiner als die entsprechende Signallaufzeit in Wasser (38.4 cm) ist. Werden die Maxima des Korrelationskoeffizienten der beiden Kanäle aus den jeweiligen Zeitfenstern mit Signal bzw. ohne Signal gegeneinander aufgetragen, so ergibt sich eine verbesserte Möglichkeit zu triggern (Abbildung 7.3). Als Schnitt wurde ein Kreis mit einem bestimmten Schnittradius  $R_s$  gewählt. Der Mittelpunkt des Kreises ist dabei um die Werte mit optimaler Korrelation, also um die Eins. Alle rekonstruierten Werte innerhalb des Kreises passieren den Schnitt.

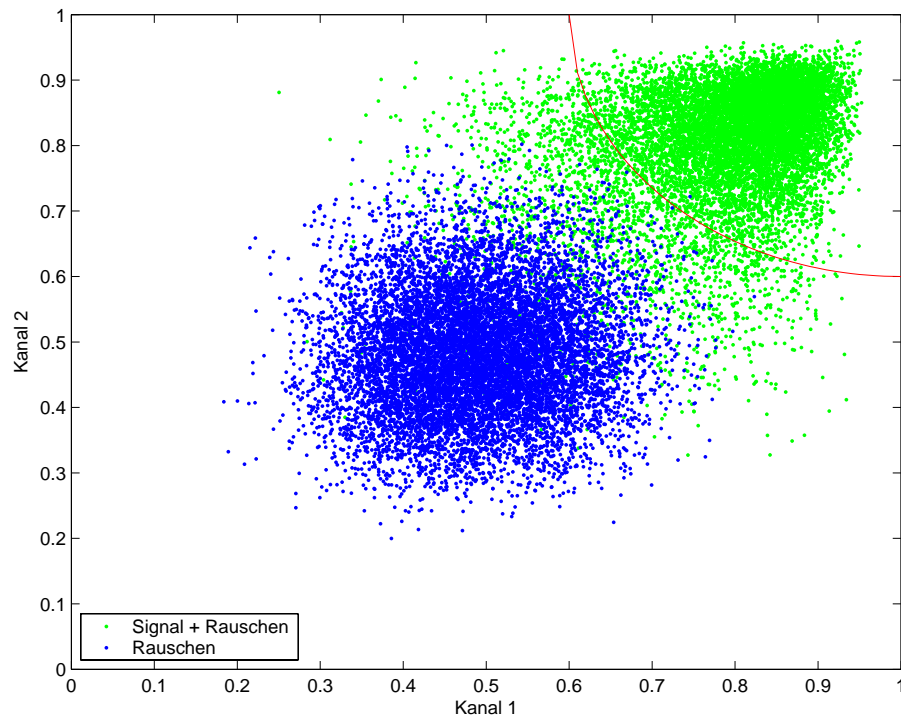


Abb. 7.3: Aufgetragen sind die Maxima der Kreuzkorrelation des Rauschens mit dem erwarteten Signal aus zwei Kanälen (grün) bzw. in jedem Fenster der beiden Kanäle addiertem Signal (blau). Eine Möglichkeit eines Schnittes ist rot dargestellt.

Wird die Position des Maximums innerhalb eines Fensters mitgespeichert, so kann die absolute Lage des Signals im Zeitfenster bestimmt werden. Eine Rekonstruktion der Abso-

lutposition entspricht einem zweiten Schnittkriterium. Für diese beiden Schnitte wurde die Effizienz und die Reinheit in Abhängigkeit des Signal-Rausch-Verhältnisses untersucht. Die Effizienz ist dabei definiert als der Quotient aus der Anzahl der richtig rekonstruierten Signale zur Zahl der insgesamt addierten Signale. Die Reinheit entspricht dem Quotienten aus der Anzahl der richtig rekonstruierten Signale und der Anzahl der Signale, die nach dem Korrelationsschnitt noch vorhanden sind<sup>2</sup>. In Abbildung 7.4 ist das Ergebnis dieser Untersuchung aufgetragen.

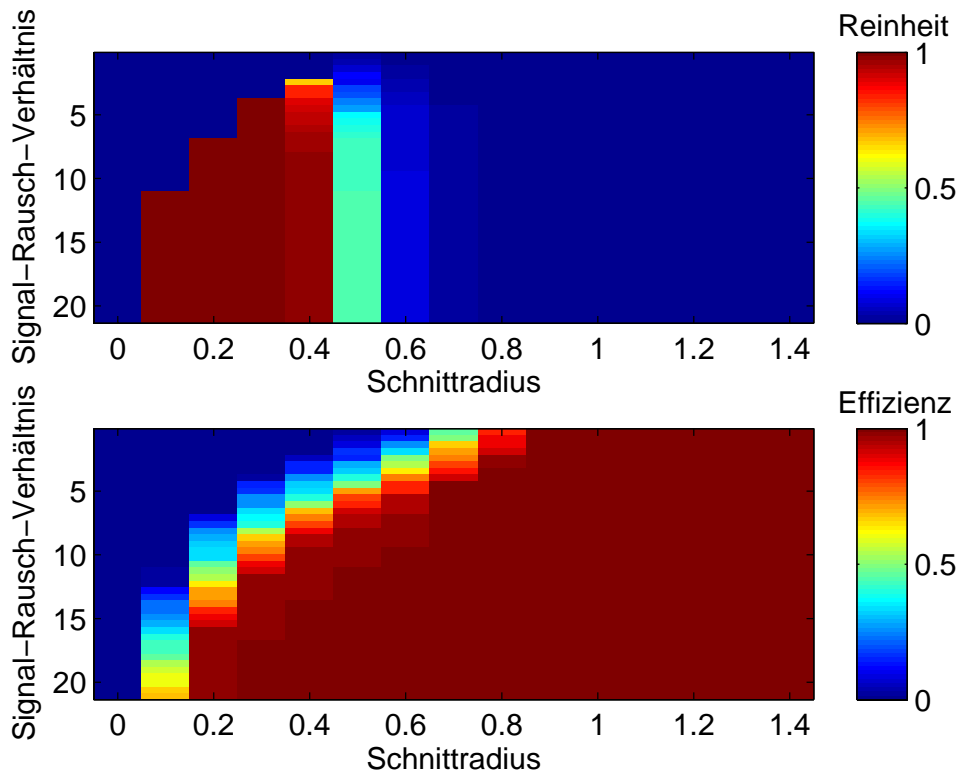


Abb. 7.4: Reinheit (oben) und Effizienz (unten) der im Text beschriebenen Ähnlichkeitsanalyse für verschiedene Signal-Rausch-Verhältnisse.

Die Ähnlichkeitsanalyse mittels Korrelation ist, wie die Untersuchung zeigt, stark vom Signal-Rausch-Verhältnis abhängig. Es ist also wünschenswert, das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern. Dies gelingt z.B. durch das sogenannte Beamforming. Hierbei werden die Signale aus jeder Richtung (entsprechend der erwarteten Ankunftszeit) phasenrichtig überlagert. Das unkorrelierte Rauschen wird dadurch unterdrückt, wohingegen das korrelierte Signal verstärkt wird. Das Rauschen lässt sich so bei Verwendung von  $N$  Hydrophonen um einen Faktor  $\sqrt{N}$  reduzieren. Alternative Möglichkeiten der Datenaus-

<sup>2</sup>Falls keine Signale nach dem Schnitt vorhanden sind, wurde die Reinheit auf Null gesetzt.



wertung, wie das beamforming oder gefensterte Zeit-Frequenz-Analysen werden aktuell in Diplomarbeiten untersucht. Bei der gefensterten Zeit-Frequenz-Analyse wird eine Fouriertransformation in einzelnen Zeitfenstern verwendet, um in dem resultierenden Spektrum nach dem erwarteten Neutrinosignal zu suchen. Diesbezüglich ist es sinnvoll, bereits vor der Datenauswertung geeignete Filter zu benutzen, welche das Frequenzband einschränken. Dies ist auch bei der Integration der akustischen Komponenten in ANTARES geplant. Durch Beamforming sollen die erhaltenen Signale dann nachträglich untersucht werden. Mit der beschriebenen Methode lassen sich lokale Trigger definieren. Aufgrund dieser lokalen Trigger lassen sich Rekonstruktionsalgorithmen wie in [31] beschrieben realisieren.

## 8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt das Studium von Piezokeramiken, welche als sensitive Elemente in der akustischen Astroteilchenphysik Verwendung finden sollen. Ziel ist dabei, anhand dieser Piezokeramiken Unterwassermikrophone, sogenannte Hydrophone, zu entwickeln. Diese sind zum Nachweis thermoakustischer Schallpulse optimiert. Die zu detektierenden Schallpulse werden dabei im Meer von neutrinoinduzierten Teilchenschauern erzeugt.

Es gibt zahlreiche theoretische Modelle, um kosmische Objekte zu beschreiben, welche in der Lage sind, Teilchen auf Energien von  $10^{20}$  eV oder höher zu beschleunigen. Der Teilchenfluss bei diesen Energien ist jedoch sehr gering, so dass bis heute nur einige wenige Teilchen nachgewiesen wurden. Bei diesen Teilchen geht man davon aus, dass es sich um Protonen handelt. Bei der Beschleunigung von Hadronen auf solch hohe Energien werden auch hoch-energetischere Neutrinos erzeugt. Sie entstehen durch Wechselwirkung der Protonen mit der umgebenden Materie bzw. Strahlung. Diese Neutrinos machen sich nur über die schwache Wechselwirkung bemerkbar, so dass sie nach Verlassen des kosmischen Beschleunigers die Erde ungestört erreichen. Im Vergleich zu Protonen, die in intergalaktischen Magnetfeldern abgelenkt werden und mit Restgas streuen können, tragen die Neutrinos demnach die ursprüngliche Richtungs- und Energieinformation. Ihr Nachweis gewährt somit insbesondere tiefe Einblicke in die Mechanismen von kosmischen Beschleunigern.

Die ausschlaggebende Eigenschaft, welche Neutrinos als Informationsträger auszeichnet, nämlich der geringe Wechselwirkungsquerschnitt, erschwert jedoch deren Nachweis unheimlich. Es wird eine enorme Menge an Detektionsmaterial benötigt, um den Nachweis von Neutrinos überhaupt zu ermöglichen. Hierbei bieten sich natürliche Detektionsmedien an, wie das Eis der Antarktis oder Wasser der Ozeane. Bereits existierende Neutrinoobservatorien verwenden diese Medien für den optischen Nachweis von Neutrinos. Hierbei wird das Cerenkovlicht der Sekundärteilchen nachgewiesen. Aus der Verteilung der Cerenkovphotonen können die Richtung und die Energie der Neutrinos bestimmt werden. Die Abschwächlänge des blauen Cerenkovlichts in Wasser beträgt etwa 60 m, so dass diese Länge die Instrumentierungsdichte bestimmt. Akustische Wellen dagegen besitzen in dem relevanten Frequenzbereich eine Abschwächlänge von etwa 1 km. Es lässt sich somit mit der akustischen Detektion bei gleicher Sensoranzahl ein wesentlich größeres Volumen instrumentieren.

Den Grundstein für die erwähnte akustische Detektion legte G. A. Askaryan 1957. Er beschrieb die Schallerzeugung ionisierender Teilchen in einer Flüssigkeit und schlug deren

Verwendung bei der Detektion von Teilchenschauern vor (1972). Die Energie des Teilchenschauers wird innerhalb eines schmalen Zylinders in Form von Wärme abgegeben. Dies führt zu einer plötzlichen Ausdehnung der Flüssigkeit und es breitet sich ein bipolares Signal senkrecht zur Schauerachse aus. Zur Verifikation dieser Theorie wurde seitdem eine Anzahl an Experimenten durchgeführt. Hierzu wurden aufgrund der bekannten Energie deposition vorwiegend Protonenstrahlen sowie Laserstrahlen verwendet. Als Ergebnis dieser Studien läßt sich festhalten, dass die akustische Detektionsmethode in der Astroteilchenphysik angewendet werden kann und somit ein alternatives Nachweisverfahren zur Ergänzung bisheriger Methoden bereitstellt. Dies motivierte viele Physiker, diese neue Detektionsmethode zur Suche nach neutrinoinduzierten Schauern weiter voranzutreiben. Als Beitrag zu diesen Forschungen wurden in dieser Arbeit die sensitiven Elemente der Detektoren, die Piezokeramiken, näher beleuchtet.

Dazu wurden in Simulationen die Gleichungen des Piezos gelöst, um dessen makroskopische Eigenschaften zu untersuchen. Von Interesse sind dabei die Impedanz und die Auslenkung des Piezos bei Spannungszufuhr. Dies entspricht der elektrischen und der mechanischen Antwort eines Piezos beim Senden. Beim Empfang mit einem Piezo sind die resultierende Spannung bzw. die elektrische Ladung unter Krafteinwirkung von Interesse. In den vorliegenden Studien wurden als Piezogeometrie sowohl Zylinder, als auch Hohlzylinder untersucht. Es konnte ein Zusammenhang zwischen der elektrischen und der mechanischen Antwort des Piezos hergestellt werden. Die gemittelte Auslenkung des Piezos über die Elektrode kann aus der Kenntnis der Impedanz berechnet werden. Hierzu wird die Impedanz durch einen elektrisch äquivalenten Schaltkreis gefittet, um daraus die mechanisch analogen Größen zu extrahieren. Darüber hinaus wurde der Einfluss der Piezogeometrie auf die Resonanzstrukturen untersucht. Es stellte sich heraus, dass bei Zylindern sowohl Höhenmoden, als auch Radialmoden vorhanden sind. Bei Hohlzylindern existieren drei Schwingungsmoden: Neben der Wanddickenschwingung und der Höhenschwingung ist bei den Hohlzylindern auch eine Ringmode vorhanden, in der der Piezo in Radialrichtung schwingt. Aus der Kenntnis der Lage der Resonanzfrequenzen und der Sensitivität außerhalb dieser Frequenzen konnten Implikationen für den Bau von Hydrophonen zur akustischen Teilchendetektion gewonnen werden. In weiteren Simulationen wurde die Schallabstrahlung zur Emulation von Neutrinosignaturen untersucht. Bei Ankopplung eines Piezos an Wasser kann durch die Simulation die Richtungscharakteristik des Piezos extrahiert werden. In der Simulation wird dabei ein Kräftegleichgewicht an der Grenzfläche des Piezos angesetzt. Der Druckgradient ist dann proportional zur Beschleunigung des Piezos.

Die durchgeführten Simulationen wurden in Messungen verifiziert. Hierzu wurden zum einen Messungen der Impedanz mit einem Impedanz-Phase-Gain Analysator durchgeführt. Zum anderen wurde die Auslenkung mittels optischer Interferometrie vermessen. Dafür wurde ein fasergekoppeltes Interferometer gebaut und eine Kalibrationsmethode dieses Interferometers wurde erarbeitet. Des Weiteren wurde ein System zur Stabilisierung der Messappa-

ratur mittels eines Regelkreises entwickelt. Sowohl die Messungen der Impedanz, als auch der Auslenkung, sind in guter Übereinstimmung mit der Simulation.

Neben den Simulationen und Messungen der piezoaktiven Elemente wurde eine Studie eines Triggeralgorithmus mittels Korrelationsmethoden durchgeführt. Hierbei wurden in-situ Messungen mit niedriger Signalamplitude verwendet, um das akustische Rauschen zu beschreiben. Zu diesen Daten wurden Signale addiert und es wurde untersucht, wie gut eine Rekonstruktion möglich ist. Hierzu wurde das Maximum des Korrelationskoeffizienten von verrauschten Signalen mit dem erwarteten Signal in Zeitfenstern für je zwei Hydrophonkanäle betrachtet. Ist dieser Korrelationskoeffizient in beiden Kanälen entsprechend gut, so kann auf das Signal getriggert werden.

Basierend auf den Ergebnissen dieser Arbeit und unter Abwägung kommerziell verfügbarer Piezokeramiken ist das sensitive Element eines optimaler akustischer Neutrino-Detektors eine zylinderförmige PZT-5A Keramik mit einem Durchmesser von 5 mm und einer Höhe von 10 mm. Die Ansprechschwelle eines einzelnen Detektors wird durch das Eigenrauschen, vor allem aber durch das Meeresrauschen, begrenzt und liegt bei einer Neutrinoenergie von einem PeV, wenn der korrespondierende Schauer in 400 m Abstand entstanden ist.



## 9 Summary

A study of piezoceramics as sensitive elements for the use in acoustical astroparticle physics is presented in this work. This study aims to develop underwater microphones (hydrophones) in order to detect thermoacoustic sound pulses, which are produced in neutrino interactions. There are several theoretical models describing objects able to accelerate particles up to  $10^{20}$  eV or even higher. The flux at this energies is very low, so only few particles have been detected so far. It is believed that this particles are protons. The acceleration of hadrons up to these energies is accompanied with the production of high energetic neutrinos. This neutrinos are produced by interactions of the protons with surrounding matter or radiation. The neutrinos only interact weakly so they reach the earth undisturbed. Compared to protons, which are deflected by intergalactic magnetic fields on one side and are scattered in residual gas on the other, the neutrinos bear the original information about direction and energy. Their detection gives deep insight in the mechanisms of cosmic accelerators.

The property which characterise the neutrinos as information carrier, the small cross section of the weak interaction, makes their detection difficult. An enormous amount of detection material is necessary in order to be able to detect the neutrinos. Here one has natural huge media like sea water or antarctic ice at hand. Existing neutrino telescopes use this media to search for neutrinos using the cherenkov light of the secondary particles as a common approach for detection. With the spatial and temporal distribution of this cherenkov photons at hand the direction and energy of the incident neutrino can be calculated. The attenuation length for the blue cherenkov light in water of approximately 60 m sets the density for instrumentation of the detectors. Acoustic waves exhibit an attenuation length of approximately 1 km in the relevant frequency range. The acoustic detection is therefore able to instrument a larger volume with the same amount of sensors.

In 1957 G. A. Askaryan described sound production of ionizing particles in fluid media and suggested to use this method for detection of particle cascades in 1972. An ultra high energy neutrino which interacts in a fluid produces a particle cascade which dissipates its energy in a narrow cylinder in the medium by heating this region. This leads to an expansion of the medium which propagates in an bipolar sonic shape perpendicular to the cascade. For the verification of this theory several experiments have been made since with the result, that the acoustical method can be used in astroparticle physics and offers a new method for detection. This result motivated several physicists to further advance this new method for searching neutrinoinduced cascades. As a contribution for this studies the sensitive elements

of the acoustical detectors, the piezo ceramics, are under investigation in this work. Therefore the equations of a piezo are solved in simulations to derive its macroscopic properties. Especially the impedance and the displacement of the piezo as response to applied voltage are of interest. This is correlated with the electrical and mechanical answer of a piezo when sending. When receiving the resulting voltage or the electrical charge due to applied stress are of interest. In the present studies cylinder and hollow cylinder were analyzed. Insight of the interrelationship between the displacement and the impedance is given. The mean displacement of the piezo over the electrode can be derived from the knowledge of the impedance. Therefor the impedance is fitted with an equivalent circuit, to derive the mechanical analog properties. Furthermore the effect of the piezo geometry to the resonance frequencies is explored. For the cylinder a length expansional mode and a radial mode is found. In a hollow cylinder there is a length expansional mode, a wallthickness mode and a hoop mode. The calculation reveals at which sizes one mode changes to another. From the knowledge where these frequencies are located and the sensitivity for low frequencies implications for constructing hydrophones were derived. Further calculations were made to reveal the sound field produced by a piezo. This simulations were made to emulate neutrino signals in order to have an calibration source at hand. The coupling of a piezo to water allows one to extract the direction characteristics of a piezo. In the simulation a impuls balance at the boundaries of the water and the piezo is applied which leads to the correct description. Then the pressure gradient is proportional to the acceleration of the piezo. The simulations are verified in measurements. Therefore measurements of the impedance with a phase-gain-analyser are made. On the other side the displacement is measured using optical interferometry. For this measurement an optical fibre coupled interferometer was built and a calibration method for this interferometer was acquired. Furthermore a system to stabilize the measuring apparatus with a control circuit was developed. The measurement of the impedance on one side as well as the measurement of the displacement on the other are in good agreement with the simulation.

Beside the simulation and measurements of the piezosensitive elements a study for a triggeralgorithm using the crosscorrelation is introduced. In this study in situ measurements with low signal amplitudes are used to describe noise. To this noise data signals were added and it was examined how well the signals can be reconstructed. For reconstruction the maximum of the correlation coefficient in seperate time windows of two local hydrophone channels is calculated. Is this coefficient good in both channels, the signal can be triggered. Based on the results of this work and taking commercial available piezoceramic materials into account, the optimal sensitive element of an acoustic neutrino detector is a PZT-5A disc with a diameter of 5 mm and a height of 10 mm. A single detector of this kind is able to detect neutrinos with energies more then one PeV as it is limited by self noise, but mainly by the noise of the sea.

## A Anhang

### A.1 Kinematik axialsymmetrischer starrer Körper

In diesem Kapitel wird die Bewegungsgleichung axialsymmetrisch umformuliert.

Für Zylinderkoordinaten mit Basis  $\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$  gilt

$(x_1 = r; x_2 = \phi; x_3 = z; \hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|})$ :

1.  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \delta_j^i$
2.  $\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{a}}_i = 0$
3.  $\frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_i = 0$
4.  $\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_2$
5.  $\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_2 = -\mathbf{a}_1$
6.  $\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\mathbf{a}}_3 = 0$

Es folgt mit

$$\text{div} \underline{\mathbf{T}} = \left( \mathbf{a}^i \frac{\partial}{\partial x^i} T_{lm} \hat{\mathbf{a}}_l \hat{\mathbf{a}}_m \right)$$

nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{div} \underline{\mathbf{T}} &= \hat{\mathbf{a}}_1 \left( \frac{\partial}{\partial r} T_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} T_{r\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} T_{rz} \right) \\ &+ \hat{\mathbf{a}}_2 \left( \frac{\partial}{\partial r} T_{r\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} T_{\phi\phi} + \frac{2}{r} T_{r\phi} + \frac{\partial}{\partial z} T_{\phi z} \right) \\ &+ \hat{\mathbf{a}}_3 \left( \frac{\partial}{\partial r} T_{rz} + T_{rz} + \frac{\partial}{\partial \phi} T_{\phi z} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$



## A.2 Modenkonzersion bei verschiedenen Materialien

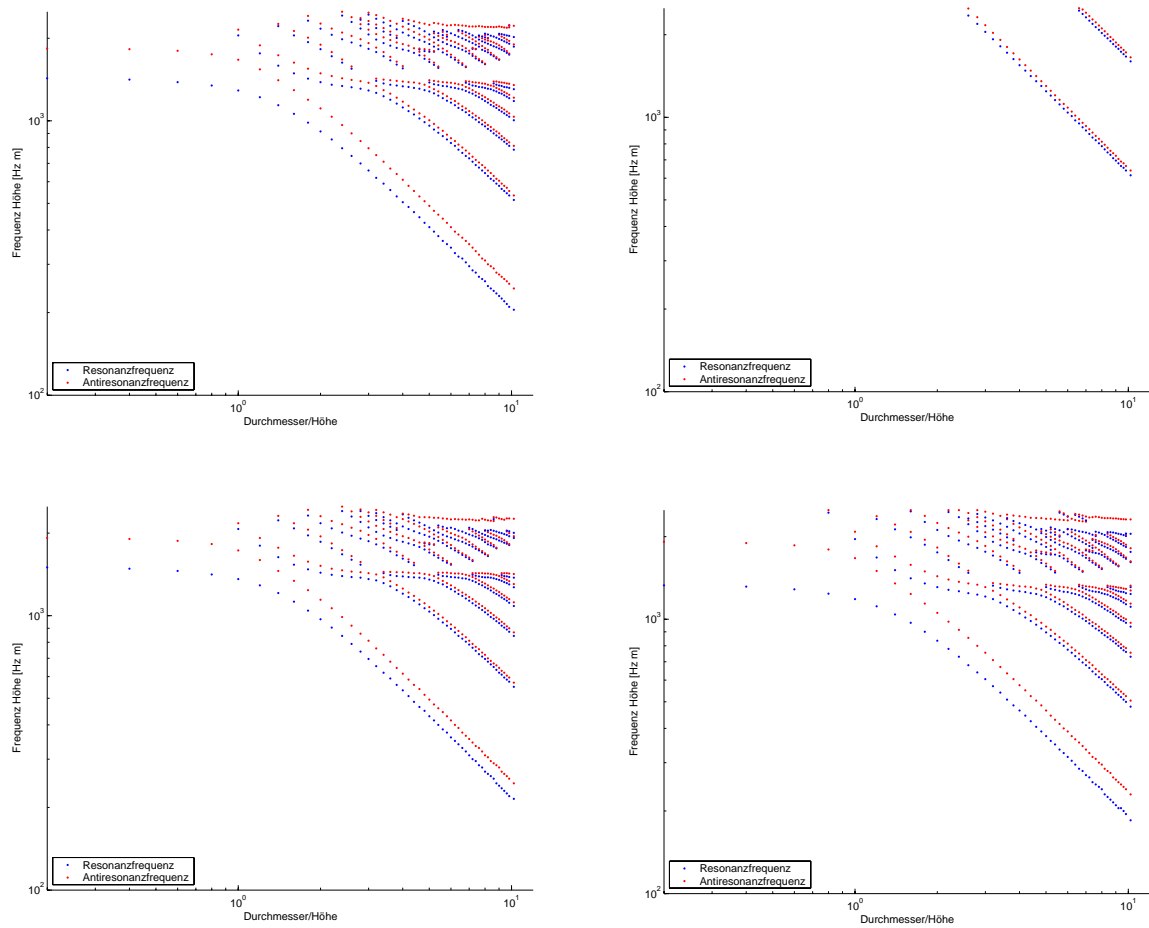


Abb. A.1: Simulation der Modenkonzersion bei Aluminium-Nitrit (oben links), PXE5 (oben rechts), PZT4 (unten links) und PZT5H (unten rechts).

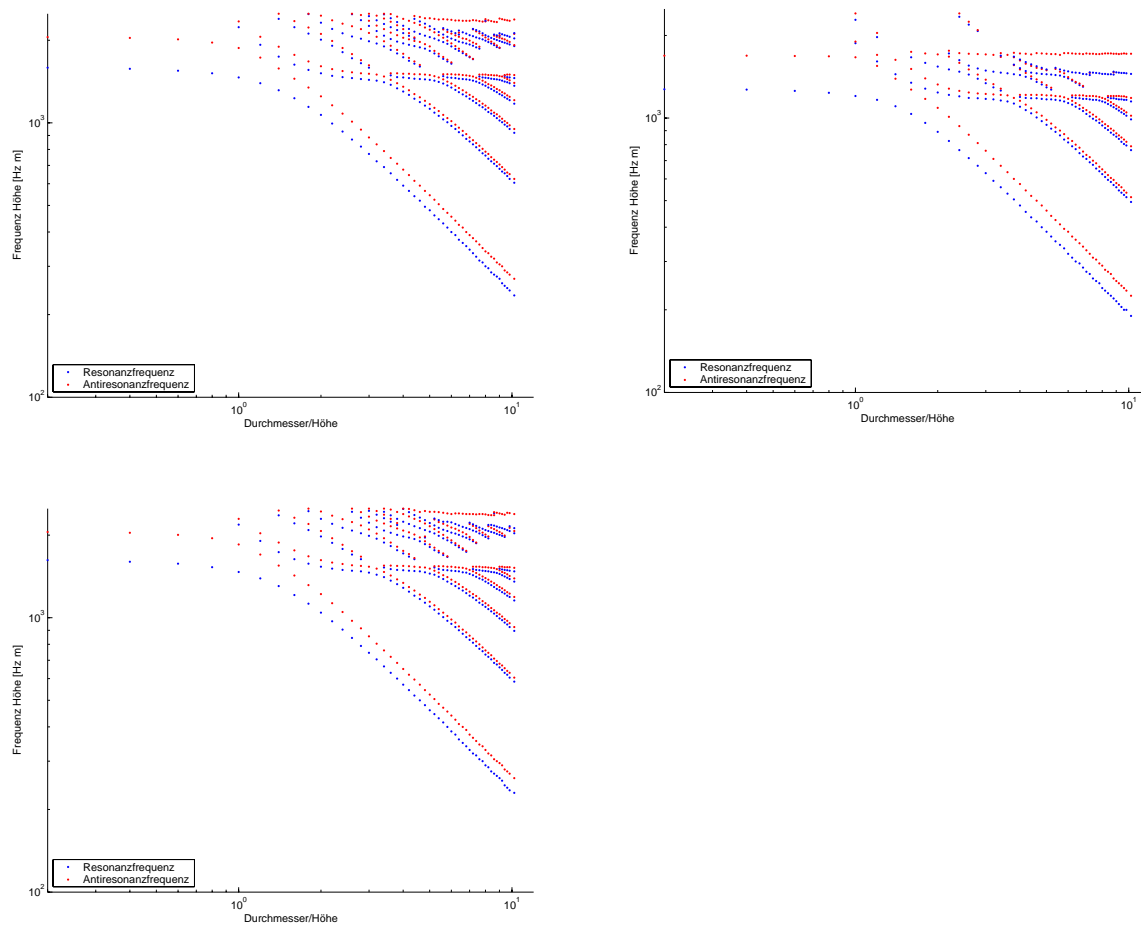


Abb. A.2: Simulation der Modenkonzersion bei PZT5J (oben links), PXE7A (oben rechts) und PZ84 (unten).

# Literaturverzeichnis

- [1] V. F. Hess, *Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen*. Friedr. Vieweg+ Sohn, Braunschweig, 1926.
- [2] A. Haungs, Journal of Physics G **29**, 809 (2003).
- [3] J. Cronin, et al., Scientific American **64**, 62 (1998).
- [4] M. Boezio, et al., Physical Review D **67**, 072003 (2003).
- [5] B. Bertucci, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements **100**, 124 (2001).
- [6] M. Pearce, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **113**, 314 (2003).
- [7] S. Inoue, et al., Astrophysical Journal **463**, 555 (1996).
- [8] K. Mannheim, Phys. Rev. D **48**, 2408 (1993).
- [9] H. Athar, et al., Physical Review D **62**, 103007 (2000).
- [10] H. Athar, C. S. Kim und J. Lee, Preprint hep-ph/0505017, 2005.
- [11] E. Fermi, Physical Review **75**, 1169 (1949).
- [12] E. Fermi, The Astrophysical Journal **119**, 1 (1954).
- [13] NASA science Team. [Http://map.gsfc.nasa.gov](http://map.gsfc.nasa.gov).
- [14] H. Motz, *Berechnung von Neutrinoflüssen und erwarteten Ereignisraten in ANTARES aus Neutralino-Annihilationen in der Sonne*. Diploma Thesis, Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2005.
- [15] M. Chikawa, et al., The AGASA Collaboration, Astrophysical Journal Letters **571**, L117 (2002).
- [16] M. Ave, et al., Physical Review D **65**, 063007 (2002).
- [17] B. T. Cleveland, et al., Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **38**, 47 (1995).
- [18] M. Koshiya, Physics Reports **220**, 229 (1992).

- 
- [19] S. Fukeda, et al., Super Kamiokande Collaboration, Physical Review Letters **86**, 5651 (2001).
- [20] J. Boger, et al., The SNO Collaboration, Nuclear Instruments and Methods A **449**, 172 (2000).
- [21] K. Hirata, et al., Physical Review Letters **58**, 1490 (1987).
- [22] R. M. Bionta, et al., Physical Review Letters **58**, 1494 (1987).
- [23] E. N. Alexeyev, et al., Physical Letters B **205**, 209 (1988).
- [24] J. Stegmaier, *Optimierung akustischer Detektoren zum Nachweis hochenergetischer kosmischer Teilchen*. Diploma Thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2004.
- [25] A. Unsöld und B. Baschek, *Der neue Kosmos 6. Auflage*. Springer Verlag, 1999.
- [26] K. Greisen, Physical Review Letters **16**, 748 (1966).
- [27] G. T. Zatsepin und V. A. Kuzmin, JETP Lett. **4**, 78 (1966).
- [28] T. K. Gaisser, T. Stanev und P. V. Sokolsky, Physics Letters B **592** von **[77]** (2004). Chapter 24. Cosmic Rays. Partial update for edition 2006. URL: <http://pdg.lbl.gov>.
- [29] J. Bernstein, *An introduction to cosmology*. Prentice-Hall, 1998.
- [30] T. J. Weiler, Physical Review Letters **49**, 234 (1982).
- [31] T. Karg, *Detection of ultra high energy neutrinos with an underwater very large volume array of acoustic sensors: A simulation study*. Ph.D. Thesis, Universität Erlangen-Nürnberg, 2006. FAU-PI4-DISS-06-002.
- [32] J. Hodges, et al., Preprint 29th International Cosmic Ray conference Pune,101, 2005.
- [33] F. W. Stecker, *A note on high energy neutrinos from AGN cores* (unpublished). Astro-ph/0510537, 2005.
- [34] E. Waxman und J. N. Bahcall, Physical Review Letters **78**, 2292 (1997).
- [35] J. N. Bahcall und E. Waxman, Physical Review **D64**, 023002 (2001). Hep-ph/9902383.
- [36] R. Engel, D. Seckel und T. Stanev, Physical Review **D64**, 093010 (2001). Astro-ph/0101216.
- [37] Z. Fodor, S. D. Katz und A. Ringwald, Physical Review Letters **88**, 171101 (2002). Hep-ph/0105064.
- [38] S. Yoshida, et al., Astrophysical Journal **479**, 547 (1997). Astro-ph/9608186.

- 
- [39] L. Sulak, et al., Nuclear Instruments and Methods **161**, 203 (1979).
- [40] K. Graf, *Teststrahlungsmessungen zur akustischen Neutrinodetektion: Thermoakustische Schallerzeugung in Wasser*. Diploma Thesis, Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2004. Zugänglich unter: <http://www.antaes.physik.uni-erlangen.de>.
- [41] V. I. Albul, et al., Instruments and Experimental Techniques **44**, 327 (2001).
- [42] *Acoustic and Radio EeV Neutrino Detection Activities*, ed. A. Capone und G. de Bonis. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2005. Title: Preliminary results on hydrophones calibration with proton beam.
- [43] S. Schwemmer, *Testmessungen zur akustischen Neutrinodetektion mit einem Nd:YAG-Laser*. Diploma Thesis, Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2005. Zugänglich unter: <http://www.antaes.physik.uni-erlangen.de>.
- [44] M. Haltmeier, T. Schuster und O. Scherzer, Mathematical methods in the applied sciences **28**, 1919 (2005).
- [45] I. Arias und J. D. Achenbach, International journal of solids and structures **40**, 6917 (2003).
- [46] R. Nahnhauser, Nuclear Physics B- Proceedings Supplements **143**, 387 (2005).
- [47] P. B. Price, Astroparticle Physics **5**, 43 (1996).
- [48] D. Salzberg, *Status of Radio and Acoustic Detection of Ultra-High Energy Cosmic Neutrinos and a Proposal on Reporting Results* (unpublished). Arxiv: astro-ph/0501364.
- [49] Berns, Hans-Gerd, *Electro-Acoustical Subsystem in DUMAND*. Diploma Thesis, University of Washington, 1993.
- [50] L. Sulak, et al., Preprint Preprint astro-ph: 0406105, 2004.
- [51] N. Kurahashi, *SAUND news* (unpublished). E-mail comment from G. Gratta and N. Kurahashi to the participants of ARENA 2006, 7 2006.
- [52] N. G. Lehtinen, S. Adam und G. Gratta, Astroparticle Physics **17**, 279 (2002).
- [53] G. Domogatsky, *The Baikal Neutrino Project: Status Report* (unpublished). Vortrag von G. Domogatsky bei der „Neutrino 2000“ Konferenz, <http://nu2000.sno.laurentian.ca/G.Domogatsky/index.html>.
- [54] *Acoustic and Radio EeV Neutrino Detection Activities*, ed. Yu. V. Parfenov, et al.. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2005. Title: A device for detection of acoustic signals from super high energy neutrinos.

- 
- [55] L. G. Dedenko, et al., Preprint astro-ph/9705189v1, 1997.
- [56] A. V. Butkevich, et al., Physics of particle and nuclei **29** (1998).
- [57] *Hydro-acoustic detection of ultra-high and extremely high energy neutrinos*. ICRC 2001, 2001.
- [58] *Acoustic and Radio EeV Neutrino Detection Activities*, ed. Y. Karlik, et al.. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2005. Title: The converted hydroacoustic array MG-10M - A basic module for a deep water neutrino - telescope.
- [59] L. Thompson, et al., *Acoustic detection of cosmic ray neutrinos*. Proposal for acoustic detectors. Private Communication., 10 2004.
- [60] L. Thompson, *Future plans for the ACORNE collaboration* (unpublished). ARENA workshop 2006: <http://www.sheff.ac.uk/physics/arena/agenda.php>, 2006.
- [61] *Acoustic activities around Marseille and the ANTARES site*. First informal Mini-workshop on acoustic cosmic ray and neutrino detection, 11 2003. <Http://saund.stanford.edu/saund1/workshop/slides/index.html>.
- [62] *Acoustic and Radio EeV Neutrino Detection Activities: The NEMO acoustic test facility*, ed. G. Riccobene, et al.. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2005.
- [63] *Acoustic and Radio EeV Neutrino Detection Activities*, ed. R. Nahnauer und S. Böser. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., May 2005. Title: SPATS - A South Pole Acoustic Test Setup.
- [64] P. B. Price, *Acoustic wave propagation in ice and salt* (unpublished). Contribution to ARENA workshop 2005: <http://www-zeuthen.desy.de/arena>.
- [65] H. Stephani und G. Kluge, *Theoretische Mechanik*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995. ISBN 3-86025-284-4.
- [66] ANSI/IEEE Standards Association, IEEE **176** (1987).
- [67] Mason, *Physical Acoustics Part A*. Academic Press, 1964.
- [68] G. A. Askaryan, Sov. J. Atom Energy **3**, 921 (1957).
- [69] G. A. Askaryan, Nuclear Instruments and Methods **164**, 267 (1979).
- [70] G. E. Sieger und H. W. Levevre, Physical Review A **31**, 3929 (1985).
- [71] J. Vandenbroucke, et al., *SPATS - South Pole Acoustic Test Setup; Technical Design Report*, Technical Report, SPATS, 2005.

- 
- [72] V. Niess, *Acoustic Signal Computations in the Mediterranean Sea* (unpublished). ARE-NA workshop 2006 in Newcastle, 2006.
- [73] D. Fargion, *The role of  $\nu_\tau$  ultrahigh energy astrophysics in  $km^3$  detectors* (unpublished). Arxiv:astro-ph/9704205 v1 21 Apr 1997, 1997.
- [74] L. D. Landau und I. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. **92**, 535 (1953).
- [75] L. D. Landau und I. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. **92**, 735 (1953).
- [76] A. B. Migdal, Phys. Rev. **103**, 1811 (1956).
- [77] S. Eidelmann, et al., Physics Letters B **592**, 1 (2004).
- [78] R. Gandhia, et al., Astroparticle Physics **5**, 81 (1996).
- [79] H. Allik und T. J. R. Hughes, International Journal for numerical methods in Engineering **2**, 151 (1970).
- [80] N. Abboud et al., Proc. SPIE **3341**, 19 (1998).
- [81] Y. Kagawa, et al., Smart materials and structures **10**, 389 (2001).
- [82] S. Sherrit, et al., Journal of Physics D: Applied Physics **30**, 2354 (1997).
- [83] M. Zollner und E. Zwicker, *Elektroakustik 3. Auflage*. Springer Verlag, 1993.
- [84] H. Nyquist, Physical Review **32** (1928).
- [85] G. Anton, et al., Astroparticle Physics **26**, 301 (2006).
- [86] *FE Simulations of Piezoceramic Disks with a Front Layer of Varying Thickness*, ed. J. Kocbach, P. Lunde und M. Vestrheim, 1999.
- [87] D. Kybartas und A. Lukoševičius, ISSN 1392-2114 Ultragarsas **45**, 22 (2002).
- [88] M. Grote, Elem. Math. **55**, 67 (2000).
- [89] M. Grote, Journal of Computational Physics **161**, 331 (2000).
- [90] M. F. Ashby, *Materials Selection in Mechanical Design, edition 3*. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, 2007.
- [91] D. Rugar, H. J. Mamin und P. Guethner, Applied Physics Letters **55**, 2588 (1989).
- [92] M. Dienwiebel und E. deKuyper, Review of scientific instruments **76**, 043704 (2005).
- [93] C. Naumann, *Dissertation in Vorbereitung*. Ph.D. Thesis, Universität Erlangen-Nürnberg, 2007.
- [94] B. Jähne, *Digitale Bildverarbeitung, 4. Auflage*. Springer Verlag, 1997.

# Danksagung

Am Ende dieser Arbeit danke ich all jenen, die in jeglicher Form zu ihrem Gelingen beigetragen haben. Auch auf die Gefahr hin, den einen oder anderen nicht zu berücksichtigen, möchte ich doch diejenigen namentlich erwähnen, denen ich zu besonderem Dank verpflichtet bin.

Ich danke Frau Prof. Dr. Gisela Anton für die freundliche Aufnahme am Lehrstuhl des Physikalischen Institutes 4 und für die mir gegebene Möglichkeit, dieses Thema zu bearbeiten.

Insbesondere möchte ich mich auch bei Herrn Streeb von der elektronischen Werkstatt bedanken. Ohne Ihn hätte ich auf viele technische Spielereien verzichten müssen.

Herrn Spona und seinem Team in der mechanischen Werkstatt bin ich für die gute Zusammenarbeit und die hervorragenden Leistungen zu Dank verpflichtet.

Herrn Kärcher danke ich für die Erstellung diverser CAD Zeichnungen, die als Grundlage zu einer sauberen Verarbeitung in den Werkstätten gedient haben.

Desweiteren bin ich der gesamten Akustikgruppe in Erlangen für unzählige Diskussionen und die angenehme Atmosphäre dankbar.

Besonderen Dank muss ich auch meinen Physiker Kollegen und Kolleginnen M. Ardid (Valenzia), J. Perkins (Sheffield), Valentin Niess (Marseille) und N. Kurahashi (Stanford) zollen. Mit Ihnen hatte ich sehr anregende Gespräche.

Herrn K. Helbing und Herrn C. Stegmann danke ich für die anregenden Diskussionen im Hinblick auf Signalauswertung.

Frau S. Quabis und Herrn J. Müller danke ich für die Hilfsbereitschaft und der Leihgabe diverser optischer Bauteile.

Herrn Stadler vom Lehrstuhl für Polymerwissenschaften danke ich für die Anregenden



diskussionen und die Bereitschaft Messungen von Hüllenparametern zu übernehmen.

Herrn Dr. Kaltenbacher vom Lehrstuhl für Sensorik danke ich für die kostenlose Lizenz des verwendeten Programmpakets CAPA.

Herrn Maltzer bin ich zu Dank verpflichtet, da er dem Institut einen optischen Tisch zum Verbleib überlassen hat.

Herrn Kretschmer, Herrn Hössl, Herrn Naumann und Frau Naumann-Godo möchte ich für die zahlreichen inspirierenden Diskussionen danken. Besonderen Dank gilt dabei Herrn Kretschmer und Herrn Hössl, da sie während dieser Diskussionen stets für das Leibliche Wohl aller Beteiligten gesorgt haben.

Herrn Weitzer und Herrn Scholtysek danke ich für den reibungslosen Ablauf des Praktikums an der EWF bzw. in Erlangen. Diesbezüglich möchte ich mich auch bei Frau Suft für die hervorragende Vorbereitung des Praktikums in Nürnberg bedanken. Ähnlicher Dank wird Frau Fössel entgegengebracht.

Zuletzt möchte ich mich bei Frau Salomon, Herrn Höfl und Herrn Strömsdorfer für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanken.

# Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Dissertation ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, dass diese Dissertation in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, im November 2006

.....



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

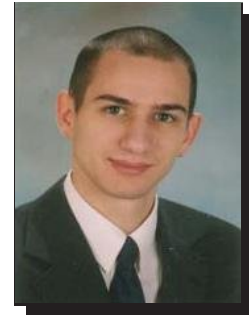
Name: Karsten Salomon

Anschrift: Am Europakanal 8  
91056 Erlangen  
E-Mail: karsten\_salomon@web.de

Geburtsdatum: 29. April 1975 in Fürth

Familienstand: verheiratet, ein Kind

Nationalität: deutsch



## Studium

1996–2003 FAU Erlangen-Nürnberg, Studium der Physik  
Erlangung des Diploms, Note: 1,6  
Thema der Diplomarbeit:  
„Untere Schranken an pseudoklassische Entropien“

## Wehrdienst

1995–1996 Absolvierung der Wehrpflicht  
Grundausbildung in Roth  
Ausbildung in Landsberg a. Lech

## Schulausbildung

1986–1995 Gymnasium Oberasbach, Deutschland  
Erlangung des Abiturs, Note: 2,4

## Berufserfahrung

2003–2006 Wissenschaftlicher Angestellter an der FAU in Erlangen

2000–2003 Studentische Hilfskraft an der FAU in Erlangen

2000–2001 Werkstudent bei Vertacross in Nürnberg

In 2000 Studentische Hilfskraft an der FAU in Erlangen

In 1996 Praktikum bei Siemens in Erlangen

12. Februar 2007