



Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Física

---

# Campos de spin $3/2$ y sus interacciones.

---

TESIS DOCTORAL

DANIEL OMAR BADAGNANI

Director: Dr Alejandro Mariano

La Plata, 20 de marzo del 2017

*A Selena, mi Guegu.*

# Agradecimientos

Tengo realmente mucho que agradecer. Espero poder cumplir con esta formalidad de la tesis sin omisiones demasiado groseras.

A Alejandro, mi director, que me insistió para que convierta en tesis la colaboración que iniciamos y me apoyó más allá de lo académico. Al viejo Espacio Pedagógico, y en particular a mi entonces jefe, Osvaldo Cappannini, de quien decir simplemente que me apoyó mucho sería una grosera subestimación de lo que significó para mí que estuviera en mi camino. A todos en el Taller de Física, que me han bancado en todas. A mis directores anteriores, Sergio Sciutto y Carlos García Canal, que me dieron una oportunidad nueva en el momento más difícil de mi vida y me abrieron las puertas a una formación que me resultó fundamental, y que me facilitaron el cambio de tema que posibilitó esta tesis. Al grupo Choiols de Didáctica de la Astronomía, del que tengo el orgullo de ser miembro, porque no solo me bancaron sino que llenaron de sentidos mis derroteros académicos. A mis viejos, hermanos, tíos y primos que me sostuvieron cuando me pareció que no podía sostenerme por mis propios medios. A El Tinglado Teatro donde empecé a repararme y reinventarme y lo sigo haciendo. A Marisol (mi profe de teatro) que supo adaptar sus métodos a mis rayes, tiempos y taras de tesista y me dio el espacio donde seguir reinventándome, y a Julieta (mi terapeuta) sin cuya ayuda difícilmente estaría en este momento terminando esta tesis. A mis compañeros de militancia en CCyP y del Cuerpo de Delegados, con quienes compartí alegrías y amarguras pero siempre con la mente y el corazón puestos en los proyectos que nos trascienden como individuos. Obviamente a quienes me han bancado en la convivencia: Mónica (que también leyó cuidadosamente varios capítulos buscando y encontrando errores de tipeo, faltas de ortografía y problemas de redacción), Sofi e Iri, y a mi principal fuente de inspiración y fuerza, mi hija Selena (Guegu), a quien dedico esta tesis.

En un plano más abstracto, estoy enormemente agradecido de haber transitado la totalidad de mi educación en el sistema público y gratuito argentino (el jardín Nro 1 de Balcarce, la escuela 32 de Mar del Plata, la entonces ENET 1 de Mar del Plata, hoy EEST 3, la Universidad Nacional de Mar del Plata, el Instituto Balseiro y la Universidad Nacional de La Plata). Si aún tenemos un tal sistema es gracias a la lucha de compañeros y compañeras a lo largo de las décadas. Espero, como profesional y docente universitario, estar a la altura de las circunstancias y hacer mi parte para sostenerlo y mejorarlo.



# Resumen

Los campos de *spin* superior, y en particular los de *spin* 3/2, han desafiado a los físicos teóricos por décadas. Si bien se han construido ecuaciones de movimiento y densidades Lagrangianas que tienen pleno sentido para teorías libres y que pueden cuantizarse consistentemente, las interacciones presentan dificultades formidables como propagación superlumínica a nivel clásico, dependencia de los anticommutadores en la interacción y aparición de estados físicos de norma negativa. Pero en los últimos 15 años se ha popularizado en la comunidad de fenomenología hadrónica una interacción del campo de Rarita-Schwinger con un campo pseudoescalar y uno de Dirac (propuesto para tratar el acoplamiento de la  $\Delta(1232)$  con piones y nucleones), que se ha supuesto libre de esas inconsistencias. De hecho se le suele llamar “la interacción consistente”. Se suele relacionar esta presunta consistencia con el hecho de que en la amplitud de dispersión elástica esta interacción desacopla el llamado “fondo de *spin* 1/2”, esto es, la contribución de la propagación de estados virtuales de *spin* 1/2 del campo de Rarita-Schwinger.

En esta tesis hacemos un recorrido por los distintos formalismos propuestos para *spin* 3/2 y mostramos que la relación entre la propagación acausal y la aparición de estados de norma negativa es una peculiaridad de los campos de Rarita-Schwinger y no una propiedad general de los campos de *spin* 3/2. Repasamos las confusiones que han surgido alrededor del propagador de Rarita-Schwinger y mostramos que la propagación de estados de *spin* 1/2 no constituye en sí mismo una inconsistencia. Respecto de la llamada “interacción consistente”, mostramos que no es tal: le aplicamos el algoritmo de Dirac para tratar restricciones de segunda clase, y mostramos que esta interacción presenta los mismos inconvenientes (aparición de estados de norma negativa) que la interacción usada históricamente entre los mismos campos. También mostramos que al considerar el acoplamiento minimal a campos electromagnéticos aparecen dificultades en la implementación de la invariancia de medida que la interacción convencional no presenta, que en el caso de la amplitud radiativa aparece un fondo de *spin* 1/2, y que al considerar las interacciones a un *loop* la interacción convencional debe ser reintroducida. A nivel fenomenológico mostramos que los ajustes a datos experimentales de dispersión elástica en la zona de la  $\Delta(1232)$  son más pobres que para el acoplamiento más convencional. Finalmente proponemos una posible solución al problema del *spin* 3/2 mediante un formalismo invariante de contacto al nivel de la acción, damos las condiciones que deben cumplir las interacciones para que la cuantización resulte en un espacio de Fock definido positivo y exponemos una interacción consistente para partículas realmente neutras.



# Índice general

<b>1. Introducción General e Historia de la Problemática</b>	<b>11</b>
1.1. El ‘Misterio del <i>spin</i> Alto’	12
1.2. Teorías de campo efectivas	13
1.3. Los comentarios de Weinberg	14
1.4. Resumen y organización de la tesis	17
1.4.1. Los problemas	17
1.4.2. Los resultados	17
<b>2. Partícula de <i>spin</i> 3/2</b>	<b>19</b>
2.1. ¿De qué hablamos cuando hablamos de <i>spin</i> ?	19
2.2. Representaciones del grupo de Poincaré	20
2.2.1. Relación con las representaciones del grupo de Lorentz	21
2.3. Grados de libertad de la partícula de <i>spin</i> 3/2	22
<b>3. Campo de Rarita-Scwinger clásico</b>	<b>23</b>
3.1. Ecuación “de onda” vs campo de Grassmann	23
3.2. Lagrangiano libre e invariancia de contacto	24
3.3. El problema de las interacciones	27
3.3.1. Invariancia por transformaciones de contacto	28
3.3.2. Grados de libertad y parámetros off-shell	29
3.3.3. Condiciones subsidiarias (problemáticas)	30
3.3.4. Propagación acausal	31
3.4. ¿Por qué son problemáticas las interacciones de los campos RS?	32
<b>4. Alternativas al formalismo RS</b>	<b>33</b>
4.1. Fierz-Pauli (años 30)	33
4.2. Formalismo multispin de Bhabha y Harish-Chandra (años 40)	34
4.3. Formalismo de Bhabha-Gupta (años 50)	36
4.3.1. Álgebras sobre un campo vectorespinorial	36
4.3.2. Álgebras sobre un vectorespinor más un espinor de Dirac	36
4.4. Las ecuaciones de Glass, Hurley y Fisk-Tait (años 70)	37
4.5. Más allá de la teoría de campos	39
4.6. Las propuestas de Kirchbach, Napsuciale y Ahluwalia	39
4.7. Interacciones “dinámicas”	40
4.8. La propuesta de Haberzettl	41

4.9. En síntesis . . . . .	42
<b>5. Teorías Cuánticas de Campos con restricciones</b>	<b>45</b>
5.1. Restricciones . . . . .	45
5.2. Origen de las restricciones: Lagrange vs Hamilton . . . . .	46
5.3. Restricciones y cuantización . . . . .	47
5.4. Corchetes de Poisson . . . . .	47
5.5. Restricciones de primera clase: fijación de la medida . . . . .	48
5.6. Restricciones de segunda clase . . . . .	49
5.6.1. Algoritmo de Dirac . . . . .	49
5.7. Formalismo simpléctico . . . . .	50
5.7.1. Lagrangiano en espacio de fases . . . . .	51
5.7.2. Corchetes y cuantización . . . . .	52
5.7.3. Restricciones en el formalismo simpléctico. . . . .	54
5.8. Restricciones para campos fermiónicos . . . . .	54
<b>6. Análisis de restricciones del campo RS con interacciones</b>	<b>57</b>
6.1. ¿Es consistente la interacción “consistente”? . . . . .	57
6.2. Cuantización de Dirac del campo RS . . . . .	59
6.2.1. Lagrangianos, momentos y corchetes de Poisson . . . . .	59
6.2.2. El caso $\mathcal{L}_{NEK}$ . . . . .	62
6.2.3. El caso $\mathcal{L}_P$ . . . . .	63
<b>7. Malentendidos y Confusiones acerca del campo RS</b>	<b>67</b>
7.1. Fondo de <i>spin</i> 1/2 y estados “no-físicos” . . . . .	67
7.2. Consistencia y teorías de campo efectivas . . . . .	70
7.3. Coexistencia entre las medidas electromagnética y de <i>spin</i> 3/2 . . . . .	71
7.4. Correcciones radiativas a un <i>loop</i> . . . . .	74
7.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	77
<b>8. Spin 3/2 mediante un Lagrangiano invariante de contacto</b>	<b>79</b>
8.1. ¿Y si $A = -\frac{1}{2}$ , qué? . . . . .	79
8.1.1. El nivel clásico . . . . .	80
8.1.2. Causalidad de propagación . . . . .	81
8.1.3. Cuantización . . . . .	82
8.2. Resolviendo el problema de la signatura . . . . .	85
8.3. Interacciones . . . . .	86
<b>9. La resonancia <math>\Delta(1232)</math></b>	<b>87</b>
9.1. El espectro hadrónico . . . . .	87
9.2. La simetría quiral . . . . .	88
9.3. Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT) . . . . .	89
9.4. Teoría de campos efectiva para la $\Delta$ . . . . .	90
9.5. $\mathcal{L}_{NEK}$ vs $\mathcal{L}_P$ como modelos para la resonancia $\Delta(1232)$ . . . . .	91
9.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	93



<b>10. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Representaciones de los grupos de Lorentz y de Poincaré</b>	<b>99</b>
A.1. Simetrías en 3+1 dimensiones . . . . .	99
A.2. Representaciones del grupo de Lorentz . . . . .	101
A.2.1. Representaciones espinoriales . . . . .	102
A.2.2. Tensores . . . . .	104
A.2.3. Vectorespinores . . . . .	105
A.3. Representaciones del grupo de Poincaré . . . . .	107
A.3.1. Representaciones inducidas . . . . .	107



# Capítulo 1

## Introducción General e Historia de la Problemática

*El descubridor de una nueva partícula elemental solía ser premiado con el Nobel, pero tal hallazgo ahora debería castigarse con una multa de diez mil dólares.*  
Willis Lamb, 1951

Durante la última década del siglo XIX y la primera del XX el átomo pasó de ser un ente abstracto de la química, incorporado a la física en especulaciones osadas y controversiales por figuras como Maxwell y Boltzman, a ser un objeto físico que ya nadie cuestiona, dinámico, medible y con una estructura eléctrica. El sueño era que la electrodinámica sería la teoría última, y el electrón su clave. POINCARÉ (1904) hablaba de los “electrones negativos” (los constituyentes de los rayos catódicos) y “los electrones positivos que por lo poco que sabemos de ellos, serían mucho más grandes”. Las dos soluciones de la ecuación de Dirac y la detección del positrón dieron aire al sueño (WEINBERG 1996 capítulo 1). Pero la llegada llamativamente tardía del neutrón al mundo de la física, al tiempo que hizo posible la era atómica, alejó el sueño de la teoría final. Tras él, empezaron a aparecer más partículas, de a una al principio, por decenas pronto. La sensación de zozobra de los físicos teóricos ante esta proliferación resultan bien sintetizadas por los dichos de Lamb en 1951 que usamos de epígrafe.

Debe decirse que, en contrapartida, el mundo abierto con la llegada del neutrón ha sido y sigue siendo una fuente pródiga de problemas formidables y desarrollos fascinantes. En las entrañas de la física nuclear surgieron por ejemplo la teoría de cuerdas, las excitaciones topológicas que tantos frutos rindieron en el campo de la materia condensada y la teoría de campos a temperatura finita con sus increíblemente ricos diagramas de fases. Hoy en día las cuerdas han vuelto a las fuentes con la conjetura de Maldacena. En la física nuclear moderna coexisten una multiplicidad de marcos teóricos en una interrelación compleja; a pesar de que el éxito de la Cromodinámica Cuántica (QCD) la haya instalado como la teoría fundamental del mundo hadrónico, entendiéndose los diversos modelos fenomenológicos de las interacciones fuertes como límites de esta en determinados regímenes, para energías intermedias (esto es, demasiado altas para trabajar con un número fijo de nucleones, pero por debajo de la escala de QCD) resulta imprescindible el uso de modelos efectivos de campos pues a estas energías no puede hacerse un desarrollo perturbativo de

QCD. Por lo tanto, muchos problemas abiertos por las teorías previas a la QCD siguen siendo relevantes.

### 1.1. El ‘Misterio del *spin* Alto’

Hacia fines de los años 50 estaba claro que el espectro hadrónico es infinito: que a mayores energías se excitan más y más partículas de *spin* cada vez mayor. Si se deseaba continuar el paradigma de la teoría cuántica de campos, la teoría de las interacciones nucleares fuertes debía ser una teoría con infinitas especies y con *spin* arbitrario. Pero pronto estuvo claro que la construcción de teorías de campos interactuantes con *spin* arbitrario era, si no imposible, cuanto menos extremadamente difícil. Estas dificultades, que HAGEN (1971) llamó “el misterio del *spin* alto”, capturaron la atención de los teóricos durante dos décadas. El problema fue perdiendo atractivo al instalarse la QCD, una teoría renormalizable y de *spin* 1/2 y 1. Pero el reconocimiento de que las teorías no-renormalizables en el sentido de que todos los infinitos puedan absorberse sistemáticamente en un número finito de parámetros son de hecho renormalizables en un sentido más amplio si se consideran los infinitos términos compatibles con todas las simetrías de la teoría (WEINBERG 1996, p 499, segundo párrafo), y de que en teorías presuntamente más fundamentales como la teoría de cuerdas no hay distinción entre partículas “fundamentales” de bajo *spin* y “compuestas” de alto *spin* fueron reviviendo el problema. Podemos ver ejemplos de inspiración en teoría de cuerdas para resolver problemas de campos de *spin* superior en cuatro dimensiones, por ejemplo, en NAPPI Y WITTEN (1989) para el caso del campo masivo de *spin* 2, y en PORRATTI Y RAHMAN (2009) para el caso del campo RS.

La saga comenzó con el trabajo de JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) en el que se clasifican todos los campos que dan lugar a cuantos de *spin* 3/2 y se muestra que cualquiera de ellos es equivalente al formalismo de Rarita-Schwinger (RS). Luego muestra que al acoplar ese campo minimalmente al campo electromagnético los anticommutadores del campo RS dependen de las interacciones. Peor aún, en presencia de campos magnéticos no nulos siempre hay un marco de referencia en que algunos estados físicos tienen norma negativa. Ocho años después VELO Y SWANZIGER (1969) encontraron que el campo clásico RS acoplado minimalmente al campo electromagnético da lugar a propagación superlumínica cuando el campo magnético toma cierto valor crítico. HAGEN (1971) mostró que los anticommutadores del campo RS dependen también de las interacciones en el caso más simple de acoplamiento a un escalar y un campo de Dirac, observando que para ciertos valores del gradiente del escalar aparecen estados de norma negativa. Para este mismo acoplamiento se mostró propagación acausal en el caso clásico (SINGH 1973). En varios trabajos, y con metodologías diversas, se ha señalado que la causa de estas anomalías es la estructura de restricciones del campo RS, que hace que los estados de norma negativa que en el caso libre resultan proyectados reaparezcan en el sector físico a través de las interacciones. Obsérvese que todos estos fenómenos peculiares se dan en presencia de un fondo clásico. En ausencia de tales fondos los anticommutadores son idénticos a los de la teoría libre y por lo tanto el espectro es definido positivo.

Finalizando el siglo XX e inspirado en ciertos argumentos de supergavedad (el gravitino es descrito por un campo de *spin* 3/2 no masivo), PASCALUTSA (1998) introdujo una

interacción entre el campo RS con escalares y espinores de Dirac derivativa también en el campo RS, es decir de segundo orden derivativo. Dicha interacción inspirada en una transformación de tipo “medida” sobre el campo RS no masivo, además de tener la propiedad de permitir el desacople a los estados espurios de *spin* 1/2 del espacio de representación en ciertos casos, era supuesta\* libre de los problemas de signatura antes mencionados. Ese resultado ha sido aceptado por gran parte de la comunidad científica del campo de la fenomenología hadrónica, al punto de evaluar negativamente trabajos que no emplean dicha interacción por ser “inconsistentes”, en el sentido de las signaturas mencionadas, dar lugar a amplitudes “no físicas”, etc. Lo confuso es que con una simple integración por partes esa interacción puede ser expresada como lineal en el campo RS, por lo que debería estar alcanzada por los resultados generales mencionados en el párrafo anterior. En el discurso habitual de quienes sostienen que esta interacción es consistente se vincula dicha consistencia a que esta interacción desacopla los estados virtuales de *spin* 1/2 en amplitudes elásticas, lo cual es pensado como una condición de consistencia por ser estos estados “no físicos”, pese a que no hay una relación clara entre este desacople y el problema de Johnson-Sudarshan-Hagen. La existencia (y popularidad) de esta interacción y la no existencia de una argumentación sólida que demuestre su consistencia, es lo que ha inspirado el presente trabajo de tesis.

## 1.2. Teorías de campo efectivas

Las teorías de campo efectivas son una herramienta muy usada en contextos en los que nuestra mejor teoría resulta demasiado difícil de aplicar. La filosofía es sencilla: se toman todos los grados de libertad (hadrones, en este caso) fenomenológicamente relevantes a la escala que usaremos, y se escribe el Lagrangiano más general que respete las simetrías del sistema completo. Se retienen los términos relevantes a la escala de energía estudiada, y los parámetros se obtienen o bien de datos experimentales o bien de “primeros principios” como QCD de retículo. A bajas energías deberían obtenerse exactamente los mismos resultados que si usáramos la teoría completa (primeros principios sin suposiciones ad-hoc), pero tal corroboración es habitualmente imposible o impracticable.

Históricamente estos procedimientos eran llamados “teoremas de baja energía” y se los trabajaba con las álgebras de las corrientes de Noether correspondientes a las simetrías del sistema. Luego los investigadores se fueron dando cuenta que, justamente, el teorema de Noether garantiza que un Lagrangiano genérico con esas simetrías debe dar los mismos resultados, con lo que se evitaban los cálculos engorrosos de las álgebras de corrientes.

Notemos aquí que la teoría de campos resultante no necesita ser una teoría consistente por sí misma, basta con que reproduzca los observables en su rango de validez. Un ejemplo ilustrativo es el decaimiento beta, que puede ser tratado a nivel efectivo como el intercambio de un bosón vectorial masivo, y a energías menores que la masa del vector como el Lagrangiano de contacto de Fermi. La teoría electrodébil es unitaria, pero la teoría efectiva con el vector masivo rompe la unitariedad a altas energías, y el Lagrangiano de Fermi lo hace de un modo aún más severo. Sin embargo en este caso puede verse explícitamente (pues la teoría electrodébil puede emplearse perfectamente en el mismo rango que las dos

---

\*Esta suposición se sustentaba con una argumentación sofisticada aunque incompleta

teorías efectivas) que las amplitudes a baja energía son reproducidas perfectamente por las teorías efectivas. Hacemos esta aclaración porque en este trabajo de tesis se trabaja sobre la inconsistencia de las interacciones del campo RS que se usa como teoría efectiva para describir las resonancias de *spin* 3/2. ¿Son relevantes las inconsistencias discutidas por Johnson y Sudarshan o Hagen en el uso fenomenológico de las teorías? Probablemente no. Sin embargo un importante sector de la comunidad de fenomenología de partículas le dan a este punto una gran relevancia y condicionan los Lagrangianos válidos a usar a que estén libres de las inconsistencias mencionadas independientemente de si ellas son cruciales o no en los cálculos perturbativos.

Si bien la simetría fundamental en QCD es  $SU(3)$  de color, al escribirse teorías efectivas en términos del espectro físico esa simetría es invisible o se manifiesta en forma indirecta, dado que los hadrones son todos “incolores” (los quarks y gluones están confinados y desde el punto de vista efectivo no son dinámicos). La simetría (aproximada) que realmente se manifiesta a nivel hadrónico es la quiral, que introduciremos someramente en el capítulo 9. En este contexto, dependiendo de los estados que se incluyan en el espectro, las expansiones perturbativas deberán hacerse respecto de la o las escalas de ruptura de la simetría quiral. A nivel de los mesones esa escala es la masa del pión, pero las expansiones quirales se vuelven más complejas y menos confiables a medida que se incorporan bariones. Aún así, este esquema ha permitido avances importantes. De todos modos esto solo constituye el marco: la invariancia que debe cumplir todo vértice que se introduzca. La tarea en principio es directa: todos los vértices compatibles con la simetría quiral y con la covariancia de Lorentz deberían ser considerados, jerarquizándolos de acuerdo a la preponderancia que cada vértice tenga a la escala de energías a la que se desee trabajar. A las energías más bajas, la interacción convencional  $\mathcal{L}_{NEK}$  a ser introducida en el capítulo 3 es la dominante (derivativa en el campo piónico), y la llamada “consistente” (inapropiadamente, como veremos en el capítulo 6) es el término que sigue (derivativa en el campo del pión y el nucleón).

### 1.3. Los comentarios de Weinberg

En el influyente libro de texto ‘The Quantum Theory of Fields’ (WEINBERG 1996, capítulo 5, en el párrafo luego de la ecuación 5.7.60) se dedican unos comentarios muy relevantes al ‘misterio del *spin* alto’. En ellos se afirma que no hay verdaderas dificultades de *spin* alto, simplemente se trata de dificultades técnicas con las que uno se topa al intentar ir más allá de las perturbaciones. Se trata de los comentarios al final de la sección 5.7. Los comentarios son los siguientes (traducción propia):

Debería mencionarse que de tanto en tanto varias dificultades han sido reportadas [En este punto cita varias referencias que, llamativamente, excluyen JOHNSON Y SUDARSHAN (1961)] en la teoría de campos de partículas con *spin*  $j \geq 3/2$ . En general, estas son encontradas en el estudio de la propagación de un campo de *spin* superior en presencia de un campo externo tipo c-número. Dependiendo de los detalles de la teoría, las dificultades encontradas incluyen no causalidad, inconsistencia, estados de masa no física, y violación de unitariedad. No entraré aquí en los detalles de tales dificultades pues me parece

que no son relevantes para el esquema de cálculo descrito en este capítulo, por las siguientes razones:

(1) Los campos  $\psi_{ab}(x)$  [en la notación introducida por WEINBERG (1996) capítulo 5] han sido construidos aquí directamente a partir de los operadores de creación y aniquilación para partículas físicas, de modo que no puede surgir ninguna duda de inconsistencias o masas no físicas. Estos son campos libres, pero incorporándolos en una densidad Hamiltoniana de interacción en la representación de interacción, podemos usar teoría de perturbaciones para calcular los elementos de la matriz  $S$  que satisfacen automáticamente el principio de descomposición en *clusters*. En tanto el Hamiltoniano de interacción sea hermítico, no puede haber dificultades con la unitariedad. La invariancia de Lorentz está garantizada en teoría de perturbaciones en la medida que agreguemos términos locales pero no covariantes en la densidad Hamiltoniana; aunque no hay una demostración rigurosa, no hay razón para dudar de que esto es siempre posible. Por lo tanto **cualquier dificultad con *spin* superior puede solo surgir cuando tratamos de ir más allá de la teoría de perturbaciones.** [las negritas son nuestras].

(2) Como se discute en la sección 13.6, la solución de ecuaciones de campo en la presencia de un campo de fondo c-numérico (el contexto en el que todos los problemas con *spin* superior fueron encontrados) va más allá de la teoría de perturbaciones, en que los resultados corresponden a sumar un subconjunto infinito de términos en la serie perturbativa. Esta suma parcial está justificada, incluso para campos externos débiles, si los campos varían lo suficientemente suave, la pequeñez de los denominadores de energía compensando la debilidad de los campos. Pero los resultados obtenidos de este modo dependen de todos los detalles de la interacción de la partícula de *spin* superior con los campos externos: no solo los momentos multipolares de la partícula sino también posibles términos en la interacción que sean no lineales en los campos externos. Los problemas reportados [Aquí vuelve a citar las mismas referencias que en la llamada anterior] con *spin* superior han sido encontrados solo para partículas de *spin* superior para las que se ha supuesto arbitrariamente que tienen únicamente interacciones muy simples con los campos externos. Nadie ha mostrado que los problemas persistan para interacciones arbitrarias, y como veremos en el capítulo 12, se espera que las partículas de *spin* superior tengan interacciones de todos los tipos posibles permitidos por los principios de simetría.

(3) De hecho, hay buenas razones para creer que los problemas con *spin* superior desaparecen si la interacción con los campos externos es lo bastante complicada. Por un lado, no hay dudas acerca de la existencia de *partículas* de *spin* superior, incluyendo varios núcleos estables y resonancias hadrónicas. Si hay algún problema con *spin* superior, solo puede ser para partículas ‘puntuales’, eso es, aquellas cuyas interacciones con campos externos son particularmente simples. Debería tenerse presente que el requerimiento de simplicidad depende

de la elección de qué campo elegimos para representar la partícula de *spin* superior. Recuérdese que cualquier tipo de campo libre puede expresarse como un operador derivativo actuando sobre cualquier otro tipo de campo, de modo que en la representación de interacción cualquier interacción con campos externos puede escribirse en términos del tipo de campo que deseemos, pero las interacciones que son simples cuando son expresadas en términos de campos de un tipo pueden lucir complicadas cuando se las expresa en términos de campos de otro tipo. De modo que el requerimiento de simplicidad no parece tener ningún contenido objetivo.

(4) Además, tanto las teorías en dimensión superior tipo ‘Kaluza-Klein’ como la teoría de cuerdas proveen ejemplos de teorías consistentes de partículas cargadas masivas de *spin* 2 interactuando con un campo electromagnético de fondo [Aquí cita a NAPPI Y WITTEN (1989), ARGYRES Y NAPPI (1989)] (se encontró que la consistencia de la teoría depende de la suposición de campos externos realistas que satisfagan las ecuaciones de campo, un punto en general descuidado en trabajos previos.) Reformulando este trabajo en la representación de interacción, la partícula de *spin* 2 es representada por un campo libre (1,1), pero como se menciona arriba las interacciones pueden ser reexpresadas en la representación de interacción en términos de cualquier tipo de campo (A,B) que contenga la representación  $j = 2$  del grupo de rotaciones.

Weinberg ha estado involucrado personalmente con el tema: su tesis doctoral es sobre propagación y cuantización de campos de *spin* superior, y en las conclusiones de JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) que inicia la saga puede leerse una refutación a una de las conclusiones de esa tesis. El hecho de que Weinberg no cite en estos comentarios ese paper resulta muy significativo. Debemos remarcar que Sudarshan, Hagen y Weinberg son verdaderos “pesos pesados” de la física teórica del siglo XX y que han protagonizado rivalidades más allá de la disputa sobre el *spin* alto: Sudarshan, por ejemplo, se ha quejado por no ser incluido en el Premio Nobel de Física de 1979 que incluyó, entre otros, a Weinberg<sup>\*\*</sup>.

Es probable que estas disputas hayan sido decisivas en que Weinberg le dedicara un comentario tan extenso al tema en un libro de texto. Más allá de eso, es interesante tenerlo en cuenta para calibrar adecuadamente el problema. El punto más dudoso en la argumentación de Weinberg es el que vincula la necesidad de que haya campos consistentes con el hecho de que las partículas de *spin* superior “existan”, hecho que podríamos rephrasear como “existen fenómenos compatibles con la interpretación de que se trata de partículas de *spin* superior” y que de ninguna manera garantiza que esa interpretación deba ocurrir necesariamente en el marco de una teoría consistente. Observemos que Weinberg basa su modo de pensar los campos cuánticos en “el hecho de que existen partículas”, haciendo que la existencia de los campos cuánticos relativistas sea “inevitable”. O sea, lo que en los trabajos de Sudarshan y Hagen se piensa como un caso particular (el vacío perturbativo) es elevado por Weinberg al grado de fundamento epistemológico. De lo que no pueden quedar muchas dudas es que realmente en ausencia de campos de fondo el problema se vuelve inexistente y la expansión perturbativa necesaria para interpretar datos de acelerador tiene perfecto sentido.

<sup>\*\*</sup>Entrevista a EGC Sudarshan por GK Rajesh, Science Reporter, enero 2014



En nuestra opinión, los comentarios de Weinberg no invalidan al problema del *spin* alto como un problema abierto de la física teórica, pero sí limitan sumamente sus consecuencias prácticas en aplicaciones fenomenológicas.

## 1.4. Resumen y organización de la tesis

### 1.4.1. Los problemas

Separemos los problemas en dos categorías: por un lado los problemas formales relacionados con la construcción de una teoría interactuante consistente de *spin* 3/2, y por otro los problemas prácticos de generar términos de interacción para cálculos en fenomenología hadrónica. Es importante clarificar esta diferencia crucial, como hemos señalado en la sección 1.2.

Estos son los problemas que abordaremos en esta tesis. En cuanto a la categoría formal, identificamos los siguientes problemas:

- ¿Cómo es posible que, partiendo de un Lagrangiano invariante de Lorentz, se llegue a ecuaciones de movimiento con soluciones que violan el principio de relatividad? Resaltamos que este es un problema sumamente básico pues ocurre incluso a nivel clásico (anomalía de Velo-Zwanziger).
- ¿Cómo se compatibilizan las múltiples demostraciones de que los acoplamientos lineales al campo RS conducen a estados de norma negativa con la suposición ampliamente difundida de que la popular interacción introducida en PASCALUTSA (1998) está libre de esa inconsistencia?
- ¿Es posible construir teorías cuánticas de campo involucrando campos de *spin* 3/2 en interacción con campos electromagnéticos y con escalares y espinores? En este sentido hay respuestas parciales que parecen indicar una respuesta positiva, como señala el inciso (4) de los comentarios de Weinberg de la sección 1.3.

En la categoría práctica, los problemas que urge investigar son:

- ¿Qué forma de interacción es favorecida por los datos experimentales?
- ¿Cuáles son las consecuencias prácticas de las restricciones formales a las posibles interacciones de campos RS?

### 1.4.2. Los resultados

Sintetizamos a continuación los resultados alcanzados, publicados en BADAGNANI Y OTROS (2015), BADAGNANI Y OTROS (2016), MARIANO Y OTROS (2012A, 2012B).

- **Covariancia:** Dedicamos el capítulo 2 a repasar la construcción covariante de estados de *spin* arbitrario que, a pesar de ser un tema bien establecido desde la tercer década del siglo XX, sigue generando confusión en la bibliografía. Esas confusiones

se señalan en los capítulos 4 y 7. Finalmente, en el capítulo 8 mostramos que el formalismo RS no es completamente covariante al nivel de la acción, lo que se refleja en la llamada “invariancia de contacto”. Dicha invariancia es de las ecuaciones de movimiento pero no de la acción; recuérdese que es necesario introducirla para que la acción RS seleccione la representación correcta de *spin* 3/2. Veremos que en el límite en que la invariancia es también una invariancia de la acción (físicamente inadmisibles pues introduce estados de norma negativa y *spin* 1/2) la propagación se vuelve causal, es decir, desaparece el problema de Velo-Swanziger.

- **Consistencia:** En el capítulo 6 se analizan las restricciones para las interacciones lineales del campo RS. Se muestra que la interacción introducida hace dos décadas (PASCALUTSA 1998), y que ha sido considerada desde entonces por muchos autores como una interacción libre de las inconsistencias reportadas por Johnson y Sudars-han y por Hagen, presenta en realidad el mismo tipo de inconsistencias: en presencia de campos de fondo aparecen estados de norma negativa. Esto, para el caso RS, está conectado con el problema de la covariancia, y confirma resultados previos de que cualquier interacción lineal en el campo RS mostrará este tipo de comportamiento. Se muestra en el capítulo 8 que un candidato promisorio para resolver los problemas de consistencia con campos de fondo es el campo de Bhabha-Gupta en el límite “singular” en que la invariancia de contacto se implementa al nivel de la acción.
- **Relevancia fenomenológica:** Una vez establecido que a nivel formal todas las interacciones tienen el mismo tipo de inconsistencias, el único criterio válido para elegir una interacción particular es la precisión con la que puede reproducir resultados experimentales. En el capítulo 9 comparamos la interacción “consistente” con la usada tradicionalmente NATH Y OTROS (1971) para la interacción de la  $\Delta(1232)$  (modelizada como campo RS) con piones y nucleones en la zona de la resonancia, y mostramos que la última es superior desde el punto de vista fenomenológico, lo que era de esperarse dado que la primera es un orden superior en derivadas. Otro resultado interesante es que la interacción “consistente” está en conflicto con la invariancia de medida electromagnética, y que las amplitudes que involucran absorción o emisión de fotones por parte de la  $\Delta$  virtual involucran el “fondo de *spin* 1/2” cuyo desacople era la motivación para introducir esa interacción. Además, y en línea con el folklore de los campos efectivos, las correcciones a un lazo en el campo electromagnético fuerzan a que haya que considerar interacciones convencionales aún cuando se haya comenzado solo con la interacción “consistente”. Queda abierto el problema de usar el límite singular del campo de Bhabha-Gupta para modelizar la  $\Delta$ .

# Capítulo 2

## Partícula de spin $3/2$

En este capítulo repasamos los aspectos ligados a las simetrías relativistas, difiriendo para el próximo los aspectos dinámicos y la cuantización. Si bien este es un tema que puede considerarse como bien establecido, lo incluimos porque en la literatura persisten confusiones.

En el apéndice discutimos las simetrías espacio-temporales en  $3+1$  dimensiones: traslaciones, rotaciones, *boosts*, y paridad, así como aspectos técnicos ligados a la construcción de representaciones del grupo de Lorentz (el de rotaciones y *boosts*) y discutimos la construcción de Wigner de estados de masa y *spin* definidos, en general, para lo que nos basamos en el capítulo 2 de WEINBERG (1996) y en las notas de MACIEJKO (2013), y en el caso de vectorespinores. Mostramos aquí que lo que llamamos *spin* como número cuántico en el caso relativista es en realidad un autoestado del operador de Pauli-Lubanski, ya que el *spin* no es un buen número cuántico en ese contexto. Más adelante, en el capítulo 7, mostraremos algunas confusiones al respecto en la literatura sobre *spin*  $3/2$ .

### 2.1. ¿De qué hablamos cuando hablamos de *spin*?

En mecánica cuántica no relativista el *spin* es momento angular intrínseco, o sea un objeto independiente de las coordenadas que transforma como alguna representación irreducible de  $SO(3)$ . En la teoría relativista, en la que el grupo relevante es  $SO(3,1)$ , las rotaciones siguen siendo una simetría que conmuta con  $P^0$ , de modo que el momento angular total sigue siendo una cantidad conservada, pero cuando se habla del *spin* de una partícula se hace referencia a una etiqueta que caracteriza clases de partículas, por lo que hace falta que los *boosts* no lo afecten. Como el momento angular no conmuta con los *boosts* el *spin* en relatividad no puede tener el mismo sentido que en física no relativista.

La confusión se agrava porque muchas veces se habla de *spin* como el rango de la representación del grupo de Lorentz bajo la que transforma el campo del que la partícula es cuanto. Como veremos, si bien hay una relación, esta es compleja: pueden, por ejemplo, hacerse campos cuyos cuantos son de *spin* cero con tensores de rango tan grande como se desee.

Existen dos niveles de análisis de los que se origina la confusión. Por un lado, el grupo de Lorentz tiene una familia de representaciones **no unitarias** de dimensión finita, caracterizadas por dos números cuánticos semienteros correspondientes a quiralidades

opuestas, y que son fácilmente asimilables a objetos con índices de Lorentz (cuadrivectoriales o espinoriales). Así, un cuadrivector transforma como  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y un tensor de rango dos transforma como  $(1, 1) \oplus [(1, 0) \oplus (0, 1)] \oplus (0, 0)$  (más detalles en el apéndice). Obsérvese que estos son objetos constantes (sin dependencia en las coordenadas; un campo transforma de modo más complejo y constituye representaciones de dimensión infinita). Aquí no hay dinámica, y menos cuántica: el spin corresponde a clases de partículas y no se corresponde de un modo directo con índices de Lorentz. Por otro lado, el grupo de Poincaré tiene una colección de representaciones **unitarias** irreducibles de dimensión infinita correspondientes a transformaciones de estados de una partícula (cuánticos). Estas representaciones están caracterizadas por la masa de la partícula y la helicidad máxima, que es lo que llamamos *spin*. Los estados de helicidad y de 3-momento son los “índices” de la representación (debido al 3-momento, que es continuo, estas representaciones son de dimensión infinita). Veremos que una amplitud que transforme como  $(p, q)$  en el sentido de Lorentz puede usarse para describir partículas de todos los *spins* contenidos en  $p \oplus q$ , en el sentido habitual de adición de momentos angulares. Esto no significa que un campo que transforme según  $(p, q)$  describa todas esas partículas, como veremos en el capítulo siguiente.

## 2.2. Representaciones del grupo de Poincaré

Las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo de Lorentz tienen una aplicación muy limitada en física. Los objetos que transforman bajo ella son objetos constantes (independientes de las coordenadas o, lo que es lo mismo, invariantes por traslaciones). En física estamos interesados en objetos como campos o amplitudes de probabilidad, que en general dependerán de la posición. Supongamos que  $V$  es un espacio en el que actúa una representación irreducible del grupo de Lorentz; un “campo” (en el sentido matemático) será un mapa que a cada punto del espacio-tiempo  $x$  le hace corresponder un  $\mathbf{v}(x) \in V$ . El grupo de Lorentz actúa entonces tanto sobre las coordenadas como sobre cada  $\mathbf{v}$ : se trata de un espacio funcional y las representaciones son necesariamente de dimensión infinita.

Para implementar la simetría de Lorentz en una teoría cuántica, de hecho, lo que necesitamos son las representaciones **unitarias**, porque estas son las que preservan amplitudes. Pero la construcción de representaciones unitarias de grupos de Lie no compactos no es sencilla ni inmediata. Wigner se adelantó algunas décadas a los matemáticos en el tratamiento del problema para el caso concreto del grupo de Poincaré. Su construcción es más heurística que formal, pero hoy existen tratamientos formales que confirman esos trabajos pioneros (MACKEY 1951).

La razón para considerar el grupo de Poincaré en lugar del de Lorentz es que permite considerar la dependencia en las coordenadas de modo sistemático y sencillo. Los autoestados de  $P_\mu$  son de la forma  $e^{ip_\mu x^\mu}$ , siendo  $p_\mu$  el autovalor. Esto permite expresar amplitudes mediante transformadas de Fourier, con lo que obtenemos una expansión en la base de autoestados de  $P_\mu$ . Por otra parte, partículas físicas cumplen con  $p_\mu p^\mu = m^2$ , y además  $P^0$  es el Hamiltoniano, y por lo tanto determina la dinámica del sistema.

Pero la base de la construcción de representaciones irreducibles del grupo de Lorentz

presentada en la sección anterior era la existencia de los operadores mutuamente conmutantes  $\vec{\mathcal{A}}$  y  $\vec{\mathcal{B}}$ , y  $P^\mu$  no conmuta con ninguno de ellos. Necesitamos un nuevo operador que conmute con  $P^\mu$  para construir nuestras representaciones. El momento angular  $\mathcal{J}^{ij}$  conmuta solo con  $P^0$ , lo cual es suficiente para que sea una cantidad conservada, pero no alcanza para etiquetar estados cuánticos. El que sí resulta conmutar con  $P^\mu$  es el llamado Pseudovector de Pauli-Lubanski:

$$W_\mu = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \mathcal{J}^{\nu\sigma} P^\rho \quad (2.1)$$

el cual, en el sistema en que  $P_i = 0$  es igual que  $m\mathcal{J}^{ij}$ . Esta es la razón por la que, abusando del lenguaje, se habla de *spin* en el contexto relativista. La interpretación de este operador está en el corazón de la construcción de Wigner de representaciones irreducibles: las llamadas “representaciones inducidas” (Apéndice, subsección A3.1).

### 2.2.1. Relación con las representaciones del grupo de Lorentz

Enfaticemos una vez más las notables diferencias entre las representaciones del grupo de Lorentz halladas en la sección A2 y las halladas en A3: mientras que las primeras son de dimensión finita, no unitarias, y actúan sobre objetos sin dependencia en las coordenadas, las segundas actúan sobre espacios funcionales, son de dimensión infinita y son las relevantes para introducir la simetría de Lorentz a nivel cuántico. Dicho esto, es importante establecer los puentes entre ambos tipos de representaciones ya que en física de partículas aparecen los dos niveles de representación. Como veremos en la sección 4.6, hay trabajos recientes en los que aparece confusión entre esos niveles.

Observemos que en el sistema en que  $\vec{p} = 0$  los autoestados de  $P^\mu$  son invariantes por traslaciones. Por lo tanto ese es el medio de comparación de ambos tipos de representaciones. En ese sistema los estados están caracterizados por las representaciones de  $SO(3)$  (el operador de Pauli-Lubanski es  $W_\mu = P^0 \epsilon_{\mu 0ij} \mathcal{J}^{ij}$ , que corresponden a  $W_0 = 0$  y  $W^i = -m\epsilon_{ijk} \mathcal{J}^{jk}$ , es decir  $\vec{W} = -m\vec{\mathcal{J}}$ . Recordemos además que  $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}$ .

Supongamos que queremos describir las funciones de estado de una partícula con amplitudes que, aparte de la dependencia en  $\mathbf{x}$ , transforman de acuerdo con una representación  $(j_L, j_R)$  del grupo de Lorentz. ¿Qué *spins* podremos describir con ese tipo de amplitudes? Si  $\mathbf{p} = 0$  los *spins* posibles van a corresponder a  $\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}$ , cuya descomposición en representaciones irreducibles corresponde a la suma de *spin* habitual (se trata de la suma de dos representaciones independientes de  $SU(2)$ ). Los *spins* posibles serán entonces:

$$Func(M \rightarrow (j_L, j_R)) = (j_L + j_R) \oplus (j_L + j_R - 1) \oplus (|j_L - j_R|) \quad (2.2)$$

donde  $M$  es el espacio de Minkowski  $D = 3 + 1$  y en el miembro izquierdo estamos representando la colección de funciones de  $M$  en vectores de la representación  $(j_L, j_R)$ . El lado derecho corresponde a representaciones irreducibles en el sentido de Wigner. Podemos pensar en estos términos pues las representaciones del lado derecho no resultan mezcladas por *boosts*, ya que una vez que se trata de estados con  $\mathbf{p} \neq 0$  ya no los pensamos como autoestados de momento angular sino como autoestados del operador de Pauli-Lubanski.

A modo de ejemplo, pensemos los casos  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes [(\frac{1}{2}, 0) \oplus (\frac{1}{2}, 0)]$ . El primer caso es irreducible como representación de Lorentz, pero el espacio de funciones cuadvectoresiales

es reducible en el sentido de Wigner, dando lugar a representaciones de *spin* cero y de *spin* uno. El segundo es el caso de los vectorespinores, que como vimos es reducible como representación de Lorentz en  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$  y  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ . En cambio, las funciones de  $M$  en vectorespinores pueden ponerse como suma directa de funciones en elementos de  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$  y de elementos de  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ . Las segundas son irreducibles en el sentido de Wigner y dan lugar a objetos de *spin* 1/2, mientras que las primeras pueden reducirse a partículas de *spin* 3/2 y *spin* 1/2. Así, las funciones en vectorespinores contienen dos campos de Dirac cuyos orígenes son bastante diversos desde el punto de vista del grupo de Lorentz.

La forma concreta de producir esa separación puede pensarse en abstracto o bien construirse explícitamente construyendo el operador  $\vec{J}$  para el sistema en que  $p^i = 0$  para luego expresar la base en  $\mathbf{p}$  arbitrario mediante *boosts*. En abstracto la construcción es muy simple: para el caso cuadvectorial, el único escalar que puede construirse con elementos del álgebra de Poincaré es  $p_\mu v^\mu$ , por lo que las partículas de *spin* 1 deberán cumplir la condición  $p_\mu v^\mu = 0$ . Para el caso de vectorespinores, con elementos del álgebra de Poincaré pueden construirse dos objetos de *spin* 1/2:  $\gamma_\mu \Psi^\mu$  y  $p_\mu \Psi^\mu$ . Por lo tanto, la partícula de *spin* 3/2 corresponderá a cuadriespinores que cumplan con las condiciones  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  y  $p_\mu \Psi^\mu = 0$ . La primera condición separa el sector  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ , mientras que la segunda separa, si nos restringimos al subespacio que cumple con la primera, los *spins* 1/2 y 3/2 en  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$ .

### 2.3. Grados de libertad de la partícula de *spin* 3/2

Debe distinguirse la dimensión (finita) de la representación del grupo de Lorentz bajo la que transforma un estado de una partícula (que para una representación  $(j_L, j_R)$  será  $(2j_L + 1)(2j_R + 1)$ ) de lo que suele llamarse el “número de grados de libertad”, que también es una cantidad finita. Obsérvese que una vez dados los valores de  $\vec{p}$  el valor de  $p^0$  queda determinado por la relación de dispersión. Del mismo modo, hay grados de libertad en las representaciones del grupo de Lorentz que quedan determinadas por el valor de los demás.

En el caso de partículas físicas, se suele llamar “número de grados de libertad” a la dimensionalidad de la representación del grupo pequeño, duplicado si las antipartículas son diferentes de las partículas. Este número difiere del conteo de componentes de la correspondiente dimensión del grupo de Lorentz. Así, por ejemplo, un vectorespinor tiene en principio  $4 \times 4 = 16$  componentes (32 para vectorespinores complejos), pero los grados de libertad físicos son los cuatro estados de helicidad de las partículas y los cuatro de las antipartículas.

## Capítulo 3

# Campo de Rarita-Schwinger clásico

Uno de los aspectos más intrigantes de los campos de *spin* superior, de los cuales el de Rarita-Schwinger (RS) es el más sencillo, es que aparecen dificultades muy severas incluso a nivel clásico cuando el campo está en interacción. Es habitual que una interacción implementada en forma covariante en el Lagrangiano dé lugar a soluciones que violan la simetría de Lorentz. Por ejemplo, ocurre propagación superlumínica (VELO Y SCHWANZIGER 1969) y existen marcos de referencia donde cambia el número de grados de libertad (COX 1976). Esto no hace sino agravarse al pasar a la teoría cuántica. Lo que deja a uno particularmente perplejo es que la motivación detrás de implementar teorías de campos en el formalismo Lagrangiano (oscureciendo los aspectos dinámicos y la unitariedad) es la facilidad para implementar las simetrías de la teoría.

En este capítulo haremos un análisis de la formulación clásica, tanto para RS libre como interactuante, y mostraremos que el origen de las dificultades, aparte de la estructura de restricciones de la teoría que estudiaremos más adelante, radica en que la invariancia de Lorentz no está realmente implementada en forma completa en la acción. La invariancia de contacto, que es una invariancia de las ecuaciones de movimiento pero no de la acción, solo garantiza que las soluciones formen un multiplete de la representación correcta para el caso libre. Las interacciones harán que las soluciones clásicas, aunque tengan en principio el mismo número de grados de libertad que la teoría libre, no se organicen en multipletes de *spin* 3/2 sino que mezclarán a los sectores  $\gamma^\mu \Psi_\mu$  y  $p_\mu \Psi^\mu$ . Veremos más adelante que este último sector es, a nivel cuántico, el responsable de las fallas más severas de la teoría. como la aparición de estados de norma negativa.

### 3.1. Ecuación “de onda” vs campo de Grassmann

Al confrontar artículos escritos en épocas muy diferentes, debe tenerse en cuenta que los conceptos de “función de onda” de estados de una partícula y de “campo”, hoy articulados coherentemente en el marco teórico de la Teoría Cuántica de Campos, han ido evolucionando desde comienzos más bien confusos. En los años '20 y '30 se hablaba habitualmente de “ecuaciones de onda” para partículas relativistas, cuando lo que se intentaba hacer era generalizar la ecuación de Schrödinger. Años después, aún cuando el concepto de campo cuántico estaba ya firmemente establecido y estaba claro que en un contexto relativista es inconsistente trabajar con un número finito de grados de libertad, se puede

apreciar en la literatura que la terminología “ecuación de onda” siguió usándose para referirse, en realidad, a las ecuaciones clásicas del movimiento.

El límite clásico de los campos fermiónicos es otro ejemplo en que la confrontación de literatura de épocas diferentes puede ser fuente de confusiones, dada la aparición en décadas recientes de los campos pseudoclásicos de Grassmann. El campo RS o el de Dirac, pensado como un campo c-numérico, por ser fermiónico no tienen un límite clásico en el sentido habitual:  $\hbar \rightarrow 0$  y estados coherentes con número de ocupación grande en cada nivel (esta segunda condición no puede ser satisfecha por un campo fermiónico debido al principio de exclusión). Por eso el Lagrangiano de Dirac no se supone que sea el límite clásico del campo de Dirac, y no puede hablarse propiamente de una “cuantización”. Más bien, el Lagrangiano clásico se usa como punto de partida heurístico para armar la teoría cuántica, llevando el paralelo con el caso bosónico todo lo que sea posible. El paralelo se termina al intentar poner condiciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación, porque si se usan los correspondientes a la cuantización canónica se obtiene un Hamiltoniano con espectro no acotado por debajo. Una excepción a este tratamiento del caso fermiónico es WEINBERG (1996) en el capítulo 5, que no parte de un Lagrangiano sino de partículas en una dada representación del grupo de Lorentz, pero una vez obtenidos los coeficientes que acompañan a los operadores de creación y aniquilación en el campo la construcción es totalmente análoga: para que el propagador sea causal deben imponerse reglas de anticonmutación si el *spin* de las partículas es semientero. Esta construcción es suficiente para dar lugar a una teoría cuántica de campos totalmente satisfactoria, pero se pierde toda la potencia analítica del formalismo canónico. Una situación en que eso es patente es el tratamiento de las restricciones, que es engorroso y muy ceñido a los casos particulares. Véase el tratamiento de las restricciones del campo RS en JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) y en HAGEN (1971). Hacia los años 70, con la aparición de las teorías supersimétricas y las cuerdas, este inconveniente en el tratamiento de los campos fermiónicos se hizo evidente, y se desarrollaron formalismos canónicos “pseudoclásicos” en los que solo se exige  $\hbar \rightarrow 0$ . Ese límite resulta ser uno en el que los campos bosónicos son números ordinarios, y los fermiónicos son variables anticommutativas (también llamadas “de Grassman”. Más adelante (ver 5.8) damos un repaso de ese formalismo. En lo que sigue, y hasta analizar las restricciones para el campo RS, nos mantendremos en el formalismo con c-números.

### 3.2. Lagrangiano libre e invariancia de contacto

Como hemos visto en el capítulo anterior, la representación de Wigner de *spin* 3/2 se obtiene del vectorespinor imponiendo las condiciones:

$$\gamma_\mu \Psi^\mu = 0 \quad (3.1)$$

$$p_\mu \Psi^\mu = 0 \quad (3.2)$$

y por lo tanto los estados en capa de masa deben cumplir ecuaciones de movimiento equivalentes a las siguientes:

$$(\not{p} - m)\Psi^\mu = 0 \quad (3.3)$$



$$\gamma_\mu \Psi^\mu = 0 \quad (3.4)$$

dado que 3.3 implica  $p^2 = m^2$ , y 3.3 más 3.4 implican 3.2, como mostramos a continuación. En primer lugar, usando el álgebra de Clifford podemos establecer la siguiente identidad:

$$p_\mu \Psi^\mu = \frac{1}{2} p_\mu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \Psi_\nu \quad (3.5)$$

El primer término del miembro derecho se anula debido a 3.4, mientras que el segundo, que puede escribirse  $\frac{1}{2} \gamma^\nu \not{p} \Psi_\nu$ , puede transformarse usando  $\not{p} \Psi_\nu = m \Psi_\nu$  (que se deduce de la ecuación de Dirac 3.3) en  $\frac{m}{2} \gamma^\nu \Psi_\nu$ , el cual se anula, otra vez en virtud de 3.4.

Para escribir Lagrangianos que den lugar a esas ecuaciones de movimiento, lo que haremos es ajustar los parámetros que aparecen al escribir el Lagrangiano covariante de primer orden más general para vectores spinores:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^\mu \left( (\not{p} - m) g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) + B \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + m C \gamma_\mu \gamma_\nu \right) \Psi^\nu \quad (3.6)$$

que dan lugar a estas ecuaciones de movimiento:

$$\left( (\not{p} - m) g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) + B \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + m C \gamma_\mu \gamma_\nu \right) \Psi^\nu = 0 \quad (3.7)$$

y su conjugada. Llamémosle  $\Lambda_{\mu\nu}$  al operador cinético, y contraigamos estas ecuaciones con  $p^\mu$  y  $\gamma^\mu$ . Obtenemos, respectivamente:

$$\gamma^\mu \Lambda_{\mu\nu} \Psi^\nu = (4B - 1 + A) \not{p} \gamma_\nu \Psi^\nu + (2 + 4A) p_\mu \Psi^\mu + m(4C - 1) \gamma_\nu \Psi^\nu = 0 \quad (3.8)$$

$$p^\mu \Lambda_{\mu\nu} \Psi^\nu = (1 + A) \not{p} p_\mu \Psi^\mu + (A + B) p^2 (\gamma^\mu \Psi_\mu) - m p_\mu \Psi^\mu + m C \not{p} \gamma^\nu \Psi_\nu = 0 \quad (3.9)$$

Si  $A \neq -\frac{1}{2}$  el término  $p_\mu \Psi^\mu$  puede ser eliminado entre 3.8 y 3.9, y los términos de segundo orden podran ser eliminados (quedando la condición  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ ) si

$$B = \frac{3}{2} A^2 + A + \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

$$C = 3A^2 + 3A + 1 \quad (3.11)$$

Por lo tanto, hay infinitos Lagrangianos que dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, parametrizados por  $A$  con la condición de que  $A \neq -\frac{1}{2}$ . Esta libertad se relaciona con una simetría de las ecuaciones de movimiento (pero no del Lagrangiano): las llamadas “transformaciones de contacto”  $\Psi^\mu \rightarrow (g_\nu^\mu + a \gamma^\mu \gamma_\nu) \Psi^\nu$ . Introduzcamos el operador (muy útil):

$$R_{\mu\nu}(a) = g_{\mu\nu} + a \gamma_\mu \gamma_\nu \quad (3.12)$$

en términos del cual la transformación de contacto se escribe  $\Psi^\mu \rightarrow R(a)^\mu_\nu \Psi^\nu$ .  $R$  tiene las siguientes propiedades:

$$R(a)R(b) = R(a + b + 4ab) \quad (3.13)$$

$$R^{-1}(a) = R\left(-\frac{a}{1 + 4a}\right) \quad (3.14)$$

$$R\left(-\frac{1}{4}\right)R(a) = R\left(-\frac{1}{4}\right) \quad (3.15)$$

$$R(0) = 1 \quad (3.16)$$

De 3.15 se sigue que  $R(-\frac{1}{4})$  es un proyector, y en particular que no es invertible. Es importante notar que el núcleo del proyector es uno de los sectores de  $spin\ 1/2$ :  $\gamma^\mu \gamma^\nu \Psi_\nu$ . Por otra parte, de 3.14 se ve que  $R(a)$  es invertible para cualquier  $a \neq -\frac{1}{4}$ . Escribiendo el Lagrangiano RS como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^\mu R^{-1}(a)_\mu^\sigma R(a)_\sigma^\tau \Lambda(A)_{\tau\rho} R(a)_\rho^\delta R^{-1}(a)_\delta^\nu \Psi^\nu$$

y teniendo en cuenta que  $R(a)$  es invertible si  $a \neq -\frac{1}{4}$ , el espacio de los vectorespinores de la forma  $R^{-1}\Psi$  es la totalidad de los vectorespinores, y por lo tanto, si  $a \neq -\frac{1}{4}$ , el operador  $R^{\mu\sigma}(a)\Lambda_{\sigma\tau}(A)R^{\tau\nu}(a)$  también es un operador cinético válido para RS, que corresponderá a algún valor  $A'$ . Veamos que podemos con razonamientos sencillos hallar  $A'$  como función de  $a$  (lo cual, obviamente, puede hacerse por cálculo directo pero tedioso).

En primer lugar escribiremos  $\Lambda(A)$  a partir de aplicar matrices  $R$  sobre  $\Lambda(0)$ , para en el párrafo siguiente usar la propiedad 3.14 de composición de matrices  $R$  para ver cómo depende  $A'$  de  $A$  y  $a$  en una transformación de contacto genérica. Veamos que  $\Lambda(A)$  es cuadrática en  $A$ . Existirá un  $a$  tal que  $\Lambda(A) = R(a)\Lambda(0)R(a)$ , y  $R(a)\Lambda(0)R(a)$  es cuadrática en  $a$ , por lo que la relación entre  $A$  y  $a$  es lineal. Como  $R(0)$  es la identidad,  $R(0)\Lambda(0)R(0) = \Lambda(0)$ , por lo que  $A = 0$  si  $a = 0$ . El único valor no permitido para  $a$  ( $-\frac{1}{4}$ ) solo puede corresponder al único valor no permitido de  $A$  ( $-\frac{1}{2}$ ), aunque esto puede verse en forma más directa observando que  $\Lambda(-1/2)$  anula idénticamente los estados de la forma  $\gamma^\mu \gamma^\nu \Psi_\nu$ . Por lo tanto, la relación buscada es  $A = 2a$ :

$$\Lambda(A) = R\left(\frac{A}{2}\right) \Lambda(0) R\left(\frac{A}{2}\right)$$

Finalmente, veamos entonces que

$$\Lambda(A') = R(a)\Lambda(A)R(a) = R(a)R(A/2)\Lambda(0)R(A/2)R(a),$$

y como a su vez  $\Lambda(A') = R(A'/2)\Lambda(0)R(A'/2)$ , comparando ambas expresiones vemos que  $R(A'/2) = R(a)R(A/2)$ . Usando 3.13 obtenemos

$$A' = A(1 + 4a) + 2a \tag{3.17}$$

lo que demuestra que las transformaciones de contacto son el vínculo entre los diferentes (pero equivalentes) Lagrangianos para el campo RS. En el paper original de RARITA Y SCHWINGER (1941) el Lagrangiano corresponde a  $A = \frac{1}{3}$ , pero la mayoría de la literatura emplea  $A = -1$ , por lo que expresaremos  $\Lambda(A)$  en términos de  $\Lambda(-1)$  (esto resultará muy útil para demostrar la independencia entre las amplitudes y  $A$  cuando se introduzcan interacciones). Usando las propiedades multiplicativas de las matrices  $R$  obtenemos:

$$\Lambda(A) = R\left(-\frac{1}{2}(A+1)\right)\Lambda(-1)R\left(-\frac{1}{2}(A+1)\right) \tag{3.18}$$

El propagador del campo RS  $G(p, A)_{\beta\nu}$  es la inversa del operador cinético:

$$\Lambda(p, A)_\mu^\beta G(p, A)_{\beta\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

para cualquier valor de  $A$ . Usando las propiedades de las matrices  $R$  y la ecuación (3.18) puede escribirse convenientemente como

$$G(p, A)^{\mu\nu} = \left[ R^{-1} \left( -\frac{1}{2}(1+A) \right)^\mu \right]_\alpha G(p, -1)^{\alpha\beta} \left[ R^{-1} \left( -\frac{1}{2}(1+A) \right)^\nu \right]_\beta, \quad (3.20)$$

donde  $G(p, -1)_{\mu\nu}$  es el propagador bien conocido para  $A = -1$ :

$$\begin{aligned} G(p, -1)_{\mu\nu} = & - \left[ \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \hat{P}_{\mu\nu}^{3/2} - \frac{2}{3m^2} (\not{p} + m) (\hat{P}_{22}^{1/2})_{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{3}m} (\hat{P}_{12}^{1/2} + \hat{P}_{21}^{1/2})_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde se han introducido los proyectores  $P_{ij}^k$  que proyectan sobre los sectores  $k = 3/2, 1/2$  del espacio de representaciones, con  $i, j = 1, 2$  indicando los subsectores del subespacio  $1/2$ . Los proyectores, de uso muy extendido en la literatura sobre campos RS, están definidos como (VAN NIEUWENHUIZEN 1981)

$$\begin{aligned} (\hat{P}^{3/2})_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{3p^2} [\not{p} \gamma_\mu p_\nu + p_\mu \gamma_\nu \not{p}], \\ (\hat{P}_{22}^{1/2})_{\mu\nu} &= \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \\ (\hat{P}_{11}^{1/2})_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \hat{P}_{\mu\nu}^{3/2} - (\hat{P}_{22}^{1/2})_{\mu\nu}, \\ &= (g_{\mu\alpha} - \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2}) (1/3 \gamma^\alpha \gamma^\beta) (g_{\beta\nu} - \frac{p_\beta p_\nu}{p^2}), \\ (\hat{P}_{12}^{1/2})_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{3}p^2} (p_\mu p_\nu - \not{p} \gamma_\mu p_\nu), \\ (\hat{P}_{21}^{1/2})_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{3}p^2} (-p_\mu p_\nu + \not{p} p_\mu \gamma_\nu). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como puede verse de (3.21), el sector de *spin*  $1/2$  no desarrolla polo y solo se manifiesta en estados virtuales.

### 3.3. El problema de las interacciones

En principio es muy sencillo introducir interacciones para el campo RS, pero inmediatamente nos toparemos con dificultades formidables. Para hacer que las amplitudes de interacción no dependan de  $A$  basta con escribir un factor  $R$  acompañando cada aparición del campo RS en los términos de interacción, como veremos en la subsección 3.3.1. La interacción electromagnética más sencilla se introduce como de costumbre por sustitución minimal, dando lugar a una interacción de la forma  $A^\mu j_\mu$  siendo la corriente  $j_\mu$  un bilineal en el campo RS. Fácilmente se observa que la corriente  $j_\mu$  se independiza de  $A$  al cancelarse  $R$  y  $R^{-1}$  en la corriente. Esta interacción, en la que no profundizaremos hasta los capítulos 7 y 8, fue la que llevó a los primeros inconvenientes severos en la cuantización del campo RS (JOHNSON Y SUDARSHAN 1961). El tipo de interacciones que estudiaremos aquí es el más sencillo posible, lineal en el campo RS

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}^\mu R_{\mu\nu} S^\nu + h.c. \quad (3.23)$$

donde  $S''$  es una función de campos diferentes al RS. En particular, es de interés fenomenológico (ver capítulo 9) la interacción con un pseudoescalar y un campo de Dirac, el primero apareciendo siempre como una cuadriderivada. El término dominante a bajas energías

$$\mathcal{L}_{NEK} = g\bar{\Psi}^\mu \left( g_{\mu\nu} + \left[ \frac{1}{2}(1 + 4Z)A + Z \right] \gamma_\mu \gamma_\nu \right) \psi \partial_\nu \phi + h.c. \quad (3.24)$$

con  $Z = 1/2$  fue el estudiado por NATH Y OTROS (1971): es la interacción que hemos llamado “convencional” en la introducción y a la que se le encontró problemas análogos a los hallados para la interacción electromagnética (HAGEN 1971). El siguiente orden en derivadas,

$$\mathcal{L}_P = g\bar{\Psi}^\mu \left( g_{\mu\sigma} + \left[ \frac{1}{2}(1 + 4z)A + z \right] \gamma_\mu \gamma_\sigma \right) \epsilon^{\sigma\nu\lambda\rho} \gamma_5 \gamma_\lambda (\partial_\rho \psi) (\partial_\nu \phi) + h.c. \quad (3.25)$$

con  $z = -1/2$  apareció mucho más recientemente. Es la propuesta por PASCALUTSA (1998) y que ha alcanzado una gran popularidad por la creencia extendida, como hemos contado en la introducción, de que esta interacción no presenta las inconsistencias de  $\mathcal{L}_{NEK}$ . Mucho del trabajo de esta tesis girará en torno a  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$ . En la subsección 3.3.1 se muestran las consecuencias de la invariancia por transformaciones de contacto en las interacciones del campo RS usando las propiedades de las matrices  $R$ . En la subsección 3.3.2 se expone nuestro método para determinar el valor consistente de  $Z$  para no violar el conteo de grados de libertad, mucho más elemental que los que aparecen en la literatura. En la subsección 3.3.3 exponemos los problemas de no-covariancia y acausalidad que afectan a nivel clásico los acoplamientos del campo RS, y finalmente en la sección 3.4 exponemos nuestra hipótesis acerca del origen de estos inconvenientes, que retomaremos en el capítulo 8 al intentar dar una resolución a ellos que nos llevará más allá del formalismo RS.

### 3.3.1. Invariancia por transformaciones de contacto

Veamos primero que el propagador adoptará la forma

$$G_A^{\mu\nu} = (R^{-1})^\mu{}_\sigma \left( -\frac{1}{2}(A + 1) \right) (G_{-1})^{\sigma\tau} (R^{-1})_\tau{}^\nu \left( -\frac{1}{2}(A + 1) \right) \quad (3.26)$$

por lo que, para obtener amplitudes independientes de  $A$ , será suficiente con escribir interacciones en las que las inserciones de campos RS estén acompañadas por un factor  $R \left( -\frac{1}{2}(A + 1) \right) R(\eta)$ , donde  $\eta$  es un “parámetro off-shell” arbitrario (la denominación “off-shell” se debe a que es un acoplamiento al sector  $\gamma_\mu \Psi^\mu$ , que se anula en capa de masa). Para compatibilizar con el uso estándar, escribimos  $\eta = -Z - \frac{1}{2}$  que, haciendo uso de la propiedad 3.13, da lugar al factor bien conocido  $R(\frac{1}{2}(1 + 4Z)A + Z)$  (NATH Y OTROS 1971). El acoplamiento minimal al campo electromagnético obedece automáticamente esta relación con cualquier  $Z$ , mientras que para cada término no minimal (como los de fotoproducción) ciertos “ $Z$ ” deben especificarse (como  $X$  e  $Y$  en los términos de fotoproducción mostrados en BERMERROUCHE Y OTROS (1989)). El nombre  $Z$  suele reservarse para el acoplamiento con un nucleón y un pión como en NATH Y OTROS (1971).

Es importante destacar que, a diferencia de  $A$ ,  $Z$  es físicamente observable (las amplitudes dependen de  $Z$ ). Desde el punto de vista de las invariancias, que es el único relevante en teoría efectiva de campos,  $Z$  es un parámetro libre, pero como se verá en la sección 3.3.2, no cualquier valor de  $Z$  da lugar a una interacción consistente. Otra cosa que deberíamos tener claro es que el valor de  $Z$  está correlacionado con la convención que decidamos adoptar para escribir el vértice, es decir que antes de especificar el valor de  $Z$  debe estar claro cómo vamos a escribir la interacción.

### 3.3.2. Grados de libertad y parámetros off-shell

En la literatura el parámetro off shell suele fijarse por procedimientos sofisticados, invocando principios de la teoría cuántica de campos. Aquí veremos que es muy sencillo hacerlo a nivel clásico pidiendo que se preserve el número de grados de libertad de la teoría libre. De todos modos no debe olvidarse que una condición “de consistencia” no necesariamente fija las interacciones a nivel fenomenológico, y que en BERMERROUCHE Y OTROS (1989) se cita evidencia convincente de que los datos experimentales favorecerían valores incompatibles con el de “consistencia”.

Nótese que en la ecuación (3.24) la interacción puede expresarse como  $\mathcal{L}_{NEK,P} = \bar{\Psi}_\mu S^\mu + h.c.$  y discutamos acerca de la estructura de  $S^\mu$ . Obsérvese que en el Lagrangiano RS libre, si  $A = -1$  no hay término conteniendo  $\dot{\Psi}^0$ . Por lo tanto, la ecuación de movimiento para  $\Psi^0$  es una verdadera restricción, y  $\Psi^0$  no es dinámica. Es necesario que las interacciones no cambien eso, o no habrá proyección de grados de libertad, y por lo tanto ninguna esperanza de quitarse de encima los estados indeseados de norma negativa que ya están presentes en la teoría libre. La contribución de las interacciones a tales ecuaciones de movimiento vendrán de  $S^0$ . La condición de que no ocurra ningún término conteniendo  $\dot{\Psi}^0$  es que  $S^0$  no contenga derivadas temporales de ninguno de los campos en interacción con el campo RS, o de lo contrario si  $S^0(\dot{\chi})$ , la ecuación de movimiento para  $\chi$  será ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{RS} + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi + \bar{\Psi}^\mu S_\mu + \bar{S}_\mu \Psi^\mu$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{RS} + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi}{\partial \dot{\chi}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S^0}{\partial \dot{\chi}} \bar{\Psi}^0 - \frac{\partial S^i}{\partial \dot{\chi}} \bar{\Psi}^i \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi}{\partial \dot{\chi}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S^0}{\partial \dot{\chi}} \bar{\Psi}^0 - \frac{\partial S^i}{\partial \dot{\chi}} \bar{\Psi}^i \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

para algún campo  $\chi = \psi, \phi$ , dado que  $\frac{\partial \mathcal{L}_{RS}}{\partial \dot{\chi}} = 0$  para todos los campos. Se ve claramente que si  $\frac{\partial S^0}{\partial \dot{\chi}} \neq 0$ , ocurrirá una contribución proporcional a  $\dot{\Psi}^0$ . Esta condición fija el parámetro fuera de capa de masa para  $\mathcal{L}_{NEK}$  en  $Z = 1/2$ , compatible con el valor reportado en la literatura, así como para  $\mathcal{L}_P$  en  $Z = -1/2$ , que corresponde con la interacción considerada en la literatura, aunque nunca se hable de un parámetro fuera de capa de masa pues el sector  $1/2$  supuestamente no juega rol alguno para esta interacción (en el capítulo 7 veremos que esto no es cierto). De hecho, para  $\mathcal{L}_{NEK}$  ( $A = -1$ ):

$$\mathcal{L}_{NEK} = \bar{\Psi}_\nu g(g^{\nu\mu} - (Z + 1/2)\gamma^\nu \gamma^\mu) \psi (\partial_\mu \phi) + g \bar{\psi} (\partial_\mu \phi) (g^{\mu\nu} - (Z + 1/2)\gamma^\mu \gamma^\nu) \Psi_\nu$$

y por lo tanto:

$$S_{NEK}^0 = g\left(\frac{1}{2} - Z\right)\dot{\phi}\psi - g\left(\frac{1}{2} + Z\right)\gamma^0\gamma^i\partial_i\phi\psi \quad (3.28)$$

lo que lleva a  $Z = \frac{1}{2}$ , y por lo tanto

$$S_{NEK}^0 = -g\gamma^i\gamma^0\psi(\partial_i\phi) \quad (3.29)$$

$$S_{NEK}^{\dagger 0} = g(\partial_i\phi^\dagger)\bar{\psi}\gamma^i. \quad (3.30)$$

$\mathcal{L}_P$  puede escribirse para  $A = -1$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_P = & g\epsilon^{\rho\alpha\beta\nu} \left[ \bar{\Psi}^\mu (g_{\mu\rho} - (1/2 + Z)\gamma_\mu\gamma_\rho)\gamma_5\gamma_\alpha(\partial_\nu\phi)(\partial_\beta\psi) \right] \\ & + (\partial_\beta\bar{\psi})(\partial_\nu\phi^\dagger)\gamma_5\gamma_\alpha(g_{\mu\rho} - (1/2 + Z)\gamma_\mu\gamma_\rho)\Psi^\mu, \end{aligned} \quad (3.31)$$

por lo que deberá tenerse  $Z = -\frac{1}{2}$  para evitar derivadas temporales de los campos acoplados a  $\Psi_0$ , así que

$$\mathcal{L}_P = g\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left( \bar{\Psi}_\nu\gamma_5\gamma_\alpha(\partial_\mu\psi)(\partial_\beta\phi) + (\partial_\mu\bar{\psi})(\partial_\beta\phi^\dagger)\gamma_5\gamma_\alpha\Psi_\nu \right) \quad (3.32)$$

y tendremos

$$S_P^0 = g(\partial_i\bar{\psi})(\partial_k\phi)\epsilon^{i0jk}\gamma_j\gamma_5 \quad (3.33)$$

$$S_P^{\dagger 0} = g(\partial_n\phi)\epsilon^{l0mn}\gamma^0\gamma_5\gamma_m(\partial_l\psi) \quad (3.34)$$

Como  $Z$  no es nulo, vemos que de hecho el vértice  $\mathcal{L}_P$  da lugar a un acoplamiento al sector de *spin* 1/2 (el que no anula  $\gamma_\mu\Psi^\mu$ ). Como veremos en el capítulo 7, cuando este vértice opera en ambos extremos del propagador RS el sector 1/2 no contribuye a la amplitud, pero esto es una propiedad de la amplitud elástica y no del vértice. Veremos en ese capítulo que el acoplamiento al sector 1/2 se manifiesta en amplitudes radiativas y también en correcciones radiativas a un *loop* (BADAGNANI Y OTROS 2015).

### 3.3.3. Condiciones subsidiarias (problemáticas)

Para ver el origen de los problemas con las interacciones, estudiemos las ecuaciones de movimiento cuando se añade un término de interacción genérico

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}^\mu S_\mu + \bar{S}_\mu \Psi^\mu \quad (3.35)$$

donde se incluye en  $S_\mu$  el factor  $R\left(-\frac{1}{2}(A+1)\right)R(\eta)$  que hace invariante ante transformaciones de contacto la interacción al nivel de las amplitudes. Si se trata de un acoplamiento al campo electromagnético  $\mathcal{A}_\mu$  tendremos  $S_\mu = \mathcal{A}^\nu \frac{\partial j_\nu}{\partial \Psi^\mu}$  siendo  $j^\mu$  la corriente electromagnética.  $S_\mu$  podría ser función sólo de otros campos, como ocurre con las interacciones con espinores y escalares propuestas en NATH Y OTROS (1971) y PASCALUTSA (1998). Las ecuaciones de movimiento serán entonces:

$$\Lambda_{\mu\nu}(A)\Psi^\nu + S_\mu = 0 \quad (3.36)$$

y su conjugada. Cuando se contrae esas ecuaciones con  $\gamma^\mu$  y  $p^\mu$  para calcular  $\gamma_\mu\Psi^\mu$  y  $p_\mu\Psi^\mu$ , como se hizo más arriba con el campo libre, surgen expresiones intrincadas.

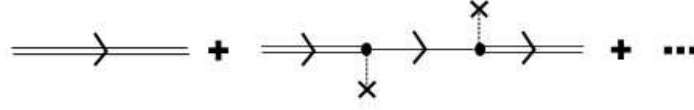


Figura 3.1: En presencia de un gradiente escalar, el campo RS se mezcla con el campo de *spin* 1/2 del nucleón.

De  $\gamma_\mu(\Lambda_{\mu\nu}(A)\Psi^\nu + S_\mu) = 0$  se despeja  $p_\mu\Psi^\mu$  y se reemplaza en las dos ocurrencias en  $\partial_\mu(\Lambda_{\mu\nu}(A)\Psi^\nu + S_\mu) = 0$ , de lo que resulta:

$$\gamma_\mu\Psi^\mu = -\frac{2}{m^2}\frac{1+2A}{1-4C}\left(-p^\mu S_\mu - \frac{1}{1+2A}[(1+A)\not{p} - m]\gamma_\mu S^\mu\right) \quad (3.37)$$

Dado que una condición necesaria para obtener *spin* 3/2 “puro” es  $\gamma_\mu\Psi^\mu = 0$ , vemos que surgen problemas severos de covariancia incluso a nivel clásico, aún cuando 3.37 garantice un conteo apropiado del número de grados de libertad. Esta falta de covariancia (algo intrigante dado que partimos de un Lagrangiano covariante) da lugar, como veremos a continuación, a situaciones catastróficas como la propagación superlumínica del campo RS en presencia de campos de fondo.

### 3.3.4. Propagación acausal

Describiremos aquí brevemente el resultado de VELO Y SWAZINGER (1969) para facilitar la discusión. Por detalles puede consultarse 8.1.2 y la bibliografía original. El acoplamiento minimal del campo RS al campo electromagnético da lugar a propagación de ciertos modos a velocidades mayores a la de la luz, y en general a no-covariancias manifiestas en la deformación de los conos de luz, cuando el campo se propaga sobre un fondo de campo magnético no nulo. Algo análogo ocurre cuando se acopla el campo RS del modo más sencillo un campo de Dirac y un escalar, si hay un gradiente de ese escalar de fondo SINGH (1973).

VELO Y SWANZIGER (1969) hablan de una “lección a aprender”: no basta con partir de una acción invariante de Lorentz para obtener una teoría invariante. HAGEN (1971) alude a esta y otras dificultades como “el misterio del *spin* alto”. Uno diría, más que una lección, que se trata de una anomalía seria. En palabras de WEINBERG (1996, p 292), “el punto del formalismo Lagrangiano es que hace fácil satisfacer la invariancia de Lorentz y otras simetrías: una teoría clásica con una densidad Lagrangiana invariante de Lorentz conducirá, al cuantizarla canónicamente, a una teoría cuántica invariante de Lorentz”. A nivel clásico, las invariancias implementadas en el Lagrangiano son las que permiten establecer la conexión con magnitudes conservadas. En el caso del fenómeno de Velo y Zwanziger hay campos magnéticos de fondo. En este caso, que la teoría sea invariante de Lorentz debe entenderse como que la descripción debe ser la misma en cualquier marco inercial, para lo cual debe tenerse en cuenta la transformación del campo magnético (esto es análogo al caso de las llamadas “rupturas espontáneas” de simetría, en las que la teoría es invariante teniendo en cuenta cómo transforma el vacío). Aquí la no-invariancia es severa: si en algún marco de referencia hay un campo magnético, por pequeño que sea,

siempre habrá otro marco en el que el campo magnético alcance la magnitud crítica. En ese marco habrá propagación superlumínica, y no en el primero, pero una señal superlumínica lo es en todos los marcos.

Entonces, o bien cabe dudar de la capacidad del formalismo Lagrangiano para implementar simetrías, o bien debemos revisar si la invariancia de Lorentz está correctamente implementada en el caso del campo RS.

### 3.4. ¿Por qué son problemáticas las interacciones de los campos RS?

Retomemos el dilema planteado en el párrafo anterior. ¿Estamos seguros de que la invariancia de Lorentz está implementada en la acción? Pareciese que sí: escribimos el Lagrangiano invariante de Lorentz más general posible de primer orden en  $\Psi^\mu$  y  $\bar{\Psi}^\mu$ . Pero vimos que la condición de que esa acción de lugar a las ecuaciones de movimiento  $(i\not{D} - m)\Psi^\mu = 0$  y  $\gamma_\mu\Psi^\mu = 0$  deja libre el parámetro  $A$  con la condición  $A \neq -\frac{1}{2}$ . Vimos también que esa libertad está ligada a una invariancia de las ecuaciones de movimiento pero no de la acción: la invariancia de contacto. Entonces, como esta es la condición para obtener soluciones que transformen como objetos de *spin* 3/2, la invariancia de Lorentz no está plenamente implementada en el Lagrangiano. La invariancia de contacto es una especie de residuo no implementado.

La condición de que la acción sea invariante ante transformaciones de contacto es  $A = -\frac{1}{2}$ . En este caso (que tratamos en detalle en el capítulo 8) las soluciones clásicas incluyen *spin* 1/2 espurio. Veremos de hecho que aparece una restricción de primera clase, es decir una invariancia de medida. Veremos que en efecto en este caso la propagación es causal. Lamentablemente no es una solución a los problemas del *spin* 3/2 porque a nivel cuántico aparece un sector de estados de norma negativa, pero en principio eso puede subsanarse de un modo similar a como se trata el caso de *spin* 1 en el formalismo de Stückelberg: agregando un campo adicional de *spin* 1/2 acoplado con sintonía fina al campo RS. Este es nuestro candidato a solución del “misterio de *spin* 3/2”. Hasta entonces trabajaremos las propuestas que ya están en circulación mostrando que estos problemas están presentes en todas.



# Capítulo 4

## Alternativas al formalismo RS

El propósito de este capítulo es doble: por un lado dar un pantallazo del desarrollo histórico de las distintas propuestas para describir partículas de *spin*  $3/2$ , sus motivaciones y dificultades, lo que permite apreciar la naturaleza y dificultad del problema que enfrentamos. A la luz de la historia, teniendo en cuenta las formidables dificultades del formalismo RS y de la cantidad de propuestas alternativas, resulta sorprendente que el formalismo RS haya mantenido una hegemonía de tantas décadas. Veremos que estos “olvidos” han redundado en que propuestas similares sean redescubiertas cada quince o veinte años. También resulta llamativa la cantidad de soluciones que han aparecido al problema de Velo-Zwanziger, sabiéndose de algunas de ellas que dan lugar a cuantizaciones inconsistentes, de lo que surge que pese a las conexiones entre ambos problemas, resolver el primero no implica tener solucionado el segundo.

Para el desarrollo histórico nos limitaremos a reseñar la bibliografía, sin hacer aportes propios más allá de la historización y organización del material. Por otro analizaremos dos propuestas relativamente recientes, que si bien han tenido un impacto modesto son propuestas aún en circulación, relevantes para nuestro trabajo y que no han recibido un cierre en la literatura. Una de ellas (la propuesta de Haberzettl) encuentra su continuidad en esta tesis, pues el propagador que obtienen es en esencia idéntico al que obtenemos aquí al cuantizar covariantemente la teoría invariante de contacto antes de agregar un espinor de Stueckelberg (véase capítulo 8).

### 4.1. Fierz-Pauli (años 30)

El formalismo de Fierz-Pauli (FIERZ Y PAULI 1939) es de hecho un poco anterior al de RS. Se trata de la primer descripción sistemática de partículas de *spin* arbitrario, pensadas como generalizaciones de la ecuación de Dirac (es decir, ecuaciones “de onda”, que hoy llamaríamos ecuaciones de movimiento de un campo clásico). Mientras estas ideas se desarrollaban (a lo largo de los años 30) recién se hallaba al neutrón y al muón, y la esperanza seguía siendo poder construir una teoría unificada a partir de unas pocas partículas elementales. Sin embargo, a pesar de lo rotundo de los primeros éxitos de la ecuación de Dirac, pronto surgieron dificultades aparentemente insalvables ligadas a los infinitos de la teoría perturbativa aplicada a los procesos electrodinámicos. Esas dificultades recién se subsanarían en la posguerra con el desarrollo de la teoría perturbativa covariante y la

renormalización, pero en esa década se pensaba que se trataba de dificultades intrínsecas de la electrodinámica y se buscaban teorías alternativas con la esperanza de que los infinitos no se manifestaran en ellas. El desarrollo de teorías de *spin* superior se inscribe en estos esfuerzos.

El formalismo de Fierz-Pauli aplicado a *spin* 3/2 puede pensarse como una manera alternativa de escribir la ecuación de Rarita-Schwinger. Consiste en describir el campo en términos de tensores de espinores (en lugar de un vector de biespinores, como es el caso en RS). Al igual que en el caso RS, hay una “ecuación de Dirac” (que en este caso es un sistema de dos ecuaciones) suplementada por “condiciones subsidiarias” que son las equivalentes a  $\gamma_\mu \Psi^\mu$  más la condición de simetría del tensor.

En este contexto se observó la primer dificultad desconcertante de las teorías de *spin* superior: si se hace sustitución minimal en las ecuaciones de Fierz-Pauli para introducir las interacciones electromagnéticas se llega a inconsistencias algebraicas. Lo mismo ocurre, de hecho, con las ecuaciones de movimiento del campo RS. La resolución que encontraron Fierz y Pauli fue desarrollar un Lagrangiano de manera que las ecuaciones de Fierz y Pauli resultaran de un principio variacional. Al hacerse sustitución minimal en el Lagrangiano se llega a ecuaciones de movimiento consistentes. Pero los Lagrangianos en este formalismo son considerablemente complicados, por lo que finalmente se impuso el formalismo de RS, que es físicamente equivalente pero mucho más fácil de manipular en cálculos.

## 4.2. Formalismo multispin de Bhabha y Harish-Chandra (años 40)

A lo largo de la década del 40 las investigaciones en física experimentaron cambios profundos en sus prácticas y organización, sobre todo debido a la guerra: el proyecto Manhattan transformó los principales laboratorios de gabinetes controlados por un profesor titular a instalaciones de gran costo. La física de partículas se desplazó de la investigación de rayos cósmicos a la operación de aceleradores cada vez mayores. Desde el fin de la guerra, cuando se pudo quitar atención del Uranio 235 y el Plutonio, la electrodinámica experimentó avances fundamentales: se logró eliminar sistemáticamente los infinitos de la expansión perturbativa y se pudieron hacer predicciones espectaculares. Así surgió lo que hoy conocemos como Teoría Cuántica de Campos. Hasta que eso ocurriera (básicamente hacia 1947) se continuaron explorando alternativas al formalismo de Dirac con la esperanza de que otras “ecuaciones de onda” no presentaran los infinitos de la electrodinámica de *spin* 1/2. Lo notable es que en cuanto desapareció la motivación inicial para explorar teorías de *spin* superior, los nuevos aceleradores pronto proveerían una multitud de partículas de *spin* solo acotado por las energías disponibles, por lo que el interés en campos de *spin* superior no decayó entonces, y no lo haría hasta el advenimiento de la cromodinámica a mediados de los 70.

Como los campos escalar y vectorial todavía cargaban con la fama de ser teorías problemáticas, apareciendo la teoría de Dirac como prototipo de éxito, los espinores aparecían como una gran promesa. Pronto se encontraron ecuaciones espinoriales para *spin* cero y uno, hoy poco recordadas aunque en tiempos recientes ha renacido algún interés en ellas: el formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau (NEDJADI Y BARRETT 1993, LUNADI Y OTROS

2000, CORSON 1953). Las ecuaciones de Fierz-Pauli podían pensarse como generalizaciones a *spin* arbitrario, pero debían suplementarse con condiciones subsidiarias que eran percibidas como problemáticas (eran el origen, por ejemplo, de que no se pudiera hacer sustitución minimal directamente en las ecuaciones de movimiento).

El problema que se propuso Bhabha fue generalizar la ecuación de Dirac a *spin* arbitrario, de modo que no se necesitasen condiciones subsidiarias. Para esto, escribió la ecuación de primer orden

$$(\alpha^\mu p_\mu + \chi\beta)\psi = 0 \quad (4.1)$$

donde  $\psi$  es una función multicomponente que transforma según alguna representación (no necesariamente irreducible) del grupo de Lorentz completo, por lo que  $\alpha$  y  $\beta$  son matrices sobre ese espacio. La generalización se lleva adelante suponiendo que las matrices  $\alpha$  son generalizaciones de las matrices de Dirac, en el sentido de que su conmutador es proporcional al generador infinitesimal correspondiente del grupo de Lorentz en la representación bajo la que transforma  $\psi$ . Este formalismo está tratado con gran detalle en un libro de texto de la época (CORSON 1953). Los trabajos originales (BHABHA 1945, 1949) han sido revisados y puestos en términos más modernos (KRAJCIK Y NIETO, 1977A) y se ha hecho una revisión histórica (KRAJCIK Y NIETO, 1977B). Lo que resulta de este procedimiento son multipletes de diferentes masas y *spins*, pero en general estas teorías dan lugar a espacios de Hilbert con métrica no definida positiva (lo cual es incompatible con la cuantización) excepto para *spins* 1/2, 0 y 1 para los que el formalismo coincide con los de Dirac y Duffin-Kemmer-Petiau respectivamente. Obsérvese que, por razones históricas, incluso en la bibliografía de los años 70 los autores se refieren a positividad de la “carga” para referirse a la de la norma del espacio de estados.

Otra línea de trabajo fue la desarrollada por Harish-Chandra, también tratada en gran detalle por CORSON (1953), en la que, en lugar de buscar que el álgebra de las matrices  $\alpha$  de lugar a los generadores infinitesimales, se clasificaban las álgebras irreducibles que daban lugar a multipletes de masa única (aunque en general los *spins* continuaban siendo múltiples). HARISH-CHANDRA (1947) halló las condiciones generales que debían cumplir las matrices  $\alpha$  ( $\beta$  debe ser proporcional a la identidad) para lograr masa única y espectro definido positivo, en la forma de polinomios mínimos:

$$(\alpha_\mu p^\mu)^n - p^2 (\alpha_\mu p^\mu)^{n-2} \quad (4.2)$$

donde  $n$  es algún número natural y  $p^\mu$  es el cuadrimomento. Esta condición es equivalente a:

$$\Sigma_{\text{perm}} (\alpha_{\mu_1} \alpha_{\mu_n} - g_{\mu_1 \mu_2}) \alpha_{\mu_3} \dots \alpha_{\mu_n} = 0 \quad (4.3)$$

Estas álgebras (que en un sentido diferente, pero al igual que las de Bhabha, generalizan las de Dirac y Duffin-Kemmer-Petiau) se vuelven prohibitivamente complejas a medida que  $n$  aumenta. Esta es probablemente la única razón por la que esta línea de trabajo se encuentra abandonada (aparte de que los pocos ejemplos que se han construido explícitamente presentan fallos severos al considerarse interacciones, como veremos más adelante al revisar la ecuación de Glass). Se conjeturó que  $n$  debía ser como mínimo  $2S + 1$ , siendo  $S$  el *spin* máximo en el multiplete, pero más adelante se han encontrado contraejemplos (GLASS 1971). Que a lo largo de tres décadas solo se haya avanzado a fuerza de conjeturas y contraejemplos da cuenta del enorme nivel de complejidad de este enfoque.

### 4.3. Formalismo de Bhabha-Gupta (años 50)

En los años cincuenta la profusión de nuevas partículas desmoronó la esperanza de hacer una descripción de la física básica a partir de unas pocas partículas elementales (esa perspectiva no reemergería hasta la década de los '70 con el triunfo de la cromodinámica). El interés en campos de *spin* superior se mantuvo firme. El modelo de “partícula exitosa” seguía siendo la ecuación de Dirac.

Convencido el propio Bhabha de que su formalismo daba lugar a teorías imposibles de cuantizar, se concentró en la tarea de clasificar las álgebras que diesen lugar a espectros definidos positivos.

#### 4.3.1. Álgebras sobre un campo vectorespinorial

El primer resultado en este sentido (BHABHA 1951) tuvo muy escasa repercusión. Entre las pocas citas se encuentran trabajos del propio Bhabha y un trabajo sobre autocitas en ciencias. Sin embargo, es en este trabajo donde sienta las bases metodológicas para desarrollar el formalismo hoy conocido como Bhabha-Gupta, pero sobre todo halla un álgebra muy sugerente con una especie de “invariancia de gauge” con la que nos toparemos más adelante.

El propósito del trabajo es clasificar todas las álgebras de matrices  $\alpha$  sobre la representación vectorespinorial (*spin* 3/2 más *spin* 1/2) que de lugar a un espectro de norma no negativa. Concluye que no existe ningún álgebra razonable que describa partículas de *spin* 3/2 únicamente y masa nula, porque habría un grado de libertad de *spin* 1/2 así como un grupo de medida. Muestra también que el único campo con espectro definido positivo corresponde a la partícula de Fierz-Pauli-Dirac.

Finalmente señala un caso que merece mayor atención (que nunca recibió): un doblete dado por un campo de *spin* 3/2, masivo y espectro definido positivo y otro de *spin* 1/2, masa y norma nulas. También ve indicios de algo análogo a una invariancia de gauge.

#### 4.3.2. Álgebras sobre un vectorespinor más un espinor de Dirac

Meses más tarde, Bhabha construyó una familia de campos con espectro definido positivo conteniendo una partícula de *spin* 3/2 y otra de *spin* 1/2 y diferente masa, contradiciendo la expectativa dominante entonces (BHABHA 1952). Poco después, GUPTA (1954) reescribió esta familia de teorías en términos de un campo de Rarita-Schwinger acoplado a un espinor de Dirac, lo cual permitió hacer sencillos los cálculos prácticos (el álgebra de las matrices  $\alpha$  es prohibitivamente complicada comparada con las matrices  $\gamma$  usadas en el formalismo RS). Esta es la formulación habitualmente empleada, por lo que la llamamos “Bhabha-Gupta” para distinguirla de la formulada en la década anterior. Esa distinción suele no hacerse, lo cual ha llevado a equívocos. Obsérvese que la serie de papers revisados por KRAJCIK Y NIETO (1977A), así como el recorrido histórico relevado por los mismos autores (KRAJCIK Y NIETO 1977B) no abarcan este período.

Escribiremos la acción de Bhabha-Gupta incorporando la invariancia de contacto, siguiendo la terminología introducida en el capítulo anterior

$$\mathcal{L}_{BG} = \bar{\Psi}^\mu \Lambda(m, A)_{\mu\nu} \Psi_\nu - a \bar{\psi} (\not{p} - \lambda m) \psi - d \left( \bar{\psi} p_\mu R(A, Z)^{\mu\nu} \Psi_\nu + \bar{\Psi}_\mu R(A, Z)^{\mu\nu} p_\nu \psi \right) \quad (4.4)$$

#### 4.4. LAS ECUACIONES DE GLASS, HURLEY Y FISK-TAIT (AÑOS 70) 37

donde  $Z = 1/2$ ,  $\lambda$  y  $d$  son números reales arbitrarios. En principio  $a$  también lo es, pero como su valor absoluto puede absorberse en un escaleo de  $\psi$ , consideraremos que puede adoptar los valores 1 y  $-1$ . Este lagrangiano tiene propiedades muy interesantes, que se estudiaron en décadas posteriores. Tiene un espectro definido positivo si y sólo si  $a = -1$ . Por otra parte, si se introduce un acoplamiento electromagnético minimal, se observa que puede hacerse que la propagación sea causal (resolviendo el problema de Velo-Zwanziger) si y sólo si  $a = 1$  y  $d^2 = 2/3$ . Es imposible, en este formalismo, tener simultáneamente propagación causal y espectro definido positivo (PRABHAKARAN Y OTROS 1974). Resultados análogos se han encontrado para acoplamientos a un campo escalar y uno espinorial (PRABHAKARAN Y OTROS 1975) y al campo gravitatorio (PRABHAKARAN Y OTROS 1977). Obsérvese que el primero es el tipo de acoplamientos que nos interesa para modelar el acoplamiento de una resonancia  $\Delta$  con un pión y un nucleón.

Sobre el punto de la causalidad versus la “cuantizabilidad” de la teoría de Bhabha-Gupta ha habido cierta confusión en décadas posteriores. JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) tratan la cuantización del campo de Bhabha-Gupta acoplado minimalmente al campo electromagnético, encontrando el mismo tipo de inconvenientes que para el caso RS (existencia de estados de norma negativa). Sin embargo, NAGPAL (1973) afirma que el campo de Bhabha-Gupta se propaga causalmente y su cuantización da lugar a anticommutadores idénticos a los de la teoría libre, puesto que según ellos no hay restricciones secundarias, y por lo tanto se puede cuantizar la teoría por el procedimiento de Takahashi y Umezawa. Sin embargo, y que pese a que empieza hablando de la teoría de Bhabha-Gupta, sobre la teoría que realmente termina trabajando es con la de Bhabha anterior, que ya se sabe que es de espectro indefinido. Por lo tanto, ya los anticommutadores libres son inconsistentes. La teoría de Bhabha-Gupta tiene, por lo tanto, problemas análogos a los de RS, pero con el agregado atractivo de que se “desacoplan” el problema de la causalidad y el de la cuantización.

#### 4.4. Las ecuaciones de Glass, Hurley y Fisk-Tait (años 70)

Durante los años '60, cuando la necesidad de construir teorías de *spin* arbitrario era acuciante por la proliferación de partículas hadrónicas en aceleradores, parecía claro que construir una teoría cuántica consistente era una tarea poco menos que imposible. A los problemas ya tratados de acausalidad y probabilidades negativas se agregaba el hecho de que todas las teorías de *spin* superior parecían inevitablemente no-renormalizables. El resultado de la propagación acausal reportado al final de la década (y tratado ya en 3.3.4) por VELO Y ZWANZIGER (1969) provocó un fuerte impacto. Resultaba sorprendente que de un formalismo covariante surgiera ya a nivel clásico una violación tan flagrante de la covariancia.

A nivel del formalismo RS, pronto empezó a quedar claro que las dificultades ligadas a la aparición de normas negativas en el nivel cuántico y la violación de la invariancia relativista a nivel clásico estaban íntimamente conectadas. Una falla a un nivel tan básico resultaba (y aún resulta) sorprendente, porque se partía de Lagrangianos explícitamente covariantes. Se pensó entonces que un campo clásico que resultara en una propagación

covariante daría lugar a una cuantización consistente, y proliferaron propuestas de ecuaciones de movimiento alternativas. En un caso se trató de una continuación del trabajo de Harish-Chandra, mientras que en otros fueron “redescubrimientos” de los desarrollos previos.

GLASS (1971) propuso unas ecuaciones de movimiento dentro del mismo "espacio" que Bhabha-Gupta (5 cuadriespinores, o sea 20 componentes) pero de modo que el campo libre describe solamente un campo de *spin* 3/2 puro. La intención original era construir un álgebra en el formalismo de Harish-Chandra que describiera *spin* 3/2 pero cuyo polinomio mínimo fuera menor que 4, constituyéndose como contraejemplo a la conjetura de que dicho polinomio era como mínimo  $2S + 1$  siendo  $S$  el *spin* máximo del multiplete (la ecuación de Glass tiene polinomio mínimo de orden 3). Por un tiempo se consideró este formalismo como una alternativa promisorio, pero los inconvenientes con esta propuesta resultaron aún más severos que con el campo RS (MATHEUS Y OTROS 1979), ya que cuando se introducen interacciones electromagnéticas minimalmente los grados de libertad propagados cuando los campos no son nulos es mayor que en el caso libre.

Un caso interesante es el de la llamada Ecuación de HURLEY (1971), quien elaboró una ecuación de primer orden sin noticias de los trabajos de Bhabha y Harish-Chandra. En un artículo posterior HURLEY (1972) habló de “redescubrimiento”. Hurley buscó ecuaciones que describieran masa única, *spin* único y que fueran invariantes ante el grupo de Lorentz restringido (esta limitación de la paridad es lo que lo distingue de Harish-Chandra, y lo que provocó las mayores dificultades a la teoría). Partía de generalizar las expresiones galileanas para *spin* arbitrario a cualquier marco de Lorentz. Así se halló una familia de ecuaciones relativamente simples de *spin* arbitrario (dos para cada *spin*) y que se propagan causalmente al acoplarlas minimalmente a un campo electromagnético. Pero apareció un inconveniente: al pedir que la ecuación fuese su propio conjugado, solo sobrevivieron las ecuaciones para *spin* 1/2, 0, y 1, correspondientes como es de esperarse a los formalismos de Dirac y de Duffin-Kemmer y Petiau (HURLEY Y SUDARSHAN 1994). Más aún, para *spin* mayor no existía matriz  $\eta$  tal que  $\eta\alpha_0 = \alpha_0^\dagger\eta$ , lo cual hace imposible definir paridad y construir Lagrangianos del modo usual (HURLEY 1972). Una primer solución es duplicar los grados de libertad y tomar las dos familias de soluciones, pero entonces la teoría da lugar a partículas sin paridad definida y espectro no definido positivo (HURLEY 1972). Pero lo más curioso de esta teoría es que HURLEY (1972, 1974) proveyó una solución a todos esos problemas, que en apariencia nadie ha usado para construir acoplamientos consistentes pero tampoco rebatido. Según el autor, basta con construir una forma bilineal distinta a la usual para definir un producto escalar definido positivo, lo que permite definir paridad como un operador antilineal y lagrangiano libre, y todo de modo que la teoría clásica se propague causalmente cuando se acopla minimalmente a un campo electromagnético. El propio autor reconoce como una tarea pendiente la construcción de interacciones a nivel cuántico. La existencia de esta teoría sugiere que, efectivamente, una teoría de campos de *spin* 3/2 consistente puede construirse, y que la conexión entre los problemas de causalidad y de cuantización son en realidad peculiaridades del formalismo RS.

Dos años después del primer paper de Hurley, FISK Y TAIT (1973), aparentemente sin conocerlo, propusieron otra función de onda para describir las partículas de *spin* 3/2, reconociendo que no se trataba de una alternativa viable al formalismo RS (la densidad

Lagrangiana no es hermítica, a menos que se consideren grados de libertad duplicados, similarmente a lo que ocurría con la ecuación de Hurley) pero que resultaba atractiva porque, una vez más, se trataba de un modelo que se propagaba causalmente. KHALIL Y SEETHARAMAN (1978) demostraron que la ecuación de Fisk y Tait es equivalente a la duplicada de Hurley, con idénticas desventajas e inconvenientes.

## 4.5. Más allá de la teoría de campos

A pesar de los éxitos rotundos de la teoría de campos, a lo largo de toda su historia han cobrado fuerza propuestas de que la superación de las dificultades que iban surgiendo (muchas de las cuales terminaron resolviéndose en su seno) se resolverían yendo más allá de ella. Como ejemplos de estas posturas a lo largo del siglo XX puede verse, por ejemplo, el prólogo y el capítulo 1 de WEINBERG (1996), el trabajo histórico sobre Schwinger de MILTON (1995) o el capítulo 1 de la introducción a la Teoría de Cuerdas por GREEN Y OTROS (1987). También hoy existe una expectativa en muchos físicos teóricos de que las teorías cuánticas de campo correspondan a aproximaciones de (relativamente) baja energía de una teoría que abarque grados de libertad más fundamentales (WEINBERG 1996, p 499, último párrafo).

Más allá de estas especulaciones, lo cierto es que algunas de las teorías que trascienden la de campos nos han provisto de modelizaciones de estados masivos de *spin* superior con acoplamientos consistentes. En las teorías de cuerdas, por ejemplo, existe una torre sin cota de *spin*. En estas teorías nada distingue particularmente los estados de *spin* menor o igual a 1, excepto la existencia de algunas simetrías que les permiten, a veces, ser no masivos. Esto apoya la idea de que deberían poder construirse teorías de campo de *spin* superior, y que más que un problema de principios se trata de un problema técnico complejo.

Algunos autores han buscado construir explícitamente tales teorías a partir de lo que se sabe de la teoría de cuerdas. Por ejemplo, para campos cargados de *spin* 2 existe una acción que da lugar a propagación causal proponiendo un acoplamiento no minimal, construida como una teoría efectiva a partir del espectro de la cuerda bosónica (NAPPI Y WITTEN (1989)). En cuanto a *spin* 3/2, PORRATTI Y RAHMAN (2009) usaron esta misma estrategia, hallando un acoplamiento no minimal que al menos en campos magnéticos constantes se propaga causalmente.

## 4.6. Las propuestas de Kirchbach, Napsuciale y Ahluwalia

Una serie de artículos relativamente recientes refleja una serie de esfuerzos por resolver el problema de los acoplamientos de *spin* 3/2 mediante alternativas al formalismo RS. En una primera lectura es difícil descubrir que se trata de dos propuestas bastante diferentes. El punto de partida es un supuesto error en la construcción de las representaciones de *spin* 3/2 que ocurre al malinterpretar el espíritu de las representaciones inducidas.

En la primer serie de papers (KIRCHBACH Y AHLUWALIA 2001, 2002; AHLUWALIA

Y KIRCHBACH 2001) se argumenta que el problema de VELO Y SWANZIGER (1969) ocurre ya a nivel clásico porque las condiciones subsidiarias  $p_\mu \Psi^\mu = 0$  y  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  no serían covariantes, cosa que demuestran imponiéndolas como identidades sobre el espacio de soluciones a  $(\not{p} - m)\Psi^\mu = 0$ , de lo que resultan “relaciones de dispersión anómalas”. Esta argumentación es incorrecta precisamente porque se trata de condiciones, no de identidades. Precisamente las componentes que dan lugar a las relaciones que violan causalidad son las que resultan eliminadas por las condiciones subsidiarias. La propuesta es por lo tanto no imponer las condiciones y dar lugar a una teoría multispin. Por supuesto, como ya hemos visto a propósito del formalismo de Bhabha, aparece entonces un problema con el signo de las normas de los estados al cuantizar la teoría.

La segunda serie de papers (NAPSUCIALE Y KIRCHBACH 2003, NAPSUCIALE Y OTROS 2006) plantea corregir los problemas en la construcción de las representaciones recurriendo al método de Wigner para, partiendo de los estados de *spin* 3/2 en el sistema en reposo y mediante *boosts*, construir todos los estados en función del cuadrimomento. Al hacerlo llega a una ecuación de segundo orden, reminiscente a la de partículas vectoriales. Cuando uno resuelve esas ecuaciones para  $\vec{p} = 0$  lo que uno encuentra es una duplicación de grados de libertad respecto del formalismo RS: las correspondientes a  $(\not{p} - m)\Psi^\mu = 0$  y a  $(\not{p} + m)\Psi^\mu = 0$ . Si se quiere mantener ambas soluciones en una teoría causal con energía positiva, estas dos soluciones deberán corresponder a estados con paridades diferentes (WEINBERG 1996, sección 5.5). La teoría propuesta corresponde a la suma directa de dos RS con paridades opuestas, dando lugar a problemas análogos a los de la teoría de Fisk-Tait o la de Hurley con duplicación de grados de libertad. En particular se trata de un formalismo inadecuado para describir hadrones, porque la interacción fuerte conserva paridad.

## 4.7. Interacciones “dinámicas”

Hay una propuesta bastante reciente (SAAR Y OTROS, 2011A, 2011B) que se basa fuertemente en la construcción de Wigner para construir interacciones electromagnéticas consistentes a nivel clásico. La idea de la propuesta es poner en términos modernos la vieja propuesta de Weyl de geometrizar la simetría de gauge, poniéndola en pie de igualdad con la invariancia de Poincare. Para eso propone generadores de rotaciones y *boosts* dependientes del campo electromagnético (clásico), que cumplan con el álgebra de Lorentz-Poincare y que sean invariantes de gauge. Para campo nulo esos generadores se reducen a los habituales, y se recupera el caso RS libre.

La propuesta es innovadora y osada. Al igual que la propuesta de Hurley para solucionar los problemas de su ecuación sin duplicación de grados de libertad, es difícil decidir si se trata de una solución al problema de fondo. Hay dos dificultades evidentes si lo que deseamos es emplear el formalismo en física hadrónica. El primero es que este formalismo tan elegante no es transportable a otras interacciones como el acoplamiento a un escalar y un espinor, al no contar con una simetría como la de gauge. La otra, tal vez más seria y reconocida por los propios autores, es que se trata de un formalismo sin correlato con una cuantización en el sentido usual. Uno se pregunta si se necesita tanta sofisticación para resolver el problema, teniendo en cuenta alternativas mucho más simples como la de



Porratti y Rahman (2009), y que la causalidad se logra en otros modelos alternativos a RS de un modo incluso más simple.

## 4.8. La propuesta de Habertzettl

Queremos rescatar una propuesta que ha tenido escasa repercusión. HABERZETTL (1998) propuso trabajar en el formalismo RS, pero en el límite  $A = -\frac{1}{2}$ . El tratamiento es estrictamente clásico. Como resultado se llega a unas conclusiones bastante inusuales: aparte de describir una partícula de *spin* 3/2 y masa  $m$ , este campo describe una partícula de *spin* 1/2 y masa  $2m$ . Veremos más adelante que esta descripción es en esencia correcta, pero el modelo tiene severos problemas al cuantizarlo, como es habitual en los casos multispin.

Uno puede esgrimir varias razones para explorar esta posibilidad. HABERZETTL (1998) explicita dos: por un lado, el proyector que elimina el *spin* 1/2 involucrado en las transformaciones de contacto es local (no tiene inversas en espacio de cuadrimomentos). Por otro, para ese valor de  $A$  no hay libertad “off-shell”: si expresamos  $R$  como  $R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \eta(A, z)\gamma^\mu\gamma^\nu$ , donde  $z$  es el parámetro “off-shell” con contenido físico, para  $A = -\frac{1}{2}$   $\eta$  se independiza de  $z$ . Esto se ilustra en la figura 4.1, cuya inspección hace sospechar que algo interesante y por fuera del formalismo RS ocurre para el valor singular de  $A$ . Adelantando el contenido del capítulo 8 diremos que otra excelente razón para considerar  $A = -\frac{1}{2}$  es que entonces la invariancia de contacto resulta implementada al nivel de la acción, lo cual (dado que la invariancia de contacto es fundamental en RS para obtener la representación de *spin* 3/2, y por lo tanto debería considerarse parte de la implementación de la covariancia) permite garantizar interacciones que respeten la simetría de Lorentz. De hecho, veremos que este campo se propaga causalmente en presencia de campos de fondo.

Señalemos dos inexactitudes del artículo de HABERZETTL (1998). No es cierto que, como afirma el autor, uno pueda decidir que el sector  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  sea eliminado o bien por la condición  $\gamma_\mu\Psi^\mu = 0$  o bien por  $p_\mu\Psi^\mu = 0$ . La primer condición es la que elimina  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ , mientras que la segunda elimina el *spin* 1/2 (en el sentido de Wigner) en la representación  $(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$ . El otro error es que en el caso  $A = -\frac{1}{2}$  la condición  $p_\mu\Psi^\mu = 0$  se pueda derivar de  $\gamma_\mu\Psi^\mu = 0$  como en el caso  $A \neq -\frac{1}{2}$ . Por el contrario, mostraremos en el capítulo 8 que la presencia de *spin* 1/2 con masa  $2m$  puede verse ya al nivel de las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, el propagador que reporta HABERZETTL (1998) es correcto; en el capítulo 8 lo reobtendremos a partir de una cuantización covariante.

El inconveniente de esta teoría, como mostraremos en el capítulo 8, es que aparecen estados de norma negativa en la cuantización, esencialmente debido a los estados de *spin* 1/2 que HABERZETTL (1998) propone tratar como físicos. La situación es análoga a lo que ocurre en el formalismo de Stueckelberg antes de acoplar el escalar auxiliar. Lo que analizaremos en el capítulo 8 es la posibilidad de resolver el problema de un modo similar, acoplando un espinor de manera adecuada. Eso resultará equivalente a considerar el caso  $A \neq -\frac{1}{2}$  para el formalismo de Bhabha-Gupta.

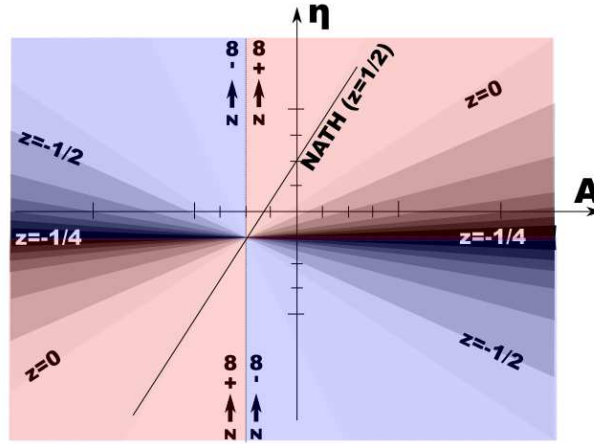


Figura 4.1: Clases de equivalencia de parámetros off-shell para RS.

## 4.9. En síntesis

Hemos visto en este capítulo que existe un gran número de alternativas para describir *spin* superior, y en particular *spin* 3/2. Se han explorado algunas posibilidades, pero existen en principio infinitas, y la búsqueda “por fuerza bruta” al estilo de Harish-Chandra de teorías consistentes parece destinado al fracaso. Más aún, transcurridos más de sesenta años no existe un catálogo completo de álgebras sino una colección de conjeturas, condiciones suficientes y contraejemplos. En un artículo tan tardío como el de Cox (1976) se afirma, tras obtener propiedades de las álgebras  $\alpha$  que garantizan propagación causal, que es difícil saber si una representación no trivial de esas álgebras para *spin* superior existe o no.

Por lo pronto se ve que, así como en el formalismo RS parece que los problemas de causalidad, positividad y modos de frecuencia compleja están íntimamente ligados por ocurrir todos para el mismo umbral de campo magnético y como consecuencia de las restricciones, en teorías alternativas esa correlación se rompe. Por ejemplo, en el formalismo multispin de Bhabha las teorías siempre se propagan causalmente y siempre tienen problemas de positividad, para la teoría de Bhabha-Gupta existe todo un rango de valores para los parámetros en que la teoría es definida positiva y ciertos valores para los que la teoría se propaga causalmente, pero en la zona donde estos dan lugar a indefinición del signo de la norma, mientras que en la teoría de Huxley hay tanto propagación causal como positividad de norma, pero aparecen otros problemas (o se duplican los grados de libertad dando lugar a una teoría sin paridad definida o se modifica el producto escalar de un modo en que no es clara la teoría cuántica con interacciones). Con estos ejemplos a la mano y la “confesión” de Cox citada arriba es fácil conjeturar que el hallazgo de una teoría consistente es cuestión de tiempo, paciencia, suerte o el hallazgo de algún principio complementario que guíe la búsqueda, pero no una imposibilidad intrínseca del tratamiento de campos de *spin* superior en el contexto de las teorías cuánticas de campo.

El “misterio del *spin* alto” acaso resida en lo abruptamente que escala la dificultad de tratamiento a medida que aumenta el *spin*, comenzando por una teoría escalar aburrida

---

de tan trivial, pasando primero por un formalismo de *spin*  $1/2$  que es algebraicamente interesante y luego por el *spin*  $1$ , que ya requiere tratamientos sofisticados para sacarse de encima los “fantasmas”, como la invariancia BRST o el acoplamiento a un escalar planteado por Stückelberg, para desembocar finalmente en la aguja en un pajar que es la búsqueda de teorías consistentes para *spins* a partir de  $3/2$ .



# Capítulo 5

## Teorías Cuánticas de Campos con restricciones

Virtualmente todas las teorías de campos con interés fenomenológico presentan grados de libertad superfluos debido a la necesidad técnica de implementar las diversas simetrías de los sistemas. Esto obliga a formular la teoría con restricciones. Aquí nos referimos a lo que en la literatura en inglés aparece como “constraints”, término que con frecuencia es traducido como “vínculos”, sobre todo en textos de mecánica, dado que allí las restricciones en los grados de libertad se debe principalmente a vínculos mecánicos entre partículas. En teoría de campos no hay “vínculos”, las restricciones aparecen debido a la necesidad de eliminar la redundancia de variables introducida por la formulación Lagrangiana, necesaria para implementar las simetrías, y quedarnos con los grados de libertad realmente dinámicos que necesitamos en la formulación Hamiltoniana.

Las teorías de campos de *spin* alto presentan aspectos problemáticos aún a nivel clásico: acoplados con campos electromagnéticos presentan, típicamente, espectros no físicos y soluciones acausales. El origen de esos problemas ha sido históricamente identificado con la existencia de restricciones. En este capítulo expondremos los rudimentos de los formalismos necesarios para dar tratamiento a las restricciones que ocurren en los campos relativistas de *spin*  $3/2$ .

### 5.1. Restricciones

La forma típica de imponer una restricción es requerir que  $N$  funciones  $\Omega_i$  de los campos y sus momentos canónicos conjugados se anulen. En el caso de una teoría de campos especificada mediante una densidad Lagrangiana, un subconjunto de tales funciones se obtiene directamente de las ecuaciones de movimiento como un subconjunto de ellas en las que no aparezcan derivadas temporales. Estas son las llamadas “restricciones primarias”. Las demás restricciones (llamadas “secundarias”) se obtienen de la condición de que cada restricción obtenida se preserve en el tiempo. Una vez obtenida la colección completa de restricciones, su origen como “primaria” o “secundaria” es irrelevante. En cambio, sí es crucial la clasificación de las restricciones en “primera clase” o “segunda clase” (como veremos a continuación), que determina si los grados de libertad superfluos se expresan

unívocamente en función de los grados de libertad independientes o si, por el contrario, hay un grado de arbitrariedad en los primeros. Esto último es típico en las invariancias de medida, que al igual que en el caso de *spin* 1, ocurre cuando la masa del campo es nula. Veremos más adelante que este tipo de restricciones aparece también cuando  $A = -\frac{1}{2}$ . Para la teoría RS masiva las restricciones son de segunda clase.

Se dice que una colección de restricciones  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  es de segunda clase si la matriz dada por los corchetes de Poisson entre todas las restricciones,  $M_{ij} = \{\Omega_i, \Omega_j\}_P |_{\Omega_i=0}$ , es invertible. Para entender por qué este caso es especial, consideremos el Hamiltoniano “total”  $H_T = H_0 + \lambda_i \Omega_i$ , donde  $H_0$  es el Hamiltoniano canónico obtenido a partir del Lagrangiano y  $\lambda_i$  son multiplicadores de Lagrange. La condición de que las restricciones se preserven en el tiempo será entonces:

$$0 = \dot{\Omega}_i = \{H_T, \Omega_i\} = \{H_0, \Omega_i\} + \lambda_j M_{ji} \quad (5.1)$$

Por lo tanto, si la matriz  $M_{ij}$  es invertible, la condición de que los constraints se preserven en el tiempo determinan completamente los  $\lambda_i$ . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de todos los campos (físicos y superfluos) que respetan las restricciones (que se obtienen usando el Lagrangiano “total”) resultan unívocas.

Cuando la matriz  $M_{ij}$  es singular, se dice que el sistema contiene restricciones de primera clase. Mediante una transformación lineal puede separarse un conjunto máximo de restricciones  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  con corchetes nulos, de modo que  $\Omega_{M+1}, \dots, \Omega_N$  son de segunda clase. El tratamiento de las restricciones de primera clase implica “fijar la medida”, es decir, eliminar la ambigüedad en los grados de libertad redundantes, típicamente agregando un término de “fijación de medida” en el Lagrangiano que haga que todas las restricciones sean de segunda clase sin afectar el sector físico.

## 5.2. Origen de las restricciones: Lagrange vs Hamilton

Uno podría preguntarse cuál es la necesidad de lidiar con las restricciones. ¿Por qué no partir directamente de un Hamiltoniano en términos de los grados de libertad físicos únicamente? Después de todo, esta es la manera de garantizar que la teoría cuántica correspondiente es unitaria (nunca aparecerán los estados de norma negativa que plagan las teorías de *spin* superior y otras). La respuesta es que, así como el formalismo Hamiltoniano es nuestra única garantía de que la teoría que obtendremos es unitaria, el formalismo Lagrangiano es la única forma que conocemos de implementar consistentemente las simetrías. Entre ellas, la covariancia. Por ejemplo, en el capítulo 5 de WEINBERG (1996) se muestra que para campos de *spin* mayor o igual a 1 los Hamiltonianos de interacción no pueden ser invariantes porque la parte off-shell de los propagadores de esos campos no es covariante fuera de capa de masa, y en el capítulo 7 de la misma obra esto es citado como motivación para partir del formalismo Lagrangiano.

Notemos de nuevo que, como señalamos en el capítulo 3, la teoría RS no implementa la invariancia de Lorentz al nivel de la acción. Sin embargo esto no parece haber sido notado con anterioridad. Aún más, veremos que al intentar resolver esta cuestión nos enfrentaremos con más restricciones (de primera clase en este caso), de modo que si

queremos formular teorías de *spin* superior que sean covariantes no podemos rehuir el tratamiento matemático de las restricciones.

### 5.3. Restricciones y cuantización

Si se parte de un Lagrangiano, entonces se especifica una teoría clásica (o pseudoclásica en el caso fermiónico, como veremos). Se necesita entonces una regla para obtener a partir de esta una teoría cuántica. En el formalismo canónico esto se hace asignando al (anti)commutador entre dos operadores el corchete de Poisson entre las correspondientes variables (pseudo)clásicas multiplicado por  $i\hbar$ .

Pero, como señalara DIRAC (1964), las restricciones suelen ser incompatibles con el álgebra de Poisson de la teoría clásica. Por lo tanto, un esquema de cuantización razonable requiere redefinir los corchetes clásicos antes de aplicar la receta antedicha. El propio DIRAC (1964) ofrece un algoritmo para hacerlo, que expondremos brevemente más adelante. Se han propuesto otros esquemas equivalentes, notablemente el simpléctico, que también repasaremos por su particular simplicidad para el caso fermiónico.

Repasando la literatura sobre *spin* alto, resulta llamativo que se hable de cuantización de una determinada interacción, porque habitualmente se cuantiza la teoría libre (hallando, por ejemplo, el propagador) y luego cada interacción representa procesos de creación y aniquilación de los estados libres. Es una particularidad del *spin* superior que en presencia de campos de fondo (valores de expectación no nulos), situación que no admite una perturbación alrededor del vacío, los corchetes de Dirac dependen de la interacción. Esto está en la raíz de los problemas para hallar teorías interactuantes consistentes, como notaron por primera vez JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) y confirmaron luego numerosas investigaciones, que reseñaremos en el próximo capítulo.

### 5.4. Corchetes de Poisson

Todo tratamiento de restricciones parte de una teoría canónica clásica. Esto es, a partir de un Lagrangiano  $\mathcal{L}$  en función de coordenadas  $\phi_i$  y sus derivadas temporales, se definen los momentos canónicos conjugados como:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \quad (5.2)$$

y entonces obtener el Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L} \quad (5.3)$$

entendido este como una función de  $\phi_i$  y  $\pi_i$ . Para esto, debe ser posible poner los  $\dot{\phi}_i$  en términos de  $\pi_i$  y  $\phi_i$ , en cuyo caso diremos que el Lagrangiano es “regular”. Si fuese irregular, entonces estamos ante la presencia de restricciones.

Sea el Lagrangiano regular o irregular, siempre puede definirse un “corchete de Poisson” (DIRAC 1964) de esta manera:

$$\{A, B\}_P = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial \phi_i} \frac{\partial B}{\partial \pi_i} - \frac{\partial B}{\partial \phi_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \right) \quad (5.4)$$

Obsérvese que este corchete obedece un álgebra idéntica a la de los conmutadores de operadores: es antisimétrica y cumple con la identidad de Jacobi. También es una derivación:  $\{A, BC\}_P = \{A, B\}_P C + B\{A, C\}_P$ . Por eso tiene pleno sentido la regla de cuantización (si es que el Lagrangiano es regular)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hbar\{A, B\}_P \quad (5.5)$$

Los corchetes de Poisson siempre tienen la propiedad:

$$\{\phi_i, \pi_j\}_P = \delta_{ij} \quad (5.6)$$

lo que suele usarse como definición alternativa del corchete, en lugar de 5.4. También permiten expresar las ecuaciones de movimiento en forma algebraica:

$$\dot{A} = \{A, H\}_P \quad (5.7)$$

(para esto, basta con expresar  $\dot{A} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial \phi_i} \dot{\phi}_i + \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i \right)$  y usar las ecuaciones canónicas de movimiento).

Pero si el Lagrangiano es irregular 5.7 es incompatible con las restricciones, como puede verse con un ejemplo: supongamos que una restricción es  $p = 0$ . Eso es incompatible con  $\{p, q\} = 1$ . Se necesita entonces redefinir el corchete canónico de modo de hacerlo compatible con las restricciones. Supongamos que  $\{, \}_*$  es tal corchete; la regla de cuantización será entonces

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}_* \quad (5.8)$$

## 5.5. Restricciones de primera clase: fijación de la medida

Como hemos visto, si las restricciones  $\Omega_i$  son de primera clase, los multiplicadores de Lagrange con que estas restricciones entran en el Hamiltoniano no pueden fijarse. Por lo tanto nada se pierde fijándolas en cero. De hecho, las restricciones de primera clase generan simetrías del Hamiltoniano, porque por ser restricción tiene corchete cero con el Hamiltoniano (luego de impuestas las restricciones) y porque, al conmutar entre sí las  $\Omega_i$ , si  $A$  satisface las restricciones entonces  $A + \delta A$ , con

$$\delta A = \sum_{i=1}^M \epsilon_i \{\Omega_i, A\}_P \quad (5.9)$$

también las satisface. En particular, los campos  $\phi$  tendrán una “libertad”  $\delta\phi = \sum_i \{\Omega_i, \phi\}$ .



En principio, el tratamiento de las restricciones de primera clase es muy sencillo. Basta con elegir una “medida” (es decir, poner sobre los grados de libertad una condición que elimine toda arbitrariedad en los grados de libertad) y cuantizar canónicamente usando los grados de libertad sobrevivientes. Esto es lo que se hace, por ejemplo, en la cuantización “de Coulomb” del campo electromagnético: se fija la condición  $\nabla \vec{A} = 0$ , y entonces los grados de libertad son los campos eléctrico y magnético. El problema con este tipo de aproximación es que con frecuencia se pierde la invariancia manifiesta de Lorentz (la condición  $\nabla \vec{A} = 0$  es invariante ante rotaciones espaciales, pero no ante *boosts*).

Existe un modo elemental (aunque algo trabajoso) de cuantizar una teoría con invariancias de primera clase de modo que sea manifiestamente covariante, conocida como formalismo de Gupta-Bleuler (ITZYKSON Y ZUBER 1980, página 127). Este es el procedimiento que usaremos en esta tesis cuando enfrentemos invariancias de primera clase en el capítulo 8. El método consiste en agregar al Lagrangiano un “término de fijación de medida” que sea covariante pero no invariante de medida, de modo que la restricción deja de existir (o sea, el o los grados de libertad redundantes pasan a ser grados de libertad físicos). Típicamente, la teoría así obtenida es inconsistente por la aparición de estados de norma negativa. La teoría original se obtiene imponiendo la condición de medida sobre los estados. En el caso electromagnético, una medida covariante es por ejemplo  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . El término de fijación de medida es  $\xi(\partial_\mu A^\mu)^2$ ; si  $\xi \neq 0$  la teoría no tiene restricciones y todos los  $A^\mu$  son dinámicos. Finalmente, los estados físicos  $|fis\rangle$  son los que cumplen la condición  $\langle fis|\partial_\mu A^\mu|fis\rangle = 0$ , que es la implementación al nivel del espacio de estados de la condición de medida  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

## 5.6. Restricciones de segunda clase

Una vez tratadas las restricciones de primera clase, de haberlas, debe darse tratamiento a las restricciones de segunda clase, que son en principio más complejas. La forma más directa de atacar estas restricciones es hallar explícitamente la dependencia funcional de los grados de libertad dependientes en términos de variables canónicas independientes. En este caso lo que se hace es hacer una cuantización canónica sobre estas. Pero, al igual que lo que ocurre con las restricciones de primera clase, esto puede conducir a una ruptura de la covariancia manifiesta. O, simplemente, puede ser prohibitivamente complejo algebraicamente. O ambas. Los métodos que describimos a continuación tratan la dependencia en forma implícita, introduciendo las restricciones como multiplicadores de Lagrange.

### 5.6.1. Algoritmo de Dirac

DIRAC (1964) estableció un algoritmo que permite hallar un corchete  $\{ , \}_*$  consistente con las restricciones de segunda clase de modo sistemático. Puede aplicarse a cualquier subconjunto de restricciones (se obtendrá entonces un corchete “intermedio” que podrá usarse como corchete base con otro conjunto de restricciones), lo cual a veces simplifica notoriamente los cálculos. Así se ha hecho históricamente para el campo RS. El precio que se paga por tener un método de aplicación universal es que con frecuencia no es el

más eficaz, y lleva a sistemas algebraicos artificialmente complejos.

En primer término deben organizarse los corchetes de las restricciones en forma de matriz, como se hizo en la sección 5.1

$$M_{ij} = \{\Omega_i, \Omega_j\}_* \quad (5.10)$$

y se halla la matriz inversa  $M^{-1}$ , en el sentido de que  $(M^{-1})_{ik}M_{kj} = \delta_{i,j}$ . La matriz  $M$  siempre tiene inversa si el sistema de restricciones es de segunda clase, como se demuestra en DIRAC (1964). Entonces podemos definir

$$\{A, B\}_* = \{A, B\}_P - \sum_{i,j} \{A, \Omega_i\}_P (M^{-1})_{ij} \{\Omega_j, B\}_P \quad (5.11)$$

que se reduce a  $\{, \}_P$  si todas las  $\Omega_i$  tienen corchete nulo con  $A$  o con  $B$ . Obsérvese que  $\{\Omega_i, \Omega_j\}_* = 0$ , de modo que respecto del nuevo corchete las restricciones son de primera clase, y para implementarlas basta con restringir los grados de libertad a la subvariedad  $\Omega_i = 0$ .

El corchete  $\{, \}_*$  tiene las mismas propiedades que el de Poisson que lo hacen compatible con los anticommutadores cuánticos: es antisimétrico, es una derivación y satisface la identidad de Jacobi. Para comprender por qué este corchete (más allá de las motivaciones heurísticas que da DIRAC 1964) funciona como una restricción del corchete de Poisson a los grados de libertad independientes, observemos que existe un teorema (véase WEINBERG 1996, sección 7.6) que establece que existe una transformación canónica que conduce a las variables  $Q_1, \dots, Q_S, q_{S+1}, \dots, q_N, P_1, \dots, P_S, p_{S+1}, \dots, p_N$  tales que las restricciones se reducen a  $q_i = p_i = 0$ , y entonces se verifica que

$$\{P_i, Q_j\}_P = \delta_{i,j} \quad (5.12)$$

y todos los corchetes restantes nulos.

## 5.7. Formalismo simpléctico

Como mencionamos, el algoritmo de Dirac conduce a una gran cantidad de cálculos que no siempre son necesarios. Un método particularmente económico puede aplicarse cuando el Lagrangiano es lineal en las derivadas de las coordenadas respecto del tiempo, y es el llamado “formalismo simpléctico”. Nos concentraremos en el modo de tratar las restricciones, sin profundizar en las interpretaciones formales que este enfoque permite. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, FADDEEV Y JACKIW (1988), BARCELOS-NETO Y WOTZASEK 1992. Todos los sistemas Lagrangianos admiten una reformulación en la que el Lagrangiano es lineal en las derivadas temporales de las coordenadas, pero en el caso de los campos espinoriales ni siquiera se necesita una reformulación (el Lagrangiano RS es lineal en todas las derivadas), de modo que este enfoque resulta particularmente apropiado a nuestros fines.

Un ejemplo de por qué los Lagrangianos lineales pueden llevar a restricciones redundantes es el Lagrangiano de Dirac: en principio el momento canónico conjugado de  $\bar{\psi}$  es nulo, por lo que debería introducirse un corchete de Dirac. El procedimiento habitual es

identificar  $\bar{\psi}$  como el momento canónico conjugado de  $\psi$ , de modo que en algún sentido este no es realmente una restricción. Parece razonable entonces imaginar que se puede desarrollar un formalismo para las restricciones en que esta aparente restricción no lo sea en absoluto.

Ciertamente, los casos que nos ocuparán en esta tesis, por ser fermiónicos, no son sistemas canónicos clásicos, de modo que la aplicación de este formalismo no resulta tan directa como puede aparentar. Esto es cierto también respecto del algoritmo de Dirac. Diferimos para el final de este capítulo el tratamiento del caso fermiónico, y continuaremos aquí tratando con sistemas de c-números.

### 5.7.1. Lagrangiano en espacio de fases

Para comprender cómo un sistema Lagrangiano puede aparentar tener más restricciones que las que realmente tiene, consideremos el siguiente Lagrangiano:

$$L = q_2 \dot{q}_1 - \frac{1}{2m}(q_2)^2 - \frac{k}{2}(q_1)^2 \quad (5.13)$$

Veremos que este Lagrangiano corresponde a un oscilador armónico. Si pensamos en  $q_1$  y  $q_2$  como dos coordenadas, llegaremos enseguida a dos restricciones primarias:

$$\Omega_1 = p_1 - q_2 \quad (5.14)$$

$$\Omega_2 = p_2 \quad (5.15)$$

pero si en vez de trabajar en términos de restricciones decidimos hacer directamente la identificación  $q_1 = q$ ,  $q_2 = p$  (es decir, pensamos que se trata de coordenadas en el espacio de fases) vemos de inmediato que 5.13 es simplemente

$$L(p, q) = p\dot{q} - H(p, q) \quad (5.16)$$

donde

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2 \quad (5.17)$$

es el Hamiltoniano del oscilador armónico. De hecho, las ecuaciones Lagrangianas de movimiento resultan ser las ecuaciones canónicas.

Supongamos entonces que tenemos un Lagrangiano de la forma

$$L(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n f_i(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i - H(q_1, \dots, q_n) \quad (5.18)$$

Podríamos atacar este Lagrangiano con el método de Dirac, lo que nos llevará a plantear una enorme cantidad de restricciones, muchas de las cuales probablemente sean irrelevantes. Parece razonable preguntarse qué ocurre si pensamos en las  $q_i$  como coordenadas generalizadas en espacio de fases. Pero ponerse a “adivinar” artesanalmente cómo es ese espacio puede resultar sumamente tedioso. Nosotros hemos escrito 5.13 de modo que la identificación sea inmediata, pero hay una infinidad de Lagrangianos lineales en  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$

equivalentes a 5.13. Se impone un modo sistemático de estudiar sistemas Lagrangianos en espacios de fase.

Veamos la condición para que las ecuaciones Lagrangianas de movimiento sean consistentes. Diferimos para la próxima subsección la constatación de que estas ecuaciones corresponden a ecuaciones canónicas, interpretando  $H(q_1, \dots, q_n)$  como el Hamiltoniano del sistema (aunque en la bibliografía específica se le llama “potencial simpléctico”). Recordemos las ecuaciones de movimiento en el formalismo de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.19)$$

y apliquémosla al Lagrangiano genérico 5.18.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} f_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (5.21)$$

por lo que las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\sum_k \left( \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (5.22)$$

Definamos la llamada “forma simpléctica”  $\omega$

$$\omega_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \quad (5.23)$$

cuya significación respecto al formalismo canónico se explorará en la subsección siguiente. Su nombre se debe a la caracterización del espacio dado por las coordenadas  $q_1, \dots, q_n$  como un espacio de fases, que desde la perspectiva matemática es una variedad simpléctica. La ecuación de movimiento queda entonces:

$$\sum_k \omega_{ki} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.24)$$

por lo que la condición para tener un sistema con solución unívoca es que  $\omega$  sea invertible. En la subsección que sigue veremos que en ese caso estas ecuaciones son, en efecto, canónicas. Este es el caso regular, en el que consideraremos que no hay restricciones en absoluto. El caso singular lo dejamos para la subsección 5.7.3.

### 5.7.2. Corchetes y cuantización

Veremos a continuación que  $\omega$  tiene básicamente información sobre los corchetes de la teoría. Existe un camino muy elegante de hacerlo usando el lenguaje de las formas diferenciales en variedades, pero eso nos obligaría a introducir una gran cantidad de herramientas abstractas que no se usarán en esta tesis. Preferimos nuestro propio camino, decididamente menos elegante pero muy sencillo y echando mano al algoritmo de Dirac.

Olvidemos por un segundo que pretendemos interpretar  $q_1, \dots, q_n$  como variables de un espacio de fases, y pensémoslas como un espacio de configuraciones altamente restringido. Obtendremos de inmediato las variables canónicas conjugadas  $p_i = f_i$ , y por lo tanto el conjunto de restricciones  $\Omega_i = p_i - f_i$ . El álgebra de restricciones será entonces

$$\begin{aligned}\{\Omega_i, \Omega_j\}_P &= \{p_i - f_i, p_j - f_j\}_P \\ &= -\{p_i, f_j\} + \{p_j, f_i\}_P \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \\ &= \omega_{ij}\end{aligned}\tag{5.25}$$

Los corchetes en nuestro espacio simpléctico, que notaremos simplemente como  $\{ , \}$ , estarán dados entonces (de acuerdo con el algoritmo de Dirac) como

$$\begin{aligned}\{A, B\} &= -\sum_{k,k'} \{A, \Omega_k\}_P (\omega^{-1})_{kk'} \{\Omega_{k'}, B\}_P \\ &= \sum_{k,k'} \frac{\partial A}{\partial q_k} (\omega^{-1})_{kk'} \frac{\partial B}{\partial q_{k'}}\end{aligned}\tag{5.26}$$

En particular:

$$\{q_i, q_j\} = (\omega^{-1})_{ij}\tag{5.27}$$

reafirmando la necesidad de que  $\omega$  sea invertible. En lo que sigue podemos olvidar cómo llegamos a nuestro corchete y consideraremos 5.27 como la definición del corchete en este formalismo.

Veamos ahora por qué podemos considerar nuestro espacio como un espacio de fases. El corchete de  $H$  con una coordenada será

$$\begin{aligned}\{q_i, H\} &= \sum_{k,k'} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} (\omega^{-1})_{kk'} \frac{\partial H}{\partial q_{k'}} \\ &= \sum_{k'} (\omega^{-1})_{ik'} \frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\end{aligned}\tag{5.28}$$

que de acuerdo con las ecuaciones de movimiento 5.24 se puede reescribir como

$$\{q_i, H\} = \dot{q}_i\tag{5.29}$$

Esto puede generalizarse a cualquier función:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k} \dot{q}_k\tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k} \left( \sum_{k'} (\omega^{-1})_{kk'} \frac{\partial H}{\partial q_{k'}} \right) \\ &= \{A, H\}\end{aligned}\tag{5.31}$$

de modo que  $H$  realmente funciona como en el generador de traslaciones en el tiempo. La interpretación del espacio como de fase es coherente.

Lógicamente entonces, si estamos ante una forma simpléctica  $\omega$  no singular, la cuantización puede hacerse como de costumbre

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{A, B\}\tag{5.32}$$

### 5.7.3. Restricciones en el formalismo simpléctico.

Si  $\omega$  es singular existen restricciones genuinas, como veremos a continuación. Entonces, de acuerdo con 5.27, no se pueden definir corchetes. Lo que se hará será introducir deformaciones en  $\omega$  (ampliando en el proceso el espacio de fases) de modo que el  $\omega$  deformado sea invertible. Obsérvese que no hay unos corchetes fundamentales que se deformen, como era el caso con el algoritmo de Dirac.

Si  $\omega$  no es invertible, entonces existen  $v_1, \dots, v_n$  (siendo  $n$  el número de variables) tales que  $v_i \omega_{ij} = 0$ . Entonces, contrayendo con los  $v_i$  en ambos miembros de las ecuaciones de movimiento obtendremos

$$\begin{aligned}\Omega &= v_i \omega_{ij} \dot{q}_j \\ &= v_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{5.33}$$

Consideraremos que  $\Omega = v_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$  está implementado en el sentido fuerte en  $H$ , pero modificaremos la parte cinética  $f_i \dot{q}_i$  de modo de lograr que  $\Omega$  no cambie en el tiempo. Incorporaremos tantos  $\Omega$  como sea la dimensión del núcleo de  $\omega$ . Observemos que

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i\tag{5.34}$$

podemos incorporar el término  $q_{n+1} \dot{\Omega}$  al Lagrangiano, ahora entendido como función de  $q_1, \dots, q_{n+1}$ . Podríamos haber incorporado  $\dot{q}_{n+1} \Omega$  ya que es equivalente a  $q_{n+1} \dot{\Omega}$  por integración por partes. En cualquier caso, el término contribuye a la parte cinética pues todos sus términos son lineales en la derivada temporal de una coordenada. Con el nuevo Lagrangiano obtendremos una forma  $\omega_*$  deformada, que incluye contribuciones del Hamiltoniano (o sea, que cuando obtengamos un  $\omega_*$  invertible podremos definir el corchete, el cual dependerá de la dinámica y en particular de las interacciones.

Puede ocurrir que existan  $v_i$  tales que  $v_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$  se anule idénticamente. Entonces no hay condición que agregar, el carácter singular de  $\omega$  es irresoluble, y las ecuaciones de movimiento dejan un margen de arbitrariedad. Se trata entonces de una restricción de primera clase, que puede tratarse eligiendo una medida o introduciendo un término de fijado de medida en  $H$ , como ya hemos expuesto en la sección 5.5. También puede ocurrir que  $\omega_*$  sea singular incluso luego de fijada la medida (si es que hiciera falta), en cuyo caso se deberá iterar el procedimiento hasta que  $\omega_*$  sea invertible o hasta que todas las restricciones sean de primera clase. Una vez que esto ha ocurrido, puede definirse el corchete en el espacio de fases ampliado.

## 5.8. Restricciones para campos fermiónicos

Todo lo discutido hasta aquí se ha dado en términos de variables clásicas conmutativas. La regla de cuantización  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}_P$  solo tiene sentido para variables bosónicas, que obviamente no es el caso para el campo RS. La cuantización de campos fermiónicos, inicialmente, se ha hecho por fuera del formalismo canónico por esta misma razón. En los textos tradicionales de teoría cuántica de campos (ver por ejemplo ITZYKSON Y

ZUBER 1980, página 143) se afirma que los campos fermiónicos no tienen límite clásico (como vimos brevemente en 3.1): se parte de un Lagrangiano c-numérico que permite hallar una expansión en modos normales, y luego se muestra que la cuantización canónica da lugar a una teoría inconsistente. Finalmente se muestra que imponiendo reglas de anticommutación esos problemas se solucionan. Está implícito en el procedimiento que basta con la teoría libre para cuantizar.

Este camino no es posible en presencia de restricciones no triviales como la que ocurre en el formalismo RS. La cuantización de la teoría libre puede hacerse con las técnicas estándar de segunda cuantización incorporando proyectores adecuados, pero como las interacciones modifican los proyectores esto es de poco interés para las teorías realmente interesantes. Por otro lado, el tratamiento de las restricciones como hemos venido trabajando requiere de una teoría clásica canónica a ser cuantizada con una regla al estilo de  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}_P$ . Como durante los '70 empezaron a surgir campos fermiónicos con restricciones de interés para los teóricos, como los compañeros supersimétricos de bosones de medida o sectores fermiónicos en cuerdas, apareció la necesidad de construir el límite pseudoclásico (canónico) de las teorías con variables fermiónicas. Ese límite resultó ser el de variables anticommutativas o de Grassman. La vía para mostrarlo ha sido partir de un Lagrangiano dependiente tanto de c-números como de variables de Grassman, construir la teoría canónica de tal sistema, y cuantizarlo siguiendo la regla de igualar los (anti)conmutadores al correspondiente corchete clásico por  $i\hbar$ . Se muestra que la teoría resultante es bosónica para los grados de libertad procedentes de c-números, y fermiónica para los procedentes de variables de Grassman, de lo que se deduce que el límite  $\hbar \rightarrow 0$  es la teoría pseudoclásica de partida (CASALBUONI 1976).

Reseñaremos aquí lo imprescindible para seguir los cálculos expuestos en esta tesis. Para empezar, las variables de Grassman anticommutan ( $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$ ). Definimos una derivada respecto de las variables de Grassman en forma algebraica (no tiene sentido entender tales derivadas como límites de cocientes incrementales como sus contrapartes c-numéricas) como un operador lineal que da 1 si actúa sobre la variable y 0 sobre una función independiente de la variable. La derivada así definida resulta también ser una variable de Grassman. Definamos el operador  $\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)_d$  como la derivada por derecha respecto de  $\theta_1$ :

$$\theta_1 \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)_d = 1 \quad (5.35)$$

Para ver que la derivada anticommuta, veamos que  $\theta_1\theta_2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)_d = -\theta_2\theta_1 \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)_d = -\theta_2$ , por lo que la derivada respecto de  $\theta_1$  anticommuta respecto de  $\theta_2$ . Necesitamos esta derivada para definir el momento canónico conjugado de una variable de Grassman. Así, entenderemos que

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i} = L \left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_i}\right)_d \quad (5.36)$$

Si expresamos  $L$  de modo que  $\dot{\theta}_i$  quede siempre a la derecha los cálculos de momentos canónicos conjugados serán idénticos a los correspondientes a c-números. Obsérvese que si hubiéramos definido la derivada de Grassman por izquierda eso invertiría los signos de

los momentos canónicos conjugados, por lo que el signo de  $L$  que lleva a teorías cuánticas definidas positivas depende de una serie de convenciones.

Con estas definiciones basta para obtener las ecuaciones de movimiento. Para el caso del formalismo de Dirac debemos definir los corchetes fundamentales de Poisson de modo que  $\dot{A} = \{A, H\}_P$  para cualquier función  $A$ , hallándose para  $A$  y  $B$  variables de Grassman (CASALBUONI 1976)

$$\{A, B\}_P = \sum_k \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} + \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \quad (5.37)$$

con el corchete habitual si  $A$ ,  $B$  o ambos fuesen c-números. Para el caso simpléctico (que en el caso fermiónico no resulta simpléctico en absoluto) se define una forma  $\omega$  (GOVAERTS 1990)

$$\omega_{ij} = \frac{f_j}{q_i} + \frac{f_i}{q_j} \quad (5.38)$$

en caso de que  $f_i$  sean funciones de Grassman. Obsérvese que en ambos casos los corchetes que se obtienen son simétricos, lo que es compatible con una regla de cuantización para fermiones.



## Capítulo 6

# Análisis de restricciones del campo RS con interacciones

En este capítulo se trata la inconsistencia de las interacciones de los campos RS con campos de Dirac y pseudoescalares, que en general resultan en la aparición de estados de norma negativa en presencia de campos de fondo. Este resultado ya era conocido para la interacción minimal con campos electromagnéticos (JOHNSON Y SUDARSHAN 1961) y para el acoplamiento más sencillo con un campo de Dirac y un pseudoescalar (HAGEN 1971). Aplicando el formalismo de restricciones de Dirac reproduciremos esos resultados y los extenderemos al caso de la interacción al siguiente orden propuesta por PASCALUTSA (1998), mostrando que como cabe esperar de consideraciones generales, es tan inconsistente como la interacción a primer orden. Estos resultados, junto con los expuestos en el capítulo siguiente, demuestran que no hay ninguna razón para preferir esta interacción a la usual, derivativa solo en el campo escalar, sino más bien al revés. Por lo tanto, no hay fundamento para hablar de interacciones consistentes versus inconsistentes como suele ocurrir en la literatura.

### 6.1. ¿Es consistente la interacción “consistente”?

Como se señaló en el capítulo introductorio, se ha popularizado la visión de que una interacción particular entre un campo RS, un campo de Dirac y un pseudoescalar es “consistente”: una inspirada en ciertos argumentos de supergavedad (el gravitino es descrito por un campo de *spin* 3/2 no masivo), derivativa también en el campo RS además del campo piónico, es decir de segundo orden derivativo, propuesta en PASCALUTSA (1998). En el capítulo próximo discutiremos la trama de malentendidos en torno de esta cuestión. En este capítulo nos concentraremos en la demostración concreta de que esta interacción está afectada por las mismas inconsistencias que las bien conocidas desde JOHNSON Y SUDARSHAN (1961) y HAGEN (1971). En esta primera sección revisaremos los argumentos que se han dado en favor de tal inconsistencia y mostraremos sus fallas. En la sección siguiente aplicaremos el formalismo de Dirac para resolver las restricciones de la teoría y analizaremos la signatura del espacio de Fock resultante de la cuantización en presencia de fondos clásicos del campo pseudoescalar, de donde resultará la inconsistencia.

La interacción en cuestión ha sido planteada inspirándose en la invariancia de medida  $\Psi^\mu \rightarrow \Psi^\mu + \partial^\mu \chi$  (siendo  $\chi$  un espinor arbitrario) del campo RS en el límite de masa cero, y por lo tanto es derivativa en el campo RS. Pero por una simple integración por partes la interacción se puede escribir lineal en el campo RS y por lo tanto tiene la forma general planteada por NATH Y OTROS (1971): se trata simplemente de un término de orden superior. Más aún, siendo la restricción lineal en el campo RS, cae dentro de las consideraciones generales analizadas en AURILIA Y OTROS (1980), por lo que debería tener los mismos problemas de signatura.

La otra fuente de sospecha acerca de la consistencia de la interacción es que se usa pesadamente la invariancia de medida que, como se dijo, solo es válida en el límite de masa cero. Si bien es cierto que se puede definir una invariancia de medida análoga para el caso masivo mediante una lógica análoga a la del campo de Stueckelberg (RUEGG Y RUIZ-ALTABA 2004), hay diferencias cruciales que invalidan la estrategia seguida en PASCALUTSA (1998). Por empezar, el campo de Stueckelberg no es de ningún modo un “parámetro” como se dice en esa publicación, sino un campo dinámico. Y la traslación al caso de *spin* 3/2 no es en modo alguno obvia ni automática: varias aproximaciones se han intentado, cada una con sus propias dificultades (MOHAN 1968, WATANABE Y OTROS 1967). Pero sobre todo el campo de *spin* 1/2 que actúa como parámetro en la transformación (cuyo cuadrigradiante se suma al campo RS) ya no puede ser arbitrario sino que debe obedecer una ecuación de movimiento no trivial. Esto hace que el paso crucial entre las expresiones (45) y (46) en PASCALUTSA (1998), que consiste en integrar funcionalmente sobre el campo de Stueckelberg, sea incorrecto. Se invoca la invariancia de Gauge para absorber el campo de Stueckelberg en una transformación de medida, lo cual no siempre es posible porque estas transformaciones ya no son arbitrarias.

Puede verse que sería extremadamente paradójico que este paso se pudiera dar. Una vez introducido el campo de Stueckelberg  $\xi$ , PASCALUTSA (1998) plantea una integral funcional de la forma

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Psi_\mu \mathcal{D}\Psi_\mu^\dagger \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^\dagger e^{i \int \mathcal{L}_{ST}}$$

donde, si bien en esa referencia no se aclara,  $\mathcal{L}_{ST}$  debe incluir un término cinético para  $\xi$ . Pero si no hubiera introducido ese campo y hubiera procedido igual que para la interacción convencional, hubiera obtenido una expresión análoga a la ecuación (30) de esa referencia:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Psi_\mu \mathcal{D}\Psi_\mu^\dagger \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\phi \det \left( \{ \chi^\dagger(x), \chi(y) \} \delta(x-y) \right) e^{i \int \mathcal{L}_{RS}}$$

donde  $\chi$  es la restricción no trivial. Se ve entonces, comparando ambas formas de  $\mathcal{Z}$ , que el campo  $\xi$  resulta de exponenciar el determinante de las restricciones, análogamente al mecanismo de Faddeev y Popov. Si el campo  $\xi$  se integrara correctamente, debería reobtenerse el determinante en la medida, lo que es lo mismo que reobtener las restricciones. Pero si  $\xi$  se desacoplara como se pretende en PASCALUTSA (1998) obtendríamos una teoría sin restricciones **incluso en el caso libre**, lo que contradice el propio desarrollo previo en esa misma referencia. Se sabe desde hace décadas que esas restricciones son fundamentales para obtener una métrica definida positiva en el espacio de Fock de la teoría libre.

Si deseáramos cuantizar el campo de RS con integrales de camino como lo propone PASCALUTSA (1998) se debería hacer como en el caso de Faddeev y Popov: se deberían obtener reglas de Feynman también para los campos de Stueckelberg, y la invariancia de medida se debería imponer directamente sobre el espacio de Fock. Y el resultado debería ser el mismo que si decidiéramos hacer una cuantización más ortodoxa, como la cuantización canónica luego de aplicar el formalismo de Dirac para las restricciones. Nada garantiza que un método resulte más sencillo que otro. Cualquiera que sea el camino que elijamos, es deseable que podamos tratar en pie de igualdad la interacción “consistente” y la convencional, para poder hacer comparaciones significativas.

## 6.2. Cuantización de Dirac del campo RS

Vamos a emplear el algoritmo de Dirac adaptado al caso fermiónico. Para evitar la complejidad de invertir un sistema que involucra muchas restricciones triviales se seguirá el método empleado en BAAKLINI Y TUIITE (1978) para el caso libre y en HASUMI Y OTROS (1979) para el acoplamiento EM: se definirán corchetes intermedios mediante el algoritmo de Dirac aplicado solo a las restricciones triviales, y luego se emplearán esos corchetes en vez de los de Poisson ante los constraints relevantes.

En primer término expondremos la estructura canónica de las teorías correspondientes a los acoplamientos  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$ . Luego emplearemos el algoritmo de Dirac al caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ , reproduciendo los resultados de HAGEN (1971) (que se obtuvieron por el Principio de Acción). Finalmente aplicaremos el algoritmo de Dirac al caso  $\mathcal{L}_P$ , que es el resultado central de esta tesis.

### 6.2.1. Lagrangianos, momentos y corchetes de Poisson

Recordemos que el Lagrangiano general para el acoplamiento del campo RS con espinores y pseudoescalares puede escribirse como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{RS} + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_I \quad (6.1)$$

donde  $\mathcal{L}_I$  es o bien  $\mathcal{L}_{NEK}$  o  $\mathcal{L}_P$ ,

$$\mathcal{L}_{RS} = \bar{\Psi}^\mu \Lambda_{\mu\nu} \Psi^\nu, \quad \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_\psi)\psi, \quad \mathcal{L}_\phi = 1/2(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi), \quad (6.2)$$

y

$$\Lambda_{\mu\nu} = -(i\not{\partial} - m)g_{\mu\nu} - iA(\partial_\mu \gamma_\nu + \partial_\nu \gamma_\mu) - iB(A)\gamma_\mu \not{\partial} \gamma_\nu - mC(A)\gamma_\mu \gamma_\nu, \quad (6.3)$$

siendo  $A \neq -\frac{1}{2}$ ,  $B(A) = \frac{3}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}$ ,  $C(A) = 3A^2 + 3A + 1$ . La estructura de restricciones se simplifica enormemente si  $A = -1$ : en este caso  $\Lambda_{00} = 0$ , por lo que  $\mathcal{L}_{RS}$  se hace independiente de  $\Psi^0$ . La condición de que la interacción no reintroduce una dinámica para  $\Psi^0$  restringe los posibles valores para  $Z$ :  $\frac{1}{2}$  en  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $-\frac{1}{2}$  para  $\mathcal{L}_P$  (ver subsección 3.3.2). Tendremos entonces (teniendo en cuenta la relación  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\lambda = i/2\{-i\sigma^{\mu\rho}, \gamma^\nu\}$ )

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu\nu} &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\lambda\partial_\rho + im\sigma^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_P &= -g\bar{\Psi}_\mu[\Lambda^{\mu\nu}(m=0)\psi]\partial_\nu\phi + h.c., \\
\mathcal{L}_{NEK} &= g\bar{\Psi}_\mu i\sigma^{\mu\nu}\psi\partial_\nu\phi + h.c.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

A continuación hallamos los momentos canónicos conjugados  $\Pi_{f,f^\dagger} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{f},\dot{f}^\dagger}$  como en el capítulo anterior y, usando que  $\epsilon^{0ijk}\gamma_5\gamma_k = \epsilon_{ijk}\gamma_5\gamma_k = \sigma_{ij}\gamma_0$  obtenemos

$$\Pi_{\Psi_0} = 0, \quad \Pi_{\Psi_0^\dagger} = 0 \tag{6.5}$$

$$\Pi_{\Psi_i} = -\Psi_k^\dagger\sigma_{ki}, \quad \Pi_{\Psi_i^\dagger} = 0 \tag{6.6}$$

$$\Pi_\psi = i\psi^\dagger + \begin{pmatrix} 0 \\ g\Pi_{\Psi_j}(\partial_j\phi) \end{pmatrix}, \quad \Pi_{\psi^\dagger} = \begin{pmatrix} 0 \\ g\Pi_{\Psi_j^\dagger}(\partial_j\phi) \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

$$\Pi_\phi = -g\Psi_i^\dagger \begin{pmatrix} \gamma_i\psi \\ -\sigma_{ij}(\partial_j\psi) \end{pmatrix} + \dot{\phi}, \tag{6.8}$$

donde las expresiones superiores dentro de los paréntesis corresponden a la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$ , mientras que los inferiores corresponden al caso  $\mathcal{L}_P$ .

Cuando un grado de libertad  $f$  es tal que  $\dot{f}$  no puede ponerse en términos de  $f$  y  $\Pi_f$  aparecen restricciones. Por lo tanto

$$\chi_0(x) \equiv \Pi_{\Psi_0}(x) = 0, \quad \chi_{0^\dagger}(x) \equiv \Pi_{\Psi_0^\dagger}(x) = 0, \tag{6.9}$$

$$\chi_i(x) \equiv \Pi_{\Psi_i} + \Psi_k^\dagger\sigma_{ki} = 0, \quad \chi_{i^\dagger}(x) \equiv \Pi_{\Psi_i^\dagger} = 0, \tag{6.10}$$

$$\chi_\psi \equiv \Pi_\psi - i\psi^\dagger - \begin{pmatrix} 0 \\ g\Pi_{\Psi_j}(\partial_j\phi) \end{pmatrix} = 0, \tag{6.11}$$

$$\chi_{\psi^\dagger} \equiv \Pi_{\psi^\dagger} - \begin{pmatrix} 0 \\ g\Pi_{\Psi_j^\dagger}(\partial_j\phi) \end{pmatrix} = 0 \tag{6.12}$$

son restricciones primarias. Para el campo RS  $\Psi$  en la ec. (6.10) se puede eliminar en forma directa  $\Psi^\dagger$  en términos de  $\Pi$ , análogamente a como ocurre con el campo de Dirac, y usando la identidad  $\sigma_{ij}(\frac{i}{2}\gamma_k\gamma_j) = \delta_{ik}$  obtenemos

$$\Psi_i^\dagger = -\frac{i}{2}\Pi_{\Psi_k}\gamma_i\gamma_k. \tag{6.13}$$

Usando entonces la definición de los corchetes de Poisson del capítulo anterior tendremos nuestro primer nivel de corchetes intermedios (los demás son todos nulos)

$$\begin{aligned}
\{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_I &= \frac{i}{2}\gamma_j\gamma_i\delta^{(3)}(x-y) \\
\{\Psi_0(x), \Pi_{\Psi_0}(y)\}_I &= \delta^{(3)}(x-y) \\
\{\phi(x), \Pi_\phi(y)\}_I &= \delta^{(3)}(x-y),
\end{aligned} \tag{6.14}$$

donde  $\Psi_0, \Pi_{\Psi_0}$  no resultan afectados por las restricciones eliminadas, y para el campo pseudoescalar los corchetes intermedios coinciden con los fundamentales, ya que no hay

restricciones en ese campo. Nótese que esta álgebra pudo haberse obtenido a través del algoritmo de Dirac, como se hace en HASUMI Y OTROS (1979) y PASCALUTSA (1998). Como puede verse en la ec (6.11) para la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$ , puede obtenerse  $\psi = -i\Pi_\psi$  en analogía con (6.13) y, usando los corchetes de Poisson, tendremos

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_I = -i\delta^{(3)}(x-y), \quad (6.15)$$

pero este procedimiento no puede usarse para  $\mathcal{L}_P$ , porque esta interacción conecta  $\psi$ ,  $\Pi_\psi$  y  $\Pi_\Psi$  (o  $\Psi^\dagger$ ). Introduzcamos entonces los corchetes de segundo nivel eliminando los momentos conjugados del campo espinorial usando el formalismo de Dirac. Los resultados obtenidos en el límite  $g = 0$  corresponderán al caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ , dado que en ese límite obtenemos las restricciones correspondientes en las expresiones (6.11) y (6.12). Para hallar los corchetes de segundo nivel necesitamos

$$\{\chi_\psi(x), \chi_\psi^\dagger(y)\}_I = -i\delta^{(3)}(x-y), \quad \{\chi_\psi(x), \chi_\psi^\dagger(y)\}_I^{-1} = i\delta^{(3)}(x-y) \quad (6.16)$$

y los corchetes de Dirac para los campos escalar, espinorial y RS serán

$$\begin{aligned} \{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_{II} &= \left( \frac{i}{2} \gamma_j \gamma_i - ig^2 (\partial_i \phi(x)) (\partial_j \phi(y)) \right) \delta^{(3)}(x-y) \\ \{\Psi_i(x), \psi^\dagger(y)\}_{II} &= -ig (\partial_i \phi(y)) \delta^{(3)}(x-y) \\ \{\psi(x), \Psi_i^\dagger(y)\}_{II} &= ig (\partial_i \phi(x)) \delta^{(3)}(x-y) \\ \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_{II} &= -i\delta^{(3)}(x-y) \\ \{\Psi_0(x), \Pi_{\Psi_0}(y)\}_{II} &= \delta^{(3)}(x-y) \\ \{\phi(x), \Pi_\phi(y)\}_{II} &= \delta^{(3)}(x-y), \end{aligned} \quad (6.17)$$

para la interacción  $\mathcal{L}_P$ , y si se hiciera  $g = 0$  se obtendrían los corchetes correspondientes al caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ . Las restricciones restantes  $\chi_0, \chi_{0^\dagger}$  no pueden ser eliminadas de este modo. Imponemos entonces la condición de que se conserven en el tiempo, o sea  $\theta_0(x) \equiv \{\Pi_0(x), H\}_{II} = 0$ , obteniéndose restricciones secundarias no triviales. La densidad Hamiltoniana será entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \Pi_\mu(x) \dot{\Psi}^\mu(x) + \Pi_\phi(x) \dot{\phi}(x) + \Pi_\psi(x) \dot{\psi}(x) + h.c. - \mathcal{L}(x) \\ &= -\Psi_i^\dagger \epsilon_{ijk} \gamma_5 \partial_k \Psi_j + \Psi_i^\dagger \left( \frac{ig\sigma_{ij}\gamma_0 \psi \partial_j \phi}{-g\epsilon_{ijk} \gamma_5 (\partial_j \psi) (\partial_k \phi)} \right) + h.c. - im \bar{\Psi}_i \sigma_{ij} \Psi_j \\ &+ i\bar{\psi} \nabla \cdot \gamma \psi + \bar{\psi} m_\psi + 1/2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi + 1/2 m_\phi^2 \phi^2 \\ &+ \Psi_0^\dagger \left[ (\sigma_{ji} \partial_j - m \gamma_i) \Psi_i + \left( \frac{-g\gamma_i \psi \partial_i \phi}{-g\sigma_{ji} (\partial_j \psi) (\partial_i \phi)} \right) \right] + h.c. \end{aligned} \quad (6.18)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \{\Pi_{\Psi_0}, H\}_{II} = (\partial_j \Psi_i^\dagger \sigma_{ji} + m \Psi_i^\dagger \gamma_i) + \left( \frac{g\psi^\dagger \gamma_i \partial_i \phi}{-g(\partial_j \psi^\dagger) (\partial_i \phi) \sigma_{ji}} \right) \\ \theta_{0^\dagger} &= \{\Pi_{\Psi_0^\dagger}, H\}_{II} = (\sigma_{ji} \partial_j - m \gamma_i) \Psi_i + \left( \frac{-g\gamma_i \psi \partial_i \phi}{-g\sigma_{ji} (\partial_j \psi) (\partial_i \phi)} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Obsérvese que  $\theta_0$  y  $\theta_{0^\dagger}$  son los coeficientes en (6.18) de  $\Psi_0$  y  $\Psi_{0^\dagger}$  respectivamente, por lo tanto estos últimos son de hecho multiplicadores de Lagrange. Obsérvese también que  $\{\Pi_0, \theta_0\}_{II} = \{\Pi_{0^\dagger}, \theta_{0^\dagger}\}_{II} = \{\Pi_0, \theta_{0^\dagger}\}_{II} = \{\Pi_{0^\dagger}, \theta_0\}_{II} = 0$  pero para  $m \neq 0$  (como mostraremos)  $\{\theta_0, \theta_{0^\dagger}\}_{II} \neq 0$ . Imponiendo  $\{\theta_0, H\}_{II} = 0$  y  $\{\theta_{0^\dagger}, H\}_{II} = 0$  para preservar  $\theta_0, \theta_{0^\dagger}$  en el tiempo, obtenemos restricciones terciarias proporcionales a  $\Psi_0$  y  $\Psi_0^\dagger$  resultando en corchetes no nulos con  $\Pi_0 = 0$  y  $\Pi_0^\dagger = 0$ . Sin embargo el único efecto de esas restricciones terciarias es fijar  $\Psi_0$  y  $\Psi_0^\dagger$  en términos de los grados de libertad dinámicos. Entonces, el álgebra de corchetes de Dirac relevante se reduce a  $\theta_0$  y  $\theta_{0^\dagger}$ . En consecuencia, el único corchete no trivial a ser considerado en el algoritmo de Dirac es  $\{\theta(x)_0, \theta_{0^\dagger}(y)\}_{II}$ , que puede obtenerse de la ecuación (6.19) y es diferente para  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$ .

### 6.2.2. El caso $\mathcal{L}_{NEK}$

A continuación desarrollaremos la cuantización de Dirac para el acoplamiento convencional y reproduciremos los problemas bien conocidos de la signatura del espacio de Fock reportados en HAGEN (1971). Para el caso  $\mathcal{L}_{NEK}$  los corchetes intermedios de segundo nivel se obtienen de (6.17) haciendo  $g = 0$  y son

$$\begin{aligned} \{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_{II} &= \frac{i}{2} \gamma_j \gamma_i \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\Psi_0(x), \Pi_{\Psi_0}(y)\}_{II} &= \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_{II} &= -i \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\phi(x), \Pi_\phi(y)\}_{II} &= \delta^{(3)}(x - y), \end{aligned} \tag{6.20}$$

de los que podemos obtener, usando ec (6.19)

$$\{\theta_0(x), \theta_{0^\dagger}(y)\}_{II} = \frac{3i}{2} \delta^3(x - y) \left( m^2 - \frac{2g^2}{3} (\nabla \phi)^2 \right). \tag{6.21}$$

Obsérvese que la cantidad entre paréntesis del miembro derecho, que se reporta en HAGEN (1971) y PASCALUTSA (1998), puede anularse a nivel clásico para ciertos valores del gradiente del campo pseudoescalar. En la ecuación (30) de PASCALUTSA (1998) aparece en la integral de camino donde se pretende cuantizar la teoría. En ese punto, simplemente se menciona que suele ocurrir algún tipo de no-covariancia de la medida que puede cancelarse mediante un término fuera de capa de masa en el Hamiltoniano, y se pregunta (y no responde) si esa cancelación se producirá o no en este caso. Por cierto, la fórmula tiene numerosos errores. La única condición que pone para cuantizar la teoría es que  $R(x) \equiv 3/2i(m^2 - \frac{2g^2}{3}(\nabla \phi(x))^2) \neq 0$ , para evitar una “violación en el conteo de grados de libertad”. No parece ser consciente de que la verdadera amenaza es la aparición de estados de norma negativa. PASCALUTSA (1998) no cuantiza la teoría. Pese a la sofisticación de recursos desplegada el cálculo va mucho menos lejos que el efectuado por HAGEN (1971). De hecho, las integrales de camino planteadas, más allá de su elegancia, no conducen a ningún resultado en absoluto. Para reproducir aquí los problemas de signatura reportados por HAGEN (1971) analizaremos el anticommutador más sencillo, el correspondiente al campo de Dirac, y lo evaluaremos entre estados que tengan un fondo clásico del campo

pseudoescalar. Los corchetes de Dirac entre los campos  $\psi$  que son modificados por las restricciones secundarias son, usando las ecuaciones (6.19) y (6.20),

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_D = \{\psi(x), \psi^\dagger\}_{II} - \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & \int d^3z d^3z' \{\psi(x), \theta(z)\}_{II} (\{\theta_0(z), \theta_{0^\dagger}(z')\}_{II})^{-1} \{\theta^\dagger(z'), \psi^\dagger(y)\}_{II} \\ &= -i \frac{\delta^3(x-y)}{1 - \frac{2g^2}{3m^2}(\nabla\phi)^2}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

mientras que el anticommutador cuántico correspondiente será

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)]_+ = \hbar \frac{\delta^3(x-y)}{1 - \frac{2g^2}{3m^2}(\nabla\phi)^2}. \quad (6.24)$$

Veamos que el estudio de la definición del signo en el espacio de estados, requerido por consistencia, se reduce a la posibilidad de que  $R(x)$  cambie de signo al ser evaluado entre estados cuánticos: Sea  $|f\rangle$  un estado coherente para el campo  $\phi$ , tal que  $(\nabla\phi(x))|f\rangle = (\nabla f(x))|f\rangle$ , siendo  $f(x)$  una función c-numérica. El cálculo de las normas de estados de una partícula del campo espinorial en un fondo tal nos lleva a considerar la cantidad

$$\langle f | [\psi(x), \psi^\dagger(y)]_+ | f \rangle = \hbar \frac{\delta^3(x-y)}{1 - \frac{2g^2}{3m^2}(\nabla f(x))^2} \langle f | f \rangle \quad (6.25)$$

la cual no es definida positiva. Obsérvese que si el gradiente es no nulo siempre hay un marco de referencia en el cual la norma cambiará de signo. Este resultado es idéntico al obtenido en HAGEN (1971) por otros métodos. Esta es la verdadera preocupación a nivel cuántico, más allá de cualquier consideración acerca de la pérdida de grados de libertad al nivel clásico en una región de medida cero del espacio de configuración.

### 6.2.3. El caso $\mathcal{L}_P$

Mostraremos ahora, con un argumento absolutamente paralelo al seguido para  $\mathcal{L}_{NEK}$ , que la teoría no es cuantizable cuando la interacción es de la forma  $\mathcal{L}_P$ , por lo que no tiene sentido derivar reglas de Feynman válidas para fondos genéricos (en PASCALUTSA (1998) se concluye que no dependen del fondo). Por supuesto, en ausencia de fondos la cuantización es la misma que para el campo RS libre, y las expansiones perturbativas tanto de  $\mathcal{L}_{NEK}$  como de  $\mathcal{L}_P$  no presentan inconveniente.

Usando los corchetes de segundo nivel (6.17) en (6.19) obtenemos

$$\{\theta_0(x), \theta_{0^\dagger}(y)\}_{II} = \frac{3im^2}{2} \left( 1 - \frac{2g^2}{3}(\nabla\phi)^2 \right) \delta^3(x-y) \quad (6.26)$$

los cuales, muy similarmente al caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ , pueden anularse al nivel clásico para ciertos valores del gradiente del campo pseudoescalar si  $m \neq 0$ . Es interesante analizar el límite de masa cero, dado que corresponde a una teoría con una invariancia de medida bajo la transformación  $\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es un espinor arbitrario. Ingenuamente uno

podría esperar que (6.26) se anule como consecuencia de dicha invariancia, por lo que  $\theta_0$  y  $\theta_{0^\dagger}$  serían restricciones de primera clase, pero no hay ninguna demostración general de que cada invariancia de medida dé lugar a restricciones de primera clase (HENNEAUX Y TEITELBOIM 1992). Por el contrario, existen algunos contraejemplos cuando la simetría de medida actúa trivialmente (HENNEAUX Y OTROS 2011). En el caso bajo análisis la invariancia de medida es no trivial respecto del campo RS, pero es trivial respecto del campo de Dirac y del pseudoescalar, por lo que a primera vista esos campos serían “neutros” y deberían desacoplarse si la teoría es consistente. Para probar eso rigurosamente, obsérvese que ( ver (6.4) y  $S^0 \equiv g\Lambda^{0\nu}(m=0)\psi\partial_\nu\phi$  )

$$Q = \int d^3x S^0(x) = - \int d^3x g\gamma_0\sigma_{ji}(\partial_j\psi)(\partial_i\phi)(x), \quad (6.27)$$

y  $Q^\dagger$  deberían ser los generadores de la simetría de medida debidos al término de interacción, pero su corchete con todos los campos se anula idénticamente (usando (6.17))

$$\{Q, \Psi_\mu^\dagger(y)\}_{II} = 0 \quad (6.28)$$

$$\{Q, \phi^\dagger(y)\}_{II} = 0 \quad (6.29)$$

$$\{Q, \psi^\dagger(y)\}_{II} = 0.$$

Por lo que, pese a que el primer término de  $\theta_0$  en la ecuación (6.19)  $\Lambda^{0\nu}(m=0) = -\epsilon^{0\nu\lambda\mu}\gamma_5\gamma_\lambda\partial_\mu = -\gamma_0\sigma_{ji}\partial_j$  en el límite no masivo actúa como un generador de  $\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu\epsilon$ , el último término pese a ser no nulo, no genera ninguna transformación. Por lo mismo, los campos escalar y de Dirac son, como dijimos arriba, “neutros” bajo esta transformación de medida, lo que sugiere que deberían desacoplarse del campo RS. Obsérvese que  $\{Q, Q^\dagger\} = 0$  pese a que  $\{S^0, S^{0^\dagger}\} \neq 0$ .

Para chequear la signatura del espacio de Hilbert procedamos análogamente a como hicimos en la subsección previa para  $\mathcal{L}_{NEK}$ . El anticommutador más simple  $\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_D$  no tiene problemas de signatura: usando la ecuación (6.26) y los conmutadores (6.17) obtenemos

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}_D = -i\delta^3(x-y), \quad (6.30)$$

de modo que debemos explorar los anticommutadores del campo RS

$$\begin{aligned} \{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_D &= \{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_{II} \\ &- \int d^3z d^3z' \{\Psi_i(x), \theta_0(z)\}_{II} \{\theta_0(z), \theta_{0^\dagger}(z')\}_{II}^{-1} \{\theta_{0^\dagger}(z'), \Psi_j^\dagger(y)\}_{II}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ahora, usando los datos correspondientes al caso  $\mathcal{L}_P$  en la ecuación (6.19), los anticom-



mutadores correspondientes (6.17) y la ecuación (6.26) tendremos

$$\begin{aligned}
\{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_D &= \left[ \frac{i}{2} \gamma_j \gamma_i - i g^2 (\partial_i \phi(x)) (\partial_j \phi(y)) \right] \delta^{(3)}(x - y) \\
&+ \int d^3 z \{ \partial_i^x - i m g^2 (\partial_i \phi(x)) (\partial_k \phi(z)) \gamma_k + \frac{i}{2} m \gamma_i \} \delta^{(3)}(x - z) \\
&\times \frac{\frac{-2i}{3m^2}}{\left(1 - \frac{2g^2}{3} (\nabla \phi(z))^2\right)} \\
&\times \{ \partial_j^y - i m g^2 (\partial_l \phi(z)) \gamma_l (\partial_j \phi(y)) + \frac{i}{2} m \gamma_j \} \delta^{(3)}(z - y),
\end{aligned} \tag{6.32}$$

donde la integral sobre  $z'$  fue absorbida por la  $\delta(z - z')$  en la ecuación (6.26) y donde se usó la propiedad  $\partial_i^z \delta^3(z - x) = -\partial_i^x \delta^3(z - x)$ . Podemos expresar el corchete de Dirac como

$$\begin{aligned}
\{\Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y)\}_D &= \left[ \frac{i}{2} \gamma_j \gamma_i - i g^2 (\partial_i \phi(x)) (\partial_j \phi(y)) \right] \delta^{(3)}(x - y) \\
&+ \{ \partial_i^x - i m g^2 (\partial_i \phi(x)) (\partial_k \phi(x)) \gamma_k + \frac{i}{2} m \gamma_i \} \\
&\times \frac{\frac{-2i}{3m^2}}{\left(1 - \frac{2g^2}{3} (\nabla \phi(x))^2\right)} \\
&\times \{ -\partial_j^x - i m g^2 (\partial_l \phi(x)) \gamma_l (\partial_j \phi(x)) + \frac{i}{2} m \gamma_j \} \delta^{(3)}(x - y).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Nótese que en el caso de los campos RS libres ( $g = 0$ ) este resultado coincide con el de HASUMI Y OTROS (1979) si  $e = 0$ . La dificultad en analizar la signatura para los estados RS es que debe imponerse la restricción  $\theta_0$  para el caso  $\mathcal{L}_P$  (recordemos que incluso la teoría libre incluye estados de norma negativa que son eliminados únicamente luego de imponer las restricciones). Creemos un estado de una única partícula del campo RS en reposo ( $\vec{p} = 0$ ) en presencia de un fondo pseudoescalar de gradiente constante: por simplicidad impongamos  $f(x) = Ax_1$ , siendo  $|(A, 0, 0)\rangle$  un estado coherente tal que  $\nabla \phi|(A, 0, 0)\rangle = (A, 0, 0)|(A, 0, 0)\rangle$ , y en ausencia de cuantos del campo de Dirac. Construimos entonces el estado  $\alpha_i^\dagger \Phi_i|(A, 0, 0)\rangle$  donde  $\alpha_i$  es un coeficiente vectorespinorial como los que aparecen en la expansión del campo  $\Psi_i(x)$  en la segunda cuantización, siendo  $\Phi_i = \int d^3 x e^{\mathbf{x} \cdot \mathbf{0}} \Psi_i(x)$  operadores de creación de estados RS en reposo donde, para normalizar, introducimos un volumen regulador  $V$ . Cuando  $\vec{p} = 0$  en ausencia de cuantos del campo de Dirac la restricción  $\theta_0$  implica  $\gamma_i \alpha_i = 0$ . Un estado así es  $\vec{\alpha} = (\gamma_2 \chi, \gamma_1 \chi, 0)$  para algún espinor no nulo  $\chi$  donde  $\vec{\alpha}^\dagger = (-\chi^\dagger \gamma_2, -\chi^\dagger \gamma_1, 0)$ . Calculemos la norma

$$\langle (A, 0, 0) | (\Phi_i^\dagger \alpha_i) (\alpha_j^\dagger \Phi_j) | (A, 0, 0) \rangle = \alpha_j^\dagger \langle (A, 0, 0) | i \{ \Phi_j, \Phi_i^\dagger \}_D | (A, 0, 0) \rangle \alpha_i \tag{6.34}$$

$$\langle (A, 0, 0) | (\Phi_i^\dagger \alpha_i) (\alpha_j^\dagger \Phi_j) | (A, 0, 0) \rangle = \alpha_j^\dagger \langle (A, 0, 0) | i \{ \Phi_j, \Phi_i^\dagger \}_D | (A, 0, 0) \rangle \alpha_i \tag{6.35}$$

donde  $\{ \Phi_i, \Phi_j^\dagger \}_D = \int d^3 x d^3 y \{ \Psi_i(x), \Psi_j^\dagger(y) \}_D$ . Como una vez que todos los operadores actúan sobre los estados no resultan dependencias en  $x$  e  $y$  del miembro derecho de (6.33)

excepto en la delta de Dirac del corchete, la integración sobre  $x$  e  $y$  de la delta resulta en un factor  $V$  (el volumen regulado) que absorbemos en la normalización de  $\chi$ . Tenemos entonces

$$\langle (A, 0, 0) | (\Phi_i^\dagger \alpha_i) (\alpha_j^\dagger \Phi_j) | (A, 0, 0) \rangle = 2 \left( 1 + \frac{\frac{1}{2} g^2 A^2}{1 - \frac{2}{3} g^2 A^2} \right) \chi^\dagger \chi \langle (A, 0, 0) | (A, 0, 0) \rangle \quad (6.36)$$

que claramente se vuelve negativa para  $A$  lo bastante grande.

Recalquemos que la cuantización en PASCALUTSA (1998) es incorrecta: el paso vital para la argumentación es el desacople del campo de Stueckelberg, que no ocurre (no podría ocurrir porque el acople es el que garantiza la imposición de la simetría de medida invocada). Por lo tanto la integración de caminos llega a un punto muerto análogo al descrito ya para el caso  $\mathcal{L}_{NEK}$  en esa referencia.

# Capítulo 7

## Malentendidos y Confusiones acerca del campo RS

A lo largo de su extensa historia, el campo RS ha estado sujeto a un gran número de controversias y malentendidos, la mayoría al ser empleados en un contexto fenomenológico en física hadrónica. BENMERROUCHE Y OTROS (1989) escribieron un artículo minucioso y en apariencia inapelable al respecto. Sin embargo, las confusiones persisten. En buena medida el origen de las confusiones ha sido la incomodidad que genera la propagación virtual de los sectores de *spin* 1/2. En la primera sección de este capítulo reseñamos el estado de cosas en torno a estas confusiones. En las siguientes secciones exponemos nuestra contribución al problema, ligadas al uso fenomenológico de la interacción propuesta por PASCALUTSA (1998), tal como aparecen en BADAGNANI Y OTROS (2015).

### 7.1. Fondo de *spin* 1/2 y estados “no-físicos”

El estudio de las partículas cargadas de *spin* 3/2 y sus interacciones tiene un gran interés fenomenológico dada la necesidad de modelizar resonancias hadrónicas en experimentos de física nuclear o que la involucren como “fondo”. Sin embargo, el desarrollo de la teoría ha estado plagado de dificultades y controversias. Una de ellas es el precio a pagar cuando deseamos hacer una descripción explícitamente covariante de las partículas de *spin* 3/2. En el formalismo RS, como vimos, el campo de *spin* 3/2 está dado por un vectoespino  $\Psi^\mu$ , que transforma de acuerdo con la representación  $[(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)] \otimes (1/2, 1/2)$  del grupo de Lorentz, la cual contiene tanto *spin* 3/2 como 1/2. A pesar de que en capa de masa se puede filtrar el sector de *spin* 3/2 en la ecuación de movimiento usando condiciones subsidiarias, al invertir el operador cinético para obtener el propagador (que toma valores fuera de capa de masa) el *spin* 1/2 reaparece como estados virtuales (AURILIA Y UMEZAWA 1969). Esto no ocurre solo para *spin* 3/2: en general, los campos multispin que requieren condiciones subsidiarias en las ecuaciones de movimiento los estados de *spin* inferior que no aparecen en el espectro físico sí lo hacen virtualmente en las interacciones, dando contribuciones a las amplitudes (AURILIA Y UMEZAWA 1969).

El intercambio de partículas virtuales y su contribución a amplitudes observables no es en sí mismo un problema, siempre que las interacciones no lleven a la propagación de

fantasmas reales, es decir, contribución de polos del propagador exacto de estados de *spin* inferior, que por construcción resultan estados de norma negativa. Esto es bien conocido en teoría cuántica de campos, donde los estados fantasma no solo son tolerados sino a veces bienvenidos, como es el caso de los fantasmas de Faddeev y Popov resultantes de la no invariancia de la medida en integrales de camino en teorías de medida no abelianas. Allí, las contribuciones de los fantasmas a las amplitudes son necesarias para que se cumplan las identidades de Ward asociadas a la invariancia de medida (WEINBERG 2000). Para un campo vectorial masivo ocurren fantasmas en el contexto de la cuantización de Gupta-Bleuler en el Lagrangiano de Stückelberg (ITZYKSON Y ZUBER 1980). Esto es fácil de ver al nivel de los conmutadores, donde la covariancia de Lorentz se logra introduciendo un grado de libertad redundante de *spin* 0, con lo que todos los grados de libertad del campo vectorial son dinámicos. Luego, por covariancia, los conmutadores  $[a^\dagger_\mu, a^\nu]$  son proporcionales a  $g^{\mu\nu}$ , y puede verse que los estados de una partícula de *spin* cero en capa de masa tienen norma negativa. En la teoría libre esos estados son proyectados por la restricción  $p_\mu V^\mu = 0$ . Cuando hay interacciones presentes, lo que debe garantizarse es que los fantasmas no se vuelvan físicos. En el propagador de Stückelberg usado para describir al fotón en el límite no masivo esto se logra para el fantasma escalar dado que hay una invariancia de medida electromagnética y por lo tanto el acoplamiento del fotón ocurre con una corriente conservada. Pero para el vector masivo en la descripción de Proca aún hay una contribución del sector de *spin* cero a las amplitudes. Esta contribución es importante por ejemplo para entender el decaimiento de piones cargados en leptones mediados por bosones  $W$  (AURILIA Y UMEZAWA 1969, BENMERROUCHE Y OTROS 1989): obsérvese que el elemento de matriz entre el pión (escalar) y cualquier estado de *spin* 1 (helicidad no nula) debe anularse por conservación del momento angular, de modo que la única manera de que un vector masivo de lugar a este decaimiento conservando el momento angular es mediante el intercambio del fantasma escalar.

En el caso del campo RS aparece un fantasma de *spin* 1/2, y al menos en ausencia de campos de fondo las interacciones no hacen aparecer polos de *spin* 1/2 en el propagador. Esos estados contribuyen como estados intermedios en las amplitudes, conocidos como “fondo de *spin* 1/2”. A pesar del sólido argumento presentado en el párrafo anterior, la presencia de ese fondo le resulta molesta a muchos investigadores, y aparecen menciones de estas contribuciones como “inconsistencias” aún mucho después de publicado el trabajo de BENMERROUCHE Y OTROS (1989). En particular, la motivación citada en los trabajos de Pascalutsa para postular la interacción  $\mathcal{L}_P$  analizada en el capítulo 6 es que esa interacción cancela la contribución del fondo de *spin* 1/2 sin necesidad de introducir propagadores artificialmente truncados como los que se critican en BENMERROUCHE(1989). Notemos sin embargo que la propiedad de desacoplar los sectores de *spin* 1/2 no es una propiedad del vértice, sino de la amplitud elástica (recordemos que al vértice  $\mathcal{L}_P$  le corresponde un valor no trivial de  $Z$ , que controla el acoplamiento a  $\gamma^\mu \Psi_\mu$ , como vimos en la sección 3.3). En efecto, la amplitud elástica es (omitiendo variables de los demás campos)

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{N'} \left( \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m} \right)^2 \Gamma_{\mu\rho}(p) G^{\rho\sigma}(p, -1) \Gamma_{\sigma\tau}(p) u_N \\ &= \bar{u}_{N'}(-) \left( \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} \right)^2 \frac{p^2}{m^2} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} P_{\mu\tau}^{(3/2)}(p) u_N, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde

$$\Gamma^{\mu\sigma}(p) \equiv \epsilon^{\mu\sigma\rho\nu} \gamma_\nu \gamma_5 p_\rho, \quad (7.2)$$

y recordando que  $G(p, -1)$  puede escribirse en términos de los proyectores  $\hat{P}_{22}^{\frac{1}{2}}, \hat{P}_{12}^{\frac{1}{2}}, \hat{P}_{21}^{\frac{1}{2}}$  explicitados en las ecuaciones (3.22), encontramos que gracias a la “propiedad de transversalidad” del vértice  $\mathcal{L}_P$

$$\Gamma^{\mu\nu}(p)p_\nu = \Gamma^{\mu\nu}(p)p_\mu = 0, \quad (7.3)$$

y las restricciones  $X^\alpha \hat{P}_{\alpha\beta}^{(3/2)}(p) = \hat{P}_{\alpha\beta}^{(3/2)}(p) X^\beta = 0$  ( $X = \gamma, p$ ) se verifica

$$\begin{aligned} \hat{P}_{22}^{\frac{1}{2}\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}(p) &= 0, \\ \Gamma_{\sigma\mu}(p) \hat{P}_{22}^{\frac{1}{2}\mu\sigma} &= 0, \\ \hat{P}_{12}^{\frac{1}{2}\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}(p) &= 0, \\ \Gamma_{\mu\sigma}(p) \hat{P}_{21}^{\frac{1}{2}\sigma\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

Esto muestra que, en efecto, la amplitud elástica no tiene contribución del sector de *spin* 1/2. Como dijimos, se trata de una propiedad de la amplitud y no del vértice. En particular, como la propiedad 7.3 depende de que  $\vec{p}$  no se modifique entre vértices, es fácil sospechar que si hay emisión de fotones por la partícula RS virtual la correspondiente amplitud ya no desacoplará el sector de *spin* 1/2. Veremos más adelante en este capítulo que ese es el caso.

Hay, desde luego, inconsistencias ligadas al *spin* 1/2. Como hemos trabajado en el capítulo 6, las interacciones cambian drásticamente las restricciones, llevando a que los estados de norma negativa aparezcan en el sector físico. Pero eso ocurre solo en presencia de campos de fondo y resulta de un estudio cuidadoso de las restricciones, y de ningún modo es tan trivial e inmediato como señalar un sector en el propagador libre. De hecho, es argumentable que el acoplamiento al campo RS puede hacerse consistente si se añaden términos de orden superior al acoplamiento minimal electromagnético o al de orden más bajo  $\mathcal{L}_{NEK}$ . En esta línea, podemos citar el trabajo de PORRATI Y RAHMAN (2009) para el caso electromagnético. La confusión que aparece en PASCALUTSA (1998) y trabajos posteriores es la identificación de las genuinas inconsistencias reveladas en el estudio de las restricciones con la incomodidad que provoca la contribución del *spin* 1/2 en amplitudes aún en situaciones donde las inconsistencias no son en absoluto relevantes (puesto que se trata de cálculos perturbativos en ausencia de campos de fondo).

Ya vimos en el capítulo 6 que  $\mathcal{L}_P$  es al menos tan inconsistente como  $\mathcal{L}_{NEK}$ . En este capítulo veremos que  $\mathcal{L}_P$  tiene incluso más problemas: mientras que  $\mathcal{L}_{NEK}$  es automáticamente compatible con la invariancia de medida electromagnética,  $\mathcal{L}_P$  presenta problemas severos debido a la aparición de derivadas adicionales. Veremos que la ilusión de que  $\mathcal{L}_P$  trunque el fondo de *spin* 1/2 desaparece en cuanto incluimos procesos radiativos, lo cual ha llevado a los proponentes de esta interacción a reintroducir propagadores artificialmente truncados, tan problemáticos (BERMERROUCHE Y OTROS 1989). Veremos también que consideraciones de renormalización obligan a incluir  $\mathcal{L}_{NEK}$  en cualquier teoría RS acoplada tanto por  $\mathcal{L}_P$  como al campo electromagnético.

## 7.2. Consistencia y teorías de campo efectivas

BERMERROUCHE Y OTROS (1989) han puesto en duda la relevancia del valor “consistente” del parámetro off shell  $Z$  (tal como se ha calculado en el capítulo 3) por dos vías. Por un lado, ha mostrado que los datos empíricos parecen incompatibles con ese valor para el caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ , y por otro exhibió un ejemplo concreto de interacción consistente con un  $Z$  efectivo diferente. En el capítulo introductorio hemos puesto en duda el criterio de preferir los vértices de interacción a partir de su presunta coherencia, y pusimos el ejemplo del vértice de Fermi para el decaimiento beta. En esta sección fundamentaremos este escepticismo y mostraremos que el único criterio que puede imponerse a los vértices es que la densidad Lagrangiana de la que provengan tenga todas las invariancias del sistema, pero por lo demás debe ser el más general posible. Esto es la raíz de los llamados “teoremas de baja energía”.

Las teorías de campo efectivas se usan toda vez que la teoría completa resulte impracticable o incluso nunca haya sido formulada (en ese último caso habrá algunas invariancias u otros elementos conjeturales). En el caso de la física nuclear se supone que esa teoría es QCD, que está formulada en términos de unos grados de libertad que no corresponden al espectro observable, y este es en principio infinito. En los primeros tiempos de la física nuclear (en que la QCD aún no estaba formulada) se partía de la invariancia quiral, la invariancia de Lorentz y los pocos grados de libertad de baja energía que uno deseara considerar, y se determinaban las propiedades de las amplitudes a partir de teoría de grupos y algunos procedimientos ad-hoc. El procedimiento era muy engorroso (RHO 2007). Eventualmente se fue alcanzando la convicción de que si se escribía el Lagrangiano más general involucrando esos grados de libertad y respetando todas las invariancias se lograba exactamente lo mismo. Si bien no existe una demostración general, existe cierto grado de consenso alrededor de esta conjetura a la que se ha llamado “teorema folclórico (RHO 2007, WEINBERG 1997).

Vemos aquí, entonces, cuál es el criterio para seleccionar interacciones admisibles: deben respetar las simetrías del sistema, deben involucrar los grados de libertad con que trabajamos, y nada más. Las queremos para hacer cálculos a orden árbol a baja energía, para construir las amplitudes más generales compatibles con las simetrías admitidas para el sistema, y por lo tanto no tiene sentido exigirle a estos términos de interacción los estándares de cuantizabilidad y unitariedad que, obviamente, pretendemos de la teoría completa. Obsérvese, por ejemplo, que por el solo hecho de truncar los cálculos a orden árbol resultan amplitudes no unitarias. En particular, las propuestas para fijar teóricamente el valor de  $Z$  más allá de consideraciones de invariancia consisten en demandar que en la teoría dada únicamente por el campo RS, un pseudoescalar y un campo de Dirac interactuando únicamente a través de  $\mathcal{L}_{NEK}$  o  $\mathcal{L}_P$  no aparezca una dinámica para el sector que en la teoría libre es un multiplicador de Lagrange. Observemos que ya sabemos de antemano que en las situaciones en las que los fallos ocurren aparecen nuevos grados de libertad y nuevas interacciones, de modo que no tiene sentido pretender que una teoría de interacciones hadrónicas conteniendo únicamente un campo RS, un espinor y un pseudoescalar tenga pleno sentido en forma aislada. BENMERROUCHE Y OTROS (1989) argumentan desde otras perspectivas que este parámetro no debería quedar sujeto por tales requisitos extra-invariancia, que son los propuestos en primer término en NATH Y

OTROS (1971).

Obsérvese que las dificultades del tipo observado por Johnson y Sudarshan, Hagen y esta tesis solo ocurren cuando existen campos clásicos de fondo: como señala Weinberg en la cita reproducida en la sección 1.4 la expansión perturbativa en ausencia de tales campos (que es el uso fenomenológico habitual) tiene pleno sentido. Recordando que el objeto de las interacciones efectivas es reproducir las amplitudes de la teoría completa a bajas energías, sabiendo de antemano que ese es su rango de aplicabilidad, descartar  $\mathcal{L}_{NEK}$  como aproximación de baja energía a las interacciones de las resonancias de *spin* 3/2 en base a esas inconsistencias sería como rechazar el vértice de cuatro fermiones como aproximación a bajas energías del acoplamiento electrodebil basándose en el quiebre de unitariedad de aquel a altas energías.

### 7.3. Coexistencia entre las medidas electromagnética y de *spin* 3/2

Tanto en  $\mathcal{L}_{free}$  como en  $\mathcal{L}_P$  hay derivadas, por lo que para lograr la invariancia de medida electromagnética en el acoplamiento con el campo electromagnético  $A_\mu$  se debe hacer el reemplazo  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu$ . No consideraremos acoplamientos no mínimos porque de haberlos aún debería cumplirse esta regla de sustitución de todas las derivadas, o sea se trata de una condición necesaria y nos bastará para comprender las dificultades en la coexistencia de la invariancia de medida electromagnética con la de *spin* 3/2. El estudio de esta incompatibilidad corresponderá al análisis de la invariancia del Lagrangiano ante  $\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu \Phi$  en el caso radiativo. Haciendo sustitución minimal en  $\mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_P$  obtenemos los Lagrangianos de interacción electromagnética ( $q_\Delta = 2e, e, -e$  para  $\Delta^{+,+,+,-}$  y  $q_\pi = e, -e$  para  $\pi^{+,-}$ )

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta} &= iq_\Delta \bar{\Psi}^\mu \Gamma(A)_{\mu\sigma} \Psi^\sigma \\ \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)} &= i \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi m_\Delta} q_\pi \bar{\psi}(\phi^\dagger \times \mathbf{T})_3 \Gamma(A)_{\nu\mu} (\partial^\mu \Psi^\nu) + h.c. \\ \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)} &= i \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi m_\Delta} q_\Delta \bar{\psi}(\partial^\beta \phi^\dagger \cdot \mathbf{T}) \Gamma(A)_{\beta\nu} \Psi^\nu + h.c..\end{aligned}\tag{7.5}$$

$\mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta}$  proviene de la sustitución minimal en  $\mathcal{L}_{free}$ , mientras que  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)}$  y  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  provienen de la sustitución en derivadas de los campos del pión y la  $\Delta$ , respectivamente, en  $\mathcal{L}_P$ . Hemos descartado las matrices  $R$  porque, por invariancia de contacto, estas se cancelan en amplitudes.

Es claro que  $\mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta}$  y  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  definidos en la ecuación (7.5) ya no son invariantes de medida *spin*-3/2 dado que la derivada de la  $\Delta$  fue sustituida. Podríamos tratar de hacer una transformación lineal

$$\bar{\psi}_\rho \rightarrow \bar{\psi}_\rho - \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi m_\Delta} q_\Delta \bar{\psi}(\partial^\beta \phi^\dagger \cdot \mathbf{T}) \Gamma(A)_{\beta\rho} \sigma^{-1\rho\nu}$$

en  $\mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)} + \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  para obtener  $\mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta} + \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)} + \tilde{\mathcal{L}}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)} + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{A^2}$ , donde ahora  $\tilde{\mathcal{L}}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  es invariante de medida *spin*-3/2. Sin embargo, el Lagrangiano total

no será entonces invariante de medida electromagnética, pues el término proveniente de sustitución minimal en  $\partial_\mu \psi^\nu$  en  $\mathcal{L}_P$  ya no está presente luego de efectuada la transformación. Por otra parte  $\mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta}$  aún viola invariancia de medida  $spin-3/2$ , y únicamente una transformación no lineal conteniendo el campo  $\Delta$  podría eliminarlo, pero al precio de generar un número infinito de términos adicionales (PASCALUTSA 2001). Llegamos entonces a la conclusión de que no es posible satisfacer simultáneamente ambas invariancias de medida en forma cerrada; solo podemos aspirar a invariancias aproximadas en rangos acotados a la zona de la resonancia y que no pueden hacerse tan pequeños como se desee.

Un posible marco para hacer esto es teoría quiral perturbativa ( $\chi PT$ ) que incluya  $\pi$ ,  $N$  y  $\Delta$  como grados de libertad. Esta alternativa luce atractiva dado que se trata de una expansión de la QCD a bajas energías. En este marco es posible computar la dependencia de cantidades estáticas (como la masa de los nucleones, momentos magnéticos y dependencias en el momento de procesos de dispersión de  $\pi\pi$  y  $\pi N$ ) con la masa del pión. Aquí hay dos escalas livianas y un parámetro  $\delta^n$  tal que  $\delta \equiv \Delta \equiv (m_\Delta - m_N)/(\Lambda_{\chi PT} = 1\text{GeV})$  y  $m_\pi/\Lambda_{\chi PT} \sim \delta^2$ , en términos del cual podemos definir un orden en una expansión perturbativa para la que existe una receta sistemática (PASCALUTSA Y OTROS 2007) (Necesitamos reemplazar  $f_{\pi N\Delta}/m_\pi \simeq 0.014\text{MeV}^{-1} \rightarrow h_A/2(f_\pi = 92\text{MeV}) \simeq 0.016\text{MeV}^{-1}$ ). Un momento  $q$  intercambiado (a través de  $\pi$  o  $\gamma$ ) cuenta como  $\delta$  o  $\delta^2$  si está cerca de la región de la  $\Delta$  o de  $m_\pi$  respectivamente;  $n$  depende del orden del Lagrangiano de interacción, definido como la suma del número de derivadas del campo  $\pi$  más el número de derivadas del campo  $A_\mu$ , más el orden en la carga electromagnética  $e$ . Además tenemos un conteo para los propagadores de la  $\Delta$  cuando  $q \sim \Delta$  que diferencia el caso cuando  $G(p, -1)$  participa en la amplitud a través de un subgráfico de canal s-polar (gráfico uno- $\Delta$ -reducible) o, dicho de otra manera, o si lo hace de otro modo. Sin entrar en detalles acerca de este conteo, es claro que la invariancia de medida  $spin-3/2$   $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)}$  da una contribución de orden  $\delta$ , mientras que  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  aporta  $\delta^2$ , dado que cuando tenemos  $\partial_\mu \psi^\nu/M_\Delta$  en  $\mathcal{L}_P$  no contribuye al conteo. \*, pero luego del reemplazo  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu$  debe adquirir un orden  $\delta$ . También es claro que en una dada amplitud a orden  $\delta^n$  donde  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)}$  tiene en cuenta el vértice  $\Delta\pi N\gamma$ ,  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  debería contribuir a orden  $\delta^{n+1}$  y uno podría descartarlo (al precio de perder la invariancia de medida electromagnética) para imponer la invariancia de medida  $spin-3/2$ .

Otra cuestión a analizar es la identidad de Ward necesaria para implementar la invariancia de medida electromagnética al nivel de las amplitudes en presencia de un vértice  $\Delta\gamma\Delta$ . Esta identidad toma la forma

$$iG(p', -1)^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}(p - p')G(p, -1)^{\beta\nu} = G(p, -1)^{\mu\nu} - G(p', -1)^{\mu\nu}, \quad (7.6)$$

y puede demostrarse que el propagador completo (3.21) la satisface. En el caso de la dispersión radiativa  $\pi N$  la contribución del vértice  $\Delta\gamma\Delta$  a la amplitud será

$$\mathcal{M}_{\Delta\gamma\Delta} = i \left( \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi m_\Delta} \right)^2 q_q^\mu \Gamma_{\mu\sigma}(p')G(p', -1)^{\sigma\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}(e^*)G(p, -1)^{\beta\rho}\Gamma_{\rho\nu}(p)q^\nu, \quad (7.7)$$

donde  $e_\mu$  es el vector de polarización del fotón. Nótese que ahora la propiedad (7.1) no se verifica ni para el primer par de vértices en (7.7) ni para el segundo par, dado que

---

\*Si  $p_\Delta = p_N + q$  entonces  $p_\Delta/\Lambda_{\chi PT} = p_N/\Lambda_{\chi PT} + q/\Lambda_{\chi PT} \sim 1 + \delta^2 \simeq 1$  en el umbral



el vértice intermedio está evaluado en  $e^*$  y perdemos la condición de transversalidad, es decir

$$\Gamma^{\mu\nu}(e^*)p_\nu = \Gamma^{\mu\nu}(e^*)p_\mu \neq 0, \quad (7.8)$$

por lo que (7.4) no es más válida, por lo que no puede simplemente usarse un propagador “podado” (sin su sector 1/2) en el caso radiativo. Por supuesto, todo eso es consecuencia del hecho de que  $\mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta}$  no es invariante de medida *spin*-3/2. Entonces concluimos que en cualquier amplitud radiativa involucrando radiación de un fotón por una  $\Delta$  virtual el acoplamiento a estados virtuales de *spin* 1/2 es inevitable. Algunos tratamientos basados en  $\chi$ PT (PASCALUTSA Y OTROS 2007), pese a la observación anterior, supone  $\tilde{G}(p, -1)_{\mu\nu}$  como propagador en la amplitud radiativa (7.7), adoptando  $\Gamma \sim \tilde{\Gamma}$ . Al hacerse este reemplazo el vértice electromagnético queda reducido a  $\Gamma_{\alpha\beta}(e^*) \simeq g_{\alpha\beta}\not{e}^*$  dado que opera la restricción  $\gamma^\mu P_{\mu\nu}^{3/2} = p^\mu P_{\mu\nu}^{3/2} = 0$ . Pero no es posible pensar que (7.6) se satisface como identidad por  $\tilde{G}$  y  $g_{\alpha\beta}(\not{e}^* \rightarrow \not{p} - \not{p}')$ ; esta es válida únicamente cuando (7.6) aparece contraída entre vértices  $\tilde{\Gamma}$ , lo cual como vimos es incorrecto en el caso radiativo. Finalmente, es importante mencionar que en la misma referencia la identidad equivalente (para el vértice y el propagador vestidos)

$$\begin{aligned} i\Gamma_{dressed}^{\mu\beta}(p - p') &= G_d^{-1}(p', -1)^{\mu\nu} - G_d^{-1}(p, -1)^{\mu\nu} \\ &= G^{-1}(p', -1)^{\mu\nu} - G^{-1}(p, -1)^{\mu\nu} + \Sigma(p', -1)^{\mu\nu} - \Sigma(p, -1)^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde  $\Sigma$  (la autoenergía a un *loop* pión-nucleón de la  $\Delta$ ) es usada para fijar  $F(0) = 1 - \Sigma'(m_\Delta)$  en  $\Gamma_{d\mu\beta}(q) = F(q^2)\Gamma_{\mu\beta}(q) \approx F(q^2)g_{\alpha\beta}\not{q}$  con  $G \sim \tilde{G}$ , pero  $\tilde{G}$  no es invertible y la suposición  $\tilde{G}^{-1} = \not{p} - m_\Delta$  (necesaria para obtener el resultado) es incorrecta. Nuevamente interpretamos que se está suponiendo la identidad proyectada  $P^{3/2}(p') \rightarrow \dots \leftarrow P^{3/2}(p)$  en lugar de (7.9), dado que  $P^{3/2}(p')\Gamma_{\mu\beta}(e^*) = \Gamma_{\mu\beta}P^{3/2}(e) \neq 0$ . Podemos ver cómo funciona la expansión en potencias de  $\delta$  para arribar a una amplitud con invariancia de medida aproximada en el caso de la amplitud de dispersión  $\pi^0 p$  radiativa (el caso más simple) mostrada en la figura 7.1. Nótese que si queremos mantener invariancia de medida *spin*-3/2 al orden dominante en la expansión en  $\delta$  debería considerarse el Lagrangiano  $\mathcal{L}_T \equiv \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta} + \mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)}$  dado que  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$  (que viola invariancia *spin*-3/2) es un orden más alto que  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(1)}$ . Dado que el operador de isospin en este último Lagrangiano es  $(\phi^{0\dagger} \times \mathbf{T})_3 = 0$ , no tenemos contribuciones de las figuras 7.1(c) y 7.1(d), que deberían contribuir si consideramos  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$ , dado que el operador de isospin es  $\phi^{0\dagger} \cdot \mathbf{T} = T_3$ , el cual contribuye en la dispersión entre  $\Delta^+$  y  $p$ . Puede mostrarse, usando las reglas de Feynman obtenidas a partir de  $\mathcal{L}_T$ , la identidad de Ward (7.6), y mediante el reemplazo  $e^* \rightarrow k$  (para corroborar la invariancia de medida electromagnética) que

$$\mathcal{M}_T(e^* \rightarrow k) = -\mathcal{M}_{c+d}^2(e^* \rightarrow k), \quad (7.10)$$

donde en el lado derecho tenemos la amplitud correspondiente a los gráficos 7.1(c)+7.1(d) calculados con el Lagrangiano excluido  $\mathcal{L}_{\Delta N\gamma\pi}^{(2)}$ . Entonces la invariancia de medida electromagnética ( $\mathcal{M}_T(e^* \rightarrow k) = 0$ ) no se verifica, tendremos únicamente una aproximación si descartamos  $\mathcal{M}_{c+d}^2(e^* \rightarrow k)$  por ser de mayor orden en la expansión  $\delta$ . Por otro lado, si usamos  $\mathcal{L}_T \equiv \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{NEK} + \mathcal{L}_{\Delta\gamma\Delta} + \mathcal{L}_{NEK}(\partial_\mu \rightarrow q_\pi A_\mu)$ , la invariancia de medida electromagnética se cumple exactamente.

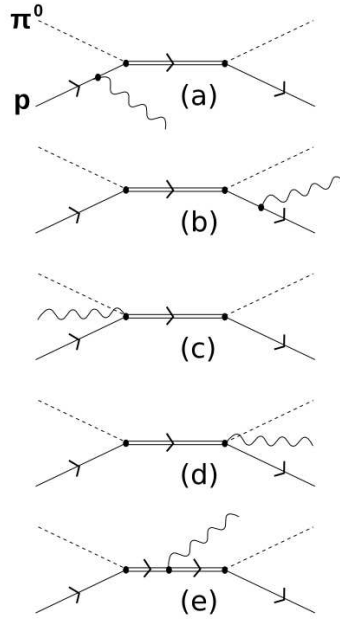


Figura 7.1: Diagramas de Feynman correspondientes a la dispersión radiativa  $\pi^0 p$ .

## 7.4. Correcciones radiativas a un *loop*

Una vez establecido que las invariancias de medida electromagnética y  $spin-3/2$  solo pueden coexistir aproximadamente y en un rango acotado del cuadrimomentum de la  $\Delta$ , dado que la propiedad (7.3) deja de cumplirse, es lógico sospechar que las correcciones radiativas a un *loop* de la dispersión pión-nucleón por resonancias  $\Delta$  (globos en la figura 7.2) pueden también dejar de cumplir con aquella propiedad. Para chequearlo, estudiemos las correcciones al vértice  $\pi N \Delta$  que se muestran explícitamente en la figura 7.3. Como se trata de una teoría no-renormalizable, es de esperar que la inclusión de correcciones a un *loop* requerirá la inclusión de contratérminos de orden superior. Recordemos que de acuerdo a la concepción moderna de renormalizabilidad todas las teorías son renormalizables en el sentido de que los infinitos pueden absorberse por contratérminos apropiados, pero una expansión sistemática en *loops* para las llamadas “teorías no-renormalizables” es inútil (no tiene poder predictivo) porque en cada paso se necesitan introducir nuevos coeficientes independientes (WEINBERG 2000). Por lo tanto, no tiene sentido calcular correcciones en *loops* en detalle. Sin embargo, es relevante saber la forma de los términos cuyas constantes de acoplamiento de menor dimensión inversa de masa, pues son los términos dominantes a bajas energías. En teoría efectiva de campos se deben incluir todos los términos de interacción compatibles con las simetrías de la teoría. (WEINBERG 2000). Sin embargo, para  $\mathcal{L}_P$  el término de menor orden en derivadas está ausente, siendo dicho término el tenido en cuenta en  $\mathcal{L}_{NEK}$ . Como veremos, este término surge en el vértice corregido a un *loop*. Trataremos las integrales divergentes con regularización dimensional.

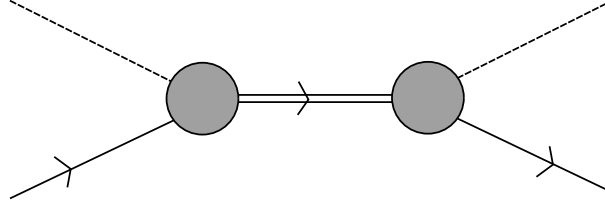


Figura 7.2: Contribución del polo en el propagador de la  $\Delta$  a la dispersión  $\pi N$  con vértices corregidos radiativamente.

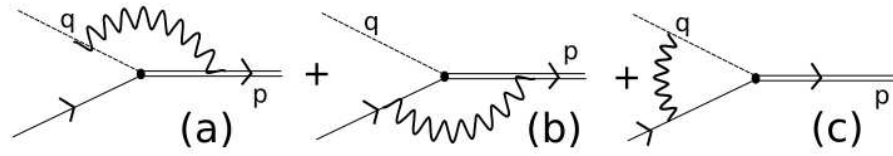


Figura 7.3: Correcciones radiativas a un *loop* al vértice  $\pi N \Delta$ .

No haremos el proceso completo de regularización, pues nos basta con identificar entre los términos divergentes la forma funcional que corresponda al contratérmino dominante a bajas energías.

Debido a la circulación de momento en el *loop*, no todos los términos exhiben una contribución  $q^1 p^0$  en su expansión de Taylor. Tomemos por ejemplo el vértice en el diagrama 7.3(a), que toma la forma

$$q_\pi q_\Delta \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m_\Delta} \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} (2q^\mu - s^\mu) \frac{g_{\mu\nu}}{s^2} \frac{1}{[(q-s)^2 - m_\pi^2]} \frac{(\not{s} + m_\Delta)}{[(p-s)^2 - m_\Delta^2]} \epsilon^{\delta\sigma\rho\tau} \gamma^5 \gamma_\sigma \times \\ \times (p_\delta - s_\delta)(q_\tau - s_\tau) \left( g_{\rho\eta} - \frac{1}{3} \gamma_\rho \gamma_\eta - \frac{1}{3m} \gamma_\rho (p_\eta - s_\eta) \right) \epsilon^{\nu\eta\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\alpha, \quad (7.11)$$

donde se usaron las ecuaciones (3.21), (3.22) y (7.3). El diagrama 7.3(b) contribuye como

$$q_N q_\Delta \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m_\Delta} \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{s^2} \gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{q} - \not{s} + m_N)}{[(p-q-s)^2 - m_N^2]} \frac{(\not{s} + m_\Delta)}{[(p-s)^2 - m_\Delta^2]} \epsilon^{\delta\sigma\rho\tau} \gamma^5 \gamma_\sigma \times \\ (p_\delta - s_\delta) q_\tau \left( g_{\rho\eta} - \frac{1}{3} \gamma_\rho \gamma_\eta - \frac{1}{3m} \gamma_\rho (p_\eta - s_\eta) \right) \epsilon^{\nu\eta\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\alpha, \quad (7.12)$$

donde por simplicidad se omitió la contribución del momento magnético anómalo. El diagrama 7.3(c) no es considerado pues no es posible obtener de él un término de orden  $q^1 p^0$ . Haciendo una expansión de Taylor de los vértices anteriores alrededor de  $p = 0$ ,  $q = 0$  produce una serie de términos de interacción a todos los órdenes en  $q$  y  $p$  (es decir, derivadas de  $\pi$  y  $\Delta$ ), que visten los vértices desnudos. La contribución  $q^0 p^1$  en (7.11) (el

correspondiente en (7.12) se anula) toma la forma

$$q_\pi q_\Delta \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m_\Delta} p_\delta \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\tau \frac{g_{\mu\nu}}{s^2} \frac{1}{[s^2 - m_\pi^2]} \frac{(\not{s} + m_\Delta)}{[s^2 - m_\Delta^2]} \epsilon^{\delta\sigma\rho\tau} \gamma^5 \gamma_\sigma \left( g_{\rho\eta} - \frac{1}{3} \gamma_\rho \gamma_\eta \right) \times \epsilon^{\nu\eta\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\alpha, \quad (7.13)$$

el cual diverge y no es derivativo en el campo  $\pi$ . Rompe invariancia quiral, por lo que se requiere un contratérmino que haga lo propio, lo cual no es una inconsistencia dado que esta es solo aproximada. Luego de la renormalización, esta contribución debería mantenerse pequeña a bajas energías. Tenemos una contribución  $q^1 p^0$  de (7.11):

$$q_\tau A^{\tau\beta} \equiv q_N q_\Delta \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m_\Delta} \times q_\tau \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\delta \frac{g_{\mu\nu}}{s^2} \frac{(m_N - \not{s})}{[s^2 - m_N^2]} \frac{1}{[s^2 - m_\pi^2]} \epsilon^{\delta\sigma\rho\tau} \gamma^5 \gamma_\sigma \left( g_{\rho\eta} - \frac{1}{3} \gamma_\rho \gamma_\eta \right) \epsilon^{\nu\eta\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\alpha \quad (7.14)$$

y una de (7.12):

$$q_\tau B^{\tau\beta} \equiv q_N q_\Delta \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m_\Delta} \times q_\tau \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\delta \frac{g_{\mu\nu}}{s^2} \gamma^\mu \frac{(m_N - \not{s})}{[s^2 - m_N^2]} \frac{(\not{s} + m_\Delta)}{[s^2 - m_\Delta^2]} \epsilon^{\delta\sigma\rho\tau} \gamma^5 \gamma_\sigma \left( g_{\rho\eta} - \frac{1}{3} \gamma_\rho \gamma_\eta \right) \epsilon^{\nu\eta\alpha\beta} \gamma^5 \gamma_\alpha. \quad (7.15)$$

Encaramos, por lo tanto (descartando términos en potencias impares de  $s$ )

$$G_{\nu\delta}^1(q) = \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\delta \frac{1}{s^2} \frac{m_N}{[s^2 - m_N^2]} \frac{m_\Delta}{[s^2 - m_\Delta^2]} \quad (7.16)$$

$$G_{\nu\delta}^2(q) = \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\delta \frac{1}{[s^2 - m_N^2]} \frac{1}{[s^2 - m_\Delta^2]} \quad (7.17)$$

$$G_{\nu\delta}^3(q) = \int \frac{d^4 s}{(2\pi)^4} s_\nu s_\delta \frac{1}{[s^2 - m_\pi^2]} \frac{1}{[s^2 - m_\Delta^2]}, \quad (7.18)$$

las cuales, luego de efectuar la integración angular, pueden escribirse como  $g_{\nu\delta} \times \text{integral divergente}$ . Tenemos, por lo tanto

$$q_\tau A, B^{\tau\beta} = q_\tau C^{1,0} (g^{\tau\beta} + Z^{1,0} \gamma^\tau \gamma^\beta), \quad (7.19)$$

donde  $C^{1,0}$  y  $Z^{1,0}$  son constantes infinitas. Los índices señalan que se trata de constantes de acoplamiento efectivas correspondientes a las potencias  $q^1 p^0$  \*\*. Para cancelar los infinitos de orden  $q^1 p^0$  debemos agregar al Lagrangiano una interacción de la forma  $\mathcal{L}_{NEK}$  con constantes desnudas infinitas.

---

\*\*En este lenguaje, por ejemplo,  $C^{1,1}$  correspondería a la constante de acoplamiento del vértice  $\mathcal{L}_P$ , y  $Z^{1,1} = -\frac{1}{2}$

## 7.5. Conclusiones del capítulo

Una teoría cuántica de campos que involucre Lagrangianos efectivos correspondientes al campo RS no puede ser renormalizable, y por lo tanto debe incluir todos los términos de interacción compatibles con las simetrías presentes. En este sentido, no hay ninguna razón fundamental para suprimir la interacción al orden más bajo  $\mathcal{L}_{NEK}$ , y considerar en cambio la interacción de segundo orden  $\mathcal{L}_P$  como la dominante a momentos pequeños. La motivación para usar ese Lagrangiano fue una simetría de  $\mathcal{L}_{free}(m_\Delta = 0)$  bajo una invariancia de medida del campo RS, donde el vértice fuerte correspondiente  $\pi N \Delta$  satisface la relación (7.3) que es la responsable de la propiedad (7.1), y por lo tanto del desacople de los estados intermedios de *spin* 1/2 en la amplitud de dispersión elástica. La invariancia de medida *spin*-3/2 no está realmente presente en la teoría debido al término masivo, pero el término masivo no arruina la propiedad (7.3). Pero cuando se introduce una interacción electromagnética por sustitución minimal la propiedad (7.3) sí deja de cumplirse en la amplitud radiativa, por lo que reaparece el fondo de *spin* 1/2. Para forzar la invariancia de medida *spin*-3/2 en Lagrangianos que inicialmente no lo son, en PASCALUTSA Y OTROS (2007) se propuso hacer transformaciones lineales en el campo RS de modo que el Lagrangiano original se transforme en uno invariante más términos “de contacto” entre los demás campos, los cuales presuntamente darían cuenta de la contribución a la amplitud que suele atribuirse al fondo de *spin* 1/2 (profundizaremos esto en el capítulo próximo, mostrando que esto no se verifica). El Lagrangiano así obtenido no es más invariante de medida electromagnética, pues contiene nuevos términos derivativos en la  $\Delta$ , y si se hace sustitución minimal se vuelve a romper la invariancia *spin*-3/2. Para salir del círculo vicioso, en esa referencia se propuso una expansión en potencias de un parámetro  $\delta$  en el marco de la  $\chi_{PT}$ , que supuestamente permite hablar de coexistencia de ambas invariancias de medida a un dado orden pero no en forma cerrada. El problema de esa propuesta particular es que al cambiar el Lagrangiano para tener invariancia *spin*-3/2 ya no estamos haciendo una expansión perturbativa alrededor de la teoría original dado que el Lagrangiano no es ni el original ni uno equivalente. Además los términos descartados para obtener esa coexistencia no son en general pequeños. Este procedimiento tendría sentido únicamente para tratar reacciones específicas en la región de baja energía para fotones, pero no es útil en general, y específicamente para la corriente vectorial en procesos inducidos por neutrinos, donde las energías transportadas por los bosones débiles no son pequeñas comparadas con la escala de la  $\delta$ .

Mostramos que la identidad de Ward para el vértice  $\Delta\gamma\Delta$ , que no puede transformarse en uno invariante *spin*-3/2 a través de una transformación lineal, no puede cumplirse con un propagador truncado no invertible, como es el propagador que proponen, ni es cierto que ese propagador truncado sea el resultado de evaluar el propagador completo entre vértices con invariancia *spin*-3/2 (la razón es que el sector 1/2 tiene dependencia en  $\vec{p}$ ).

Obsérvese que la ocurrencia del fondo de *spin* 1/2 no es en sí mismo un problema, dado que, como se expuso en la introducción, el intercambio de partículas no físicas virtuales contribuye usualmente a las amplitudes observables, y en no pocas ocasiones esas contribuciones son vitales para la consistencia de la teoría. Obsérvese también que no hay conexión alguna entre la existencia de estos fondos con los problemas de signatura del estilo de los reportados por Johnson y Sudarshan y por Hagen. El verdadero chequeo

de consistencia sería la ausencia de anticommutadores negativos, que como vimos en el capítulo anterior no es el caso. Incluso sin ese cálculo, observemos que aquí vimos que la interacción  $\mathcal{L}_P$  da lugar a la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$ , por lo que la teoría perdería consistencia meramente por consideraciones de renormalización.

## Capítulo 8

# Spin 3/2 mediante un Lagrangiano invariante de contacto

Ya hemos mencionado al final del capítulo 3 que la invariancia de contacto, fundamental para que el campo RS libre represente *spin* 3/2 puro, lo es de las ecuaciones de movimiento pero no de la acción. Creemos que esta es la razón por la que la teoría presenta violaciones de la invariancia de Lorentz. Lo lógico es entonces explorar la posibilidad de formular acciones invariantes de contacto, lo que nos lleva fuera del formalismo RS al valor “prohibido”  $A = -1/2$ . Veremos aquí que en efecto este campo se propaga causalmente, pero no admite una cuantización aceptable pues sobrevive un sector de *spin* 1/2 y norma negativa. Mostraremos que esto último puede solucionarse de un modo similar al propuesto por Stückelberg (por una aproximación contemporánea a este formalismo véase RUEGG Y RUIZ-ALTABA 2004), acoplando al RS un cierto campo auxiliar de Dirac, lo cual conduce al límite  $A = -1/2$  del campo de Bhabha-Gupta que describimos en el capítulo 4. Mostramos que las condiciones para lograr acoplamientos consistentes son sencillas, y mostramos explícitamente un acoplamiento entre un vectorespinor realmente neutro, un campo de Dirac y un pseudoescalar.

### 8.1. ¿Y si $A = -\frac{1}{2}$ , qué?

Hemos visto que los requisitos para tener un campo libre de *spin* 3/2 lleva a problemas aparentemente insolubles al introducir interacciones. Deberíamos preguntarnos entonces si el requisito  $A \neq -\frac{1}{2}$  es realmente imprescindible. Si eligiéramos  $A = -\frac{1}{2}$  de hecho nos saldríamos del formalismo RS. Hasta donde sabemos, el único trabajo donde esta posibilidad ha sido tomada seriamente es HABERZETTL (1998), donde se escribió la densidad Lagrangiana correspondiente y se reconoció la ocurrencia de una proyección en un subespacio, y se obtuvo un propagador igual al que hemos obtenido nosotros (ver más abajo). Nosotros mostraremos que esa proyección se corresponde con una simetría de medida y cuantizaremos la teoría empleando restricciones de primera clase rigurosamente, y demostraremos que la teoría se propaga causalmente pero que el sector de *spin* 1/2 corresponde a estados de norma negativa, por lo que se requiere aún proyectar también esos estados. Veremos que eso puede hacerse ampliando la invariancia de medida ya mencionada.

### 8.1.1. El nivel clásico

Consideremos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \Psi^\mu \left[ R \left( -\frac{1}{4} \right) \Lambda(A) R \left( -\frac{1}{4} \right) \right]_{\mu\nu} \Psi^\nu \quad (8.1)$$

donde las matrices  $R$  son las introducidas en la sección 3.2. Como  $\Lambda(A) = R(A/2)\Lambda(0)R(A/2)$  y  $R(-1/4)R(a) = R(-1/4)$  para cualquier  $a$ , se sigue que este Lagrangiano es  $\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}$ , y que es independiente de  $A$ . Usando esta misma propiedad de  $R(-1/4)$ , si hacemos una transformación de contacto cualquiera  $\Psi \rightarrow R(\eta)\Psi$  vemos que este Lagrangiano es invariante ante dichas transformaciones. Otra propiedad de esta acción es que, dado que  $R^{\sigma\nu}(-1/4)$  anula idénticamente los campos de la forma  $\gamma_\nu \gamma_\mu \Psi^\mu$ , estos quedan completamente indeterminados, de modo que la teoría tiene una restricción de primera clase. Podemos entonces simplemente imponer  $\gamma_\mu \Psi^\mu$  como una “fijación de medida”.

Se pueden introducir interacciones igual de fácil que en el formalismo RS, con el agregado interesante de que ahora no queda un parámetro off-shell indeterminado, dado que  $R(-\frac{1}{4})R(\eta)$  es igual a  $R(-\frac{1}{4})$ . Las ecuaciones de movimiento serán

$$\left[ (\not{p} - m)\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\gamma_\mu p_\nu + p_\mu \gamma_\nu) + \frac{3}{8}\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + \frac{m}{4}\gamma_\mu \gamma_\nu \right] \Psi^\nu + S_\mu = 0 \quad (8.2)$$

Obsérvese que si escribimos  $S_\mu = S'_\nu R^\nu_\mu$  (de modo que cada aparición del campo  $\Psi$  esté acompañado de una matriz  $R$ , como hicimos para que las interacciones del campo RS den lugar a amplitudes invariantes de contacto) la interacción  $\bar{\Psi}_\mu S^\mu + \bar{S}^\mu \Psi_\mu$  respeta automáticamente la invariancia de contacto, también al nivel de la densidad Lagrangiana. Por lo tanto podemos imponer el “fijado de medida”  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ , incluso en presencia de interacciones de la forma 3.35. Las ecuaciones de movimiento resultan entonces (con la condición extra  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ )

$$(\not{p} - m)\Psi^\mu - \frac{1}{2}\gamma^\mu p_\nu \Psi^\nu + S'_\nu R^{\nu\mu} = 0 \quad (8.3)$$

por lo que

$$\not{p}\Psi^\mu = m\Psi^\mu + \frac{1}{2}\gamma^\mu p_\nu \Psi^\nu - S'_\nu R^{\nu\mu} = 0 \quad (8.4)$$

Calculemos  $p_\mu \Psi^\mu$  como hicimos en el capítulo 3 con el campo RS:

$$p_\mu \Psi^\mu = p_\mu \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \Psi_\nu = \frac{1}{2}\gamma^\nu \not{p} \Psi_\nu \quad (8.5)$$

y reemplazando 8.4 en 8.5 y usando  $\gamma_\mu R^{\mu\nu} = 0$  tenemos  $p_\mu \Psi^\mu = p_\nu \Psi^\nu$ . Por lo tanto  $p_\mu \Psi^\mu = 0$  no se deduce de  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ . Contrayendo 8.2 con  $p^\mu$  e imponiendo  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  tenemos en cambio

$$\frac{1}{2}(\not{p} - 2m)p_\mu \Psi^\mu + p_\mu S^\mu = 0 \quad (8.6)$$



lo que sugiere que este campo es multispin, donde el sector de *spin*  $1/2$   $p_\mu \Psi^\mu$  sería físico y con una masa del doble de la de los estados de *spin*  $3/2$ . Confirmaremos esto cuando cuanticemos la teoría en forma covariante.

Es interesante notar que la corriente de Noether implicada por la invariancia de contacto es idénticamente nula. Para verlo, escribamos una densidad Lagrangiana para el campo RS antes ( $\mathcal{L}$ ) y luego ( $\mathcal{L}'$ ) de una transformación de contacto local  $\Psi^\mu \rightarrow R^\mu_\nu(a(x))\Psi^\nu$  con  $a$  infinitesimal. Como deseamos colectar la parte de  $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}$  de la forma  $\partial_\rho a j^\rho$ , conviene expresar  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}'$  en términos de  $\partial_\rho$ :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^\mu [i\gamma_\rho g_{\mu\nu} \partial^\rho + iA(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + iB\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \partial^\rho + m(C\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu})] \Psi^\nu$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}^\sigma R^\mu_\sigma(a(x)) [i\gamma_\rho g_{\mu\nu} \partial^\rho + iA(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + iB\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \partial^\rho + m(C\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu})] R^\nu_\tau(a(x)) \Psi^\tau$$

Encontramos entonces:

$$j^\rho = \bar{\Psi}_\mu [(2 + 4A)\eta^{\mu\rho} \gamma^\nu + (-1 + A + 4B)\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] \Psi_\nu \quad (8.7)$$

el cual se anula idénticamente para  $A = -\frac{1}{2}$  incluso antes de hacer  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ . Esto es razonable, ya que las interacciones pueden hacerse invariantes de contacto sin recurrir a una “derivada covariante”. Otra propiedad muy interesante de la invariancia de contacto es que el “fijado de medida” covariante fija completamente los estados físicos, por lo que no hay estados físicos espurios. Esto hace a la cuantización muy sencilla y sin complicaciones, al precio de dejar estados de norma negativa en el espectro físico.

### 8.1.2. Causalidad de propagación

A nivel clásico, como hemos visto en el capítulo 3, aparece el serio problema de la propagación acausal en presencia de campos de fondo. De estos fenómenos, el más conocido es el de VELO Y ZWANZIGER (1969), donde la ruptura de la invariancia de Lorentz se verifica hallando las normales a las superficies características, que en una teoría relativista deberían estar sobre el cono de luz. Para un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineal

$$(\Gamma^{\mu\nu\sigma} \partial_\sigma) \Psi_\nu + \text{términos no derivativos} = 0 \quad (8.8)$$

la normal a la superficie característica  $n_\sigma$  obedece

$$\det(\Gamma^{\mu\nu\sigma} n_\sigma) = 0 \quad (8.9)$$

Para el campo RS, que es un sistema con restricciones, necesitamos primero obtener un sistema regular (sin restricciones) de ecuaciones diferenciales el cual, suplementado con condiciones iniciales adecuadas, sea equivalente al sistema con restricciones. Esto se logra reemplazando las restricciones dentro de la ecuación de movimiento. Para el campo RS libre esas condiciones son  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  y  $\partial_\mu \Psi^\mu = 0$ , de modo que las ecuaciones de movimiento resultan

$$(i\partial\!\!\!/ - m)g_{\mu\nu} \Psi^\nu = 0 \quad (8.10)$$

así que la condición 8.9 queda

$$\det(i\not{g}_{\mu\nu}) = -(n^2)^8 = 0 \quad (8.11)$$

cuyas únicas soluciones están en el cono de luz. Cuando se consideran las interacciones resulta  $\gamma_\mu \Psi^\mu \neq 0$ , por lo que las ecuaciones para  $n$  se vuelven complicadas, conteniendo en particular soluciones tipo espacio.

Para el caso  $A = -\frac{1}{2}$ , una vez que se impone la elección  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ , las ecuaciones de movimiento resultan

$$\left((i\not{\partial} - m) - \frac{i}{2}\gamma_\mu \partial_\nu\right) \Psi^\nu + S^\mu = 0 \quad (8.12)$$

La matriz  $\Gamma^{\mu\nu\sigma}$  es por lo tanto la misma en presencia o ausencia de interacciones (con lo cual es fácil sospechar que la propagación es causal), valiendo:

$$\Gamma^{\mu\nu\sigma} = \gamma^\sigma g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma^\mu g^{\sigma\nu} \quad (8.13)$$

Dado que  $\det \Gamma^{\mu\nu\sigma} n_\sigma$  es una expresión covariante, podemos calcularla para estados representativos de clases conectadas por transformaciones de Lorentz:  $\mathbf{n} = (v, 0, 0, 0)$  para  $\mathbf{n}$  tipo espacio y  $\mathbf{n} = (v, v, 0, 0)$  para  $\mathbf{n}$  tipo luz. Para los primeros dos casos tenemos  $\det \Gamma^{\mu\nu\sigma} n_\sigma = v^{16}/16$ , por lo que la condición de que el determinante se anule lleva a  $v = 0$ , mientras que  $\det \Gamma^{\mu\nu\sigma} n_\sigma$  se anula idénticamente para  $\mathbf{n}$  en el cono de luz. Por lo tanto, los únicos vectores normales a superficies características son tipo luz, lo cual confirma que el campo se propaga causalmente incluso en presencia de interacciones.

### 8.1.3. Cuantización

#### Cuantización unitaria

Para mostrar del modo más directo la signatura de la teoría y la independencia de los anticommutadores en las interacciones haremos un cambio de variables en el campo de modo de expresar los grados de libertad del vectorespinor en términos de los grados físicos y de los espurios. Sea  $\chi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  espinores independientes, y expresemos

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= \gamma_0(\chi - \gamma_k \xi^k) \\ \Psi^k &= \gamma_k \chi + \xi^k \end{aligned} \quad (8.14)$$

que tiene la propiedad  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 4\chi$  (por lo que  $\chi$  es un campo espurio), y  $R(-1/4)_0^\mu \Psi_\mu = \gamma_k \xi^k$ ,  $R(-1/4)_i^\mu \Psi_\mu = \xi_i$ . Expresando el Lagrangiano como

$$\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}} = \bar{\Psi}_\sigma R(-1/4)^{\sigma\mu} \Lambda(-1/2)_{\mu\nu} R(-1/4)^{\nu\tau} \Psi_\tau + \bar{S}_\mu \Psi^\mu + \bar{\Psi}_\mu S^\mu$$

y expresando  $\Psi$  en términos de  $\chi$  y  $\xi_k$  el campo  $\chi$  es eliminado por el proyector  $R$ , y resulta (separando la parte espacial y temporal en  $\mathcal{L}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}} &= \xi_k^\dagger \gamma^0 [\gamma_i \gamma_0 \Lambda_{00} \gamma_0 \gamma_j - \gamma_i \gamma_0 \Lambda_{0j} - \Lambda_{i0} \gamma_0 \gamma_j + \Lambda_{ij}] \xi_j + \\ &\quad (S_0^\dagger \gamma_k + \mathcal{S}_k \gamma_0) \xi_k + \xi_k^\dagger (S_0 \gamma_k + \gamma_0 S_k) + \\ &= \xi_k^\dagger \left[ -i(\gamma_i \gamma_j + \delta_{ij}) \partial_0 - i\gamma_0 \gamma_i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \gamma_j + m \delta_{ij} \right] \xi_j + (S_0^\dagger \gamma_k + \mathcal{S}_k \gamma_0) \xi_k + \xi_k^\dagger (S_0 \gamma_k + \gamma_0 S_k) \end{aligned} \quad (8.15)$$

con lo cual se expresa  $\mathcal{L}$  en términos de los campos no espurios  $\xi_k$ . Es interesante notar que el término libre es igual al mostrado en 8.16 para cualquier valor de  $A$ , la dependencia en  $A$  quedando completamente circunscrita al acoplamiento entre  $\vec{\xi}$  y  $\chi$ , en el que este último, como se recordará, cumple el rol de un multiplicador de Lagrange salvo para  $A = -1/2$ . Como  $\gamma_\mu \chi$  es el sector  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ , los tres espinores  $\xi_k$  generan todo el sector  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$ . Esta teoría no tiene restricciones no triviales (en el mismo sentido en que no los tiene la teoría de Dirac). El modo más sencillo para verlo es cuantizando la teoría en el formalismo de FADDEEV Y JACKIW (1988) (expuesta en el capítulo 5), ya que el Lagrangiano es de primer orden. Aplicamos la extensión a fermiones del formalismo (GOVAERTS (1990), también expuesta en el capítulo 5. La matriz simpléctica es el coeficiente que acompaña  $\partial_0$  en el corchete de 8.16:

$$\omega_{ij} = -i(\delta_{ij} + \gamma_j \gamma_i) \quad (8.16)$$

la que es invertible, dando lugar a los siguientes anticommutadores:

$$[\bar{\xi}_i, \xi_j]_+ = \delta_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_i \gamma_j \quad (8.17)$$

de donde se sigue que la teoría no es definida positiva ni siquiera en el caso libre. El sector responsable de ello es el *spin* 1/2 sobreviviente.

### Cuantización covariante

Cuantizaremos ahora la teoría en forma covariante, nuevamente usando el formalismo simpléctico pero manteniendo ahora los grados de libertad redundantes y agregando un término de fijación de medida. El formalismo simpléctico se usa únicamente para manipular la estructura de restricciones, por las mismas razones invocadas en la subsección anterior; la estrategia usada para dar cuenta de las restricciones de primera clase será la cuantización de Gupta-Bleuler, análogamente al tratamiento del campo electromagnético (ver por ejemplo ITZYKSON Y ZUBER 1980). Para ello analizaremos primero la estructura de restricciones y mostraremos que la única restricción no trivial es realmente de primera clase. Observemos que el operador  $\Lambda(-1/2)_{\mu\nu}$  puede escribirse como  $W_{\mu\nu}\partial_0 + V_{\mu\nu}$ , donde (comparando con 5.18 y 5.23)  $W_{\mu\nu}$  es la forma simpléctica y  $\mathcal{H} = -\bar{\Psi}^\mu V_{\mu\nu} \Psi^\nu$  la densidad Hamiltoniana.  $W$  y  $V$  no son cuadritensores legítimos debido a la separación de los términos lineales en la derivada temporal, que son dependientes del sistema de coordenadas, pero aún así la estructura de índices de Lorentz tiene sentido. Debido a la idempotencia de  $R(-1/4)$  puede escribirse  $\Lambda(-1/2)_{\mu\nu} = R_\mu^\sigma \Lambda(-1/2)_{\sigma\tau} R_\nu^\tau$ , con lo que  $\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}$  queda

$$\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}} = \Psi^\mu \left[ R(-\frac{1}{4})_\mu^\sigma i W_{\mu\nu} \partial_0 R(-\frac{1}{4})_\nu^\sigma + R(-\frac{1}{4})_\mu^\sigma V_{\mu\nu} R(-\frac{1}{4})_\nu^\sigma \right] \Psi^\nu + \bar{S}_\mu \Psi^\mu + \bar{\Psi}_\mu S^\mu \quad (8.18)$$

Los proyectores en ambos términos entre corchetes hacen que  $\gamma_\mu$  sean modos cero tanto de  $W_{\mu\nu}$  como de  $\partial\mathcal{H}/\partial\Psi^\mu$ , por lo que confirmamos una vez más (siguiendo la sección 5.7.3) que se trata de restricciones de primera clase.

Realicemos entonces la cuantización de Gupta-Bleuler de este campo. Para hacerlo, agregamos al Lagrangiano  $\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}$  un término de “fijación de medida” cuyo rol es volver

dinámicas todas las componentes del campo. Queremos un Lagrangiano tal que el propagador depende de parámetros arbitrarios únicamente en términos que se cancelen con vértices invariantes de contacto, de modo que las amplitudes no dependan de esos parámetros, y tal que los anticommutadores a tiempos iguales tampoco dependan de ellos. El único Lagrangiano de esta forma tal que los parámetros arbitrarios no afectan la forma simpléctica (o los momentos canónicos conjugados en el formalismo de Dirac) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} = & \bar{\Psi}^\mu \left[ (i\not{\partial} - m)g_{\mu\nu} - \frac{i}{2}(\partial_\mu\gamma_\nu + \partial_\nu\gamma_\mu) + \frac{3i}{8}\gamma_\mu\not{\partial}\gamma_\nu + m\left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\gamma_\mu\gamma_\nu \right] \Psi^\nu \\ & + \bar{\Psi}^\mu S_\mu + \bar{S}^\mu \Psi_\mu \end{aligned} \quad (8.19)$$

donde el parámetro  $\lambda$  ha sido introducido de modo tal que para  $\lambda = 0$  recuperamos la teoría invariante de contacto. El término contribuirá al potencial. Las restricciones, siguiendo lo desarrollado en la sección 5.7.3, son ahora de segunda clase. Observemos que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}} + \lambda m \bar{\Psi}^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi^\nu$ , de modo que

$$\Omega = \gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}^\mu} \right)_i \mathcal{H} = \lambda m \gamma_\mu \Psi^\mu \quad (8.20)$$

$$\bar{\Omega} = \mathcal{H} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}^\mu} \right)_d = -\lambda m \bar{\Psi}^\mu \gamma_\mu \quad (8.21)$$

donde  $(\partial/\partial\Psi)_i$  y  $(\partial/\partial\Psi)_d$  son derivadas de Grassman a izquierda y derecha, respectivamente, como se definieron en la sección 5.8. Como dijimos,  $\lambda$  está en términos anulados por vértices invariantes de contacto, de modo que ningún observable dependerá de él, por lo que el único efecto del agregado de ese término es la imposición de la “elección de medida”  $\gamma^\mu \Psi_\mu = 0$ , lo cual lleva a la teoría de la subsección anterior. Por esto confiamos en el propagador resultante.

El propagador se obtiene de invertir el operador cinético de la densidad Lagrangiana con fijación de medida, y resulta ser:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{p^2 - m^2} \left[ (\not{p} + m)g_{\mu\nu} + \frac{2}{p^2 - 4m^2} (2mp_\mu p_\nu + p_\mu \not{p} p_\nu) \right] + \\ & \frac{1}{(p^2 - m^2)(p^2 - 4m^2)} \left[ \frac{p^2(p^2 - 5m^2) + 4m^4(4\lambda + 1)}{16m\lambda} \gamma_\mu \gamma_\nu + \right. \\ & \left. \frac{p^2 - 3m^2}{2} \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + (p^2 - 2m^2)(\gamma_\mu p_\nu + p_\mu \gamma_\nu) - m(\gamma_\mu \not{p} p_\nu + p_\nu \not{p} \gamma_\mu) \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

Obsérvese que el segundo término es físicamente irrelevante, pues el propagador aparecerá siempre entre vértices invariantes de contacto que los anulará. Quitando estos términos nuestro propagador es idéntico al obtenido en un contexto clásico por HABERZETTL (1998). Compárese la aparición del parámetro  $\lambda$  con la dependencia análoga del propagador del fotón en el parámetro de fijación de medida. Este propagador tiene dos propiedades interesantes. Una: su comportamiento asintótico a  $p$  grande es el mismo que para un campo de Dirac. Esto es muy interesante, pues la única dificultad para construir teorías renormalizables con campos de *spin* superior es el mal comportamiento del propagador a  $p$  grandes. Esa dificultad parece aquí allanada. La otra propiedad interesante es

la aparición del segundo polo de *spin* 1/2 y masa  $2m$  correspondiente a  $\partial_\mu \Psi^\mu$ . Este es el grado de libertad con el que nos hemos topado al nivel de las ecuaciones de movimiento y que resultó en estados de norma negativa. Si deseamos hacer funcionar este esquema de trabajo deberíamos encontrar la forma de que este sector esté ausente.

## 8.2. Resolviendo el problema de la signatura

En este punto estamos en una situación similar a la del formalismo vectorial cuando se plantea el Lagrangiano  $\partial_\mu A^\dagger_\nu \partial^\mu A^\nu + m^2 A^\dagger_\mu A^\mu$ : las ecuaciones de movimiento no seleccionan *spin* 1 exclusivamente, y el sector de *spin* 0 contribuye estados de norma negativa a la teoría. La solución que encontró Stueckelberg al problema (RUEGG Y RUIZ-ALTABA 2004) fue acoplar un campo escalar auxiliar, ajustando el acople de modo que el sector de *spin* 0 resultase de norma cero, dando lugar a una invariancia de medida aún con masa no nula. Esto permite hacer una teoría de campos vectoriales masivos renormalizable, de espectro definido positivo y con acoplamientos consistentes. Ensayaremos aquí esa misma estrategia.

Consideremos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi}^\mu \left( (i\partial - m)g_{\mu\nu} - \frac{i}{2}(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{3i}{8}\gamma_\mu \not{\partial} \gamma_\nu + \frac{m}{4}\gamma_\mu \gamma_\nu \right) \Psi^\nu \\ & + \bar{\chi} \not{\partial} \chi + \alpha(\partial_\mu \bar{\chi} R^{\mu\nu} \Psi_\nu + \bar{\Psi}_\mu R^{\mu\nu} \partial_\nu \chi) \end{aligned} \quad (8.23)$$

siendo  $\chi$  un campo de Dirac y  $R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - 1/4 \gamma^\mu \gamma^\nu$ . Las ecuaciones de movimiento son, para  $\chi$

$$\not{\partial} \chi + \alpha R^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi_\nu = 0 \quad (8.24)$$

y para  $\Psi$  (escribiendo  $\Lambda$  para denotar el operador cinético de  $\Psi$  en el Lagrangiano 8.23)

$$\Lambda_{\mu\nu} \Psi^\nu + \alpha R_{\mu\nu} \partial^\nu \chi = 0 \quad (8.25)$$

Imponiendo la condición de medida  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  las ecuaciones anteriores serán, respectivamente

$$\not{\partial} \chi + \alpha \partial^\mu \Psi_\mu = 0 \quad (8.26)$$

y

$$(i\partial - m)\Psi_\mu - \frac{i}{2}\gamma_\mu \partial_\nu \Psi^\nu + \alpha(\partial_\mu \chi + \gamma_\mu \not{\partial} \chi) = 0 \quad (8.27)$$

La ecuación de movimiento para  $\partial^\mu \Psi_\mu$  la obtenemos de contraer la ecuación 8.27 con  $\partial^\mu$ . Se obtiene:

$$\left( \frac{(2 - 3\alpha^2)i}{4} \not{\partial} - m \right) \partial^\mu \Psi_\mu = 0 \quad (8.28)$$

de donde vemos que la masa del sector  $\partial_\mu \Psi^\mu$  depende de  $\alpha$  (para  $\alpha = 0$  recuperamos la masa  $2m$  que ya habíamos visto). Pero si  $\alpha = \sqrt{2/3}$  el sector  $\partial_\mu \Psi^\mu$  deja de ser dinámico,

y la ecuación 8.28 se convierte en  $\partial_\mu \Psi^\mu = 0$ . Observemos que en ese caso el Lagrangiano 8.23 corresponde al límite  $A = -1/2$  de la teoría de Bhabha-Gupta (ver capítulo 4). Las ecuaciones de movimiento serán entonces

$$\not{\partial}\chi = 0 \quad (8.29)$$

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_\mu + \sqrt{\frac{2}{3}}\partial_\mu\chi = 0 \quad (8.30)$$

Observemos que la teoría es invariante ante

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow \chi + \xi \\ \Psi_\mu &\rightarrow \Psi_\mu + \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2}{3}}\partial_\mu\xi \end{aligned} \quad (8.31)$$

siempre que  $\not{\partial}\xi = 0$ . Esta invariancia de medida es análoga a la que se ve en el formalismo de Stueckelberg. Gracias a ella vemos que puede hacerse  $\chi = 0$  como fijación de medida, con lo cual el campo  $\Psi_\mu$  cumple con las condiciones de *spin* 3/2, pero de un modo invariante de contacto al nivel de la acción. Observemos por último que esto parece corresponder al caso catalogado por Bhabha (ver capítulo 4): un campo de *spin* 3/2 de norma definida positiva y otro de *spin* 1/2 de masa y norma nulas.

### 8.3. Interacciones

Lo interesante de la propuesta anterior es que la inclusión de interacciones tiene una prescripción clara para no alterar los anticommutadores: la interacción tiene que incorporar tanto la invariancia de contacto (devenida de medida para  $A = -1/2$ ) y la invariancia de medida introducida en la sección anterior. Si  $\Psi_\mu$  no es de Majorana (la partícula es realmente neutra), deberá aparte añadirse la invariancia de medida electromagnética. Esta es la tarea que queda pendiente, que no es inmediata, pero existen casos análogos como el de los bosones  $W$  que nos permite conjeturar que esa interacción electromagnética es posible.

Si  $\Psi^\mu$  es un vectorespinor de Majorana podemos exhibir un ejemplo de interacción que generaliza  $\mathcal{L}_{NEK}$  pero que presenta tanto la invariancia de contacto como la de medida 8.31:

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\Psi}^\mu R_{\mu\nu}(\partial^\nu\phi)\psi - \frac{g}{m}\sqrt{\frac{2}{3}}(\partial^\mu\bar{\chi})R_{\mu\nu}(\partial^\nu\phi)\psi + hc \quad (8.32)$$

Obsérvese que para la fijación de medida  $\chi = 0$  esta interacción se reduce a  $\mathcal{L}_{NEK}$ . Siendo esta interacción invariante, su cuantización no debería alterar los corchetes libres por lo que estaríamos ante una interacción, al fin, consistente, lo cual es un muy interesante avance teórico. Desde la perspectiva fenomenológica, sin embargo, esto no es más que un “modelo de juguete” porque los campos de interés fenomenológico no son Majorana. En ese caso aparecen dificultades ligadas a la invariancia de medida electromagnética por las derivadas en  $\mathcal{L}_{int}$ .

# Capítulo 9

## La resonancia $\Delta(1232)$

Dedicamos este capítulo a trabajar la aplicación fenomenológica del tipo de interacciones estudiadas para el campo RS: las resonancias hadrónicas. En particular, la  $\Delta(1232)$  es la más “liviana”, por lo que es la más sencilla de tratar con teoría de campos (a medida que se consideren regiones de energía mayor, el espectro irá creciendo exponencialmente, y con él la complejidad computacional de los procesos).

Repasaremos someramente la física hadrónica relevante y cómo se puede aplicar lo desarrollado hasta aquí. Luego exponemos nuestra contribución al campo, que fue en realidad por donde se inició esta tesis: mostraremos que a nivel fenomenológico la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$  es superior a la  $\mathcal{L}_P$ , en el sentido de que ajusta mejor los datos experimentales referidos a dispersión elástica de nucleones y piones mediados por las resonancias  $\Delta$ , independientemente de cualquier consideración formal de consistencia. Los resultados desmienten que ambas interacciones puedan ser consideradas como equivalentes salvo por términos de contacto “absorbibles” por los términos de fondo no resonantes en la amplitud, como se propuso en PASCALUTSA (2001).

### 9.1. El espectro hadrónico

Hoy en día se acepta que los grados de libertad más fundamentales de los campos que interaccionan por fuerzas nucleares fuertes son los quarks y los gluones, correspondientes a la teoría “fundamental” conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD). Si nos basamos en esto, la descripción de las partículas hadrónicas como especies asociadas a campos propios es “meramente fenomenológica”. Lo contradictorio es que si bien la QCD es una teoría elegante, renormalizable, invariante de medida, en pie de igualdad con la interacción electrodébil, pocas veces es útil para cálculos prácticos. Solo en experimentos donde todo se arregla para estudiar procesos con gran transferencia de momento transversal puede usarse una expansión perturbativa razonable en QCD. Pero también debemos entender los procesos hadrónicos en dominio de energías intermedias, por ejemplo en lluvias de rayos cósmicos y en detectores de neutrinos con energías del orden del GeV, los cuales contribuyen usualmente a los mayores errores sistemáticos por el alto grado de incertidumbre de los modelos. Estos pueden tener mayor o menor grado de “inspiración” en la QCD pero se basan en una heurística compleja que incluye siempre los grados de libertad hadrónicos, y con frecuencia elementos de las teorías previas a QCD como el intercambio

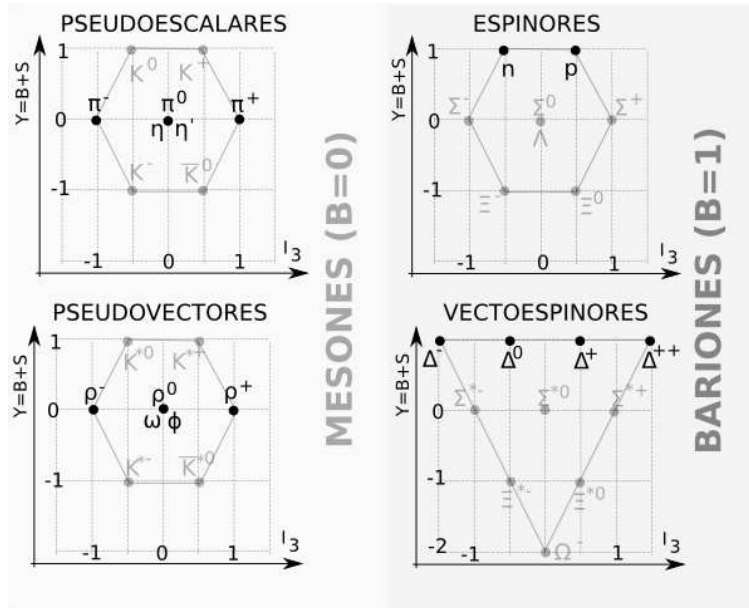


Figura 9.1: Los hadrones más livianos clasificados por sus números cuánticos. Los resaltados en negritas son los estados de extrañeza cero.

de pomerones, polos de Regge, etc, y a veces con insuficiente rigurosidad (GRIBOV 2009). Creemos por lo tanto que el estudio teórico de los grados de libertad hadrónicos es de gran interés práctico, aparte de ser un gran desafío intelectual.

Hasta donde sabemos hoy, el espectro hadrónico no solo no tiene cota, sino que el número de resonancias crece exponencialmente con la masa de estas. Las partículas hadrónicas catalogadas por el PDG ronda las mil, lo cual explica el alivio de poder contar con unos pocos quarks que den cuenta de todas. Para calibrar el ánimo de zozobra que generaba hacia los '50 la proliferación de hadrones recordemos el epígrafe del capítulo introductorio.

## 9.2. La simetría quiral

Si bien la simetría “fundamental” de la cromodinámica es  $SU(3)_c$  (el subíndice “c” significa “color”), la simetría más usada en física nuclear es una simetría aproximada llamada “simetría quiral”. Esta simetría fue postulada antes del desarrollo de la QCD, pero hoy está incorporada a la cromodinámica como una simetría emergente en el límite en el que un número de sabores es no masivo. Para visualizar más fácilmente las corrientes usaremos a los quarks como los grados de libertad relevantes. Observemos que  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es una corriente conservada; si consideramos dos sabores de quarks ( $u$  y  $d$ ) tendremos una simetría  $SU(2)_V$  (el subíndice “V” es por “vectorial” por provenir de corrientes vectoriales); si consideramos también al quark  $s$  tendremos una simetría  $SU(3)_V$ . Pero si los quarks tienen una masa muy pequeña se conservarán aproximadamente las corrientes de la forma  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ , lo que se conoce como PCAC (Partially Conserved Axial Currents) lo que da lugar a un grupo  $SU(2)_A$  (“A” por “Axial”) para dos quarks livianos, y  $SU(3)_A$  para tres. La invariancia (aproximada) completa será  $SU(N_s)_V \times SU(N_s)_A$  ( $N_s$  es el “número de



sabores”, es decir, la cantidad de clases de quarks que estamos considerando livianos).

La simetría quiral funciona muy bien a nivel de las interacciones pero muy mal al nivel del espectro: los hadrones parecen agruparse en multipletes de  $SU(N_s)_V$  en lugar de  $SU(N_s)_V \times SU(N_s)_A$ . Por esta razón se especuló con que, aparte de la pequeña ruptura electrodébil de la invariancia quiral, existiría una ruptura espontánea de escala mucho mayor y de naturaleza estrictamente hadrónica (RHO 2007). Esto daría lugar a un pseudo-Goldstone (pseudo por la pequeña ruptura explícita, por lo que el escalar tendrá una pequeña masa), que se identificó con el pión. La interpretación en QCD es que aparece un condensado (conjeturado) de quarks y antiquarks que provocan la ruptura. Igualmente, como hemos dicho, no es necesario el lenguaje de QCD para formular la invariancia quiral.

### 9.3. Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT)

La teoría de campos efectiva que implementa la invariancia quiral es el llamado “modelo sigma”. Una introducción elemental y fácil de seguir puede encontrarse en KOCH (1995). En ese trabajo y en muchos de la literatura se da una gran importancia al llamado “modelo sigma no lineal”, que fue un intento de hacer un modelo sigma sin un mesón escalar  $\sigma$  observable, pues su existencia y naturaleza eran sumamente dudosa. Sin embargo se ha alcanzado un consenso respecto de que el mesón sigma corresponde a la resonancia  $f_0(500)$ , que puede entenderse como el nombre moderno del  $\sigma$ . Por lo tanto se usa sin reservas el modelo sigma lineal.

En el modelo sigma, los tres campos pseudoescalares  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$  están acoplados a los generadores de isospín, y el campo  $\sigma$  está sujeto a un potencial por lo que tiene un valor de expectación. Tanto  $\pi^2$  como  $\sigma^2$  son invariantes ante transformaciones vectoriales de isospín, y la combinación  $\pi^2 + \sigma^2$  resulta invariante ante transformaciones axiales. Pero si  $\sigma$  tiene un valor de expectación el vacío no es invariante ante transformaciones axiales, de modo que resulta una ruptura espontánea de la invariancia axial. Para introducir la ruptura explícita de la invariancia axial (a una escala mucho menor que la espontánea) que de cuenta de la pequeña masa de los piones, se introduce en el potencial de la  $\sigma$  un pequeño término lineal, cuyo coeficiente queda en términos de la masa del pión. Finalmente, dado que esta escala de ruptura es pequeña, se puede introducir la corrección debida a esta ruptura explícita como una expansión perturbativa alrededor de esta escala. De este modo se encuentra que a bajas energías los procesos resultan dominados por la dinámica de los piones. Esta expansión perturbativa es la que se conoce como Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT).

A escalas algo mayores, cuando empiezan a aparecer bariones en estados intermedios que no pueden ignorarse, aún se proponen esquemas de perturbaciones quirales, aunque aparecen nuevas escalas y las incertezas aumentan. Cuando en los estados intermedios se proponen piones y  $\Delta$ s aparecen dos escalas, la masa del pión  $m_\pi$  y el umbral de excitación de la  $\Delta$   $m_\Delta - m_N$ . Ambas escalas deberían ser consideradas independientes, pero es habitual englobarlos (para el conteo del orden, es decir, para decidir qué diagramas se incluyen a un dado orden perturbativo) como si fueran la misma escala. Debemos recalcar que se trata de un criterio puramente pragmático y ad-hoc. En PASCALUTSA (2007) se defiende contabilizar ambas escalas como órdenes diferentes:  $m_\pi/\Lambda_{QCD} = \delta^2$  y

$(m_\Delta - m_N)/\Lambda_{QCD} = \delta$  a partir de consideraciones cualitativas. Se trata de un criterio tan ad-hoc como el anterior, una estrategia para llevar la contabilidad de los términos que se calculan a cada orden. El problema es que PASCALUTSA (2007) usa este conteo para decidir que determinados diagramas son despreciables respecto de otros, para argumentar la posibilidad de coexistencia de las invariancias de medida electromagnética y de *spin* 3/2, que en el capítulo 7 mostramos insostenible.

En lo que sigue se comparan los órdenes más bajos en la dispersión elástica pión - nucleón en el contexto del modelo sigma más sencillo para los vértices  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$ .

## 9.4. Teoría de campos efectiva para la $\Delta$

En fenomenología hadrónica las interacciones entre nucleones, piones y la resonancia de *spin* 3/2  $\Delta(1232 \text{ MeV})$  se modelizan usualmente como vértices entre campos de Dirac, pseudoescalar y RS, respectivamente. Las condiciones subsidiarias y la invariancia de contacto garantizan que no ocurran transiciones 3/2  $\rightarrow$  1/2, pero (como hemos visto ya) sí puede haber intercambio virtual de *spin* 1/2 debido a la  $\Delta$ .

Para implementar las interacciones  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$  se recurre a la producción de reglas de Feynman reducidas como en EL-AMIRI Y OTROS (1992). Escribamos el Lagrangiano libre como

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \bar{\psi}_\mu(x) \left\{ i\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(A) - mB_{\mu\nu}(A) \right\} \psi^\nu(x), \quad (9.1)$$

donde  $\Gamma$  y  $B$  se eligen, como hemos mostrado en el capítulo 3, de modo que las ecuaciones de movimiento seleccionen solo *spin* 3/2. Implementamos la invariancia de contacto como mostramos en el capítulo 2:  $G^{\mu\nu}(p, A) = R(-A - \frac{1}{2})_\alpha^{-1\mu} G^{\alpha\beta}(p, -1) R(-A - \frac{1}{2})_\beta^{-1\nu}$ , donde

$$G_{\mu\nu}(p, -1) = \left[ \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \hat{P}_{\mu\nu}^{3/2} - \frac{2}{3m^2} (\not{p} + m) (\hat{P}_{22}^{1/2})_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}m} (\hat{P}_{12}^{1/2} + \hat{P}_{21}^{1/2})_{\mu\nu} \right], \quad (9.2)$$

en términos de los proyectores introducidos en 3.22. Los vértices reducidos para las interacciones  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$  serán, respectivamente:

$$V_{\pi N \Delta}^\sigma = -\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi} p_\pi^\sigma (\mathbf{T} \cdot \Phi^\dagger), \quad (9.3)$$

$$V_{\pi N \Delta}'^\sigma = i \frac{f_{\pi N \Delta}}{m_\pi m} \gamma_5 \gamma_\beta p_\alpha p_{\pi\mu} \epsilon^{\alpha\mu\beta\sigma} (\mathbf{T} \cdot \Phi^\dagger), \quad (9.4)$$

donde hemos introducido la dependencia en el isospín a través del operador  $\mathbf{T}$  de transición  $\Delta \rightarrow \pi N$  y la amplitud de estado de isospin del pión  $\Phi$ . Obsérvese que, además de haber sido escritos en espacio de momentos, ambos vértices quedan en términos de la constante adimensional  $f_{\pi N \Delta}$ , que se obtiene a partir de  $g$  dividiéndola por las escalas de masa relevantes. La cantidad  $f_{\pi N \Delta}$  es uno de los parámetros a ajustar.

## 9.5. $\mathcal{L}_{NEK}$ vs $\mathcal{L}_P$ como modelos para la resonancia $\Delta(1232)$

Nuestra intención aquí es comparar numéricamente las interacciones  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$  con datos experimentales, en el contexto de un modelo simple de teoría de campos efectiva para la dispersión elástica entre protones y piones. La comparación entre  $\mathcal{L}_{NEK}$  y datos experimentales ya se ha hecho en LOPEZ CASTRO Y MARIANO (2002), y los parámetros de la  $\Delta$  (masa, ancho y constantes de acoplamiento) se obtuvieron consistentemente con el modelo. Aquí repetiremos esa tarea bajo los mismos estándares pero usando ahora el vértice  $\mathcal{L}_P$ ,

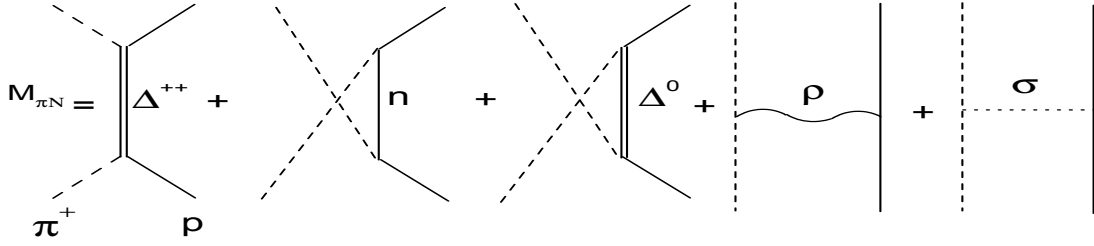


Figura 9.2: Diagramas de Feynman correspondientes a las diferentes contribuciones a la amplitud de dispersión elástica  $\pi^+ p$ .

Suponemos un modelo dinámico minimalista para calcular la amplitud involucrando como grados de libertad los nucleones, las resonancias  $\Delta^{++}, 0$ , la resonancia vectorial  $\rho$  y la resonancia escalar  $\sigma$ .<sup>\*</sup>; La amplitud de dispersión elástica tiene contribuciones de varias partes:

$$\mathcal{M}(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = \sum_{i=\Delta^{++}, \Delta^0, n, \rho, \sigma} \mathcal{M}_i(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) . \quad (9.5)$$

Las contribuciones a las amplitudes que involucran el intercambio de nucleones, los mesones  $\rho$  y  $\sigma$  (en el canal  $t$ ) se muestran en el segundo, cuarto y quinto gráfico de la figura 9.2 respectivamente. Serán incluidos a *nivel árbol* dado que proveen un fondo suave en la amplitud en la región de la resonancia; las varias densidades Lagrangianas necesarias para generarlos pueden encontrarse en LOPEZ CASTRO Y MARIANO (2002) y referencias incluidas. No usaremos factores de forma *ad-hoc* para los vértices involucrando hadrones, habitualmente invocados para lograr un mejor ajuste a los datos experimentales relevantes, y que suelen dar lugar a dependencias en los modelos. De acuerdo con la filosofía de los modelos Lagrangianos efectivos, en la descripción de las interacciones hadrónicas

<sup>\*</sup>A lo largo del capítulo supondremos que hay simetría de isospín en las masas y constantes de acoplamiento de los hadrones

a baja energía (como es el caso para la dispersión elástica de protones en la región de la resonancia de la  $\Delta$ ), debemos incorporar únicamente los grados de libertad relevantes a esa energía. En concordancia, esperamos que los factores de forma jueguen un rol importante únicamente a energías mayores. Nos concentraremos ahora en la forma explícita de la contribución dominante (resonancia en el canal  $s$  y primer diagrama en la figura 9.2) para comparar la amplitud obtenidas mediante las reglas de Feynman reducidas a partir del acoplamiento  $\mathcal{L}_{NEK}$

$$\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^c(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) = \frac{f_{\pi N \Delta}^2}{m_\pi^2} \bar{u}(p'_p, m'_s) p_\pi^\mu G_{\mu\nu}(p, -\frac{1}{3}) p_\pi^\nu u(p_p, m_s), \quad (9.6)$$

(siendo  $p = p_p + p_\pi$ ), con la obtenida a partir de  $\mathcal{L}_P$ , que luego de algunos cálculos puede escribirse como

$$\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^g(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) = \frac{f_{\pi N \Delta}^2 p^2}{m_\pi^2 m^2} \bar{u}(p'_p, m'_s) p_\pi^\mu (-) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \hat{P}_{\mu\nu}^{\frac{3}{2}} p_\pi^\nu u(p_p, m_s), \quad (9.7)$$

donde vemos que, dado que  $V_{\pi N \Delta}^\sigma p_\sigma = 0$ , que a su vez lleva a  $V_{\pi N \Delta}^{\prime\mu} (\hat{P}_{22}^{1/2})_{\mu\nu} = V_{\pi N \Delta}^{\prime\mu} (\hat{P}_{21}^{1/2})_{\mu\nu} = (\hat{P}_{12}^{1/2})_{\mu\nu} V_{\pi N \Delta}^{\prime\nu} = 0$ , la contribución del sector de  $spin$  1/2 en la propagación de la  $\Delta$  (ver (9.2)) es eliminado. Los superíndices  $c$  y  $g$  en los miembros izquierdos de 9.6 y 9.7 significan “convencional” y “gauge” respectivamente, y lo usamos en lugar de  $NEK$  y  $P$  pues es la notación que se usó en MARIANO Y OTROS (2012A, 2012B).

La amplitud elástica de las ecuaciones (9.6) y (9.7) divergen cuando la energía total  $\sqrt{p^2}$  se aproxima a  $m$ . Como es bien sabido, este mal comportamiento puede ser curado ingenuamente mediante el reemplazo  $m_\Delta^2 \rightarrow m_\Delta^2 - im_\Delta \Gamma_\Delta$  en el denominador del propagador de la  $\Delta^{++*}$  ( $\Gamma_\Delta$  es el ancho del decaimiento de la  $\Delta$ ). Sin embargo, la solución más simple que mantiene la invariancia de medida electromagnética en la amplitud de dispersión radiativa  $\pi^+p$  cuando se incorporan efectos de ancho finito es hacer el reemplazo  $m_\Delta^2 \rightarrow m_\Delta^2 - im_\Delta \Gamma_\Delta$  en *todas* las reglas de Feynman que involucren la resonancia  $\Delta^{++}$  (EL-AMIRI Y OTROS 1992). Este es el llamado “esquema de masa compleja”.

Algunos de los acoplamientos considerados en los Lagrangianos usados para construir los términos del fondo no resonante son tomados de otros procesos de baja energía. Por ejemplo, las constantes de acoplamiento  $(g_\rho^2, g_{\pi NN}^2)/4\pi = (2.9, 14)$  se tomaron de los decaimientos  $\rho\pi\pi$  y del análisis de los datos de la dispersión  $NN$  (SCHÜLTZ Y OTROS 1995, PEARCE Y OTROS 1991), mientras que el acoplamiento magnético  $\rho NN$   $\kappa_\rho = 3.7$  se extrajo de los valores de los momentos magnéticos nucleares. Las masas del mesón  $\rho$  y del nucleón fueron tomadas de NAKAMURA Y OTROS (2010), y la masa del hipotético mesón  $\sigma$ , que está en el rango 400-1000 MeV de acuerdo con NAKAMURA Y OTROS (2010) se fijó en 450 MeV o 650 MeV (SCHÜLTZ Y OTROS 1995, PEARCE Y OTROS 1991) dependiendo del modelo para  $\mathcal{M}_{\Delta^{++}}$ , tal como se analizó y usó previamente en LOPEZ CASTRO Y MARIANO (2002). Entonces, la masa y ancho de la  $\Delta$  y las constantes de acoplamiento  $g_\sigma = g_{\sigma\pi\pi} g_{\sigma NN}$  y  $f_{\Delta N \pi}$  son los únicos parámetros libres a ser ajustados a partir de datos experimentales de la sección eficaz total de la dispersión  $\pi^+p$ . En la figura (9.3) comparamos los resultados para la sección eficaz total calculada con la amplitud (9.5) a partir de

---

\*\*Los anchos finitos de la  $\Delta$  y de los mesones  $\rho$ ,  $\sigma$  no juegan rol alguno dado que esas resonancias no aparecen en el canal  $s$ .

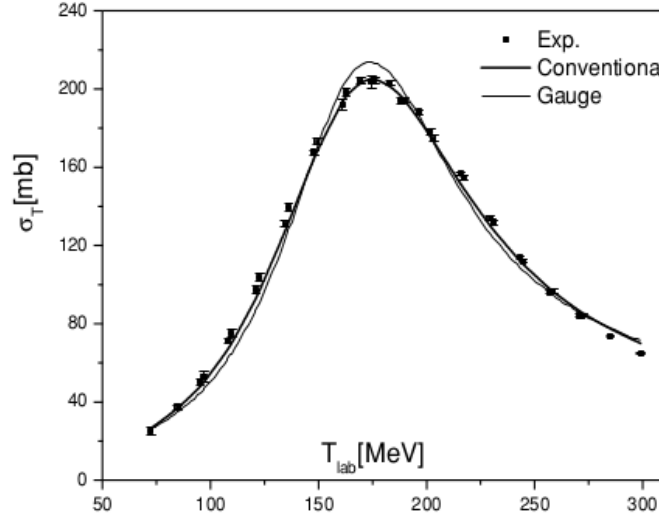


Figura 9.3: Sección eficaz elástica total  $\pi^+p$  calculada con la amplitud (9.5) con  $\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^c$  en la ecuación (9.6) ( $\mathcal{L}_{NEK}$ ) y  $\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^g$  de la ecuación (9.7) ( $\mathcal{L}_P$ ). Los datos se tomaron de PEDRONI Y OTROS (1978).

$\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^c$  (acoplamiento  $\mathcal{L}_{NEK}$ , ecuación (9.6)) y a partir de  $\mathcal{M}_{\Delta^{++}}^g$  (acoplamiento  $\mathcal{L}_P$ , ecuación Eq.(9.7)). Para el acoplamiento convencional, donde se usó  $m_\sigma = 650 MeV$ , tenemos un ajuste de  $f_{\Delta N\pi}^2/4\pi = 0.317 \pm 0.003$ ,  $m_\Delta = 1211.2 \pm 0.4 MeV$ ,  $\Gamma_\Delta = 88.2 \pm 0.4 MeV$ ,  $g_\sigma/4\pi = 1.50 \pm 0.12$ , y  $\chi^2/dof = 4.5^{***}$ , mientras que para el acoplamiento “de gauge” (donde los mejores ajustes se obtuvieron con  $m_\sigma = 650 MeV$ ) tenemos  $0.278 \pm 0.002$ ,  $1211.6 \pm 0.3 MeV$ ,  $76.62 \pm 0.25 MeV$ ,  $g_\sigma/4\pi = 1. \pm 0.05$ , y  $\chi^2/dof = 13.5$  respectivamente.

Para esos valores ajustados para los parámetros mostramos también la sección eficaz diferencial predicha para dos valores fijos de energía, comparándolos con datos disponibles, y mostramos los resultados para ambos acoplamientos  $\mathcal{L}_{NEK}$  y  $\mathcal{L}_P$  en las figuras (9.4) y (9.5).

## 9.6. Conclusiones del capítulo

En el contexto de este modelo minimalista, en el que tenemos un buen control de los parámetros y no tenemos fórmulas *ad hoc* para “mejorar los ajustes” (por lo que, creemos, la justificación teórica para todas las expresiones empleadas es óptima) el ajuste de los datos a la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$  es claramente superior a la lograda con  $\mathcal{L}_P$ . Los valores de los parámetros del mesón  $\sigma$  no pueden acomodarse de modo realista de modo que ambos acoplamientos resulten equivalentes como se propuso en PASCALUTSA (2001). De hecho, el ajuste óptimo es muy similar para ambos acoplamientos. El fondo de *spin* 1/2 sigue pareciendo, por lo tanto, una necesidad fenomenológica.

Esto, sumado a las conclusiones de los capítulos 6 y 7, permite concluir que no existe absolutamente ninguna razón para preferir  $\mathcal{L}_P$  por sobre  $\mathcal{L}_{NEK}$ : ni evita la inconsistencia en la signatura del espacio de Fock en presencia de campos de fondo, ni elimina en todos

\*\*\* Los últimos tres puntos en la cola superior de la sección eficaz total fueron excluidos.

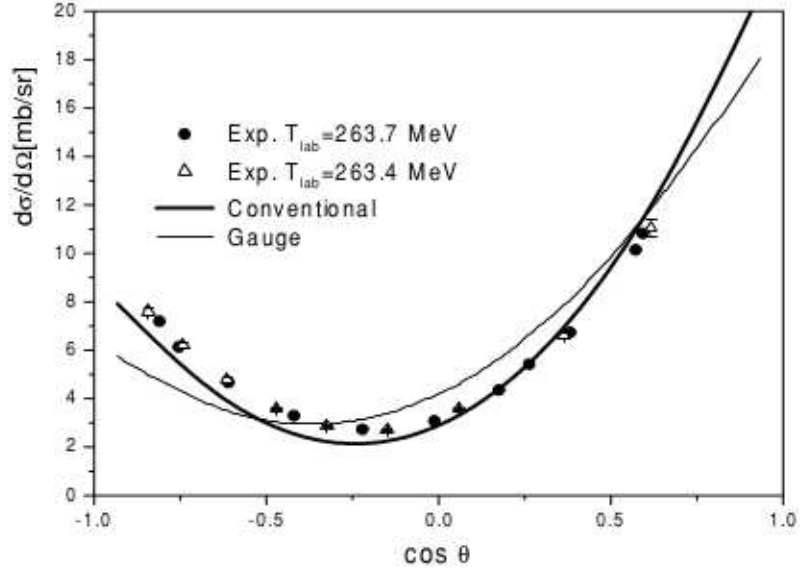


Figura 9.4: Idem a la Figura (9.3) pero para la sección eficaz diferencial de la dispersión elástica  $\pi^+p$ . Los círculos y triángulos denotan, respectivamente, datos experimentales de BUSSEY Y OTROS (1973), SADLER Y OTROS (1987). Las curvas denotan predicciones para  $T_{lab} = 263.7$  MeV.

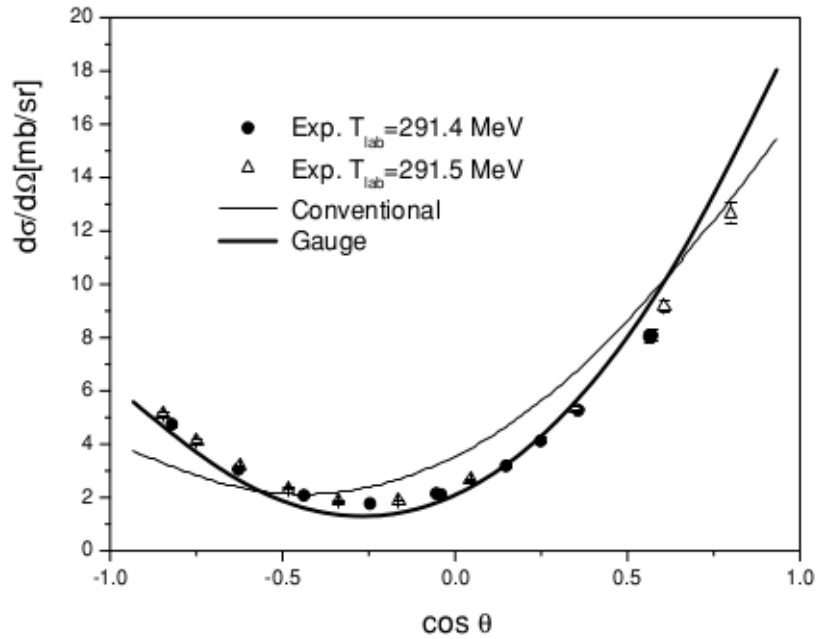


Figura 9.5: Idem a la figura (9.4) con predicciones a  $T_{lab} = 291.4$  MeV.

los casos el fondo de *spin* 1/2 (que aparece en amplitudes de dispersión radiativa y, de todos modos, no representa una inconsistencia desde el punto de vista teórico) ni permite un mejor comportamiento de la amplitud elástica a energías por encima de la masa de la  $\Delta$  (por el factor  $p^2$  introducido por las derivadas adicionales), tiene inconvenientes para implementar la invariancia de medida electromagnética que  $\mathcal{L}_{NEK}$  no presenta, y desde una perspectiva fenomenológica es claramente inferior. El hecho de que agregando más términos, factores de forma, etc el ajuste pueda mejorar no es en absoluto significativo: siempre pueden agregarse parámetros hasta que se ajuste cualquier conjunto de datos experimentales. Pero un ajuste fenomenológico solo es interesante si resulta predictivo: si son muchos los conjuntos de datos de los que se da cuenta con unos pocos parámetros que tienen pleno asidero desde consideraciones teóricas.





# Capítulo 10

## Conclusiones

En este capítulo resumiremos las principales conclusiones a las que arribamos en este trabajo de tesis.

En cuanto a la interacción  $\mathcal{L}_P$  (PASCALUTSA 1998) como superadora de  $\mathcal{L}_{NEK}$  (NATH Y OTROS 1971), podemos concluir que no existe ninguna justificación formal ni ventaja desde el punto de vista fenomenológico para preferirla, más bien nuestro trabajo apunta a lo contrario. A nivel fenomenológico (al ser usado el campo RS para describir la resonancia  $\Delta(1232)$ ) la interacción  $\mathcal{L}_{NEK}$  ajusta mejor los datos experimentales disponibles de secciones eficaces de dispersión de piones por nucleones en procesos elásticos. En particular, se ve la necesidad de la contribución de estados virtuales de *spin* 1/2 (el “fondo de *spin* 1/2”) que no puede enmascarse satisfactoriamente modificando los parámetros de las amplitudes no resonantes de intercambio de mesones, como se propone en PASCALUTSA (2001). Al introducir la interacción electromagnética la situación empeora: por un lado las amplitudes en que la resonancia emite o absorbe fotones presentan fondo de *spin* 1/2, dando por tierra con la propiedad más apreciada de  $\mathcal{L}_P$  de anular este fondo para la dispersión elástica  $\pi n$ . Se ve también que es imposible subsanar la incompatibilidad entre la pseudoinvariancia de medida de *spin* 3/2 con la invariancia de medida electromagnética, dificultad que  $\mathcal{L}_{NEK}$  no presenta. Finalmente, puede verse que las correcciones a un lazo en el campo electromagnético del vértice  $\mathcal{L}_P$  reintroduce  $\mathcal{L}_{NEK}$  al renormalizar, lo cual es de esperar:  $\mathcal{L}_{NEK}$  es la interacción de orden más bajo (la más relevante a bajas energías) que satisface todas las invariancias, y por lo tanto debería ser la interacción dominante en dichas energías. Debería señalarse que la apariencia de mejor comportamiento de la amplitud elástica obtenida a partir de  $\mathcal{L}_P$  debido a la ausencia del fondo de *spin* 1/2 no es tal a altas energías por la presencia de un factor  $p^2$  debido a la derivada extra sobre el campo RS.

A nivel formal se puede ver que  $\mathcal{L}_P$  presenta la misma inconsistencia señalada por HAGEN (1971) para  $\mathcal{L}_{NEK}$  (ocurrencia de estados de norma negativa en el espectro), como cabía esperar para una interacción lineal en el campo RS. Se han señalado los errores cometidos en la argumentación de consistencia en PASCALUTSA (1998) y se ha mostrado que el tratamiento riguroso de las restricciones conduce a la inconsistencia señalada, en completo paralelismo con el caso  $\mathcal{L}_{NEK}$ .

Lo expuesto en el párrafo anterior nos deja el antiguo problema de hallar interacciones consistentes para campos de *spin* 3/2. Una posible solución, argumentada por WEINBERG

(1996) y explorada por PORRATI Y RAHMAN (2009) es introducir interacciones sumamente complejas. No hemos explorado ese camino. De todos modos, el hecho de que aún a nivel clásico una acción covariante conduzca a soluciones no covariantes constituye un problema a un nivel extraordinariamente básico: el punto de desarrollar el formalismo Lagrangiano pagando el precio de introducir grados de libertad redundantes es que permite implementar las simetrías. Hemos mostrado que la paradoja se resuelve observando que en realidad la acción RS libre no es genuinamente covariante: para que las soluciones de las ecuaciones de movimiento correspondan a campos de *spin* 3/2 puros se debe introducir un parámetro  $A$  inobservable en la acción, del que resulta una invariancia de las ecuaciones de movimiento pero no de la acción. Por lo tanto la covariancia no está completamente implementada al nivel de la acción. Hemos visto que el límite  $A \rightarrow -1/2$  (que no corresponde al formalismo RS ya que aparece un sector de *spin* 1/2 que al cuantizar resulta de norma negativa) es efectivamente covariante al nivel de la acción y la anomalía de Velo-Zwanziger no aparece (la propagación es causal). Para subsanar el problema de la existencia de estados de norma negativa proponemos proceder como en el formalismo de Stuckelberg para el caso vectorial, agregando un estado de *spin* 1/2 ajustado de modo que los sectores adicionales sean grados espurios por la aparición de restricciones de primera clase. Vimos que ese acoplamiento debería producirse igual que en el campo de Bhabha-Gupta en el límite  $A \rightarrow -1/2$ , el que sería por lo tanto un candidato promisorio para proporcionar campos de *spin* 3/2 con interacciones consistentes.

Queda para trabajos posteriores cuantizar el campo de Bhabha-Gupta en el límite  $A \rightarrow -1/2$ , construir interacciones adecuadas para la descripción de las resonancias hadrónicas y la comparación de las predicciones de esas interacciones con datos experimentales.

# Apéndice A

## Representaciones de los grupos de Lorentz y de Poincaré

### A.1. Simetrías en 3+1 dimensiones

El espacio-tiempo relativista comparte las simetrías básicas del galileano, pero con algunas sutilezas. La homogeneidad del espacio se traduce en invariancia frente a traslaciones. La isotropía se corresponde con invariancia frente a rotaciones (tridimensionales), mientras que la relatividad del movimiento entre marcos inerciales (que en la física clásica se refleja en invariancia frente a transformaciones galileanas) corresponde a invariancia respecto a *boosts* (transformaciones que “rotan” entre coordenadas espaciales y tiempo). Aquí hay una diferencia importante con el caso clásico: mientras que el módulo del momento angular es invariante por transformaciones galileanas, no ocurre lo mismo ante *boosts*. Por lo tanto, el momento angular intrínseco no es un buen número cuántico en relatividad.

Introduzcamos lenguaje y notación. El grupo de transformaciones que deja invariante la cuadrinorma  $x_\mu x^\mu$  es el llamado grupo de Lorentz, e incluye rotaciones, *boosts*, paridad (inversión de las coordenadas espaciales) y reversa de tiempo (inversión de la coordenada  $x_0$ ). Si se añade al grupo de Lorentz el grupo conmutativo de traslaciones en el espacio-tiempo obtenemos el grupo de Poincaré (también llamado “de Lorentz no homogéneo”). Los generadores de las traslaciones son los operadores de cuádrimomento  $P^\mu$ . Una transformación de Lorentz actúa sobre las coordenadas espacio-temporales de modo que  $x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu$ . Supongamos que el cambio es infinitesimal:  $x'_\mu = x_\mu + (\delta x)_\mu$ , la condición de invariancia será  $x_\mu (\delta x)^\mu = 0$ . Si tenemos  $(\delta x)^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$  con  $\omega^{\mu\nu}$  infinitesimales la condición de invariancia será

$$\omega^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0; \tag{A.1}$$

como  $x_\mu x^\nu$  es simétrico en sus índices pero por lo demás arbitrario, la condición A.1 implica que  $\omega^{\mu\nu}$  es antisimétrico. Obsérvese que  $\omega^{\mu\nu}$  se contrae con un vector covariante dando lugar a uno contravariante; el generador de transformaciones de Lorentz será pues  $\omega^\nu_\mu = g_{\mu\tau} \omega^{\tau\nu}$ , que satisface  $\omega^i_j = -\omega^j_i$ ,  $\omega^0_i = \omega^i_0$  y  $\omega^0_0 = 0$ .

El interés de las transformaciones infinitesimales proviene del hecho de que el álgebra de Lie codifica por completo la información de la componente del grupo conectada con

la identidad. Conocida esta álgebra es directa la construcción de representaciones a través del mapa exponencial<sup>\*</sup>. Supongamos que queremos construir una representación del grupo de Poincaré sobre un espacio vectorial cualquiera  $V$ : entonces una transformación infinitesimal de Lorentz arbitraria actuará sobre este espacio mediante una combinación lineal de generadores de Lie:

$$\delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} i \omega^{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mu\nu} \mathbf{v} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathbf{v} \in V$ . Si  $\mathbf{v}$  es el espacio de vectores columna de las coordenadas del espacio-tiempo, entonces el operador  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  es simplemente una matriz de  $4 \times 4$  de la forma

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -i(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) \quad (\text{A.3})$$

(obsérvese que si bien estas matrices son idénticas a las de los generadores de  $SO(4)$ , su álgebra de Lie no será la de  $SO(4)$  porque al calcular los conmutadores el producto de matrices debe involucrar la métrica  $g^{\mu\nu}$  para contraer pares de índices). Por otro lado, ante una traslación infinitesimal  $\epsilon^\mu$  el vector  $\mathbf{v}$  se transforma según

$$\delta \mathbf{v} = \epsilon^\mu P_\mu \mathbf{v} \quad (\text{A.4})$$

de modo que un elemento genérico de transformación infinitesimal en  $V$  será

$$U_{inf} = 1 + \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu} + \epsilon_\mu P^\mu \quad (\text{A.5})$$

Para estudiar cómo transforman los objetos  $P^\mu$  y  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  puede someterse  $U_{inf}$  (dado en A.5) a una transformación de similaridad con  $U(\Lambda, a)$ , siendo  $(\Lambda, a)$  la transformación tal que  $(\Lambda, a)r = \Lambda r + a$ . Se obtiene:

$$U(\Lambda, a) \mathcal{J}^{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu (\mathcal{J}^{\rho\sigma} - a^\rho P^\sigma + a^\sigma P^\rho) \quad (\text{A.6})$$

$$U(\Lambda, a) P^\mu U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\rho^\mu P^\rho \quad (\text{A.7})$$

de donde vemos que:

- $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  es un cuadritensor de rango dos
- $P^\mu$  es un cuadvivector
- $\mathcal{J}^{ij}$  es el momento angular

Para hallar el álgebra que obedecen los operadores  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  y  $P^\mu$  podría simplemente estudiarse  $U(\Lambda, a) U_{inf} U^{-1}(\Lambda, a)$  con  $(\Lambda, a)$  a su vez infinitesimal, o puede hallarse en forma directa en el grupo usando  $P_\mu = i\partial_\mu$  y las matrices  $J^{\mu\nu}$  dadas en A.3. Para lo que sigue conviene dar el álgebra en términos de generadores dados como 3-vectores:

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^{23}, \quad \mathcal{J}^2 = \mathcal{J}^{31}, \quad \mathcal{J}^3 = \mathcal{J}^{12} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{K}^1 = \mathcal{J}^{10}, \quad \mathcal{K}^2 = \mathcal{J}^{20}, \quad \mathcal{K}^3 = \mathcal{J}^{30} \quad (\text{A.9})$$

---

<sup>\*</sup>Esto será así en tanto no nos preocupe que las representaciones no sean unitarias. Si los generadores son hermíticos el mapa exponencial lleva directamente a representaciones unitarias; en otros casos la generación de representaciones unitarias es una tarea notablemente delicada, que tendremos que enfrentar para pensar en los estados cuánticos físicos en la sección 2.2

Entonces  $\vec{\mathcal{J}}$  es un pseudovector, y  $\vec{\mathcal{K}}$  es un vector (hecho muy importante para comprender los efectos del operador de paridad sobre representaciones). En términos de los operadores dados en A.9 el álgebra de Poincaré resulta:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^i, \mathcal{J}^j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^k \\
[\mathcal{K}^i, \mathcal{K}^j] &= -i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^k \\
[\mathcal{J}^i, \mathcal{K}^j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}^k \\
[\mathcal{J}^i, P^j] &= i\epsilon_{ijk}P^k \\
[\mathcal{K}^i, P^j] &= iP^0\delta_{ij} \\
[\mathcal{K}^i, P^0] &= iP^i\delta_{ij} \\
[\mathcal{J}^i, P^0] &= 0 \\
[P^\mu, P^\nu] &= 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Para referencia futura:  $P^0$  es el generador de traslaciones temporales, por lo que si la representación es un espacio de Hilbert describiendo un sistema físico ese operador es el Hamiltoniano. Todos los operadores que conmutan respecto de  $P^0$  corresponden por lo tanto a cantidades conservadas. En el caso del álgebra A.10 estas cantidades son el cuadrimomento y el momento angular.

## A.2. Representaciones del grupo de Lorentz

Un grupo de Lie no compacto no tiene representaciones irreducibles unitarias de dimensión finita. Los grupos de Lorentz y de Poincaré son no compactos (debido a los *boosts*) y por lo tanto sus representaciones de dimensión finita no son unitarias. Su interés radica en que estas representaciones son las que corresponden a los cuadvectores, los cuadri-spinores y cualquier producto tensorial entre ellos.

Para construir las representaciones de dimensión finita del grupo de Lorentz ortocrono propio<sup>\*\*</sup> conviene reorganizar un poco el álgebra de Poincaré A.10. Definamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^i &= \mathcal{J}^i + i\mathcal{K}^i \\
\mathcal{B}^i &= \mathcal{J}^i - i\mathcal{K}^i;
\end{aligned} \tag{A.11}$$

en términos de esos operadores el álgebra para los  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  queda:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{A}^k \\
[\mathcal{B}^i, \mathcal{B}^j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{B}^k.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Esto significa que el álgebra de Lorentz puede escribirse como un producto  $SU(2) \times SU(2)$ . Si tuviéramos en cuenta los generadores de traslaciones, esa descomposición ya no es posible. Esta descomposición corresponde al morfismo  $SO(4) = [SU(2) \times SU(2)]/Z_2$ . Esta correspondencia es posible gracias a la  $i$  en A.11, mediante la cual  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son hermíticos mientras que  $\mathcal{K}$  no lo es. Al reemplazar los parámetros reales que acompañan a  $\mathcal{K}$  en el mapa exponencial por imaginarios se logra hacer  $SO(4) \rightarrow SO(3, 1)$ . El precio

---

<sup>\*\*</sup>Esto es, nos quedamos con la parte conectada con continuidad a la identidad. El grupo completo incluye las transformaciones discretas de paridad y reversión temporal.

que pagamos es que las representaciones así obtenidas no son unitarias, y por lo tanto no pueden usarse para implementar la simetría de Lorentz al nivel del espacio de estados.

Entonces las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo de Lorentz quedan caracterizadas por dos semienteros, cada uno de ellos correspondiente a una representación irreducible de  $SU(2)$ . La representación escalar corresponderá a la representación  $(0, 0)$ . Los productos tensoriales entre representaciones pueden descomponerse fácilmente en representaciones irreducibles usando la correspondiente descomposición en  $SU(2)$ ; por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 1) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (0, 0). \quad (\text{A.13})$$

Cada número del par que caracteriza una representación puede interpretarse como una representación quiral. La razón de esto es que las acciones de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  constituyen simultáneamente rotaciones y *boosts* (véase fig A.1), pero de quiralidades opuestas. Para mostrarlo formalmente, veamos la acción del operador de paridad  $\mathcal{P}$  sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P} &= \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P} + i\mathcal{P}\mathcal{K}\mathcal{P} = \mathcal{J} - i\mathcal{K} = \mathcal{B} \\ \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{P} &= \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P} - i\mathcal{P}\mathcal{K}\mathcal{P} = \mathcal{J} + i\mathcal{K} = \mathcal{A} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Por lo tanto, el efecto de  $\mathcal{P}$  en representaciones es invertir los números característicos:

$$\mathcal{P}(q_1, q_2) = (q_2, q_1). \quad (\text{A.15})$$

Por esta razón distinguiremos los factores en la descomposición de  $SO(3, 1)$  en modos “izquierdos” y “derechos”:

$$SO(3, 1) = SU(2)_L \times SU(2)_R \quad (\text{A.16})$$

(los subíndices son por “left” y “right”. Usamos esa notación para no desviarnos del uso en la literatura anglosajona). Notemos que cualquier partícula a la que se le pueda atribuir una paridad definida (esto es, todas salvo los neutrinos) deberán tener representaciones simétricas en números izquierdo y derecho. Las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz con paridad serán  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , etc.

Para terminar de darles significado a estas representaciones así construidas, vamos a conectarlas con las formas más habituales de dar estas representaciones: espinores (de Weil y de Dirac), cuadvectores y tensores.

### A.2.1. Representaciones espinoriales

Si hallamos una colección de matrices  $\gamma^\mu$  que cumplan con el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

donde  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , podemos construir una representación en la que

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.18})$$

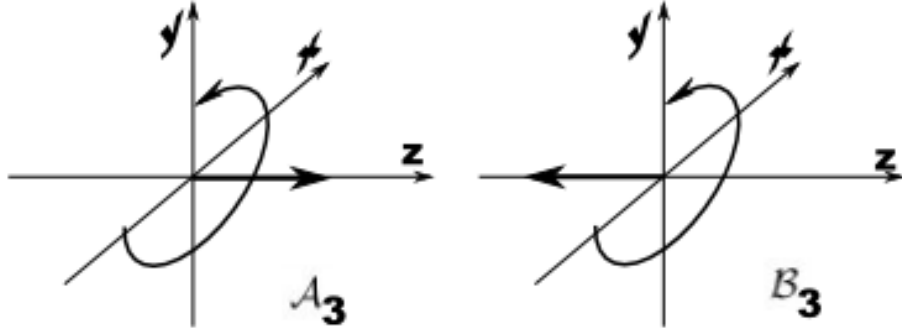


Figura A.1: Acción de los generadores  $\mathcal{A}_3$  y  $\mathcal{B}_3$ . Ambos generan simultáneamente una rotación en el plano  $xy$  y un *boost* en el eje  $z$ , pero el *boost* en  $\mathcal{B}_3$  es opuesto al generado por  $\mathcal{A}_3$ .

En rigor, estas representaciones no son representaciones de  $SO(3,1)$  sino de su álgebra “envolvente”  $SU(2) \times SU(2)$ : al hacer un giro completo el vector  $\mathbf{v} \in V$  cambia de signo. Que tales representaciones sean relevantes en física es una de las sorpresas que hacen apasionante la historia de la física cuántica relativista.

Una colección de matrices de  $4 \times 4$  que cumple con A.17 es la siguiente:

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = -i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

donde  $\vec{\sigma}$  son las matrices de Pauli. Esta es la llamada base de Weil, que es la más adecuada para nuestros propósitos. En esta base:

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Acá se ve claramente que  $V$  (el espacio de espinores de Dirac) es la representación  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ . Los vectores  $(1, 0, 0, 0)^T$  y  $(0, 1, 0, 0)^T$  generan la representación de Weil  $(\frac{1}{2}, 0)$  de espinores “izquierdos”, mientras que  $(0, 0, 1, 0)^T$  y  $(0, 0, 0, 1)^T$  generan la representación de Weil  $(0, \frac{1}{2})$  de espinores “derechos”.

## A2.2. Representación cuadvivectorial

Es fácil sospechar que la representación cuadvivectorial debe ser la  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pues ambas son de dimensión 4. Para comprobarlo explícitamente construyamos, a partir de  $J^{\mu\nu}$

(expresión A.3), las matrices  $\mathcal{A}_3$ ,  $\mathcal{B}_3$ ,  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$ :

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{A}^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Claramente, los autoestados de  $\mathcal{A}_3$  y  $\mathcal{B}_3$  son  $1/2$  y  $-1/2$ . El estado “de peso máximo” (con autovalores  $+1$  para ambos operadores) es  $(0, 1, i, 0)^T$ ; por aplicaciones sucesivas de  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$  se van obteniendo los otros tres vectores de la representación irreducible:  $\mathcal{A}^-(0, 1, i, 0)^T = (-1, 0, 0, -1)^T$ ,  $\mathcal{B}^-(0, 1, i, 0)^T = (1, 0, 0, -1)^T$ ,  $\mathcal{A}^-\mathcal{B}^-(0, 1, i, 0)^T = (0, -1, i, 0)^T$ .

### A.2.2. Tensores

Si conocemos los generadores para un par de representaciones  $G_{V_1}$  y  $G_{V_2}$  sobre espacios  $V_1$  y  $V_2$ , la representación sobre el producto tensorial  $V_1 \otimes V_2$  puede construirse en forma muy directa. Si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \in V_1 \otimes V_2$ :

$$\mathbf{u} + \delta\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \delta\mathbf{v}_1) \otimes (\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v}_2) = [(1 + \theta G_{V_1}) \otimes (1 + \theta G_{V_2})]\mathbf{u} \quad (\text{A.23})$$

por lo que

$$G_{V_1 \otimes V_2} = G_1 \otimes 1 + 1 \otimes G_2 \quad (\text{A.24})$$

Para construir una representación basta con encontrar los estados de peso máximo y aplicar sobre estos los operadores de bajada (en este caso:  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$ ) de todos los modos posibles. Por ejemplo:

$$(\mathcal{A}_{V_1 \otimes V_2}^-)^2 = (\mathcal{A}_{V_1}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{A}_{V_2}^-)^2 = (\mathcal{A}_{V_1}^-)^2 \otimes 1 + 1 \otimes (\mathcal{A}_{V_2}^-)^2 + 2\mathcal{A}_{V_1}^- \otimes \mathcal{A}_{V_2}^- \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{A}_{V_1 \otimes V_2}^- \mathcal{B}_{V_1 \otimes V_2}^- = \mathcal{A}_{V_1}^- \mathcal{B}_{V_1}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{A}_{V_2}^- \mathcal{B}_{V_2}^- + \mathcal{A}_{V_1}^- \otimes \mathcal{B}_{V_2}^- + \mathcal{B}_{V_1}^- \otimes \mathcal{A}_{V_2}^- \quad (\text{A.26})$$

Procediendo así, y teniendo en cuenta que las potencias de  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$  eventualmente se anulan, habremos completado la base de autoestados de la representación.

Veamos como ejemplo un tensor de rango 2. Este puede pensarse como perteneciente al producto tensorial de dos espacios cuadvectoresiales, de modo que tendremos la representación

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 1) \oplus [(1, 0) \oplus (0, 1)] \oplus (0, 0) \quad (\text{A.27})$$



La descomposición del tensor en esas representaciones irreducibles puede hallarse por argumentos de simetría y conteo: como el único escalar que puede construirse alrededor del tensor  $T^{\mu\nu}$  es la traza  $T^\mu_\mu$ , la representación unidimensional  $(0, 0)$  corresponde a la parte diagonal de  $T^{\mu\nu}$ ; la parte antisimétrica de  $T^{\mu\nu}$  tiene seis grados de libertad, y la parte simétrica de traza nula, nueve, por lo que deben corresponder a  $(1, 0) \oplus (0, 1)$  y  $(1, 1)$  respectivamente.

Esta correspondencia puede mostrarse de modo explícito construyendo  $\mathcal{A}^+$ ,  $\mathcal{B}^+$ ,  $\mathcal{A}_3$  y  $\mathcal{B}_3$  usando A.24. Por ejemplo, si llamamos  $\mathcal{A}_3^{(1,0) \oplus (0,1)}$  al generador  $\mathcal{A}_3$  sobre cuadvectores (construido en la subsección anterior) tendremos

$$\mathcal{A}_3^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = 1 \otimes \mathcal{A}_3^{(1,0) \oplus (0,1)} + \mathcal{A}_3^{(1,0) \oplus (0,1)} \otimes 1 \quad (\text{A.28})$$

El estado de peso máximo será

$$(0, 1, i, 0)^T \otimes (0, 1, i, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

(que es simétrico de traza nula). Si le aplicamos  $\mathcal{A}^-$  obtendremos

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{A}^-] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Continuando con este proceso (aplicando de todos los modos posibles potencias de  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$  al estado de peso máximo) se obtiene una base de las matrices simétricas de traza nula, que además son autoestados simultáneos de  $\mathcal{A}_3$  y  $\mathcal{B}_3$ . Las otras dos representaciones pueden obtenerse de modo análogo: el estado de peso máximo en  $(1, 0) \otimes (0, 1)$  será el estado con autovalor de  $\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3$  igual a 1 y anulado simultáneamente por  $\mathcal{A}^+$  y  $\mathcal{B}^+$ , y  $(0, 0)$  es el espacio con autovalor  $\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3$  igual a cero, y anulado simultáneamente por  $\mathcal{A}^+$  y  $\mathcal{B}^+$ .

### A.2.3. Vectorespinores

Usando las ideas de la subsección anterior puede expandirse explícitamente cualquier representación tensorial en suma de representaciones irreducibles. En esta subsección lo vamos a aplicar al tensor entre la representación cuadvectorial y la espinorial, que es la representación empleada en el formalismo de Rarita-Schwinger (RS).

Desde argumentos estrictos de simetría, lo que tenemos es

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] = \left[\left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (\text{A.31})$$

La representación  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  debe corresponder al único objeto construible con índices de Dirac solamente:  $\gamma_\mu \Psi^\mu$ . La representación  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$  debe corresponder por lo tanto a los  $\Psi^\mu$  que satisfagan la condición  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$ .

Puede construirse la representación  $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$  en forma explícita usando la representación tensorial entre la cuadvectorial y la espinorial (en base de Weil) ya construidas. Pongamos en el factor izquierdo de los productos tensoriales la representación cuadvectorial, y en el derecho la de Dirac. El estado de peso máximo de  $(1, \frac{1}{2})$  es:

$$\left(1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

donde usamos la notación  $(j_L, j_R; j_{3L}, j_{3R})$ . El estado de peso máximo de la representación  $(\frac{1}{2}, 1)$  es

$$\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Puede verse en forma directa que ambos satisfacen  $\gamma_\mu \Psi^\mu = 0$  (ver último párrafo de esta subsección). Para obtener los otros estados de la representación debemos actuar con  $\mathcal{A}^-$  y  $\mathcal{B}^-$  sobre esos estados de todas las maneras posibles:

$$\left(1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\right) = [\mathcal{A}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{A}^-] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\left(1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\right) = [\mathcal{B}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{B}^-] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \left(1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\right) &= [\mathcal{A}^- \mathcal{B}^- \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{A}^- \mathcal{B}^- + \mathcal{A}^- \otimes \mathcal{B}^- + \mathcal{B}^- \otimes \mathcal{A}^-] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

y así siguiendo.

Para pasar de la notación por productos tensoriales a componentes debe tenerse en cuenta que si  $\Psi = v \otimes \chi$ , siendo  $\Psi$  un vectorespinor,  $v$  un cuadvivector y  $\chi$  un espinor de Dirac, entonces  $\Psi^\mu = v^\mu \chi$ . Así, por ejemplo,  $\gamma \cdot \Psi = (\gamma_\mu v^\mu) \chi$ .

## A.3. Representaciones del grupo de Poincaré

### A.3.1. Representaciones inducidas

En primer lugar, es importante recalcar que deseamos describir estados de partículas físicas. La cantidad  $P_\mu P^\mu$  tiene, para cada tipo de partícula, un único autovalor invariante que es  $m^2$ . En esta subsección nos vamos a concentrar en el caso de partículas de masa no nula.

Observemos que el grupo de Lorentz tiene un subgrupo compacto para el que es sencillo construir representaciones unitarias de dimensión finita: el grupo de rotaciones. Por otro lado, el “culpable” de la no compacidad es el grupo de *boosts*, para el que sin embargo pueden construirse representaciones no unitarias usando el mapa exponencial. La idea es explotar ambos grupos en la construcción de representaciones irreducibles unitarias del grupo de Poincaré.

Supongamos que tenemos un “campo” (en el sentido matemático) de objetos transformando bajo cierta representación del grupo de Lorentz  $R$  que actúa sobre  $V$ . Esto es: tenemos una función  $v : M \rightarrow V$  siendo  $M$  el espacio de Minkowski  $3 + 1$  dimensional. Notaremos tal función como  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in M$ . Es razonable definir la acción de una transformación de Lorentz activa  $\Lambda$  a través de:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(\Lambda)\{\mathbf{v}(\mathbf{x})\} = R(\Lambda)[\mathbf{v}(\Lambda\mathbf{x})] \quad (\text{A.37})$$

Notemos que en este punto no tiene sentido preguntarse por la unitariedad de esta acción, hasta que no definamos una métrica en el espacio funcional al que pertenece  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Si expresamos  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  en base de momentos podemos deducir cómo actúa esta representación sobre autoestados de  $P^\mu$ :  $e^{-i\mathbf{p} \cdot (\Lambda\mathbf{x})} = e^{-i(\Lambda\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}$ , por lo que si  $\phi_p(x)$  es un autoestado de  $P^\mu$

$$\mathcal{R}(\Lambda)\{\phi_p(x)\} = R(\Lambda)[\phi_{\Lambda\mathbf{p}}(x)] \quad (\text{A.38})$$

Ahora estamos en condiciones de introducir la idea de representación inducida. Tomemos un cuádrimomento “estándar”  $k^\mu$  desde el que podamos llegar a cualquier otro a través de *boosts* “estándar”

$$\mathbf{p} = L_{\mathbf{p}} \mathbf{k}. \quad (\text{A.39})$$

Habrà entonces un subgrupo del grupo de Lorentz que dejarà invariante  $k^\mu$ . Ese subgrupo suele denominarse “grupo pequeño”<sup>\*\*\*</sup>, y a partir de sus representaciones queremos “inducir” representaciones del grupo completo. Introducimos ahora una métrica en el espacio funcional (si se trata, por ejemplo, de estados cuánticos de una partícula, las funciones

<sup>\*\*\*</sup> little group en la literatura anglosajona

pueden normalizarse para que representen una partícula por unidad de volumen); a partir de ahora supondremos que los autoestados  $\phi_p(x)$  están normalizados respecto de esa métrica. Entonces, para lograr que la acción de  $\mathcal{R}(\Lambda)$  sea unitaria redefiniremos ligeramente A.38 para el caso de *boosts* puros:

$$\mathcal{R}(L_{\mathbf{p}})\{\phi_{\mathbf{k}}(x)\} = N(\mathbf{p})R(\Lambda)[\phi_{\Lambda\mathbf{p}}(x)] \quad (\text{A.40})$$

La normalización  $N(\mathbf{p})$  se elige de modo que el estado imagen esté normalizado, de modo que tendremos

$$\mathcal{R}(L_{\mathbf{p}})\{\phi_{\mathbf{k}}(x)\} = \phi_{\mathbf{p}}(x). \quad (\text{A.41})$$

Veamos ahora la acción de una transformación de Lorentz cualquiera  $\Lambda$  sobre un autoestado de  $P^\mu$ :

$$\mathcal{R}(\Lambda)\{\phi_{\mathbf{p}}(x)\} = \mathcal{R}(L_{\Lambda\mathbf{p}}) \cdot \mathcal{R}(L_{\Lambda\mathbf{p}}^{-1}\Lambda L_{\mathbf{p}}) \cdot \mathcal{R}(L^{-1}(\mathbf{p}))\{\phi_{\mathbf{p}}(x)\} \quad (\text{A.42})$$

donde la denominada “Rotación de Wigner”  $W(\Lambda, \mathbf{p}) = L_{\Lambda\mathbf{p}}^{-1}\Lambda L_{\mathbf{p}}$  pertenece al grupo pequeño (deja invariante  $\mathbf{k}$ ). De este modo, la acción bajo el grupo pequeño y la acción de *boosts* definen la acción de todo el grupo de Lorentz. Puede demostrarse (WEINBERG 1996, sección 2.5), y es importante tenerlo en cuenta, que la rotación de Wigner correspondiente a un elemento del grupo pequeño  $\Lambda_{peque}$  es el propio  $\Lambda_{peque}$ :  $W(\Lambda_{peque}, \mathbf{p}) = \Lambda_{peque}$ .

Para el caso de partículas masivas puede elegirse:

$$\mathbf{k} = (m, 0, 0, 0) \quad (\text{A.43})$$

de modo que el grupo pequeño es el grupo de rotaciones  $SO(3)$ . Consideremos la representación  $R$  del grupo de Lorentz sobre  $V$  dada por el mapa exponencial, y definamos para  $\mathcal{R}$  las acciones dadas por rotaciones puras  $\Lambda_{rot}$ :

$$\mathcal{R}(\Lambda_{rot})\{\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\} = R(\Lambda_{rot})[\phi_{\Lambda_{rot}\mathbf{p}}(x)] \quad (\text{A.44})$$

Obsérvese que por construcción esta acción es unitaria. Esta definición, junto con A.40 y A.41, definen una representación unitaria para el grupo de Lorentz que parte de las representaciones unitarias del grupo pequeño. De ahí el nombre de “inducidas”. Observemos que el operador de Pauli-Lubanski expresado en el subgrupo pequeño es  $m\mathcal{J}^{ij}$ , o sea que el empleo de autoestados de ese operador equivale al uso de representaciones del grupo de rotaciones, pero *pensado como grupo pequeño*. Esta es la razón por la que, abusando del lenguaje, hablamos de *spin* en física relativista.

# Bibliografía

AHLUWALIA, D. V. Y KIRCHBACH, M. (2001). *(1/2, 1/2) representation space. An ab initio construct*. Mod. Phys. Lett. A, **16** (21) 1377-1383.

ARGYRES, P. C. Y NAPPI, C. R. (1989). *Massive spin-2 bosonic string states in an electromagnetic background*, Phys. Lett. B **224** (1) 89-96.

AURILIA, A. Y UMEZAWA, H. (1969). *Theory of High-Spin Fields*. Physical Review, 182(5), 1682.

AURILIA, A., KOBAYASHI, M. Y TAKAHASHI, Y. (1980). *Remarks on the constraint structure and the quantization of the Rarita-Schwinger field*. Physical Review D, 22(6), 1368.

BAAKLINI, N. S. Y TUIITE, M. (1978). *Dirac quantisation of massive spin-3/2 field*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 11(6), L139.

BADAGNANI, D., BARBERO, C. Y MARIANO, A. (2015). *Consistence between spin-3/2 gauge couplings and electromagnetic gauge invariance*, J. Phy. G **42** (12) 125001.

BADAGNANI, D., MARIANO, A. Y BARBERO, C. (2017). *Inconsistency of the “spin-3/2 gauge invariant” interaction of Rarita-Schwinger fields*. J. Phys. G **44** (2).

BARCELOS-NETO, J. Y WOTZASEK, C. (1992). *Symplectic quantization of constrained systems*. Modern Physics Letters A, 7(19), 1737-1747.

BENMERROUCHE, M., DAVIDSON, R. M. Y MUKHOPADHYAY, C. N. (1989). *Problems of describing spin 3/2 baryon resonances in the effective Lagrangian theory*, Phys. Rev. C **39** (6) 2339-2348.

BERESTETSKII, V. B., LIFSHITZ, E. M., Y PITAEVSKII, L. P. (1982). *Quantum electrodynamics (Vol. 4)*. Butterworth-Heinemann.

BHABHA H. J. (1945). *Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles*, Rev Mod Phys **17**, 200-216.

BHABHA H. J. (1949). *On the postulational basis of the theory of elementary particles*,

Rev Mod Phys **21**, 451-462.

BHABHA H. J. (1951). *On a class of relativistic wave equations of spin 3/2*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A (Vol. 34, No. 6, pp. 335-354).

BHABHA H. J. (1952). *II. An equation for a particle with two mass states and positive charge density*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 43(336), 33-47.

BUSSEY, P. J., CARTER, J. R., DANCE, D. R., BUGG, D. V., CARTER, A. A. Y SMITH, A. M. (1973).  *$\pi p$  elastic scattering from 88 to 292 MeV*. Nuclear Physics B, 58(2), 363-377.

CASALBUONI, R. (1976). *On the quantization of systems with anticommuting variables*. Il Nuovo Cimento A (1965-1970), 33(1), 115-125.

CORSON, E. M. (1953). *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blackie & Son, London.

COX, W. (1976). *Algebras for causal external electromagnetic interaction in higher-spin theories*. J. Phys. A **9** (6), 1025.

DIRAC, P.A.M. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiba University, New York.

EL-AMIRI, M., LOPEZ CASTRO, G. Y PESTIEAU, J. (1992).  *$\Delta^{++}$  contribution to the elastic and radiative  $\pi^+ p$  scattering*. Nuclear Physics A, 543(4), 673-684.

FADDEEV, L. Y JACKIW, R. (1988). *Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*. Physical Review Letters, 60(17), 1692.

FIERZ, M. Y PAULI, W. (1939). *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, Proc. R. Soc. Lond. A **173**, 211-232

FISK, C. Y TAIT, W. (1973). *Skew-symmetric tensor-spinor formulation of the spin 3/2 field*, J. Phys. A **6** 383-392.

GLASS, A. S. (1971). *On the Harish-Chandra Condition for First-Order Relativistically-Invariant Free Field Equations*, Commun. Math. Phys. **23** 176-184.

GOVAERTS, J. (1990). *Hamiltonian reduction of first-order actions*. International Journal of Modern Physics A, 5(18), 3625-3640.

GREEN, M. B., SCWARTZ, J. H. Y WITTEN, E. (1987). *Superstring Theory. Volume I. Introduction*, Cambridge University Press.

GRIBOV, V. (2009). *Strong Interactions of Hadrons at High Energies*, Cambridge Uni-

versity Press.

GUPTA, K. K. (1954). *Bhabha's Equation for a Particle of Two Mass States in Rarita-Schwinger Form*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 222, No. 1148 (Feb. 23, 1954), pp. 118-127.

HABERZETTL, H. (1998). *Propagation of a massive spin-3/2 particle*. arXiv preprint nucl-th/9812043.

HAGEN, C. R. (1971). *New inconsistencies in the quantization of spin 3/2 fields*. Phys. Rev. D, 4(8), 2204.

HARISH-CHANDRA (1947). *Irreducible Representations of the Lorentz Group*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **189** (1018) 372-401.

HASUMI, A., ENDO, R. Y KIMURA, T. (1979). *Dirac quantisation of a massive spin-3/2 particle coupled with a magnetic field*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 12(8), L217.

HENNEAUX, M. Y TEITELBOIM, C. (1992). *Quantization of gauge systems*. Princeton university press.

HENNEAUX, M., KLEINSCHMIDT, A. Y GÓMEZ, G. L. (2011). *Remarks on gauge invariance and first-class constraints*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 272(1), 141-150.

HURLEY, W. J. (1971). *Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin*, Phys. Rev. D **4** (12) 3605-3516.

HURLEY, W. J. (1972). *Consistent Description of Higher-Spin Fields*, Rev. Phys. Lett. **29** (21) 1475-1477.

HURLEY, W. J. (1974). *Invariant bilinear forms and the discrete symmetries for relativistic arbitrary-spin fields*. Phys. Rev. D **10** (4) 1185-1200.

HURLEY, W. J. Y SUDARSHAN (1974), *Algebraic Study of a Class of Relativistic Wave Equation* Ann. Phys. **85** 546.590.

ITZYKSON, C. Y ZUBER, J, (1980). *Quantum Field Theory*, Mc GraW Hill, 136

JOHNSON, K. Y SUDARSHAN, E. C. G. (1961). *Inconsistency of the local Field Theory Spin 3/2 Particles*, Ann. Phys. **13** 126-145.

KHALIL, M. A. C. Y SEETHARAMAN, M. (1978). *Fisk-Tait equation for spin-3/2 par-*

*ticles*. Phys. Rev. D **18** (8) 3040-3044.

KIRCHBACH, M. Y AHLUWALIA, D. V. (2001). *A critique on the supplementary conditions of Rarita-Schwinger framework*. arXiv preprint hep-th/0108030.

KIRCHBACH, M. Y AHLUWALIA, D. V. (2002). *Spacetime structure of massive gravitino*. Phys. Lett. B, **529** (1) 124-131.

KOCH, V. (1995). *Introduction to chiral symmetry*. arXiv preprint nucl-th/9512029.

KRAJCIK, R. A. Y NIETO, M. M. (1977A). *Bhabha first-order wave equations. VII. Summary and conclusions*, Phys Rev D **15** 455.

KRAJCIK, R. A. Y NIETO, M. M. (1977B). *Historical development of the Bhabha first order relativistic wave equations for arbitrary spin* Am J Phys **45**, 818-822.

LOPEZ CASTRO, G. Y MARIANO, A. (2002). *Elastic and radiative  $\pi^+ p$  scattering and properties of the  $\Delta^{++}$  resonance*. Nuclear Physics A, 697(1), 440-468.

LUNARDI, J. T., PIMENTEL, B. M., TEIXEIRA, R. G. Y VALVERDE, J. S. (2000). *Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance*, Phys. Lett. A **268** 165-173.

MACIEJKO, J. (2013). *Representations of Lorentz and Poincaré groups*. Lecture notes from Physik-Department T30F, Technische Universität München.

MACKEY, G. W. (1952). *Induced representations of locally compact groups I*. Annals of Mathematics, 101-139.

MARIANO, A., BARBERO, C. Y BADAGNANI, D. (2012A). *The use of  $\pi N \Delta$  gauge couplings in elastic  $\pi N$  scattering*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 39(3), 035005.

MARIANO, A., BARBERO, C. Y BADAGNANI, D. (2012B). *Conventional vs gauge couplings in elastic  $\pi N$  scattering*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 387, No. 1, p. 012010). IOP Publishing.

MATHEWS, P. M., SEETHARAMAN, M. Y GOVINDARAJAN, T. R. (1979). *Inconsistencies of Glass's equations for spin-3/2 particles*, Phys. Rev. D **19** (10), 2947-2957.

MILTON, K. A. (1995). *Julian Schwinger: Source Theory and the UCLA Years. From Magnetic Charge to the Casimir Effect*. arXiv preprint hep-ph/9505293.

MOHAN, G. (1968). *Interacting Rarita-Schwinger Field*. Physical Review, 176(5), 1931.

NAGPAL, A. K. (1973). *Interacting Bhabha field with arbitrary spin*, Nuc. Phys. B **53**



634-642.

NAKAMURA, K. Y PARTICLE DATA GROUP. (2010). *Review of particle physics*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 37(7A), 075021.

NAPPI, C.R. Y WITTEN, L. (1989). *Interacting Lagrangian for massive spin-two field* Phys. Rev. D 40, 1095.

NAPSUCIALE, M. Y KIRCHBACH, M., (2003). *Avoiding superluminal propagation of higher spin waves via projectors onto  $W^2$  invariant subspaces*. arXiv preprint hep-ph/0311055

NAPSUCIALE, M., KIRCHBACH, M. Y RODRIGUEZ, S. (2006). *Spin 3/2 beyond the Rarita-Schwinger framework*. The European Physical Journal A **29** (3) 289-306.

NATH, L. M., ETEMADI, B., Y KIMEL, J. D. (1971). *Uniqueness of the interaction involving spin-3/2 particles*. Physical Review D, 3(9), 2153.

NEDJADI, Y. Y BARRETT, R. C. (1993). *On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation*, 1 Phys. G: **19** (9) 87-98,

PASCALUTSA, V. (1998). *Quantization of an interacting spin-3/2 field and the  $\Delta$  isobar*, Phy. Rev. D **58** (9) 096002.

PASCALUTSA, V. (2001). *Correspondence of consistent and inconsistent spin-3/2 couplings via the equivalence theorem*, Phys. Lett. B **503** (1), 85-90.

PASCALUTSA, V., VANDERHAEGHEN, M. Y YANG, S. N. (2007). *Electromagnetic excitation of the  $\Delta(1232)$ -resonance*. Physics reports, 437(5), 125-232.

PEARCE, B. C. Y JENNINGS, B. K. (1991). *A relativistic, meson exchange model of pion-nucleon scattering*. Nuclear Physics A, 528(3-4), 655-675.

PEDRONI, E. Y OTROS (1978). *A study of charge independence and symmetry from  $\pi^+$  and  $\pi^-$  total cross sections on hydrogen and deuterium near the  $\rho$ ,  $\rho$  resonance*. Nuclear Physics A, 300(2), 321-347.

PELÁEZ, J. R. (2015). *From controversy to precision on the sigma meson: a review on the status of the non-ordinary  $f_0(500)$  resonance*. arXiv preprint arXiv:1510.00653.

PORRATTI, P. Y RAHMAN, R. (2009). *Causal Propagation of a Charged Spin 3/2 Field in an External Electromagnetic Background*, Phys. Rev. D **80** (2), 025009.

PRABHAKARAN, J., SEETHARAMAN, M. Y MATHEWS, P. M. (1974). *Causality and indefiniteness of charge in spin 3/2 field theories*, J. Phys. A : Math. Gen., **8**, (4), 560-565.

PRABHAKARAN, J., SEETHARAMAN, M. Y MATHEWS, P. M. (1975). *Causality of propagation of spin 3/2 fields coupled to spinor and scalar fields*, Phys. Rev. D **12** (10),

3191-3194.

PRABHAKARAN, J., GOVINDARAJAN, T. R. Y SEETHARAMAN, M (1977). *Causality of propagation of the Bhabha-Gupta field coupled to external electromagnetic and gravitational fields*, Nuc. Phys. B **127** 537- 547.

RARITA, W. Y SCHWINGER, J. (1941). *On a theory of particles with half-integral spin*. Physical Review, 60(1), 61.

RHO, M. (2007). *Hidden local symmetry and the vector manifestation of chiral symmetry in hot and/or dense matter*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 168, 519-526.

RUEGG, H. Y RUIZ-ALTABA, M. (2004). *The Stueckelberg field*. International Journal of Modern Physics A, 19(20), 3265-3347.

SAAR, R., GROOTE, S., OTS, J. Y LIIVAT, H. (2011A). *“Dynamical” interactions and gauge invariance*. Phys. Rev. D **84** (6) 065022.

SAAR, R., GROOTE, S., LIIVAT, H. Y OTS, I. (2011B). *Gauge and Lorentz transformation placed on the same foundation*. Advances in Mathematical Physics **2011**.

SADLER, M. E., BRISCOE, W. J., FITZGERALD, D. H., NEFKENS, B. M. K. Y SEFTOR, C. J. (1987). *Differential cross sections for  $\pi^+ p$  and  $\pi^- p$  elastic scattering from 378 to 687 MeV/c*. Physical Review D, 35(9), 2718.

SCHÜTZ, C., HOLINDE, K., SPETH, J., PEARCE, B. C. Y DURSO, J. W. (1995). *Dynamical model for correlated two-pion exchange in the pion-nucleon interaction*. Physical Review C, 51(3), 1374.

SINGH, L. P. S. (1973). *Noncausal Propagation of Classical Rarita-Schwinger Waves*. Phys. Rev. D **7** (4), 1256-1258.

VAN NIEUWENHUIZEN, P. (1981). *Supergravity*. Physics Reports, 68(4), 189-398.

VELO, G. Y ZWANZIGER, D. (1969). *Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential*, Phys. Rev. **186** (5), 1337-1341.

WATANABE, H., SHIMODAIRA, H. Y KAMEFUCHI, S. (1967). *The Stueckelberg formalism for Rarita-Schwinger field with spin 3/2*. Nuclear Physics B, 2(3), 360-368.

WEINBERG, S. (1996). *The Quantum Theory of Fields. Volume I. Foundations*, Cambridge University Press.

WEINBERG, S. (1997). *What is quantum field theory, and what did we think it is?*. arXiv preprint hep-th/9702027.

WEINBERG, S. (2000). *The quantum theory of fields vol 2: Modern applications*, Cam-

bridge Univ Pr (2000), sects 15.6 and 15.7