

Uniwersytet Warszawski

Wydział Fizyki

Rozprawa doktorska pt.

**Kwantowy model bezmasowego pola
Kleina – Gordona sprzężonego z polem
grawitacyjnym.**

Marcin Grzegorz Domagała



Promotor:

prof. Jerzy Lewandowski

Katedra Teorii Względności i Grawitacji

Instytut Fizyki Teoretycznej UW

Warszawa, styczeń 2015 r.

Ewelinie i Ignasiowi

Podziękowania

Wielu osobom jestem winny wdzięczność, bo bez ich pomocy i wsparcia praca ta nigdy by nie powstała. W pierwszej kolejności dziękuję mojej żonie Ewelinie i synkowi Ignasiowi, bo to czas zabrany im poświęciłem na napisanie tej pracy. Bez względu na wszystko zawsze mogłem liczyć na ich wsparcie i zrozumienie. Chciałbym też podziękować Rodzicom i Bratu, bo od kiedy byłem mały byli oni świadkami i ofiarami mojej przygody z nauką.

Chciałbym również podziękować promotorowi prof Jerzemu Lewandowskiemu, za lata współpracy, która była wypełniona mnóstwem naukowych i nie tylko przygód.

Marcin G. Domagała

Spis treści

1	Wstęp	8
1.1	Wprowadzenie	8
1.2	Najważniejsze wyniki pracy	9
1.3	Aktualne wyzwania	11
1.4	Plan pracy i uwagi	11
1.4.1	Zawartość rozdziałów	11
1.4.2	Uwagi o języku i notacji	13
2	Analiza na poziomie klasycznym	14
2.1	Formalizm kanoniczny w zmiennych ADM	15
2.1.1	Różne opisy ogólnej teorii względności	16
2.1.2	Wyprowadzenie formalizmu kanonicznego z zasady najmniejszego działania	18
2.1.3	Więzy ogólnej teorii względności	25
2.1.4	Znikający Hamiltonian i problem czasu w ogólnej teorii względności	27
2.2	Przejście do zmiennych Ashtekara	28
2.2.1	Rozszerzenie przestrzeni fazowej ADM	28
2.2.2	Kanoniczna transformacja prowadząca do zmiennych Ashtekara	31
2.2.3	Więzy ogólnej teorii względności w zmiennych Ashtekara	33
2.3	Zdeparametryzowana wersja ogólnej teorii względności	34
2.3.1	Problem czasu na przykładzie skończonego wymiarowego	35
2.3.2	Deparametryzacja i zmienne relacyjne	39
2.3.3	Iloczynowa postać więzów i obszary przestrzeni fazowej na przykładzie skończonego wymiarowego	41
2.3.4	Przekształcenie więzów ogólnej teorii względności	44

2.3.5	Deparametryzacja ogólnej teorii względności	46
3	Konstrukcja modelu kwantowego	49
3.1	Kinematyczne podstawy nowego modelu kwantowego	50
3.1.1	Klasyczny odpowiednik modelu kwantowego	51
3.1.2	Stany kwantowe i kinematyczna przestrzeń Hilberta	52
3.1.3	Elementarne operatory kwantowe	54
3.2	Formalne rozwiązanie kwantowych więzów wektorowych i gaussowskich . .	55
3.2.1	Uwagi o kwantyzacji więzów	55
3.2.2	Rozwiązanie kwantowych więzów gaussowskich	56
3.2.3	Rozwiązanie kwantowych więzów wektorowych	57
3.2.4	Przestrzeń niezmienniczych stanów kwantowych	57
3.3	Kwantowe więzy skalarne i ich rozwiązania	58
3.3.1	Kwantowy operator więzów skalarnych	58
3.3.2	Rozwiązanie kwantowych więzów skalarnych	59
3.3.3	Ogólna postać rozwiązań więzów kwantowych	60
3.3.4	Przestrzeń rozwiązań więzów kwantowych	61
3.4	Kwantowe obserwabli Diraca	62
3.4.1	Definicja kwantowych obserwabli Diraca	62
3.4.2	Rodzina kwantowych obserwabli Diraca w zdeparametryzowanym modelu grawitacji sprzężonej z polem skalarnym	63
3.4.3	Zupełność zdefiniowanej rodziny obserwabli Diraca	65
3.4.4	Klasyczny odpowiednik kwantowych obserwabli Diraca	66
3.4.5	Interpretacja klasycznej funkcji odpowiadającej kwantowym obser- wablom Diraca	67
3.5	Dynamiczna ewolucja obserwabli Diraca	69
3.5.1	Relacyjna ewolucja funkcji klasycznych	69
3.5.2	Ewolucja kwantowych obserwabli Diraca	71
3.5.3	Fizyczny Hamiltonian	72
3.6	Podsumowanie i wymagania dla zastosowania kanonicznej pętlowej grawi- tacji kwantowej	73

4	Zastosowanie kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej	76
4.1	Kinematyczna przestrzeń Hilberta	77
4.1.1	Funkcje cylindryczne i iloczyn skalarny	78
4.1.2	Ortogonalny rozkład kinematycznej przestrzeni Hilberta	80
4.1.3	Elementarne operatory kwantowe	83
4.2	Transformacje cechowania Yanga-Millsa i więzy gaussowskie	84
4.2.1	Unitarne transformacje kinematycznej przestrzeni Hilberta	84
4.2.2	Niezmiennicze sieci spinowe	85
4.2.3	Uśrednianie po grupie	86
4.2.4	Przestrzeń Hilberta stanów Yang-Mills niezmienniczych	87
4.3	Dyfeomorfizmy i więzy wektorowe	87
4.3.1	Działanie dyfeomorfizmów na przestrzeni kinematycznej	88
4.3.2	Dyfeomorfizmy zachowujące grafy i symetrie grafu	89
4.3.3	Dualna przestrzeń stanów dyfeomorficznie niezmienniczych	90
4.3.4	Przestrzeń Hilberta stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych	91
4.4	Operatory na przestrzeni Hilberta stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych	92
4.4.1	Definicja operatorów	93
4.4.2	Operatory dystrybucyjne zaczepione w punkcie	94
4.4.3	Iloczyn operatorów dystrybucyjnych	94
4.5	Fizyczna przestrzeń Hilberta i rozwiązania więzów skalarnych	95
4.5.1	Grawitacyjne kwantowe więzy skalarne	96
4.5.2	Fizyczny Hamiltonian	97
4.5.3	Dowolności w modelu i ich ograniczenia	98
4.6	Alternatywna propozycja kwantyzacji $\hat{C}^{gr}$	98
4.6.1	Wyjściowa postać więzów skalarnych ogólnej teorii względności	98
4.6.2	Podstawowe tożsamości geometryczne	99
4.6.3	Kwantyzacja skalara krzywizny	101
5	Podsumowanie	102
5.1	Uwagi podsumowujące	102
5.2	Porównanie z kwantową kosmologią pętlową i modelem Browna-Kuchara	103

5.3	Możliwe zastosowania modelu	104
A	Nawias Poissona nowych więzów skalarnych w przypadku ogólnym pola skalarnego	106

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Rozwój kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej, jaki nastąpił w ostatnich latach ([1], [2], [3], [4]) pozwala wierzyć, że model kwantowej grawitacji sprzężonej z polami Modelu Standardowego znajduje się w zasięgu obecnie posiadanej wiedzy. Co więcej, wydaje się, że uda się to osiągnąć w obrębie kanonicznego formalizmu oryginalnych równań Einsteina. Wierzimy, że należy rozpocząć badania, które będą nas prowadziły w tym kierunku. Sukcesy kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej pozwalają optymistycznie patrzeć na możliwość zastosowania jej również w obecnym przypadku.

Obliczenie i połączenie klasycznych wzorów na entropię czarnej dziury ze stanami geometrii kwantowej ([30]) stanowi przekonujący argument za słusznością kwantowego obrazu geometrii, jaki przedstawia kanoniczna pętlowa grawitacja kwantowa. Zastosowanie kanonicznej pętlowej grawitacji do modeli kosmologicznych jednorodnego i izotropowego Wszechświata było kolejnym dużym sukcesem kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. W ten sposób powstała kanoniczna pętlowa kosmologia ([15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]). Dowiedzieliśmy się z niej wiele na temat jakościowych efektów kwantyzacji i ewolucji fizycznej ([22], [23]). Wiedza ta okazuje się przydatna przy wykonywaniu kolejnego kroku.

Pierwszy kompletny, niestosujący uproszczeń model kwantowej kanonicznej grawitacji ze wszystkimi lokalnymi stopniami swobody został skonstruowany przez Browna i Kuchara

([9]) oraz Giesel i Thiemanna ([24]). Model opisuje grawitację oddziałującą z pyłem. Brown i Kuchar zastosowali metodę kwantyzacji Diraca, tzn. „najpierw kwantuj, potem rozwiązuj więzy”. Odwrotną metodę zastosowali Giesel i Thiemann – „najpierw rozwiąż teorię klasyczną, potem kwantuj”.

Zrozumienie kwantowej teorii, która nie zależy od geometrii tła i traktuje czasoprzestrzenne dyfeomorfizmy jako przekształcenia cechowania, wymaga znalezienia sposobu na zdefiniowanie nietrywialnej ewolucji fizycznej. Zadanie to nie jest proste, bowiem w ogólnej teorii względności hamiltonian jest kombinacją więzów. Ewolucja jest transformacją cechowania skąd wynika, że obserwable Diraca ulegają „zamrożeniu”. Jest to tak zwany „problem czasu”.

W modelu Giesel i Thiemanna problem ten jest rozwiązany przy pomocy formalizmu relacyjnych obserwabli Diraca, nazywanych również „częściowymi” ([5], [6], [7], [8]). Podstawowa idea, na której opiera się ten formalizm polega na tym, że część pól przejmuje rolę dynamicznie sprzężonych obserwatorów, względem których mierzymy ewolucję pozostałych fizycznych stopni swobody. W formalizmie, tym czasoprzestrzeń wyłania się w efekcie badania relacji pomiędzy polami. Skutecznym narzędziem pozwalającym zdefiniować relacyjną dynamikę jest proces deparametryzacji ([9], [10], [11], [12]). Podejście takie, pozwala przedstawić ogólną teorię względności jako teorię z nieznikającym fizycznym hamiltonianem, który nie zależy od czasu relacyjnego. Wszystko to jest realizowane na poziomie klasycznym, a kwantyzacja jest kolejnym krokiem. W podejściu Browna – Kuchara zaś, formalizm relacyjny sam wyłania się z teorii kwantowej.

1.2 Najważniejsze wyniki pracy

W poniższej pracy przeprowadzona jest do końca procedura Diraca konstrukcji teorii kwantowej z teorii klasycznej z więzami pierwszego rodzaju. Skonstruowany model opisuje sprzężone ze sobą pola grawitacyjne i bezmasowe pole Kleina – Gordona (w niektórych częściach pracy rozszerzamy badania do przypadku ogólnego pola KG). Jest to drugi w literaturze całkowicie scharakteryzowany kanoniczny model kwantowy pola grawitacyjnego ze wszystkimi lokalnymi stopniami swobody.

Punktem wyjścia przeprowadzonej poniżej konstrukcji jest sformułowanie Kochara – Romana więzu skalarne układu ([26]). Schemat konstrukcji jest następujący:

- Sformułowane i rozwiązane zostają kwantowe więzy teorii kanonicznej. Są to więzy: Gaussa (Podrozdział 3.2) , wektorowy (Podrozdział 3.2) i skalarny (Podrozdział 3.3).
- W przestrzeni rozwiązań więzów wprowadzony zostaje fizyczny iloczyn Hilberta (Podrozdział 3.3).
- Znalezione zostają wszystkie kwantowe obserwable komutujące z operatorami więzów – obserwable Diraca (Podrozdział 3.4).
- Zbadane jest działanie kwantowych obserwabli na rozwiązanie kwantowych więzów (Podrozdział 3.4).
- Postać obserwabli Diraca wykazuje istnienie naturalnej 1– wymiarowej grupy automorfizmów. Własność ta zostaje wykorzystana do definicji dynamicznej ewolucji.
- Znaleziony zostaje kwantowy hamiltonian generujący dynamiczną ewolucję (Podrozdział 3.5).
- Scharakteryzowane zostaje działanie kwantowego hamiltonianu na rozwiązania więzów kwantowych (Podrozdział 3.5).
- Wykazana zostaje równoważność wyprowadzonego modelu z teorią zdefiniowaną w przestrzeni stanów kwantowych teorii pola grawitacyjnego bez materii spełniających więzy wektorowy (ale nie skalarny) i ewoluujących względem uzyskanego hamiltonianu fizycznego (Podrozdział 3.5).
- Do opisu stanów i operatorów bezźródłowego pola grawitacyjnego zastosowany jest formalizm pętlowej grawitacji kwantowej. W szczególności podana jest regularyzacja prowadząca do wyrażenia nowego fizycznego hamiltonianu przez znane operatory pętlowej grawitacji kwantowej (Podrozdział 4.5).
- Zaproponowane jest nowe wyprowadzenie kwantowego operatora więzu skalarnego bezźródłowej grawitacji alternatywne do wyprowadzenia Thiemanna (Podrozdział 4.6).

Podsumowując, ze znalezionych rozwiązań w teorii kwantowej i przeprowadzonej konstrukcji wyłania się postać teorii łącząca ze sobą elementy klasycznego sformułowania Kuchara – romano oraz heurystycznego modelu fizycznego czasu autorstwa Rovelliego i Smolina ([25]). Prezentowane tutaj wyniki zostały opublikowane w dwóch artykułach naukowych [13] oraz [14].

1.3 Aktualne wyzwania

Zastosowanie kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej do tworzenia modelu niesie ze sobą pewne konsekwencje, które ciągle wymagają badań i stanowią ciekwe wyzwanie dla kontynuacji niniejszych wyników. Polegają one na tym, że opis materii Modelu Standardowego musi zostać przeformułowany w sposób zgodny z wynikami kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Wynika to z faktu, że standardowy opis materii z kwantowej teorii pola zdefiniowanej na rozmaitości Minkowskiego jest niekompatybilny z wymaganiami pętlowej grawitacji kwantowej. Dlatego w oparciu o prezentowane podejście, kwantowa grawitacja nie daje się sprząć z Modelem Standardowym w jego obecnym sformułowaniu.

Rozszerzenie prezentowanych wyników o pozostałe pola Modelu Standardowego i znalezienie spójnego obrazu obu modeli jest wielkim wyzwaniem na przyszłość. Mamy nadzieję, że niniejsza praca przyczyni się do dalszego rozwijania prezentowanego kierunku badań.

1.4 Plan pracy i uwagi

1.4.1 Zawartość rozdziałów

Celem niniejszej pracy jest wprowadzenie kwantowego modelu pola skalarnego sprzężonego z polem grawitacyjnym. W celu stworzenia pełnego modelu wykorzystamy techniki kwantyzacji pętlowej.

Wybieramy taki sposób zaprezentowania wyników, który pozwoli wydzielić ogólny schemat postępowania niezależny od tego czy wybieramy kanoniczną pętlową grawitację kwantową czy nie. W rzeczywistości będzie to centralny punkt naszej pracy, gdzie prezentujemy pełny model kwantowy wymieniając niezbędne obiekty matematyczne i określając rela-

cję między nimi. Oddzielnym punktem naszej prezentacji będzie pokazanie, w jaki sposób otrzymujemy te obiekty w formalizmie kanonicznej pętłowej grawitacji kwantowej. W szczególności opiszemy konstrukcję operatora fizycznego Hamiltonianu.

Niniejsza praca składa się z pięciu rozdziałów.

Rozdział 1 jest rozdziałem wstępnym i zawiera dwa podrozdziały opisujące motywację, schemat pracy oraz uwagi o notacji. Dodatkowo Podrozdział 1.2 opisuje najważniejsze wyniki pracy.

Rozdział 2 opisuje klasyczny model pola skalarnego sprzężonego z polem grawitacyjnym. Składa się ona z trzech podrozdziałów. Podrozdział 2.1 opisuje kanoniczne sformułowanie ogólnej teorii względności. Podrozdział 2.2 zawiera wprowadzenie zmiennych Ashtekara. W podrozdziale 2.3 natomiast przedstawiona jest deparametryzacja klasycznej ogólnej teorii względności przy użyciu pola skalarnego.

Rozdział 3 zawiera 6 podrozdziałów i opisuje model kwantowy. Zawiera opis niezbędnych obiektów, których konstrukcja w oparciu o kanoniczną pętłową grawitację kwantową zostanie dokonana w kolejnej części. Podrozdział 3.1 opisuje kinematyczne podstawy nowego modelu. W kolejnym podrozdziale 3.2 opisujemy sposób, w jaki możemy „formalnie” rozwiązać więzy gaussowskie i wektorowe ogólnej teorii względności. Więzom skalarnym i ich rozwiązaniu poświęcony jest kolejny podrozdział 3.3. W podrozdziale 3.4 wprowadzamy pojęcie kwantowej obserwacji Diraca, zaś w podrozdziale 3.5 opisujemy ich ewolucję. Podrozdział 3.6 stanowi podsumowanie tej części.

Rozdział 4 opisuje zastosowanie technik pętlowych. Zawiera sześć rozdziałów. W podrozdziale 4.1 opisana jest kinematyczna przestrzeń Hilberta. Podrozdział 4.2 opisuje generowane przez więzy gaussowskie transformacje Yanga–Millsa. Działanie więzów dyfemorficznych (wektorowych) opisane jest w podrozdziale 4.3. Działanie operatorów na przestrzeniach niezmienniczych względem więzów opisanych w poprzednich rozdziałach opisane jest w podrozdziale 4.4. Przestrzeń fizyczna i dynamika opisane są w podrozdziale 4.5. Podrozdział 4.6 zawiera oryginalną propozycję konstrukcji operatora więzów

skalarnych. Podejście to jest obecnie przedmiotem naszych badań.

Rozdział 5 zawiera uwagi podsumowujące.

Praca zawiera jeden Dodatek, opisujący kalkulację nawiasu Poissona nowych więzów skalarnych dla pola skalarnego z potencjałem.

1.4.2 Uwagi o języku i notacji

Wybór języka polskiego, jako języka w jakim pisana jest ta rozprawa jest świadomym wyborem autora. Dokonałem go pod wpływem rozmów, jakie toczyłem z prof Stanisławem Rohozińskim, który przekonał mnie, że naszą odpowiedzialnością jest nie tylko rozwój nauki, ale również rozwój języka polskiego, który ma tą naukę opisywać.

Dlatego podejmuję to wyzwanie w niniejszej pracy, efektem czego są miejscami propozycje językowe, które mają odpowiadać utartym już angielskim zwrotom, jakie używamy w publikacjach.

Dlatego w pracy tej, zastępuję angielską nazwę *loop quantum gravity* polskim odpowiednikiem „kanoniczna pętlowa grawitacja kwantowa”.

W miejsce angielskiego słowa *observable* postanowiłem użyć spolszczonego wyrazu „obserwabla”.

Rozdział 2

Analiza na poziomie klasycznym

„ Nie jest zresztą ważne, jak zdefiniujemy czas, ale raczej, jak go będziemy mierzyć. Jedną z metod mierzenia czasu jest wykorzystanie jakiegoś powtarzającego się regularnie zjawiska, czegoś okresowego (periodycznego). [...] ... to znaczy wierzymy, że określają one jednakowe przedziały czasu, chociaż nie stwierdziliśmy, czy oba zjawiska są „naprawdę” okresowe. [...] Możemy najwyżej powiedzieć, że pewne zjawisko wykazuje podobną regularność jak jakieś inne. [...]”

„Feynmana Wykłady z Fizyki” tom I, część 1

Podstawowa lekcja wypływająca z ogólnej teorii względności Alberta Einsteina jest taka, że grawitacja to geometria. Nie istnieje siła grawitacyjna, a ruch cząstek niepoddawanych działaniu innej siły to ruch swobodny po krzywych geodezyjnych.

Ogólna teoria względności wyznacza zakrzywioną geometrię. Staje się ona ściśle sprzężona z materialną zawartością Wszechświata. Z biernego obiektu fizyki przed ogólną teorią względności zostaje czynnym uczestnikiem zdarzeń podlegających prawom fizyki.

Dynamika ogólnej teorii względności jest całkowicie opisana za pomocą równań Einsteina

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}.$$

Z różnych jednak względów takie sformułowanie sprawia wiele trudności. Z punktu widzenia definicji tensora energii - pędu i zrozumienia sposobu sprzęgania się geometrii z

materią dużo bardziej odpowiednie wydaje się sformułowanie ogólnej teorii względności za pomocą funkcji Lagrange’a i zasady najmniejszego działania. Również kwantyzacja w oparciu o całki po trajektoriach wymaga takiego sformułowania klasycznej teorii.

Kanoniczne podejście do ogólnej teorii względności (podejście hamiltonowskie) pozwala spojrzeć na równania Einsteina, jako na równania opisujące „ewolucję w czasie” pewnych wielkości. Można je wyprowadzić z formalizmu Lagrange’a za pomocą transformacji Legendera. Stanowi ono również centralne miejsce w kanonicznej metodzie kwantyzacji.

Kanoniczne podejście ujawnia również pewne trudności interpretacyjne. Okazuje się, że ogólna teoria względności jest teorią z więzami, a kanoniczny Hamiltonian jest liniową kombinacją tych więzów. Problem ten, zwany potocznie problemem czasu, przenosi się na poziom kwantowy poprzez niemożliwość prostego zdefiniowania nietrywialnych kwantowych obserwabli Diraca.

Ponieważ rozwiązanie problemu czasu, zdefiniowanie rodziny kwantowych obserwabli Diraca oraz fizycznego Hamiltonianu generującego dynamikę jest głównym tematem tej pracy, pierwsza część tej rozprawy poświęcona jest odpowiedniemu przeformułowaniu ogólnej teorii względności. Głównym wynikiem niniejszej części będzie sformułowanie klasycznej teorii opisanej w formalizmie kanonicznym, której przestrzeń fazowa stanowi podzbiór pełnej przestrzeni fazowej wynikającej z lagranżowskiego opisu ogólnej teorii względności. Poza tym równania więzów są równoważne standardowym równaniom więzów wynikającym z formalizmu ADM, ale definiują algebrę Liego. Ponadto w nowym ujęciu grawitacja sprzężona z bez masowym polem skalarnym będzie teorią deparametryzowalną, co pozwoli zdefiniować fizyczną ewolucję w oparciu o tzw. zmienne relacyjne.

2.1 Formalizm kanoniczny w zmiennych ADM

Będąc tematem pracy konstrukcja kwantowego modelu grawitacji sprzężonej z polem skalarnym, w żaden sposób nie wyróżnia zmiennych Arnowitta, Desera i Misnera zwanych ADM. Wybór zmiennych opisujących geometryczną część modelu Wszechświata uzależniony jest od formalizmu kwantowego wybranego do jej kwantowego opisu. W przypadku

prezentowanego tutaj modelu wykorzystującego formalizm kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej, takimi zmiennymi będą zmienne Ashtekara.

Zmienne ADM posłużą jednak za punkt wyjścia i łącznik prezentowanego modelu z kwantyzacją Wheelera-DeWitta. Po przejściu do nowych zmiennych, w rozważanym przypadku zmiennych Ashtekara, zachowamy odniesienie do tego modelu, traktując zmienne ADM jako odpowiednie funkcjonały zmiennych Ashtekara.

2.1.1 Różne opisy ogólnej teorii względności

Ogólna teoria względności ma na celu wyznaczenie geometrii Wszechświata. Zastępuje ona pojęcie siły grawitacyjnej, która traci swoje klasyczne znaczenie. Geometria ta jest ściśle związana z materią i z jednej strony określa jej konfigurację, a z drugiej strony jest przez nią wyznaczona.

Sprężenie geometrii z materią wyrażają równania Einsteina

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

gdzie, jako podstawową zmienną geometryczną bierzemy tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ na 4-wymiarowej rozmaitości $\mathcal{M}$ modelującej czasoprzestrzeń.

Sposób, w jaki wyrażone jest sprzężenie materii z geometrią w równaniach Einsteina polega na tym, że tensor Einsteina

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} [g_{\mu\nu}], \quad (2.2)$$

jest wyznaczany z metryki. Natomiast tensor energii-pędu $T_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} [\phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.3)$$

zależy również od konfiguracji pola materii symbolizowanej przez ϕ . To ta obecność $g_{\mu\nu}$ w (2.3) jest największą komplikacją do zrozumienia natury sprzężenia geometrii z materią.

Formalizm Lagrange'a dostarcza prostszego sposobu patrzenia na sposób w jaki geometria i konfiguracja materii wypełniającej Wszechświat sprzęgają się w obrębie teorii grawitacji.

Ich sprzężenie wyraża się za pomocą dodawania do siebie członów działania opisujących poszczególne rodzaje materii.

Ograniczając się do opisu grawitacji sprzężonej z polem skalarnym ϕ , szukamy funkcjonału

$$S = S[\phi, g_{\mu\nu}], \quad (2.4)$$

którego znikanie wariacji, określać będzie konfigurację pól ϕ i $g_{\mu\nu}$ na $\mathcal{M}$. Sprzężenie geometrii z materią jest widoczne w postaci tego działania, które możemy przedstawić, jako sumę członu geometrycznego i członu materii

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = S_{gr}[g_{\mu\nu}] + S_\phi[\phi, g_{\mu\nu}]. \quad (2.5)$$

Wariacja tego działania daje równania pól

$$\delta_\phi S[\phi, g_{\mu\nu}] = 0, \quad \delta_g S[\phi, g_{\mu\nu}] = 0. \quad (2.6)$$

Podanie postaci S_{gr} i S_ϕ określa prawa fizyczne.

Zarówno zmienne opisujące część grawitacyjną jak i postać działania nie są jednoznaczne.

Wybieramy tutaj najprostszą postać tego działania, czyli działanie Einsteina - Hilberta

$$S_{gr}[g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R[g_{\mu\nu}], \quad (2.7)$$

gdzie przez g oznaczamy wyznacznik $\det g_{\mu\nu}$, a R oznacza skalar Ricciego.

Naszą uwagę ograniczymy jedynie do pola skalarnego z potencjałem. Działanie opisujące materialną część naszej teorii przyjmuje wtedy postać

$$S_\phi[\phi, g_{\mu\nu}] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{2} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + 2\sqrt{-g} V[\phi]) \right). \quad (2.8)$$

Standardowe obliczenia wariacji działania zdefiniowanego za pomocą powyższych równań, które możemy znaleźć w [27], definiują równania określające fizyczną konfigurację pól

$$\delta_\phi S[\phi, g_{\mu\nu}] = \delta_\phi S_\phi[\phi, g_{\mu\nu}] = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi} = 0, \quad (2.9)$$

$$\delta_g S[\phi, g_{\mu\nu}] = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

gdzie

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi[\phi, g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.11)$$

Powyższe równania odpowiadają równaniom pola skalarnego potencjałem oraz równaniom Einsteina.

2.1.2 Wyprowadzenie formalizmu kanonicznego z zasady najmniejszego działania

Równania Einsteina traktujemy, jako podstawowe równania opisujące oddziaływanie grawitacji z materią. Za jego pomocą dokonujemy weryfikacji dowolnego innego sformułowania jako, że ogólna teoria względności została dokładnie zweryfikowana eksperymentalnie. Przedstawione w poprzednim paragrafie sformułowanie ogólnej teorii względności z polem skalarnym jest takim równoważnym i fizycznie nie rozróżnialnym opisem.

Formalizm kanoniczny jest podstawą kanonicznego procesu kwantyzacji. Pozwala interpretować odpowiadającą mu teorię kwantową. Taki punkt widzenia pozwala przedstawić grawitację, jako ewolucję w czasie 3-wymiarowych obiektów określonych na powierzchni Cauchy’ego globalnie hiperbolicznej czasoprzestrzeni.

Ujęcie to ujawnia również problemy interpretacyjne wynikające z pojawienia się więzów pierwszego rodzaju, których liniowa kombinacja stanowi kanoniczny Hamiltonian teorii. Problemem tym, określanym potocznie mianem problemu czasu i jego rozwiązaniem będziemy zajmować się w kolejnych rozdziałach. Celem kolejnych trzech paragrafów będzie jego ściśle zdefiniowanie. Wyprowadzona zostanie również algebra więzów.

Punktem wyjścia będzie lagranżowskie sformułowanie za pomocą działania zdefiniowanego w poprzednim paragrafie równaniami (2.5), (2.7) i (2.9). Szczegóły opisanego wyprowadzenia pochodzą z [27] oraz [8].

Działanie S jest funkcjonałem konfiguracji pól określonych na 4-wymiarowej rozmaitości

$\mathcal{M}$ modelującej czasoprzestrzeń,

$$\phi : \mathcal{M} \ni p \rightarrow \phi(p) \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

$$g_{\mu\nu} : \mathcal{M} \ni p \rightarrow g_{\mu\nu}(p) \in \mathcal{S}(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M}) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} S &= S[\phi, g_{\mu\nu}] = \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \sqrt{-g} V[\phi] \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Zastosowanie formalizmu kanonicznego wymaga rozbicia takiego opisu na czas i przestrzeń. Pierwszym krokiem będzie przyjęcie założenia, że czasoprzestrzeń $\mathcal{M}$ możemy przedstawić w postaci

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times M,$$

gdzie M jest 3-wymiarową rozmaitością Euklidesową. Wiadomo, że własność taką posiada każda czasoprzestrzeń, która jest globalnie hiperboliczna. W kanonicznym ujęciu będziemy chcieli 4-wymiarowe obiekty na $\mathcal{M}$ przedstawić, jako 3-wymiarowe obiekty na M ewoluujące w czasie $\mathbb{R}$.

Wybór dyfeomorfizmu opisanego powyżej nie jest jednoznaczny i jest objawem kowariantności rozpatrywanej teorii. W pierwszej kolejności dokonujemy foliacji czasoprzestrzeni $\mathcal{M}$ za pomocą powierzchni Cauchy'ego M_t poprzez wybór globalnej funkcji czasu

$$t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Zakładamy, że wyboru dokonujemy w taki sposób, że wszystkie M_t są dyfeomorficzne z 3-wymiarową rozmaitością Euklidesową M , oraz są typu przestrzennego.

Następnie dokonujemy identyfikacji punktów na różnych liściach M_t , za pomocą lini całkowych pola wektorowego

$$t^\mu : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}, \quad (2.16)$$

które określa strumień czasu. Zakładamy, że pole t^μ spełnia warunek

$$t^\mu \nabla_\mu t = 1. \quad (2.17)$$

Otrzymujemy w ten sposób dyfeomorfizm

$$X : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.18)$$

za pomocą, którego będziemy przedstawiać 3-wymiarowe obiekty na M , zmieniające się w czasie $\mathbb{R}$.

Dyfeomorfizm (2.18) wraz z tensorem metrycznym $g_{\mu\nu}$ wyznaczają jednoznacznie na $\mathcal{M}$ następujące pola wektorowe i funkcje

$$\left\{ \begin{array}{l} X : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathcal{M} \\ g_{\mu\nu} : \mathcal{M} \ni p \rightarrow g_{\mu\nu}(p) \in \mathcal{S}(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^\mu : \mathcal{M} \ni p \rightarrow n^\mu(p) \in T_p\mathcal{M} \\ N^\mu : \mathcal{M} \ni p \rightarrow N^\mu(p) \in T_p\mathcal{M} \\ N : \mathcal{M} \ni p \rightarrow N(p) \in \mathbb{R} \end{array} \right\}, \quad (2.19)$$

gdzie n^μ jest polem wektorowym wektorów ortonormalnych do liści foliacji przechodzącego przez dany punkt. Mamy unormowanie

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1, \quad (2.20)$$

a definicje N^μ zwanego wektorem przesunięcia i N zwaną funkcją lapsu znajdują się w dalszej części tekstu.

Dowolny tensor $T^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$, którego zwężenie z n^μ znika, tzn.

$$T^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} n_\mu \dots n_\nu n^\rho \dots n^\sigma = 0, \quad (2.21)$$

nazywamy tensorem przestrzennym. Tensor taki jest obrazem trójwymiarowego tensora $T^{a\dots b}_{c\dots d}$ zdefiniowanego na M . Otrzymujemy go za pomocą odpowiedniego zanurzenia $M \rightarrow M_t$ otrzymanego z dyfeomorfizmu X .

Interpretacja 4-wymiarowych obiektów zdefiniowanych na $\mathcal{M}$ jako ewolucję 3-wymiarowych obiektów zdefiniowanych na rozmaiłości modelującej powierzchnię stałego czasu M w czasie $\mathbb{R}$, sprowadza się do przedstawienia ich, jako grupy obiektów przestrzennych zmieniających się w czasie posiadających tą samą informację. W dalszej części na konkretnych przykładach pokazane jest jak to osiągnąć dla interesujących nas wielkości.

Ewolucja w czasie, czyli różniczkowanie po t w tym podejściu odpowiada przesuwaniu się wzdłuż krzywej całkowej pola wektorowego t^μ , a więc odpowiedniej pochodnej Liego wzdłuż t^μ ,

$$\frac{d}{dt} T^{a\dots b}_{c\dots d} = \dot{T}^{a\dots b}_{c\dots d} \rightarrow \mathcal{L}_{t^\mu} T^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}. \quad (2.22)$$

Kolejno przedstawiamy w ten sposób elementy występujące w (2.14). Definiujemy potrzebne obiekty.

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.23)$$

który definiuje Euklidesową metrykę na każdym liściu foliacji M_t . Metryka ta jest przestrzenna, $q_{\mu\nu}n^\mu = 0$ i może zostać cofnięta do M . Otrzymujemy w ten sposób zależną od czasu rodzinę tensorów metrycznych na M ,

$$q_{\mu\nu} \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow q_{ab}(t) \text{ na } M. \quad (2.24)$$

Podnosząc jeden z indeksów otrzymujemy projektor $q_\mu{}^\nu$ rzutujący dowolny 4-wymiarowy tensor na tensor przestrzenny. Jeżeli ∇ oznacza pochodną kowariantną wyznaczoną przez $g_{\mu\nu}$, to otrzymujemy kolejny tensor przestrzenny określający krzywiznę zewnętrzną liścia M_t

$$K_{\mu\nu} := q_\mu{}^\sigma q_\nu{}^\rho \nabla_\sigma n_\rho. \quad (2.25)$$

Podobnie jak $q_{\mu\nu}$ jest on przestrzenny i symetryczny ([27]), stąd

$$K_{\mu\nu} \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow K_{ab}(t) \text{ na } M. \quad (2.26)$$

Wielkości N^μ i N , które pojawiają się w (2.19) definiujemy, jako część styczną i ortogonalną do liścia w rozkładzie pola wektorowego t^μ ,

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu, \quad (2.27)$$

oraz

$$N^\mu n_\mu = 0. \quad (2.28)$$

Możemy je przedstawić, jako wielkości na M ewoluujące w czasie

$$N^\mu, N \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow N^a(t), N(t) \text{ na } M. \quad (2.29)$$

W dalszej części pracy za pomocą D oznaczamy pochodną kowariantną na M określoną za pomocą q_{ab} . Korzystając z [27] i [3] łączymy geometryczne obiekty zdefiniowane na M z tymi zdefiniowanymi na $\mathcal{M}$. Jest to standardowa procedura formalizmu ADM. Łącznikami są dyfeomorfizmy $M \rightarrow M_t$ wyznaczone przez dyfeomorfizm X z (2.19). Jeżeli

$$X : \mathbb{R} \times M \ni (t, x) \rightarrow X(t, x) = p \in \mathcal{M}, \quad (2.30)$$

to $M \rightarrow M_t$ definiujemy kładąc $t = \text{const}$

$$M \ni x \rightarrow X(t, x) \in M_t. \quad (2.31)$$

W ten sposób otrzymujemy następujące związki obiektów występujących w działaniu (2.14).

W pierwszej kolejności zamieniamy całkowanie

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x. \quad (2.32)$$

Ponieważ tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ możemy rozłożyć w następujący sposób [3]

$$\begin{bmatrix} g_{\mu\nu} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -N^2 + q_{ab}N^aN^b & q_{ab}N^b & \dots \\ q_{ab}N^b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & q_{ab} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

widzimy, że możemy przedstawić go, jako ewolucję w czasie następujących wielkości

$$g_{\mu\nu} \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow N(t), N^a(t), q_{ab}(t) \text{ na } M. \quad (2.34)$$

Na podstawie (2.33) mamy

$$\sqrt{-g} = N \cdot \sqrt{q}. \quad (2.35)$$

Równanie Gaussa-Coddaci'ego łączy 3-wymiarowy skalar Riccego wyznaczony za pomocą koneksji D z 4-wymiarowym wynikającym z koneksji ∇ ,

$$R^{(4)} = R^{(3)} + K_{\mu\nu} - K^2 - \{ \text{wyrazy brzegowe w całce działania} \}. \quad (2.36)$$

Stąd możemy przedstawić

$$R^{(4)} \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow R^{(3)}(t), K_{ab}(t) \text{ na } M. \quad (2.37)$$

Przechodzimy następnie do części związanej z obecnością pola skalarnego. W oczywisty sposób możemy przedstawić

$$\phi \text{ na } \mathcal{M} \longrightarrow \phi(t) \text{ na } M. \quad (2.38)$$

Odwracając macierz (2.33) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & g^{\mu\nu} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^a}{N^2} & \cdots & \\ \frac{N^a}{N^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Stąd obliczamy wyrażenie występujące w działaniu

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = -\frac{1}{N^2} \dot{\phi}^2 + 2 \frac{N^a}{N^2} D_a \phi \dot{\phi} + \left(q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) D_a \phi D_b \phi. \quad (2.40)$$

Poniższa zależność pozwoli znaleźć pęd kanoniczny sprzężony do q_{ab} , ponieważ łączy pochodną po czasie z wyrażeniami występującymi w działaniu

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a). \quad (2.41)$$

Podsumowując wszystkie powyższe wyniki możemy zapisać działanie (2.14) w postaci, gdzie za zmienne konfiguracyjne będziemy uważać $N(t)$, $N^a(t)$ i $q_{ab}(t)$ w miejsce $g_{\mu\nu}$ oraz $\phi(t)$ w miejsce ϕ . Otrzymujemy następującą postać działania

$$\begin{aligned} S[q_{ab}, \dot{q}_{ab}, N^a, \dot{N}^a, N, \dot{N}, \phi, \dot{\phi}] &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x \sqrt{q} N (R^{(3)} + K_{ab} K^{ab} - K^2) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x \frac{1}{2} \sqrt{q} N \left(-\frac{1}{N^2} \dot{\phi}^2 + 2 \frac{N^a}{N^2} D_a \phi \dot{\phi} + \left(q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) D_a \phi D_b \phi - 2V[\phi] \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Kolejny krok wymaga znalezienia pędów kanonicznie sprzężonych do zmiennych konfiguracyjnych i przedstawienia działania, jako funkcjonału położeń i pędów w miejsce prędkości uogólnionych. W pierwszej kolejności rozpatrujemy zmienne grawitacyjne i odpowiadające im pędy.

Pęd sprzężony do q_{ab} znajdujemy zgodnie z definicją ze wzoru

$$p^{ab} = \frac{\delta S}{\delta \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab}), \quad (2.43)$$

gdzie wykorzystaliśmy (2.41). Natomiast pędy kanonicznie sprzężone do N i N^a znikają, ponieważ $\dot{N}$ i $\dot{N}^a$ nie występują w działaniu

$$p = \frac{\delta S}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (2.44)$$

$$p_a = \frac{\delta S}{\delta \dot{N}^a} = 0. \quad (2.45)$$

Kolejno rozpatrujemy część pola skalarnego i pęd kanonicznie sprzężony do ϕ

$$\pi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} = \sqrt{q} \frac{\dot{\phi}}{N} - \sqrt{q} \frac{1}{N} N^a D_a \phi. \quad (2.46)$$

Przekształcenie działania (2.14) za pomocą powyżej wyprowadzonych wzorów prowadzi do następującego działania będącego funkcjonałem kanonicznych położeń i pędów

$$\begin{aligned} S[q_{ab}, p^{ab}, N^a, N, \phi, \pi] = & \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x \left(\dot{q}_{ab}(x) p^{ab}(x) + \dot{\phi}(x) \pi(x) \right) + \\ & - \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x N \left(-\sqrt{q} R + \frac{p^{ab} p_{ab}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\sqrt{q}} \right) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x N^a (-2q_{ab} D_c p^{cd}) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x N \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\sqrt{q}} + \frac{1}{2} \sqrt{q} q^{ab} D_a \phi D_b \phi + V[\phi] \right) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x N^a \pi D_a \phi. \end{aligned} \quad (2.47)$$

W powyższym równaniu zaniedbujemy wyrazy brzegowe. Zarówno $\dot{q}_{ab}(x)$ jak i $\dot{\phi}(x)$ traktujemy, jako funkcjonały położeń i pędów kanonicznie do nich sprzężonych. Możemy z niego odczytać Hamiltonian kanoniczny, który jest całką po przestrzeni M i możemy go zapisać w następującej postaci

$$h_{kin} = \int_M d^3x N(x) \cdot C(x) + N^a(x) \cdot C_a(x), \quad (2.48)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$C(x) = C^{(gr)}(x) + C^{(\phi)}(x), \quad (2.49)$$

gdzie

$$C^{(gr)}(x) = -\sqrt{q} R + \frac{p^{ab} p_{ab}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\sqrt{q}}, \quad (2.50)$$

$$C^{(\phi)}(x) = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\sqrt{q}} + \frac{1}{2} \sqrt{q} q^{ab} D_a \phi D_b \phi + \sqrt{q} V[\phi]. \quad (2.51)$$

Podobnie

$$C_a(x) = C_a^{(gr)}(x) + C_a^{(\phi)}(x), \quad (2.52)$$

gdzie

$$C_a^{(gr)}(x) = -2q_{ab} D_c p^{cd}, \quad (2.53)$$

$$C_a^{(\phi)}(x) = \pi D_a \phi. \quad (2.54)$$

Powyższy Hamiltonian nie zależy od pędów kanonicznie sprzężonych do N i N^a w związku z czym ewolucja tych zmiennych nie jest fizycznie zdefiniowana. W rzeczywistości są one dowolne i określają sposób foliacji $\mathcal{M}$.

Wariacja h_{kin} względem N i N^a określa równania definiujące więzy

$$C(x) = 0, \quad (2.55)$$

$$C_a(x) = 0. \quad (2.56)$$

Kanoniczna postać nawiasów Poissona, które odczytujemy z postaci działania

$$\{q_{ab}(x), p^{cd}(y)\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x, y), \quad (2.57)$$

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(x, y), \quad (2.58)$$

określają ewolucję pozostałych zmiennych

$$\dot{q}_{ab}(x) = \{q_{ab}(x), h_{kin}\}, \quad \dot{p}^{ab}(x) = \{p^{ab}(x), h_{kin}\}, \quad (2.59)$$

$$\dot{\phi}(x) = \{\phi(x), h_{kin}\}, \quad \dot{\pi}(x) = \{\pi(x), h_{kin}\}. \quad (2.60)$$

Równania (2.55), (2.56), (2.59) i (2.60) są równoważne z równaniami Einsteina. W dalszej części pracy przestrzeń fazową, której punkty stanowią konfiguracje pól na 3 wymiarowej rozmaitości M $(q_{ab}(x), p^{ab}(x), \phi(x), \pi(x))$ będziemy oznaczać Γ . Jest ona iloczynem części geometrycznej $\Gamma^{(gr)}$ składającej się z $(q_{ab}(x), p^{ab}(x))$ oraz części materii $\Gamma^{(\phi)}$ składającej się z $(\phi(x), \pi(x))$.

2.1.3 Więzy ogólnej teorii względności

$\dot{N}(x)$ i $\dot{N}^a(x)$ nie występują w działaniu (2.42), z czego wynika występowanie więzów w rozważanej teorii. Zmienne konfiguracyjne $N(x)$ i $N^a(x)$ nie niosą ze sobą informacji fizycznej, a oznaczają jedynie wybór foliacji czasoprzestrzeni i pełnią rolę mnożników Lagrange'a w działaniu. W konsekwencji tego otrzymujemy więzy skalarne

$$C(x) = C^{(gr)}(x) + C^{(\phi)}(x) = 0, \quad (2.61)$$

oraz więzy wektorowe

$$C_a(x) = C_a^{(gr)}(x) + C_a^{(\phi)}(x) = 0. \quad (2.62)$$

Podstawowe i niezbędne elementy kwantyzacji teorii z więzami przedstawiamy za [46]. W celu uczynienia pracy maksymalnie przejrzystej ograniczymy się jedynie do faktów niezbędnych przy konstrukcji prezentowanego modelu.

Ponieważ przestrzeń fazowa rozważanej teorii jest nieskończenie wymiarową przestrzenią konfiguracji pól $q_{ab}(x)$, $\phi(x)$ oraz gęstości $p^{ab}(x)$, $\pi(x)$ na M , w miejsce kanonicznych nawiasów Poissona posługujemy się tzw. wersjami rozsmarowanymi wynikającymi z następującej definicji

$$\begin{aligned} \{G, G'\} = & \int_M d^3x \left(\frac{\delta G}{\delta q_{ab}(x)} \frac{\delta G'}{\delta p^{ab}(x)} - \frac{\delta G}{\delta p^{ab}(x)} \frac{\delta G'}{\delta q_{ab}(x)} \right) + \\ & + \int_M d^3x \left(\frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G'}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta G}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G'}{\delta \phi(x)} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Zakładamy, że dokonaliśmy już redukcji przestrzeni fazowej do $(q_{ab}(x), \phi(x), p^{ab}(x), \pi(x))$ eliminując нефизyczne zmienne $N(x)$ i $N^a(x)$. G i G' oznaczają funkcjonały na tej przestrzeni

$$G = G[q_{ab}(x), \phi(x), p^{ab}(x), \pi(x)], \quad G' = G'[q_{ab}(x), \phi(x), p^{ab}(x), \pi(x)].$$

Równania więzów generują transformację przestrzeni fazowej, które są transformacjami cechowania. Oznacza to, że konfiguracje pól, które leżą na tej samej orbicie takiej transformacji są fizycznie równoważne. W naszym przypadku nawet po redukcji przestrzeni fazowej o N i N^a pozostaje swoboda związana z obecnością więzów (2.61) i (2.62).

Podstawowe własności więzów określają:

- Alebra więzów określona za pomocą nawiasów Poissona.
- Generowane przez nie transformacje przestrzeni fazowej.

W przypadku więzów grawitacyjnych powyższe własności wyprowadzamy bezpośrednim rachunkiem. Stąd więzy wektorowe generują dyfeomorfizmy styczne do powierzchni liścia. Więzy skalarne generują dyfeomorfizmy prostopadłe do powierzchni liścia, pod warunkiem, że znajdujemy się na przestrzeni rozwiązań więzów.

Bezpośredni rachunek prowadzi również do algebry więzów

$$\{C_a[N^a], C_b[M^b]\} = C_a [N^b D_b M^a - M^b D_b N^a] , \quad (2.64)$$

$$\{C[N], C_a[M^a]\} = -C [M^a D_a N] , \quad (2.65)$$

$$\{C[N], C[M]\} = C_a [q^{ab} (N D_b M - M D_b N)] . \quad (2.66)$$

Przyjeliśmy następujące oznaczenia

$$C[N] := \int_M d^3x N(x) C(x), \quad (2.67)$$

$$C_a[N^a] := \int_M d^3x N^a(x) C_a(x). \quad (2.68)$$

We wzorze (2.66) nie mamy stałej, a funkcję struktury, co sprawia, że obliczona algebra nie jest algebrą Liego.

2.1.4 Znikający Hamiltonian i problem czasu w ogólnej teorii względności

Przedstawienie ogólnej teorii względności w formalizmie kanonicznym ujawnia dodatkowe komplikacje. Potocznie nazywamy ją problemem czasu.

Ogólna teoria względności w formalizmie kanonicznym okazuje się teorią z więzami. Ponieważ nawiasy Poissona pomiędzy więzami nie generują dodatkowych więzów mówimy, że są to więzy pierwszej klasy.

Wiemy, że takie więzy generują transformację cechowania, stąd punkty leżące na orbitach określają ten sam stan fizyczny układu. Dlatego obserwable Diraca, a więc funkcje na podprzestrzeni więzów przestrzeni fazowej, które mają fizycznie obserwowalne znaczenie muszą być stałe na tych orbitach. Oznacza to znikanie ich nawiasów Poissona z więzami

$$\{F, C[N]\} = 0, \quad (2.69)$$

$$\{F, C_a[N^a]\} = 0. \quad (2.70)$$

Z drugiej strony, kanoniczny Hamiltonian (2.48), którego rolą jest generowanie ewolucji w czasie, jest liniową kombinacją więzów. Wynika stąd, że po pierwsze, dla konfiguracji pól z podprzestrzeni rozwiązań więzów, czyli fizycznie nas interesującej, Hamiltonian znika. Po

drugie ewolucja w czasie pokrywa się z transformacją cechowania. Dlatego grawitacyjne obserwable nie ewoluują w czasie, a pozostają stałe.

Problem czasu stanowi nie tylko trudność interpretacji obserwowalnej lokalnie ewolucji, ale również stanowił blokadę na drodze do kanonicznej grawitacji kwantowej. W dalszej części tej pracy zastosujemy podejście oparte na zmiennych relacyjnych, aby poradzić sobie z tym problemem.

2.2 Przejście do zmiennych Ashtekara

Kanoniczna postać ogólnej teorii względności stanowi pierwszy krok na drodze kanonicznej kwantyzacji. Podejście takie zakończyło się niepowodzeniem ze względu na skomplikowaną, nieliniową postać Hamiltonianu dla grawitacji. Mimo to prace Wheelera i DeWitta były krokiem milowym naprzód. Dlatego kwantowanie kanoniczne zmiennych ADM będziemy nazywać kwantowaniem Wheelera-DeWitta.

Nowa kanoniczna przestrzeń fazowa prowadzona przez Ashtekara ([28], [29]) jest kolejnym dużym krokiem na drodze do kwantowej teorii grawitacji. Przedstawienie ogólnej teorii względności w zmiennych Ashtekara upodabnia ją do teorii Yanga-Milsa. To przedstawienie umożliwia również kwantyzację niezależną do metryki tła, co było dużym problemem w teorii polowych próbach kwantowania ogólnej teorii względności.

Wyprowadzenie zmiennych Ashtekara oraz ich zastosowanie do kwantyzacji ogólnej teorii względności znajduje się w podsumowującym artykule [1]. Jednak tutaj wyprowadzimy je za Thiemannem [3].

2.2.1 Rozszerzenie przestrzeni fazowej ADM

Podejście zaprezentowane w podręczniku Thomasa Thiemanna różni się od oryginalnego wyprowadzenia. Jednak ze względu na bezpośrednie uwidocznienie ze zmiennymi ADM to podejście wybieramy w tej pracy.

W miejsce wyprowadzenia zmiennych Ashtekara motywowanego postacią działania, wy-

bieramy podejście opierające się na transformacjach przestrzeni fazowej. Ponieważ rozważania tego paragrafu tyczą się jedynie zmiennych geometrycznych, możemy ograniczyć się do $\Gamma^{(gr)}$. Punktem wyjścia będzie przestrzeń fazowa, której punktami są pary pól $(q_{ab}(x), p^{ab}(x))$, gdzie

$$\mathbf{q}(x) = q_{ab}(x)dx^a \otimes dx^b \quad (2.71)$$

jest tensorem metrycznym na M . Pędem kanonicznie sprzężonym jest gęstość tensorowa w wadze 1,

$$\mathbf{p} = p^{ab}(x) \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}. \quad (2.72)$$

Kanoniczne nawiasy Poissona zapisujemy w postaci

$$\{q_{ab}(x), p^{cd}(y)\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x, y). \quad (2.73)$$

Dokonyjemy rozszerzenia powyższej przestrzeni fazowej. Rozszerzenie to będzie polegało na zastąpieniu tensora metrycznego polem triad $e_a^i(x)$ na M ,

$$q_{ab}(x) = \delta_{ij} e_a^i(x) e_b^j(x). \quad (2.74)$$

Pojawia się dodatkowa swoboda ze względu na obroty $SO(3)$ w przestrzeni wewnętrznej

$$e_a^i \rightarrow O_j^i e_a^j,$$

która powoduje, że możemy traktować e_a^i jako 1-formy o wartościach w algebrze Liego $su(2)$. W tym celu wykorzystujemy fakt, że reprezentacja dołączona grupy $SU(2)$ na jej algebrze Liego jest izomorficzna z definiującą reprezentacją $SO(3)$ na $\mathbb{R}^3$. Izomorfizm $\mathbb{R}^3 \rightarrow su(2)$ ma postać

$$\mathbb{R}^3 \ni v^i \rightarrow v^i \tau_i \in su(2), \quad (2.75)$$

gdzie τ_i stanowią bazę $su(2)$. W ten sposób otrzymujemy, że $e_a^i(x)$ możemy traktować, jako jednoformę o wartościach w algebrze Liego $su(2)$,

$$e_a^i(x) : T_x M \rightarrow su(2). \quad (2.76)$$

W podobny sposób możemy rozłożyć krzywiznę zewnętrzną $K_{ab}(x)$, za pomocą, której określony był pęd $p^{ab}(x)$,

$$K_{ab}(x) := K_{(a}^i(x) e_{b)}^j(x) \delta_{ij}, \quad (2.77)$$

gdzie

$$K_a^i(x) : T_x M \rightarrow su(2) \quad (2.78)$$

Ponieważ macierz K_a^i ma zawierać te same informacje geometryczne co tensor krzywizny zewnętrznej K_{ab} , z jego symetrii wynika następujące równanie, jakie musi być spełnione przez K_a^i

$$G_{ab} = K_{[a}^i(x)e_{b]}^i(x)\delta_{ij} = 0. \quad (2.79)$$

W przeciwnym razie drugi człon w rozkładzie

$$K_a^i e_b^i = K_{(a}^i e_{b)}^i + K_{[a}^i e_{b]}^i$$

zawierałby dodatkową informację. Stąd pojawia się dodatkowy związek teorii opisany równaniem (2.79).

W ten sposób zastąpiliśmy parę zmiennych kanonicznie sprzężonych $(q_{ab}(x), p^{ab}(x))$ parą $(e_a^i(x), K_a^i(x))$. Ponieważ oba te obiekty są tensorami tego samego typu, nie mogą stanowić pary zmiennych kanonicznie sprzężonych. Ponadto, żadna z nich nie jest gęstością o wadze 1.

Wprowadzamy zmienną $E_i^a(x)$, która będzie gęstością wektorową o wadze 1,

$$E_i^a(x) = \sqrt{q} e_j^a(x), \quad (2.80)$$

gdzie q oznacza jak poprzednio wyznacznik tensora metrycznego q_{ab} , natomiast $e_j^a(x)$ stanowi odwrotność $e_a^j(x)$,

$$e_i^a(x)e_a^j(x) = \delta_i^j, \quad e_i^a(x)e_a^i(x) = \delta_a^b \quad (2.81)$$

Za pomocą powyższych przekształcamy (2.82) do następującej postaci

$$G_{jk}(x) = K_{a[j}(x)E_{k]}^a(x) = 0, \quad (2.82)$$

gdzie wykorzystujemy e_*^* do zamiany indeksów tensorowych na indeksy wewnętrzne i na odwrot.

Na przestrzeni par $(E_i^a(x), K_a^i(x))$ możemy zdefiniować nawias Poissona, który jest zgodny z nawiasem ADM,

$$\{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = \{K_a^i(x), K_j^b(y)\} = 0, \quad (2.83)$$

$$\{K_b^j(y), E_i^a(x)\} = \frac{1}{2}\delta_b^a\delta_j^i\delta(y, x) \quad (2.84)$$

otrzymujemy rozszerzoną przestrzeń fazową. Z pomocą więzu (2.82) lub jego postaci rozsmarowanej

$$G[\Lambda] = \int_M d^3x \Lambda^{ji} K_{aj} E_k^a, \quad (2.85)$$

gdzie Λ jest skalarą o wartościach w $so(3)$. Wiąz ten generuje obroty w przestrzeni wewnętrznej. Nawiasy Poissona więzów G pokazują, że są to więzy pierwszej klasy

$$\{G[\Lambda], G'[\Lambda']\} = G \left[\frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda'] \right]. \quad (2.86)$$

Standardowe zmienne ADM możemy wyrazić za pomocą nowych zmiennych Ashtekara w następujący sposób

$$q_{ab} = q_{ab}[E_i^a, K_i^a] = |\det(E_i^a)| E_a^i E_b^j \delta_{ij}, \quad (2.87)$$

$$p^{ab} = p^{ab}[E_i^a, K_i^a] = 2|\det(E_i^a)|^{-1} E_k^a E_l^d \delta^{kl} K_{[d}^j \delta_{c]}^b E_j^c. \quad (2.88)$$

Możemy za pomocą powyższych wzorów wyrazić więzy $C^{(gr)}(x)$ oraz $C_a^{(gr)}(x)$ także, jako funkcyjony nowych zmiennych.

Otrzymana w ten sposób teoria kanoniczna na przestrzeni $(E_i^a(x), K_a^i(x))$ z nawiasami Poissona (2.83) i (2.84) oraz więzami G , $C^{(gr)}(x)$ oraz $C_a^{(gr)}(x)$ traktowanymi, jako ich funkcyjony, jest teorią równoważną do standardowej grawitacji w ujęciu ADM, na przestrzeni rozwiązań więzów. Część grawitacyjną działania możemy zapisać, jako

$$S[E_i^a(x), K_a^i(x)] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_M d^3x \left(2\dot{K}_a^j E_j^a - (-\Lambda^{ij} G_{ij} + N^a C_a^{(gr)} + N C^{(gr)}) \right). \quad (2.89)$$

2.2.2 Kanoniczna transformacja prowadząca do zmiennych Ashtekara

Jak dotychczas rozszerzyliśmy przestrzeń fazową ADM do nowej postaci. 3-wymiarowa metryka i pęd kanonicznie do niej sprzężony wyrażają się przez nowe zmienne za pomocą wzorów (2.87) i (2.88).

Krzywizna zewnętrzna $K_a^i(x)$ zawiera informację o sposobie, w jaki M zanurzone jest w $\mathcal{M}$. Natomiast informację o wewnętrznej geometrii M otrzymujemy z $E_i^a(x)$, podobnie jak poprzednio czyniliśmy to z $q_{ab}(x)$.

Ponieważ q_{ab} jest jednoznacznie wyznaczone przez E_i^a , również pochodna kowariantna działająca na indeksy czasoprzestrzenne D_a jest wyznaczona z E_i^a w sposób jednoznaczny. Ponieważ pojawia się dodatkowy, wewnętrzny stopień swobody związany z obecnością indeksu i , musimy umieć określić działanie pochodnej również na indeksy wewnętrzne. Aby działanie to było spójne z warunkiem metryczności koneksji chcemy, aby

$$D_a q_{bc} = 0 \rightarrow D_a e_b^j = 0, \quad (2.90)$$

skąd otrzymujemy następujące równanie

$$D_a e_b^j = \partial_a e_b^j - \Gamma_{ab}^c e_c^j + \Gamma_{ak}^j e_b^k. \quad (2.91)$$

Powyższe równanie traktujemy jako definicję koneksji spinowej. Wynika z niego, że również

$$D_a E_j^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jkl} \Gamma_a^k E_l^a = 0, \quad (2.92)$$

gdzie E_j^a jest wyprowadzoną poprzednio gęstością wektorową o wartościach w $su(2)$, a Γ_a^k jedno formą o wartościach w $su(2)^*$.

Dokonujemy następującej transformacji kanonicznej polegającej na skalowaniu zmiennych

$$(K_a^j, E_j^a) \rightarrow \left(\gamma K_a^j, P_j^a := \frac{1}{\gamma} E_j^a \right),$$

która pozostawia powyższe wzory w niezmienionej postaci. Współczynnik γ nazywamy parametrem Barbero-Imirzi. Różne wartości tego parametru definiują równoważne klasycznie teorie. Jednak ich kwantowe odpowiedniki nie są unitarne i fizycznie równoważne. Parametr ten określa również spektra operatorów geometrycznych. Jego wartość w oparciu o obliczenie entropii czarnej dziury można znaleźć w [30].

Więzy (2.82) przejmują postać więzy Gaussa znanego w teorii Yanga-Millas

$$G_j = D_a P_j^a, \quad (2.93)$$

gdzie pochodną kowariantną D_a definiujemy tym razem za pomocą koneksji Ashtekara-Barbero

$$A_a^j(x) := \Gamma_a^j(x) + \gamma K_a^j(x). \quad (2.94)$$

Tak zdefiniowana pochodna działa zarówno na indeksy wewnętrzne

$$D_a v_j := \partial_a v_j + \epsilon_{jk}^l A_a^k v_l, \quad (2.95)$$

jak i indeksy tensorowe

$$D_a v_b = D_a v_b, \quad (2.96)$$

gdzie lewa strona oznacza nową pochodną kowariantną, a prawa starą zdefiniowaną w poprzednim rozdziale.

Otrzymujemy ostatecznie przestrzeń fazową złożoną z koneksji Ashtekara-Barbero, 1-formy o wartościach w $su(2)$, oraz gęstości wektorowej o wadze 1 i wartościach w $su(2)^*$, $P_j^a(x)$. Bezpośrednim rachunkiem pokazujemy, że

$$\{P_i^a(x), P_j^b(y)\} = \{A_a^i(x), A_j^b(y)\} = 0, \quad (2.97)$$

$$\{A_a^i(x), P_j^b(y)\} = \delta_b^a \delta_j^i \delta(x, y). \quad (2.98)$$

Wraz z dodatkowym więzem

$$G[\Lambda] = \int_M d^3x \Lambda^i G_i \quad (2.99)$$

przestrzeń ta stanowi przestrzeń fazową ogólnej teorii względności zapisanej w zmiennych Ashtekara.

2.2.3 Więzy ogólnej teorii względności w zmiennych Ashtekara

Zbierając wyniki przedstawione w poprzednich paragrafach, nasza przestrzeń fazowa składa się obecnie z par $(A_a^i(x), P_j^b(y))$ opisujących część geometryczną teorii, oraz z par $(\phi(x), \pi(x))$ opisujących część materii. Nawiasy Poissona pomiędzy zmiennymi kanonicznymi sprzężzonymi ze sobą opisane są we wzorach (2.97), (2.98) oraz (2.58).

Pojawiają się nowe więzy, które przyjmują postać

$$G_i(x) = \partial_a P_i^a + \epsilon_{ij}^{k} A_a^j(x) P_k^a(x), \quad (2.100)$$

wyprowadzoną z (2.93) oraz (2.95). Mają one postać więzów Gaussa znanych z teorii Yanga-Millsa i wyrażają niefizyczność dodatkowego stopnia swobody, jaki pojawił się w opisie.

Pozostałe więzy dyfeomorficzne i skalarne możemy bezpośrednim rachunkiem wyrazić za pomocą nowych zmiennych. W rzeczywistości taka nowa postać więzów jest prostsza i

przydatna, jeżeli chcemy dokonać kinematycznej kwantyzacji tych więzów.

W dalszej części pracy przyjmujemy następującą konwencję. Pozostawiamy postać więzów taką jak w formalizmie ADM (2.49) - (2.54), traktując od tego momentu q_{ab} i p^{ab} jako funkcjonały zmiennych Ashtekara,

$$q_{ab} = q_{ab} [A_a^i(x), P_j^b(y)] , \quad (2.101)$$

$$p^{ab} = p^{ab} [A_a^i(x), P_j^b(y)] . \quad (2.102)$$

Zakładamy ponadto, że więzy dyfeomorficzne i skalarne generują przekształcenia takie same, jak opisane zostały w poprzednich paragrafach, tj. odpowiednio dyfeomorfizmy generowane przez pola wektorowe styczne do M , oraz dyfeomorfizmy generowane przez pola wektorowe normalne do M .

2.3 Zdeparametryzowana wersja ogólnej teorii względności

Z poprzednich rozdziałów widzimy, że ogólna teoria względności jest szczególnym rodzajem teorii fizycznej, w której kanoniczny Hamiltonian generuje transformacje cechowania. Dzieje się tak, ponieważ okazuje się on liniową kombinacją więzów pierwszej klasy, co możemy zapisać w następujący sposób

$$h_{kin} = \int_M d^3x \left(\Lambda^i(x) G_i(x) + N^a(x) C_a(x) + N(x) C(x) \right) . \quad (2.103)$$

Posługiwanie się rozsmarowanym Hamiltonianem wynika z faktu, że przestrzeń fazowa ogólnej teorii względności jest nieskończenie wymiarową przestrzenią konfiguracji pól, a nie skończenie wymiarową rozmaitością różniczkową. Punkty przestrzeni fazowej modelowane są lokalnie na nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha, a nie na $\mathbb{R}^n$.

Postać Hamiltonianu kanonicznego generuje tak zwany problem czasu w ogólnej teorii względności. Po wyeliminowaniu wszystkich нефизycznych stopni swobody taka teoria zastryga.

Hamiltonian, który jest liniową kombinacją więzów generuje transformacje cechowania. W związku z tym brak jest naturalnie zdefiniowanej dynamiki. Jest to w jawnej sprzeczności

z obserwacjami dnia codziennego, gdzie obserwujemy zmiany, które jesteśmy w stanie deterministycznie przewidzieć. Wniosek, jaki wypływa z tych rozważań wskazuje na to, że fizyczna dynamika zawiera się w jakiejś dodatkowej strukturze, która nie została jeszcze uwzględniona.

Proponowane rozwiązanie opiera się na wprowadzeniu dodatkowej struktury poprzez tak zwany mechanizm deparametryzacji ([10], [11]).

Deparametryzacja teorii, której Hamiltonian jest więzem pierwszego rodzaju nie jest procedurą jednoznaczną. Wymaga dokonania pewnych wyborów. W szczególności stosuje się to do ogólnej teorii względności. W kolejnych paragrafach uzasadnimy nasz wybór. Mimo, iż był on już stosowany, przedstawione tutaj podejście jest prezentowane po raz pierwszy w niniejszej pracy.

2.3.1 Problem czasu na przykładzie skończenie wymiarowym

Zmienne relacyjne mają swoją dłuższą historię. W tej pracy opieramy się na koncepcjach wprowadzonych w [6] i [7], gdzie również można znaleźć szersze wprowadzenie do zastosowania zmiennych relacyjnych w systemach z Hamiltonianem będącym generatorem transformacji cechowania. Zastosowanie zmiennych relacyjnych do różnych modeli wykorzystujących pętlową kwantyzację znajdujemy również w [31].

Koncepcja rozwiązania problemu czasu za pomocą zmiennych relacyjnych nie jest nowa i pod różnymi postaciami podejmowano próby zastosowania jej do ogólnej teorii względności w przeszłości. Przykładem może być zapoczątkowana pracami Martina Bojowalda ([32], [21]), a rozwinięta w [15] kanoniczna pętlowa kosmologia kwantowa. Przyczyniła się ona do zrozumienia natury Wielkiego Wybuchu.

Model, który jest obiektem badań opisanych w tej pracy jest rozszerzeniem modelu Ashtekara-Pawłowskiego-Singha na sytuacje, w których nie dysponujemy tak dużą symetrią umożliwiającą redukcję układu do modelu jednowymiarowego.

Przedstawione w tym paragrafie fakty dotyczące teorii zmiennych relacyjnych przytaczamy za [33]. Wychodząc od geometrycznego podejścia prezentowanego na przykładzie

skończenie wymiarowym, przedstawimy klasyczną naturę problemu czasu. W kolejnym paragrafie pokażemy na czym polega przekształcenie do równoważnej teorii kanonicznej, które zastosujemy w celu otrzymania deparametryzowalnej wersji ogólnej teorii względności.

Rozważamy skończenie wymiarową przestrzeń fazową, będącą $2n$ -wymiarową rozmaitością różniczkową Γ , wyposażoną w formę symplektyczną Ω ,

$$\Omega \in \Lambda^2\Gamma, \quad (2.104)$$

$$d\Omega = 0, \quad (2.105)$$

$$X \lrcorner \Omega = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ dla } X \in T\Gamma. \quad (2.106)$$

Dwuforma Ω spełniająca opisane powyżej warunki jest równoważna określeniu nawiasów Poissona pomiędzy funkcjami na Γ .

Rozważmy dowolną funkcję

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.107)$$

Pole wektorowe X_f zdefiniowane za pomocą formy symplektycznej Ω oraz funkcji f za pomocą poniższego równania

$$X_f \lrcorner \Omega = df, \quad (2.108)$$

nazywamy hamiltonowskim polem wektorowym. Następnie definiujemy nawias Poissona pomiędzy dwoma funkcjami $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{f, g\} = X_g(f). \quad (2.109)$$

Ewolucja badanego układu opisywana jest za pomocą krzywych całkowych Hamiltonowskiego pola wektorowego generowanego przez pewną szczególną funkcję h nazywaną Hamiltonianem.

Reasumując, na klasyczny opis układu składają się następujące elementy

- przestrzeń fazowa Γ ,
- forma symplektyczna Ω ,
- funkcja Hamiltona h .

Rozważmy następnie dodatkowo, więzy pierwszego rodzaju na naszej rozmaitości Γ . Oznaczamy je $C_1, C_2, \dots, C_I$. Przez więzy pierwszego rodzaju rozumiemy funkcje na przestrzeni fazowej

$$i = 1, 2, \dots, I : C_i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.110)$$

których wszystkie wzajemne nawiasy Poissona zerują się wszędzie tam, gdzie zerują się same więzy,

$$\{C_i, C_j\} |_{\Gamma_C} = 0. \quad (2.111)$$

Więzy takie pełnią dwojaką rolę. Ograniczają zbiór możliwych stanów badanego układu do punktów przestrzeni fazowej Γ , na której funkcje więzów znikają. Zbiór ten nazywamy podprzestrzenią więzów

$$\Gamma_C = \{x \in \Gamma | C_1(x) = 0, \dots, C_I(x) = 0\}. \quad (2.112)$$

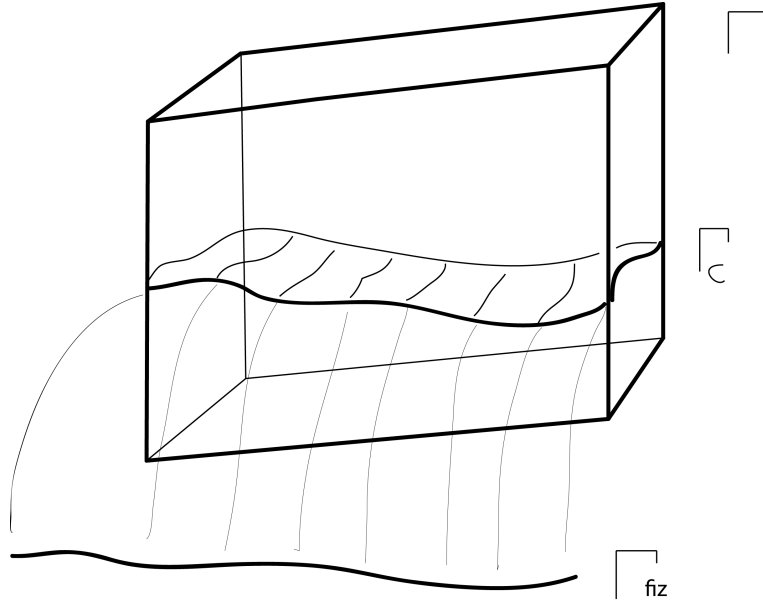
Zakładamy, że skonstruowany zbiór więzów jest zupełny, tzn. ewolucja, a więc krzywe całkowite X_h nie wyprowadzają nas poza dostępne stany układu. Oznacza to, że X_h jest wektorem stycznym do Γ_C .

Kolejną rolę więzów pierwszego rodzaju jest generowanie transformacji cechowania. Oznacza to, że punkty leżące na tych samych krzywych całkowitych generowanych przez Hamiltonowskie pola odpowiadające więzom lub ich liniowym kombinacjom, opisują nierozróżnialne fizycznie stany układu.

Dla więzów pierwszego rodzaju, a więc takich dla których zachodzi

$$[X_{C_i}, X_{C_j}] = \sum_k a_k X_{C_k}, \quad (2.113)$$

podpowierzchnia Γ_C jest foliowana powierzchniami generującymi równoważne punkty fizyczne, a przestrzeń ilorazowa tych powierzchni odpowiada fizycznym stanom układu.



Rys. II. 1

Równania więzów pierwszego rodzaju pozwalają zidentyfikować fizycznie nierozróżnialne punkty na przestrzeni fazowej. Dlatego rozszerzamy o nie elementy opisu układu klasycznego

- przestrzeń fazowa Γ ,
- forma symplektyczna Ω ,
- funkcja Hamiltona h ,
- równania więzów $C_1, C_2, \dots, C_I$.

Szczególnym przypadkiem teorii z więzami jest teoria, której hamiltonian jest liniową kombinacją więzów pierwszego rodzaju

$$h = a_1 \cdot C_1 + \dots + a_I \cdot C_I. \quad (2.114)$$

W takiej sytuacji Hamiltonian znika na przestrzeni stanów fizycznie dopuszczalnych Γ_C . Dodatkowo generowana przez niego ewolucja jest niczym innym jak transformacją cechowania. Z drugiej strony, ponieważ punkty leżące na tej samej orbicie transformacji cechowania reprezentują ten sam stan fizyczny układu, funkcje na przestrzeni fazowej odpowiadające fizycznie mierzalnym wielkościom powinny przyjmować na nich stałe wielkości. Powoduje to zamrożenie układu i brak możliwości opisanie ewolucji układu, w

sytuacji kiedy kanoniczny Hamiltonian jest generatorem transformacji cechowania.

W przypadku bez więzów, parametryzację krzywej całkowej pola wektorowego odpowiadającego funkcji Hamiltona interpretujemy jako „absolutny” czas, co możemy zapisać za pomocą równania

$$\frac{d}{dt}f(t) = X_h(f). \quad (2.115)$$

Gdy Hamiltonian generuje transformację cechowania, parametr ten traci jakiekolwiek znaczenie fizyczne. Hamiltonian $h(x)$ oraz $N \cdot h(x)$ generują te same krzywe całkowe różniące się jedynie „prędkością” poruszania się po nich. Prędkość ta nie ma jednak żadnego znaczenia fizycznego, a N odpowiada funkcji lapsu $N(X)$ wyprowadzonej w rozdziale dotyczącym kanonicznego sformułowania ogólnej teorii względności.

Podsumowując, w opisywanym powyżej przypadku możemy przyjąć, że klasyczny opis układu składa się z następujących elementów

- przestrzeń fazowa Γ ,
- forma symplektyczna Ω ,
- równania więzów $C_1, C_2, \dots, C_I$.

Hamiltonian kanoniczny jest liniową kombinacją więzów i nie wnosi nic nowego do proponowanego powyżej opisu modelu.

2.3.2 Deparametryzacja i zmienne relacyjne

Rozważany model grawitacji sprzężonej z polem skalarnym jest przykładem teorii w której hamiltonian jest generatorem transformacji cechowania. Oznacza to, że obserwable Diraca, odpowiadające fizycznym wielkościom charakteryzującym układ, mają znikający nawias Poissona z hamiltonianem. Co za tym idzie obserwable fizyczne nie ewoluują i są całkowicie zamrożone w rozważanej teorii.

Geometrycznie, obserwable Diraca są funkcjami na klasycznej przestrzeni fazowej, które przyjmują stałą wartość na orbitach transformacji cechowania. Ponieważ hamiltonian jest generatorem takiej transformacji, to wielkości fizyczne przyjmują stałą wartość na orbicie

generowanej przez hamiltonian. Pojawiające się pytanie o możliwość znalezienia wielkości, których ewolucję moglibyśmy badać i opisywać za pomocą fizycznego hamiltonianu, który ją generuje jest tematem kolejnych rozdziałów niniejszej pracy.

Relacyjne zmienne stanowią propozycję rozwiązania opisanego powyżej problemu. Deparametryzacja jest procesem przekształcenia więzów do postaci, które umożliwiają prostą identyfikację jednej z kanonicznych zmiennych konfiguracyjnych jako relacyjnego czasu układu.

Konstrukcja relacyjnych obserwabi Diraca opiera się na wykorzystaniu funkcji na przestrzeni fazowej, z których każda z osobna niekoniecznie musi być stała na orbitach działania grupy cechowania na Γ_C . Oznaczamy jedną z nich przez $f : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}$, natomiast pozostałe $T_i : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, I$.

Ilość funkcji T_i powinna odpowiadać wymiarowi orbity grupy cechowania, na jakie działanie grupy cechowania foliuje Γ_C . Jeżeli dodatkowo założymy, że warunki $T_1 = \tau_1, \dots, T_I = \tau_I$ jednoznacznie wyznaczają globalne cięcie wiązki $\pi : \Gamma_C \rightarrow \Gamma_{fiz}$, to możemy zdefiniować obserwablę Diraca

$$\tau_1, \dots, \tau_I \rightarrow F_{[f, T_1, \dots, T_I]}[\tau_1, \dots, \tau_I] : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.116)$$

Wprowadzoną powyżej fizyczną przestrzeń fazową Γ_{fiz} definiujemy jako

$$\Gamma_{fiz} = \Gamma_C / \sim, \quad (2.117)$$

gdzie relacja $\sim$ zdefiniowana jest w ten sposób, że dwa punkty przestrzeni Γ_C są równoważne jeżeli istnieje transformacja cechowania, która przeprowadza jeden w drugi.

Funkcję tą definiujemy w ten sposób, że dla dowolnego punktu $x \in \Gamma_C$, szukamy na liściu do którego on należy, punktu $x_{\tau_1, \dots, \tau_I}(x)$ zdefiniowanego w następujący sposób

$$x_{\tau_1, \dots, \tau_I}(x) = \{x' \in [x] | T_i(x') = \tau_1, \dots, T_I(x') = \tau_I\}. \quad (2.118)$$

Za pomocą powyższego definiujemy

$$F_{[f, T_1, \dots, T_I]}[\tau_1, \dots, \tau_I](x) = f(x_{\tau_1, \dots, \tau_I}(x)). \quad (2.119)$$

W szczególnym przypadku, kiedy będziemy rozwiązywać tylko jeden wiąz i dokonywać tylko częściowej foliacji Γ_C względem transformacji generowanej przez jeden wiąz, mamy tylko jedną funkcję T i jednowymiarowe liście foliacji, które stanowią krzywe całkowite hamiltonowskiego pola wektorowego generowanego przez te więzy. Funkcję T często nazywamy relacyjnym czasem. Siła zmiennych relacyjnych polega na tym, że funkcja T może spełniać ściśle określone równania fizyczne i jest czymś więcej niż dowolnym wyborem parametryzacji.

Rozważając model teorii polowy, w którym zamiast jednego więzu, dysponujemy ich nieskończoną ilością - $C(x)$ w każdym punkcie - sytuacja ulega skomplikowaniu. Nieskończoności ilości więzów odpowiada nieskończoność wartości $T(x)$. W badanym modelu rolę taką będzie pełniło pole materii ϕ spełniające fizyczne równanie Kleina-Gordona.

Ograniczając się do transformacji cechowania generowanej przez pojedyncze więzy C , mówimy że wiąz ulega deparametryzacji, kiedy zapisujemy go w postaci

$$NC = p_j + h(q, p), \quad (2.120)$$

gdzie N jest dowolną nie znikającą funkcją na Γ (regularną), p_j jest jedną ze współrzędnych kanonicznych $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$ na Γ , a h nie zależy od p_j . W takiej sytuacji dynamiczna zmienna q^j nabiera roli relacyjnego czasu, to znaczy parametru krzywej całkowitej. Proces przekształcania więzów do powyższej postaci nazywamy procesem deparametryzacji.

2.3.3 Iloczynowa postać więzów i obszary przestrzeni fazowej na przykładzie skończonego wymiaru

Rozważmy klasyczną teorię, której Hamiltonian generuje transformacje cechowania. Jak napisano w poprzednim paragrafie, na klasyczny opis takiej teorii składają się następujące elementy

- przestrzeń fazowa Γ ,
- forma symplektyczna Ω (lub równoważnie definicja nawiasów Poissona),
- równania więzów $C_1, C_2, \dots, C_I$.

Ponieważ punkty leżące na krzywej całkowitej generowanej przez Hamiltonowskie pole wektorowe odpowiadające danemu więzowi reprezentują te same stany fizyczne, parametryzacja tej krzywej nie ma fizycznego znaczenia. Dlatego więzy C oraz $\alpha \cdot C$ są równoważne z punktu widzenia fizyki układu.

Rozważmy sytuację, w której jeden z więzów, np C_1 ma następującą postać,

$$C_1 = C_1^{(1)} \cdot C_1^{(2)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m)}. \quad (2.121)$$

Dodatkowo zakładamy, że podzbiory przestrzeni fazowej zdefiniowane w następujący sposób

$$\Gamma_{(i)} = \left\{ x \in \Gamma \mid C_1^{(i)}(x) = 0 \right\}, \quad (2.122)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, m$ spełniają następujący warunek

$$\text{Int } \Gamma_{(i)} \cap \text{Int } \Gamma_{(j)} = \emptyset \quad \text{dla } i, \quad (2.123)$$

$$\Gamma_C \subset \bigcup \Gamma_{(i)}. \quad (2.124)$$

Warunek (2.123) nie wynika z teorii. Jednak na obszarze przestrzeni fazowej, na którym $\Gamma_{(i)} \cap \Gamma_{(j)} \neq \emptyset$ hamiltonowskie pole wektorowe generujące transformację cechowania znika. Wynika to z obliczeń przedstawionych poniżej. Obszar taki charakteryzuje się w związku z tym pełną patologiczną cechą prowadzącą do niejednoznaczności. Stąd chcemy wyłączyć takie sytuacje z prezentowanych rozważań i narzucamy warunek (2.123).

Jednak wykluczenie pokrywania się obszarów Γ_i na ich punktach brzegowych zbyt ograniczałoby nasze rozważania. Z takimi patologicznymi sytuacjami, które przeprowadzają ewolucję pomiędzy różnymi obszarami możemy mieć do czynienia w nieskończenie wymiarowych modelach opisujących ogólną teorię względności.

Rozważmy Hamiltonowskie pole wektorowe generowane przez C_1 ,

$$X_{C_1} \lrcorner \Omega = dC_1. \quad (2.125)$$

Podstawiamy (2.121) do prawej strony powyższego równania i otrzymujemy

$$\begin{aligned} dC_1 &= d \left(C_1^{(1)} \cdot C_1^{(2)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m)} \right) = \\ &= C_1^{(2)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m)} \cdot dC_1^{(1)} + \dots + C_1^{(1)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m-1)} \cdot dC_1^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Z (2.122)-(2.124) wynika, że

$$dC_1|_{\Gamma_{(i)}} = C_1^{(1)} \cdot \dots \cdot C_1^{(i-1)} \cdot C_1^{(i+1)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m)} \cdot dC_1^{(i)}. \quad (2.127)$$

Wprowadzamy następujące oznaczenie

$$N^{(i)} = C_1^{(1)} \cdot \dots \cdot C_1^{(i-1)} \cdot C_1^{(i+1)} \cdot \dots \cdot C_1^{(m)}. \quad (2.128)$$

Zdefiniujemy następujące pola wektorowe odpowiadające poszczególnym czynnikom iloczynowego rozbitcia więzu C_1 ,

$$X_{C_1^{(i)}} \lrcorner \Omega = dC_1^{(i)}. \quad (2.129)$$

Przy pomocy powyższej definicji oraz (2.127) możemy zapisać równanie (2.125) w postaci

$$\left(N^{(1)} \cdot X_{C_1^{(1)}} + \dots + N^{(m)} \cdot X_{C_1^{(m)}} \right) \lrcorner \Omega = N^{(1)} \cdot dC_1^{(1)} + \dots + N^{(m)} \cdot dC_1^{(m)}. \quad (2.130)$$

Na mocy (2.122)-(2.123) mamy, że dla każdego i równanie (2.130) obcięte do $\Gamma_{(i)}$ przyjmuje postać

$$N^{(i)} \cdot X_{C_1^{(i)}} \lrcorner \Omega = N^{(i)} \cdot dC_1^{(i)} \Leftrightarrow X_{C_1^{(i)}} \lrcorner \Omega = dC_1^{(i)}. \quad (2.131)$$

Dochodzimy w ten sposób do następującego wniosku: Klasyczny model, opisywany za pomocą elementów $(\Gamma, \Omega, (C_1, \dots, C_I))$, gdzie C_1 spełnia opisane powyżej warunki, rozpada się na m niezależnych od siebie układów $(\Gamma_{(1)}, \Omega|_{\Gamma_{(1)}}, (C_1^{(1)}, \dots, C_I)|_{\Gamma_{(1)}}), \dots, (\Gamma_{(m)}, \Omega|_{\Gamma_{(m)}}, (C_1^{(m)}, \dots, C_I)|_{\Gamma_{(1)}})$.

W sytuacji, kiedy rozpatrujemy takie warunki początkowe układu, że generowana przez więzy ewolucja nie zbliża się do brzegów obszarów Γ_i każdy z nich może być rozpatrywany jako niezależny model fizyczny. Nie możemy jednak wykluczyć sytuacji, kiedy krzywe całkowite pól hamiltonowskich generowanych przez więzy dotykają ich brzegów. Mamy wtedy do czynienia z sytuacjami niejednoznacznymi i osobliwymi z punktu widzenia klasycznej ewolucji układu.

Szczególnej uwagi wymagają sytuacje nieskończone wymiarowe takie, jak ogólna teoria względności. Osobliwe zachowanie ewolucji układu może wystąpić kiedy ewolucja wyprowadzi nas do punktu, gdzie znika pęd π , kanonicznie sprzężony do pola skalarowego.

2.3.4 Przekształcenie więzów ogólnej teorii względności

W niniejszym paragrafie pokażemy, że ogólna teoria względności, która klasycznie określona jest za pomocą następujących elementów

- przestrzeni fazowej, której punkty stanowią konfigurację pól $(A_a^i(x), P_i^a(x), \phi(x), \pi(x))$ na 3-wymiarowej rozmaitości M ,
- formy symplektycznej określonej za pomocą nawiasów Poissona

$$\begin{aligned}\{A_a^i(x), P_j^b(y)\} &= \delta_b^a \delta_j^i \delta(x, y), \\ \{\phi(x), \pi(y)\} &= \delta(x, y),\end{aligned}$$

- równań więzów Gaussowskich

$$G_i(x) = \partial_a P_i^a(x) + \epsilon_{ij}^{k} A_a^j(x) P_k^a(x), \quad (2.132)$$

więzów dyfeomorficznych

$$C_a(x) = C_a^{gr}(x) + \pi(x) \partial_a \phi(x), \quad (2.133)$$

oraz więzów skalarnych

$$C(x) = C^{gr}(x) + \frac{1}{2} \frac{\pi^2(x)}{\sqrt{q(x)}} + \frac{1}{2} \sqrt{q(x)} q^{ab}(x) \partial_a \phi(x) \partial_b \phi(x) + \sqrt{q(x)} V[\phi]. \quad (2.134)$$

Równania (2.64), (2.65) i (2.66) opisują nawiasy Poissona pomiędzy więzami ogólnej teorii względności. Ze względu na funkcje, a nie stałe struktury, które pojawiają się przy liczeniu ich nawiasów Poissona, algebra ta nie jest algebrą Liego.

Celem niniejszego paragrafu jest przekształcenie więzów ogólnej teorii względności do postaci, w której więzy skalarne mają postać iloczynową opisywaną w poprzednim paragrafie.

W tym celu mnożymy równanie (2.133) stronami przez niezerową funkcję

$$(C_b^{gr} - \pi(x) \partial_b \phi(x)) q^{ab}(x)$$

$$(C_a^{gr} + \pi(x) \partial_a \phi(x)) (C_b^{gr} - \pi(x) \partial_b \phi(x)) q^{ab}(x),$$

skąd po wymnożeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} & q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)C_b^{gr}(x) + \\ & + \pi(x)q^{ab}(x)(\partial_a\phi(x)C_b^{gr}(x) - C_a^{gr}(x)\partial_b\phi(x)) + \\ & - \pi^2(x)q^{ab}(x)\partial_a\phi(x)\partial_b\phi(x). \end{aligned}$$

Środkowy wyraz znika, ze względu na symetrię i otrzymujemy

$$q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)C_b^{gr}(x) - \pi^2(x)q^{ab}(x)\partial_a\phi(x)\partial_b\phi(x).$$

Powyższe równanie mnożymy przez $\frac{1}{2}\sqrt{q(x)}$, natomiast równanie (2.134) przez $\pi^2(x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sqrt{q(x)}q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)C_b^{gr}(x) - \frac{1}{2}\pi^2(x)\sqrt{q(x)}q^{ab}(x)\partial_a\phi(x)\partial_b\phi(x), \\ & C^{gr}(x)\pi^2(x) + \frac{1}{2}\frac{\pi^4(x)}{\sqrt{q(x)}} + \frac{1}{2}\pi^2(x)\sqrt{q(x)}q^{ab}(x)\partial_a\phi(x)\partial_b\phi(x) + \sqrt{q(x)}V[\phi]. \end{aligned}$$

Po ich zsumowaniu otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{\pi^4(x)}{\sqrt{q(x)}} + \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)}V[\phi]\right)\pi^2(x) + \frac{1}{2}\sqrt{q(x)}q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)C_b^{gr}(x) \quad (2.135)$$

Powyższe równanie jest wielomianem 4 stopnia w zmiennej $\pi(x)$ i możemy przedstawić je w postaci iloczynu czterech czynników

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \tilde{C}(x) = & \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \\ & \cdot \left[\pi - \sqrt{-\sqrt{q}(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])} + \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}} \right] \\ & \cdot \left[\pi + \sqrt{-\sqrt{q}(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])} + \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}} \right] \\ & \cdot \left[\pi - \sqrt{-\sqrt{q}(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])} - \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}} \right] \\ & \cdot \left[\pi + \sqrt{-\sqrt{q}(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])} - \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}} \right] \end{aligned} \quad (2.136)$$

Doprowadziliśmy w ten sposób do zmiany opisu ogólnej teorii względności zamieniając więzy $G_i(x)$, $C_a(x)$ oraz $C_a(x)$,

$$\begin{aligned} G_i(x) & \quad G_i(x) \\ C_a(x) & \longrightarrow C_a(x) \\ C(x) & \quad \tilde{C}(x) = C_I(x) \cdot C_{II}(x) \cdot C_{III}(x) \cdot C_{IV}(x) \end{aligned} \quad (2.137)$$

Iloczynowa postać więzu $\tilde{C}(x)$ dzieli przestrzeń fazową na obszary spełniające warunki opisane w poprzednim paragrafie. Odpowiednie obszary, na których zeruje się C_I , C_{II} , C_{III} i C_{IV} to obszary przestrzeni fazowej, które zawarte są w

$$\begin{aligned} I : \pi^2 &\geq \phi_{,a}\phi_{,b}q^{ab}, \quad \pi > 0, \\ II : \pi^2 &\geq \phi_{,a}\phi_{,b}q^{ab}, \quad \pi < 0, \\ III : \pi^2 &\leq \phi_{,a}\phi_{,b}q^{ab}, \quad \pi > 0, \\ IV : \pi^2 &\leq \phi_{,a}\phi_{,b}q^{ab}, \quad \pi < 0. \end{aligned}$$

2.3.5 Deparametryzacja ogólnej teorii względności

Rozważania poprzedniego paragrafu doprowadziły do podziału przestrzeni fazowej ogólnej teorii względności na sprzężonej z bezmasowym polem skalarnym na cztery obszary

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ obszar } I \\ \bullet \{.,.\} \\ \bullet G_i(x), C_a(x), C_I(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} \bullet \text{ obszar } II \\ \bullet \{.,.\} \\ \bullet G_i(x), C_a(x), C_{II}(x) \end{array} \right], \\ &\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ obszar } III \\ \bullet \{.,.\} \\ \bullet G_i(x), C_a(x), C_{III}(x) \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} \bullet \text{ obszar } IV \\ \bullet \{.,.\} \\ \bullet G_i(x), C_a(x), C_{IV}(x) \end{array} \right], \end{aligned}$$

gdzie $\{.,.\}$ oznacza nawias Poissona opisany w poprzednim rozdziale.

Doputy, dopóki klasyczna trajektoria rozważanego przez nas modelu pozostaje wewnątrz danego obszaru, możemy go traktować jako niezależny od pozostałych model. Jendak w sytuacji kiedy ewolucja przechodzi przez punkt, w którym pole $\pi = 0$, implikuje to, że funkcja lapsu znika $N = 0$ i dalsza ewolucja staje się nieokreślona i przejścia pomiędzy obszarami są możliwe.

Na ten moment zakładamy, że interesujące nas historie nie zawierają takich punktów a klasyczna ewolucja Wszechświata pozostaje w obrębie jednego z wymienionych powyżej obszarów. Na ile założenie to ogranicza zastosowalność naszego modelu będzie tematem dalszych badań.

Chcąc dokonać wyboru obszaru, do którego należy obserwowany Wszechświat, dokonujemy porównania z dobrze znanym i prostym modelem jednorodnego i izotropowego Wszechświata, z bezmasowym polem skalarnym. W takim przypadku mamy

$$V[\phi] \equiv 0, \quad \pi = \text{const} \neq 0, \quad \phi = \text{const},$$

co daje

$$\pi^2 = \sqrt{q} \left(-C^{gr} \pm \sqrt{C^{gr\ 2} - q^{ab} C_a^{gr} C_b^{gr}} \right).$$

W modelu FRW $C_a^{gr} = 0$ ze względu na symetrię, natomiast $C^{gr} < 0$, co wynika ze znikania $C^{gr} + C^\phi = 0$ oraz dodatniości $C^\phi > 0$. Stąd

$$\sqrt{C^{gr\ 2} - q^{ab} C_a^{gr} C_b^{gr}} = \sqrt{C^{gr\ 2}} = -C^{gr}.$$

Równanie na π^2 przyjmuje teraz postać

$$\pi^2 = \sqrt{q} (-C^{gr} \pm (-C^{gr})).$$

Wybór znaku „ $-$ ” doprowadziłby do sprzeczności $\pi^2 = 0$. Dlatego wierzymy, że obserwowany Wszechświat znajduje się wewnątrz obszaru I lub II .

Obserwacja rozszerzania się Wszechświata prowadzi do wyboru modelu I , w którym $\pi(x) > 0$.

Podsumowując, oryginalny opis ogólnej teorii względności zastąpiliśmy następującym modelem

- przestrzeń fazowa: konfiguracja pól $(A_a^i(x), P_a^i(x), \phi(x), \pi(x))$ na 3-wymiarowej rozmaitości M , które spełniają warunki obszaru I ,
- nawias Poissona: standardowy nawias Poissona zdefiniowany powyżej,
- więzy: $G_i(x)$, $C_a(x)$ oraz $C'(x)$,

gdzie $C'(x) := C_I(x)$. Oznaczenie to wprowadziliśmy, aby być w zgodzie z oznaczeniami stosowanymi w cytowanej literaturze. Na podstawie (2.136) możemy zapisać

$$C'(x) = \pi(x) - h(x), \tag{2.138}$$

gdzie

$$h(x) := \sqrt{-\sqrt{q}(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi]) + \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr} + \sqrt{q}V[\phi])^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}}}. \quad (2.139)$$

Model opisany powyżej ma dodatkową własność. Algebra nowych więzów jest algebrą Liego. Wynika to z tego, że nawias Poissona starych więzów skalarnych zostaje zastąpiony nawiasem Poissona nowych więzów C' . W odróżnieniu od starego nawiasu w nowym nie pojawiają się funkcje struktury, a nawias Poissona znika

$$\{C'(x), C'(y)\} = 0. \quad (2.140)$$

Szczegółowy rachunek w przypadku znikającego potencjału pola skalarnego $V[\phi] = 0$ można znaleźć w [26].

Okazuje się, że jest to jedyny przypadek, kiedy zachodzi (2.140). Szczegółowy rachunek będący dowodem tego stwierdzenia jest oryginalnym wynikiem niniejszej pracy. Ze względu na jego objętość zostanie ono przedstawione w Dodatku A.

W przypadku znikającego potencjału pola skalarnego, którym będziemy zajmować się od tego momentu, funkcjonal $h(x)$ nie zależy od pola $\phi(x)$. Zgodnie z definicją podaną w poprzednim paragrafie mówimy, że model ulega deparametryzacji, a pole $\phi(x)$ nabiera roli czasu relacyjnego,

$$h := \sqrt{-\sqrt{q}C^{gr} + \sqrt{q}\sqrt{(C^{gr})^2 - q^{ab}C_a^{gr}C_b^{gr}}} \quad (2.141)$$

Otrzymany w ten sposób model będziemy nazywać zdeparametryzowanym modelem gravitacji sprzężonym z bezmasowym polem skalarnym. Konstrukcja jego kwantowego odpowiednika przedstawiona jest w kolejnym rozdziale tej pracy.

Rozdział 3

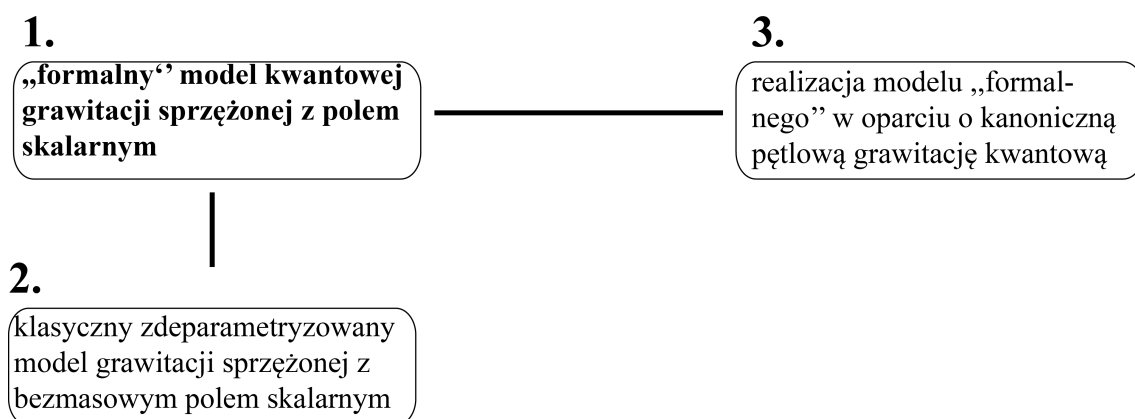
Konstrukcja modelu kwantowego

„[...] Jednak argumenty historyczne nie są dostatecznie przekonującym uzasadnieniem stosowania tego formalizmu. Gdyby udało się nam odkryć kwantową teorię pola, która prowadzi do zadowalającej macierzy S , to czy przejmowalibyśmy się tym, że nie można jej wywieść z kanonicznego kwantowania jakiegoś lagranżjanu? [...]”

Steven Weinberg, „Teoria pól kwantowych”^{t.1}

„Formalna” struktura kwantowego modelu opisującego bezmasowe pole skalarne Kleina – Gordona zostanie zaprezentowana w niniejszej części tej pracy. Zakończenie konstrukcji modelu będzie przedstawione w kolejnej części, gdzie wylistowane niezbędne matematyczne obiekty (przestrzeń Hilberta, operatory itp.) zostaną zdefiniowane. Wykorzystamy do tego narzędzia i formalizm znany z konstrukcji kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

Takie podejście do przedstawienia modelu w częściach ma na celu rozdzielenie tego co jest ogólne bez względu na sposób konstruowania poszczególnych elementów, od tego co bezpośrednio korzysta z rezultatów kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Schematycznie zależności pomiędzy prezentowanymi wynikami pokazuje poniższy rysunek.



Rys. III.1

Powyższy schemat zależności pomiędzy wprowadzanimi w tej pracy modelami pokazuje, że centralnym punktem naszych rozważań jest model kwantowy. Nie wyprowadzamy go bezpośrednio w procesie kwantyzacji modelu klasycznego, a traktujemy go jako bardziej elementarny model, z którego musi wynikać teoria klasyczna. Uzasadniamy to powszechnym przekonaniem, że to teoria kwantowa stanowi bardziej fundamentalny opis Natury. Gdybyśmy kiedykolwiek odkryli teorię klasyczną, której nie otrzymujemy w granicy żadnego modelu kwantowego wstrząsnęłoby to posadami współczesnej fizyki. Jeżeli jednak odkrylibyśmy zjawisko i teorię, które nie dają w żadnej granicy dobrego modelu klasycznego, to weszlibyśmy w nowy ciekawy obszar badań, nie przekreślając dotychczasowych osiągnięć fizyki. W rzeczywistości wierzymy, że z sytuacją taką mamy do czynienia w pobliżu kosmicznych i kosmologicznych osobliwości. Podejście takie dobrze obrazuje cytat z klasycznego podręcznika Stevena Weinberga [34].

3.1 Kinematyczne podstawy nowego modelu kwantowego

Standardowe podejście do kwantowania klasycznych teorii z więzami pozwala nam wybrać jedno z dwóch możliwych podejść. Pierwsze podejście zakłada klasyczne rozwiązanie równań więzów i zredukowanie klasycznej przestrzeni fazowej do przestrzeni, uwzględniającej jedynie fizyczne stopnie swobody. To podejście nazywamy kwantyzacją na zredukowanej przestrzeni fazowej.

Drugie podejście zaproponowane przez Paula Diraca, zakłada konstrukcję kinematycznej

przestrzeni Hilberta i operatorów, bazując na pełnej klasycznej przestrzeni fazowej. Następnie klasyczne więzy implementujemy jako operatory kwantowe i rozwiązujemy kwantowe równania więzów.

Prezentowane podejście wychodzi od modelu kwantowego, dlatego stosowanie pierwszego z podejść wydaje się nieadekwatne do sytuacji. Dlatego też, będziemy stosować podejście Diraca, w którym więzy przyjmują formę operatorów kwantowych.

3.1.1 Klasyczny odpowiednik modelu kwantowego

Wychodząc od „formalnego” modelu kwantowego, możemy pominąć niniejszy paragraf w tym miejscu. Chcąc jednak cały czas pamiętać o związku, jaki łączy kwantowy model z klasyczną teorią grawitacji sprzężonej z polem skalarnym, dokonujemy w tym paragrafie podsumowania tego, co w dalszej części będziemy nazywać zdeparametryzowaną teorią grawitacji. W tym miejscu ograniczymy wybór zmiennych do zmiennych Ashtekara ponieważ jest on wymagany dla późniejszych konstrukcji, które opierają się na kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Jednak pozostaje możliwość użycia dowolnych innych zmiennych opisujących geometryczną część teorii w procesie konstruowania konkretnej realizacji prezentowanego „formalnego” modelu kwantowego.

Podsumowując, klasyczna przestrzeń fazowa składa się z kanonicznie sprzężonych par. $(A_a^i(x), P_j^b(y))$ opisujących geometrię oraz $(\phi(x), \pi(y))$ opisujących materię, którą w naszym przypadku jest bezmasowe pole skalarne. Znaczenie tych obiektów zostało opisane w poprzedniej części tej pracy. Elementarne nawiasy Poissona mają postać

$$\{A_a^i(x), P_j^b(y)\} = \delta(x, y) \delta_a^b \delta_j^i, \quad (3.1)$$

$$\{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(x, y). \quad (3.2)$$

Dopuszczane są tylko te konfiguracje pól (A, P, ϕ, π) , dla których spełnione są następujące warunki

$$\pi(x)^2 \geq \phi_{,a}(x) \phi_{,b}(x) q^{ab}(x), \quad (3.3)$$

$$\phi(x) > 0, \quad (3.4)$$

$$C^{(gr)}(A(x), P(x)) < 0. \quad (3.5)$$

Wszystkie obiekty występujące w tych wzorach zostały zdefiniowane w poprzedniej części tej pracy.

Klasyczny model charakteryzuje się Hamiltonianem, który jest liniową kombinacją więzów wektorowych i gaussowskich

$$C_a(x) = C_a^{(gr)}(x) + C_a^{(\phi)}(x), \quad (3.6)$$

$$G_a^i(x) = G_a^{(gr)i}(x), \quad (3.7)$$

zdefiniowanych w części opisującej klasyczną część tej pracy. Szczególnie ważna jest postać trzeciego, więzu skalarne

$$C'(x) = \pi(x) - h(x), \quad (3.8)$$

$$h := \sqrt{-\sqrt{q}C^{(gr)} + \sqrt{q}\sqrt{C^{(gr)2} - q^{ab}C_a^{(gr)}C_b^{(gr)}}}, \quad (3.9)$$

gdzie w ostatnim równaniu dla uproszczenia zapisu pominęliśmy zależność od punktu $x \in M$.

Powyżej opisany model reprezentuje klasyczną, zdeparametryzowaną teorię grawitacji sprzężonej z polem skalarnym ϕ , gdzie pole to posłuży jako relacyjny czas umożliwiający konstrukcję obserwabli Diraca o nietrywialnej ewolucji względem relacyjnego czasu.

3.1.2 Stany kwantowe i kinematyczna przestrzeń Hilberta

Konstrukcja modelu kwantowego wymaga zdefiniowania elementarnych operatorów kwantowych, które posłużą do definicji wszystkich innych, oraz kinematycznej przestrzeni Hilberta, na której działają. Wyprowadzimy je w sposób formalny w tym i w kolejnym paragrafie podkreślając ich własności, które muszą zostać spełnione bez względu na to, jaki konkretny sposób ich realizacji wybierzemy. W niniejszym paragrafie rozpoczniemy od definicji kinematycznej przestrzeni Hilberta.

Standardowe podejście pozwala nam zbudować wymaganą przestrzeń wychodząc od stanów kwantowych, które stanowią zespolone funkcje na przestrzeni konfiguracyjnej klasycznej teorii, która ma być otrzymywana jako odpowiednia granica z teorii kwantowej. W rozważanym przypadku przestrzeń tę stanowią dopuszczalne konfiguracje pól A i ϕ

(skr cone oznaczenia od $A_a^i(x)$ i $\phi(x)$) na 3-wymiarowej rozmaitości M . Przyjmijmy oznaczenie przestrzeni stanów kwantowych $QS(gr, \phi)$ (piszemy gr zamiast A aby podkre li , że wybór kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej i zmiennych Ashtekara może być zastąpiony dowolnym innym zestawem zmiennych opisujących cz   geometryczną teorii) dla funkcji zespolonych

$$(\phi, A) \rightarrow \Psi(\phi, A), \quad (3.10)$$

które dodatkowo pozwalają zdefiniować dobrze określony iloczyn skalarny pomiędzy stanami, $\langle \Psi(\phi, A), \Psi'(\phi, A) \rangle$. Określenie konkretnej postaci funkcji $\Psi(\phi, A)$, która pozwala na zdefiniowanie iloczynu skalarnego o pożądanych w sno ciach jest zadaniem konstrukcji modelu. Istnieje wiele sposobów, które pozwalają to uczyni , które nie dają równoważnych kwantowo teorii. W dalszej części wybierzemy podejście niezależne od metryki tła opierające się na funkcjach cylindrycznych i sieciach spinowych. Są to nar dzia znane z kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

Kinematyczną przestrzeń Hilberta otrzymujemy uzupełniając $QS(gr, \phi)$ za pomocą normy iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Otrzymaną przestrzeń, na której będziemy definiowa  elementarne operatory kwantowe oznaczamy $\mathcal{H}_{kin}^{(gr, \phi)}$, gdzie górny indeks podkreśla, że do jej konstrukcji wykorzystaliśmy stany zależne zarówno od części geometrycznej jak i części materii. Otrzymujemy w ten sposób

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr, \phi)} = \overline{QS(gr, \phi)}. \quad (3.11)$$

Dodatkowo rozr zniamy przestrzeń $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$, która opisuje jedynie cz   geometryczną nowego modelu grawitacji kwantowej. Przestrzeń ta jest przestrzenią jaką otrzymalibyśmy kwantuj c grawitacj  bez obecności materii. W naszym modelu kwantowym jako przestrzeń t  wybierzemy kinematyczną przestrzeń Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej opisaną w [1]).

W [14] dokonujemy rozbicia $\mathcal{H}_{kin}^{(gr, \phi)}$ na iloczyn tensorowy części opisującej geometri  i części opisującej materię

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr, \phi)} = \mathcal{H}_{kin}^{(gr)} \otimes \mathcal{H}_{kin}^{(\phi)}. \quad (3.12)$$

Obecnie nie będziemy korzysta  z tego rozbicia i skupimy się na konstrukcjach na części geometrycznej $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$.

Od tej chwili zakładamy, że mamy zdefiniowane $\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)}$ oraz $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$, i że posiadają one wymagane własności.

3.1.3 Elementarne operatory kwantowe

Kolejnym krokiem kwantyzacji systemu z więzami zgodnie z podejściem Diraca jest zdefiniowanie algebry operatorów kinematycznych działających na kinematycznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)}$ wprowadzonej w poprzednim paragrafie.

W pierwszej kolejności musimy zdefiniować elementarne operatory kwantowe, które umożliwią skonstruowanie kwantowych operatorów więzów. Algebra tych operatorów powinna stanowić reprezentację klasycznej algebry generowanej przez zmienne kanoniczne i ich nawiasy Poissona (3.1) i (3.2), którą powinniśmy móc odtworzyć w odpowiedniej granicy teorii kwantowej.

Konkretna realizacja w tym przypadku zależy od sposobu konstrukcji poszczególnych obiektów. W prezentowanym obecnie podejściu definiujemy elementarne operatory kwantowe opisujące część geometryczną w następujący sposób

$$\hat{A}_b^j(x)\Psi(\phi, A) = A_b^j(x)\Psi(\phi, A), \quad (3.13)$$

$$\hat{P}_j^b(x)\Psi(\phi, A) = -i\frac{\delta}{\delta A_b^j(x)}\Psi(\phi, A). \quad (3.14)$$

W kolejnej części posłużymy się odpowiednio rozsmarowanymi wersjami tych operatorów co umożliwi ich definicje w formalizmie kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

Część zmiennych opisująca materię zostanie skwantowana w standardowy sposób Wheelera-DeWitta

$$\hat{\phi}(x)\Psi(\phi, A) = \phi(x)\Psi(\phi, A), \quad (3.15)$$

$$\hat{\pi}(x)\Psi(\phi, A) = -i\frac{\delta}{\delta \phi(x)}\Psi(\phi, A). \quad (3.16)$$

W [14] techniki kwantyzacji polimerowej stosujemy również do tej części zmiennych elementarnych. Otrzymujemy równoważne wyniki.

3.2 Formalne rozwiązanie kwantowych więzów wektorowych i gaussowskich

Kolejny krok polega na rozwiązaniu kwantowych równań więzów. Podzielimy go na dwie części. Pierwsza część, którą traktuje niniejszy rozdział obejmuje rozwiązanie więzów gaussowskich i dyfeomorficznych. Więzy skalarne, ze względu na swoją wagę dla określenia dynamiki i dużo większy stopień skomplikowania, zostaną opisane w kolejnym rozdziale.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale nasze obecne rozważania mają charakter „formalny”, który przybierze formę konkretnych realizacji w kolejnej części tej pracy. Należy jednak podkreślić już w tym momencie, że obecność więzów gaussowskich generujących transformacje Yanga-Millsa jest wynikiem wyboru zmiennych Ashtekara do opisu części geometrycznej. W przypadku posługiwania się zmiennymi ADM więzy gaussowskie nie występują.

3.2.1 Uwagi o kwantyzacji więzów

Naszym punktem wyjścia obecnie jest skonstruowana w poprzednim rozdziale kinematyczna przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)}$ oraz elementarne operatory kwantowe. Za ich pomocą możemy teraz zdefiniować kwantowe operatory więzów lub ich rozsmarowane wersje. Kolejno szukamy rozwiązań więzów a więc przestrzeni stanów kwantowych spełniających opisane poniżej warunki.

W pierwszej kolejności szukamy rozwiązań więzów gaussowskich, a więc stanów spełniających warunek

$$\hat{G}\Psi(\phi, A) = 0,$$

gdzie $\hat{G}$ oznacza operator więzów gaussowskich. Otrzymane w ten sposób stany tworzą przestrzeń, którą oznaczamy $\mathcal{H}_G^{(gr,\phi)}$, gdzie indeks dolny G oznacza rozwiązanie więzów gaussowskich.

Pozostałe dwa operatory kwantowe więzów, a więc $\hat{C}_a$ i $\hat{C}'$ oznaczają więzy dyfeomorficzne i skalarne działające na tej przestrzeni. W dalszej kolejności wychodząc tym razem od

przestrzeni $\mathcal{H}_G^{(gr,\phi)}$ szukamy rozwiązań więzów dyfeomorficznych

$$\hat{C}_a \Psi(\phi, A) = 0.$$

Otrzymaną w ten sposób przestrzeń rozwiązań oznaczamy $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$.

Rozwiązanie więzów gaussowskich i dyfeomorficznych jest przemienne. Schematycznie przedstawiamy to poniżej. Kolejność rozwiązywania

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{gaussowskie}} \mathcal{H}_G^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{dyfeomorficzne}} \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$$

oraz

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{dyfeomorficzne}} \mathcal{H}_{dyf}^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{gaussowskie}} \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$$

prowadzą do tego samego wyniku.

Powyższe schematy nie koniecznie muszą oznaczać zawieranie się odpowiednich zbiorów elementów. W rzeczywistości nie jest prawdą, że

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)} \supset \mathcal{H}_{dyf}^{(gr,\phi)},$$

i konstrukcja rozwiązań prowadzi nas do większej przestrzeni niż wyjściowa przestrzeń kinematyczna. Szczegóły zostaną przedstawione w kolejnej części, gdzie będziemy omawiać zastosowanie kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

W kolejnym rozdziale omówimy ostatni krok prowadzący do fizycznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$.

3.2.2 Rozwiązanie kwantowych więzów gaussowskich

Kwantowy operator więzów gaussowskich, a raczej jego rozsmarowana wersja $\hat{G}(a)$, gdzie a oznacza dowolną funkcję $a : M \rightarrow SU(2)$ działa jedynie na geometryczną część zmiennych kanonicznych. Operator ten generuje unitarną grupę transformacji Yanga-Millsa działającą na $\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)}$,

$$\forall a : M \rightarrow SU(2) \longrightarrow U_G(a) \cdot \Psi(\phi, A) = \Psi(\phi, a^{-1}Aa + a^{-1}da). \quad (3.17)$$

Wieży gaussowskie pojawiają się, kiedy stosujemy opis części grawitacyjnej teorii oparty na zmiennych Ashtekara. Ich działanie na ortogonalną bazę przestrzeni Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji czyli sieci spinowe, opisana jest w [1]. W kontekście opisywanego w tej pracy modelu zdefiniowane jest [14] oraz [31]. Opis przedstawiony w tych pracach będzie zawarty w rozdziale rozprawy poświęconym kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

W tym momencie wnioskujemy jedynie, że przestrzeń rozwiązań więzów gaussowskich $\mathcal{H}_G^{(gr,\phi)}$ składa się ze stanów spełniających następujący warunek

$$\Psi(\phi, A) = \Psi(\phi, a^{-1}Aa + a^{-1}da). \quad (3.18)$$

3.2.3 Rozwiązanie kwantowych więzów wektorowych

Rozwiązanie więzów wektorowych jest dużo bardziej skomplikowane. Wynika to z kilku faktów, pośród których najważniejsze są dwa. Grupa dyfeomorfizmów jest grupą nieskończoną oraz nie jest zwarta. Unitarne operatory odpowiadające lokalnym dyfeomorfizmom nie są ciągle (słabo).

Zakładamy, że kwantowe więzy dyfeomorficzne generują działanie lokalnych dyfeomorfizmów na stany kwantowe.

$$\forall \varphi : M \rightarrow M \longrightarrow U_{dyf}(\varphi) \cdot \Psi(\phi, A) = \Psi(\varphi^* \cdot \phi, \varphi^* \cdot A). \quad (3.19)$$

Przy takim założeniu, które formalnie i ściśle wyprowadzimy w kolejnej części tej pracy, rozwiązania więzów dyfeomorficznych to stany kwantowe spełniające następujący warunek

$$\Psi(\varphi^* \cdot \phi, \varphi^* \cdot A) = \Psi(\phi, A), \quad (3.20)$$

dla dowolnego dyfeomorfizmu lokalnego $\varphi : M \rightarrow M$ (wzór (3.5) w [13]).

3.2.4 Przestrzeń niezmienniczych stanów kwantowych

Podsumowując wyniki niniejszego rozdziału, otrzymaliśmy w nim przestrzeń stanów dyfeomorficznie i Yang-Mills niezmienniczych $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$. Określają ją stany kwantowe spełniające równania (3.18) i (3.20).

Kolejnym krokiem będzie określenie działania kwantowego operatora więzu skalarnego i znalezienie ogólnej postaci stanów należących do $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$ anihilowanych przez te więzy.

Przedstawione tutaj „formalne” obiekty zostaną zdefiniowane w ścisły sposób w kolejnym rozdziale tej pracy, traktującej o zastosowaniu kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej do kwantyzacji przedstawionego w obecnym rozdziale modelu.

3.3 Kwantowe więzy skalarne i ich rozwiązania

Ostatnim etapem rozwiązywania więzów będzie znalezienie ogólnej postaci rozwiązań więzów skalarnych w ich zdeparametryzowanej postaci. Kończącym wynikiem tego rozdziału będzie scharakteryzowanie fizycznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$.

Pierwsze dwa paragrafy tego rozdziału traktują o rozwiązaniu więzów skalarnych. Dwa ostatnie stanowią podsumowanie wyników tego i poprzedniego rozdziału. Podsumowują postać rozwiązania wszystkich więzów naszej teorii.

3.3.1 Kwantowy operator więzów skalarnych

W niniejszym paragrafie zdefiniujemy kwantowy odpowiednik zdeparametryzowanych więzów skalarnych (3.8) i (3.9). Najpierw ograniczymy się do definicji jego działania na $\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)}$. W kolejnej części pokażemy w jaki sposób działanie to przenosi się na zdefiniowane w poprzednim rozdziale stany dyfeomorficznie i Yang-Mills niezmiennicze $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$.

Heurystycznie definiujemy kwantowy operator więzów skalarnych w następujący sposób

$$\hat{C}'(x) \cdot \Psi(\phi, A) = \left(\hat{\pi}(x) - \hat{h}(x) \right) \cdot \Psi(\phi, A). \quad (3.21)$$

W przypadku bezmasowego pola skalarnego ϕ , możemy w podobny sposób zdefiniować kwantowy operator $\hat{h}(x)$ za pomocą jego klasycznego wyrażenia (3.9). Musimy pamiętać, że występujące tam obiekty traktujemy jako funkcje zmiennych kanonicznych A i P , skąd

$$\hat{h}(x) = h \left(\hat{A}_b^j(x), \hat{P}_j^b(x) \right). \quad (3.22)$$

Problem uporządkowania operatorów sprawia, że heurystyczne wyrażenie (3.22) nie definiuje operatora $\hat{h}(x)$ w sposób jednoznaczny. Dodatkowym warunkiem na uporządkowanie operatorów jest konieczność uniknięcia anomalii kwantowych. Wymagamy, aby komutator odpowiednich operatorów kwantowych odpowiadał nawiasowi Poissona ich klasycznych odpowiedników. Stąd otrzymujemy następujące ograniczenie

$$\{h(x), h(y)\} = 0 \Rightarrow [\hat{h}(x), \hat{h}(y)] = 0. \quad (3.23)$$

Z tak zdefiniowanym operatorem, o którym w tym momencie zakładamy, że istnieje i ma wymagane właściwości rozwiązujemy równanie kwantowe zdeparametryzowanego więzu skalarnego

$$\left(\hat{\pi}(x) - \hat{h}(x)\right) \cdot \Psi(\phi, A) = 0. \quad (3.24)$$

Szczegółowa konstrukcja operatora $\hat{h}(x)$ zostanie przeprowadzona w rozdziale poświęconym zastosowaniu kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Ogólna postać rozwiązania (3.24) na poziomie „formalnym” zostanie wyprowadzona w kolejnym paragrafie.

3.3.2 Rozwiązanie kwantowych więzów skalarnych

W celu znalezienia ogólnej postaci rozwiązania równania (3.24) przyjmujemy następujący anszatz rozwiązania

$$\Psi(\phi, A) = e^{i \int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x)} \psi(\phi, A). \quad (3.25)$$

W ten sposób przesunęliśmy poszukiwania ogólnej postaci rozwiązań z funkcji $\Psi(\phi, A)$ na funkcję $\psi(\phi, A)$, której własności będziemy obecnie szukać.

Korzystając z definicji (3.16) elementarnego operatora kwantowego przekształcamy równanie (3.24) więzu skalarnego do postaci

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Psi(\phi, A) = i \hat{h}(x) \Psi(\phi, A). \quad (3.26)$$

Ze względu na (3.23) zachodzi następujący związek komutacyjny

$$\hat{h}(x) e^{i \int d^3y \hat{\phi}(y) \hat{h}(y)} = e^{i \int d^3y \hat{\phi}(y) \hat{h}(y)} \hat{h}(x). \quad (3.27)$$

Wykorzystując go wraz z (3.25) otrzymujemy wyrażenia na prawą stronę równania (3.26)

$$i \hat{h}(x) \Psi(\phi, A) = i \hat{h}(x) e^{i \int d^3y \hat{\phi}(y) \hat{h}(y)} \psi(\phi, A). \quad (3.28)$$

Następnie za pomocą definicji (3.15) elementarnego operatora kwantowego $\hat{\phi}(x)$ oraz niezależności wyrażenia $h(x)$ od $\phi(x)$, przekształcamy lewą stronę równania (3.26)

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Psi(\phi, A) &= \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(e^{i\int d^3y\hat{\phi}(y)\hat{h}(y)}\psi(\phi, A)\right) = \\ &= \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(e^{i\int d^3y\phi(y)\hat{h}(y)}\psi(\phi, A)\right) = \\ &= i\hat{h}(x)e^{i\int d^3y\phi(y)\hat{h}(y)}\psi(\phi, A) + e^{i\int d^3y\phi(y)\hat{h}(y)}\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\psi(\phi, A).\end{aligned}$$

Porównując powyższe równanie z (3.28) znajdujemy warunek jaki musi spełniać funkcja $\psi(\phi, A)$,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\psi(\phi, A) = 0. \quad (3.29)$$

Oznacza on, że ψ jest funkcją zależną jedynie od zmiennych geometrycznych, tzn.

$$\psi(\phi, A) = \psi(A). \quad (3.30)$$

Podsumowując niniejszy paragraf, ogólna postać rozwiązania więzów skalarnych przyjmuje postać dowolnej funkcji postaci

$$\Psi(\phi, A) = e^{i\int d^3x\hat{\phi}(x)\hat{h}(x)}\psi(A). \quad (3.31)$$

3.3.3 Ogólna postać rozwiązań więzów kwantowych

Ogólna postać rozwiązań kwantowych więzów musi spełniać wszystkie trzy warunki (3.18), (3.20) oraz (3.26) równocześnie.

Kombinacja zmiennych A i P w wyrażeniu na $h(x)$ sprawia, że jest on niezmienniczy ze względu na działanie transformacji Yanga-Millsa. Tym samym niezmienniczy jest eksponentyjalny operator występujący w wyrażeniu (3.25).

Dodatkowo występująca w tym wyrażeniu całka po całej 3-wymiarowej rozmaitości M gwarantuje, że eksponentyjalny operator w (3.25) jest dyfeomorficznie niezmienniczy.

Stąd warunki niezmienniczości przenoszą się z funkcji $\Psi(\phi, A)$ na funkcję $\psi(\phi, A)$,

$$\Psi(\phi, a^{-1}Aa + a^{-1}da) = \Psi(\phi, A) \implies \psi(a^{-1}Aa + a^{-1}da) = \psi(A), \quad (3.32)$$

$$\Psi(\varphi^*\phi, \varphi^*A) = \Psi(\phi, A) \implies \psi(\varphi^*A) = \psi(A). \quad (3.33)$$

Ostatecznie otrzymujemy ogólną postać rozwiązania wszystkich więzów kwantowych

Ogólnym rozwiązaniem kwantowych więzów gaussa, wektorowych i skalarnych jest każda funkcja postaci

$$\Psi(\phi, A) = e^{i \int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x)} \psi(A),$$

gdzie ψ spełnia następujące warunki:

- Dla każdego lokalnego dyfeomorfizmu $\varphi : M \rightarrow M$ zachodzi $\psi(\varphi^*A) = \psi(A)$.
- Dla każdej funkcji $a : M \rightarrow SU(2)$ zachodzi $\psi(a^{-1}Aa + a^{-1}da) = \psi(A)$.

3.3.4 Przestrzeń rozwiązań więzów kwantowych

Przestrzeń rozwiązań wszystkich trzech więzów kwantowych stanowi przestrzeń Hilberta stanów fizycznych $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$. Oczywiście pod warunkiem, że potrafimy określić dobrze zdefiniowany iloczyn skalarny pomiędzy stanami posiadający wymagane własności.

Opisaną pod koniec poprzedniego paragrafu przestrzeń rozwiązań więzów kwantowych potrafimy skonstruować, o ile potrafimy znaleźć odpowiednie funkcje $\psi(A)$. Co więcej jeżeli funkcje te będą tworzyły przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ to iloczyn skalarny z tej przestrzeni potrafimy przenieść na przestrzeń $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$ w taki sposób, że otrzymamy również na niej dobrze zdefiniowany iloczyn. Również operatory zdefiniowane na $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ przenoszą się na $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$ co będzie pokazane w kolejnym rozdziale.

Podsumowując, mając daną przestrzeń Hilberta kwantowych stanów geometrii $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$, które są dyfeomorficznie i Yang-Mills niezmiennicze, za pomocą unitarnego izomorfizmu

$$\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)} \rightarrow \mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)} : \psi(A) \rightarrow \Psi(\phi, A) := e^{i \int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x)} \psi(A) \quad (3.34)$$

otrzymujemy przestrzeń fizycznych stanów naszego nowego modelu.

Iloczyn skalarny z $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ definiuje iloczyn skalarny na $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr,\phi)}$

$$\langle \Psi(\phi, A) | \Psi'(\phi, A) \rangle_{fiz} = \left\langle e^{i \int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x)} \psi(A) \middle| e^{i \int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x)} \psi'(A) \right\rangle_{fiz} = \langle \psi | \psi' \rangle. \quad (3.35)$$

Konstrukcja kwantowego modelu bezmasowego pola skalarnego sprzężonego z polem gravitacyjnym sprowadza się do zdefiniowania obiektów opisujących geometryczną część naszego modelu. Okazuje się jednak, że obiekty takie są dobrze znane, a ich konstrukcja

została przeprowadzona w ramach kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Będą one przedstawione w kolejnej części niniejszej pracy.

3.4 Kwantowe obserwable Diraca

W klasycznej teorii z więzami pierwszego rodzaju mamy do czynienia z sytuacją, kiedy różne punkty przestrzeni fazowej mogą opisywać ten sam stan fizyczny układu. W rzeczywistości, więzy generują transformacje cechowania, a funkcje reprezentujące fizyczne wielkości powinny przyjmować stałe wartości na orbitach transformacji cechowania. Oznacza to znikanie nawiasu Poissona ze wszystkimi więzami pierwszego rodzaju. Funkcje takie nazywamy obserwabłami Diraca.

W teoriach takich jak ogólna teoria względności, gdzie okazuje się, że kanoniczny Hamiltonian jest liniową kombinacją więzów, generowana przez niego „ewolucja” jest niczym innym jak transformacją cechowania. Popularnie nazywamy ten fakt „problemem czasu”. Skonstruowanie obserwabli Diraca, o których nietrywialnej ewolucji możemy mówić nie jest prostym zadaniem.

Jedno z bardziej skutecznych podejść opiera się na tzw. zmiennych relacyjnych ([35], [5]). Dokładne rozwinięcie tych koncepcji można znaleźć w [6], [7] oraz w [33].

Powyższe klasyczne właściwości teorii z więzami pierwszego rodzaju mają swoje odzwierciedlenie w modelach kwantowych. Kwantowe operatory odpowiadające fizycznie mierzalnym wielkościom, powinny być niezmiennicze względem transformacji generowanych przez kwantowe operatory więzów. Są to tzw. kwantowe obserwable Diraca.

3.4.1 Definicja kwantowych obserwabli Diraca

W przypadku prezentowanego w tym rozdziale modelu kwantowego mamy trzy rodziny kwantowych więzów pierwszego rodzaju.

Więzy dyfeomorficzne $\hat{C}_a(x)$, o których zakładamy, że generują unitarne transformacje $\hat{U}_{dyf}(\varphi)$. Więzy gaussowskie, które generują unitarne transformacje $\hat{U}_G(a)$, oraz więzy

skalarne zdefiniowane w równaniu (3.21).

Obserwable Diraca definiujemy w następujący sposób:

Kwantowym operatorem Diraca będziemy nazywać operator $\hat{\mathcal{O}}$ posiadający wszystkie poniższe właściwości

- *Obcięcie operatora $\hat{\mathcal{O}}$ do przestrzeni rozwiązań więzów kwantowych jest dobrze zdefiniowane.*
- *Operator $\hat{\mathcal{O}}$ jest niezmienniczy względem działania więzów dyfeomorficznych*

$$\hat{\mathcal{O}}\hat{U}_{dyf}(\varphi) \cdot \Phi(\psi, A) = \hat{U}_{dyf}(\varphi)\hat{\mathcal{O}} \cdot \Phi(\psi, A). \quad (3.36)$$

- *Operator $\hat{\mathcal{O}}$ jest niezmienniczy względem działania więzów gaussowskich*

$$\hat{\mathcal{O}}\hat{U}_G(a) \cdot \Phi(\psi, A) = \hat{U}_G(a)\hat{\mathcal{O}} \cdot \Phi(\psi, A). \quad (3.37)$$

- *Operator $\hat{\mathcal{O}}$ komutuje z operatorem więzów skalarnych*

$$[\hat{\mathcal{O}}, \hat{C}'(x)] = 0. \quad (3.38)$$

3.4.2 Rodzina kwantowych obserwabli Diraca w zdeparametryzowanym modelu grawitacji sprzężonej z polem skalarnym

Formalizm obserwabli relacyjnych pozwala zdefiniować dużą rodzinę obserwabli konstruowanego modelu. W kolejnym paragrafie pokażemy, że jest ona w rzeczywistości wystarczająca do opisu badanego modelu.

Zakładamy, że $\hat{L}$ oznacza dowolny operator na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)}$. To znaczy, że $\hat{L}$ przeprowadza funkcje $A \rightarrow \psi(A)$ na funkcje $A \rightarrow \hat{L} \cdot \psi(A)$. Ponadto spełnia następujące warunki

$$[\hat{L}, \hat{U}_G(a)] = 0, \quad (3.39)$$

$$[\hat{L}, \hat{U}_{dyf}(\varphi)] = 0. \quad (3.40)$$

Mając operator $\hat{L}$ jak powyżej, możemy zdefiniować operator $\mathcal{O}(\hat{L})$ działający na opisanej w Paragrafie 3.3.3 przestrzeni rozwiązań więzów kwantowych, w następujący sposób

$$\mathcal{O}(\hat{L}) := e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \hat{L} e^{-i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}}. \quad (3.41)$$

Aby to udowodnić, zauważamy kolejno:

1. Zauważamy, że dla dowolnego $\varphi : M \rightarrow M$ mamy

$$\int d^3x \hat{\phi}(x) \hat{h}(x) = \int d^3x \hat{\phi}(\varphi(x)) \hat{h}(\varphi(x)), \quad (3.42)$$

skąd wynika, że

$$\left[e^{\pm i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}}, \hat{U}_{dyff}(\varphi) \right] = 0. \quad (3.43)$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\mathcal{O}(\hat{L}) \hat{U}_{dyff}(\varphi) \cdot \Psi(\phi, A) = \hat{U}_{dyff}(\varphi) \mathcal{O}(\hat{L}) \cdot \Psi(\phi, A). \quad (3.44)$$

2. Ponieważ transformacje Yanga-Millsa działają jedynie na część geometryczną, a operator $\hat{h}$ zależy od $\hat{A}$ i $\hat{P}$ w sposób niezmienniczy, wynika stąd, że

$$\left[e^{\pm i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}}, \hat{U}_G(a) \right] = 0. \quad (3.45)$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\mathcal{O}(\hat{L}) \hat{U}_G(a) \cdot \Psi(\phi, A) = \hat{U}_G(a) \mathcal{O}(\hat{L}) \cdot \Psi(\phi, A). \quad (3.46)$$

3. Operator $\mathcal{O}(\hat{L})$ zachowuje przestrzeń rozwiązań więzów

$$\mathcal{O}(\hat{L}) e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \psi(A) = e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \psi'(A), \quad (3.47)$$

gdzie

$$\psi'(A) = \hat{L} \psi(A), \quad (3.48)$$

a co za tym idzie spełnia warunek

$$\left[\mathcal{O}(\hat{L}), \hat{C}'(x) \right] = 0. \quad (3.49)$$

Powyższe trzy warunki pokazują, że $\mathcal{O}(\hat{L})$ definiuje rodzinę obserwabli Diraca na $\mathcal{H}_{fiz}^{(gr, \phi)}$, indeksowaną operatorami $\hat{L}$ na $\mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)}$.

Na przestrzeni rozwiązań więzów również operator „całkowitego pędu” $\int d^3x \hat{\pi}(x)$ definiuje operator należący do tej rodziny. Na przestrzeni rozwiązań, spełniony jest bowiem warunek $\hat{\pi}(x) = \hat{h}(x)$, skąd otrzymujemy

$$\mathcal{O}(\int d^3x \hat{\pi}(x)) = \mathcal{O}(\int d^3x \hat{h}(x)) = \int d^3x \hat{h}(x). \quad (3.50)$$

3.4.3 Zupełność zdefiniowanej rodziny obserwabli Diraca

Zdefiniowana powyżej rodzina kwantowych obserwabli Diraca w rzeczywistości zawiera wszystkie fizyczne obserwable. Dowodzimy tego, zapisując dowolny operator $\hat{O}$ w postaci

$$\hat{O} = e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \hat{K} e^{-i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}}. \quad (3.51)$$

Nie zmniejsza to ogólności rozważań. Kładąc $\hat{K} = e^{-i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \hat{O} e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}}$ otrzymujemy wymaganą postać operatora.

Narzucamy na ten operator trzy warunki, jakie musi spełniać kwantowa obserwabla Diraca w naszym modelu. Powtarzając rozumowanie analogiczne, do tego jakie przedstawione jest w poprzednim paragrafie wnioskujemy, co następuje. Warunkiem niezmienniczości względem działania lokalnych dyfeomorfizmów i transformacji Yanga-Millsa operatora $\hat{O}$ przenosi się na takie same wymagania względem operatora $\hat{K}$.

Pozostałym nietrywialnym warunkiem jest znikanie komutatora

$$[\hat{O}, \hat{C}'(x)] = 0.$$

Wstawiamy (3.51) do powyższego równania i otrzymujemy następujący równoważny warunek

$$[\hat{K}, \hat{\pi}(x)] = 0. \quad (3.52)$$

Zbiór rozwiązań powyższego równania generowany jest za pomocą następujących operatorów

1. $\hat{K} = \hat{\pi}(x)$

Co wynika ze związków komutacyjnych pomiędzy zmiennymi pola skalarnego.

2. $\hat{K} = \hat{L}$, gdzie $\hat{L}$ jest operatorem działającym na funkcję $A \rightarrow \psi(A)$ i przeprowadzający ją w $A \rightarrow \hat{L}\psi(A)$

Co wynika z faktu komutowania zmiennych geometrycznych ze zmiennymi pola skalarnego.

Okazuje się jednak, że rozwiązania postaci 1. znikają na przestrzeni rozwiązań. Jest to konsekwencją zależności

$$e^{i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} \hat{\pi}(x) e^{-i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}} = \hat{\pi}(x) - \hat{h}(x) = \hat{C}'(x), \quad (3.53)$$

wynikającej ze wzoru Bakera–Cambella–Hausdorfa.

Ostatecznie otrzymujemy, że wszystkie obserwable Diraca badanego modelu generowane są przez dyfeomorficznie i Yang–Mills niezmiennicze operatory $\hat{L}$ działające na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)}$.

3.4.4 Klasyczny odpowiednik kwantowych obserwabli Diraca

Często nadajemy fizyczną interpretację kwantowym operatorom szukając ich klasycznych odpowiedników. Nie inaczej będziemy postępować i w tym przypadku. W pierwszej kolejności musimy zatem znaleźć klasyczne funkcje, którym odpowiadają zdefiniowane przez nas operatory kwantowe.

Pamiętajmy jednak, że w proponowanym przez nas podejściu do kwantyzacji, to teoria kwantowa uważana jest za bardziej elementarną. Istnienie klasycznej interpretacji nie jest wcale warunkiem koniecznym do stwierdzenia poprawności badanego modelu kwantowego.

Klasycznej interpretacji obserwabli kwantowej szukamy odwracając procedurę zamiany nawiasów Poissona klasycznych funkcji na komutatory operatorów. Stosujemy następujące podstawienie

$$[\cdot , \cdot] \longrightarrow -i \{ \cdot , \cdot \}. \quad (3.54)$$

Rozważmy operator $\hat{L}$, który posłużył do skonstruowania kwantowej obserwabli Diraca $\mathcal{O}(\hat{L})$. Przyjmujemy, że dziedzina odpowiadającej mu funkcji L zdefiniowanej na geometrycznej części przestrzeni fazowej, zawiera się w tej części, w której zachodzi

$$C_{gr} < 0.$$

Za pomocą wyrażenia znanego z [6] i [7] zapisujemy wzór (3.41) definiujący kwantową obserwabłą Diraca w następującej formie

$$\mathcal{O}(\hat{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[\hat{L}, \int d^3x \hat{\phi} \hat{h} \right]_{(n)}, \quad (3.55)$$

gdzie $[\cdot, \cdot]_{(n)}$ definiujemy w następujący sposób

$$\left[\hat{L}, \int d^3x \hat{\phi} \hat{h} \right]_{(0)} = \hat{L} \quad (3.56)$$

$$\left[\hat{L}, \int d^3x \hat{\phi} \hat{h} \right]_{(n)} = \left[\left[\hat{L}, \int d^3x \hat{\phi} \hat{h} \right]_{(n-1)}, \int d^3x \hat{\phi} \hat{h} \right]. \quad (3.57)$$

Zastosowanie podstawienia (3.54) do (3.55) prowadzi do klasycznej funkcji $\mathcal{O}(L)$,

$$\mathcal{O}(L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ L, \int d^3x \phi h \right\}_{(n)}, \quad (3.58)$$

odpowiadającej kwantowemu operatorowi $\mathcal{O}(\hat{L})$. $\{\cdot, \cdot\}_{(n)}$ zdefiniowany jest w analogiczny sposób jak $[\cdot, \cdot]_{(n)}$ w przypadku komutatorów.

3.4.5 Interpretacja klasycznej funkcji odpowiadającej kwantowym obserwabłom Diraca

Rozpatrzmy teraz klasyczną funkcję $\mathcal{O}(L)$ określoną na klasycznej przestrzeni fazowej Γ . Przeprowadza ona punkt (A, P, ϕ, π) określony konfiguracją odpowiednich pól na M w punkt $\mathcal{O}(L)(A, P, \phi, \pi)$.

Przedstawiona tutaj interpretacja pochodzi z formalizmu zmiennych relacyjnych opisanego w [6], [7], [8] oraz [33].

Rozpatrzmy najpierw bardziej ogólne wyrażenie, w którym w miejsce fizycznego pola ϕ spełniającego odpowiednie równania, wstawiamy dowolną funkcję $t : M \ni x \rightarrow t(x)$. Definiujemy funkcję postaci

$$\alpha_t^*(L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ L, \int d^3x t h \right\}_{(n)}. \quad (3.59)$$

Na podstawie wyników z cytowanej na początku tego paragrafu literatury wiemy, że tak zdefiniowana funkcja jest cofnięciem funkcji $L : \Gamma_{gr} \rightarrow \Gamma_{gr}$ za pomocą odwzorowania

$$\alpha_t : \Gamma_{gr} \rightarrow \Gamma_{gr}. \quad (3.60)$$

Powyższe odwzorowanie jest natomiast jednoznacznie określone za pomocą strumienia hamiltonowskiego $\beta_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ na pełnej przestrzeni fazowej, które jest generowane przez więzy $C'(x)$ przy parametrach $t(x)$. Równanie definiujące α_t : przyjmuje następującą postać

$$(A, P, \phi, \pi) \rightarrow \beta_t(A, P, \phi, \pi) = (\alpha_t(A, P), \phi - t, \pi). \quad (3.61)$$

W szczególności dla $t(x) = \phi(x)$ otrzymujemy

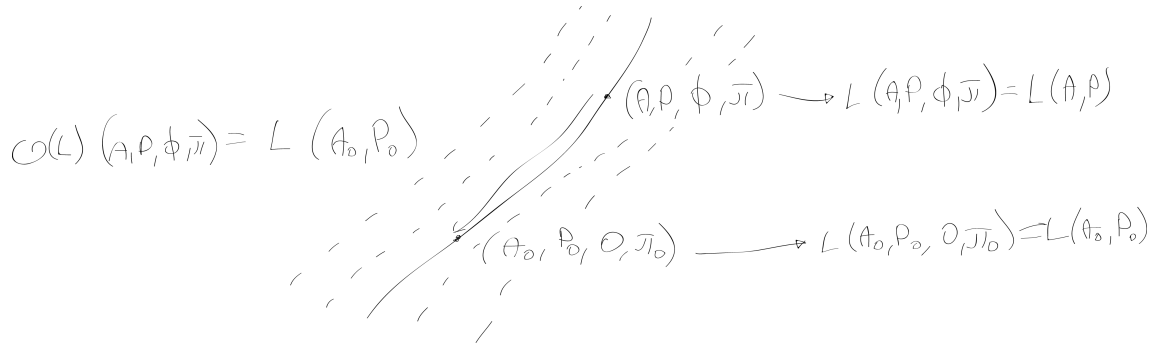
$$\beta_\phi(A, P, \phi, \pi) = (\alpha_\phi(A, P), 0, \pi), \quad (3.62)$$

co służy do zdefiniowania α_ϕ , a co za tym idzie $\mathcal{O}(L)$.

Otrzymujemy stąd następującą charakterystykę funkcji $\mathcal{O}(L) : \Gamma \rightarrow \Gamma$ określoną poniższym równaniem

$$\mathcal{O}(L)(A, P, \phi, \pi) = L(\alpha_t(A, P)) = \alpha_\phi^*(L). \quad (3.63)$$

Nadaliśmy jej klasyczną interpretację, która mówi, że jeżeli chcemy znaleźć wartość tej funkcji w punkcie (A, P, ϕ, π) to znajdujemy orbitę transformacji cechowania generowanej przez więzy skalarne i szukamy na niej punktu, w którym ϕ staje się równe zero. Odczytana w tym punkcie konfiguracja pól (A_0, P_0) jest argumentem funkcji L . Wartość tej funkcji w tym punkcie jest szukaną wartością $\mathcal{O}(L)(A, P, \phi, \pi)$.



Rys. III. 2

Podsumowując, kwantowa obserwabla Diraca $\mathcal{O}(\hat{L})$, odpowiada klasycznej funkcji $\mathcal{O}(L)$, która również jest obserwabłą, dlatego możemy zapisać

$$\widehat{\mathcal{O}(L)} = \mathcal{O}(\hat{L}). \quad (3.64)$$

W tym momencie niezbędny jest komentarz na temat statusu operatora $\mathcal{O}(\hat{L})$. Może się zdarzyć bowiem, że w danym punkcie (A, P, ϕ, π) przestrzeni fazowej Γ , szereg (3.58)

nie jest zbieżny. W rzeczywistości, z sytuacją taką mamy do czynienia w modelach pętlowej kosmologii kwantowej (LQC) opisujących jednorodny i izotropowy Wszechświat z dodatnią stałą kosmologiczną [36]

Operator $\mathcal{O}(\hat{L})$ pozostaje jednak dobrze zdefiniowany, o ile samosprężone rozszerzenie operatora $\int d^3x \hat{\phi} \hat{h}$ jest ustalone, a w związku z tym operator $\exp\left(i \int d^3x \hat{\phi} \hat{h}\right)$ jest dobrze zdefiniowany.

W takiej sytuacji, kwantowa ewolucja wyprowadza nas w obszar niedostępny teorii klasycznej. Ten fakt, w rzeczywistości był głównym motywem dla naszego podejścia, w którym zdecydowaliśmy się zdefiniować obserwable Diraca bezpośrednio w teorii kwantowej, nadając ich klasycznej interpretacji jedynie drugorzędne znaczenie.

3.5 Dynamiczna ewolucja obserwabli Diraca

Celem tego rozdziału jest przedstawienie relacyjnego sposobu interpretacji kwantowych obserwabli. Oryginalne wyniki niniejszej rozprawy polegają na zastosowaniu tych koncepcji do stworzenia modelu kwantowej grawitacji oddziałującej z polem skalarnym pełniącym rolę relacyjnego czasu.

Definicje relacyjnych obserwabli Diraca oraz sposób interpretacji ich dynamiki zostały opisane w [7] oraz cytowanej tam literaturze. Uściślenia dokonano w [33]. Prezentowane tutaj podejście zostało oryginalnie opisane w [13] natomiast osadzenie w szerszym kontekście znajduje się w wykładach zaprezentowanych w [31].

3.5.1 Relacyjna ewolucja funkcji klasycznych

Zadaniem teorii fizycznych jest określenie wielkości, które mogą podlegać bezpośredniemu lub pośredniemu procesowi pomiarowemu, i których wyniki można przewidzieć w obrębie danej teorii. Jest to podstawowym warunkiem jej weryfikacji eksperymentalnej. Przewidywalność wyników może być ścisła, jak w fizyce klasycznej, lub mieć charakter statystyczny, jak w mechanice kwantowej. Jednak w obu tych przypadkach jest ona ściśle związana z pewną zależnością od parametru określającego ewolucję.

Fizyka klasyczna i mechanika kwantowa utożsamiają ten parametr z czasem, który płynie jednostajnie i niezależnie od układu. Geometryzacja tego parametru i włączenie go do dynamicznych rozważań ogólnej teorii względności skomplikowały sytuację. Dodatkowo konsekwencją traktowania dyfeomorfizmów jako transformacji cechowania jest postać Hamiltonianu, który okazuje się liniową kombinacją więzów.

Funkcja, której klasyczną rolą było generowanie ewolucji w tym zewnętrznym czasie, okazuje się generatorem transformacji cechowania. Tym samym czas w swoim klasycznym znaczeniu zostaje zdegradowany do roli parametru numerującego punkty na orbicie transformacji cechowania. Przestaje tym samym mieć znaczenie fizyczne jako parametr definiujący ewolucję układu.

Wiąże się z tym niemożliwość zdefiniowania nietrywialnych obserwabli Diraca takiego modelu. W oparciu o formalizm relacyjnych obserwabli, w poprzednich paragrafach zdefiniowaliśmy kwantową rodzinę takich obserwabli oraz znaleźliśmy odpowiadające im funkcje klasyczne.

Zaczynając na poziomie klasycznym, dla takiej klasy obserwabli potrafimy zdefiniować nietrywialną ewolucję oraz co uczynimy w wersji kwantowej w kolejnym paragrafie, fizyczny Hamiltonian definiujący taką ewolucję. Dynamika taka określona jest względem czasu relacyjnego. W naszym modelu rolę taką nadajemy polu ϕ , a dokładniej wartością jakie pole to przyjmuje w czasie poruszania się po orbicie transformacji cechowania generowanej przez więzy skalarne $C'(x)$.

Możemy to zobaczyć uogólniając określenie punktu na orbicie cechowania, potrzebnego do definicji $\mathcal{O}(L)$ z L . Przyjmując $t(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$ dla dowolnej funkcji ϕ_0 , ustalonej na M , możemy zapisać wzór (3.62) w postaci

$$\beta_{\phi-\phi_0}(A, P, \phi, \pi) = (\alpha_{\phi-\phi_0}(A, P), \phi_0, \pi), \quad (3.65)$$

gdzie $\alpha_{\phi-\phi_0}(A, P)$ definiujemy podobnie jak poprzednio $\alpha_\phi(A, P)$, tym razem poruszamy się wzdłuż orbity cechowania, aż do punktu gdzie konfiguracja pola skalarne ϕ staje się równa ϕ_0 . Pozwala on zdefiniować w sposób analogiczny do tego, jaki przedstawia

wzór (3.63), funkcję $\mathcal{O}_{\phi_0}(L)$ na Γ ,

$$\mathcal{O}_{\phi_0}(L)(A, P, \phi, \pi) = L(\alpha_{\phi-\phi_0}(A, P)) = \alpha_{\phi-\phi_0}^*(L). \quad (3.66)$$

Funkcja $\mathcal{O}_{\phi_0}(L)$ będzie dobrze zdefiniowana, o ile strumień $\beta_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ będzie dobrze zdefiniowany dla

$$t(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$$

na dziedzinie funkcji L .

Powyższemu równaniu możemy nadać rolę klasycznej obserwabi Diraca i badać jej ewolucję w relacyjnym czasie ϕ . Analiza przeprowadzona przy użyciu równania (3.58) pokazuje, że ewolucja ta określona jest przez fizyczny Hamiltonian. Centrum naszych zainteresowań jest teoria kwantowa, stąd przechodzimy do ewolucji kwantowych obserwabi Diraca.

3.5.2 Ewolucja kwantowych obserwabi Diraca

Przedstawiona powyżej klasyczna interpretacja ewolucji klasycznych obserwabi $\mathcal{O}_{\phi_0}(L)$ prowadzi do następującego obrazu operatorów kwantowych

$$\mathcal{O}_{\phi_0}(\hat{L})\Psi(\phi, A) = e^{i \int d^3x (\phi(x) - \phi_0(x)) \hat{h}(x)} \hat{L} e^{-i \int d^3x (\phi(x) - \phi_0(x)) \hat{h}(x)} \Psi(\phi, A). \quad (3.67)$$

Ewolucja operatora określona jest parametrem ϕ_0 i odpowiada interpretacji Heisenberga ewolucji w mechanice kwantowej. W powyższej definicji wybieramy reprezentację, w której zachodzi

$$\hat{\phi} \cdot \Psi(\phi, A) = \phi \cdot \Psi(\phi, A).$$

Zdefiniowana w ten sposób rodzina operatorów $\mathcal{O}_{\phi_0}$ nie wyprowadza nas poza rodzinę obserwabi zdefiniowanych w Paragrafie 3.4.2 odpowiadającym operatorom komutującym z więzem skalarnym. Dowodzimy tego zapisując

$$\mathcal{O}_{\phi_0}(\hat{L}) = \mathcal{O}(\hat{L}'), \quad (3.68)$$

gdzie

$$\hat{L}' = e^{-i \int d^3x \phi_0(x) \hat{h}(x)} \hat{L} e^{i \int d^3x \phi_0(x) \hat{h}(x)}. \quad (3.69)$$

Zdefiniowana w ten sposób rodzina operatorów stanowi abelową grupę automorfizmów w algebrze rozwiązań więzu skalarnego

$$[\hat{O}, \hat{C}'(x)] = 0.$$

Elementy tej grupy numerowane są chwilami czasu relacyjnego, czyli funkcjami ϕ_0 na rozmaitości M

$$\mathcal{O}(\hat{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{\phi_0}(\hat{L}). \quad (3.70)$$

Chcąc następnie ograniczyć te automorfizmy do algebry kwantowych operatorów Diraca, napotykamy na trudność. Dla danej funkcji $\phi_0(x)$ wymagamy, aby operator (3.69), czyli $\hat{L}'$ był dyfeomorficznie niezmienniczy dla dowolnego dyfeomorficznie niezmienniczego operatora $\hat{L}$.

Dla operatora $\hat{h}(x)$, który będziemy konstruować w obrębie formalizmu kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej, warunek ten może być spełniony tylko dla stałych funkcji $\phi_0(x)$,

$$\phi_0(x) = \phi_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M. \quad (3.71)$$

Wynika to z faktu, iż działanie operatora $\hat{h}(x)$ jest skupione na wierzchołkach grafu funkcji cylindrycznych, o których będzie mowa w kolejnym rozdziale tej pracy. Aby dla dowolnej funkcji cylindrycznej odpowiednie działanie było niezależne od dyfeomorfizmów przesuujących funkcję $\phi_0(x)$, musi być ona stała na całej przestrzeni M .

W rezultacie otrzymujemy 1-wymiarową grupę automorfizmów algebry kwantowych obserwabli Diraca. Grupa ta zawiera w sobie zależność kwantowych obserwabli Diraca od relacyjnego czasu ϕ_0 .

3.5.3 Fizyczny Hamiltonian

Okazuje się, że taka postać operatorów umożliwia zapisanie ewolucji w kanonicznej postaci. Poprzez różniczkowanie równań (3.68) i (3.69) otrzymujemy następujące równanie określające dynamikę

$$\frac{d}{d\phi_0} \mathcal{O}_{\phi_0}(\hat{L}) = -i \left[\hat{h}_{fiz}, \mathcal{O}_{\phi_0}(\hat{L}) \right]. \quad (3.72)$$

$\hat{h}_{fiz}$ jest nieznikającą obserwabłą Diraca generującą ewolucję, dlatego nazywamy go fizycznym Hamiltonianem. Przyjmuje on postać

$$\hat{h}_{fiz} = \int d^3x \hat{h}(x). \quad (3.73)$$

Fizyczny Hamiltonian będzie implementacją poniższego, heurystycznego wyrażenia

$$\hat{h}_{fiz} = \int d^3x \sqrt{-\sqrt{\hat{q}}\hat{C}^{gr} + \sqrt{\hat{q}}\sqrt{(\hat{C}^{gr})^2 - \hat{q}^{ab}\hat{C}_a^{gr}\hat{C}_b^{gr}}}. \quad (3.74)$$

Operator ten musi być dobrze określony na przestrzeni stanów dyfeomorficznie niezmienniczych. Możemy dlatego założyć, że wybierając odpowiednie uporządkowanie operatorów otrzymujemy następującą postać działania operatora $\hat{h}_{fiz}$ na dyfeomorficznie niezmiennicze funkcje ψ ,

$$\hat{h}_{fiz} \cdot \psi(A) = \int d^3x \sqrt{-2\sqrt{\hat{q}}\hat{C}^{gr}} \cdot \psi(A) \quad (3.75)$$

gdzie uwzględniono, że

$$\hat{C}^{gr} < 0. \quad (3.76)$$

Wynik ten zgadza się z [25].

3.6 Podsumowanie i wymagania dla zastosowania kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej

W tym rozdziale podsumowujemy przeprowadzoną powyżej konstrukcję modelu kwantowego. Celem tego podsumowania jest pokazanie jakie elementy muszą zostać skonstruowane w obrębie modelu kwantowego, który posłuży do konstrukcji części geometrycznej modelu.

Główny sukces prezentowanego modelu polega na wydzieleniu tego co ma być kwantowane jako część grawitacyjna od tego, co ma być kwantowane jako część pola skalarnego. Prezentowane w tej pracy podejście opiera się na kwantyzacji części grawitacyjnej w oparciu o wyniki kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Podejście to zaprezentowane jest w [13]. Kwantyzacji zmiennej pola skalarnego dokonujemy w [14].

Podsumowując, aby dokończyć konstrukcję modelu kwantowego musimy umieć skonstruować następujące obiekty

- Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$, która jest przestrzenią Hilberta opisującą część grawitacyjną, składającą się ze stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych.
- Operatorów na $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ posiadających prostą geometryczną interpretację

- Operator odpowiadający fizycznemu Hamiltonianowi $\hat{h}_{fiz}$, którego dziedzina zawiera się w $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$.

Mając dane powyżej wymienione obiekty możemy dokończyć konstrukcji modelu kwantowego.

Fizyczna przestrzeń jest unitarnie izomorficzna z dziedziną $\hat{h}_{fiz}(x)$ w $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ za pomocą odwzorowania

$$e^{i\int \phi \hat{h}} \psi \rightarrow \psi. \quad (3.77)$$

Każda obserwablą $\mathcal{O}(\hat{L})$ jest skonstruowana za pomocą cofnięcia operatora geometrycznego $\hat{L}$, który zachowuje dopełnienie dziedziny $\hat{h}_{fiz}$.

Na końcu, relacyjna ewolucja obserwabli przybiera postać dobrze znanej interpretacji Heisenberga,

$$\hat{L}(\tau) = e^{-i\tau \hat{h}_{fiz}} \hat{L} e^{i\tau \hat{h}_{fiz}}. \quad (3.78)$$

Dodatkowo musimy szczególną uwagę poświęcić definicji operatora $\hat{h}_{fiz}$. Jego konstrukcja wymaga wprowadzenia dodatkowych struktur, a szczegółowe wymagania opisujemy w poniższych punktach.

- Operator $\hat{h}_{fiz}$ powinien być skonstruowany, przy użyciu dystrybucji o wartościach operatorowych

$$M \ni x \rightarrow \widehat{\sqrt{q(x)}C^{(gr)}}(x). \quad (3.79)$$

- Dystrybucja opisana w poprzednim punkcie powinna być samosprężona, aby umożliwić zdefiniowanie podprzestrzeni, na której zachodzi

$$\widehat{\sqrt{q(x)}C^{(gr)}} < 0, \quad (3.80)$$

i na niej określenia nowej dystrybucji

$$\hat{h}(x) = \sqrt{-2\widehat{\sqrt{q(x)}C^{(gr)}}}. \quad (3.81)$$

- Musi zachodzić związek, który jest zgodny z klasycznym nawiasem Poissona, tzn

$$[\hat{h}(x), \hat{h}(y)] = 0. \quad (3.82)$$

Spełniwszy powyższe warunki ostatecznie otrzymujemy fizyczny Hamiltonian

$$\hat{h}_{fiz} = \int_M d^3x \hat{h}_{fiz}(x), \quad (3.83)$$

co kończy konstrukcję modelu kwantowego grawitacji sprzężonej z bezmasowym polem skalarnym.

Rozdział 4

Zastosowanie kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej

„ W podejściu tym na poważnie traktujemy podstawową lekcję płynącą z ogólnej teorii względności: grawitacja to geometria. Dlatego fundamentalna teoria nie powinna odwoływać się do żadnej metryki stanowiącej tło wydarzeń fizycznych. Grawitacja kwantowa powinna pozwolić, aby geometria i materia wspólnie wyłaniały się z kwantowo mechanicznego obrazu”

”Background independent quantum gravity: a status report.”

*Class. Quantum Grav.***21**, R53

A. Ashtekar and J. Lewandowski

Kanoniczna pętlowa grawitacja kwantowa, do której odnosi się powyższy cytat, jest teorią, która święciła spore sukcesy na poziomie kinematycznym. Szczęśliwie okazuje się, że przynosi ona narzędzia i gotowe rozwiązania do konstrukcji kwantowego modelu opisanego w poprzedniej części tej pracy.

Kanoniczna pętlowa grawitacja kwantowa, która za punkt wyjścia traktuje sformułowanie ogólnej teorii względności w zmiennych Ashtekara znacząco upraszcza postać więzów.

Nadaje również teorii względności postać teorii Yanga-Millsa i umożliwia kwantyzację niezależną od geometrii tła.

Cena, jaką za to płacimy jest postać kinematycznej przestrzeni Hilberta. Okazuje się ona przestrzenią nieseparowalną i wymaga uważnego traktowania. Konstrukcja gęstego zbioru funkcji o prostej postaci, które ją generują jest możliwa. Interpretacji tym funkcjom nadają geometryczne operatory pola powierzchni i objętości.

Wprowadzenie do kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej znajduje się w [1] i [3]. Poniższa prezentacja kładzie nacisk na elementy potrzebne do konstrukcji naszego modelu kwantowego i operatora fizycznego hamiltonianu.

4.1 Kinematyczna przestrzeń Hilberta

W niniejszym rozdziale przedstawimy konkretną realizację kinematycznej przestrzeni Hilberta opisującej geometryczną część naszego modelu. W poprzedniej części oznaczaliśmy ją $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$.

Kwantowy model stworzony w poprzednim rozdziale nie narzuca sposobu, w jaki kinematyczna przestrzeń Hilberta ma być skonstruowana. Nie narzuca również wyboru zmiennych, za pomocą których będziemy opisywać geometryczną część modelu. Okazuje się, że kanoniczna pętlowa grawitacja kwantowa dostarcza obiektów i narzędzi o wymaganych do dokończenia konstrukcji prezentowanego modelu.

W niniejszym rozdziale przedstawiamy konstrukcję trzech najważniejszych elementów składających się na $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$ i kwantowo mechaniczny opis geometrii. Przedstawimy elementy przestrzeni Hilberta i ich iloczyn skalarny. Dokonamy jej ortogonalnego rozkładu. Na końcu przedstawimy konstrukcję elementarnych operatorów kwantowych, które posłużą do zdefiniowania bardziej wyrafinowanych operatorów.

4.1.1 Funkcje cylindryczne i iloczyn skalarny

Od tego momentu zakładamy, że zarówno rozpatrywane powierzchnie jak i krzywe są semi-analityczne. Pozwoli to uniknąć sytuacji dopuszczających „patologiczne” zachowania, gdzie krzywe przecinają się między sobą nieskończenie wiele razy na skończonym odcinku, co będzie miało kluczowe znaczenie umożliwiające konstrukcję stanów kwantowych opartych o grafy. Równocześnie założenie takie nie zmniejsza zastosowalności teorii i ogólności założeń.

Za zmienną kinematyczną opisującą geometrię czasoprzestrzeni bierzemy $SU(2)$ -koneksję, którą w konkretnej trywializacji reprezentujemy za pomocą $A_a^i(x)$, gdzie $x \in M$, i jest wewnętrznym indeksem $su(2)$, natomiast a jest indeksem tensorowym. Przestrzeń gładkich $SU(2)$ -koneksji na M oznaczamy $\mathcal{A}$.

Mechanika kwantowa układów o skończonej ilości stopni swobody używa reprezentacji stanów, która składa się z funkcji na klasycznej przestrzeni konfiguracyjnej. W przypadku układów o nieskończonej ilości stopni swobody takich, z jakimi mamy do czynienia rozważając teorię pola, stany kwantowe reprezentowane są, jako funkcje na kwantowej przestrzeni konfiguracyjnej.

W naszym przypadku kwantowa przestrzeń konfiguracyjna, to przestrzeń koneksji uogólnionych $\bar{\mathcal{A}}$. Aby skonstruować przestrzeń stanów kwantowych na tej przestrzeni, zaczniemy od konstrukcji tzw. funkcji cylindrycznych na $\mathcal{A}$ oznaczanych $Cyl(\mathcal{A})$.

Elementy przestrzeni $Cyl(\mathcal{A})$ są funkcjami $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, które otrzymujemy w następujący sposób. Jeżeli e oznacza dowolną krzywą semi-analityczną na M ,

$$e : [0, 1] \rightarrow M, \quad (4.1)$$

to holonomia wzdłuż tej krzywej oznaczana jest przez

$$h_e[A] \in SU(2), \quad (4.2)$$

dla $A \in \mathcal{A}$. Tak więc holonomia wzdłuż krzywej jest funkcjonałem koneksji. Za pomocą (4.2) możemy zdefiniować koneksję, jako funkcję, która przyporządkowuje dowolnej

krzywej, za pomocą równania (4.2) element grupy $SU(2)$,

$$A(e) := h_e[A]. \quad (4.3)$$

Definicja ta pozostanie słuszną w ogólniejszym przypadku, kiedy element $SU(2)$ nie musi pochodzić od gładkiej koneksji. W rzeczywistości takie dowolne przyporządkowanie krzywym elementów grupy definiuje koneksję uogólnioną.

Następujące obiekty służą do definicji funkcji cylindrycznych poniżej:

- $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ stanowi zbiorów semi analitycznych krawędzi
- $f : SU(2)^n \rightarrow \mathbb{C}$ funkcja gładka

Funkcję cylindryczną $\Psi_{(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, f)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy w następujący sposób

$$\Psi_{(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, f)}(A) := f(A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)). \quad (4.4)$$

Funkcja cylindryczna nie jest określona jednoznacznie. Odwrócenie orientacji, dzielenie krawędzi na kilka lub ich łączenie, przy odpowiedniej zmianie funkcji f pozwala zdefiniować tę samą funkcję. Wynika to z następujących własności holonomii,

$$h_{e^{-1}}[A] = (h_e[A])^{-1}, \quad (4.5)$$

$$h_{e_2 \cdot e_1}[A] = h_{e_2}[A]h_{e_1}[A], \quad (4.6)$$

gdzie e^{-1} oznacza krzywą przebiegającą w odwrotnym kierunku co e , a $e_2 \cdot e_1$ oznacza krzywą otrzymaną z połączenia końca e_1 z początkiem e_2 . Wtedy np. odwrócenie jednej z krzywych lub ich połączenie prowadzi do równoważnej definicji funkcji cylindrycznej

$$\{\dots, e'_i = e_i^{-1}, \dots\} \rightarrow f'(\dots, A(e'_i), \dots) = f(\dots, A(e_i)^{-1}, \dots),$$

$$\{\dots, e_i \rightarrow e'_j \cdot e'_k, \dots\} \rightarrow f'(\dots, A(e'_j), A(e'_k), \dots) = f(\dots, A(e_i) = A(e'_j) \cdot A(e'_k), \dots).$$

Mając dane dwie funkcje cylindryczne, z których jedna jest określona za pomocą $(\{e_1, \dots, e_n\}, f)$, a druga za pomocą $(\{e'_1, \dots, e'_m\}, f')$ możemy odpowiednio dzieląc i odwracając krawędzie znaleźć taki zbiór krawędzi, że $\{e''_1, \dots, e''_N\}$, że obie powyższe funkcje są względem niego cylindryczne przy odpowiednio zdefiniowanych funkcjach f''_1 i f''_2 ,

$$(\{e_1, \dots, e_n\}, f) \rightarrow (\{e''_1, \dots, e''_N\}, f''_1),$$

$$(\{e'_1, \dots, e'_m\}, f) \rightarrow (\{e''_1, \dots, e''_N\}, f''_2).$$

Za pomocą powyższych definiujemy iloczyn skalarny

$$\left(\Psi_{(\{e_1, \dots, e_n\}, f)}, \Psi'_{(\{e'_1, \dots, e'_m\}, f)} \right) = \int_{SU(2)^N} d^N \mu_0 \bar{f}_1'' \cdot f_2''. \quad (4.7)$$

Zakładając, że zarówno krzywe e_i , jak przestrzeń M są semi analityczne, dla dowolnej funkcji cylindrycznej istnieje taki podział krzywych e_i , że tworzą one graf. Oznacza to, że jeżeli dwie krzywe się przecinają to tylko w swoim początku lub końcu.

Będziemy mówić, że funkcja cylindryczna określone są na grafie α . Zbiór krawędzi grafu oznaczamy przez $\{e_1, \dots, e_E\}$, gdzie E oznacza ilość krawędzi, a zbiór wierzchołków oznaczamy $\{v_1, \dots, v_V\}$, gdzie V oznacza ilość wierzchołków grafu. Będziemy zapisywać

$$\Psi_{(\alpha, f)}(A) := \Psi_{(\{e_1, \dots, e_E\}, f)}(A). \quad (4.8)$$

Kinematyczna przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$ definiujemy jako uzupełnienie przestrzeni $Cyl(\mathcal{A})$ względem normy zdefiniowanej przez iloczyn (4.7)

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr)} = \overline{Cyl(\mathcal{A})}. \quad (4.9)$$

4.1.2 Ortogonalny rozkład kinematycznej przestrzeni Hilberta

Możemy dokonać ortogonalnego rozkładu kinematycznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$ na przestrzenie związane z grafami. Oznaczamy przez $\mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)}$ przestrzeń Hilberta, którą otrzymujemy ograniczając się do funkcji cylindrycznych określonych na danym grafie α , dla wszystkich możliwych funkcji f ,

$$\mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)} = \overline{Cyl_{\alpha}(\mathcal{A})}. \quad (4.10)$$

Ze względu na niejednoznaczność określenia funkcji cylindrycznej przez graf, którą opisaliśmy w poprzednim paragrafie, przestrzeń taka jest za duża, aby stanowić podstawę rozkładu ortogonalnego. Dla danego grafu α , mając graf β , który możemy otrzymać z grafu α przez sklejenie, odwrócenie orientacji lub usunięcie niektórych krawędzi, otrzymujemy przestrzeń $\mathcal{H}_{(kin, \beta)}^{(gr)}$, która zawiera się w $\mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)}$,

$$\mathcal{H}_{(kin, \beta)}^{(gr)} \subset \mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)}. \quad (4.11)$$

Następnie definiujemy $\mathcal{H}'_{(kin, \alpha)}^{(gr)} \subset \mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)}$ jako ortogonalne uzupełnienie w $\mathcal{H}_{(kin, \alpha)}^{(gr)}$ podprzestrzeni rozpiętej przez wszystkie $\mathcal{H}_{(kin, \beta)}^{(gr)}$ dla grafów β otrzymanych z α jak opisano

powyżej.

W ten sposób otrzymujemy ortogonalny rozkład

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr)} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}_{(kin,\alpha)}'^{(gr)}, \quad (4.12)$$

gdzie α przebiega wszystkie semi analityczne grafy w M .

Możemy dokonać dalszego, bardziej szczegółowego rozkładu $\mathcal{H}_{(kin,\alpha)}'^{(gr)}$ na tak zwane sieci spinowe, które stanowią ortogonalną bazę przestrzeni $Cyl(\mathcal{A})$.

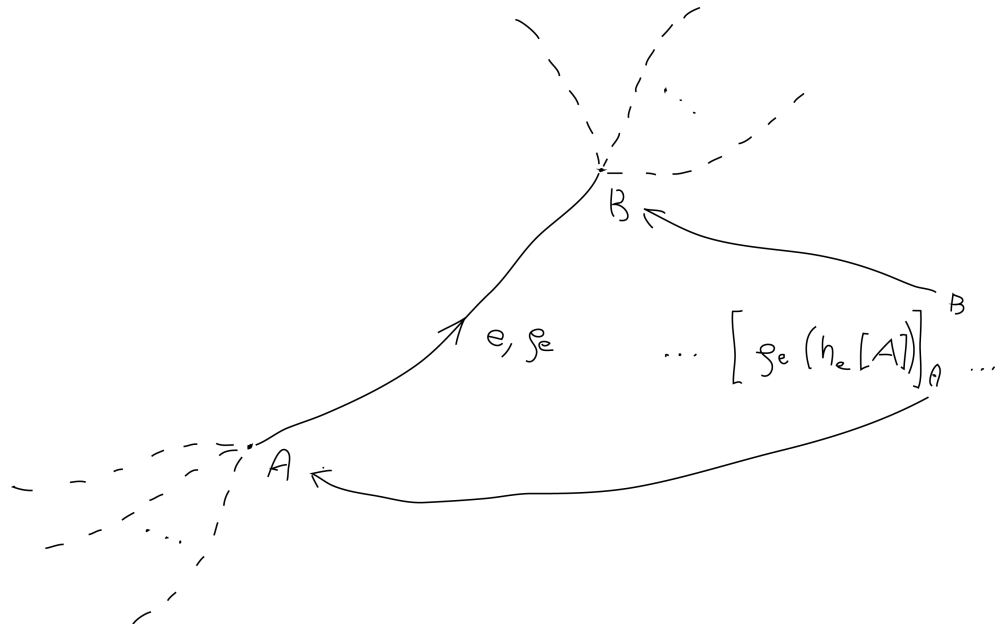
Na sieć spinową składają się wymienione poniżej elementy.

- Graf γ , którego zbiór krawędzi składa się z elementów $\{e_1, e_2, \dots, e_E\}$, a zbiór wierzchołków to $\{v_1, v_2, \dots, v_V\}$.
- Każdej krawędzi grafu przyporządkowujemy nietrywialną reprezentację grupy $SU(2)$, $\{\rho_{e_1}, \rho_{e_2}, \dots, \rho_{e_E}\}$.

Definiujemy w ten sposób następujący element związany z każdą z krawędzi grafu, który przyporządkowuje

$$\mathcal{A} \ni A \rightarrow [\rho_{e_i}(A(e_i))]_{K_{e_i}}^{L_{e_i}},$$

gdzie K_{e_i} i L_{e_i} oznaczają odpowiedni element macierzowy w danej reprezentacji



Rys. IV. 1

- Każdemu wierzchołkowi przyporządkowujemy następujące elementy
 - Reprezentację grupy $SU(2)$, $\{\rho_{v_1}, \rho_{v_2}, \dots, \rho_{v_V}\}$.
 - Niezmiennik $\{\iota_{v_1}, \iota_{v_2}, \dots, \iota_{v_V}\}$ należący do iloczynu tensorowego

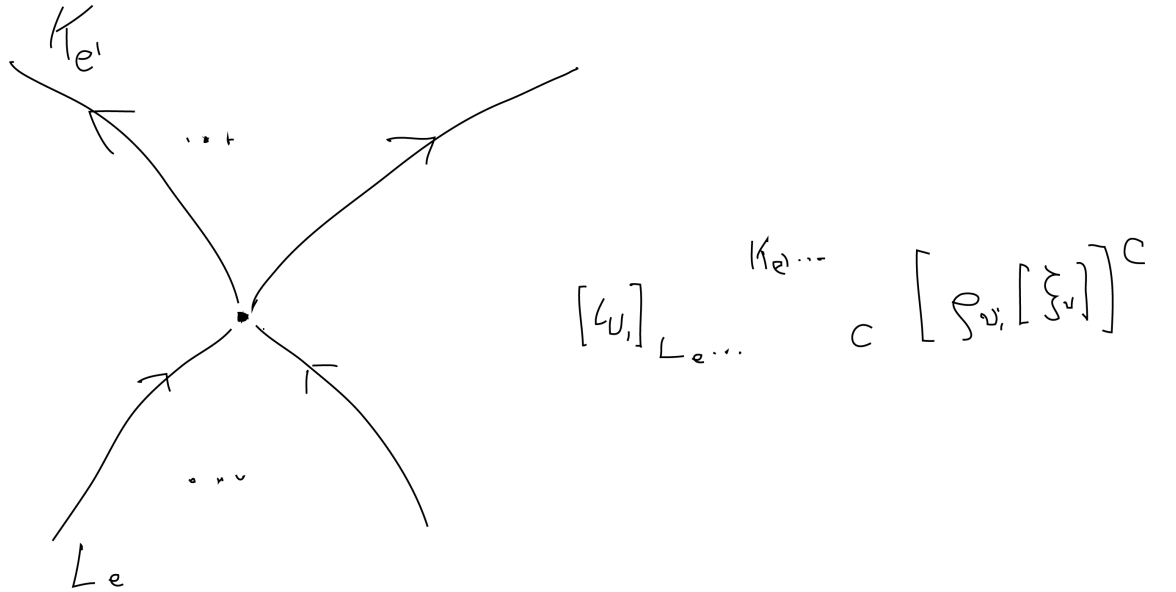
$$\iota_{v_i} \in Inv \left(\left(\bigotimes_e \rho_e^* \right) \otimes \left(\bigotimes_{e'} \rho_{e'} \right) \otimes \rho_{v_i}^* \right), \quad (4.13)$$

gdzie e oznacza krawędzie kończące się w v_i , a e' krawędzie z niego wychodzące.

- Element przestrzeni Hilberta odpowiadający reprezentacji przypisanej do wierzchołka $\{\xi_{v_1}, \xi_{v_2}, \dots, \xi_{v_V}\}$, $\xi_{v_i} \in \mathcal{H}_{\rho_{v_i}}$.

W ten sposób każdemu wierzchołkowi przyporządkowujemy element

$$\mathcal{A} \ni A \rightarrow [\iota_{v_i}]_{L_e \dots}^{K_{e'} \dots} [\rho_v(\xi_v)]^C.$$



Rys. IV. 2

Funkcje sieci spinowej powstają z tak zdefiniowanego pokolorowanego grafu poprzez odpowiednie zwięzanie indeksów grupowych zgodnie ze schematem wyznaczonym przez graf.

Podprzestrzeń $\mathcal{H}_{(kin, \alpha)}'^{(gr)}$ rozpada się na ortogonalną sumę przestrzeni dla wszystkich możliwych kolorowań grafów α , nieredukowalnymi reprezentacjami grupy $SU(2)$.

Wybieramy kolorowanie krawędzi nieredukowalnymi reprezentacjami $SU(2)$ numerowanymi za pomocą spinów $\vec{j} = (j_1, \dots, j_E)$, oraz wierzchołków nieredukowalnymi reprezentacjami $\vec{l} = (l_1, \dots, l_V)$. Wtedy otrzymujemy rozkład

$$\mathcal{H}'_{(kin, \alpha)} = \bigoplus_{\vec{j}, \vec{l}} \mathcal{H}'_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l})}^{(gr)}, \quad (4.14)$$

gdzie

$$\mathcal{H}'_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l})}^{(gr)} = \overline{Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l})}}. \quad (4.15)$$

4.1.3 Elementarne operatory kwantowe

Na końcu tego rozdziału zdefiniujemy elementarne operatory kwantowe, za pomocą których skonstruujemy wszystkie pozostałe.

Elementarny operator odpowiadający zmiennej konfiguracyjnej, tworzymy przez rozsmarowanie $A_a^i(x)$ wzdłuż krawędzi $e : [0, 1] \rightarrow M$. W reprezentacji definiującej $SU(2)$ otrzymujemy operator, który w działaniu na funkcję cylindryczną dołącza nową krawędź i odpowiedni element holonomii wzdłuż tej krawędzi

$$\hat{A}(e)_C^B \cdot \Psi_{(\alpha, f)}(A) := A(e)_C^B f(A(e_1), \dots, A(e_E)). \quad (4.16)$$

Możemy uogólnić i przypisać rolę operatora dowolnej funkcji cylindrycznej

$$\hat{\Psi}_{(\beta, f')} \cdot \Psi_{(\alpha, f)}(A) = f'(A(e_1), \dots, A(e_{E'})) f(A(e_1), \dots, A(e_E)). \quad (4.17)$$

Operator odpowiadający zmiennej pędowej otrzymujemy przez rozsmarowanie $P_i^a(x)$ po 2-wymiarowej powierzchni S

$$\left(\int_S \hat{P}_i^a \right) \cdot \Psi_{(\alpha, f)}(A) = \frac{1}{2i} \int_S \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} f(A(e_1), \dots, A(e_E)) \eta_{abc} dx^b \wedge dx^c. \quad (4.18)$$

Działanie tego operatora nie zmienia zbioru krawędzi i wierzchołków grafu i zależy od ich wzajemnego położenia względem powierzchni S .

Za pomocą powyższych elementarnych operatorów, konstruujemy zarówno kinematyczne operatory geometrii, jak i operatory kwantowych więzów. Razem z iloczynem skalarnym stanowią podstawowe narzędzia do tworzenia teorii kwantowej.

4.2 Transformacje cechowania Yanga-Millsa i więzy gaussowskie

Celem niniejszego rozdziału jest wykonanie pierwszego przejścia przedstawionego w paragrafie 3.2.1

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{gaussowskie}} \mathcal{H}_G^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{dyfeomorficzne}} \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}.$$

Tym razem, jak opisaliśmy w poprzednim rozdziale zajmujemy się geometryczną częścią teorii. Dlatego pokażemy jak znaleźć geometryczne stany gaussowsko niezmiennicze

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr)} \xrightarrow{\text{gaussowskie}} \mathcal{H}_G^{(gr)}.$$

Przedstawione wyniki dotyczą kinematycznej przestrzeni Hilberta kanonicznej pętłowej grawitacji kwantowej. Zdefiniujemy na niej działanie więzów Gaussa i znajdziemy stany niezmiennicze względem cechowania Yanga - Millsa.

4.2.1 Unitarne transformacje kinematycznej przestrzeni Hilberta

W poprzedniej części zakładaliśmy, że kwantowy operator więzów Gaussowskich $\hat{G}(a)$, gdzie $a : M \rightarrow SU(2)$, jest generatorem unitarnych transformacji cechowania. Przekształcają one dowolną funkcję na przestrzeni $\mathcal{A}$ w inną funkcję w następujący sposób

$$\hat{U}_G(a) \cdot \Psi(A) = \Psi(a^{-1}Aa + a^{-1}da). \quad (4.19)$$

Interpretacja jest prosta w sytuacji, kiedy badamy stany na przestrzeni koneksji gładkich. Rozważenie transformacji unitarnej generowanej przez $\hat{G}(a)$ na kinematycznej przestrzeni Hilberta kanonicznej pętłowej grawitacji kwantowej, gdzie rozważane stany są funkcjami na przestrzeni koneksji uogólnionej jest również możliwe.

Wykorzystujemy w tym celu zbiór funkcji cylindrycznych, który stanowi gęsty generator przestrzeni $\mathcal{H}_{kin}^{(gr)}$. Ponieważ funkcje cylindryczne zależą od $A \in \mathcal{A}$ jedynie poprzez holonomię wzdłuż krawędzi, wystarczy wiedzieć w jaki sposób transformacja cechowania działa na $A(e)$. Standardowa zależność znana z geometrii różniczkowej mówi, że

$$\begin{aligned} A' &= a^{-1}Aa + a^{-1}da \\ \Rightarrow A'(e) &= a^{-1}(e(1)) A(e) a(e(0)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wyciągniemy z powyższego dwa wnioski ([31], [1]). W pierwszej kolejności w odniesieniu do dowolnej funkcji cylindrycznej,

$$\Psi_{(\alpha,f)}(A) = f(A(e_1), \dots, A(e_E)) \quad (4.21)$$

Działanie transformacji generowanej przez $\hat{G}(a)$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \hat{U}_G(a) \cdot \Psi_{(\alpha,f)}(A) &= \Psi(a^{-1}Aa + a^{-1}da) = \\ &= f(a^{-1}(e_1(1))A(e_1)a(e_1(0)), \dots, a^{-1}(e_E(1))A(e_E)a(e_E(0))) = \\ &= f'(A(e_1), \dots, A(e_E); a(v_1), \dots, a(v_V)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Następnie obliczamy efekt działania transformacji cechowania generowanej przez więzy Gaussa $\hat{G}(a)$ na funkcje sieci spinowej.

W poprzednim rozdziale opisaliśmy sposób konstrukcji funkcji poprzez przypisanie wierzchołkom i krawędziom grafu odpowiednich elementów. Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że działanie $\hat{U}_G(a)$ sprowadza się do obrotów wektorów ξ_{v_i} przypisanych wierzchołkom grafu.

Działanie $\hat{U}_G(a)$ nie zmienia kolorowania grafu reprezentacjami grupy $SU(2)$, jakie przypisujemy krawędziom i wierzchołkom. Zmienia natomiast wektor

$$\mathcal{H}_{\rho_{v_i}} \ni \xi_{v_i} \rightarrow \rho_{v_i}(a(v_i)) \xi_{v_i} \in \mathcal{H}_{\rho_{v_i}}. \quad (4.23)$$

Oba powyższe sposoby zapisu działania grupy transformacji cechowania generowanych przez więzy gaussowskie wykorzystamy do rozwiązania kwantowych więzów Gaussa. Czy to wychodząc od działania na funkcje cylindryczne, czy na sieci spinowe otrzymamy definicję przestrzeni $\mathcal{H}_G^{(gr)}$, które jest kolejnym krokiem, jaki musimy wykonać zgodnie ze schematem opisanym w poprzedniej części.

4.2.2 Niezmiennicze sieci spinowe

Niezmiennicze sieci spinowe to funkcje sieci spinowych, które spełniają warunki niezmienniczości względem działania transformacji cechowania $\hat{U}_G(a)$. Szukamy więc takiego kolorowania grafów, które spełniają warunek

$$\hat{U}_G(a) \cdot \Psi_{(\alpha,f)}(A) = \Psi_{(\alpha,f)}(A). \quad (4.24)$$

Prowadzi to do warunku, że zgodnie z (4.23) musi zachodzić

$$\xi_{v_i} = \rho_{v_i}(a(v_i)) \cdot \xi_{v_i}. \quad (4.25)$$

Wynika stąd, że niezmiennicze sieci spinowe charakteryzują się tym, że wszystkie reprezentacje przyporządkowane wierzchołkom są trywialne. Ponadto wektory przypisane wierzchołkom są równe $\xi_{v_i} = 1$.

Oznacza to, że całkowity spin w wierzchołku jest równy zeru. Niezmiennik ι_v splata ze sobą reprezentacje krawędzi wchodzących do wierzchołka, ze reprezentacjami krawędzi wychodzących z wierzchołkami

$$\iota_v : \bigotimes_{e \in In(v)} \mathcal{H}_{j_e} \rightarrow \bigotimes_{e' \in Out(v)} \mathcal{H}_{j_{e'}}, \quad (4.26)$$

gdzie $In(v)$ oznacza zbiór krawędzi grafu kończących się w v , $Out(v)$ oznacza zbiór krawędzi grafu wychodzących z V a $\mathcal{H}_{j_e}$ i $\mathcal{H}_{j_{e'}}$ oznaczają odpowiedzenie przestrzenie Hilberta, na których działają te reprezentacje.

Odnosząc się do notacji przyjętej we wzorze (4.14), wybór trywialnej reprezentacji przypisanej wierzchołkowi oznacza kolorowanie ich za pomocą $\vec{l} = (0, 0, \dots, 0)$.

4.2.3 Uśrednianie po grupie

Ze względu na dużo większą intuicyjność rozwiązań więzów Gaussa za pomocą konstrukcji niezmienniczych sieci spinowych, metoda uśredniania po grupie nie jest stosowana do rozwiązywania więzów gaussowskich. Są jednak sytuacje, kiedy metoda rozwiązywania jest najskuteczniejszą, o ile nie jedyną metodą rozwiązywania więzów kwantowych.

Metoda uśredniania po grupie opiera się na całkowaniu względem grupy cechowania, co formalnie możemy zapisać jako

$$\Psi(A) \rightarrow \int \prod_{x \in M} da(x) \hat{U}_G(a) \cdot \Psi(a). \quad (4.27)$$

W przypadku funkcji cylindrycznych zachodzi wzór (4.22), który pozwala sprowadzić powyższą całkę do całki skończenie wymiarowej

$$\Psi_{(\alpha, f)}(A) \rightarrow \int_{SU(2)^V} da(v_1) \dots da(v_V) f'(A(e_1), \dots, A(e_E), a(v_1), \dots, a(v_V)). \quad (4.28)$$

Powyższa całka definiuje odwzorowanie η_G , które przeprowadza funkcje cylindryczne w funkcje, które są rozwiązaniami więzów Gaussa. Oznaczmy przeciwobraz Cyl następująco

$$\eta_G : Cyl \rightarrow Cyl^G. \quad (4.29)$$

4.2.4 Przestrzeń Hilberta stanów Yang-Mills niezmienniczych

Na koniec niniejszego rozdziału zdefiniujemy przestrzeń Hilberta stanów gaussowsko niezmienniczych $\mathcal{H}_G^{(gr)}$. W pierwszej kolejności możemy zdefiniować $\mathcal{H}_G^{(gr)}$ jako uzupełnienie przestrzeni Cyl^G określonej w (4.29) względem iloczynu skalarnego przeniesionego z Cyl za pomocą η_G .

Alternatywne podejście polega na zastosowaniu rozbiecia (4.12) oraz (4.14) dla odpowiednich funkcji sieci spinowych.

Na podstawie wniosków z poprzednich paragrafów tego rozdziału na temat kolorowania stanów niezmienniczych względem cechowania Yanga-Millsa generowanych przez więzy Gaussa, możemy zapisać

$$\mathcal{H}_G^{(gr)} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}'_{(\alpha,G)} = \bigoplus_{\alpha} \left(\bigoplus_{\vec{j}} \mathcal{H}'_{(\alpha,\vec{j},\vec{l}=\vec{0})} \right), \quad (4.30)$$

gdzie

$$\mathcal{H}'_{(\alpha,\vec{j},\vec{l}=\vec{0})} = \overline{Cyl_{(\alpha,\vec{j},\vec{l}=\vec{0})}}. \quad (4.31)$$

W dalszej części, konstruując rozwiązania więzów dyfeomorficznych, będziemy domyślnie rozważać przestrzeń Hilberta generowaną przez niezmiennicze sieci spinowe. Sieci takie charakteryzowane są grafami, o kolorowanych krawędziach, nieredukowalnymi reprezentacjami $SU(2)$. Reprezentacje przypisane wierzchołkom są domyślnie reprezentacjami trywialnymi.

4.3 Dyfeomorfizmy i więzy wektorowe

Kolejnym krokiem będzie wykonanie drugiego kroku przedstawionego na diagramie

$$\mathcal{H}_{kin}^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{gaussowskie}} \mathcal{H}_G^{(gr,\phi)} \xrightarrow{\text{dyfeomorficzne}} \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}.$$

Tak jak w poprzednim rozdziale ograniczymy się do rozważania części geometrycznej modelu. Punktem wyjściowym będzie przestrzeń stanów niezmienniczych względem cechowania Yanga-Millsa. Wychodząc z niej otrzymamy przestrzeń Hilberta stanów dyfeomorficznie niezmienniczych

$$\mathcal{H}_G^{(gr)} \xrightarrow{\text{dyfeomorficzne}} \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}.$$

Otrzymaną w ten sposób przestrzeń Hilberta, potraktujemy jako punkt wyjściowy do kwantyzacji więzu skalarowego.

4.3.1 Działanie dyfeomorfizmów na przestrzeni kinematycznej

Dla dowolnego pola wektorowego $N^a : M \rightarrow TM$, kwantowy operator więzów dyfeomorficznych $\hat{C}_a(N^a)$ generuje działanie unitarne polegające na działaniu dyfeomorfizmu φ generowanego przez pole N^a na przestrzeni $\mathcal{A}$ koneksji na M . Możemy zapomnieć o polu wektorowym N^a generującym dyfeomorfizmy styczne do powierzchni M i rozpatrywać grupę lokalnych dyfeomorfizmów

$$\varphi : M \rightarrow M, \quad (4.32)$$

generujących transformacje

$$\hat{U}_{dyf}(\varphi) : \mathcal{H}_G^{(gr)} \rightarrow \mathcal{H}_G^{(gr)}, \quad (4.33)$$

$$\hat{U}_{dyf}(\varphi) \cdot \Psi(A) = \Psi(\varphi^* A). \quad (4.34)$$

W szczególności będziemy interesowali się działaniem grupy dyfeomorfizmów na gęsty podzbiór generujący $\mathcal{H}_G^{(gr)}$ stanów Yang-Mills niezmienniczych. Korzystając z rozkładu (4.30) i (4.31) otrzymujemy działanie $\hat{U}_{dyf}(\varphi)$ na funkcję sieci spinowej

$$\hat{U}_{dyf}(\varphi) \cdot \Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})}(A) = \Psi_{(\varphi \cdot \alpha, \varphi \cdot \vec{j}, \varphi \cdot \vec{l}=\vec{0})}(A). \quad (4.35)$$

Przez $\varphi \cdot \alpha$ oznaczmy graf, którego krawędzie i wierzchołki są obrazami odpowiednich krawędzi grafu α . Kolorowanie $\varphi \cdot \vec{j}$ oznacza przeniesienie kolorowania $\vec{j}$ grafu α na odpowiadające im krawędzie grafu $\varphi \cdot \alpha$.

Działanie grupy dyfeomorfizmów okazuje się być nie ciągle nawet w sensie słabym. Jeżeli φ_t oznacza jednoparametrową rodzinę dyfeomorfizmów generowaną przez pole wektorowe styczne do M , to dla dowolnej funkcji cylindrycznej zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\Psi_{(\alpha, f)} | \hat{U}_{dyf}(\varphi) \cdot \Psi_{(\alpha, f)} \right) = 0 \neq 1 = \left(\Psi_{(\alpha, f)} | \Psi_{(\alpha, f)} \right). \quad (4.36)$$

Z (4.35) wynika również, że jedynie dla funkcji stałej

$$\Psi(A) = \text{const}, \quad (4.37)$$

zachodzi warunek (4.34).

Konsekwencją tego jest to, że rozwiązań więzów dyfeomorficznych będziemy szukać w przestrzeni dualnej do Cyl^G , która stanowi gęsty podzbiór generujący $\mathcal{H}_G^{(gr)}$.

4.3.2 Dyfeomorfizmy zachowujące grafy i symetrie grafu

W niniejszym paragrafie przedstawimy pojęcia, które będą wykorzystane zarówno do rozwiązania więzów dyfeomorficznych w kolejnych paragrafach, jak i do konstrukcji operatorów w kolejnych rozdziałach. Ze względu na możliwość przeprowadzenia równoległej definicji pojęć, przeprowadzamy ją w jednym rozdziale.

Jedyna różnica w obu konstrukcjach będzie polegała na ograniczeniu zbioru możliwych dyfeomorfizmów. W dalszej części wprowadzimy jedno oznaczenie, które będzie mogło odnosić się do obu sytuacji w zależności od kontekstu i potrzeby.

Przez Dyf będziemy rozumieli jedno z dwóch. Bądź przestrzeń wszystkich dyfeomorfizmów lokalnych przestrzeni M ,

$$Dyf = Dyf(M),$$

jak w przypadku rozwiązywania więzów dyfeomorficznych. Lub będziemy rozumieć zbiór dyfeomorfizmów $\varphi : M \rightarrow M$ takich, że $\varphi(x) = x$ dla konkretnego punktu $x \in M$, co oznaczamy

$$Dyf = Dyf(M, x).$$

Ten zbiór będzie wykorzystany do konstrukcji operatorów w kolejnych rozdziałach.

Definiujemy trzy różne grupy związane z siecią spinową, tzn. grafem α kolorowanym za pomocą spinów $\vec{j}$ określających nieredukowalne reprezentacje $SU(2)$. Oznaczamy pokolorowany graf w skrócie przez $(\alpha, \vec{j})$. Przez samo α rozumiemy zbiór punktów jakie graf przebiega w przestrzeni M .

Definiujemy grupę

$$Dyf_{(\alpha, \vec{j})} := \left\{ \varphi \in Dyf \mid \varphi \cdot \alpha = \alpha, \varphi \cdot \vec{j} = \vec{j} \right\}, \quad (4.38)$$

tzn. element tych elementów Dyf , które zachowują funkcje sieci spinowych rozpięte przez dany kolorowany graf. Dyfeomorfizmy takie mogą np zamieniać ze sobą krawędzie o takim samym kolorowaniu, przeprowadzając je na siebie z zachowaniem orientacji.

Kolejno definiujemy grupę zachowującą krawędzie i wierzchołki grafu

$$TDyf_{\alpha} = \{ \varphi \in Dyf \mid \varphi \cdot \alpha = \alpha, \varphi(e_i) = e_i \}. \quad (4.39)$$

W tym przypadku dyfeomorfizmy przeprowadzają każdą krawędź na samą siebie zachowując jej orientację.

Przez symetrię sieci spinowej $(\alpha, \vec{j})$ rozumiemy zbiór

$$GS_{(\alpha, \vec{j})} = Dyf_{(\alpha, \vec{j})} / TDyf_{\alpha}. \quad (4.40)$$

Ilość elementów tej grupy oznaczamy

$$n_{(\alpha, \vec{j})} = \#GS_{(\alpha, \vec{j})}. \quad (4.41)$$

W powyższych definicjach, w zależności od kontekstu i rozważanej sytuacji, Dyf oznacza jedną z dwóch opisanych na początku przestrzeni. W kolejnych dwóch paragrafach, gdzie będziemy konstruować $\mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)}$ będziemy rozważać $\varphi \in Dyf(M)$.

4.3.3 Dualna przestrzeń stanów dyfeomorficznie niezmienniczych

Konstrukcja przestrzeni rozwiązań więzów opiera się na przedstawionej w poprzednim rozdziale metodzie uśredniania po grupie. W tym przypadku grupa Dyf nie jest zwarta i całkowanie po niej ma charakter formalny i wyprowadza do przestrzeni dystrybucji na koneksjach $\mathcal{A}$,

$$\langle \Psi | : Cyl \rightarrow \mathbb{C}. \quad (4.42)$$

Rozwiązanie więzów dyfeomorficznych otrzymuje się poprzez konstrukcję odwzorowania η_{Dyf} , które przeprowadza gęsty podzbiór przestrzeni $\mathcal{H}_G^{(gr)}$, składający się z niezmienniczych funkcji spinowych

$$Cyl_{(G, \alpha)} := \bigoplus_{\alpha} Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l} = \vec{0})}, \quad (4.43)$$

w przestrzeń dualną. Ze względu na rozkład (4.43) możemy zdefiniować η_{Dyf} osobno na każdym z komponentów sumy.

Obrazem funkcji sieci spinowej $\Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})}$ względem η_{Dyf} jest element przestrzeni dualnej

$$Cyl_{(G, \alpha)} \ni \Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} \rightarrow \eta_{Dyf} \left[\Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} \right] \in Cyl_{(G, \alpha)}^*. \quad (4.44)$$

Definiujemy go poprzez działanie na dowolną funkcję w następujący sposób

$$\eta_{Dyf} \left[\Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} \right] \left(\Psi_{(\beta, \vec{j}', \vec{l}'=\vec{0})} \right) = \frac{1}{n_{(\alpha, \vec{j})}} \sum_{\varphi \in Dyf / Dyf_{(\alpha, \vec{j})}} \left(\hat{U}_{dyf}(\varphi) \cdot \Psi_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} | \Psi_{(\beta, \vec{j}', \vec{l}'=\vec{0})} \right) \quad (4.45)$$

Jedyny niezerowy element sumy (4.45) to ten, gdy

$$\varphi(\alpha) = \beta, \quad \varphi \cdot \vec{j} = \vec{j}'. \quad (4.46)$$

Przeciwwobraz odwzorowania η_{Dyf} jest również Yang-Mills niezmienniczy, ponieważ rozważamy sieci spinowe niezmiennicze względem działania cechowania generowanego przez więzy gaussowskie.

4.3.4 Przestrzeń Hilberta stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych

Ostatni element konstrukcji $\mathcal{H}'_{(G, dyf)}^{(gr)}$ polega na zdefiniowaniu iloczynu skalarnego na przeciwwobrazie

$$Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} \rightarrow \eta_{Dyf} \left[Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})} \right]. \quad (4.47)$$

Jeżeli $\Psi, \Psi' \in Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})}$ to iloczyn skalarny definiujemy w następujący sposób

$$(\eta_{Dyf}[\Psi] \mid \eta_{Dyf}[\Psi']) = \eta_{Dyf}[\Psi](\Psi'). \quad (4.48)$$

Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}'_{(G, dyf)}^{(gr)}$ otrzymujemy uzupełniając $Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})}$ względem normy zdefiniowanej powyższym iloczynem,

$$\mathcal{H}'_{(\alpha, G, dyf)}^{(gr)} = \overline{Cyl_{(\alpha, \vec{j}, \vec{l}=\vec{0})}}. \quad (4.49)$$

Ponieważ ze względu na definicje (4.45) dwie sieci spinowe, które leżą na tej samej orbicie działania Dyf określają ten sam element przestrzeni Hilberta, otrzymana przestrzeń

składa się ze stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych. Sumując po klasach równoważności grafów $[\alpha]$ otrzymujemy ostatecznie

$$\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)} = \bigoplus_{[\alpha]} \mathcal{H}'_{(\alpha,G,dyf)}^{(gr)}. \quad (4.50)$$

W tym przypadku Dyf oznacza $Dyf(M)$. W dalszej części przy definicji operatora więzu skalarne, wykorzystamy sytuację kiedy $Dyf = Dyf(M, x)$.

Wprowadzenie opisanych powyżej przestrzeni pochodzi oryginalnie z pracy [38]. Dodatkowo można je znaleźć w [31].

4.4 Operatory na przestrzeni Hilberta stanów Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmienniczych

W poprzedniej części tej pracy przedstawiliśmy sposób konstrukcji przestrzeni rozwiązań więzów kwantowego modelu pola skalarne sprzężonego z polem grawitacyjnym. Fizyczna przestrzeń Hilberta opisująca kwantową teorię grawitacji sprzężonej z polem skalarnym otrzymujemy rozwiązując równanie kwantowych więzów skalarnych na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$, którą z kolei otrzymujemy rozważając obraz gęstego podzbioru $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ względem η_{Dyf} . Ostatnią z wymienionych przestrzeni, w poprzednich rozdziałach skonstruowaliśmy posługując się metodami kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

Za pomocą (3.34) oraz (3.35) konstruujemy z gęstego podzbioru $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ przestrzeń $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$. Następnie za pomocą geometrycznych operatorów zdefiniowanych na $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$ za pomocą konstrukcji opisanej w Rozdziale 3.4 otrzymujemy obserwable Diraca oraz znajdujemy rozwiązanie więzów skalarnych.

Przeniesienie operatorów geometrycznych kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej do tej przestrzeni opiszemy w niniejszym rozdziale. Zdefiniujemy również operatory dystrybucyjne, które są zaczepione w punkcie. Posłużą one w kolejnym rozdziale do zdefiniowania kwantowych operatorów opisujących więzy skalarne.

4.4.1 Definicja operatorów

Jak opisaliśmy w poprzednich paragrafach, będziemy obecnie szukać operatorów na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$. Otrzymujemy je rozpatrując operatory kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej na przestrzeni funkcji cylindrycznych Cyl .

Każdy operator $\tilde{L}$, który jest niezmienniczy względem działania grupy dyfeomorfizmów $Dyf(M)$ oraz cechowania Yanga-Millsa, zdefiniowany na Cyl , pozwala zdefiniować operator na $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$. Definiujemy go za pomocą relacji dualności w następujący sposób

$$\langle \hat{L} \cdot \eta_{Dyf(M)}[\Psi] \mid \Psi' \rangle := \langle \eta_{Dyf(M)}[\Psi] \mid \tilde{L} \cdot \Psi' \rangle = \langle \eta_{Dyf(M)}[\tilde{L} \cdot \Psi] \mid \Psi' \rangle. \quad (4.51)$$

Z powyższego równania odczytujemy, że $\tilde{L} \rightarrow \hat{L}$, gdzie $\hat{L}$ przeprowadza

$$\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)} \ni \eta_{Dyf(M)}[\Psi] \rightarrow \hat{L} \cdot \eta_{Dyf(M)}[\Psi] \in \mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}, \quad (4.52)$$

w taki sposób, że

$$\hat{L} \cdot \eta_{Dyf(M)}[\Psi] = \eta_{Dyf(M)}[\tilde{L} \cdot \Psi]. \quad (4.53)$$

Następnie za pomocą konstrukcji opisanej w Paragrafie III.4.2, przenosimy działanie $\hat{L}$ z $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ na $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr,\phi)}$.

Cieężar problemu przenosi się na znalezienie operatorów $\tilde{L}$, które są Yang-Mills i dyfeomorficznie niezmiennicze. Przykłady takich operatorów można znaleźć na przykład w [40] i [1]. Przykładem takim jest operator całkowitej objętości M ,

$$\tilde{V}_M = \int_M d^3x \sqrt{q(x)}. \quad (4.54)$$

Operatory te nie są interesujące z punktu widzenia lokalnych właściwości Wszechświata, które wymagają rozszerzenia pojęcia operatora o operatory dystrybucyjne zaczepione w punkcie.

Przyjmujemy następującą konwencję notacyjną. Operatory na przestrzeni kinematycznej stanów Yanga-Millsa niezmienniczych oznaczamy za pomocą tyldy - $\tilde{L}$. Operatory na przestrzeni $Dyf(M)$ lub $Dyf(M, x)$ otrzymane za pomocą η_{Dyf} oznaczamy za pomocą daszka - $\hat{L}$.

4.4.2 Operatory dystrybucyjne zaczepione w punkcie

Na kinematycznej przestrzeni Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej, możemy zdefiniować operatory dystrybucyjne, które możemy uważać, za zaczepione w punkcie $x \in M$. Przykładowo

$$\widetilde{\sqrt{q(x)}} = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \widetilde{\sqrt{q_{x'}}}. \quad (4.55)$$

Operator $\widetilde{\sqrt{q_{x'}}}$ jest niezmienniczy względem działania $Dyf(M, x)$. Suma po prawej stronie równania (4.55) jest dobrze zdefiniowana i zawiera jedynie skończenie wiele elementów w działaniu na dowolną funkcję cylindryczną określoną na dowolnym grafie α ,

$$\left(\int_M d^3x F(x) \widetilde{\sqrt{q_x}} \right) \cdot \Psi_{(\alpha, f)} = \left(\sum_{i=1}^V F(v_i) \widetilde{\sqrt{q_{v_i}}} \right) \cdot \Psi_{(\alpha, f)}, \quad (4.56)$$

gdzie v_i są wierzchołkami grafu α , a $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ dowolną funkcją rozsmarowującą.

Za pomocą η_{Dyf} , gdzie w tym przypadku $Dyf = Dyf(M, x)$ otrzymujemy z $\widetilde{\sqrt{q_x}}$ operator $\widehat{\sqrt{q_x}}$ działający na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G, dyf, x)}^{(gr)}$. Przestrzeń tą otrzymujemy zgodnie z procedurą opisaną w poprzednim rozdziale, gdzie $Dyf = Dyf(M, x)$.

Na podstawie rozumowania i wyników przedstawionych w [38] otrzymujemy operator

$$\widehat{\sqrt{q(x)}} = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \widehat{\sqrt{q_{x'}}}, \quad (4.57)$$

który jest operatorem $Dyf(M, x)$ niezmienniczym.

4.4.3 Iloczyn operatorów dystrybucyjnych

Mając dane

$$\tilde{A}(x) = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \tilde{A}_{x'}, \quad \tilde{B}(x) = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \tilde{B}_{x'}, \quad (4.58)$$

z których każdy spełnia równanie analogiczne do (4.56) definiujemy

$$\sqrt{\tilde{A}(x) \tilde{B}(x)} = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \sqrt{S(\tilde{A}_{x'} \tilde{B}_{x'})}, \quad (4.59)$$

który również spełnia (4.56). S oznacza symetryzację, a jego działanie ograniczone jest do części przestrzeni na której $S(\tilde{A}_{x'} \tilde{B}_{x'})$ jest dodatnio określone.

Aby wykazać powyższe, rozważamy regularyzację operatorów postaci

$$\tilde{A}_\epsilon(x) = \int_M d^3y \tilde{A}(y) \delta_\epsilon(y, x), \quad \tilde{B}_\epsilon(x) = \int_M d^3y \tilde{B}(y) \delta_\epsilon(y, x), \quad (4.60)$$

z funkcją rozsmarowującą, której dziedzina jednostajnie zbiega do punktu $x = y$, gdy $\epsilon \rightarrow 0$. Ponadto funkcja $\delta_\epsilon(y, x) \rightarrow \delta(x, y)$.

W działaniu na funkcję cylindryczną określoną na grafie α dostajemy

$$\left(\tilde{A}_\epsilon(x) \tilde{B}_\epsilon(x) \right) \Psi_{(\alpha, f)} = \left(\sum_{i=1}^V (\delta_\epsilon(x, v_i))^2 \tilde{A}_{v_i} \tilde{B}_{v_i} \right) \Psi_{(\alpha, f)}. \quad (4.61)$$

Suma po prawej stronie równania zawiera skończoną ilość elementów. Otrzymujemy z stąd

$$\left(\sqrt{\tilde{A}_\epsilon(x) \tilde{B}_\epsilon(x)} \right) \Psi_{(\alpha, f)} = \left(\sum_{i=1}^V \delta_\epsilon(x, v_i) \sqrt{\tilde{A}_{v_i} \tilde{B}_{v_i}} \right) \Psi_{(\alpha, f)}. \quad (4.62)$$

Ostatecznie mamy

$$\left(\int d^3x F(x) \sqrt{\tilde{A}_\epsilon(x) \tilde{B}_\epsilon(x)} \right) \Psi_{(\alpha, f)} \rightarrow \left(\sum_{i=1}^V F(v_i) \sqrt{\tilde{A}_{v_i} \tilde{B}_{v_i}} \right) \Psi_{(\alpha, f)}. \quad (4.63)$$

Następnie, korzystając z wyników tego rozdziału, otrzymamy fizyczną przestrzeń Hilberta i rozwiązanie kwantowych więzów skalarnych.

4.5 Fizyczna przestrzeń Hilberta i rozwiązania więzów skalarnych

Ostatni krok konstrukcji nowego modelu kwantowej grawitacji sprzężonej z polem skalarnym wymaga zdefiniowania operatora fizycznego Hamiltonianu (3.75),

$$\hat{h}_{fiz} = \int d^3x \sqrt{-2\sqrt{q(\hat{x})} \hat{C}^{gr}(x)}. \quad (4.64)$$

Występujący w nim operator $\hat{C}^{gr}$ został zdefiniowany w [37]. Generalizacja i własności tego operatora zostały opisane w [1] i [38].

Dotychczas więzy skalarne $\hat{C}^{gr}$ były rozważane w sytuacji kiedy rozsmarowywano je względem dowolnej funkcji lapsu $\int_M d^3x N(x) \hat{C}^{gr}$, lub jako $\int_M d^3x \sqrt{\hat{q}(x)}^{-1} \hat{C}^{gr}(x) \hat{C}^{gr}(x)^\dagger$, tzw.

master wiąz.

Obecna sytuacja wymaga nowego podejścia. Definiujemy operator $\sqrt{-2\sqrt{q(\hat{x})}\hat{C}^{gr}(x)}$ na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$. Podejściu temu poświęcony będzie obecny rozdział.

4.5.1 Grawitacyjne kwantowe więzy skalarne

Kwantowy operator skalarnych więzów grawitacji zdefiniowany w [1] przyjmuje postać

$$\int d^3x N(x) \hat{C}^{gr}(x) = \sum_{x \in M} N(x) \hat{C}_x^{gr}. \quad (4.65)$$

Operator $\hat{C}_x^{gr}$ działa w wierzchołku grafu o ile pokrywa się on z punktem $x \in M$. Jego działanie zmienia graf poprzez doczepienie pętelki zaczepionej w danym wierzchołku leżącej w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory styczne do krawędzi.

Ten sposób regularyzacji i definiowania $\hat{C}_x^{gr}$ nie jest określony ściśle i pozostawia pewną dowolność. Dla przykładu definicja Thiemanna [37] opiera się na innym przypisaniu pętelki do wierzchołku grafu.

Ponieważ operatory $\hat{C}_x^{gr}$ przekształcają dziedzinę, która zawiera się w $\mathcal{H}_{(G,dyf)}^{(gr)}$ w podzbiór przestrzeni $\mathcal{H}_{(G,dyf,x)}^{(gr)}$, której konstrukcja została przedstawiona w Rozdziale 4.3 przy wyborze $Dyf = Dyf(M, x)$.

Jak pokazano w [38] operator ten jednoznacznie i naturalnie definiuje operator działający na przestrzeni $\mathcal{H}_{(G,dyf,x)}^{(gr)}$,

$$\hat{C}_x^{gr} : \mathcal{H}_{(G,dyf,x)}^{(gr)} \rightarrow \mathcal{H}_{(G,dyf,x)}^{(gr)}. \quad (4.66)$$

Zdefiniowanie fizycznego hamiltonianu wymaga od nas określenia przestrzeni, na której jest dobrze zdefiniowany pierwiastek. W tym celu dokonujemy symetryzacji operatora więzów skalarnych w następujący sposób

$$\hat{C}_x^{gr} = \frac{1}{2} \left(\hat{C}_x^{gr} + \hat{C}_x^{gr\dagger} \right). \quad (4.67)$$

Od tej pory przez $\hat{C}_x^{gr}$ będziemy rozumieli operator określony tym równaniem.

4.5.2 Fizyczny Hamiltonian

Definicja fizycznego Hamiltonianu określonego w (4.64) będzie korzystała z dwóch definicji.

Zdefiniowany w poprzednim rozdziale operator

$$\widehat{\sqrt{q(x)}} = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \widehat{\sqrt{q_{x'}}}, \quad (4.68)$$

oraz operatora

$$\hat{C}^{gr}(x) = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \hat{C}_{x'}^{gr}. \quad (4.69)$$

Pozwalają one zgodnie z Paragrafem 4.4.3 zdefiniować

$$\sqrt{-2\sqrt{\hat{q}(x)}\hat{C}^{gr}(x)}. \quad (4.70)$$

Opisana w poprzednim rozdziale regularyzacja iloczynów, wraz z symetrycznym uporządkowaniem operatorów określają kwantową gęstość hamiltonianu

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &:= \sqrt{-2\sqrt{\hat{q}(x)}^{1/2} \hat{C}^{gr}(x) \sqrt{\hat{q}(x)}^{1/2}} \\ &= \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \sqrt{-2\sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2} \hat{C}_{x'}^{gr} \sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Jest on zdefiniowany na $\mathcal{H}_{(G, dyf, x+)}^{(gr)} \subset \mathcal{H}_{(G, dyf, x)}^{(gr)}$, które oznaczają podprzestrzeń rozpiętą przez dodatnią część spektrum operatora $-2\sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2} \hat{C}_{x'}^{gr} \sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2}$.

Fizyczną przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{fiz}$ otrzymujemy jako obraz tej przestrzeni

$$\mathcal{H}_{fiz} = \eta_M \left[\mathcal{H}_{(G, dyf, x+)}^{(gr)} \right], \quad (4.72)$$

względem odwzorowania

$$\eta_M : \mathcal{H}_{(G, dyf, x)}^{(gr)} \rightarrow \mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)} \quad (4.73)$$

zdefiniowanego w następujący sposób

$$\mathcal{H}_{(G, dyf, x)}^{(gr)} \ni \eta_{Dyf(M, x)}[\Psi] \rightarrow \eta_{Dyf(M)}[\Psi] \in \mathcal{H}_{(G, dyf)}^{(gr)}. \quad (4.74)$$

Fizyczny Hamiltonian przyjmuje postać

$$\hat{h}_{fiz} = \int_M d^3x \hat{h}(x) = \sum_{x' \in M} \delta(x, x') \sqrt{-2\sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2} \hat{C}_{x'}^{gr} \sqrt{\hat{q}_{x'}}^{1/2}}. \quad (4.75)$$

4.5.3 Dowolności w modelu i ich ograniczenia

W prezentowanej konstrukcji pozostają dwie dowolności polegające na

- dowolność regularyzacji $\hat{C}_x^{gr}$, polegająca na wyborze pętli zaczepionej w wierzchołku grafu, na który działa operator;
- dowolność samosprężonego rozszerzenia operatora zsymetryzowanego (4.67).

Dowolności te ograniczone są wymaganiami związanymi z uniknięciem anomalii kwantowych w rozważanej teorii. Oznacza to, znikanie komutatora

$$\left[\hat{h}(x), \hat{h}(y) \right] = 0. \quad (4.76)$$

W ten sposób zakończyliśmy definiowanie niezbędnych elementów, kończąc konstrukcję modelu opisanego w drugiej części niniejszej pracy. Wnioski końcowe, otwarte problemy i propozycje dalszych badań przedstawione zostały w końcowej części pracy.

4.6 Alternatywna propozycja kwantyzacji $\hat{C}^{gr}$

Definicja kwantowego operatora fizycznego hamiltonianu wykorzystuje znane w literaturze kwantyzacje operatora $\hat{C}^{gr}$. Różnią się one sposobem regularyzacji i jedna pochodzi od Thiemanna [37], a druga od Ashtekara i Lewandowskiego [1].

Obecnie przedstawimy propozycję alternatywną, kwantyzacji grawitacyjnego więzu skalarnego. Niniejsza propozycja jest obecnie przedmiotem naszych badań i opiera się na nowym operatorze geometrii kwantowej, definiującym skalar krzywizny.

4.6.1 Wyjściowa postać więzów skalarnych ogólnej teorii względności

Stosowane dotychczas podejścia do regularyzacji grawitacyjnych więzów skalarnych rozpoczynają się od sprowadzenia więzów do postaci (wzór (6.13) w [1])

$$C^{gr}(N) = \left(\frac{\gamma}{32\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \int_M d^3x N \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{\det P}} \left[\varepsilon^{ij}{}_{k} - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right]. \quad (4.77)$$

Następnie przedstawia się powyższy więz w postaci

$$C^{gr}(N) = \sqrt{\gamma} C^{Eucl}(N) - 2(1 + \gamma^2) \mathcal{T}(N). \quad (4.78)$$

Kwantyzacja przebiega w dwóch etapach, gdzie osobno dokonujemy regularyzacji $C^{Eucl}(N)$ oraz $\mathcal{T}(N)$. Ten drugi odpowiada drugiemu wyrazowi w nawiasie kwadratowym w (4.77).

Nasza nowa propozycja polega na zastąpieniu wyrazu $\mathcal{T}(N)$ innym. Wyrażenie (4.77) otrzymujemy przekształcając bardziej elementarną postać więzu skalarnego w celu wyeliminowania w niej występującego skalaru krzywizny $R(x)$. Możemy zapisać

$$C^{gr}(N) = \left(\frac{\gamma}{32\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \int_M d^3x N \left[\frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{\det P}} \varepsilon^{ij}_k - (1 + \gamma^2) \sqrt{q} R(x) \right]. \quad (4.79)$$

Podobnie jak poprzednio zapisujemy

$$C^{gr}(N) = \sqrt{\gamma} C^{Eucl}(N) - 2(1 + \gamma^2) \tilde{\mathcal{T}}(N), \quad (4.80)$$

gdzie

$$\tilde{\mathcal{T}}(N) = \left(\frac{\gamma}{32\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \int_M d^3x N \sqrt{q} R(x). \quad (4.81)$$

Kwantyzacja pierwszego członu przebiega jak poprzednio, natomiast kwantyzacja (4.81) opiera się na opisanej poniżej tożsamości geometrycznej.

4.6.2 Podstawowe tożsamości geometryczne

Rozważamy 3-wymiarową, gładką rozmaitość $\mathbf{M}$. Mamy na niej tensor metryczny $\mathbf{q}_{ab}$ o sygnaturze $(+, +, +)$. Koneksja Levi-Civita związana z metryką $\mathbf{q}_{ab}$ będzie oznaczona ∇ , a R^a_{bcd} jest tensorem Riemanna zdefiniowanym przez ∇ . Krzywiznę skalarną R definiujemy w standardowy sposób

$$R_{ab} = R^c_{acb}, \quad R = q^{ab} R_{ab}. \quad (4.82)$$

Idea pomiaru krzywizny skalarnej opiera się na badaniu relacji pomiędzy objętością zwanego, wypukłego obszaru zawierającego dany punkt x i pola powierzchni jego brzegu. Klasyczne wyrażenie, w granicy obszaru zbiegającego do punktu względem topologii metrycznej, pozwala w ten sposób przybliżać skalar krzywizny w punkcie. Niezbędny jest jednak wybór kształtu ściąganego do punktu obszaru.

Dla każdego punktu $p \in \mathbf{M}$ istnieje wypukłe otoczenie normalne $\mathcal{U}$. Jedną z jego własności mówi, że każde dwa punkty w jego wnętrzu możemy połączyć za pomocą jednoznacznej

geodezyjnej. Możemy na takim otoczeniu zdefiniować funkcję odległości (metrykę) pomiędzy dwoma punktami

$$\forall p, r \in \mathbf{M} \quad d(p, r) = \text{długość jednoznacznej geodezyjnej łączącej dwa punkty}. \quad (4.83)$$

Za jej pomocą definiujemy „sferę geodezyjną” o promieniu r i środku w punkcie x

$$\mathcal{S}_{(x,r)}[q_{ab}] = \{y \in \mathcal{U} \mid d(x, y) = r\},$$

oraz podobnie „kulę geodezyjną”,

$$\mathcal{B}_{(x,r)}[q_{ab}] = \{y \in \mathcal{U} \mid d(x, y) \leq r\}.$$

$\mathcal{S}_{(x,r)}$ jest brzegiem $\mathcal{B}_{(x,r)}$. Ta definicja zachodzi dla odpowiednio małych r . Jednak sam region zależy do tensora metrycznego.

Kolejny krok polega na wyprowadzeniu wyrażenia łączącego pole powierzchni $\mathcal{S}_{(x,r)}$ - $Ar(\mathcal{S}_{(x,r)})$ z objętością $Vol(\mathcal{B}_{(x,r)})$ i skalarą krzywizny $R(x)$. W tym momencie niezbędna jest uwaga na temat kształtu ściąganej powierzchni. W naszym przypadku zdefiniowaliśmy geodezyjne kule i sferę, jednak można zdefiniować dowolny inny kształt, który następnie będziemy ściągać do punktu. Otrzymany wynik będzie inny. Jednak postać równania łączącego powyższe wielkości będzie taka sama. Różnice będą występowały w stałych współczynnikach. Z drugiej strony dokonany przez nas wybór wydaje się najprostszy z możliwych i nie odwołuje się do żadnych własności rozmaitości innych niż metryka. W szczególności nie zależy od układu współrzędnych. Jednak badania nad wpływem tego wyboru na ostateczny wynik ciągle muszą być przeprowadzone i są obecnie przedmiotem badań naszego zespołu. Ten najprostszy z możliwych wyborów traktujemy jako pierwszy krok w badaniach przedstawionego sposobu regularyzacji.

Wybieramy do obliczeń najprostszy i najbardziej naturalny układ współrzędnych normalnych Gaussa. Punkt x wybieramy w początku takiego układu $x = (0, 0, 0)$, znany wynik pozwala wyrazić tensor metryczny w jego otoczeniu w postaci

$$q_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikhj}(0, 0, 0) x^k x^h. \quad (4.84)$$

Dla odpowiednio małych współrzędnych mamy

$$q(x^1, x^2, x^3) := \det q_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 1 + \frac{1}{3} R_{ikhi} x^k x^h, \quad (4.85)$$

$$\sqrt{q(x^1, x^2, x^3)} := \sqrt{\det q_{ij}(x^1, x^2, x^3)} = 1 + \frac{1}{6} R_{ikhi} x^k x^h. \quad (4.86)$$

Zamieniając współrzędne na współrzędne sferyczne i ograniczając się do $r \ll 1$ bezpośrednim rachunkiem możemy obliczyć

$$Vol(\mathcal{B}_{(x,r)}[q_{ab}]) = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{45}\pi R(x)r^5, \quad (4.87)$$

oraz

$$Ar(\mathcal{S}_{(x,r)}[q_{ab}]) = 4\pi r^2 - \frac{2}{9}\pi R(x)r^4. \quad (4.88)$$

Przekształcając wyrażenia (4.87) oraz (4.88) otrzymujemy pożądaný rezultat

$$R(p) = \frac{2160}{7}\pi^{\frac{3}{2}} \frac{Vol(\mathcal{B}_{(x,r)}[q_{ab}])}{Ar(\mathcal{S}_{(x,r)}[q_{ab}])^{\frac{5}{2}}} - \frac{360}{7}\pi \frac{1}{Ar(\mathcal{S}_{(x,r)}[q_{ab}])}. \quad (4.89)$$

Powyższe równanie zachodzi w granicy $r \rightarrow 0$.

4.6.3 Kwantyzacja skalara krzywizny

Podstawowa idea polega teraz na zdefiniowaniu operatorów geometrycznych w sposób w jaki uprzednio zdefiniowane były operatory pola powierzchni [39] oraz objętości [40].

Podstawowa idea jaka jest tam przedstawiona polega na pracy w krokach:

- znaleźć klasyczne wyrażenie opisujące interesującą nas wielkość;
- wyrazić je za pomocą zmiennych Ashtekara lub już skwantowanych obiektów;
- wykorzystać aparat kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej do kwantyzacji interesujących nas obiektów.

W naszym przypadku (4.89) jest podstawową zależnością, która posłóży do otrzymania kwantowego wyrażenia

$$\widehat{\mathcal{T}}(N) = \left(\frac{\gamma}{32\pi G}\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{\int_M d^3x N \sqrt{q} R(x)}. \quad (4.90)$$

Wszystkie elementy składowe niezbędne w powyższej kwantyzacji takie jak $\sqrt{q}$ oraz operatory powierzchni i objętości są znane. Jednak dokładna procedura kwantyzacji wymaga dalszej pracy i będzie prowadzona przez nasz zespół.

Rozdział 5

Podsumowanie

5.1 Uwagi podsumowujące

W niniejszej pracy przedstawiliśmy kwantowy model bezmasowego pola skalarnego Kleina – Gordona sprzężonego z grawitacją. Model ten opisuje wszystkie stopnie swobody układu bez odwoływania się do redukcji ich ilości związaną z narzuconą dodatkową symetrią.

Znikanie potencjału sprawia, że model ulega deparametryzacji i możemy zdefiniować obserwable Diraca. Pole skalarne ϕ przyjmuje rolę czasu relacyjnego, względem którego określona jest ewolucja. Użycie w miejsce bezmasowego pola ϕ dowolnego innego pola Modelu Standardowego jest możliwe, jednak model nie deparametryzuje się w ogólnym przypadku. W związku z tym wszystkie techniczne ułatwienia, jakie miały zastosowanie w tym modelu przestają się stosować. Dyskusję rodzajów materii, które pozwalają dokonać deparametryzacji ogólnej teorii względności można znaleźć w [12].

Prezentowana kwantyzacja modelu pola skalarnego sprzężonego z polem grawitacyjnym jest kompletna. Wszystkie niezbędne obiekty matematyczne istnieją i są znane z formalizmu kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej. Jednakże istnieją niejednoznaczności, znane również z pętlowej grawitacji kwantowej, dotyczące kwantowego operatora więzów skalarnych i wynikające z ich nie liniowej postaci. Jedynym sposobem prowadzącym do ich głębszego zrozumienia i wytłumaczenia jest zaczęcie stosowania modelu i badanie ich wpływu na wyniki.

5.2 Porównanie z kwantową kosmologią pętlową i modelem Browna-Kuchara

Zastosowanie zmiennych relacyjnych nie jest nowym pomysłem. Dotychczas były one zastosowane w dwóch przypadkach, które korzystały z wyników kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

Pierwszym jest kosmologiczny model Ashtekara–Pawłowskiego–Singha, który opisuje jednorodny i homogeniczny Wszechświat wypełniony bezmasowym polem skalarnym ([16],[15] lub podsumowanie ([41])).

Zredukowane symetrycznie modele pozwalają kwantować jednorodny i izotropowy model Wszechświata oraz zrozumieć naturę Wielkiego Wybuchu, a raczej jego braku. W jego miejsce pojawia się obszar kwantowy, po którego drugiej stronie znajduje się Wszechświat analogiczny do naszego ulegający kurczeniu się. Inne modele kosmologiczne takie jak otwarte i zamknięte modele FRW jak i wpływ inflacji na osobliwość początkową były badane w [42], [43], [44].

W odróżnieniu od kanonicznej pętlowej kosmologii podejście prezentowane w niniejszej pracy nie zakłada istnienia żadnych symetrii i nie dokonujemy redukcji fizycznych stopni swobody z tym związanych.

Inaczej wygląda sytuacja modelu Browna–Kuchara opisanego w [9], w którym rozważane są cztery pola skalarne mające własności pyłu, względem którego opisujemy relacyjną dynamikę. Jego kwantyzację w oparciu o kanoniczną pętlową grawitację opisano w [24]. W tym celu jednak model BK musi zostać rozszerzony o obserwable Diraca względem więzów skalarnych. W odróżnieniu od obecnie prezentowanego modelu w podejściu BK więzy wektorowe rozwiązywane są klasycznie, natomiast dla więzów skalarnych sformułowany został warunek kwantowy.

Podejście [24] oparte na kwantyzacji na zredukowanej przestrzeni fazowej polega na klasycznym rozwiązaniu więzów dyfeomorficznych i skalarnych. Jedynie więzy Gaussa, po-

dobnie jak w naszym modelu są rozwiązywane kwantowo. Podejście takie prowadzi do klasycznej algebry obserwabli Diraca. Ze względu na deparametryzację więzów skalarnych, algebra ta okazuje się izomorficzna z algebrą kinematyczną. Odróżnia to stosowane tam podejście od tego z niniejszej rozprawy, gdzie kwantyzacja algebry obserwabli odbywa się na fizycznej przestrzeni Hilberta. Ponieważ w [24] kinematyczna algebra obserwabli jest izomorficzna z fizyczną algebrą, również kinematyczna przestrzeń Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji może służyć za przestrzeń fizyczną.

Podobnie do prezentowanego podejścia, generator fizycznej dynamiki w [24], tak zwany fizyczny Hamiltonian jest niezmienniczy względem działania lokalnych dyfeomorfizmów. W podejściu opartym na kwantyzacji na zredukowanej przestrzeni fazowej prowadzi to, w celu uniknięcia anomalii, do operatorów niezmienniczych względem lokalnych dyfeomorfizmów. W [45] pokazano, że operatory takie zdefiniowane na standardowej kinematycznej przestrzeni Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji nie mogą zmieniać grafów. Oznacza to, że muszą zachowywać grafy, na które działają co oznacza, że również operatory więzów ([1], [37]) wchodzące w skład fizycznego hamiltonianu [24] muszą zostać skwantowane w sposób zachowujący grafy.

Kinematyczna przestrzeń Hilberta kanonicznej pętlowej grawitacji jest generowana przez funkcje cylindryczne określone na wszystkich możliwych grafach. Oryginalny operator więzów skalarnych nie zachowuje grafu, na który działa. Stąd w modelu [24], gdzie fizyczny Hamiltonian musi zachowywać grafy, więzy kwantowe muszą być w odpowiedni sposób przedefiniowane aby spełniać ten warunek.

Prezentowane podejście znacznie upraszcza tę techniczną komplikację.

5.3 Możliwe zastosowania modelu

Wyprowadzony model może posłużyć do weryfikacji własności kwantowej czasoprzestrzeni, których spodziewamy się dotychczasowych odkryć zarówno kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni jak i kanonicznej pętlowej grawitacji kwantowej.

W kanonicznej pętlowej kosmologii kwantowej udało się dotknąć zagadki Wielkiego Wybuchu, który wydaje się być zastąpiony Wilekim Odbiciem. Korzystając z naszego modelu możemy pokusić się o próby rozważenia problemu osobliwości w sytuacjach pozbawionych symetrii. Model nasz pozwoli zbliżyć się nie tylko do osobliwości początkowej ale również zrozumieć osobliwości skrywające się w czarnych dziurach.

Wszystkie opisane wyżej zagadnienia wydają się być w zasięgu prezentowanego modelu i być może jego dalszych uogólnień. Problemy, jakie napotkamy wydają się być natury czysto technicznej i matematycznej.

Mam nadzieję, że zaprezentowane tutaj wyniki, które zostały również zaprezentowane w dwóch publikacjach [13] oraz [14] otworzą drogę do dalszych badań i pozwolą znaleźć sposób na zrozumienie kolejnych zagadek kwantowej grawitacji.

Dodatek A

Nawias Poissona nowych więzów skalnych w przypadku ogólnym pola skalarne

Zaprezentowane w [9] oraz [26] rachunek pokazuje, że

$$\{C'(x), C'(y)\} = 0, \quad (\text{A.1})$$

w przypadku, w którym potencjał pola skalarne jest tożsamościowo równy zeru

$$V(\phi(x)) \equiv 0. \quad (\text{A.2})$$

Opierając się na przedstawionych tam wyliczeniach, w tym dodatku pokazujemy, że (A.1) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (A.2).

W tym celu wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$C'(x) = \pi(x) - \sqrt{\Lambda(x)} \quad \text{gęstość skalarna o wadze 1} \quad (\text{A.3})$$

$$\Lambda(x) = \sqrt{q(x)}\lambda(x) \quad \text{gęstość skalarna o wadze 2} \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda(x) = -\left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)}V(\phi(x))\right) + \sqrt{G(x)} \quad \text{gęstość skalarna o wadze 1} \quad (\text{A.5})$$

$$G(x) = \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)}V(\phi(x))\right)^2 - F(x) \quad \text{gęstość skalarna o wadze 2} \quad (\text{A.6})$$

$$F(x) = q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)C_b^{gr}(x) \quad \text{gęstość skalarna o wadze 2} \quad (\text{A.7})$$

W przypadku $V(\phi(x)) \equiv 0$ powyższe wielkości będziemy oznaczać za pomocą indeksu 0 i sprowadzają się one do analogicznych obiektów wprowadzonych w [9] i [26]. $F(x)$, które

nie zależą od pola skalarnego nie wymaga rozróżniania za pomocą indeksu 0 i mamy tylko jedną taką wartość.

Korzystamy z wyników z [9], które pokazują, że

$$\{F(x), F(y)\} = 0, \quad (\text{A.8})$$

oraz

$$\{G_0(x), G_0(y)\} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Ogólnie nie ograniczając się do przypadku znikającego potencjału pola skalarnego mamy

$$\begin{aligned} \{G(x), G(y)\} &= \\ &= \left\{ \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right)^2 - F(x), \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right)^2 - F(y) \right\} = \\ &= \{F(x), F(y)\} + \\ &\quad - 2 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \{C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)), F(y)\} + \\ &\quad - 2 \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{F(x), C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y))\} + \\ &\quad + 4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \times \\ &\quad \times \{C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)), C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y))\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Na mocy wzoru (A.8) pierwszy wyraz znika. Przy przekształcaniu kolejnych wyrazów wykorzystujemy równości

$$\{V(\phi(x)), F(y)\} = \{C^{gr}(x), V(\phi(y))\} = 0, \quad (\text{A.11})$$

które wynikają z faktu, że zarówno $F(x)$ jak i $C^{gr}(x)$ nie zależą od $\pi(x)$. Możemy dalej

przekształcić (A.10).

$$\begin{aligned}
\{G(x), G(y)\} = & \\
= & -2 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \{C^{gr}(x), F(y)\} + \\
& -2 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) V(\phi(x)) \left\{ \sqrt{q(x)}, F(y) \right\} + \\
& -2 \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{F(x), C^{gr}(y)\} + \\
& -2 \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) V(\phi(y)) \left\{ F(x), \sqrt{q(y)} \right\} + \\
& +4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
& +4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) V(\phi(x)) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \left\{ \sqrt{q(x)}, C^{gr}(y) \right\} + \\
& +4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) V(\phi(y)) \left\{ C^{gr}(x), \sqrt{q(y)} \right\}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Wyrazy w drugiej i czwartej oraz szóstej i siódmej są proporcjonalne do delty $\delta(x, y)$. Dodatkowo zmienne x i y zamieniają się w nich parami, co powoduje antysymetryzację. Zgodnie z wynikami przedstawionymi w [26] wyrazy takie znikają. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\{G(x), G(y)\} = & \\
= & -2 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \{C^{gr}(x), F(y)\} + \\
& -2 \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{F(x), C^{gr}(y)\} + \\
& +4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Wykorzystując definicję $F(x)$ oraz symetrię $q^{ab}(x)$, otrzymujemy kolejno z (A.13)

$$\begin{aligned}
\{G(x), G(y)\} &= \\
&= -4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) q^{ab}(y) C_b^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C_a^{gr}(y)\} + \\
&\quad - 4q^{ab}(x) C_b^{gr}(x) \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{C_a^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 \left(C^{gr}(x) + \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \right) (C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y))) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} = \\
&= -4 C^{gr}(x) q^{ab}(y) C_b^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C_a^{gr}(y)\} + \\
&\quad - 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) q^{ab}(y) C_b^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C_a^{gr}(y)\} + \\
&\quad - 4q^{ab}(x) C_b^{gr}(x) C^{gr}(y) \{C_a^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad - 4q^{ab}(x) C_b^{gr}(x) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C_a^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 C^{gr}(x) C^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) C^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 C^{gr}(x) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} = \\
&= \{G_0(x), G_0(y)\} + \\
&\quad - 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) q^{ab}(y) C_b^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C_a^{gr}(y)\} + \\
&\quad - 4q^{ab}(x) C_b^{gr}(x) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C_a^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) C^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 C^{gr}(x) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\
&\quad + 4 \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Na podstawie (A.14) oraz korzystając z algebry rozsmarowanych więzów grawitacyjnych otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\{G[N], G[M]\} &= 4C^{gr} \left[C_b^{gr} q^{ab} \sqrt{q} V(\phi) (MD_a N - ND_a M) \right] + \\
&\quad - 8C_b^{gr} \left[C^{gr} q^{ab} \sqrt{q} V(\phi) (MD_a N - ND_a M) \right] + \\
&\quad + C_a^{gr} \left[q^{ab} q V^2(\phi) (ND_b M - MD_b N) \right].
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Ponieważ $V(\phi)$ występuje w każdym z rozsmarowywaczy, powyższy komutator znika niezależnie do wyboru N i M tylko wtedy, kiedy znika potencjał

$$\{G[N], G[M]\} = 0 \iff V(\phi) \equiv 0$$

Następnie zajmujemy się obliczeniem

$$\begin{aligned}
\{C'(x), C'(y)\} &= \\
&= \left\{ \pi(x) - \sqrt{\Lambda(x)}, \pi(y) - \sqrt{\Lambda(y)} \right\} = \\
&= \{ \pi(x), \pi(y) \} + \\
&\quad - \left(\left\{ \pi(x), \sqrt{\Lambda(y)} \right\} + \left\{ \sqrt{\Lambda(x)}, \pi(y) \right\} \right) + \\
&\quad + \left\{ \sqrt{\Lambda(x)}, \sqrt{\Lambda(y)} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(x)}} \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \Lambda(x), \Lambda(y) \} + \\
&\quad - \left(\left\{ \pi(x), \sqrt{\Lambda(y)} \right\} + \left\{ \sqrt{\Lambda(x)}, \pi(y) \right\} \right) \tag{A.16}
\end{aligned}$$

W pierwszej kolejności obliczamy wyrażenie w nawiasie. W tym celu przekształcamy

$$\begin{aligned}
\{ \pi(x), \sqrt{\Lambda(y)} \} &= \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \pi(x), \Lambda(y) \} = \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \pi(x), \sqrt{q(y)} \lambda(y) \} = \\
&= \frac{\sqrt{q(y)}}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \pi(x), \lambda(y) \} = \\
&= \frac{\sqrt{q(y)}}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \left\{ \pi(x), - \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) + \sqrt{G(y)} \right\} = \\
&= - \frac{q(y)}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \pi(x), V(\phi(y)) \} + \frac{\sqrt{q(y)}}{4\sqrt{\Lambda(y)}\sqrt{G(y)}} \{ \pi(x), G(y) \} = \\
&= - \frac{q(y)}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \pi(x), V(\phi(y)) \} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{q(y)}}{4\sqrt{\Lambda(y)}\sqrt{G(y)}} \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right) \{ \pi(x), V(\phi(y)) \} = \\
&= B(y) \{ \pi(x), V(\phi(y)) \}, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $F(x)$ nie zależy od zmiennych opisujących pole skalarne oraz wprowadziliśmy skracające zapis oznaczenie $B(y)$.

Ponieważ

$$\{ \pi(x), V(\phi(y)) \} = - \frac{\delta V(\phi(y))}{\delta \phi(x)} = -V'(\phi(x)) \delta(y, x) \tag{A.18}$$

jest proporcjonalne do $\delta(y, x)$, to z (A.17) wynika, że wyrażenie w nawiasie we wzorze (A.16) znika. Stąd mamy

$$\{C'(x), C'(y)\} = \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(x)}} \frac{1}{2\sqrt{\Lambda(y)}} \{ \Lambda(x), \Lambda(y) \}. \tag{A.19}$$

Dalsze obliczenia dzielimy na kroki podobne do tych z [26].

Krok 1

Krok pierwszy odwołuje się jedynie do postaci $\Lambda = \sqrt{q}\lambda$, nie odwołuje się natomiast do potencjału pola skalarne. Bezpośrednim rachunkiem otrzymujemy postać podobną do tej pokazanej w [26]

$$\begin{aligned} \{\Lambda(x), \Lambda(y)\} &= \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \{\lambda(x), \lambda(y)\} + \\ &+ \left(\lambda(x)\sqrt{q(y)} \left\{ \sqrt{q(x)}, \lambda(y) \right\} + \sqrt{q(x)}\lambda(y) \left\{ \lambda(x), \sqrt{q(y)} \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Krok 2

Kolejno obliczamy wyrażenie

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{q(x)}, \lambda(y) \right\} &= \left\{ \sqrt{q(x)}, - \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)}V(\phi(y)) \right) + \sqrt{G(y)} \right\} = \\ &= - \left\{ \sqrt{q(x)}, C^{gr}(y) \right\} + \\ &\quad - \left\{ \sqrt{q(x)}, \sqrt{q(y)}V(\phi(y)) \right\} + \\ &\quad + \left\{ \sqrt{q(x)}, \sqrt{G(y)} \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{q(x)}, \sqrt{G(y)} \right\} + \propto \delta(x, y). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Następnie obliczamy

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{q(x)}, \sqrt{G(y)} \right\} &= \frac{1}{2\sqrt{G(y)}} \left\{ \sqrt{q(x)}, \left(C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)}V(\phi(y)) \right)^2 - F(y) \right\} = \\ &= \frac{C^{gr}(y) + \sqrt{q(y)}V(\phi(y))}{\sqrt{G(y)}} \left\{ \sqrt{q(x)}, C^{gr}(y) \right\} + \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{G(y)}} \left\{ \sqrt{q(x)}, F(y) \right\} = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{G(y)}} \left\{ \sqrt{q(x)}, F(y) \right\} + \propto \delta(x, y). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ponieważ $\sqrt{q(x)}$ i $F(y)$ nie zależy od pola ϕ , to otrzymujemy wynik identyczny z wynikiem opisanym w Kroku 2 w [26],

$$\left\{ \sqrt{q(x)}, \lambda(y) \right\} = - \frac{\sqrt{q(x)}q^{ab}(x)C_a^{gr}(x)}{\sqrt{G(x)}}\delta_{,b}(x, y) + \propto \delta(x, y), \quad (\text{A.23})$$

co pokrywa się z wynikiem opisanym w Kroku 2 w [26].

Krok 3

Kolejny krok otrzymujemy dokonując algebraicznych manipulacji nawiasami wyprowadzonymi w dwóch poprzednich. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\lambda(x) \sqrt{q(y)} \left\{ \sqrt{q(x)}, \lambda(y) \right\} + \sqrt{q(x)} \lambda(y) \left\{ \lambda(x), \sqrt{q(y)} \right\} \right) = \\ & = - \frac{\sqrt{q(x)} q^{ab}(x) C_a^{gr}(x) \lambda(x)}{\sqrt{G(x)}} \sqrt{q(y)} \delta_{,b}(x, y) + \sqrt{q(x)} \frac{\sqrt{q(y)} q^{ab}(y) C_a^{gr}(y) \lambda(y)}{\sqrt{G(y)}} \delta_{,b}(y, x), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

który swoją postacią przypomina Krok 3 z [26].

Krok 4

W niniejszym kroku dokonujemy obliczeń na obiektach, które zależą tylko i wyłącznie od zmiennych grawitacyjnych

$$2C^{gr}(x)C^{gr}(y) \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} = C^{gr}(y) \{F(x), C^{gr}(y)\} - C^{gr}(x) \{F(y), C^{gr}(x)\}. \quad (\text{A.25})$$

Z tego powodu obliczenia tego kroku nie różnią się od tych zaprezentowanych w Kroku 4 w [26].

Krok 5

W kolejnym kroku obliczamy

$$\begin{aligned} & \{\lambda(x), \lambda(y)\} = \\ & = \left\{ -C^{gr}(x) - \sqrt{q(x)} V(\phi(x)) + \sqrt{G(x)}, -C^{gr}(y) - \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) + \sqrt{G(y)} \right\} = \\ & = \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} + \\ & + \left\{ C^{gr}(x), \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right\} + \left\{ \sqrt{q(x)} V(\phi(x)), C^{gr}(y) \right\} + \\ & - \left\{ C^{gr}(x), \sqrt{G(y)} \right\} - \left\{ \sqrt{G(x)}, C^{gr}(y) \right\} + \\ & + \left\{ \sqrt{q(x)} V(\phi(x)), \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right\} + \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \sqrt{q(x)} V(\phi(x)), \sqrt{G(y)} \right\} - \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{q(y)} V(\phi(y)) \right\} + \\ & + \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{G(y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Na podstawie argumentacji przedstawionej w poprzednich punktach, zerujemy odpowied-

nie wyrażenia w powyższym równaniu i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \{\lambda(x), \lambda(y)\} = & \\ & - \frac{1}{2\sqrt{G(y)}} \{C^{gr}(x), G(y)\} - \frac{1}{2\sqrt{G(x)}} \{G(x), C^{gr}(y)\} + \\ & + \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{G(y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Następnie zauważamy, że

$$\begin{aligned} \{C^{gr}(x), G(y)\} = & \\ = \left\{ C^{gr}(x), C^{gr}(y)^2 + 2C^{gr}(y)\sqrt{(y)}V(\phi(y)) + q(y)V(\phi(y))^2 - F(y) \right\} = & \\ = \{C^{gr}(x), G_0(y)\} + \propto V(\phi) + \propto \delta(x, y). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Stąd otrzymujemy Krok 5 w formie, która odbiega od tej znanej z [26]

$$\begin{aligned} \{\lambda(x), \lambda(y)\} = & \\ = \{C^{gr}(x), C^{gr}(y)\} - \left[\frac{1}{2\sqrt{G(x)}} C^{gr}(x) C^{gr}(y) \{C^{gr}(x), F(y)\} + (x \leftrightarrow y) \right] + & \\ + \propto V(\phi) + \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{G(y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Krok 6

Analogiczna modyfikacja względem [26] Kroku 6 daje

$$\begin{aligned} \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \{\lambda(x), \lambda(y)\} = & \\ = \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \frac{1}{2\sqrt{G(x)}} \lambda(x) q^{ab}(x) C_a^{gr}(x) \delta_{,b}(x, y) + (x \leftrightarrow y) & \\ + \propto V(\phi) + \propto \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{G(y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Ostatecznie zbieramy wyniki wyprowadzone w powyższych krokach i otrzymujemy oczekiwany rezultat

$$\{\Lambda(x), \Lambda(y)\} = + \propto V(\phi) + \propto \left\{ \sqrt{G(x)}, \sqrt{G(y)} \right\}. \quad (\text{A.32})$$

Widzimy, że $\{C'(x), C'(y)\} = 0$ jedynie w przypadku znikającego potencjału skalarnego.

Bibliografia

- [1] Ashtekar A., Lewandowski J., "Background independent quantum gravity: a status report", *Class. Quantum Grav.***21**, R53
- [2] Ashtekar A., Tate R. S., "Non – Perturbative Canonical Gravity.", World Scientific, Singapore (1991)
- [3] Thiemann T., "Modern Canonical Quantum General Relativity", Cambridge University Press (2007)
- [4] Rovelli C., "Quantum Gravity", Cambridge University Press, Cambridge (2004)
- [5] Rovelli C., "Partial observables" *Phys. Rev.* **D65**, 124013 (2002)
- [6] Dittrich B., "Partial and Complete Observables for Canonical General Relativity", *Quant. Grav.* **23**, 6155 (2006)
- [7] Dittrich B., "Partial and Complete Observables for for Hamiltonian constrained systems", *Gen. Rel. Grav.***39**, 1891 (2007)
- [8] Thiemann T., "Reduced phase space quantization and Dirac observables", *Class. Quantum Grav.* **23**, 1163 (2006)
- [9] Brown J. D., Kuchar K. V., "Dust as a Standard of Sapce and Time in Canonical Quantum Gravity", *Phys. Rev.* **D51**, 5600 (1995)
- [10] Kijowski J., Smolski A., Górnicka., "Hamiltonian theory of self-gravitating perfect fluid and a method of effective deparametrization of the Einsteinian theory of gravitation", *Phys. Rev.***D41**, 1875 (1990)

- [11] Iacoviello D., Kijowski J., Magli G., "The dynamical structure of the A.D.M. equations for general relativistic, isotropic elastic media", (General Relativity and Gravitational Physics, Editors: M. Bassan, F. Fucito, I. Modena, V. Ferrari, M. Francaviglia, World Scientific, p.341-345) (1997)
- [12] Thiemann T., "Solving the Problem of Time in General Relativity and Cosmology with Phantom and k-Essence", astro-ph/0607380 (2006)
- [13] Domagała M., Giessel K., Kamiński W., Lewandowski J., "Gravity Quantized", *Phys. Rev.* **D82**, 104038 (2010)
- [14] Domagała M., Dziędzikowski M., Lewandowski J., "The polymer quantization in LQG: massless scalar field", arXiv:1210.0849 (2012)
- [15] Ashtekar A., Pawłowski T., Singh P., "Quantum Nature of Big Bang: Improved dynamics", *Phys. rev.***D74**, 084003, (2006)
- [16] Ashtekar A., Pawłowski T., Singh P., "Quantum Nature of Big Bang: An analytical and numerical investigation", *Phys. rev.***D73**, 124038, (2006)
- [17] Bojowald M., "Loop quantum cosmology I: Kinematics", *Class. Quantum Grav.***17**, 1489 (2000)
- [18] Bojowald M., "Loop quantum cosmology II: Volume operators", *Class. Quantum Grav.***17**, 1509 (2000)
- [19] Bojowald M., "Loop quantum cosmology III: Wheeler-DeWitt operators.", *Class. Quantum Grav.***18**, 1055 (2001)
- [20] Bojowald M., "Loop quantum cosmology IV: Discrete time evolution.", *Class. Quantum Grav.***18**, 1071 (2001)
- [21] Ashtekar A., Bojowald M., Lewandowski J., "Mathematical structure of loop quantum cosmology", *Adv. Theo. Math. Phys.* **7**, 233 (2003)
- [22] Kamiński W., Lewandowski J., Pawłowski T., "Quantum constraints, Dirac observables and evolution: group averaging versus Schrodinger picture in LQC", *Class. Quantum Grav.***26**, 245016 (2009)

- [23] Kamiński W., Lewandowski J., Pawłowski T., "Physical time and other conceptual issues of quantum gravity on the example of loop quantum cosmology", *Class. Quantum Grav.***26**, 035012 (2009)
- [24] Giesel K., Thiemann T., Algebraic quantum gravity (AQG) IV. Reduced phase space quantisation of loop quantum gravity", *Class. Quantum Grav.***27**, 175009 (2010)
- [25] Rovelli C., Smolin L., "The physical hamiltonian in non-perturbative quantum gravity", *Phys. Rev. Lett.***72**, 446 (1993)
- [26] Kuchar K. V., Romano J. D., "Gravitational constraints that generate a Lie algebra", *Phys. Rev.* **D51**, 5579 (1995)
- [27] Wald R., "General Relativity", The University of Chicago Press (1984)
- [28] Ashtekar A., "New variables for classical and quantum gravity", *Phys. Rev. Lett.***57**, 2244 (1986)
- [29] Ashtekar A., "New Hamiltonian formulation of general relativity", *Phys. Rev.***D36**, 1587 (1987)
- [30] Domagała M., Lewandowski J., "Black-hole entropy from loop quantum gravity", *Class. Quantum Grav.* **21**, 5233 (2004)
- [31] Giesel K., Sahlmann H., "From Classical To Quantum Gravity: Introduction to Loop Quantum Gravity", arXiv:1203.2733 (2013)
- [32] Bojowald M., "Loop quantum cosmology", *Liv. Rev. Rel.* **8**, 11 (2005)
- [33] "Relational Evolution of Observables for Hamiltonian-Constrained Systems", arXiv:1305.0394 (2013)
- [34] Weinberg S., „Teoria pól kwantowych. Podstawy”, PWN, Warszawa 1999
- [35] Rovelli C., "What is observable in classical and quantum gravity", *Class. Quantum Grav.* **8**, 297 (1991)
- [36] Kamiński W., Pawłowski T., "The LQC evolution operator of FRW universe with positive cosmological constant", *Phys. Rev.* **D81**, 024014 (2010)

- [37] Thiemann T., "Quantum spin dynamics", *Class. Quantum Grav.* **15**, 839 (1998)
- [38] Lewandowski J., Marlof D., "Loop constraints: A habitat and their algebra", *Int. J. Mod. Phys.***D07**, 299 (1998)
- [39] Ashtekar A., Lewandowski J., "Quantum theory of geometry I: Area operators", *Class. Quantum Grav.***14**, A55 (1997)
- [40] Ashtekar A., Lewandowski J. "Quantum theory of geometry II: Volume operator." *Adv. Theor. Math. Phys.***1**, 388 (1997)
- [41] Ashtekar A., Singh P., "Loop Quantum Cosmology: A Status Report", *Class. Quantum Grav.* **28**, 213001 (2011)
- [42] Szulc L., Kamiński W., Lewandowski J., "Closed FRW model in Loop Quantum Cosmology", *Class. Quantum Grav.***24**, 2621 (2006)
- [43] Szulc L., Kamiński W., Lewandowski J., "Open FRW model in Loop Quantum Cosmology", *Class. Quantum Grav.***24**, 6169 (2007)
- [44] Artymowski M., Lalak Z., Szulc L. Loop Quantum Cosmology: holonomy corrections to inflationary models ", **JCAP** **0901**, 004 (2009)
- [45] Ashtekar A., Lewandowski J., Marlof D., Mourao J., Thiemann T., "Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom", *J. math. Phys.***36**, 6456 (1995)
- [46] Teitelboim C., Henneaux M., "Quantization of gauge systems", Princeton University Press (1992)