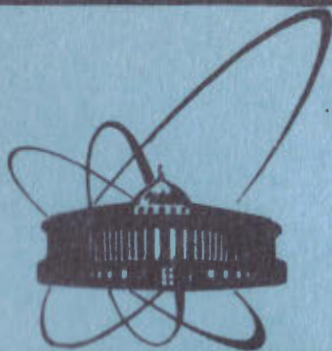




2/078
**объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна**

P9-84-270

А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова

**НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
С МЕДЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ**

Направлено в "Журнал экспериментальной
и теоретической физики"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование механизмов возбуждения циклотронных и ленгмюровских волн в релятивистских электронных пучках /РЭП/ и поиск новых возможностей управления этими явлениями вызывают в настоящее время значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения, в связи с задачами волновой электроники, новыми методами ускорения частиц, физики плазмы и т.д. Отметим пионерские идеи и разработки Я.Б.Файнберга ^{/1,2/}, интересные предложения и теоретические результаты Драммонда, Спрэнгла, Нейшна, А.Н.Лебедева и др. ^{/3-8/}, эксперименты Б.И.Иванова, Корнета и др. ^{/9-12/}.

В основе этих механизмов возбуждения волн пространственного заряда в пучках лежит или черенковская неустойчивость или аномальный эффект Доплера. Характерной их чертой является синхронизм по частоте и скорости распространения медленной волны пространственного заряда /волны отрицательной энергии/ с волной положительной энергии в структуре или диспергирующей среде, рост поля при этом начинается практически с нулевого уровня.

В предыдущих работах ^{/13,14/} был рассчитан в линейном приближении эффективный механизм возбуждения ленгмюровской волны в релятивистском электронном пучке, в основе которого лежит резонанс между внешней электромагнитной волной в системе и ленгмюровской модой в пучке. При этом скорости электронов пучка значительно больше фазовой скорости медленной электромагнитной волны /аномальный эффект Доплера/, рост поля начинается с начального /ненулевого/ уровня, скорость роста прямо пропорциональна току пучка. Был оценен также уровень возбуждаемого в РЭП электромагнитного поля и показана возможность управления параметрами генерируемой мощной электромагнитной волны ^{/14/}.

В настоящей работе выясняется влияние нелинейных эффектов на характер и темп роста поля волны, определяются характеристики стационарного нелинейного резонансного режима и их зависимость от параметров внешней волны и пучка.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим взаимодействие однородного замагниченного пучка электронов радиуса a , начальные плотность и скорость которого вдоль оси z соответственно равны $\bar{n}$ и $\bar{v}$, с замедленной электромагнитной волной, возбужденной в структуре с.в.ч. генератором,

продольное электрическое поле которой можно представить в виде: $E_z = E_0(r) e^{i\psi}$, где $\psi = -\omega t + kz$, ω - частота генератора, $k = \omega/v$, v - фазовая скорость волны, при этом $v \ll \bar{v}$. Используем следующие основные предположения:

1/ одномерное движение электронов, т.е. продольное магнитное поле H_z достаточно велико:

$$\omega_H^2 \gg \frac{\omega_\lambda^2}{\bar{\gamma}^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{eH}{mc}\right)^2 \gg \omega_\lambda^2, \quad /1/$$

где $\omega_\lambda = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \bar{n}}{m\bar{\gamma}}}$ - ленгмюровская частота*;

2/ справедлива гидродинамическая модель пучка, т.е. кинетический разброс электронов по энергиям достаточно мал:

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} \ll \bar{\beta}^2 \bar{\gamma}^2 \left(1 - \frac{\beta}{\bar{\beta}}\right), \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{c}, \quad \bar{\gamma} = (1 - \bar{\beta}^2)^{-1/2}; \quad /2/$$

3/ предполагается аксиальная симметрия задачи.

Вводим потенциальную функцию $\phi(t, z)$, связанную с продольным электрическим полем соотношением:

$$E_z = E = \frac{mc^2 \omega}{ev\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}, \quad /3/$$

где $v = \beta c$ - фазовая скорость.

Определенная в /3/ функция ϕ равна работе поля волны над электроном на длине волны λ , отнесенной к энергии покоя mc^2 , если справедлива гармоническая зависимость $\phi = |\phi| e^{i\psi}$, $E = |E| e^{i\psi}$. Используем следующие интегралы уравнения движения и уравнения непрерывности:

$$\gamma'_e + \phi = \gamma'_0, \quad n_e = \frac{n_0(\beta_0 - \beta)}{\beta_0 - \beta}, \quad /4/$$

где $\gamma'_e = \gamma_e \gamma (1 - \beta_e \beta)$ - релятивистский фактор в системе покоя волны; $v_e = \beta_e c$ - текущая скорость электронов пучка; $n_0, v_0 = \beta_0 c$, γ_0 - плотность, скорость и релятивистский фактор электронов при $\phi = 0$. Тогда, исходя из самосогласованной системы уравнений

гидродинамического приближения и полагая $\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\omega}{v} \frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \psi} = -\omega \frac{\partial}{\partial t}$, получим для обобщенного потенциала ϕ следующее нелинейное урав-

* Условие /1/ одновременно обеспечивает значительное разделение ленгмюровской и циклотронной собственных мод пучка, так что возбуждение их можно рассматривать независимо.

нение /13/:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{k_{\perp 0}^2} \cdot \Delta_{\perp} \phi = -q \beta_0' \frac{(\gamma_0' - \phi)}{\sqrt{(\gamma_0' - \phi)^2 - 1}} + q, \quad /5/$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}), \quad q = \frac{\omega_{\lambda}^2}{\omega^2} \beta^2 \gamma^2 \gamma_0', \quad k_{\perp 0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Сходные уравнения рассматривались также в /15,16/ для случая нерелятивистского движения электронов в системе покоя волны, а также для пучков малой плотности ($\phi \ll 1$) в плазме. Представим поле при $t \geq 0, z \geq 0$ в виде суперпозиции двух волн: волны, созданной внешним источником $\phi_{\text{ВН}}$, и поля "отклика" пучка на эту волну $\phi_{\text{П}}$. Тогда $\phi = \phi_{\text{П}} + \phi_{\text{ВН}}$. Положим

$$\phi_{\text{ВН}} = \phi_0^{\text{ВН}} I_0(k_{\perp 0} r) \sin \psi, \quad \phi_{\text{П}} = f(\psi) I_0(k_{\perp} r), \quad /6/$$

где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя, $k_{\perp}$ - параметр, определяемый из граничных условий, $f(\psi)$ - неизвестная функция.

Из /5/, учитывая, что $\phi_{\text{П}} = \phi - \phi_{\text{ВН}}$, а $\ddot{\phi}_{\text{ВН}} + \frac{\Delta_{\perp} \phi_{\text{ВН}}}{k_{\perp 0}^2} = 0$, получим:

$$\ddot{\phi} + \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2} \phi = -q \beta_0' \frac{(\gamma_0' - \phi)}{\sqrt{(\gamma_0' - \phi)^2 - 1}} + q - (1 - \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2}) \phi_0^{\text{ВН}} I_0(k_{\perp 0} r) \sin \psi. \quad /7/$$

Уравнение /7/ - основное соотношение для дальнейших исследований. Рассмотрим его в длинноволновом приближении ($k_{\perp 0} r, k_{\perp} r \ll 1$). Если поле достаточно мало

$$\phi \ll \frac{\beta_0'^2 \gamma_0'}{2} = \gamma_0' - 1 = \phi_s, \quad /8/$$

то линеаризация правой части /7/ приводит к следующему линейному уравнению:

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = -\tilde{f} \sin \psi, \quad /9/$$

$$\text{где } \Omega^2 = \frac{\omega_{\lambda}^2}{\gamma^2 (\omega - k\bar{v})^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2}, \quad \tilde{f} = \phi_0^{\text{ВН}} (1 - \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2}).$$

Пусть выполняется резонансное условие:

$$\Omega^2 = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\omega_{\lambda}^2}{\gamma^2 (\omega - k\bar{v})^2} = 1 - \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2} = s^2. \quad /10/$$

Здесь s^2 - геометрический фактор.

Соотношение /10/ совпадает с дисперсионным соотношением собственных аксиально-симметричных ленгмюровских мод в пучке: медленной ($v < \bar{v}$) и быстрой ($v > \bar{v}$).

Решение /9/ при начальном условии: $\psi = 0, \phi = \phi_{\text{ВН}}$ будет:

$$\phi = \frac{\tilde{f}}{2} (\psi \cos \psi - \sin \psi) + \phi_0^{\text{ВН}} \cos \psi. \quad /11/$$

Отсюда видно, что при условии /10/ амплитуда волны линейно нарастает с ростом ψ с "инкрементом", равным:

$$G = \frac{1}{E_0^{\text{ВН}}} \frac{d|E|}{dz} = \frac{\pi}{\lambda} s^2, \quad \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad /12/$$

Следовательно, когда в замедляющей структуре имеется внешняя волна с конечной амплитудой и выполняется условие резонанса /10/, при котором частота внешней волны, смещенная за счет аномального эффекта Доплера $\bar{\omega}(\omega - k\bar{v})$, совпадает с собственной частотой колебаний электронов в пучке ($-\omega_{\lambda}/s$), с так называемой редуцированной ленгмюровской частотой, то происходит возбуждение волны пучком, которое можно трактовать как усиление внешней волны.

Обычно оценку максимального поля волны E_m проводят из условия, при котором еще отсутствует захват электронов потенциальной ямой волны, предполагая, что форма волны близка к гармонической. Для потенциала захвата ϕ имеем из /4/:

$$\phi_s = \gamma_0' - 1. \quad /13/$$

Тогда с учетом /3/ и /13/ получим для амплитуды поля волны

$$E_m < E_s = \frac{2\pi m c^2}{e v \gamma} (\gamma_0' - 1). \quad /13'/$$

Учет затухания в реальной системе ограничивает рост поля волны, но значительно раньше начинают сказываться нелинейные эффекты, связанные с нарушением условия /8/. Перейдем к построению нелинейной теории резонансного взаимодействия пучка с медленной электромагнитной волной.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

С ростом амплитуды поля волны возрастает эффект нелинейного влияния поля и возникающей модуляции плотности заряда пучка на движение электронов. Это проявляется, в частности, в том, что в системе, описываемой уравнением /7/, изменяется частота собственных колебаний. При этом возможно установление нелинейного колебательного режима. Расчет такого резонансного режима нели-

нейной системы сводится к определению стационарных значений амплитуды и фазы колебаний и исследованию стационарного режима на устойчивость.

Прежде чем анализировать уравнение /7/, сделаем одно замечание. В данной задаче, в силу предположения о монохроматичности пучка и большой разницы в значениях начальной скорости пучка и фазовой скорости волны ($\beta \gg \beta_0$), нет условий для черенковской генерации /условие /2//. Поэтому естественно предположить, что при отсутствии внешнего поля в системе не возбуждается и ленгмювская волна. Это означает, что нас интересуют такие периодические решения уравнения /7/, которые при $\phi_{\text{BH}} = 0$ переходят в тривиальные /нулевые/ решения порождающего уравнения:

$$\ddot{\phi} + \bar{\Omega}^2 \phi = -q\beta'_0 \frac{(\gamma'_0 - \phi)}{\sqrt{(\gamma'_0 - \phi)^2 - 1}} + q, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{k_1^2}{k_{10}^2}. \quad /14/$$

Нетрудно видеть, что порождающее уравнение /14/ относится к классу гамильтоновых систем и имеет два интеграла:

$$\dot{\phi}^2 + \bar{\Omega}^2 \phi^2 + 2q[\phi + \beta'_0 \sqrt{(\gamma'_0 - \phi)^2 - 1}] = E - \text{интеграл энергии}, \quad /15'/$$

$$\psi_1 = \frac{2\pi}{T} \int \frac{d\phi}{\sqrt{E - F(\phi)}} + \theta - \text{фаза колебаний, } \theta \text{ и } E - \text{постоянные.} \quad /15''/$$

$$\text{Здесь } T = \int_{a_2}^{a_1} \frac{d\phi}{\sqrt{E - F(\phi)}} - \text{период колебаний, } F(\phi) = -\bar{\Omega}^2 \phi^2 + 2q[\phi +$$

$+\beta'_0 \sqrt{(\gamma'_0 - \phi)^2 - 1}]$, a_1 и a_2 - амплитуды колебаний /при $\dot{\phi} = 0$ /, связанные между собой соотношением, следующим из /15'/:

$$E = \bar{\Omega}^2 a_1^2 + 2q[a_1 + \beta'_0 \sqrt{(\gamma'_0 - a_1)^2 - 1}] = \bar{\Omega}^2 a_2^2 + 2q[a_2 + \beta'_0 \sqrt{(\gamma'_0 - a_2)^2 - 1}]. \quad /16/$$

В линейной теории колебания ϕ происходят в симметричных пределах $a_1 = -a_2$. В нелинейном случае, как следует из /16/, колебания ϕ несимметричны: $a_1 \neq -a_2$. Это вытекает также из соотношения /4/: если максимальная величина ϕ ограничена потенциалом захвата /13/, то для минимального ϕ такого ограничения нет. Для расчета резонансного режима нелинейной системы, описываемой уравнением /7/, используем метод усреднения /17/. Введем, как обычно, медленные переменные: амплитуду a и расстройку по фазе θ . Дифференцируя /15/ с учетом /6/ и /7/ и предполагая, что $\phi_{\text{BH}}^{\text{BH}} \ll 1$, получим уравнения первого порядка для $a = a_1$ и θ /18/. Однако, в связи с тем, что квадратура /15''/ аналитически не вычисляется, для определения

зависимости $T = T(a)$ требуются численные методы. Поэтому для наглядности мы остановимся на варианте уравнения /7/ при слабой нелинейности.

Разложим подкоренное выражение в правой части /7/ с точностью до членов $-(\frac{\phi}{\gamma'_0 - 1})^3$. В результате получим:

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = -c_2 \phi^2 - c_3 \phi^3 - \tilde{f} \sin \psi. \quad /17/$$

$$\text{Здесь } c_2 = \frac{3}{2} \frac{q}{\beta_0'^4 \gamma_0'^4}, \quad c_3 = \frac{9q}{2\beta_0'^2 \gamma_0'^8}, \quad p = \frac{1 + 4\gamma_0'^2}{(\gamma_0'^2 - 1)^2}.$$

Для порождающего уравнения //17/ при $\tilde{f} = 0$ можно получить точные математические результаты /см. Приложение/. Отметим, что в нашем случае, когда $\Omega^2 > 0$, порождающее уравнение /17/ не имеет солитонных решений, подобных тем, что были получены Хьюзом и Оттом /18/ для нерелятивистской версии уравнения /5/.

Мы рассматриваем случай главного резонанса, т.е. когда частота внешнего воздействия совпадает с собственной частотой линейаризованной системы. Для применения асимптотического метода усреднения, разработанного в /17/, будем считать правую часть /17/ $\sim \epsilon$ /т.е. $c_2 \phi^2, c_3 \phi^3, \phi_{\text{BH}}^{\text{BH}} - \epsilon \ll 1$ /. Решение уравнения /17/ проведем сразу для получения более точных параметров стационарного режима / во втором приближении по ϵ

$$\phi = a \cos \psi_1 + c_2 \frac{a^2}{8\Omega^2} \cos 2\psi_1 + c_3 \frac{a^3}{32\Omega^2} \cos 3\psi_1 - \frac{c_2 a^2}{2\Omega^2}, \quad /18/$$

где $\psi_1 = \Omega \psi + \theta$.

Здесь амплитуда волны a и фаза θ определяются из следующей системы уравнений ($\Omega \approx 1$):

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\tilde{f}}{2} (1 - \frac{9}{16} c_3 a^2) \cos \theta, \quad /19/$$

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \Omega - 1 - \frac{\tilde{f}}{2a} (1 - \frac{3}{16} c_3 a^2) \sin \theta + \frac{3}{8} c_3 a^2 - \frac{5}{12} c_2^2 a^2 - \frac{15}{256} c_3^2 a^4. \quad /20/$$

Если пренебречь членами $-c_2$ и $-c_3$ и положить $\Omega = 1$, то легко найти решение системы /19-20/, эквивалентное результатам линейной теории /соотношение /11//.

Для определения стационарного резонансного режима из системы уравнений /19-20/ полагаем $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$. Отсюда $\theta = \pi/2$. Тогда нелинейное дисперсионное соотношение для ленгмювской волны большой амплитуды будет /вблизи резонанса $\Omega \approx 1$ /:

$$\Omega - 1 - \frac{\tilde{f}}{2a} + \frac{3}{8} c_3 a^2 [1 - \frac{10}{9} \frac{c_2^2}{c_3} - \frac{5}{32} c_3 a^2] = 0. \quad /21/$$

Уравнение /21/ описывает резонансную кривую, т.е. зависимость частоты Ω от амплитуды. При нулевой расстройке ($\Omega = 1$) из /21/ найдем методом последовательных приближений амплитуду стационарных колебаний:

$$a_{ст} = \bar{a} \left(\frac{1 - \frac{3}{16} c_3 \bar{a}^2}{1 - \frac{10}{9} \frac{c_2^2}{c_3} - \frac{5}{32} c_3 \bar{a}^2} \right)^{1/3}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad /22/$$

где $\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{8}{3} \frac{\phi_0^{BH}}{p}}$.

Таким образом, амплитуда стационарных периодических колебаний зависит от напряженности внешнего поля в степени $1/3$. Вблизи стационарного уровня система совершает колебания, вид которых при малом отклонении от $a_{ст}$ легко найти, подставляя в /21/ $a = a_{ст} + \bar{a}$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \bar{\theta}$ и линеаризуя их по малым отклонениям $\bar{a}$, $\bar{\theta}$. Частота этих колебаний, т.е. колебаний огибающей поля

волны мала: $\frac{\omega_a}{\omega} \approx \frac{f}{a_{ст}} \ll 1$. Таким образом, найденный стационарный

нелинейный режим устойчив.

Учитывая /22/, запишем /18/ в виде:

$$\phi = -a_{ст} \sin \psi - \frac{c_2}{6} a_{ст}^2 \cos 2\psi + \frac{c_3}{32} a_{ст}^3 \sin 3\psi - \frac{c_2}{2} a_{ст}^2. \quad /23/$$

Из /23/ видно, что колебания ϕ происходят в несимметричных пределах, максимум производной ϕ по величине не совпадает с максимумом ϕ , форма поля отлична от гармонической.

Итак, можно представить себе следующую картину: поле в системе ϕ , стартуя с уровня $\phi_{вн}$, растет вначале линейно по ψ , затем, замедляясь из-за нелинейных эффектов, достигает максимального значения $a = a_{ст}$ и далее совершает колебания с частотой, которая значительно меньше частоты самой волны /колебания огибающей поля волны/. Время выхода системы на максимальный уровень поля и изменение фазовой скорости волны в функции амплитуды определим на основании численных расчетов. Кроме того, только на основании численных методов можно получить результаты в области значений ϕ , близких к захвату /когда $\phi/(\gamma_0' - 1) \approx 1$ /.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение /7/ решалось на ЭВМ CDC-6500 методом Рунге-Кутты. При этом задавались энергия и ток пучка, а также частота, фазовая скорость и напряженность внешнего поля. Параметр k_{10}^2/k_{10}^2 определялся из условия /10/. Основная цель численных расчетов состояла в определении величины максимальной напряженности поля

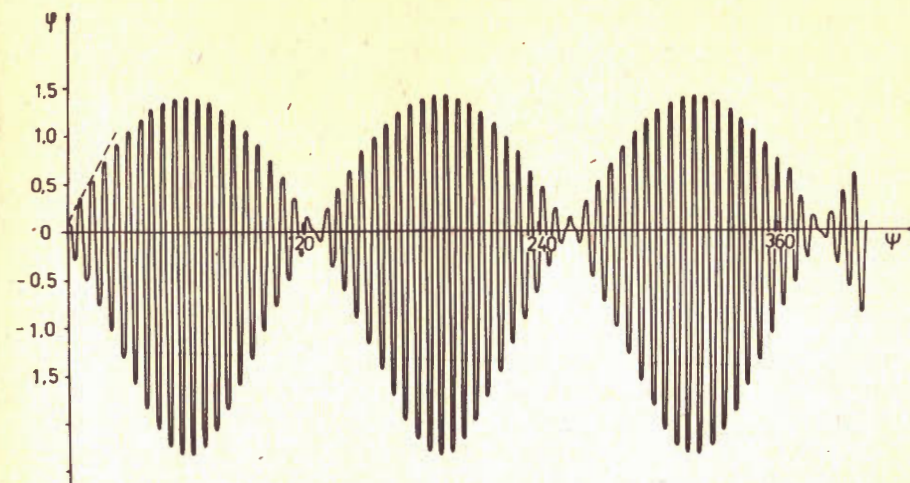


Рис.1 Зависимость $\phi = \phi(\psi)$ для $E_0^{BH} = 1,5$ МВ/м.

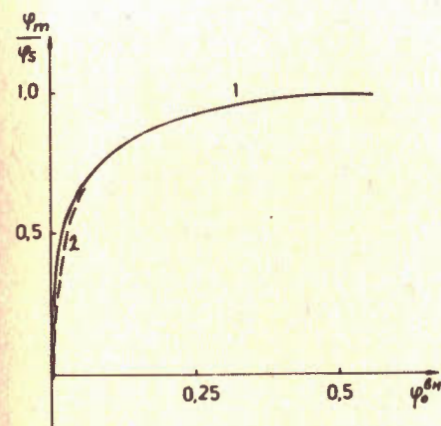


Рис.2. Зависимость ϕ_m/ϕ_s и ϕ_{ac}/ϕ_{ao} от ϕ_0^{BH} . 1 - численный расчет, 2 - асимптотический метод.

ленгмюровской моды, ее зависимости от напряженности поля внешней волны и величины тока пучка, а также в определении фазовой скорости и величины модуляции плотности электронов пучка как функции амплитуды.

Расчеты проводились при следующих параметрах: фазовая скорость волны $\beta = 0,1$, длина волны с.в.ч. генератора $\lambda_0 = 2,5$ м, амплитуда напряженности внешнего поля $E_0^{BH} = /0,1 \div 5/$ МВ/м, энергия пучка $W_0 = 1$ МэВ / $\gamma = 3$ /, ток пучка $1 \div 3$ кА, радиус пучка ~ 1 см.

На рис.1 представлены в качестве примера результаты численных расчетов эволюции $\phi(\psi)$ для $E_0^{BH} = 1,5$ МВ/м / $\phi_0^{BH} = 0,12$ /. Пунктиром показана линейная стадия роста волны /формула /11//. Видно, что в начале поле ϕ растет с линейным инкрементом, затем

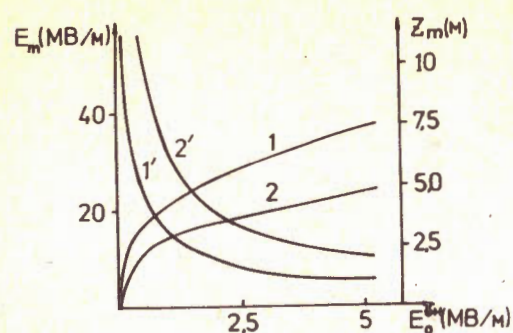


Рис. 3. Зависимость E_m от E_0^{BH} и z_m от E_0^{BH} . 1 и 1' — $E_m(E_0^{BH})$ и $z_m(E_0^{BH})$ для $J = 3$ кА, 2 и 2' — то же для $J = 1$ кА.

скорость роста уменьшается и в конце концов величина поля выходит на максимальный уровень, затем уменьшается, далее колебания повторяются. Период колебаний огибающей —

≈ 20 периодов быстрых колебаний поля. Видно, что колебания происходят в несимметричных пределах, максимальная величина ϕ меньше потенциала захвата, минимальная по абсолютной величине больше ($\phi_s = 1,71$).

На рис. 2 представлены кривые, характеризующие изменение максимального значения потенциала (ϕ_m) в зависимости от внешнего поля (ϕ_0^{BH}). При этом кривая 1 — отношение ϕ_m/ϕ_s , где ϕ_s — потенциал захвата, полученное из численных расчетов, кривая 2 — ϕ_{ac}/ϕ_s , где ϕ_{ac} вычислено по формулам /22/ и /23/. Видно, что с ростом величины ϕ_0^{BH} растет и максимум суммарного поля /в степени 1/3/, при этом расчет по асимптотическому методу во втором приближении совпадает с численными результатами с точностью $\sim 10\%$ /в области слабой нелинейности поля/.

Для прикладных вопросов наибольший интерес представляет максимальное значение напряженности поля ($E_m \sim \phi_m$). На рис. 3 показана зависимость E_m от амплитуды внешнего поля /кривые 1, 2/, а также расстояния z_m /кривые 1', 2'/, на котором поле E достигает максимальной величины. Видно, что при выбранных значениях тока максимальный уровень напряженности поля растет с ростом тока пучка, а расстояние z_m уменьшается, при этом для достаточно большого внешнего поля E_m может значительно превысить величину поля E_s , вычисленную по формуле /13'/; в данном случае $E_s = 22$ МВ/м. Заметим, что в нашей работе анализ проводился для тока пучка, меньшего критического /19/.

С ростом амплитуды поля волны начинает изменяться частота ленгмюровской моды и фазовая скорость. Расчет изменения фазовой скорости проводился следующим образом: последовательно, с ростом ψ , определялось расстояние (h_1) между ϕ_{min} и ϕ_{max} , затем между ϕ_{max} и ϕ_{min} (h_2). Критерием монотонности роста или спада функции ϕ являлось постоянство знака $\dot{\phi}$. Сумма ($h_1 + h_2$) определяет величину длины волны в системе $\lambda_{нел} = \lambda_0 \beta_{нел}$. Вначале ($\psi = 0$) длина волны $\lambda = \lambda_0 \beta$. Отсюда вычислялось отношение $\beta_{нел}/\beta$ как функция расстояния или амплитуды поля. На рис. 4 показана зависимость $\beta_{нел}/\beta$ как функция амплитуды поля (ϕ_m/ϕ_s) для внешнего поля $E_0^{BH} = 1,5$ МВ/м и тока пучка $J = 3$ кА /кри-

вая 1/. Видно, что с ростом амплитуды фазовая скорость падает, т.е. частота растет.

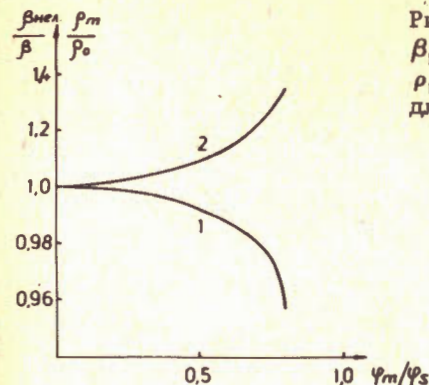


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости $\beta_{нел}/\beta$ (1) и максимальной плотности ρ_m/ρ_0 (2) от амплитуды поля ϕ_m/ϕ_s для $E_0^{BH} = 1,5$ МВ/м, $J = 3$ кА.

Представляет определенный интерес также величина модуляции плотности электронов пучка как функция амплитуды *. На рис. 4 /кривая 2/ показано отношение ρ_m/ρ_0 как функция ϕ_m/ϕ_s , где ρ_m — максимальное значение плотности, вычисленное на основании формул /4/, в которых зависи-

мость $\beta_s = \beta_s(\phi)$ определялась численно. Видно, что с ростом амплитуды растет степень модуляции тока пучка. Распространяется эта волна плотности заряда вдоль пучка с фазовой скоростью ленгмюровской моды, а это означает, что в ней участвуют все время разные электроны. Это обстоятельство приводит к тому, что модуляция плотности может существовать в пучке довольно значительное время. Заметим, что при ϕ , близком к захвату, степень модуляции тока пучка достигает больших значений / $\sim 100\%$ /.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем краткие итоги изучения механизма резонансного взаимодействия релятивистского электронного пучка с замедленной электромагнитной волной и возбуждения при этом мощной собственной ленгмюровской моды пучка.

1. При выполнении резонансного условия /10/ /а также условия замагниченности и монохроматичности электронов /1/ и /2//, предполагающего использование аномального эффекта Доплера ($\bar{v} > v$) и наличия небольшого внешнего поля, на коротких длинах / ~ 1 м/ в пучке возникает сильная модуляция плотности заряда и значительное переменное продольное электрическое поле, достигающее при токе пучка ≈ 3 кА и энергии ~ 1 МэВ значений ~ 30 МВ/м.

2. Модуляция плотности пространственного заряда пучка, образованная "проходящими" электронами, перемещается в пространстве /вдоль оси системы/ с фазовой скоростью волны, которая при малых амплитудах совпадает с фазовой скоростью внешней медленной

* На линейной стадии $|\frac{\bar{p}}{\rho_0}| = \frac{e|E|\lambda}{2\pi mc^2 \beta^2 \gamma^3} \sim 1\%$.

электромагнитной волны в замедляющей структуре; при условии $\frac{\Delta W_e}{W_e} \ll \frac{\gamma^2 \beta^2 \lambda}{L}$ эта модуляция существует на длине L вне области резонансного взаимодействия пучка со структурой.

3. Роль пространственного заряда в условиях аномального эффекта Доплера ($\omega < k\bar{v}$) сводится к ограничению величин возникающих потенциальных ям условием захвата электронов пучка, когда процесс роста поля волны и модуляции плотности заканчивается.

4. Рассмотренный механизм резонансного возбуждения /усиления/ медленной электромагнитной волны релятивистским электронным пучком может представить интерес для разработки эффективного метода ускорения тяжелых заряженных частиц, а также для генерации мощных с.в.ч.-колебаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порождающее уравнение /17/ имеет вид

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi + c_2 \phi^2 + c_3 \phi^3 = 0. \quad /П.1/$$

Вначале положим $c_3 = 0$. Заметим, что уравнение с квадратичной нелинейностью при $\Omega^2 < 0$ имеет известное солитонное решение $\phi = \text{ch}^{-2} \frac{|\Omega|t}{2}$. Это наводит на мысль о том, что в нашем случае при $\Omega^2 > 0$ можно искать решение /П.1/ при $c_3 = 0$ в виде $\sim \cos^{-2} \frac{\Omega t}{2}$. Действительно, решение таково:

$$\phi^{(2)} = - \frac{\frac{3}{2} \Omega^2}{\cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} + C \right)}, \quad /П.2/$$

где C - произвольная постоянная. Теперь вернемся к полному уравнению /П.1/. Предположим, что кубическая нелинейность ликвидирует сингулярность решения /П.2/, т.е. ищем решение /П.1/ в виде:

$$\phi^{(3)} = \frac{A}{\cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} + C \right) + b}, \quad /П.3/$$

где A и b - некоторые постоянные. Подстановка /П.3/ в /П.1/ приводит к значению $A = 3\Omega^2/2c_2$ и квадратному уравнению для b :

$$b^2 + b - \frac{\frac{9c_3}{8c_2^2} \Omega^2}{1 - \frac{9}{2} \frac{c_3}{c_2^2} \Omega^2} = 0. \quad /П.4/$$

Если ограничиться вещественными решениями /П.1/, то возникает условие

$$\frac{9}{2} \frac{c_3}{c_2^2} \Omega^2 < 1, \quad /П.5/$$

и тогда решение /П.1/ приобретает вид:

$$\phi^{(3)} = - \frac{\frac{3}{2} \frac{\Omega^2}{c_2}}{\epsilon + \cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} + C \right)}, \quad \epsilon = \frac{9}{8} \frac{c_3}{c_2^2} \Omega^2. \quad /П.6/$$

Это решение представляет собой периодическую нелинейную волну, смещенную в область отрицательных значений ϕ . Как показывает анализ, при наших значениях параметров c_2, c_3 /см. /17// решение /П.3/ не удовлетворяет условию разложения /8/, поэтому его надо рассматривать как точный математический результат для уравнений типа /П.1/ и как указание на сильную нелинейную трансформацию собственной ленгмювской моды пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я.Б. В кн.: Труды VII Международной конференции по ускорителям. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1970, с.465.
2. Файнберг Я.Б., Хижняк Н.А. УФН, 1979, 127, с.331.
3. Sloan M., Drummond W. Phys.Rev.Lett., 1976, vol.31, p.1234.
4. Sprangle P. et al. Phys.Rev.Lett., 1976, vol.36, p.1180; IEEE Trans., 1979, NS-26, No.3, p.4229.
5. Yadavalli S. Appl.Phys.Lett., 1976, vol.29, p.272.
6. Providakes G., Nation J. J.Appl.Phys., 1979, vol.50, p.3026.
7. Лебедев А.Н., Пазин К.К. В кн.: Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. ОИЯИ, Д9-10500, Дубна, 1977, с.149.
8. Faehl R., Newberger B., Godfrey B. Phys.Fluids, 1980, vol.23, p.2440.
9. Иванов Б.И. и др. Препринт ХФТИ-80-2, Харьков, 1980.
10. Cornet E. et al. Phys.Rev.Lett., 1981, vol.46, p.186.
11. Nation J. Appl.Phys.Lett., 1970, vol.17, p.491.
12. Nation J. et al. In: Proc. IV Int.Top.Conf. on High-Power Electron and Ion Beams. Palaiseau, 1981, vol.2, p.667.
13. Бонч-Осмоловский А.Г., Доля С.Н., Решетникова К.А. Письма в ЖТФ, 1982, 8, с.627; ОИЯИ, Р9-82-113, Дубна, 1982; ЖТФ, 1983, 53, с.1055.
14. Бонч-Осмоловский А.Г., Доля С.Н., Решетникова К.А. Труды совещания по проблемам коллективного метода ускорения. ОИЯИ, Д9-82-664, Дубна, 1983, с.153.

15. Ковтун Р.И., Рухадзе А.А. ЖЭТФ, 1970, 58, с.1709.
16. Hughes Th., Ott E. Phys.Fluids, 1980, vol.23, p.2265.
17. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", М., 1974.
18. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, М., 1971.
19. Богданкевич Л., Рухадзе А. УФН, 1971, 103, с.577.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1984 года.

Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А.

P9-84-270

Нелинейная теория взаимодействия релятивистского электронного пучка с медленной электромагнитной волной

Релятивистский электронный пучок при определенных условиях на основе аномального эффекта Доплера резонансно взаимодействует с медленной электромагнитной волной, созданной внешним источником в замедляющей структуре. Аналитическими методами и с помощью численных расчетов показано, что при этом в пучке возникает сильная периодическая модуляция плотности, перемещающаяся вдоль оси пучка со скоростью, близкой к фазовой скорости внешней волны, а в системе возбуждается мощная электромагнитная волна. При умеренных параметрах пучка и внешней волны амплитуда возбуждаемой волны может значительно превысить поле, которое обычно оценивается по захвату электронов волной. Определены эволюция ленгмювской моды пучка в пространстве и во времени и характеристики нелинейного квазистационарного режима; аналитические и численные расчеты дали близкие результаты.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергии и Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Bonch-Osmolovsky A.G., Reshetnikova K.A.

P9-84-270

Nonlinear Theory of an Electron Relativistic Beam Interaction with a Slow Electromagnetic Wave

Under definite conditions on the basis of anomalous Doppler's effect the relativistic electron beam interacts resonantly with a slow electromagnetic wave created by an external source in the slowing-down structure. It is shown analytically and by numerical calculations that a strong periodical density modulation arises in the beam which runs along the beam axis with a velocity close to the phase velocity of external wave, and powerful electromagnetic wave is excited in the system. This amplitude at moderated parameters of the beam and external wave may exceed the field, usually evaluated by electron wave capture. The Langmuir wave evolution in space and time are determined, and the characteristics of nonlinear quasistationary regime are determined. Analytical and numerical calculations have given similar results.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies and the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984