QCD Sum Rules Based on Canonical Commutator Relations

[a]早田　智也、[a,b]初田　哲男、[a]佐々木　勝一
([a]東京大学、[b]理研)
E-mail: t.hayata@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

1. はじめに

量子多体系や場の量子論を用いて記述される系において、真空の対称性の破れを特徴づける物理を理解することは、一つの重要な目標である。そのために、ギンツブルグ-ランダウ的な対称性に基づく手法に始まり、平均場近似のような自己無撞着的な真空の再定義、カイラル摂動論のような低エネルギー有効理論等様々な手法が考案されてきた。その中でも、系の詳細に依らず一般的に成り立つ手法として、スペクトル関数に対する和則があげられる。和則は、カレント相関のスペクトル関数に重みを付けて積分する (和を取る) ことで、スペクトルに現れる collective mode や composite particle の共鳴と真空の構造に関連する期待値 (オーダーパラメータ)、つまり低エネルギーの物理と真空の構造を結びつける定量的な関係式を与える。例えば QCD では、カイラル対称性の破れがハドロンの物理を支配するという描像を定量的に理解するための式として、和則は広く受け入れられてきた。しかし、QCD における和則は、Shifman 達に始まる演算子積展開 (OPE) と分散関係に基づいた、ダイアグラム的に与えられる和則であり [1]、強結合性や強い非線形性が効いているとされる QCD の真空において本当に成り立つかは決して自明ではなく、先の描像や格子ゲージ理論などの他の手法による計算との整合性からその正しさが保証されているのが現状である。また、この導出では和則本来の強みである相互作用の詳細に依らずに成り立つという性質も明らかではない。

ゲージ場の量子論上で、ダイアグラムに頼らず厳密な和則を構築するための一般的な枠組みを与え、その枠組みの中で QCD 和則の正しさや、動力学の何が効いて和則が成り立つのかを解明することは、対称性の破れが低エネルギー物理を支配するという描像を、有効的な自由度についてのラグランジアンからでなく、素な自由度についてのラグランジアンから理解することができる非常に重要な仕事である。

本研究では、Kugo、Ojima による BRST 不変ラグランジアンに基づく非可換ゲージ理論の正準量子化と [2, 3]、相対論的系に拡張した Thomas-Reiche-Kuhn 和則をもとに、既存の QCD 和則を包含するような、対称性の破れと低エネルギー物理の定量的関係式を非摂動的に導出する一般的な枠組みの構築をおこなった。

2. 理論形式と応用

次のような保存カレントの相関に対するスペクトル関数 $\rho(q^2)$ を考える。

$$\rho(q^2) = -\frac{1}{3q^2}\sum_p (2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p)\langle 0|j_\mu(0)|p\rangle\langle p|j^\mu(0)|0\rangle \tag{1}$$

スペクトル関数に重みを付けて積分を行い、ハミルトニアンとの交換関係を用いて表すと次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{2\pi}\, s^n\rho(s) = -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3x\, \langle 0|[\underbrace{\cdots[j_\mu(0,\vec{x}),\mathrm{H}]\cdots,\mathrm{H}]}_{2n-1},j^\mu(0)]|0\rangle \tag{2}$$

ここで、一般性を失わずに積分を q^0 軸方向だけで表せること ($\vec{q}=0$ のフレームを取れること) を用いた。また、$2n-1$ はハミルトニアンと交換関係を取る回数を表す。このままの表式では、場の量子論に特有の発散が現れてしまうので、次のように高エネルギーでの漸近形を引き算することで繰り込みを行う。

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{2\pi}\, s^n(\rho(s)-\rho^{\mathrm{con}}(s)) = -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3x\, \langle 0|[\underbrace{\cdots[j_\mu(0,\vec{x}),\mathrm{H}]\cdots,\mathrm{H}]}_{2n-1},j^\mu(0)]|0\rangle_{\mathrm{NP}} \tag{3}$$

ここで、NP は真空期待値から摂動論的寄与を引き算したことを表す。これにより、スペクトル関数の積分では低エネルギー部分が主要な寄与となり、低エネルギーの共鳴と真空の構造を結びつける関係式を与える和則となる。また、右辺の交換関係は、正準形式の非可換ゲージ場の量子論を用いて計算される。

QCD の動力学を決めるハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{H}_{\rm eff} = -gA_0^a\bar{q}_f\gamma^0 t^a q_f + \bar{q}_f(-i\gamma^k D_k - m_f)q_f + \frac{1}{2}((\vec{E}^a)^2 + (\vec{H}^a)^2) + \vec{E}^a\cdot(\nabla A_0^a - gf_{abc}\vec{A}^b A_0^c) + \partial_k B^a A^{ak} - \frac{\alpha}{2}(B^a)^2 + i\Pi_c^a\Pi_{\bar{c}}^a + gf_{abc}\Pi_c^a A_0^b c^c - i\partial^k\bar{c}^a D_k^{\rm ad}c^a \tag{4}$$

順番に、クォークとグルーオンの運動エネルギーと相互作用エネルギー項、ガウスの法則による束縛項と共変ゲージによるゲージ固定項、ゴーストの寄与を表す。ここで、$q_f, \bar{q}_f, A_\mu^a, B^a, E_k^a, c^a, \bar{c}^a, \Pi_c^a, \Pi_{\bar{c}}^a$ はそれぞれクォーク、グルーオン、ゴーストのハイゼンベルグ演算子であり、正準交換関係 $\{q,\bar{q}\}, [A^a, B^b], [A_i^a, E^{bj}], \{c^a, \Pi_c^b\}, \{\bar{c}^a, \Pi_{\bar{c}}^b\}$ を満たす。これに物理的状態は BRST 電荷を持たないという条件を加えたものが、QCD の正準形式の全てである。

以上の、繰り込まれたモーメント型の和則と QCD の正準形式 (交換関係) を用いて、全ての和則は与えられる。まず、この手法が正しく働くことを確認するために、QCD の交換関係だけから Weinberg 和則が導けることを示す。Weinberg 和則はベクターカレント $j_\mu^{(\rho)} = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)$、軸性ベクターカレント $j_\mu^{(A_1)} = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma^5 d)$ の差についての和則であり、定義からカイラル対称性が、明らかに、もしくは動力学的に破れている場合のみ 0 でない値を持つ。一次のモーメントについての和則は、カレントとハミルトニアンとの交換関係を一つだけ含み、次のようにクォークの双線形演算子のみを右辺に持つ。

$$\int_0^\infty \frac{{\rm d}s}{2\pi}\, s(\rho_A(s) - \rho_V(s)) = \langle 0|\frac{4m_u}{3}\bar{u}u + \frac{4m_d}{3}\bar{d}d|0\rangle \tag{5}$$

この結果は、OPE から与えられる和則とも一致する。次に、二次のモーメントの和則は、ハミルトニアンとの交換関係 3 回から与えられ、次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{{\rm d}s}{2\pi}\, s^2(\rho_A(s) - \rho_V(s)) = \langle 0|2im_q^2\bar{q}\overleftrightarrow{\not{D}}q - \frac{16}{3}m_q^3\bar{q}q + \frac{\pi}{2}\alpha_s(\bar{u}_L\gamma_\mu t^a u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu t^a d_L)(\bar{u}_R\gamma^\mu t^a u_R - \bar{d}_R\gamma^\mu t^a d_R)|0\rangle \tag{6}$$

右辺にはクォークの 4 点凝縮が現れ、その係数は OPE の結果とも一致する。さらに、交換関係による和則は OPE による手法では近似的に無視されているクォーク質量の高次にあたる双線形項を含んでいる。我々の手法では、クォーク質量が小さいという仮定を必要とせず、厳密に右辺を計算することができ、交換関係による和則の強みが現れている。これらの項は、軽いクォーク以外についての和則、例えばストレンジクォークについての和則では無視できないものである。

次に、ベクターカレントの和則に移り、一次のモーメントについて深く考察する。単純に交換関係のみから得られる裸の和則は次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{{\rm d}s}{2\pi}\, s\rho_V(s) = \langle 0|\frac{i}{3}\bar{u}\overleftrightarrow{D_k}\gamma^k u - m_u\bar{u}u + (u \Leftrightarrow d)|0\rangle \tag{7}$$

ここで、k は空間方向に走る。次に正則化関数を導入し、繰り込みを考える。Fujikwa によるダイアグラムによらないアノマリーの導出で指摘されたように [4]、明白に 4 次元を保って正則化する理論では、正則化された (裸の) 運動方程式は次のように与えられる。

$$\langle 0|\bar{u}(i\not{D} - m)u]|0\rangle = {\rm Tr}\int \frac{{\rm d}^4k}{(2\pi)^4}{\rm e}^{-ikx} f\Big(\frac{\not{D}^2}{M^2}\Big){\rm e}^{ikx} \tag{8}$$

ここで、f はゲージ共変的な正則化関数である。M が十分大きいとして展開すると、運動方程式はスペクトル関数の連続部分として和則の左辺に吸収される 4 次発散する項と、ゲージ場の強さ G^2 で表される有限項で表される。この結果を和則に代入することで繰り込まれた和則が得られ、ベクターカレントに現れる ρ メソンの共鳴は、カイラル凝縮やグルーオン凝縮と関係付けられる。ここでの重要な点は、和則の両辺の発散を単純には消去できないことである。明白な 4 次元で、ゲージ共変性を保つように正則化関数を導入すると、G^2 のように、非自明な有限項が現れることがある。現在、和則の表式の正則化関数への依存性や OPE から得られる結果との整合性を検討している。

さらに、我々の手法の利点として、OPE では計算されていない、半整数のモーメント型の和則を与えることができる。

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{2\pi}\, s^{\frac{n}{2}}\rho(s) = -\frac{1}{3V}\langle 0|\{\underline{[\cdots[Q_\mu, \mathrm{H}]\cdots, \mathrm{H}]}_{n-1}, Q^\mu\}|0\rangle \tag{9}$$

ここで、$Q^\mu = \int \mathrm{d}^3x\, j^\mu(0,\vec{x})$。例えば、$n=\frac{1}{2}$ の和則は系の電荷揺らぎに関係した和則となる。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{2\pi}\sqrt{s}\rho(s) &= -\frac{2}{3V}\langle 0|Q_\mu Q^\mu|0\rangle \\ &= -\frac{8}{3V}\langle 0|Q_0^2|0\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

現在、これらの和則の物理的な応用についても検討をすすめている。

まとめ

QCD の交換関係のみから QCD 和則を導出する新しい枠組みを構築することができた。これは、Kugo、Ojima による非可換ゲージ理論の演算子形式と、適切な UV 発散の繰り込みにより、原子核理論における TRK 和則を相対論的に拡張したものを計算することで、低エネルギー物理と対称性の破れの定量的関係式を与える枠組みである。

QCD にこの手法を適用することで、厳密な Weinberg 和則を得ることができた。さらに、ベクターカレントや軸性ベクターカレントについての和則も得ることができるが、詳細は検討中である。さらに、OPE では調べられることのなかった半整数モーメントの和則の表式を与えることができた。

我々の方法で得られた表式の正則化関数への依存性、半整数モーメント和則の物理的応用、媒質中での QCD 和則への拡張、などは興味深い今後の研究課題である。

参考文献

[1] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979); **147** 448 (1979).

[2] T. Kugo and I. Ojima, Phys. Lett. B **73**, 459 (1978).

[3] T. Kugo, "ゲージ場の量子論 I,II" (培風館, 1989).

[4] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **44**, 1733 (1980); Phys. Rev. D **23**, 2262 (1981)